

Elasticität und Festigkeit.

Die für die

Technik wichtigsten Sätze und deren erfahrungsmässige Grundlage.

Von

C. Bach,

Professor des Maschinen-Ingenieurwesens am K. Polytechnikum Stuttgart.

In zwei Lieferungen.

Zweite (Schluss-) Lieferung.

Mit in den Text gedruckten Abbildungen und 4 Tafeln in Lichtdruck.



Springer-Verlag
Berlin Heidelberg GmbH
1890.

Dieser Lieferung sind Titel, Vorwort und Inhaltsverzeichnis für das vollständige Werk beigegeben.

Verlag von Julius Springer in Berlin N.,

Monbijouplatz 3.

Die Hebezeuge.

Theorie und Kritik ausgeführter Konstruktionen.

Ein Handbuch für Ingenieure und Architekten, sowie zum Selbstunterricht für Studierende.

Von

Ad. Ernst,

Professor am K. Polytechnikum in Stuttgart.

Mit 308 in den Text gedruckten Holzschnitten und einem Atlas von 46 lithographirten Tafeln.

In zwei Leinwandbänden. Preis M. 36, .

Ausrückbare Kupplungen

für Wellen und Räderwerke.

Theoretische Grundlage und vergleichende Beurteilung ausgeführter Konstruktionen.

Von

Ad. Ernst,

Professor des Maschinen-Ingenieurwesens am K. Polytechnikum Stuttgart.

Mit 165 in den Text gedruckten Figuren.

In Leinwand gebunden. Preis M. 6,—.

Die Pumpen.

Berechnung und Ausführung

der für die

Förderung von Flüssigkeiten gebräuchlichen Maschinen.

Von

Konrad Hartmann,

Docent für Maschinenbau an der Kgl. Technischen Hochschule zu Berlin.

Mit 585 Textfiguren und 6 Tafeln.

In Leinwand gebunden. Preis M. 16,—.

Hilfsbuch für Dampfmaschinen-Techniker.

Mit einer theoretischen Beilage.

Unter Mitwirkung von Adalbert Kás, k. k. Bergakademie-Adjunct in Pribram, herausgegeben

von

Josef Hrabák,

Professor an der k. k. Bergakademie in Pribram.

Mit eingedruckten Diagrammen in Holzschnitt. — In Leinwand gebunden. Preis M. 16,—.

Die Kraftmaschinen des Kleingewerbes.

Von

J. O. Knoke,

Ingenieur.

— Mit 294 in den Text gedruckten Figuren. —

In Leinwand gebunden. Preis M. 10,—.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Verlag von Julius Springer in Berlin N.,
Monbijouplatz 3.

Versuche über Ventilbelastung und Ventilwiderstand.

Von
C. Bach,
Professor am Königl. Polytechnikum Stuttgart.
Mit 5 lithographirten Tafeln.
Preis M. 3,—.

Die praktische Anwendung der Schieber- und Coullissensteuerungen

von
William S. Auchincloss, C. E.,
mem. amr. soc. civ. eng.
Autorisirte deutsche Uebersetzung und Bearbeitung
von
A. Müller,
Oberingenieur der Borsigschen Maschinenbau-Anstalt in Moabit.
Mit 18 lithographirten Tafeln und zahlreichen in den Text gedruckten Holzschnitten.
In Leinwand gebunden. Preis M. 8,—.

Die Steuerungen der Dampfmaschinen.

Von
Emil Blaha,
Professor an der k. k. Staatsgewerbeschule zu Reichenberg i. B.
Dritte ungearbeitete und vermehrte Auflage.
Mit 274 Figuren auf 34 lithographirten Tafeln.
In Leinwand gebunden. Preis M. 10,—.

Die Entwicklung der Schiffsmaschine

in den letzten Jahrzehnten.
Von
Carl Busley,
Kaiserlicher Marine-Ingenieur.
Mit 142 Textabbildungen und 5 lithographirten Tafeln.
Zweite, verbesserte und sehr vermehrte Auflage.
Preis gebunden M. 12,—.

Die Dampfkessel

mit Rücksicht auf ihre industrielle Verwendung.

Von
J. Denfer,
Civil-Ingenieur und Dozent an der Ecole centrale des arts et manufactures in Paris.
Beschreibung der wichtigsten Kesselsysteme, Angaben über Fabrikschornsteine und Beschreibung vorzüglicher Constructionen derselben. Untersuchungen und praktische Angaben über die Verbrennung im Allgemeinen, sowie über die Rauchverbrennung im Besonderen und über die Verdampfung, Erläuterung verschiedener Arten von Kesselfeuerungen und Notizen über Dampf- und Speiseleitungen.

Autorisirte deutsche Ausgabe
von
Theodor d'Ester,
Ingenieur.

Mit 81 colorirten Tafeln mit Zeichnungen und eingeschriebenen Maassen.
Ein Band in Gross-Folio. Preis gebunden M. 36,—.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Elasticität und Festigkeit.

Die für die

Technik wichtigsten Sätze und deren erfahrungsmässige Grundlage.

Von

C. Bach,

Professor des Maschinen-Ingenieurwesens am K. Polytechnikum Stuttgart.

Mit in den Text gedruckten Abbildungen und 14 Tafeln in Lichtdruck.



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1890

ISBN 978-3-662-32216-1 ISBN 978-3-662-33043-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-33043-2

Der Verfasser behält sich das Recht der Uebersetzung in
fremde Sprachen vor.

Vorwort.

Die vorliegende Arbeit, welche in zwei Lieferungen erschienen ist, von denen die erste, bis § 40 reichend, Ende Februar und die zweite Ende September 1889 abgeschlossen wurde, war — in beschränkterem Umfange und mit Hinweglassung dessen, was sonst anderwärts zusammengestellt zu finden — ursprünglich nur für die Zuhörer meines Vortrags über Elasticitätslehre bestimmt, mit dem Ziele, ihnen die erfahrungsmässigen Grundlagen der technischen Elasticitäts- und Festigkeitslehre zu bieten, ohne hierzu die für die Vorlesung verfügbare Zeit (3 Stunden im Sommersemester), welche mit Rücksicht auf die Behandlung der schwierigen Aufgaben dieses Gebiets an und für sich knapp bemessen erscheint, in Anspruch nehmen zu müssen. Wiederholten Anregungen schliesslich Folge leistend, übergebe ich dieselbe mit den hierdurch bedingten Erweiterungen der Oeffentlichkeit.

Sie geht davon aus, dass es in erster Linie auf die Erkenntniss des thatsächlichen Verhaltens der Materialien ankommt.

In Gemässheit dieses Standpunktes war zunächst der unanschauliche Begriff des Elasticitätsmoduls fallen zu lassen. Selbst wenn man von der verbreiteten und angesichts des wirklichen Verhaltens der Stoffe höchst bedenklichen Begriffsbestimmung absieht, nach der unter Elasticitätsmodul diejenige Kraft zu verstehen ist, welche ein Prisma vom Querschnitte 1 um seine eigene Länge ausdehnen würde, falls dies ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze möglich wäre, so erweist sich der Umstand, dass der als Mass der Elasticität für die Betrachtungen und Rechnungen geschaffene Elasticitätsmodul umgekehrt proportional der Elasti-

cität ist, als ausserordentlich störend. Durch Einführung des Dehnungscoefficienten (§ 2), dessen Grösse in geradem Verhältnisse zur Formänderung steht, lässt sich dieser Uebelstand auf einfache Weise beseitigen. Demgemäss sind sämtliche Rechnungen und Erörterungen mittelst des Dehnungscoefficienten durchgeführt. Die Gewinnung von Massen für den Dehnungsrest und für die Federung, d. i. die eigentliche Elasticität (§ 4) zum Unterschied von dem Masse für die Gesammtdehnung, ist damit ohne Weiteres gesichert (Schluss von § 4).

An die Stelle des der Anschauung unzugänglichen Schubelasticitätsmodul tritt der Schubcoefficient (§ 29), dessen Bedeutung unmittelbar aus dem Vorgange der Schiebung folgt.

Sodann war der mit der Längsdehnung (Zusammendrückung) verknüpften Querkontraktion (Querdehnung) (§ 1, bzw. § 11) und deren Einfluss (§ 7, § 9, Ziff. 1, § 14, § 20, Ziff. 2, S. 82 u. s. w.) mehr Beachtung zu schenken, als dies sonst zu geschehen pflegt; zumal in weiten Kreisen z. Z. noch die Auffassung besteht, dass die Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen innerhalb gewisser Spannungsgrenzen allgemein gültig sei, gleichgiltig, ob ausser der Zug- oder Druckkraft, welche in Richtung der Stabachse wirkt, auch noch Kräfte senkrecht zu letzterer thätig sind oder nicht.

Ferner mussten aus der meist ganz unbeachtet gelassenen Thatsache, dass die eben erwähnte Proportionalität überhaupt nicht für alle der Technik wichtigen Materialien vorhanden ist, die nöthigen Folgerungen gezogen werden. Dies trifft beispielsweise zu für das dem Maschinenbau unentbehrliche und daselbst so vielfach verwendete Gusseisen, bei dem die Dehnungen rascher wachsen, als die Spannungen; für das als Kraftübertragungsmittel so wichtige Leder, bei welchem das Umgekehrte stattfindet u. s. f. (insbesondere § 2, § 20, Ziff. 4, S. 85 u. f., § 22, Ziff. 2, § 26, S. 113, Fussbemerkung, § 35 und § 36, § 40, § 41, § 56, S. 324 und 325, § 58, S. 344 Fussbemerkung, u. s. w.).

Was Einzelheiten anlangt, so glaubte ich Werth legen zu sollen auf die Klarstellung von Begriffen, wie Festigkeit (§ 3), Proportionalitäts- und Elasticitätsgrenze (§ 2, § 4), Knickbe-

lastung (§ 23), Zerknickungscoefficient (§ 26), zulässige Anstrengung (§ 48, Ziff. 1), Einspannung (§ 53) u. s. w., sowie auf die Beseitigung von eingebürgerten Irrthümern. Wie oft wird beispielsweise die Berechnung auf Schub vorgeschrieben, wo Biegung massgebend ist (§ 40, § 52); wie allgemein ist bei Ermittlung des Dehnungscoefficienten (Elasticitätsmoduls) aus Biegungsversuchen der Einfluss der Schubkraft vernachlässigt worden (§ 22, Ziff. 1, § 52, Ziff. 2b); wie verbreitet ist die Auffassung der unbedingten Giltigkeit der Gleichung der einfachen Zug- und Druckfestigkeit, nach welcher es nur auf die Grösse des Querschnittes ankommt (§ 9, § 13, § 14); wie selten wird erkannt, dass die Druckfestigkeit bei Materialien, wie weichem Stahl u. s. w., die Fliess- oder Quetschgrenze ist (§ 11, Schluss; § 27, Ziff. 1, S. 122) u. s. f.

Die bedeutende Abhängigkeit der Biegezugfestigkeit des Gusseisens von der Querschnittsform war soweit festzustellen, dass sie rechnungsmässig berücksichtigt werden kann (§ 20, § 22, Ziff. 2).

Das immer dringender gewordene Bedürfniss, die Anstrengung auf Drehung beanspruchter Körper von nichtkreisförmigem Querschnitt mit mehr Sicherheit feststellen zu können, als dies bisher möglich war, verlangte eine eingehende Behandlung der hierher gehörigen Aufgaben (§ 32 bis § 36, § 43, § 47, § 49, § 50, § 52, Fussbemerkung S. 281 und 282). Dabei ergab sich die Nothwendigkeit, Formänderungen in's Auge zu fassen, die bisher bei Beurtheilung der Materialanstrengung ganz unbeachtet gelassen worden waren (§ 34, Ziff. 3).

Dem Umstande, dass die zulässige Schubspannung zur zulässigen Normalspannung ziemlich häufig nicht in dem Verhältnisse steht, wie dies die Elasticitätslehre ermittelte (Gl. 101, 102), habe ich — wie bereits in meinen Maschinenelementen 1880 gethan (S. 11, S. 205 u. f. daselbst) — durch Einführung des Anstrengungsverhältnisses Rechnung getragen (α_0 in § 48 Ziff. 2, auch β_0 in § 45 Ziff. 1).

Die Ausserachtlassung der schon ursprünglich vorhandenen Krümmung der Mittellinie bei auf Biegung beanspruchten Körpern erschien nicht mehr in dem Masse zulässig, wie dies bisher bei Be-

rechnung von Kettenhaken und dergleichen ziemlich allgemein üblich war. Wenn auch die Endergebnisse der mit Rücksicht hierauf in § 54 angestellten Eörterungen nichts Neues bieten, so dürfte doch der hierbei eingeschlagene Weg zur Gewinnung eines besseren Einblicks in die Anstrengungsverhältnisse, sowie dazu beitragen, dass Mancher, welcher bisher die ursprüngliche Krümmung nicht berücksichtigt, sie mindestens schätzungsweise bei Wahl der zulässigen Anstrengung in Betracht zieht.

In § 60 war die Anstrengung der elliptischen Platte zu bestimmen; ausserdem waren bisher nicht beachtete Einflüsse festzustellen. Weitergehende Ermittlungen mussten namentlich bei den grossen Schwierigkeiten, welche hierauf bezüglichen Versuchen begegnen, zunächst unterbleiben.

Gern hätte ich Versuche der in § 56 behandelten Art in grösserem Umfange, sowie auch solche zu § 57 durchgeführt. Da mir aber weder für meine Lehrthätigkeit, noch für meine Versuchsarbeiten ein Assistent zur Verfügung steht, und der eigenen Arbeitskraft durch die Natur eine Grenze gezogen ist, auch die übrigen Mittel sehr knapp bemessen sind, so musste wenigstens vorerst Beschränkung geübt werden. Dieselbe Bemerkung hat auch Geltung für andere Abschnitte, insbesondere für § 61.

Im Ganzen habe ich mich namentlich im Hinblick auf die Bedürfnisse der mitten in der Ausführung stehenden Ingenieure bestrebt, die einzelnen Entwicklungen so viel als thunlich für sich allein verständlich durchzuführen und den hierzu erforderlichen mathematischen Apparat unter Heranziehung von Versuchen nach Möglichkeit zu beschränken. Dass sich auf diesem Wege Aufgaben, welche sonst trotz ihrer grossen Wichtigkeit gar nicht oder nur ganz ausnahmsweise behandelt zu werden pflegen, recht klar und dazu fruchtbringender, als es bisher geschehen ist, erörtern lassen, davon dürften beispielsweise die §§ 33, 34 und 43, S. 220 u. f., sowie § 52, Ziff. 2 Zeugnis ablegen. Die Thatsache, dass die vor vier Jahrzehnten von de Saint Venant gegebene Lösung der Torsionsaufgabe — ungeachtet ihrer wissenschaftlichen Strenge — nur ganz vereinzelt Eingang in die technische Literatur gefunden hat, dürfte vorzugsweise in

dem Mangel an verhältnissmässiger Einfachheit der zur Lösung führenden Rechnungen begründet sein.

Um den Umfang des Buches innerhalb einer gewissen Grenze zu halten, wurde die zweite Lieferung etwas weniger umfassend gestaltet, als ursprünglich geplant war, wodurch übrigens die Anschauung über die wirklichen Vorgänge, über das thatsächliche Verhalten des Materials eine Beeinträchtigung nicht erfährt. Es erschien dies um so mehr zulässig, als seit Abschluss der ersten Lieferung das Tetmajer'sche Werk: „Die angewandte Elasticitäts- und Festigkeitslehre“ mit einer Fülle an Beobachtungsmaterial zur Ausgabe gelangt ist (siehe auch Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure 1889, S. 452 bis 455 und S. 473 bis 479) und überdies die werthvollen Arbeiten von Mehrtens vorliegen. Beispiele und Erfahrungszahlen glaubte ich ohnehin als naturgemäss in meine Maschinenelemente gehörig, dahin verweisen zu sollen.

Möge auch diese, nicht mehr als ein Schritt in neuer Richtung seinwollende Arbeit, indem sie die Bedeutung der Erkenntniss des thatsächlichen Verhaltens der Materialien klarlegt und indem aus ihr erhellt,

dass es nicht genügt, von dem Satze der Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen allein ausgehend, das ganze Gebäude der Elasticität und Festigkeit auf mathematischer Grundlage aufzubauen,

dass es vielmehr für den Konstrukteur — namentlich, wenn er in voller Erkenntniss der wirklichen Verhältnisse die Abmessungen festsetzen und sich nicht in dem Geleise hergebrachter Formen halten will — nothwendig erscheint, immer und immer wieder die Voraussetzungen der einzelnen Gleichungen, welche er benützt, im Spiegel der Erfahrungen, soweit solche vorliegen, sich zu vergegenwärtigen, und die auf dem Wege der Ueberlegung, der mathematischen Ableitung gewonnenen Beziehungen hinsichtlich des Grades ihrer Genauigkeit zu beurtheilen, soweit dies bei dem jeweiligen Stande unserer Erkenntnisse überhaupt möglich ist,

und dass da, wo die letzteren und die Ueberlegung —
Aufsuchung und Ausbildung neuer Methoden eingeschlossen
— nicht ausreichen, in erster Linie durch den Versuch
Fragestellung an die Natur zu erfolgen hat,
zur Förderung der Technik und damit der Industrie beitragen.

Stuttgart, den 30. September 1889.

C. Bach.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Die einfachen Fälle der Beanspruchung gerader stabförmiger Körper durch
Normalspannungen (Dehnungen).

Einleitung.

	Seite
§ 1. Formänderung. Spannung	1
§ 2. Dehnung. Dehnungscoefficient. Proportionalitätsgrenze. Fließgrenze	2
§ 3. Bruchbelastung. Festigkeit	5
§ 4. Gesamtdehnung. Dehnungsrest. Federung. Elasticität	7
§ 5. Einfluss der Zeit. Elastische Nachwirkung	12

I. Zug.

§ 6. Gleichungen der Zugelasticität und Zugfestigkeit.	
1. Stab mit gleichem Querschnitt	13
2. Stab mit veränderlichem Querschnitt	14
§ 7. Mass der Zusammenziehung. Kräfte senkrecht zur Stabachse. Ge- hinderte Zusammenziehung	16
§ 8. Zugversuche	18
§ 9. Einfluss der Form des Stabes.	
1. Einfluss der Stabform, welche der Zusammenziehung hinderlich ist	24
2. Einfluss der Länge und des Durchmessers	27
3. Einfluss der Querschnittsform	29
§ 10. Versuchsergebnisse über den Einfluss der Zeit auf Festigkeit, Deh- nung und Querschnittsverminderung	30

II. Druck.

§ 11. Formänderung. Druckfestigkeit	33
§ 12. Gleichungen der Druckelasticität und der Druckfestigkeit	37
§ 13. Druckversuche. Einfluss der Gestalt des Körpers auf die Druck- festigkeit.	
1. Die Belastung trifft die ganze Stirnfläche des Probekörpers	39
2. Die Belastung trifft nur einen Theil der Querschnittsfläche des Probekörpers	45
§ 14. Hinderung der Querdehnung	49
§ 15. Theorien der Druckfestigkeit	51

III. Biegung.

§ 16.	Gleichungen der Biegungsanstrengung und der elastischen Linie unter der Voraussetzung, dass die Ebene des Kräftepaars den Querschnitt in einer der beiden Hauptachsen schneidet	53
§ 17.	Trägheitsmomente.	
	1. Rechteck	59
	2. Dreieck	59
	3. Kreis	60
	4. Ellipse	60
	5. Zusammengesetzte Querschnitte.	
	a) Rechnerische Bestimmung	61
	b) Zeichnerische Bestimmung	62
	6. Zusammenstellung	64
§ 18.	Fälle bestimmter Belastungen.	
	1. Der Stab ist einerseits eingespannt, am anderen Ende frei	66
	2. Der Stab liegt beiderseits auf Stützen	67
	3. Der Stab ist beiderseits eingespannt	72
§ 19.	Körper von gleichem Widerstande.	
	1. Der Stab von rechteckigem Querschnitt mit gleichbleibender Breite ist einerseits eingespannt, am anderen freien Ende belastet	75
	2. Der Stab wie unter 1, jedoch mit veränderlicher Höhe	76
	3. Der Stab liegt beiderseits auf Stützen und ist zwischen beiden belastet	77
§ 20.	Die bei der Entwicklung der Gleichungen in § 16 gemachten Voraussetzungen und ihre Zulässigkeit.	
	1. Die äusseren Kräfte geben nur ein Kräftepaar	82
	2. Die Fasern üben einen gegenseitigen Einfluss auf einander nicht aus	82
	3. Die Querschnitte bleiben eben	85
	4. Der Dehnungscoefficient ist unveränderlich	85
	5. Zusammenfassung	87
§ 21.	Biegungsanstrengung und Durchbiegung unter der Voraussetzung, dass die Ebene des Kräftepaars keine der beiden Hauptachsen in sich enthält.	
	1. Hauptachsen. Hauptträgheitsmomente	88
	2. Biegungsanstrengung	90
	3. Durchbiegung	92
§ 22.	Biegungsversuche.	
	1. Biegungsversuche im Allgemeinen	94
	2. Abhängigkeit der Biegungsfestigkeit des Gusseisens von der Querschnittsform	96
	3. Einfluss der Gusshaut	99

	Seite
IV. Knickung.	
§ 23. Wesen der Knickung	101
§ 24. Knickbelastung (Euler'sche Gleichung)	104
§ 25. Zulässige Belastung gegenüber Knickung	108
§ 26. Navier'sche (Schwarz'sche) Zerknickungsformel	111
§ 27. Knickungsversuche	119

Zweiter Abschnitt.

Die einfachen Fälle der Beanspruchung gerader stabförmiger Körper durch Schubspannungen (Schiebungen).

Einleitung.

§ 28. Schiebung	125
§ 29. Schubspannung. Schubcoefficient	128
§ 30. Paarweises Auftreten der Schubspannungen	130
§ 31. Schiebungen und Dehnungen. Schubcoefficient und Dehnungscoefficient.	
1. Mit der Schiebung verknüpfte Dehnung und deren grösster Werth	133
2. Beziehung zwischen Dehnungscoefficient und Schubcoefficient	135

V. Drehung.

§ 32. Stab von kreisförmigem Querschnitt	139
§ 33. Stab von elliptischem Querschnitt.	
1. Formänderung	145
2. Schubspannungen	146
§ 34. Stab von rechteckigem Querschnitt.	
1. Formänderung	152
2. Schubspannungen	154
3. Gehinderte Ausbildung der Querschnittswölbung	160
§ 35. Drehungsversuche.	
1. Abhängigkeit der Drehungsfestigkeit des Gusseisens von der Querschnittsform	162
2. Drehungswinkel	182
§ 36. Zusammenfassung	185
Kreis, Ellipse, Sechseck, Rechteck, Dreieck, H -Querschnitt, Kreuzquerschnitt, L -Querschnitt, Winkelquerschnitt.	

VI. Schub.

§ 37. Schubanstrengung unter der Voraussetzung gleichmässiger Vertheilung der Schubspannungen über den Querschnitt	189
§ 38. Schubspannungen im rechteckigen Stabe	190
§ 39. Schubspannungen im prismatischen Stabe von beliebigem, jedoch hinsichtlich der Kraftebene symmetrischem Querschnitt	194
§ 40. Schubversuche	203

Dritter Abschnitt.

Formänderungsarbeit

gerader stabförmiger Körper bei Beanspruchung auf Zug, Druck, Biegung, Drehung oder Schub.

	Seite
§ 41. Arbeit der Längenänderung	211
§ 42. Arbeit der Biegung	215
§ 43. Arbeit der Drehung	218
§ 44. Arbeit der Schiebung	224

Vierter Abschnitt.

Zusammengesetzte Beanspruchung gerader stabförmiger Körper.

VII. Beanspruchung durch Normalspannungen (Dehnungen). Zug, Druck und Biegung.

§ 45. Der einerseits befestigte prismatische Stab wird durch eine zur Stabachse parallele, jedoch excentrisch zu ihr gelegene Kraft belastet.	
1. Die Kraft wirkt ziehend	227
2. Die Kraft wirkt drückend	229
a) Der Stab ist schlank und der Hebelarm klein	230
b) Der Stab ist schlank und der Hebelarm im Verhältniss zu den Abmessungen des Querschnitts gross	233
c) Die Querschnittsabmessungen des Körpers sind im Vergleich zur Länge desselben und zur Grösse des Hebelarmes so bedeutend, dass eine Biegung von Erheblichkeit nicht eintritt	234
§ 46. Einfluss des Widerstandes beim Gleiten der Oberfläche des beiderseits gelagerten und in der Mitte belasteten Stabes gegenüber den Stützen infolge der Durchbiegung	235

VIII. Beanspruchung durch Schubspannungen (Schiebungen). Schub und Drehung.

§ 47. Schub und Dehnung	240
-----------------------------------	-----

IX. Beanspruchung durch Normalspannungen (Dehnungen) und durch Schubspannungen (Schiebungen).

§ 48. Grösste Anstrengung bei gleichzeitig vorhandener Dehnung (Normalspannung) und Schiebung (Schubspannung).	
1. Begriff der zulässigen Anstrengung des Materials	242
2. Ermittlung der grössten Anstrengung	245
§ 49. Zug (Druck) und Drehung	254

	Seite
§ 50. Biegung und Drehung.	
1. Kreisquerschnitt	256
2. Elliptischer Querschnitt.	
a) Die Ebene des biegenden Kräftepaares läuft parallel zur kleinen Achse der Ellipse	257
b) Die Ebene des biegenden Kräftepaares läuft parallel zur grossen Achse der Ellipse	258
3. Rechteckiger Querschnitt.	
a) Die Ebene des biegenden Kräftepaares läuft parallel zur kurzen Seite des Rechtecks	259
b) Die Ebene des biegenden Kräftepaares läuft parallel zur langen Seite des Rechtecks	259
c) Die Ebene des biegenden Kräftepaares hat keine der beiden unter a) und b) bezeichneten Lagen	260
§ 51. Zug (Druck) und Schub	261
§ 52. Biegung und Schub.	
1. Anstrengung des Materials.	
a) Kreisquerschnitt	263
b) Rechteckiger Querschnitt	271
c) I-Querschnitt	273
2. Formänderung.	
a) Im Allgemeinen	274
b) Durchbiegung mit Rücksicht auf die Schubkraft	278
§ 53. Frage der Einspannung eines Stabes	289

Fünfter Abschnitt.

Stabförmige Körper mit gekrümmter Mittellinie.

1. Die Mittellinie ist eine einfach gekrümmte Kurve, ihre Ebene Ort der einen Hauptachse sämtlicher Stabquerschnitte, sowie der Richtungslinien der äusseren Kräfte.

§ 54. Dehnung. Spannung. Krümmungshalbmesser.	
1. Anstrengung des Materials	299
2. Werthe von $z = -\frac{1}{f} \int \frac{\eta}{r + \eta} df$ für verschiedene Quer-	
schnitte.	
a) Rechteck	305
b) Kreis, Ellipse	306
c) Trapez	308
d) Dreieck	309
e) Zusammengesetzte Querschnitte	309
3. Krümmungshalbmesser	310

	Seite
§ 55. Fälle bestimmter Belastungen.	
1. Offener Haken trägt eine Last	311
2. Hohlzylinder, welcher als Walze dient, ist über seine Länge gleichmässig belastet	315
§ 56. Versuchsergebnisse	321
II. Die Mittellinie ist eine doppelt gekrümmte Kurve.	
§ 57. Die gewundenen Drehungsfedern.	
1. Die cylindrischen Schraubenfedern	328
2. Die Kegelfedern	330

Sechster Abschnitt.

Gefässe, plattenförmige Körper.

§ 58. Hohlzylinder.	
1. Innerer und äusserer Druck	333
2. Innerer Ueberdruck	340
3. Aeusserer Ueberdruck	346
§ 59. Hohlkugel	348
§ 60. Ebene Platten.	
1. Kreisförmige Scheibe	351
2. Elliptische Platte	353
3. Quadratische Platte	361
4. Rechteckige Platte	364
5. Schlussbemerkung. Zusammenfassung	366
§ 61. Versuche mit ebenen Platten	368

Bedeutung der in den Gleichungen auftretenden Buchstabengrössen . . .	373
Berichtigungen	377

Dritter Abschnitt.

Formänderungsarbeit

gerader stabförmiger Körper bei Beanspruchung auf
Zug, Druck, Biegung, Drehung oder Schub.

§ 41. Arbeit der Längenänderung.

Ein prismatischer Stab von der Länge l und dem Querschnitt f sei an dem einen Ende festgehalten, am anderen freien Ende durch eine von Null an stetig wachsende Kraft P belastet. Er erfährt hierdurch eine Verlängerung um λ . Das Gesetz, nach welchem sich λ mit P ändert, wird, wie bereits in § 2 erörtert worden, durch die Linie der Dehnungen dargestellt.

Fig. 3 am genannten Ort zeigt z. B. diese Kurve $OQABC$ für Schmiedeisen mit OX als Achse der Belastungen P und OY als Achse der Verlängerungen λ . Von O bis A verläuft die Linie als Gerade, so dass der Quotient $\overline{A_2A}:f$ die Spannung an der Proportionalitätsgrenze ergibt.

Fig. 6 (§ 4) giebt in OAC die Linie der Dehnungen für einen Kupferstab. Hier besteht ebenfalls Proportionalität zwischen Dehnungen und Belastungen bis zum Punkt A .

Fig. 130 liefert in OQD die Dehnungslinie eines Stabes aus

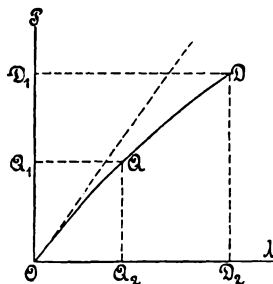


Fig. 130.

Gusseisen. Hier besteht Proportionalität zwischen Belastungen und Verlängerungen überhaupt nicht; die letzteren wachsen vielmehr rascher als die ersteren. Demgemäss kehrt die Kurve der wagrechten Achse, d. i. der Achse der Dehnungen, die hohle Seite zu.

Andere Stoffe (Treibriemenleder, Hanfseile u. s. w.) können sich umgekehrt verhalten, indem bei ihnen die Verlängerungen langsamer wachsen als die Belastungen. Die Linie der Dehnungen kehrt dann der wagrechten Coordinatenachse die erhabene Seite zu¹⁾.

Im Allgemeinen ist hiernach die Linie der Dehnungen oder Verlängerungen eine Kurve.

Die mechanische Arbeit, welche aufzuwenden ist, den Stab z. B. um $\lambda = \overline{OQ_2}$ (Fig. 3, Fig. 130) zu verlängern, wozu die von Null an gewachsene Belastung $P = \overline{OQ_1} = \overline{O_2Q}$ gehört, wird dargestellt durch die Fläche OQ_1Q_2 und allgemein als Formänderungsarbeit (Deformationsarbeit), im besonderen vorliegenden Falle als Arbeit der Längenänderung bezeichnet. Ihre Grösse A beträgt

$$A = \int P d\lambda,$$

wobei die Integration von 0 bis zum Endwerth von λ zu erfolgen hat.

Unter der Voraussetzung, dass Proportionalität zwischen Belastungen und Verlängerungen besteht, dass also die Dehnungslinie eine Gerade ist, wie z. B. in Fig. 3 bis zum Punkte A , wird

$$A = \frac{1}{2} P \lambda = \frac{1}{2} f \sigma \lambda,$$

und da nach § 2, sofern Kräfte senkrecht zur Stabachse nicht wirken,

$$\lambda = \alpha \sigma l$$

$$A = \frac{1}{2} \alpha \sigma^2 f l = \frac{1}{2} \alpha \sigma^2 V, \dots \dots 141)$$

d. h. die Arbeit der Längenänderung ist proportional dem Volumen $V = f l$ des Stabes und dem Quadrate der Spannung.

¹⁾ S. des Verfassers Versuche über die Elasticität von Treibriemen und Treibseilen, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1887 S. 221 u. f., S. 241 u. f., sowie S. 891.

Wird σ durch die verhältnissmässige Dehnung ε ersetzt nach Massgabe der Gleichung

$$\varepsilon = \alpha \sigma,$$

so folgt

$$A = \frac{1}{2\alpha} \varepsilon^2 f l = \frac{1}{2\alpha} \varepsilon^2 V. \dots 141a)$$

Handelt es sich um einen Körper von veränderlichem Querschnitt, wie Fig. 7, § 6, so ergibt sich unter der Voraussetzung, dass der Dehnungscoefficient α constant ist und Kräfte senkrecht zur Stabachse nicht thätig sind, die Arbeit A mit Annäherung¹⁾ durch folgende Erwägung.

Damit das im Abstände x von der freien Stirnfläche des Stabes, Fig. 7, gelegene Körperelement $f dx$ in der Richtung von x um εdx gedehnt wird, wobei die Spannung

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

eintritt, bedarf es der Aufwendung einer Arbeit

$$dA = \frac{1}{2} f \sigma \cdot \varepsilon dx = \frac{1}{2\alpha} f \varepsilon^2 dx = \frac{\alpha}{2} f \sigma^2 dx.$$

Folglich die Arbeit, welche die Formänderung des ganzen Stabes fordert,

$$A = \frac{1}{2\alpha} \int_0^l \varepsilon^2 f dx = \frac{\alpha}{2} \int_0^l \sigma^2 f dx. \dots 142)$$

Für den Fall, dass der Stab ein Prisma, wird hieraus

$$A = \frac{1}{2\alpha} \varepsilon^2 f l = \frac{\alpha}{2} \sigma^2 f l,$$

wie oben bereits ermittelt worden ist.

Bei den vorstehenden Erörterungen wurde vorausgesetzt, dass

¹⁾ Mit Annäherung namentlich deshalb, weil die Spannungen in sämtlichen Punkten eines Querschnitts nicht die gleiche Richtung haben können. Die Spannung im Mittelpunkte des Querschnitts fällt allerdings in die Stabachse, steht also senkrecht zu letzterem, dagegen werden beispielsweise die Spannungen in den auf der Umfangslinie des Querschnitts liegenden Elementen die Richtung der Mantellinien des Stabes besitzen, also geneigt gegen die Stabachse sein müssen.

die Belastung stetig von Null an wächst, so dass in jedem Augenblick Gleichgewicht vorhanden ist zwischen der äusseren belastenden Kraft und den hierdurch wachgerufenen inneren Kräften. Wird nun der Stab plötzlich der Einwirkung der ganzen Kraft P überlassen, ohne dass jedoch ein Stoss hierbei stattfindet, d. h. ohne dass der zweite, den Stab belastende Körper diesen mit einer gewissen Geschwindigkeit trifft, so erhebt sich die Frage nach der Grösse der Anstrengung σ , welche das Material in dem Augenblick der grössten Verlängerung λ des Stabes erleidet. Bei der im Folgenden gegebenen Beantwortung, wobei ein prismatischer Stab zu Grunde gelegt wurde, soll von dem Einflusse der Zeit auf die Ausbildung der Formänderung abgesehen werden.

Unter der Voraussetzung unveränderlicher Grösse des Dehnungscoefficienten α beträgt die Arbeit, welche die Ueberwindung der inneren, durch die Dehnung wachgerufenen Kräfte bei der Verlängerung λ fordert,

$$\frac{1}{2} \lambda f \sigma.$$

Dieselbe muss gleich sein derjenigen mechanischen Arbeit, welche die äussere Kraft P verrichtet, indem sie in ihrer Richtung um λ fortschreitet, d. i. $P\lambda$. Also

$$P \lambda = \frac{1}{2} \lambda f \sigma,$$

woraus

$$\sigma = 2 \frac{P}{f},$$

d. h. die den Stab mit ihrer ganzen Grösse plötzlich, jedoch ohne Stoss belastende Kraft P veranlasst eine doppelt so grosse Anstrengung des Materials, als wenn P von Null an stetig gewachsen wäre.

Nachdem der Stab sich um λ gedehnt hat, in welchem Augenblick $\sigma f = 2P$ ist, werden die inneren Kräfte, da sie um P grösser sind, als die äussere Kraft P , eine Wiederverkürzung einleiten, welche für den Fall vollkommener Elasticität und abgesehen von Widerständen, die Stablänge auf l zurückbringt; hieran schliesst sich neuerlich eine Verlängerung u. s. f.: der Stab wird Schwingungen vollführen, welche, wegen der in Wirklichkeit vorhandenen Widerstände fort und fort abnehmend, schliesslich Null werden.

§ 42. Arbeit der Biegung.

Der Körper sei in der Weise gestützt und belastet, dass der Fall der einfachen Biegung vorliegt (III, § 16). Unter Vernachlässigung der Schubkräfte, sowie der örtlichen Zusammendrückung, welche der Körper da erfährt, wo die äusseren Kräfte auf die Oberfläche wirken, und unter der Voraussetzung, dass der Dehnungscoefficient α constant ist, ergibt sich die Bieigungsarbeit durch folgende Betrachtung.

Um das im Abstände η von der Nullachse gelegene, streifenförmige Körperelement vom Querschnitt df und der Länge dx (in Richtung der Stabachse), Fig. 35 (§ 16), so zu dehnen, dass dessen Länge die verhältnissmässige Dehnung ε erfährt, wobei die Normalspannung

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

eintritt, ist eine Arbeit

$$dA = \frac{\sigma df}{2} \varepsilon dx = \frac{\alpha}{2} \sigma^2 df dx$$

erforderlich.

Unter der Annahme, dass die Ebene des den Stab biegenden Kräftepaars vom Momente M_b die eine der beiden Hauptachsen des Querschnittes, dessen Trägheitsmoment in Bezug auf die andere Hauptachse mit Θ bezeichnet sei, in sich enthält, gilt nach Gl. 42

$$\sigma = \frac{M_b}{\Theta} \eta.$$

Infolge dessen

$$dA = \frac{\alpha}{2} \frac{M_b^2}{\Theta^2} \eta^2 df dx,$$

und hiermit die mechanische Arbeit, welche die Biegung des ganzen Körpers beansprucht,

$$A = \frac{\alpha}{2} \int \frac{M_b^2}{\Theta^2} dx \int \eta^2 df = \frac{\alpha}{2} \int \frac{M_b^2}{\Theta} dx, \quad . \quad . \quad 143)$$

wobei die Integration sich auf die ganze Länge des Stabes zu erstrecken hat.

Für den Fall Fig. 32 — der prismatische Stab ist an dem einen Ende befestigt, am anderen freien Ende durch die Kraft P belastet — findet sich, sofern man von B nach A hin schreitend, $(l-x)$ mit ξ bezeichnet und dementsprechend $M_x = P \xi$ einführt, sowie dx durch $d\xi$ ersetzt,

$$A = \frac{\alpha}{2} \int_0^l \frac{P^2 \xi^2}{\Theta} d\xi = \frac{\alpha}{6} \frac{P^2}{\Theta} l^3.$$

Diese Gleichung gestattet eine sehr rasche Feststellung der Durchbiegung y' des freien Stabendes durch die Erwägung, dass die mechanische Arbeit, welche die stetig von Null bis auf P gewachsene Belastung beim Sinken um y' verrichtet, d. i.

$$\frac{1}{2} P y',$$

gleich A sein muss.

Demnach

$$\frac{1}{2} P y' = \frac{\alpha}{6} \frac{P^2}{\Theta} l^3,$$

$$y' = \frac{\alpha}{3} \frac{P}{\Theta} l^3,$$

welches Ergebniss in Uebereinstimmung mit Gl. 54 steht, sofern man in letzterer die hier nicht vorhandene Belastung Q gleich Null setzt.

Wird die Anstrengung an der Befestigungsstelle im Abstände $\eta = e_1$ mit k_b bezeichnet, so folgt

$$P l = k_b \frac{\Theta}{e_1}$$

und damit

$$A = \frac{\alpha}{6} k_b^2 \frac{\Theta}{e_1^2} l.$$

Wenn

$$\Theta = \iota f e_1^2$$

gesetzt wird, was z. B. ergibt für den rechteckigen Querschnitt

$$\Theta = \frac{1}{12} b h^3 = \iota b h \left(\frac{h}{2}\right)^2 \quad \iota = \frac{1}{3},$$

für den kreisförmigen Querschnitt

$$\Theta = \frac{\pi}{64} d^4 = \iota \frac{\pi}{4} d^2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad \iota = \frac{1}{4},$$

so findet sich unter Beachtung, dass $f l$ gleich dem Stabvolumen V

$$A = \frac{\alpha}{6} \iota k_b^2 f l = \frac{\alpha}{6} \iota k_b^2 V, \dots 144)$$

d. h. die Biegungsarbeit ist proportional dem Volumen des Stabes und dem Quadrate der Materialanstrengung.

Handelt es sich um einen Körper von gleichem Widerstande gegen Biegung (§ 19), so ist

$$k_b = \frac{M_b}{\Theta} e$$

für die einzelnen Querschnitte constant, wobei unter e der Abstand der hinsichtlich der grössten Anstrengung massgebenden Faser verstanden werden soll. Durch Einführung des hieraus folgenden Werthes von M_b in Gl. 143 wird

$$A = \frac{\alpha}{2} \int \left(\frac{\Theta k_b}{e}\right)^2 \frac{dx}{\Theta} = \frac{\alpha}{2} k_b^2 \int \frac{\Theta}{e^2} dx,$$

und mit Rücksicht darauf, dass $\Theta = \iota f e^2$,

$$A = \frac{\alpha}{2} \iota k_b^2 \int_0^l f dx = \frac{\alpha}{2} \iota k_b^2 V \dots 145)$$

Hiernach ist die Biegungsarbeit eines Körpers von gleichem Widerstand bei bestimmter Querschnittsform

1. unabhängig von der Art der Unterstüztung (Befestigung) und der Belastung,
2. proportional dem Volumen des Körpers und dem Quadrate der Materialanstrengung,
3. verhältnissmässig 3 Mal grösser als der Werth Gl. 144, welcher sich für den prismatischen Stab Fig. 32 ergibt.

Für den Stab Fig. 49 liefert Gl. 145 wegen

$$\iota = \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{\alpha}{6} k_b^2 V.$$

§ 43. Arbeit der Drehung.

Der Körper ist in der Weise beansprucht, dass der Fall der einfachen Drehung vorliegt (V, § 32).

Vorausgesetzt sei, dass es sich um einen prismatischen Stab handle, dass die örtlichen Formänderungen an den Stellen, wo die äusseren Kräfte auf den Körper einwirken, vernachlässigt werden dürfen, dass sich ein auf gehinderte Ausbildung der Querschnittswölbung gerichteter Einfluss (vergl. § 34, unter Ziff. 3) nicht geltend mache und dass der Schubcoefficient β (§ 29) unveränderlich ist.

Um das im beliebigen Punkte P des Querschnittes (Fig. 87, Fig. 91 oder Fig. 96) gelegene Körperelement von der Grundfläche $dydz = df$ und der Länge l so zu verdrehen, dass es die verhältnissmässige Schiebung γ erfährt, wobei die Schubspannung

$$\tau = \frac{\gamma}{\beta}$$

eintritt, ist eine Arbeit

$$dA = \frac{\tau df}{2} \gamma l = \frac{\beta}{2} l \tau^2 df$$

aufzuwenden; demnach zur Verdrehung des ganzen Stabes

$$A = \frac{\beta}{2} l \int \tau^2 df, \dots \dots \dots 146)$$

wobei die Integration sich über den ganzen Querschnitt zu erstrecken hat.

Für den kreisförmigen Querschnitt, Fig. 87, folgt mit k_d als Drehungsanstrengung im Abstände r

$$\tau = k_d \frac{\rho}{r},$$

$$A = \frac{\beta}{2} l \frac{k_d^2}{r^2} \int \rho^2 df = \frac{\beta}{2} l \frac{k_d^2}{r^2} \frac{\pi}{2} r^4 = \frac{\beta}{4} k_d^2 \pi r^2 l$$

und da $\pi r^2 l$ gleich dem Stabvolumen V ,

$$A = \frac{\beta}{4} k_d^2 V, \quad 147)$$

worin k_d bei gegebenem Drehungsmoment M_d nach Beziehung 105 bestimmt ist durch die Gleichung

$$M_d = \frac{\pi}{16} k_d d^3.$$

Für den Hohlzylinder, Fig. 124, findet sich

$$A = \frac{\beta}{4} k_d^2 \frac{d^2 + d_o^2}{d^2} V, \quad 148)$$

worin

$$V = \frac{\pi}{4} (d^2 - d_o^2) l,$$

$$k_d = \frac{16}{\pi} M_d \frac{d}{d^4 - d_o^4}.$$

Vergleicht man die mechanischen Arbeiten A_z , A_b und A_d , welche ein Kreiszylinder vom Volumen V aus durchaus gleichartigem Material bei Beanspruchung auf Zug, bezw. Biegung (Fig. 32) und bezw. Drehung fordert, so erhält man zunächst

nach Gl. 141 mit $\sigma = k_z \quad A_z = \frac{1}{2} \alpha k_z^2 V,$

„ „ 144 mit $\iota = \frac{1}{4} \quad A_b = \frac{1}{24} \alpha k_b^2 V,$

„ „ 147 $A_d = \frac{1}{4} \beta k_d^2 V.$

Nach Gl. 99, bzw. 101 ist

$$\beta = 2 \frac{m+1}{m} \alpha, \quad k_s = \frac{m}{m+1} k_z.$$

Wird nun

$$m = \frac{10}{3} \quad k_s = k_d \quad k_b = k_z$$

gesetzt, womit

$$\beta = 2,6 \alpha \quad k_d = \frac{10}{13} k_z,$$

so folgt

$$\begin{aligned} A_z : A_b : A_d &= \frac{1}{2} \alpha k_z^2 : \frac{1}{24} \alpha k_z^2 : \frac{1}{4} 2,6 \alpha \left(\frac{10}{13} k_z \right)^2 \\ &= 1 : \frac{1}{12} : \frac{10}{13} \\ &= 1 : 0,083 : 0,769. \end{aligned}$$

Hieraus erhellt, dass bei der Biegung die geringste Formänderungsarbeit aufzuwenden ist, und dass infolge dessen der gebogene Cylinder auch nur eine verhältnissmässig geringe Formänderungsarbeit in sich aufnimmt.

Für den elliptischen Querschnitt, Fig. 91, mit den Halbachsen a und b ergibt Gl. 111

$$\tau = \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{a^3 b^3} \sqrt{a^4 y^2 + b^4 z^2}.$$

Folglich nach Gl. 146

$$A = 2 \frac{\beta}{\pi^2} \frac{M_d^2}{a^6 b^6} l \int (a^4 y^2 + b^4 z^2) df,$$

woraus wegen

$$\int y^2 df = \frac{\pi}{4} a b^3, \quad \int z^2 df = \frac{\pi}{4} a^3 b,$$

$$A = \frac{\beta}{2 \pi} \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} M_d^2 l, \quad \dots \quad 149)$$

und unter Berücksichtigung der Gl. 114 mit k_d als Drehungsanstrengung

$$A = \frac{\beta}{2} \frac{\pi}{4} k_a^2 \frac{b}{a} (a^2 + b^2) l = \frac{\beta}{8} \frac{a^2 + b^2}{a^2} k_a^2 V, \quad (150)$$

sofern

$$V = \pi a b l$$

das Volumen des Stabes ist.

Die Gl. 149 ermöglicht die Feststellung des Winkels, um welchen sich jede der beiden Hauptachsen (das Hauptachsenkreuz) des einen Endquerschnitts des elliptischen Stabes gegenüber der ihr entsprechenden Achse (dem Hauptachsenkreuz) des anderen Endquerschnittes verdreht, in überaus leichter Weise. Dieser Winkel, dividirt durch die Entfernung l der beiden Querschnitte, giebt den verhältnissmässigen Drehungswinkel \mathcal{J} . (Vergl. § 33, Ziff. 1, d und e). Seine Grösse sei deshalb mit $\mathcal{J} l$ bezeichnet.

Das drehende Kräftepaar (vergl. auch Fig. 84), dessen Moment von Null an stetig bis zu M_a wächst, verrichtet bei der Drehung des einen Querschnittes gegen den anderen, d. h. des Achsenkreuzes des einen Querschnittes gegenüber demjenigen des anderen, um $\mathcal{J} l$ eine mechanische Arbeit

$$\frac{1}{2} M_a \cdot \mathcal{J} l.$$

Dieselbe muss gleich sein der durch Gl. 149 bestimmten Arbeit, welche die Ueberwindung der inneren Kräfte fordert, d. h.

$$\frac{1}{2} M_a \mathcal{J} l = \frac{\beta}{2 \pi} \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} M_a^2 l,$$

$$\mathcal{J} = \frac{1}{\pi} \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} M_a \beta, \quad \dots \dots \dots (151)$$

wie in § 36 unter No. 3 angegeben ist.

Für den rechteckigen Querschnitt, Fig. 96, mit der Breite b und der Höhe h findet sich unter Beachtung der Gl. 119 die Spannung im beliebigen Punkte P zu

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2} = \sqrt{n^2 \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]^2 y^2 + n^2 \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right]^2 z^2};$$

infolge dessen

$$\int \tau^2 df = m^2 \int y^2 df + n^2 \int z^2 df - 8 \left(\frac{m^2}{h^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \int y^2 z^2 df \\ + \frac{16m^2}{h^4} \int y^2 z^4 df + \frac{16n^2}{b^2} \int y^4 z^2 df.$$

Wegen

$$\int y^2 df = \frac{1}{12} b^3 h, \quad \int z^2 df = \frac{1}{12} b h^3,$$

$$\int y^2 z^2 df = \frac{1}{144} b^3 h^3,$$

$$\int y^2 z^4 df = \frac{1}{960} b^3 h^5, \quad \int y^4 z^2 df = \frac{1}{960} b^5 h^3,$$

wird

$$\int \tau^2 df = \frac{1}{10} m^2 b^3 h + \frac{1}{10} n^2 b h^3 - \frac{1}{18} \left(\frac{m^2}{h^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) b^3 h^3.$$

Nach § 34 ist

$$m = \frac{2}{b} \tau'_a \quad n = \frac{2b}{h^2} \tau'_a.$$

Hiermit folgt, sofern noch die Spannung τ'_a im Punkte A des Querschnittumfanges, Fig. 96, durch k_d ersetzt wird,

$$\int \tau^2 df = \frac{8}{45} k_d^2 b \frac{b^2 + h^2}{h};$$

infolge dessen nach Gl. 146

$$A = \frac{4}{45} \beta k_d^2 \frac{b}{h} (b^2 + h^2) l = \frac{4}{45} \beta \frac{b^2 + h^2}{h^2} k_d^2 V, \quad 152)$$

sofern

$$V = b h l$$

das Volumen des Stabes bezeichnet.

Wird nach Massgabe der Gl. 123

$$k_d = \frac{9}{2} \frac{M_d}{b^2 h}$$

gesetzt, so findet sich

$$A = \frac{9}{5} \beta \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} M_d^2 l. \quad \quad 153)$$

Diese Beziehung gestattet in ganz gleicher Weise, wie oben für den elliptischen Stab erörtert, die Ermittlung des verhältnissmässigen Drehungswinkels \mathfrak{A} für Prismen mit rechteckigem Querschnitt.

Die Arbeit, welche das drehende Kräftepaar bei der Verdrehung der um l von einander entfernten Querschnitte verrichtet, muss gleich A sein, d. h.

$$\frac{1}{2} M_d \mathfrak{A} l = \frac{9}{5} \beta \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} M_d^2 l$$

$$\mathfrak{A} = 3,6 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} M_d \beta. \quad \quad 154)$$

Dieses Ergebniss unterscheidet sich von den in § 36 unter No. 6 aufgenommenen de Saint Venant'schen Werthen durch den Zahlencoefficienten. Es schliesst sich den Ergebnissen der Versuche, welche Bauschinger zu dem Zwecke anstellte, die de Saint Venant'sche Gleichung zu prüfen, noch besser an. Wie in § 35 unter Ziff. 2 berichtet, sollten nach den de Saint Venant'schen Coefficienten sich verhalten

$$\mathfrak{A}_a : \mathfrak{A}_b : \mathfrak{A}_c : \mathfrak{A}_d : \mathfrak{A}_e = 1 : 1,25 : 1,13 : 1,40 : 9,1.$$

Bauschinger's Messungen ergaben

$$\mathfrak{A}_a : \mathfrak{A}_b : \mathfrak{A}_c : \mathfrak{A}_d : \mathfrak{A}_e = 1 : 1,24 : 1,20 : 1,47 : 9,65.$$

Die Einführung des hier ermittelten Zahlencoefficienten 3,6 der Gl. 154 für die rechteckigen Stäbe (c , d und e) führt zu

$$\mathfrak{A}_a : \mathfrak{A}_b : \mathfrak{A}_c : \mathfrak{A}_d : \mathfrak{A}_e = 1 : 1,24 : 1,14 : 1,44 : 9,76.$$

Dass der Zahlenwerth 3,6 der Gl. 154 an sich der richtigere sei, darf hieraus jedoch nicht geschlossen werden, da die Versuche mit Gusseisen angestellt wurden, dessen Dehnungscoefficient veränderlich ist (vergl. das S. 184 im ersten Absatz Gesagte).

§ 44. Arbeit der Schiebung.

Der Fall der Inanspruchnahme auf Schub allein wird dann als vorhanden betrachtet, wenn sich die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äusseren Kräfte für den in Betracht gezogenen Querschnitt ersetzen lassen durch eine Kraft S (Schubkraft), welche in die Ebene des letzteren fällt und die Stabachse senkrecht schneidet. Wie im zweiten Abschnitt unter VI. erörtert, kann — streng genommen — diese Schubanstrengung niemals allein vorkommen; die Schubkraft S ist vielmehr immer von einem biegenden Moment begleitet.

Wird trotzdem nur diese in Betracht gezogen, welche nach Massgabe der Gl. 135 und der Fig. 120 für den beliebig zwischen PP gelegenen Punkt P' die Schubspannung

$$\tau' = \frac{S}{2y \cos \varphi'} \frac{M_z}{\Theta}$$

liefert, so ergibt sich unter Voraussetzung der Unveränderlichkeit des Schubcoefficienten β Folgendes.

Die Herbeiführung der Schiebung γ des im Punkte P' , Fig. 120, welcher um η von der senkrechten z -Achse abstehe, zu denkenden Körperelementes von dem Querschnitt

$$df = d\eta dz$$

und der Länge dx , wobei eine Schubspannung

$$\tau' = \frac{\gamma}{\beta}$$

wachgerufen wird, fordert eine mechanische Arbeit

$$dA = \frac{\tau' df}{2} \gamma dx = \frac{\beta}{2} \tau'^2 df dx.$$

Demnach die gesammte Formänderungsarbeit der Schubkräfte

$$A = \frac{\beta}{2} \int dx \int \tau'^2 df = \frac{\beta}{2} \int dx \int \tau'^2 d\eta dz. . . \quad 155)$$

Hieraus findet sich beispielsweise für den rechteckigen Querschnitt von der Breite b und der Höhe h , Fig. 117, da hier (vergl. § 39 unter a)

$$\varphi = \varphi' = 0, \quad \tau = \frac{3}{2} \frac{S}{b h} \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right], \quad df = b dz.$$

$$A = \frac{\beta}{2} \int dx \cdot \frac{9}{4} \frac{S^2}{b h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]^2 dz = \frac{3}{5} \beta \int \frac{S^2}{b h} dx. \quad 156)$$

Vierter Abschnitt.

Zusammengesetzte Beanspruchung gerader stabförmiger Körper.

VII. Beanspruchung durch Normalspannungen (Dehnungen).

Zug, Druck und Biegung.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äusseren Kräfte ergeben für den in Betracht gezogenen Querschnitt eine in die Stabachse fallende Kraft P und ein Kräftepaar vom Momente M_b , dessen Ebene den Querschnitt senkrecht schneidet.

Für einen beliebigen Punkt des Querschnittes liefert die Kraft P eine Dehnung und Normalspannung. Gleiche Wirkung hat das biegende Moment M_b . Die Gesamtdehnung, wie auch die Gesamtspannung ergibt sich als die algebraische Summe aus den beiden Einzeldehnungen, bezw. Einzelspannungen.

Unter der Voraussetzung, dass die Ebene des Kräftepaares die eine der beiden Hauptachsen des Querschnittes in sich enthält, findet sich die durch M_b im Abstände η von der anderen Hauptachse hervorgerufene Normalspannung nach Gl. 42 zu

$$\frac{M_b}{\Theta} \eta.$$

Trifft diese Voraussetzung nicht zu, so ist die Normalspannung nach Massgabe des in § 21 unter 2 Erörterten festzustellen.

Die Normalspannung, welche von P herrührt, beträgt unter der Voraussetzung gleichmässiger Vertheilung über den Querschnitt in allen Punkten des letzteren

$$\frac{P}{f}.$$

Folglich die Gesamtspannung σ im Abstände η von der bezeichneten Hauptachse

$$\sigma = \frac{M_b}{\Theta} \eta \pm \frac{P}{f}. \quad 157)$$

Das obere Vorzeichen gilt, wenn P ziehend, das untere, wenn P drückend wirkt.

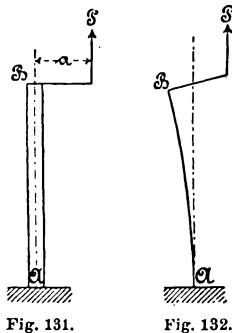
M_b , P , Θ und f sind als absolute Grössen zu betrachten, während η als positiv oder negativ einzuführen ist, je nachdem die betreffende Faserschicht auf der erhabenen oder der hohlen Seite der elastischen Linie liegt.

§ 45. Der einerseits befestigte prismatische Stab wird durch eine zur Stabachse parallele, jedoch excentrisch zu ihr gelegene Kraft P belastet.

Fig. 131 und 133.

Die durch P und die Stabachse bestimmte Ebene schneidet sämtliche Körperquerschnitte in einer der beiden Hauptachsen.

1. Die Kraft P wirkt ziehend, Fig. 131.



Die hierbei eintretende Biegung des Stabes, Fig. 132, ist eine derartige, dass das biegende Moment, in soweit es von der Grösse der Durchbiegung beeinflusst wird, von B nach A hin abnimmt, also seinen grössten Werth Pa im Querschnitt bei B besitzt. Für diesen gilt daher nach Gl. 157, sofern der Werth von η für die am stärksten gespannte Faser gleich e ist,

$$\sigma_{max} = \frac{Pa}{\Theta} e + \frac{P}{f} = \frac{P}{f} \left(1 + \frac{aef}{\Theta} \right).$$

Hierbei ist der — übrigens nicht erhebliche — Einfluss, welchen die mit der Durchbiegung verknüpfte Neigung des Querschnitts nimmt, vernachlässigt.

Nach A hin wird sich σ_{max} vermindern in dem Masse, in welchem die Durchbiegung den Hebelarm der Kraft P verringert.

Für kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser d und mit $a = \frac{d}{2}$ (Kraft geht durch den Umfang des Querschnittes) folgt beispielsweise

$$f = \frac{\pi}{4} d^2, \quad \Theta = \frac{\pi}{64} d^4, \quad e = \frac{d}{2},$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{f} \left(1 + \frac{\frac{d^2}{4} \frac{\pi}{4} d^2}{\frac{\pi}{64} d^4} \right) = \frac{P}{f} (1 + 4) = 5 \frac{P}{f},$$

d. h. die grösste Anstrengung ist 5 Mal so gross, als bei centrischem Angriff der Kraft P . Der Einfluss der Excentricität ist demnach ein ganz bedeutender.

Besteht der Stab aus einem Material, für welches die zulässige Anstrengung gegenüber Biegung, d. i. k_b , sich wesentlich unterscheidet von derjenigen gegenüber Zug, d. i. k_z , wie dies z. B. für Guss-eisen zutrifft (vergl. § 22, Zusammenstellung auf S. 97, Spalte 4, Gl. 77 auf S. 98), so würde es unrichtig sein, ohne Weiteres nach Massgabe der Beziehungen

$$\frac{P}{f} + \frac{Pa}{\Theta} e \leq k_b \quad \text{oder} \quad \frac{P}{f} + \frac{Pa}{\Theta} e \leq k_z$$

zu rechnen. In solchem Falle ergeben sich mit

$$k_b = \beta_o k_z$$

die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \beta_o \frac{P}{f} + \frac{Pa}{\Theta} e \leq k_b \quad \text{oder} \quad \frac{P}{f} + \frac{1}{\beta_o} \frac{Pa}{\Theta} e \leq k_z, \\ \beta_o = \frac{k_b}{k_z} = \frac{\text{zulässige Biegungsanstrengung}}{\text{zulässige Zuanstrengung}} \end{aligned} \right\} \dots 158)$$

2. Die Kraft P wirkt drückend, Fig. 133.

Hier nimmt bei eingetretener Durchbiegung das Moment M_b von B nach A hin zu, wie bereits in § 24 an Hand der Fig. 69 erörtert worden ist. In Bezug auf den durch x bestimmten Querschnitt fand sich dort

$$M_b = P (a + y' - y)$$

und hiermit, indem die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\alpha P}{\Theta} (a + y' - y)$$

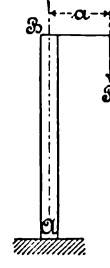


Fig. 133.

zum Ausgangspunkt genommen wurde,

$$\frac{y'}{a + y'} = 1 - \cos \left(l \sqrt{\frac{\alpha P}{\Theta}} \right),$$

woraus

$$a + y' = \frac{a}{\cos \left(l \sqrt{\frac{\alpha P}{\Theta}} \right)} \dots \dots \dots 159)$$

und damit die Durchbiegung des freien Endes

$$y' = a \left[\frac{1}{\cos \left(l \sqrt{\frac{\alpha P}{\Theta}} \right)} - 1 \right] \dots \dots \dots 160)$$

Für den Querschnitt bei A erlangt M_b den grössten Werth, nämlich

$$\max (M_b) = P (a + y') = \frac{P a}{\cos \left(l \sqrt{\frac{P \alpha}{\Theta}} \right)};$$

folglich beträgt hier die Gesamtspannung der im Abstände $\eta = + e_1$ gelegenen Fasern nach Gl. 157

$$\max (\sigma_1) = \frac{P a}{\cos \left(l \sqrt{\frac{P \alpha}{\Theta}} \right)} \frac{e_1}{\Theta} - \frac{P}{f} \leq k_b \dots 161)$$

und die Gesamtpressung der im Abstände $\eta = -e_2$ gelegenen Fasern

$$\max(\sigma_2) = \frac{P a}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P \alpha}{\Theta}}\right)} \cdot \frac{e_2}{\Theta} + \frac{P}{f} \leq k, \quad . \quad 162)$$

sofern k_b und k die zulässigen Anstrengungen gegenüber Biegung bzw. Druck bezeichnen.

Besteht der stabförmige Körper aus einem Material, für welches k_b erheblich von k abweicht, so muss streng genommen in sinngemässer Weise so verfahren werden, wie am Schlusse von Ziff. 1 angegeben worden ist. Da jedoch hier unter allen Umständen eine grössere Sicherheit darin liegt, wenn die Gl. 161 ohne Weiteres benützt wird, während dort die Ausserachtlassung von β_0 in der ersten der Beziehungen 158 zu einer wesentlichen Unterschätzung der Materialanstrengung führen könnte, so dürfte an dieser Stelle der gegebene Hinweis genügen.

a) Der Stab ist schlank und der Hebelarm a klein.

Diese Sachlage entspricht dem im ersten Abschnitt unter IV behandelten Falle der Knickung. Dort wurde zwar centrische Belastung des Stabes durch die Kraft P zunächst vorausgesetzt; wir erkannten aber, dass es sehr schwer hält, diese Voraussetzung zu erfüllen; infolge dessen ein wenn auch sehr kleiner Hebelarm als thatsächlich vorhanden angenommen werden musste. Diese Annahme wurde ausserdem noch dadurch zu einer Nothwendigkeit, dass in Wirklichkeit die Achse bei längeren Stäben keine gerade Linie und dass thatsächlich das Material nicht vollkommen gleichartig ist. Wir gelangten sodann in § 24 zu dem Ergebniss, dass wenn die Belastung P beträgt

$$P_0 = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2},$$

die Durchbiegung y' nach Gl. 160 selbst für einen sehr kleinen Werth des Hebelarmes a die Grösse ∞ annimmt. Infolge dessen war P_0 als diejenige Belastung zu bezeichnen, welche die Knickung, d. h. Bruch oder unzulässige Biegung des Stabes herbeiführen wird,

sofern nur $a > 0$. Letzteres muss aber aus den bezeichneten Gründen immer angenommen werden.

Demgemäss wurde in § 25 als zulässige Grösse der den Stab belastenden Kraft P nur der \mathfrak{S} te Theil von P_0 in Rechnung gestellt, also gewählt

$$P = \frac{\pi^2}{4 \mathfrak{S}} \frac{1}{\alpha} \frac{\mathcal{O}}{l^2}$$

unter Beachtung, dass überdies die Forderung der einfachen Druckbeanspruchung

$$P \leq kf$$

befriedigt sein muss.

Wird in Gl. 160 für P der in der vorletzten Gleichung enthaltene Werth eingeführt, so ergibt sich

$$y' = a \left[\frac{1}{\cos \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{\mathfrak{S}}} \right)} - 1 \right],$$

woraus beispielsweise

für $\mathfrak{S} =$	4	9	16	25
die Ausbiegungen $y' =$	0,414 a	0,155 a	0,082 a	0,052 a

folgen.

Die Bedingung

$$P \leq \frac{P_0}{\mathfrak{S}}$$

kommt demnach darauf hinaus, dass man die Abweichung y' von der Geraden, d. h. die Ausbiegung, innerhalb einer gewissen Grenze hält.

Ganz entsprechend wird auch hier vorzugehen sein. Der einzige Unterschied besteht darin, dass infolge des excentrischen Angreifens der Kraft P von vornherein ein Hebelarm gegeben ist. Derselbe, mit a_1 bezeichnet, ist schätzungsweise um einen Betrag a_2 zu vergrössern, welcher den oben bezeichneten Umständen (Nichtgeradlinigkeit der Stabachse, Ungleichartigkeit des Materials, einschliesslich Verschiedenartigkeit seines Zustandes) Rechnung trägt. Hinsichtlich a_1 wird wesentlich die Genauigkeit in Betracht kommen,

mit welcher sich die Lage der auf den Stab wirkenden Kräfte feststellen und wenigstens dahin sichern lässt, dass Ueberschreitung des in Rechnung genommenen Werthes von a_1 in Wirklichkeit nicht stattfindet. Indem hierbei die Konstruktion, Material, Ausführung und Aufstellung Einfluss nehmen werden, greift die Grösse a_1 in das Gebiet von a_2 über.

Liegen die Grössen a_1 und a_2 , nach Massgabe des Vorstehenden mit Rücksicht auf die besonderen Verhältnisse der jeweiligen Aufgabe ermittelt, vor, so kann unter Beachtung, dass die zulässige Biegung y' für nicht federnde Konstruktionstheile sehr klein sein muss, zunächst gesetzt werden

$$M_b = P(a_1 + a_2),$$

womit sich ergibt

$$\left. \begin{aligned} \frac{P(a_1 + a_2)}{\Theta} e_1 - \frac{P}{f} &\leq k_b, \quad \dots \dots \dots \\ \frac{P(a_1 + a_2)}{\Theta} e_2 + \frac{P}{f} &\leq k, \quad \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} 163)$$

(Vergl. die Bemerkungen zu Gl. 161 und 162).

Befriedigt der Stab diese Bedingungen, so ist die Durchbiegung

$$y' = (a_1 + a_2) \left[\frac{1}{\cos \left(l \sqrt{\frac{P \alpha}{\Theta}} \right)} - 1 \right] \quad \dots \quad 164)$$

zu berechnen und Entschliessung hinsichtlich ihrer Zulässigkeit zu fassen. Erforderlichenfalls sind die Abmessungen des Stabes zu ändern.

Die Gleichungen 163 und 164 setzen voraus, dass a_2 in die Richtung von a_1 fällt, was nicht nothwendigerweise der Fall sein muss. Ist das Trägheitsmoment Θ (bezogen auf die zum Abstände a_1 senkrechte Hauptachse) das kleinere der beiden Hauptträgheitsmomente, so wird diese Annahme allerdings im Sinne des Zweckes der ganzen Rechnung liegen. Wenn dagegen Θ das grössere Trägheitsmoment ist, so verlangt dieser Gesichtspunkt, dass a_2 senkrecht zu a_1 , sofern nicht besondere Gründe für eine andere Richtung

sprechen, angenommen und nach Massgabe des in § 21 unter b) Erörterten verfahren wird.

Um die unmittelbare Wahl von a_2 zu umgehen, kann z. B. für Bauconstruktionen in derselben oder in ähnlicher Weise vorgegangen werden, wie dies in § 26 für den Fall einfacher Knickung besprochen worden ist¹⁾. Näheres Eingehen hierauf würde den Rahmen dieser Arbeit weit überschreiten, ganz abgesehen davon, dass die besonderen Einflüsse, welche bei den einzelnen Aufgaben zu berücksichtigen sind, die Berechnung des betreffenden Constructions-theiles dahin verweisen, wo derselbe seiner Wesenheit nach, sowie in seinem Zusammenhange mit den an ihn anschliessenden Theilen zu behandeln ist.

b) Der Stab ist schlank und der Hebelarm a im Verhältniss zu den Abmessungen des Querschnitts gross.

In diesem Falle wird zunächst die erste der Beziehungen 163 mit $a_1 + a_2 = a$, d. h.,

$$\frac{P_a}{\Theta} e_1 - \frac{P}{f} \leq k_b$$

massgebend; der Einfluss des Gliedes

$$\frac{P}{f}$$

tritt hierbei zurück. Sodann ist für den Fall, dass der Stab dieser Beziehung genügt, die nach Gl. 164 eintretende Durchbiegung zu ermitteln und über deren Zulässigkeit Entscheidung zu treffen.

¹⁾ S. z. B. Tetmajer, Die angewandte Elasticitäts- und Festigkeitslehre, Zürich 1889, S. 162 u. f. Tetmajer steht hinsichtlich der Behandlung der Knickungsaufgabe auf einem anderen Standpunkt als Verfasser, weshalb auf dessen Arbeit S. 90 u. f., S. 162 u. f. besonders aufmerksam gemacht sei. (Vergl. auch Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1889, S. 474 u. f.)

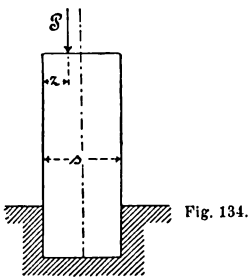
c) Die Querschnittsabmessungen des Körpers sind im Vergleich zur Länge desselben und zur Grösse des Hebelarmes so bedeutend, dass eine Biegung von Erheblichkeit nicht eintritt.

Dann sind einfach die Gl. 163 zu beachten, und in ihnen

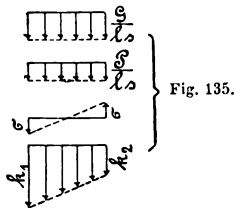
$$a_1 + a_2 = a$$

zu setzen; Gl. 164 kommt nicht mehr in Betracht.

Hierher gehören auch Beispiele, wie das folgende. Der senkrechte Mauerpfeiler vom Gewichte G und der Länge l , Fig. 134, empfängt durch ein Lager den abwärts gerichteten Druck P . Das im Schwerpunkte angreifende Gewicht ergibt für die Grundfläche ls des Bodens, auf welchem der Pfeiler steht, unter Voraussetzung gleichmässiger Druckvertheilung die Pressung



$$\frac{G}{ls}$$



Der Druck P , in die Mittelebene des Pfeilers, d. h. um $\frac{s}{2} - z$ verlegt, liefert eine Kraft P und ein Kräftepaar vom Momente

$$P \left(\frac{s}{2} - z \right)$$

Die Erstere führt zu einer gleichmässig über der Bodenfläche vertheilten Pressung

$$\frac{P}{ls}$$

das letztere dagegen ergibt für die linke Mauerkante eine Pressung σ , welche sich bestimmt aus

$$P \left(\frac{s}{2} - z \right) = \frac{1}{6} \sigma l s^2$$

zu

$$\sigma = \frac{6 P \left(\frac{s}{2} - z \right)}{l s^2},$$

mit der Genauigkeit, mit welcher die Hauptgleichung der Biegunge-elasticität auf den vorliegenden Fall angewendet werden darf.

Damit beträgt die gesammte Pressung an der linken Mauer-
kante

$$k_1 = \frac{G + P}{l s} + \frac{6 P \left(\frac{s}{2} - z \right)}{l s^2},$$

an der rechten dagegen

$$k_2 = \frac{G + P}{l s} - \frac{6 P \left(\frac{s}{2} - z \right)}{l s^2}.$$

Die Erstere soll die für den Boden höchstens noch als zulässig erachtete Grösse nicht überschreiten.

Fig. 135 giebt ein Bild der Pressungsvertheilung über die Bodenfläche.

§ 46. Einfluss des Widerstandes beim Gleiten der Oberfläche des beiderseits gelagerten und in der Mitte durch P belasteten Stabes gegenüber den Stützen infolge der Durchbiegung.

Der zunächst als gewichtlos gedachte Stab, im ursprünglichen, unbelasteten Zustande, berührt die beiden Auflager mit bestimmten Theilen seiner Mantelfläche. Wenn er sich zu biegen beginnt, so muss derjenige Punkt der Stabachse, welcher ursprünglich über dem einen, etwa dem linken, Auflager sich befand, nach der Mitte

rücken — vergl. Fig. 136 — da die Achse, d. h. die elastische Linie, ihre Länge beibehält. Diese Verrückung Δ nach der Stab-

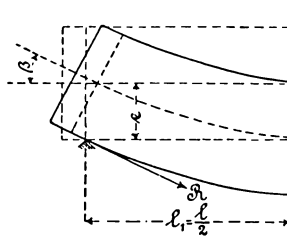


Fig. 136.

mitte hin lässt sich auffassen als Differenz zwischen der halben Stablänge $l_1 = 0,5 l$ und der halben Sehne des Bogens der elastischen Linie, dessen Länge unveränderlich, nämlich gleich l_1 und dessen Pfeilhöhe gleich der Durchbiegung y' in der Mitte ist.

Wird, was für unseren Zweck zulässig, die elastische Linie als flacher Parabelbogen aufgefasst, so erhält man, da für diesen, sofern dessen halbe Sehne a , dessen halbe Länge s und dessen Pfeilhöhe δ beträgt, bekanntlich gesetzt werden darf

$$s = a \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\delta^2}{a^2} \right),$$

entsprechend einem Unterschied von

$$\frac{2}{3} \left(\frac{\delta}{a} \right)^2 a = \sim \frac{2}{3} \left(\frac{\delta}{s} \right)^2 s$$

zwischen s und a ,

$$\Delta = \frac{2}{3} \left(\frac{y'}{l_1} \right)^2 l_1 = \frac{4}{3} \left(\frac{y'}{l} \right)^2 l.$$

Gleichzeitig mit dieser Verrückung des Endpunktes der elastischen Linie nach einwärts neigt sich derjenige Stabquerschnitt, welcher über dem Auflager stand, unter dem kleinen Winkel β . Hiermit ist eine Auswärtsbewegung der Linie (oder des Punktes), in welcher, bezw. in welchem der Stab vor der Biegung das Auflager berührte, um $e\beta$ verknüpft. Da nach Gl. 61

$$\beta = \frac{\alpha}{16} \frac{Pl^2}{\Theta},$$

so beträgt diese Auswärtsbewegung

$$\frac{\alpha}{16} \frac{Pl^2}{\Theta} e.$$

Demnach rücken diejenigen Theile der Mantelfläche des Stabes, mit welchen derselbe im unbelasteten Zustande, d. h. bei gerader Achse, die Auflager berührte, nach auswärts um die Strecke

$$x = e\beta - \Delta = \frac{\alpha}{16} \frac{Pl^2}{\Theta} e - \frac{4}{3} \left(\frac{y'}{l}\right)^2 l.$$

Gl. 62 ergibt

$$y' = \frac{\alpha}{48} \frac{Pl^3}{\Theta},$$

folglich

$$x = \frac{\alpha}{16} \frac{Pl^2}{\Theta} \left(e - \frac{\alpha Pl^3}{108 \Theta} \right).$$

So lange x positiv ist, d. h. wenn

$$e \geq \frac{\alpha Pl^3}{108 \Theta},$$

$$P \leq 108 \frac{\Theta e}{\alpha l^3},$$

oder nach Einführung von

$$\frac{Pl}{4} = \sigma \frac{\Theta}{e},$$

worin σ die grösste Biegungsanstrengung in der Mitte des Stabes bezeichnet,

$$\frac{e}{l} > \sqrt{\frac{1}{27} \alpha \sigma}, \dots \dots \dots 165)$$

so lange wird die in Frage stehende Bewegung nach auswärts erfolgen und damit während des Vorsichgehens der Durch-

biegung eine auf den Stab wirkende, einwärts gerichtete Kraft R (vergl. Fig. 136) wachgerufen werden. Setzen wir, um zu erkennen, ob diese Voraussetzung für gewöhnlich zutrifft, für Stahl

$$\alpha = \frac{1}{2150000}, \quad \sigma = 1600,$$

so findet sich

$$\frac{e}{l} > \sqrt{\frac{1600}{27 \cdot 2150000}} \quad e > \frac{1}{190} l,$$

was ausnahmslos der Fall sein wird. Es wirkt also — unter der Voraussetzung kleiner Durchbiegungen — R thatsächlich in der bezeichneten Richtung. Diese Kraft ist für unbewegliche Auflager, welche sich nicht in den Stab eindrücken, gleich der Reibung, d. h.

$$R = \frac{P}{2} \mu,$$

sofern μ den Coefficienten der gleitenden Reibung zwischen Staboberfläche und festem Auflager bezeichnet.

Drücken sich die Auflager in den Stab ein, so tritt R nicht mehr als einfache Reibung, sondern als weit grösserer Widerstand auf.

Werden die Stützen von Rollen gebildet, welche sich um feste Zapfen drehen können (Rollenaufleger), so wird R kleiner als $0,5 P\mu$ ausfallen.

Die Kraft R wirkt nun, abgesehen von ihrem Einflusse auf die Länge der Stabachse, mit dem Momente

$$Re = 0,5 P\mu e \dots \dots \dots 166)$$

auf den Stab, sofern der Einfluss der Durchbiegung, auf das Moment vernachlässigt wird. Für den mittleren Stabquerschnitt er giebt sich alsdann nicht das Moment

$$\frac{Pl}{4},$$

sondern

$$\frac{Pl}{4} - Re = \frac{Pl}{4} - \frac{P\mu e}{2} = \frac{Pl}{4} \left(1 - 2 \mu \frac{e}{l}\right). \quad 167)$$

Beispielsweise beträgt für $e = 50$ mm und $l = 1000$ mm die Verminderung des Momentes

bei	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,5$
	1 %	5 %
für	$e = 200$ mm und $l = 1000$ mm,	
bei	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,5$
	4 %	20 %

Deutlich zeigt sich der Einfluss der verhältnissmässigen Höhe des Stabes und des Coefficienten μ .

Werden feste Auflager verwendet, welche die Form einer Schneide haben und sich vielleicht gar in den Stab eindrücken, wodurch μ einen verhältnissmässig hohen Werth erlangen muss, so kann die Kraft R selbst bei nicht hohen Körpern in erheblicher Grösse auftreten¹⁾.

Handelt es sich z. B. um die Ermittlung der Anstrengung, die eine Schwelle, Fig. 137, beim Eindrücken in die Bettung erfährt,

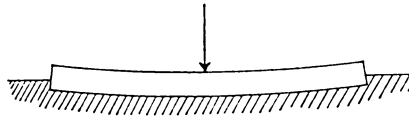


Fig. 137.

so wird der Einfluss der Reibung, welche infolge der Durchbiegung zwischen Bettung und Unterfläche der Schwelle auftritt, nicht ohne Weiteres ausser Acht gelassen werden dürfen. Auch bei gebogenen Federn, welche an beiden Enden aufliegen und in der Mitte belastet sind, können infolge des mit der Pfeilhöhe der gebogenen Mittellinie wachsenden Hebelarmes der Reibungskräfte diese von erheblicher Bedeutung werden u. s. w.

Immerhin aber werden es nur Ausnahmefälle sein, in denen

¹⁾ Aus diesem Grunde sollen der Biegungsprobe zu unterwerfende Stäbe, deren Querschnittsabmessungen nicht klein sind im Vergleich zur Stützweite, Rollenaufleger erhalten, was meist zu geschehen pflegt. (Vergl. hierüber Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1888 S. 244 u. f., Fussbemerkung dasselbst.)

auf die im Vorstehenden erörterte Wirkung der Reibung zwischen gebogenem Stab und Auflager Rücksicht zu nehmen ist.

Schliesslich sei noch darauf hingewiesen, dass bei — auch theilweiser — Entlastung des Stabes sich die Durchbiegung vermindert; damit kehrt die Kraft R ihre Richtung und das Moment Re seinen Sinn um, die Biegebungsbeanspruchung nicht mehr vermindern, sondern vermehrend.

VIII. Beanspruchung durch Schubspannungen (Schiebungen).

§ 47. Schub und Drehung.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äusseren Kräfte ergeben für den in Betracht gezogenen Querschnitt eine in denselben fallende Kraft S und ein Kräftepaar vom Momente M_d , dessen Ebene die Stabachse senkrecht schneidet.

In einem beliebigen Element des Querschnitts erzeugt die Schubkraft S eine Schubspannung τ_s und das auf Drehung wirkende Moment M_d eine Schubspannung τ_d ; die Resultante aus τ_s und τ_d liefert die Inanspruchnahme in dem betreffenden Querschnittselemente.

Bei Beurtheilung derselben, sowie bei Wahl der zulässigen Anstrengung ist es von Bedeutung zu beachten, dass sie nicht blos in dem Querschnitt, sondern auch senkrecht dazu auftritt (§ 30, s. auch Fig. 88 u. 89, bezw. die Erörterung, welche in § 45, Ziff. 1 zur Einführung von β_0 und in § 48, Ziff. 2 zur Einführung von α_0 Veranlassung giebt).

1. Kreisquerschnitt.

Nach § 39, b ist die von S herrührende Schubspannung am grössten für die Umfangspunkte des zu S senkrechten Durchmesser, und zwar beträgt sie daselbst

$$\tau_s = \frac{4}{3} \frac{S}{f} = \frac{16}{3\pi} \frac{S}{d^2},$$

sofern

$$f = \frac{\pi}{4} d^2$$

die Grösse des Querschnittes und d dessen Durchmesser bezeichnet.

Nach § 32 ist für alle Umfangspunkte die durch M_d wachgegrufene Schubspannung

$$\tau_d = \frac{16}{\pi} \frac{M_d}{d^3}$$

die grösste. Demnach beträgt die resultirende Anstrengung, welche in jenen beiden Umfangspunkten den grössten Werth erreicht

$$\tau_s + \tau_d = \frac{16}{3\pi} \frac{S}{d^2} + \frac{16}{\pi} \frac{M_d}{d^3} = \frac{16}{\pi d^2} \left(\frac{S}{3} + \frac{M_d}{d} \right).$$

2. Kreisringquerschnitt von geringer Wandstärke, Fig. 124.

Nach § 39, c ist

$$\tau_s = 2 \frac{S}{f},$$

nach § 32

$$\tau_d = \frac{16}{\pi} M_d \frac{d}{d^4 - d_o^4} = \sim 2 \frac{M_d}{d_m f},$$

sofern

$$d_m = \frac{d + d_o}{2} \quad f = \frac{\pi}{4} (d^2 - d_o^2).$$

Folglich

$$\tau_s + \tau_d = \frac{2}{f} \left(S + \frac{M_d}{d_m} \right).$$

3. Rechteckiger Querschnitt, Fig. 116.

Unter der Voraussetzung, dass S senkrecht zur Breite b wirkt, werden beide Schubspannungen am grössten in den Mitten der langen Seiten.

Nach § 38 beträgt hier

$$\tau_s = \frac{3}{2} \frac{S}{b h},$$

und nach § 34

$$\tau_d = \frac{9}{2} \frac{M_d}{b^2 h}.$$

Somit

$$\tau_s + \tau_d = \frac{3}{2} \frac{1}{b h} \left(S + 3 \frac{M_d}{b} \right).$$

IX. Beanspruchung durch Normalspannungen (Dehnungen) und Schubspannungen (Schiebungen).

§ 48. Grösste Anstrengung bei gleichzeitig vorhandener Dehnung (Normalspannung) und Schiebung (Schubspannung).

I. Begriff der zulässigen Anstrengung des Materials.

Bei den bisherigen Betrachtungen haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass hinsichtlich des Begriffs der zulässigen Anstrengung ein Zweifel nicht bestehe. So lange nur Normalspannungen in Richtung der Stabachse (Zug, Druck, Biegung) oder lediglich Schubspannungen (Drehung, Schub) vorhanden sind, pflegt ein solcher auch thatsächlich nicht in die Erscheinung zu treten; anders gestaltet sich jedoch die Sachlage, sobald Normalspannungen und Schubspannungen gleichzeitig thätig, oder senkrecht zu einander wirkende Normalspannungen vorhanden sind. Dann kann in der That eine Unsicherheit entstehen. Aus diesem Grunde ist hier, wo uns erstmals gleichzeitig Normalspannungen und Schubspannungen entgegen treten, der Begriff der zulässigen Anstrengung zu erörtern.

Bei der Herleitung der Abmessungen von Maschinen- oder Bautheilen, sowie von ganzen Constructionen aus den beanspruchenden Kräften, sind drei Gesichtspunkte festzuhalten, sofern abgesehen wird von den Fällen, in denen Rücksichten auf Herstellung, Fortschaffung, Abnutzung u. s. w. massgebend erscheinen.

Der erste Gesichtspunkt, welcher das bestimmt, was der Regel nach als zulässige Anstrengung gilt, liefert die Forderung, dass

- a) (nach der Ansicht der Einen) die Spannung,
oder
- b) (nach der Ansicht der Anderen) die verhältnissmässige Dehnung

in keinem Punkte des Körpers die höchstens für zulässig erachtete Grenze überschreite.

Bei einfacher Zug-, Druck- und Biegungselasticität, sowie bei Verbindung derselben besteht — streng genommen allerdings nur im Falle der Unveränderlichkeit des Dehnungscoefficienten — Proportionalität zwischen Dehnungen und den ihnen entsprechenden Normalspannungen. In diesen Fällen kommt deshalb die Forderung a auf dasselbe hinaus, wie diejenige unter b ; denn multiplicirt man die höchstens für zulässig erachtete Normalspannung mit dem Dehnungscoefficienten, so tritt an ihre Stelle die höchstens noch für zulässig gehaltene Dehnung.

Da bei einfacher Drehungs- und Schubelasticität, sowie bei Verbindung beider ebenfalls Proportionalität zwischen Schubspannungen und den zugehörigen Dehnungen vorhanden ist (§ 31), so dürfen auch in diesen Fällen — Unveränderlichkeit des Dehnungscoefficienten vorausgesetzt — die Bedingungen unter a und b als zusammenfallend betrachtet werden.

Wirken dagegen senkrecht zu einander stehende Normalspannungen gleichzeitig, so hört die sonst vorhandene Proportionalität zwischen Dehnung und Spannung auf, wie in § 7 und § 14 erörtert worden ist, und die Auffassung nach a fordert etwas anderes als diejenige nach b . Die Erstere räumt den senkrecht zum gezogenen oder gedrückten Stab wirkenden Kräften keinen Einfluss auf die zulässige Anstrengung ein, sie lässt die in § 9, Ziff. 1, erörterten Versuchsergebnisse unbeachtet, sie belastet einen in Richtung der Achse gezogenen und senkrecht zu seiner Achse gedrückten Stab ebenso stark, als wenn diese Druckkräfte nicht vorhanden wären, sie wählt die zulässige Anstrengung der Bleischeibe Fig. 29 ebenso gross wie diejenige der Fig. 30, obgleich dieselbe im letzteren Falle erfahrungsgemäss weit grösser genommen werden darf; für sie ist die zulässige Anstrengung im Falle der Fig. 28 (Fig. 26) dieselbe, gleichgiltig ob $z = 60$ mm oder $z = 5$ mm, und zwar auch dann, wenn etwa an Stelle des Steinwürfels ein solcher aus Schmiedeisen träte, sie kann folgerichtig den in § 20, Ziff. 2 besprochenen Einfluss der Fasern auf einander nicht anerkennen u. s. f.

Treten gleichzeitig Normal- und Schubspannungen auf, so ergeben sich für den betreffenden Punkt des Körpers eine grösste Spannung und eine grösste Dehnung; beide stehen jedoch nicht in dem Verhältnisse, wie einfache Normalspannung und Dehnung nach

Massgabe der Gl. 4. Die Bedingung unter a verlangt deshalb in solchem Falle auch nicht das Gleiche, wie die Forderung unter b .

Die Auffassung unter a ist die ältere und erfreut sich auch heute noch einer grossen Verbreitung. Mariotte dürfte wohl der Erste gewesen sein, welcher darauf hingewiesen hat, dass die Dehnung eine gewisse Grenze nicht überschreiten soll; dagegen scheint es, dass erst Poncelet (vor einem halben Jahrhundert) die Forderung unter b mit Entschiedenheit vertreten und durchgeführt hat.

Dass die Bedingung unter a in verschiedenen Fällen nicht zutreffend ist, erhellt aus dem Erörterten. Unter diesen Umständen erachtet Verfasser die Feststellung des Begriffs der zulässigen Anstrengung nach Massgabe der Forderung unter b für die rationellere. Welcher Grad der Zuverlässigkeit ihr innewohnt, welche Mängel ihr anhaften, wird durch ausgedehnte — übrigens erheblichen Schwierigkeiten begebende — Versuche noch zu entscheiden sein.

Folgerichtig wäre hiernach mit zulässigen Dehnungen statt mit zulässigen Spannungen zu rechnen. Da sich jedoch der Begriff der zulässigen Anstrengung als einer auf die Flächeneinheit bezogenen Kraft eingebürgert hat, es auch keine Schwierigkeit bietet, zu jeder zulässigen Spannung eine entsprechende Dehnung zu bestimmen¹⁾, so erscheint die Beibehaltung der auf die Flächeneinheit bezogenen Kraft als Mass der zulässigen Anstrengung ausführbar und berechtigt. Nur ist hierbei festzuhalten, dass dann in den Fällen gleichzeitigen Vorhandenseins von senkrecht zu einander stehenden Normalspannungen oder von Normal- und Schubspannungen an die Stelle der höchstens zulässigen Dehnung keine wirkliche, sondern nur eine gedachte Spannung tritt, nämlich der Quotient: zulässige Dehnung dividirt durch den Dehnungscoefficienten. (S. Gl. 170, 174.)

Der zweite Gesichtspunkt ergibt sich in der Forderung, dass die Gesamtformänderung des belasteten Körpers innerhalb der Grenzen bleibe, welche durch den besonderen Zweck desselben oder durch den Zusammenhang mit anderen Konstruktionstheilen gesteckt sind. Da, wo eine höchstens zulässige Durchbiegung, Verdrehung u. s. w. die Abmessungen bestimmt, ist im Allgemeinen eine Rech-

¹⁾ Nach S. 250 ist die Normalspannung mit α , die Schubspannung mit $\frac{m+1}{m} \alpha$ zu multipliciren.

nung mit zulässiger Anstrengung im soeben erörterten Sinne des Wortes nicht mehr richtig. Dieselbe ist dann eine Funktion der Form und Grösse des in Frage stehenden Körpers. (S. auch die erste Fussbemerkung zu § 26, vierten Absatz.)

Der dritte Gesichtspunkt führt zu der Bedingung, dass der Körper gegen die etwaige Wirkung lebendiger Kräfte genügend widerstandsfähig zu machen ist. Hier wird besondere Rechnung anzustellen oder die eigenthümliche Beanspruchung durch Verminderung der für die zulässige Anstrengung sonst üblichen Werthe schätzungsweise zu berücksichtigen sein, sofern die strenge Rechnung überhaupt nicht oder nur mit einem verhältnissmässig grossen Aufwand an Zeit durchführbar ist. — Jedenfalls wird der zweite Weg da einzuschlagen sein, wo sich die plötzlichen Kraftäusserungen, die Stösse, der rechnungsmässigen Feststellung entziehen.

Die Anführung des zweiten und dritten Gesichtspunktes an dieser Stelle bezweckt, den Begriff der eigentlichen zulässigen Anstrengung des Materials nach Möglichkeit klar- und vor missverständlicher Auffassung sicher zu stellen.

2. Ermittlung der grössten Anstrengung.

Wir denken uns in dem Stabe, Fig. 138, ein Körperelement, eine Faser $ABCD$ von der Länge $\overline{AB} = \overline{CD}$ abgegrenzt derart,

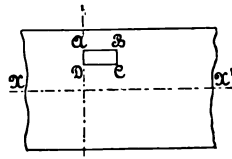


Fig. 138.

dass die in AD sich projicirende Stirnfläche mit dem in Betracht gezogenen Stabquerschnitt zusammenfällt, während die Richtungen AB und DC mit der Stabachse parallel laufen. In Fig. 139 sei dieses Faserstück, entsprechend dem ursprünglichen Zustande, d. h. vor der Inanspruchnahme des Stabes, in grösserem Massstabe durch die ausgezogenen Linien dargestellt.

Unter Einwirkung der äusseren Kräfte dehne sich die Faser in der Richtung AB um

$$\overline{BE} = \overline{KF} = \epsilon \cdot \overline{AB},$$

sofern

$$\epsilon = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}$$

die verhältnissmässige Dehnung bezeichnet. Nach § 1 muss sich

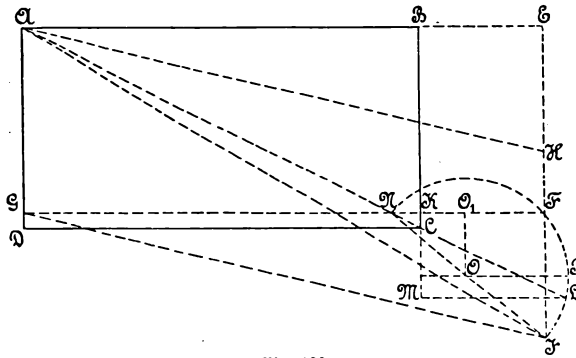


Fig. 139.

die Faser gleichzeitig senkrecht zu ihrer Achse zusammenziehen. Diese Zusammenziehung betrage

$$\overline{CK} = \overline{DG} = \epsilon_1 \cdot \overline{BC},$$

wenn

$$\epsilon_1 = \frac{\overline{CK}}{\overline{BC}}$$

(Vergl. § 7).

Zu dieser mit der Normalspannung verknüpften Formänderung tritt nun die der Schubspannung entsprechende. Es verschiebe sich der Querschnitt EF (ursprünglich BC) um

$$\overline{EH} = \overline{FJ} = \gamma \cdot \overline{AB}$$

gegen den Querschnitt AGD , sofern γ die Schiebung (vergl. § 28) bedeutet.

Hierbei dehnt sich die ursprünglich \overline{AC} lange Strecke bis zur Grösse \overline{AJ} . Fällt man von J ein Loth JL auf die über C hinaus verlängerte Linie AC , so dass also $\sphericalangle JLA = 90^\circ$ ist, so ergibt sich die Verlängerung, welche \overline{AC} beim Uebergang in \overline{AJ} erfahren hat, mit Rücksicht darauf, dass die Formänderungen überhaupt klein sind, angenähert zu \overline{CL} . Hiermit wird dann die verhältnissmässige Dehnung ϵ_1 der Strecke \overline{AC}

$$\epsilon_1 = \frac{\overline{CL}}{\overline{AC}}.$$

Dieser Werth ist aber auch gleich $\overline{LM} : \overline{AB}$, sofern $LM \parallel AB$ durch L gezogen wird; folglich

$$\epsilon_1 = \frac{\overline{LM}}{\overline{AB}}.$$

ϵ_1 erlangt seinen grössten Werth, wenn dies bei \overline{LM} eintritt, da die ursprüngliche Faserlänge \overline{AB} als Constante gilt.

Zur Feststellung von $\max(\overline{LM})$ führt nachstehende Betrachtung.

Mit N als Schnittpunkt der Linien GF und AC findet sich

$$\overline{FN} = \overline{FK} + \overline{KN} = \epsilon \cdot \overline{AB} + \overline{KC} \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = (\epsilon + \epsilon_\eta) \overline{AB}.$$

Ausserdem ist

$$\overline{FJ} = \gamma \cdot \overline{AB}.$$

Ueber der Hypothenuse NJ des durch FN und FJ bestimmten rechtwinkligen Dreiecks NFJ beschreiben wir mit NJ als Durchmesser und O als Mittelpunkt einen Kreis, welcher die Punkte L und F in sich enthalten muss (wegen $\sphericalangle JLN = 90^\circ$ und $\sphericalangle JFN = 90^\circ$). Man erkennt nun leicht, dass \overline{LM} seinen grössten Werth erreicht, wenn L , auf dem Kreisbogen sich bewegend, in die durch den Kreismittelpunkt O gehende Horizontale, d. h. nach P gelangt.

Ist O_1 die Projektion von O auf GF , so ergibt sich

$$\max(\overline{LM}) = \overline{KO_1} + \frac{1}{2} \overline{NJ}.$$

Wegen

$$\overline{K O_1} = \overline{N O_1} - \overline{N K} = \frac{\overline{N F}}{2} - \overline{N K}$$

unter Beachtung, dass

$$\overline{N F} = (\varepsilon + \varepsilon_q) \overline{A B},$$

$$\overline{N K} = \overline{C K} \frac{\overline{A B}}{\overline{B C}} = \varepsilon_q \cdot \overline{A B},$$

infolge dessen

$$\overline{K O_1} = \frac{1}{2} (\varepsilon + \varepsilon_q) \overline{A B} - \varepsilon_q \overline{A B} = \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_q) \overline{A B},$$

und da

$$\begin{aligned} \overline{N J} &= \sqrt{\overline{N F}^2 + \overline{J F}^2} = \sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_q)^2 \overline{A B}^2 + \gamma^2 \cdot \overline{A B}^2} \\ &= \overline{A B} \sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_q)^2 + \gamma^2}, \end{aligned}$$

so findet sich

$$\max (\overline{L M}) = \frac{1}{2} \overline{A B} (\varepsilon - \varepsilon_q) + \frac{1}{2} \overline{A B} \sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_q)^2 + \gamma^2},$$

und hieraus

$$\max \left(\frac{\overline{L M}}{\overline{A B}} \right) = \max (\varepsilon_1) = \frac{1}{2} \left[\varepsilon - \varepsilon_q + \sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_q)^2 + \gamma^2} \right]. \quad 168)$$

Unter der Voraussetzung, dass innerhalb der in Betracht gezogenen Stabstrecke senkrecht zur Stabachse Kräfte von Bedeutung überhaupt nicht einwirken, so dass die verhältnissmässige Quersammenziehung

$$\varepsilon_q = \frac{\varepsilon}{m}$$

gesetzt werden darf (§ 1 und § 7), folgt zunächst

$$\max(\varepsilon_1) = \frac{m-1}{2m} \varepsilon + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{m}{m+1}\right)^2 \gamma^2} \quad 169)$$

und sodann (nach § 2, Gl. 4, bzw. § 31, Gl. 99) mit

$$\varepsilon = \alpha \sigma,$$

und

$$\gamma = \beta \tau = 2 \alpha \frac{m+1}{m} \tau$$

$$\max(\varepsilon_1) = \alpha \left(\frac{m-1}{2m} \sigma + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right).$$

Hierdurch ist die Grösse von $\max(\varepsilon_1)$ und damit nach Ziff. 1 auch die grösste Anstrengung

$$\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = \frac{m-1}{2m} \sigma + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad . \quad 170)$$

des Materials festgestellt.

Der im Vorstehenden zur Bestimmung der Letzteren beschrittene Weg wurde nach Wissen des Verfassers zuerst von Poncelet eingeschlagen.

Was die Richtung anbetrifft, in welcher die grösste Anstrengung stattfindet, so erkennt man, dass diese mit der Verbindungslinie der Punkte N und P , d. h. mit NP zusammenfällt. Wird nun berücksichtigt, dass $\sphericalangle FNP = \varphi$ wegen $\widehat{FP} = \widehat{PJ}$ die Hälfte von $\sphericalangle FNJ$ ist und dass

$$\operatorname{tg} \sphericalangle FNJ = \frac{\overline{FJ}}{\overline{NF}} = \frac{\gamma \cdot \overline{AB}}{(\varepsilon + \varepsilon_q) \overline{AB}},$$

so findet sich

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\gamma}{\varepsilon + \varepsilon_q} = \frac{m}{1+m} \frac{\gamma}{\varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad 171)$$

Hiermit erscheint die durch φ gegenüber der Stabachse (Rich-

tung der Normalspannung) festgelegte Richtung AC , in welcher die Dehnung ihren grössten Werth erlangt, bestimmt.

Mit

$$\varepsilon = \alpha \sigma, \quad \gamma = 2 \alpha \frac{m+1}{m} \tau$$

wird

$$\operatorname{tg} 2 \varphi = \frac{m \gamma}{(1+m) \varepsilon} = 2 \frac{\tau}{\sigma} \quad . . . \quad 172)$$

Für $\tau = 0$ ergibt sich $\varphi = 0$, d. h. die grösste Dehnung findet dann in Richtung der Stabachse statt, wie ohne Weiteres klar ist.

Für $\sigma = 0$ wird

$$\varphi = \frac{\pi}{4} = 45^\circ,$$

wie bereits in § 31, Ziff. 1, festgestellt wurde.

Für $\tau = 0$ ergibt Gl. 170

$$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = \sigma,$$

und für $\sigma = 0$

$$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = \frac{m+1}{m} \tau.$$

Hiernach entspricht die Schubspannung τ allein einer Dehnung

$$\frac{m+1}{m} \alpha \tau,$$

während die Normalspannung σ mit einer solchen im Betrage von

$$\alpha \sigma$$

verknüpft ist. Bei gleicher Grösse der beiden Spannungen ergibt sich die erstere Dehnung im Verhältniss von $(m+1):m$ bedeutender, als die letztere. Soll die Dehnung, d. i. die Anstrengung, in beiden Fällen die gleiche sein, so muss τ im Verhältniss von $m:m+1$ weniger betragen als σ , wie bereits aus dem in § 31 Erörterten hervorgeht¹⁾.

¹⁾ Die thatsächlichen Anstrengungen verhalten sich hiernach nicht wie $\tau:\sigma$, sondern wie $\frac{m+1}{m} \tau:\sigma$.

Die Gl. 170 setzt voraus, dass das Material in allen Punkten des Körpers nach allen Richtungen hin gleich beschaffen (isotrop) ist. Diese Voraussetzung trifft nun nicht immer zu, wie dies z. B. bei Walzeisen der Fall ist, dessen Widerstandsfähigkeit namentlich gegenüber Schubspannungen in Ebenen, parallel zur Walzrichtung und senkrecht zur Richtung des beim Walzen ausgeübten Druckes, sich vergleichsweise erheblich geringer erweist. In derartigen Fällen ist es natürlich unzutreffend, den Einfluss der Dehnung ϵ , welche einer bestimmten Schubspannung entspricht, gegenüber derjenigen Dehnung, welche bei Normalspannungen als höchstens zulässig erachtet wird, nach Massgabe der Gleichung

$$\epsilon_1 = \frac{m+1}{m} \alpha \tau = \alpha \sigma \dots \dots \dots 173)$$

zu beurtheilen. Dann muss vielmehr die Beziehung

$$\gamma = 2 \alpha \frac{m+1}{m} \tau$$

vor Einführung in die Gl. 169 eine Berichtigung oder Ergänzung erfahren, am einfachsten durch Multiplikation mit einem Coefficienten α_o , welcher ganz allgemein die Aufgabe haben soll, dem Umstande Rechnung zu tragen, dass die zulässige Schubspannung zur zulässigen Normalspannung nicht immer in dem Verhältnisse

$$m : m + 1 = 4 : 5 \text{ bis } 3 : 4 = 1 : 1,25 \text{ bis } 1 : 1,33$$

steht. (S. auch Gl. 101).

Mit

$$\gamma = 2 \alpha \frac{m+1}{m} \alpha_o \tau$$

geht Gl. 170 über in

$$\alpha_o = \frac{\max \left(\frac{\epsilon_1}{\alpha} \right) = \frac{m-1}{2m} \sigma + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4 (\alpha_o \tau)^2}}{\frac{m+1}{m} \frac{\text{zulässige Anstrengung bei Normalspannung in kg}}{\text{zulässige Anstrengung bei Schubspannung in kg}}} \quad \left. \vphantom{\frac{\max \left(\frac{\epsilon_1}{\alpha} \right)}{\frac{m+1}{m}}} \right\} 174^1)$$

¹⁾ S. des Verfassers Maschinenelemente, 1881, S. 11, 207, 208, 210, 211, 216 u. s. f.

Mit Rücksicht hierauf werde α_0 als das Verhältniss der zulässigen Anstrengungen für den gerade vorliegenden Fall, oder kurz als Anstrengungsverhältniss bezeichnet.

Setzt man, dem heutigen Stande der Versuchsergebnisse entsprechend und in der Absicht, zu runden Zahlencoefficienten zu gelangen,

$$m = \frac{10}{3},$$

so gehen die Gleichungen 174 über in

$$\left. \begin{aligned} \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) &= 0,35 \sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4 (\alpha_0 \tau)^2} \\ \alpha_0 &= \frac{\text{zulässige Anstrengung bei Normalspannung}}{1,3 \text{ zulässige Anstrengung bei Schubspannung}} \end{aligned} \right\} . \quad 175)$$

Der Unterschied, welcher sich hinsichtlich der Anstrengung $\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right)$ ergibt, je nachdem man $m = 3$ oder $m = 4$ oder einen dazwischen gelegenen Werth setzt, ist übrigens unbedeutend.

Durch die Feststellung in den Gl. 174 und 175 erfüllt der Coefficient α_0 nicht bloß seinen Zweck beim Mangel allseitiger Gleichartigkeit des Materials, sondern auch dann, wenn die Werthe für die beiden zulässigen Anstrengungen aus anderen Gründen nicht in dem Verhältnisse $(m + 1) : m$ stehen. Das wird bei vorhandener Isotropie des Materials allgemein dann der Fall sein, wenn die gleichzeitig auftretenden Normalspannungen und Schubspannungen nicht gleichartig sind, beispielsweise dann, wenn die erstere eine fortgesetzt wechselnde ist (Biegungsanstrengung einer sich drehenden Welle u. s. w.), während die letztere als unveränderlich gelten kann (Drehungsanstrengung derselben Welle bei Ueberwindung eines constanten Arbeitswiderstandes) u. s. f.¹⁾

Bei Entwicklung der grundlegenden Beziehungen 168 bis 170 war in Uebereinstimmung mit der hierfür entworfenen Figur 139 angenommen worden, dass die Dehnung ε (die Normalspannung σ) in Richtung der Stabachse eine positive sei, entsprechend einem

¹⁾ S. des Verfassers Maschinenelemente 1881, S. 18 u. f.

an der betreffenden Stelle wirkenden Zug. Ist das Entgegengesetzte der Fall, erfährt der Stab in Richtung seiner Achse eine Zusammendrückung, d. h. sind ϵ und σ negativ, so führt die gleiche Betrachtung zu dem Ergebniss

$$\max \left(-\frac{\epsilon_1}{\alpha} \right) = \frac{m-1}{2m} \sigma + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad 170a)$$

Hierbei ist σ nur mit seiner absoluten Grösse einzusetzen. Diese Gleichung unterscheidet sich von der Beziehung 170 lediglich dadurch, dass hier die grösste Anstrengung als Druckbeanspruchung erscheint, während sie dort als Zuginanspruchnahme auftrat. Dementsprechend treten an die Stelle der Gleichungen 174 und 175 die Beziehungen

$$\max \left(-\frac{\epsilon_1}{\alpha} \right) = \frac{m-1}{2m} \sigma + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2}, \quad 174a)$$

bezw.

$$\max \left(-\frac{\epsilon_1}{\alpha} \right) = 0,35 \sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2}. \quad 175a)$$

Neben dieser Druckbeanspruchung, wie sie hierdurch bestimmt ist, wird unter Umständen noch eine grösste Zugsanstrengung massgebend sein können, nämlich dann, wenn die positive Dehnung, welche der Schiebung γ entspricht (vergl. § 31, S. 134), die Zusammendrückung, welche mit der negativen Normalspannung in Richtung der Stabachse verknüpft ist, bedeutend überwiegt. Diese grösste Zuganstrengung, welche dann gleichzeitig mit der grössten Druckbeanspruchung $\max \left(-\frac{\epsilon_1}{\alpha} \right)$ auftritt und die mit $\max \left(\frac{\epsilon_2}{\alpha} \right)$ bezeichnet sei, kann in gleicher Weise ermittelt werden, wie oben die Gleichungen 168 bis 170 gefunden wurden, oder man kann sie unmittelbar aus Gl. 170 ableiten, indem in der letzteren σ negativ gesetzt wird. Auf beiden Wegen ergibt sich

$$\max \left(\frac{\epsilon_2}{\alpha} \right) = -\frac{m-1}{2m} \sigma + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad 170b)$$

254 IX. Beanspruchung durch Normalspannungen und Schubspannungen.

und damit nach Gl. 174 und 175

$$\max \left(\frac{\varepsilon_2}{\alpha} \right) = - \frac{m-1}{2m} \sigma + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_o \tau)^2}, \quad 174b)$$

$$\max \left(\frac{\varepsilon_2}{\alpha} \right) = - 0,35 \sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_o \tau)^2}. \quad 175b)$$

In diese Beziehungen ist σ natürlich nur mit seiner Grösse ohne Rücksicht auf das Vorzeichen einzuführen.

Der absolute Werth von $\max \left(- \frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right)$ ist nach Gl. 170a allerdings grösser als derjenige, welchen Gleichung 170b für $\max \left(\frac{\varepsilon_2}{\alpha} \right)$ liefert. Da aber die zulässige Zugsanstrengung in manchen Fällen bedeutend geringer zu sein pflegt, als die zulässige Druckinanspruchnahme, so kann trotzdem $\max \left(\frac{\varepsilon_2}{\alpha} \right)$ massgebend werden.

§ 49. Zug (Druck) und Drehung.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äusseren Kräfte ergeben für den in Betracht gezogenen Querschnitt eine in die Richtung der Stabachse fallende Kraft P und ein Kräftepaar vom Momente M_d , dessen Ebene die Stabachse senkrecht schneidet.

In einem beliebigen Element des Querschnitts von der Grösse f wird durch die Zugkraft P eine Normalspannung

$$\sigma = \frac{P}{f}$$

wachgerufen, während das auf Drehung wirkende Moment M_d eine Schubspannung τ erzeugt, welche nach den §§ 32 bis 36 zu bestimmen ist. Da σ für alle Punkte des Querschnittes als gleich gross aufgefasst werden darf, so tritt die bedeutendste Anstrengung da auf, wo τ seinen grössten Werth erlangt.

Nach den Gl. 174 ergibt sich mit k_z als zulässiger Zug- und k_d als zulässiger Drehungsanstrengung

$$\left. \begin{aligned} k_z &\geq \frac{m-1}{2m} \sigma + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_o \tau)^2}, \\ \alpha_o &= \frac{k_z}{\frac{m+1}{m} k_d}, \end{aligned} \right\} \dots 176)$$

und mit $m = \frac{10}{3}$

$$\left. \begin{aligned} k_z &\geq 0,35 \sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_o \tau)^2} \\ \alpha_o &= \frac{k_z}{1,3 k_d}. \end{aligned} \right\} \dots 177)$$

Wirkt P nicht ziehend, sondern drückend, so wird σ negativ; infolge dessen nach Gl. 175a zunächst die mit k als zulässiger Druckanstrengung giltige Beziehung

$$\left. \begin{aligned} k &\geq 0,35 \sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_o \tau)^2}, \\ \alpha_o &= \frac{k}{1,3 k_d}, \end{aligned} \right\} \dots 178)$$

und sodann auch nach Gl. 175b die Forderung

$$\left. \begin{aligned} k_z &\geq -0,35 \sigma + 0,55 \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_o \tau)^2}, \\ \alpha_o &= \frac{k_z}{1,3 k_d} \end{aligned} \right\} \dots 178a)$$

befriedigt sein muss. Hierbei ist vorausgesetzt, dass Rücksichtnahme auf Knickung (§ 23) nicht nöthig wird.

Die Werthe von τ können unmittelbar aus der Spalte 3 der Zusammenstellung des § 36 entnommen werden, sofern k_d durch τ ersetzt wird. Die Normalspannung σ tritt nur mit ihrer absoluten Grösse in die Beziehungen 176 bis 178a ein.

§ 50. Biegung und Drehung.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äusseren Kräfte ergeben für den betrachteten Querschnitt zwei Kräftepaare, das eine (biegende) vom Momente M_b und das andere (drehende) vom Momente M_d ; die Ebene des ersteren schneidet den Querschnitt, diejenige des letzteren die Stabachse senkrecht.

In einem beliebigen Punkte des Querschnitts verursacht

M_b eine Normalspannung σ , welche nach § 16 oder § 21 festzustellen ist,

M_d eine Schubspannung τ , deren Bestimmung nach den §§ 32 bis 34 zu erfolgen hat.

Die für den betreffenden Punkt resultierende Anstrengung ergibt sich alsdann aus Gl. 174. Bezeichnet k_b die zulässige Biegungs- und k_d die zulässige Drehungsanstrengung, so gilt mit $m = \frac{10}{3}$

$$\left. \begin{aligned} k_b &\geq 0,35 \sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4 (\alpha_o \tau)^2}, \\ \alpha_o &= \frac{k_b}{1,3 k_d}. \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot 179)$$

Naturgemäss sind σ und τ für denjenigen Querschnitt und hier für denjenigen Punkt einzuführen, für welchen die rechte Seite den grössten Werth erlangt.

I. Kreisquerschnitt.

Hier fallen die Punkte der grössten Normalspannung

$$\sigma = \frac{32}{\pi} \frac{M_b}{d^3} \quad (\text{Gl. 43 u. Gl. 49})$$

und die Punkte der grössten Schubspannung

$$\tau = \frac{16}{\pi} \frac{M_d}{d^3} \quad (\text{Gl. 105})$$

zusammen, folglich

$$k_b \geq 0,35 \frac{32}{\pi} \frac{M_b}{d^3} + 0,65 \sqrt{\left(\frac{32}{\pi} \frac{M_b}{d^3}\right)^2 + \left(\frac{32}{\pi} \frac{M_d}{d^3} \alpha_o\right)^2}$$

$$k_b \geq \frac{32}{\pi} \frac{1}{d^3} [0,35 M_b + 0,65 \sqrt{M_b^2 + (\alpha_o M_d)^2}] \quad . \quad 180)$$

Auch für den Kreisringquerschnitt findet dieses Zusammenfallen statt.

2. Elliptischer Querschnitt, Fig. 91.

- a) Die Ebene des biegenden Kräftepaars läuft parallel zur kleinen Achse der Ellipse.

Die grösste Normalspannung

$$\sigma = \frac{4}{\pi} \frac{M_b}{a b^2}$$

tritt hier auf in den Endpunkten B der kleinen Achse (Gl. 43 und 50).

Die Schubspannung erlangt ihren Grösstwerth

$$\tau = \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{a b^2}$$

an denselben Stellen (Gl. 113).

Hiernach findet die grösste Anstrengung in den Punkten B statt. Demgemäss ergibt sich aus Gl. 179

$$k_b \geq 0,35 \frac{4}{\pi} \frac{M_b}{a b^2} + 0,65 \sqrt{\left(\frac{4}{\pi} \frac{M_b}{a b^2}\right)^2 + \left(\frac{4}{\pi} \frac{M_d}{a b^2} \alpha_o\right)^2}$$

$$k_b \geq \frac{4}{\pi} \frac{1}{a b^2} [0,35 M_b + 0,65 \sqrt{M_b^2 + (\alpha_o M_d)^2}] \quad . \quad 181)$$

b) Die Ebene des biegenden Kräftepaars läuft parallel zur grossen Achse der Ellipse.

Die Normalspannung besitzt ihren Grösstwerth in den Endpunkten A der grossen Achse, während die Schubspannung in den Endpunkten B der kleinen Achse am grössten ausfällt. Infolge dessen muss zunächst ermittelt werden, an welchen Stellen die grösste Anstrengung eintritt.

Dass dieselben auf dem Umfange liegen, ist ohne Weiteres klar. Nun ist nach Gl. 42 die Normalspannung σ im Abstände z' von der kleinen Achse

$$\sigma = \frac{M_b}{\Theta} z' = \frac{M_b}{\frac{\pi}{4} a^3 b} z'$$

und nach Gl. 112 die vom drehenden Moment verursachte Schubspannung in den um z' von derselben Achse abstehenden Umfangspunkten

$$\tau = \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{a b^2} \sqrt{\left(\frac{y'}{b}\right)^2 + \left(\frac{z'}{a}\right)^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

oder unter Beachtung, dass

$$\left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1 - \left(\frac{z'}{a}\right)^2,$$

$$\tau = \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{a b^2} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^4} z'^2}.$$

Hieraus ergibt sich die Anstrengung in den durch z' bestimmten Umfangspunkten zu

$$\begin{aligned} \max \left(\frac{\epsilon_1}{\alpha} \right) &= 0,35 \frac{4 M_b}{\pi a^3 b} z' + 0,65 \sqrt{\left(\frac{4 M_b}{\pi a^3 b} z' \right)^2 + \left(\frac{4 M_d}{\pi a b^2} \alpha_0 \right)^2 \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^4} z'^2 \right)} \\ &= \frac{4 M_b}{\pi a^3 b} \left[0,35 z' + 0,65 \sqrt{z'^2 + \left(\frac{M_d a^2}{M_b b} \alpha_0 \right)^2 \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^4} z'^2 \right)} \right]. \quad 182) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck erlangt seinen Grösstwerth für den durch

$$d \frac{\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right)}{dz'} = 0, \quad z' = z'_o$$

bestimmten Werth z'_o , womit dann

$$k_b \geq \frac{4M_b}{\pi a^2 b} \left[0,35 \frac{z'_o}{a} + 0,65 \sqrt{\left(\frac{z'_o}{a} \right)^2 + \left(\frac{M_a}{M_b} \frac{a}{b} \alpha_o \right)^2 \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^4} z'^2_o \right)} \right]. \quad 183)$$

3. Rechteckiger Querschnitt, Fig. 96.

- a) Die Ebene des biegenden Kräftepaares läuft parallel zur kurzen Seite des Rechtecks.

Hier fallen die Stellen der grössten Drehungsanstrengung τ , d. s. die Mitten der langen Seiten, auf solche der grössten Biegeanstrengung σ , d. s. sämtliche Punkte der langen Seiten.

Wegen

$$\sigma = 6 \frac{M_b}{b^2 h} \quad (\text{Gl. 43 und 47}),$$

$$\tau = 4,5 \frac{M_a}{b^2 h} \quad (\text{Gl. 122})$$

ergibt sich nach Gl. 179

$$k_b \geq \frac{6}{b^2 h} [0,35 M_b + 0,65 \sqrt{M_b^2 + (1,5 \alpha_o M_a)^2}]. \quad 184)$$

und für das Quadrat mit $h = b$

$$k_b \geq \frac{6}{b^3} [0,35 M_b + 0,65 \sqrt{M_b^2 + (1,5 \alpha_o M_a)^2}]. \quad 185)$$

- b) Die Ebene des biegenden Kräftepaares läuft parallel zur langen Seite h des Rechteckes.

Hier erlangen σ und τ ihre Grösstwerthe nicht in den gleichen Punkten (σ wird am grössten in den kurzen Seiten, τ dagegen in

den Mitten der langen Seiten), in Folge dessen in derselben Weise vorzugehen ist, wie unter Ziff. 2, b für den elliptischen Querschnitt angegeben wurde.

- c) Die Ebene des biegenden Kräftepaars hat keine der beiden unter a und b bezeichneten Lagen.

Für ein beliebiges, durch y und z bestimmtes Querschnittselement betrug die Biegungsanstrengung σ nach § 21, Ziff. 2, mit den daselbst gebrauchten Bezeichnungen

$$\sigma = M_b \left(\frac{z \cos \beta}{\Theta_1} - \frac{y \sin \beta}{\Theta_2} \right),$$

$$\Theta_1 = \frac{1}{12} b h^3, \quad \Theta_2 = \frac{1}{12} b^3 h,$$

die Drehungsanstrengung τ folgt aus § 34

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2},$$

und nach Einführung von

$$\left. \begin{aligned} \tau_y &= 9 \frac{M_d}{b^3 h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] y, \\ \tau_z &= 9 \frac{M_d}{b h^3} \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right] z, \end{aligned} \right\} \dots 186)$$

$$\tau = 9 \frac{M_d}{b h} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]^2 \frac{y^2}{b^4} + \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right]^2 \frac{z^2}{h^4}}. \quad 187)$$

Diese Werthe von σ und τ sind nun in die rechte Seite der Gl. 179 einzuführen, hiermit die Punkte, in denen dieser Ausdruck seinen Grösstwerth erlangt, zu ermitteln und sodann der letztere selbst zu bestimmen, wie dies unter Ziff. 2, b für den Fall des elliptischen Querschnitts angedeutet worden ist.

§ 51. Zug (Druck) und Schub.

Die äusseren Kräfte liefern für den in Betracht gezogenen Querschnitt f eine in die Richtung der Stabachse fallende Zugkraft P und eine diese senkrecht schneidende Kraft S .

Die mit P verknüpfte und in allen Punkten als gleich angenommene Normalspannung beträgt

$$\sigma = \frac{P}{f},$$

die durch S wachgerufene Schubspannung unter Bezugnahme auf Fig. 120 und mit den in § 39 aufgeführten Bezeichnungen nach Gl. 134 allgemein in dem durch y oder z bestimmten Umfangspunkte

$$\tau = \frac{S}{2y \cos \varphi} \frac{M_z}{\Theta}.$$

Massgebend ist der grösste Werth, welchen τ erreicht, also beispielsweise

$$\text{für den Kreis } \tau = \frac{4}{3} \frac{S}{\frac{\pi}{4} d^2},$$

$$\text{für das Rechteck } \tau = \frac{3}{2} \frac{S}{bh}.$$

Nach Gl. 175 folgt alsdann mit k_z als zulässiger Zugsanstrengung und k_s als zulässiger Schubanstrengung

$$\left. \begin{aligned} k_z &\geq 0,35 \sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_o \tau)^2} \\ \alpha_o &= \frac{k_z}{1,3 k_s}, \end{aligned} \right\} \dots 188)$$

wobei die Punkte der grössten resultirenden Anstrengung diejenigen sind, in denen τ den grössten Werth erlangt.

Wirkt P drückend (Fall der Knickung, § 23, ausgeschlossen), so müssen die aus den Gl. 175a und 175b folgenden Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} k &\geq 0,35 \sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4 (\alpha_o \tau)^2}, \\ \alpha_o &= \frac{k}{1,3 k_s}, \end{aligned} \right\} \quad . . \quad 188a)$$

und

$$\left. \begin{aligned} k_z &\geq -0,35 \sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4 (\alpha_o \tau)^2}, \\ \alpha_o &= \frac{k_z}{1,3 k_s} \end{aligned} \right\} \quad . . \quad 188b)$$

befriedigt sein.

§ 52. Biegung und Schub.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äusseren Kräfte ergeben für den betrachteten Querschnitt ein Kräftepaar M_b , dessen Ebene den Querschnitt senkrecht schneidet, und eine in den letzteren fallende Kraft S .

I. Anstrengung des Materials.

In einem beliebigen Querschnittselement verursacht M_b eine Normalspannung σ , welche nach § 16 oder § 21 festzustellen ist,

S eine Schubspannung τ , zu deren Bestimmung die Gl. 135 zur Verfügung steht.

Da die letztere unter der Voraussetzung entwickelt wurde, dass die Schubkraft S in eine Symmetrielinie des Querschnitts fällt, so muss auch hier diese Beschränkung bezüglich der Lage von S getroffen werden. Demgemäss werde vorausgesetzt, dass der Querschnitt symmetrisch ist und dass die Ebene des biegenden Kräftepaars M_b den Querschnitt in der Symmetrielinie schneide. Dann folgt nach § 16 und § 39 unter Bezugnahme auf Fig. 120, sowie mit den daselbst gewählten Bezeichnungen:

für die in allen um z von der wagrechten Schwerlinie abstehenden Querschnittselementen gleich grosse Normalspannung

$$\sigma = \frac{M_b}{\Theta} z,$$

und für die in den Umfangspunkten PP ihren Grösstwerth erlangende Schubspannung

$$\tau = \frac{S}{2y \cos \varphi} \cdot \frac{M_z}{\Theta}.$$

Demnach mit k_b und k_s als zulässiger Biegungs- bzw. Schubanstrengung aus Gl. 175 die grösste Anstrengung in diesen Punkten

$$\left. \begin{aligned} k_b &\geq \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) \\ &= 0,35 \frac{M_b}{\Theta} z + 0,65 \sqrt{\left(\frac{M_b}{\Theta} z \right)^2 + 4 \left(\frac{S}{2y \cos \varphi} \frac{M_z}{\Theta} \alpha_o \right)^2} \\ \alpha_o &= \frac{k_b}{1,3 k_s}. \end{aligned} \right\} 189)$$

Hierbei ist derjenige Querschnitt in Betracht zu ziehen, sowie für z derjenige Werth einzuführen, wodurch der Ausdruck auf der rechten Seite seinen Grösstwerth annimmt und zu beachten, dass im Allgemeinen S und M_b nicht in ein und demselben Querschnitt ihre Grösstwerthe zu erlangen brauchen.

a) Kreisquerschnitt, Fig. 123.

Unter Voraussetzung der durch Fig. 140 dargestellten Belastungsweise ergibt sich

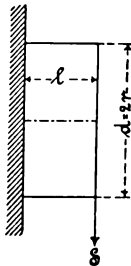


Fig. 140.

$$M_b = Sl$$

und mit

$$\Theta = \frac{\pi}{4} r^4, \quad z = r \sin \varphi,$$

$$\sigma = \frac{Sl}{\frac{\pi}{4} r^4} r \sin \varphi = \frac{4}{\pi} \frac{Sl}{r^3} \sin \varphi.$$

Gemäss § 39, Gl. 138 ist

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{S}{\pi r^2} \cos \varphi,$$

somit nach Gl. 175

$$k_b \geq \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right)$$

$$= 0,35 \frac{4}{\pi} \frac{Sl}{r^3} \sin \varphi + 0,65 \sqrt{\left(\frac{4}{\pi} \frac{Sl}{r^3} \sin \varphi \right)^2 + 4 \left(\frac{4}{3} \alpha_o \frac{S}{\pi r^2} \cos \varphi \right)^2},$$

$$k_b \geq \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = \frac{Sl}{\frac{\pi}{4} r^3} \left[0,35 \sin \varphi + 0,65 \sqrt{\sin^2 \varphi + \left(\frac{2}{3} \alpha_o \frac{r}{l} \cos \varphi \right)^2} \right]$$

Wird hierin das Anstrengungsverhältniss $\alpha_o = 1$ gesetzt, d. h.

$$k_b = 1,3 k_s \quad \text{oder} \quad k_s = 0,77 k_b,$$

und ausserdem die von dem biegenden Moment herrührende Normalspannung

$$\frac{Sl}{\frac{\pi}{4} r^3},$$

welche, in der äussersten Faser stattfindend, die massgebende Anstrengung sein würde, wenn die Schubkraft gleich Null wäre, durch σ_b ersetzt, so findet sich

$$k_b \geq \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) \\ = \sigma_b \left[0,35 \sin \varphi + 0,65 \sqrt{\sin^2 \varphi + \left(\frac{2}{3} \frac{r}{l} \cos \varphi \right)^2} \right]. \quad 190)$$

Behufs Gewinnung eines Urtheils über das Gesetz, nach welchem sich die resultirende Anstrengung mit $\frac{r}{l}$ und φ ändert, werde dieselbe für verschiedene Werthe von $\frac{r}{l}$ und φ ermittelt.

$$\alpha) \quad l = r = \frac{d}{2}.$$

Aus Gl. 190 wird

$$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = \sigma_b \left[0,35 \sin \varphi + 0,65 \sqrt{\sin^2 \varphi + \left(\frac{2}{3} \cos \varphi \right)^2} \right]$$

und damit

für	$\varphi = 0$	$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 0,43\sigma_b$	im Punkte 0, Fig. 141,
„	$\sin \varphi = 0,25$	$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 0,54\sigma_b$	„ „ 1, „ „ ,
„	$\varphi = 30^\circ$	$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 0,67\sigma_b$	„ „ 2, „ „ ,
„	$\varphi = 45^\circ$	$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 0,80\sigma_b$	„ „ 3, „ „ ,
„	$\varphi = 60^\circ$	$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 0,91\sigma_b$	„ „ 4, „ „ ,
„	$\varphi = 90^\circ$	$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 1,00\sigma_b$	„ „ 5, „ „ .

Wir ziehen durch die Kreispunkte 0, 1, 2, 3, 4, 5, Fig. 141,

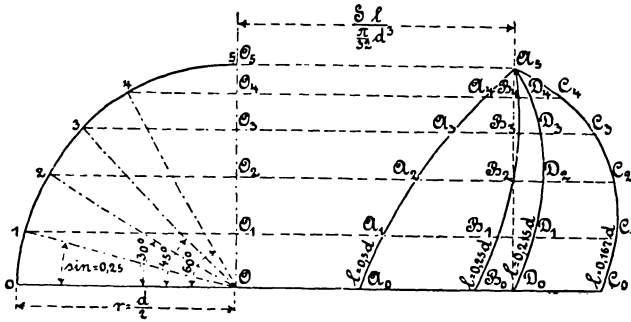


Fig. 141.

wagrechte Gerade und tragen alsdann von den Punkten 0, 0₁, 0₂, 0₃, 0₄ und 0₅ des senkrechten Halbmessers 00₅ die Strecken

$$\begin{aligned} \overline{O A_0} &= 0,43, & \overline{O_1 A_1} &= 0,54, & \overline{O_2 A_2} &= 0,67, \\ \overline{O_3 A_3} &= 0,80, & \overline{O_4 A_4} &= 0,91, & \overline{O_5 A_5} &= 1,00, \end{aligned}$$

auf und erhalten so in der Schaulinie $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ ein Bild über das Gesetz, nach welchem sich die von σ und τ herrührende Anstrengung von Punkt zu Punkt des Umfanges ändert. Im Punkte 0 ist $\sigma = 0$, und deshalb τ allein massgebend, im Punkte 5 dagegen ist $\tau = 0$ und deshalb σ allein bestimmend für die Anstrengung. Wir erkennen, dass im vorliegenden Falle, d. h. bei

$$l = r = \frac{d}{2},$$

gemäss den Verhältnissen der Fig. 140, die der grössten Schubspannung entsprechende Anstrengung noch nicht die Hälfte derjenigen Anstrengung beträgt, welche im Umfangspunkte 5 durch die Normalspannung allein bedingt wird. Würde man, wie dies nicht selten für derartige Verhältnisse angegeben ist, den Stab auf Schubinanspruchnahme berechnen, so läge hierin ein Fehler von über 100 %.

$$\beta) \quad l = \frac{1}{2} r = \frac{d}{4}.$$

Gl. 190, welche hiermit übergeht in

$$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = \sigma_b \left[0,35 \sin \varphi + 0,65 \sqrt{\sin^2 \varphi + \left(\frac{4}{3} \cos \varphi \right)^2} \right]$$

liefert

$$\text{für } \varphi = 0 \quad \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 0,87\sigma_b,$$

$$\text{„ } \sin \varphi = 0,25 \quad \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 0,94\sigma_b,$$

$$\text{„ } \varphi = 30^\circ \quad \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 0,99\sigma_b,$$

$$\text{„ } \varphi = 45^\circ \quad \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 1,01\sigma_b,$$

$$\text{„ } \varphi = 60^\circ \quad \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 1,01\sigma_b,$$

$$\text{„ } \varphi = 90^\circ \quad \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 1,00\sigma_b.$$

Die bildliche Darstellung liefert in Fig. 141 die Schaulinie $B_0 B_1 B_2 B_3 B_4 A_5$. Wir erkennen, dass auch für $l = 0,5 r = 0,25 d$ die grösste in der Nullachse eintretende Schubanstrengung noch wesentlich kleiner ist, als die Anstrengung, welche im Punkte 5 von dem biegenden Moment allein veranlasst wird. Der Grösstwerth der resultirenden Anstrengung liegt zwischen $\varphi = 45^\circ$ und $\varphi = 60^\circ$ und überschreitet σ_b um rund 1,5%.

$$\gamma) \quad l = \frac{1}{3} r = \frac{d}{6}.$$

In ganz gleicher Weise, wie unter a und b, erhalten wir hier

$$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = \sigma_b \left[0,35 \sin \varphi + 0,65 \sqrt{\sin^2 \varphi + (2 \cos \varphi)^2} \right]$$

und

$$\begin{aligned}
\text{für } \varphi = 0 & \quad \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 1,30\sigma_b, \\
\text{„ } \varphi = 0,25 & \quad \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 1,35\sigma_b, \\
\text{„ } \varphi = 30^\circ & \quad \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 1,35\sigma_b, \\
\text{„ } \varphi = 45^\circ & \quad \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 1,28\sigma_b, \\
\text{„ } \varphi = 60^\circ & \quad \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 1,16\sigma_b, \\
\text{„ } \varphi = 90^\circ & \quad \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 1,00\sigma_b.
\end{aligned}$$

Die zugehörige Kurve ergibt sich in $C_0 C_1 C_2 C_3 C_4 A_5$. Wie ersichtlich, überschreitet hier die Schubanstrengung in der Nullachse die Biegungsanstrengung im Punkt 5 um 30%, also bedeutend. Der Grösstwerth der resultirenden Anstrengung findet sich in einem zwischen 0,25 r und 0,5 r gelegenen Abstände von der Nullachse und überschreitet die Anstrengung in letzterer um etwa 4%, also nur um wenig, hiernach würde es zulässig sein, bei

$$l = \frac{d}{6}$$

den Stab nur auf Schubbeanspruchung zu berechnen.

$$d) \quad l = 0,43 r = 0,215 d.$$

Im Falle

$$l = \frac{d}{4}$$

ergab sich die Schubanstrengung in der Stabmitte zu 0,87 der Biegungsanstrengung im Abstände r , für

$$l = \frac{d}{6}$$

dagegen um 30% grösser, als die letztere. Es ist nun von Interesse, festzustellen, für welches Verhältniss $l:r$ beide gleich werden.

Dasselbe muss nach Gl. 190 mit

$$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = \sigma_b \quad \varphi = 0$$

sich ergeben aus

$$1 = 0,65 \frac{2}{3} \frac{r}{l}$$

zu

$$\frac{l}{r} = \frac{1,3}{3} = 0,43.$$

Wird dieser Werth in Gl. 190 eingeführt, so folgt

$$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = \sigma_b \left[0,35 \sin \varphi + 0,65 \sqrt{\sin^2 \varphi + \left(\frac{2}{3} \frac{3}{1,3} \cos \varphi \right)^2} \right]$$

und hieraus

$$\text{für } \varphi = 0 \quad \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 1,00 \sigma_b,$$

$$\text{„ } \sin \varphi = 0,25 \quad \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 1,07 \sigma_b,$$

$$\text{„ } \varphi = 30^\circ \quad \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 1,10 \sigma_b,$$

$$\text{„ } \varphi = 45^\circ \quad \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 1,09 \sigma_b,$$

$$\text{„ } \varphi = 60^\circ \quad \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 1,06 \sigma_b,$$

$$\text{„ } \varphi = 90^\circ \quad \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 1,00 \sigma_b.$$

Die bildliche Darstellung liefert in Fig. 141 die Schaulinie $D_0 D_1 D_2 D_3 D_4 A_5$ mit dem Grösstwerth der Anstrengung ungefähr in halber Höhe. Derselbe beträgt rund 10% mehr als die Schub-anstrengung in der Nullachse und um ebensoviel mehr als die Biegeanstrengung im Punkte 5.

Fassen wir das im Vorstehenden unter α bis δ Gefundene zusammen, so ergibt sich Folgendes:

Bei der Belastungsweise des kreisylindrischen Stabes nach Fig. 140 genügt es, denselben mit Rücksicht auf die Biegungsanstrengung

$$\sigma_b = \frac{Sl}{\frac{\pi}{32} d^3} = \sim \frac{10 Sl}{d^3}$$

allein zu berechnen, so lange l nicht wesentlich kleiner als $\frac{d}{4}$ ist. Beträgt l erheblich weniger, als $\frac{d}{4}$, so erscheint es ausreichend, nur die Schubanstrengung

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{S}{\frac{\pi}{4} d^2}$$

zu berücksichtigen¹⁾.

Der etwaige Fehler, der hierbei begangen wird und nach Massgabe der soeben durchgeführten Berechnungen beurtheilt werden kann, liegt innerhalb des Genauigkeitsgrades, welcher bei Festigkeitsrechnungen erreichbar zu sein pflegt.

Die Berechnung auf Schubanstrengung allein in Fällen, in denen

$$l \geq \frac{d}{4},$$

erscheint unzutreffend, insbesondere dann, wenn

$$\tau = \frac{S}{\frac{\pi}{4} d^2}$$

gesetzt wird.

¹⁾ Hiernach hat die Bestimmung der Abmessungen des Körpers von gleichem Widerstande, Fig. 50, in der Nähe der Punkte A und B zu erfolgen, wobei

$$S = P \frac{b}{l}, \text{ bzw. } P \frac{a}{l}$$

ist. Streng genommen wäre die Stabform überhaupt auf Grund der Gl. 189 festzustellen und hierbei darauf Rücksicht zu nehmen, dass die Kraft P , wie auch S über eine, wenn auch kleine Strecke vertheilt angreift.

(Vergl. auch die in § 40 mitgetheilten Versuchsergebnisse, sowie die Fussbemerkung S. 208.).

Ist das Anstrengungsverhältniss α_0 von 1, welcher Werth den besonderen Erörterungen unter α bis δ zu Grunde liegt, wesentlich verschieden, so wird auf die Gleichung

$$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = \sigma_b \left[0,35 \sin \varphi + 0,65 \sqrt{\sin^2 \varphi + \left(\frac{2}{3} \alpha_0 \frac{r}{l} \cos \varphi \right)^2} \right]$$

zurückgegriffen werden müssen.

b) Rechteckiger Querschnitt.

In ganz entsprechender Weise, wie unter a) gelangen wir, sofern b die Breite, h die Höhe des Rechtecks bedeutet und die Richtung von S parallel zu h läuft, mit

$$M_b = Sl \text{ (s. Fig. 140)}$$

zu

$$\sigma = \frac{Sl}{\frac{1}{12} bh^3} z,$$

und nach Gl. 131 zu

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{S}{b h} \left[1 - \left(\frac{z}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right],$$

giltig für die Spannungen im Abstand z von der Nullachse.

Unter der Voraussetzung $\alpha_0 = 1$ liefert Gl. 189

$$k_b \geq \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = \sigma_b \left\{ 0,35 \cdot \frac{z}{\frac{h}{2}} + 0,65 \sqrt{\left(\frac{z}{\frac{h}{2}} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{z}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right]^2} \right\}, \quad (191)$$

wenn die Biegungsspannung der äussersten Faser

$$\frac{Sl}{\frac{1}{6} bh^3} = \sigma_b$$

gesetzt wird.

Wählen wir $l = 0,325 h$, so findet sich

$$\begin{aligned} \text{für } z = 0 & \quad \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 1,00\sigma_b, \\ \text{„ } z = \frac{1}{8} h & \quad \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 1,04\sigma_b, \\ \text{„ } z = \frac{1}{4} h & \quad \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 0,99\sigma_b, \\ \text{„ } z = \frac{3}{8} h & \quad \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 0,91\sigma_b, \\ \text{„ } z = \frac{1}{2} h & \quad \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 1,00\sigma_b. \end{aligned}$$

Die bildliche Darstellung giebt die Fig. 142. Wie ersicht-

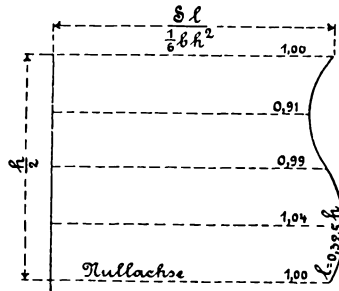


Fig. 142.

lich, erlangt die Anstrengung zwischen der Nullachse und

$$z = \frac{h}{2}$$

einen grössten und einen kleinsten Werth. Ersterer überschreitet σ_b um etwa 4%, letzterer bleibt um 9% darunter. Die Anstrengung in der Nullachse (lediglich Schub) ist gleich der Anstrengung in der äussersten Faser (nur Biegung). Würde $l < 0,325 h$ genommen, so übersteigt die Erstere die Letztere; für $l > 0,325 h$ tritt das Entgegengesetzte ein.

Demgemäss folgt:

Ist bei dem Stabe mit rechteckigem Querschnitt, belastet nach Massgabe der Fig. 140, $l \geq 0,325 h$, so genügt es, ihn mit Rücksicht auf die Biegebbeanspruchung

$$\sigma_b = \frac{6 S l}{b h^2}$$

allein zu berechnen; beträgt dagegen $l \leq 0,325 h$, so reicht es aus, lediglich die Schubbeanspruchung

$$\tau = \frac{3 S}{2 b h}$$

der Berechnung zu Grunde zu legen¹⁾.

Die Rücksichtnahme auf die Schubkraft allein, bei l erheblich grösser als $0,325 h$, muss unzutreffende Ergebnisse liefern. (Vergl. Fussbemerkung S. 208).

Wenn das Anstrengungsverhältniss α_0 von 1 wesentlich abweicht, so ist auf Gl. 189 zurückzugehen.

c) I-Querschnitt.

Für Querschnitte dieser und ähnlicher Art lassen sich so einfache Festsetzungen, wie sie unter a und b für den Kreis, bzw. das Rechteck ausgesprochen werden konnten, nicht aufstellen. Hier muss im einzelnen Falle die Gl. 189 unter Beachtung der daselbst angeschlossenen Bemerkung, sowie des in § 39 d Gesagten zum Ausgangspunkt genommen werden.

Hinsichtlich der erforderlichen Stärke des Steges pflegt für den Fall, dass nicht Herstellungsrücksichten die Entscheidung treffen, die Fernhaltung von Ausbiegungen (Knickung) und nicht die Schubspannung in der Nullachse bestimmend zu sein, namentlich dann, wenn die Belastung des Trägers örtlich zusammengedrängt angreift, wie Versuche mit eisernen I-Trägern lehren und wie sich auch unter Beachtung der geringen Widerstandsfähigkeit

¹⁾ Hiernach sind die Abmessungen der in der Nähe des Punktes *B* gelegenen Querschnitte der Körper gleicher Festigkeit, Fig. 48 und Fig. 49, zu bestimmen. Vergl. auch Fussbemerkung zu a, S. 270.

verhältnissmässig dünner Wandungen gegenüber Einflüssen, welche auf seitliche Ausbiegung hinwirken, aus dem unter „IV. Knickung“ Erörterten ohne Weiteres ergibt, selbst unter Voraussetzung einer (in Bezug auf den Trägerquerschnitt) symmetrischen Belastung. Oft ist jedoch auf eine solche nicht zu rechnen, beispielsweise dann nicht, wenn die Belastung durch Querbalken erfolgt, die mit ihren Enden aufliegen. Indem sich dieselben unter ihrer Last durchbiegen, belasten sie den inneren Theil der Trägerflansche stärker, während der äussere Theil entlastet wird. Die Kraft geht nicht mehr durch die Mitte des Steges; sie kann bei entsprechender Flanschenbreite für den Steg unter Umständen ein verhältnissmässig sehr bedeutendes Biegemoment ergeben.

Um die Formänderung eines in der Mitte hinsichtlich des Querschnittes symmetrisch belasteten und an den Enden unterstützten Trägers deutlich erkennen zu lassen, wurde ein Träger von 200 mm Höhe aus Hartblei¹⁾ (Flanschen: 70 mm breit, 20 mm stark, Steg: 10 mm stark, Entfernung der Auflager 500 mm) vor der Belastung mit einem Quadratnetz versehen. Fig. 148, Taf. XI, giebt das Bild des mittleren Theiles dieses Trägers, wie er sich infolge der Belastung gestaltet hat, wieder. Von Interesse ist namentlich die Verfolgung der Aenderungen, welche die Form einzelner Quadrate erfahren hat.

2. Formänderung.

a) Im Allgemeinen.

Ein prismatischer Stab sei in der aus Fig. 54 ersichtlichen Weise belastet. Die auf denselben wirkenden äusseren Kräfte ergeben — abgesehen von dem Eigengewicht —

- a) für jeden innerhalb der Strecke AB gelegenen Querschnitt ein biegendes Kräftepaar vom constanten Moment $M_b = P\alpha$; infolge dessen die elastische Linie zwischen A und B (vergl. § 16, Gl. 40) einen Kreisbogen vom Halbmesser

$$\rho = \frac{\Theta}{\alpha M_b}$$

bildet;

¹⁾ Vergl. Fussbemerkung S. 145

- b) für die Querschnitte, ausserhalb der Strecke AB , je nach ihrem Abstand von der Querschnittsebene A , bezw. B ein verschieden grosses, zwischen Pa (im Querschnitt bei A , bezw. B) und Null (in den Endquerschnitten) liegendes Moment und eine Schubkraft P .

Um uns ein anschauliches Bild über die hierbei auftretenden Formänderungen zu verschaffen, ziehen wir auf dem unbelasteten Stabe, dessen Querschnitt ein Rechteck mit der Breite b und der in der Bildebene liegenden Höhe h sein mag, nach Massgabe der Fig. 143, welche den halben Stab von der Länge $a + \frac{l}{2}$ darstellt, gerade Linien und zwar zunächst parallel zur Stabachse, die als Achsenlinien bezeichnet werden sollen, und sodann senkrecht zu letzteren, d. s. Querschnittslinien, je in gleichem Abstände von einander. Hierdurch wird die Seitenfläche von der Höhe h in eine Anzahl gleicher Rechtecke eingetheilt.

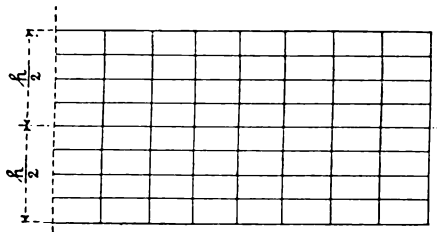


Fig. 143.

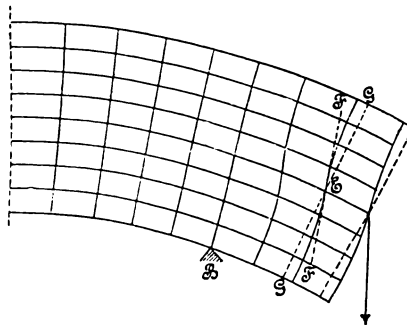


Fig. 144.

Unter Einwirkung der Belastung — Fig. 54 — wird der Stab eine Aenderung seiner Gestalt erfahren, wobei die Rechtecke ebenfalls ihre Form ändern müssen.

Für die Stabquerschnitte zwischen A und B liefert die Belastung, wie oben unter a bereits hervorgehoben wurde, lediglich ein biegendes Moment. Demgemäss werden nach § 16 die oberhalb der Nullachse gelegenen Fasern eine mit ihrem Abstände von dieser zunehmende Dehnung, die unterhalb gelegenen eine entsprechende Zusammendrückung erfahren. Die ursprünglich parallelen Querschnitte sind jetzt gegen einander geneigt, ihr früherer Abstand ist nur noch in der Stabachse vorhanden. Es treten lediglich Normalspannungen auf, Schubspannungen fehlen; infolge dessen müssen die auf die Stabfläche gezeichneten Achsen- und Querschnittslinien die rechten Winkel, unter denen sie sich ursprünglich schnitten, beibehalten: die ursprünglichen Rechtecke gehen in Kreisringsektoren über. Fig. 144 lässt dieselben für die rechte Hälfte von AB (Fig. 54) erkennen.

Auf die rechts von B gelegenen Querschnitte wirkt, wie oben unter b bereits bemerkt, ausser dem biegenden Moment noch eine Schubkraft, welche Schubspannungen wachruft, die nach § 38 (s. namentlich Fig. 119) im Abstände $+\frac{h}{2}$ und $-\frac{h}{2}$ von der Nullachse d. h. in der oberen und in der unteren Begrenzungsfläche des Stabes, sofern hier äussere Kräfte nicht angreifen, Null sein müssen, während sie nach der Achse hin zunehmen und in letzterer den grössten Werth erreichen. Daraus folgt, dass die auf der Staboberfläche gezogenen Querschnittslinien auch ausserhalb der Strecke AB — Fig. 54 — die im Abstände $+\frac{h}{2}$ und $-\frac{h}{2}$ befindliche Begrenzungslinien da, wo äussere Kräfte nicht angreifen, rechtwinklig schneiden müssen, dass sie dagegen die nach der Stabachse zu gelegenen Achsenlinien schiefwinklig zu treffen haben. Die Abweichung von der Rechtwinkligkeit wird in der Stabachse ihren grössten Werth erreichen. Nach Fig. 144 muss, sofern GG in E senkrecht zur gekrümmten Stabachse und FF Tangente im Punkte E der Querschnittslinie ist, dieser Grösstwerth gleich dem Bogen γ_{max} des Winkels FEG sein und mit der durch Gleichung 132 bestimmten Schubspannung

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{P}{bh}$$

in der Beziehung

$$\gamma_{max} = \beta \tau_{max}$$

stehen, worin β den Schubcoefficienten bedeutet (§ 29). Für eine beliebige, um z von der Nullachse abstehende Stelle ist die Schubspannung nach Gl. 131

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{P}{b h} \left[1 - \left(\frac{z}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right]$$

und somit die Abweichung von der Rechtwinkligkeit

$$\gamma = \beta \tau = \frac{3}{2} \frac{P}{b h} \left[1 - \left(\frac{z}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right] \beta.$$

Für

$$z = \pm \frac{h}{2}$$

wird $\gamma = 0$, wie bereits hervorgehoben.

Dem Vorstehenden gemäss wird der ursprünglich ebene Querschnitt auch dann, wenn er unter Einfluss des biegenden Momentes eben geblieben ist, durch die Einwirkung der Schubkraft in eine gekrümmte Fläche übergehen, wie dies Fig. 144 rechts von B — in übertrieben gezeichneter Weise — erkennen lässt. Diese Wölbungslinie, welche in der Stabachse einen Wendepunkt besitzt, ist hiernach eine nothwendige Folge der besprochenen Veränderlichkeit der Schubspannung. Eine strenge Darstellung derselben wird zu berücksichtigen haben, dass die äusseren Kräfte nicht in einem Punkte oder einer Linie, sondern in einer Fläche den Stab treffen, so dass also beispielsweise die Querschnitte unmittelbar rechts vom Mittelpunkte oder der Mittelebene B des Auflagers nicht sofort die volle Krümmung annehmen, während die unmittelbar links davon gelegenen auch nicht mehr vollkommen eben sein können.

Die Feststellung der besprochenen Querschnittswölbung auf dem Wege des Versuches begegnet grossen Schwierigkeiten. Um die Krümmung deutlich zu machen, sind im Vergleich zur Länge verhältnissmässig hohe Stäbe zu verwenden; dann aber müssen zur

Herbeiführung einer für den bezeichneten Zweck genügenden Formänderung so bedeutende Kräfte auf verhältnissmässig kleine Theile der Staboberfläche wirken, dass hier starke örtliche Formänderungen eintreten, welche die Reinheit des Bildes erheblich beeinträchtigen. Soll dieser Uebelstand vermieden werden, so wird man suchen müssen, dem Stabe eine solche Gestalt zu geben, dass schon weit kleinere Schubkräfte erhebliche Schubspannungen wachrufen. Ein solcher Körper ist in Fig. 145 dargestellt: I-Träger, in der Mittellinie zum Theil ausgebohrt, so dass zur Uebertragung der Schubkräfte

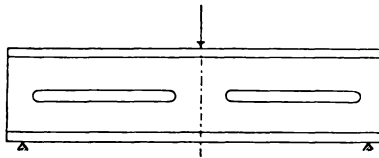


Fig. 145.

in der Stabachse nur ein verhältnissmässig kleiner Querschnitt zur Verfügung steht, weshalb hier die Schubspannungen bedeutend ausfallen müssen. Wird der Stab in der Mitte belastet und an den Enden unterstützt, so nimmt die ursprünglich ebene Stirnfläche die Gestalt Fig. 146 (Schmiedeisenträger) Taf. XII, an. Dieselbe entspricht der Form, welche in Fig. 144 rechts von *B* angegeben wurde: Die gedrückten Fasern widerstreben der Verkürzung, die gezogenen der Verlängerung infolge der Kleinheit des Querschnittes, durch welchen sich die Druckkräfte (oberhalb der Nullachse) und die Zugkräfte (unterhalb dieser Achse) in's Gleichgewicht setzen, mit sichtbarem Erfolg.

Wie das rechts gezeichnete Trägerende erkennen lässt, erfolgt das innen seinen Anfang nehmende Einreissen des Stabes zunächst in einer Richtung von ungefähr 45° gegen die Richtung der Schubspannung, entsprechend dem Umstande, dass die Dehnung, welche mit der Schubspannung verknüpft ist, unter einem Winkel von 45° zu dieser ihren grössten Werth erreicht (§ 31, Ziff. 1).

b) Durchbiegung mit Rücksicht auf die Schubkraft.

Ein prismatischer Stab sei auf zwei um l von einander ab-
stehenden Stützen aufgelagert und in der Mitte durch die Kraft P

belastet. Die Durchbiegung, welche von P veranlasst wird, setzt sich aus zwei Theilen zusammen: aus derjenigen Durchbiegung, welche von dem biegenden Moment (in der Mitte $M_b = \frac{Pl}{4}$) allein verursacht wird, und aus der Verschiebung, welche die Querschnitte durch die Schubkraft $\frac{P}{2}$ (Auflagerdruck) erfahren.

Die Durchbiegung der ursprünglich geraden Stabachse im mittleren Querschnitt infolge des biegenden Moments beträgt nach Gl. 60

$$y' = \frac{\alpha}{48} \frac{Pl^3}{\Theta},$$

sofern Θ das gegenüber der Biegung in Betracht kommende Trägheitsmoment des Stabquerschnittes bedeutet.

Zur Feststellung desjenigen Theiles der thatsächlichen Durchbiegung, welcher von der Verschiebung der Querschnitte herrührt, führt die nachstehende Betrachtung.

$ABCD$, Fig. 147, sei ein zwischen den beiden Querschnitten AC und BD gelegenes Körperelement des unbelasteten Stabes.

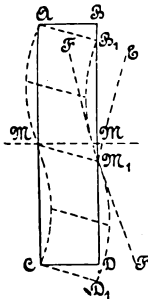


Fig. 147.

Denken wir uns jetzt im Querschnitte BD eine abwärts wirkende Schubkraft S thätig, während AC festgehalten wird, so rückt der Querschnitt BD um einen gewissen Betrag $\overline{BB_1} = \overline{MM_1} = \overline{DD_1}$ abwärts. Unter der Voraussetzung gleichmässiger Vertheilung der Schubkraft S über den Querschnitt, würde die Aenderung des Körperelements darin bestehen, dass das Rechteck $ABDC$ in das Parallelogramm AB_1D_1C übergeht. Die Querschnitte würden Ebenen bleiben. Da nun aber die Schubspannungen von der Mitte nach

aussen (d. i. von M_1 nach B_1 und D_1) hin bis auf Null abnehmen, so müssen dies die Schiebungen ebenfalls thun und damit auch die äussersten Elemente der Querschnittslinien die Begrenzungsstrecken AB_1 und CD_1 senkrecht schneiden, d. h. die Querschnitte müssen sich krümmen, wie in Fig. 147 gestrichelt angegeben ist. Die Strecke MM_1 der Achse, welche ursprünglich die Lage MM einnahm und hierbei mit der Querschnittslinie BD einen rechten Winkel bildete, weist jetzt, sofern $M_1E \perp MM_1$ und FF Tangente im Punkte M_1 der Querschnittslinie ist, eine Abweichung um den Winkel FM_1E von dieser Rechtwinkligkeit auf. Nach aussen hin nimmt diese Abweichung ab bis auf Null. Wie wir wiederholt gesehen, misst der Bogen γ , welcher diesem Abweichungswinkel entspricht, die Schiebung und steht nach Gl. 94 zu der Schubspannung τ an der betreffenden Stelle in der Beziehung

$$\gamma = \beta \tau.$$

Für die Stabachse weist γ (τ) seinen Grösstwerth auf und zwar ist

$$\gamma_{max} = \text{tg } \sphericalangle EM_1F = \sphericalangle \text{arc } \sphericalangle EM_1F.$$

Der Winkel EM_1F setzt sich aus zwei Theilen zusammen, nämlich

$$\sphericalangle EM_1F = \sphericalangle EM_1B_1 + \sphericalangle B_1M_1F.$$

Der erste Theil ist gleich

$$\sphericalangle BAB_1 = \sphericalangle MMM_1 = \sphericalangle DCD_1.$$

Er entspricht also der senkrechten Verschiebung des ganzen Querschnitts, während der zweite Theil die Folge der Querschnittskrümmung ist. Für die Ermittlung der Durchbiegung y'' infolge der Verschiebung des Querschnitts kann demnach nur der erste Theil in Betracht kommen¹⁾. Dieselbe erscheint dadurch bestimmt,

¹⁾ Die Ermittlung der von der Schubkraft S bewirkten Durchbiegung y'' nach dem Vorgange Poncelet's und Grashof's — Theorie der Elasticität und Festigkeit, 1878, S. 213 u. f. — derart, dass gesetzt wird

$$y'' = \int \gamma_{max} dx = \beta \int \tau_{max} dx,$$

muss, wie vorstehende Darlegung erkennen lässt, y'' zu gross ergeben. In den-

dass die mechanische Arbeit, welche die Schubkraft beim Sinken um $\overline{BB}_1 = \overline{MM}_1 = \overline{DD}_1$ verrichtet, gleich sein muss der Summe der Arbeiten der Schubspannungen beim Uebergang des Stabelementes $ABCD$ in die Form AB_1CD_1 mit gekrümmter Querschnittsfläche.

jenigen Fällen, in welchen die Rücksichtnahme auf y'' überhaupt in Frage zu kommen pflegt (vergl. § 22, S. 95, auch weiter oben), ist übrigens der Einfluss dieses Zugross nicht von erheblicher Bedeutung.

Die vorstehende Betrachtung über die Wölbung der ursprünglich ebenen Querschnitte eines durch Schub in Anspruch genommenen Körpers lässt sich auch auf den durch ein drehendes Kräftepaar belasteten Stab übertragen, wie folgende Bemerkungen, die der Einfachheit wegen einen bestimmten und zwar rechteckigen Querschnitt voraussetzen mögen, erkennen lassen.

Das Gesetz, nach welchem sich die Schubspannung in den Querschnittselementen der Umfangsstrecke AC des auf Drehung beanspruchten rechteckigen Stabes, Fig. 96, ändert, ist das gleiche, dem die Schubspannungen des durch die Schubkraft belasteten rechteckigen Stabes, Fig. 119, folgen; bei beiden Körpern entspricht der Verlauf der Spannungskurve einer Parabel. Wir haben demnach im ersteren Falle (Drehung) für die in der Umfangsstrecke AC liegenden Querschnittselemente auch dasselbe Krümmungsgesetz zu erwarten, wie im zweiten Falle. Thatsächlich zeigen die auf der Staboberfläche liegenden Querschnittslinien der Fig. 94, Taf. VI, den gleichen Verlauf, der sich in Fig. 147 fand. Auch für Fig. 94 ergibt die Abweichung von der Rechtwinklichkeit, d. i. der Winkel, welcher die Schiebung und damit die Schubspannung misst, zwei Theile, von denen der eine die Verschiebung der Querschnittselemente senkrecht zur Stabachse bestimmt, während der andere der eingetretenen Neigung des Querschnittselements entspricht. Für die Mitte der längeren Seite erreichen beide den grössten Werth. Hier wird ihre Summe gemessen durch das Produkt aus τ'_a (Gl. 122) und β , während der erste Theil durch den Drehungswinkel ϑ (Gl. 154) bestimmt erscheint, so dass der zweite Theil, d. i. die Neigung, welche die gewölbte Querschnittslinie, Fig. 94, in der Mitte der längeren Seite im Wendepunkte) gegenüber dem ursprünglichen Querschnitt besitzt, den Bogen

$$\begin{aligned} 4,5 \frac{M_d}{b^2 h} \beta - 3,6 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} M_d \beta \frac{b}{2} &= 4,5 \frac{M_d}{b^2 h} \left[0,6 - 0,4 \left(\frac{b}{h} \right)^2 \right] \beta \\ &= \tau'_a \left[0,6 - 0,4 \left(\frac{b}{h} \right)^2 \right] \beta \end{aligned}$$

ergiebt.

Je grösser h im Vergleich zu b , um so bedeutender wird diese Neigung; sie nähert sich hierbei asymptotisch dem Werthe

$$4,5 \cdot 0,6 \frac{M_d}{b^2 h} \beta = 2,7 \frac{M_d}{b^2 h} \beta = 0,6 \tau'_a \beta.$$

Nach § 44 findet sich für die mechanische Arbeit, welche die Formänderung des $\overline{AB} = \overline{MM} = \overline{CD} = dx$ langen Körperelementes bei der Verschiebung fordert

$$\frac{\beta}{2} dx \iint \tau'^2 d\eta dz.$$

Für $h = b = a$, d. h. für den quadratischen Querschnitt wird sie am kleinsten, nämlich gleich

$$4,5 \cdot 0,2 \frac{M_d}{a^3} \beta = 0,9 \frac{M_d}{a^3} \beta = 0,2 \tau'_a \beta.$$

Fig. 94, Taf. VI und Fig. 95, Taf. VII (vergl. je die gewölbte Querschnittsline mit der ursprünglich geraden, durch Striche bezeichneten Querschnittsline) bestätigen die Abnahme der Neigung mit Näherung von h an b .

Würde man z. B. für den quadratischen Querschnitt diese Neigung dem eigentlichen Drehungswinkel zuzählen, indem man setzt

$$\vartheta \frac{a}{2} = \tau'_a \beta = 4,5 \frac{M_d}{a^3} \beta,$$

so ergäbe sich

$$\vartheta = 9 \frac{M_d}{a^3} \beta,$$

welcher Werth mit der von Grashof in seiner Theorie der Elasticität und Festigkeit 1878, S. 144 gefundenen Grösse (Gl. 246) übereinstimmt.

Nach Massgabe unserer Erörterungen erscheint dieselbe um

$$100 \frac{9 - 7,2}{7,2} = 25 \%$$

zu gross. Wie aus den Erörterungen des Verfassers „über die heutige Grundlage der Berechnung auf Drehung beanspruchter Körper“ in der Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure 1889, S. 139 erhellt, ergibt sich in Uebereinstimmung hiermit der Drehungswinkel

für Gusseisen um

$$100 \frac{1,43 - 1,20}{1,20} = 19 \%,$$

für Schmiedeeisen und Stahl um

$$100 \frac{0,883 - 0,696}{0,696} = 27 \%$$

grösser als Bauschinger durch Messung bestimmte (vergl. auch Schluss von § 43).

Hierin ist unter Bezugnahme auf Fig. 120 und nach Gl. 135

$$\tau' = \frac{S}{2y \cos \varphi'} \frac{M_z}{\Theta}$$

die Schubspannung in dem um η von der z -Achse abstehenden Punkte P' , der mit dem Flächenelemente $d\eta dz$ zusammenfällt.

Wird nun $\overline{BB_1} = \overline{MM_1} = \overline{DD_1}$ mit dy'' bezeichnet, so erhalten wir

$$\frac{1}{2} S dy'' = \frac{\beta}{2} dx \iint \tau'^2 d\eta dz$$

$$dy'' = \frac{\beta}{S} dx \iint \tau'^2 d\eta dz$$

$$y'' = \beta \int \frac{dx}{S} \iint \tau'^2 d\eta dz, \quad \dots \dots \dots 192)$$

sofern der Schubcoefficient β unveränderlich ist.

Beispielsweise findet sich für den rechteckigen Querschnitt von der Breite b und der Höhe h (vergl. Schluss von § 44), da hier wegen $\varphi = \varphi' = 0$ die Schubspannung für alle in demselben Abstände z gelegenen Flächenelemente gleich ist, nämlich

$$\tau' = \tau = \frac{3}{2} \frac{S}{bh} \left[1 - \left(\frac{z}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right],$$

so dass an die Stelle von $d\eta dz$ sofort der Flächenstreifen $b dz$ treten kann,

$$y'' = \frac{9}{4} \beta \int \frac{S dx}{b h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left[1 - \left(\frac{z}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right]^2 dz = \frac{6}{5} \beta \int \frac{S}{bh} dx \quad 193)$$

und bei Unveränderlichkeit von S , b und h innerhalb der Strecke x

$$y'' = \frac{6}{5} \beta \frac{S}{bh} x$$

d. i. $\frac{6}{5} = 1,2$ mal so gross, als wenn die Schubkraft sich gleichmässig über den Querschnitt vertheilt haben würde.

Für den in der Mitte durch P belasteten prismatischen Stab folgt unter Vernachlässigung des Eigengewichtes wegen

$$S = \frac{P}{2},$$

$$y'' = \frac{6}{5} \beta \frac{\frac{1}{2} P}{b h} \frac{l}{2} = 0,3 \beta \frac{P}{b h} l. \quad \dots \quad 194)$$

Hiernach die Gesamtdurchbiegung des rechteckigen Stabes in der Mitte

$$\begin{aligned} y' + y'' &= \frac{\alpha}{48} \frac{P l^3}{\frac{1}{12} b h^3} + 0,3 \beta \frac{P}{b h} l \\ &= \left\{ 0,25 \alpha \left(\frac{l}{h} \right)^2 + 0,3 \beta \right\} \frac{P}{b h} l. \end{aligned}$$

Wird der Schubcoefficient β nach Gl. 99 durch

$$\beta = 2 \frac{m+1}{m} \alpha$$

ersetzt, so folgt

$$y' + y'' = \left\{ 0,25 \left(\frac{l}{h} \right)^2 + 0,6 \frac{m+1}{m} \right\} \alpha \frac{P}{b h} l. \quad 195)$$

und mit $m = \frac{10}{3}$

$$y' + y'' = \left\{ 0,25 \left(\frac{l}{h} \right)^2 + 0,78 \right\} \alpha \frac{P}{b h} l \quad \dots \quad 196)$$

Hierin bestimmt das erste Glied der Klammer den Einfluss des biegenden Momentes auf die Durchbiegung, während das zweite denjenigen der Schubkraft zum Ausdruck bringt. Das Verhältniss von y'' zu y' ist demnach

$$\frac{y''}{y'} = \frac{0,78}{0,25 \left(\frac{l}{h}\right)^2} = \frac{3,12}{\left(\frac{l}{h}\right)^2}.$$

Es beträgt

für $l =$	$2 h$	$4 h$	$8 h$	$16 h$
	$0,78 : 1$	$0,195 : 1$	$0,049 : 1$	$0,012 : 1.$

Von praktischer Bedeutung kann die Rücksichtnahme auf y'' werden, wenn es sich um die Ermittlung des Dehnungscoefficienten α aus Biegungsversuchen mit Stäben oder Trägern handelt, deren Höhe erheblich ist, worauf bereits § 22, Ziff. 1 aufmerksam gemacht wurde. Durch die bisher übliche Vernachlässigung von y'' beging man im Falle des rechteckigen Querschnittes bei $l = 1000$ mm und

$$h = \frac{l}{4} = 250 \text{ mm einen Fehler von } 19,5\%$$

$$h = \frac{l}{8} = 125 \text{ " " " " } 4,9 \text{ "}$$

$$h = \frac{l}{16} = 62,5 \text{ " " " " } 1,2 \text{ "}$$

Hieraus folgt, dass die Höhe der Stäbe verhältnissmässig nicht bedeutend sein darf, wenn die Ausserachtlassung von y'' zulässig erscheinen soll.

Allgemein wird zur Bestimmung von α oder $\frac{1}{\alpha}$ aus Versuchen mit Stäben von rechteckigem Querschnitt die Gl. 195 zu verwenden sein. Dieselbe liefert

$$\alpha = \frac{b h}{\left\{ 0,25 \left(\frac{l}{h}\right)^2 + 0,6 \frac{m+1}{m} \right\} l} \cdot \frac{y' + y''}{P}.$$

Hierbei ist streng genommen m für das untersuchte Material besonders zu bestimmen; doch erweist sich der Einfluss der Abweichung der besonders ermittelten Werthe von dem Mittelwerth $\frac{10}{3}$

als so unbedeutend, dass es genügt, α aus der Gl. 196, d. h. nach

$$\alpha = \frac{b h}{\left\{ 0,25 \left(\frac{l}{h} \right)^2 + 0,78 \right\} l} \frac{y' + y''}{P}$$

zu berechnen. $y' + y''$ wird zu jedem Werthe von P beobachtet und damit für jede Belastung der Dehnungscoefficient α bestimmbar.

Ganz bedeutenden Einfluss erlangt unter Umständen die Schubkraft auf die Durchbiegung bei \perp -Trägern, da hier im Steg die Querschnittsbreite gering, also γ und τ gross sein können. (Vergl. Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure 1888 S. 222 u. f., sowie § 22, Ziff. 1.)

Der Einfluss des in § 46 erörterten Widerstandes, welcher aus Anlass des Gleitens der Staboberfläche auf den Stützen (infolge der Durchbiegung) entsteht, ist bei strengen Biegungsversuchen mit erheblich hohen Stäben durch Verwendung von Rollenauflegern nach Möglichkeit herabzumindern.

Im Falle des Kreisquerschnitts vom Halbmesser $r = \frac{d}{2}$ findet sich nach Gl. 138 für die Umfangspunkte P die Schubspannung

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{S}{\pi r^2} \cos \varphi.$$

Die Schubspannung τ' , welche in dem beliebigen um z von der Nullachse und um η von der z -Achse abstehenden Punkt P' wirkt, werde in ihre zwei Componenten zerlegt:

die eine senkrecht zur y -Achse sei $\tau'_y = \tau' \cos \varphi'$,

die andere senkrecht zur z -Achse $\tau'_z = \tau' \sin \varphi'$.

Nach § 39 ist die Erstere für alle im gleichen Abstand z liegenden Flächenelemente constant, also

$$\tau'_y = \tau \cos \varphi = \frac{4}{3} \frac{S}{\pi r^2} \cos^2 \varphi = \tau_y,$$

während die Letztere, von aussen nach der Mitte zu bis auf Null abnehmend, in den Umfangspunkten P die Grösse

$$\tau_z = \tau \sin \varphi = \tau_y \operatorname{tg} \varphi,$$

in dem beliebigen um η von der z -Achse abstehenden Punkte P' den Werth

$$\tau'_z = \tau_y \operatorname{tg} \varphi' = \tau_y \frac{\eta}{y} \operatorname{tg} \varphi$$

besitzt.

Wegen

$$\tau'^2 = \tau_y'^2 + \tau'_z{}^2 = \left(1 + \frac{\eta^2}{y^2} \operatorname{tg}^2 \varphi\right) \tau_y^2$$

ergibt Gl. 192

$$\begin{aligned} y'' &= \beta \int \frac{dx}{S} \int \tau_y^2 dz \int_{-y}^{+y} \left(1 + \frac{\eta^2}{y^2} \operatorname{tg}^2 \varphi\right) d\eta \\ &= 2\beta \int \frac{dx}{S} \int \left(1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \varphi\right) y \tau_y^2 dz. \end{aligned}$$

Hieraus folgt mit

$$\tau_y = \frac{4}{3} \frac{S}{\pi r^2} \cos^2 \varphi, \quad y = r \cos \varphi, \quad dz = d(r \sin \varphi) = r \cos \varphi d\varphi,$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{32\beta}{27\pi r^2} \int S dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (3 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \cos^6 \varphi d\varphi \\ &= \frac{32\beta}{27\pi r^2} \int S dx, \end{aligned}$$

und sofern S unveränderlich innerhalb der Strecke x

$$y'' = \frac{32}{27} \beta \frac{S}{\pi r^2} x$$

d. i.

$\frac{32}{27} = 1,185$ mal so gross, als wenn die Schubkraft sich gleichmässig über den Querschnitt vertheilt haben würde.

Für den Fall des auf beiden Enden im Abstände l gestützten

und in der Mitte mit P belasteten Stabes ist unter Vernachlässigung des Eigengewichts $S = \frac{P}{2}$ und damit

$$y'' = \frac{32 \beta}{27 \pi r^2} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{P}{2} dx = \frac{32}{27} \beta \frac{\frac{P}{2}}{\pi r^2} \frac{l}{2}$$

$$= \frac{8}{27} \beta \frac{P}{\pi r^2} l = \frac{8}{27} \beta \frac{P}{\frac{\pi}{4} d^2} l \dots \dots \dots 197)$$

Hiernach beträgt die Gesamtdurchbiegung

$$y' + y'' = \frac{\alpha}{48} \frac{P l^3}{\pi d^4} + \frac{32}{27} \beta \frac{P}{\pi d^2} l$$

$$= \left\{ \frac{4}{3} \alpha \left(\frac{l}{d} \right)^2 + \frac{32}{27} \beta \right\} \frac{P}{\pi d^2} l.$$

Mit

$$\beta = 2 \frac{m+1}{m} \alpha$$

wird

$$y' + y'' = \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{l}{d} \right)^2 + \frac{16}{27} \frac{m+1}{m} \right\} \alpha \frac{P}{\frac{\pi}{4} d^2} l, \quad 198)$$

und für $m = \frac{10}{3}$

$$y' + y'' = \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{l}{d} \right)^2 + 0,77 \right\} \alpha \frac{P}{\frac{\pi}{4} d^2} l \dots \dots \dots 199)$$

Unter Umständen erscheint es vorthailhaft, die nach Massgabe des Vorstehenden ermittelte Grösse y'' allgemein in Vergleich zu stellen mit derjenigen Verschiebung, die sich ergibt, wenn man die (thatsächlich nicht zutreffende) Annahme macht, dass sich die Schubkraft S gleichmässig über den Querschnitt f vertheile. Diese Unterstellung führt für das Körperelement von der Länge dx zu

$$\gamma dx = \beta \tau dx = \beta \frac{S}{f} dx,$$

während Gl. 192 für dasselbe liefert

$$\beta \frac{\iint \tau^2 d\eta dz}{S} dx.$$

Demnach das Verhältniss μ der letzteren Grösse (der thatsächlichen Verschiebung) zu der ersteren (der unterstellten Verrückung)

$$\mu = \frac{f}{S^2} \iint \tau^2 d\eta dz. \quad 200)$$

Der Coefficient μ , welcher für jeden Querschnitt besonders ermittelt werden muss¹⁾ und welcher als Coefficient der Querschnittsverschiebung bezeichnet werden kann, ist dann diejenige Zahl, mit welcher die unter Voraussetzung gleichmässiger Spannungsvertheilung gewonnene Verschiebung multiplicirt werden muss, um die thatsächliche zu erhalten. Beispielsweise beträgt derselbe für das Rechteck 1,2, für den Kreis 1,185²⁾ — wie wir oben bereits gefunden haben —, für I-Querschnitt steigt er bis auf 3 und darüber.

§ 53. Frage der Einspannung eines Stabes.

Wie in § 18, Ziff. 1, 3 und später erörtert, sowie benützt, liegt dem Begriff der Einspannung eines auf Biegung in Anspruch genommenen Stabes die Auffassung zu Grunde, dass an der Einspannstelle die elastische Linie von der ursprünglich geraden Stabachse berührt wird, d. h., dass in diesem Punkte die letztere Tan-

¹⁾ Ritter hat sich in den „Anwendungen der graphischen Statik“ Zürich 1888, No. 32 und 36 mit dieser Aufgabe eingehend und erfolgreich befasst.

²⁾ Die in der Literatur zu findende Angabe $\mu = 1,11$ beruht auf der Voraussetzung, dass die oben in der Rechnung auftretende Schubspannung τ'_z für alle Querschnittselemente gleich Null sei.

gente an der elastischen Linie ist. Hierdurch wird dieser an der Einspannstelle eine bestimmte Ordinate, sowie eine bestimmte Richtung zugewiesen.

Die Einspannung stellt man sich hierbei nicht selten in der Weise vor, dass das eingespannte Ende durch zwei, von entgegengesetzten Seiten stützende Auflager, die man als unbeweglich und unzusammendrückbar betrachtet, gehalten wird, wie Fig. 149

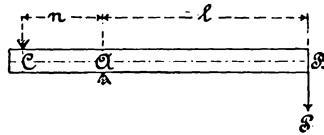


Fig. 149.

zeigt. Als Einspannstelle gilt der Querschnitt A . Zur Bestimmung der beiden in A und C wirkenden Auflagerdrücke denken wir uns in A eine senkrecht abwärts gerichtete Kraft $+P$ und eine zweite vertikal aufwärts wirkende Kraft $-P$ angebracht. Da sich diese zwei Kräfte gegenseitig aufheben, wird hierdurch nichts an dem Gleichgewichtszustande geändert. Wir haben alsdann mit der am freien Ende B angreifenden Last P — das Eigengewicht des Stabes werde vernachlässigt — drei Kräfte. $+P$ können wir uns aufgehoben vorstellen unmittelbar durch die Stütze A , während $-P$ und die Last P ein rechtsdrehendes Kräftepaar vom Moment Pl bilden, zu dessen Auffangung in A und C je der Widerlagsdruck P_1 erforderlich ist, welcher durch die Gleichung

$$P_1 n = Pl$$

zu

$$P_1 = P \frac{l}{n}$$

bestimmt wird.

Demnach ergibt sich der Widerlagsdruck in A

$$N_a = P + P \frac{l}{n} = P \left(1 + \frac{l}{n} \right)$$

und derjenige in C

$$N_c = P \frac{l}{n}.$$

Je kleiner n im Vergleich zu l , um so bedeutender werden die Kräfte N_a und N_c ausfallen. Selbst wenn man sich diese nicht in dem Punkte oder in der Linie A bzw. C zusammengedrängt angreifend denkt, sondern auf kleine Flächen vertheilt vorstellt, so werden sie doch eine Zusammendrückung des Materials der Stützen A und C , sowie der Oberfläche des Stabes an den Angriffsstellen zur Folge haben. Hiermit aber ist eine Abwärtsbewegung des Stabes bei A und eine — unter sonst gleichen Umständen wegen $N_a > N_c$ jedoch geringere — Aufwärtsbewegung desselben bei C verknüpft: Der ganze Stab wird sich — abgesehen von der Verschiebung seiner Querschnitte gegen einander, sowie von seiner Biegung — gegen seine ursprüngliche Lage neigen müssen, entsprechend der Drehung um einen zwischen A und C befindlichen Punkt, welcher infolge $N_a > N_c$ bei sonst gleichen Verhältnissen näher an C als an A gelegen ist. Wir erkennen, dass die Stützung des Stabes nach Fig. 149 die Auffassung nicht

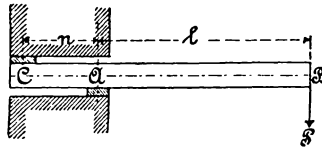


Fig. 150.

rechtfertigt, die elastische Linie, d. i. die gekrümmte Achse des durch P gebogenen Stabes habe an der Einspannstelle (d. i. in A) die ursprünglich gerade Stabachse zur Tangente.

Nur dann, wenn n verhältnissmässig gross gewählt wird und die Flächen, gegen welche sich der Stab bei A und C legt, so bedeutend sind, dass die Zusammendrückung der Stützen und ihrer Widerlager, sowie die örtliche Zusammenpressung des Stabes als unerheblich betrachtet werden dürfen, erscheint diese Auffassung mit Annäherung zulässig. Wir gelangen dann zur Construction Fig. 150 mit zwei Auflagerplatten unter A bzw. über C .

Genauer würde die in Frage stehende Auffassung zutreffen im Falle der Fig. 151, wenn der Stab in der Mitte A eine genügend grosse Auflagerfläche besitzt, sodass die Zusammendrückung da-

selbst verschwindend wenig beträgt und wenn er an den beiden Enden gleich starke Belastung erfährt. Dann fällt die Richtung der Tangente im Punkt A der elastischen Linie mit der Richtung

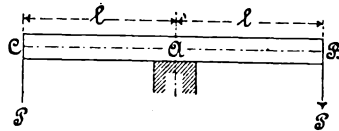


Fig. 151.

der früher geraden Stabachse zusammen. Bei erheblicher Zusammendrückung des Widerlagers und des Stabes würde im Punkte A nur Parallelismus zwischen beiden bestehen.

Wird der Stab, dessen Querschnitt ein Rechteck von der Breite b und der Höhe h sei, nach Massgabe der Fig. 152 derart befestigt, dass er in unbelastetem Zustande unter Vernachlässigung des Eigengewichtes die obere und untere Wandung, gegen die er sich legt, gerade spannungslos berührt, so liefert die Verlegung der Kraft P in die Mitte zwischen A und C die daselbst senkrecht abwärts wirkende Kraft P und ein rechtsdrehendes Kräftepaar vom Moment $P \left(l + \frac{a}{2} \right)$.

Unter Voraussetzung gleichmässiger Vertheilung von P über die Fläche ab ergibt sich die von P allein herrührende Pressung p_1 , zwischen dem Stab und der unteren Wandungsfläche,

$$p_1 = \frac{P}{ab}.$$

In Fig. 153 ist dieselbe dargestellt.

Das Moment $P \left(l + \frac{a}{2} \right)$ ruft gegenüber der rechten Hälfte der unteren Wandungsfläche von aussen nach innen zu abnehmende Pressungen wach, während die obere Wandungsfläche auf der linken Hälfte aufwärts gerichtete, von der Mitte nach aussen wachsende Pressungen erfährt, wie in Fig. 154 dargestellt ist. Mit der Ge-

naugigkeit, mit welcher die Gl. 43 auf den vorliegenden Fall angewendet werden darf, findet sich wegen

$$\sigma_1 = p_2, \quad M_b = P \left(l + \frac{a}{2} \right), \quad \Theta = \frac{1}{12} b a^3, \quad e_1 = \frac{a}{2}$$

die Pressung

$$p_2 = \frac{P \left(l + \frac{a}{2} \right)}{\frac{1}{6} b a^2} = 6 \frac{P}{a b} \left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2} \right).$$

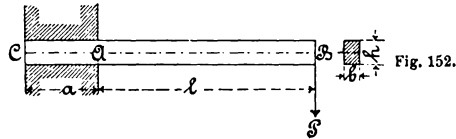


Fig. 152.

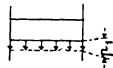


Fig. 153.

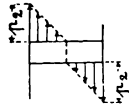


Fig. 154.

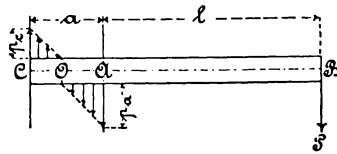


Fig. 155.

Hiermit folgt die resultierende Pressung in der Kante bei A

$$\begin{aligned} p_a = p_1 + p_2 &= \frac{P}{ab} + 6 \frac{P}{ab} \left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2} \right) \\ &= 2 \frac{P}{ab} \left(2 + 3 \frac{l}{a} \right), \dots \dots \dots 201) \end{aligned}$$

und an derjenigen bei C

$$\begin{aligned}
 p_c = -p_1 + p_2 &= -\frac{P}{ab} + 6 \frac{P}{ab} \left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= 2 \frac{P}{ab} \left(1 + 3 \frac{l}{a} \right). \quad \dots \dots \dots 202)
 \end{aligned}$$

In Fig. 155 ist diese Spannungsvertheilung dargestellt. Naturgemäss darf p_a den für die betreffenden Materialien (Stab, Stütze) noch höchstens für zulässig erachteten Werth der Druckanstrengung nicht überschreiten.

Infolge der örtlichen Zusammenpressung des Stabes, wie auch der Zusammendrückung des Materials der Wandung wird sich die Stabachse um den Punkt O drehen, dessen Abstand η von der Mitte der Wandung sich aus der Erwägung ergibt, dass

$$p_2 \frac{\eta}{\frac{a}{2}} = p_1,$$

$$6 \frac{P}{ab} \left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2} \right) \frac{\eta}{\frac{a}{2}} = \frac{P}{ab},$$

$$\eta = \frac{a}{12 \left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2} \right)}$$

Demnach

$$\overline{AO} = \frac{a}{2} + \eta = \frac{a}{2} \left[1 + \frac{1}{6 \left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2} \right)} \right]$$

Wir erkennen, dass auch hier die ursprünglich gerade Stabachse im Einspannungsquerschnitt A die elastische Linie nicht berühren kann.

Würde der Stab im unbelasteten Zustande, d. h. für $P = 0$, die obere und die untere Wandungsfläche nicht spannungslos, son-

dern mit einer gewissen Pressung p_0 berühren¹⁾, was z. B. der Fall sein kann, wenn auf dem Balken ein Theil des Gewichts der darüber aufgeführten Mauer lastet, so wird sich die Stabachse auch hier innerhalb der Wandung drehen, jedoch nicht soviel wie folgende Betrachtung erkennen lässt. Durch die Pressung p_0 findet zunächst eine Zusammenpressung der sich berührenden Oberflächen statt, so dass bei Beginn der Einwirkung der Belastung P die betreffenden Flächen des Stabes und der Wandung sich bereits in weit vollkommenerer Weise berühren, als bei ursprünglich spannungsloser Befestigung; infolge dessen der in Frage kommende Einfluss der von P veranlassten Pressungen kleiner ausfallen muss. Auch die Reibung, welche zwischen Wandung und Stab mit innerhalb der Wandung eintretender Biegung (vergl. § 46) wachgerufen wird, wirkt in diesem Sinne und zwar um so stärker, je grösser p_0 .

In ähnlicher Weise wie bei dem nur einerseits gestützten Stabe gelangt man hinsichtlich des beiderseits befestigten Stabes, Fig. 47, zu der Erkenntniss, dass infolge der Zusammendrückbarkeit des Materials der Wandungen und des Stabes Einspannung in dem strengen Sinne, in welchem sie von der Rechnung für ihre Zwecke aufgefasst wird, auch nicht angenähert vorhanden zu sein pflegt. Recht anschaulich tritt dies vor das Auge, wenn man in einzelnen Fällen, für welche ermittelt werden soll, ob der Stab als eingespannt betrachtet werden darf, zunächst unterstellt, der Stab liege beiderseits frei auf, und sodann die Neigung der elastischen Linie über den Stützen bestimmt; hierauf prüft, ob der Stab durch die Befestigung in Wirklichkeit, wenn auch nicht vollständig, so doch ausreichend verhindert ist, diese Neigung anzunehmen. Hierbei wird in der Regel gefunden werden, dass man schon zur Befestigungsweise Fig. 150 mit verhältnissmässig grossem Werthe von n greifen muss, um die fragliche Neigung genügend zu verhindern.

Auch die gegenüber gewissen Theilen der Baukonstruktionen — wie z. B. gegenüber den durch Druck in Anspruch genommenen Brückenstäben, bei welchen die Gefahr der Knickung, d. h. der seitlichen Ausbiegung, besteht u. s. w. — oft ohne Weiteres gemachte Unterstellung, dass der Stab beiderseits als fest eingespannt

¹⁾ Bei den Spannungsverbindungen des Maschinenbaues ist eine solche Pressung stets vorhanden (s. des Verfassers Maschinenelemente 1881, S. 39).

zu betrachten sei, erweist sich bei genauer Prüfung ziemlich häufig als unzutreffend.

Am nächsten kommt dem Zustande der vollkommenen Einspannung ein ausser an den Enden auch noch in der Mitte so gelagerter und entsprechend belasteter Träger, dass die ursprünglich



Fig. 156.

gerade Stabachse Tangente an der elastischen Linie im Querschnitt der Mittelstütze ist. Letzterer Querschnitt — bei *B*, Fig. 156 — kann dann als Einspannstelle betrachtet werden.

Fünfter Abschnitt.

Stabförmige Körper mit gekrümmter Mittellinie.

I. Die Mittellinie ist eine einfach gekrümmte Kurve, ihre Ebene Ort der einen Hauptachse sämtlicher Stabquerschnitte, sowie der Richtungslinien der äusseren Kräfte.

Die den Stab belastenden Kräfte ergeben dann für einen beliebigen Querschnitt im Allgemeinen

1. eine im Schwerpunkte des letzteren angreifende Kraft R , welche zerlegt werden kann
 - a) in eine tangential zur Mittellinie, also senkrecht zum Querschnitt gerichtete Kraft P (Normalkraft), und
 - b) in eine in den Querschnitt fallende Kraft S (Schubkraft),
2. ein auf Biegung wirkendes Kräftepaar vom Moment M .

§ 54. Dehnung. Spannung. Krümmungshalbmesser.

In dem gekrümmten stabförmigen Körper denken wir uns zwei unendlich nahe gelegene Querschnitte $C_1 O_1 C_1$ und $C_2 O_2 C_2$, Fig. 157. Dieselben begrenzen das Stabelement $C_1 O_1 C_1 C C_2 O_2 C_2 C$ und schneiden sich in der Krümmungsachse M . Der folgenden Betrachtung unterwerfen wir nur die Hälfte $C O C C_1 O_1 C_1$ und fassen hierbei die Bogenelemente $C C_1$, $O O_1$ und $C C_1$ als gerade Linien auf, wie durch Fig. 158 in grösserem Massstabe dargestellt ist.

Es bezeichne nun unter Bezugnahme auf Fig. 158:

f den Querschnitt $C O C$ allgemein und dessen Grösse im Besonderen,

f_1 den Querschnitt $C_1 O_1 C_1$ allgemein und dessen Grösse im Besonderen,

O den Schwerpunkt von f ,

O_1 denjenigen von f_1 ,

$r = \overline{MO}$ den Krümmungshalbmesser im Punkte O der Mittellinie vor Eintritt der Formänderung,

$d\varphi = \angle O M O_1$ den Winkel, welchen die Ebenen der beiden Querschnitte f und f_1 vor der Formänderung mit einander einschliessen,

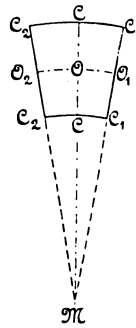


Fig. 157.

$ds = r d\varphi$ die Länge des Bogenelementes $\overline{OO_1}$ der Mittellinie im ursprünglichen Zustande,

$\overline{PP_1} = ds_1 = (r + \eta) d\varphi = r d\varphi + \eta d\varphi = ds + \eta d\varphi$ die Entfernung zweier in den Querschnitten f und f_1 gleich gelegenen, um η von der Mittellinie abstehenden Punkte bevor die äusseren Kräfte auf den Stab wirken; wobei der Abstand η als positiv gilt, wenn er von O aus in der Richtung \overline{MO} zu messen ist, negativ dagegen, wenn er in der Richtung OM , d. h. nach der Krümmungsachse hin liegt,

e_1 den grössten positiven Werth von η ,

e_2 den grössten negativen Werth von η ,

$e = e_1 = e_2$ falls der Querschnitt so beschaffen ist, dass beide Abstände gleich gross sind,

$\Theta = \int \eta^2 df$ das Trägheitsmoment des Querschnitts f in Bezug auf die in O sich projicirende Hauptachse.

Ferner sei

P die Normalkraft im Punkte O des Querschnittes f , positiv oder negativ, je nachdem sie ziehend oder drückend thätig ist,

M_b das für den Querschnitt f sich ergebende, auf Biegung wirkende Moment, positiv, wenn es eine Vermehrung der Krümmung, also eine Verkleinerung des Krümmungshalbmessers herbeiführt, negativ, wenn das Entgegengesetzte der Fall ist,

$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha}$ (§ 2) die durch P und M_b im Abstände η (von der in O sich projicirenden Hauptachse des Querschnittes f) hervorgerufene Spannung, entsprechend der daselbst eingetretenen Dehnung ε ,

k_z, k, k_b die zulässige Anstrengung des Materials gegenüber Zug, bezw. Druck, bezw. Biegung,

ε_0 die Dehnung der Mittellinie im Punkte O , d. i. $\frac{\Delta ds}{ds}$, sofern sich das Bogenelement ds unter Einwirkung der äusseren Kräfte um Δds verlängert,

ω die verhältnissmässige Aenderung des Winkels $d\varphi$ der beiden Querschnitte, d. i. $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$, wenn der Winkel $d\varphi$ infolge der Formänderung in $d\varphi + \Delta d\varphi$ übergeht, also um $\Delta d\varphi$ sich ändert,

ρ der Krümmungshalbmesser im Punkte O der Mittellinie während der Formänderung.

I. Anstrengung des Materials.

Die Normalkraft P wirke allein.

Hätte der Stab eine gerade Achse, so wären die beiden Querschnitte f und f_1 parallel; die Normalkraft P würde bei gleich-

mässiger Vertheilung über den Querschnitt sämtliche dazwischen gelegenen Fasern wegen der Gleichheit ihrer Länge um gleichviel dehnen: es ändert sich nur die Entfernung der beiden Querschnitte, nicht aber ihre Neigung zu einander, dieselbe bleibt Null.

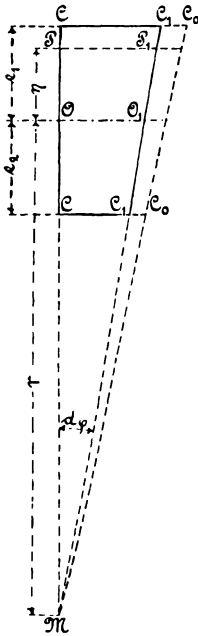


Fig. 158.

Anders verhält sich das Körperelement, Fig. 158. Hier sind die Fasern zwischen den beiden Querschnitten ungleich gross und zwar um so länger, je weiter sie von der Krümmungssachse abstehen. Bei gleichmässiger Vertheilung von P über den Querschnitt muss die Spannung σ in allen Querschnittspunkten gleich gross sein; infolgedessen müssen sich die längeren Fasern, absolut genommen, mehr dehnen als die kürzeren und zwar genau in dem Verhältniss, in welchem sie grösser sind, d. h. die Verlängerungen müssen sich verhalten wie die Abstände der Fasern von der Krümmungssachse M . Daraus folgt, dass die Ebene des Querschnitts, von dem angenommen wird, dass er eben bleibt, in ihrer neuen Lage $C_0 C_0$ die Krümmungssachse M schneidet, wie in Fig. 158 angedeutet ist. Wir erkennen: unter alleiniger Ein-

wirkung der über den Querschnitt sich gleichmässig vertheilenden Normalkraft P ändert sich die Neigung desselben derart, dass seine Ebene die bisherige Krümmungssachse schneidet, dass also der Krümmungshalbmesser derselbe bleibt.

Normalkraft P und biegendes Kräftepaar vom Moment M_b sind vorhanden.

Wie soeben erörtert, führt die Normalkraft P den Querschnitt f_1 in die Lage $C_0 C_0$, Fig. 159, über. Beginnt nun jetzt das Moment M_b zu wirken, so wird der Querschnitt f_1 aus der Lage $C_0 C_0$ in eine andere, etwa $C'_1 O_1 C'_1$ gelangen, und die Krümmungssachse von M nach M' rücken, entsprechend einer Verkürzung des Krümmungshalbmessers von r auf ρ , sowie einer Vergrösserung des

Querschnittswinkels $d\varphi$ auf $d\varphi + \Delta d\varphi$. Hierbei erfährt das Bogenelement $\overline{OO_1} = ds$ der Mittellinie die gesammte Dehnung

$$\epsilon_0 = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{\overline{O_1 O'_1}}{\overline{O O_1}},$$

während diejenige der im Abstände η gelegenen Faserschicht PP_1 aus der Verlängerung $\overline{P_1 P'_1}$ zu bestimmen ist. Wird durch O_1 die Gerade $O_1 N \parallel$ zu $C_1 C_1$ gezogen, so findet sich

$$\begin{aligned} \overline{P_1 P'_1} &= \overline{P_1 N} + \overline{NP'_1} = \overline{O_1 O'_1} + \overline{NP'_1} \\ &= \epsilon_0 ds + \eta \text{arc} NO_1 P'_1 = \epsilon_0 r d\varphi + \eta \Delta d\varphi; \end{aligned}$$

hiermit die Dehnung ϵ im Abstände η

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\overline{P_1 P'_1}}{\overline{P P_1}} = \frac{\epsilon_0 r d\varphi + \eta \Delta d\varphi}{(r + \eta) d\varphi} \\ &= \frac{\epsilon_0 + \frac{\eta}{r} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}}{1 + \frac{\eta}{r}}, \end{aligned}$$

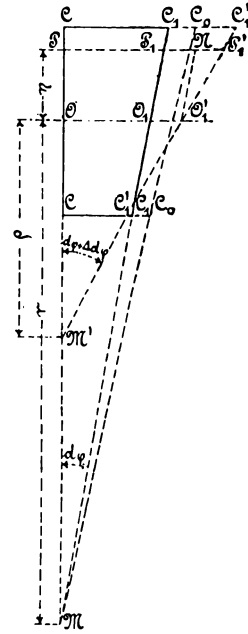


Fig. 159.

unter Beachtung, dass

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \omega$$

$$\epsilon = \epsilon_0 + (\omega - \epsilon_0) \frac{\frac{\eta}{r}}{1 + \frac{\eta}{r}}, \dots \dots \dots 203)$$

und die zugehörige Spannung, sofern Kräfte senkrecht zur Stabachse nicht einwirken,

$$\sigma = \frac{\epsilon}{\alpha} = \left[\epsilon_0 + (\omega - \epsilon_0) \frac{\eta}{r + \eta} \right] \frac{1}{\alpha}. \dots \dots 204)$$

Die im Innern des Stabes wachgerufenen Kräfte müssen sich mit den äusseren im Gleichgewicht befinden, d. h. (§ 16, Gl. 35 und Gl. 38)

$$\int \sigma df = P = \int \frac{1}{\alpha} \left[\varepsilon_0 + (\omega - \varepsilon_0) \frac{\eta}{r + \eta} \right] df, \quad (205)$$

$$\int \sigma df \cdot \eta = M_b = \int \frac{1}{\alpha} \eta \left[\varepsilon_0 + (\omega - \varepsilon_0) \frac{\eta}{r + \eta} \right] df. \quad (206)$$

Unter Voraussetzung, dass der Dehnungscoefficient α constant ist, folgt

$$P = \frac{1}{\alpha} \left[\varepsilon_0 \int df + (\omega - \varepsilon_0) \int \frac{\eta}{r + \eta} df \right],$$

$$M_b = \frac{1}{\alpha} \left[\varepsilon_0 \int \eta df + (\omega - \varepsilon_0) \int \frac{\eta^2}{r + \eta} df \right].$$

Mit

$$\int df = f, \quad \int \eta df = 0,$$

$$\int \frac{\eta}{r + \eta} df = - \varkappa f, \quad \dots \dots \dots (207)$$

$$\int \frac{\eta^2}{r + \eta} df = \int \left(\eta - r \frac{\eta}{r + \eta} \right) df = - r \int \frac{\eta}{r + \eta} df = \varkappa f r \quad (208)$$

wird

$$P = \frac{f}{\alpha} [\varepsilon_0 - (\omega - \varepsilon_0) \varkappa],$$

$$M_b = \frac{f}{\alpha} (\omega - \varepsilon_0) \varkappa r,$$

woraus

$$\left. \begin{aligned} \omega - \varepsilon_0 &= \alpha \frac{M_b}{\varkappa f r} \\ \varepsilon_0 &= \alpha \frac{P}{f} + (\omega - \varepsilon_0) \varkappa = \frac{\alpha}{f} \left(P + \frac{M_b}{r} \right) \\ \omega &= \varepsilon_0 + \alpha \frac{M_b}{\varkappa f r} = \frac{\alpha}{f} \left(P + \frac{M_b}{r} + \frac{M_b}{\varkappa r} \right). \end{aligned} \right\} (209)$$

Hiermit liefert Gl. 204

$$\sigma = \frac{P}{f} + \frac{M_b}{fr} + \frac{M_b}{\alpha fr} \frac{\eta}{r + \eta} \quad \dots \quad 210)$$

Handelt es sich um ein Material, für welches die zulässige Anstrengung gegenüber Biegung, d. i. k_b , erheblich abweicht von derjenigen gegenüber Zug k_z , so ist das in § 45, Ziff. 1 hierüber Bemerkte zu beachten. Die hier in Betracht kommenden Verhältnisse sind allerdings weniger einfach und erscheinen deshalb der weiteren Klarstellung durch Versuche dringend bedürftig (Vergl. in dieser Hinsicht die Versuchsergebnisse in § 56).

Wenn

$$P = 0,$$

so wird

$$\sigma = \frac{M_b}{fr} + \frac{M_b}{\alpha fr} \frac{\eta}{r + \eta}$$

und für $\eta = 0$

$$\sigma = \frac{M_b}{fr}.$$

Bei dem geraden Stab ergibt sich nach Gl. 42 für $\eta = 0$

$$\sigma = 0,$$

d. h. während bei dem nur durch M_b belasteten Stabe mit gerader Achse die Normalspannungen in der zur Ebene des Kräftepaars senkrechten Hauptachse des Querschnittes Null sind, herrscht bei dem gekrümmten, auch nur durch M_b belasteten Stabe in dieser Linie die Spannung $M_b : fr$. Die bezeichnete Hauptachse ist demnach hier nicht Nullachse.

Der Grund für dieses abweichende Verhalten liegt einfach darin, dass bei dem gekrümmten Stab die zwischen zwei Querschnitten gelegenen Fasern verschiedene Länge besitzen, während bei dem geraden Stab Gleichheit besteht. (Vergl. das zu Anfang von Ziff. 1 Erörterte.)

Entsteht M_b dadurch, dass eine Last Q senkrecht zu dem in Betracht gezogenen Querschnitt im Abstände r von dem Schwerpunkt desselben ziehend angreift, also durch den Krümmungsmittelpunkt der Stabachse geht, dabei auf Verminderung der Krümmung hinwirkt, so ist wegen

$$P = Q, \quad M_b = -Qr$$

nach Gl. 210

$$\sigma = \frac{Q}{f} - \frac{Qr}{fr} - \frac{Qr}{\alpha fr} \frac{\eta}{r + \eta} = -\frac{Q}{\alpha f} \frac{\eta}{r + \eta} = \frac{M_b}{\alpha fr} \frac{\eta}{r + \eta}. \quad (211)$$

Für $\eta = 0$ ergibt sich hieraus $\sigma = 0$, obgleich eine Normalkraft vorhanden ist.

Nach Gl. 208 ist

$$\int \frac{\eta^2}{r + \eta} df = \alpha fr.$$

Folglich auch

$$\int \frac{\eta^2}{1 + \frac{\eta}{r}} df = \alpha fr^2.$$

Wenn nun r sehr gross ist gegenüber η , d. h. gegenüber den Abmessungen des Querschnittes, so geht dieser Ausdruck — streng genommen nur für $r = \infty$ — über in

$$\alpha fr^2 = \int \frac{\eta^2}{1 + \frac{\eta}{r}} df = \int \eta^2 df = \Theta,$$

woraus

$$\alpha = \frac{\Theta}{fr^2}. \quad (212)$$

Die Einsetzung dieses Werthes in Gl. 210 führt zu

$$\sigma = \frac{P}{f} + \frac{M_b}{fr} + \frac{M_b}{\Theta} \frac{\eta}{1 + \frac{\eta}{r}},$$

und ergibt mit $r = \infty$

$$\sigma = \frac{P}{f} + \frac{M_b}{\Theta} \eta,$$

d. i. die für gerade Stäbe gültige Gleichung 157.

Soll die Anstrengung durch die Schubkraft S , welche sich nach dem oben unmittelbar zu I unter Ziffer 1 b Bemerkten ergibt, ermittelt werden, so kann das mit Annäherung derart geschehen, wie in § 39 beim geraden stabförmigen Körper; nur ist dabei zu berücksichtigen, dass das Gesetz, nach welchem sich hier σ ändert, ein anderes ist.

Grashof (Theorie der Elasticität und Festigkeit, Berlin 1878, S. 283 u. f.) gelangt auf diesem Wege zu der Gleichung

$$\tau = \frac{S}{2y \cdot \kappa f (r \pm z)^2 \cos \varphi} \int_{\frac{z}{2}}^{\frac{c}{2}} z df = \frac{SM_z}{2y \kappa f (r \pm z)^2 \cos \varphi},$$

welche unter Bezugnahme auf Fig. 120 an die Stelle der Beziehung 134

$$\tau = \frac{SM_z}{2y \Theta \cos \varphi}$$

tritt.

$$2. \text{ Werthe von } z = - \frac{1}{f} \int \frac{\eta}{r + \eta} df.$$

a) Rechteckiger Querschnitt.

Mit b als Breite und h als Höhe, so dass

$$f = bh, \quad df = b d\eta,$$

ergibt sich

$$z = - \frac{1}{bh} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\eta}{r + \eta} b d\eta = - \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(1 - \frac{r}{r + \eta} \right) d\eta,$$

$$x = -1 + \frac{r}{h} \ln \frac{r + \frac{h}{2}}{r - \frac{h}{2}} \dots \dots \dots 213)$$

Wird

$$\frac{h}{2} = e$$

gesetzt, so folgt

$$\ln \frac{r + \frac{h}{2}}{r - \frac{h}{2}} = \ln \frac{1 + \frac{e}{r}}{1 - \frac{e}{r}},$$

und unter Voraussetzung, dass $r > e$

$$\ln \frac{1 + \frac{e}{r}}{1 - \frac{e}{r}} = 2 \left[\frac{e}{r} + \frac{1}{3} \left(\frac{e}{r} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{e}{r} \right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{e}{r} \right)^7 + \dots \right],$$

womit

$$x = \frac{1}{3} \left(\frac{e}{r} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{e}{r} \right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{e}{r} \right)^6 + \dots \dots \dots 214)$$

b) Kreisquerschnitt. Elliptischer Querschnitt.

Zum Zwecke der Entwicklung in eine unendliche Reihe werde gesetzt

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{f r} \int \frac{1}{1 + \frac{\eta}{r}} \eta df \\ &= -\frac{1}{f r} \int \left(1 - \frac{\eta}{r} + \frac{\eta^2}{r^2} - \frac{\eta^3}{r^3} + \frac{\eta^4}{r^4} - \frac{\eta^5}{r^5} + \frac{\eta^6}{r^6} \dots \right) \eta df \\ &= -\frac{1}{f r} \left(-\frac{1}{r} \int \eta^2 df + \frac{1}{r^2} \int \eta^3 df - \frac{1}{r^3} \int \eta^4 df + \dots \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varkappa = + \frac{1}{f} \left(\frac{1}{r^2} \int \eta^3 df - \frac{1}{r^3} \int \eta^3 df + \frac{1}{r^4} \int \eta^4 df \right. \\ \left. - \frac{1}{r^5} \int \eta^5 df + \dots \right). \quad \dots \quad 215) \end{aligned}$$

Für den Kreis wird infolge der Symmetrie

$$\int \eta^3 df = 0 \quad \int \eta^5 df = 0$$

u. s. f.

Ferner gilt, Fig. 40, mit e als Halbmesser:

$$f = \pi e^2, \quad \eta = e \sin \varphi, \quad df = z d\eta = 2 e^2 \cos^2 \varphi d\varphi,$$

$$\int \eta^2 df = \frac{\pi}{4} e^4.$$

Damit findet sich

$$\int \eta^4 df = 4 e^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{8} e^6,$$

$$\int \eta^6 df = 4 e^8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{5}{64} \pi e^8,$$

sodass

$$\begin{aligned} \varkappa = \frac{1}{\pi e^2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\pi}{4} e^4 + \frac{1}{r^4} \frac{\pi}{8} e^6 + \frac{1}{r^6} \frac{5}{64} \pi e^8 + \dots \right) \\ = \frac{1}{4} \left(\frac{e}{r} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{e}{r} \right)^4 + \frac{5}{64} \left(\frac{e}{r} \right)^6 + \dots \quad 216) \end{aligned}$$

Derselbe Werth ergibt sich für den elliptischen Querschnitt, sofern e diejenige Halbachse der Ellipse ist, welche in die Ebene der Mittellinie des Stabes fällt.

c) Trapezförmiger Querschnitt mit Symmetrielinie.

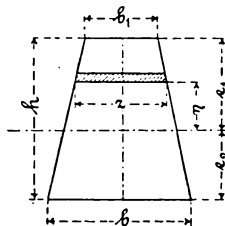


Fig. 160.

Aus Fig. 160 folgt unmittelbar

$$f = \frac{b + b_1}{2} h, \quad df = z d\eta,$$

$$z = b_1 + \frac{b - b_1}{h} (e_1 - \eta),$$

$$df = \left(b_1 + \frac{b - b_1}{h} e_1 - \frac{b - b_1}{h} \eta \right) d\eta.$$

Wegen

$$z = -\frac{1}{f} \int \left(1 - \frac{r}{r + \eta} \right) df = -1 + \frac{r}{f} \int \frac{df}{r + \eta}$$

ist zunächst dieses Integral festzustellen.

$$\int \frac{df}{r + \eta} = \left(b_1 + \frac{b - b_1}{h} e_1 \right) \int_{-e_2}^{+e_1} \frac{d\eta}{r + \eta} - \frac{b - b_1}{h} \int_{-e_2}^{+e_1} \frac{\eta d\eta}{r + \eta}.$$

Da

$$\int_{-e_2}^{+e_1} \frac{\eta d\eta}{r + \eta} = \int_{-e_2}^{+e_1} \left(1 - \frac{r}{r + \eta} \right) d\eta = e_1 + e_2 - r \ln \frac{r + e_1}{r - e_2},$$

so folgt

$$\int \frac{df}{r+\eta} = \left(b_1 + \frac{b-b_1}{h} e_1 \right) \ln \frac{r+e_1}{r-e_2} - \frac{b-b_1}{h} \left(e_1 + e_2 - r \ln \frac{r+e_1}{r-e_2} \right)$$

$$= \left[b_1 + \frac{b-b_1}{h} (e_1 + r) \right] \ln \frac{r+e_1}{r-e_2} - (b-b_1),$$

$$x = -1 + \frac{2r}{(b+b_1)h} \left\{ \left[b_1 + \frac{b-b_1}{h} (e_1 + r) \right] \ln \frac{r+e_1}{r-e_2} - (b-b_1) \right\}. \quad 217)$$

d) Querschnitt des gleichschenkligen Dreiecks.

Aus Gl. 217 folgt für

$$b_1 = 0, \quad e_1 = \frac{2}{3} h, \quad e_2 = \frac{1}{3} h,$$

$$x = -1 + \frac{2r}{h} \left[\left(\frac{2}{3} + \frac{r}{h} \right) \ln \frac{1 + \frac{2}{3} \frac{h}{r}}{1 - \frac{1}{3} \frac{h}{r}} - 1 \right]. \quad 218)$$

e) Für zusammengesetzte Querschnitte oder solche, bei deren Behandlung die Integration Schwierigkeiten bietet, empfiehlt sich die Bestimmung von x in der Weise, dass der Querschnitt in eine genügende Anzahl Streifen zerlegt wird, welche senkrecht zur Ebene der Mittellinie stehen, so wie dies z. B. Fig. 43 für eine Eisenbahnschiene angiebt.

Ist Δf der Flächeninhalt eines solchen Streifens, η sein Abstand von der Mittellinie (positiv oder negativ, je nachdem er von der Krümmungsachse M weg oder nach derselben zu gelegen ist), so sind für alle Streifen die Werthe

$$\frac{\eta}{r+\eta} \Delta f$$

zu bilden, hierauf ist deren algebraische Summe zu bestimmen und diese schliesslich durch $-f$ zu dividiren. Das Ergebniss ist der gesuchte Werth von x .

3. Krümmungshalbmesser.

An der Hand der Fig. 159 erkannten wir, dass der Querschnittswinkel $d\varphi$ und der Krümmungshalbmesser r unter der Einwirkung von P und M_b in $d\varphi + \Delta d\varphi$, bzw. ϱ übergingen. Während für das Bogenelement der Mittellinie vor der Formänderung die Beziehung

$$\overline{OO}_1 = ds = r d\varphi$$

galt, ergibt sich für dasselbe während der Dauer der Formänderung

$$\overline{OO}'_1 = ds + \Delta ds = \varrho (d\varphi + \Delta d\varphi),$$

woraus nach Division mit ds , bzw. $r d\varphi$

$$1 + \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{\varrho}{r} \left(1 + \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \right),$$

$$1 + \varepsilon_o = \frac{\varrho}{r} (1 + \omega),$$

und hieraus unter Beachtung der Gl. 209

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{1 + \omega}{1 + \varepsilon_o} = 1 + \frac{\omega - \varepsilon_o}{1 + \varepsilon_o} = 1 + \frac{M_b}{\alpha r \left(\frac{f}{\alpha} + P + \frac{M_b}{r} \right)}$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r} + \frac{M_b}{\alpha r^2 \left(\frac{f}{\alpha} + P + \frac{M_b}{r} \right)} \quad \dots \quad 219)$$

Wird berücksichtigt, dass ε_o eine sehr kleine Grösse ist, so kann mit genügender Annäherung in der Regel gesetzt werden

$$\frac{r}{\varrho} = 1 + \frac{\omega - \varepsilon_o}{1 + \varepsilon_o} = \sim 1 + \omega - \varepsilon_o,$$

woraus bei Ersatz von $\omega - \varepsilon_o$ nach Massgabe der ersten der Gleichungen 209 folgt

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r} + \alpha \frac{M_b}{\alpha f r^2}.$$

Wenn die Querschnittsabmessungen so klein sind gegenüber r , dass von der Gl. 212, nach welcher

$$\alpha f r^2 = \Theta,$$

Gebrauch gemacht werden darf, so ergibt sich

oder

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varrho} &= \frac{1}{r} + \alpha \frac{M_b}{\Theta}, \\ M_b &= \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r} \right) \frac{\Theta}{\alpha} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 220)$$

§ 55. Fälle bestimmter Belastungen.

1. Offener Haken trägt eine Last Q . Fig. 161.

Die Kraft Q ergibt für den horizontalen trapezförmigen Querschnitt¹⁾ BOC das grösste Moment und die grösste Normalkraft. Nach Gl. 210 beträgt die Spannung im Abstände η von der Schwerlinie (\overline{OO} im Grundriss) deselben

$$\sigma = \frac{P}{f} + \frac{M_b}{f r} + \frac{M_b}{\alpha f r} \frac{\eta}{r + \eta}.$$

Hierin ist

$$P = Q, \quad M_b = -Q(a + e_2),$$

$$f = \frac{b + b_1}{2} h,$$

und nach Gl. 217

$$\alpha = -1 + \frac{2r}{(b + b_1)h} \left\{ \left[b_1 + \frac{b - b_1}{h} (e_1 + r) \right] \ln \frac{r + e_1}{r - e_2} - (b - b_1) \right\}.$$

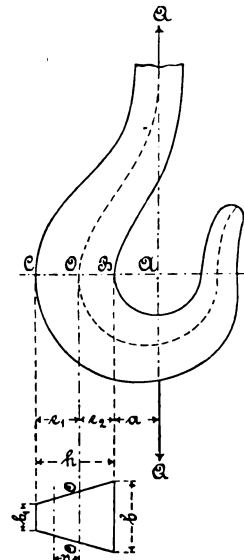


Fig. 161.

¹⁾ In der Ausführung werden die scharfen Ecken des Trapezes abgerundet und die hiermit verknüpften Querschnittsverminderungen durch geringe Wölbung der ebenen Begrenzungsflächen des Trapezstabes ausgeglichen.

Für den Krümmungshalbmesser r der Mittellinie im Punkte O wird gewählt $r = a + e_2$, so dass A der Krümmungsmittelpunkt ist. Damit folgt dann wegen $e_1 + r = a + h$ und $r - e_2 = a$

$$\begin{aligned} z &= -1 + \frac{2r}{(b+b_1)h} \left\{ \left[b_1 + \frac{b-b_1}{h}(a+h) \right] \ln \frac{a+h}{a} - (b-b_1) \right\} \\ &= -1 + \frac{2r}{(b+b_1)h} \left\{ \left[b \left(1 + \frac{a}{h} \right) - b_1 \frac{a}{h} \right] \ln \left(1 + \frac{h}{a} \right) - (b-b_1) \right\}, \end{aligned}$$

woraus für

$$h = 2a, \quad b = 3b_1$$

wegen

$$e_2 = \frac{h}{3} \frac{b+2b_1}{b+b_1} = \frac{h}{3} \frac{5b_1}{4b_1} = \frac{5}{12} h = \frac{5}{6} a,$$

$$r = a + e_2 = \frac{11}{6} a,$$

sich ergibt

$$z = -1 + \frac{11}{24} (4 \ln 3 - 2) = 0,0974,$$

$$\frac{1}{z} = 10,27.$$

Die Spannung beträgt unter Beachtung, dass

$$r = a + e_2 = \frac{11}{6} a,$$

$$\sigma = -10,27 \frac{Q}{f} \frac{\eta}{\frac{11}{6} a + \eta}$$

und insbesondere

für $\eta = -e_2 = -\frac{5}{6} a$	$\sigma = + 8,56 \frac{Q}{f}$ (im Punkte <i>B</i>)
„ $\eta = -\frac{3}{6} a$	$\sigma = + 3,85 \frac{Q}{f}$
„ $\eta = 0$	$\sigma = 0$ (vergl. auch Gl. 211)
„ $\eta = +\frac{3}{6} a$	$\sigma = - 2,20 \frac{Q}{f}$
„ $\eta = +e_1 = +\frac{7}{6} a$	$\sigma = - 3,99 \frac{Q}{f}$ (im Punkte <i>C</i>).

Die Darstellung dieser Spannungen in Fig. 162 derart, dass

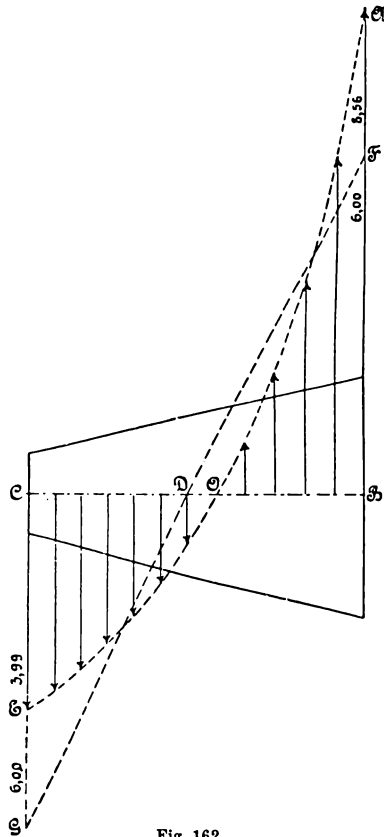


Fig. 162.

senkrecht zur Symmetrielinie des Trapezes die in dem betreffenden

Punkte herrschende Spannung aufgetragen wird (beispielsweise in B $\overline{BA} = +8,56 \frac{Q}{f}$, in C $\overline{CE} = -3,99 \frac{Q}{f}$) ergibt die Kurve $A O E$.

Wird der Querschnitt BOC — Fig. 161 — als einem geraden stabförmigen Körper angehörig betrachtet, so findet sich unter Beachtung der Spalte 11 der Zusammenstellung Ziff. 6 des § 17 wegen

$$\frac{\Theta}{e_2} = \frac{11}{30} b_1 h^2 = \frac{11}{60} f h = \frac{11}{30} a f,$$

für die Spannung im Punkte B

$$\sigma = \frac{Q}{f} + \frac{Q \frac{11}{6} a}{\frac{\Theta}{e_2}} = \frac{Q}{f} + 5 \frac{Q}{f} = + 6 \frac{Q}{f},$$

und für diejenige im Punkte C

$$\sigma = \frac{Q}{f} - \frac{Q \frac{11}{6} a}{\frac{\Theta}{e_1}} = \frac{Q}{f} - 7 \frac{Q}{f} = - 6 \frac{Q}{f}.$$

Die Darstellung dieser Spannungen liefert die Gerade FDG . Wie ersichtlich, ergibt die Unterstellung: der Querschnitt gehöre einem geraden stabförmigen Körper an, die massgebende Anstrengung im Punkt B um

$$100 \frac{8,56-6}{8,56} = 30\%$$

zu klein, führt also zu einer erheblichen Unterschätzung der Inanspruchnahme. Ausserdem würde sie im vorliegenden Falle zu der Auffassung veranlassen, dass die Zuganstrengung in B gleich der Druckanstrengung in C sei, während thatsächlich die erstere $\left(8,56 \frac{Q}{f}\right)$ um mehr als 100% grösser ist als die letztere $\left(3,99 \frac{Q}{f}\right)$.

Die Beanspruchung des Hakens im Querschnitt BOC wird sich um so mehr derjenigen eines geraden, excentrisch belasteten Stabes nähern, d. h. die Kurve AOE , Fig. 162, wird um so weniger von der Geraden FDG abweichen, je grösser der Krümmungshalbmesser r ist. Es ist deshalb angezeigt, den Krümmungsmittelpunkt für den Punkt O der Mittellinie nicht nach A , sondern weiter nach rechts von A zu verlegen, also dem Haken in dem gefährdetsten Querschnitt eine möglichst geringe Krümmung zu ertheilen.

Ferner erhellt aus dieser Sachlage, dass ein aus zähem Material gefertigter Haken, welcher sich unter Einwirkung der Last streckt, hierdurch seine Anstrengung vermindert.

2. Hohlzylinder, welcher als Walze dient, ist auf die Längeneinheit durch den Druck $2Q$ belastet, Fig. 163.

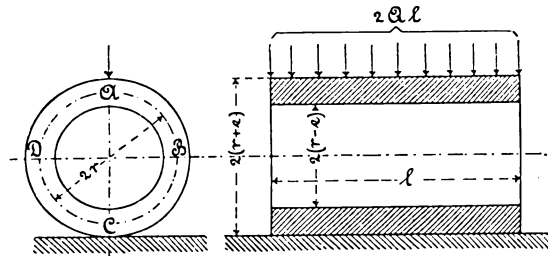


Fig. 163.

Da sich bei dieser Belastungsweise die Viertelzylinder AB , BC , CD und DA gleich verhalten, so genügt es, einen derselben, etwa AB der Betrachtung zu unterwerfen. Wir denken uns das

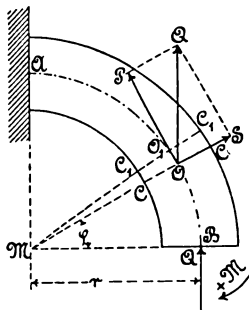


Fig. 164.

Viertel AB herausgeschnitten, wie Fig. 164 darstellt, ersetzen die Wirkung der äusseren Kräfte auf den Querschnitt bei A durch Be-

festigung, auf denjenigen bei B durch die Kraft Q und ein Kräftepaar vom Momente M , welches positiv oder negativ genommen wird, je nachdem es auf Vermehrung oder Verminderung der Krümmung der Mittellinie im Punkte B hinwirkt.

Für einen beliebigen, durch den Winkel φ bestimmten Querschnitt $CO C$ ergibt sich bei Verlegung der Kraft Q nach O die Normalkraft

$$P = -Q \cos \varphi,$$

das biegende Moment

$$M_b = M - Q r (1 - \cos \varphi).$$

Die Schubkraft $S = Q \sin \varphi$ werde vernachlässigt. Nach Gl. 210 ist

$$\sigma = \frac{P}{f} + \frac{M_b}{f r} + \frac{M_b}{\alpha f r} \frac{\eta}{r + \eta},$$

worin f der auf die Einheit der Cylinderlänge kommende Querschnitt.

Folglich

$$\begin{aligned} f \sigma &= -Q \cos \varphi + \frac{M}{r} - Q + Q \cos \varphi \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{M}{r} - Q + Q \cos \varphi \right) \frac{\eta}{r + \eta} \\ f \sigma &= \frac{M}{r} - Q + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{M}{r} - Q + Q \cos \varphi \right) \frac{\eta}{r + \eta}. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des unbekanntes Momentes M führt die Erwägung, dass, wie auch die Formänderung der Mittellinie AB des Cylinderviertels sein möge, jedenfalls die beiden Normalen AM und BM derselben immer rechtwinklig zu einander bleiben werden, dass also der rechte Winkel AMB , der auch gleichzeitig derjenige der beiden Querschnitte bei A und bei B ist, eine Aenderung nicht erfährt.

Es sei $C_1 O_1 C_1$ ein dem Querschnitt $CO C$ unendlich nahe gelegener zweiter Querschnitt und $d\varphi$ der Winkel, den beide Querschnitte vor Eintritt der Formänderung mit einander einschliessen. Unter Einwirkung der äusseren Kräfte wird sich der Letztere nach § 54 um

$$\Delta d\varphi = \omega d\varphi$$

ändern. Die Summe dieser Aenderungen für alle zwischen B und A

gelegenen Querschnitte muss nach dem eben Erörterten gleich Null sein, d. h.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega d\varphi = 0.$$

Unter Beachtung, dass nach der letzten der Gl. 209

$$\omega = \frac{\alpha}{f} \left(P + \frac{M_b}{r} + \frac{M_b}{z r} \right),$$

also hier

$$\omega = \frac{\alpha}{f} \left[\frac{M}{r} - Q + \frac{1}{z} \left(\frac{M}{r} - Q + Q \cos \varphi \right) \right],$$

wird

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega d\varphi = \frac{\alpha}{f} \left[\left\{ \frac{M}{r} - Q + \frac{1}{z} \left(\frac{M}{r} - Q \right) \right\} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{z} Q \right] = 0.$$

Somit

$$\frac{M}{r} - Q = - \frac{2 Q}{(1+z)\pi},$$

oder

$$M = Q \left(1 - \frac{2}{(1+z)\pi} \right) r.$$

Die Einführung des für

$$\frac{M}{r} - Q$$

gefundenen Werthes in die Gleichung zur Ermittlung der Spannungen ergibt

$$f\sigma = - \frac{2 Q}{(1+z)\pi} + \frac{1}{z} \left(- \frac{2 Q}{(1+z)\pi} + Q \cos \varphi \right) \frac{\eta}{r+\eta},$$

$$\sigma = \frac{Q}{f} \left[- \frac{2}{(1+z)\pi} + \frac{1}{z} \left(- \frac{2}{(1+z)\pi} + \cos \varphi \right) \frac{\eta}{r+\eta} \right]. \quad 221)$$

Für den rechteckigen Querschnitt ist nach Gl. 214

$$\varkappa = \frac{1}{3} \left(\frac{e}{r} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{e}{r} \right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{e}{r} \right)^6 + \dots$$

und bei dem Verhältniss

$$\frac{e}{r} = \frac{1}{5},$$

welches wir wählen wollen,

$$\varkappa = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} \right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{5} \right)^6 + \dots = 0,01366.$$

Damit folgt

$$\sigma = \frac{Q}{f} \left[-0,63 + 73,2 (-0,63 + \cos \varphi) \frac{\eta}{5e + \eta} \right]. \quad 222)$$

Grenzwerte ergeben sich für $\varphi = 0$ (Querschnitt bei B) und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (Querschnitt bei A), sowie für $\eta = \pm e$. Sie betragen

im Querschnitt bei B

im Querschnitt bei A

$$\varphi = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

innerste Faser,

$$\eta = -e:$$

$$\begin{aligned} \sigma_i &= -\frac{Q}{f} \left(0,63 + 73,2 \cdot 0,37 \frac{1}{4} \right), & \sigma_i &= \frac{Q}{f} \left(-0,63 + 73,2 \cdot 0,63 \frac{1}{4} \right) \\ &= -7,40 \frac{Q}{f}, & &= +10,90 \frac{Q}{f}, \end{aligned}$$

äusserste Faser,

$$\eta = +e:$$

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{Q}{f} \left(-0,63 + 73,2 \cdot 0,37 \cdot \frac{1}{6} \right), & \sigma_a &= -\frac{Q}{f} \left(0,63 + 73,2 \cdot 0,63 \frac{1}{6} \right) \\ &= +3,88 \frac{Q}{f}, & &= -8,32 \frac{Q}{f}. \end{aligned}$$

Hiernach findet die grösste Anstrengung im Querschnitte bei A und zwar an der Innenfläche des Hohlcyllinders durch tangential gerichtete Zugspannungen $= 10,90 \frac{Q}{f}$ statt. An der Aussenfläche

desselben Querschnitts herrscht eine Druckspannung $8,32 \frac{Q}{f}$. Im Querschnitt bei B wirkt innen die Druckspannung $7,40 \frac{Q}{f}$ und aussen die Zugspannung $3,88 \frac{Q}{f}$. In beiden Querschnitten geht die Spannung durch Null hindurch. Die Stelle, an welcher dies stattfindet, ergibt sich

aus
 für den Querschnitt B ($\varphi = 0$)

$$0 = -0,63 + 73,2 \cdot 0,37 \frac{\eta}{5e + \eta}$$

durch den Werth

$$\eta = 0,12 e,$$

für den Querschnitt A ($\varphi = \frac{\pi}{2}$)

aus

$$0 = -0,63 - 73,2 \cdot 0,63 \frac{\eta}{5e + \eta}$$

durch den Abstand

$$\eta = -0,067 e.$$

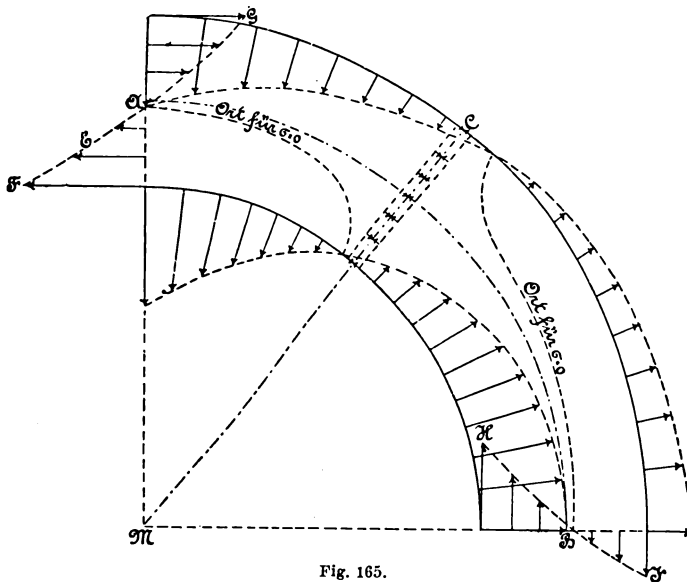


Fig. 165.

Die Darstellung Fig. 165 mit HBJ als Linie der Spannungen

im Querschnitte bei B und $FEAG$ als Linie der Spannungen im Querschnitte bei A giebt über das Gesetz, nach welchem sich die Spannung in den beiden Querschnitten ändert, ein anschauliches Bild.

Zur Erweiterung desselben in Bezug auf dazwischen gelegene Querschnitte werde noch Folgendes festgestellt.

Für $\eta = 0$ findet sich aus Gl. 222

$$\sigma = -0,63 \frac{Q}{f},$$

also unabhängig von φ , d. h. in allen Punkten der mittleren Cylinderfläche ist die Spannung eine negative, also Pressung, und von gleicher Grösse.

Auch giebt es in jedem Cylinderviertel einen Querschnitt, in welchem nur Druckspannungen und zwar ebenfalls von gleicher Grösse auftreten. Setzen wir in Gl. 221

$$\cos \varphi = \frac{2}{(1+x)\pi} = 0,63,$$

so entfällt das Glied, welches die Veränderlichkeit und den Vorzeichenwechsel von σ bedingt, und es wird

$$\sigma = -\frac{Q}{f} \frac{2}{(1+x)\pi} = -0,63 \frac{Q}{f}.$$

Dieser Querschnitt ist in Fig. 165 durch die Linie MC wiedergegeben.

Zur Feststellung derjenigen Punkte im Innern des Hohlcyllinders, in welchem $\sigma = 0$ wird, findet sich nach Gl. 221

$$0 = -\frac{2}{(1+x)\pi} + \frac{1}{x} \left(-\frac{2}{(1+x)\pi} + \cos \varphi \right) \frac{\eta}{r+\eta},$$

woraus

$$\cos \varphi = \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{x}{1+x} \frac{r}{\eta} \right) = 0,64 + 0,043 \frac{e}{\eta},$$

oder

$$\eta = r \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2} \cos \varphi - 1} = 0,0675 e \frac{1}{\frac{\pi}{2} \cos \varphi - 1}.$$

An der innersten Faserschicht, d. h. für $\eta = -e$, wird $\sigma = 0$, wenn

$$\cos \varphi = 0,64 - 0,043 = 0,597,$$

an der äussersten Fläche, d. h. für $\eta = +e$, fällt $\sigma = 0$ aus, wenn

$$\cos \varphi = 0,64 + 0,043 = 0,683.$$

Mit $\cos \varphi = 0,5$ wird $\sigma = 0$ für

$$\eta = 0,0675 \frac{1}{\frac{\pi}{4} - 1} e = -0,31 e,$$

und mit $\cos \varphi = 0,8$ wird $\sigma = 0$ für

$$\eta = 0,0675 \frac{1}{0,4 \pi - 1} e = +0,26 e.$$

Auf diesem Wege erhalten wir, wie Fig. 165 zeigt, zwei Kurven, welche diejenigen Flächenelemente bestimmen, in denen die Normalspannungen gleich Null sind.

Ferner sind daselbst auch noch in radialer Richtung eingetragen die Spannungen, welche an den verschiedenen Punkten der Innen- und Aussenfläche des Hohlcyinders in tangentialer Richtung herrschen.

Was schliesslich die Formänderung anbelangt, so ist ohne Weiteres zu übersehen, dass die kreisförmige Mittellinie eine elliptische Form annimmt, entsprechend einer Vergrösserung des Krümmungshalbmessers bei *A* und einer Verkleinerung desselben bei *B*.

§ 56. Versuchsergebnisse.

Zu einer theilweisen Prüfung des in § 55, Ziff. 2 gefundenen Hauptergebnisses Gl. 221 bei Verwendung von Material, welches für die Herstellung solcher Hohlcyinder vorzugsweise in Betracht kommen kann, führte Verfasser die nachstehend besprochenen Versuche durch.

Aus einem gusseisernen Hohlstab mit kreisförmigem Querschnitt und zwar von dem Material: Gusseisen *A*, § 35 (Bruchstück eines der unter *c* — S. 165 — aufgeführten 3 Hohlstäbe, Zugfestigkeit 1579 kg, Drehungsfestigkeit 1297 kg) wurden kurze Hohlcyinder

von der Länge $l = 6,0$ cm durch Drehen herausgearbeitet und nach Massgabe der Fig. 163 mit $2 Q l$ belastet. Der äussere Cylinder-mantel wurde nur soweit abgedreht, als es erforderlich war, um den Druckplatten der Prüfungsmaschine gute Anlageflächen zu sichern.

In ganz gleicher Weise wurden kurze Hohlcyylinder aus dem Gusseisen B, § 35 (Bruchstück eines der unter b, α — S. 176 — erwähnten 2 Hohlstäbe, Zugfestigkeit 1679 kg, Drehungsfestigkeit 1439 kg) hergestellt.

Die Ergebnisse der Gl. 221, in welcher hier

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \eta = -e, \quad f = \frac{d - d_o}{2} \quad (\text{Fig. 100, S. 165})$$

zu setzen ist, wodurch wird

$$\sigma_{max} = \frac{2 Q}{d - d_o} \left[-\frac{2}{(1 + \alpha) \pi} + \frac{2}{\alpha (1 + \alpha) \pi} \frac{\frac{e}{r}}{1 - \frac{e}{r}} \right],$$

finden sich, nach dieser Gleichung berechnet, in der folgenden Zusammenstellung unter σ_{max} eingetragen.

Gusseisen A.

Hohlcyylinder, innen unbearbeitet.

Bezeichnung	Durchmesser		Verhältniss $\frac{e}{r} = \frac{d - d_o}{d + d_o}$	α , Gl. 214	Bruch- belastung 2 Q l kg	Bruch- festigkeit σ_{max} kg
	äusserer d cm	innerer d _o cm				
1	10,0	7,0	0,176	0,0105	5410	3657
3	10,06	7,06	0,175	0,0104	5420	3685
5	10,02	6,92	0,183	0,0114	5170	3269

Bemerkungen.

Der Bruch erfolgt bei No. 1 und 3 durch gleichzeitiges Einreissen in den Querschnitten A und C, Fig. 163, welches innen be-

ginnend sich auf etwa drei Viertel der Wandstärke nach aussen fortsetzt. Der äussere Cylindermantel bleibt unverletzt.

Im Falle No. 5 reisst zunächst der Querschnitt innen bei A allein; die Fortsetzung des Zusammendrückens veranlasst denjenigen bei C , nachzufolgen.

Hohlcyylinder, innen bearbeitet.

Bezeichnung	Durchmesser		Verhältniss $\frac{e}{r} = \frac{d - d_o}{d + d_o}$	ν , Gl. 214	Bruchbelastung $2 Ql$ kg	Bruchfestigkeit σ_{max} kg
	äusserer d cm	innerer d_o cm				
2	10,06	7,28	0,160	0,00867	4410	3498
4	10,02	7,32	0,156	0,00823	4395	3695

Bemerkungen.

Wie oben No. 5.

Gusseisen B.

Hohlcyylinder, innen unbearbeitet.

Bezeichnung	Durchmesser		Verhältniss $\frac{e}{r} = \frac{d - d_o}{d + d_o}$	ν , Gl. 214	Bruchbelastung $2 Ql$ kg	Bruchfestigkeit σ_{max} kg
	äusserer d cm	innerer d_o cm				
1	10,08	6,96	0,183	0,0114	5005	3135
3	10,06	6,96	0,182	0,01127	4980	3156

Bemerkungen.

Wie oben bei Gusseisen A, No. 5.

Hohlcyylinder, innen bearbeitet.

Bezeichnung	Durchmesser		Verhältniss $\frac{e}{r} = \frac{d - d_o}{d + d_o}$	ν , Gl. 214	Bruchbelastung $2 Ql$ kg	Bruchfestigkeit σ_{max} kg
	äusserer d cm	innerer d_o cm				
2	10,07	7,43	0,151	0,00771	3980	3508
4	10,04	7,42	0,150	0,00760	4200	3759

Bemerkungen.

Wie oben bei Gusseisen A, No. 5.

Zu diesen Ergebnissen ist Nachstehendes zu bemerken.

a) Hohlcyylinder $A 1$ und $A 3$ sind die beiden einzigen der Versuchskörper, welche an den zwei diametral einander gegenüber liegenden Stellen gleichzeitig einreißen. Sie müssen demnach einen grösseren Werth von σ_{max} aufweisen, als sonst gleiche Hohlcyylinder, bei denen dieses Einreißen nach einander stattfindet. Daraus erklärt sich die geringere Bruchfestigkeit von $A 5$ gegenüber $A 1$ und $A 3$ ohne Weiteres.

b) Zum Zwecke der Prüfung des Einflusses der Guss-haut kann nach Massgabe des unter a Gesagten nur $A 5$ mit $A 2$ und $A 4$ verglichen werden. Hierbei findet sich die Festigkeit der innen von der Guss-haut befreiten Hohlcyylinder $A 2$ und $A 4$ um durchschnittlich

$$\frac{3498 + 3695}{2} - 3269 = 3596 - 3269 = 327 \text{ kg,}$$

d. s.

$$100 \frac{327}{3269} = 10 \%,$$

grösser als diejenige des unbearbeiteten Körpers $A 5$.

Für das Gusseisen B ergibt sich dieser Unterschied zu

$$\frac{3508 + 3759}{2} - \frac{3135 + 3156}{2} = 3633 - 3145 = 488 \text{ kg,}$$

d. s.

$$100 \frac{488}{3145} = 15,5 \%.$$

Diese Zahlen bestätigen den bereits in § 22, Ziff. 3 festgestellten Einfluss der Guss-haut.

(Vergl. auch § 58, Fussbemerkung S. 344.)

c) Die Zugfestigkeit des Gusseisens A war zu 1579 kg, diejenige des Gusseisens B zu 1679 kg ermittelt worden. Wird nach S. 97 No. 4 die Biegungsfestigkeit für den rechteckigen Stab zu 1,75 mal Zugfestigkeit angenommen, so wäre für bearbeitete Stäbe auf eine Biegungsfestigkeit von

$$1579 \cdot 1,75 = 2763 \text{ kg,}$$

bezw.

$$1679 \cdot 1,75 = 2938 \text{ kg}$$

zu rechnen gewesen. Thatsächlich sind die Werthe von σ_{max} (trotz des Einreissens an zunächst einer Stelle) für das Gusseisen *A* (No. 2 und 4) um

$$3596 - 2763 = 833 \text{ kg,} \quad \text{oder} \quad 100 \frac{833}{2763} = 30 \text{ ‰,}$$

für das Gusseisen *B* (No. 2 und 4) um

$$3633 - 2938 = 695 \text{ kg,} \quad \text{oder} \quad 100 \frac{695}{2938} = 24 \text{ ‰}$$

grösser. Dieser Unterschied dürfte zum grossen Theile auf Rechnung der dem Gusseisen eigenthümlichen Veränderlichkeit des Dehnungscoefficienten α zu setzen sein, welche den Verlauf der Spannungslinie z. B. *A E F* im Querschnitt *A*, Fig. 165, dahin abändert, dass die wagrechten Ordinaten weniger rasch wachsen, als die Rechnung, welche Unveränderlichkeit des Dehnungscoefficienten voraussetzt, ergibt. War diese Abweichung schon bei geradem stabförmigen Körper von grossem Einflusse (vergl. § 20, namentlich Fig. 59), so muss dieser hier noch bedeutender ausfallen.

Um zu prüfen, inwieweit etwa Gussspannungen bei der vorliegenden Frage betheiligte seien, wurden diejenigen Hohlcyylinder, welche nur an einer Stelle gerissen waren und bei denen der Versuch nicht bis zum Einreissen an der zweiten (gegenüber liegenden) Stelle fortgesetzt worden war, an der Rissstelle aufgeschnitten und sodann genau gemessen, ob hierbei ein Zusammengehen oder Erweitern des Ringes (oder der Schnittfuge) stattfand. Eine solche Aenderung liess sich nicht oder nur in ganz verschwindender Grösse feststellen. Das Ergebniss blieb auch nach vollständiger Beseitigung der äusseren Gushaut, sowie nach Ausbohren des Ringes auf die halbe Stärke das gleiche. Hiernach können Gussspannungen von Erheblichkeit nicht vorhanden gewesen sein.

Werden diejenigen Werthe von σ_{max} , welche für die ausgebohrten Hohlcyylinder ermittelt wurden, in Vergleich mit der Zugfestigkeit gestellt, so findet sich für das Gusseisen *A*

$$\sigma_{max} = \frac{3596}{1579} K_z = 2,28 \text{ mal Zugfestigkeit,}$$

für das Gusseisen B

$$\sigma_{max} = \frac{3633}{1679} K_z = 2,16 \text{ mal Zugfestigkeit,}$$

also durchschnittlich 2,22 mal Zugfestigkeit,
gegen 1,75 mal Zugfestigkeit
beim geraden Stabe.

II. Die Mittellinie ist eine doppelt gekrümmte Kurve.

In Berücksichtigung der Grenzen, welche diesem Buche gezogen sind, haben wir uns hier auf das Nachstehende zu beschränken.

§ 57. Die gewundenen Drehungsfedern.

Eine genaue Berechnung dieser Federn ist sehr umständlich; der hiermit verknüpfte Zeitaufwand würde in den allermeisten Fällen ausser Verhältniss zur praktischen Bedeutung des Ergebnisses stehen. Infolge dessen pflegt man bei Feststellung der Zusammendrückung oder Ausdehnung, sowie der Beanspruchung Annahmen zu machen, welche zu genügend einfachen Beziehungen führen.

Die Mittellinie $A B C D E$, Fig. 166, des gewundenen Stabes

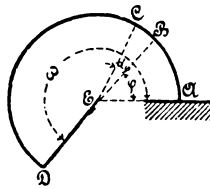


Fig. 166.

von gleichem Querschnitte bestehe aus dem Kreisbogen $A B C D$ vom Halbmesser r und aus der Geraden $D E$, welche in die Richtung eines Halbmessers fällt. Im Punkte A sei der Stab eingespannt und im freien Endpunkte E , der gleichzeitig Mittelpunkt des Kreises ist, durch eine Kraft P senkrecht zur Bildebene (Ebene des Kreises) belastet.

Für den beliebigen Querschnitt im Punkte B , welcher durch

den Winkel φ bestimmt sein möge, ergibt die Kraft P ein auf Drehung wirkendes Kräftepaar vom Moment $M_d = P \varrho$ und eine Schubkraft P , welche vernachlässigt wird. Die Materialanstrengung erscheint hiernach festgestellt durch Gl. 124, natürlich mit derjenigen Genauigkeit, mit welcher diese für den geraden Stab entwickelte Beziehung auf den gekrümmten Stab übertragen werden darf.

Der Querschnitt im Punkte C der Mittellinie, welcher von demjenigen im Punkte B um $ds = \varrho d\varphi$ absteht, muss sich unter Einwirkung von M_d gegenüber dem letzteren Querschnitt verdrehen. Ist ϑ der verhältnissmässige Drehungswinkel, mit der soeben bezeichneten Genauigkeit bestimmt:

für den kreisförmigen Querschnitt durch Gl. 107

$$\vartheta = \frac{32}{\pi} \frac{P \varrho}{d^4} \beta,$$

für den rechteckigen Querschnitt durch Gl. 154

$$\vartheta = 3,6 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} P \varrho \beta,$$

so beträgt diese Verdrehung $\vartheta ds = \vartheta \varrho d\varphi$. Dementsprechend wird sich der Angriffspunkt E der Kraft P um $\vartheta ds \cdot \varrho = \vartheta \varrho^2 d\varphi$ in Richtung der letzteren bewegen. Hieraus ergibt sich die Strecke y' , um welche der Punkt E infolge der Verdrehung sämtlicher Querschnitte des Bogens $ABCD$ fortrückt, zu

$$y' = \int_0^w \vartheta \varrho^2 d\varphi.$$

Durch Einführung von

$$\vartheta = A \cdot \varrho,$$

wobei beträgt:

für den kreisförmigen Querschnitt

$$A = \frac{32}{\pi} \frac{1}{d^4} P \beta,$$

für den rechteckigen Querschnitt

$$A = 3,6 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} P \beta,$$

folgt

$$y' = A \int_0^{\varphi} \rho^3 d\varphi. \dots \dots \dots 223)$$

Die Bewegung von E aus Anlass der Durchbiegung des Armes DE wird — als verhältnissmässig klein — vernachlässigt.

1. Die cylindrischen Schraubenfedern, Fig. 167 und 168.

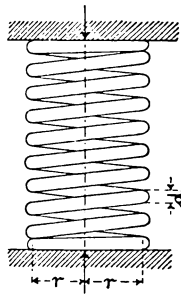


Fig. 167.

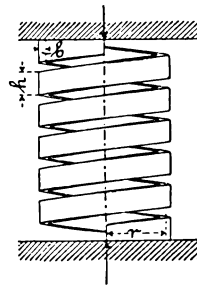


Fig. 168.

Das in Gl. 223 gewonnene Gesetz überträgt man nun auf diese Federn, indem bei i Windungen der Schraubenlinie

$$\omega = 2 \pi i$$

gesetzt und an die Stelle von ρ der Halbmesser r eingeführt wird. Damit folgt

$$y' = A \int_0^{2 \pi i} r^3 d\varphi = 2 \pi i A r^3,$$

insbesondere für den kreisförmigen Querschnitt unter Beachtung der Gl. 105, nach welcher

$$Pr = \frac{\pi}{16} k_d d^3,$$

$$y' = 64 i \frac{P r^3}{d^4} \beta = 4 \pi i \frac{r^2}{d} k_d \beta, \dots \dots 224)$$

und für den rechteckigen Querschnitt bei Berücksichtigung der Gl. 123

$$Pr = \frac{2}{9} k_d b^2 h,$$

$$y' = 7,2 \pi i \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} Pr^3 \beta = 1,6 \pi i \frac{b^2 + h^2}{b h^2} r^2 k_d \beta. \quad (225)$$

Diese Gleichung lässt sich auch unmittelbar aus der Beziehung 153 ableiten.

Die mechanische Arbeit, welche durch die von Null bis auf P gewachsene Belastung bei Zurücklegung des Weges y' verrichtet wird, ist $\frac{1}{2} P y'$. Dieselbe muss gleich sein der Arbeit, welche die Formänderung des gewundenen Stabes, dessen Mittellinie die Länge $2 \pi r i$ besitzt, fordert. Mit der Genauigkeit, mit welcher die zunächst für den geraden Stab entwickelte Gl. 153 auf den gekrümmten übertragen werden darf, findet sich wegen $M_d = Pr$ und $l = 2 \pi r i$

$$\frac{1}{2} P y' = \frac{9}{5} \beta \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} (Pr)^2 2 \pi r i,$$

$$y' = 7,2 \pi i \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} Pr^3 \beta,$$

wie oben ermittelt.

In ganz gleicher Weise kann auch die Beziehung 224 aus der Arbeitsgleichung für den kreisylindrischen Stab abgeleitet werden.

Die mechanische Arbeit A , welche die cylindrische Schraubenfeder aufzunehmen vermag, wird unmittelbar durch die Gl. 147, worin

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot 2 \pi r i,$$

bezw. durch die Gl. 152 mit

$$V = bh \cdot 2 \pi r i$$

bestimmt, oder kann auch mittelst der Beziehungen 224 und 225 unter Berücksichtigung der Gleichungen 105 und 123 als Produkt $\frac{1}{2} P y'$ ermittelt werden.

2. Die Kegelfedern, Fig. 169, 170 und 171.

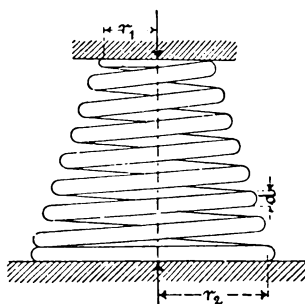


Fig. 169.

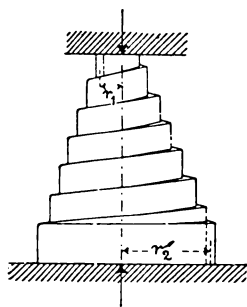


Fig. 170.

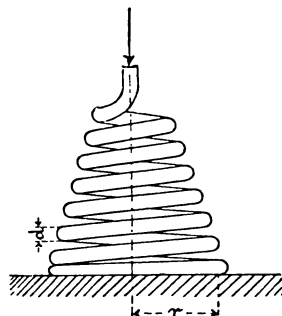


Fig. 171.

Auch auf diese Federn pfl egt die Beziehung 223 übertragen zu werden, indem man q als Veränderliche ansieht und bei i Windungen setzt

$$q = r_2 - (r_2 - r_1) \frac{\varphi}{2 \pi i}$$

$$d\varrho = -\frac{r_2 - r_1}{2\pi i} d\varphi$$

$$d\varphi = -\frac{2\pi i}{r_2 - r_1} d\varrho.$$

Hiermit wird dann

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{2\pi i}{r_2 - r_1} A \int_{r_2}^{r_1} \varrho^3 d\varrho = \frac{\pi i}{2} \frac{r_2^4 - r_1^4}{r_2 - r_1} A \\ &= \frac{\pi i}{2} (r_1 + r_2) (r_1^2 + r_2^2) A. \end{aligned}$$

Für den kreisförmigen Querschnitt folgt

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\pi i}{2} (r_1 + r_2) (r_1^2 + r_2^2) \frac{32}{\pi} \frac{1}{d^4} P \beta \\ &= 16 i \frac{(r_1 + r_2) (r_1^2 + r_2^2)}{d^4} P \beta \quad . . . \quad 226) \end{aligned}$$

und im Falle der Fig. 171, wegen $r_1 = 0$, $r_2 = r$

$$y' = 16 i \frac{r^3}{d^4} P \beta. \quad . . . \quad 227)$$

Die Anstrengung k_d wird bestimmt aus

$$P r_2 = \frac{\pi}{16} k_d d^3 \text{ (Fig. 169),}$$

bezw.

$$P r = \frac{\pi}{16} k_d d^3 \text{ (Fig. 171).}$$

Für den rechteckigen Querschnitt, Fig. 170, ergibt sich

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{\pi i}{2} (r_1 + r_2) (r_1^2 + r_2^2) 3,6 \frac{b^3 + h^3}{b^3 h^3} P \beta \\
 &= 1,8 \pi i (r_1 + r_2) (r_1^2 + r_2^2) \frac{b^3 + h^3}{b^3 h^3} P \beta. \quad . \quad . \quad 228)
 \end{aligned}$$

Die Anstrengung k_d folgt aus

$$P r_2 = \frac{2}{9} k_d b^2 h.$$

Die vorstehenden Entwicklungen bedürfen hinsichtlich des Grades der Genauigkeit einer gründlichen Prüfung auf dem Wege des Versuchs, namentlich dann, wenn die Querschnittsabmessungen der Federn nicht sehr klein sind gegenüber dem Krümmungshalbmesser der Mittellinie und wenn die Ganghöhe der Schraubenfedern verhältnissmässig bedeutend ist.

Sechster Abschnitt.

Gefässe, plattenförmige Körper.

§ 58. Hohlcyylinder.

I. Innerer und äusserer Druck.

Unter Bezugnahme auf Fig. 172 bezeichne

r_i den inneren Halbmesser des an den Stirnseiten geschlossen vorausgesetzten Hohlcyinders,

r_a den äusseren Halbmesser desselben,

p_i die Pressung der den Cylinderhohlraum erfüllenden Flüssigkeit,

p_a die Pressung der den Cylinder umschliessenden Flüssigkeit.

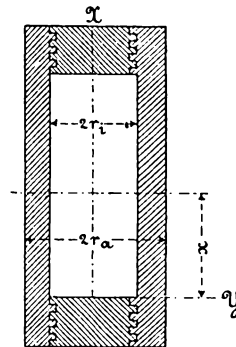


Fig. 172.

Der Abschluss an den Stirnseiten des Cylinders sei derart, dass die Formänderung des abschliessenden Bodens einen Einfluss auf die Cylinderwandung nicht äussere oder dass dieser wenigstens unerheblich ausfalle.

Der Cylinder werde auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, in der Weise, dass die x -Achse mit der Cylinderachse, die yz -Ebene mit der einen, den Hohlraum begrenzenden Stirnebene des Cylinders zusammenfällt, wie dies Fig. 173 erkennen lässt.

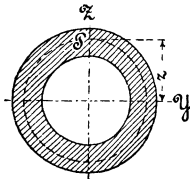


Fig. 173.

Wir greifen einen beliebigen Punkt P des Cylinders heraus, welcher in der xz -Ebene liegt und vor Eintritt der Formänderung absteht:

von der yz -Ebene um x , und von der Cylinderachse um z .

Unter Einwirkung der den Cylinder belastenden Flüssigkeitspressungen wird sich ausser x noch z , und zwar um ζ vergrößern. Aus der xz -Ebene tritt der Punkt hierbei nicht heraus.

Ferner werden im Punkte P folgende Spannungen entstehen:

- σ_x in Richtung der x -Achse, d. i. in achsialer Richtung,
- σ_y in " " y - " , d. i. in der Richtung des Umfanges, in tangentialer Richtung, und
- σ_z in Richtung der z -Achse, d. i. in radialer Richtung.

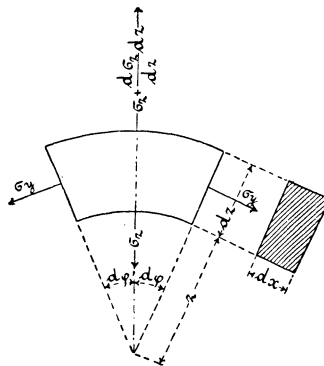


Fig. 174.

Dementsprechend wirken auf das unendlich kleine Körperelement, [Fig. 174, welches wir uns durch Cylinderflächen im Ab-

stande z und $z + dz$ aus dem Cylinder herausgeschnitten denken, in der Bildebene der Figur die Kräfte:

$$\begin{aligned} &\sigma_z \cdot 2z \, d\varphi \, dx \text{ radialeinwärts,} \\ &\left(\sigma_z + \frac{d\sigma_z}{dz} dz\right) \cdot 2(z + dz) \, d\varphi \, dx \text{ radial auswärts,} \\ &\sigma_y \cdot dz \, dx \text{ senkrecht zu den beiden Flächen } dz \, dx. \end{aligned}$$

Der Gleichgewichtszustand fordert nun, dass die Summe der Kräfte in senkrechter Richtung gleich Null ist, d. h.

$$\sigma_z \cdot 2z \, d\varphi \, dx - \left(\sigma_z + \frac{d\sigma_z}{dz} dz\right) \cdot 2(z + dz) \, d\varphi \, dx + 2\sigma_y \cdot dz \, dx \cdot \sin(d\varphi) = 0,$$

woraus sich unter Beachtung, dass $\sin(d\varphi) = \sim d\varphi$, und bei Vernachlässigung des unendlich kleinen Gliedes

$$\frac{d\sigma_z}{dz} dz$$

gegenüber den übrigen endlichen Grössen ergibt

$$\frac{d\sigma_z}{dz} = \frac{1}{z} (\sigma_y - \sigma_z). \quad 229)$$

In § 7 fanden wir unter der Voraussetzung vollkommener Gleichartigkeit des Materials für ein beliebiges Körperelement, welches in Richtung der drei Achsen gleichzeitig die Spannungen $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$ erfährt, die hieraus sich ergebenden Dehnungen:

$$\left. \begin{aligned} \text{in Richtung der } x\text{-Achse } \epsilon_1 &= \alpha \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m} \right), \\ \text{„ „ „ } y\text{- „ } \epsilon_2 &= \alpha \left(\sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{m} \right), \\ \text{„ „ „ } z\text{- „ } \epsilon_3 &= \alpha \left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right). \end{aligned} \right\} 15)$$

Hieraus folgt

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \alpha \left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 2 \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{m} \right),$$

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{m}{m-2} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{\alpha} = \frac{m}{m-2} \frac{e}{\alpha},$$

sofern

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = e. \quad \dots \quad 230)$$

Wird hierzu die aus der ersten der Gleichungen 15 abgeleitete Beziehung

$$m \sigma_x - \sigma_y - \sigma_z = m \frac{\varepsilon_1}{\alpha}$$

hinzugefügt, so ergibt sich

$$m \sigma_x + \sigma_x = \frac{m}{m-2} \frac{e}{\alpha} + m \frac{\varepsilon_1}{\alpha},$$

$$\sigma_x = \frac{m}{1+m} \frac{1}{\alpha} \left(\varepsilon_1 + \frac{e}{m-2} \right).$$

Das gleiche Verfahren liefert

$$\sigma_y = \frac{m}{1+m} \frac{1}{\alpha} \left(\varepsilon_2 + \frac{e}{m-2} \right),$$

$$\sigma_z = \frac{m}{1+m} \frac{1}{\alpha} \left(\varepsilon_3 + \frac{e}{m-2} \right).$$

Hieraus findet sich bei Berücksichtigung der Gl. 99

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2}{\beta} \left(\varepsilon_1 + \frac{e}{m-2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{2}{\beta} \left(\varepsilon_2 + \frac{e}{m-2} \right) \\ \sigma_z &= \frac{2}{\beta} \left(\varepsilon_3 + \frac{e}{m-2} \right) \end{aligned} \right\} \dots \quad 231)$$

Im vorliegenden Falle beträgt, da sich z um ζ ändert, die tangentielle Dehnung ε_2 im Punkte P

$$\varepsilon_2 = \frac{2 \pi (z + \zeta) - 2 \pi z}{2 \pi z} = \frac{\zeta}{z} \dots \quad 232)$$

Für die radiale Dehnung ϵ_3 liefert die Erwägung, dass die Strecke dz die Aenderung $d\zeta$ erfährt, den Ausdruck

$$\epsilon_3 = \frac{d\zeta}{dz} \dots \dots \dots 233)$$

Hiermit wird aus den Gleichungen 231

$$\sigma_x = \frac{2}{\beta} \left(\epsilon_1 + \frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{2}{\beta} \left(\frac{\zeta}{z} + \frac{\epsilon_1 + \frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz}}{m - 2} \right)$$

$$\sigma_z = \frac{2}{\beta} \left(\frac{d\zeta}{dz} + \frac{\epsilon_1 + \frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz}}{m - 2} \right)$$

Die Einsetzung des aus der ersten dieser Gleichungen folgenden Werthes

$$\epsilon_1 = \frac{m - 2}{2(m - 1)} \beta \sigma_x - \frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz}$$

in die beiden anderen führt zu

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \frac{2}{m - 1} \frac{1}{\beta} \left(m \frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz} \right) + \frac{\sigma_x}{m - 1} \\ \sigma_z &= \frac{2}{m - 1} \frac{1}{\beta} \left(\frac{\zeta}{z} + m \frac{d\zeta}{dz} \right) + \frac{\sigma_x}{m - 1} \end{aligned} \right\} \dots 234)$$

Hier ist unter Voraussetzung gleichmässiger Vertheilung der Achsialkraft $\pi r_i^2 p_i - \pi r_a^2 p_a$ über den Cylinderquerschnitt $\pi r_a^2 - \pi r_i^2$, d. h.

$$\pi (r_a^2 - r_i^2) \sigma_x = \pi (p_i r_i^2 - p_a r_a^2),$$

die achsiale Spannung

$$\sigma_x = \frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \dots \dots \dots 235)$$

als unveränderliche Grösse anzusehen.

Die Einführung der Werthe σ_y und σ_z aus den Gleichungen 234 in die Gleichung 229 ergibt

$$z \frac{d^2 \zeta}{dz^2} + \frac{d\zeta}{dz} - \frac{\zeta}{z} = 0,$$

oder

$$\frac{d^2 \zeta}{dz^2} + \frac{d\left(\frac{\zeta}{z}\right)}{dz} = 0.$$

Durch Integration

$$\frac{d\zeta}{dz} + \frac{\zeta}{z} = \text{constant} = c_1.$$

Hieraus

$$z \frac{d\zeta}{dz} + \zeta = c_1 z,$$

oder

$$\frac{d(z\zeta)}{dz} = c_1 z,$$

und bei nochmaliger Integration

$$z\zeta = \frac{1}{2} c_1 z^2 + c_2.$$

Mit den hieraus sich ergebenden Werthen

$$\frac{\zeta}{z} = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{z^2},$$

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{z^2}$$

liefern die beiden Gleichungen 234

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \frac{2}{m-1} \frac{1}{\beta} \left[\frac{c_1}{2} (m+1) + \frac{c_2}{z^2} (m-1) \right] + \frac{\sigma_x}{m-1} \\ \sigma_z &= \frac{2}{m-1} \frac{1}{\beta} \left[\frac{c_1}{2} (m+1) - \frac{c_2}{z^2} (m-1) \right] + \frac{\sigma_x}{m-1} \end{aligned} \right\} 236)$$

Die zwei Constanten c_1 und c_2 bestimmen sich aus den Bedingungen, dass sein muss:

$$\begin{aligned} \text{für } z &= r_i & \sigma_z &= -p_i, \\ \text{„ } z &= r_a & \sigma_z &= -p_a, \end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned} -p_i &= \frac{2}{m-1} \frac{1}{\beta} \left[\frac{c_1}{2} (m+1) - \frac{c_2}{r_i^2} (m-1) \right] + \frac{\sigma_x}{m-1}, \\ -p_a &= \frac{2}{m-1} \frac{1}{\beta} \left[\frac{c_1}{2} (m+1) - \frac{c_2}{r_a^2} (m-1) \right] + \frac{\sigma_x}{m-1}, \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{m-1}{m+1} \beta \left(\frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{\sigma_x}{m-1} \right), \\ c_2 &= \frac{p_i - p_a}{2} \beta \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}. \end{aligned}$$

Hiermit wird unter Beachtung der Gleichung 235

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} + (p_i - p_a) \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \frac{1}{z^2} \\ \sigma_z &= \frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} - (p_i - p_a) \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \frac{1}{z^2} \end{aligned} \right\} 237)$$

Die Dehnungen ε_1 , ε_2 und ε_3 in den drei Hauptrichtungen ergeben sich aus den Gleichungen 15 nach Einführung der Werthe σ_x (Gl. 235), σ_y und σ_z (Gl. 237) zu

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{m-2}{m} \alpha \frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{m-2}{m} \alpha \frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{m+1}{m} \alpha \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} (p_i - p_a) \frac{1}{z^2}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{m-2}{m} \alpha \frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{m+1}{m} \alpha \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} (p_i - p_a) \frac{1}{z^2}. \end{aligned} \right\} 238)$$

2. Innerer Ueberdruck p_i ($p_a = 0$).

Die Gl. 238 ergeben unter Beachtung des in § 48, Ziff. 1 Erörterten die Materialanstrengung im Punkte P und zwar

in Richtung der Cylinderachse

$$\frac{\varepsilon_1}{\alpha} = \frac{m-2}{m} \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i = 0,4 \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i,$$

in Richtung der Tangente (des Umfanges)

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_2}{\alpha} &= \frac{m-2}{m} \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i + \frac{m+1}{m} \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i \frac{1}{z^2} \\ &= 0,4 \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i + 1,3 \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i \frac{1}{z^2}, \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{\varepsilon_2}{\alpha}} \right\} 239)$$

in Richtung des Halbmessers

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_3}{\alpha} &= \frac{m-2}{m} \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i - \frac{m+1}{m} \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i \frac{1}{z^2} \\ &= 0,4 \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i - 1,3 \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i \frac{1}{z^2}. \end{aligned}$$

sofern noch jeweils $m = \frac{10}{3}$ gesetzt wird.

Die Zuganstrengung $\frac{\varepsilon_1}{\alpha}$ in Richtung der Achse tritt vollständig hinter die Zuganspruchnahme $\frac{\varepsilon_2}{\alpha}$, welche im Sinne des Um-

fanges statthat, zurück, so dass sie nicht weiter in Betracht gezogen zu werden braucht. $\frac{\epsilon_2}{\alpha}$ und $\frac{\epsilon_3}{\alpha}$ erlangen die grössten Werthe für $z = r_i$, d. h. an der Innenfläche des Hohlcylinders. Somit wird mit k_z als zulässiger Zug- und k als zulässiger Druckanstrengung

$$\left. \begin{aligned} \max \left(\frac{\epsilon_2}{\alpha} \right) &= \frac{(m+1)r_a^2 + (m-2)r_i^2}{m(r_a^2 - r_i^2)} p_i = \frac{1,3r_a^2 + 0,4r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i \leq k_z, \\ \max \left(-\frac{\epsilon_3}{\alpha} \right) &= \frac{(m+1)r_a^2 - (m-2)r_i^2}{m(r_a^2 - r_i^2)} p_i = \frac{1,3r_a^2 - 0,4r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i \leq k. \end{aligned} \right\} 240)$$

Die Zuganstrengung $\max \left(\frac{\epsilon_2}{\alpha} \right)$ in Richtung des Umfanges, d. i. in tangentialer Richtung, ist der grössere, also der bestimmende Werth. Hiernach findet sich als massgebende Beziehung

$$k_z \geq \frac{\frac{m+1}{m} r_a^2 + \frac{m-2}{m} r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i = \frac{1,3r_a^2 + 0,4r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i, \quad 241)$$

oder

$$r_a \geq r_i \sqrt{\frac{k_z + \left(1 - \frac{2}{m}\right) p_i}{k_z - \left(1 + \frac{1}{m}\right) p_i}} = r_i \sqrt{\frac{k_z + 0,4 p_i}{k_z - 1,3 p_i}}. \quad 242')$$

1) Zur Entwicklung dieser Beziehung in der Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure 1880, S. 283 u. f. war Verfasser durch die Beobachtung veranlasst worden, dass Schläuche, welche zum Zwecke der Prüfung innerem Ueberdruck ausgesetzt wurden, sich verlängern, während die Grundlage der von Grashof in seiner Theorie der Elasticität und Festigkeit 1878, S. 312, für die Berechnung von Hohlcylindern entwickelten Gleichung

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{m k_z + (m-1) p_i}{m k_z - (m+1) p_i}}, \dots \dots \dots 243)$$

und mit $m = \frac{10}{3}$

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{k_z + 0,7 p_i}{k_z - 1,3 p_i}},$$

welche dem Verfasser bis dahin als die zutreffendste erschienen war, infolge der Vernachlässigung der Achsialkraft $\pi r_i^2 p_i$ nicht eine Verlängerung, sondern eine Verkürzung des Hohlcylinders ergiebt, indem für die Dehnung ϵ_x in Richtung

Für $1,3 p_i = k_z$ wird $r_a = \infty$, gleichgiltig wie klein auch der innere Durchmesser sein mag, sofern er nur grösser als Null ist. Da nun der zulässigen Anstrengung k_z für jedes Material eine unüberschreitbare Grenze gezogen ist, so folgt hieraus, dass nur solche Verhältnisse möglich sind, für welche

$$p_i < \frac{k_z}{1,3},$$

oder allgemein

$$p_i < \frac{m+1}{m} k_z.$$

(Vergl. hierzu Fussbemerkung S. 344.)

Dass es durch fortgesetzte Vergrößerung der Wandstärke nicht möglich sein soll, die Flüssigkeitspressung über eine gewisse Höhe hinaus zu steigern, kann für den ersten Augenblick überraschen, erklärt sich jedoch durch die Ungleichmässigkeit der Vertheilung der Anstrengung über den Wandungsquerschnitt.

Denken wir uns beispielsweise einen Hohlcyylinder aus Gussstahl mit den Durchmessern

$$2 r_i = 80 \text{ mm}, \quad 2 r_a = 200 \text{ mm},$$

der Wandstärke

der Cylinderachse ein negativer Werth gefunden wird. (S. am angegebenen Ort in No. 199 den Ausdruck für $E \epsilon_x$, vergl. Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure 1880, S. 288 und 290).

Die Beziehung 243 wurde in der Form

$$d = r_a - r_i = r_i \left(-1 + \sqrt{\frac{m k_z + (m-1) p_i}{m k_z - (m+1) p_i}} \right)$$

auch als Winkler'sche Gleichung bezeichnet (Hütte, des Ingenieurs Taschenbuch bis zur letzten Auflage 1887, S. 240, v. Reiche, die Maschinenfabrikation 1876, S. 37, wobei mit $m = 3$ gesetzt ist

$$d = r_i \sqrt{\frac{3 k_z + 2 p_i}{3 k_z - 4 p_i}} - r_i,$$

u. A.). Verfasser, welcher in den letzten Tagen die Winkler'sche Arbeit über cylindrische Gefässe im Civilingenieur 1860 erstmals durchgesehen hat, fand bei dieser Gelegenheit, dass Winkler bereits damals nicht blos die Beziehung 243 aufgestellt hat, sondern auch eine weitere Gleichung, welche die erwähnte Achsialkraft berücksichtigte (S. 348 und 349 daselbst) und die sich von Gleichung 242 nur durch den mit 4 etwas zu gross gewählten Werth von m unterscheidet.

$$r_a - r_i = 100 - 40 = 60 \text{ mm}$$

hergestellt und einem inneren Ueberdruck von 1200kg auf den Quadratcentimeter ausgesetzt. Dann ergibt sich nach der zweiten der Gleichungen 239 die tangentielle Anstrengung (Zug)¹⁾

a) an der Innenfläche, d. h. für $z = 4 \text{ cm}$,

$$0,4 \frac{4^2}{10^2 - 4^2} 1200 + 1,3 \frac{10^2 \cdot 4^2}{10^2 - 4^2} \cdot 1200 \frac{1}{4^3} = \sim 1950 \text{ kg.}$$

b) in der Mitte, d. h. für $z = 7 \text{ cm}$,

$$0,4 \frac{4^2}{10^2 - 4^2} 1200 + 1,3 \frac{10^2 \cdot 4^2}{10^2 - 4^2} \cdot 1200 \frac{1}{7^3} = \sim 700 \text{ kg.}$$

c) an der Aussenfläche, d. h. für $z = 10 \text{ cm}$,

$$0,4 \frac{4^2}{10^2 - 4^2} 1200 + 1,3 \frac{10^2 \cdot 4^2}{10^2 - 4^2} \cdot 1200 \frac{1}{10^3} = \sim 390 \text{ kg.}$$

In Fig. 175 ist der Verlauf der Inanspruchnahme dargestellt.

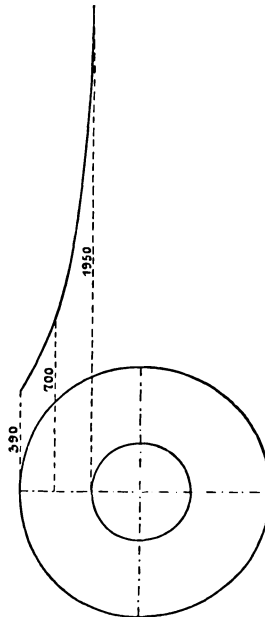


Fig. 175.

¹⁾ Die radiale Anstrengung (Druck) beträgt an der Innenfläche nach der zweiten der Gleichungen 240

Die Anstrengung beträgt hiernach aussen nur den fünften Theil derjenigen an der Innenfläche. Da die letztere massgebend ist, so wird das nach aussen gelegene Material sehr schlecht ausgenützt¹⁾.

Vergrössern wir die Wandstärke fortgesetzt bis schliesslich in der Gleichung

$$k_z = \frac{1,3 r_a^2 + 0,4 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i = \frac{1,3 + 0,4 \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2} p_i$$

$\left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2$ Null gesetzt werden darf, so ist $k_z = 1,3 p_i$, unter welcher Anstrengung also nicht zu gelangen ist, wie oben bereits festgestellt.

Die erkannte Unvollständigkeit der Ausnützung der Widerstandsfähigkeit des Materials, welche um so bedeutender ist, je grösser die Wandstärke, hat zur Konstruktion von zusammengesetzten Hohlzylindern (Ringgeschützen u. s. w.) geführt, deren Wesen sich aus Folgendem ergibt.

$$\max \left(-\frac{\epsilon_3}{\alpha}\right) = \frac{1,3 \cdot 10^2 - 0,4^2 \cdot 4^2}{10^2 - 4^2} \cdot 1200 = 1766 \text{ kg,}$$

und die achsiale Anstrengung (Zug) nach der ersten der 3 Gleichungen 239

$$\frac{\epsilon_1}{\alpha} = 0,4 \frac{4^2}{10^2 - 4^2} 1200 = 91 \text{ kg.}$$

¹⁾ Wenn es sich um ein Material handelt, mit derart veränderlichem Dehnungscoefficienten, dass derselbe bei wachsender Spannung zunimmt, so dass also der Stoff um so nachgiebiger ist, je stärker er angestrengt wird, wie dies z. B. bei Gusseisen zutrifft, so zeigt sich diese Ungleichmässigkeit nicht in dem hohen Grade: an der Innenfläche fällt die Anstrengung geringer, an der Aussenfläche grösser aus, als die vorstehenden Gleichungen, welche Unveränderlichkeit des Dehnungscoefficienten und des Werthes m zur Voraussetzung haben, erwarten lassen. Bei Gusseisen kommt andererseits wieder der in § 22, Ziff. 3, festgestellte Einfluss der Gusschicht hinzu. Ist diese, geringere Nachgiebigkeit besitzende Schicht an der Innenfläche vorhanden, so muss sie die Festigkeit vermindern. Durch Bearbeitung der Innenfläche — vorausgesetzt, dass die Rücksicht auf das Dichthalten gegenüber der Flüssigkeit das Ausbohren gestattet — würde die Widerstandsfähigkeit unter sonst gleichen Verhältnissen erhöht werden können.

(Vergl. in § 56 das unter b) und c) Gesagte.)

Der Einfluss der etwaigen Veränderlichkeit von m ist von keiner grossen Bedeutung.

Wir denken uns den Hohlcyylinder des soeben behandelten Beispiels aus zwei Hohlcyylindern bestehend:

einem inneren, für welchen $r_i = 40$ mm, $r_a = 70$ mm,
 „ äusseren, „ „ $r_i = 70$ „ , $r_a = 100$ „

Der äussere Cylinder sei auf den inneren (warm oder in anderer Weise) so aufgezogen, dass dieser zusammengepresst wird; infolge dessen tritt bei dem inneren Cylinder eine nach innen wachsende Druckspannung auf. Wenn nun jetzt die gepresste Flüssigkeit (Arbeitsflüssigkeit) den inneren Cylinder belastet, so fällt hier die Zuganstrengung um den Betrag geringer aus, welcher der Druckanstrengung entspricht, die durch das Aufziehen des äusseren Cylinders mit Pressung wachgerufen worden war. Dagegen ergibt sich die Zuganstrengung des äusseren Cylinders um denjenigen Betrag grösser, welcher von dem Aufziehen auf den inneren herrührte. Rationeller Weise wird man bei solchen, aus mehreren Hohlcyylindern zusammengesetzten Cylindern dahin streben müssen, dass die Spannungen an den Innenflächen der einzelnen Cylinder unter Einwirkung der Flüssigkeitspressung gleich gross ausfallen.

Für im Verhältniss zum Halbmesser geringe Wandstärke $s = r_a - r_i$ kann mit genügender Annäherung gleichmässige Vertheilung der Spannungen über den Wandungsquerschnitt angenommen werden. Dies giebt für den l langen Hohlcyylinder

$$2 r_i l p_i \leq 2 s l k_z,$$

woraus

$$k_z \geq p_i \frac{r_i}{s} \quad \text{oder} \quad s \geq r_i \frac{p_i}{k_z} \quad . \quad . \quad . \quad 244)$$

Aus der allgemeinen Gleichung 242 lässt sich diese Beziehung in folgender Weise ableiten.

Mit $m = \infty$ (d. h. die Zusammenziehung, welche ein in Richtung seiner Achse gezogener Stab senkrecht zu dieser erfährt, wird vernachlässigt) folgt zunächst

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{k_z + p_i}{k_z - p_i}} = r_i \sqrt{1 + 2 \frac{p_i}{k_z - p_i}}.$$

Unter Beachtung, dass bei geringer Wandstärke p_i nur einen kleinen Bruchtheil von k_z bildet,

$$r_a \approx r_i \sqrt{1 + 2 \frac{p_i}{k_z}} \approx r_i \left(1 + \frac{p_i}{k_z} \right),$$

$$r_a - r_i = s = r_i \frac{p_i}{k_z},$$

wie oben unmittelbar entwickelt wurde.

Die Spannung σ , welche in dem senkrecht zur Achse gelegenen Querschnitt

$$\pi (r_a^2 - r_i^2)$$

des Hohlcyinders eintritt, findet sich aus

$$\pi r_i^2 p_i = \pi (r_a^2 - r_i^2) \sigma$$

zu

$$\sigma = p_i \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} = p_i \frac{r_i}{\frac{r_a + r_i}{r_i} (r_a - r_i)} \approx \frac{1}{2} p_i \frac{r_i}{s},$$

d. h. halb so gross als die Anstrengung (nach Gl. 244) in Richtung des Umfanges.

3. Aeusserer Ueberdruck p_a ($p_i = 0$).

Wenn Flachdrücken der Wandung und bei grosser Länge ausserdem die in § 23 besprochene Knickung nicht zu erwarten steht, sind die Anstrengungen nach den Gleichungen 238 mit $p_i = 0$ zu berechnen. Dieselben gehen dann über in

$$\varepsilon_1 = - \frac{m-2}{m} \alpha \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} p_a,$$

$$\varepsilon_2 = - \frac{m-2}{m} \alpha \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} p_a - \frac{m+1}{m} \alpha \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_a \frac{1}{z^2},$$

$$\varepsilon_3 = - \frac{m-2}{m} \alpha \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} p_a + \frac{m+1}{m} \alpha \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_a \frac{1}{z^2}.$$

Den grössten Werth erlangen die Anstrengungen $\frac{\varepsilon_2}{\alpha}$ und $\frac{\varepsilon_3}{\alpha}$ — die Inanspruchnahme $\frac{\varepsilon_1}{\alpha}$ kommt als wesentlich kleiner, wie die gleichartige Anstrengung $\frac{\varepsilon_2}{\alpha}$ nicht weiter in Betracht — auch hier wieder für das kleinste z , d. h. für die Innenfläche und zwar

in Richtung der Tangente (des Umfanges)

$$\left. \begin{aligned} \max \left(-\frac{\varepsilon_2}{\alpha} \right) &= \frac{2m-1}{m} \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} p_a = 1,7 \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} p_a, \\ \text{in Richtung des Halbmessers} \\ \max \left(\frac{\varepsilon_3}{\alpha} \right) &= \frac{3}{m} \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} p_a = 0,9 \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} p_a, \end{aligned} \right\} 245)$$

sofern noch $m = \frac{10}{3}$ eingeführt wird. Hiernach

$$\left. \begin{aligned} k \geq 1,7 \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} p_a \quad \text{oder} \quad r_a &= \frac{r_i}{\sqrt{1 - 1,7 \frac{p_a}{k}}}, \\ k_z \geq 0,9 \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} p_a \quad \text{oder} \quad r_a &= \frac{r_i}{\sqrt{1 - 0,9 \frac{p_a}{k_z}}}. \end{aligned} \right\} 246)$$

Auch hier gilt die zur Gl. 242 gemachte Bemerkung, dass nur solche Verhältnisse möglich sind, für welche

$$p_a < \frac{k}{1,7} \quad \text{bzw.} \quad p_a < \frac{k_z}{0,9}.$$

(Vergl. das unter Ziffer 2 S. 344 über den Einfluss der Veränderlichkeit des Dehnungscoefficienten Bemerkte.)

Für verhältnissmässig geringe Wandstärke $s = r_a - r_i$ findet sich unter den oben ausgesprochenen Voraussetzungen und auf dem gleichen Wege, welcher zur Beziehung 244 führte

Für im Verhältniss zum Halbmesser geringe Wandstärke $s = r_a - r_i$ ergibt die aus

$$\pi r_i^2 p_i \leq \sim k_z 2\pi r_i s$$

folgende Beziehung

$$k_z \geq \frac{1}{2} p_i \frac{r_i}{s} \quad \text{oder} \quad s = \frac{1}{2} r_i \frac{p_i}{k_z} \quad \dots \quad 249)$$

die Anstrengung, bezw. Wandstärke genügend genau.

2. Aeusserer Ueberdruck p_a ($p_i = 0$).

Sofern Einknicken der Wandung nicht zu befürchten steht, gilt für die Anstrengung, die auch hier wieder an der Innenfläche den Grösstwerth erreicht:

in Richtung der Tangente (des Umfanges)

$$k \geq \frac{3(m-1)}{2m} \frac{r_a^3}{r_a^3 - r_i^3} p_a = 1,05 \frac{r_a^3}{r_a^3 - r_i^3} p_a,$$

in Richtung des Halbmessers

$$k_z \geq \frac{3}{m} \frac{r_a^3}{r_a^3 - r_i^3} p_a = 0,9 \frac{r_a^3}{r_a^3 - r_i^3} p_a.$$

} 250)

Für verhältnissmässig geringe Wandstärke, wie oben

$$k \geq \frac{1}{2} p_a \frac{r_a}{s} \quad \text{oder} \quad s = \frac{1}{2} r_a \frac{p_a}{k} \quad \dots \quad 251)$$

§ 60. Ebene Platten, auf der einen Oberfläche durch den Flüssigkeitsdruck p belastet, auf der anderen im Umfange gestützt.

Eine ziemlich streng wissenschaftliche Ableitung der Anstrengung, welche die am Umfange gestützte ebene Platte bei der Beanspruchung durch eine gleichförmig vertheilte Last erfährt, ist nach Wissen des Verfassers nur für den Fall der kreisförmigen Scheibe unter gewissen Voraussetzungen gegeben worden, aller-

dings mit einem verhältnissmässig nicht unbedeutendem Aufwande an mathematischen Hilfsmitteln¹⁾.

Für die elliptische Platte fehlt es trotz ihres häufigen Vorkommens als Mannlochdeckel u. s. w. bisher überhaupt an einer Beziehung zwischen der Flüssigkeitspressung, den Abmessungen und der Materialanstrengung.

Die zur Bestimmung der Inanspruchnahme rechteckiger Platten vorliegenden Angaben beruhen auf Entwicklungen, die zwar zunächst den streng wissenschaftlichen Weg einschlagen, sich jedoch im Verlaufe zu vereinfachenden Annahmen gezwungen sehen, welche die Zuverlässigkeit der Ergebnisse beeinträchtigen. Die Umfänglichkeit der zur Lösung der Aufgabe angestellten Rechnungen ist trotzdem eine ganz bedeutende¹⁾.

¹⁾ Vergl. Grashof, Theorie der Elasticität und Festigkeit, 1878, S. 329 bis S. 351 und S. 351 bis S. 370.

Trotz aller Schärfe haftet der Grundlage dieser Entwicklungen ein Mangel an, der sich, wie einfache Ueberlegung schliessen lässt und wie auch vom Verfasser durchgeführte Versuche bestätigen, als von praktisch grosser Bedeutung erweisen kann.

Die Platten müssen, damit sie abdichten, in der Regel kräftig gegen die Dichtungsfläche gepresst werden. Sie liegen also keinesfalls lose auf ihrem Widerlager auf, sind vielmehr eigenartig befestigt: selbst, wenn die Sachlage dem unteren Theile der Fig. 184 entspricht, was hier der Einfachheit wegen vorausgesetzt sei. In Wirklichkeit pflegen die Verhältnisse jedoch nicht so einfach zu liegen, worauf Verfasser an anderer, zur Erläuterung von Konstruktionseinheiten geeigneter Stelle eingehen wird.

Unter der Einwirkung der Flüssigkeitspressung biegt sich die Scheibe (Platte) durch; dabei sucht sie auf dem Dichtungsringe einerseits sowie auf dem Widerlager andererseits zu gleiten und gleitet thatsächlich (vergl. § 46). Hiermit aber werden Kräfte in den Berührungsflächen zwischen Dichtungsring und Scheibe (Platte), sowie zwischen dieser und dem Widerlager wachgerufen, die in der Regel (bei den üblichen Stärken der Platten) entgegengesetzt gerichtet sind und meist auch von sehr verschiedener Grösse sein werden. Diese Kräfte liefern für die Mittelfläche der Scheibe (Platte) im Allgemeinen: radial wirkende Kräfte, sowie Formänderung und Biegungsanstrengung beeinflussende Momente. Diese Momente, unter Umständen, welche die Regel zu bilden pflegen, von ganz erheblicher Bedeutung, sind von den bezeichneten Entwicklungen vollständig ausser Acht gelassen.

Je grösser — unter sonst gleichen Verhältnissen — die Kraft ist, mit welcher die Scheibe (Platte) zum Zwecke der Abdichtung angepresst wird, um so bedeutender werden die erwähnten Momente sein. Hierbei nimmt die Oberflächenbeschaffenheit der Scheibe (Platte), des Widerlagers und des Dichtungsringes Einfluss. (Vergl. § 46, insbesondere das über den Werth von μ daselbst Bemerkte.)

Unter diesen Umständen, sowie in Erwägung, dass ein in wissenschaftlicher Hinsicht befriedigendes Vorgehen bei Lösung der sich hier bietenden Aufgaben mit den mathematischen Hilfsmitteln, wie sie dem wissenschaftlich gebildeten, jedoch mitten in der Ausführung stehenden Ingenieur durchschnittlich geläufig sind, überhaupt erst dann möglich sein dürfte, nachdem durch umfangreiche, die Einzelheiten klarstellende Versuche der Boden für eine solche Arbeit geschaffen sein wird, werde zur Befriedigung der vorliegenden praktischen Bedürfnisse folgender — allerdings ebenfalls nicht streng wissenschaftlicher — Weg eingeschlagen. Die zu erlangenden Gleichungen werden dann auf dem Wege des Versuches zu prüfen sein, soll ein sicheres Urtheil über den Grad ihrer Genauigkeit gewonnen werden. Bis es möglich geworden sein wird, diese Versuche durchzuführen, sind wir auf Schätzung über die Zuverlässigkeit angewiesen.

I. Kreisförmige Scheibe, Fig. 176.

Hier, wie bei allen späteren Betrachtungen sei vorausgesetzt, dass die Flüssigkeitspressung von unten wirkt und dass sich die Platte gegen das oberhalb befindliche Widerlager stützt. (Vgl. den unteren Theil der Fig. 184.)

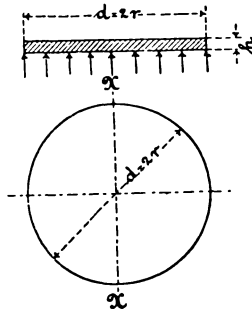


Fig. 176.

Wir denken uns die Scheibe, von der zunächst vorausgesetzt wird, dass überhaupt nur sehr kleine Durchbiegungen zulässig sind, so dass wir es thatsächlich mit einer ebenen, also — was ganz wesentlich ist — nicht mit einer gewölbten Scheibe zu thun haben, nach einem Durchmesser eingespannt, wie Fig. 177 zeigt — entsprechend dem Umstande, dass die Querschnitte der grössten

Anstrengung durch die Mitte der Scheibe gehen — und fassen sie dann auf als geraden Stab von rechteckigem Querschnitt, welcher

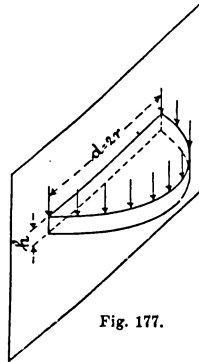


Fig. 177.

bei Ausserachtlassung des Eigengewichts durch die auf die Unterfläche von der Grösse $\frac{1}{8} \pi d^2$ wirkende Flüssigkeitspressung p und durch den auf die obere Umfangslinie $\frac{1}{2} \pi d$ sich vertheilenden Widerlagsdruck $\frac{1}{8} \pi d^2 p$ belastet ist.

Für den Querschnitt der Einspannstelle, von welcher der Schwerpunkt der Halbkreislinie $\frac{1}{2} \pi d$, in welchem der resultirende Widerlagsdruck $\frac{1}{8} \pi d^2 p$ angreifend gedacht werden kann, um $\frac{1}{\pi} d$, derjenige der Halbkreisfläche $\frac{1}{8} \pi d^2$ um $\frac{2}{3\pi} d$ absteht, ergiebt sich dann das biegende Moment

$$M_b = \frac{1}{8} \pi d^2 p \cdot \frac{1}{\pi} d - \frac{1}{8} \pi d^2 p \frac{2}{3\pi} d = \frac{1}{24} d^3 p.$$

Hiermit nach Gl. 68 wegen

$$\frac{\Theta}{e} = \frac{1}{12} d h^3 \frac{1}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{6} d h^2,$$

unter der Voraussetzung gleicher Vertheilung des Momentes über

den Querschnitt von der Breite d einerseits — thatsächlich wird die Mitte stärker beansprucht — und unter Vernachlässigung des Umstandes, dass die Fasern in senkrechter Richtung auf einander einwirken, andererseits:

$$\frac{1}{24} p d^3 \leq k_b \frac{1}{6} d h^2$$

$$k_b \geq \frac{1}{4} p \left(\frac{d}{h} \right)^2 \quad \text{oder} \quad h \geq \frac{1}{2} d \sqrt{\frac{p}{k_b}} \dots \dots 252)$$

2. Elliptische Platte, Fig. 178, $a > b$.

Bevor in gleicher Weise vorgegangen werden kann, wie in Ziff. 1, ist hier zu untersuchen, ob der Querschnitt der grössten Anstrengung in die Richtung der grossen oder der kleinen Achse fällt.

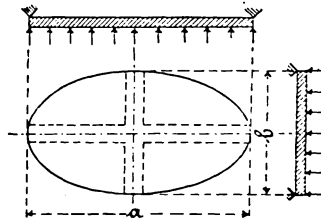


Fig. 178.

Zu dem Ende denken wir uns ein Kreuz, wie im Grundriss der Fig. 178 gestrichelt angegeben ist, bestehend aus zwei senkrecht sich schneidenden Streifen von der sehr kleinen Breite 1 und von den Längen a bzw. b , aus der Platte herausgeschnitten. Die Belastung des Streifenkreuzes besitzt alsdann die Grösse von nahezu $(a + b) p$. Dieselbe überträgt sich auf die vier Widerlager an den Enden der Streifen so, dass diese in der Mitte sich um gleichviel durchbiegen. Bezeichnet

P_a die Widerlagskraft je an den beiden Enden des Streifens von der Länge a ,

P_b die Widerlagskraft je an den beiden Enden des Streifens von der Länge b ,

so findet sich nach Gl. 60, da hier $\frac{1}{2} Q = P_a$, bzw. P_b , und $l = a$ bzw. b ,

$$\frac{5}{4} P_a \frac{\alpha}{\Theta} \frac{a^3}{48} = \frac{5}{4} P_b \frac{\alpha}{\Theta} \frac{b^3}{48},$$

woraus

$$\frac{P_b}{P_a} = \frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3. \quad \dots \dots \dots 253)$$

Die Materialanstrengung σ_a in der Mitte des a langen Streifens ergibt sich bei Vernachlässigung des Zusammenhanges mit dem senkrecht dazu stehenden Streifen von der Länge b und unter Beachtung der Gl. 56 b aus

$$M_b = \frac{1}{4} P_a a = \frac{1}{6} \sigma_a h^2$$

zu

$$\sigma_a = \frac{3}{2} P_a \frac{a}{h^2}.$$

In ganz gleicher Weise findet sich die Anstrengung σ_b in der Mitte des b langen Streifens

$$\sigma_b = \frac{3}{2} P_b \frac{b}{h^2}.$$

Danach

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_a} = \frac{P_b b}{P_a a}$$

und hieraus mit Gl. 253

$$\sigma_b = \sigma_a \left(\frac{a}{b}\right)^2. \quad \dots \dots \dots 254)$$

Da $a > b$, so ist

$$\sigma_b > \sigma_a,$$

beispielsweise

$$\text{für } a = 2b \quad \sigma_a = \left(\frac{b}{2b}\right)^2 \sigma_b = \frac{1}{4} \sigma_b,$$

$$\text{„ } a = 3b \quad \sigma_a = \left(\frac{b}{3b}\right)^2 \sigma_b = \frac{1}{9} \sigma_b.$$

Wir erkennen, dass die am meisten gespannten Fasern in Richtung der kleinen Achse eine im quadratischen Verhältnisse der Achslängen stärkere Normalspannung erfahren, als diejenigen in Richtung der grossen Achse und schliessen hieraus, dass die Bruchlinie in der Richtung der grossen Achse verlaufen muss.

Dementsprechend ist die elliptische Platte so einzuspannen, dass die grosse Achse a die Breite des Befestigungsquerschnittes bildet. In gleicher Weise, wie in Ziff. 1 (vergl. Fig. 177), wird das biegende Moment M_b als Differenz zwischen dem Moment M_u , welches die von den Stützen auf die Platte ausgeübten Kräfte, die Umfangskräfte, liefern und dem Momente erhalten, welches der Flüssigkeitsdruck ergiebt, d. i.

$$\frac{1}{8} \pi a b p \frac{2}{3 \pi} b = \frac{1}{12} a b^2 p.$$

Die Bestimmung von M_u ist hier jedoch weniger einfach, als dort. Bei der kreisförmigen Scheibe durfte ohne Weiteres gleichmässige Vertheilung des Widerlagsdruckes über den Kreisumfang angenommen, d. h. vorausgesetzt werden, dass jede Längeneinheit des Umfanges πd von dem Widerlager die gleiche Pressung erfährt. Bei der elliptischen Platte ist diese Annahme nicht zulässig; denn nach Gl. 253 nimmt der Widerlagsdruck von den Endpunkten der grossen Achse, woselbst er durch P_a gemessen wird, nach den Endpunkten der kleinen Achse hin zu und zwar im umgekehrten cubischen Verhältniss der Achslängen. Da wo der Krümmungshalbmesser der Ellipse am kleinsten ist, besitzt auch der Widerlagsdruck seinen geringsten Werth; da wo jener seinen Grösstwerth erreicht, weist auch dieser denselben auf.

Der Krümmungshalbmesser der Ellipse ist bekanntlich im Scheitel der grossen Achse

$$\rho_a = \frac{b^2}{2a},$$

im Scheitel der kleinen Achse

$$\rho_b = \frac{a^2}{2b},$$

demnach

$$e_b : e_a = a^3 : b^3,$$

d. i. aber dasselbe Verhältniss, in welchem nach Gl. 253 die Grössen P_b und P_a zu einander stehen. Es darf daher ausgesprochen werden, dass sich P_b und P_a wie die zugehörigen Krümmungshalbmesser verhalten. Je mehr a von b abweicht, um so ungleichförmiger vertheilt sich der Flüssigkeitsdruck über das Widerlager.

Zur Feststellung des Momentes M_u , welches dieser veränderliche Widerlagsdruck in Bezug auf den Befestigungsquerschnitt der elliptischen Platte liefert, werde die Ellipse auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, dessen Ursprung im Mittelpunkt der Ellipse liegt, dessen x -Achse in die grosse Achse und dessen y -Achse in die kleine Achse fällt. Für einen beliebigen, durch x und y bestimmten Punkt der Ellipse sei das zugehörige Curvenelement mit ds bezeichnet. Der auf dasselbe wirkende Widerlagsdruck betrage $P ds$. Dann ist

$$M_u = \int y P ds,$$

wobei die Integration sich auf die halbe Ellipse zu erstrecken hat.

Aus der Gleichung der Ellipse

$$\left(\frac{x}{\frac{a}{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{b}{2}}\right)^2 = 1$$

folgt, sofern noch

$$x = \frac{a}{2} \sin \varphi$$

gesetzt wird,

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - x^2} = \frac{b}{2} \cos \varphi,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - x^2}} = -\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi,$$

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} d\left(\frac{a}{2} \sin \varphi\right) \\ &= \frac{a}{2} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Nach Einführung von

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = n^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

ergibt sich

$$ds = \frac{a}{2} \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

und

$$y ds = \frac{a b}{4} \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi} \cos \varphi d\varphi.$$

Hinsichtlich der Veränderlichkeit des Widerlagsdruckes P fanden wir oben für die zwei Grenzwerte P_a (in den Scheiteln der grossen Achse) und P_b (in den Scheiteln der kleinen Achse), dass sie sich verhalten, wie die zugehörigen Krümmungshalbmesser. Mit Rücksicht hierauf werde angenommen, dass P in dem beliebigen Punkte $x y$ proportional dem Krümmungshalbmesser ϱ an dieser Stelle sei, d. h.

$$P = P_b \frac{\varrho}{\varrho_b} = P_b \frac{\varrho}{\frac{a^2}{2b}}.$$

Da

$$\varrho = \pm \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{d^2 y}{dx^2}},$$

so findet sich mit

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2b}{a^2} \frac{1}{\cos^3 \varphi}$$

die absolute Grösse des Krümmungshalbmessers zu

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{a^2}{2b} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \cos^3 \varphi = \frac{a^2}{2b} \sqrt{\cos^2 \varphi + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sin^2 \varphi} \\ &= \frac{a^2}{2b} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \varphi} = \frac{a^2}{2b} \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi}. \end{aligned}$$

Für

$$x = 0, \text{ d. i. } \varphi = 0, \quad \text{wird} \quad \rho = \rho_b = \frac{a^2}{2b},$$

$$x = \frac{a}{2}, \text{ d. i. } \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \text{"} \quad \rho = \rho_a = \frac{b^2}{2a},$$

wie oben bereits bemerkt.

Hiermit

$$P = P_b \frac{\rho}{\frac{a^2}{2b}} = P_b \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi},$$

und infolge dessen für die halbe Ellipse

$$\begin{aligned} M_u &= \int y P ds = 2 \frac{ab}{4} P_b \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - n^2 \sin^2 \varphi)^2 \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{ab}{2} P_b \left(1 - \frac{2}{3} n^2 + \frac{1}{5} n^4\right). \end{aligned}$$

Der Werth P_b bestimmt sich aus der Erwägung, dass die Kraft, welche die unter der Pressung p stehende Flüssigkeit auf die Hälfte der elliptischen Platte ausübt, d. i.

$$\frac{\pi ab}{8} p,$$

gleich sein muss der Summe der Widerlagskräfte für die halbe Ellipse, sofern von dem Einflusse des Eigengewichts abgesehen wird und andere, den Widerlagsdruck beeinflussende Kräfte nicht vorhanden sind, d. h.

$$\begin{aligned} \frac{\pi a b}{8} p &= \int P ds = 2 \frac{a}{2} P_v \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - n^2 \sin^2 \varphi)^2 d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} a P_v \left(1 - n^2 + \frac{3}{8} n^2 \right), \end{aligned}$$

zu

$$P_v = \frac{b}{4} p \frac{1}{1 - n^2 + \frac{3}{8} n^2}.$$

Die Einführung dieses Werthes in die Gleichung für M_u liefert

$$M_u = \frac{a b^2}{8} p \frac{1 - \frac{2}{3} n^2 + \frac{1}{5} n^4}{1 - n^2 + \frac{3}{8} n^4} = \frac{a b^2}{15} p \frac{8 + 4 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3 \left(\frac{b}{a}\right)^4}{3 + 2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3 \left(\frac{b}{a}\right)^4}.$$

Hiermit ergibt sich nun die Bieungsgleichung in Bezug auf den a breiten und h hohen Querschnitt der elliptischen Platte

$$M_b = \frac{a b^2}{15} p \frac{8 + 4 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3 \left(\frac{b}{a}\right)^4}{3 + 2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3 \left(\frac{b}{a}\right)^4} - \frac{\pi a b}{8} p \frac{2 b}{3 \pi} \leq \frac{1}{6} k_b a h^2,$$

woraus

$$k_b \geq \frac{1}{2} \frac{3,4 + 1,2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 0,6 \left(\frac{b}{a}\right)^4}{3 + 2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3 \left(\frac{b}{a}\right)^4} p \left(\frac{b}{h}\right)^2,$$

oder

$$h \geq \frac{1}{2} b \sqrt{2 \frac{3,4 + 1,2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 0,6 \left(\frac{b}{a}\right)^4}{3 + 2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3 \left(\frac{b}{a}\right)^4} \frac{p}{k_b}}. \quad 255)$$

Dieser Werth für k_b , bezw. h ist in Anbetracht, dass bei Ermittlung der Vertheilung des Widerlagsdruckes der Einfluss der senkrechten Einwirkung der Fasern auf einander vernachlässigt worden ist, etwas zu gross. Mit Rücksicht hierauf, sowie unter Beachtung dessen, was in Ziff. 1 einleitend bemerkt wurde (vergl. auch die Bemerkungen zu Gl. 261, den Coefficienten μ betreffend), werde mit Annäherung gesetzt

$$\frac{3,4 + 1,2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 0,6 \left(\frac{b}{a}\right)^4}{3 + 2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3 \left(\frac{b}{a}\right)^4} = \sim \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

womit dann folgt

$$\left. \begin{aligned} k_b &\geq \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} p \left(\frac{b}{h}\right)^2 \\ \text{oder} \\ h &\geq \frac{1}{2} b \sqrt{\frac{2}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \frac{p}{k_b}} \end{aligned} \right\} \dots 256)$$

Für $b = a = d$ ergeben die Beziehungen 255 und 256 den gleichen Werth, nämlich

$$k_b \geq \frac{1}{4} p \left(\frac{d}{h}\right)^2,$$

d. i., wie nothwendig, die Gleichung 252 für die kreisförmige Scheibe.

Für den bei Mannlochverschlüssen üblichen Werth

$$a = 1,5 b$$

liefern die Gl. 255

$$k_b \geq \frac{1}{2} \frac{3,4 + 1,2 \frac{4}{9} - 0,6 \frac{16}{81}}{3 + 2 \frac{4}{9} + 3 \frac{16}{81}} p \left(\frac{b}{h}\right)^2 = 0,425 p \left(\frac{b}{h}\right)^2,$$

bezw.

$$h \geq 0,65 b \sqrt{\frac{p}{k_b}},$$

die Gl. 256

$$k_b \geq \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{4}{9}} p \left(\frac{b}{h}\right)^2 = 0,346 p \left(\frac{b}{h}\right)^2,$$

bezw.

$$h \geq 0,59 b \sqrt{\frac{p}{k_b}}.$$

Demnach ergibt sich im vorliegenden Falle die Wandstärke unter Benutzung der Gl. 256 um

$$100 \frac{0,65 - 0,59}{0,65} = 9\%$$

geringer, als aus Gl. 255.

3. Quadratische Platte, Fig. 179.

Wie in Ziff. 2, so muss auch hier zunächst die zu erwartende Linie der grössten Anstrengung (Bruchlinie) festgestellt werden. Diesem Zwecke dient die folgende Betrachtung.

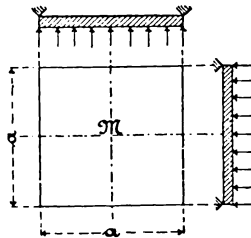


Fig. 179.

Um den Mittelpunkt M der noch unbelasteten Platte werde auf der oberen Seite, d. h. auf derjenigen, deren Fasern gezogen werden,

ein kleines Quadrat, Fig. 180, gezeichnet, dessen Seiten BAB parallel den Seiten der Platte laufen. Unter Einwirkung der Belastung nehmen die Strecken MA die Länge MA_1 (übertrieben

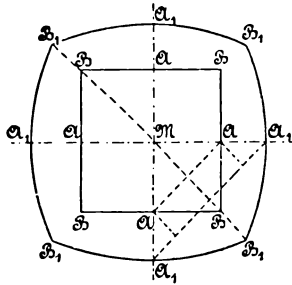


Fig. 180.

gezeichnet) an, vergrössern sich also um AA_1 . Die Strecken AB dehnen sich als ausserhalb der Mitte gelegen, woselbst die Dehnung am grössten ist, etwas weniger, etwa so, dass die Punkte B nach B_1 rücken. Dabei geht dann das ursprüngliche Quadrat in die Figur $A_1B_1A_1B_1A_1B_1A_1B_1$ mit gekrümmten Seiten $B_1A_1B_1$ über.

Es beträgt nun die verhältnissmässige Dehnung in Richtung von MA

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{MA}}$$

Ihr gleich erweist sich in dem kleinen (rechts unten gelegenen) Vierseit $MAA_1B_1A_1A$, in welches das Quadrat $MABA$ übergegangen ist, nur die Dehnung in der Richtung A_1A_1 . Dieselbe wird gemessen durch

$$\frac{\overline{A_1A_1} - \overline{AA}}{\overline{AA}} = \frac{2(\overline{AA_1} \sqrt{0,5})}{\overline{MA} \sqrt{2}} = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{MA}}$$

Die Dehnungen nach allen übrigen Richtungen sind kleiner, wie eine einfache Betrachtung sämtlicher, im ursprünglichen Quadrate $MABA$ beim Uebergange in das Vierseit $MA_1B_1A_1$ eingetretenen Längenänderungen ohne Weiteres erkennen lässt. Demnach tritt die grösste Anstrengung ausserhalb des Punktes M nur in der Richtung AA oder A_1A_1 ein, d. h. der Verlauf

der Bruchlinie wird von der Mitte aus nach der Richtung der Diagonale MB_1 zu erwarten sein.

Demgemäss werde die quadratische Platte nach Massgabe der Fig. 181 eingespannt.

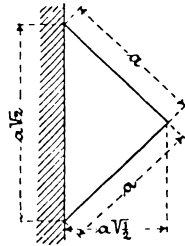


Fig. 181.

Das biegende Moment M_b ergibt sich alsdann aus der Erwägung,

dass auf jede der vier Quadratseiten eine resultierende Widerlagskraft $\frac{1}{4} a^2 p$ wirkt, deren Angriffspunkt in der Seitenmitte, also im Abstände $\frac{1}{2} a \sqrt{\frac{1}{2}}$ vom Einspannungsquerschnitt anzunehmen ist,

dass es sich für den letzteren um zwei solche Quadratseiten handelt, demnach um ein Moment der Widerlagskräfte von der Grösse $2 \cdot \frac{1}{4} a^2 p \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{1}{2}}$,

dass der Flüssigkeitsdruck auf die von der Diagonale begrenzte Quadrathälfte $\frac{1}{2} a^2 p$ beträgt und im Schwerpunkte, d. i. im Abstände $\frac{1}{3} a \sqrt{\frac{1}{2}}$ vom Einspannungsquerschnitt angreift.

Hiermit folgt

$$M_b = 2 \cdot \frac{1}{4} a^2 p \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} a^2 p \cdot \frac{a}{3} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12} a^3 p \sqrt{\frac{1}{2}}$$

und demnach die Biegungsgleichung für den $a\sqrt{2}$ breiten und h hohen Querschnitt

$$\frac{1}{12} a^3 p \sqrt{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{6} k_b a \sqrt{2} h^3 = \frac{1}{3} k_b a h^2 \sqrt{\frac{1}{2}}$$

woraus

$$k_b \geq \frac{1}{4} p \left(\frac{a}{h} \right)^2, \quad \text{oder} \quad h \geq \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{p}{k_b}} \quad (257)$$

4. Rechteckige Platte. Fig. 182. $a > b$.

Die in Ziff. 2 für die elliptische Platte angestellte Betrachtung, welche zu der Erkenntniss führte, dass die grösste Anstrengung für den Mittelpunkt derselben in Richtung der kleinen Achse stattfindet, kann ohne Weiteres auch auf die rechteckige Platte übertragen werden. Sie ergibt, dass für den Mittelpunkt der letzteren die grösste Inanspruchnahme in Richtung der kleinen Seite statthat und dass infolge dessen in der Mitte die Bruchlinie in Richtung der langen Seite verlaufen wird. Nach aussen hin wird sie jedoch, wie aus dem

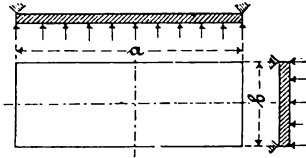


Fig. 182.

in Ziff. 3 Erörterten zu schliessen ist, die Neigung haben müssen, in die Diagonale einzubiegen, etwa nach Fig. 183. Die Wahl unter den Diagonalen dürfte hierbei von Ungleichheiten im Material oder in der Stützung der Platte wesentlich beeinflusst werden.

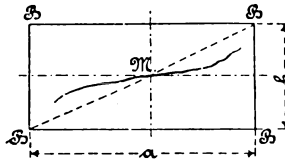


Fig. 183.

Unter diesen Umständen begegnet die zutreffende Annahme des Bruchquerschnitts erheblicher Unsicherheit. In Erwägung des für die Entwicklungen dieses Paragraphen allgemein gemachten Vorbehaltes, die erhaltenen Gleichungen durch Versuche hinsichtlich ihrer Zuverlässigkeit zu prüfen, sowie in Anbetracht der Nothwen-

digkeit, die praktisch wichtige Aufgabe mit einfachen Mitteln der Lösung zuzuführen, entschlossen wir uns für die Einspannung nach der Diagonale BMB mit der Massgabe, nur das für diesen Querschnitt sich ergebende biegende Moment in Rechnung zu stellen.

Der gesammte Flüssigkeitsdruck abp vertheilt sich allerdings nicht gleichförmig über die Seiten a , bezw. b ; vielmehr wird der Auflagerdruck in der Mitte der Seiten am grössten sein und nach den Eckpunkten des Rechtecks hin abnehmen. Jedenfalls aber darf davon ausgegangen werden, dass für jede Seite der resultirende Widerlagsdruck durch die Mitte derselben geht, also um

$$\frac{b}{2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

von dem Einspannungsquerschnitt absteht. So ergibt sich das biegende Moment

$$M_b = \frac{1}{2} abp \cdot \frac{b}{2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{1}{2} abp \cdot \frac{1}{3} b \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{12} \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} p,$$

und hiermit die Biegungsgleichung für den $\sqrt{a^2 + b^2}$ breiten und h hohen Querschnitt

$$\frac{1}{12} \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} p \leq k_b \frac{1}{6} \sqrt{a^2 + b^2} h^2,$$

oder

$$\left. \begin{aligned} k_b &\geq \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \left(\frac{b}{h}\right)^2 p, \\ h &\geq \frac{1}{2} b \sqrt{\frac{2}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \frac{p}{k_b}} \end{aligned} \right\} \dots 258)$$

Mit $b = a$ ergibt sich

$$k_b \geq \frac{1}{4} \left(\frac{a}{h}\right)^2 p, \quad \text{oder} \quad h \geq \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{p}{k_b}},$$

wie oben unter Ziff. 3 für die quadratische Platte gefunden worden ist.

5. Schlussbemerkung, Zusammenfassung.

(Vergleiche Einleitung zu § 60.)

Für die Ziff. 1 besprochene kreisförmige Scheibe leitet Grashof (Theorie der Elasticität und Festigkeit 1878, S. 335 und 336) unter der besonderen Voraussetzung sehr kleiner Dicke h gegenüber dem Halbmesser r und unter Ausserachtlassung des Einflusses der Befestigungsweise der Scheibe, sowie der Wirksamkeit der die Abdichtung sichernden Kraft (vergl. Schluss dieses Paragraphen) die Beziehung ab

$$\max \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \right) = \frac{3}{8} \frac{(m-1)(3m+1)}{m^2} \left(\frac{r}{h} \right)^2 p,$$

woraus sich mit $m = \frac{10}{3}$ ergibt

$$\left. \begin{array}{l} k_b \geq 0,87 \left(\frac{r}{h} \right)^2 p, \quad \text{oder} \quad h \geq 0,93 r \sqrt{\frac{p}{k_b}}, \\ \text{und nach Einführung von } 2r = d \\ k_b \geq 0,2175 \left(\frac{d}{h} \right)^2 p, \quad \text{oder} \quad h \geq 0,465 d \sqrt{\frac{p}{k_b}}. \end{array} \right\} 259)$$

Der Vergleich dieser Ergebnisse mit den unter Ziff. 1 gefundenen Beziehungen 252 zeigt zunächst, dass das Gesetz in beiden Fällen dasselbe ist, dass ein Unterschied nur hinsichtlich der Zahlencoefficienten besteht (dort 0,25, bzw. 0,5, hier 0,2175, bzw. 0,465), derart, dass die Gl. 259 die Anstrengung des Materials um 13 %, die Stärke der Scheibe bei gegebener Flüssigkeitspressung und bestimmtem Durchmesser um 7 % kleiner liefert.

Da das Resultat Gl. 259 mit Rücksicht auf die Annahme, dass h sehr klein gegen r wegen Vernachlässigung des Einflusses der Befestigungsweise und der Grösse der abdichtenden Kraft, allgemein, sowie in Anbetracht der vorausgesetzten Unveränderlichkeit des Dehnungscoefficienten jedenfalls für Gusseisen besonderer Prüfung durch Versuche bedarf, so kann es bei dem gewöhnlichen

Zwecke unserer Festigkeitsrechnungen angezeigt erscheinen, die Gl. 252 zu benützen, bis abschliessende Versuche vorliegen.

Für die Durchbiegung y' der Scheibe in der Mitte findet Grashof

$$y' = \frac{3}{16} \alpha \frac{(m-1)(5m+1)}{m^2} \frac{p r^4}{h^3},$$

woraus mit $m = \frac{10}{3}$

$$y' = 0,7 \alpha \frac{r^4}{h^3} p. \quad \dots \quad 260)$$

Auch diese Gleichung bedarf aus den oben angegebenen Gründen der Prüfung durch Versuche¹⁾.

Die unter Ziff. 1 bis 4 aufgestellten Beziehungen lassen sich auf die gemeinschaftliche Form

$$k_b \geq \mu \left(\frac{d}{h}\right)^2 p \quad \dots \quad 261)$$

bringen. Hierin ist — unter dem Vorbehalte der Prüfung durch Versuche und der Abänderung je nach den Ergebnissen derselben — zu setzen:

1. im Falle der kreisförmigen Scheibe, Fig. 176,

für d der Durchmesser, $\mu = \frac{1}{4}$,

2. im Falle der elliptischen Platte, Fig. 178,

für d die kleine Achse b , $\mu = \frac{1}{4} \frac{2}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$,

3. im Falle der quadratischen Platte, Fig. 179,

für d die Quadratseite a , $\mu = \frac{1}{4}$,

¹⁾ Versuche des Verfassers mit Scheiben aus Gusseisen und aus Flussstahl, nach Massgabe der Fig. 184 belastet, ergaben Durchbiegungen, welche in die Gl. 260 eingesetzt, zu ganz wesentlich anderen Werthen für den Dehnungscoefficienten α führten, als Biegungsversuche mit rechteckigen Stäben aus demselben Material.

4. im Falle der rechteckigen Platte, Fig. 182,

$$\text{für } d \text{ die kleine Seite } b, \mu = \frac{1}{4} \frac{2}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Der Coefficient μ , auf dem Wege des Versuches festgestellt, wird sich in erheblichem Masse abhängig erweisen von der Befestigungsart der betreffenden Platte gegenüber der abzudichtenden Fläche und von der Kraft, mit welcher die Platte angepresst wird (vergl. Fussbemerkung S. 350).

§ 61. Versuche mit ebenen Platten.

Dem Verfasser sind Versuche zur Prüfung von ebenen, in der aus § 60 ersichtlichen Weise belasteten und unterstützten Platten nicht bekannt; ebensowenig hierzu dienende Einrichtungen. Infolge dessen lag zunächst die Aufgabe vor, einen Apparat zu entwerfen, welcher die Durchführung der bezeichneten Versuche ermöglicht. Verfasser hat sich derselben unterzogen und auch bereits eine Anzahl von Versuchen mit kreisförmigen Scheiben, elliptischen und rechteckigen Platten durchgeführt. Insbesondere der Umstand, dass ein Theil der bisher gewonnenen Ergebnisse darauf hinweist, die Widerstandsfähigkeit von Scheiben in Stärken, wie sie tatsächlich bei Cylinderdeckeln u. s. w. auftreten, wachse nicht ganz im quadratischen Verhältnisse von h , wie die Gleichungen 252 und 259 übereinstimmend aussprechen, und der Einfluss der Befestigungsweise der Platte, sowie dessen Veränderlichkeit und dessen Abhängigkeit von der Kraft, mit welcher die Dichtungsschrauben angezogen werden, u. s. w. zwingen jedoch, den Umfang der Versuche, deren Durchführung mit dem Ziele, die Grundfälle nach Möglichkeit klar zu stellen und für die Verwendung zuverlässige Zahlen zu erhalten, übrigens ganz erheblichen Schwierigkeiten begegnet, wesentlich zu erweitern, soll der Gegenstand zu einem Abschlusse, wenn auch nur in beschränktem Sinne des Wortes, gebracht werden. Bei dieser Sachlage erweist sich die ursprünglich gehegte Absicht, diesen Abschluss bereits jetzt zu geben, als unausführbar, und muss sich Verfasser zunächst auf das Nachstehende beschränken.

Hinsichtlich des zu erwartenden Verlaufs der Bruchlinie wurden

in § 60 gewisse Betrachtungen angestellt, welche dazu führten, anzunehmen, dass diese Linie verlaufen werde

1. bei der kreisförmigen Scheibe ungefähr nach einem Durchmesser,
2. „ „ elliptischen Platte ungefähr in Richtung der grossen Achse,
3. „ „ quadratischen „ „ „ „ „ Diagonale,
4. „ „ rechteckigen „ „ nach Massgabe der Fig. 183.

Ueber den thatsächlichen Verlauf der Bruchlinien geben die Fig. 184 bis 195 Auskunft.

Zu Ziff. 1.

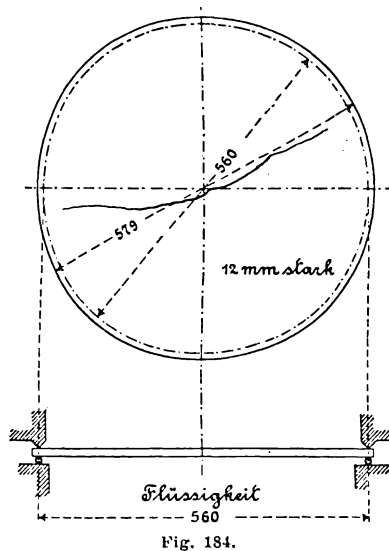


Fig. 184.

Fig. 184 zeigt die Bruchlinie einer gusseisernen Scheibe von 12 mm Stärke (immer auf der Seite der gezogenen Fasern). Andere Scheiben von derselben Stärke weisen ähnliche Bruchlinien auf. Die Scheibe ruht während des Versuchs auf einem Dichtungsring von weichem Kupfer (etwa 8 mm stark) und stützt sich oben gegen eine 2,5 mm breite Ringfläche von dem gleichen mittleren Durchmesser, wie der Kupferring, nämlich 560 mm. Die Pressung zwischen der Scheibe und dem Kupferring muss natürlich so gross sein, dass die Abdichtung gesichert ist.

Fig. 185 giebt die Bruchlinie einer gusseisernen Scheibe von

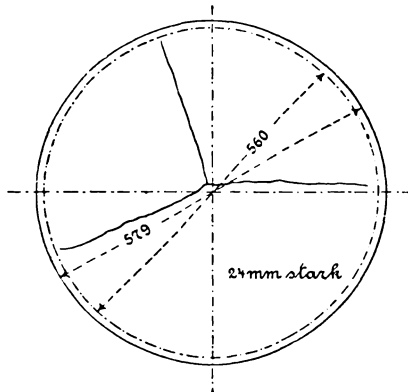


Fig. 185.

24 mm Stärke wieder: sie verläuft ungefähr nach drei Halbmessern. Weitere Scheiben von dieser Stärke brachen in ähnlicher Weise.

Die der Prüfung unterworfenen Stahlscheiben bogen sich durch, ohne zu brechen.

Zu Ziff. 2.

Wie die Fig. 186 und 187 (gusseiserne Platten) erkennen lassen,

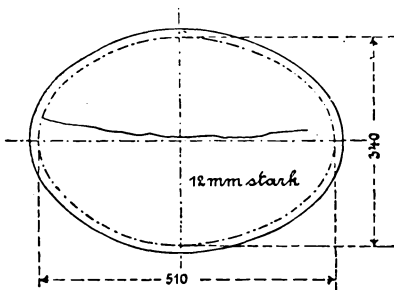


Fig. 186.

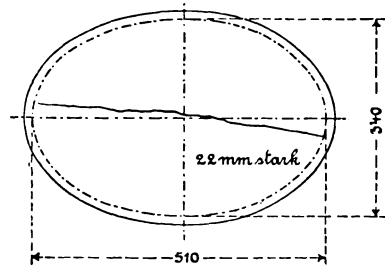


Fig. 187.

entspricht der Verlauf der Bruchlinien mit befriedigender Annäherung der gemachten Annahme, gleichgiltig, ob die Platte mehr oder weniger stark ist.

Fig. 188 (Gusseisen) zeigt für die quadratische Platte das Zutreffen der gemachten Voraussetzung.

Zu Ziff. 3.

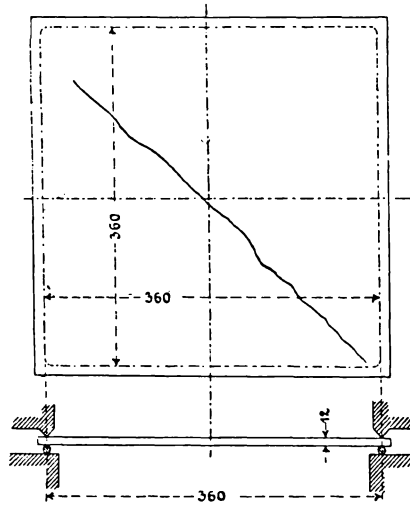


Fig. 188.

Zu Ziff. 4.

Die Fig. 189 bis 192 (Gusseisen $a:b=2:3$ und $1:3$) ent-

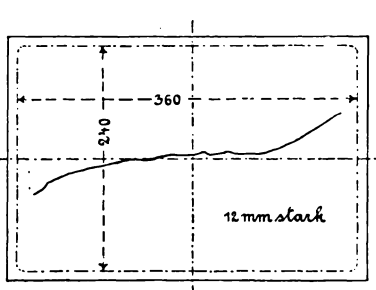


Fig. 189.

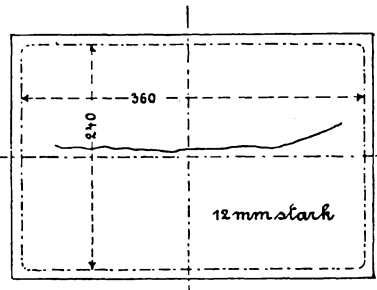


Fig. 190.

sprechen dem Ergebniss der stattgehabten Erwägung mehr oder minder.

Um ein getreues Bild der Formänderungen rechteckiger Platten zu erhalten, wurde eine solche aus Hartblei ($a = 360$ mm,

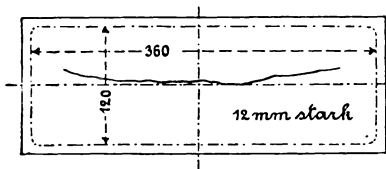


Fig. 191.

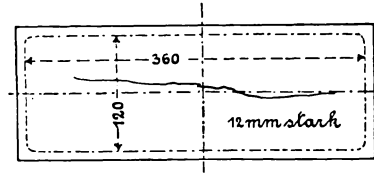


Fig. 192.

$b = 240$ mm, $h = 20$ mm) hergestellt und ihre Oberfläche durch Gebrauch der Reissnadel mit einem Netz von Quadraten (je 10 mm Seitenlänge) versehen.

Fig. 193, Tafel XIII, giebt in ungefähr halber Grösse die obere Fläche (Seite der gezogenen Fasern) mit der Bruchlinie wieder. Die Formänderung der ursprünglichen Quadrate zeigt volle Uebereinstimmung mit der in § 60, Ziff. 3, angestellten Betrachtung, ebenso mit dem Ergebnisse, zu welchem wir in § 60, Ziff. 4, hinsichtlich des Verlaufs der Bruchlinie gelangt waren. Fig. 194, Tafel XIV, stellt die untere Fläche (Seite der gedrückten Fasern) und Fig. 195, Tafel XII, die Seitenansicht dar. In diesen drei Abbildungen bietet sich dem Auge ein ausserordentlich lehrreiches Bild über das Verhalten des Materials einer rechteckigen Platte an den verschiedenen Stellen bei Beanspruchung durch Flüssigkeitsdruck.



Bedeutung der in den Gleichungen auftretenden Buchstabengrößen.

A Formänderungsarbeit (§ 41 u. f.), Constante.

a bei elliptischen Querschnitten die grosse Halbachse, bei elliptischen Platten die grosse Achse der Ellipse; die eine Seite eines rechteckigen Querschnitts, einer rechteckigen Platte; Seite des quadratischen Querschnitts, der quadratischen Platte; Abstand (unveränderlicher).

*a*₀ grosse Halbachse der inneren Begrenzung eines Ellipsenringes.

*a*₁ *a*₂ Abstände.

B Constante.

b bei elliptischen Querschnitten die kleine Halbachse, bei elliptischen Platten die kleine Achse der Ellipse; die andere Seite eines rechteckigen Querschnittes, einer rechteckigen Platte; Seite eines regelmässigen Dreiecks oder Sechsecks; Breitenabmessung; Abstand (unveränderlicher).

*b*₀ kleine Halbachse der inneren Begrenzung eines Ellipsenringes; Breitenabmessung.

*C*₁ *C*₂ Integrationsconstante.

*c*₁ *c*₂ „ „ .

d Durchmesser im Allgemeinen, bei Hohlstäben der äussere Durchmesser.

*d*₀ innerer Durchmesser eines Hohlcyinders.

*d*_m mittler „ „ „ .

e *e*₁ *e*₂ Abstände, für gerade Stäbe s. § 16, für gekrümmte s. § 54.

e Kreishalbmesser.

e = $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ (§ 58, Gl. 230).

f Querschnitt.

*f*₀ *f*₁ Sonderwerthe von *f*.

*f*_b Querschnitt an der Bruchstelle des zerrissenen Stabes, dessen ursprünglicher Querschnitt die Grösse *f* besass.

G Eigengewicht.

H Horizontalkraft.

h Höhe eines Querschnitts, eines Prisma; Stärke einer Platte.

*h*₀ Höhenabmessung.

i Anzahl der Windungen einer Schraubenfeder.

u Umfang des Querschnittes.

V Volumen.

x beliebige Strecke, Abscisse.

y Coordinate, insbesondere Ordinate der elastischen Linie, Querschnittsabmessung.

y' Coordinate, Durchbiegung eines Stabes infolge des biegenden Momentes (§ 18),
Zusammendrückung oder Verlängerung einer Schraubenfeder (§ 57).

y'' Durchbiegung eines Stabes infolge der Schubkraft (§ 52, Ziff. 2b).

$Z = \int xy \, df$ (§ 21, Gl. 70).

z Coordinate; Abstand, insbesondere eines Flächenelementes (§ 38), Querschnitts-
abmessung.

z' Coordinate.

z'_0 Sonderwerth von z' .

z_0 Schwerpunktsabstand (S. 98).

α Dehnungscoefficient (§ 2, § 12, reciproker Werth des Elasticitätsmodul),
Winkel, Constante.

α_0 Anstrengungsverhältniss (§ 48).

β Schubcoefficient (§ 29, reciproker Werth des Schubelasticitätsmodul), Winkel,
insbesondere der elastischen Linie mit der ursprünglichen Stabachse
(§ 18), Constante.

$\beta_0 = \frac{k_b}{k_z}$ (§ 45, Ziff. 1).

γ Schiebung (§ 28), Gewicht der Volumeneinheit.

γ_{max} Grösstwerth der Schiebung γ .

ε verhältnissmässige Dehnung (§ 2).

ε' Sonderwerthe von ε .

ε_q " " Querdehnung (§ 7).

ε_0 " " Dehnung der Mittellinie (§ 54).

$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ die Dehnungen in den drei Hauptrichtungen (§ 58).

ζ Aenderung von z (§ 58).

η Coordinate; Abstand, insbesondere eines Flächenelementes von der einen
Hauptachse des Querschnitts.

Θ Trägheitsmoment eines Querschnitts im Allgemeinen, meist jedoch in Bezug
auf die eine Hauptachse.

Θ' polares Trägheitsmoment eines Querschnitts.

$\Theta_1 \Theta_2 \Theta_x \Theta_y$ Trägheitsmomente in Bezug auf besonders bezeichnete Achsen.

ϑ verhältnissmässiger Drehungswinkel (§ 33, § 43).

ι Coefficient (§ 42).

z Zerknickungscoefficient (§ 26).

$z = - \frac{1}{f} \int \frac{\eta}{r + \eta} \, df$ (§ 54).

Berichtigungen.

- S. 12, Zeile 15 von oben lies: indem die Schwingungen u. s. w.
- „ 15, „ 3 „ unten „ : $e^{\frac{\gamma x}{kz}}$
- „ 26, „ 11 „ oben „ : $\frac{x}{h}$
- „ 32, „ 10 „ unten „ : Festigkeitsmessern u. s. w.
- „ 44, „ 8 „ „ „ : und deren Stärke 1,5 cm u. s. w.
- „ 52, „ 4 „ „ „ : Eine befriedigende Theorie u. s. w.
- „ 71, „ 8 „ oben „ : $\frac{\alpha}{\Theta}$
- „ 86, „ 5 „ „ „ : zunimmt
- „ 88, Gl. 69 lies: $\Theta =$ u. s. w.
- „ 90, Zeile 2 von unten lies: z statt Z
- „ 104, „ 6 „ „ „ : $\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} = -n^2 z$
- „ 108, „ 4 „ oben „ : $\frac{\Theta}{l^2}$
- „ 111, „ 1 „ „ „ : vergl § 20, Ziff. 4
- „ 131, „ 4 „ „ „ : r_1 statt r'
- „ 145, zu e und S. 152 zu d ist die Fussbemerkung hinzuzufügen: Die Bestimmung dieses Verdrehungswinkels erfolgt in § 43.
- „ 189, Zeile 4 von oben lies: an die Stelle der Berührung u. s. w.
- „ 212, „ 14 „ „ „ : $P = \overline{OQ_1} = \overline{Q_2Q}$
- „ 222, „ 2 „ „ „ : b^4 statt b^2
- „ 233, „ 1 „ „ „ : in § 21 unter 2
- „ „ 11 „ unten „ : Pa statt P_a
- „ 247, „ 9 „ „ „ : Hypotenuse
- „ 268, „ 2 „ oben „ : $\sin \varphi = 0,25$
- „ 300, „ 3 „ unten „ : $C_1 O_1 C_1$
- „ 301, „ 5 „ „ „ : ω statt w
-

Fig. 148.

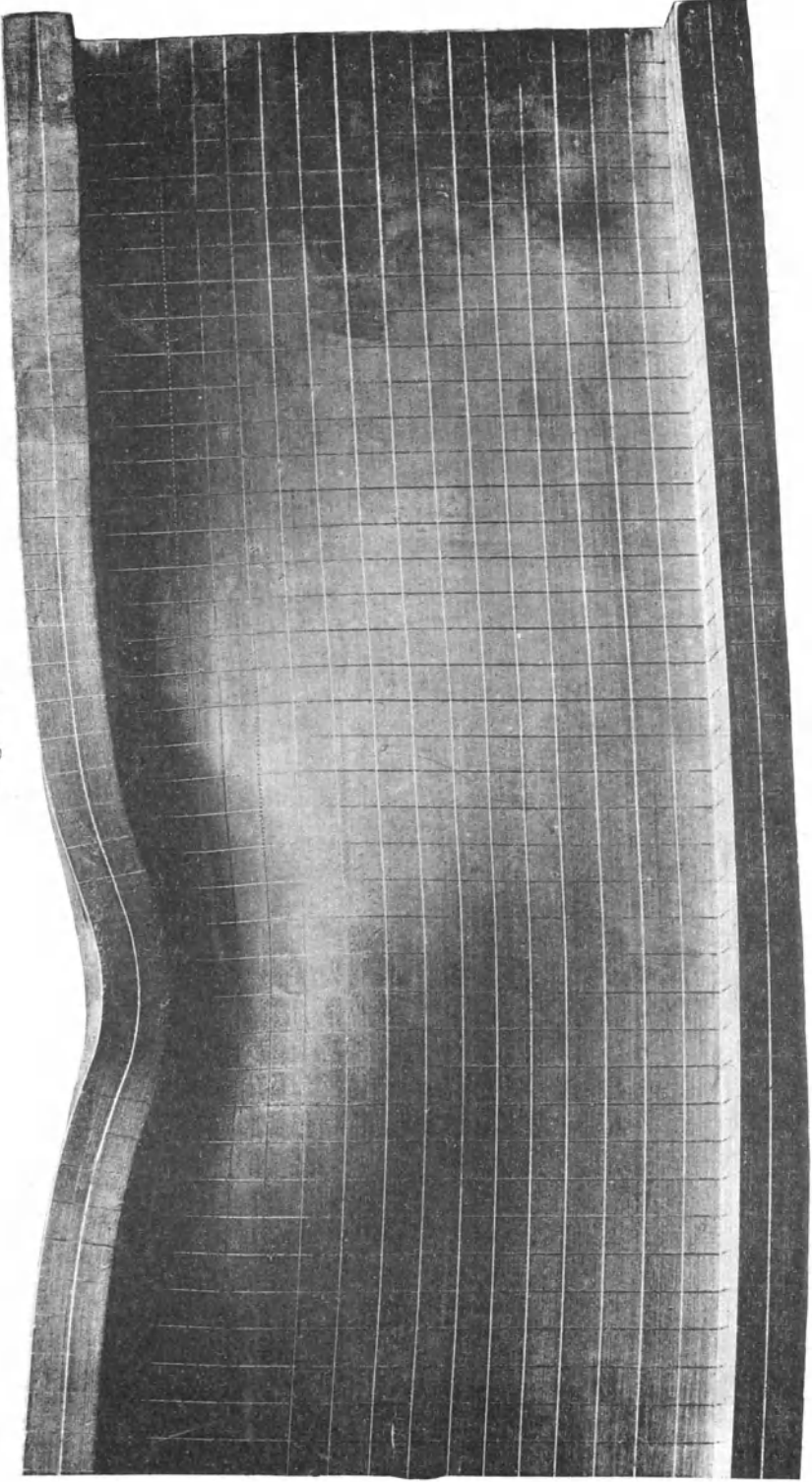


Fig. 146.

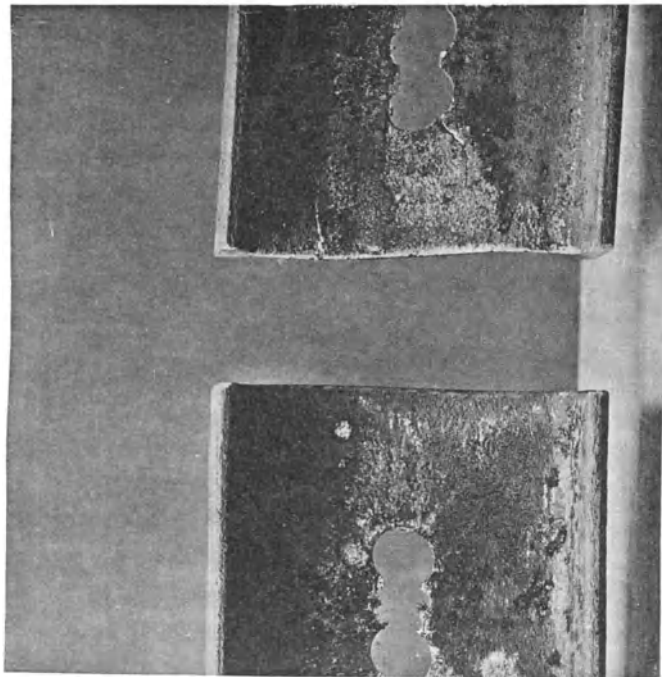


Fig. 195.

