Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch

ALBERT NESTELER A-G, LAHR (BADEN)

Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch

Dritte vermehrte und verbesserte Auflage

1942

Vorwort

Der Zweck des Rechenschiebers ist es, schnell, und sicher alle Multiplikationen und Divisionen, das Quadrieren und Quadratwurzelziehen, die Berechnung von Kubikzahlen und Kubikwurzeln zu bewältigen. Ebenso leicht liefert er höhere Potenzen und Wurzeln, Logarithmen und trigonometrische Funktionen, sowie reziproke Werte, kurz, er ersetzt eine umfangreiche Tafel. Dabei wird das lästige Blättern und Interpolieren völlig vermieden, und wegen seiner handlichen Ausführung kann er leicht ins Bureau, auf die Baustelle und in den Hörsaal mitgenommen werden.

Diesen Vorzügen verdankt er die große Verbreitung, welche er in Ingenieurkreisen gefunden hat. Aber auch der Kaufmann, der Chemiker, der Holzhändler, der Elektrotechniker, der Student der Mathematik, der Geometer, kurz jeder, der mit Rechnungen viel zu tun hat, kann ihn gebrauchen und wird ihn, wenn er einmal mit ihm vertraut geworden ist, nie mehr aus der Hand lassen. Wenn auch die Grundgedanken unserer Systeme sich gleichbleiben, so ist doch durch eine Reihe von Spezialkonstruktionen dafür gesorgt, daß jedem Beruf gerade die Rechnungen, die für ihn besonders in Frage kommen, nach Möglichkeit erleichtert werden.

Die Genauigkeit des Rechenschiebers genügt stets den Erfordernissen der Praxis. Soll sie aus besonderen Gründen, z. B. in der Mathematik oder Astronomie, gesteigert werden, so gibt es einfache Regeln, welche dies bis zu jedem gewünschten Grade gestatten. Die betreffenden Paragraphen sind mit einem Sternchen versehen, da sie bei einer ersten Einführung in den Gebrauch des Rechenschiebers überschlagen werden können.

I. Kapitel
Genauigkeit und Abschätzung der Zahlen.

§ 1. Wertziffern.

Ein Gußstück wiege 34,136 kg, ein zweites 24,136 kg, ein drittes 34,126 kg. Das zweite ist erheblich leichter als das erste, das dritte nur ganz unwesentlich. In beiden Fällen ist eine Ziffer der ersten Zahl (3) um 1 vermindert worden. Die sehr verschiedenartige Wirkung dieser Verkleinerung beruht darauf, daß dies Schicksal eine Ziffer von verschiedenem Stellenwert betrifft.

Die Zahl, welche das Gewicht des ersten Gußstückes am wesentlichsten kennzeichnet, ist die am Anfang stehende 3, wir nennen sie die erste Wertziffer. Wird sie geändert, so macht das außerordentlich viel aus. Die zweite Wertziffer, hier 4, ist schon zehnmal weniger bedeutungsvoll, sie zählt die Einer, während die erste 3 die Anzahl der Zehner angibt. Die dritte Wertziffer ist 1, die vierte 3, die fünfte 6. Verringert man die erste Wertziffer um 1, so wird in unserm Beispiel das Gewicht um 10 kg geringer, wird die vierte Wertziffer um 1 kleiner gemacht, so sinkt das Gewicht nur um 10 Gramm, trotzdem die beiden Ziffern denselben Wert (3) haben.

Man kann das erste Gewicht auch gleich 34.136 g oder 0,034136 t schreiben. In beiden Fällen ist die erste Wertziffer 3; wir wollen also bei Zahlen, die mit 0, oder mit 0,0; 0,00 usw. beginnen, die Nullen am Anfang nicht mitzählen, sondern die erste von 0 verschiedene Zahl als erste Wertziffer bezeichnen. Entnimmt man z. B. einer Tafel lg 2 = 0,30103, so ist die erste Wertziffer 3, die zweite 0, die dritte 1, die vierte 0, die fünfte 3.

§ 2. Genauigkeit. Näherungswerte.

Die Anzahl der als richtig verbürgten Wertziffern gibt uns Aufschluß über die Genauigkeit der betreffenden Zahl. Bekanntlich wird der Umfang eines Kreises gefunden, wenn man den Durchmesser mit der Zahl π multipliziert. Man hat gefunden, daß π = 3,14159265358979... ist. Diese Zahl ist hier auf 15 Wertziffern genau angegeben worden. Man hat sie sogar auf mehr als 700 Wertziffern berechnet. Indessen ist es sinnlos, mit so hoher Genauigkeit zu rechnen, weil die höheren Wertziffern den Betrag der Zahl kaum merkbar beeinflussen, also in der Praxis ganz belanglos sind und nur unnötige Rechenarbeit verursachen.

Man arbeitet deshalb mit Näherungswerten. In alter Zeit mußte man es tun, weil die Methoden der Mathematik noch nicht genügend entwickelt waren, um genauere Zahlen zu liefern, in neuerer Zeit benutzt man sie, um bei der Rechnung keine unnötigen Zahlen mitzuschleppen. Solche Näherungswerte sind (das Zeichen $\sim$ bedeutet "ungefähr gleich"):

$\pi \sim 3$ (1. Könige 7, 23)

$\pi \sim (\frac{16}{9})^2 = \frac{256}{81} = 3{,}160...$ (Papyrus Rhind, 2000 Jahre v. Chr.)

$\pi \sim \frac{22}{7} = 3\frac{1}{7} = 3{,}1428...$ (Archimedes, 287-212 v. Chr.)

$\pi \sim 3{,}14$ (in der Technik üblich)

$\pi \sim \frac{333}{106} = 3{,}1415094...$

$\pi \sim \frac{355}{113} = 3{,}14159292...$

Der erste Wert hat nur eine, der zweite 2, der dritte und vierte 3, der fünfte 5, der sechste 7 richtige Wertziffern. Die Archimedische Zahl ist noch ein wenig genauer, als die in der Technik übliche, und dabei für das Kopfrechnen bequemer.

Hat ein Kreis den Durchmesser 1 m, so macht man bei Benutzung des ersten Näherungswertes bei der Berechnung des Umfanges einen Fehler (Wahrer Wert - Rechnung) von 14,2 cm; für die folgenden Näherungszahlen erhält man: 2) -1,84 cm; 3) -1,21 mm; 4) + 1,59 mm; 5) 0,0832 mm $\sim \frac{1}{12}$ mm; 6) -0,000267 mm $\sim \frac{1}{3750}$ mm.

In der Praxis kommt man fast ohne Ausnahme mit einer Genauigkeit von drei Wertziffern aus. Man verwendet z. B. bei graphischen Darstellungen Millimeterpapier, auf dem man eine Strecke von 4,2 cm genau, 4,24 cm nach Augenmaß (Abschätzung der Zehntelmillimeter) abtragen kann. Technische Messungen sind meistens prozentual viel ungenauer, bei Temperaturangaben erhält man, wenn nicht gerade Präzisionsinstrumente benutzt werden, und man noch Zehntelgrade schätzt, Angaben wie 12,4°, 17,7° usw., aber nicht 12,4021° u. dgl.

Die Angabe dreier Wertziffern genügt für die Praxis. Gerade diese Genauigkeit liefert der Rechenschieber, unnötige Zahlen läßt er automatisch verschwinden.

§ 3. Die Behandlung der Brüche.

Aufgaben, wie $2\frac{3}{17} - 1\frac{5}{19}$, $30\frac{1}{7} \cdot 3\frac{5}{16}$, $311\frac{1}{6} : 18\frac{5}{29}$ u. dgl sind recht lästig. Sie werden viel einfacher, wenn man die gewöhnlichen Brüche in Dezimalbrüche verwandelt. Das ist bei Benutzung des Rechenschiebers eine Kleinigkeit[1]. Es ist wirklich kein Zufall, daß die Maßeinheiten, welche in neuerer Zeit eingeführt wurden, wie Meter, Kilogramm u. dgl. dezimal geteilt wurden, da man mit Dezimalbrüchen ebenso bequem rechnen kann, wie mit ganzen Zahlen, wenn man nur die einfachen Regeln über die Stellung des Kommas, welche in jedem Rechenbuch stehen, richtig anwendet. Hier darf allerdings nie ein Versehen vorkommen, weil dadurch das Ergebnis, dessen Ziffern richtig gefunden sein mögen, gleich zehn- oder hundertmal zu groß oder zu klein wird. Würde z. B. jemand den Inhalt eines Kreises vom Radius 4 cm ($r^2\pi$) gleich 48 setzen, so würde das Ergebnis von der Wahrheit (J = 50,265...) wegen des ungenauen Näherungswertes der Zahl π ($\pi \sim 3$) natürlich abweichen, aber der Fehler ist nicht entfernt so schlimm, als daß man J = 5,0265 oder 502,65 setzen würde.

§ 4. Kennziffer und Stellenzahl.

Die erste Ziffer einer bestimmten Zahl spielt in ihr die wichlgste Rolle. Ob die Zimmertemperatur 12,3° oder 22,3° ist, das bedeutet einen großen Unterschied. Die zweite Wertziffer hat eine zehnmal so geringe Bedeutung usf.

Vergleicht man aber zwei verschiedene Zahlen miteinander; so kommt es auf die Stellenzahl an. Hat z. B. jemand 13457 RM., ein anderer 134,57 RM., so werden beide verhältnismäßig dieselbe Freude empfinden, wenn eine unerwartete Einnahme die erste Wertziffer von 1 auf 2 emporschnellen läßt. Absolut genommen hat aber der erste einen Gewinn von 10000 RM. zu buchen, der zweite nur einen von 100. Das Vermögen des ersten wird durch eine fünfstellige Zahl ausgedrückt, das des zweiten nur durch eine dreistellige. Wir wollen einer Zahl, welche mit Einern beginnt, die Stellenzahl (*SZ*) 1 geben, fängt sie mit Zehnern an, so sei ihre Stellenzahl 2, bei Hunderten 3 usw. Bei 0,4 setzen wir *SZ* = 0, bei 0,032 *SZ* = -1, bei 0,00625 *SZ* = -2 usf. Bei echten Brüchen verstehen wir also unter der Stellenzahl die Anzahl der Nullen, welche rechts vom Komma vor der ersten von 0 verschiedenen Ziffer stehen, wir müssen sie aber mit einem negativen Vorzeichen versehen. Beispiele:

Zahl	3,14	273	0,434	0,009	86400
Stellenzahl	1	3	0	-2	5
Kennziffer	0	2	-1	-3	4

Die in der letzten Rubrik aufgeführte Kennziffer entsteht einfach dadurch, daß wir die Stellenzahl um 1 vermindern.

§ 5. Eine bequeme Schreibweise der Zahlen.

Man darf wohl als bekannt voraussetzen, daß unter a^2 das Produkt $a \bullet a$ verstanden wird, unter a^3 der Ausdruck $a \bullet a \bullet a$ usw. Es ist zweckmäßig, $a^1 = a$ zu setzen, $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ usf. Nimmt man für a den Wert 10 an, so ist

$10^0 = 1$; $10^1 = 10$; $10^2 = 100$; $10^3 = 1000$; $10^4 = 10000$ usf.

$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$; $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0{,}01$; $10^{-3} = 0{,}001$; $10^{-4} = 0{,}0001$ usw.

Die Zahl 318,25 = 300 + 10 + 8 + 0,2 + 0,05 kann also geschrieben werden: $3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$. Aus diesem Beispiel ersieht man, warum die Kennziffern so festgesetzt werden, wie es eben geschah. Man kann auch sagen: $318{,}25 = 3{,}1825 \cdot 10^2$ oder $31{,}825 \cdot 10^1$ oder $318{,}25 \cdot 10^0$ oder $3182{,}5 \cdot 10^{-1}$ oder $31825 \cdot 10^{-2}$ oder $318250 \cdot 10^{-3}$. Es ist meistens am zweckmäßigsten, die vor der Potenz von 10 stehende Zahl einstellig anzunehmen, also etwa $0{,}062 = 6{,}2 \cdot 10^{-2}$ zu setzen; ebenso $6370000 = 6{,}37 \cdot 10^{6}$.

§ 6. Abschätzung.

Oft will man nur einen ganz ungefähren Näherungswert wissen, besonders dann, wenn die Zahlen, welche der Aufgabe zugrunde liegen, recht unsicher sind, oder wenn es sich um eine Ueberschlagsrechnung handelt. In diesem Fall genügt es, wenn man alle Zahlen auf eine, höchstens auf zwei Wertziffern abrundet. Gerade bei Abschätzungen ist die soeben vorgeschlagene Schreibweise der Zahlen, welche die Potenzen von 10 benutzt, sehr zweckmäßig.

§ 7. Beispiele für Abschätzungen.

Beispiel 1. Ein Grundstück ist 32 m lang und 15 m breit. Die Baugrube soll 1,8 m tief sein. Wieviel wiegt ungefähr die herauszuschaffende Erde, wenn 1 cdm davon 1,9 kg wiegt?

Lösung: Der Inhalt der Grube ist $32 \cdot 15 \cdot 1{,}8$ cbm. 1 cbm Erde wiegt 1,9 t, also die gesamte Erdmasse $32 \cdot 15 \cdot 1{,}8 \cdot 1{,}9$ t. Abschätzung: $3 \cdot 10^1 \cdot 1{,}5 \cdot 10^1 \cdot 2 \cdot 2 = 18 \cdot 10^{2} = 1800$ t. Da 1 t = 20 Zentner ist, müssen ungefähr 36 000 Zentner Erdreich entfernt werden. Der genaue Wert ist 1641,6 t = 32832 Zentner. Die Größenordnung ist also bei der Abschätzung richtig getroffen, sie illustriert die hohen Kosten der Erdbewegung.

Beispiel 2. Das Licht legt in jeder Sekunde 300000 km zurück Welche Strecke durchläuft es in einem Jahr?

Lösung: Eine Minute hat 60 sec, 1 Stunde 3600 sec, 1 Tag $24 \cdot 3600$ sec, ein Jahr $365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600$ sec. Um die gesuchte Entfernung x zu erhalten, muß man die Zahl der Sekunden mit 300000 multiplizieren, also ist

$$x = 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 300\,000 \text{ km}$$

$$x = 3{,}6525 \cdot 10^2 \cdot 2{,}4 \cdot 10^1 \cdot 3{,}6 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^5 \text{ km}$$

$$x \sim 4 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^1 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^5 \text{ km} = 96 \cdot 10^{11} \text{ km} = 9{,}6 \cdot 10^{12} \text{ km}.$$

Der genauere Wert ist $9{,}467 \cdot 10^{12}$ km, also etwa 9½ Billionen km.

Beispiel 3. Die Erde ist angenähert eine Kugel vom Radius r = 6370 km. Ihr Eigengewicht ist etwa s = 5,5 g/ccm. Wieviel wiegt sie?

Lösung: Der Inhalt einer Kugel ist $\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$ ihr Gewicht also $\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot s$. Wollen wir die Lösung in Gramm haben, so müssen wir den Radius in cm umrechnen.
$6370 \text{ km} = 6{,}370 \cdot 10^3 \text{ km} = 6{,}370 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \text{ m} = 6{,}370 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^2$ cm. Das Gewicht ist:

$G = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (6{,}37 \cdot 10^8)^3 \cdot 5{,}5$ Gramm. Wir setzen $\pi \sim 3$, also $\frac{4}{3} \cdot \pi \sim 4$, $g \sim 4 \cdot 6{,}37^3 \cdot 10^{24} \cdot 6$. Da $6 \cdot 6 = 36$, können wir $6{,}37^2 \sim 40$ setzen $6{,}36^3 \sim 40 \cdot 6{,}37 \sim 250$. $g \sim 4 \cdot 250 \cdot 10^{24} \cdot 6 = 6000 \cdot 10^{24} = 6 \cdot 10^{27}$ g.

Das sind $6 \cdot 10^{24}$ kg oder $6 \cdot 10^{21}$ t (6000 Trillionen Tonnen). Der genauere Wert ist $5{,}95 \cdot 10^{21}$ t.

Beispiel 4. Wieviel wiegt die Lufthülle der Erde, wenn auf 1 qcm ihrer Oberfläche ein Druck von 1,033 kg ausgeübt wird?

Lösung: Die Oberfläche einer Kugel ist $4 \cdot r^2 \cdot \pi$, also in qcm: $O = 4 \cdot \pi \cdot 6{,}37^2 \cdot 10^{16}$ qcm. Da auf jedem qcm 1033 g lasten, ist das gesuchte Gewicht

$$G_1 = 4 \cdot \pi \cdot 6{,}37^2 \cdot 10^{16} \cdot 1{,}033 \cdot 10^3 \text{ g} \sim 12 \cdot 40 \cdot 10^{16} \cdot 1 \cdot 10^3 \text{ g}$$

$G_1 \sim 480 \cdot 10^{19} \sim 5 \cdot 10^{21}$ g (genauer $G_1 \sim 5{,}27 \cdot 10^{21}$ Gramm).

Natürlich ist die Erdmasse viel schwerer als ihre Lufthülle, das Verhältnis ist ungefähr

$\frac{6 \cdot 10^{27}}{5 \cdot 10^{21}} \sim 10^6 = 1$ Million. (Der genauere Wert ist $\frac{5{,}95 \cdot 10^{27}}{5{,}27 \cdot 10^{21}} = 1{,}13 \cdot 10^6$

Beispiel 5. Ein stromführender Draht soll den Querschnitt 6 qmm haben. Jemand entnimmt einer technischen Tabelle, daß der Durchmesser d = 8,74 mm ist. Stimmt das?

Lösung: $Q = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$, also in unserm Fall $Q \sim \frac{3 \cdot 9^2}{4} \sim \frac{3 \cdot 80}{4} = 60$.

Das Ergebnis ist falsch, es gehört zu Q = 60 qmm. Der richtige Wert ist d = 2,76 mm.

§ 8. Wie erhält man größere Genauigkeit?

Man könnte einwenden, daß die eben gelehrte Methode des Abschätzens nur sehr rohe Resultate liefere. Mehr soll sie aber auch gar nicht leisten; will man größere Schärfe haben, so wird man an die Regeln des gewöhnlichen Rechnens denken. Vereinigen wir einmal die willkürlich angenommenen Zahlen 412,9 und 3,2655 durch die vier Grundrechnungsarten! Die Addition und Subtraktion ist spielend ausgeführt:

```
1.        412,9           2.        412,9
         +3,2655                   -3,2655
        416,1644                  409,6345
```

Enthalten die Ergebnisse mehr Wertziffern, als man braucht, so ist die Abrundung im Augenblick geschehen; auf vier Wertziffern genau erhält man 416,2 und 409,6; auf drei Wertziffern 416 und 410.

Addition und Subtraktion machen also keine neuen Rechenmethoden notwendig, sie sind schon einfach genug. Nun aber Multiplikation und Division! Wir rechnen zunächst so, wie wir es in der Schule gelernt haben:

```
3.  412,9             4.  412,90 : 3,2655 = 126,4431...
    X 3,2655              326,55
        20645               86350         140800
       20645                65310         130620
      24774                 210400          101800
     8258                   195930           97965
   12387                      144700          38350
   1348,32495                 130620          32655
                                140800          5695
```

§ 9. Die Notwendigkeit bequemer Rechenhilfsmittel.

Wir sehen, daß diese beiden Rechnungsarten eine gewaltige Mehrarbeit erfordern, die rein mechanisch, geisttötend und daher auch wirtschaftlich unrationell ist. Wie leicht kann ein einziger Rechenfehler sich einschleichen und die ganze Mühe vergeblich machen! Beim Potenzieren ist es noch schlimmer, da es eine wiederholte Multiplikation ist und erst recht bei der Umkehrung dieser Operation, dem Wurzelziehen oder Radizieren.

Alle diese Rechnungsarten sind von hervorragender praktischer Bedeutung; Flächen- und Körperberechnungen, Umwandlung von Maßen, Gewichten und Geldsorten der verschiedenen Länder, die Ermittlung der einfachen Zinsen und der Zinseszinsen usw. erfordern Multiplikation und Division, oft auch Potenzieren und Radizieren.

So hat man sich schon lange nach Hilfsmitteln umgesehen, welche dem Rechner den größten Teil seiner mühsamen Arbeit abnehmen. Die Praxis benutzt fast ausschließlich

Nestlers Rechenschieber.

Derartig fein durchkonstruierte Instrumente sind nicht auf einmal fertig da; sie haben ihre Vorläufer, nämlich die Logarithmentafeln, welche früher fast ausschließlich zur Erleichterung des Rechnens dienten. Um die Einrichtung des Rechenschiebers zu verstehen, muß man die wichtigsten Sätze der Logarithmenrechnung kennen. Sie seien hier ohne Beweise (die sich in jedem Lehrbuch der elementaren Algebra finden) angegeben.

II. Kapitel
Das Rechnen mit Logarithmen.

§ 10. Das Aufsuchen des Logarithmus.

Der Logarithmus einer Zahl besteht aus zwei Teilen, der Kennziffer und dem Dezimalbruch (Mantisse). Wie man die Kennziffer findet, ist auf S. 2 schon angegeben, die Mantissen sind ein für allemal berechnet und in den Logarithmentafeln niedergelegt. Da diese Dezimalbrüche im allgemeinen nie abbrechen, so müssen sie abgerundet werden. je nach der Anzahl der Wertziffern, die dabei verbürgt werden, unterscheidet man vier-, fünf-, . zehn- und mehrstellige Tafeln. Die vielstelligen Tafeln sind genauer, aber auch bei weitem unbequemer als die, welche nur 4 oder 5 Wertziffern haben. Aber auch deren Genauigkeit ist in der Praxis nur selten erforderlich, meist genügen, wie schon früher erwähnt, drei Wertziffern.

Wir teilen hier einen kleinen Auszug aus einer vierstelligen Tafel mit:

Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Mantisse	0	3010	4771	6021	6990	7782	8451	9031	9542	0	0414	0792	1139
Zahl	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
Mantisse	1461	1761	2041	2304	2553	2788	3010	3222	3424	3617	3802	3979	

Will man z. B. lg 20 finden, so entnimmt man der Tafel die Mantisse 3010; die Kennziffer ist 1, also erhält man lg 20 = 1,3010. Entsprechend ist lg 2 = 0,3010; lg 200 = 2,3010; lg 2000 = 3,3010; lg 0,2 = 0,3010 - 1; lg 0,02 = 0,3010 - 2 usw. Dieselbe Ziffernfolge (hier 20...) hat dieselbe Mantisse (3010); der Unterschied der absoluten Größe (0,2; 2; 200 u. dgl.) wird allein durch die Kennziffer zum Ausdruck gebracht.

Man kann natürlich aus einer Logarithmentafel auch die Zahl (Numerus) finden, die zu einem gegebenen Logarithmus gehört.

§ 11. Multiplikation mit Logarithmen.

Satz 1. Der Logarithmus eines Produktes wird gifunden, indem man die Logarithmen der Faktoren addiert.

$$[\lg (a \cdot b) = \lg a + \lg b]$$

Z. B. ist lg 8 = 0,9031; lg 2 = 0,3010. Die Summe beider ist 1,2041. Das ist aber gerade lg 16. Ist $x = 4 \cdot 50$, so ist $\lg x = \lg 4 + \lg 50 = 0{,}6021 + 1{,}6990 = 2{,}3011$. Das ist lg 200. Die kleine Abweichung der letzten Dezimale ist dadurch entstanden, daß wegen der Abrundung die letzte Ziffer bei beiden Logarithmen etwa zu groß angegeben wurde (genauere Werte sind 0,60206 und 1,69897). Die kleinen Fehler haben sich summiert. Natürlich macht eine derartige winzige Abweichung praktisch nichts aus.

Man bilde selbst weitere Beispiele!

Satz 1a. Ist eine Zahl zehnmal so groß wie eine andere, so ist ihr Logarithmus um 1 höher.

Es ist z. B. $\lg 40 = \lg (4 \cdot 10) = \lg 4 + \lg 10 = 0{,}6021 + 1 = 1{,}6021$, dagegen ist lg 0,4 = 0,6021 - 1. Unsere Ausführungen über Kennziffer und Mantisse werden also durch Satz 1a bestätigt, Kennt man durch Abschätzung den ungefähren Wert einer Zahl, so genügt die Angabe der Mantisse allein. Es sei etwa bekannt, daß bei einer Aufgabe die gesuchte Zahl x ungefähr 200 ist, ihr Logarithmus ...,2788. Dann kann nur x = 190 in Frage kommen (nicht 1,9 oder 19). Wir wollen daher in Zukunft die Kennziffern im allgemeinen (nicht immer!) unberücksichtigt lassen und nur mit den Mantissen rechnen. Die absolute Größe der Zahl läßt sich stets durch Abschätzung finden.

§ 12. Division mit Logarithmen.

Satz 2. Der Logarithmus eines Bruches wird gefunden, wenn man den Logarithmus des Zählers um den des Nenners vermindert.

Beispiele: **6.)** $\lg \frac{24}{8} = \lg 24 - \lg 8 = 1{,}3802 - 0{,}9031 = 0{,}4771$. Dies ist genau lg 3, wie es nach unserm Satze auch sein muß. **7.)** $\lg \frac{80}{5}$ ist, wenn wir nur die Mantissen hinschreiben, = ...,9031 - ...,6990 = ...,2041. Hierzu gehören die Zahlen ...,0,016; 0,16; 1,6; 16; 160; 1600... Wie aber die Abschätzung ergibt (100 : 5 = 20), kommt nur 16 in Betracht. **8.)** $\lg \frac{1}{273} = \lg 1 - \lg 273 = 0 - 2{,}4362$.Wir setzen, 0 = 3 - 3, also

$\lg \frac{1}{273}$ = 3 - 2,4362 - 3 = 0,5638 - 3. Wegen ihrer Kennziffer (-3) beginnt die gesuchte Zahl mit 0,00. Die kleine Tabelle auf S. 5 zeigt, daß die folgende Ziffer 3 ist (lg 3 = ...,4771). Eine ausführlichere Tafel liefert $\frac{1}{273}$ = 0,003663. Ohne Kennziffer: lg 1 = ...,0000, lg 273 = ...,4362; $\lg \frac{1}{273}$ = ...,5638. (Man denkt sich bei lg 1 links vom Komma eine Zahl, die so groß ist, daß die Subtraktion ausgeführt werden kann). Abschätzung: 1 : 300 = 0,00333...

Satz 2a. Ist eine Zahl zehnmal so klein wie eine andere, so ist der Logarithmus um 1 geringer.

DieserSatz sagt eigentlich nichts weiter aus, wie1a, er läßt sich aber auch aus 2 herleiten, wenn man b = 10 setzt.

§ 13. Ergänzungslogarithmen.

Unter **Ergänzungslogarithmen** wollen wir Zahlen verstehen, welche die Logarithmen zu 1 vervollständigen. Von der Angabe der links vom Komma stehenden Zahl sehen wir ab; wir beschäftigen uns nur mit der Mantisse. So erhält man aus unserer Tafel auf S. 5 folgende Zusammenstellung:

Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ergänzungslogarithmus	0	6990	5229	3979	3010	2218	1549	0969	0458	0
Zahl	11	12	13	14	15	19	20	18	19	20
Ergänzungslogarithmus	9586	9208	8861	8539	8239	7212	6990	7447	7212	6990
Zahl	21	22	23	24	25					
Ergänzungslogarithmus	6778	6576	6383	6198	6021					

§ 14. Division mit Ergänzungslogarithmen.

Satz 3. Der Logarithmus eines Bruches wird gefunden, indem man zu dem Logarithnrus des Zählers den Ergänzungslogarithmus des Nenners hinzufügt.

Gehört zu einer Zahl a der Logarithmus lg a, so ist der Ergänzungslogarithmus E = 1 - lg a = lg 10 - lg a = $\lg \frac{10}{a}$. Es ist also lg *b* + *E* = lg b + lg 10 - lg a = lg (10 b) - lg a = $\lg (\frac{10b}{a})$. Diese Zahl unterscheidet sich aber nur durch die Kennziffer (die wir doch unbeachtet lassen wollten) von $\lg \frac{b}{a}$. Der Logarithmus des Bruches $\frac{b}{a}$ wird also gefunden, wenn man den Logarithmus des Zählers (lg *b)* um den Ergänzungslogarithmus E des Nenners a vermehrt.

Besonders einfach ist die Sache, wenn *b = 1* ist. Den Ausdruck $\frac{1}{a}$ nennt man den reziproken Wert von a. Der Logarithmus des reziproken Wertes von a ist einfach der Ergänzungslogarithmus E, welcher zu a gehört, denn die Zahl, zu der er im allgemeinen Fall hinzuaddiert werden muß, lg *b,* ist hier gleich Null.

Beispiel 9. Wie groß ist x= $\frac{24}{15}$?

Lösung: *b* = 24, a = 15. Aus der Tabelle auf S. 5 findet man lg *b = ...,3802*. Aus S. 6 entnimmt man E = ...,8239. Die Addition der beiden Zahlen liefert lg x = ...,3802 + ...,8239 = ...,2041. Dazu gehört als Numerus 0,16; 1,6; 16; ...; da aber $\frac{30}{15}$ = 2 ist so kommt nur x = 1,6 in Betracht.

Beispiel 10. Es soll x = $\frac{1}{5}$ mit Ergänzungslogarithmen gefunden werden.

Lösung: Zu a = 5 gehört E = 3010; der zugehörige Numerus ist nach der Tabelle auf S. 5 gleich 2; also $\frac{1}{5}$ = 0,2.

Beispiel 11. Wie groß ist x = $\frac{1}{7}$?

Lösung: E = ...,1549. Eine vollständige Tafel der vierstelligen Logarithmen belehrt uns, daß dazu x = 0,1429 gehört. Sie besitzen diese Tafe! nicht? Unser Rechenschieber macht sie entbehrlich. (§ 86.)

§ 15. Multiplikation mit Ergänzungslogarithmen.

Satz 4. Der Logarithmus eines Produktes wird dadurch gefunden, daß man den Logarithmus des einen Faktors um den Ergänzungslogarithmus des andern vermindert.

Beispiel 12. $x = 20 \cdot 4$

Lösung. $\lg x = \lg (20 : \frac{1}{4}) = \lg 20 - \lg (\frac{1}{4})$. Der erste Bestandteil ist nach S. 5 ....,3010. Der zweite Term ist der Ergänzungslogarithmus von 4; man erhält nach S. 6: E = ...,3979. Somit ist lg x= ...,3010 - ...,3979 = ...,9031. Zu diesem Logarithmus gehört nach S. 5 der Numerus x = 8.

§ 16. Potenzieren mit Logarithmen.

Satz 5. Der Logarithmus einer Potenz (a^b) wird erhalten, wenn man den Logarithmus der Grundzahl (a) mit dem Exponenten (b) multipliziert.

$$[\lg (a^b) = b \cdot \lg a]$$

Eine Potenz ist ein Produkt aus gleichen Faktoren; vgl. S. 2; den gemeinsamen Faktor nennt man Grundzahl, die Anzahl der Glieder Exponent. So ist in $a^2 = a \cdot a$ und in $a^3 = a \cdot a \cdot a$ die Zahl a Grundzahl, während der Exponent im ersten Fall 2, im zweiten 3 ist. In der Praxis kommen eigentlich nur zweite und dritte Potenzen vor mit alleiniger Ausnahme der Zinseszins- und Rentenrechnung. Wendet man Satz 1 wiederholt an, so ergibt sich die in Satz 5 ausgesprochene Behauptung. Z. B. ist $\lg (a^2) = \lg (a \cdot a) = \lg a + \lg a = 2 \cdot \lg a$; $\lg (a^3)=\lg (a \cdot a \cdot a) = \lg a + \lg a + \lg a = 3 \cdot \lg a$ usf.

§ 17. Beispiele zum vorigen Paragraphen.

Beispiel 13. Man berechne die Potenzen von 2 logarithmisch, so-weit dies mit der Tafel auf S. 5 möglich ist!

Lösung: $\lg (2^2) = 2 \cdot \lg 2 = 2 \cdot 0{,}3010 = 0{,}6020$. Zu diesem Logarithmus gehört 4 als Numerus, also ist $2^2 = 4$. Man hat ferner $\lg (2^3) = 3 \cdot \lg 2 = 3 \cdot 0{,}3010 = 0{,}9030$; $2^3 = 8$; ebenso $\lg (2^4) = 4 \cdot 0{,}3010 = 1{,}2040$; $2^4 = 16$.

Beispiel 14. Ein englischer Zoll ist 2,54 cm, ein Quadratzoll ist der Flächeninhalt eines Quadrates, dessen Seitenlänge 2,54 cm ist. $F = 2{,}54^2$; $\lg F = 2 \cdot \lg 2{,}54 = 2 \cdot 0{,}4048 = 0{,}8096$. Die (vollständige) Logarithmentafel sagt uns jetzt, daß F= 6,45 qcm. ist. Ein Kubikzoll ist ein Würfel von 2,54 cm Seitenlänge; sein Inhalt ist $I = 2{,}54^3$; $\lg I = 3 \cdot 0{,}4048 = 1{,}2144$; I = 16,38 ccm.

Wer keine Logarithmentafel besitzt, wird noch einmal darauf hin-gewiesen, daß wir später (§ 86) Logarithmen mit Hilfe des Rechenschiebers finden lernen werden. Diese Bemerkung gilt auch für das folgende Beispiel.

Beispiel 15. Die mit unbewaffnetem Auge sichtbaren Sterne teilt man nach ihrer Helligkeit in 6 Größenklassen ein. Leuchtet ein Stern so schwach, daß man ihn gerade noch wahrnehmen kann, so reiht man ihn in die sechste Größenklasse ein. Ein Stern fünfter Größe strahlt 2,512 mal so hell, ein Stern vierter Größe ist 2,512 mal so hell wie einer der fünften Klasse usf. Es sei die Helligkeit eines Sternes 6. Größe = h. welche Helligkeit haben dann die Sterne der andern Klassen?

Lösung:

Sterngröße	6	5	4	3	2	1
Helligkeit	h	$2{,}512 \cdot h$	$2{,}512^2 \cdot h$	$2{,}512^3 \cdot h$	$2{,}512^4 \cdot h$	$2{,}512^5 \cdot h$
Logarith. berechnete Helligkeit	h	$2{,}512 \cdot h$	$6{,}31 \cdot h$	$15{,}85 \cdot h$	$39{,}81 \cdot h$	$100 \cdot h$

Ein Stern 1. Größe leuchtet genau 100 mal so hell wie ein Stern 6. Größe; die Verhältniszahl 2,512 ist so gewählt, daß gerade diese Beziehung herauskommt.

§ 18. Radizieren mit Logarithmen.

Satz 6. Man findet den Logarithmus einer Wurzel dadurch, daß man den Logarithmus der zu radizierenden Zahl durch den Wurzelexponenten dividiert.

$$[\lg (\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \cdot \lg a]$$

Die Quadratwurzel aus einer Zahl a, nennen wir sie $x = \sqrt{a}$, muß die Eigenschaft haben, daß ihr Quadrat wieder a ist, also $x^2 = a$. Z. B. ist $\sqrt{25} = 5$, denn $5^2 = 25$. Nach Satz 5 ist $2 \cdot \lg x = \log a$, also $\lg x = ½ \cdot \lg a$; $\lg \sqrt{a} = ½ \cdot \lg a$. Hat man $y = \sqrt[3]{a}$, so muß $y^3 = a$ sein; $3 \cdot \lg y = \lg a$; $\lg y = \frac{1}{3} \cdot \lg a$; $\lg(\sqrt[3]{a}) = \frac{1}{3} \cdot \lg a$. Ist der "Wurzelexponent" nicht mehr, wie bisher, 2 oder 3, ändert sich am Gedankengange nichts.

§ 19. Beispiele zum vorigen Paragraphen.

Beispiel 16. Wie groß ist $x = \sqrt[3]{0{,}008}$?

Lösung: $\lg x = \frac{1}{3} \cdot \lg 0{,}008 = \frac{1}{3} \cdot (0{,}9031 - 3) = 0{,}3010 - 1$. Hierzu gehört als Numerus $x = 0{,}2$. Probe: $0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}008$.

Beispiel 17. Eine würfelförmige Blechdose soll gerade ein halbes Liter kondensierte Milch fassen. Wie lang ist ihre Kante?

Lösung: Sie sei x cm. Da ½ l = 500 ccm ist, so gilt die Gleichung $x^3 = 500$; $x = \sqrt[3]{500}$; $\lg x = \frac{1}{3} \cdot \lg 500 = \frac{1}{3} \cdot 2{,}6990 = 0{,}8997$. $x = 7{,}938$ cm. Natürlich wird in der Praxis niemals eine derart hohe Genauigkeit erforderlich sein. Selbst wenn man eine Stelle streicht, also mit Rechenschiebergenauigkeit arbeitet ($x = 7{,}94$), wird der Werkmeister diese Angabe noch weiter, auf 7,9 oder 7,95 cm, abrunden.

Beispiel 18. Wie groß muß die Verhältniszahl γ genommen werden, damit in Beispiel 15 auf S. 7 die Helligkeit eines Sternes 1. Größe gerade 100 mal so groß ist, wie die eines Sternes 6. Größe?

Lösung: $\gamma^5 = 100$; $\gamma = \sqrt[5]{100}$; $\lg \gamma = \frac{1}{5} \cdot \lg 100 = \frac{1}{5} \cdot 2 = 0{,}4000$. Dazu gehört als Numerus 2,512.

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß beim Multiplizieren, Dividieren und Potenzieren die Kenntnis der Kennziffer entbehrt werden kann, wenn man nur durch Abschätzen die ungefähre Größe des Ergebnisses weiß.

Beispiele.

19. $x = \pi \cdot 6{,}5$	**20.** $x = \frac{1000}{25{,}40}$	**21.** $x = 0{,}3048^3$
$\lg \pi = {,}4971$	$\lg 1000 = 0000$	$\lg 0{,}3048 = 4840$
$\lg 6{,}5 = {,}8129$	$\lg 25{,}40 = 4048$	$\lg x = 3 \cdot \lg 0{,}3048 = 4520$
$\lg x = {,}3100$	$\lg x = 5952$	$x = 0{,}02831$
$x = 20{,}42$	$x = 39{,}37$	$(0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}027)$
(da 3 · 7) 21)	$\frac{1000}{25} = 40$	

Unser erstes Beispiel gibt den Umfang eines Kreises vom Durchmesser 6,5 an, das zweite die Zahl der englischen Zolle, welche in 1 m enthalten sind, das dritte sagt, daß ein englischer Kubikfuß 0,02831 cbm (= 28,31 l) ist.

Beim Wurzelziehen muß man aber auf die Kennziffer achten. Ist z. B. $x = \sqrt[3]{500}$, so dürfen wir nicht $\lg 500 = 1{,}6990$ oder $3{,}6990$ setzen; die Division durch 3 würde dann ganz falsche Logarithmen liefern.

§ 20. Vorteile und Nachteile des Logarithmenrechnens. Der Rechenschieber.

Der Vorteil des Logarithmenrechnens liegt darin, daß jede Rechenoperation um eine Stufe heruntergedrückt wird; an die Stelle der Multiplikation und Division tritt die viel einfachere Addition und Subtraktion; Potenzieren und Wurzelziehen wird auf Multiplizieren und Dividieren zurückgeführt. Die Logarithmentafel ist ferner innerhalb ihres Genauigkeitsbereiches absolut zuverlässig. Lästig ist das viele Blättern, auch bei einfachen Aufgaben. Ferner liefert eine fünf- und mehrstellige Tafel den Logarithmus einer Zahl und den zu einem Logarithmus gehörigen Numerus, das Ergebnis, im allgemeinen nicht unmittelbar, sondern erst nach einer Hilfsrechnung, der Interpolation.

Es kann daher nicht Wunder nehmen, daß der Rechenschieber, der das Prinzip der Logarithmenrechnung und damit ihre Vorteile aufnimmt, die Unannehmlichkeiten aber vermeidet, in der Neuzeit immer weitere Verbreitung findet. Der Ingenieur und der Techniker hat von jeher seine Vorzüge voll ausgenutzt der Kaufmann, der Holzhändler, der Chemiker, der Mathematiker, der Elektrotechniker, der Schüler würde sich selbst nur schaden, wenn er auf dieses Hilfsmittel verzichtete. Die besonderen Bedürfnisse eines jeden Berufs werden durch Spezialkonstruktionen befriedigt, welche die Firma Nestler zu billigen Preisen liefert.

III. Kapitel
Die Einrichtung des Rechenschiebers.

§ 21. Einiges aus der Geschichte des Rechenschiebers.

Die Erfindung der Logarithmen verdanken wir Jost Bürgi (1552-1632) und Lord Napier of Merchiston (1550-1617), ihre Vereinfachung Henry Briggs (1556-1630). Schon drei Jahre nach der Veröffentlichung der Briggs'schen Logarithmen beschrieb der Engländer Edmond Gunter den logarithmischen Rechenstab. Auf einem Brett waren verschiedene Skalen angebracht, die im wesentlichen nach denselben Grundsätzen konstruiert waren, wie die heute verwendeten. Zum Abtragen von Strecken wurde ein Zirkel benutzt. Diese Unbequemlichkeit wurde später durch Hinzufügung eines zweiten, verschiebbaren Brettes (heute "Zunge" genannt) behoben. Erst viel später kam der bewegliche Glasläufer hinzu, er wird zuerst 1837 erwähnt.

§ 22. Die Bestandteile des Rechenschiebers. Die Rechenwalze.

Jeder Rechenschieber besteht aus drei Teilen, dem Stab, der Zunge und dem Glasläufer. Der Stab hat eine Nut, in der sich die Zunge verschieben läßt; durch Metallfedern ist dafür gesorgt, daß diese Bewegung stets leicht und sicher vor sich geht. Ueber dem Stab läßt sich der Glasläufer verschieben, der einen Strich trägt. Für Kreisberechnungen sind auf manchen Läufern drei Striche eingeritzt.

Die Firma Nestler liefert Stäbe von 10, 12½, 15, 20, 25, 36, 50, und 100 cm Länge. Die Stäbe von geringer Länge können wegen ihrer Handlichkeit auf die Baustelle oder in die Bahn ohne die geringste Unbequemlichkeit mitgenommen werden. Diesen Vorteil muß man durch eine kleine Einbuße an Genauigkeit erkaufen. Rechenschieber von 50 bis 100 cm Länge liefern eine größere Genauigkeit, sind aber weniger bequem. Für den normalen Gebrauch ist die Länge von 25 cm am empfehlenswertesten. Wer eine besonders hohe Genauigkeit wünscht, wird mit einer Rechenwalze arbeiten; sie entspricht in den verschiedenen Ausführungen einem Rechenschieber von 1,60 m, 3,75 m und 12,50 m Länge. Man braucht sich nur einen langen Rechenschieber in eine genügend große Anzahl Teile zerschnitten und diese auf einer Trommel oder Walze angeordnet denken, so hat man dieses neuartige Instrument. Wer mit dem Rechenschieber umzugehen gelernt hat, findet sich spielend in die Handhabung der Rechenwalze.

§ 23. Rechenschieber Nr. 14, System Rietz, System Darmstadt

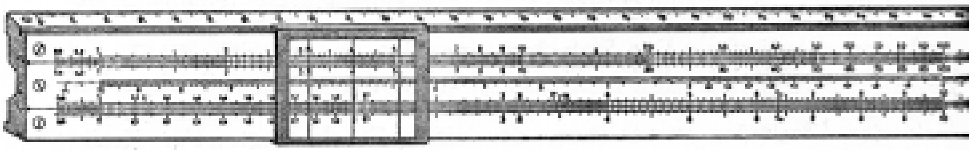
Denken wir uns jetzt einen Rechenschieber von 25 cm Länge. Kennen wir.seine Einrichtung, so beherrschen wir auch ohne weiteres die Instrumente, welche länger oder kürzer sind. Die Firma Nestler liefert eine Anzahl von Spezialkonstruktionen; wenn man -aber nur die wichtigsten Typen kennt, ist eine Umstellung auf die andern kinderleicht, umsomehr, als jedem Instrument eine besondere Gebrauchsanweisung beigegeben wird. Aus guten Gründen greifen wir drei Konstruktionen heraus:

1. den gewöhnlichen Schieber Nr. 14. Seine Skalen finden sich auf allen andern Rechenschiebern wieder; er ist sozusagen das Normalinstrument. Die Teilungen der anderen Instrumente erleichtern gewisse Aufgaben erheblich, lösen kann man sie aber alle auch schon mit Nr. 14.
2. System Rietz (Nr. 23). Mit diesem Apparat kann man dritte Potenzen und Wurzeln schneller finden als mit Nr. 14. Trigonometrische Rechnungen lassen sich etwas genauer ausführen.
3. System Darmstadt (Nr. 21). Dieser Schieber ist besonders geeignet zur schnellen und genauen Bestimmung von Potenzen mit beliebiger Grundzahl und beliebigem Exponenten, zur Ermittlung aller möglichen Wurzeln und der Logarithmen mit beliebiger Basis.

§ 24. Die Skalen des Schiebers Nr. 14.

Beginnen wir mit Nr. 14! Sein Aussehen zeigt Fig. 1.

Fig. 1.



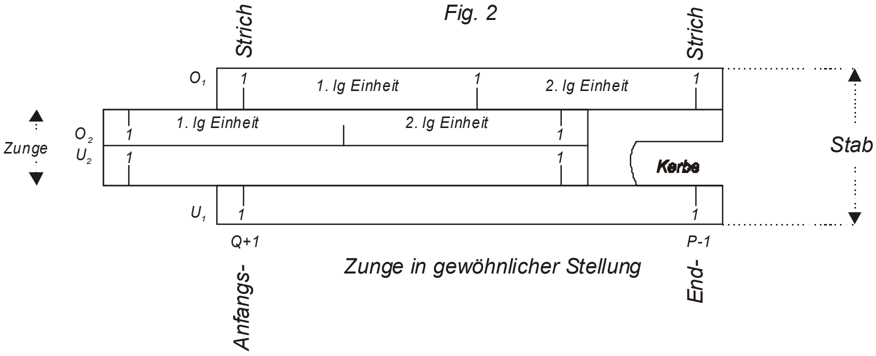
An der schrägen und senkrechten Kante ist eine einfache Millimeterteilung angebracht, die zu den Längenmessungen sehr erwünscht ist. Reicht sie nicht aus, so setzt man das linke Ende des Stabes an den Anfang der zu messenden Linie und zieht die Zunge so weit nach rechts heraus, bis ihr Ende mit dem Endpunkt der Linie zusammenfällt. Dann trifft das linke Ende der Zunge einen Teilstrich der in der Mitte des

Stabes liegenden Skala, welcher uns die gewünschte Länge sofort angibt. Einige Messungen an Papierformaten, Ziegelsteinen, Geschäftsbüchern, Möbeln usw. machen uns leicht mit der Handhabung vertraut. Auf der Rückseite des Stabes ist eine große Anzahl von Konstanten gegeben, die in der Praxis häufig vorkommen. Manche Tabelle wird dadurch ersetzt. Wir finden den Wert von π (vgl. S. 1) und andere in der Mathematik wichtige Zahlen, die Erdbeschleunigung. g, die Schallgeschwindigkeit, die Umwandlungszahl thermischer in mechanische Energie, Umrechnungszahlen von Zeiten und Längen, spezifische Gewichte, Formeln und Konstanten, die in der Festigkeitslehre gebraucht werden usf.

Doch diese Maßstabeinteilung und die Konstantensammlung sind nur nützliches Beiwerk; der Wert des Instrumentes beruht auf den Skalen. Der Stab trägt 2, die obere sei O_1 die untere U_1. Man sieht, daß auf O_1 die Zahlen schneller fortschreiten als auf U_1.

Die Zunge trägt ebenfalls zwei Skalen, die obere mag O_2, die untere U_2, heißen. Sie sind mit O_1 und U_1 völlig identisch. Bringt man den Anfangsstrich von O_2 mit dem von O_1 zur Deckung, so fallen auch die unteren Anfangsstriche (auf U_1 und U_2) zusammen. Jeder Strich von O_1 liegt dann genau über dem entsprechenden von O_2 und ebenso verhält es sich mit U_2 und U_1. Neuerdings befindet sich auch bei diesem Schieber die bei dem System Rietz beschriebene Teilung "R".

Fig. 2



Zunge in gewöhnlicher Stellung

Wir wollen jetzt einmal die Zunge ganz herausziehen, ihre Vorder- und Rückseite, vertauschen, und sie dann wieder in die Nut des Stabes hineinstecken. Dann liegt unter O_1 die Skala S, über U_1 die Teilung T und dazwischen eine dritte, bei der die gleichmäßige Größe der Teilstrecken auffällt; wir wollen sie L nennen.

§ 25. Die Skalen des "System Rietz".

Bei Nr. 23 finden wir an der schrägen Kante und in der vertieften Mitte des Stabes dieselbe Millimeterteilung wie bei Nr. 14. An der senkrechten Kante ist eine Teilung, die mit 1 : 25 bezeichnet ist; eine Strecke von 4 cm ist hier die Einheit. Wenn eine Karte den Maßstab 1:25000 hat, so ist 1 km durch

$\frac{1}{25000}$ = 0,00004 km = 0,04 in oder 4 cm wiedergegeben. Die Anlegung dieses Maßstabes gestattet uns also aus der Landkarte sofort die Entfernungen in Kilometern abzulesen. Ist der Maßstab 1 : 2500, so muß man die Angaben durch 10 dividieren, ist er 1:250000, mit 10 multiplizieren. Man mache mit geeigneten Karten die Probe!

Die Skala L ist hier ganz unten am Stabe, unter U_1 angebracht. Ueber O_1 (ganz oben) liegt die Teilung C, die dreimal so schnell fortschreitet, wie U_1. Auf der Mitte der Zunge, zwischen O_2 und U_2 finden wir die Skala R.

Auf der Rückseite der Zunge ist unten die Skala T wie bei Nr. 14 angebracht. In der Mitte findet sich statt L die Einteilung S & t, darüber S. S ist etwas anders geteilt als bei Nr. 14. (Siehe Fig. 3).

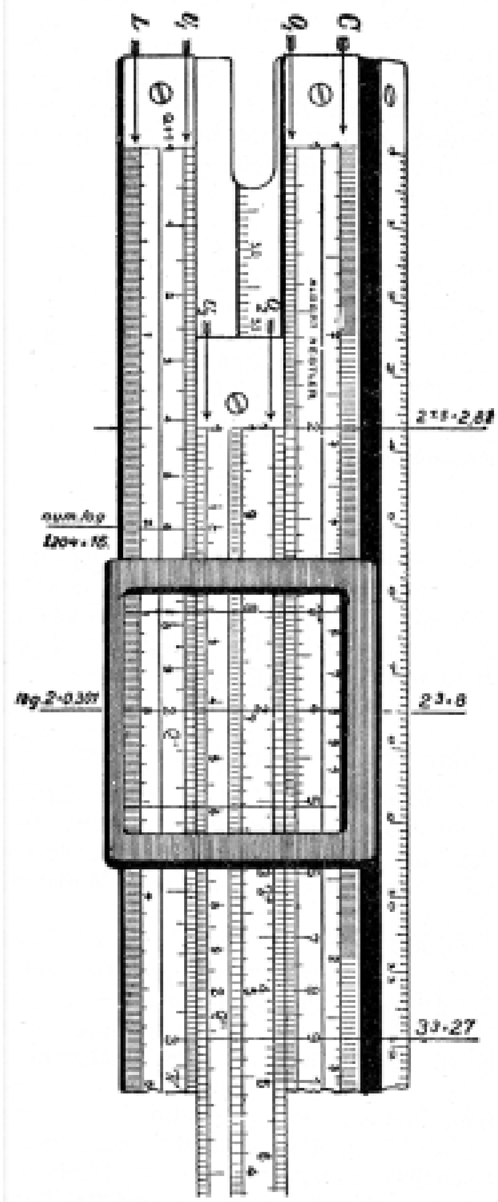
§ 26. Die Skalen des "System Darmstadt".

Dieser Rechenschieber, der im Aufbau der Hauptskalen dem Rietz-Schieber entspricht, zeigt aber gegenüber diesem doch einige sehr vorteilhafte Neuerungen, die ihn vor allen anderen Systemen empfehlenswert erscheinen lassen. Die ganze Konstruktion ist ohne Rücksicht auf seitherige Gewohnheit lediglich nach dem Gesichtspunkt größterZweckmäßigkeit bis in die letzten Einzelheiten durchdacht und ausgeführt worden. So vereinigt dieser Schieber in sich die Vorzüge verschiedener Sondermodelle, ohne einem derselben nachzustehen. Die Skalen O_1, O_2; U_1 und U_2; C sind genau die gleichen, wie beim System Rietz, die Mantissen-Skale L dagegen befindet sich am oberen Rand der Schrägkante; sie wird durch einen feinen Haarstrich in der oberen Gleitschiene des Läufers und durch den mittleren Läuferstrich mit der Teilung U_1 in Uebereinstimmung gebracht.

Eine ganz besonders praktische Anordnung ist für die trigonometrischen Skalen gewählt worden. Auf der geraden Kante befindet sich je eine Sinus- und eine Tangenten-Teilung, erstere von 5° - 90°, letztere von 5° - 45°.

Die der sin.-Teilung entsprechenden Funktionswerte werden auf der Teilung U_1 die cos.-Werte auf der entsprechenden rückläufigen Skala am unteren Stabrand abgelesen. Die Tangensteilung stimmt ebenfalls mit U_1 überein, die Cotangenswerte werden auf der Reziprokteilung in der Mitte der Zunge abgelesen, nachdem die Zungen- und Schieberskalen genau zur Deckung gebracht worden sind. (Siehe Fig. 4.) Die Potenzteilungen auf der Rückseite der Zunge werden 65f. beschrieben.

Fig. 3.



§ 27. Graphische Addition und Subtraktion.

Wir fragen uns natürlich: Wie entstehen die unregelmäßig erscheinenden Skalen und wozu werden sie benutzt?

Will man die Summe 4,5 + 2,7 anschaulich darstellen, so legt man einen Papierstreifen von 4,5 cm Länge hin und läßt an seinem Ende einen zweiten beginnen, der 2,7 cm lang ist. Die gesamte Länge ist dann 4,5 + 2,7 = 7,2 cm. (Siehe Fig. 5.)

Fig. 4

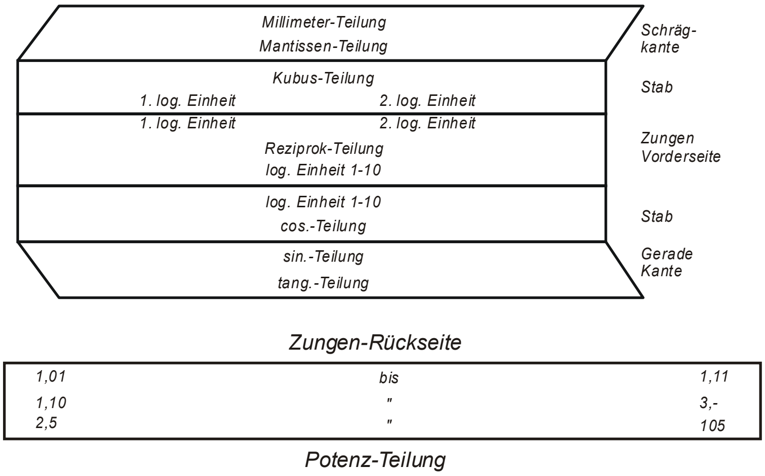


Fig. 5

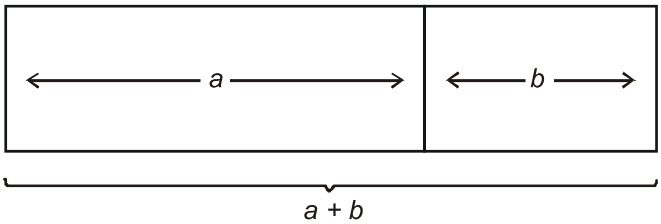
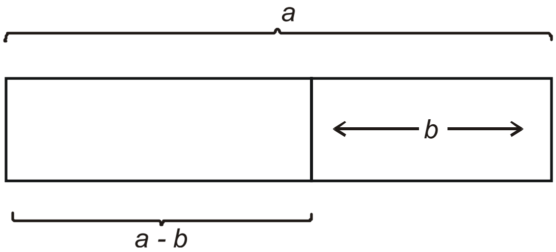


Fig. 6



Bei der Bildung der Differenz 4,5 - 2,7 wird die zweite Strecke von der ersten abgetragen; ihre Enden fallen dabei zusammen.

Fig. 5 und 6 erläutern das Verfahren. Der Buchstabe a bedeutet irgendeine Zahl, z. B. 4,5; der Buchstabe b ist eine beliebige andere, z. B. 2,7.

§ 28. Die Entstehung einer logarithmischen Skala.

Auf den Skalen des Rechenschiebers sind nun nicht die Zahlen selbst, sondern ihre Logarithmen abgetragen. Betrachten wir z. B. O_1 in Fig. 1! Da lg 1 = 0 ist, so beginnt sie mit 1; überhaupt müßte vor jeder ihrer Zahlen eigentlich das Zeichen lg stehen. Um die Teilung nicht zu überlasten, ist es ein für allemal weggelassen. lg 10 ist 1, also ist die Stelle, wo die Zahl 10 steht, um eine Einheit weiter nach rechts gerückt (Vom Anfangsstrich aus gerechnet). Als Einheit wählt man bei O_1 meistens die Länge von 12,5 cm. lg 100 ist 2, also steht die Zahl 100 zwei Einheiten = 25 cm vom Anfangsstrich entfernt. lg 2 ist nach der Tabelle auf S. 5 = 0,301, daher ist auf unserer Tei-lung der Abstand 1 ... 2 = 0,301 · 12,5 = 3,76 cm; lg 20 ist 1,301; wir brauchen von der Zahl "2" aus nur um eine Einheit = 12,5 cm nach rechts zu gehen, um "20" zu erhalten. Die Entfernung dieser Marke vom Anfangsstrich ist 3,76 + 12,5 = 16,26 cm. Man könnte auf dieselbe Weise zu "200" gelangen (1 ... 200 = 28,76 cm) usw. Dieselben Ueberlegungen gelten für die Zahlen 3, 4, 5 ... und ihre Zwischenwerte; wie 3,2; 5,25 usf. Jedenfalls erhält man die rechte Hälfte von O_1 einfach dadurch, daß man die linke um eine Einheit verschiebt, denn lg (10 - a) = 1 + lg a. (Satz 1a auf S. 5).

Es ist daher ganz gleichgültig, ob man eine Zahl auf der linken oder auf der rechten Seite von O_1 einstellt oder abliest. Dabei ändern sich die Wertziffern nicht, sondern nur die Stellenzahl oder Kennziffer. Es ist aber auf S. 5 gesagt, daß es auf diese beim Multiplizieren oder Dividieren - dazu dient O_1 und O_2 - gar nicht ankommt, wenn man die ungefähre Größe des Ergebnisses durch Abschätzung kennt.

Zwecklos wäre es also, auch noch weitere Wiederholungen der Skala anzureihen, um etwa die Zahlen von 100 bis 1000 oder von 0,1 bis 1 zu erfassen. Nur ihre Anfänge sind rechts und links mit roter Farbe angebracht, damit der verfügbare Raum ganz ausgenutzt wird.

Die Skala O_2 stimmt mit O_1 Strich für Strich überein, sie ist also zugleich mit ihr beschrieben.
Man fertige sich nach diesen Angaben auf einem Streifen Pappkarton selbst eine logarithmische Skala an!

Die Skalen. U_1 und U_2 sind in ganz entsprechender Weise hergestellt, nur ist der Maßstab doppelt so groß wie vorher, nämlich 25 cm. Die Bezeichnung "10" ist vom Einheitsstrich 25 cm weit entfernt, weil lg 10 = 1 ist. Der Abstand der Marke "2" vom Anfang beträgt 7,52 cm, weil 0,301 · 25 diesen Wert hat usf.

Wählt man die beiden Einheiten von O_1 und U_1 doppelt so groß, so erhält man einen Rechenschieber von 50 cm Länge, halbiert man sie, so entsteht ein Tascheninstrument, das nur 12½ cm lang ist (vgl. S. 10). Es empfiehlt sich, auch hierfür Modelle herzustellen. Von der Skala C des Systems Rietz ist schon auf S. 11 gesagt, daß ihr Maßstab nur den dritten Teil des für U_1 oder U_2 gewählten ausmacht. Bei der Normallänge von 25 cm beträgt er also $8\frac{1}{3}$ cm.

Die Skala R trägt die Ergänzungslogarithmen (vgl. § 13). Die Bezifferung muß also, wie die Tabelle auf S. 6f lehrt, von rechts nach links laufen. Die Zahl "2" der Skala R ist vom rechten Rand genau ebensoweit entfernt, wie "2" auf U_1 oder U_2 vom linken, und dasselbe gilt von jeder anderen Zahl. Das geht ohne weiteres aus dem Begriff der Er-gänzungslogarithmen hervor.

Die andern Skalen sollen da beschrieben werden, wo ihre Benutzung gezeigt wird.

§ 29. Die Intervalle der verschiedenen Skalen. Ablesen und Einstellen.

Der Rechenschieber liefert eine Genauigkeit von 3, bisweilen 4 Wertziffern. Natürlich kann nicht für jede dreistellige Zahl ein besonderer Strich angebracht werden, weil diese sich dann ununterscheidbar zusammendrängen würden, besonders am Schluß, wo wegen der logarithmischen Teilung schon jetzt eine Zusammenpressung stattfindet. Die Einteilung muß dem vorhandenen Raum angepaßt sein.

Betrachten wir einmal U_1 oder U_2!

a) Zwischen 1 und 2 schreiten die Skalenteile um 0,01 fort; die ersten Striche entsprechen den Zahlen 1,00; 1,01; 1,02 usf. Da man bald den zehnten Teil des Abstandes zweier Striche schätzen lernt, so ist es möglich, Zahlen wie 1,512; 1,047 (nicht mit 1,47 verwechseln!) u. dgl. zu schätzen, besonders wenn über ihnen der Strich des Glasläufers steht.

b) Zwischen 2 und 4 beträgt der Unterschied zweier Skalenteile 0,02; [2,00; 2,02; 2,04 ... 8,96; 3,98; 4,00]. Will man hier eine Ablesung machen, so kann man dies wie unter a) ausführen, muß aber die beiden letzten Wertziffern verdoppeln, weil der Abstand zweier Striche hier den doppelten Wert hat wie vorher. Beim Einstellen dividiert man die beiden letzten Stellen (der vierziffrigen Zahl) durch 2, ehe man den Glasläufer bewegt.

c) Zwischen 4 und 10 geht man jedesmal um 0,05 vorwärts. Will man also 4,75; 4,80; 5,05 ein-stellen, so kann man die Skalenstriche selbst benutzen; bei 4,77; 4,81; 5,04 ist eine Abschätzung nötig. In Fig. 7 und 8 bedeuten die unter oder über der Skala stehenden vereinzelten Striche verschiedene Einstellungen der Glasläufermarke, die dabei stehenden Zahlen ihre Bedeutung. Man verdecke diese Zahlen zunächst durch einen Papierstreifen und prüfe, ob die eigene Ablesung dasselbe Ergebnis liefert. Dann schreibe man sich die Zahlen auf, mache die entsprechende Einstellung mit dem Glasläufer und stelle fest, ob das Bild dasselbe ist wie auf den Figuren.

Die Skala R (System Rietz und Nr. 14, Nr. 21 Darmstadt) ist genau so eingeteilt wie U_1 und U_2, nur laufen auf ihr die Zahlen von rechts nach links.

Bei den Teilungen O_1 und O_2 gilt für den Raum zwischen 1 und 2 das unter b) gesagte (1,00; 1,02; 1,04...), zwischen 2 und muß man das beachten, was unter c) steht; zwischen 5 und 10 ist jedesmal der bisherige Mittelstrich ausgelassen (5,00; 5,10; 5,20 ... die dritte Ziffer muß nach Augenmaß bestimmt werden.

Die Skala C am oberen Rande von "System Rietz" ist in der-selben Weise geteilt, wie soeben beschrieben (O_1 und 0_1.)

Die Skala L ist, wie schon gesagt, völlig gleichmäßig; sie beginnt mit 000; 002; 004; 006; 008; 010 (erster etwas größerer Strich) und endet mit 996; 998; 1000. Die Stellen 050; 150; 250 usw. sind durch lange Striche; 100; 200; 300... durch beigedruckte Ziffern gekennzeichnet.

Die Potenzteilung des Rechenschiebers Nr. 21 Darmstadt: Im Abschnitt von 1,01 bis 1,02 haben wir 10 durch lange Striche gekennzeichnete Unterteilungen, die jeweils wieder 10 kleinere Unterteilungen haben, die durch kürzere Striche gekennzeichnet sind. Man liest also ab: 1,01, 1,0101, 1,0102 usw bis 1,011, 1,012, 1,013 usw. 1,015, 1,016, 1,017 etc. bis 1,02. Von 1,02 bis 1,05 ist das Feld zwischen den bezifferten Werten 1,03; 1,04; 1,05 etc. ebenfalls jeweils in 10 Haupt-Unterteilungen geteilt, die ihrerseits wieder je 5 weitere Unterteilungen haben, so daß man also hier die Werte wie folgt abliest. 1,0202; 1,0204; 1A206 usw. bis 1,021; dann weiter 1,021, 1,022 usw. bis 1,03. Von 1,05 schreiten die Teilungen wie folgt weiter: 1,05, 1,0505, 1,051, 1,0515, 1,052, 1,0525, 1,053, 1,0535 etc. Von 1,11 an geht es weiter 1,111;

1,112 . . . bis 1,12 bis 1,20. Von 1,20 schreiten die Teilungen so fort: 1,20, 1,21, 1,22 ... bis 1,40 mit je 5 Unterteilungen zwischen den längeren Teilstrichen. Von 1,40 bis 1,80 kann man wie folgt genau ohne Interpolation ablesen:

1,40; 1,41; 1,42; 1,43 etc. mit je einer Unterteilung zwischen den längeren Teilstrichen. Es folgt also auf 1,5; 1,505; 1,51; 1,515; 1,52; 1,525; 1,53 usw, der Abschnitt von 1,8 bis 4 gibt 3 Stellen ohne weitereUnterteilung, der von 4bis 6 ebenfalls 3 Stellen, aber die letzte Ziffer ist immer 5 oder 0 und Zwischenwerte müssen geschätzt werden. Von 6 bis 10 liest man 6,1; 6,2; 6,3; 7,3; 7,5 usw. Die Unterteilungen der Potenzskalen nehmen dann nach rechts rapid ab; von 10 bis 15 kann man nur 3 Stellen genau ablesen, wobei die letzte Ziffer immer gerade sein muß. Der Abschnitt von 15 bis 30 gibt ebenfalls nur 3 Ziffern und die letzte immer nur mit Intervallen von 5 zu 0 usw. Die weitere Einteilung ist ja nach dem Vorhergesagten ohne weiteres klar.

Fig. 7

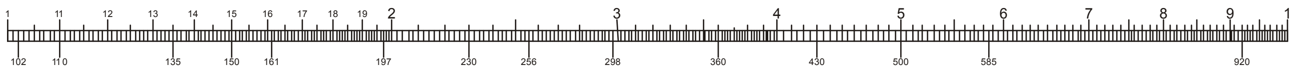
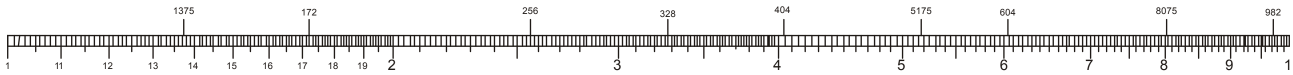


Fig. 8



IV. Kapitel
Die Multiplikation.

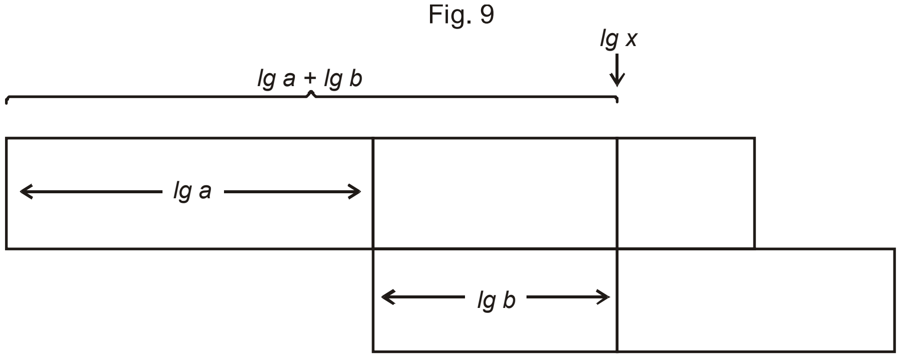
§ 30. Die Multiplikation durch graphische Addition der Logarithmen.

Auf den Skalen O_1 und O_2, U_1 und U_2 sind nicht die Zahlen selbst, sondern ihre Logarithmen abgetragen. Durch Aneinanderlegen (vgl. § 27 auf S. 13) erhält man also die Summe zweier Logarithmen.

Hier ist lg x = g a + lg b, also nach Satz 1 auf Seite 5

$$\lg x = \lg (a \cdot b);\ x = a \cdot b.$$

Fig. 9



Satz I. Um das Produkt a · b zu bilden, schiebt man den Anfangsstrich "1" einer Zungenteilung unter die Ziffer a der zugehörigen Skala des Lineals. Dann bewegt man den Glasläufer so weit, bis der schwarze Strich über der Ziffer b der benutzten Zungenskala steht. Unter ihm findet man auf der festen Skala sofort das Ergebnis a · b.

Wie auf S. 13 schon gesagt ist, geben die Zahlen des Rechenschiebers die drei oder vier ersten Wertziffern der Faktoren und des Produktes an, sagen aber nichts über die Stellenzahl aus. Diese muß also durch Abschätzung ermittelt werden, was nach § 6 auf S. 3 eine einfache Sache ist. In der Praxis weiß man überdies fast in allen Fällen schon ungefähr, was herauskommen wird, so daß selbst diese kleine Mühe wegfällt. Wenn z. B. ein Arbeiter 17½ Stunden für einen Stundenlohn von 1,22 RM arbeitet, so erhält er 21,35 RM, nicht 213,50 oder 2,14 RM, wie schon unmittelbar einleuchtet. Abschätzung: 20 · 1 = 20, nicht 200 oder 2.

§ 31. Beispiele zum vorhergehenden Paragraphen.

Beispiel 22. Wie groß ist ein rechteckiges Grundstück, dessen Seiten a = 27,5 m und b = 39,2 m sind? [1078 qm; Abschätzung: 25 · 40 = 1000].

Beispiel 23. In einer Wohnung sollen die Fußböden von vier Zimmern gestrichen werden; die Maße sind 4,2 X 3,75; 4,2 X 6,15; 6,15 X 3,85; 3,75 X 3,85. Für wieviel qm muß man Farbe bestellen? [15,75 + 25,8 +

23,7 + 14,44 = 79,69 qm, also praktisch 80 qm. Abschätzung: 4 · 4 + 4 · 6 + 6 · 4 + 4 · 4 = 16 + 24 + 24 + 24 + 16 = 80. Probe des genauen Wertes: Wegen der gleichen Faktoren kann man die beiden ersten und die beiden letzten Summanden zusammenfassen: 4,2 · 9,9 + 3,85 · 9,9 = 9,9 · 8,05 = 79,7 qm].

Beispiel 24. Jemand fährt mit der Kleinbahn 43 Minuten (Geschwindigkeit 28 km/Stunde), besteigt dann den D-Zug (85 km/Stunde), mit dem er 1 Stunde 12 Minuten reist. Das Zubringerauto der Lufthansa führt ihn vom Bahnhof in 13 Minuten mit 85 km/Stunde zum Flugzeug, das Flugzeug (130 km/Stunde) in 52 Minuten zum Ziel. Wieviel Kilometer hat er im ganzen zurückgelegt?

Lösung. Da Stundengeschwindigkeiten gegeben sind, so müssen die Zeiten in Stunden umgerechnet werden. Dies geschieht entweder im Kopf oder mit dem Rechenschieber, indem man alle Minutenziffern mit $\frac{1}{60}$ = 0,01667 multipliziert. (Einmalige Einstellung der Zunge auf 0,01667.)

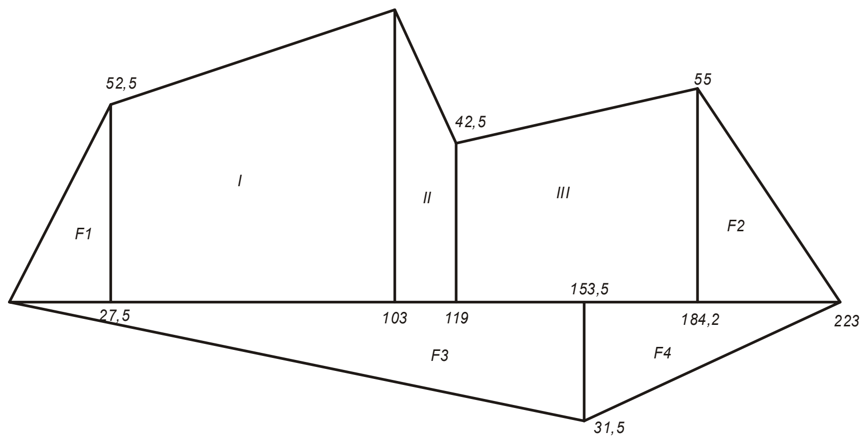
Beförderungsmittel	Geschwindigkeit	Zeit	Weg
Kleinbahn	28	0,717	20,1
D-Zug	85	1,2	102,0
Auto	35	0,217	7,6
Flugzeug	130	0,867	112,7
			x= 242,4 km

Abschätzung: $x = 30 \cdot 0,7 + 90 \cdot 1 + 35 \cdot \frac{1}{5} + 130 \cdot 0,9 = 21 + 90 + 7 + 117 = 235$ km.

Probe: Man kann auch rechnen: $x = \frac{1}{60} \cdot (28 \cdot 43 + 85 \cdot 72 + 35 \cdot 13 + 130 \cdot 52) = \frac{1}{60} \cdot 14539 = 242,3$.

Beispiel 25. Ein Grundstück ist geodätisch vermessen worden; die Ergebnisse der Messung zeigt Fig. 10. Wie groß ist der Flächeninhalt?

Fig. 10



Lösung. Die gesuchte Fläche zerfällt: in vier Dreiecke und drei Trapeze. Der Inhalt eines Dreiecks wird gefunden, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multipliziert und das Ergebnis halbiert. Man hat also $F_1 = ½ \cdot 27\ 5 \cdot 52,5$; $F_2 = ½ \cdot (223 - 184,2) \cdot 55$; $F_3 = ½ \cdot 153,5 \cdot 31,5$; $F_4 = ½ \cdot (223 - 153,5) \cdot 31,5$, also $F_1 = 13,75 \cdot 52,5 = 722$ qm; $F_1 = ½ \cdot 38,8 \cdot 55 = 19,4 \cdot 55 = 1067$ qm; $F_3 = 76,75 \cdot 31,5 = 2420$ qm; $F_4 = ½ \cdot 69,5 \cdot 31,5 = 34,75 \cdot 81,5 = 1095$ qm. Die Summe aller Dreiecke ist somit 5304 qm.

Zur Ermittlung der Fläche eines Trapezes bestimmt man die Mittellinie indem man die Parallelseiten addiert und das Ergebnis halbiert. Die Mittellinie wird mit der Höhe multipliziert.

Trapez	Mittellinie	Höhe	Flächeninhalt
I	½ · (52,5 + 77) = 64,75	103 - 275 = 75,5	4890
II	½ · (77 + 42,5) = 59,75	119 - 103 = 16	956
III	½ · (42,5 + 55) = 48,75	184,2 - 119 = 65,2	3180

Fläche der Trapeze: 9026 qm

Gesamtfläche des Grundstücks 5304 + 9026 = 14330 qm = 1,433 ha. Die letzte Stelle des Ergebnisses ist nicht mehr ganz sicher, aber auch praktisch belanglos.

Beispiel 26. Ein Drogist hat eine Anzahl Restbestände Spiritus. Nach den Angaben der Waage und des Alkoholometers sind vorhanden-9,7 kg Spiritus von 42 Gewichtsprozenten, 11,5 kg zu 73 %, 2,4 kg zu 65 %, 21 kg zu 83 %, 13,2 kg zu 38 % und 5,25 kg zu 96 %. Er gießt alles zusammen. Wieviel Spiritus erhält er und welchen Prozentgehalt hat die Mischung?

Lösung: Die Menge ist offenbar 9,7 + 11,5 + 2,4 + 21 + 13,2 + 5,25 = 63,05 kg. Die zuerst aufgeführte Sorte enthält $9{,}7 \cdot \frac{42}{100}$ = 4,073 kg reinen Alkohol, die folgenden $11{,}5 \cdot 0{,}73 = 8{,}4$; $2{,}4 \cdot 0{,}65 = 1{,}56$; $21 \cdot 0{,}83 = 17{,}42$; $13{,}2 \cdot 0{,}38 = 5{,}02$; $5{,}25 \cdot 0{,}96 = 5{,}04$. Die Gesamtmenge des Alkohols in der Mischung ist 41,515 kg. 63,05 kg Spiritus enthalten 41,515 kg Alkohol, 1 kg: $\frac{41{,}515}{63{,}05}$; 100 kg: $\frac{4141{,}5}{63{,}05}$ = 65,84. Die Mischung ist also 65,84 prozentig (Gewichts-, nicht Raumprozente).

Beispiel 27. Wieviel destilliertes Wasser muß man zu der Mischung (Beispiel 26) hinzufügen, um 60-prozentigen Spiritus zu erhalten?

Lösung: 41,515 kg entsprechen 60 Gewichtsteilen, 1 Gewichtsteil ist also $\frac{41{,}515}{60}$, 100 Gewichtsteile sind $\frac{4151{,}5}{60}$ = 69,2 kg. Da die Mischung nur 63,05 kg wiegt, müssen 6,15 kg = 6,15 l Wasser zu-gegossen werden. Dies Beispiel weist uns auf die Notwendigkeit hin, mit dem Rechenschieber zu dividieren, will man sich unnötige Belastung ersparen.

Beispiel 28. Jemand mischt 0,35 cbm (= 350 l) Wasser von 15° mit 0,24 cbm Wasser von 72°. Ist die Mischung zum Baden geeignet?

Lösung: Wir wollen den Wärmeinhalt ermitteln, indem wir Wasser 0° den Wärmeinhalt O geben. Dann enthält die erste Wassermenge $350 \cdot 15 = 5250$ Kalorien, die zweite $240 \cdot 72 = 17280$, zusammen also 22530 Kalorien. Diese verteilen sich auf 0,59 cbm = 590 cdm = 590 kg Wasser. Es kommen somit auf 1 kg Wasser $\frac{22530}{590}$ = 38,2 Wärmeeinheiten, die Temperatur der Mischung ist 38,2°. Das Wasser ist zu heiß.

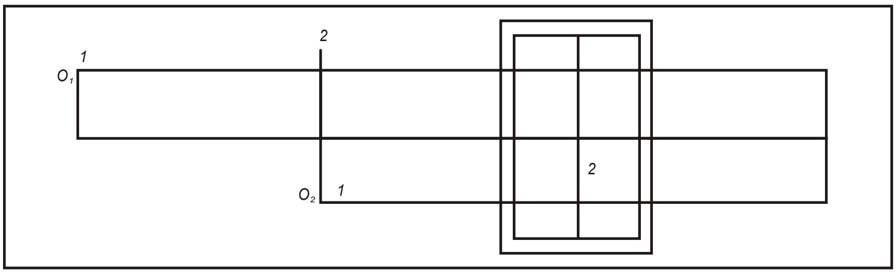
Beispiel 29. Ein Roman hat im ersten Band 499, im zweiten 477 Seiten. Eine Seite hat durchschnittlich 30 Zeilen, jede Zeile durchschnittlich 47 Buchstaben. Wieviele Typen wurden für das ganze Werk ungefähr benutzt?

Lösung: $976 \cdot 30 \cdot 47 = 976 \cdot (1410 = 1376000$.

§ 32. Der Rechenschieber als Multiplikationstabelle. Kreisumfänge.

Die Einstellung des Instrumentes, welches die Aufgabe $2 \cdot 2 = 4$ löst, gibt uns sofort das ganze Einmaleins mit 2; stellt man den Glasläuferstrich über 2, 3, 4... der Zunge, so findet man darüber auf dem Stabe $2 \cdot 2 = 4$; $2 \cdot 3 = 6$; $2 \cdot 4 = 8$ usw. Ueber 2,5 steht 5; über 1,72 steht 3,44 usf. Natürlich ist hier der erste Faktor (2) nur deshalb so einfach gewählt, damit jedes einzelne Ergebnis durch Kopfrechnen sofort auf seine Richtigkeit geprüft werden kann.

Fig. 11



Der Umfang eines Kreises vom Durchmesser d ist bekanntlich $d \cdot \pi$. Liegt eine ganze Anzahl von Kreisen vor, deren Durchmesser gegeben sind (etwa d = 2 cm; 12,3 cm; 0,75 cm; 321 cm), so stellt man den

Anfangsstrich von O_2 auf die Stelle von O_1 ein, welche mit π (= 3,142) bezeichnet ist. Man findet nach dem soeben besprochenen Verfahren als Umfänge 6,28 cm; 38,6 cm; 2,36 cm; 1008 cm. Natürlich geschieht die Ermittlung der Stellenzahl durch Abschätzung; da $\pi \sim 3$ ist, so ist sie sehr einfach.

Allgemein gilt folgende Regel:

Soll eine Reihe von verschiedenen Zahlen mit ein und demselben Faktor multipliziert werden, so stellt man diesen auf der festen Skala (O_1 oder U_2) ein, indem man den Einheitsstrich der Zunge (O_2, oder U_2) darunter bringt. Dann sucht man der Reihe nach auf der Zungenskala die verschiedenen Zahlen auf, bringt sie mit dem Strich des Glasläufers zur Deckung und findet unter diesem Strich auf der festen Skala die Ergebnisse.

Natürlich muß man dabei immer die entsprechenden Teilungen benutzen, die ja auch unmittelbar aneinanderliegen. Stellt man auf U_1 ein, so legt man U_2 an (nicht $O_{2!}$), zu O_1 aber gehört O_2.

§ 33. Beispiele zum vorigen Paragraphen.

Beispiel 30. 3850 RM stehen ein Jahr auf Zinsen. Wie groß ist der Ertrag bei a) 3½ %, b) 4¼ %, c) $5\frac{3}{8}$ %.

Lösung: Man muß das Kapital im ersten Falle mit $\frac{3½}{100}$ = 0,035 multiplizieren, im zweiten mit 0,0425, im dritten mit 0,05375. Die Ergebnisse sind 135; 164; 207 RM. Die Zahl 3850 wird auf der festen Skala eingestellt.

Beispiel 31. Einige Abflußrohre haben die lichte Weite (innerer Durchmesser) von 50; 70; 100; 125; 150; 200 mm. Die Wandstärken sind in den beiden ersten Fällen 5, in den vier andern 6 mm. Die Rohre sollen zum Schutz gegen Rost außen mit einem Anstrich versehen werden; wieviel qm Fläche muß man für je 1 m Rohrlänge in Ansatz bringen?

Lösung: Der äußere Durchmesser ist gleich dem inneren, vermehrt um die nach beiden Seiten abgetragene Wandstärke, also in unserm Fall 60; 80; 112; 137; 162; 212 mm = 0,06 m; 0,08 m usf. Den Umfang (in Metern) erhält man, wenn man die zuletzt genannten Zahlen mit π multipliziert; um die gesuchte Fläche zu bekommen, muß man das Ergebnis noch mit der Rohrlänge vervielfältigen; da diese aber gleich 1 ist, so ändern sich die Ergebnisse dadurch in unserm Beispiel nicht. Man bekommt 0,1885; 0,251; 0,352; 0,430; 0,509; 0,666 qm.

Beispiel 32. 1 Pferdestärke (1 PS) ist 0,736 Kilowatt (KW). Man rechne 2,5; 816; 92,8; 0,672 PS in KW um.

Lösung: 1,84; 600; 68,3; 0,495 KW.

Beispiel 33. Man läßt einen Stein, der 5,35 kg wiegt, aus verschiedenen Höhen h auf die Erde fallen, wie groß ist seine Wucht, wenn die Fallhöhe a) 1 m; b) 19,4 m (vierstöckiges Haus); c) 92 m (Kirchturm); d) 300 m (Eiffelturm); e) 1350 m (Flugzeug) ist?

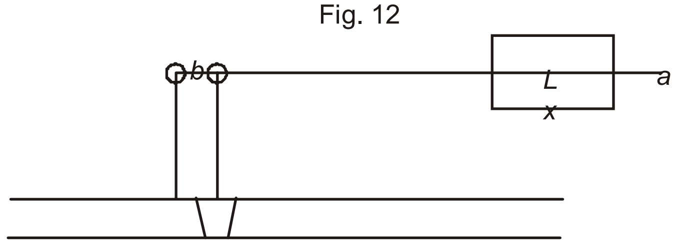
Lösung: Man erhält die Wucht (Arbeit) in mkg, wenn man das Gewicht des Steins mit der Fallhöhe multipliziert, also a) 5,35; b) 103,8; c) 492; d) 1605; e) 7220 mkg.

Beispiel 34. Arbeit kann in Wärme umgewandelt werden, 1 mkg = $\frac{1}{427}$ = 0,00234 kg-Kal. Wie groß ist die Wärme in den vorher genannten Fällen?

Lösung: a) 0,01253; b) 0,243; c) 1,153; d) 3,76; e) 16,92; Kalorien.

Beispiel 35. Ein Dampfkessel hat ein Hebelventil. Die Ventilfläche ist q = 1,5 qcm. Die Hebelstange ist a = 52,5 cm lang; sie wiegt 180 gr. Der Abstand vom Drehpunkt bis zum Ventil ist b = 4,5 crn. Das Laufgewicht ist L = 1,8 kg schwer. Wo muß es angebracht werden, wenn der Kessel nicht mehr als 1, 2, 3... kg Ueberdruck haben soll?

Fig. 12



Lösung: Hat der Kessel p Atmosphären Ueberdruck, so wird das Ventil mit der Kraft $k = q \cdot p = 1{,}5$ p kg nach oben getrieben, das statische Moment dieser Kraft ist $K \cdot b = 0{,}0675$ p mkg ($b = 0{,}045$ m). Dem wirkt entgegen: 1. das statische Moment der Ventilstange, das, da hier das Gewicht im Mittelpunkt der Stange angreift, gleich $0{,}2625 \cdot 0{,}18 = 0{,}04725$ mkg ist, 2. das statische Moment des Laufgewichts, das $x \cdot L$ mkg ist, wenn das Gewicht x Meter vom Drehpunkt entfernt angebracht wird. Somit ist

$$1{,}8 \cdot x + 0{,}04725 = 0{,}0675\,p$$

$$x = 0{,}0375\,p - 0{,}02625$$

Man erhält die folgende Tabelle

p	1	2	3	4	5	atm
x	1,1	4,9	8,6	12,4	16,1	cm

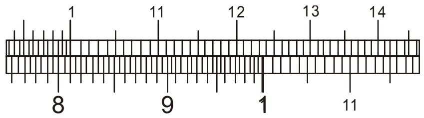
§ 34. Umrechnung von Münzen, Maßen und Gewichten.

Beispiel 36. 1 Dollar hatte den Wert von 4,20 RM; es sollen 32,80; 5,17; 0,85; 183 ... Dollar in RM umgerechnet werden.

Lösung: Man stellt den gleichbleibenden Faktor 4,20 auf der festen Skala O_1 ein, setzt den Einheitsstrich von O_2 darunter und sucht auf O_2 der Reihe nach die angegebenen Dollarwerte auf. Genau über ihnen findet man als Beträge in RM: 137,8; 21,70; 3,57; 769 usf. Die Stellung des Kommas findet man leicht durch Abschätzung; 1 Dollar ist etwas mehr als 4 RM. Die genauen Werte sind 137,76; 21,714; 3,570; 768,6. Die kleinen Unterschiede fallen in den meisten Fällen nicht ins Gewicht, sollte es einmal anders sein, so verfahre man nach § 40.

In derselben Weise kann man natürlich jedes Maß in jedes entsprechende andere verwandeln. 1 RM ist z. B. 1,235 Fr.; Fig. 13 gibt

Fig. 13



uns also die Einstellung, welche uns ermöglicht, mit einer einzigen Verschiebung des Glasläufers Reichsmark in (Schweizer) Franken umzuwandeln, z. B.

RM	1	0,9	8,5	2,35	417	28,1	3600	0,81	2,025
Fr.	1,235	1,111	10,49	2,90	515	34,7	4446	1	2,5

Hat man also einmal auf O_1 Franken eingestellt, genau darunter, auf O_2 die entsprechende Anzahl RM, so gilt dieselbe Beziehung für jedes Zahlenpaar, welches, der Strich des Glasläu(ers deckt. Aber, wie besonders die vorletzte Zusammenstellung zeigt, man kann mit der-selben Einstellung auch jede beliebige Anzahl Franken in RM umwandeln, man braucht nur die Franken auf O_1 aufzusuchen, dann stehen die zugehörigen Beträge in RM direkt darunter auf O_2. Man findet z. B., ohne die Stellung der Zunge zum Stabe zu verändern, folgende Tabelle:

Fr.	11	313	0,87	9380
RM	8,91	253,5	0,705	7600

Abschätzung: Derselbe Geldbetrag ist, in Franken ausgedrückt, ein wenig größer, als in RM angegeben.

Es braucht nicht einmal gesagt zu sein, wie groß eine Maßeinheit, ausgedrückt durch eine andere'ist, sondern es genügt schon, wenn man nur das Verhältnis der beiden kennt. Weiß man z. B., daß 1,085 m = 3,56 Fuß sind, so stellt man einfach diese beiden Zahlen untereinander und hat dann die ganze Tabelle auf einmal. Steht 1,085 auf O_1 und 3,56 genau darunter auf O_2, so liest man also die Meter stets auf O_1 ab, darunter auf O_2 die zugehörige Anzahl Fuß und umgekehrt. Die Abschätzung erfolgt dadurch, daß man 1 m $\sim$ 3 Fuß setzt. Beispiel:

Meter	1,085	0,305	0,610	0,701	1	2	3
Fuß	3,56	1	2	2,3	3,28	6,56	9,84

Beispiel 37. Ein Yard (yd) ist 0,914 m, ein englischer Fuß (') 0,305 in, ein (englischer) Zoll (") 0,0254 m. Jemand will nach England übersiedeln und läßt sich den Plan der in Aussicht genommenen Wohnung (mit Garten) schicken. Der Uebersicht halber rechnet er die Maße in Meter um. Man prüfe, ob seine Tabelle richtig ist:

	1	2	3	4	5	6
Engl. Maß:	53 yd	22 yd	9 yd 5'	3' 2"	7 yd 2' 7"	120 yd 1' 6"

a)	48,5	2,01	8,23	2,74	6,40	109,7
b)	-	-	0,1525	0,61	0,61	0,305
c)	-	-	-	-	0,1778	0,1524
Metermaß	48,5 m	2,01 m	8,3825 m	3,35 m	6,1878 m	110,1574 m

Lösung: Die Anordnung ist zweckmäßig, man rechnet zuerst alle Yard, dann alle Fuß, dann alle Zoll in Meter um, da man jedesmal mit einer Einstellung auskommt. Die Rechnungen selbst sind recht fehlerhaft, die richtige Tabelle sieht so aus:

	1	2	3	4	5	6
a)	48,5	20,1	8,23	-	6,40	109,7
b)	-	-	1,52	0,91	0,61	0,3
c)				0,05	0,18	0,2
	48,5 m	20,1 m	9,75 m	0,96 m	7,19 m	110,2 m

Die erste Aufgabe ist richtig, die zweite enthält einen Kommafehler, in 3b) sind zwei überflüssige Wertziffern mitgenommen, ebenso in 5c). In 6a) ist die Ziffer 7 abgerundet, die Genauigkeit der beiden folgenden Summanden kann also gar nicht zur Geltung kommen. In 3b) hat man einen Kommafehler, in 4 sind Zoll mit Yard, Linien mit Zoll verwechselt, in 5) wurde ein Additionsfehler begangen. Dies Beispiel diene zur Abschreckung!

Weitere Aufgaben kann man sich in beliebiger Menge verschaffen, wenn man eine Zusammenstellung der Münzen, Maße und Gewichte der verschiedenen Länder besitzt, wie sie z. B. Kürschners Jahrbuch bietet. Man prüfe die Ergebnisse durch gewöhnliches Rechnen nach!

§ 35. Die Verschiebung der Zunge um eine Einheit.

Bisher wurde es als ziemlich gleichgültig betrachtet, ob man bei der Multiplikation zweier Zahlen die Zahlen O_1 und O_2 oder U_1 und U_2 benutzte. U_1 und U_2 liefern eine etwas genauere Einstellung und Ablesung, dafür tritt aber auch ein Nachteil auf.

Wollen wir z. B. das Produkt $3 \cdot 5$ nach Satz I auf S. 15 mit den unteren Skalen finden, so ergibt der Versuch, daß die Skala nicht auszureichen scheint. Lösen wir dieselbe Aufgabe mit O_1 und O_2 so hat man durchaus keine Schwierigkeit, weil sich an die erste Skala (1...10) sofort eine zweite, kongruente, anschließt. Wenn man nun rein schematisch die Multiplikation mit 5 hier fortsetzen würde ($3 \cdot 5$; $15 \cdot 5$; $75 \cdot 5$ usw.), so würde man auch hier bald die rechte Grenze der Skalen überschreiten. da hilft uns Satz la auf S. 5 weiter. Wird der Logarithmus einer Zahl um 1 vermindert, so ändern die Ziffern, welche die Zahl charakterisieren, ihren Betrag gar nicht, nur der Wert jeder Ziffer wird zehnmal so klein. Das macht aber für den Rechenschieber gar nichts aus, denn der absolute Wert des Ergebnisses wird doch stets durch Abschätzung ermittelt, der relative, verhältnismäßige, ändert sich nicht, wenn man den Logarithmus um 1 verkleinert, oder, was dasselbe ist, die Skala um eine Einheit zurückschiebt. Man kann also bei den Skalen O_1 und O_2 ebensogut die Zahl "1" benutzen, die am Anfang steht, wie die in der Mitte oder am Ende, das Ergebnis wird dasselbe sein, wie jede Probe ergibt.

Da aber die Skalen U_1 und U_2 sich nur durch die Vergrößerung des Maßstabes, nicht durch die Anordnung, von O_1 und O_2 unterscheiden, gelten dieselben Bemerkungen auch hier. Um also $3 \cdot 5$ zu berechnen, wird man 3 auf U_1 aufsuchen und durch den Strich des Glasläufers fixieren, darauf den End- (nicht den Anfangs-) Strich von U_2 einstellen, und auf U_2 die Zahl "5" aufsuchen. Als Ergebnis findet man auf U_1 "15".

Kurz gesagt: Kommt man bei der Multiplikation über die rechte Grenze der Skala hinaus, so gehe man um eine Einheit nach links; man wird dieselben Wertziffern erhalten. Den Stellenwert findet man durch Abschätzung.

Bei der Skala O_2 wird man im Zweifel zweckmäßig die mittlere "1" benutzen.

§ 36. Wiederholte Multiplikation.

Ein Zimmer ist 5,20 m lang, 4,85 m breit und 3,75 m hoch. Welchen Luftraum schließt es ein? Offenbar $5{,}2 \cdot 4{,}85 \cdot 3{,}75$ cbm. Das Produkt der ersten beiden Zahlen ist 25,2 qm; multipliziert man das Ergebnis noch mit 3,75, so erhält man 94,6 cbm. Hierbei ist die Zwischenablesung (25,2) überflüssig; es genügt, wenn man diese Zahl (ohne sie zu notieren) durch den Strich des Glasläufers festhält, unter ihn die "1" der beweglichen Skala anbringt und auf dieser den dritten Faktor (3,75) aufsucht. Ueber ihm steht auf der festen Skala das Ergebnis (94,6 cbm).

Regel: Um das Produkt x = a · b · c · d... zu finden, sucht man "a" auf einer festen Skala (O_1 oder U_1) auf, schiebt dahin den passenden Einheitsstrich der zugehörigen beweglichen Skala (O_2 oder U_2) und sucht auf dieser beweglichen Skala b auf. Diese Zahl bedeckt man mit dem ,Strich des Glasläufers und bringt ihn mit der "1" der beweglichen Skala, zur Deckung. Dann verschiebt man den Glasläufer, bis sein Strich über "c" der beweglichen Skala steht. Nun wird diese wieder verschoben, bis ihre "1" mit dem Läuferstrich zusammenfällt. Dann bewegt man den Glasläufer soweit, bis sein Strich auf "d" der Zunge steht usf. Die letzte Einstellung des Striches gibt auf der Zunge den letzten Faktor, auf der festen Skala das Produkt.

Beispiel 38. Wieviel kosten 33 Tischplatten, wenn jede 1,65 m lang, 95 cm breit, 2,5 cm stark ist? Der Preis für 1 cbm Holz sei 45 RM.

Lösung: Die Maße müssen alle in m angegeben werden, dann ist der Rauminhalt des Holzes $33 \cdot 1{,}65 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}025$ und der Preis $33 \cdot 1{,}65 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}025 \cdot 45 = 58{,}20$ RM [Abschätzung: $30 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{40} \cdot 40 = 60$].

Beispiel 39. Ein Gartenbeet hat die Gestalt einer Ellipse. Die Länge ist 3,7 m, die Breite 1,9 m. Wieviel qm Bepflanzungsfläche hat es?

Lösung: Die Ellipsenfläche ist $a \cdot b \cdot \pi$, hier ist $2\,a = 3{,}7$; $a = 1{,}85$; $b = 0{,}95$; $\pi = 3{,}14$. $F = 1{,}85 \cdot 0{,}95 \cdot 3{,}14 = 5{,}52$ qm [Abschätzung: $2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$].

Beispiel 40. Eine Zigarette ist 1 cm breit, 0,6 cm dick und 6,5 cm lang? Wieviel ccm Tabak enthält sie?

Lösung: Der Querschnitt ist eine Ellipse mit den Halbachsen a = 0,5 cm, b = 0,3 cm. Die Ellipsenfläche ist $0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot \pi$, der Körperinhalt $0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot \pi \cdot 6{,}5 = 3{,}06$ ccm [Abschätzung: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 6 = 3$].

Beispiel 41. Nach den Regeln der Mathematik wächst ein Kapital von a RM, welches zu p % steht, in n Jahren mit Zinseszinsen auf $a \cdot q^n$ RM an. Dabei ist q eine abkürzende Bezeichnung für $1 + \frac{p}{100}$.

Wie groß ist das Vermögen eines Sparers, der ein Kapital von 632 RM 6 Jahre lang zu 5¼ % auf der Sparkasse stehen läßt?

Lösung: $p = 5{,}25$; $q = 1 + \frac{5{,}25}{100} = 1{,}0525$, $x = 632 \cdot q^6 = 632 \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = 859$ RM.

Probe: Man stelle wegen des sich stets wiederholenden Faktors q = 1,0525 diesen fest auf U_1 ein, multipliziere ihn mit q(abgelesenes Ergebnis $q \cdot q = 1{,}109$). Das Resultat multipliziert man, ohne die Zunge zu verschieben, wieder mit q, es ergibt sich $q \cdot q \cdot q = q^3 = 1{,}166$, weiterhin $q^4 = 1{,}227$; $q^5 = 1{,}29$; $q^6 = 1{,}36$. Das Ergebnis ist $1{,}36 \cdot 632 = 859$RM.

Noch einfacher wäre es gewesen, bei derselben Einstellung erst 632 und dann fünfmal die Zahl q mit dem (fest eingestellten) q zu multiplizieren. (Zwischenresultate ablesenl)

Beispiel 42. Eine Maschine kostet 22000 RM, ihre Lebensdauer wird auf 10 Jahre veranschlagt. Wieviel muß man jährlich abschreiben, wenn mit einer Verzinsung von 6 % gerechnet wird?

Lösung: Durch die Abschreibungen muß ein Kapital gebildet werden, welches nach 10 Jahren die Anschaffung einer neuen, gleichwertigen Maschine möglich macht. Die Abschreibungssumme sei r RM, dann ist nach den Regeln der Rentenrechnung

$$\frac{r(q^n - 1)}{q - 1} = 22000; \quad r = \frac{22000 \cdot (q-1)}{q^n - 1} = \frac{22000 \cdot 0{,}06}{1{,}06^{10} - 1}$$

Man findet $1{,}06^{10} = 1{,}791$; $r = \frac{1320}{0{,}791} = 1669$ RM.

§ 37. Die Ermittelung der Stellenzahl ohne Abschätzung. (P-1).

Der geübte Rechner wird den Stellenwert des Ergebnisses stets durch Abschätzung finden. Trotzdem war früher U_1 noch die Bezeichnung P-1 angebracht, welche eine andere Art der Ermittelung der Stellenzahl ermöglicht. Das Produkt zweier einstelliger Zahlen (S. 2) ist entweder eine zweistellige ($3 \cdot 5 = 15$) oder eine einstellige ($3 \cdot 2 = 6$). Im ersten Fall ist die Summe der Logarithmen größer als 1, weil 15 größer als 10 ist. Man würde, wollte man den Anfangsstrich von U_2 benutzen, nicht auskommen, muß also den Endstrich der Zunge nehmen. Im zweiten Fall braucht man den Anfangsstrich, das Ergebnis liegt rechts. Der rechts stehende Hinweis P-1 sollte daran erinnern, daß das Produkt zweier einstelliger Zahlen nicht eine zweistellige Zahl ist, wenn das Ergebnis rechts vom Einstellstrich der Zunge steht, sondern daß die Stellenzahl in diesem Fall um 1 vermindert werden muß. Ebenso ist das Produkt einer ein- und zweistelligen Zahl entweder 3- oder 2-stellig, das Produkt einer dreistelligen und einer vierstelligen 7- oder 6-stellig usf.; stets ist, wenn die Ablesung rechts erfolgt, die Stellenzahl des Produktes P um 1 zu vermindern (P-1). Man bilde selbst Beispiele!

§ 38. Hilfsmittel zur Steigerung der Genauigkeit.

Die Genauigkeit der Skalen O_1 und O_2 ist etwa 3 Wertziffern. Zu Anfang (z. B. bei 1243) kann man vier Wertziffern ablesen, am Schluß (z. B. 937) ist die letzte nicht mehr sicher zu verbürgen. Der prozentuale Fehler (der Fehler, bezogen auf die abgelesene Zahl) ist aber überall gleich, er beträgt etwa 0,10 %. Er ist bei 500 also 0,5, d. h. man kann nicht mehr sicher zwischen 499,5 und 500 unterscheiden.

Zur Steigerung der Genauigkeit gibt es verschiedene Wege:

Man benutzt eine Zylinderlinse auf dein Glasläufer; sie vergrößert die Teilung.

Man rechnet mit längeren Skalen. Es gilt folgende Tabelle:

Skalenlänge (1...10)	12,5	25	50	100	160	375	1250	cm
Ablesungsfehler	0,1	0,05	0,025	0,013	0,0078	0,0033	0,001	%

Es sei z. B. der genaue Wert einer Zahl x = 502,417. Dann werden die Ablesungen etwa sein:

Skalenlänge	12,5	25	50	100	160	375	1250
Ablesung	502	502,5	502,2	502,4	502,4	502,4	502,42

Bei 25 cm wird man nicht mehr feststellen können, ob x = 502,3, 502,5 oder 502,7 ist. Die Ablesung 502,4 wird bei 375 cm Länge sicher sein, bei 160 cm und 100 cm weniger zuverlässig.

Aus praktischen Gründen ist die Länge von 1 m wohl die obere Grenze für den Rechenstab, er würde sonst unhandlich werden.

§ 39. Rechenwalzen.

Für genaue Rechnungen fertigt die Firma Nestler Rechenwalzen an. Man denke sich einen sehr langen Rechenstab hergestellt (etwa 12½ m lang) und stelle sich vor, daß er in einzelne Teile von gleicher Länge zerschnitten sei. Diese werden nun nicht aneinander gesetzt, sondern untereinander auf einer Walze angeordnet. Diese entspricht dem Körper des Rechenstabes, die Zunge vertritt eine durchbrochene Trommel, welche dieselben Teilungen trägt, wie die Walze. Dem Glasläufer entspricht eine Zelluloidklammer, deren Strich entsprechende Stellen der festen und beweglichen Skala zur Deckung bringt. Wer mit dem Rechenschieber vertraut ist, kann ohne weiteres mit der Rechenwalze arbeiten.

Der Vorteil der Rechenwalze gegenüber dem Schieber ist die größere Genauigkeit. Die mittlere Rechenwalze liefert etwa 4 Wertziffern, die kleine 3 - 4, die große 5. Natürlich sind die Walzen nicht so leicht transportabel wie die Rechenschieber normaler Größe.

Die mittlere Rechenwalze leistet in der Genauigkeit dasselbe, wie eine 4-stellige, der große wie eine 5-stellige Logarithmentafel. Diesen gegenüber haben sie aber wesentliche Vorteile.

Das lästige Blättern und Interpolieren fällt weg.

Sie können unmittelbar wie Rechenschieber als Multiplikationstabellen benutzt werden (§ 32).

Da man an der Trommel verschiedene Zelluloidklammern gleichzeitig anbringen kann, kann man mit ihnen gleichzeitig einen Markbetrag in die verschiedenartigsten Valuten umrechnen. Es werden zu diesem Zweck Klammern geliefert, welchen die Namen der wichtigsten Börsenplätze aufgedruckt sind. Ebenso kann man bei Benutzung verschiedener Klammern Meter oder Kilogramm sofort in alle möglichen Längen- und Gewichtsmaße umrechnen.

Den Rechenmaschinen gegenüber ist folgendes hervorzuheben:

1. Die Rechenwalze streicht automatisch Wertziffern, welche für die Rechnung belanglos sind.
2. Die Rechenwalze arbeitet völlig geräuschlos. Sie schont die Nerven (auch die des Nachbars), die Rechenmaschine zermürbt sie,
3. Der Preis der Rechenwalze ist viel geringer.

§ 40. Steigerung der Genauigkeit ohne mechanische Hilfsmittel.

Kaufleute machen oft dem Rechenschieber den Vorwurf mangelnder Genauigkeit. Bezieht z. B. ein Kunde vom Weinhändler 92 Flaschen á 1,38 RM, so muß als Gesamtpreis 126,96 RM auf der Rechnung stehen. Der normale Rechenschieber zeigt 127 RM an. Es würde diese kleine Differenz belanglos sein, besonders da sie bei wiederholten Lieferungen bald in dem einen, bald in dem andern Sinne auftreten und sich im Durchschnitt aufheben würde, aber die kaufmännische Praxis verlangt nun einmal Genauigkeit bis zum Pfennig.

Ganz falsch ist es, wie es oft geschieht, diese Genauigkeit auch bei Kalkulationen anzuwenden. Kleine Preisschwankungen ändern das Ergebnis so stark, daß die Genauigkeit des Rechenschiebers völlig ausreicht. Für 1,37; 1,38; 1,39 RM würden wir in unserm Falle erhalten 126,04; 126,96; 127,88; die Angaben des Rechenschiebers sind 126; 127; 128 RM; sie befreien uns nur von Zahlenballast! Ebenso steht es bei Valutaschwankungen.

Für Kalkulationen genügt der Rechenschieber stets!

Will man genauer rechnen, so sei zunächst auf den vorigen Paragraphen verwiesen. Aber auch für den, der kein neues Instrument erwerben will, haben wir Rat. Wir rechnen in unserm Fall $1,37 \cdot 92 = 1,37\,(100 - 8) = 137 - 8 \cdot 1,37$, also

$1,37 \cdot 100 = 137,00$;	$1,38 \cdot 100 = 138,00$;	$1,39 \cdot 100 = 139,00$
$1,37 \cdot 8 = 10,96$;	$1,38 \cdot 8 = 11,04$;	$1,39 \cdot 8 = 11,12$
Gesamtpreis 126,04;	121,96;	127,88

Man sieht sofort, daß die obere Zeile absolut genau ist, während die Genauigkeit der zweiten durch den normalen Rechenschieber verbürgt werden kann.

Man könnte auch so rechnen:

$1 \cdot 92 =$	92,00;	92,00;	92,00
$0,37; 0,38; 0,39 \cdot 92 =$	34,00;	34,90;	35,90
Gesamtpreis	126,00;	126,90;	127,90

Hier können aber die Pfennige der zweiten Zeile nicht mehr verbürgt werden, wenn man die übliche Form des Rechenschiebers benutzt also auch nicht die Pfennige des Ergebnisses. Man müßte schon ein weitere Wertziffer mit 92 genau multiplizieren, also schreiben

$1,3 \cdot 92 =$	119,60;	119,60;	119,60
$0,07; 0,08; 0,09 \cdot 92 =$	6,44;	7,36;	8,28
Ergebnis	12614;	12616;	127,88

Wir haben folgende

Regel: Sollen zwei Zahlen mit einer vorgeschriebenen Genauigkeit mul tipliziert werden, so teilt man eine von ihnen in zwei Teile. Der größe Teil wird mit der anderen Zahl nach den Regeln des gewöhnlichen Rechnens multipliziert, der kleinere mit dem Rechenschieber. Die Einteilung der ersten Zahl ist so zu wählen, daß bei der Multiplikation des zweiten Teils die Genauigkeit des Rechenschiebers ausreicht.

Bemerkung: Die Einteilung kann durch Addition oder Subtraktion vorgenommen werden. Man wählt das Verfahren, welhes für die Rechnung bequemer ist.

Beispiel 43. Erhält z. B. ein Arbeiter für die Stunde 1,13 RM, so bekommt er für 17 Arbeitsstunden $17 \cdot 1,13$ RM.

$$\begin{array}{rr} 17 \cdot 1 = & 7,00 \\ 17 \cdot 0,13 = & 2,21 \\ \hline & 19,21 \end{array}$$

Beispiel 44. 12 Arbeitsstunden zu 1,82 RM werden vergütet mit $(2 - 0,18) \cdot 12$

$$\begin{array}{rr} 2 \cdot 12 = & 24,00 \\ 0,18 \cdot 12 = & 2,16 \\ \hline & 21,84 \end{array}$$

Beispiel 45. Auf 7 Stellen berechnet ist $\pi = 3{,}141593$; $3\frac{1}{7} = 3{,}142851$ also $\pi = 3\frac{1}{7} - 0{,}001264$. Soll ein Kreisdurchmesser d mit diesem sehr genauen Werte von 7v multipliziert werden, so rechnet man $3 \cdot d$ und $\frac{1}{7} \cdot d$ im Kopfe aus, $0{,}001264 \cdot d$ mit dem Rechenschieber und subtrahiert das letzte Ergebnis von der Summe der beiden vorhergehenden.

So ist der Aequatordurchmesser der Erde d = 12754794 m, der Aequatorumfang $d \cdot \pi$

$$\begin{aligned} 3 \cdot d &= 38264382 \\ \frac{1}{7} \cdot d &= 1822113 \\ 0{,}01264 \cdot d &= 16120 \\ d \cdot \pi &= 40070375 \end{aligned}$$

Der genaue Wert ist 40070368. Die beiden letzten Stellen des dritten Ausdrucks (20) können nicht mehr verbürgt werden, daher die geringfügige Abweichung.

Beispiel 46. Zu welcher Summe wachsen 43,20 RM bei 3,75 % Zinsen in 10 Jahren an? Die Summe soll auf den Pfennig genau berechnet werden.

Lösung: Wir berechnen noch die Zehntelpfennige und runden zum Schluß ab. $z = a \cdot q^{10}$; $a = 43{,}20$; $q = 1{,}0375$.

$$\begin{aligned} a \cdot 1 &= 43{,}200 \\ a \cdot 0{,}0375 &= 1{,}620 \\ a \cdot q &= 44{,}820 \\ a \cdot q \cdot 1 &= 44{,}820 \\ a \cdot q \cdot 0{,}0375 &= 1{,}681 \\ a \cdot q^2 &= 46{,}501 \end{aligned}$$

Läßt man jetzt entbehrliche Bezeichnungen fort, so erhält man:

$$\begin{array}{rr rr l} a \cdot q^2 = & 46{,}501 & a \cdot q^6 = & 53{,}878 & \\ & \underline{1{,}744} & & \underline{2{,}020} & \\ a \cdot q^3 = & 48{,}245 & a \cdot q^7 = & 55{,}898 & \\ & \underline{1{,}809} & & \underline{2{,}096} & \\ a \cdot q^4 = & 50{,}054 & a \cdot q^8 = & 57{,}994 & \\ & \underline{1{,}877} & & \underline{2{,}175} & \\ a \cdot q^5 = & 51{,}931 & a \cdot q^9 = & 60{,}169 & \\ & \underline{1{,}947} & & 2{,}256 & \\ a \cdot q^6 = & 53{,}878 & a \cdot q^{10} = & 62{,}425 & \sim 62{,}43 \text{ RM} \end{array}$$

Zur Probe (auf Richtigkeit und Einfachheit) der Rechnung geht man anders vor: man rechnet zunächst q^{10} aus. Da das Ergebnis 5 Wertziffern haben soll, muß auch q^{10} mit dieser Genauigkeit bestimmt werden

$$\begin{array}{rl} q = & 1{,}0375 \\ & \underline{0{,}0389} \\ q^2 = & 1{,}0764 \\ & \underline{0{,}0404} \\ q^3 = & 1{,}1168 \\ & \underline{0{,}0418} \\ q^4 = & 1{,}1586 \end{array}$$

$$\underline{0{,}0435}$$
$$q^5 = 1{,}2021$$

Da q^5 das Produkt aus 5 gleichen Faktoren q ist, so findet man q^{10} indem man dieses Produkt mit sich selbst multipliziert.

$$
\begin{aligned}
1 \cdot q^5 &= 1{,}2021 \\
0{,}2021 \cdot q^5 &= \underline{0{,}2430} \\
q^{10} &= 1{,}4451 \\
a \cdot q^{10} &= 43{,}2 \cdot 1{,}4451 \\
43{,}2 \cdot 1{,}4 &= 60{,}480 \\
43{,}2 \cdot 0{,}0451 &= 1{,}948 \\
a \cdot q^{10} &= 62{,}428 \quad \sim 62{,}43 \text{ RM}
\end{aligned}
$$

§ 41. Abgekürzte Multiplikation.

Besonders wertvoll ist der Rechenschieber in Verbindung mit der **abgekürzten Multiplikation**.

Will man z. B. den gewöhnlichen Logarithmus einer Zahl a (lg a in den natürlichen (ln a) umrechnen, so muß man ihn mit 2,3026 multiplizieren (ln a = 2,3026 · log a). Der Faktor ist auf 5 Wertziffern abgerundet. Man entnimmt z. B. einer vierstelligen Tafel lg 3 = 0,4771 und sucht den natürlichen Logarithmus von 3. Gewöhnlich rechnet man so:

```
      0,4771
    X 2,3026
       28626
        9542
     14313
     9542
  1,09857046
```

abgerundet 1,0986.

Man beginnt bei der Multiplikation mit der letzten, also wertlosesten Ziffer des zweiten Faktors. Besser verfährt man umgekehrt:

```
0,4771
X 2,3026
9542|
1431|3
   9|542
   2|8626
1,09857046
```

abgerundet 1,0986

Der (nachträglich eingefügte) senkrechte Strich. schneidet die Wert-Ziffern der Teilausdrücke ab, welche für das Ergebnis völlig belanglos sind. Bei der abgekürzten Multiplikation verzichtet man von vornherein auf sie. Da 0,4771 schon abgerundet ist, kann man in dem ersten Teilprodukt (9542) schon die letzte Wertziffer nicht mehr ganz sicher verbürgen, erst recht nicht beim zweiten die 3. Man rechnet hier also 3 · 1 = 3 (∼ 0); 3 · 7 = 2**1** (die 1 wird hingeschrieben) usf. Bei der Multiplikation mit 0 würde die rechte 7 des ersten Faktors zu berücksichtigen sein, bei der Multiplikation mit 2 die linke, die aber erhöht werden muß (7,7 ∼ 8). Also: 2 · 8 = 16 ∼ 20, 2 · 4 = 8, 8 + 2 = 10. Das letzte Produkt heißt 6 · 5 = 30, es ist also nur die 3 hinzuschreiben. Wir erhalten:

```
  0,4771
X 2,3026
    9542
```

1431
10
3
1,0986.

Arbeitet man mit dem Rechenschieber, so braucht man nur den ersten Bestandteil, 9542, auf gewöhnliche Weise zu ermitteln. Die Zu-satzgröße bleibt innerhalb der Genauigkeit unseres Instrumentes, man hat

0,4771
2,3026
9542 (2 · 4771; auf gewöhnliche Weise gefunden)
1444 (0,3026 · 4771; mit dem Rechenschieber)

Ergebnis: 1,0986

Ein anderes Beispiel!

Der Aequatordurchmesser der Erde ist 12755 km (auf ganze km abgerundet); wie groß ist der Aequatorumfang?

Lösung: $U = d \cdot \pi$, $\pi = 3{,}14159$. Mit der abgekürzten Multiplikation rechnet man:

12755
X 3,14159
38265
1276
510
13
6
1
40071

Bei Benutzung des Rechenschiebers vereinfacht sich die Rechnung auf:

12755
X 3,14159
38265 (3 · 12755 auf gewöhnliche Weise)
1806 (0,1416 · 12760 mit dem Rechenschieber)
40071

Man bilde selbst weitere Aufgaben mit beliebigen Zahlen!

§ 42. Genaues Multiplizieren großer Zahlen mit dem Rechenschieber.

Das kleine Einmaleins geht bis 9 · 9 = 81; es ist jedem bekannt. Der Rechenschieber von normaler Länge liefert jedes Produkt zweier ganzer Zahlen, dessen Betrag nicht größer ab 2000 ist völlig genau (also sicherlich das Produkt jeder einstelligen mit jeder zweistelligen Zahl). Daß 12 · 13 = 156 ist, liest man ohne weiteres ab. 12 · 37 ist etwa 445. Die dritte Wertziffer läßt sich nicht mit absoluter Bestimmtheit ablesen. Sie muß aber 4 sein, denn bei der gewöhnlichen Rechnung bildet man zunächst 2 · 7 = 14, man erhält also 4 Einer. Ebenso ist 9 · 89 = 801, da 9 · 9 = 81 ist; 33 · 86 = 1188 usf.

Beachtet man dies, so kann man auch größere Zahlen genau multiplizieren.

Es sei z. B. 2137 · 29 zu bilden. Man teilt die größere Zahl in Gruppen von je zwei Ziffern ein, die kleinere in einzelne Ziffern und multipliziert zunächst mit den Einern (9 auf O_1 einstellen!), dann mit den Zehnern

21|37
X 2|9
333 (9 · 37)
18900 (9 · 2100)

740 (20 · 37)

42000 (20 · 2100)

61973

Unter Fortlassung der überflüssigen Nullen kann man schreiben:

21|37
X 2|9
333
189
74
42
61973

In unserm Beispiel kommt man noch schneller ans Ziel, wenn man die beiden Ziffern des zweiten Faktors als eine Einheit auffaßt:

21|37
X 29

1073 (29 · 37)

609 (29 · 2100)

61973

Es ist dieses Verfahren deswegen möglich, weil die Teilausdrücke kleiner als 2000 sind. Man kann es stets dann benutzen, wenn die einzelnen Gruppen, in welche man die Faktoren zerlegt hat, verhältnismäßig kleine zweistellige Zahlen sind (kleiner als 45, da 45 · 45= =- 2025 ist).

Auch bei mehr Wertziffern versagt das Verfahren nicht. Wir wollen z. B. x = 31325 · 4126 berechnen!

3|13|25
X 41|26

650 (26 · 25)

338 (26 · 1300)

78 (26 · 30000)

1025 (4100 · 25)

533 (4100 · 1300)

123 (4100 · 30000)

x = 129246950

Soll dagegen das Produkt x = 9267 · 84 gefunden werden, so muß man den zweiten Faktor in die einzelnen Ziffern auflösen

92|67
X 8|4

268 (4 · 67)

368 (4 · 9200)

536 (80 · 67)

736 (80 · 9200)

778428

Natürlich muß man das Verfahren erst etwas einüben, sonst rechnet man auf gewöhnliche Weise schneller. Auch sicherer? Kaum, denn die Teilausdrücke rechnet der Schieber ohne jeden Rechenfehler, der Rechner muß nur auf ihre richtige Stellung achten und tut zu Anfang vielleicht gut, die hier fortgelassenen Nullen hinzuschreiben. Daß unser Verfahren aber stets eine gute Probe auf die Richtigkeit einer Rechnung ist, die man in der gewöhnlichen Weise ausgeführt hat, wird niemand leugnen.

Es sollen jetzt dieselben Aufgaben mit der großen Rechenwalze gelöst werden; sie läßt das Produkt jeder zweistelligen mit jeder dreistelligen Zahl völlig genau finden.

a)

2|137	
X 29	
3973	(29 · 137)
58	(29 · 2000)
61973	

ja man kann das Ergebnis, das fünfstellig sein muß und dessen letzte Ziffer 3 sein muß, direkt finden (2137 · 29).

b)

31|325	
X 41|26	
8450	(26 · 325)
806	(26 · 31000
13325	(4100 · 325)
1271	4100 · 31000
129246950	

c)

9|267	
X 84	
22428	(84 · 267)
756	(84 · 9000)
778428	

Sind Dezimalbrüche zu multiplizieren, so behandelt man sie wie ganze Zahlen und streicht nachher soviele Wertziffern ab, wie in den beiden Faktoren zusammen hinter dem Komma stehen. Der Rechenschieber löst also jedes Multiplikationsexempel, welches in der Kaufmannspraxis vorkommt, auf Wunsch ganz genau, er gibt außerdem, wenn man ihn auf gewöhnliche Weise gebraucht, einen Näherungswert, der vor gröberen Rechenfehlern schützt. Mehr kann auch der gewissenhafteste Kaufmann nicht verlangen, deshalb findet sich Nestlers kaufmännischer Rechenschieber auf so manchem Kontortisch.

§ 43. Beispiele zum vorigen Paragraphen.

Beispiel 47. 1 Dollar hatte vor der Entwertung den Wert von 4,198 RM. Wieviel RM sind 344,28 Dollar? Lösung: 344,28 · 4,198 = 1445,28744 $\sim$ 1445,29 RM. Man rechne noch einmal abgekürzt, so daß die überflüssigen Wertziffern (744) von vornherein wegfallen. Man bilde selbst ähnliche Aufgaben und prüfe die Ergebnisse durch gewöhnliche Rechnung.

Beispiel 48. Wie hoch belaufen sich die einfachen Zinsen, welche 41338 RM zu $3\frac{3}{4}$ % in 5 Jahren bringen?

Lösung: 413,38 · 5 · 3,75 = 413,38 · 18,75 = 7750,88 RM. (Vereinfachung: 413,38 · 19 - 413,38 · ¼).

Beispiel 49. 1 Sonnentag (Umlauf derSonne um die Erde) dauert 24 Stunden; 1 Stemtag (Umlauf eines Fixsternes) 3,93447 Stunden. Wieviel Stunden machen a) 365,25 Sonnentage, b) 366,25 Sternentage aus?

Lösung: a) 365,25 X 24= 8766 Stunden; b) 366,25 X 23,93447 = 8766,00. Im Laufe eines Jahres (365,25 Tage) durchläuft die Sonne das Himmelsgewölbe einmal weniger oft (365,25 mal) als ein Fixstern (366,25 mal); ein Sonnentag ist also etwas länger als ein Sterntag. Vereinfachung der zweiten Rechnung: 366,25 · 23,93447 = (365,25 + 1) (24 - 0,06553) = 365,25 · 24 + 24 - 365,25 · 0,06553 - 0,06553

365,25 · 24	= 8766	(s. o.)
24	= 24	
-365,25 · 0,06553	= 23,9	Rechenschieber
-0,06553	$\sim$ 0,1	
	8766,0	

Beispiel 50. $1{,}037^{10}$ (Beispiel 46 auf S. 24) soll auf 7 Wertziffern genau ausgerechnet werden.

Lösung: 1,445044. Man bilde selbst weitere entsprechende Aufgaben.

§ 44. Multiplikation mit der Skala R.

In § 27 auf S. 13 wurde gezeigt, wie man die Differenz a - b geometrisch darstellen kann. In § 15 auf S. 7 wurde dargetan, wie man die Multiplikation dadurch erreichen kann, daß man den Logarithmus des einen Faktors um den Ergänzungslogarithmus des andern vermindert. In § 28 auf S. 13 ist gesagt, daß die Skala R die Ergänzungslogarithmen der auf ihr angegebenen Zahlen trägt. Faßt man dies zusammen, so ergibt sich sofort folgende Regel:

Satz 1 a. Um das Produkt a · b zu bilden, sucht man "a" auf U_1 auf, stellt mit Hilfe des Läuferstriches die Zahl "b' der reziproken Skala R genau darüber und findet das Ergebnis auf U_1 unter dem Strich "1" der reziproken Skala.

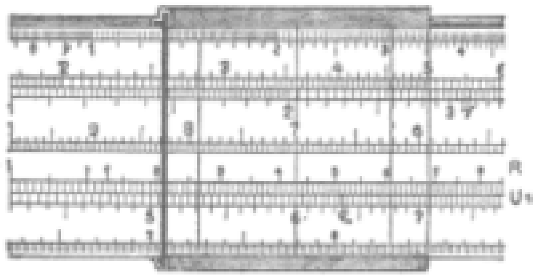
Da der Anfangs- oder Endstrich der reziproken Skala stets über einer Zahl der unteren Stabskala stehen wird, ist hierdurch jede Multiplikation ausführbar, ohne daß die Zunge gelegentlich um eine Einheit verschoben werden muß. Das wurde ja gerade auf S. 20 als Nachteil bei der Benutzung von U_1 und U_2 zur Multiplikation hervorgehoben. Man überzeugt sich am besten von der Zweckmäßigkeit dieses Verfahrens, wenn man die früheren Multiplikationsaufgaben nach ihm behandelt.

§ 45. Die Multiplikation dreier Faktoren bei Benutzung der Skala R.

Wie eben bemerkt, steht das Ergebnis "a · b" auf U_1 unter dem Einheitssstrich von R. Dieser fällt aber genau mit dem Einheitsstrich von U_2 zusammen. Geht man jetzt also noch auf U_2 weiter bis zur Marke "c", so multipliziert man das bisher erhaltene Ergebnis (a · b) noch mit c. (Vgl. § 30, Satz I.)

Regel: **Um das Produkt a · b · c zu bilden, sucht man "a" auf U_1 auf, stellt (mit Hilfe des Glasläufers) "b" auf R genau darüber und verschiebt dann den Glasläufer, bis er auf "c" der Skala U_2 steht. Genau darunter findet man auf U_1 das Ergebnis.**

Fig. 14.



In Fig. 14 findet man so: 6 · 7 · 11 = 462; 6 · 7 · 12,5 = 525 usw.

Während man also nach dem früheren Verfahren (§ 86 auf S. 72) zur Berechnung des Produktes a · b · c die Zunge einmal einstellen und einmal verschieben mußte, genügt jetzt eine Einstellung und eine Läuferverschiebung, und diese ist bequemer.

Man muß natürlich unter Umständen die Skala U_2 um eine Einheit verschieben.

Treten mehr als drei Faktoren auf, so benutzt man abwechselnd R und U_2, z. B. wird x = a · b · c · d berechnet nach der Formel:

lg x	=	lg a	-	Erg. lg b	+	lg c	-	Erg. lg d
U_1		U_1		R		U_2		R.

Darin bedeutet "Erg. lg" den Ergänzungslogarithmus. Unter den Zahlen sind die Skalen angegeben, auf denen man sie aufsucht.

Man rechne die Beispiele auf S. 21 noch einmal durch!

Beispiel 51. Aus der Lösung eines Silbersalzes scheidet ein elektrischer Strom von 1 Ampère in 1 Sekunde 1,118 mg metallisches Silber aus. Zur Versilberung eines Bechers ließ man den Strom von 1,4 Ampère 11 Stunden durch eine Höllensteinlösung gehen. Wie viel wog der Niederschlag?

Lösung: Da eine Stunde 3600 Sekunden dauert, so ist x = 1,118 · 3600 · 1,4 · 11 = 62000 mg = 62,0 g.

Weiß man, daß ein Strom von 1 Ampère Stärke in 1 Sekunde 0,829 mg Kupfer, 0,304 mg Nickel, 0,681 mg Gold, 0,339 mg Zink abscheidet (weitere Angaben stehen in physikalischen Lehrbüchern), so kann man selbst leicht weitere Aufgaben bilden. Soll z. B. der Abdruck einer antiken Münze elektrolytisch mit Kupfer gefüllt werden, und muß man zu diesem Zweck einen Strom von 3,15 Ampère 8½ Stunden lang durch eine Lösung von Kupfervitriol schicken, so ist das Gewicht der Nachbildung x = 0,329 · 3600 · 3,15 · 8,5 = 31700 mg = 31,7 g.

Beispiel 52. Eine Riemenscheibe vom Durchmesser 325 mm macht in der Minute 1450 Umdrehungen. Wieviel Meter legt ein Punkt des Umfanges in einer Sekunde zurück?

Lösung: Würde sich die Scheibe in einer Sekunde nur einmal herumdrehen, so wäre der Weg für einen Punkt des Umfanges $d \cdot \pi = 0{,}325 \cdot 3{,}142$ m. Da sich in einer Sekunde aber $\frac{1450}{60} = 24{,}2$ Umdrehungen vollziehen, so ist seine Geschwindigkeit $24{,}2 \cdot 0{,}32 \cdot 3{,}142 = 24{,}7$ m/sec.

Beispiel 53. Eine Glühlampe wird 16 Stunden und 25 Minuten lang durch einen Strom von der Spannung 112 Volt und der Stärke 0,52 Ampère gespeist. Welche Energie wird dazu aufgewandt, gemessen in elektrischem, mechanischen und thermischem Maß?

Lösung: Die Arbeit in Joule findet man, wenn man die Stromstärke (in Ampère) mit der Spannung (in Volt) und der Zeit (in Sekunden) multipliziert; wir erhalten $A = 0,\ 52 \cdot 112 \cdot 16{,}42 \cdot 3600 = 3440000$ Joule. In der Praxis rechnet man mit Kilowattstunden, 1 KWST=3600000 Joule, also 1 Joule = $2{,}78 \cdot 10^{-7}$ KWST; $A = 3{,}44 \cdot 10^{6} \cdot 2{,}78 \cdot 10^{-7} = = 0{,}956$ KWST. Es ist 1 KWST = 367000 mgk; A = 351000 mkg; man könnte, wenn die elektrische Energie restlos in mechanische Arbeit umgeformt würde, durch sie eine 1170 kg (58½ Zentner schwere Masse 300 m in hoch (Eiffelturm in Paris) heben. Endlich ist 1 Joule = 0,00024 kg-Kalorien; A = 826 kg-Kal.; man könnte mit der erzeugten Warme 8,26 l Wasser von 0° auf 100° erhitzen.

Probe: 1 kg-Kal. entspricht 424 mkg; $826 \cdot 424 = 350000$ mkg.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß man sich bei Rechenschiebern. welche die Skala R nicht tragen, diese leicht herstellen kann. Man zieht die Zunge ganz heraus, dreht sie um, aber so, daß, ihre bisherige Oberseite oben bleibt, und schiebt sie in ihrer umgekehrten Lage wieder in die Nut ein, so daß sich die Anfangsstriche decken. Dabei vertauschen O_2 und U_2 ihre Lage und Richtung. Vergleicht man jetzt U_2 in der neuen Lage mit U_1 so sieht man, daß auf ihr die Teilung von rechts nach links läuft, wie es bei R sein muß. Ebenso steht es mit O_1 und O_2.

V. Kapitel
Die Division.

§ 46. Division durch graphische Subtraktion der Logarithmen.

Wir erinnern noch einmal an die graphische Subtraktion (§ 27 auf S. 13). Denken wir an Satz 2 auf S. 5, so erhalten wir ohne weiteres

Satz II. Um $\frac{a}{b}$ auszurechnen, schiebt man die Zahl b der Zunge (O_2) unter die Zahl a des Stabes (O_1). Das Ergebnis $\frac{a}{b}$ findet sich auf der Stabteilung über "1" der Zunge.

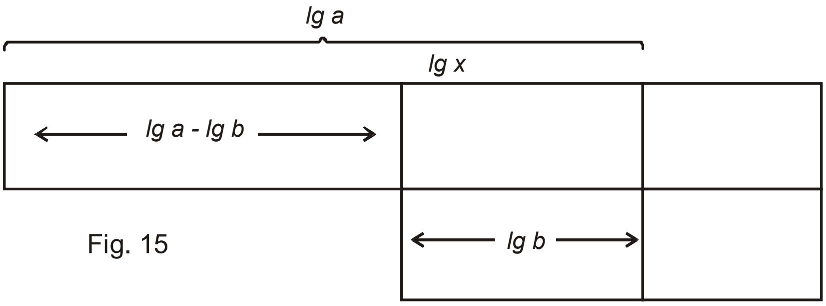


Fig. 15

Zusatz 1. Es ist gleichgültig, welche "1" der Zunge man benutzt. Der Uebergang von der einen zur andern bedeutet nur eine Zungenverschiebung um eine Einheit (§ 35 auf S. 20) und diese beeinflußt die Wertziffern des Ergebnisses überhaupt nicht. Ein Versuch zeigt unmittelbar die Richtigkeit unserer Behauptung.

Zusatz 2. Statt O_1 und O_2 kann man auch U_1 und U_2 benutzen. Man wird im allgemeinen a auf U_1, b auf U_2 einstellen und findet dann $\frac{a}{b}$ unter der "1" der Zunge auf U_1. Man kann auch umgekehrt a auf U_2 über b auf U_1 stellen und liest dann das Resultat auf U_2 über der "1" der Körperskala U_1 ab.

Während bei der Multiplikation mit U_1 und U_2 oft eine Verschiebung der Zunge um eine Einheit nötig ist, ist das bei der Division, nie der Fall. Auch bei der Benutzung von U_1 und U_2 steht stets entweder der Anfangsstrich oder der Endstrich der Zunge über einer Zahl 1 der Körperskala.

§ 47. Beispiele zum vorigen Paragraphen.

Beispiel 54. Man verwandle die Brüche $\frac{3}{17}$, $\frac{5}{19}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{5}{29}$ (§ 3 auf S. 2) in Dezimalbrüche!

Lösung: $\frac{3}{17}$ = 0,1765; $\frac{5}{19}$ = 0,263; $\frac{1}{7}$ = 0,143; $\frac{5}{16}$ = 0,3125; $\frac{5}{29}$ = 0,1724.

Beispiel 55. Verschiedene Glasröhren haben einen Querschnitt von 1 qcm. Sie sind unten geschlossen und sollen mit Flüssigkeiten so hoch gefüllt werden, daß deren Gewicht gerade 10 g beträgt. Wie groß sind die Flüssigkeitshöhen, wenn das spezifische Gewicht s gegeben ist?

Lösung: Die gesuchte Höhe sei h cm, dann ist. der Rauminhalt der Flüssigkeit h ccm. Da 1 ccm s Gramm wiegt, so ist $s \cdot h = 10$, $h = 10 : s$. In jedem Lehrbuch der Physik findet man die spezifischen Gewichte. So entsteht die folgende Tabelle:

Flüssigkeit	Quecksilber	Schwefelsäure	Salzsäure
Spezifisches Gewicht	13,6	1,84	1,19
Gesuchte Höhe	0,735 cm	5,43 cm	8,40 cm
Flüssigkeit	Wasser	Alkohol	Aether
Spezifisches Gewicht	1,00	0,79	0,73
Gesuchte Höhe	10,00 cm	12,66 cm	13,70 cm

Beispiel 56. Ein Blechstück von 4 X 5 cm wird elektrolytisch mit einer Silberschicht bedeckt, die 8,5 g wiegt. Wie dick ist sie, wenn das spezifische Gewicht des Silbers 10,4 ist?

Lösung: Die beiden Seiten des Bleches sind $2 \cdot 20 = 40$ qcm. Hat die Silberschicht die Stärke x cm, so ist ihr Volumen 40 x ccm;

ihr Gewicht $40\,x \cdot 10,4 = 416\,x$ Gramm. $416\,x = 8,5$; $x = \frac{8,5}{416} = 0,02045$ cm = 0,2045 mm.

Beipiel 57. Der in Beispiel 50 auf S. 29 erwähnte Becher sei zylindrisch, sein Durchmesser sei 6 cm, seine Höhe 11 cm. Welche Dicke hat der Silberniederschlag?

Lösung: Der Radius des Grundkreises ist 3 cm, seine Fläche $3 \cdot 3 \cdot \pi = 28,3$ qcm, die Mantelfläche $M = d \cdot \pi \cdot h = 6 \cdot \pi \cdot 11 = 207$ qcm, also die Innen- sowie die Außenfläche (wenn man von der geringen Wandstärke absieht) 235 qcm. Es ist daher $470 \cdot x \cdot 10,4 = 62$; $x = \frac{62}{470 \cdot 10,4} = \frac{62}{4890} = 0,0127$ cm = 0,127 mm.

Beispiel 58. Damit der Ueberzug haltbar ist, darf die Stromstärke für 1 qdm nicht größer als 1 Ampère sein. Ist diese Forderung in den letzten Aufgaben erfüllt?

Lösung: i = 1,4 Ampère; O = 4,7 dm. Auf 1 qdm kommen $\frac{1,4}{4,7} = 0,298$ Amp. Die Bedingung ist erfüllt.

Beispiel 59. Ein Schlittschuhläufer wiegt 75 kg. Mit wieviel Kilo belastet er die Eisdecke, wenn sein Körper auf einem Schlittschuh ruht? Die Unterstützungsfläche sei 15 cm lang und 0,65 cm breit.

Lösung: Die Unterstützungsfläche ist $15 \cdot 065 = 9,75$ qcm. Auf jedes Quadratzentimeter kommen $\frac{75}{9,75} = 7,69$ kg. Der Läufer übt auf das Eis einen Druck von 7,69 kg/qcm = 7,69 Atmosphären aus. Mit diesem Druck könnte man den Wasserstrahl eines Springbrunnens (theoretisch) 77 m hoch treiben (Kirchturmhöhe), auch für eine Dampfmaschine würde ergenügen. Der große Druck verflüssigt momentan etwas Eis, das Schmelzwasser vermindert als Schmiermittel die Reibung.

Beispiel 60. Die Staubteilchen, welche 1 ccm Luft enthält, kann man auf mikroskopischem Wege zählen. Es sind ungefähr: a) in 4000 in Höhe 100; b) in 2000 m 700; c) in 1000 m 6000; d) an der See 500; e) in der Kleinstadt nach Regen 32000; f) in der Kleinstadt bei sonnigem Wetter 130000; g) in einem Zimmer mit 2 Gasflammen 1,9 Millionen; h) dort unter der Decke 5,4 Millionen. Bei einem Atemzuge unter h) gelangt eine gewisse Menge Staub in die Lunge. Wieviel Atemzüge muß man unter den andern Verhältnissen tun, um dieselbe Verunreinigung zu erzielen?

Lösung: Im Fall a) so viele, wie 100 in 5400000 enthalten ist; $\frac{5400000}{100} = 54000$; b) $\frac{5400000}{700} = 7710$; c) 900; d) 10800; e) 169; f) 41,5; g) 2,84. Man macht in der Minute etwa 18, am Tage etwa 26000 Atemzüge.

Beispiel 61. Die chemische Formel der Schwefelsäure ist H_2SO_4; das Atomgewicht des Wasserstoffs (H) ist 1, das des Schwefels (S) ist 32; das des Sauerstoffs (O) ist 16. Wieviel Gramm Wasserstoff, Schwefel und Sauerstoff enthalten 100 g Schwefelsäure?

Lösung: Setzen wir das Gewicht eines Atoms Wasserstoff = 1, so wiegen 2 Atome (H_2) 2, 1 Atom Schwefel 32, 4 Atome Sauerstoff (O_4) $4 \cdot 16 = 64$, ein Molekül Schwefelsäure $2 + 32 + 64 = 98$. Das Gewichtsverhältnis ändert sich nicht bei größeren Mengen, 98 g Schwefelsäure enthalten 2 g Wasserstoff, 32 g Schwefel, 64 g Sauerstoff; 1 g Schwefelsäure enthält den 98ten Teil, 100 g Schwefelsäure 100 mal so viel, also $\frac{200}{98} = 2,04$ g Wasserstoff, $\frac{3200}{98} = 32,7$ g Schwefel; $\frac{6400}{98} = 65,3$ g Sauerstoff. Man stelle die prozentuale Zusammensetzung möglichst vieler anderer Verbindungen fest; die Formeln und Atomgewichte stehen in jedem Lehrbuch der Chemie.

Beispiel 62. Im Reichstag, der 1928 gewählt wurde, war die Stärke der Parteien folgende: 1. Sozialdemokraten 153, 2. Deutschnationale 78, 3. Zentrum 61, 4. Kommunisten 53, 5. Deutsche Volkspartei 45, 6. Demokraten 25, 7. Wirtschaftspartei 23, 8. Bayrische Volkspartei 17, 9. Nationalsozialisten 12, 10, andere Parteien und parteilos 24. Wieviel Prozent der Abgeordneten gehörten den verschiedenen Parteien an?

Lösung: Auf 491 Abgeordnete kommen 153 Sozialdemokraten, auf einen $\frac{153}{491}$, auf hundert $\frac{15300}{491} = 31,2$. Entsprechend ist die Rechnung bei den andern Parteien. Man erhält 1. 31,2 %; 2. 15,9 %;. 3. 12,4 %; 4.

10,8 %; 5. 9,15 %; 6. 5,1 %; 7. 4,7 %; 8. 3,45 %; 9. 2,45 %; 10. 4,9 %. Warum ist die Summe nicht genau gleich 100?

Man bilde selbst weitere Aufgaben.

§ 48. Die Ermittlung der Stellenzahl ohne Abschätzung. (Q + 1).

Die Stellenzahl von $\frac{a}{b}$ ist, wenn a und b einstellige Zahlen sind, entweder 0 oder 1. Die erste Möglichkeit haben wir z. B. bei $x = \frac{5}{6} = 0{,}833...$, allgemein, wenn a kleiner als b ist. Ist a größer als b, so tritt der andere Fall ein, z. B. ist $\frac{7}{5} = 1{,}4$. Rechnet man beides mit den unteren Skalen des Rechenschiebers aus, so ergibt sich, daß beim ersten Fall (a < b) die Ablesung am rechten Endstrich der Zunge vorgenommen wird, im zweiten Fall (a > b) links, Das läßt sich leicht verallgemeinern. Hat in $\frac{a}{b}$ der Zähler m Stellen, der Nenner n, so ist die Stellenzahl des Quotienten, wenn am Endstrich abgelesen wird, m - n, wenn man dagegen links, am Anfangsstrich, das Ergebnis findet, so ist sie m - n + 1. Darauf weist die Marke Q + 1 hin. Man prüfe diese Bemerkungen an den Aufgaben des vorigen Paragraphen!

§ 49. Der Rechenschieber als Proportionalitätstabelle.

Das Verhältnis zweier Zahlen a und b mißt man zweckmäßig dadurch, daß man feststellt, wie oft die eine in der andern aufgeht, also durch den Bruch $\frac{a}{b}$, anders geschrieben a : b. Wenn z. B. Augsburg (a) 165525 Einwohner hat, Lahr (b) 14075, so ist a : b = 165 525 : 14075 = 11,75; auf einen Einwohner von Lahr kommen 11,75 Augsburger. Hat man zwei andere Zahlen, c und d, so kann es vorkommen, daß deren Verhältnis, c : d gleich dem vorigen ist. Dies trifft hier z. B. für c = 47; d = 4 zu. Wenn es der Fall ist, so spricht man von einer Proportion dieser 4 Zahlen; man schreibt sie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ oder a : b = c : d; in unserm Fall 165525 : 14075 = 47 : 4. Die Einwohnerzahlen verhalten sich wie 47 : 4; auf 4 Lahrer Bürger kommen 47 Augsburger. Das ist anschaulicher als die Angabe der Einwohnerzahlen selbst, da man sich so große Zahlen nicht unmittelbar vorstellen kann.

Setzt man $\frac{a}{b} = m$, so ist auch $\frac{c}{d} = m$. Um m zu finden, sucht man nach Satz II in § 46 (S. 31) a auf O_1 auf und stellt darunter b auf O_1. Die beiden Zahlen stellen Zähler und Nenner eines Bruches dar, der Bruchstrich wird durch die Trennungslinie zwischen dem Körper und der Zunge des Rechenschiebers gebildet. Das Ergebnis m steht auf O_1, über dem Einheitsstrich O_2 ($\frac{a}{b} = \frac{m}{1}$).

Besteht nun die Proportion a : b = c : d, so hätte man statt a und b ebensogut c und d nehmen können, man kommt auf dasselbe Ergebnis m.

Regel: Gilt die Proportion a : b = c : d, so kann man die Zunge stets so einstellen, daß a über b,- c über d steht.

Man. prüfe den Satz an dem eben berechneten Beispiel! Die Zahlen eines Verhältnisses dürfen, ohne daß sich sein Wert ändert, mit einer beliebigen Zahl multipliziert oder durch sie dividiert werden. (Erweitern und Kürzen von Brüchen.) Man zeige am Rechenschieber, daß z. B. 2 : 3 = 4 : 6 = 6 : 9 = 74 : 111 = 306 : 459 ist usf., ferner, daß die Verhältnisse 1 : 1,5; 0,5 : 0,75; 0,1538 : 0,231 usw. denselben Wert haben!

Wie eine Einstellung der Zunge mit einem Schlage eine ganze Reihe von Multiplikationen ausführt (§ 32 auf S. 17), so löst sie hier auf einmal eine ganze Reihe von Divisionsexempeln.

§ 50. Beispiele zum vorigen Paragraphen.

Beispiel 63. Nach einer Zeitungsnotiz hat die Standard Oil Company in Taft (Kalifornien) bei der Oelquelle Mascot Nr. 1 ein Bohrloch 3120 m in die Erde getrieben und damit bisher die größte Tiefe erreicht. Jemand besitzt einen Globus von 30 cm Umfang und möchte durch einen Nadelstich diese Tiefe markieren. Geht das? Ein anderer will in die Wand eines Kugelhauses (Radius 16 m) einen Nagel entsprechend tief, einschlagen.

L ö s u n g: Nach der Definition der Längeneinheit ist der Erdumfang 40000 km, also der Erdradius r = $\frac{40000}{2\pi} = \frac{20000}{\pi}$ =6370 km; der Radius des Globus ist $\frac{15}{\pi}$ = 4,775 cm. Die Tiefe des Nadelstichs sei x cm, die des Nagels y m, dann gilt die Proportion

6370 : 3,12 = 4,775 : x = 16 : y.

Es ist x = 0,00234 cm = 0,0234 mm. Dieselbe Einstellung liefert y = 0,00784 m = 7,84 mm.

(Abschätzung: $\frac{\text{Bohrloch}}{\text{Erdradius}} = \frac{3{,}12 km}{6370 km} \sim \frac{1}{2000}$). Unsere Broschüre: "Des Rechenkünstlers Zauberstab" hat 68 Seiten, also 34 Blätter, die zusammen etwa 1,8 mm stark sind. Ein Blatt Papier hat die Dicke $\frac{1{,}8}{34}$ = 0,053 mm, der Nadelstich darf dies 34 Blatt noch nicht zur Hälfte durchbohren!

Beispiel 64. 1 Pfund Sterling (£) hatte früher den Wert von 20,40 RM, 1 Pengö (Ungarn) gilt 0,734 RM. Wieviel Pengö erhielt man für 2¾ £?

L ö s u n g: Je wertvoller die Münzeinheit ist, umso weniger solcher Einheiten braucht man; die Zahl der Münzen verhält sich also umgekehrt wie der Wert der Münzeinheit. In unserm Beispiel gilt daher die Proportion: 2,75 : x = 0,734 : 20,4. Man stellt 0,734 auf O_1 ein, darunter 29,4 auf O_2. Auf O_1 bedeckt man 2,75 mit dem Läuferstrich; man findet darunter auf O_2 x = 76,4 Pengö.

P r o b e: 2,75 £ = 2,75 · 20,4 = 56,1 RM; 76,4 Pengö = 76,4 · 0,734 = 56,1 RM.

Beispiel 65. Man rechne Beispiel 61 und 62 von § 47 auf S. 31 mit Benutzung von Proportionen!

L ö s u n g: In Beispiel 61 auf S. 32 haben wir 98 : 100 = 2 : x, 98 : 100 = 32 : y; 98 : 100 = 64 : z. Stellt man auf O_1 98 ein, darunter auf O_2 100 und verschiebt den Läuferstrich so, daß er der Reihe nach auf O_1 die Zahlen 2; 32; 64 bedeckt, so findet man darunter auf O_2 der Reihe nach x = 2,04; y = 32,7, z = 65,3. In Beispiel 62 ist die Lösung ganz entsprechend. Jede Prozentrechnung kann durch eine Proportion gelöst, werden.

Beispiel 66. sin 55° = 0,8192, sin 56° = 0,8290. Wie groß ist sin 55° 27'?

L ö s u n g: Man kann hier annehmen, daß der Sinus gleichmäßig mit dem Winkel wächst. Rechnen wir in Einheiten der vierten Wertziffer, so steigt der Sinus um 98, wenn der Winkel um 1° = 60' wächst, also haben wir die Proportion 60' : 27' = 98 : x. Dabei ist x die Größe, welche man dem kleineren Sinuswert hinzufügen muß, um den gesuchten zu erhalten. x = 44; sin 55° 27' = 0,8192 + 0,0044 = 0,8236.

Besonders bei 6- und 7-stelligen Logarithmentafeln ist die Interpolation durch den Rechenschieber sehr zu empfehlen.

Beispiel 67. tg 20° = 0,3640; tg 21° = 0,3839; tg α = 0,3710. Wie groß ist α?

L ö s u n g: α ist um x' größer als 20°. Wächst der Winkel um 60', so wächst der Tangens um 199 Einheiten der vierten Dezimale, also 60 : x = 199 : 70; x = 21'; α = 20° 21'.

§ 51. Brüche mit verschiedenen Zählern und gleichen Nennern.

In Beispiel 61 und 62 auf S. 32, bei der Berechnung von Durchmessern oder Radien aus Kreisumfängen und in vielen anderen Fällen soll man eine Reihe von Brüchen mit gleichen Nennern in Dezimalbrüche verwandeln. Sie seien etwa $\frac{a}{n}$, $\frac{b}{n}$, $\frac{c}{n}$, ..., ihre Werte x_1, x_2, x_3, ...

Dann ist $\frac{a}{n}$ = x_1, also a = n · x_1, $\frac{x_1}{a} = \frac{1}{n}$.

Man hat daher folgende Einstellung:

O_1	1	x_1	x_2	x_3	
O_2	n	a	b	c	oder in Worten:

Bei der Benutzung von O_1 und O_2 stellt man "1" auf O_1 ein, setzt darunter "n" der Skala O_2 und findet über "a", "b", "c" der Teilung O_2 auf O_1 die Ergebnisse $x_1 = \frac{a}{n}$, $x_2 = \frac{b}{n}$, $x_3 = \frac{c}{n}$ usw. Wie man sieht, kommt dies Verfahren darauf hinaus, daß man erst $\frac{1}{n}$ berechnet und diesen (nicht abgelesenen) Wert der Reihe nach mit a, b, c, ... multipliziert.

Hierbei ist nur eine Läufer-, keine Zungenverschiebung nötig. Man rechne entsprechende Aufgaben noch einmal auf diese Weise durch, ebenso mit Benutzung von U_1 und U_2!

§ 52. Mehrfache Division.

Soll ein Ausdruck von der Form $x = \frac{a}{b \cdot c}$ berechnet werden, so braucht man nur zu beachten, daß $\frac{a}{b \cdot c} = \frac{a}{b} : c$ oder $\frac{a}{c} : b$ ist. Man rechnet also $\frac{a}{b}$ aus, liest das Ergebnis aber nicht ab, sondern stellt sofort die Marke "c" der Zunge darunter und findet über ihrer "1" auf O_1 das Ergebnis x. Man kann natürlich auch zuerst $b \cdot c$ bestimmen und a durch die gefundene Zahl dividieren. Auch hier kann man die Ablesung des Zungenergebnisses vermeiden. Man findet b c auf O_1 stellt a darunter und liest x auf O_2 ab.

Beispiel 68. Für ein elliptisches Beet ist die Breite 2 b = 3,6 m vorgeschrieben. Seine Fläche soll 14,5 qm sein. Wie lang muß es gemacht werden?

Lösung: Die Länge sei 2a Meter. Es ist $a \cdot b \cdot \pi = F$; $a = \frac{F}{b \cdot \pi}$; $a = \frac{14,5}{1,8 \cdot \pi}$ m. α) $\frac{14,5}{1,8} = 8,05$; $a = \frac{8,05}{3,142} = 2,56$; 2a = 5,12 m. β) $\frac{14,5}{\pi} = 4,62$ m. $a = \frac{4,62}{1,8} = 2,56$ m. γ) $1,8 \cdot \pi = 5,65$; $a = \frac{14,5}{5,65} = 2,56$ m.

Die durch eine gewellte Linie unterstrichenen Zahlen braucht man nicht abzulesen.

Beispiel 69. Eine Flasche hat die Grundfläche 37,6 qcm. Wie hoch muß sie sein, damit sie 2 kg Quecksilber fassen kann?

Lösung: Die Höhe sei x cm. Eine 1 cm hohe Quecksilber-schicht würde $37,6 \cdot 13,6$ g wiegen (vgl. Seite 31, Beispiel 55). Da das Gewicht 2000 g sein soll, so ist $37,6 \cdot 13,6 \cdot x = 2000$; x = 2000; $x = \frac{2000}{37,6 \cdot 13,6} = 3,91$ cm. Man prüfe dies (wohl unerwartete) Ergebnis durch verschiedene Anlage der Rechnung!

Beispiel 70. Ein kastenförmiges Bassin soll 3,25 m lang, 2,65 m breit sein und 12 t konzentrierte Schwefelsäure vom spezifischen Gewicht 1,84 fassen. Wie tief muß es sein?

Lösung: $x = \frac{12}{3,25 \cdot 2,65 \cdot 1,84} = 0,757$ m.

Auch diese Aufgabe rechne man auf verschiedene Arten. Man vermeide das lästige Zurückziehen der Skala dadurch, daß man die zweckmäßigste "1" der Zunge benutzt.

Weitere Beispiele kann man sich leicht selbst bilden.

§ 53. Zusammengesetzte Multiplikation und Division.

Ein Grundstück von 815 x 62 m soll gegen ein anderes von gleicher Fläche eingetauscht werden, dessen Breite 73 m ist. Wie lang ist es. Natürlich $\frac{315 \cdot 62}{73}$ m. Man könnte rechnen: $315 \cdot 62 = 19500$; 19500 :73 = 268 m. Das Zwischenresultat, 19500, hätte man nicht zu ermitteln brauchen, es genügt die Fixierung durch den Strich des Glasläufers. Um das Endergebnis zu finden, ist eine Verschiebung der Zunge (73 unter 19500) nötig, also im ganzen eine zweimalige Einstellung. Bequemer kommt man zum Ziele, wenn man die Regel beobachtet:

Bei Ausdrücken, die aus Multiplikationen und Divisionen zusammen. gesetzt sind, rechnet man immer abwechselnd. Man beginnt mit der Division.

In unserem Falle findet man: 315 : 73 = 4,31 (Ablesung unnötig), $4,31 \cdot 62 = 268$.

Ist $x = \frac{a \cdot b \cdot c}{A \cdot B \cdot C}$ so ermitteltman erst $\frac{a}{A}$ (nicht ablesen, sondern nur festhalten): $\frac{a}{A} \cdot b$; $\frac{a}{A} \cdot \frac{b}{B}$; $\frac{a}{A} \cdot \frac{b}{B} \cdot c$; usw.

§ 54. Beispiele zum vorigen Paragraphen.

Beispiel 71. Bei 4¾ % stehen 518 RM 189 Tage auf Zinsen, 225,30 RM 151 Tage, 928,75 RM 65 Tage, 81,65 RM 29 Tage. Wie viel machen die gesamten Zinsen aus?

Lösung: 100 RM bringen in einem Jahre 4,75 RM, in einem Tage $\frac{4,75}{360}$, in 189 Tagen $\frac{189 \cdot 4,75}{360}$; 518 RM bringen 5,18 mal soviel. Die Einzehinsen sind daher

$\frac{4,75 \cdot 189 \cdot 5,18}{360}$; $\frac{4,75 \cdot 151 \cdot 2,253}{360}$; $\frac{4,75 \cdot 65 \cdot 9,2875}{360}$; $\frac{4,75 \cdot 29 \cdot 0,865}{360}$, also 12,92; 4,49; 7,96; 0,31 RM. Da überall derselbe Faktor $\frac{4,75}{360}$ = 0,0132 auftritt, so haben wir im wesentlichen wiederholte Multiplikation vor uns.

Beispiel 72. Ein Pendel von der Länge 1 Meter braucht, um eine Schwingung (von Umkehrpunkt zu Umkehrpunkt) zu vollführen, eine gewisse Zeit T sec. Sie ist gegeben durch die Gleichung $T^2 = \frac{\pi^2 \cdot l}{g}$; g ist die Schwerebeschleunigung, 9,81 m/sec². Wie lang muß es sein, damit die Schwingungsdauer gerade 1 sec ist? Wie lang ist es für T = $\frac{1}{5}$ sec, wie lang für T= 1 min?

Lösung: $l = \frac{g \cdot T \cdot T}{\pi \cdot \pi}$. Im ersten Fall erhält man $l = \frac{9,81}{\pi \cdot \pi}$ = 0,994 m; im zweiten $\frac{9,81 \cdot 0,04}{\pi \cdot \pi}$ = 0,0398 m; im dritten $\frac{9,81 \cdot 3600}{\pi \cdot \pi}$ = 3580 m.

Beispiel 73. Der Widerstand eines Leiters ist $\frac{s \cdot l}{q}$ Ohm. Dabei ist l die Länge in Metern, q der Querschnitt in qmm, s der spezifische Widerstand. Für einige Drähte aus verschiedenem Material gelten die folgenden Daten; der (in der letzten Zeile angegebene) Widerstand soll ermittelt werden.

Stoff	Silber	Kupfer	Eisen	Manganin	Konstantan
Spez. Widerstand	0,016	0,017	0,095	0,42	0,49
Länge	2,3 cm	418 m	252 m	8,85 m	12,2 m
Querschnitt	0,14 qmm	1,25 qmm	2,36 qmm	0,45 qmm	0,35 qmm
Widerstand	0,00263	5,68	10,14	8,26	17,08 Ohm

Beispiel 74. Ist l die Wellenlänge eines Tones in Metern, n die Anzahl der Schwingungen in einer Sekunde, v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles, so ist $n \cdot l = v$; es gilt also für verschieden hohe Töne die Beziehung $n_1 \cdot l_1 = n_2 \cdot l_2 = n_3 \cdot l_3$ usw

Man kann mit einer Sirene die Schwingungszahlen messen. Es sei $n_1 = 435$, $l_1 = 0,76$ m. Wie groß ist die Wellenlänge eines anderen Tones, wenn seine Schwingungszahl gegeben ist?

Lösung: $l_2 = \frac{n_1 \cdot l_1}{n_2}$. Man prüfe danach folgende Tabelle:

n	326	348	391	435	489	522	588	
l	1,014	0,950	0,84	0,760	0,676	0,633	0,562	m

Einfacher wird die Aufgabe, wenn man $n_1 \cdot l_1$ ein für allemal berechnet.

Beispiel 75. Wieviel Franken kostet 1 m eines Tuches, das man in England zu 87 Pence (d) für das Yard (yd) kauft, wenn die Bezugsspesen 7 % betragen und der Kurs 25,5 ist?

Lösung: 1 m kostet in England $\frac{87}{0,914}$ d, da 1 m = 0,914 yd ist.

$\frac{87}{0,914}$ d = $\frac{87}{0,914 \cdot 240}$ £, da 1£ = 240 d; $\frac{87}{0,914 \cdot 240}$ £ = $\frac{87 \cdot 25,5}{0,914 \cdot 240}$ fr.

Weil durch den Transport 7 % Unkosten hinzukommen, muß das Ergebnis mit 1,07 multipliziert werden; x = $\frac{87 \cdot 25,5 \cdot 1,07}{0,914 \cdot 240}$ = 10,82 fr.

Wenn man die Aufgabe bei verschiedener Anordnung der Reihenfolge rechnet, so findet man die für die Praxis wichtige **Regel**: **Bei Produkten und Quotienten schreibe man stets die Zahlen nach der Größe ihrer ersten Wertziffer geordnet; mit der kleinsten fängt man an.**

Beispiel 76. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich die Erde um die Sonne, wenn ihr mittlerer Abstand 149,5 Millionen km beträgt?

Lösung: In einem Jahr ist die Bahn der Erde $2 \cdot r \cdot \pi = 299 \cdot \pi \cdot 10^6$ km. Um den Weg während eines Tages zu finden, muß man durch 365,25 dividieren; in 1 Stunde wird der 24. Teil davon zurückgelegt. Will man die Sekundengeschwindigkeit haben, so muß man das Ergebnis durch $60 \cdot 60 = 3600$ teilen. Also ist

$$v = \frac{299 \cdot 3{,}142 \cdot 10^6}{365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600} = 28{,}8 \text{ km/sec.}$$

§ 55. Die Lösung linearer Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Sind a, b, c ... bekannte, x, y, z ... unbekannte Zahlen, so ist $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1$,

$a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2$, die Normalform eines Systems zweier linearer Glei-chungen, aus denen x und y bestimmt werden sollen.

Aus

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \cdot z = d_1$$
$$a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 \cdot z = d_2$$
$$a_3 \cdot x + b_3 \cdot y + c_3 \cdot z = d_3$$

kann man (von Ausnahmen abgesehen) x, y, z ermitteln. In den Schulbüchern sind oft die Größen a_1, b_1, c_1, …, meistens die Resultate x, y, z … ganze Zahlen oder einfache Brüche. In der Praxis kommen die linearen Gleichungen besonders dann vor, wenn die "Ausgleichsrechnung" auf Aufgaben der Geodäsie, Astronomie usw. angewendet wird. Hier ist aber keine Rede mehr von den oben genannten Vereinfachungen. Wir bringen also einige "unretuschierte" Aufgaben.

Beispiel 77. Wie groß ist x und y, wenn die Gleichungen

1) $11{,}18\,x + 2{,}17\,y = 21{,}17$

2) $6{,}25\,x - 3{,}16\,y = -3{,}34$ gegeben sind.

Lösung: Man läßt die eine Gleichung unverändert stehen und multipliziert die andere mit einem passend gewählten Faktor so, daß nach der Addiition der beiden Gleichungen eine Unbekannte fortfällt. Will man z. B. x entfernen, so behält man (aus praktischen Gründen) die Gleichung bei, in der x die kleinere Beizahl hat, also hier die zweite! Die erste muß man mit $-\frac{6{,}25}{11{,}18}$ multiplizieren. Wir haben daher

2) $6{,}25\,x - 3{,}16\,y = -3{,}34$

1a) $-6{,}25\,x - 1{,}21\,y = -11{,}84$

Man sieht leicht, daß diese Multiplikation sich nach einer Feststellung der Zunge ($\frac{6{,}25}{11{,}18}$) allein durch Verschiebung des Glasläufers, vollzieht; die Zahlen, welche in Gleichung 1a) der umgeformten Gleichung 1) auftreten, können also augenblicklich abgelesen werden.

Die Addition von 2) und 1a liefert

3) $-4{,}37\,y = -15{,}18$; $y = \frac{15{,}18}{4{,}37} = \mathbf{3{,}47}$.

Den erhaltenen Wert von y setzt man in eine der ursprünglichen Gleichungen, etwa 1) ein:

$11{,}18\,x + 7{,}53 = 21{,}17$; $11{,}18\,x = 13{,}64$; $x = \frac{13{,}64}{11{,}18} = \mathbf{1{,}22}$.

Zur Probe führt man x und y in die eben nicht benutzte Gleichung 2) ein. $6{,}25\,x = 7{,}63$; $3{,}16\,y = 10{,}96$; $6{,}25\,x - 3{,}16\,y = 7{,}63 - 10{,}96 = -3{,}33$. Das genaue Ergebnis soll -3,34 sein; innerhalb der Rechenschiebergenauigkeit ist die Aufgabe richtig gelöst.

Beispiel 78.

1) $1{,}23\,x + 2{,}46\,y + 0{,}324\,z = -1{,}002$

2) $-2{,}17\,x + 1{,}74\,y + 2{,}33\,z = 913$

3) 3,18 x - 0,28 y + 1,652 z = 10,18

Lösung: Um x herauszuschaffen, lassen wir die erste Gleichung unverändert und multiplizieren 2) mit $\frac{1,23}{2,17}$; 3) mit $-\frac{1,23}{3,18}$. Wir erhalten

1) 1,23 x + 2,46 y + 0,324 z = - 1,002;

2a) 1,23 -- + 0,986 y + 1,321 z = 5,29;

3a) -1,23 x + 0,1083 y - 0,639 z 3,94.

Nach der Addition [1) + 2a); 1) + 3a)] findet man, wenn man überflüssige Stellen wegstreicht

4) 3,45 y + 1,645 z = 4,29

5) 2,57 y - 0,315 z = -4,94

Wir beseitigen y dadurch, daß wir die letzte Gleichung stehen lassen und die vorhergehende mit $-\frac{2,57}{3,45}$ multiplizieren:

5) 2,57 y - 0,315 z = - 4,94

4a) -2,57 y - 1,226 z = - 3,20. Die Addition ergibt

6) - 1,541 z = 8,14; z = $\frac{8,14}{1,541}$ = 5,28.

Man kann den für z gefundenen Wert in eine der Gleichungen 4) oder 5) einsetzen, z. B. in 4)

3,45 y + 8,69 = 4,29; 3,45 y = -4,40; y = $\frac{4,40}{3,45}$ = 1,276.

Endlich erhält man x, wenn man y und z in eine der ursprüng-lichen Gleichungen einsetzt, etwa in 3). Es ergibt sich

3,18 x + 0,357 + 8,72 = 10,18; 3,18 x = 1,103; x = 0,347.

Die Probe besteht darin, daß man die soeben gefundenen Werte für x, y, z in die beiden andern ursprünglichen Gleichungen, also 1) und 2) eingehen läßt:

1)	1,23 x = 0,427	2)	-2,17 x = -0,753
	2,46 y = - 3,14		1,74 y = -2,22
	0,324 z = 1,710		2,33 z =12,30
	-1,003		9,327

Innerhalb der Rechenschiebergenauigkeit stimmen die Proben völlig.

§ 56. Näherungsweise Darstellung eines Bruches durch kleinere Zahlen.

Während im Beispiel 54 auf S. 31 gewöhnliche Brüche in Dezimalbrüche umgewandelt wurden, ist es bisweilen für das praktische Rechnen angenehm, wenn man umgekehrt Dezimalbrüche durch gewöhnliche ersetzen kann, vorausgesetzt, daß Zähler und Nenner klein sind; sonst hätte die Umformung keinen Sinn. Man wird dabei oft auf absolute Genauigkeit verzichten können und sich mit Näherungswerten begnügen. Bisweilen wird es auch erwünscht sein, wenn man umständliche gewöhnliche Brüche näherungsweise durch einfache ersetzen kann.

Im ersten Fall stellt man den gegebenen Dezimalbruch auf O_1 ein, darunter die "1" von O_2. Im zweiten sucht man den Zähler auf O_1 auf und stellt darunter den Nenner (auf O_2). Ueber der Zahl "1" der Zunge steht (wie vorher) der Wert des gegebenen Bruches in dezimaler Schreibweise.

Jetzt verschiebt man den Glasläufer so, daß sein Strich zwei möglichst genau übereinanderstehende Zahlen, "a" auf O_1 und "b" auf O_2 überdeckt, dann ist $\frac{a}{b}$ der gesuchte Näherungswert. Man nimmt etwa den Nenner b der Reihe nach = 2, 3, 4…19 an.

Beispiel 79. Man drücke π = 3,1416 näherungsweise aus.

Lösung: Man stellt 0,1416 auf O_1 ein und findet als gute Näherungswert $\frac{1}{7}$; $\pi \approx 3\frac{1}{7}$. Genauer ist $3\frac{100}{706}$ = $3\frac{50}{353}$ oder $3\frac{12}{83}$; $3\frac{13}{92}$; $3\frac{14}{99}$ usf., doch ist dies praktisch belanglos.

Beispiel 80. Wie groß ist näherungsweise a) 0,4343 (Umwandlungszahl für Logarithmen), b) 0,914 (1 Yard = 0,914 m), c) 1,732 (= $\sqrt{3}$)?

Lösung: a) 0,4343 $\approx \frac{13}{30}$, genauer $\frac{43}{99}$; b) 0,914 $\approx \frac{11}{12}$, genauer $\frac{32}{35}$; c) 0,732 $\approx \frac{8}{11}$, genauer $\frac{11}{15}$.

Beispiel 81. Das Jahr dauert 365,2422 Tage; man zeige, daß für den Dezimalbruch a) ¼, b) $\frac{97}{400}$ je ein Näherungswert ist. Das Jahr des julianischen Kalenders dauert 365¼ Tage, da auf 4 Jahre 4 · 365 + 1 Tage fallen (1 Schalttag). 400 Jahre würden 400 · 365 + 100 Tage enthalten. Im gregorianischen Kalender läßt man drei dieser Schalttage aus, hat also für die Länge eines Jahres $\frac{400 \cdot 365 + 97}{400}$ = 365 + $\frac{97}{400}$.

Beispiel 82. Man unterscheidet beim Mond drei Umlaufszeiten, den siderischen Monat zu 27 Tagen, 7 Stunden, 43 Minuten, 11,5 Sekunden, (abgekürzt 27d 7h 43m 11,5s); den synodischen zu 29d 12h 44m 2,8"; den drakonitischen zu 27d 5h 5m 36s. Man stelle Stunden, Minuten, Sekunden als Bruchteile eines Tages durch einfache Zahlen näherungsweise dar!

Lösung: 1d = 24h = 1440m = 86400s.

27 d = 27 d

7h = $\frac{7}{24}$ d = 0,2917

43m = $\frac{43}{1440}$ d = 0,0299

11,5s = $\frac{11,5}{86400}$ d = 0,0001

0,3217

Der siderische Monat dauert 27,3217d der synodische 29,5306, der drakonitische 27,2122. Für den ersten Dezimalbruch findet man z. B. $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{22}$, $\frac{43}{134}$, usw.; für den zweiten ½, $\frac{8}{15}$, $\frac{9}{17}$, $\frac{26}{49}$ für den dritten $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{14}$, $\frac{7}{33}$, $\frac{10}{47}$, $\frac{17}{80}$ usw.

Beispiel 83. Die Zahl, welche angibt, wieviel synodische Monate ein Jahr enthält, soll durch Näherungsbrüche angegeben werden.

Lösung: $\frac{365,2422}{29,5306}$ = 12 + $\frac{10,8750}{29,5306}$, also ungefähr $12\frac{1}{3}$, $12\frac{3}{8}$, $12\frac{4}{11}$, $12\frac{7}{19}$; 19 Jahre sind also ziemlich genau 19 · $12\frac{7}{19}$ = 235 synodische Monate. Meton (430 v. Chr.) benutzte diese Tatsache, um einen Kalender aufzustellen, der sich dem Sonnen- und dem Mondlauf anpassen sollte.

Beispiel 84. In welchem Verhältnis steht der drakonitische Monat zum synodischen?

8 29,5306 2,3184 19 242

Lösung: $\frac{s}{d} = \frac{29,5306}{27,2122} = 1 + \frac{2,3184}{27,2122} \approx 1 + \frac{19}{223} = \frac{242}{223}$; 223 synodische Monate sind fast genau gleich 242 drakonitischen. Nach Verlauf dieser Zeit 19 · $\frac{223}{235}$ = 18 Jahren; genauer 19 · (1 - $\frac{12}{235}$) = 19 - 0,97 = 18,03 Jahren = 18 Jahren 11 Tagen wiederholen sich Sonnen- und Mondfinsternisse.

Weitere ähnliche Beispiele bietet die Astronomie sowie die Zeit- und Festrechnung in reichem Maße.

§ 57. Reziproke Werte.

Ist a irgendeine Zahl, so nennt man $\frac{1}{a}$ ihren reziproken Wert.

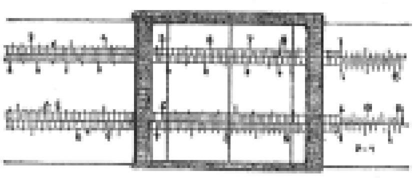
Der Reziprokwert von 5 ist 0,2; der von $\frac{1}{3}$ gleich 3; der von ¾ ist $\frac{4}{3}$ = 1,333.

Erstes Verfahren zur Berechnung von reziproken Werten. Man stellt a auf der Skala O_2 unter den Endstrich "1" von O_1 und liest das Ergebnis auf O_1 über dem Anfangsstrich von O_2, ab. Ist a ein Bruch, so vertauscht man Zähler und Nenner und führt die Division auf gewöhnliche Weise aus (§ 46). Man kann auch U_1 und U_2 benutzen.

Zweites Verfahren. Auf S. 6 wurde gesagt, daß der Ergänzungslogarithmus einer Zahl a der Logarithmus ihres reziproken Wertes ($\frac{1}{a}$) ist. Auf Seite 29 ist gesagt, daß man durch eine passende Einlagerung der Zunge es erreichen kann, daß in der neuen Lage dem auf O_1 abgetragenen Logarithmus einer Zahl auf O_2 der Ergänzungslogarithmus gegenübersteht, ebenso bei U_1 und U_2. Geht man nun von den Logarithmen zu den Zahlen selbst über, die auf den Skalen abgetragen sind, so ergibt sich, daß jetzt "a" und "$\frac{1}{a}$"- auf O_1 und O_2, und U_1 und U_2 genau übereinanderstehen, daß man also durch eine Einstellung des Glasläuferstriches sofort den reziproken Wert einer Zahl erfahren kann. Fig. 16 sagt uns daß $\frac{1}{6,5}$ = 0,154 und $\frac{1}{8,06}$ = 0, 124 ist.

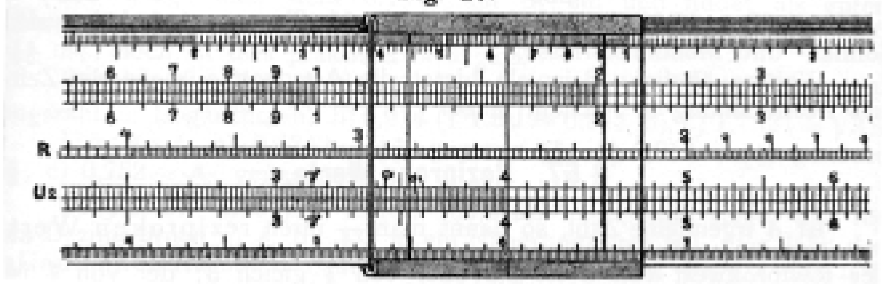
Ein Nachteil ist nur, daß die zu vergleichenden Skalen nicht nebeneinander liegen und man sich daran gewöhnen muß, auf dem Kopf stehende Ziffern zu lesen.

Fig. 16.



Drittes Verfahren. Die eben erwähnten Schwierigkeiten vermeidet die bei den meisten Rechenschiebern angebrachte Skala R. Sie korrespondiert mit der Teilung U_1. Während auf U_2 die Logarithmen der Zahlen angebracht sind, zeigt die entsprechende Stelle auf R die Ergänzungslogarithmen. Sucht man also auf U_2 eine Zahl auf, so findet man darüber auf R deren reziproken Wert und umgekehrt.

Fig. 17.



Es ist noch zu bemerken, daß bei der Berechnung einer Reihe von Reziprokwerten die Zunge verschoben werden muß, wenn man das erste Verfahren wählt, beim zweiten und dritten ist nur eine Läuferverschiebung notwendig.

§ 58. Beispiele zum vorigen Paragraphen.

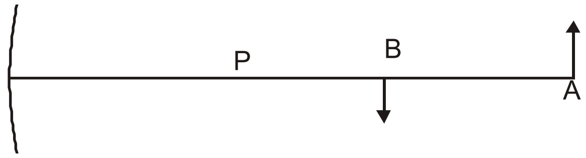
Beispiel 85. Man bestimme die reziproken Werte der ganzen Zahlen von 1 bis 20 und prüfe die Richtigkeit der Ergebnisse durch gewöhnliches Rechnen!

Lösung: $\frac{1}{1}$ = 1; ½ = 0,5; $\frac{1}{3}$ = 0,333… usf.

Beispiel 86. Ein Hohlspiegel entwirft von einem a Meter entfernten Gegenstand ein Bild in der Entfernung b m. Ist f die Brennweite, der Abstand, in dem unendlich entfernte Objekte abgebildet werden, so gilt die

Beziehung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$. Das Spiegelteleskop eines Astronomen hat die Brennweite f = 1,4 m. Es wird auf einem 27,5 rn entfernten Baumwipfel gerichtet. Wo entsteht das Bild?

Fig. 18



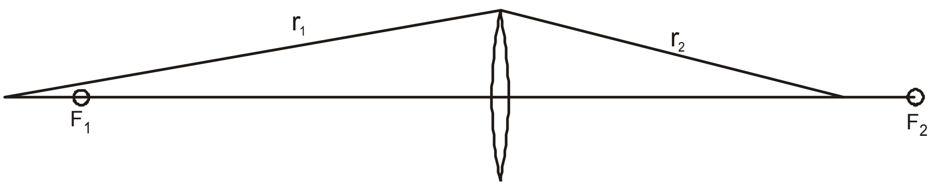
Lösung: $\frac{1}{27,5} + \frac{1}{b} = \frac{1}{1,4}$; $\frac{1}{b} = \frac{1}{1,4} - \frac{1}{27,5}$ = 0,715 - 0,0364; $\frac{1}{b}$ = 0,679; b = 1,474 m. Das Okular muß um 7,4 cm zurückgeschoben werden.

Beispiel 87. Ein photographischer Apparat hat die Brennweite 13,5 cm, Wie weit muß die Mattscheibe vom Objektiv entfernt sein, wenn der Gegenstand a) 1 m, b) 2 m, c) 4 m., d) 6 m, e) 8 m, f) 10 m vor dem Apparat steht?

Lösung: Es gilt dieselbe Formel wie vorher, wir finden für die gesuchte Entfernung. a) 0,156; b) 0,145; c) 0,140; d) 0,138; e) 0,137; f) 0,137 m.

Beispiel 88. Für die Brennweite f einer Linse gilt die Formel $\frac{1}{f} = (n-1) \cdot (\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2})$. Darin ist n der Brechungsindex der Glassorte, während r_1 und r_2 die Krümmungsradien der beiden Kugelflächen sind, welche die Linse begrenzen. Wie groß ist die Brennweite, wenn die Linse beiderseitig konvex ist und der Krümmungsradius der einen Fläche 6,75 cm, der der andern 4,75 cm ist? Der Berechnungsindex sei a) 1,5 (Kronglas), b) 1,7 (Flintglas), c) 2,5 (Diamant).

Fig. 19



Lösung: a) 5,57 cm; b) 3,98 cm; c) 1,86 cm. Die Aufgabe c) hat natürlich nur theoretischen Wert.

Beispiel 89. In einer elektrischen Leitung zweigen sich vier Drähte ab, die sich nachher wieder vereinigen (Parallelschaltung). Sie sollen durch einen einzigen Draht ersetzt werden. Welchen Widerstand ω muß dieser haben, wenn die Teilwiderstände ω_1 = 12,4 Ohm; ω_2 = 7,94 Ohm; ω_3 = 43,6 Ohm; ω_4 = 218 Ohm sind?

Lösung: Die Elektrotechnik lehrt, daß hier die Formel gilt:

$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} + \frac{1}{\omega_3} + \frac{1}{\omega_4}$. Für unsere Zahlenwerte findet man $\frac{1}{\omega}$ = 0,234; ω = 4,27 Ohm.

Beispiel 90. Jemand berechnet die Stücke eines Dreiecks aus den Seiten a = 5 cm, b = 6 cm, c = 7 cm. Er findet die Höhen h_a = 5,88 cm, h_b = 4,90, h_c = 4,20 cm, die Ankreisradien ρ_a = 3,675 cm, ρ_b = 4,90 cm, ρ_c = 7,35 cm, den Inkreisradius ρ = 1,633 cm. Zur Kontrolle der Richtigkeit benutzt er die Formeln:

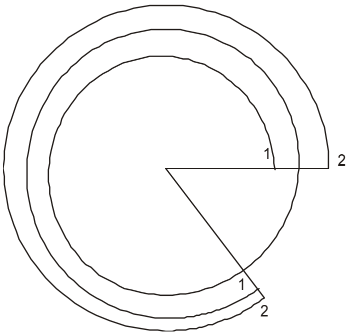
$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c}$; $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$; $(a+b+c) \cdot (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = (h_a + h_b + h_c) \cdot (\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c})$;

$\frac{1}{h_a} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c})$ und entsprechend. Was lehrt die Probe?

Lösung: Die Probe stimmt.

Beispiel 91. Ein Beobachter steht im Mittelpunkt einer kreisförmgen Rennbahn. Ein Radfahrer durcheilt sie in t_1 = 42 sec, ein anderer in t_1 = 53sec. In einem bestimmten Augenblicke stehen sie für den Beobachter genau hintereinander. Wann geschieht dies wieder?

Fig. 20



Lösung: Nach t sec, wenn der schnellere die Bahn einmal mehr umrundet hat als der langsamere. Der Sehstrahl vom Beobachter nach dem ersten Radfahrer dreht sich in t_1 sec um 360°, 1 sec um $\frac{360}{t_1}$, in tsec um $\frac{360 \cdot t}{t_1}$. Es ist also $\frac{360 \cdot t}{t_1} - \frac{360 \cdot t}{t_2} = 360$ oder $\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} = \frac{1}{t}$. In unserm Fall ist $\frac{1}{t}$ = 0,00495, t = 202 sec = 3 min 22 sec.

Beispiel 92. Die Erde umwandert die Sonne in t_1 = 365 Tagen, der Mars in t_2 = 687 Tagen. Wann wiederholen sich die Stellungen dieser drei Himmelskörper?

Lösung: Erde und Mars beschreiben nahezu Kreisbahnen um die (ruhende) Sonne. Somit ist diese Aufgabe auf die vorige zurückgeführt. $\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} = \frac{1}{t}$ = 0,001285; t = 779 Tage. Man führe ähnliche Rechnungen mit andern Planeten aus!

§ 59. Division mit der reziproken Skala.

Aus Satz 3 auf S. 6 ergibt sich unmittelbar

Satz III. Um $\frac{a}{b}$ zu bilden, sucht man "a" auf U_1 auf, setzt darüber b nach Bedarf den Anfangs- oder Endstrich von R und verschiebt den Glasläufer so, daß ein Strich die Zahl "b" auf R bedeckt; unmittelbar darunter steht auf U_1 das Ergebnis.

1. Bemerkung: Man kann dasselbe erreichen, wenn man die Zunge in der auf S. 40 geschilderten Art umlegt.

2. Bemerkung: Man ersetzt in Satz III einfach die Division durch die Multiplikation mit dem reziproken Werte ($a \cdot b = a \cdot \frac{1}{b}$), ähnlich wie früher (S. 29) statt der Multiplikation die Division durch den Reziprokwert vorgenommen wurde a · b = $a : \frac{1}{b}$.

Bei Benutzung der Skala R gehen also für die Multiplikation und Division die umgekehrten Regeln wie für die normalen Skalen U_1 und U_2. Man rechne möglichst viele der bisher behandelten Aufgaben auf die soeben angegebene Art nach!

§ 60. Brüche mit gleichen Zählern und verschiedenen Nennern. Umgekehrte Proportionalität.

Bleibt in dem Bruche $\frac{a}{x}$ der Zähler a konstant und nimmt der Nenner x verschiedene Werte (x_1, x_2, x_3, …) an, so stellt man a in der vorher (§ 59, S. 42) angegebenen Weise ein. Beachtet man Satz III, so erhält man die verschiedenen Werte ($\frac{a}{x_1}$, $\frac{a}{x_2}$...) allein durch eine Verschiebung des Läufers, während die Zunge fest bleibt.

Wenn zwei Zahlen a und b den Größen a_1 und b_1 proportional sind, so gilt die Beziehung a : b = $a_1 : b_1$ sind sie ihnen umgekehrt proportional so ist a : b = $b_1 : a_1$ oder $a \cdot a_1 = b \cdot b_1$. Man sucht dann "a" auf U_1 auf, stellt darüber "a_1" auf R und würde das Ergebnis $a \cdot a_1$ unter "1" von R auf U_1 finden. Statt dessen stellt man den Läuferstrich auf "b" der Teilung U_1. Darüber steht auf R " b_1". Man kann auch "b" auf R, " b_1" auf U_1 ablesen.

Beispiel 93. Verschiedene Sportsleute brauchen zum 100-Meterlauf 11,5; 11,8; 12,5; 12,1; 11,9; 12,9; 12,4; 12,3; 11,7; 12,6 Sekunden. Wie groß ist die durchschnittliche Geschwindigkeit?

Lösung: Die Geschwindigkeit des ersten Läufers ist $\frac{100}{11{,}5}$ = 8,70 m/sec die des zweiten $\frac{100}{11{,}8}$ = 8,47; weiter erhält man 8,00; 8,26; 8,40; 7,75; 8,06; 8,13; 8,55; 7,94 m/sec. Der Durchschnitt ist 8,226 m/sec.

Beispiel 94. Beim 400-Meterlauf wurden 1912 in Stockholm 48,2 sec. erzielt, 1924 in Paris 48; 47,8; 47,6 sec. Wieviel m/sec machten die Läufer?

Lösung: 8,30; 8,33; 8,37; 8,40 m/sec.

Beispiel 95. Die Pole eines Bunsenelementes, dessen elektro-motorische Kraft e = 2,05 Volt und dessen innerer Widerstand ω_i = 0,04 Ohm ist, werden durch einen äußeren Widerstand (Draht) ω_a verbunden. Wie groß ist die Stärke des so entstehenden Stromes, wenn ω_a = 9,5; 19,7; 53,4; 1200 Ohm ist.

Lösung: $i = \frac{e}{\omega_i + \omega_a}$, also im ersten Fall $i = \frac{2{,}05}{9{,}54}$ = 0,215 Ampère.

Weiterhin erhält man 0,1039; 0,0384; 0,00171 Ampère.

Beispiel 96. Das Produkt aus dem Atomgewicht und der spezifischen Wärme ist für alle festen chemischen Elemente nahezu gleich, nämlich 6,2. Die spezifische Wärme läßt sich verhältnismäßig leicht bestimmen, sie ist für Aluminium 0,217; Schwefel 0,171; Eisen 0,113; Kupfer 0,09305; Silber 0,056; Gold 0,031; Blei 0,0309. Wie groß sind die Atomgewichte?

Lösung: Neben den berechneten Atomgewichten geben wir die experimentell ermittelten in Klammern an; in der obigen Reihenfolge erhalten wir 28,6 (27,1); 36,25 (32,07); 54,9 (55,84); 66,6 (63,57); 110,7 (107,88); 200 (197,2); 200,6 (207,1). Die Abweichungen rühren daher, daß 6,2 ein Mittelwert ist, nicht von der "Ungenauigkeit" des Rechenschiebers.

Beispiel 97. Eine allseitig abgesperrte Gasmenge möge v cbm einnehmen und unter einem Druck von p Atmosphären stehen. Aendert man bei konstanter Temperatur das Volumen - es werde v_1 cbm -so ändert sich auch der Druck. Nennen wir den Druck nach der Volumenänderung p_1 so gilt die Bezeichnung

$p : p_1 = v_1 : v$ oder $p \cdot v = p_1 \cdot v_1$ (Mariottesches Gesetz).

Es sei das Anfangsvolumen 2,4 cbm, der Anfangsdruck 1,38 Atm. Das Gas werde erst auf 2,2; 2,0; 1,8; 1,6; 1,4 cbm zusammengepreßt dann auf 2,6; 2,8; 3,0; 3,2; 3,4 cbm ausgedehnt. Wie groß ist in jedem Fall der Druck?

Lösung: 1,506; 1,656; 1,84; 2,07; 2,37; 1,274; 1,183; 1,104, 1,035; 0,974 Atm.

Beispiel 98. Der von einem Elektrizitätswerk entnommene Strom geht durch einen Widerstand von ω_1 = 53 Ohm und erzeugt hier eine Stromstärke i_1 = 3,82 Ampère. Wie groß ist bei gleichbleibender Spannung die Stromstärke, wenn ω_1 durch ω_2 = 62; 77,5; 103,1; 212 Ohm ersetzt wird?

Lösung: $\omega_1 \cdot i_1 = \omega_2 \cdot i_2$. Man erhält für i_2 3,27; 2,61; 1,965; 0,955 Amp.

§ 61. Abgekürzte Division.

Will man einen Winkel, der in Graden, Minuten und Sekunden gegeben ist, in Bogenmaß (vgl. § 69) umrechnen, so verwandelt man ihn in Sekunden und dividiert deren Anzahl durch ρ" = 206265. Es sei z. B. a = 14° 23' 32,4". Man hat 14° = 14 · 3600 = 50400"; 23' = 23 · 60 = 1380', also a = 50 400" + 1380" + 32,4" = 51812,4" Auf gewöhnliche Weise rechnet man:

|:206265|
51812,4| = 0,25119
412530|
105594|0
103132|5
2461|50
2062|65
398|850
206|265

Die Rechnung ist nicht nur sehr umständlich, sondern auch deshalb bedenklich, weil man hinter der letzten Wertziffer (4) des Dividenden unbegrenzt viele Nullen annimmt, während sie doch im allgemeinen durch Abrundung entstanden sein wird. Der senkrechte Strich zeigt die Fehlergrenze.

192|5850
185|6385 usf.

Die abgekürzte Division vermeidet beide Uebelstände gleichzeitig. Man beginnt ebenso wie vorher. Statt aber 1055940 durch 206265 zu teilen, dividiert man 105594 durch 20626,5 oder 206265. Man findet 5 und rechnet 5 · 5 = 25 ≈ 30; 5 · 6 = 30; 30 + 3 = 33-; 5 · 2 = 10; 10 + 3 = 13 usf., also hat man:

105594 103133 2461	Den Rest 2461 teilt man nicht durch 206265, sondern durch 20627 (7 ist aus 6,5 durch Abrundung entstanden).

Das Ergebnis ist 1, es ergibt sich

2461 2063 398	398 wird durch 2063 dividiert usf.

Nach dem neuen Verflahren sieht das Divisionsschema, also so aus:

|:206265|
51812,4| = 0,2511935
412530
105594
103132
2461
2062
398
206
192
185
7

Die Ziffern des Divisors werden, wie aus den vorher gehenden Darlegungen folgt, erst im Laufe der Rechnung nach und. nach, von rechts anfangend, unterstrichen.

Man sieht, daß man hier bei der Division von 2461 : 2062,7 spätestens bei 398 : 206,3, hätte abbrechen und den Rest dem Rechenschieber übertagen können. Jetzt haben wir folgendes Schema:

:|:206265| 51812,4 = 0,251194 412530 105594 103133 2461	oder	|:2062651| 51812,4 = 0,2511935 412530 105594 103133 2461 2063 398

Die unterstrichenen Ziffern des Ergebnisses sind mit dem Rechenschieber ermittelt worden. Man vergleiche die letzten Rechnungen mit der unverkürzten Division! Der Genauigkeit ist hier keine Grenze gesetzt, aber der Rechenschieber nimmt ein wesentliches Stück der Arbeit auf sich.

Beispiel 99. Der Erdmeridian ist nicht genau 40000000 m, da das Metermaß nicht ganz seiner Definition entspricht, sondern 40003423 m. Wie groß ist der Radius eines Kreises von gleichem Umfang?

Lösung: 2 · r · π = 40003423 m; r = 20001712 : 3,141593.

|:3,141593|
20001712 = 6366742
18849558
1152151
942478
209676
188496

Die unterstrichenen Ziffern hat der Rechen schieber geliefert. Daß für r nicht derselbe Wert herauskommt, wie er in Beispiel 45 auf S. 24 angegeben ist, rührt davon her, daß die Erde keine genaue Kugel, sondern an den Polen abgeplattet ist.

21180
<u>18850</u>
2330

§ 62. Erhöhung der Divisionsgenauigkeit durch Reihenentwicklung.

Es sei q ein echter (positiver oder negativer) Bruch, a eine beliebige Zahl, dann lehrt die Mathematik, daß

$\frac{a}{1-q}$ = a + aq+ aq^2 + aq^3 + … ist.

Z. B. ist $\frac{1}{1-0,15}=\frac{1}{0,85}$ = 1,17647, andererseits ist (a = 1, q = 0,15) a = 1, aq = 0,15; aq^2 = 0,0225; aq^3 = 0,00338; aq^4 = 0,00051; aq^5 = 0,0008; aq^6 = 0,00001. Die folgenden Glieder kommen nicht mehr in Betracht, die Summe der hingeschriebenen ist 1,17648. Da jedesGlied dadurch entsteht, daß man das vorhergehende mit q multipliziert, fixiert man q = 0,15 auf O_1 oder U_1.

Ebenso ist $\frac{2}{1,045}$ = 2 - 2 · 0,045 + 2 · $0,045^2$ - 2 · $0,045^3$ ± … = 2 - 0,09000 + 0,00405 - 0,00018 + 0,00001 = 1,91388, was mit dem direkt berechneten Wert in bester Uebereinstimmung steht.

Je kleiner q ist, um so schneller führt das Verfahren zum Ziel; oft genügt schon das erste Glied; es ist

$\frac{a}{1-q}\sim$ (a + aq.)

Beispiel 100. Eine alte Atmosphäre (760 mm Quecksilbersäule) ist gleich 1,0333 neuen Atmosphären (1 kg/qcm). Man rechne 1,35; 22,3; 0,627 neue Atmosphären in alte um!

Lösung: 1 neue Atmosphäre = $\frac{1}{1,0333}$ = 1 - 0,0333 + 0,0011 alte.

Multipliziert man die angegebenen Zahlen mit diesem Faktor, so erhält man 1,3065; 21,582; 0,6068 alte Atmosphären.

Beispiel 101. Jemand will für 100000 RM Aktien kaufen, die mit 94,5 % notiert werden. Welchen Nennbetrag erhält er?

Lösung: 100 000 · $\frac{100}{94,5}$ = 100000 · $\frac{1}{1-0,055}$ = 100000 (1 + 0,055 + 0,003025 + 0,0001664 + 0,0000091 + 0,0000005) = 105820,10.

Beispiel 102. Wie groß ist der Durchmesser eines Kreises, dessen Umfang 40000 km ist?

Lösung: $\frac{40000}{3,1416}=\frac{40000}{3\cdot 1,0472}=\frac{40000}{3}$ · (1 - 0,0472 + 0,0022 - 0,0001) = $\frac{40000}{3}$ · 0,9549 = 9549 · (1 + $\frac{1}{3}$) = 12732 km.

Beispiel 103. Es soll Beispiel 86 auf S. 41 nachgeprüft werden.

Lösung: b wird nur wenig größer als f sein; b = f + x;

. Hierfür können wir näherungsweise $\frac{1}{f}\cdot(1-\frac{x}{f})$ setzen, also geht die dort hingeschriebene Gleichung über in

$\frac{1}{27,5}+(\frac{1}{f}-\frac{x}{f^2})=\frac{1}{f}$; $\frac{1}{27,5}=\frac{x}{f^2}$; x = $\frac{f^2}{27,5}=\frac{1,96}{27,5}$ = 0,0713 m = 7,13 cm; b = 1,4713 m. Der Unterschied gegen den dort gefundenen Wert rührt daher, daß wir $\frac{1}{1+\frac{x}{f}}=1-\frac{x}{f}$ gesetzt haben (statt $1-\frac{x}{f}+\frac{x^2}{f^2}...$).

§ 63. Erhöhung der Divisionsgenauigkeit durch Umformung.

Beispiel 104. Behalten wir die Bezeichnungen des letzten Beispiels bei, so ist $\frac{1}{a}+\frac{1}{f+x}=\frac{1}{f}$;

$\frac{1}{f+x}=\frac{1}{f}-\frac{1}{a}=\frac{a-f}{a\cdot f}$; f + x = $\frac{a\cdot f}{a-f}$; x = $\frac{a\cdot f}{a-f}$ -f; x = $\frac{a\cdot f-f\cdot(a-f)}{a-f}=\frac{f^2}{a-f}$. Wir setze die gegebenen Werte ein und erhalten x = $\frac{1,96}{26,1}$ = 0,0751. Dieses Ergebnis weicht zwar von dem auf S. 40 gefundenen wie von dem soeben erhaltenen Ueberschlagswert ab, die exakte Rechnung zeigt aber, daß es das genaueste ist. Man führe die Ausrechnung so durch, wie sie in § 58 (S. 40) angegeben ist, benutze aber bei Ermittelung der Reziprokwerte erst die abgekürzte Division, dann den Rechenschieber, so wird man die Richtigkeit dieser Behauptung einsehen. Man verbessere ebenso die Ergebnisse von Beispiel 87 auf S. 41!

Lösung: x = 0,0211; 0,00977; 0,00472; 0,00311; 0,00232; 0,001847; a, b, c ... = 0,1561; 0,14477; 0,13972; 0,13811; 0,13732; 0,136847 m.

Beispiel 105. Aus der Proportiona : b = c : d oder $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ folgt $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$ oder (a - b) : b = (c - d) : d, ebenso (a - 2b) : b = (c - 2d) : d usf. Ist z. B. 98 : 100 = 2 : x (Beispiel 65 auf S. 34), so ist auch 100 : 98 = x : 2; 2 : 98 = (x - 2) : 2; x - 2 = 0,0408; x = 2,0408. Aus 100 : 98 = y : 32 folgt 2 : 98 = (y - 32) : 32; y - 32 = 0,653; y = 32,653. Ebenso findet man z = 65,306.

In Beispiel 100 auf S. 68 sollen 1,35 neue Atmosphären in x alte verwandelt werden. Hier ist 1 : 1,0333 = x : 1,35; (-0,03333) : 1,0333 = (x - 1,35) : 1,35; x - 1,35 = -0,0435; x = 1,3065. Man rechne die andern Aufgaben dieses Beispiels, sowie Beispiele 102 und 103 auf S. 68 nach der soeben angegebenen Methode durch!

Beispiel 106. 1 ptolemäisches Stadion hat 185 m. Wieviel km sind 273 Stadien?

Lösung: x : 273 = 0,185 : 1. Hieraus folgt unmittelbar x = 278 $\cdot$ 0,185 = 50,5 km. Formt man aber die Proportion um, so ist 6x : 273 = 1,11 : 1 ; (6x - 278) : 273 = (1,11 - 1) : 1; 6 x- 273 = 273 $\cdot$ 0,11 = 30; 6x = 303; x = 50,50. Der angenäherte Wert ist hier bestätigt, der genaue ist 50,505 km.

Beispiel 107. Wie groß ist $\frac{40000}{3,141593}$? (Beispiel 102 auf S. 45).

Lösung: Teile ich eine Zahl, z. B. 40000, durch zwei verschiedene Divisoren, so verhalten sich die Ergebnisse umgekehrt wie diese.

Es sei $\frac{40000}{3,141593}$ = x; $\frac{40000}{\frac{22}{7}}$ = y. Dann ist

x : y = $\frac{22}{7}$: 3,141593; y = $\frac{28000}{22}=\frac{140000}{11}$ = 12727,27

y wird im Kopf berechnet, ebenso $\frac{22}{7}$ = 3,142857, also

x : 12727,27 = 3,142857: 3,141593;

(x - 12727,27) : 12727,27 = 0,001264 : 3,141593

x - 1272127 = $\frac{12727,27\cdot 0,001264}{3,141593}$

Das Ergebnis ist (Rechenschiebergenauigkeit genügt) 5,12; mithin . x = 12727,27 + 5,12 = 12732,399.

VI. Kapitel
Potenzen und Wurzeln.

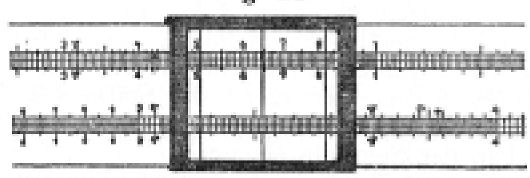
§ 64. Das Quadrieren.

In § 28 auf S. 13 wurde gesagt, daß die unteren Skalen U_1 und U_2 in doppelt so großem Maßstab ausgeführt sind wie die oberen, O_1 und O_2. Ist also auf U_1 lg a abgetragen, so steht genau darüber auf O_1 $2 \cdot \lg a$ und das ist nach Satz 5 auf S. 7 gleich $\lg a^2$. Weil aber das Zeichen "lg" fortgelassen ist, steht über "a" (auf U_1) "a^2" auf O_1. Es gilt also

Satz IV. Um a^2 zu finden, stellt man den Faden des Glasläufers oder den Anfangs- oder Endstrich der Skala U_2 auf "a" der Skala U_1. Dann steht das Ergebnis darüber auf O_1.

Fig. 21 zeigt, daß $2{,}54^2 = 6{,}45$ ist. (Ebenso $25{,}4^2 = 645$; $254^2 = 64500$; $0{,}254^2 = 0{,}0645$ usf).

Fig. 21.



Beispiel 108. a) 1 Pariser Fuß ist 0,335 in; b) 1 englischer Fuß 0,305 m; c) 1 Yard 0,914 m; d) 1 englischer Zoll = 2,54 cm; e) 1 geographische Meile 7,42 km. Wie groß ist ein Pariser Quadratfuß, ein englischer usw.?.

Lösung: a) 0,1055 qm; b) 0,0929 qm; c) 0,836 qm 1 d) 6,45 qcm; e) 55,1 qkm.

Beispiel 109. Die Grundfläche der Cheopspyramide ist ein Quadrat, dessen Seiten 233 m lang sind; welchen Flächeninhalt hat es?

Lösung: $233^2 = 54300$ qm = 5,43 Hektar. Ein besonders guter Acker von dieser Größe könnte etwa einen Körnerertrag von 17500 kg = 350 Zentnern liefern.

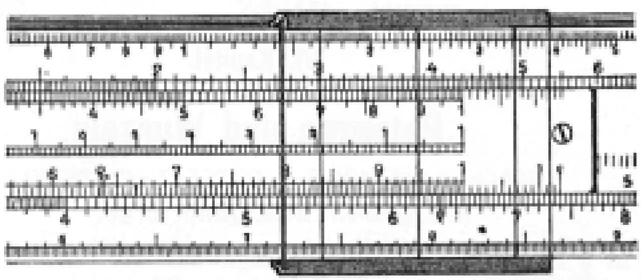
Man prüfe diese Aufgaben, indem man jedesmal a^2 oder $a \cdot a$ durch gewöhnliche Multiplikation (O_1 und O_2 oder U_1 und U_2) ausrechnet!

Sehr häufig muß ein Ausdruck von der Form $a^2 \cdot b$ berechnet werden. Dann stellt man den Anfangs- oder Endstrich von U_2 über die Zahl "a" auf U_1 (vgl. Satz IV), liest aber nicht auf O_1 das Ergebnis a^2 ab, sondern sucht mit dem Läuferstrich "b" auf O_2 auf und findet darüber auf O_1 das Resultat $a^2 \cdot b$.

Beispiel 110. Ein Kupferblech ist 65,5 cm lang und breit, seine Dicke ist 1 mm (= 0,1 cm). 1 ccm wiegt 8,95 g; wieviel wiegt das Blech?

Lösung: $65{,}5^2 \cdot 0{,}1 \cdot 8{,}95 = 65{,}5^2 \cdot 0{,}895 = 3840$. (Fig. 22).

Fig. 22.



Beispiel 111. Wieviel kg wiegt 1 Quadrateisen von 1 m Länge, wenn die Seitenlänge des Querschnitts d = 5, 6, 7, 8, 9 ... mm ist? Das spezifische Gewicht des Flußeisens ist 7,85.

Lösung: Da das Gewicht in kg gefunden werden soll, müssen die Maße in dm ausgedrückt werden. $Q = 0{,}05^2$ qdm, $l = 10$ dm, $G = 0{,}05^2 \cdot 10 \cdot 7{,}85$ kg $= 0{,}0025 \cdot 78{,}5 = 0{,}196$ kg. Man kann natürlich die vorher gegebene Regel zur Berechnung von $a^2 \cdot b$ befolgen, schneller kommt man zum Ziel, wenn man unter 7,85 von O_1 den Endstrich der Zungenskala stellt, den Läuferstrich auf "d" der Teilung U_2 einstellt und das Ergebnis darüber auf O_1 abliest. Man erhält

d	5	6	7	8	9	10	mm

G	0,196	0,283	0,385	0,502	0,636	0,785	kg

Beispiel 112. Ein Kupferdraht hat den Widerstand ω = 0,207 Ohm; durch ihn fließt ein Strom, der zuerst die Stärke i = 10 Ampère hat und dann auf 12, 14, 16 ... Amp. gesteigert wird. Wieviel Kalorien werden jedesmal in der Sekunde erzeugt?

Lösung: $Q = 0{,}24 \cdot i^2 \cdot \omega$ Grammkalorien; in unserm Fall $0{,}0497 \cdot i^2$ gr-Kal., also

i	10	12	14	16	18	20	Amp.
Q	4,97	7,15	9,74	12,72	16,1	19,9	gr-Kal.

Beispiel 113. Ein frei fallender Körper legt unter dem Einfluß der Schwere in t sec die Strecke $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ m zurück. Hierin ist die Naturkonstante g = 9,81 zu setzen. Wie groß ist der Fallweg in 1, 2, 3, …, 10 Sekunden?

Lösung:	t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	sec
	s	4,905	19,62	44,1	78,5	122,6	176,6	240	314	397	490,5	m

§ 65. Steigerung der Genauigkeit beim Quadrieren.

Da das Quadrieren ein Multiplizieren mit gleichen Faktoren ist, kann auf § 39 bis 43 verwiesen werden. Einfacher ist die Anwendung der Formeln $(a+ b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + 2bc + b^2 + c^2$ usf. Man kann die Teile a, b, c ... der gegeben Zahl stets so wählen, daß die Ausdrücke a^2, 2ab usw. vom Rechenschieber mit völliger Genauigkeit angegeben werden, dann ist auch das Ergebnis ganz genau.

Beispiel 114. Ein Grundstück in bester Geschäftslage ist 26,3 in lang und breit. Wie groß ist es?

Lösung: a = 26; b = 0,3

$a^2 = 676$

$2ab = 15{,}6$

$b^2 = 0{,}09$

F = 691,99 qm Die direkte Ablesung liefert 692 qm.

Beispiel 115. Ein Goldblech ist 13,75 cm lang und breit, 0,5 mm dick. Wieviel wiegt es, wenn das spezifische Gewicht des Goldes 19,268 ist?

Lösung: Die Fläche ist $13{,}75^2$. a = 13; b = 0,75. $a^2 = 169$; $2ab = 19{,}5$; $b^2 = 0{,}5625$; F = 189,0625 qcm. Der Inhalt ist $189{,}0625 \cdot 0{,}05 = 9{,}453125$ ccm. Das Gewicht in Gramm findet man durch Multiplikation dieser Zahl mit 19,268; es ist, auf Milligramm genau, 182,143 g.

Beispiel 116. In einer Tabelle ist $\sqrt{3} = 1{,}73205$ angegeben. Um wieviel unterscheidet sich das Quadrat dieser Zahl von 3?

Lösung: a = 1,7; b = 0,032; c = 0,00005. Man findet $1{,}73205^2 = 2{,}9999972025$, also die Abweichung 0,0000027975.

§ 66. Die Kreisfläche.

In den Lehrbüchern der Mathematik findet man für den Inhalt eines Kreises vom Radius r (Durchmesser d = $2 \cdot r$) angegeben $F = r^2 \cdot \pi$. Die Berechnung dieses Ausdrucks ist nach § 64 leicht umsomehr, als π durch einen Strich auf O_1 und O_2 angegeben ist.

In der Technik bevorzugt man die Formel $F= \frac{\pi}{4} \cdot d^2$, weil meistens der Durchmesser d, nicht der Radius r, der direkten Messung zugänglich ist. Aus diesem Grunde ist $\frac{\pi}{4} = 0{,}785$ auf O_1 und O_2 markiert. Indem wir wieder auf § 64 zurückgehen, können wir folgenden Satz aufstellen:

Um den Inhalt eines Kreises vom Durchmesser "d" zu finden, stellt man "1" von O_2 unter $\frac{\pi}{4}$ von O_1 [2] und sucht auf U_2 den Durchmesser "d" auf. Die Zahl, welche auf O_1 genau darüber steht (Glasläuferstrich!) ist der gesuchte Inhalt.

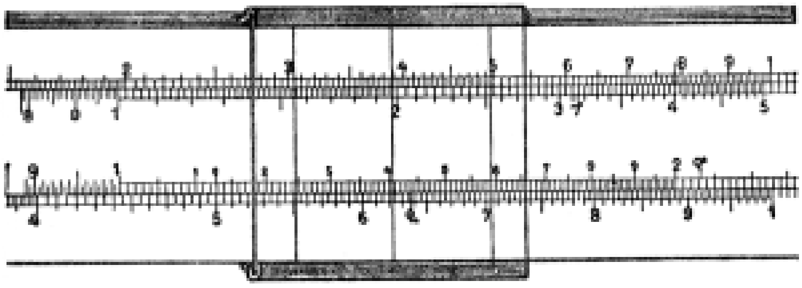
Ist z. B. die lichte Weite (innerer Durchmesser) eines Wasserrohres 7 cm, so ist der Querschnitt $\frac{\pi}{4} \cdot 7^2 = 38{,}5$ qcm.

Setzt man $\frac{\pi}{4}$ = c so ist F = $\frac{d^2}{c^2} = (\frac{d}{c})^2$ Man kann c² leicht rechnen (vgl. § 46) und findet c = 1,128. Als weitere Möglichkeit für die Berechnung des Kreisinhaltes ergibt sich folgende

Regel: *Man, sucht den Durchmesser "d" auf U_1 stellt darüber "c" auf U_2 und würde unter dem Anfangsstrich von O_2 die Zahl $\frac{d}{c}$ finden. Ohne diese zu beachten, geht man auf den Lauferstrich bis O_1; dort steht das Ergebnis $(\frac{d}{c})^2$ oder F.*

<<FUSSNOTE>>

Fig. 23.



Bei diesem Verfahren muß die Zunge bisweilen weit herausgezogen werden. Das ist unbequem, wenn das Ergebnis noch mit einer andern Zahl multipliziert werden soll. Hat z. B. ein Rundeisen den Durchmesser d = 62 mm, so wiegt 1 m (= 1000 mm) davon d² · $\frac{\pi}{4}$ · 1000 · 7,85 Milligramm, denn 7,85 ist das Eigengewicht des Flußeisens. Das Ergebnis (23700000 mg = 23,7 kg) erhält man nur, nachdem man die Zunge um eine Einheit nach links verschoben hat.

Um diese Schwierigkeit zu vermeiden, ist auf U_2 die Marke $c_1 = \sqrt{\frac{40}{\pi}}$ = 3,57 angebracht. $(\frac{d}{c_1})^2$ ist $\frac{d^2 \cdot \pi}{40}$, das Ergebnis ist nur durch die Kommastellung von $(\frac{d}{c})^2$ verschieden. Da diese aber stets durch Abschätzung gefunden wird, ist die Benutzung von c_1 der von c gleichwertig. Sie erfolgt in derselben Weise, wie die soeben angegebene Regel es fordert und bietet den Vorteil, daß die Zunge eine bessere Lage hat.

Noch bequemer ist die Benutzung des Dreistrichläufers. Der Glasläufer hat drei Striche. Wir benutzten bisher meist den mittleren; den linken und rechten nur dann, wenn es galt, Zahlen zu überdecken, die ganz links oder ganz rechts auf den Skalen standen. Man vermeidet dadurch, daß der Glasläufer sich auch nur teilweise vom Stabe entfernt, wodurch die Führung etwas unsicher geworden und der Läuferstrich den Skalenstrichen vielleicht nicht ganz parallel geblieben wäre.

Aber diese Striche haben noch eine andere Bedeutung. Stellt man den rechten auf den Endstrich von O_1 ein, so steht der mittlere über $\frac{\pi}{4}$ = 0,785. Ebenso verhält es sich mit dem mittleren und linken Strich. Bedeckt also der rechte Strich die Zahl "a" von O_1 so steht der mittlere über "$\frac{\pi}{4}$ · a" u. e. Fig. 23 löst so die Aufgabe 7,04² · $\frac{\pi}{4}$ = 38,9.

Regel: *Um den Inhalt eines Kreises zu finden, sucht man den Durchmesser d auf U_1 auf, stellt den mittleren Läuferstrich darauf und liest das Ergebnis auf O_1 unter dem linken Lauferstrich ab. Man kann auch den rechten und mittleren Strich benutzen.*

Merkwürdigerweise kann man den Abstand dieser zwei Striche auch zur Gewichtsberechnung von Flußeisen verwenden, denn dessen Gewicht ist (vgl. Beispiel 111 auf S. 47) 7,85. Diese Zahl unterscheidet sich von $\frac{\pi}{4}$ rein rechnerisch nur durch das Komma, und das macht beim Rechenschieber nichts aus. Man multipliziert jetzt den Raum (auf O_1) mit dem Eigengewicht so, wie vorher d² mit $\frac{\pi}{4}$. Beim Rechenschieber Nr. 21 ist der rechte Läuferstrich nur soweit gezogen, daß er die Skalen U_1 und U_2 deckt. Der mittlere, durchgehende hat den Abstand $\frac{\pi}{4}$ vom rechten. Ganz links bemerken wir bei diesem Läufer einen weiteren kurzen Strich, der im Abstand von 0,736 vom äußersten rechten Strich gezogen ist (Umwandlung von KW in PS).

§ 67. Beispiele zum vorigen Paragraphen.

Man rechne zur Uebung die folgenden Aufgaben nach allen im vorigen Paragraphen angegebenen Methoden durch.

Beispiel 117. In einer technischen Tabelle finden sich die Angaben:

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$\frac{\pi d^2}{4}$	0,7854	3,142	7,069	12,57	19,63	28,72	38,48	50,27	63,62	
d	5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9
$\frac{\pi d^2}{4}$	19,63	20,43	21,24	22,06	22,90	23,76	24,63	25,52	26,42	27,34

Man prüfe ihre Richtigkeit!

Lösung: Bei d = 6 ist ein Druckfehler, der richtige Wert ist 28,27. Sonst sind die Zahlen richtig. Die vierte Wertziffer kann allerdings mit dem Rechenschieber nicht geprüft werden, sondern erfordert eine Rechenwalze.

Beispiel 118. Wieviel wiegt ein Rundeisen von 1 m Länge, wenn der Durchmesser d des Querschnitts 5, 6, 7, 8, 9, 10 mm ist?

Lösung: Man bildet d² durch Uebergang von U_1 auf O_1 mit Hilfe des rechten Läuferstriches. Unter dem mittleren steht dann das Volumen, $d^2 \cdot \frac{\pi}{4}$; durch Uebergang zum linken multipliziert man noch mit 7,85; unter ihm liegt das Ergebnis. Abschätzung für d = 5 mm:

G = $\frac{\pi}{4} \cdot 5^2 : \cdot 1000 \cdot 7{,}85 \sim ¾ \cdot 30 \cdot 10000$ m 4 * 30 - 10 000 $\sim$ 220000 mg = 220 g = 0,22 kg. (Die Länge wurde in mm umgerechnet!) Für d = 10 ist das Ergebnis 4 mal so groß da 5² durch 10² ersetzt werden muß.

d	5	6	7	8	9	10	mm
G	0,154	0,222	0,302	0,394	0,499	0,616	kg

Beispiel 119. Ein zylindrischer Gasometer in Oberhausen, am Rhein-Herne-Kanal, hat den Durchmesser d = 67 m und die Höhe h = 120 m. Wieviel cbm Gas erfordert seine Füllung und wieviel qm Eisenblech war zu seiner Herstellung nötig?

Lösung: $\frac{\pi d^2}{4} \cdot h = 423000$ cbm; $\frac{\pi d^2}{4} + \pi \cdot d \cdot h = 28800$ qm.

Beispiel 120. Ein Siederohr hat den äußeren Durchmesser 135 mm und die Wandstärke 4,5 mm. Wieviel wiegt das laufende Meter, wenn das Eigengewicht 7,8 ist?

Lösung: Rechnet man, um kg zu erhalten, alle Längen in dm um, so ist, da der innere Durchmesser 135 - 2 · 4,5 = 126 mm = 1,26 dm beträgt, der Querschnitt $\frac{\pi}{4} \cdot 135 - \frac{\pi}{4} \cdot 1{,}26^2 = 1{,}430 - 1{,}248 = 0{,}182$ qdm, der Inhalt 0,182 · 10 = 1,82 cdm, das Gewicht 1,82 · 7,8 = 14,2 kg.

In der Praxis wird man zur Gewichtsbestimmung den mittleren Durchmesser ermitteln (1,305 dcm), die Fläche des zugehörigen Zylindermantels berechnen (M = $\pi \cdot d \cdot h = \pi \cdot 1{,}305 \cdot$ 1^0 = 41,0 qdm), ihn mit der Wandstärke multiplizieren (V = 41,0 · 0,045 = 1,844 cdm) und das Ergebnis mit dem spezifischen Gewicht vervielfachen (1,844 · 7,8 = 14,4 kg). Zu demselben Ergebnis kommt man, wenn man bei der ersten Berechnung die Formel $(a^2 - b^2) = (a + b) \cdot (a - b)$ benutzt: V = $\frac{\pi}{4}(1{,}35^2 - 1{,}26^2) \cdot 10 = \frac{\pi}{4} \cdot 2{,}61 \cdot 0{,}09 \cdot 10 = 1{,}8449$ cdm), G = 14,390 kg (5 Wertziffern; wegen der Ungenauigkeit des spezifischen Gewichtes genügen 3 durchaus!)

Beispiel 121. Die Kuppel einer Sternwarte hat den äußeren Durchmesser 6,25 m. Sie soll mit Kupferblech belegt werden; wieviel Quadratmeter sind nötig?

Lösung: Die Oberfläche einer Kugel ist O = $\pi \cdot d^2$, hier sind also ½ · $\pi \cdot 6{,}25^2$ qm erforderlich. Schreibt man dafür $2 \cdot \frac{\pi \cdot 6{,}25^2}{4}$, so kann man die im vorigen Paragraphen angegebenen Regeln anwenden. Man braucht 61,3 qm.

Beispiel 122. Der Vesuv ist ungefähr ein Kegel mit dem Grundkeisdurchmesser d = 16 km und der Höhe h = 1200 m. Wie groß ist sein Inhalt?

Lösung: Nach der Kegelformel $V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{h}{3}$ ist hier V = 201 · 0,4 = 80,4 Kubikkilometer, also etwa 80 Milliarden Kubikmeter.

§ 68. Steigerung der Genauigkeit bei der Berechnung von Kreisflächen.

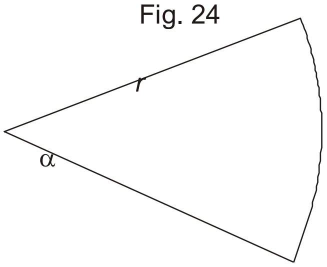
Ist d gegeben, so kann man nach § 65 (S. 48) d² mit beliebiger Genauigkeit finden, Da $\pi = \frac{22}{7} - 0{,}001264$ ist, also $\frac{\pi}{4} = \frac{5{,}5}{7} - 0{,}000316$, so rechnet man $\frac{d^2 \cdot 5{,}5}{7}$ aus und fügt das mit dem Rechenschieber gefundene Korrektionsglied -0,000316 d² hinzu.

Beispiel 123. Es sei d = 17,5 cm. Dann ist d² = 306,25; d² · 5,5 = 1684,375; $\frac{d^2 \cdot 5{,}5}{7} = 240{,}6250$. Das Zusatzglied ist - 0,0968, also F = = 240,5282. Mit einer achtstelligen Logarithmentafel erhält man F= 240,52818.

§ 69. Berechnung von Kreisteilen. Bogenmaß.

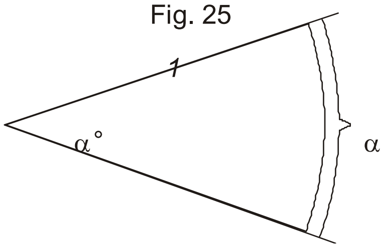
In § 82 auf S. 65 wurde die Berechnung des ganzen Kreisumfangs, in § 66 (S. 48) die der ganzen Kreisfläche gezeigt. Ziehen wir vom Mittelpunkt zwei Radien, welche den Winkel α einschließen, so schneiden sie aus dem, Umfang einen Kreisbogen (b), aus der Fläche einen Kreisausschnitt (begrenzt durch r, r, b) heraus. (Siehe Fig. 24.)

Fig. 24



Es sei zunächst der Radius gleich 1, etwa 1 dm. Hier wollen wir den Bogen, der zwischen den Radien liegt, als Bogenmaß des Winkels α bezeichnen, denn seine Länge bestimt ebenso genau die Größe des Winkels, wie die Angabe in Graden, Minuten und Sekunden. (Siehe Fig. 25.)

Fig. 25



Liegt zwischen den Schenkeln des Winkels genau die Hälfte des Kreises, so ist seine Größe im Bogenmaß = π (Umfang des Halbkreises mit dem Durchmesser 2), andrerseits hat derselbe Winkel im üblichen System die Bezeichnung 180°. Es gilt also folgende Zusammenstellung:

Gradmaß	360°	180°	90°	…	1°	1'	1"

Bogenmaß	2π	π	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{10800}$	$\frac{\pi}{648000}$

Es ist $\frac{\pi}{180} = 1 : \frac{180}{\pi} = 57{,}3$ .Diese Umwandlungszahl, 57,3, nennen wir $\rho°$, sie ist unter den Konstanten auf der Rückseite des Schiebers aufgeführt. Es ist also 1° gleich $\frac{1}{\rho°}$ im Bogenmaß, entsprechend $1' = \frac{1}{\rho'}$, $1'' = \frac{1}{\rho''}$; $\rho' = 60 \cdot \rho° = 3438$ und $\rho'' = 60 \cdot \rho' = 206265$ stehen ebenfalls auf der Rückseite, ferner bei "Nr. 14" und "System Rietz" auf U_2.

Beispiel 124. Wie groß ist $\alpha = 134°$ im Bogenmaß?

Lösung: a) $\alpha = \frac{134}{\rho°} = 2{,}34$; b) $\alpha = \frac{8040}{\rho'} = 2{,}34$; c) $\alpha = \frac{482400}{\rho''} = 2{,}34$.

Beispiel 125. Wie groß ist $\alpha = 133°\ 46'\ 55''$ im Bogenmaß?

Lösung: a) $\alpha = \frac{33°}{\rho°} + \frac{46}{\rho'} + \frac{55}{\rho''} = 0{,}576 + 0{,}01338 + 0{,}000267 = 0{,}590$. Da die letzte Wertziffer des größten Summanden nicht mehr ganz sicher ist, muß auch das Ergebnis auf drei Wertziffern abgerundet werden. b) $33° = 118800''$; $46' = 2760''$, $55'' = 551$ $\alpha''= 121615''$; $\alpha = \frac{121615''}{\rho''} = 0{,}590$. Da die Angabe α'' genau ist, kann man α viel schärfer bestimmen mit abgekürzter Division unter Verwendung des Rechenschiebers (§ 61 auf S. 43); $\alpha = 0{,}589606$.

Beispiel 126. Ein Winkel ist, im Bogenmaß gemessen, 0,735. Welchen Wert hat er im Gradmaß?

Lösung: a) $\alpha° = 0{,}735 \cdot \rho°' = 42{,}1°$ (= 42° 6'); b) $\alpha' = 0{,}735 \cdot \rho' = 2526'$ (= 42° 6'); c) $\alpha'' = 0{,}735 \cdot \rho'' = 151600'' = 42°\ 6'$. Der auf Sekunden genaue Wert (§ 41 auf S. 25) ist $\alpha'' = 151605'' = 42°\ 6'\ 45''$.

"Nr. 14" und "System Rietz" enthalten auf U_1 und U_2 die Bezeichnung $\rho_{,,}$. Man setzt nämlich neuerdings den rechten Winkel gleich 100° (statt 90°), teilt 1^g in 100^c in 1^c in 100^{cc}. In diesem neuen Maß ist $\frac{\pi}{2} = 100^g = 10000^c = 1000000^{cc}$. Es entspricht also das Bogenmaß 1 der Zahl $1000000 : \frac{1}{2}\pi = 636620^{cc}$. Man kann jedes Bogenmaß durch Multiplikation mit dieser Zahl in "neue" Sekunden umrechnen und umgekehrt, wenn diese gegeben sind, das Bogenmaß finden, indem man durch $\rho_{,,}$ teilt. Unsere weiteren Rechnungen sind im alten Maß ausgeführt.

Das Bogenmaß findet Anwendung bei der Berechnung von Kreisbogen und Kreisausschnitten (vgl. Fig. 24).

Es ist $b = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha°}{360}$

, also im Bogenmaß $b = r \cdot \alpha = \frac{d}{2} \cdot \alpha$a; ebenso

$$F = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha°}{360} = \frac{r^2}{2} \cdot \alpha = \frac{d^2}{8} \cdot \alpha .$$

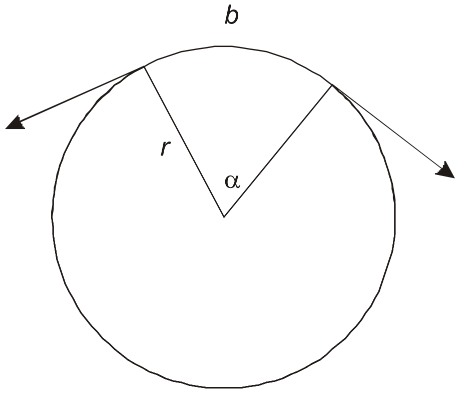
Beispiel 127. Eine Bahnlinie macht eine Kurve, deren Krümmungsradius (nach der Karte) 430 m ist. Die Verbindungslinien des Krümmungsmittelpunktes mit dem Anfangs- und Endpunkt der Kurve bilden den Winkel $\alpha = 37\frac{1}{2}°$. Wie lang sind die Gleise in der Kurve?

Lösung: $\alpha = \frac{37{,}50°}{\rho°} = \frac{2250'}{\rho'} = \frac{135000''}{\rho''} = 0{,}654$, Diese Zahl braucht als Zwischenergebnis nicht abgelesen zu werden, sondern wird sofort mit r = 430 m multipliziert; b = 281,4 m. Auf der senkrechten Seitenfläche des "System Rietz" befindet sich eine Teilung, welche sofort die Kilometer abzulesen gestattet, wenn der Maßstab der Karte 1 : 25000 ist. Ist er 1 : 2500, so muß man die Angaben durch 10 dividieren, ist er 1 : 250000, mit 10 multiplizieren.

Beispiel 128. An einem Seilende greift eine Kraft an. Durch eine Rolle vom Durchmesser 435 mm soll ihre Richtung um 65° geändert werden. Wie lang ist der Teil des Seiles, welcher die Rolle berührt? (Siehe Fig. 26.)

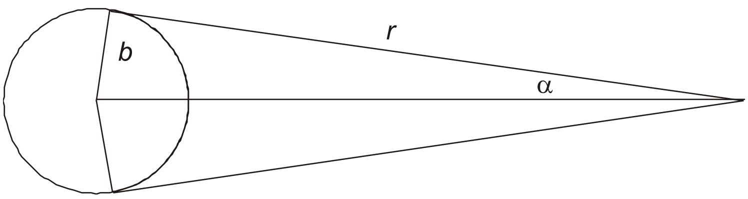
Lösung: 247 mm.

Fig. 26



Beispiel 129. Würde man den Abstand Erde-Sonne, der doch ca. 150 Millionen Kilometer ist, vom "nächsten" Fixstern ausbetrachten, so würde man diese riesige Strecke doch nur unter einem Winkel von $\alpha''=0{,}76''$ erblicken. Wie weit ist der Stern entfernt? (Siehe Fig. 27.)

Fig. 27



Lösung: Der Abstand Erde-Sonne kann ohne merklichen Fehler als Bogen b eines Kreises mit dem gesuchten (sehr großen!) Radius r und dem Zentriwinkel $\alpha''=0{,}76''$ betrachtet werden;

$$b = r \cdot \alpha = \frac{r \cdot \alpha''}{\rho''}\,;\; r = \frac{b}{\alpha''} \cdot \rho''\,.$$

Darin ist $b = 1{,}5 \cdot 10^8$ km; $\frac{\rho''}{\alpha''} \sim 3 \cdot 10^5$, also $r \sim 5 \cdot 10^{13}$ km. Mit dem Rechenschieber findet man $4{,}07 \cdot 10^{13}$ km.

Die Zahl 0,76 ist nur in der ersten Wertziffer sicher richtig, schon die 6 ist fraglich. Der Rechenschieber hat die Entfernung auf 3 Wertziffern angegeben, das sind schon mehr Ziffern, als verbürgt werden können. Eine Steigerung der Rechengenauigkeit wäre hier sinnlos.

Das Licht legt in einer Sekunde 300000 km zurück, an einem Tage $60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 300000$ km, in einem Jahre 365¼ mal soviel. Das sind $9{,}47 \cdot 10^{12}$ km. Diese Zahl geht in $4{,}07 \cdot 10^{13}$ etwa 4,3 mal auf. Soviel Jahre ist der Lichtstrahl von dort unterwegs, bis er die Erde trifft. Man prüfe die folgende Tabelle:

Fixstern	Sirius	Atair	Prokyon	Pollux	Regulus
α (Parallaxe)	0,370	0,232	0,299	0,056	0,024
Entfernung in Billionen km	83,6	133	103,5	552	1288
Entfernung in Lichtjahren	8,88	14,15	10,9	58,3	136,2

Beispiel 130. Zur Herstellung verschiedener Trichter benutzt man Blechstücke, die die Form eines Kreisausschnittes haben und nachher zurechtgebogen werden. 1 qm Blech wiege 2,5 kg. Aus den Radien und Zentriwinkeln soll das Gewicht des benutzten Bleches oefunden werden.

r	125	310	25	150	225	555	mm
α	160°	140°	220°	240°	180°	170°	

Lösung: $F = \frac{r^2}{2} \cdot \alpha$; $G = F \cdot 2{,}5$. Die Längen müssen in m, die Flächen in qm angegeben werden, dann erhält man das Gewicht in kg. Man findet

α	2,79	2,44	3,84	4,19	3,142	2,97

F	0,0218	0,1173	0,0012	0,0472	0,0795	0,456	qm
G	0,0545	0,293	0,0030	0,118	0,199	1,14	kg

Beispiel 131. Die Erde ist in der Sonnennähe 147 Millionen Kilometer, in der Sonnenferne 152 Millionen Kilometer von der Sonne entfernt. Die Verbindungslinie Sonne-Erde schreitet während eines Tages im ersten Fall 1° 1' 9", im zweiten 0° 57' 12" voran. Welche Fläche überstreicht sie in diesen beiden Fällen?

Lösung: α ist im ersten Falle 0,01778, im zweiten 0,01664, die Fläche ist beidemal $1{,}92 \cdot 10^{14}$ Quadratkilometer.

§ 70. Ausdrücke von der Form $\frac{a}{b^2}$, $\frac{a^2}{b}$, $a^2 \cdot b^2$, $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a}{b^2}$).

Beispiel 132. Ehe Bogenlampe hat die Lichtstärke a = 1800 Hefnerkerzen Wie stark beleuchtet sie eine senkrecht zu den Lichtstrahlen stehende Fläche im Abstande b = 1 m, 3,7 m, 8,5 m, 10 m, 11 m, 12 m usf.?

Lösung: Die Helligkeit (in Meterkerzen) ist hier $\frac{a}{b^2}$. Man sucht "a" auf O_1 auf, stellt darunter auf U_2 "b" ein, dann steht darüber auf O_2 "b²" und über den Anfangsstrich von O_2 liest man auf O_1 $\frac{a}{b^2}$ ab. Die Lösungen sind für unsere Zahlen 1800; 131; 24,9; 18; 14,9; 12,5 M.K. usf. Man kann auch "a" auf O_1 mit dem Einheitsstrich auf R zur Deckung bringen. Ueber "b" auf R steht "$\frac{1}{b^2}$" auf O_2 und darüber auf O_1 das Ergebnis, weil $\frac{a}{b^2} = a \cdot (\frac{1}{b})^2$ ist.

Das Coulombsche Gesetz für Magnetismus und Elektrizität liefert weitere Bespiele.

$\frac{a^2}{b}$) **Beispiel 133.** In einem Kreise ist eine Sehne von der Länge 2a = 154 mm gezogen, durch ihren Mittelpunkt O gehen verschiedene andere. Die Stücke von ihnen, welche in dem einen Kreisabschnitte liegen (von O bis zum Kreisumfang gerechnet) seien b = 70; 65; 60; 55 ... mm. Wie lang sind die entsprechenden Sehnenstücke (x) im andern Kreisabschnitt?

Lösung: Nach dem Sehnensatz ist $a \cdot a = b \cdot x$, also $x = \frac{a^2}{b}$. Man sucht "a" auf U_1 darüber liegt auf O_1 "a²". Hierunter setzt man "b" der Teilung O_2. Das Ergebnis findet man wie im vorigen Beispiel auf O_1. Wir erhalten 84,7; 91,2; 98,8; 107,8 usf.

Man kann auch "a" auf U_1 mit "a" auf R gegenüberstellen. Sucht man dann "b" auf U_1 auf, so steht darüber "x" auf R. ($a : \frac{1}{a} = b : \frac{1}{x}$).

$a^2 \cdot b^2$ und $\frac{a^2}{b^2}$) Um Ausdrücke von der Form $a^2 \cdot b^2$ oder $a^2 : b^2$ auszurechnen, bestimmt man mit U_1 und U_2 oder U_1 und R die Werte $a \cdot b$ oder $a : b$. Sie liegen auf U_1; genau über ihnen auf O_1 findet man $a^2 \cdot b^2$ oder $a^2 : b^2$.

Beispiel 134. Der Inhalt eines Kreises ist $\pi \cdot r^2 = (\sqrt{\pi})^2 \cdot r^2 = 1{,}772^2 \cdot r^2$ oder $\frac{\pi d^2}{4} = 0{,}886^2 \cdot d^2$, die Oberfläche einer Kugel $4 \cdot \pi \cdot r^2 = 3{,}545^2 \cdot r^2$ oder $\pi \cdot d^2 = 1{,}772^2 \cdot d^2$. Man vergleiche § 66.

Beispiel 135. Könnte man einen Gegenstand, der auf der Erdoberfläche 1 kg wiegt, auf einen andern Himmelskörper bringen, so würde sein Gewicht dort $G = \frac{m}{m_1} \cdot \frac{r^2}{r_1^2}$ sein. Hierin bedeutet m die Masse der Erde, r ihren Radius, während sich m_1 und r_1 auf den andern Himmelskörper bezieht. Man berechne aus Zeile 2 und 3 die vierte!

Himmelskörp.	Sonne	Mond	Merkur	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn
Masse	333000	0,01228	0,0556	0,817	1	0,1077	318,4	95,22

Radius	695600	1738	2389	6213	6378	3506	72600	61530	km
G	28,0	0,165	0,396	0,860	1	0,356	2,46	1,022	kg

§ 71. Quadratwurzeln.

Ist a = $\sqrt{b}$, so ist a² = b. In § 64 war a gegeben, b gesucht, jetzt ist es umgekehrt. Man erhält

Satz V. Um die Quadratwurzel aus einer Zahl zu finden, sucht man diese auf O_1 auf. Das Ergebnis steht darunter auf U_1.

Das entspricht genau Satz 6 auf S. 7. Beim Wurzelziehen kann die Kennziffer der zu radizierenden Zahl nicht als belanglos behandelt werden (vgl. S. 8). Z. B. ist $\sqrt{4}$ = 2, $\sqrt{40}$ = 6,32. Will man Verwechselungen vermeiden, so schätzt man entweder den ungefähren Wert der Wurzel ab ($\sqrt{\pi}$ ist etwas kleiner als 2, da erst $\sqrt{4}$ = 2 ist; $\sqrt{40}$ liegt zwischen 6 und 7, da $\sqrt{36}$ = 6, $\sqrt{49}$ = 7 ist; $\sqrt{1930}$ liegt zwischen 40 und 50, $\sqrt{0{,}031}$ zwischen 0,1 und 0,2 usf.), oder man verfährt nach folgender

***Regel**: Man teile die Zahl, vom Komma ausgehend, nach rechts und links in Gruppen von zwei Ziffern ein. Jeder Gruppe entspricht eine Ziffer des Wurzelwertes. Enthält die am weitesten links stehende Gruppe **eine** Ziffer, so benutzt man beim Einstellen die **linke** Seite von O_1 hat sie **zwei** Ziffern, die **rechte**.*

So ist z. B. $\sqrt{4} = \sqrt{4\,|,00} = 2$; $\sqrt{40\,|,00} = 6{,}32$; $\sqrt{\pi} = \sqrt{3\,|,14\,|\,16} = 1{,}7725$, $\sqrt{19\,|\,30\,|,00} = 43{,}9$; $\sqrt{0\,|,03\,|\,10} = 0{,}1761$; $\sqrt{3\,|\,17} = 17{,}8$; $\sqrt{41\,|\,00\,|,50} = 64{,}0$, $\sqrt{0\,|,00\,|\,51\,|\,00} = 0{,}0714$.

Beispiel 136. Baden hat mit dem Bodenseeanteil 15251, ohne ihn 15071 qkm, Bayern 75996 qkm, Württemberg 19508 qkm, das Deutsche Reich 468716 qkm. Man stelle sich diese Flächen als Quadrate vor und berechne deren Seiten!

Lösung: Baden erscheint als Quadrat mit der Seite 122,8 km, das von einem Wassergürtel mit der Breite $\frac{\sqrt{15251}-\sqrt{15051}}{2} = \frac{123{,}5-122{,}8}{2}$ = 0,35 km umflossen ist. Den andern Staaten entsprechen Quadrate mit den Seiten 275,8; 139,7; 685 km. Entsprechend kann man sich ein Bild von den Einwohnerzahlen machen, wenn man jedem 1 qm zuweist. Da Berlin (1925) 4024165 Einwohner hat, so ist die Seite des zugehörigen Quadrats 2006 in.

Beispiel 137. In einem rechtwinkligen Dreieck sind die beiden Seiten, welche den rechten Winkel einschließen (Katheten), bekannt; es ist a = 21,4 cm, b = 13,6 cm. Wie groß ist die dritte Seite c?

Lösung: c = $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{458+185} = \sqrt{643}$ = 25,36 cm.

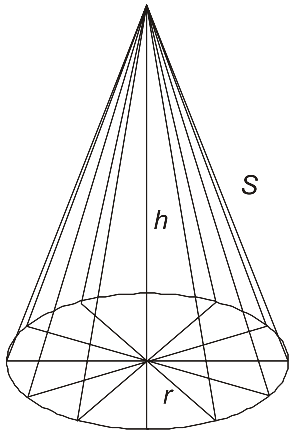
Beispiel 138. In einem rechtwinkligen Dreieck sei die größte Seite c = 15 cm, eine der kleineren a = 6,5 cm; wie groß ist die andere?

Lösung: b = $\sqrt{c^2-a^2} = \sqrt{225-42{,}25} = \sqrt{182{,}75}$ = 13,52 cm.

Probe: $\sqrt{c^2-a^2} = \sqrt{(c+a)\cdot(c-a)} = \sqrt{21{,}5\cdot 8{,}5} = \sqrt{182{,}8}$ = 13,52 cm

Beispiel 139. Ein gerader Kegel vom Radius r (Durchmesser d) und der Höhe h hat die Grundfläche r² · π = d² · $\frac{\pi}{4}$, den Inhalt v = $\frac{h}{3}$ · r² · π = $\frac{h}{3}\cdot\frac{\pi\cdot d^2}{4}$ und die Mantelfläche r · π · s = $\frac{d}{2}$ · π · s, wobei s = $\sqrt{r^2+h^2}$ ist. Was findet man für ein Amboßhörnchen, wenn d = 55 mm, h = 145 mm ist! (Siehe Fig. 28.)

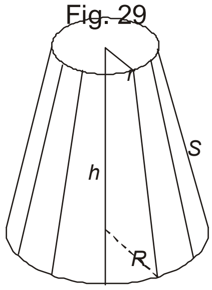
Fig. 28



Lösung: G = 23,8 qcm, v = 114,8 ccm, s = $\sqrt{7{,}56 + 210} = \sqrt{217{,}6}$ = 14,76 cm; M = 127,5 qcm.

Beispiel 140. Ein Kegelstumpf mit den Grundkreisradien R und r, welcher die Höhe h hat, besitzt die Grundflächen $R^2 \cdot \pi$ und $r^2 \cdot \pi$ oder $D^2 \cdot \frac{\pi}{4}$ und $d^2 \cdot \frac{\pi}{4}$, den Inhalt $\frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)$ und die Mantelfläche $M = \pi \cdot s \cdot (R + r)$. Dabei ist s = $\sqrt{(R - r)^2 + h^2}$. Bei einem oben offenen Eimer sei D = 33 cm, d:= 23 cm, h = 40 cm. Wieviel wiegt er leer und wieviel, wenn er mit Wasser gefüllt ist? 1 qm Blech möge 10 kg wiegen. (Siehe Fig. 29.)

Fig. 29



Lösung: v = $\frac{\pi}{3} \cdot 40 \cdot (16{,}5^2 + 16{,}5 \cdot 11{,}5 + 115{,}^2)$ = 24900 ccm = 24,9 l. Das vom Eimer gefaßte Wasser wiegt also 24,9 kg. Ferner ist s = $\sqrt{5^2 + 40^2}$ = 40,3 cm; M = $\pi \cdot 40{,}3 \cdot (16{,}5 + 11{,}5)$) = 3546 qcm. G = $\frac{\pi}{4} \cdot 23^2$ = 415 qcm. Boden und Mantelfläche machen zusammen 3961 qcm = 0,3961 qm aus, wiegen also 3,961 kg. Das ist das Gewicht des leeren Eimers, der volle wiegt 28,86 kg.

Beispiel 141. Ein Ballon schwebt 1200 m über der Erdoberfläche. Ein Insasse läßt eine Flasche über den Korbrand hinausfallen. Mit welcher Geschwindigkeit trifft sie die Erde?

Lösung: Nach den Lehren der Mechanik ist v = $\sqrt{2 \cdot g \cdot h}$, wobei g = 9,81, h die Höhe in m und v die Geschwindigkeit in m/sec ist.

In unserm Fall ist v = 153,4 m/sec, etwa 7-fache D-Zugsgeschwindigkeit.

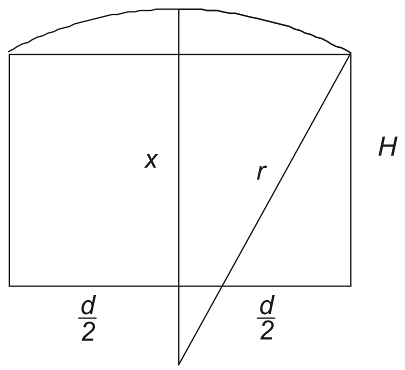
Beispiel 142. Die theoretische Ausflußgeschwindigkeit einer Flüssigkeit ist v = $\sqrt{2 \cdot g \cdot h}$, wenn h den Abstand zwischen dem Flüssigkeitsspiegel und der Ausflußöffnung in Metern bedeutet. Man berechne v für h = 0, 2, 4, 6, 8,.... 20 m!

Lösung: Man stellt unter $2 \cdot g$ = "19,62" auf O_1 nach Bedarf den Anfangs- oder Endstrich von O_2. Darunter steht auf U_1 "$\sqrt{2 \cdot g}$ ". Die Größe h sucht man auf O_2, darunter liegt auf U_2 "$\sqrt{h}$ " schon in passender Lage zur Multiplikation mit $\sqrt{2 \cdot g}$; das Ergebnis ist auf U_1 sofort abzulesen. Man findet

h	0	2	4	6	8	10	m
v	0	6,26	8,86	10,85	12,53	14,01	m/sec

Beispiel 143. Eine Gasometerglocke besteht aus einem Zylinder, welcher durch eine Kugelkappe abgeschlossen wird. Der Zylinder ist H =- 20,5 m hoch und hat den Durchmesser d = 31 . Die Kugelkappe hat den Krümmungsradius r = 32 m. Die Glocke ist aus Eisenblech hergestellt, von dem 1 qm 25 kg wiegt. Wieviel wiegt sie und wieviel Gas kann sie fassen?

Fig. 30



Lösung: Man findet zuerst das Stück x nach dem Lehrsatz des Pythagoras; x = $\sqrt{r^2-(\frac{d}{2})^2}$ = $\sqrt{1024-240}=\sqrt{784}$ = 28,0. Dann ist h = r - x = 4 m. Der Inhalt des Zylinders ist $\frac{\pi}{4}$ · d² · H = $\frac{\pi}{4}$ · 31² · 20,5 = 15470 cbm, der des Kugelabschnittes $\frac{\pi \cdot h^2}{3}$ · (3 · r - h) = $\frac{\pi \cdot 16}{3}$ · (96 - 4) = 1540 cbm, also zusammen 17010 cbm. Die Mantelfläche des Zylinders ist π · d · h = π · 31 · 20,5 = 1997 qm, die Fläche der Kugelkappe 2 · r · π · h = 2 · 32 · π · 4 = 804 qm, zusammen 2801 am. Das Gewicht der Gasometerglocke beträgt 2801 · 25 = 70000 kg = 70 t = 1400 Zentner. (Siehe Fig. 30.)

§ 72. Quadratwurzeln aus zusammengesetzten Ausdrücken. Kreisdurchmesser.

Soll $\sqrt{a \cdot b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}}$, $\sqrt{a \cdot b \cdot c}$, $\sqrt{\frac{a \cdot b}{c}}$, usw. berechnet werden, so wird man die unter dem Wurzelzeichen stehenden Ausdrücke erst auf O_1 mit Hiffe von O_2 finden und dann durch den Glasläuferstrich auf U_1 heruntergehen, wo das Ergebnis sofort abgelesen werden kann. Hierbei ist eine ungefähre Schätzung unbedingt notwendig, da dieselbe Zahl auf O_1 zweimal anftritt, auf U_1 nur einmal.

Eine Anwendung findet dieses Verfahren bei der Berechnung von Kreisdurchmessern, wenn die Fläche F gegeben ist. Da F = $\frac{\pi}{4}$ · d², so ist d = $\sqrt{F:\frac{\pi}{4}}$.

1. Verfahren. Man suche F auf O_1 auf, stelle darunter $\frac{\pi}{4}$ = 0,785 (O_2). Das Ergebnis steht unter "1" (U_2) auf U_1.

Beispiel: F = 3000 qcm, d = 61,8 cm. Abschätzung: d ~ $\sqrt{3000:\frac{3}{4}}=\sqrt{4000}$ ~ 60.

2. Verfahren. Man sucht F auf O_1 auf, stellt darunter "1" auf U_2, geht auf U_1 weiter bis "c" und findet darunter auf U_1 "d". Beispiel und Abschätzung wie vorher. Beweis: d = $\sqrt{F:\frac{\pi}{4}}$ = $\sqrt{F\cdot\frac{4}{\pi}}=\sqrt{F\cdot c^2}$. Vgl. S. 48) = $\sqrt{F}$ · c.

3. Verfahren. Man stellt unter "F" auf O_1 die mittlere "1" von O_2 und findet das Ergebnis unter "c_1" (U_2) auf U_1 (Vgl. S. 48).

4. Verfahren. Man stellt "F" auf O_1 unter den mittleren Läuferstrich und liest das Ergebnis unter dem rechten Läuferstrich auf U_1 ab. Man kann auch auf O_1 den linken, auf U_1 den rechten Läuferstrich benutzen.

Beispiel 144. Man zeige an selbstgewählten Zahlenbeispielen, daß $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$, $\sqrt{a^2 \cdot x} = a \cdot \sqrt{x}$ ist usf.

Lösung: Ob man die linke oder rechte Seite berechnet, die Einstellung des Rechenschiebers ist dieselbe; es kommt das gleiche Ergebnis heraus.

Beispiel 145. In einem rechtwinkligen Dreieck ist der linke Höhenabschnitt p = 2,3 cm, der rechte ist der Reihe nach 1 ; 2; 3; 4… cm. Wie groß sind die Höhen der dazu gehörigen Dreiecke?

Lösung: h = $\sqrt{p \cdot q}$; man erhält 1,517; 2,145; 2,627; 3,034 cm.

Beispiel 146. Soll x = $\sqrt{a^2 + b^2}$ berechnet werden, so kann man setzen x = $\sqrt{a^2 \cdot (1 + \frac{b^2}{a^2})} = a \cdot \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$.

Man berechnet mit U_1 und U_2 $\frac{b}{a}$, liest darüber auf O_1 $\frac{b^2}{a^2}$ ab, addiert 1, zieht die Wurzel (Ergebnis auf U_1) und multipliziert (U_1 und U_2) mit a. Man rechne die Aufgaben des § 71 nach diesem Verfahren.

Beispiel 147. Ein Leitungsdraht aus Kupfer soll i Ampère aushalten, dann muß sein Durchmesser einen gewissen Querschnitt q haben, der elektrotechnischen Tabellen entnommen wird. Wie groß ist die Dicke des Drahtes?

i	4	6	10	15	20	30	40	Amp.
q	0.75	110	1,5	2,5	4	6	10	qm
d	0,98	1,13	1,38	1,79	2,26	2,76	3,57	mm

Beispiel 148. Am 17. Februar 1929 explodierte in Berlin ein 25 m hoher Gasbehälter, der 36000 cbm faßte. Wie groß ist sein Durchmesser, wenn, wir zylindrische Gestalt annehmen?

Lösung: $\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot 25 = 36000$; $\frac{\pi \cdot d^2}{4} = 1440$; d = 42,8 m.

Beispiel 149. Vor dem Weltkriege war das Gebiet Deutschlands 540858 qkm groß, seine Einwohnerzahl betrug 64,93 Millionen. Für seine Kolonien galt die folgende Tabelle:

Kolonie	Ostafrika	Kamerun	Togo	Südwestafrika	Neuguinea	Samoa	
Gebiet	995000	745000	87200	835100	241231	2572	qkm
Einwohnerzahl	7,5	3	1	0,972	0,6	0,037	Mill.

Diese Zahlen sollen durch Kreise dargestellt werden, 1 qcm soll 1 Million entsprechen.

a) Wie groß sind die Radien der Kreise, welche Deutschlands Einwohnerzahl und Gebiet darstellen?

b) Man rechne dieselbe Zahl für die Kolonien.

c) Es sollen die Kolonien durch Kreisringe dargestellt werden, welche in der oben gewählten Reihenfolge die für Deutschland gültigen Kreise umschließen.

Lösung a): $\frac{\pi \cdot d^2}{4} = 0,541$; d=0,830 cm (r = 0,415 cm) für das das Gebiet; $\frac{\pi \cdot d^2}{4} = 64,9$; d = 9,09, r = 4,545 cm für die Einwohnerzahl.

Lösung b): Für die Flächeninhalte sind die Durchmesser 1,125; 0,974; 0,333; 1,03; 0,554; 0,0572 cm.; für die Einwohnerzahlen 3,09; 1,955; 1,13; 1,112; 0,874; 0,217 cm.

Lösung c): Man muß jedesmal alle bisher behandelten Zahlen zusammenfassen, also Kreise konstruieren, deren Durchmesser aus der Beziehung $\frac{\pi \cdot d^2}{4}$ = 0,5409; 1,536; 2,281; 2,368; 8,203; 3,444; 3,447 gefunden werden, nämlich 0,830; 1,399; 1,705; 1,736; 2,02; 2,094; 2,096. Diese Zahlen beziehen sich auf die Flächeninhalte, für die Einwohnerzahlen ist der Gang der Rechnung entsprechend.

Beispiel 150. Eine Zeitungsnotiz lautet: "Wissen Sie schon, daß man 500 kg Kupfer zu einem Draht auswalzen kann, der von Berlin nach Neuyork reicht, daß man aber aus 1000 kg Gold einen haarfeinen Draht vom 5fachen Erdumfang gewinnen könnte?" Wie groß ist der Durchmesser?

Lösung: Die Entfernung Berlin-Neuyork ist etwa 6380 km, wovon inan sich durch Nachmessen am Globus überzeugen kann. 500 kg = 500000 g Kupfer nehmen den Raum $\frac{500000}{8,9}$ = 56200 ccm ein. 6380 km = 638000000 cm = $6,38 \cdot 10^8$ cm. Es ist $\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot 6,38 \cdot 10^8 = 5,52 \cdot 10^4$; $\frac{\pi \cdot d^2}{4} = 0,881 \cdot 10\text{-}^4$; d = 0,0106 cm = 0,106 mm. Der Erdumfang ist 40000 km., das Fünffache also $2 \cdot 10^{10}$ cm, das spezifische Gewicht des Goldes 19,3, also $\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot 2 \cdot 10^{10} = 10^6 : 19,3$; $\frac{\pi \cdot d^2}{4}$ = 0,00000259; d = 0,001816 cm =- 0,01816 mm.

§ 73. Steigerung der Genauigkeit bei Quadratwurzeln.

1. Verfahren: In Beispiel 136 auf S. 55 liegt die Bestimmung der Breite des Wassergürtels innerhalb der Fehlergrenze des Instrumentes. Wir wollen daher x = $\sqrt{15251}$ und y = $\sqrt{15071}$ genauer berechnen. Es ist der Näherungswert der ersten Wurzel 123,5, der genaue Wert sei 123,5 + h. Es muß dann (123,5 + h)² = 15251 sein, also $15252,25^3 + 247 \cdot h + h_1 = 15251$. Da h als Zusatzgröße schon recht klein ist, kann h² vernachlässigt werden; $247 \cdot h$ - 15251 - 15252,25; h = $-\frac{1,25}{247}$ = -0,00506; x = 123,5-0,00506=123,49494
Hält mandiesen Wert noch nicht für genau genug, so setzt man x = 123,49494 + k. Nach demselben Verfahren erhält man dann k = - 0,000000821, also eine ganz belanglose Verbesserung. In derselben Weise findet man y = =122,8 + h_1; (122,8 + h_1)² = 15071; 15079,84 + 245,6 $\cdot$ (h_1 + h_1^2) = 15071; $h_1 = -\frac{8,84}{245,6}$ = - 0,0360; y = 122,7640. Die nächste Verbesserung ist k_1 = -0,00000124. Daher ist x - y = 0,73094 km.

2. Verfahren: Es ist $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$. Nimmt man die mit dem Rechenschieber erhaltenen Wurzeln, so bekommt man für $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ den Wert $\frac{15251-15071}{123,5+122,8} = \frac{180}{246,3}$ = 0,7308.

3. Verfahren: Es sei y = $\sqrt{15071}$ = 122,764 gefunden. Dann ist x = $\sqrt{15251}$ = $\sqrt{15071+180} = \sqrt{15071 \cdot \sqrt{1+\frac{180}{15071}}} = \sqrt{15071}\cdot(1+\frac{180}{15071})^{\frac{1}{2}}$. Man setzt den zweiten Bestandteil der Klammer gleich k, es ist nach dem binomischen Satz $(1 + h)^{½} = (1 + ½ \cdot h - \frac{1}{8} \cdot h^2 + \frac{1}{16} \cdot h^3\ldots$, also $x = y \cdot (1 + ½ \cdot h - \frac{1}{8} \cdot h^2 + \frac{1}{16} \cdot h^3\ldots)$.

Hier ist h = 0,01194, also:

y	=	122,7640
$½ \cdot y \cdot h$	=	0,7329
$-\frac{1}{8} \cdot y \cdot h^2$	=	- 0,0022
$\frac{1}{16} \cdot y \cdot h^3$	=	0,0000
x	=	123,4947

Die kleine Abweichung rührt daher, daß h nicht ganz genau berechnet wurde.

Beispiel 151. Der Vesuv werde als genauer Kegel aufgefaßt wie in Beispiel 122 auf S. 51. Um wieviel ist seine Seitenlinie länger als sein Grundkreisradius?

Lösung: s = $\sqrt{r^2+h^2} = r \cdot \sqrt{1+(\frac{h}{r})^2} = 8 \cdot \sqrt{1+0,0225}$ = $8 \cdot (1 + k)^{½}$

8 = 8,0000

Die Seitenlänge ist nur um 89,5 m größer als der Grundkreisradius!

$$\tfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot k = 0{,}0900$$

$$-\frac{1}{8} \cdot 8 \cdot k = -0{,}0005$$

$$s = 8{,}0895$$

Nach dem zweiten Verfahren bestimmt man mit dem Rechenschieber zunächst einen Näherungswert von $s = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{65,44}$, nämlich 8,09. Dann setzt man $s - r = \frac{s^2 - r^2}{s + r} = \frac{65,44 - 64}{8 + 8,09} = \frac{144}{16,09} = 0{,}0895$, also s = 8,0895 km. Ein genauerer Wert ist 8,0894993…

Man löse die Aufgabe auch nach dem ersten Verfahren!

§ 74. Kubikzahlen.

a^3 ist $a \cdot a \cdot a$ oder $a^2 \cdot a$. Die Formel liefert uns sofort die folgende

1. Regel. *Man berechnet $a^3 = a \cdot a \cdot a$ nach § 36 (wiederholte Multiplikation). Man kann dazu O_1 und O_2 oder U_1 und U_2 oder U_1 und R verwenden.*

2. Regel. *Will man die dritte Potenz einer Zahl a haben, so sucht man diese auf U_1 auf und stellt den Anfangs-(oder End-)strich von U_2 genau darüber. Statt jetzt auf O_1 "a^2" abzulesen, geht man sofort auf O_2 bis zur Marke "a" weiter und findet darüber auf O_1 den Betrag von $a^2 \cdot a$ oder a^3.*

Bei "System Rietz" und "System Darmstadt" befindet sich ganz oben eine dritte Skall die dreimal so schnell fortschreitet wie die von U_1. Ist also auf U_1 lg a abgetragen, so steht genau darüber auf der obersten Skala $3 \cdot \lg a$ oder nach Satz 5 auf S. 7 $\lg a^3$. Wie immer ist auch hier das Logarithmenzeichen fortgelassen; man erhält sofort

3. Regel. *Um a^3 zu finden, sucht man a auf U_1 auf und findet mit dem Glasläuferstrich genau darüber auf der Kubikskala den Wert von a^3.*

Die Berechnung von Kubikzahlen durch "System Darmstadt" wird in § 83 (S. 68)besprochen.

Beispiel 152. Ein englischer Zoll ist 2,54 cm, 1 Fuß 3,05 dm, 1 Yard 0,914 m. Wie groß sind die entsprechenden Körpermaße?

Lösung: 1 Kubikzoll = 16,4 ccm, 1 Kubikfuß =- 28,4 cdm, 1 Kubikyard = 0,763 cbm. Man führe ähnliche Umrechnungen durch und vergleiche die Ergebnisse mit den Angaben der Tabellen!

Beispiel 153. Wieviel wiegt ein würfelförmiger Stein von der Kantenlänge 18,5 cm, wenn das Eigengewicht des Stoffes 2,8 ist?

Lösung: Der Inhalt im $18{,}5^3 = 6330$ ccm, das Gewicht $6330 \cdot 2{,}8 = 17730$ g = 17,73 kg. Drei solche Steine wiegen mehr als 1 Zentner!

§ 75. Kugelinhalte.

Der Inhalt einer Kugel vom Durchmesser d (Radius r) ist $J = \frac{\pi}{6} \cdot d^3$ oder $J = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$. Man muß also das nach den vorigen Regeln gefundene Ergebnis d^3 durch 6 dividieren und mit π multiplizieren. Soll eine Reihe von Kugelinhalten gefunden werden, so wird man am besten auf O_3 den Wert $\frac{\pi}{6} = 0{,}5236$ durch einen feinen Bleistiftstrich festhalten, den Anfangs- oder Endstrich von U_2 darunterstellen und "d" auf U_2 aufsuchen. Darüber steht auf O_3 das Ergebnis $\frac{\pi}{6} \cdot d^3$

Beispiel 154. Drei Luftballone haben die Durchmesser 12,5 m, 13 m, 14,5 m. Wie groß ist in jedem Fall der Inhalt und die Oberfläche? Wie groß ist die Tragfähigkeit, wenn 1 cbm Luft 1,29 kg, 1 cbm Leuchtgas 0,55 kg, 1 qm Ballonhülle 0,45 kg wiegt?

Lösung: Man erhält für den Inhalt 1023; 1150; 1596 cbm Die Oberflächen sind $\pi \cdot d^2 = 491$; 531; 661 qm. (Abschätzung: $v \sim \tfrac{1}{2} \cdot d^3$; $O \sim 3 \cdot d^2$). Da 1 cbm Luft 1,29 kg wiegt 1 cbm Gas nur 0,55 kg, so kann jedes Kubikmeter des mit Gas gefüllten Ballons 1,29 - 0,55 = 0,74 kg tragen, also 757; 851; 1180 kg. Davon muß das Gewicht der Ballonhülle in Abzug gebracht werden, nämlich 221; 239; 298 kg. Für Gondel, Passagiere, Sandsäcke, Instrumente usw. bleibt also noch eine Tragfähigkeit von 536; 612; 882 kg.

Beispiel 155. Das Kugelhaus auf der Dresdener Ausstellung "Die technische Stadt" (1928) ist 6 Stockwerke (32 m) hoch. Wie groß ist sein Inhalt und seine Oberfläche?

Lösung: v = 17160 cbm, O = 3220 qm. Ein würfelförmiges Haus, dessen Oberfläche (4 Seitenwände und Dach) ebenso groß wäre, würde nur 1630 cbm umschließen.

Beispiel 156. Wieviel wiegt eine Korkkugel, deren Durchmesser 1 m ist, wenn das spezifische Gewicht 0,24 ist?

Lösung: 0,1256 t = 125,6 kg $\sim$ 2½ Zentner.

§ 76. Erhöhung der Genauigkeit.

Wenn man $a^3 = a \cdot a \cdot a$ setzt, so kann man die Gesetze anwenden, welche eine erhöhte Genauigkeit des Multiplizierens verbürgen (§ 38 f.). Für $a^3 = a^2 \cdot a$ gelten dieselben Vorschriften, vereinigt mit denen des genaueren Quadrierens (§ 65). Endlich kann man die Formel $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$ anwenden So ist z. B. $36^3 = (30 + 6)^3 = 27000 + 540 \cdot 36 + 216 = 46656$. Jeder der drei Teilausdrücke kann durch den Rechenschieber genau gefunden werden. Bei der Berechnung von Kugelinhalten beachte man, daß $\frac{\pi}{6} = \frac{11}{21} - 0{,}00021075 = \frac{1}{2} + \frac{1}{42} + 0{,}00021075$ ist. Hat also eine Kugel den Durchmesser 36 cm, so ist $\frac{1}{2} \cdot d^3 = 23328{,}00$; $\frac{1}{42} \cdot d^3 = 1110{,}86$; $-0{,}00021075 \cdot d^3 = -9{,}84$; v = 24429,02 ccm. Mit der 7stelligen Logarithmentafel findet rnan 24429,03

§ 77. Kubikwurzeln.

Ist $x^3 = 10$, so ist $x = \sqrt[3]{10}$. Da $2^3 = 8$, $3^3 = 27$ ist, so muß x zwischen 2 und 3 liegen.

1. Verfahren: Man prüft, ob $2{,}1^3$; $2{,}2^3$; $2{,}3^3$ gleich 10 in und findet, daß x zwischen 2,1 und 2,2 liegt. Nun untersucht man $2{,}12^3$, $2{,}14^3$, $2{,}16^3$ usf. x liegt zwischen 2,14 und 2,16. Geht man so weiter vor, so liefert diese Probiermethode x = 2,154.

Beispiel 157. Man prüfe die folgende Tabelle:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sqrt[3]{x}$	1,260	1,442	1,587	1,710	1,817	1,913	2,000	2,080	2,154

2. Verfahren: Man rechne nach der Formel $a^2 \cdot a$ (2. Regel auf S. 60) in der eben beschriebenen Weise.

3. Verfahren: Man sucht auf der Kubikskala (System Rietz und System Darmstadt) a auf, dann liegt genau darunter auf U_1 "$\sqrt[3]{a}$".

Daß man durch eine einzige Einstellung, ohne Probieren, sofort die dritte Wurzel mit möglichster Genauigkeit finden kann, ist ein großer Vorzug der Rechenschieber mit Kubikskala.

Man rechne die vorher angegebene Tabelle auch nach dem 2. und 3. Verfahren durch.

Es ist $\sqrt[3]{3{,}2} = 1{,}474$; $\sqrt[3]{32} = 3{,}175$; $\sqrt[3]{320} = 6{,}84$; $\sqrt[3]{3200} = 14{,}74$; $\sqrt[3]{32000} = 31{,}75$; $\sqrt[3]{320000} = 68{,}4$; $\sqrt[3]{3200000} = 147{,}4$ usf. (Vgl. die Ausführungen auf S. 55!) Hieraus ergibt sich folgende

***Regel:** Man teile die Zahl, aus welcher die dritte Wurzel gezogen werden soll, vom Komma ausgehend, nach rechts und links in Gruppen von je drei Ziffern ein. Jeder Gruppe entspricht **eine** Ziffer des Wurzelwertes. Enthält die am weitesten links stehende Gruppe **eine** Ziffer, so benutzt man beim Einstellen die **linke** Seite der Kabikskala, hat sie **zwei** Ziffern, den **mittleren** Teil der Kubikskala, hat sie **drei** Ziffern, den **rechten**. Ist keine Kubikskala vorhanden, so ist diese Gruppeneinteilung notwendig, um den ungefähren Wert abzuschätzen.*

Beispiel 158. Hat ein Körper das Eigengewicht s, so, bedeutet das, daß 1 cbm des Stoffes s kg oder 1 cbm s Tonnen (= 1000 s kg) wiegt. Einer Tabelle entnehmen wir folgende Eigengewichte:

1.	Wasserstoff	0,0000896	6.	Schwefelsäure	1,84	11.	Quecksilber	13,6
2.	Luft	0,001293	7.	Kork	0,24	11	Gold	19,13
3.	Kohlensäure	0,001978	8.	Aluminium	2,6	13.	Platin	21,4
4.	Alkohol	0,79	9.	Eisen	7,5			
5.	Wasser	1	10.	Blei	11,3			

Wie groß ist die Kantenlänge eines Würfels, der, mit dem betreffenden Stoff gefüllt, genau 1 kg wiegt?

Lösung: x Meter. Dann ist $x^3 = 1000 \cdot s = 1$ kg; $x^3 = \frac{1}{1000 \cdot s}$; $x = \sqrt[3]{\frac{1}{1000 \cdot s}}$. Man erhält

Nummer des Stoffes	1	2	3	4	5	
$\frac{1}{1000 \cdot s}$	11|,773|	0|,773|	0|,506|	0|,001|266|	0|,001|	
x	2,235	0,918	0,797	0,1082	0,1	m
Nummer des Stoffes	6	7	8	9	10	
$\frac{1}{1000 \cdot s}$	0|,000|543|	0|,004|170|	0|,000|385|	0|,000|133|3	0|,000|088|5	
x	0,0816	0,161	0,0727	0,0511	0,0446	m
Nummer des Stoffes	11	12	13			
$\frac{1}{1000 \cdot s}$	0|,000|073|5	0|,000|051|8	0|,000|046|7			
x	0,0419	0,0373	0,0360			m

Die äußersten Werte sind also rund 2¼ m und 3½ cm.

Beispiel 159. Eine deutsche Firma erhält von einer englischen den Auftrag, würfelförmige Blechgefäße herzustellen, die je 1 Gallon = 4,54 Liter fassen. Wie groß ist die Würfelkante?

Lösung: $x = \sqrt[3]{4,54} = 1,656$ dm = 16,56 cm.

Beispiel 160. Wie groß sind die Durchmesser von Kugeln, welche den Inhalt 1, 2, 3 . . . cbm haben?

Lösung: $V = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3$; $d^3 = \frac{6 \cdot V}{\pi}$; $d = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot V}{\pi}}$

Man findet

V	1	2	3	4	5	
d^3	1,91	3,82	5,73	7,64	9,55	
d	1,24	1,56	1,79	1,97	2,12	m

Hat der Rechenschieber die Kubikskala, so kann man diese Rechnungen mit einer einzigen Einstellung erledigen. Man bringt auf ihr $\frac{\pi}{6} = 0,5236$ zur Deckung mit dem Anfangs- oder Endstrich von U_2 und sucht auf U_2 den Wert "d" auf, der unter dem angegebenen Inhalt auf der Kubikskala steht (Umkehrung von § 75). Um den ungefähren Wert von d zu ermitteln, setzt man $\pi \sim 3$, also $v = \frac{\pi}{6} \cdot \pi \cdot d^3 \sim ½ \cdot d^3$; $d \sim \sqrt[3]{2 \cdot v}$.

Beispiel 161. Wasserfreie Blausäure hat das Eigengewicht 0,697. Die tödliche Dosis ist 0,06 g. Welchen Durchmesser muß ein Tropfen dieses Giftes haben, um absolut tödlich zu wirken?

Lösung: $V = \frac{0,06}{0,697} = 0,0861$ ccm; d = 0,548 cm.

§ 78. Genauere Berechnung der Kubikwurzeln.

Soll aus irgendwelchem Grunde $x = \sqrt[3]{9}$ besonders scharf berechnet werden, so findet man nach den Regeln des vorigen Paragraphen zunächst den Näherungswert $x_0 = 2,08$. Ein genauerer Wert sei $x_0 + h$; man weiß von vornherein, daß h eine gegen x_0 sehr kleine Zahl sein wird. Es ist $(x_0 + h)^3 = 9$, also $x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 = 9$. Unter Vernachlässigung der Glieder mit $h^{2'}$ und h^3 erhält man $3x_0^2h = = 9 - x^3 = 9 - 8,998912$ (genau ausrechnen!) = 0,001088; $h = \frac{0,001088}{3 \cdot 2,08^2} = 0,0000837$ (Rechenschieber!), also x = 2,0800837. Der auf 9 Wertziffern genaue Wert ist 2,08008382.

$x = \sqrt[3]{11,2}$ kann man natürlich ebenso berechnen. Der Näherungswert ist hier $x_0 = 2,24$. $2,24^3$ ist aber (genau berechnet) = 11,239424;

$x = \sqrt[3]{11{,}2} = \sqrt[3]{11{,}239424 - 0{,}039424} = \sqrt[3]{11{,}239424 \cdot (1 - 0{,}00351)} = 2{,}24 \cdot (1\text{-}0{,}00351)^{1/3}$. Nach dem binomischen Satz ist $(1 - h))^{1/3} = 1 - 1/3h - \frac{1}{9} h^2 \ldots$, also $x = 2{,}24 \cdot (1 - 0{,}00117 - 0{,}00000136) = 2{,}24 - 0{,}00262 - 0{,}000003 = 2{,}23738$ (genauer 2,23737788).

§ 79. Potenzen mit höheren Exponenten. Das Hornerscherna.

Da das Potenzieren eine wiederholte Multiplikation ist, kann auf § 36 verwiesen werden. Man stellt "a" auf O_1 fest ein und erhält in der früher angegebenen Weise a^2, dann a^3 usf. Vgl. Beispiel 41 auf S. 21.

Vereinfachungen ergeben sich dadurch, daß $a^4 = a^2 \cdot a^2 = (a^2)^2$ ist, die Berechnung von a^4 erfordert also nur zweimaliges Quadrieren, d. h. zweimaligen Uebergang von U_1 zu O_1. Entsprechend ist $a^6 = (a^2)^3$; man berechnet a^2 und erhebt die gefundene Zahl durch Uebergang von U_1 zur Kubikskala in die dritte Potenz. $a^8 = ((a^2)^2)^2$ wird durch dreimaliges Quadrieren gefunden; a^9, indem man a in die dritte Potenz erhebt und mit dem Ergebnis dieselbe Operation vornimmt usf. a^5 ist $a^4 \cdot a$; $a^7 = a^6 \cdot a$ usw.

Praktische Anwendung finden die höheren Potenzen vor allem bei den Potenzreihen. Es ist z. B.:

$\sin x = x - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot x^5 \ldots$ Dabei ist vorausgesetzt, daß x im Bogenmaß angegeben wird (vgl. § 69 auf S. 51).

Will man z. B. sin 50° berechnen, so beachte man zunächst, daß x = 50° = 0,873 ist. Dann hat man $\frac{x^3}{6} = \frac{0{,}665}{6} = 0{,}111$; $\frac{x^5}{120} = \frac{0{,}506}{120} = 0{,}004$; $\frac{x^7}{5040}$ kann bei der hier angestrebten Genauigkeit schon unberücksichtigt bleiben. Es ist also sin 50° = 0,873 - 0,111 + 0,004 = 0,766 (genauer 0,766044).

Schneller wird die Berechnung nach dem Hornerschema aus geführt. Es sei y = ax + b. Dann schreibt man a und b, die gegebenen Beizahlen, nebeneinander hin, läßt zunächst eine Zeile frei und schreibt dann unter a noch einmal dieselbe Größe. Diese multipliziert man mit x und setzt das Ergebnis unter b. Indem man jetzt addiert, erhält man offenbar y = a x+ b.

y = ax + b

a	b
	ax
a	y

Ist $y = ax^2 + bx + c$, so verfährt man entsprechend. Man stellt "x" auf O_1 oder U_1 fest ein, multipliziert diese Zahl mit a (Ergebnis ax), addiert diesen Wert zu b (Ergebnis b_1), multipliziert wieder mit x (ohne die Einstellung des Rechenschiebers zu ändern), erhält b_1x, addiert dies zu c und findet y.

Beweis: Es ist $b_1 = ax + b$; $b_1x = ax^2 + bx$; $b_1x + c = ax^2 + bx + c$, wie es verlangt war. Man beweise selbst, daß für $ax^3 + bx^2 + cx + d$ die Anordnung gilt

a	b	c	d
	ax	bx	cx
a	b_1	c_1	y

So geht es weiter.

In unserm Falle haben wir, nachdem eine rohe Abschätzung gelehrt hat, daß für x = 0,873 das Glied $\frac{x^7}{5040}$ bedeutungslos ist, $y = \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x = 0{,}00833x^5 + 0 \cdot x^4 - 0{,}1667x^3 + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 0$, also

0,00833	0	0,1667	0	1	0
	0,00728	0,00636	-0,1400	-0,1222	0,766
0,00833	0,00728	0,1603	-0,1400	0,8778	0,766

Schneller noch kommt man zum Ziele, wenn man $y = x \cdot (\frac{1}{120} \cdot x^4 - \frac{1}{6} \cdot x^2 + 1)$ setzt. Nennt man den Klammerinhalt z, so muß man stets mit $x^2 = 0{,}762$ multiplizieren.

0,00833	-0,1667	1
	0,00635	-0,122

y = sin x = 0,873 · 0,878 = 0,766

0,00833 -0,16035 $\boxed{z = 0{,}878.}$

Beispiel 162. Man rechne auf dieselbe Weise die folgende Tabelle nach !

x	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
sinx	0,1736	0,342	0,500	0,643	0,766	0,866	0,940	0,985	1,000

Beispiel 163. Es ist cos x = $1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots$ Man berechne für dieselben Winkel die zugehörigen Cosinus-Werte!

Lösung:

x	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
cos x	0,985	0,940	0,866	0,766	0,643	0,1500	0,342	0,12736

Probe: a) cos x° = sin (90° - x°); b) (sin x)² + (cos x)² = 1.

Beispiel 164. Es sei e = 2,718…, dann ist $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$

Man prüfe die Tabelle:

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
e^x	1,105	1,221	1,350	1,492	1,649	1,822	2,014	2,226	2,460

Beispiel 165. Eine Ellipse hat die Halbachsen a und b. Man setze $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ = e, dann ist ihr Umfang U =

$$2 \cdot \pi \cdot a \cdot [1 - (\frac{1}{2})^2 \cdot e^2 - (\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4})^2 \cdot \frac{e^4}{3} + (\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6})^2 \cdot \frac{e^6}{5} - \ldots]$$

Es sei a = 10 cm, b der Reihe nach 10, 9, 8, 7, 6, 5 cm. Wie lang ist in jedem Einzelfall der Umfang?

Lösung: e² ist 0; 0,19; 0,36; 0,51; 0,63; 0,75. U_1 = 62,83; U_2 = 62,83 · (1 - 0,0493) = 62,83 - 3,10 = 59,73; U_3 = 56,72; die folgenden Werte sind 53,82; 51,05; 48,44.

§ 80. Wurzeln mit höheren Wurzelexponenten.

Ist x= $\sqrt[4]{a}$ so kann man auch setzen x = $\sqrt{\sqrt{a}}$. Man berechnet also die Quadratwurzel und radiziert sie noch einmal. So ist $\sqrt[4]{7} = \sqrt{\sqrt{7}} = \sqrt{2{,}646}$ = 1,627. Entsprechend ist $\sqrt[6]{a} = \sqrt{\sqrt[3]{a}}$ oder $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$; $\sqrt[6]{7} = \sqrt{1{,}913}$ oder = $\sqrt[3]{2{,}646}$ = 1,383. $\sqrt[8]{a} = \sqrt{\sqrt[4]{a}}$, $\sqrt[9]{a} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}$. Die fünfte und die siebente Wurzel findet man durch Probieren, wenn man nicht "System Darmstadt" anwendet, worüber in § 82 gesprochen werden wird. So ist z. B. $\sqrt[5]{7}$ kleiner als $\sqrt[4]{7}$ = 1,627. Es ist $1{,}6^5$ = (1,61²)² · 1,6 = 10,49; 1,6 ist zu groß. $1{,}5^5$ = 7,59; $1{,}4^5$ = 5,38. Der gesuchte Wert liegt zwischen 1,4 und 1,5. $1{,}45^5$ = 6,41; $\sqrt[5]{7}$ ist zwischen 1,45 und 1,50 eingeschlossen. Durch weiteres planmäßiges Probieren findet man 1,476.

Große oder kleine Zahlen, die man radizieren soll, teilt man, vom Komma nach rechts und links fortschreitend, in Gruppen ein; jede Gruppe muß soviel Ziffern enthalten, wie der Wurzelexponent ausmacht.

§ 81. Bruchpotenzen.

Unter $a^{p/q}$ versteht man den Ausdruck $((\sqrt[q]{a})^p$ oder $\sqrt[q]{a^p}$. Beide sind gleichwertig; es ist gleichgültig, ob man zuerst radiziert und dann Potenziert, oder ob man umgekehrt vorgeht. Wir wollen hier nur die einfachsten Fälle untersuchen.

1. Es ist $a^{3/2} = (\sqrt{a})^3$. Man radiziert zuerst a und potenziert das Ergebnis mit 3. Bei Nr. 14 wird a auf O_1 aufgesucht, darunter stellt man den Einheitsstrich der Zunge. Das Ergebnis liest man auf U_1 ab und multipliziert es mit a. Bei System Rietz und "Darmstadt" stellt man ebenfalls "a" auf O_1 ein, darunter würde man auf U_1 "$\sqrt{a}$ " finden (nicht ablesen!) und genau darüber auf der Kubikskala $(\sqrt{a})^3$.

2. $a^{2/3} = \sqrt[3]{a^2}$. Besitzt man Nr. 14, so bildet man a² und zieht daraus nach der in § 77 angegebenen Regel die Kubikwurzel. System Rietz und Darmstadt arbeiten noch einfacher, man sucht "a" auf der Kubikskala auf, stellt den Läuferstrich darüber und findet auf U_1 $\sqrt[3]{a}$ (nicht ablesen!) und auf O_1 "$\sqrt[3]{a^2}$ ".

Beispiel 166. Die Planeten bewegen sich in Ellipsen um die Sonne. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen. Die Umlaufzeiten lassen sich leicht beobachten, aus ihnen sollen die großen Halbachsen berechnet werden. Wir setzen die der Erde = 1, ihre Umlaufzeit ist 1 Jahr = 365,25 Tage. Die Umlaufzeiten einiger anderer Planeten sind, auf Rechenschiebergenauigkeit abgerundet, der folgenden Tabelle zu entnehmen:

Planet	Merkur	Venus	Mars	Cores	Pallas	Juno	Vesta	Jupiter	Saturn	
Umlautzeit	88,0	225	687	1680	1685	1590	1325	4330	10760	Tage

Wie groß sind die großen Halbachsen ihrer elliptischen Bahnen?

Lösung: Ist die Umlaufzeit t, die große Halbachse a, so gilt die Beziehung $\frac{a^3}{1} = \frac{t^2}{365,25^2}$; a =

$$\frac{t^{2/3}}{365,25^{2/3}} = \frac{t^{2/3}}{51,1}.$$

Man erhält für die Umlaufzeiten 0,387; 0,723; 1,524; 2,77; 2,76; 2,67; 2,36; 5,20; 9,54. Um diese Entfernungen in Kilometern zu erhalten, muß man sie mit 149500000 multiplizieren.

§ 82. Die Potenzskalen des "Darmstadt Nr. 21" und ihr Zusammenhang.

Für die Berechnung von Wurzeln und Potenzen mit ganzen oder gebrochenen Exponenten ist der Rechenschieber Nr. 21 System Darmstadt sicher das geeignetste Instrument, nicht nur hinsichtlich der Handhabung, sondern auch wegen der ausreichenden Genauigkeit der Ergebnisse.

Die Potenzskalen sind auf der Rückseite der Zunge in 3 Abschnitten von je 25 cm Länge aufgetragen (die der Bequemlichkeit wegen angebrachten Ueberteilungen nicht gerechnet).

Diese Skalen können sowohl bei normaler Stellung der Zunge und mit Ablesung der Ergebnisse an den Fenstern auf der Rückseite des Schiebers, als auch mit umgedrehter Zunge gebraucht werden; die letztere Art ist der Bequemlichkeit wegen vorzuziehen.

Ueber die konstruktive Grundlage der Potenzskalen ist nur zusagen, daß auch hier der Grundsatz durchgeführt wurde, eine höhere Operation auf eine niedrige zurückzuführen, hier also das Potenzieren und Radizieren in Addition und Subtraktion logarithmischer Strecken zu verwandeln, was natürlich die Rechnung wesentlich vereinfacht.

Das geschieht nach der Formel

$$\lg b + \lg(\lg a) = \lg(b \cdot \lg a) = \lg(\lg a^b).$$

Während bei der Skala U_1 die Zahl x an der Stelle steht, die vom Anfangsstrich um $25 \cdot \lg x$ entfernt ist, ist der entsprechende Abstand bei der unteren Potenzskala von Nr. 21 gleich $25 \cdot \lg(\ln x)$, bei der mittleren $25 \cdot \lg \cdot (10 \cdot \ln x)$, bei der oberen $25 \cdot \lg(100 \cdot \ln x)$. Dabei bedeutet ln x den natürlichen Logarithmus von x (mit der Basis 2,7183). Man erhält ihn aus dem gewöhnlichen oder künstlichen, indem man diesen mit 2,3026 multipliziert; $\ln x = 2,3026 \cdot \lg x$. Umgekehrt ist $\lg x = 0,4343 \cdot \ln x$. Wir geben hier eine Tabelle, deren Ergebnisse an den Potenzskalen nachgemessen werden können:

Untere Skala:

Teilstrich x	ln x	lg (ln x)	25 · lg (ln x)
2,71828	0,0000	0,00000	0,000
3	1,09861	0,04084	1,021 cm
4	1,36829	0,14185	3,546 cm
5	1,60944	0,20668	5,167 cm
6	1,79176	0,25328	6,332 cm
7	1,94591	0,28912	7,228 cm
8	2,07944	0,31795	7,949 cm
9	2,19722	0,34187	8,547 cm
10	2,30259	0,36222	9,055 cm

15	2,70805	0,43266	11816 cm
20	2,99573	0,47650	11,913 cm
30	3,40120	0,53163	13,291 cm
40	3,68888	0,56689	14,172 cm

Mittlere Skala:

Teilstrich	10 in x	lg (10 ln x)	25 - lg (10 ln x)	
$e^{0,1}$ = 1,10517	1,00000	0,00000	0,00000	
2	6,93147	0,84083	21,0206	cm
e	10	1	25 cm	cm

Obere Skala:

Teilstrich	100 ln x	lg (100 ln x)	25 · lg (10 ln x)	
$e^{0,01}$ = 1,01005	1	0	0	
1,04	3,92207	0,59352	14,8379	cm
$e^{0,1}$	10	1	25	cm

Die untere Skala beginnt also mit e und endet mit e^{10} = 22026, die mittlere beginnt mit $e^{0,1}$ und endet mit e, für die obere sind die Grenzen $e^{0,01}$ und $e^{0,1}$.

Für den Gebrauch der Potenzteilungen sind folgende Einzelheiten zu beachten:

Entsprechend der Grundlage dieser Skalen haben die darauf auf. getragenen Werte nicht jede beliebige Bedeutung innerhalb der Ziffernfolge, wie die gewöhnlichen Skalen des Rechenschiebers, sondern die Werte der bezifferten und der unbezifferten Teilstriche sind durchaus eindeutig, es kann also der mit 3 bezeichnete Teilstrich nur eben diese Zahl bedeuten und nicht um 30 oder 300, 30000 usw., wie das bei den Multiplikationsskalen des Schiebers der Fall ist. Ferner ist zu beachten, daß die Skala U_1, wenn sie in Verbindung mit den Potenzteilungen gebraucht wird, ebenfalls so zu lesen ist wie es die Bezifferung angibt. Die Zahl 1,6 kann also nur zum Potenzieren mit eben diesem Werte verwendet werden und man kann ihr nicht eine um das Zehnfache größere oder kleinere Wertung beimessen, wie es das Multiplikationsverfahren ohne weiteres erlaubt.

Es kann also mit dem Rechenschieber direkt nur bis zur zehnten Potenz gerechnet werden, vorausgesetzt, daß die Resultate noch innerhalb des Bereiches der Potenzteilung fallen, und höhere Potenzen müssen nach dem später noch anzugebenden Verfahren behandelt werden.

Auf der Rückseite des Rechenschiebers ist bereits eine schematische Darstellung gegeben, die zeigt, wie der Schieber beim Potenzieren und Radizieren mit der Zunge in normaler Lage zu behandeln ist. Wir geben auch hier eine klare Uebersicht über die verschiedenen Einstellungen und lassen auch eine Anzahl einfacher Zahlenbeispiele zur Erklärung folgen.

Potenzieren.

Man stellt zunächst die auf der Potenzteilung abgelesene Grundzahl auf den Indexstrich im rechten oder linken Fenster auf der Rückseite ein und verschiebt dann den Läuferstrich auf den Anfangsstrich der Teilung U_2. Dann verschiebt man die Zunge so weit, daß der Exponent auf der Teilung U_2 unter den Läuferstrich kommt, kehrt den Schieber um und liest das Ergebnis auf der Potenzskala unter dem Indexstrich ab. Hierbei ist zu beachten, daß in gewissen Fällen die Zunge soweit durchgeschoben werden muß, daß die Ablesung nur am linken Fenster stattfinden kann. Wurde die Grundzahl auf der unteren Potenzskala eingestellt, so ist in diesen Fällen das Ergebnis, als außerhalb des Bereiches der Potenzskala fallend, nicht mehr abzulesen, war sie dagegen auf einer der beiden oberen Skalen eingestellt, so geht man in derartigen Fällen, also wenn das Ergebnis links eischeint, beim Ablesen auf die untere Skala über, steht also die Grundzahl auf der obersten Skala, auf die mittlere und steht sie auf der mittleren, dann auf die unterste.

Radizieren.

Beim Radizieren wird so vorgegangen, daß man zunächst die zu radizierende Zahl unter den Indexstrich stellt, dann den Läuferstrich auf den Wurzelexponenten auf der Skala U_2. Die Zunge wird dann verschoben, bis der Anfangsstrich unter den Läuferstrich kommt, dann wendet man den Schieber und liest das Ergebnis unter dem Indexstrich ab. Hier ist zu beachten, daß die Wurzel auf der gleichen Skala erscheint, wenn man die Zunge nach rechts herauszog und auf der darüberliegenden, wenn man die Zunge nach links verschieben mußte.

Wenn man eine große Anzahl Operationen mit den Potenzskalen vorzunehmen hat, dreht man die Zunge um, sodaß die Potenzskalen auf die Vorderseite kommen und geht dann wie folgt vor:

Beim **Potenzieren** stellt man die Grundzahl über den Anfangs- oder Endstrich der Teilung U_1, verschiebt dann den Läufer auf den Exponenten, der auf der Skala U_1 eingestellt wird und liest dann über demselben auf der Potenzteilung das Resultat ab. Wird unter den Anfangsstrich von U_1 eingestellt, so liest man das Ergebnis auf der gleichen Teilung, auf der der Radikand steht, ab, muß man dagegen bei Grundzahlen, die in den Bereich der beiden oberen Teilungen fallen, auf den Endstrich von U_1 einstellen, so muß das Ergebnis der Potenzierung jeweils auf der darunter stehenden Teilung abgelesen werden.

Beim **Radizieren** ist das Verfahren folgendes: Man bringt den Radikanden auf der Potenzteilung mit dem Wurzelexponenten auf der Teilung U_1 mittels des Läuferstriches zur Deckung und kann dann gegenüber dem Anfangs- oder Endstrich der Teilung U_1 auf der Potenzteilung das Ergebnis ablesen. Erscheint dasselbe gegenüber dem Anfangsstrich der Teilung U_1, so wird es auf der gleichen Skala wie der Radikand abgelesen, im anderen Fall auf der darüber liegenden Teilung, wobei dem Umstand Rechnung zu tragen ist, daß die obere Teilung ihre Begrenzung mit 1,01 hat und die direkte Bestimmung kleinerer Werte nicht gestattet. In diesem Zusammenhang ist noch zu bemerken, daß die log.log. Skalen auch die Bestimmung der nat. Logarithmen in der Weise gestatten, daß man die Zunge herumdreht und die Marke e mit dem Anfangsstrich der Teilung U_1 zur Deckung bringt. Zu jedem auf den log. log. Skalen abgelesenen Wert hat man dann unter dem gleichen Läuferstrich auf der Teilung U_1 den log. nat. Hinsichtlich der Kennziffern ist nur zu beachten, daß entsprechend der Definition der log. log. Skalen der Numerus der auf der obersten Skala eingestellten Werte 0,0…, derjenige der Werte der mittleren Skala 0,… ist. Auf der untersten Skala erhält man dann die Werte, so wie sie auf der Teilung U_1 abgetragen sind vollständig mit ihren Kennziffern, d. h. die Zahlen auf U_1 stellen in diesem Falle die Kennziffern und die Unterteilungen die Dezimalen dar.

Natürlich lassen sich auch die Logarithmen jedes anderen Systems durch Einstellung der Basis auf der log. log. Teilung auf den Anfangsstrich der Teilung U_1 bestimmen.

Beispiele. **Potenzieren:**

$1{,}02^{3{,}04} = 1{,}062$
$1{,}0545^{1{,}76} = 1{,}098$
$1{,}23^{3{,}4} = 2{,}022$
$1{,}435^{2{,}52} = 2{,}485$
$7{,}2^{1.84} = 37{,}8$
$5{,}2^{2{,}04} = 28{,}9$

Grundzahl unter den Strich am rechten Fenster einstellen, Läuferstrich auf Anfangsstrich von U_2, dann Zunge bis zum Exponenten auf U_2 unter den Läuferstrich verschieben und Ergebnis unter dem Fenster rechts ablesen (auf der gleichen Skala, auf der die Grundzahl steht.)

$1{,}09^{3{,}8} = 1{,}387$
$1{,}025^{7{,}3} = 1{,}1975$
$1{,}0154^{6{,}75} = 1{,}1087$
$2{,}14^{6{,}5} = 140$
$1{,}645^{5{,}25} = 13{,}64$
$1{,}24^{9{,}55} = 7{,}80$

Grundzahl unter den Strich am linken Fenster ein stellen, Läuferstrich auf den Endstrich von U_2, dann Zunge bis zum Exponenten auf U_2, unter den Läuferstrich verschieben und Ergebnis unter dem Fenster links ablesen und zwar auf der Skala unterhalb der, auf der die Grundzahl steht.

Radizieren.

$\sqrt[1{,}02]{1{,}03} = 1{,}0294$	Radikand unter den Strich am Fenster rechts ein stellen, Läuferstrich auf den Wurzel-Exponenten auf U_2, dann Verschiebung der Zunge bis Anfangsstrich von U_2 unter dem Läuferstrich steht, Ablesung des Ergebnisses am Fenster rechts unter dem Indexstrich.
$\sqrt[2]{30} = 5{,}478$	
$\sqrt[1{,}75]{1{,}055} = 1{,}03106$	
$\sqrt[3]{1{,}071} = 1{,}02313$	
$\sqrt[1{,}8]{1{,}25} = 1{,}1873$	
$\sqrt[7]{1{,}45} = 1{,}0545$	Radikand unter den Strich am Fenster links einstellen, Läuferstrich auf den Wurzel-Exponenten auf U_2, dann Verschiebung der Zunge bis Endstrich von U_2 unter dem Läuferstrich steht. Ablesung des Ergebnisses am Fenster unter dem Indexstrich.
$\sqrt[1{,}9]{1{,}13} = 1{,}0665$	
$\sqrt[8{,}1]{250} = 1{,}977$	

§ 83. Die Berechnung von Potenzen mit "System Darmstadt Nr. 21" für den Fall positiver Exponenten.

Beispiel 167. Man berechne 2^1, 2^2, 2^3.... soweit es die Skala erlaubt!

Beispiel 168. Man berechne die einzelnen Glieder der Potenzreihen (§ 79, S. 63) und vereinige sie (ohne also das Hornerschema anzuwenden).

Lösung: Es sei beispielsweise sin x für x = 70° zu berechnen.

$$x = 1{,}222 \qquad x = +1{,}222$$

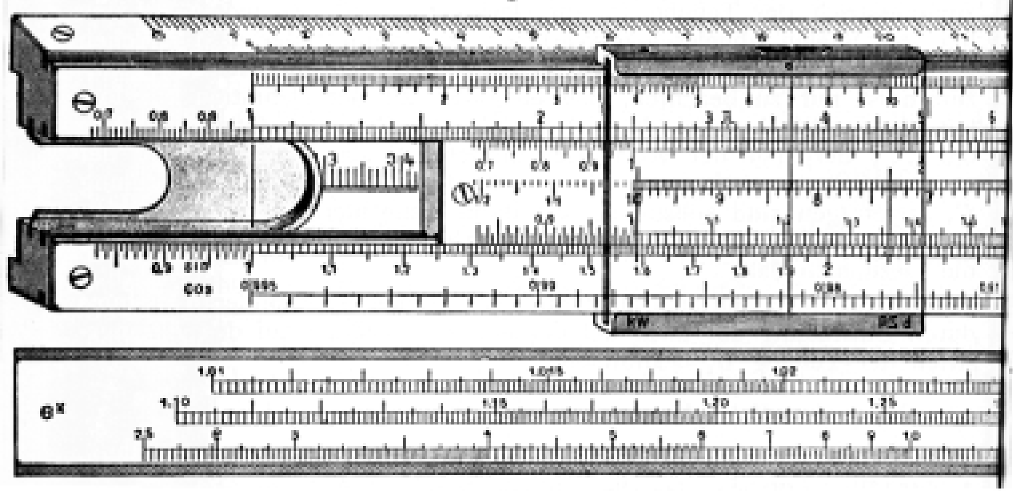
$$x^3 = 1{,}824 \qquad -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3 = -0{,}304$$

$$x^5 = 2{,}72 \qquad +\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot x^5 = +0{,}023$$

$$x^7 = 4{,}06 \quad -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\cdot x^7 \;\underline{= -0{,}001}$$

$$0.940$$

Fig. 31.



Beispiel 169. Die Gleichung $x^x = 3$ soll gelöst werden.

Lösung: Da $1^1 = 1$, $2^2 = 4$ ist, muß x zwischen 1 und 2 liegen. Für x - 1,5 erhält man $x^x = 1{,}838$, weiteres Probieren liefert die folgende Tabelle:

x	1,6	1,7	1,8	1,9	…	1,825
x^x	2,120	2,464	2,880	3,39	…	3,00

Beispiel 170. Bei der Berechnung des Luftkompressors treten Ausdrücke von der Form a^n oder $a^{1/n}$ oder $a^{n-1/n}$ auf. a ist dabei gegeben, n liegt zwischen 1 und 1,4- Man berechne die drei Ausdrücke für a = 1,9; n = 1,4.

Lösung: Mit der als bekannt vorauszusetzenden Einstellung erhalten wir $a^n = 2{,}456$, $\frac{1}{n}$ ist hier $\frac{1}{1{,}4}$ = 0,714. Wir bringen bei umgekehrter Zunge 1,9 der Potenzskala mit dem Endstrich der Skala U_1 in Uebereinstimmung, verschieben dann den Läuferstrich auf 7,14 der gleichen Skala. Da wir aber nur mit 0,714 zu potenzieren haben, und da die Werte der Potenzskalen jeweils die 10te Wurzel derjenigen sind, die auf den unmittelbar darunter liegenden abgetragen sind, so müssen wir hier folgendes beachten: Da auf dem Endstrich eingestellt wurde, hätten wir auf der untersten Potenzskala für die Potenz 7,14 ablesen müssen. Da es sich aber hier darum handelt mit 0,714 zu potenzieren, so müssen wir auf die darüber liegende Skala für das Ablesen des Ergebnisses übergehen, wo wir dann 1,582 erhalten.

$a^{n-1/n} = 1{,}9^{0{,}286}$. Wir brauchen gegenüber dem vorigen Beispiel nur den Läufer auf 2,86 von U_1 zu verschieben und erhalten auf der mittleren Potenzskala 1,201. Auch hier muß von der unteren Skala, auf der bei der Endstellung auf den Endstrich sonst abgelesen werden müßte, auf die mittlere übergegangen werden.

Beispiel 171. Man löse dieselben Aufgaben für a = 0,19; n = 1,4.

Lösung: a) $(0{,}19)^{1{,}4} = \frac{(1{,}9)^{1{,}4}}{10^{1{,}4}} = \frac{2{,}456}{25{,}2} = 0{,}0978$; b) $(0{,}19)^{0{,}714} = \frac{(1{,}9)^{0{,}714}}{10^{0{,}714}} = \frac{1{,}582}{5{,}18} = 0{,}3048$; c) $(0{,}19)^{0{,}286} = \frac{(1{,}9)^{0{,}286}}{10^{0{,}286}} = \frac{1{,}2015}{1{,}932} = 0{,}622$.

Beispiel 172. Um den Reibungswiderstand von Riemen, Seilen oder Bremsbändern zu finden, braucht man den Ausdruck $e^{\mu\alpha}$. μ ist eine Materialkonstante, α ein Winkel im Bogenmaß, e = 2,718. Der "Hütte" entnehmen wir für μ = 0,3 folgende Tabelle:

$\alpha°$	36°	72°	108°	144°	153°	162°	171°	180°
α	0,628	1,257	1,885	2,51	2,67	2,83	2,98	3,14
$\mu\alpha$	0,188	0,377	0,566	0,754	0,801	0,849	0,896	0,943
$e^{\mu\alpha}$	1,21	1,46	1,76	2,12	2,23	2,34	2,45	2,57

Man prüfe ihre Richtigkeit!

Lösung: Wenn wir die Zunge beim Rechenschieber 21 herumkehren, so können wir bei genauer Einstellung des Wertes "e" auf den Anfangsstrich von U_1 alle Ergebnisse nur mit entsprechender Verschiebung des Läufers ablesen. Was über den Uebergang auf die oberen Skalen im Beispiel 170 gesagt ist, gilt auch hier.

Beispiel 173. Einer andern Formelsammlung entstammt die folgende Tabelle, die ebenfalls nachgerechnet werden soll:

x	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
e^{x^2}	1,094	1,174	1,284	1,433	1,632	1,896	2,248	2,718

Lösung: Auch hier stellt man die Zungenrückseite beim Schieber 21 mit dem Wert "e" genau auf den Anfangsstrich von U_1. Da x^2 = 0,09; 0,16 .... 0,81 ist, so muß nach der früher gegebenen Definition im ersten Fall auf der obersten Potenzskala abgelesen werden, in den folgenden auf der mittleren.

Beispiel 174. Als Hyperbelfunktionen bezeichnet man die Ausdrücke sin x = $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ und cos x = $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, worin e wieder = 2,718… gesetzt ist. Man bilde die Hyperbelfunktionen für x = 0,1; 0,2 ... 1,0!

Lösung: Die Werte der Reihe e^x werden wie in den beiden vorstehenden Beispielen bestimmt. Die Reziprokwerte e^{-x} werden dann durch Gegenüberstellung der Werte-Reihen e^x und e^{-x} auf U_2 und R erlangt. In der Tabelle bedeutet d die Differenz $e^x - e^{-x}$ und s die Summe $e^x + e^{-x}$.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
e^x	1,1052	1,221	1,350	1,492	1,649	1,822	2,014	2,226	2,460	2,718
e^{-x}	0,9048	0,819	0,741	0,670	0,607	0,549	0,497	0,449	0,407	0,368
d	0,2004	0,402	0,609	0,822	1,042	1,273	1,517	1,777	2,053	2,350
s	2,0100	2,040	2,091	2,162	2,256	2,371	2,511	2,675	2,867	3,086
sin x	0,1002	0,201	$0{,}304_5$	0,411	0,521	$0{,}636_5$	$0{,}758_5$	$0{,}888_5$	$1{,}026_5$	1,175
cos x	1,0050	1,020	$1{,}045_5$,	1,081	1,128	$1{,}185_5$	$1{,}255_5$	$1{,}337_5$	$1{,}433_5$	1,543

Beispiel 175. Warum ist a^b im allgemeinen nicht gleich b^a?

Lösung: Während bei a · b und b · a Skalenteile aneinandergelegt wurden, die nach demselben Prinzip hergestellt wurden, ist dies bei Multiplikations- und Potenzskalen nicht mehr der Fall. Man bilde selbst Aufgaben!

§ 84. Die Berechnung von Potenzen und Wurzeln mit beliebigen Exponenten durch "System Darmstadt".

a^{-p}) In a^n sei n eine negative ganze Zahl, -2; -1,7, allgemein n = -p. Es ist $a^{-p} = 1 : a^p$. Man bestimmt also nach der im vorigen Paragraphen gezeigten Methode a^p und bildet den reziproken Wert dieser Zahl. Das geschieht aber nach § 57 (drittes Verfahren) einfach durch Gegenüberstellung der auf U_2 fixierten Werte mit den entsprechenden der Reziprokskala.

$a^{p/q}$) Ist n eine gebrochene Zahl, n = $\frac{p}{q}$, so kann man $\frac{p}{q}$ (im Kopf oder mit den gewöhnlichen Skalen des Rechenschiebers) ausrechnen und dann in der bisherigen Weise potenzieren.

Beispiel 176. Man rechne Beispiel 132 auf S. 54 noch einmal, indem man erst $\frac{1}{b^2} = b^{-2}$ bestimmt und dann die Ergebnisse mit a multipliziert!

Beispiel 177. Man berechne 2^3; 2^{-3} $2^{1/3}$; $2^{-1/3}$; $2^{3/2}$; $2^{-3/2}$; $2^{2/3}$; $2^{-2/3}$.

Lösung: 8; 0,125; 1,260; 0,793; 2,83; 0,354; 1;587; 0,630.

$\sqrt[n]{a}$) Da $\sqrt[n]{a}$ = $a^{1/n}$ so ist dieser Fäll nur ein Teilgebiet des vorigen. Die verschiedenen Einstellungen mit dem Rechenschieber Nr. 21 wurden bereits in § 82, Seite 65f. gezeigt.

Beispiel 178. Man rechne die Beispiele von § 77 und § 80 nach!

Beispiel 179. Man bilde die zweite, dritte. . . zehnte Wurzel aus 10!

Lösung: 3,16; 2,15; 1,78; 1,585; 1,468; 1,389; 1,333; 1,2925; 1,259.

Ist der Wurzelexponent eine gebrochene Zahl, n = $\frac{p}{q}$, so ist $\sqrt[n]{a}$ = $a^{1:n}$ = $a^{1:p/q}$ = $a^{q/p}$. Wir werden also einfach auf Bruchpotenzen geführt.

§ 85. Erweiterung des Bereiches für den Rechenschieber Nr. 21 System Darmstadt.

***a)* Die Basis liegt nahe an 1**. Im Gegensatz zu manchen sonst existierenden Rechenschiebern mit Potenzskalen, bei denen dieselben nur bis 1,1 oder bestenfalls bis 1,07 herabreichen, hat der Rechenschieber Nr. 21 Potenzskalen, die bis 1,01 herabgehen und die so namentlich die Berechnungen aus dem Gebiet der Finanzmathematik sehr erleichtern, Während bei anderen Instrumenten in Fällen, wo man die sogenannten Aufzinsungsfaktoren (1,03, 1,04, 1,05 etc.) zu potenzieren hat, man zu Urnständlichen Hilfsrechnungen greifen muß. Steht z. B. ein Kapital 7 Jahre lang zu 5 % auf Zinsen, so erhält man den Endwert, wenn man den Anfangsbetrag mit $1{,}05^7$ multipliziert. Man erhält das Ergebnis von $1{,}05^7$ als 1,407 mittels der bekannten Einstellung. Das Anfangskapital vermehrt sich also 1,407 mal, wenn es 7 Jahre zu 5 % aussteht und die Zinseszinsen jährlich berechnet werden.

Da ja bei allen ähnlich gelagerten Aufgaben immer wieder die Bestimmung der Potenzen der Aufzinsungsfaktoren auftritt, so ist der Rechenschieber Nr. 21 auch als das geeignetste Instrument für Finanzmathematiker anzusprechen. Liegt die Grundzahl zwischen 1 und 1,01, so wendet man den binomischen Satz an: $(1 + x)^n = 1 + n \cdot x + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \ldots$. Schon die ersten Glieder genügen.

Beispiel 180. Man bilde $(1+\frac{1}{n})^n$ für verschiedene, ganze oder gebrochene, Werte von n. Je größer n gewählt wird, um so näher kommt das Ergebnis an e = 2,718 ... heran. Es kann n auch negativ sein (-100, -200 usf.).

Beispiel 181. Bei einer Kolbenluftpumpe verhält sich der Inhalt des Stiefels zu dem Rezipienten wie 1 : 20. Der ursprüngliche Luftdruck im Innern sei 1 Atm., dann ist er nach einem Kolbenzug $\frac{20}{21}$, nach 2 Kolbenzügen $(\frac{20}{21})^2$, nach n Zügen $(\frac{20}{21})^n$ = $(0{,}9524)^n$. Wie hoch ist er nach 20, 40, 60, 80 ... 200? (Vom schädlichen Raum wird hier abgesehen).

Derartige Aufgaben können nun allerdings nicht mit den Potenzskalen des Rechenschiebers "Darmstadt" berechnet werden und man muß den Weg über die Mantissenskala auf der Schrägkante benutzen, wie es im folgenden Paragraphen beschrieben ist. Man bestimmt die Mantisse von 0,9524 als 1,9788 (= 0,9788 - 1 = -0,0212) und multipliziert dieselbe der Reihe nach mit 20, 40, 60 .... Wir erhalten folgende Tabelle:

	20	40	60	80	100	120	140	160	180
1)	-0,424	-0,848	-1,272	-1,696	-2,12	-2,54	-2,97	-3,39	-3,82
2)	1,576	1,152	"2,728	-2,304	3,88	3,46	3,03	4,61	4,18
3)	0,377	0,142	0,0535	0,0202	0,00758	0,00288	0,00108	0,00041	0,000152

4) 286 108 40,7 15,3 5,78 2,18 0,821 0,31 0,11

Reihe 1 gibt die Ergebnisse der Multiplikation der Mantisse -0,0212 mit den verschiedenen Exponenten 20, 40, 60 etc., Reihe 2 die positiven Mantissen mit den negativen Kennziffern, Reihe 3 die Numeri zu diesen Mantissen und die Reihe 4 die Höhe der Quecksilbersäule, wenn 1 Atm. = 0,760 m gesetzt wird.

***b)* a ist sehr groß oder sehr klein.** Die Berechnung von Beispiel 137 auf S. 55 würde, mit der Potenzskala ausgeführt, nur sehr rohe Ergebnisse liefern, da die Teilstriche am Ende dieser Teilung eng zusammenstehen. Will man etwa die Potenzen von a = 21,4 erhalten, so zerlegt man a passend in ein Produkt. Ist $a = b \cdot c$, so ist $a^n = b^n \cdot c^n$. Man berechnet jeden Teilausdruck der rechten Seite und multipliziert sie auf gewöhnliche Weise. Am besten geschieht die Zerlegung so, daß man einen Teilausdruck im Kopfe berechnen kann, z. B.

Beispiel 182. a = 21,4; b = 10; c = 2,14.

Lösung:

$b^2 = 100$ (Kopfrechnung); $c^2 = 4{,}58$ (Potenzteil.); $a^2 = 458$

$b^3 = 1000$ (Kopfrechnung); $c^3 = 9{,}8$ (Potenzteil.); $a^3 = 9800$

$b^4 = 10000$ (Kopfrechnung); $c^4 = 21$ (Potenzteil.); $a^4 = 210000$ usf.

Oder: a = 21,4; b = 20; c = 1,07.

$b^2 = 400$ (Kopfrechnung); $c^2 = 1{,}1449$ (Potenzteil.); $a^2 = 457{,}96$

$b^3 = 8000$ (Kopfrechnung); $c^3 = 1{,}225$ (Potenzteil.); $a^3 = 9800$

$b^4 = 160000$ (Kopfrechnung); $c^4 = 1{,}311$ (Potenzteil.); $a^4 = 209760$ usf.

Beispiel 183. $x = \sqrt[3]{1000 \cdot 3{,}2}$ (vergl. S. 61).

Lösung: Die direkte Berechnung nach S. 61 liefert x = 14,7.

Setzt man dagegen $x = \sqrt[3]{1000 \cdot 3{,}2} = 10 \cdot \sqrt[3]{3{,}2}$, so erhält man $x = 10 \cdot 1{,}474 = 14{,}74$.

Beispiel 184. $x = 0{,}0012^{1{,}41} = (0{,}001 \cdot 1{,}2)^{1{,}41} = (0{,}001)^{1{,}41} \cdot (1{,}2)^{1{,}41} = (0{,}1^{1{,}41})^3 \cdot (1{,}2)^{1{,}41} = (0{,}0389)^3 \cdot 1{,}293 = 0{,}02^3 \cdot 1{,}945^3 \cdot 1{,}293 = 0{,}000008 \cdot 7{,}36 \cdot 1{,}293 =- 0{,}0000761$.

***c)* n ist sehr groß.** Ist der Exponent n sehr groß, so beachte man, daß an $a^n = (a^{\frac{n}{2}})^2 = (a^{\frac{n}{3}})^3$ usf. ist.

Beispiel 185. Zu welcher Summe würde 1 RM anwachsen, wenn sie 300 Jahre lang zu 4 % verzinst würde?

Lösung: $x = 1 \cdot 1{,}04^{300} = 1{,}0816^{150} = (1{,}0816^{30})^5 = 10{,}5^5 = 10^5 \cdot 1{,}05^5 = 100000 \cdot 1{,}1025^{2{,}5} = 127000$ (genauer 128820 RM).

VII. Kapitel.

Logarithmen und trigonometrische Funktionen.

§ 86. Die Aufsuchung des Logarithmus.

Potenzen und Wurzeln können, wie schon im vorigen Paragraphen gezeigt worden ist, nicht nur mit den Potenzskalen des Schiebers "Darmstadt", sondern auch mit der Mantissenteilung erledigt werden, die sich beim Schieber Nr. 14 auf der Rückseite der Zunge, beim Modell "Rietz" am unteren Stabrande und beim Modell "Darmstadt" auf der oberen Schrägkante des Schiebers befindet.

Bei **"System Rietz"** ist, wie früher erwähnt (S. 11) auf U_1 der Wert von $m \cdot \lg a$ abgetragen und der Endpunkt dieser Strecke mit "a" bezeichnet. m ist 25 cm. Auf der untersten Skala steht einfach $m \cdot b$, der Endpunkt trägt die Bezeichnung b. Es genügt für unsere Zwecke, wenn b zwischen 0 und 1 liegt. Ist z. B.. b = 0,4, so ist $m \cdot b = 10$ cm; in der Tat ist der Anfangsstrich der Skala L von dem Strich, über dem "4" (eigentlich 0,4) steht, 10 cm weit entfernt. Offenbar verläuft diese Teilung gleichmäßig; "8" (eigentlich 0,8) ist vom Anfangspunkt doppelt so weit (20 cm) entfernt wie "4", und ebenso verhält es sich mit allen anderen Zahlen. Auch die kleinsten Intervalle sind gleich, die Skala, beginnt mit 0,000; 0,002; 0,004; 0,006; 0,008; 0,010 ... und endigt mit ... 0,996; 0,998; 1,000. Der Abstand zweier Striche ist $0{,}002 \cdot 25 = 0{,}05$ cm. = ½ mm. Die Ablesung ist also sehr einfach, sie erfolgt ebenso wie zu Beginn der Teilung O_1 (vgl. S. 11).

Deckt der Strich des Glasläufers auf U_1 die Zahl "a", auf L die Zahl "b", so ist nach den eben gegebenen Erklärungen $m \cdot \lg a = m \cdot b$, oder $\lg a = b$.

Regel: **Um den Logarithmus einer Zahl zwischen 1 und 10 zu finden, sucht man sie auf U_1 auf[4] und bestimmt mit dem Läuferstrich die genau darunter liegende Zahl auf L. Bei größeren oder kleineren Zahlen verfährt man ebenso, nur ist hier die Kennziffer nicht 0, sondern sie muß nach der Vorschrift des § 4 bestimmt werden.**

Bemerkung: Zieht man die Zunge ganz heraus und steckt sie umgekehrt wieder hinein, sodaß jetzt U_2 (mit umgekehrten Ziffern) an O_1 liegt, wobei die Anfangs- und Endstriche sich decken, so liegt unter "a" auf U_2 der Ergänzungslogarithmus von a auf L. Es verläuft ja jetzt U_2 von rechts nach links, der Strich "a" hat vom linken Einheitsstrich den Abstand $m \cdot (1 - \lg a)$. Bei dem Schieber 23R und Nr. 21 und neuerdings auch bei Nr. 14 hat man die Ergänzungslogarithmen auf der Reziprokteilung in der Mitte der Zunge.

Nr. 14. Bei Nr. 14 ist die Teilung L auf der Rückseite der Zunge angebracht. Man ziehe die Zunge ganz heraus, vertausche Vorder- und Rückseite und schiebe sie wieder hinein. Wenn dann die Anfangs- und Endstriche der später zu besprechenden Skalen S und T mit den Strichen zusammenfallen, welche O_1 und U_1 begrenzen, so liegt die Skala L ebenso zu U_1 oder U_2, wie es eben beschrieben wurde, sie liefert die Ergänzungslogarithmen. Will man die Logarithmen selbst haben, so ziehe man die Zunge wieder vollständig heraus und drehe sie so, daß S, L und T oben bleiben, daß aber der Endstrich von T mit dem Anfangsstrich von O_1 korrespondiert. Man sucht die gegebene Zahl a auf U_1 und findet ihren Logarithmus darüber auf *L.* Allerdings steht dann die Bezifferung von *L,* verglichen mit der von U_1, auf dem Kopf.

Um auch noch diese Unbequemlichkeit und die des Umlegens der Zunge zu vermeiden, ist auf dem Körper des Rechenschiebers in der rechten Aussparung auf der Rückseite in das Holz ein feiner Strich eingeritzt. Er steht genau an der Stelle, wo vorne die "1" ihren Platz hat. Decken sich vorne die Anfangs- und Endstriche von U_1 und U_2, so deckt sich auf der Rückseite der Strich der Aussparung mit dem Anfangsstrich von L. Verschiebt man nun die Zunge um $m \cdot \lg a$, so steht vorne der Anfangsstrich über "a" auf U_1. Auf der Rückseite hat sich die Skala natürlich um dieselbe Strecke weiter bewegt, nämlich um $m \cdot b$, wenn *b* die Zahl ist, die über dem eingeritzten Strich liegt. Es ist also $\lg \cdot a = b$. Daraus ergibt sich für Nr. 14 die folgende

Regel: **Man suche "a" auf U_1 auf, stelle darüber der Skala U_2 und drehe den Rechenschieber um. Ueber dem Strich der Aussparung steht jetzt auf der mittleren Zungenskala (L) das gesuchte Ergebnis lg a.**

System "Darmstadt". Bei diesem Rechenschieber hat man die Möglichkeit, die Mantissen des Briggschen Systems auch mittels der Potenzteilung zu bestimmen, und zwar stellt man den Wert 10 der Potenzteilung auf den Anfangs- oder Endstrich der Teilung U_1 und kann dann zu jedem Werte, der auf der Potenzteilung eingestellt ist, unter dem Läuferstrich auf der Teilung U_1 die Mantisse ablesen. Allerdings ist zu beachten, daß außer der richtigen Setzung der Kennziffer, den Wertereihen, die bei der Einstellung auf den Endstrich auf U_1 abgelesen werden, jeweils zwei Nullen voranzustellen sind, wenn es sich um die obere Potenzteilung handelt, eine Null, wenn die mittlere Potenzreihe in Frage kommt. Für die Werte der unteren Potenzteiluug erhält man dagegen die vollständigen Mantissen, aber ebenfalls ohne Kennziffern.

Bei der Einstellung auf den Anfangsstrich von U_1, müssen die auf der obersten Skala eingestellten Werte auf der Teilung U_1 durch Voranstellung einer Null vervollständigt werden, die der mittleren Skala erfordern in diesem Falle keine Ergänzung und zu den Werten der untersten Skala erhält man auf U_1 die Mantissen mitsamt den Kennziffern.

Einige Beispiele werden die Sache veranschaulichen. Einstellung auf den Anfangsstrich von U_1:

Potenz-Teilung	1,03	1,045	1,5	1,9	2	20	40	100
U_1-Teilung	$\underline{0,0}1284$	$\underline{0,0}1912$	$\underline{0},1761$	$\underline{0},278$	$\underline{0},301$	1,301	1,602	2,00

Einstellung auf den Endstrich von U_1:

Potenz-Teilung	1,014	1,02	1,20	1,25	2,5	3,2	8
U_1-Teilung	$\underline{0,00}604$	$\underline{0,00}860$	$\underline{0,0}792$	$\underline{0,0}969$	$\underline{0},398$	$\underline{0},505$	$\underline{0},903$

Die unterstrichenen Nullen links des Kommas bedeuten die Kennziffern, die nicht auf der Teilung U_1 abgelesen werden und die rechts vom Komma, die nach der oben wieder gegebenen Regel beigesetzten Vervollständigungen der auf U_1 abgelesenen Wertereihen.

§ 87. Beispiele zum vorigen Paragraphen.

Beispiel 186. Man bestätige die Richtigkeit der auf S. 5 angegebenen Tabelle!

Beispiel 187. Wie groß ist $x = 1,9^{1,4}$? (Vgl. Beispiel 170 auf S. 69).

Lösung: $\lg x = 1,4 \cdot \lg 1,9$. Es ist $\lg 1,9 = 0,279$; $1,4 \cdot \lg 1,9 = 1,4 \cdot ,279 = 0,390$ (gewöhnliche Multiplikation). $x = 2,456$.

Beispiel 188. Wie groß ist für $n = 1,4$; $a = 1,9$ der Ausdruck $a^{\frac{1}{n}}$ und $a^{\frac{n-1}{n}}$?

Lösung: 1) $\lg a = 0,279$; $\frac{1}{n} \cdot \lg a = \frac{0,279}{1,4} = 0,1993$ (Gewöhnliche Rechenschieberdivision); $a^{\frac{1}{n}}$ = num (0,1993) = 1,582. 2) $\lg a = 0,279$; $\frac{n-1}{n} \cdot \lg a = \frac{0,4}{1,4} \cdot 0,279 = 0,0797$; $\lg a^{\frac{n-1}{n}} = 0,0797$; $a^{\frac{n-1}{n}} = 1,201$. (Vgl. Beispiel 170 auf S. 69).

Beispiel 189. Man rechne Beispiel 171 auf S. 69 nach!

Lösung: 1) $\lg a = 0,279 - 1$; $n \cdot \lg a = 0,391 - 1,4 = 0,391 - 2$; $a^n = 0,0978$. 2) $\lg a = 0,279 - 1$; $\frac{1}{n} \cdot \lg a = 0,199 - 0,714 = 0,199 + 0,286 - 1 = 0,485 - 1$; $a^{\frac{1}{n}} = 0,305$. 3) $\frac{n-1}{n} = 0,2857$; $\frac{n-1}{n} \cdot \lg a = 0,0797 - 0,2857 = 0,0797 + 0,7143 - 1 = 0,7940 - 1$; $a^{\frac{n-1}{n}} = 0,622$.

Beispiel 190. Man rechne ebenso die weiteren Beispiele von § 83, 84, 85 nach. Man achte auf die in beiden Fällen erzielte Genauigkeit und stelle, wenn man die Rechenschieber verschiedener Systeme besitzt, Vergleiche über die Bequemlichkeit und Genauigkeit des Rechnens an!

§ 88. Logarithmen mit beliebiger Basis.

Ist $10^b = a$, so ist nach der Definition der Logarithmen $b = \lg a$. Die Zahl 10 heißt hier die Basis des Logarithmensystems; sie ist gewählt, weil unser Zahlensystern dezimal aufgebaut ist. In der höheren Mathematik erweist es sich als zweckmäßig, statt dessen die Basis $e = 2,71828\ldots$ zu wählen. Ist $e^b = a$, so setzt man $b = \ln a$. Das Zeichen ln ist die Abkürzung für logarithmus naturalis (natürlicher Logarithmus). Benutzt man die gewöhnlichen, bisher behandelten Logarithmen, so folgt aus $e^b = a$ die Gleichung $b \cdot \lg e = \lg a$; $b = \frac{1}{\lg e} \cdot \lg a$; $b = \frac{1}{0,43429\ldots} \cdot \lg a = 2,3026 \cdot \lg a$. Da aber $b = \ln a$ ist, so ergibt sich sofort $\ln a =$

2,3026 · lg a. Hierbei bedeutet, wie gesagt, lg a den gewöhnlichen, ln a den natürlichen Logarithmus von a.

Regel: **Um den natürlichen Logarithmus einer Zahl zu finden, ermittelt man erst den gewöhnlichen und multipliziert ihn mit 2,3025**...

Diese Regel findet sich auch auf der bedruckten Unterseite des Rechenschiebers.

Auf welche einfache Weise beim Rechenschieber "Darmstadt" die Mantissen der log. nat. abgelesen werden können, wurde bereits im § 86, Seite 72 gezeigt. Will man die Logarithmen für eine andere beliebige Basis a haben, so braucht man nur in der Anleitung "e" durch "a" zu ersetzen.

Man leitet so leicht folgende Tabelle ab:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
lg a	0	0,301	0,477	0,602	0,699	0,778	0,845	0,903	0,954	1,000
ln a	0	0,693	1,099	1,386	1,609	1,792	1,946	2,08	2,20	2,30

Die Regeln über das Rechnen mit Logarithmen[5] sind für die gewöhnlichen und natürlichen dieselben.

Ist umgekehrt ein natürlicher Logarithmus gegeben, so mache man ihn durch Division init 2,303 oder Multiplikation mit 0,434 zum gewöhnlichen und suche dessen Numerus auf.

Beispiel 191. Man rechne Beispiel 172 bis 174 auf S. 69f. mit natürlichen Logarithmen!

Lösung: Es sei x = $e^{0,108}$, dann ist ln x = 0,188; lg x = 0,188 · 03434 = 0,0816; x = 1,206. Bei den andern Aufgaben ist das Verfahren entsprechend.

§ 89. Steigerung der Genauigkeit beim Logarithmieren.

Es gilt die Forrnel

$$1.\ \ln(a+h) = \ln a + 2 \cdot \left[\frac{h}{2a+h} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{h}{2a+h}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{h}{2a+h}\right)^5 + \ldots\right]$$

Nach Multiplikation mit 0,4342945 geht sie über in

$$2.\ \lg(a+h) = \lg a + 0{,}8685890 \cdot \left[\frac{h}{2a+h} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{h}{2a+h}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{h}{2a+h}\right)^5 + \ldots\right]$$

Darin bedeutet a eine Zahl, deren Logarithmus genau bekannt ist, h eine kleine Zusatzgröße. Wir wollen aus einer siebenstelligen Logarithmentafel die folgende Tabelle entnehmen:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
lg a	0	0,3010300	0,4771213	0,6020600	0,6989700	0,7781513	0,8450980	0,9030900	0,9542425	1

Soll etwa lg 1,5 berechnet werden, so ist a = 1, h = 0,5, $\frac{h}{2a+h} = \frac{0,5}{2,5}$ = 0,2. Man hat dann

$$\begin{aligned}
\lg a &= 0 \\
0{,}8685890 \cdot \frac{h}{2a+h} &= 0{,}1737178 \\
\frac{1}{3}\cdot 0{,}8685890 \cdot \left(\frac{h}{2a+h}\right)^3 &= 0{,}0023162 \\
\frac{1}{5}\cdot 0{,}8685890 \cdot \left(\frac{h}{2a+h}\right)^5 &= 0{,}00005561 \text{ Rechenschieber!} \\
\frac{1}{7}\cdot 0{,}8685890 \cdot \left(\frac{h}{2a+h}\right)^7 &= 0{,}0000016 \text{ Rechenschieber!} \\
\frac{1}{9}\cdot 0{,}8685890 \cdot \left(\frac{h}{2a+h}\right)^9 &\underline{= \ \ 0{,}0000000} \\
\lg(a+h) = \lg 1{,}5 &= 0{,}17609
\end{aligned}$$

Der genaue Wert ist 0,1760913 (= lg 3 - lg 2). Die kleine Abweichung am Schluß ist durch unvermeidliche Abrundungsfehler entstanden.

1. Bemerkung: Um die Verwertbarkeit unseres Verfahrens zu zeigen, haben wir das ungünstigste Beispiel gewählt. Man hätte besser getan, 1,5 = 2 - 0,5 zu setzen. Dann ist $\frac{h}{2a+h} = \frac{-0,5}{4-0,5} = -\frac{0,5}{3,5} = -\frac{1}{7}$.

Wir haben dann

$$\begin{aligned}
\lg a &= 0{,}3010300 \\
0{,}8685890 \cdot \frac{h}{2a+h} &= -0{,}1240841 \\
\frac{1}{3} \cdot 0{,}8685890 \cdot \left(\frac{h}{2a+h}\right)^3 &= -0{,}0008441 \\
\frac{1}{5} \cdot 0{,}8685890 \cdot \left(\frac{h}{2a+h}\right)^5 &= -0{,}0000103 \text{ Rechenschieber!} \\
\frac{1}{7} \cdot 0{,}8685890 \cdot \left(\frac{h}{2a+h}\right)^7 &\underline{= -0{,}0000002} \text{ Rechenschieber!} \\
\lg (a + h) = \lg 1{,}5 &= 0{,}1760913
\end{aligned}$$

2. Bemerkung: Siebenstellige Logarithmen werden in der Praxis nur ganz selten gebraucht. Will man fünfstellige haben, so stellen sich die beiden eben durchgeführten Rechnungen, wenn man 0,86859 mit k bezeichnet, folgendermaßen dar:

$$\begin{array}{llll}
\lg a & = & 0 & 0{,}30103 \\
\frac{1}{3} \cdot k \cdot \left(\frac{h}{2a+h}\right)^3 & = & 0{,}17372 & -0{,}12408 \\
\frac{1}{5} \cdot k \cdot \left(\frac{h}{2a+h}\right)^5 & = & 0{,}00232 & -0{,}00084 \text{ Rechenschieber!} \\
\frac{1}{7} \cdot k \cdot \left(\frac{h}{2a+h}\right)^7 & \underline{=} & \underline{0{,}00006} & \underline{-0{,}00001} \text{ Rechenschieber!} \\
\lg (a + h) = \lg 1{,}5 & = & 0{,}17610 & 0{,}17610
\end{array}$$

Will man die fünfte Stelle genau haben, so rechnet man auf 6 und rundet dann ab. Man sieht, daß hier nur das erste Zusatzglied genauer berechnet werden muß, als es der Rechenschieber unmittelbar gestattet.

Beispiel 192. Man berechne den Logarithmus des Zinsfaktors q = 1,03; 1,035; 1,04 usf. auf 7 Dezimalen.

Lösung: Im ersten Fall ist a = 1, h = 0,03; $\frac{h}{2a+h} = \frac{0,03}{2,03}$ = 0,0147783; lg q = 0 + 0,0128363 + 0,0000009 = 0,0128372; entsprechend erhält man 0,0149403; 0,0170338; 0,0191163; 0,0211893 usf.

Beispiel 193. Man bilde die Logarithmen von 6,1; 6,2; 6,3 usf.

Lösung: 0,7853298; 0,7923917; 0,7993405; 0,8061800; 0,8129134usf. Man rechne auch einmal von vornherein mit nur fünfstelliger Genauigkeit!

§ 90. Steigerung der Genauigkeit bei. Aufsuchen des Numerus.

Ist lg a = b, so ist a = $10^b = 1 + \frac{mb}{1} + \frac{(mb)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(mb)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(mb)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$, wobei m = 2,3025851 (= ln 10) ist. Schneller als durch direkte Benutzung dieser Reihen kommt man voran, wenn man an die Beziehung $10^{b+h} = 10^b \cdot 10^h$ denkt und folgende Tabelle benutzt:

b	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	10
10^b	1	1,258925	1,584893	1,995262	2,511886	3,162278	3,981072	5,011872	6,309573	7,943282	10

Beispiel 194. Zu welcher Summe wachsen 1000 RM in 20 Jahren bei 3 % an?

Lösung: x = $1000 \cdot 1{,}03^{20}$. Es ist lg 1,03 = 0,0128372 (Beispiel 192aufS.108). 20 · lg 1,03 = 0,256744; $1{,}03^{20} = 10^{0,2} \cdot 10^{0,056744}$. Hier ist b = 0,2; h = 0,056744; mh = 0,1306579. Wir führen die Rechnung mit verschiedener Genauigkeit durch.

	vierstellig	fünfstellig	sechsstellig	siebenstellig
1	1	1	1	1

	vierstellig		fünfstellig		sechsstellig		siebenstellig	
mh	0,1307		0,13066		0,130658		0,1306579	
$\frac{(mh)^2}{2}$	0,0085		0,00854		0,008536		0,0085357	
$\frac{(mh)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	0,0004	Rechenschieber!	0,00037		0,000372		0,0003718	
$\frac{(mh)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$	0,0000		0,00001	Rechenschieber!	0,000012	Rechen-schieber	0,0000121	
$\frac{(mh)^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$	0,00000		0,000000		0,0000003			Rechen-schieber
10^h	1,1396		1,13958		1,139578		1,1395778	
$10^{0,2} \cdot 10^h$	1,806		1,8061		1,80611		1,806109	

Der Wert des Endkapitals wird gefunden, indem man die zuletzt gewonnenen Zahlen mit 1000 multipliziert. Man sieht auf den ersten Blick, daß die meisten der zur Berechnung gebrauchten Zahlen unmittelbar mit dem Rechenschieber gefunden werden können; bei den andern leistet er wertvolle Dienste, wenn man ihn zur Ausführung der abgekürzten Multiplikation (§ 41) heranzieht.

Beispiel 195. Man löse dieselbe Aufgabe für p = 3½ %; 4 %; 4½ %; 5 % usw. mit verschiedener Genauigkeit.

Lösung: (7stellig): 1989,784; 2190,119; 2411,715; 2653,298.

§ 91. Die trigonometrischen Funktionen.

Den Zusammenhang zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks vermitteln die trigonometrischen Funktionen Sinus, Cosinus, Tangens, Cotangens, Secans und Cosecans. Die beiden zuletzt genannten waren in der Zeit, als alle Rechnungen logarithmisch ausgeführt wurden, etwas in den Hintergrund gerückt; sie werden aber heute wieder mehr benutzt.

In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man die Seiten, die den rechten Winkel einschließen (a und b), Katheten, die gegenüberliegende Seite die Hypotenuse (c). (Siehe Fig. 32). Der Kathete a mag der spitze Winkel α gegenüberliegen, dann setzt man

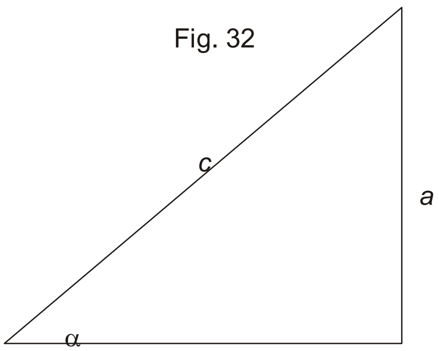
$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c};\ \cos\alpha = \frac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Anliegende Kathete}} = \frac{a}{b};\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a};$$

$$\sec\alpha = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Anliegende Kathete}} = \frac{c}{b};\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{c}{a}.$$

Offenbar ist ctg α = 1 : tg α; sec α = 1 : cos α; cosec α = 1 : sin α.

Fig. 32



§ 92. Die Aufsuchung von sin α, cos α, sec α, cosec α.

Auf der Rückseite der Zunge findet man die Skala S. Man ziehe die Zunge ganz heraus, vertausche Vorder- und Rückseite und schiebe sie wieder hinein, so daß der Endstrich von S mit dem von O_1 und U_1

zusammenfällt. Auf S ist bei Nr. 14 der Wert 12,5 · lg sin α + 2) abgetragen, und da auf O_1 12,5 · lg a steht, so folgt, wenn die Striche "a" (auf O_1) und "α" auf S sich decken, daß lg sin α + 2 = lg a ist, also lg sin α = lg $\frac{a}{100}$; sin α = 0,01 a. Ist z. B. a = 100 (Endstrich von O_1), so ist sin α = 1, a also nach den Regeln der Trigonometrie = 90°. Hat man umgekehrt α = 30°, so ist, wie jede trigonometrische Tabelle lehrt, sin α = 0,5; lg sin α = 0,6990 - 1; lg sin α + 2 = 1,6990; 12,5 · (lg sin α + 2) = 21,24. In der Tat ist der Teilstrich "30" von S um 21,24 cm vom linken Anfangsstrich entfernt, wie die Nachmessung bestätigt. Hieraus ergibt sich folgende

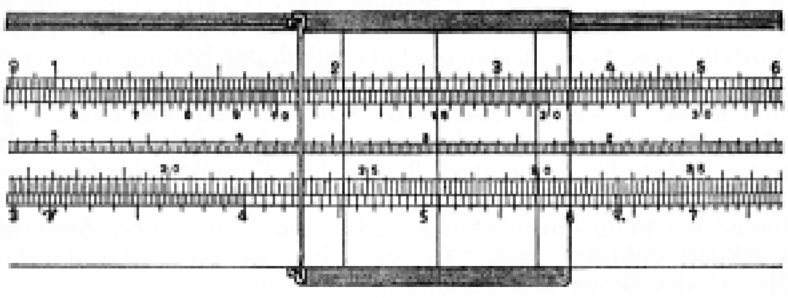
Regel: **Um zu einem gegebenen Winkel α durch Nr." 14 den Sinus zu finden, stelle man die Zunge in der oben angegebenen Weise ein und suche auf der Skala S den Winkel auf. Darüber steht auf O_1 der gesuchte Sinuswert. Liegt α rechts von dem Mittelstrich so beginnt der Wert des Sinus mit 0; liegt er links, mit 0,0.**

Beispiel 196. Man prüfe folgende Tabelle nach.

α	1°	2°	5°	10	20°	40°	60°	80°
sin α	0,0175	0,0349	0,0872	0,174	0,342	0,643	0,866	0,985

Bei System Rietz trägt S die Teilung 25 · (lg sin α + 1), sie entspricht also U_1 (25 · lg a). Z. B. ist lg sin 40° = 0;8081 - 1; 25 · (lg sin 40° + 1) = 20,20 cm. So weit ist die Marke "40°" vom Skalenanfang entfernt Zur Aufsuchung der Sinuswerte stellt man auch hier die Zunge in der vorher beschriebenen Weise ein, sucht α auf S und findet mit dem Läuferstrich darunter auf U_1 den gesuchten Wert sin α**. Jeder** Sinuswert beginnt hier mit 0, (also nicht 0,0).

Fig. 33.



Anmerkung: Auf den Skalen S sind die Winkelangaben der Natur der Sache nach zuerst sehr auseinandergezogen, zum Schluß drängen sie sich sehr zusammen. Man muß sich daher vor dem Gebrauch genau mit der Bedeutung der Skalenstriche vertraut machen. Bei Nr. 14 beginnt S mit 0° 34' 23", der erste Skalenstrich bedeutet 0° 35', dann folgt 0° 36' usf. bis 1°. jetzt schreitet die Teilung anders vor: 1° 0'; 1° 2' … 2°;; 2° 5'; 2° 10' ... 10° sie endet 70°, 72°, 74°, 76°, 78°, 80°, 85°, 90°. Bei System Rietz beginnt sie mit 5° 44' 21", dann folgt 5° 45', 5° 50'; 5° 55'; 6° … 9° 50'; 9° 55'; 10° 10'; 10° 20'.… 19° 50'; 20° sie endet mit 80°, 82°, 84°, 86°, 90°.

Ebenso wie beim Aufsuchen der Logatithmen ist es auch hier möglich, die genaue Größe (sin α) zu finden, ohne die Zunge umzukehren. Es geschieht nach folgender

***Regel:* Um sin α zu finden, sucht man bei normaler Lage der Zunge α auf Skala S auf und schiebt die Zunge so nach rechts, daß α unter dem Strich der Aussparung liegt. Dann findet man auf der Vorderseite des Schiebers sin α unter dem Endstrich von O_1 und zwar bei Nr. 14 auf O_2 bei System Rietz auf U_2.**

Man rechne Beispiel 196 auf diese Weise nach!

Bei der eben vorgenommenen Einstellung findet man gleichzeitig cosec α und zwar bei Nr. 14 auf O_1 bei System Rietz auf U_1 über oder unter dem Anfangsstrich der Zunge.

Da nach den Lehren der Trigonometrie cos α = sin (90° - α) ist, so bestimmt man zur Ermittelung dieser Funktion erst den Komplementwinkel (90° - α) und dann dessen Sinus. Ebenso ist sec $\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sin(90° - \alpha)}$ = cosec (90° - α).

Daß man mit derselben Einstellung auch den Winkel α finden kann, wenn sin α oder cos α, sec α oder cosec α gegeben ist, versteht sich von selbst.

Beim Rechenschieber **"Darmstadt Nr. 21"** sind die trigonometrischen Skalen in anderer wesentlich praktischerer Form angebracht. Bei diesem Instrument befindet sich die Sinus- wie auch die Tangens-Skala auf der geraden Kante. Die Winkel (schwarz) werden mit dem durchsichtigen Index eingestellt und die Funktionen auf der Teilung U_1 (auf dem Rechenschieber mit "sinus" bezeichnet, abgelesen. Die Sinus-Teilung reicht von 5°-90°, die Tangens-Teilung von 5°-45°. Am unteren Rand Schiebervorderseite ist die entsprechend bezeichnete cos-Teilung aufgetragen. Man erhält also bei der Einstellung auf die schwarz bezifferten Werte der sin-Skala auf der Teilung U_1 (sinus) die Funktionswerte der sin und auf der darunter liegenden cos die Funktionswerte der cos. Bekanntlich ist cos α = sin (90° - α) und aus diesem Grunde müssen bei den anderen Rechenschiebern die kleinen cos-Winkel im rechten Abschnitt der sin-Teilung eingestellt werden (z. B. cos 10° = sin (90° - 10°) was natürlich keine genauen Resultate ergibt. Man vergleiche damit die zum Teil vierstelligen Ablesungen auf der cos-Skala. Den gleichen Vorteil bietet diese Anordnung hinsichtlich der Bestimmung der sin.-Funktionen der großen Winkel. Man stellt zur Bestimmung der Sinus-Funktion derselben auf die rote Bezifferung ein und liest den Funktionswert in diesem Fall auf der cos-Teilung ab. Die gleich vorteilhafte Anordnung bietet die Tangententeilung. Die Funktionswerte dieser Teilung werden auf U_1, diejenigen der Cotang. auf der Reziprokteilung abgelesen, nachdem die Anfangsstriche von Zunge und Stab genau zur Deckung gebracht sind. Zu bemerken ist noch, daß beim Schieber Nr. 21 die Grade dezimal untergeteilt sind.

Für Winkel über 90° gelten. die Formeln:

sin (90°+α) = cos α, sin (180°+α) = -sin α; sin (270°+α) = -cos α; cos (90°+α) = -sin α; cos (180°+α) = -cos α; cos (270°+α) = sin α; tg (90°+α) = - ctg α; tg (180°+α) = tg α; tg (270°+α) = -ctg α; ctg (90°+α) = -tg α; ctg (180°+α) = ctg α; ctg (180°+α) = -tg α.

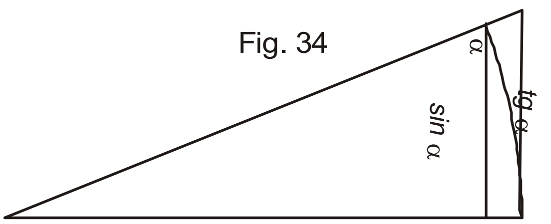
§ 93. Die Aufsuchung der trigonometrischen Funktionen für Winkel nahe an 0° und an 90°.

Im vorigen Paragraphen wurde gesagt, daß die S-Skala nur bis zu Winkeln von 0° 34' 23" bezw. 5° 44' 21" heruntergeht. Aus Fig. 34 folgt aber, daß für kleine Winkel sin α, tg α und α praktisch gleich groß sind, mit um so größerer Genauigkeit, je kleiner α ist. Natürlich muß dieser Winkel im Bogenmaß ausgedrückt werden, wie es früher (S. 51) gezeigt wurde; ist α in Sekunden (") gegeben, so muß dieser Betrag durch 206265 (= ρ") dividiert werden; $\alpha = \frac{\alpha''}{\rho''}$. Für Nr. 14 genügt diese Bemerkung, bei System Rietz findet sich noch die Skala S + T, welche für die Sinus- und Tangens-Werte von 0° 34' 23" bis 5° 44' 21" gilt; man muß nur beachten, daß sin und tg dieser kleinen Winkel mit 0,0 beginnen; sonst wird S + T ebenso wie S benutzt.

Da cos (90° - α) = sin α, ctg (90°- α) = tg α ist, so ist die Aufgabe, den Cosinus, Secans oder Cotangens eines nahe bei 90° liegenden Winkels zu finden, auf die eben gelöste Aufgabe, den Sinus oder Tangens eines kleinen Winkels zu ermitteln, zurückgeführt.

Bei dem Rechenschieber Nr. 21, dessen trigonometrische Skalen mit 5° anfangen, wird zur Berechnung kleiner Winkel unter 5° ausschließlich das Bogenmaß benutzt. Sind die Anforderungen strenger, so zeigt § 98 und 99 den Weg zur Lösung.

Fig. 34



§ 94. Beispiele zu den vorigen Paragraphen.

Beispiel 197. Von einem Dreieck kennt man zwei Seiten, a = 6 m; b = 8,5 m und den eingeschlossenen Winkel γ = 52°. Wie groß ist der Flächeninhalt?

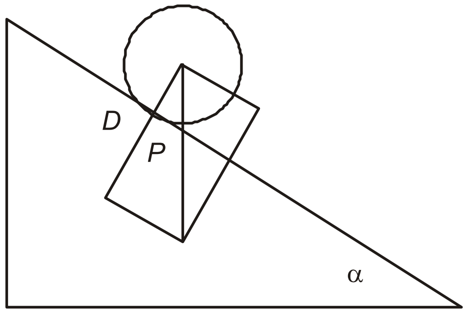
Lösung: F = ½ · a · b · sin γ = 3 · 8,5 · sin 52° = 25,5 · 0,788 = 20,1 qm.

Bemerkung: Statt den Sinus erst zu bestimmen und dann mit ihm zu multiplizieren, kann man diese Rechnungen zusammen ausführen. Man dreht (bei Nr. 14 und System Rietz) die Zunge so um, wie es § 92 angibt, bringt den Endstrich von S aber nicht mit dem Endstrich der festen Teilung zur Deckung, sondern mit der Zahl 25,5 und sucht das Ergebnis unter "52°" der Skala S auf der festen auf. Natürlich muß man bei Nr. 14 System Rietz U_1 und Nr. 21 die Teilung benutzen, mit welcher S korrespondiert

Mit dem Rechenschieber Nr. 21 können derartige Operationen besonders leicht infolge der besonderen Anordnung der Skalen vorgenommen werden.

Beispiel 198. Ein Brett bildet mit der waagerechten Ebene den Winkel $\alpha = 25°$. Es soll dazu dienen, ein Faß im Gewichte von P = 130 kg emporzurollen. Welche Kraft muß der Arbeiter dazu anwenden und wie stark drückt das Faß auf seine Unterlage? (Fig. 35.)

Fig. 35



Lösung: Nach den Gesetzen der Mechanik ist die Kraft $R = P \cdot \sin\alpha$, der Druck $D = P \cdot \cos\alpha$. In unserem Fall ist $R = 130 \cdot \sin 25° = 54{,}9$ kg; $D = 130 \cdot \cos 25° = 130 \cdot \sin 65° = 117{,}8$ kg.

Beispiel 199. Der Radius der Erde ist r = 6370 km, die Länge ihres Schattenkegels (durch den bei Mondfinsternissen der Mond hindurchwandert) a = 1382000 km. Welchen Winkel bilden die Seitenlinien des Kegels mit seiner Achse?

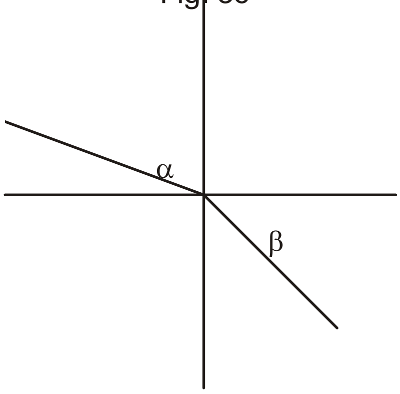
Lösung: $\sin\alpha = \frac{r}{a} = 0{,}00461$; $\alpha = 15'\,51''$. Der Winkel findet sich nicht mehr auf unseren Skalen; man rechnet $\alpha \sim \sin\alpha$; $\alpha'' \sim \rho'' \cdot \sin\alpha$.

Beispiel 200. Eine Straße steigt unter dem Winkel $\alpha = 2°\,30'$ gegen die waagrechte Ebene an. Sie ist a = 2,54 km lang. Um wieviel ist der Endpunkt höher als der Anfangspunkt?

Lösung: $h = a \cdot \sin\alpha = 110{,}8$ m.

Beispiel 201. Ein Lichtstrahl wird beim Eintritt aus der Luft in Wasser von seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt (gebrochen). Nennt man den Winkel, den er ursprünglich mit dem auf der Wasseroberfläche errichteten Lot bildet α, den entsprechenden Winkel des gebrochenen Strahles β, so gilt die Beziehung $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$. Die rechts stehende Zahl n, der Brechungsindex, ist für jeden Stoff charakteristisch, für Wasser ist er 1,333. Man mache α = 1° 2°, 3° … 9°, 10°, 20°, 30° … 90° und bestimme β. Man erteile umgekehrt β dieselben Werte und rechne α aus.

Fig. 36



Lösung: a) $\sin\beta = 0{,}750 \cdot \sin\alpha$; b) $\sin\alpha = 1{,}333 \cdot \sin\beta$. Die Einstellung der Zunge erfogIt so, wie in Beispiel 197. Man rechnet erst für alle Winkel das Produkt $0{,}750 \cdot \sin\alpha$ oder $1{,}333 \cdot \sin\beta$ aus und bestimmt aus den Ergebnissen auf gewöhnliche Weise (Anfangsstrich der S-Teilung auf 1 der festen Skala) die gesuchten Winkel. Man er hält im ersten Fall die Tabelle

α	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°[6]
β	0° 45' 0"	1° 30' 0"	2° 15'	3° 0'	3° 45'	4° 30'	5° 15'	6° 0'	6°44'
α	10°	20°	30°	40°>	50°	60°	70°	80°	90°
β	7° 29'	14° 52'	22° 2'	28° 50'	35° 5'	40° 30'	44° 50'	47° 40'	48° 40'

Im zweiten Fall bekommt man

β	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
α	1° 20'	2° 40'	4° 0'	5° 20'	6° 40'	8° 0'	9° 21'	10° 041'	12° 2'
β	10	20°	30°	40°	50°				
α	13° 28'	27° 10'	41° 50'	59	-				

Anmerkung 1. Für kleine Winkel ist sin α ∼ α; sin β ∼ β, also $\beta \sim \frac{1}{n} \cdot \alpha$; α ∼ n · β; bei unserem Genauigkeitsgrad gilt dies bis etwa 9°.

Anmerkung 2. Tritt der Strahl aus Wasser in Luft, so kann man die Rechnung nur bis 48° 40' durchführen. Ist β größer, so tritt totale Reflektion ein.

Man führe dieselben Rechnungen mit andern Winkeln oder mit andern Brechungszahlen durch. Es ist

Stoff	Kronglas	Flintglas	Diamant	Opal	Spinell	Alkohol	Chloroform
n	1,5	1,7	2,417	1,45	1,72	1,36	1,446

Beispiel 202. Drei Dörfer, A, B und C sind durch gerade Kunstwege untereinander verbunden. Ein Geometer mißt AB = c = 3,17 km und bestimmt an den Enden dieses Weges durch Visieren mit dem Theodoliten die Winkel CAB = α = 52° 20' und ∢ CBA = β = 73° 30'. Wie lang sind die beiden Verbindungsstraßen AC (= b) und BC (= a)

Lösung: In jedem ebenen Dreieck gilt die Beziehung

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Wir berechnen zunächs γ = 180° - (α + β) = 54° 10'. Man bringt diese Zahl (auf S) zur Deckung mit c auf der zugehörigen Skala (O_1 bei Nr. 14, U_1 bei System Rietz und Nr. 21), dann stehen de Winkel α und β auf S unter oder über den Werten α und β, diese können also mit dem Läuferstrich leicht ermittelt werden. Bei Nr. 21 bringt man durch den Läufer γ (auf der sin-Skala) mit c (auf U_1) zur Deckung und verfährt entsprechend. In unserer Aufgabe ist a = 3,095, b = 3,75 km. Man kann trigonometrischen Aufgabensammlungen beliebig viele Beispiele für den Sinussatz entnehmen.

Beispiel 203. Ist H die Helligkeit, welche eine Fläche durch senkrecht auffallendes Licht empfängt, so ist sie H · cos α, wenn α den Winkel bedeutet, um den die Fläche gegen jene Anfangslage gedreht ist oder den die Flächennormale mit der Richtung der Lichtstrahlen bildet. Der Winkel, den die Sonnenstrahlen mittags mit der Erdoberfläche bilden, ist h_α = 90° - φ + δ, wenn φ die geographische Breite (aus dem Atlas zu finden) und δ die "Deklination" der Sonne bedeutet, die aus astronomischen Kalendern zu ersehen ist. α – 90 - h ist also φ + δ. Quito (Ecuador) liegt ungefähr auf dem Aequator. Wie verhält sich die Mittagshelligkeit am Frühlingsanfang (21. März, δ = 0°) zu der am 1. Mai. (δ = -15° 5'), 22. Juni (δ = 23° 27'), 23. September (δ = 0°), 18. Oktober δ = 9° 39'), 22. Dezember (δ = - 23° 27').

Lösung: α ist hier 0; -15° 5'; -23° 27'; 0°; 9° 39', +23° 27'. Am 21. März und 23. September treffen die Sonnenstrahlen in Quito den Erdboden senkrecht, wir setzen die dadurch erzeugte Helligkeit also gleich H. Dann ist sie am 1. Mai H_1 = H · cos (- 15° 5') = H · cos 15° 5' = H · sin 74° 55' = 0,966 · H. Für den 22. Juni finden wir entsprechend 0,917 · H, für den 18. Oktober 0,986 · H und für den 22. Dezember 0,917 · H.

Beispiel 204. Man stelle eine Tabelle der Funktionen sec und cosec her.

Nach der Erklärung Seite 76 ist der cosec der reziproke Wert des sin und cosec der reziproke Wert des cos.

	6°	8°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
cosec α	9,57	7,19	5,76	2,92	2,00	1,556	1,305	1,155	1,064	1,015	1
sec α	1,006	1,010	1,015	1,064	1,155	1,305	1,556	2,000	2,92	5,76	∞

Beim Rechenschieber Nr. 21 stellt man zur Bestimmung des cosec α den Index auf die einzelnen Werte der sin-Teilung und liest die entsprechenden cosec-Funktionen auf der Reziprokskala in der Mitte der Zunge ab. Für den sec als reziproken Wert des Cosinus (cos α) = (sin 90°-α) stellen wir den Index dann der Reihe nach auf 84°, 82°, 80°, 60° etc. der sin-Teilung ein und erhalten dann die zugehörigen Funktionswerte ebenfalls auf der Reziprokskala.

§ 95. Tangens und Cotangens.

Da für sehr kleine Winkel der Tangens gleich dem Sinus ist, so wird er nach § 93 entweder mit der Teilung S & T berechnet, oder dadurch gefunden, daß der in Sekunden ausgedrückte Winkel durch $\rho'' = 206265$ dividiert wird. Der Cotangens ist als reziproker Wert des Tangens dann ebenfalls gegeben.

Für größere Winkel gilt die Skala T, die von 5° 42' 38" bis 45° reicht. Sie ist auf U_1 bezogen. Man kann entweder die Zunge so umlegen, wie es in § 92 beschrieben wurde, oder bei normaler Lage der Zunge den Winkelwert der T-Skala mit dem unten auf der linken Aussparung eingeritzten Strich zur Deckung bringen, dann steht tg α auf U_2 über dem Anfangsstrich von U_1. Bei dieser Stellung findet man gleichzeitig ctg α (= $\frac{1}{\text{tg}\ \alpha}$) auf U_1 unter dem Endstrich von U_2.

Für Winkel zwischen 45° und 90° benutzt man einfach die Beziehung: tg (90° - α) = ctg α; ctg (90° - α) = tg α. So ist tg 63° = ctg 27° = 1,963; ctg 63° = tg 27° = 0,509.

Beim Rechenschieber Nr. 21 "Darmstadt" stehen sich die Tangensfunktionen auf U_1 und die Cotangensfunktionen auf R jeweils unter dem gleichen Läuferstrich gegenüber, wie es auf der Seite 81 erklärten Beziehung hervorgeht.

§ 96. Beispiele zum vorigen Paragraphen.

Beispiel 205. Um die Höhe eines Fabrikschornsteins zu finden, wird in verschiedenen Abständen (a) von ihm mit einern Theodoliten, dessen Achse sich h = 1,25 m über dem Erdboden befindet, nach seiner Mündung visiert und jedesmal der Höhenwinkel α festgestellt. Es ergibt sich

a	100 m	80 m	60 m	40 m	20 m	10 m
α	18° 40'	22° 50'	29° 20'	40° 10'	59° 20°	73° 30'

Wie groß ist die gesuchte Höhe?

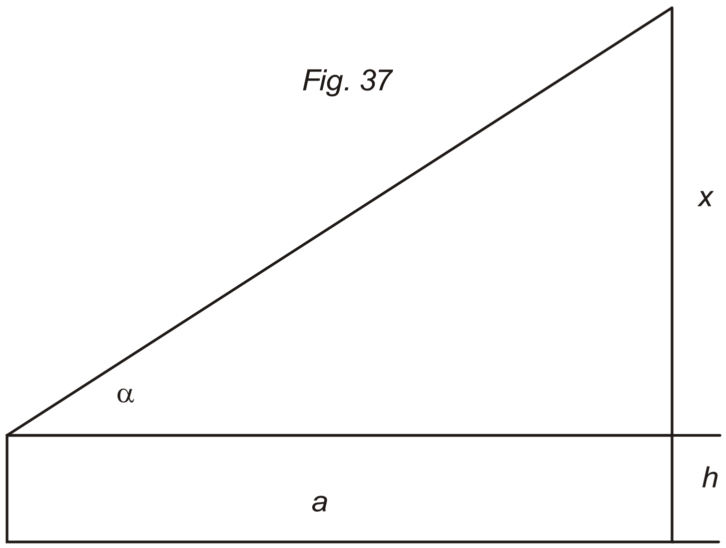


Fig. 37

L ö s u n g: Nach der Figur 37 ist tg $\alpha = \frac{x}{a}$, also x = a · tg α. Die Höhe ist H = h + a · tg α. Es ergibt sich x = 33,80; 33,68; 33,72; 33,76; 33,72; 33,76 m. Das Mittel ist 33,74, die Höhe 34,99 m.

Beispiel 206. In einem Dreieck sind die Seiten a = 5,4 cm, b = 2,1 cm, c = 4,3 cm. Wie groß sind die Winkel?

L ö s u n g: Setzt man ½ · (a + b + c) = s, so lehrt die Trigonometrie, daß $\text{tg}\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\cdot(s-c)}{s\cdot(s-a)}}$, $\text{tg}\ \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\cdot(s-c)}{s\cdot(s-b)}}$, $\text{tg}\ \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\cdot(s-b)}{s\cdot(s-c)}}$ ist. In unserm Fall ist s = 5,9; s - a = 0,5; s - b = 3,8; s - c =1,6 cm. Man findet α = 110° 16'; β = 21° 24'; γ = 48° 20'.

1. P r o b e: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

2. P r o b e: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$. (sin 110° 16' = sin(180° - 69° 44')

Beispiel 207. Wenn α, β und γ zusammen 180° betragen, also Winkel eines ebenen Dreiecks sind, so ist stets

1) tg α + tg β + tg γ = tg $\alpha \cdot$ tg $\beta \cdot$ tg γ

2) ctg α + ctg β + cgt γ = ctg $\alpha \cdot$ ctg $\beta \cdot$ ctg γ + cosec $\alpha \cdot$ cosec $\beta \cdot$ cosec γ

3) tg $\alpha \cdot$ tg β + tg $\beta \cdot$ tg γ + tg $\gamma \cdot$ tg α = 1 + sec $\alpha \cdot$ sec $\beta \cdot$ sec γ

4) ctg $\alpha \cdot$ ctg β + ctg $\beta \cdot$ ctg γ + ctg $\gamma \cdot$ ctg α = 1.

Man prüfe diese Formeln an möglichst zahlreichen Einzelfällen.

§ 97. Zusammengesetzte Ausdrücke, die aus trigonometrischen Funktionen gebildet sind.

a) Soll von einer trigonometrischen Funktion, deren Skala auf U_1 bezogen ist, das Quadrat gebildet werden, so findet man es genau darüber auf O_1. Diese Bemerkung gilt für T, sowie bei System Rietz für S und S & T.

Beispiel 208 Es soll die Formel $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ für $\alpha = 20°$ bestätigt werden.

Lösung: $\sin^2 20° = 0{,}117$; $\cos^2 20° = \sin^2 70° = 0{,}883$.

Beispiel 209. Man bestätige für denselben Wert die Richtigkeit der Formeln $1 + \mathrm{tg}^2\, \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$; $1 + \mathrm{ctg}^2\, \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Lösung: $\mathrm{tg}^2\, \alpha = 0{,}1325$; $1{,}1325 = \frac{1}{0{,}883}$; $\mathrm{ctg}^2\, \alpha = 7{,}55$; $8{,}55 = \frac{1}{0{,}117}$. Natürlich kann man auch sec α und cosec α einführen.

Beispiel 210. Man bestätige die Formeln $\mathrm{tg}\, 2 \cdot \alpha = \frac{2 \cdot \mathrm{tg}\, \alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\, \alpha}$; $\mathrm{ctg}\, 2 \cdot a = \frac{\mathrm{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \cdot \mathrm{ctg}\, \alpha}$.

b) Ist $x = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$, so rechnet man einfacher $x = ½ \cdot \sin (2 \cdot \alpha)$.

c) Will man bei "System Rietz" lg tg α haben, so gibt man der Zunge die in § 92 gegebene Stellung, stellt den Läuferstrich auf "a" der Skala T und liest auf L das Ergebnis ab. Ebenso kann man mit S & T verfahren. Die Kennziffer ist hier -2, während sie für die auf T angegebenen Winkel -1 ist. Bei Nr. 14 ist die zwischen S und T liegende Skala L rückläufig, sie liefert nicht den Logarithmus, sondern den Ergänzungslogarithmus oder den Logarithmus des reziproken Wertes. Der Bezeichnung "α" auf T entspricht auf L nicht lg tg α, sondern lg (1 : tg α) = lg ctg α. lg tg α wird leicht durch Ergänzung der abgelesenen Zahl zu 1 gefunden. Der Vorgang beim System "Darmstadt Nr. 21" bedarf nach dem früher Gesagten keiner weiteren Erklärung.

d) lg sin α und lg cos α werden ebenso ermittelt, wenn S auf U_1 also auch auf L, abgestimmt ist ("System Rietz"). Bei Nr. 14 entsprechen sich S und O_1 außerdem ist L rückläufig. Man muß also die Angabe auf L zu 1 ergänzen und dann mit 2 multiplizieren.

Man führe Vergleichungen mit einer Logarithmentafel durch!

§ 98. Steigerung der Genauigkeit bei der Aufsuchung trigonometrischer Funktionen.

Da Winkelmessungen meist recht genau ausgeführt werden können, müssen bisweilen die trigonometrischen Funktionen noch exakter berechnet werden, als es bisher gelehrt wurde.

Es ist (vgl. S. 63f.)

1) $\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + \frac{1}{362880} x^9 \mp \ldots$

2) $\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6 + \frac{1}{40320} x^8 \mp \ldots$

Dabei ist vorausgesetzt, daß x im Bogenmaß (S. 51) gegeben ist. Die Reihen können entweder Glied für Glied oder nach dem Hornerschema (S. 63) berechnet werden; in jedem Fall wird man, wie früher gezeigt, den Rechenschieber zur Abkürzung der Rechnung mit bestem Erfolg benutzen können.

Hat man sin x und cos x gefunden, so sind auch die andern Funktionen bekannt:

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$; $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$; $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cdot \sec x$; $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \cos x : \operatorname{cosec} x$.

Man kann die zuletzt genannten Funktionen auch durch die Reihen

3) $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 \ldots$

4) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 \ldots$ bestimmen, doch empiehlt sich das nur für kleine Werte von x, da die auftretenden Zahlen kein einfaches Bildungsgesetz haben.

Die beiden ersten Glieder der reihe 1) reichen für die Berechnung des Sinus auf 7 Wertzifern aus, wenn der Winkel kleiner als 5° ist. Verlangt man 6 Wertziffern, so kann man bis 8° gehen, bei 5 Wertziffern auf 13°, bei 4 auf 20°, bei 3 auf 32°.

Die folgende Tabelle zeigt, wie weit man bei den vier Formeln kommt, wenn nur zwei Glieder mitgenommen werden.

Verlangte Wertziffern	1) sin x	7	6	5	4	3	2) cos x	7	6	5	4	3
Höchstwert des Winkels		5°	8°	13°	20°	32°		2°	3°	6°	10°	18°
Verlangte Wertziffern	3) tg x	7	6	5	4	3	4) ctg x	7	6	5	4	3
Höchstwert des Winkels		3°	4½°	7½°	12°	18½°		¾°	1½°	3½°	7½°	16°

man wird also immer möglichst kleine Werte von x benutzen. Soll man z. B. sin 88° ausrechnen, so wird man nicht in Formel 1 für x den Wert $\frac{88}{57,29} = 1,396\ldots$ einsetzen, sondern beachten, daß sin 88° = cos 2° ist. man nimmt Formel 2, worin x = 2° = 0,03491 ist.

§ 99. Steigerung der Genauigkeit bei der Aufsuchung der Winkel.

Ist 1) sin y = x, so ist

$$y = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} \ldots$$

Wenn cos y = x ist, so hat man

$$2)\ y = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} \ldots$$

ebenso entspricht sich 3) tg y = x und

$$3)\ y = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \ldots \text{ ebenso}$$

4) ctg y = x und

$$4)\ y = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \ldots$$

Es muß darauf aufmerksam gemacht werden, daß diese Formeln den gesuchten Winkel im Bogenmaß liefern, das in bekannter Weise (S. 51) in Gradmaß übergeführt werden kann. Besonders wichtig sind sie für Winkel, die nahe an 0° und 90° liegen.

§ 100. Beispiele zu den vorigen Paragraphen.

Beispiel 211. Es sollen die trigonometrischen Funktionen von 89° auf 5 Stellen genau bestimmt werden.

Lösung: a) sin 89° = cos 1° = 0,017453. Nach § 98 genügen die beiden ersten Glieder (cos x = 1 - ½ · x²), also wird sin 89° = cos 1° = 0,99985. b) $\operatorname{cosec} 89° = \frac{1}{\sin 89°} = (1 - 0,00015)^{-1} = 1,00015$. c) cos 89° = sin 1° = 0,017452. d) $\sec 89° = \frac{1}{\sin 89°} = 57,299$. e) ctg 89° = tg 1° = 0,017455.

Beispiel 212. Dem Erdäquator sei ein regelmäßiges Vieleck umschrieben, welches 1 Million Seiten hat. Um wieviel ist sein Umfang größer als der des Äquators? Der Äquatorradius ist r = 6377 km.

Lösung: Eine einfache trigonometrische Rechnung zeigt, daß der Umfang des Vielecks U = 1000000 · 2 · r · tg α ist, wenn $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{1000000}$ gesetzt wird. Der Äquatorumfang ist $U_1 = 2 \cdot r \cdot \pi$, die gesuchte Differenz ist nach Formel 8) in § 98 $U - U_1 = 2 \cdot r \cdot [1000000 \cdot (\alpha + \frac{1}{3} \cdot \alpha^3) - \pi] =$

$2 \cdot r \cdot 1000000 \cdot \frac{1}{3} \cdot a^3 = \frac{2}{3} \cdot 6377 \cdot \frac{\pi^3}{10^{12}}$ km = 0,0000001319 km = 0,1319 mm!

Nach der kleinen Umformung genügt der Rechenschieber vollauf; hätte man sie nicht vorgenommen, so würde auch eine siebenstellige Logarithmentafel der Aufgabe machtlos gegenüberstehen.

Beispiel 213. sin α = 0,10622; wie groß ist α?

Lösung: Nach Formel 1 ist α 0,10622 + 0,00020 = 0,10642, also in Sekunden α = 206265 · 0,10642 = 21951" = 6° 5' 51" = 6,0975'° (= $\frac{21951}{3600}$). Die Berechnung von α kann unter alleiniger Benutzung des Rechenschiebers durchgeführt werden, bei der Umwandlung des absoluten Maßes in Sekunden führt die abgekürzte Multiplikation unter Anwendung des Rechenschiebers schnell zum Ziel.

Beispiel 214. cos α = 0,98000; wie groß ist α?

Lösung: Die direkte Anwendung von Formel 2) führt zwar zum Ergebnis, aber langsam. Besser macht man von der Formel $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ Gebrauch. Hier ist $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}01000} = 0{,}1$; $\frac{\alpha}{2}$ = = 5° 44' 21"; α = 11° 28' 42" = 11,4783°.

Beispiel 215. sin α = 0,992; wie groß ist α?

Lösung: Es sei α = 90° - β, dann ist cos β = 0,992; $\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{0{,}004} = 0{,}06825$; $\frac{\beta}{2}$ = 0,0638 = 13050" = 3° 37' 30"; β = 7° 15' 0"; α = 82° 45' 0". Die Rechnungen sind in diesem Beispiel unmittelbar mit dem Rechenschieber ausgeführt, trotzdem weicht das Ergebnis nur um 8" von dem Werte α = 82° 44' 52" ab, den eine fünfstellige Tafel liefert.

Beispiel 216. Die Dachrinne eines fünfstöckigen Hauses liegt 25 m über dem Erdboden. Auf ihr sitzt ein entflogener Papagei. Ein Straßenpassant beobachtet ihn, sein Standort ist 2 m von der Hauswand entfernt, sein Auge ist 1,6 m höher als das Straßenpflaster. Um wieviel Grad hat er seinen Kopf aus der normalen Richtung gedreht?

Lösung: Eine einfache Skizze, ähnlich wie Fig. 37 (S. 82), zeigt, daß $\operatorname{tg}\alpha = \frac{25-1{,}6}{2}$ = 11,7 ist. Die Reihe 3) in § 99 ist hier nicht zu brauchen. Es ist aber $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} =$ 0,0855, also nach 4) desselben Paragraphen $\alpha = \frac{\pi}{2} - 0{,}0855 + 0{,}0002 = \frac{\pi}{2} - 0{,}0853$. Im Gradmaß ist $\frac{\pi}{2}$ = 90°; 0,0853 = 17590" = 4° 53' 10". Dies ist die Abweichung von der Vertikalen, der Drehungswinkel ist 85° 6' 50". Mit einer siebenstelligen Logarithmentafel erhält man 85° 6' 51,27" Daß diese Abweichung praktisch belanglos ist, leuchtet ohne weiteres ein, auch für den Mathematiker ist sie ganz unbedeutend. Will man selbst diese kleine Differenz vermeiden, so rechnet man einfach Formel 4 etwas genauer durch: $\alpha = \frac{\pi}{2} - 0{,}085470 + 0{,}000208 - 0{,}000001 = \frac{\pi}{2} - 0{,}085263$ = 90° - 4° 53' 6,8".

Auf den folgenden Seiten geben wir nun noch eine Anzahl Beispiele für die Anwendung des Rechenschiebers "Darmstadt" für Zinseszins- und trigonometrische Rechnungen.

VIII. Kapitel.

§ 101. Zinseszins- und Rentenrechnung.

Die Zinseszins-Rechnung berücksichtigt den Umstand, daß die nicht abgehobenen Zinsen eines Kapitals dies vergrößern und nun ihrerseits Zinsen tragen. Derselbe Umstand muß beachtet werden, wenn eine Zahlung, die in regelmäßigen Zeitabständen in gleicher Höhe geleistet wird (Rente), zinstragend angelegt wird. Wir bezeichnen ein Kapital mit a (RM), eine Rente mit r (RM), den Zinsfuß mit p (%) und den Zinsfaktor $(1 + \frac{p}{100})$ mit q. Die Anzahl der Jahre, während der das Kapital der Verzinsung unterliegt, sei n. Eine Zusammenstellung der wichtigsten Formeln (ohne Beweis) findet man z. B. in **F. G. Gauß,** vierstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Die Beweise können aus den verschiedensten mathematischen Lehrbüchern entnommen werden. Wir bringen sie hier nicht, weil es uns nur darauf ankommt, zu zeigen, welch ungeheuere Erleichterung der Rechenschieber, besonders System Darmstadt, bei ihrer Auswertung erzielt.

Die einzige Schwierigkeit, welche die Formeln dem Rechner bieten, liegt in der Ermittlung der Größe q^n. Ist n einigermaßen groß, so müssen statt der vier- oder fünfstelligen Logarithmen siebenstellige genommen werden, da die Multiplikation mit n auch den Fehler, der der letzten Stelle des Logarithmus naturgemäß anhaftet, mit vergrößert Es sei z. B. p = 4%, n = 13 Jahre. Logarithmisch bestimmt man jetzt q^n folgendermaßen: q = 1,04; lg q = 0,0170333; $\lg q^{13} = 13 \cdot \lg q = 0{,}2214329$ abgerundet 0,2214 Der zugehörige Numerus liefert $q^n = 1{,}04^{13} = 1{,}665$.

Eine einzige Einstellung (1,04 auf e^x über dem Anfangsstrich 1 von U_1) und eine Verschiebung des Glasläufers auf 13 (U_1) gibt uns auf der mittleren Skala von e^x (vgl. S. 65) sofort dasselbe Ergebnis mit derselben Genauigkeit. Dieselbe Einstellung gestattet uns auch, nach einer einfachen Läuferverschiebung sofort $1{,}04^{14}$, $1{,}04^{15}$, $1{,}04^{16}$ usf. mühelos mit derselben Präzision ohne jede Rechnung abzulesen!

Wir beabsichtigen nicht zu überreden, sondern zu überzeugen und bitten daher, die folgenden Aufgaben durchzurechnen, sei es auch nur, um Gewandtheit im Gebrauch des neuen Instrumentes zu gewinnen.

Aufgabe 217. Zu welcher Summe wachsen 1200 RM bei 4 % Zinsen in 13 Jahren an?

Lösung: $z = a \cdot q^n$; $z = 1200 \cdot 1{,}04^{13} = 1200 \cdot 1{,}665 = 1998$ RM.

Aufgabe 218. Zu welcher Summe wachsen 1200 RM in 13 Jahren, 3 Monaten und 12 Tagen bei 4 % an?

Lösung: Man berechnet die Zinsen bei Jahresbruchteilen auf gewöhnliche Weise, indem man jeden Monat zu 30 Tagen ansetzt. 3 Monate, 12 Tage = 102 Tage. In dieser Zeit sind die einfachen Zinsen

$1998 \cdot \frac{4}{100} \cdot \frac{102}{360} = 22{,}60$ RM, rund 23 RM, das Endkapital ist also jetzt 2021 RM.

Läßt man bei der Zinseszinsrechnung auch Bruchteile von Jahren zu, so ist $n = 13 + \frac{102}{360} = 13{,}283$ (Rechenschieber!) - $q^n = 1{,}684$, $a \cdot q^n = 2020$ RM

Bei mäßigem Zinsfuß und einer nicht zu großen Zeitspanne kann man also die Formel $z = a \cdot q^n$ auch anwenden, wenn n eine gebrochene Zahl ist.

Aufgabe 219. Wann verdoppelt sich ein Kapital, das zu 3 % steht?

Lösung: $a \cdot 1{,}03^n = 2a$; $1{,}03^n = 2$. Man stellt q = 1,03 (auf e^x) über 1 (auf U_1) d verschiebt den Glasläufer so lange, bis sein Strich die Zahl 2 auf e^x bedeckt. Darunter steht auf U_1: n = 23,45; 0,45 Jahre = $360 \cdot 0{,}45$ = 162 Tage = 5 Monate, 12 Tage. Die gesuchte Zeit beträgt 23 Jahre, 5 Monate, 12 Tage.

Aufgabe 220. Wann wird ein Kapital 2, 3, 4, 5, 6mal so groß, wenn der Zinsfuß 1, 2, 3, 4, 5, 6 % beträgt?

Lösung: Man verfährt wie vorher und erhält die folgende Tabelle, in der oben (waagrecht) die Prozente, links (senkrecht) die Vervielfältigungszahlen (v) angegeben sind. Wo bei der Einstellung auf den Anfangsstrich von U_1 das Ergebnis außerhalb der Potenz-Skalen fällt, wird auf den Endstrich 10 eingestellt:

v/p	1 %	2 %	3 %	4 %	5 %	6 %
2	69,7	35,0	23,45	17,7	14,2	11,9

3	110,4	55,5	37,2	28,0	22,5	18,85
4	139,3	70,0	46,9	35,4	28,4	23,8
5	161,75	81,3	54,45	41,0	33,0	27,6
6	180,0	90,5	60,65	45,7	36,7	30,75

Aufgabe 221. In dem Adreßbuch einer westdeutschen Stadt wurde das Wachsen der Einwohnerzahl folgendermaßen angegeben:

Jahr	1850	1860	1870	isso	1890	1900	1910	1920	1930
Einwohner	20000	22500	24500	40400	52640	63754	91207	102010	120343

Es soll festgestellt werden, ob es angenähert der Zinseszinsformel entspricht.

Lösung 1: Man setze a = 20 000, z = 120343, dann ist $20\,000 \cdot q^{30} = 120343$; $q^{30} = \frac{120343}{20000} = 6{,}01715$; $q = \sqrt[30]{6{,}01715} = 1{,}0227$. Nimmt man diesen Wert für q an, setzt a = 20000 und erteilt n der Reihe nach die Werte 0, 10, 20 … 80, so erhält man statt der obigen Zahlen die Reihe: 20 000; 25 000; 31300; 39 200; 49 000; 61400; 76800; 96100; 120300.

Lösung 2: Während die obige Rechnung nur die Einwohnerzahl am Anfang und am Schluß der Jahre 1850 bis 1930 erfaßt, gestattet die Ausgleichsrechnung, Werte für a und q zu finden, die sich auch den Einwohnerzahlen der Zwischenzeit möglichst gut anpassen, nämlich a = 18 330; q = 1,0250. Mit diesen erhält man: 18330; 23450; 30000; 38400; 49150; 62900; 80500; 103000; 131800. Die graphische Darstellung der tatsächlichen Einwohnerzahlen und der nach den beiden Verfahren gefundenen Näherungswerte läßt den Grad der Annäherung deutlich erkennen.

Aufgabe 222. Jemand legt ein Kapital von a_1 = 1500 RM zinstragend zu p_1 = 5 % an, ein anderer a_2 = 2000 RM zu p_2 = 3 %. Da das kleinere Kapital wegen der höheren Verzinsung stärker anwächst, so wird es einmal das ursprünglich größere eingeholt haben. Wann geschieht das?

Lösung: Nach n Jahren. $a_1 \cdot q_1^n = a_2 \cdot q_2^n$; $(\frac{q_1}{q_2})^n = \frac{a_1}{a_2} = (\frac{1{,}05}{1{,}03})^n = \frac{2000}{1500}$; $1{,}01942^n = 1{,}3338$. Man stellt 1,01942 (e^x, oberste Skala) über 1 (U_1) und verschiebt den Glasläufer soweit, bis sein Strich die Zahl 1,3333 (e^x mittlere Skala) bedeckt. Auf U_1 findet man das zugehörige n = 14,96 Jahre = 14 Jahre, 346 Tage = 14 Jahre, 11 Monate, 16 Tage. Das Endkapital ist in beiden Fällen 3112 RM.

Andere Beispiele sind:

a_1	180	780	1334	15250	8000	
p_1	6 %	4 %	4½ %	3½ %	6½ %	
a_2	300	900	1600	16000	20000	
p_2	3¼ %	3½ %	3½ %	3 %	2½ %	
n	19,43	29,7	18,91	9,91	23,94	Jahre
z	558	2500	3066	21450	36120	RM

Bemerkung: Bei der ersten Aufgabe ist

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{1{,}06}{1{,}0325} = \frac{1{,}0325 - 0{,}0275}{1{,}0325} = 1 + \frac{0{,}0275}{1{,}0375} = 1{,}02664.$$

Im zweiten Beispiel ist $\frac{q_1}{q_2} = \frac{1{,}04}{1{,}035} = 1 + \frac{0{,}005}{1{,}035} = 1{,}00483$. Da diese Zahl auch auf der obersten Skala von e^x nicht enthalten ist so berechnet man $(\frac{q_1}{q_2})^3 = (1 + 0{,}00483)^3$ bequem nach der Formel für $(a + b)^3$; man erhält 1,01456 und findet $[(\frac{q_1}{q_2})^3]^{9,90} = \frac{a_1}{a_2} = 1{,}1538$ Es ist also n = 3 · 9,90 = 29,7.

Ist, wie immer, $q = 1 + \frac{p}{100}$, so ist $e^{\frac{np}{100}}$ ein Näherungswert für q^n.

Die folgenden Beispiele zeigen an einigen Fällen den Grad der Annäherung:

p	2	2	4	4	6

n	5	20	5	20	25
q^n (genau)	1,104	1,486	1,217	2,191	4,290
q^n (genähert)	1,105	1,492	1,221	2,226	4,480
Unterschied	0,001	0,006	0,004	0,035	0,190

Bei verhältnismäßig kleinen Werten von p und n kann man also die Näherungsformel benutzen. Man hat dann den Vorteil, daß die Einstellung der Zunge nicht geändert zu werden braucht; e (auf e^x) bleibt dauernd über 1 (auf U_1) stehen. Man rechne die vorigen Aufgaben mit der Näherungsformel durch; dann findet man z. B., daß ein Kapital sich verdoppelt, wenn $a \cdot e^{\frac{np}{100}} = 2 \cdot a$ ist, also $n \cdot \frac{p}{100} = \ln 2$; $n = \frac{69,3}{p}$ Jahre. Bei der Verdreifachung hat man $n \cdot \frac{p}{100} = \ln 3$; $n = \frac{110}{p}$.

Aufgabe 223. Jemand zahlt am Ende eines jeden Jahres r = 675 RM in eine Kasse, die p = 4 % vergütet. Wieviel hat er nach n = 10 Jahren?

Lösung: Es ist $s = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$, also in unserem Fall $s = \frac{675 \cdot 0,480}{0,04}$ = 8100 RM. Andere Beispiele sind:

r	350	1200	480	250	750	1000
p	3½ %	4¼ %	3¾ %	3 %	6 %	5 %
n	7	5	8	25	4	15
s	2720	6525	4375	9120	3275	21580

Aufgabe 224. Wie ändern sich die eben erhaltenen Ergebnisse, wenn die Einzahlungen am Anfang eines jeden Jahres erfolgen?

Lösung: Da die Verzinsung ein Jahr länger läuft, so müssen die vorigen Resultate mit q multipliziert werden, mit anderen Worten: Es kommt ein Zuschlag von p % hinzu. Z. B. ist s = 8100; $\frac{s \cdot p}{100} = 324$; s_1 = 8100 + 324 = 8424 RM. Entsprechend erhält man 2815; 6802; 4539; 9394; 3472; 22659 RM.

Aufgabe 225. Ein Kapital von 700 RM steht zu 5 %. Zu welcher Summe wächst es in 18 Jahren an, a) wenn die Verzinsung ganzjährig, b) wenn sie halbjährig, c) wenn sie vierteljährig erfolgt?

Lösung: a) $s_1 = 700 \cdot 1,05^{18} = 700 \cdot 2,407 = 1685$ RM. b) Das Kapital wächst ebenso stark an, als wenn es 36 Jahre zu 2½ % stände; $s_2 = 700 \cdot 1,025^{36} = 1703$ RM. c) $s_3 = 700 \cdot 1,025^{72} = 1712$ RM.

Man rechne einen möglichst großen Teil der früheren Aufgaben unter der Voraussetzung durch, daß die Verzinsung viertel- oder halbjährig stattfindet. q^n wird dabei immer größer sein, als bei ganzjähriger Verzinsung, aber kleiner, als der auf S. 87angegebene Näherungswert.

Z. B. $1,04^{10} = 1,480$; $1,02^{20} = 1,486$; $1,01^{40} = 1,489$; $e^{\frac{10 \cdot 4}{100}} = e^{0,4} = 1,492$.

Aufgabe 226. Ein Kapital von a = 45000 RM ist zu 4½ % angelegt. Am Schlusse eines jeden Jahres hebt man die Summe von 3000 RM ab. Wann ist es aufgezehrt?

Lösung: Die Endsumme ist $a \cdot q^n - \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = 0$.

$45000 \cdot q^n - 66667 \cdot (q^n - 1) =: 0$; $21667 \cdot q^n = 66667$; $q^n = 1,045^n = 3,077$; n = 25,54 Jahre = 25 Jahre 6½ Monate.

Aufgabe 227. Eine Maschine kostet 9500 RM. Sie ist voraussichtlich in 12 Jahren verbraucht. Welche Summe muß am Ende jedes Jahres abgeschrieben werden, wenn man p = 4¾ % rechnet?

Lösung: Legt man die abgeschriebenen Beträge zinstragend an, so müssen, sie mit Zinseszinsen den Kaufpreis ergeben, also ist $\frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = a$; $r = \frac{a \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{9500 \cdot 0,0475}{0,745}$ = 606 RM. Man beachte die viel umständlichere Berechnung von q^n in § 36.

Aufgabe 228. Eine am Ende eines jeden Jahres zahlbare Rente von r = 500 RM muß n = 17 Jahre hindurch entrichtet werden. Sie soll durch eine einmalige sofortige Zahlung abgelöst werden. Wie hoch muß diese sein, wenn man 3¼ % Verzinsung rechnet.

Lösung: $a \cdot q^n = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$; $a = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q - 1)}$; $a = \frac{500 \cdot 0,722}{1,722 \cdot 0,0325}$ = 6450 RM. Man bilde selbst weitere Aufgaben mit anderen Zahlen.

IX. Kapitel.

Trigonometrie.

§ 102. Vorbemerkung.

Wie man die trigonometrischen Funktionen mit dem "System Darmstadt" ermittelt, ist auf S. 77 f. gesagt Bei Winkeln unter 5° kann man fast immer mit ausreichender Genauigkeit setzen: sin α = tg α = $\frac{\alpha°}{\rho°}$; cos α = 1; ctg α = $\frac{\rho°}{\alpha°}$; wobei $\rho°$ = 57,3 ist (S. 51). Wird größere Schärfe verlangt, so beachte man die Ausführungen von § 98 und 99 auf S. 83 f.

Die für den Rechenschieber bequemste Formel der ebenen Trigonometrie ist der Sinussatz $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Je nach der Art der Aufgabe kann er zur Berechnung gesuchter Stücke oder zur Kontrolle von Ergebnissen dienen, die man auf andere Weise gefunden hat. Nicht nur beim schiefwinkligen, sondern auch beim rechtwinkligen Dreieck wird er mit Vorteil benutzt.

Ist z. B. a = 17,6 cm, α = 57°, so sucht man auf 57° auf der Sinusskale (schwarze Striche) auf und schiebt den Läuferstrich darüber. Auf U_1 steht sin 57° = 0,839. Ohne den Glasläufer zu bewegen, stellt man die Zahl a = 17,6 der unteren Zungenskala (U_1) unter den Läuferstrich. Dann findet man $\frac{a}{\sin\alpha}$ = 21,0 auf U_2 über dem Endstrich von U_1 und $\frac{\sin\alpha}{a}$ = 0,477 auf U_1 unter dem Anfangsstrich von U_2. Dieselben Werte muß man nach dem Sinussatz erhalten, wenn man b (auf U_2) über β (auf S) oder c (auf U_2) über γ (auf S) setzt. Man braucht daher die eben angegebenen Ergebnisse der Divisionen gar nicht abzulesen, der Sinussatz ist erfüllt, wenn die neue Einstellung (b über β, c über γ) sich aus der ersten (a über α) allein durch Bewegung des Glasläufers, ohne Verschiebung der Zunge bewirken läßt. Ist z. B. in einem schiefwinkligen Dreieck durch Rechnung gefunden: a = 17,6 cm; b = 15,2 cm; c = 20,4 cm; α = 57°; β = 46,5°; γ = 66,5°, so findet man, nachdem die eben beschriebene Einstellung gemacht worden ist, daß auch b über β steht, unter c liest man aber γ = 76,5° ab. Die Kontrolle durch den Sinussatz sagt uns, daß γ falsch berechnet wurde; $\alpha + \beta + \gamma$ muß ja auch = 180° sein.

In den folgenden Ausführungen wird dies Verfahren kurz durch: "nach dem Sinussatz" oder "Probe durch den Sinussatz" bezeichnet.

§ 103. Das rechtwinklige Dreieck.

Folgende Grundaufgaben sind möglich:

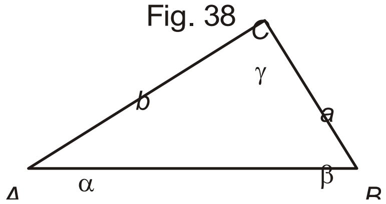
1) Gegeben sind die Katheten a und b, gesucht die Hypotenuse c und die Winkel α und β.

2) Gegeben c und a, gesucht b, a, β. (Oder gegeben c und b, gesucht a, α, β.)

8) Gegeben c und α (oder β), gesucht a und b.

4) Gegeben a und α (oder β), gesucht b und c. (Oder gegeben b und α (oder β), gesucht a und c.)

Fig. 38



Fall 1. Es sei a = 5,35 cm, b = 6,82 cm.

Lösung a. Es ist $c^2 = a^2 + b^2$. Mit U_1 und O_1 (Quadratskala) findet man a^2 = 28,6; b^2 = 46,5; c^2 = 28,6 + 46,5 = 75,1. Diese Zahl sucht man auf der rechten Seite von O_1 auf, darunter steht auf U_1 das Ergebnis c = 8,67. Da tg α = $\frac{a}{b}$ ist, so stellt man über a = 5,35 (auf U_1) durch Zungenverschiebung b = 6,82 (auf U_2). $\frac{a}{b}$

liegt auf U_1 unter 10 (U_2). Darunter findet man auf der T-Teilung $\alpha = 38{,}1°$. Es ist $\beta = 90° - \alpha = 51{,}9°$. Probe durch den Sinussatz! Wäre b kleiner als a gewesen, so hätte man die Formel tg $\beta = \frac{b}{a}$ benutzt.

Lösung b. tg $\alpha = \frac{a}{b}$ findet man wie vorher α und β. Mit dem Sinussatz (a über α) bestimmt man c; c (auf U_1) steht über 90° auf S. Probe:

1) b muß über β stehen. 2) $c^2 = a^2 + b^2$.

Fall 2. Gegeben ist c = 5,8 cm, a = 3,8 cm.

Lösung a. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$. Man setzt c (auf U_2) über a (auf U_1).

Unter 10 (U_2) liest man auf S ab: $\alpha = 40{,}9°$ (schwarze Bezifferung); $\beta = 49{,}1°$ (rote Bezifferung). Der Sinussatz liefert b = 4,88 cm. Probe: $a^2 + b^2 = c^2$.

Lösung b. $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)\cdot(c-a)} = \sqrt{9{,}6\cdot 2} = 4{,}38$ cm. Der Sinussatz (90° unter c) ergibt α und β und dient zugleich zur Probe ($\alpha + \beta = 90°$).

Fall 3. Gegeben ist c = 6 cm, $\alpha = 19°$. Es ist dann $\beta = 71°$. Sinussatz: c (U_2) über 90° (S), a und b finden sich über α und β auf U_2; a = 1,954 cm, b = 5,675 cm. Probe: $a^2 + b^2 = c^2$; tg $\alpha = \frac{a}{b}$.

Fall 4. Gegeben ist a = 17,2 cm, $\alpha = 63°$.

Lösung: $\beta = 90° - 63° = 27°$; der Sinussatz liefert: b = 8,77 cm; c = 19,3 cm. Probe: $a^2 + b^2 = c^2$; tg $\alpha = \frac{a}{b}$.

§ 104. Differentialformeln.

x, y, z… seien veränderliche Größen, *f* eine Funktion von ihnen. Ist *f* (x, y, z…) = 0 und bedeuten δx, δy, δz … kleine Zuwachsgrößen, so ist auch $f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z \ldots) = 0$, also nach dem Taylorschen Satz: $f(x, y, z \ldots) + \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z + \ldots = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z + \ldots = 0$.

Wir nehmen dabei an, daß die Größen höherer Ordnung, wie $(\delta x)^2$, $\delta x \cdot \delta y$ usf. unberücksichtigt bleiben können. Ein rechtwinkliges Dreieck möge die Katheten a und b, die Hypothenuse c und die Winkel α und β haben. Aendert man eines von diesen Stücken oder zwei, so ändern sich auch die übrigen. Dieser Zusammenhang soll untersucht werden.

$f = a^2 + b^2 - c^2 = 0$. Hier ist $\frac{\partial f}{\partial a} = 2 \cdot a$ und entsprechend.

1.) $a \cdot \delta a + b \cdot \delta b - c \cdot \delta c = 0$.

Ferner ist tg $\alpha = \frac{a}{b}$; $f = b \cdot \text{tg}\,\alpha - \alpha = 0$.

$\delta b \cdot \text{tg}\,\alpha + \frac{\delta\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot b - \delta\alpha = 0$; $\delta\alpha = \frac{\cos^2\alpha \cdot \delta\alpha}{b} - \frac{\text{tg}\,\alpha \cdot \cos^2\alpha \cdot \delta b}{b}$.

Es ist $b = \frac{a}{\text{tg}\,\alpha}$, also $\frac{\cos^2\alpha}{b} = \frac{\cos^2\alpha \cdot \text{tg}\,\alpha}{a} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{a}$

$\delta\alpha = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \delta a}{a} - \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \delta b}{b} = \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \left(\frac{\delta a}{a} - \frac{\delta b}{b}\right)$.

2.) $\delta\alpha = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot \left(\frac{\delta a}{a} - \frac{\delta b}{b}\right)$. Hierbei ist $\delta\alpha$ im Bogenmaß gegeben (S. 51), um $\delta\alpha$ im Gradmaß zu erhalten, muß man das Ergebnis mit $\rho° = 57{,}3$ multiplizieren, also

3.) $\delta\alpha° = \frac{\rho° \cdot \sin\alpha}{2} \cdot \left(\frac{\delta a}{a} - \frac{\delta b}{b}\right)$

Da $\alpha + \beta - 90° = 0$ ist, so muß $\delta\alpha + \delta\beta = 0$ sein, mithin

4.) $\delta\alpha = - \delta\beta$.

Aufgabe 229. In einem rechtwinkligen Dreieck sei a = 3 cm, b = 4 cm. Man findet c = 5 cm, $\alpha = 36{,}87°$; $\beta = 53{,}13°$. Wie groß sind c_1, α_1, β_1, wenn $a_1 = 3{,}1$; $b_1 = 4{,}05$ cm ist?

Lösung: $\delta\alpha = 0{,}1$; $\delta\beta = 0{,}05$.

1.) $5 \cdot \delta c = 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}05 = 0{,}5$; $\delta c = 0{,}1$; $c_1 = 5{,}1$ cm.

2.) $\delta\alpha° = \frac{57{,}3° \cdot \sin 73{,}74°}{2} \cdot (\frac{0{,}1}{3} - \frac{0{,}05}{4}) = 0{,}573°$. Daher ist $\alpha_1 = 36{,}87° + 0{,}57° = 37{,}44°$; $\beta_1 = 53{,}13° - 0{,}57° = 52{,}56°$.

Berechnet man aus $a_1 = 3{,}1$; $b_1 = 4{,}05$ die fehlenden Stücke direkt, so erhält man (innerhalb unserer Rechengenauigkeit) dasselbe Ergebnis.

Aufgabe230. a und b seien ebenso groß wie vorher; $\delta\alpha = 1$; $\delta\beta = 0{,}7$. Welchen Wert haben die fehlenden Stücke des neuen Dreiecks?

Lösung: Man findet $\delta c = 1{,}16$; $\delta\alpha = -\delta\beta = 4{,}35°$; also $c_1 = 6{,}16$ cm; $\alpha_1 = 41{,}22°$; $\beta_1 = 48{,}78°$.

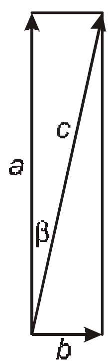
Die genaue Rechnung ergibt: $c_1 = 6{,}17$ cm; $\alpha_1 = 40{,}4°$; $\beta_1 = 49{,}6°$. Hier sind die Zuwachswerte schon so groß, daß ihre höheren Potenzen nicht mehr vernachlässigt werden können, daher weicht die Näherungsrechnung von der genauen ab. Unsere Näherungsformeln sind dann am Platze, wenn eine Reihe von Dreiecken berechnet werden soll, bei denen die gegebenen Stücke sich nur unwesentlich von denen des Grunddreiecks unterscheiden.

§ 105. Einiges über Vektoren.

Aufgabe 231. Ein Motorboot hat die Geschwindigkeit a = 12 m/sec. Es durchquert einen Fluß, dessen Strömung ihm senkrecht zu seiner Eigenbewegung, die Geschwindigkeit b = 2,5 m/sec. erteilt. Wie groß ist seine Gesamtgeschwindigkeit und um welchen Winkel lenkt es der Fluß von seiner Fahrtrichtung ab?

Lösung: Die tatsächliche Bewegung erfolgt nach dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten (Fig. 39). Nach Fall 1 ist die resultierende Geschwindigkeit c = 12,26 m/sec. Der Winkel, um den es abgelenkt wird, ist $\beta = 11{,}77°$. Ist der Fluß 70 m breit, so legt das Schiff 71,5 m zurück und wird 14,6 m abgetrieben.

Fig. 39



Unter einem Vektor versteht man eine Gerade, die eine bestimmte Größe, eine bestimmte Richtung und einen bestimmten Richtungssinn hat.

Dieser wird in der Zeichnung durch einen Pfeil angegeben. Die Geschwindigkeit des Motorbootes in der vorigen Aufgabe ist ein Vektor. Seine Größe ist 12 (rn/sec.), seine Richtung die Verbindungslinie zweier gegenüberliegender Uferpunkte, sein Richtungssinn ist dadurch bestimmt, daß das Schiff von dem einen zum andern Ufer fährt. Auch die Strömung ist ein Vektor, dessen Größe 2,5 (m/sec.) ist, dessen Richtung mit der des Flusses übereinstimmt und dessen Richtungssinn durch das Gefälle gegeben ist.

Nicht nur Geschwindigkeiten sind Vektoren, sondern auch Kräfte (mechanischer, elektrischer, magnetischer Natur), Beschleunigungen, Flächengeschwindigkeiten usf.

Zwei Vektoren (Komponenten), die einen Körper gleichzeitig beeinflussen, vereinigen sich zu einem einzigen Vektor (Resultante) nach dem Parallelogrammgesetz (z. B. Parallelogramm der Kräfte). In dem soeben behandelten Fall ist das Parallelogramm ein Rechteck, weil die Komponenten senkrecht zu einander stehen. Ihre Richtungen können aber auch einen spitzen oder stumpfen Winkel einschließen (z. B. beim schrägen Durchfahren eines Flusses). Endlich können auch mehr als zwei Vektoren eine Resultante bilden; der wichtigste Fall tritt dann auf, wenn im Raume drei Kompenenten vorhanden sind, von denen jede auf den beiden andern senkrecht steht. Man vereinigt dann erst zwei nach dem Parallelogrammgesetz zu einer

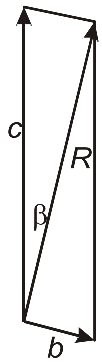
Resultante und setzt diese mit der dritten Komponente nach demselben Gesetz zusammen. Schiefwinklige räumliche Komponenten eines Vektors finden sich bei Kristallen.

Ebenso, wie man Komponenten zu einer Resultante vereinigt, vermag man auch einen gegebenen Vektor nach vorgeschriebenen Gesichtspunkten in Komponenten zu zerlegen.

Aufgabe 232. Welche Richtung muß das Motorboot (Aufgabe 231) einschlagen, damit es unter Berücksichtigung der Strömung den Fluß senkrecht durchfährt?

Lösung: In Fig. 40 sind die Komponenten c = 12, b = 2,5 m/sec. gegeben. Die Resultante R wird nach Fall 2 ermittelt. Man findet R = 11,75 m/sec, b = 12,0°.

Fig. 40



Aufgabe 233. ABCD sei eine Eisenkonstruktion (Fig. 41). An ihrem Ende D hängt die Last R = 105 kg. Wie wirkt sie auf die Konstruktionsteile BD und CD ein? Winkel CBD sei β = 65°.

Lösung: In dem Kräfteparallelogramm DFEG ist DE die Resultante, die in die Komponenten DF und DG zerlegt wird In einem der beiden rechtwinkligen Dreiecke kennt man eine Kathete (DE = 105) und die Winkel (Fall 4). Man erhält für die Hypotenuse x = 248,5 kg und für die andere Kathete y = 225,2 kg. DB wird durch x auf Druck, CD durch y auf Zug beansprucht.

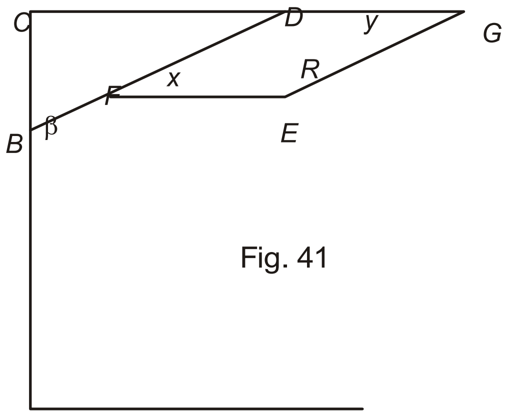
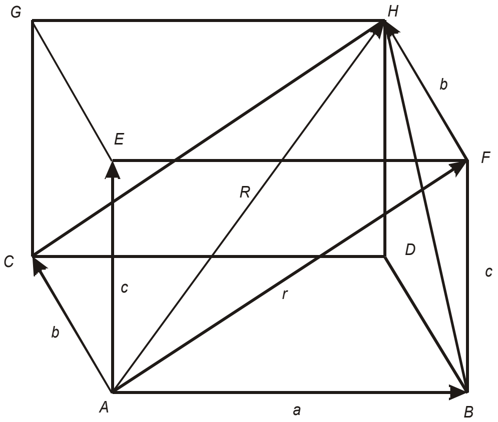


Fig. 41

Ein Beispiel für Fall 3 ist auf S. 79, Fig. 35 gegeben. Auch hier wird ein Vektor P in zwei Resultanten von vorgeschriebener Richtung zerlegt.

Aufgabe 234. Drei zu einander senkrecht stehende Vektoren, deren Größe a = 7,32, b = 3,96, c = 2,25 ist, sollen zu einer Resultante R vereinigt werden. Wie groß ist sie und welche Winkel bildet sie mit den Komponenten?

Fig. 42



Lösung: (Fig. 42). Man benutzt das bei B rechtwinklige Dreieck ABF dazu, zunächst a und c zu der Resultante r zusammenzusetzen. Es ist $r^2 = a^2 + c^2$. In dem bei F rechtwinkligen Dreieck AFH ist jetzt r eine Komponente, die zusammen mit der anderen Komponente FH = b die Resultante R liefert. Es ergibt sich: $R^2 = r^2 + b^2 = a^2 + b^2 + c^2$ +; $R^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Mit Benutzung der Teilungen U_1 und O_1 erhält man R = $\sqrt{74,3}$ = 8,62. Bezeichnet man die Winkel, welche R mit a, b, c bildet, durch α, β, γ, so liefert das bei B rechtwinklige Dreieck ABH die Beziehung: $\cos \alpha = \frac{a}{R}$. Entsprechend ist $\cos \beta = \frac{b}{R}$, $\cos \gamma = \frac{c}{R}$. Dafür kann man schreiben:

$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{R}{\cos 0°}$. Man stellt also R (auf U_2) über 0° (auf S, rote Ziffern) und findet unter a, b, c (U_2) die Werte: α = 31,9°; β = 62,7°; γ = 74,88° (S-Skala, rote Ziffern). Zur Probe dient die Beziehung: $(\cos \alpha)^2 + (\cos \beta)^2 + (\cos \gamma)^2 = 1$. Stellt man die Winkel auf S ein (rote Ziffern), so findet man darüber auf O_2 die Quadrate der zugehörigen Consinuswerte.

Aufgabe 235. Ein Vektor R = 9,5 soll in drei zu einander senkrechte Komponenten a, b, c zerlegt werden. Er bildet mit a den Winkel α =: 65°, mit b den Winkel β = 73°.

Lösung: Die letzte Beziehung der vorigen Aufgabe liefert uns $(\cos \gamma)^2$ = 1 - 0,1785 - 0,0855 = 0,7360. Sucht man diese Zahl auf O_1 auf, so findet man darunter auf S: γ = 30,9°. Man stellt, wie in den vorigen Aufgabe R über 0° und geht jetzt von den gegebenen Winkeln zu den gesuchten Komponenten über; man findet: a = 4,01; b = 2,775; c = 8,15.

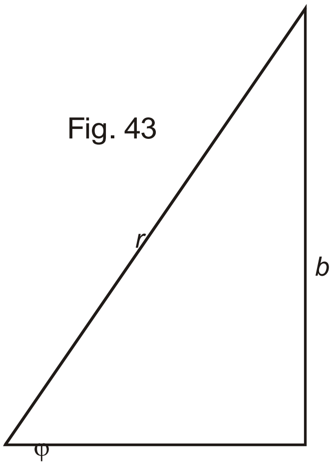
Probe: $R^2 = a^2 + b2 + c^2$ = 90,25.

§ 106. Komplexe Zahlen.

Für die komplexen Zahlen gibt es zwei Darstellungsweisen:

1.) z = a + bi, wobei i = $\sqrt{-1}$ ist. 2.) z = r · cos (φ + i · sin φ). Die Umformung läßt sich mit dem Rechenschieber leicht durchführen. (Fig. 43).

Fig. 43



Aufgabe 236. Es sei a = 4,1; b = 5,9, wie groß ist r und φ?

Lösung: Die Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks (Fall 1) lehrt, daß r = 7,18; φ = 90° - 34,8° = 55,2° ist.

Aufgabe 237. Wie ist das Ergebnis, wenn a = 8,5; b = 0,4 ist?

Lösung: r = 8,51; tg $\varphi = \frac{0,4}{8,5} = 0{,}0471$.

Dieser kleine Wert ist auf der T-Teilung nicht angegeben, wir erhalten φ, indem wir ihn mit $\rho° = 57{,}3$ multiplizieren; ($\varphi = 2{,}69°$.

Aufgabe 238. Es sei r = 17; $\varphi = 135{,}6°$.

Wie groß ist a und b?

Lösung: a = r cos φ = -12,15; b = + 11,9.

Aufgabe 239. Gegeben sind die kornplexen Zahlen $z_1 = 2{,}75 + 41i$; $z_2 = 3{,}35 + 7i$. Gesucht ist $u = z_1 \cdot z_2$. Dieser Ausdruck soll zuerst in rechtwinkligen, dann in Polarkoordinaten gefunden werden.

Lösung: $z_1 = a_1 + b_1 i$; $z_2 = a_2 + b_2 i$; $u = a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot b_1 i + a_1 \cdot b_2 i + b_1 \cdot b_2 i^2$ oder, weil $i^2 = -1$ ist, $u = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2) \cdot i$. Im Falle der Polarkoordinaten hat man $z_1 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$; $z_2 = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)$; $u = z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$.

Es ist

$a_1 \cdot a_2 =$	9,21	$a_2 \cdot b_1 =$	15,41	(Einstellung: a_2 auf O_1 oder U_1)
$b_1 \cdot b_2 =$	32,2	$a_1 \cdot b_2 =$	19,25	(Einstellung: b_2 auf O_1 oder U_1)
	-22,99		+34,66	

z = - 22,99 + 34,66 · i.

Bei der Umformung in Polarkoordinaten findet man r = 41,6, $\varphi = 180° - 56{,}44° = 123{,}56°$. Andererseits ist $r_1 = 5{,}36$; $r_2, = 7{,}76$; tg $\varphi_1 = \frac{4,6}{2,75}$; $\varphi_1 = 90° - 30{,}88° = 59{,}12°$; tg $\varphi_2 = \frac{7}{3,35}$; $\varphi_2 = 90° - 25{,}36° = 64{,}44°$. Es ist $r_1 \cdot r_2 = 41{,}6$; ; $\varphi_1 + \varphi_2 = 123{,}56°$. Innerhalb der Genauigkeit des Rechenschiebers ist die mathematische Ueberlegung bestätigt.

Aufgabe 240. Aus den Zahlen der vorigen Aufgabe soll der Ausdruck $v = \frac{z_1}{z_2}$ gebildet werden.

Lösung: Es ist $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + i \cdot b_1}{a_2 + i \cdot b_2} = \frac{a_1 + i \cdot b_1}{a_2 + i \cdot b_2} \cdot \frac{a_2 - i \cdot b_2}{a_2 - i \cdot b_2} = \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) + i \cdot (a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$; $a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 41{,}41$; $a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2 = -3{,}84$; $a_2^2 + b_2^2 = 60{,}2$; $\frac{z_1}{z_2} = 0{,}688 - 0{,}0638 \cdot i$; r = 0,691; $\varphi = -5{,}32°$.

Da andererseits für $\frac{z_1}{z_2}$ der absolute Betrag $r = \frac{r_1}{r_2}$, die Amplitude $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ ist, so findet man aus den obigen Werten $r = \frac{5,36}{7,76} = 0{,}691$; $\varphi = 59{,}12° - 64{,}33° = -5{,}32°$, es besteht also wiederum zwischen beiden Rechnungen gute Uebereinstimmung.

Aufgabe 241. Wie groß ist $(2{,}54 + 1{,}1 \cdot i)^8$?

Lösung: $z = 2{,}54 + 1{,}1 \cdot i = 2{,}768 \cdot (\cos 23{,}42° + i \cdot \sin 23{,}42°)$; $z^8 = 2{,}768^8 \cdot [\cos(8 \cdot 23{,}42) + i \cdot \sin(8 \cdot 23{,}42)]$. $2{,}768^8$ ist (Skala e^x) $= (2 \cdot 1{,}384)^8 = 256 \cdot 13{,}45 = 3440$; $z^8 = 3440 \cdot (\cos 187{,}36° + i \cdot \sin 187{,}36°) = -3410 - 440 \cdot i$.

Aufgabe 242. Es sei $z^{10} = 7{,}5 - 2{,}6 \cdot i$; wie groß ist z?

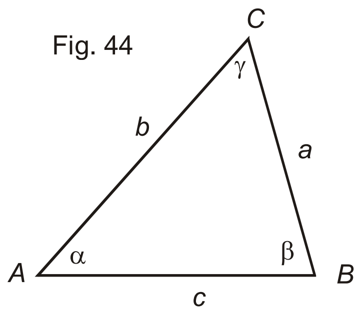
Lösung: $7{,}5 - 2{,}6 \cdot i = 7{,}94 \cdot [\cos(-19{,}12°) + i \cdot \sin(-19{,}12°)]$. Dann kann z den Wert haben: $\sqrt[10]{7,94} \cdot [\cos \frac{-19,12°}{10} + i \cdot \sin \frac{-19,12°}{10}] = 1{,}230 \cdot [\cos(-1{,}912°) + i \cdot \sin(-1{,}912°)] = 1{,}230 . 0{,}041 \cdot i$. Aber auch, wenn man den Winkel - 1,912° um 36°, 72°, 108° … 324° vergrößert und den Radiusvektor unverändert läßt, erhält man nach der Potenzierung mit 10 die Zahl 7,5 - 2,6 · i. Man führe die Rechnung durch!

§ 107. Das schiefwinklige Dreieck.

Außer den bisher benutzten Hilfsmitteln spielt beim schiefwinkligen Dreieck der Cosinussatz eine wichtige Rolle. Er lautet:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$; $b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cos \beta$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$.

Fig. 44



Für die logarithmische Rechnung ist er ziemlich ungeeignet. Der Rechenschieber aber löst das Quadrieren sehr einfach (vgl S. 47 f.), auch das Wurzelziehen macht keine Schwierigkeiten (vgl. S. 55 f.). Um das letzte Glied der Formel zu berechnen, nehmen wir ein beliebiges Bellel: a = 7,25 cm; b = 3,1 cm; $\gamma = 63°$. Man sucht $\gamma = 63°$ auf S auf (rote Teilung), stellt den Läuferstrich darüber, verschiebt die Zunge so, daß die Zahl 3,1 der Reziprokskala über ihm steht und bewegt dann den Glasläufer so weit, bis sein Strich die Zahl 7,25 auf U_2 bedeckt. Darunter steht auf U_1 das Ergebnis 10,2. Es ist nämlich $ab \cos \gamma = \cos \gamma : (\frac{1}{b}) \cdot a$; vgl. Multiplikation dreier Faktoren S. 29.

P r o b e: Dasselbe Ergebnis muß man durch die Rechnung $\cos \gamma = \cos \gamma : (\frac{1}{a}) \cdot b$ erhalten. Ist $\gamma = 23°$ (statt 63°), so ist eine Verschiebung der Zunge um eine Einheit nötig, damit man das Resultat (20,7) ablesen kann (vgl. S. 20). Die Multiplikation mit 2 ($2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$ in der Formel) führt man leicht im Kopfe aus.

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist

$F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta$.

Man kann ihn auf dieselbe Weise, wie eben beschrieben, ermitteln, wenn man die schwarzen Teilstriche der S-Skala benutzt.

Beispiel: In einem Dreieck sei a = 3,4 cm; b = 2,65 cm; $\alpha = 70°$. Wie groß ist der Flächeninhalt?

Lösung: Man stellt a (U_2) über α (S) und findet unter b (U_2) auf S den Winkel $\beta = 47{,}1°$. Es ist $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 62{,}9°$.

Durch Verschiebung des Läuferstriches auf γ (S) findet man c = 3,22 cm (U_2). jede der drei Formeln liefert den Flächeninhalt F = 4,01 qcm. Die Uebereinstimmung dient zur Kontrolle.

Schließen zwei Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, deren Größen a und b sind, den Winkel γ ein, so versteht man unter ihrem skalaren Produkt $(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})$ den Ausdruck $a \cdot b \cdot \cos \gamma$ Man erhält es, indem man den einen Vektor (a) mit der Projektion der zweiten auf ihn ($b \cdot \cos \gamma$) multipliziert.

Das vektorielle Produkt $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})$ ist $a \cdot b \cdot \sin \gamma$. Bildet man aus den beiden Vektoren das Parallelogramm, aus dem ihre Resultante ermittelt wird (S. 92), so ist das vektorielle Produkt dessen Flächeninhalt. Das skalare und vektorielle Produkt kann nach den obigen Ausführungen mit dem Rechenschieber schnell und sicher gefunden werden.

§ 108. Die Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks.
1. Grundaufgabe.

Gegeben sind die drei Seiten, gesucht die drei Winkel. Es sei z. B. a = 6,4 cm; b = 7,2 cm; c = 9,2 cm.

1. Lösung: Man bildet $s = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c)$, sowie $s - a$, $s - b$, $s - c$.

Probe: Es muß (s - a) + (s - b) + (s - c) = s sein. In unserem Falle ist s = 11,4; s - a = 5,0; s - b = 4,2; s - c = 2,2. Dann berechnet man den Inkreisradius $\rho = \sqrt{\frac{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}{s}}$. Ermittelt man den Radikanden auf O_1 und O_1, so steht das Ergebnis ρ = 2,015 auf U_1. Dann ist $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\rho}{s-a}$; $\text{tg}\,\frac{\beta}{2} = \frac{\rho}{s-b}$; $\text{tg}\,\frac{\gamma}{2} = \frac{\rho}{s-c}$.

Man stellt s - a = 5,0 (Teilung U_2) über ρ (Teilung U_1). Dann steht $\frac{\alpha}{2}$ auf der T-Teilung unter dem Endstrich von U_2 ($\frac{\alpha}{2}$ = 21,92). Ebenso findet man $\frac{\beta}{2}$ = 25,6°; $\frac{\gamma}{2}$ = 42,46!, also α = 43,84°; β = 51,2°; γ = 84,92°. Proben: 1) $\alpha + \beta + \gamma$ = 180°, 2) Sinussatz, 3) Cosinussatz. Die Fläche des Dreiecks ist F = ½ · a · b · sin γ = ρ · s = 23 qcm.

Aufgabe 243. Es sei a = 6 cm; b = 7,5 cm; c =: 12,5 cm. Man findet $\frac{\alpha}{2}$ = 9,86° und $\frac{\beta}{2}$ = 12,48°. Es ist tg $\frac{\gamma}{2}$ = 2,434 (nicht 0,2434!) Man stellt jetzt U_2 genau über U_1, sucht 2,434 auf der R-Teilung auf und findet darunter auf T (rote Striche!) $\frac{\gamma}{2}$ = 67,7°.

2. Lösung: Aus dem Cosinussatz folgt: $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}$; $\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c}$; $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}$. Es sei z. B. a = 42 mm, b = 48 mm, c = 53 mm. Man stellt auf O_1 die Zahl a = 42 fest ein und bildet der Reihe nach (vgl. S. 17, § 32) a · a; a · (2 b); a · (2 c). Mit b und c macht man es ebenso. Man erhält das folgende Schema, in dem die eingeklammerten Ergebnisse zur Kontrolle dienen:

a²	a · (2b)	a · (2c)	b²	b · (2 a)	b · (2 c)	c²	c · (2 a)	c · (2 b)
1764	4030	4450	2300	(4030)	5090	2810	(4450)	(5090)

Jetzt sind alle Zahlen bekannt, welche zur Bestimmung der Winkel nötig sind; man findet $\cos\alpha = \frac{3346}{5090}$ = 0,657, α = 48,9°; $\cos\beta = \frac{2274}{4450}$; β = 59,3°; $\cos\gamma = \frac{1254}{4030}$, γ = 71,8°. Proben: 1) $\alpha + \beta + \gamma$ = 180°, 2) Sinussatz.

3. Lösung: Man berechne einen Winkel, z. B. α, nach den Formeln $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\rho}{s-a}$ oder $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\cdot(s-c)}{b\cdot c}}$ oder $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s\cdot(s-a)}{b\cdot c}}$ oder $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}$. Dann kann man die beiden anderen Winkel leicht durch den Sinussatz ermitteln.

Probe: 1) $\alpha + \beta + \gamma$ = 180°, 2) Kontrolle durch die nicht benutzte Formeln. Man rechne die früheren Beispiele nach dieser Methode durch!

Aufgabe 244. Ein Seil, das über zwei feste Rollen läuft, ist an einen Ende mit a = 50 g, am anderen mit b = 70 g belastet und trägt ein Gewicht von c = 100 g (Fig. 45). Welchen Winkel bilden am Angriffspunkt von c die Seilteile miteinander und mit der Vertikalen?

Lösung: Die Komponenten a und b setzen sich zu einem nach oben gerichteten Vektor zusammen. Im Falle des Gleichgewichts ist er ebenso groß wie die nach unten ziehende Kraft c. Man findet, daß a den Winkel β = 40,54°, b den Winkel α = 27,66° mit der Resultante bildet. Die Seilteile schließen den Winkel $\alpha + \beta$ = 68,20° ein.

Man führe die Rechnung auf möglichst verschiedene Art durch!

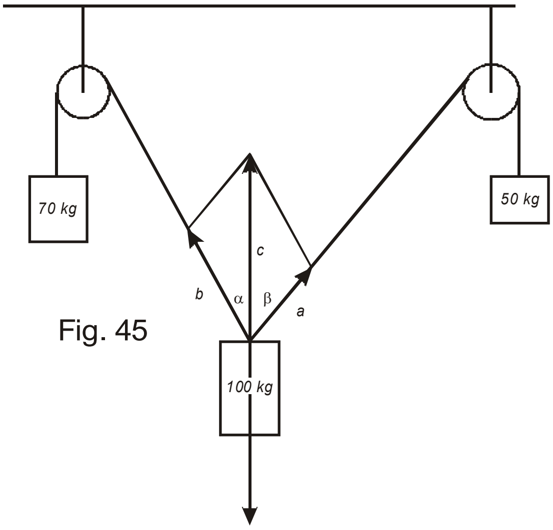


Fig. 45

2. Grundaufgabe.

Gegeben sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, z. B. a = 55,5 mm, b = 59 mm, $\gamma = 68°$.

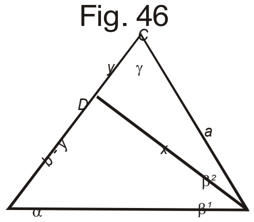
1. Lösung: Man findet nach dem Cosinussatze $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$, die dritte Seite c = 64,1 mm. Jetzt sind alle drei Seiten und ein Winkel bekannt, man kann den Sinussatz anwenden oder so verfahren, wie es in der ersten Grundaufgabe angegeben wurde: es ist $\alpha = 53{,}4°$; $\beta = 58{,}6°$.

P r o b e : 1) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. 2) Die nicht benutzte Methode.

2. Lösung: Aus der Gleichung: $\operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{b-a}{b+a} \cdot \operatorname{ctg}\gamma$ findet man $\operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{3{,}5}{114{,}5} \cdot 1{,}483$; $\frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{\beta-\alpha}{2} \cdot 1{,}483 \cdot \rho° = 2{,}6°$ (vgl. § 93 und 69). Es ist $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2} = 56°$. Durch Addition und Subtraktion erhält man α und β wie vorher. Um c zu ermitteln und zur Probe benutzt man den Sinussatz. Weitere Proben gestatten die früheren Formeln.

3. Lösung: Man fällt von B auf b (oder von A auf a) das Lot. Nach Fig. 46 kann $DB = x = a \cdot \sin\gamma$ und $DC = y = a \cdot \cos\gamma$ leicht berechnet werden; es ist x = 51,5 mm; y = 20,8 mm. In dem rechtwinkligen Dreieck ADB kennt man jetzt die Katheten x = 51,5 mm und b - y = 88,2 mm. Man kann nun nach der ersten Grundaufgabe für das rechtwinklige Dreieck feststellen, daß $\alpha = 53{,}4°$, $\beta_1 = 36{,}6°$, c = 64,1 mm ist. β ist $= \beta_1 + \beta_2 = \beta_1 + (90° - \gamma) = 36{,}6° + 22° = 58{,}6°$. Man kann aber auch so vorgehen daß man nur die Hypotenuse c ermittelt und dann den in der ersten Lösung vorgeschlagenen Weg verfolgt.

Fig. 46



Aufgabe 245. Es sei a = 53,3 mm; b = 30,3 mm; $\gamma = 42°$ gegeben.

Lösung: c = 36,86 mm; $\alpha = 104{,}62°$; $\beta = 33{,}18°$.

Aufgabe 246. Man stellt fest, daß bei der in Fig. 45 beschriebenen Anordnung zwar die an den Rollen hängenden Gewichte a = 50 g und b = 70 g sind, daß aber der Winkel zwischen den Seitenteilen 147° ist. Wie groß ist die Resultante c in diesem Fall und welchen Winkel schließt sie mit den beiden Teilen des Seiles ein?

Lösung: In jedem der beiden Teildreiecke ist a = 50; b = 70; $\gamma = 180° - 147° = 33°$. Dann ist c = 39,1 g; $\alpha = 44{,}1°$; $\beta = 102{,}9°$.

3. Grundaufgabe.

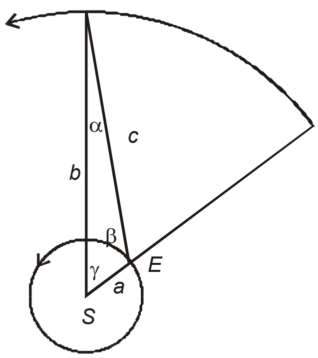
Gegeben sind zwei Seiten und der Winkel, welcher der größeren von ihnen gegenüberliegt, z. B. a = 7,42 cm; b = 6,18 cm; $\alpha = 60{,}25°$

Lösung: Es ist $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Man stellt also a (auf U_2) über α (S) und findet durch Läuferverschiebung, daß unter b (U_2) der Winkel β = 46,3° auf S steht. Es ist α + β = 106,55°, also γ = 180° - 106,55° = 73,45°. Darüber steht auf U_2 der Wert c = 8,19 cm. Da man jetzt alle Seiten und Winkel kennt, so kann man irgendeine der früheren Formeln zur Probe benutzen.

Bekanntlich gilt die Gleichung: sin (180° - α) = sin α. Man könnte also im Zweifel sein, ob der durch seinen Sinuswert gefundene Winkel β (= 46,3°) richtig ist oder ob β = 133,7° anzusetzen wäre. Da aber der größeren Seite (a) auch der größere Winkel (α) gegenüberliegt, so muß diese Möglichkeit ausgeschlossen werden. Auch die Zeichnung ergibt eine eindeutige Lösung.

Aufgabe 247. Die Erde bewegt sich um die Sonne in einem Kreise, dessen Radius a = 149,5 Millionen Kilometer ist, der Bahnhalbmesser des Jupiter beträgt b = 778 Millionen Kilometer. Zu einem bestimmten Zeitpunkt mißt man den Winkelabstand zwischen Sonne und Jupiter und findet ihn β = 118°. Wie weit ist der Jupiter dann von der Erde entfernt und unter welchem Sehwinkel würden a) von der Sonne, b) vom Jupiter aus gesehen, die beiden anderen Himmelskörper erscheinen?

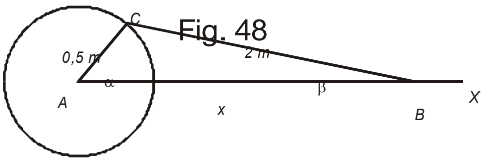
Fig. 47



Lösung: (Fig. 47) α = (SJE) = 9 77°; γ = (JSE) = 52,23°; c (= EJ) = 697 Millionen Kilometer. Man beachte bei der Rechnung, daß sin 118° = sin 62° ist.

Aufgabe 248. Eine Kurbel AC dreht sich um den festen Punkt A, sie ist r = 0,5 m lang. An sie setzt sich die Pleuelstange CB an, deren Länge l = 2 m ist. Der Punkt B ist gezwungen, auf einer festen Geraden AX zu laufen. Wie groß ist sein Abstand von A, wenn die Kurbel sich um = 10°, 20°,… 180° gedreht hat?

Fig. 48



Lösung: (Fig 48.) Es ist 1) $\frac{l}{\sin\alpha} = \frac{r}{\sin\beta}$; 2) γ = 180° - α - β; 3) $\frac{l}{\sin\alpha} = \frac{x}{\sin\gamma}$. Man erhält folgende Werte:

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
β	0°	2,488°	4,90°	7,18°	9,25°	11,04°	12,50°	13,60°	14,25°	14,50°
γ	180°	167,512°	155,10°	142,82°	130,75°	118,96°	107,50°	96,40°	85,75°	75,50°
x	2,5	2,49	2,463	2,418	2,358	2,284	2,20	2,12	2,02	1,936
α	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°	
β	14,25°	13,60°	12,50°	11,04°	9,25°	7,18°	4,90°	2,488°	0°	
γ	65,75°	56,40°	47,50°	38,96°	30,75°	22,82°	15,10°	7,512°	0°	
x	1,852	1,772	1,702	1,642	1,591	1,551	1,522	1,506	1,5	

Ist β klein, so folgt aus sin β = $\frac{r}{l}$ · sin α, daß β = sin α · $\frac{r}{l}$ · ρ° ist.

Bei größeren Werten muß man die Zunge um eine Einheit verschieben. Es ist zweckmäßig, nach der Ermittlung der für α = 10° geltenden Werte α = 170° zu bearbeiten, da β dann denselben Wert hat und die Einstellung der Zunge nicht geändert zu werden braucht. Ebenso verhält es sich mit α = 20° und 160° usf.

Den Vergleich mit der vierstelligen logarithmischen Rechnung mag ein Beispiel veranschaulichen. Es sei α = 50°, Dann ist $\lg \sin \alpha = 9{,}8843$; $\lg \frac{r}{l} = 9{,}3979$; $\lg(\frac{r}{l} \cdot \sin \alpha) = \lg \sin \beta = 9{,}2822$; $\beta = 11{,}04°$; $\gamma = 118{,}96°$; $\lg l = 0{,}3010$; $\lg \sin \gamma = 9{,}9420$; $\lg x = (\lg l + \lg \sin \gamma - \lg \sin \alpha) = 0{,}3587$; $x = 2{,}284$.

Trotz größerer Rechenarbeit wird kein Gewinn an Genauigkeit erzielt.

4. Grundaufgabe.

Gegeben sind zwei Seiten und der Winkel, der der kleineren von ihnen gegenüberliegt. Man kann durch passende Bezeichnung stets erreichen, daß a die kleinere Seite ist; gegeben ist also a, b, a.

Die Möglichkeit, daß α gleich oder gar größer als 90° ist, muß als unmöglich ausgeschlossen werden, weil dann a die größte Dreieckseite sein müßte, α ist also ein spitzer Winkel.

Nach dem Sinussatz ist $a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha$; $\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$.

Hier sind drei Fälle zu unterscheiden:

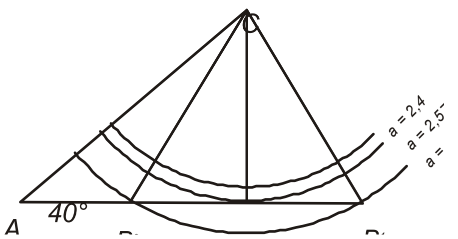
1. $b \cdot \sin \alpha$ ist größer als a. Dann ist die Aufgabe unlösbar, denn $\sin \beta$ muß ein echter Bruch sein.
2. $b \cdot \sin \alpha = a$. Dann ist das Dreieck rechtwinklig, die Hypothenuse ist b, eine Kathete a, ihr Gegenwinkel α.
3. $b \cdot \sin \alpha$ ist kleiner als a. Dann erhält man zwei Werte für β. β_0 und $180° - \beta_0$. Die Rechnung muß für die beiden Möglichkeiten gesondert durchgeführt werden.

Welcher dieser drei Fälle eintritt, läßt sich mit dem Rechenschieber sofort entscheiden, da der Ausdruck $b \cdot \sin \alpha$ mit Leichtigkeit bestimmt werden kann. Der weitere Gang der Rechnung entspricht genau der 3. Grundaufgabe.

Aufgabe 249. Es sei α = 40°, b = 4 cm, a der Reihe nach 2,4 cm, 2,57 cm, 3 cm.

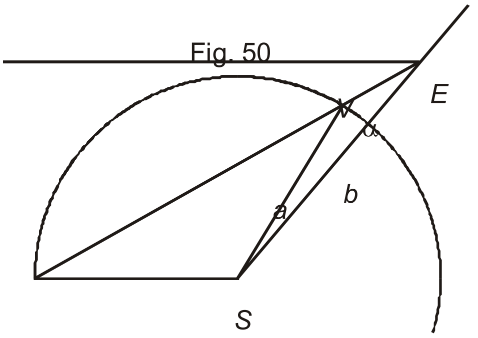
Lösung: Es ist $b \cdot \sin \alpha$ = 2,57 cm. Der erste Wert von a scheidet aus, da er kleiner ist. Im zweiten Fall liegt ein rechtwinkliges Dreieck vor; b = 4 cm, a = 2,57 cm, α = 40°, β = 90°, γ = 50°, c = 3,06 cm. Im dritten Fall liefert der Sinussatz entweder β_1 = 59° oder β_2 = 121°. Hieraus folgt γ_1 = 81°, c_1 = 4,62 cm; γ_2 = 19°, c_2 = 1,52 cm. Fig. 49.

Fig. 49



Aufgabe 250. Die Venus beschreibt um die Sonne einen Kreis mit dem Halbmesser a = 108 Millionen Kilometer. Der Winkelabstand zwischen Sonne und Venus sei a) α = 50°, b) α = 22°. Wie weit ist die Venus dann von der Erde entfernt und unter welchem Sehwinkel würden, von der Sonne und von der Venus aus gesehen, die beiden anderen Weltkörper erscheinen?

Fig. 50



Lösung: (Fig 50) b ist 149,5 Millionen km (vgl. Aufgabe 247) $b \cdot \sin \alpha$ ist im ersten Fall 114,5 Millionen km, also größer als a. Die Aufgabe ist unlösbar, es muß ein Fehler in der Winkelmessung vorliegen.

Im zweiten Fall ist b · sin α = 56 Millionen km. Dann sind zwei Lösungen möglich:

	β	γ	c
I)	31,2°	126,8°	231 Millionen km
II)	148,8°	9,2°	46,2 Millionen km.

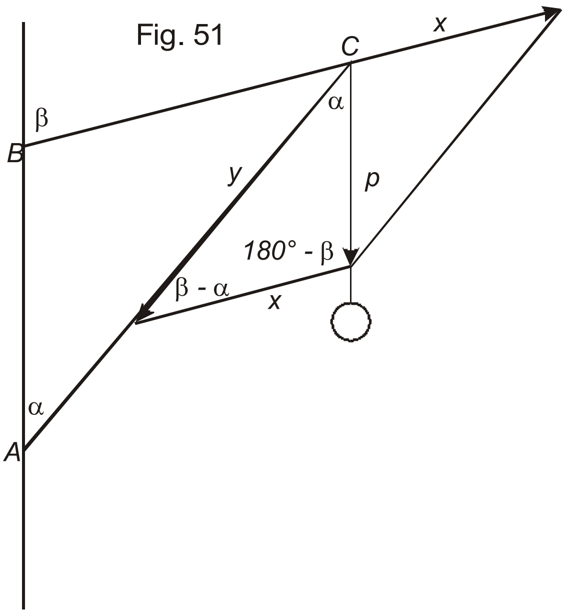
Aufgabe 251. Wie groß kann α in der vorigen Aufgabe höchstens sein?

Lösung: b · sin α = a; α = 46,25°; β = 90°; γ = 43,75°; c = 103,4 Millionen km.

5. Grundaufgabe.

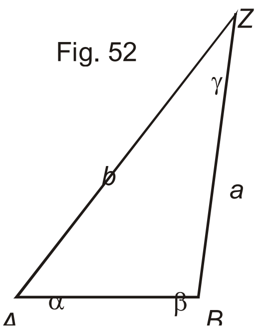
Gegeben ist eine Seite und zwei Winkel, z. B. a = 35 cm, α = 63°, β = 70°. Dann kann man den dritten Winkel sofort finden, da die Winkelsumme 180° sein muß. In unserem Fall ist γ = 180° - 63° - 70° = 47°. Die beim Sinussatz benutzte Einstellung: a (auf U_1) über α (auf S) liefert sofort, wenn den Läuferstrich über β und γ stellt b = 36,9 cm, c = 28,7 cm. Prüfungsmittel geben die früher angegebenen Formeln zur Genüge.

Aufgabe 252. Eine Bogenlampe vom Gewicht P = 18 kg hängt an der in Fig. 51 skizzierten Eisenkonstruktion. Wie verteilt sich ihr Gewicht auf die beiden Stäbe AC und BC, wenn α = 40° und β = 75° ist?



Lösung: Ein Dreieck des Kräfteparallelogramms liefert die Beziehung: $\frac{P}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{x}{\sin\alpha} = \frac{y}{\sin\beta}$. In unserem Fall ist x = 20,2 kg, y =: 30,3 kg. x ist eine Zug-, y eine Druckkraft.

Aufgabe 253. Zwei Beobachter A und B stehen in c = 22 m Abstand. Sie sollen die Entfernung (a und b) eines beweglichen Zieles Z ermitteln. Zu diesem Zweck messen sie in verschiedenen Zeitabschnitten, aber gleichzeitig, die Winkel α und β (Fig. 52).



Man erhält folgende Wertepaare:

α	87,6°	83,5°	79,5°	74,8°	71,0°	67,5°
β	84,0°	88,0°	92,7°	98,0°	102,8°	106,5°

Hieraus findet man:

γ	8,4°	8,5°	7,8°	7,2°	6,2°	6,0°

a	150,5	147,9	159,4	169,4	192,6	194,4
b	149,8	148,8	162,0	173,8	198,6°	201,8

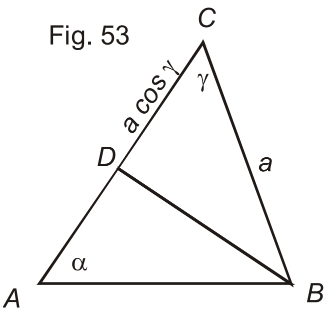
Benutzt man zur Lösung dieser Aufgabe nur die S-Skala, so werden die Resultate ungenau, da manche Winkel nahe an 90° liegen. Die Benutzung der cos-Skala (S. 77, Schluß) steigert die Präzision der Rechnung außerordentlich.

Man kontrolliere die Ergebnisse durch die Zeichnung!

§ 109. Differentialformeln für das schiefwinklige Dreieck.

Ein schiefwinkliges Dreieck sei berechnet, wir kennen also seine Seiten und Winkel; ändert man einige Stücke ein wenig, so weisen auch die anderen kleine Abweichungen auf. Diese werden ebenso wie beim rechtwinkligen Dreieck durch Differentialformeln gefunden.

Fig. 53



Dort gingen wir von der Formel $a^2 + b^2 - c^2 = 0$ aus; dieser entspricht beim schiefwinkligen Dreieck der Cosinussatz: $a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma - c^2 = 0$. Nach demselben Verfahren wie auf S. 90 finden wir hier

$$a \cdot \delta a + b \cdot \delta b - (b \cdot \cos\gamma) \cdot \delta a - (a \cdot \cos\gamma) \cdot \delta b + (a \cdot b \cdot \sin\gamma) \cdot \delta\gamma - c \cdot \delta c = 0;$$

$$\delta c = \frac{\delta a \cdot (a - b \cdot \cos\gamma)}{c} + \frac{\delta b \cdot (b - a \cdot \cos\gamma)}{c} + \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{c} \cdot \frac{\delta\gamma°}{\rho°}$$

In der ersten Formel ist der Zuwachs von γ, $\delta\gamma$ im Bogenmaß gegeben, in der zweiten ist $\delta\gamma°$ in Graden ausgedrückt. Aus Fig. 53 folgt, daß $b - a \cdot \cos\gamma = AC - CD = AD$ ist, mithin ist $\frac{b - a \cdot \cos\gamma}{c} = \frac{AD}{AB} = \cos\alpha$,

ebenso ist $\frac{a - b \cdot \cos\gamma}{c} = \cos\beta$, endlich kann man für $a \cdot b \cdot \sin\gamma$ den doppelten Flächeninhalt setzen. Man erhält

$$\text{I.} \quad \delta c = \delta a \cdot \cos\beta + \delta b \cdot \cos\alpha + \frac{2 \cdot F}{\rho°} \cdot \frac{\delta\gamma°}{c}$$

$$\delta a = \delta b \cdot \cos\gamma + \delta c \cdot \cos\beta + \frac{2 \cdot F}{\rho°} \cdot \frac{\delta\alpha°}{c}$$

$$\delta b = \delta c \cdot \cos\alpha + \delta a \cdot \cos\gamma + \frac{2 \cdot F}{\rho°} \cdot \frac{\delta\beta°}{c}$$

Den Sinussatz schreiben wir in der Form:

$a \cdot \sin\beta - b \cdot \sin\alpha = 0$. Hieraus folgt

$$\delta a \cdot \sin\beta - \delta b \cdot \sin\alpha + a \cdot \cos\beta \cdot \frac{\delta\beta°}{\rho°} - b \cdot \cos\alpha \cdot \frac{\delta\alpha°}{\rho°} = 0.$$

Dividiert man diese Gleichung durch $a \cdot \sin\beta$ ($= b \cdot \sin\alpha$), so erhält man:

$$\text{II.} \quad \frac{\delta a}{a} - \frac{\delta b}{b} + \operatorname{ctg}\beta \cdot \frac{\delta\beta°}{\rho°} - \operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{\delta\alpha°}{\rho°} = 0 \text{ und zwei entsprechende Formeln.}$$

Aufgabe 254. Mit Hilfe einer fünfstelligen Logarithmentafel hat man ermittelt, daß man in einem Dreieck, von dem die Seiten a = 88 mm, b = 77 mm und der Winkel γ = 62° gegeben sind, α = 65,331°; β = 52,669°; c = 85,502 mm ist.

Wie groß ist die dritte Seite, wenn a und b unverändert beibehalten werden und γ der Reihe nach 61°; 62,1°; 63° ist?

Lδsung: Hier ist δa = 0 und δb = 0, die Formel 1 vereinfacht sich zu $\delta c = \frac{2 \cdot F}{\rho°} \cdot \frac{\delta\gamma°}{c}$. Es ist $\frac{2 \cdot F}{\rho° \cdot c}$ =

$\frac{88 \cdot 77 \cdot 0,883}{57,3 \cdot 85,5}$ = 1,221 also δc = 1,121 · δγ°. Man hat also

γ	62°	61°	62,1°	63°
δγ	0	-1°	+0,1°	+1°
δc	0	-1,221	+0,122	+1,221
c	85,502	84,281	85,624	86,723
	(85,502)	(84,278)	(85,624)	(86,720)

Die eingeklammerten Zahlen sind auf direktem Wege mit einer fünfstelligen Tafel gefunden, die Abweichungen sind praktisch belanglos.

Aufgabe 255. Ein Dreieck hat die Seiten a = 70 cm, b = 80 cm; c = 100 cm. Man findet mit einer fünfstelligen Tafel, daß α = 44,049°; β = 52,617°; γ = 83,335°; F = ½ · a · b · sin γ = ρ · s = 2781,1 qcm ist. Wie groß sind die Winkel eines Dreiecks mit den Seiten a_1 = 70,2 cm; b_1 = 80,1 cm; c_1 = 99,95 cm?

Lösung: Es ist $\frac{2 \cdot F}{\rho°}$ = 97,1; δa = + 0,2; δb = +0,1; δc = -0,05; cos α = 0,719; cos β = 0,607; cos γ = 0,1161. Wir erhalten aus I die drei Gleichungen:

a) 0,2 = 0,01126- 0,03035 + 1,387 δα°; $\delta\alpha° = \frac{0,21874}{1,387}$ = 0,158°

b) 0,1 = -0,03595 + 0,02322 + 1,214 δβ°; $\delta\beta° = \frac{0,11273}{1,214}$ = 0,093°

c) -0,05 = 0,1214 + 0,0719 + 0,971 δγ °; $\delta\gamma° = -\frac{0,2433}{0,971}$ = -0,251°

Probe: Es muß δα + δβ + δγ = 0 sein.

Es wird α_1 = 44,049° + 0,158° = 44,207°; β_1 = 52,617° + 0,093 = 52.710°; γ_1 = 83,335° - 0,251° = 83,084°. Diese Werte stimmen mit denen überein, die man bei direkter fünfstelliger Rechnung erhält.

Die Differentialformeln sind dann besonders nützlich, wenn eine ganze Reihe von Dreiecken berechnet werden soll, die sich nur wenig von dem zuerst (genau) berechneten Dreieck unterscheiden; man bilde selbst weitere Beispiele!

Aufgabe 256. Man löse dieAufgabe 253 durch Differentialformeln!

Lösung: Gegeben ist a = 150,5 m; b = 149,8 m; c = 22 m; α = 87,6°; β = 84°; γ = 8,4°. Da c denselben Wert beibehält, ist δc = 0.

Wir haben also nach II: $\frac{\delta a}{a} = \text{ctg } \alpha \cdot \frac{\delta\alpha°}{\rho°} - \text{ctg } \gamma \cdot \frac{\delta\gamma°}{\rho°}$; $\frac{\delta b}{b} = \text{ctg } \beta \cdot \frac{\delta\beta°}{\rho°} - \text{ctg } \gamma \cdot \frac{\delta\gamma°}{\rho°}$. Es ist $\frac{\text{ctg } \alpha}{\rho°}$ = 0,000731 = m; $\frac{\text{ctg } \beta}{\rho°}$ = 0,00183 = n; $\frac{\text{ctg } \gamma}{\rho°}$ = 0,1182 = p; demnach $\frac{\delta a}{a}$ = m · δα° - p · δγ°; $\frac{\delta b}{b}$ = n · δβ° - p · δγ°. Die Werte für δα, δβ, δγ können aus der Tabelle auf S. 101 entnommen werden. Man führt die Rechnung nach folgendem Schema durch:

1)	δα°	-4,1	-8,1	-12,8	-16,6	-20,1
2)	δβ°	+4	+8,7	+14	+18,8	+22,5
3)	δγ°	+0,1	-0,6	-1,2	-2,2	-2,4
4)	m · δα°	-0,00300	-0,00592	-0,00936	-0,01213	-0,01470
5)	-p · δγ°	-0,01182	+0,0708	+0,1416	+0,2600	+0,2832
6)	n · δβ°	+ 0,00732	+ 0,0159	+0,0256	+0,0344	+0,0412
7)	$\frac{\delta a}{a}$	-0,0148	+0,0649	+0,1322	+0,2479	+0,2685

8)	$\frac{\delta b}{b}$	-0,0045	+0,0867	+0,1672	+0,2944	+0,3244
9)	δa	-2,23	+9,76	+19,9	+37,3	+40,4
10)	δb	-0,67	+13,0	+25,1	+44,2	+48,7
11)	a_1	148,3	160,3	170,4	187,8	190,9
12)	b_1	149,1	162,8	174,9	194,0	198,5

Bei Zeile 4 verwendet man den Rechenschieber als Multiplikationstabelle, indem man m fest einstellt, entsprechend geht man bei Zeile 5 und 6 vor. Zeile 7 erhält man aus 4 und 5, Zeile 8 aus 5 und 6. Zum Schluß stellt man a fest ein und multipliziert diese Größe mit den Werten der siebenten Zeile, wodurch man 9 erhält. Ebenso entsteht 10 aus 8.

Die Abweichung der Näherungswerte von den genauen darf nicht dem Rechenschieber zugeschrieben werden, sie ist durch den Umstand bedingt, daß bei ziemlich großen Abweichungen der Winkel (Zeile 1 und 2) die Näherungsformeln nicht mehr ausreichen. Immerhin beträgt der größte Fehler noch nicht 2 %.

Aufgabe 257. Es sollen nach dem eben behandelten Verfahren Dreiecke untersucht werden die dem Ausgangsdreieck in Aufgabe 253 näher kommen etwa

α	87,2°	86,8°	86,4°	86,0°
β	84,4°	84,7°	85,1°	85,6°

Lösung: Die Größen m, n und p sind dieselben wie in Aufgabe 256. Durch fünfstellige Rechnung wurde für das Grunddreieck a = 150,47 m, b = 149,77 m gefunden. Man hat jetzt

1)	$\delta\alpha°$	- 0,4°	-0,8°	-1,2°	-1,6°
2)	$\delta\beta°$	+0,4°	+0,7°	+1,1°	+1,6°
3)	$\delta\gamma°$	0°	+0,1°	+0,1°	0°
4)	$m \cdot \delta\alpha°$	-0,000292	-0,000585	-0,000879	-0,001170
5)	$-p \cdot \delta\gamma°$	0	-0,01182	-0,01182	0
6)	$n \cdot \delta\beta°$	+0,000732	+0,00128	+0,00201	+0,00293
7)	$\frac{\delta a}{a}$	-0,000292	-0,012405	-0,012699	-0,001170
8)	$\frac{\delta b}{b}$	+0,000732	-0,01054	-0,00981	+0,00293
9)	δa	- 0,0439	-1,87	-1,91	-0,176
10)	δb	+0,1096	-1,58	-1,47	+0,440
11)	a_1	150,43	148,60	148,56	150,29
		(150,42)	(148,61)	(148,54)	(150,23)
12)	b_1	149,88	148,19	148,30	150321
		(149,88)	(148,20)	(148,30)	(150,16)

Die eingeklammerten Zahlen bedeuten die durch fünfstellige unmittelbare Rechnung gefundenen Werte. Die Genauigkeit des Rechenschiebers für die Ermittlung der Zusatzgrößen δa und δb ist hier also völlig ausreichend.

Innerhalb seiner Genauigkeit ist daher bei der Lösung trigonometrischer Aufgaben der Rechenschieber der Logarithmentafel durchaus gleichwertig; er löst sie aber viel schneller und bequemer.

Man rechne einmal die hier behandelten Probleme logarithmisch durch!

Auch bei Dreiecksberechnungen, die eine höhere Genauigkeit erfordern, leistet er die besten Dienste. Ist einmal ein Grunddreieck "genau" berechnet, so kann man mit ihm, wenn die gegebenen Stücke wenig verändert werden, die an den gesuchten Größen anzubringenden Korrekturen leicht und sicher finden. Seine ganze Leistungsfähigkeit zeigt sich dann, wenn eine Reihe gleichartiger Aufgaben zu lösen ist, weil dabei die Stellung der Zunge ungeändert bleiben kann, während nur der Läufer verschoben wird, so daß man die Ergebnisse einfach, schnell und sicher ablesen kann.

Zusammenstellung von Bezeichnungen.

π	$= 3,142$	ρ' oder '	$= \frac{10800}{\pi} = 3488$
$\frac{\pi}{4}$	$= 0,785$	ρ'' oder "	$= \frac{648000}{\pi} = 206265$
c	$= \sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1,128$	$\rho_{,,}$ oder G	$= \frac{2000000}{\pi} = 636620$
$\rho°$ oder °	$= \frac{180}{\pi} = 57,3$	e	$= 2,718$
		$\sqrt{\ } = \sqrt{2g}$	$= 4,43$

Schlußwort.

Unsere Absicht war, zu zeigen, was der Rechenschieber dem Praktiker und dem Theoretiker sein kann. Versprechungen haben wir im Vorwort gegeben. Wenn unsere Ausführungen den Leser überzeugt haben, daß sie alle von unsern Instrumenten erfüllt werden, so ist unser Ziel erreicht.

Register