

С. Б. БЕРГМАН

**О НЕКОТОРЫХ ЭФФЕКТИВНЫХ МЕТОДАХ КОНФОРМНОГО  
ОТОБРАЖЕНИЯ <sup>1</sup>**

В настоящей работе рассматриваются некоторые новые методы для эффективного конформного отображения, связанные с формулой Шварца-Кристоффеля и теорией ортогональных функций.

Одна из главных задач эффективных методов конформного отображения состоит в том, чтобы для системы точек или линий, заданных в области  $\mathfrak{B}$ , найти соответствующую ей при конформном отображении систему точек или линий в другой области  $\mathfrak{B}^*$ .

Вышеуказанная проблема распадается на две задачи:

I. Если заданы области  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{B}^*$ , найти функцию, отображающую одну область на другую.

II. После того как искомая функция определена, указать метод, позволяющий при наименьшей затрате вычислительной работы найти в области  $\mathfrak{B}^*$  образы системы точек или линий, заданных в  $\mathfrak{B}$ .

Я хотел бы в дальнейшем указать два метода для решения этих задач, из которых первый относится только к полигональным областям:

§ 1

Интеграл Шварца-Кристоффеля

$$z(w) = \int_0^w \prod_{\mu} (w - w_{\mu})^{\nu_{\mu}} dw \quad (1,1)$$

отображает полушарность  $\mathfrak{S}$  плоскости  $w$  на полигональную область  $\mathfrak{P}$  плоскости  $z$ , причем  $\tau_{\mu}$ —внешние углы полигональной области, а  $w_{\mu}$ —точки действительной оси, соответствующие угловым точкам области  $\mathfrak{P}$ . В соответствии с вышесказанным первая наша задача состоит в том, чтобы найти при заданной  $\mathfrak{P}$  значения  $w_{\mu}$ , а затем возникает конечно вопрос, указанный в п. II. При этом особенно важно решение указанной задачи для известных классов областей; можно поэтому сначала ограничиться некоторыми частными случаями многоугольников, для которых число и величина углов одинаковы и только

<sup>1</sup> Доложено 22 марта 1936 г. на сессии Группы математики Академии Наук СССР.

длины сторон меняются, например для прямоугольников, угловых областей (см. ниже фиг. 1), Т-областей, трапеций и т. д.

Очевидно, что при применениях на практике можно полагать, что  $\nu_\mu$  — рациональные числа. Тогда (1, 1) есть интеграл алгебраической функции; длины сторон области  $\mathfrak{F}$  являются модулями периодичности этого интеграла, и легко доказать, что, изменяя длины сторон  $\mathfrak{F}$  на соответствующим образом выбранные величины  $\epsilon_\mu$ , по абсолютной величине меньшие, чем любое заданное  $\epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ), можно получить область  $\mathfrak{G}$ , которая получается из  $\mathfrak{F}$  при помощи сводимого интеграла (1, 1). (Сводимыми интегралами называются интегралы, которые при помощи алгебраической трансформации  $\xi = R(\omega)$  переходят в один или сумму нескольких эллиптических интегралов. Области, получаемые из  $\mathfrak{G}$  при помощи таких интегралов, мы будем в будущем всегда обозначать буквой  $\mathfrak{K}$ . Однако условие сводимости интеграла, позволяющее найти указанную трансформацию, обыкновенно бывает дано как известное алгебраическое уравнение  $A$  между  $\omega_\mu$  — точками разветвления интеграла, которые как раз требуется определить.)

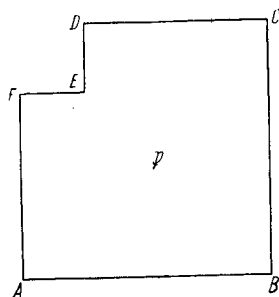
Основная идея нашего метода состоит в следующем. Существует бесконечно много типов сводимых интегралов алгебраических функций. Каждому типу  $J_k$  соответствует кроме алгебраических соотношений ( $A_k$ ) между  $\omega_\mu$  (точками разветвления) известное «характеристическое соотношение» ( $L_k$ ) между модулями периодичности, т. е. между длинами сторон области. [В указанных далее примерах эти соотношения даны равенствами (8, 1), (9, 1)]. Как было указано раньше, области  $\mathfrak{K}$ , принадлежащие ко всякому классу многоугольников (с рациональными  $\nu_\mu$ ), образуют всюду плотное множество в множестве всех областей со спрямляемой границей в смысле равномерной сходимости. Если мы поэтому для решения нашей задачи для какого-нибудь класса областей рассмотрим достаточно большое число типов сводимых интегралов  $J_k$  (где  $k = 1, 2, \dots, n$ ), которые отображают полуплоскость  $\mathfrak{G}$  на области  $\mathfrak{K}$ , принадлежащие к рассматриваемому классу, и составим для каждого из этих типов соответствующее характеристическое соотношение между модулями его периодов, то можно будет для любой заданной области  $\mathfrak{F}$ , принадлежащей к рассматриваемому классу, найти область  $\mathfrak{K}$ , которая практически достаточно мало отличается от заданной и которая получается из  $\mathfrak{G}$  при помощи сводимого интеграла одного из указанных типов  $J_k$  (где  $k = 1, 2, \dots, n$ ). Мы можем тогда (как это будет подробнее показано в приведенном дальше примере), пользуясь «характеристическим соотношением»  $L_k$ , найти модули периодичности эллиптического интеграла (или нескольких интегралов). затем, пользуясь таблицами для эллиптических интегралов, определить точки разветвления эллиптического интеграла и наконец на основании уравнений  $A_k$  определить точки разветвления  $\omega_\mu$  интеграла (1, 1), отображающего  $\mathfrak{G}$  на область  $\mathfrak{K}$  [3].

В виду того что для эллиптических интегралов имеются таблицы, мы получаем отображающую функцию в виде, удобном для вычисления.

Существенно в этом методе то, что если задана область  $\mathfrak{F}$ , то можно легко найти для нее, какие из «характеристических соотношений» между длинами сторон этой области выполнены достаточно точно, и, исходя из этого, определить тип интеграла и найти алгебраическую трансформацию, сводящую интеграл, который аппроксимирует данный.

Установление типов сводимых интегралов в достаточно большом числе не представляет теоретически никакой трудности, но с точки зрения прикладной математики важно выбрать такие, которые при проведении этого метода требуют минимальной вычислительной работы.

Я позволю себе подробнее показать применение этого метода в частном случае, а именно в случае угловой области  $\mathfrak{F} = ABCDEF$  (фиг. 1). В этом случае гиперэллиптический интеграл



Фиг. 1

$$z(w) = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{w(1-w)(1-\rho w)(1+\kappa w)(1+\lambda w)}} \quad (2, 1)$$

отображает полуплоскость на полигональную область  $\mathfrak{F}$ .

Один из известных случаев сводимости ( $J_1$ , случай Якоби) имеет место тогда, когда

$$A_1. \quad \rho = \kappa\lambda \quad [3].$$

В этом случае преобразование

$$p = \frac{1 + \rho w^2}{w} \quad (3, 1)$$

переводит (2, 1) в сумму двух эллиптических интегралов

$$z = z_1 + z_2, \quad z_2 = \mp \int_{p_0}^p \frac{dp}{\sqrt{(p \pm 2\sqrt{\rho})(p-1-\rho)(p+\kappa+\lambda)}} \quad (4, 1)$$

и, далее, преобразование

$$s^2 = \frac{p+1-\rho}{p \mp 2\sqrt{\rho}} \quad (5, 1)$$

дает

$$z = \frac{1}{2} \left[ \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k_1^2 s^2)}} + \int_{t_0}^t \frac{dt}{(1-t^2)(1-k_2^2 t^2)} \right], \quad (6, 1)$$

где

$$\frac{k_1^2}{k_2^2} = \frac{(\sqrt{\kappa} + \sqrt{\lambda})^2}{(1+\kappa)(1+\lambda)}. \quad (7, 1)$$

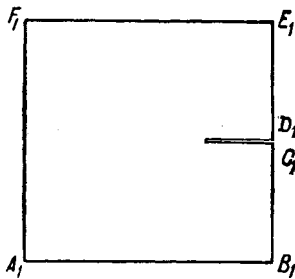
Первый (соответственно второй) интеграл отображает полуплоскость на область, указанную на фиг. 2 (соответственно фиг. 3). Легко пока-

зять, что между длинами сторон полигональной области и модулями периодичности ( $K_n, iK'_n$ ) (при  $n = 1, 2$ ) обоих интегралов существуют следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \overline{AB} &= \alpha(K_1 + K_2) & \overline{BC} &= \alpha(K'_1 + K'_2) \\ \overline{CD} &= 2\alpha K_2 & \overline{DE} &= \alpha(K'_1 - K'_2) \\ \overline{FE} &= \alpha(K_1 - K_2) & \overline{FA} &= 2\alpha K'_1 \end{aligned} \right\} \quad (8, 1)$$

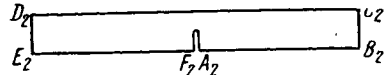
где  $\alpha$  — постоянная.

Как легко видеть, из этих шести уравнений только четыре независимые, так как  $\overline{CD} + \overline{EF} = \overline{AB}$  и  $\overline{AF} + \overline{ED} = \overline{BC}$ .



Фиг. 2

С другой стороны, мы имеем только три независимые величины  $\alpha, \frac{K_1}{K'_1}, \frac{K_2}{K'_2}$ , так как из заданного  $\frac{K_n}{K'_n}$  можно определить  $K_n$  и  $K'_n$ . Так как число уравне-



Фиг. 3

ний превышает число неизвестных, то между длинами сторон должны существовать линейные соотношения, для того чтобы (8, 1) могло быть выполнено. Для определения  $\frac{K_n}{K'_n}$  получаем:

$$\frac{K_1}{K'_1} = 2 - \frac{\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{CD}}{\overline{AF}}, \quad \frac{K_2}{K'_2} = \frac{1}{2} \frac{\overline{DC}}{\overline{BC} - \frac{1}{2}\overline{AF}}.$$

При помощи таблиц для эллиптических интегралов мы можем определить значения  $K_n, K'_n$  и  $k_n$  (при  $n = 1, 2$ ).

Для числа  $\alpha$  мы имеем два различных уравнения, и необходимое и достаточное условие, чтобы наш интеграл принадлежал к типу  $J_1$  (случай Якоби), состоит в том, чтобы оба получаемые для  $\alpha$  значения совпадали. Наконец, по формулам (7, 1) и  $A_1$  находим значения  $\kappa, \lambda, \rho$ .

Дальнейшие типы сводимых интегралов

$$J_2 \quad z = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(\omega^2 - \alpha^2)[4\omega^3 - 3\alpha^2\omega - \alpha^3(2z^2 - 1)]]};$$

$$J_3 \quad z = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(\omega - p\beta_1)(\omega - p\beta_2) \left[ \omega - \frac{p}{8}(4 - \sigma) \right] \left\{ \left[ \omega - \frac{p}{2}(\sigma + 2) \right]^2 + \frac{p}{4}(4 - \sigma)(\sigma + 2) \right\}}}$$

[где  $\beta_1, \beta_2$  — корни уравнения  $\beta^2 - \sigma\beta + \frac{1}{2}(4 - \sigma) = 0$ ] рассмотрены Ку-

фаревым [16]. Характеристические соотношения для этих типов между модулями периодичности имеют вид

$$\left. \begin{array}{l} L_2 \\ L_3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = 2, \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = 2, \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = 2, \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = 3. \end{array} \quad (9, 1)$$

В случае  $J_2$  трансформация

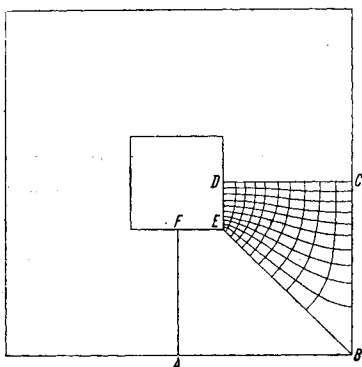
$$\xi^2 = \frac{4w^3 - 3\alpha^2 w - \alpha^3}{4w^3 - 3\alpha^2 w - \alpha^3(2\kappa^2 - 1)},$$

а в случае  $J_3$  трансформация

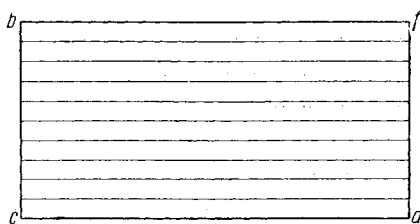
$$\xi^2 = \frac{(w - p\alpha_1)^2 (w - p\alpha_2)^2}{(w - p)^2 (w - p\beta_1) (w - p\beta_2)}$$

переводит указанный интеграл в эллиптический ( $\alpha_1, \alpha_2$ —корни уравнения  $\alpha^2 - \frac{1}{2}(2 + \sigma)\alpha + \frac{1}{8} \cdot \frac{4 - \sigma}{2 + \sigma} = 0$ ).

Применяя изложенный метод, удалось определить и изучать линии тока в области, указанной на фиг. 4. Линии тока получаются легко из линий  $x = \text{const}$ , если отобразить область, указанную на фиг. 5, на



Фиг. 4



Фиг. 5

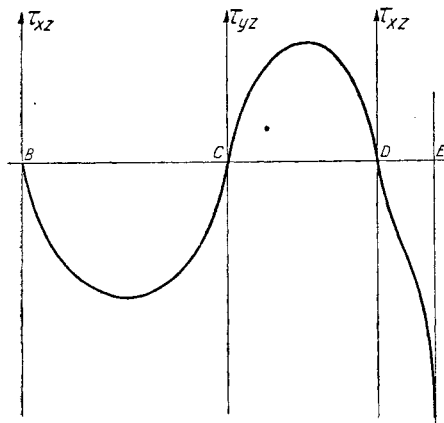
угловую область (фиг. 1) так, чтобы точки  $a, f, b, c$  перешли в точки  $A, F, B, C$  [3, 18].

Далее удалось определить напряжения и смещения стержня углового сечения (фиг. 1) при кручении на изгиб [13, 16]. В случае кручения задача сводится к определению сопряженной гармонической функции, принимающей на границе области значения  $|z|^2$ , и ее производной. На фиг. 6а и 6б указаны напряжения и смещения на границе в случае изгиба. В вычисленном примере

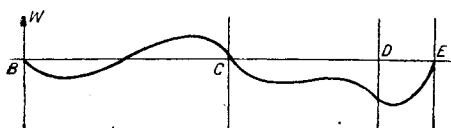
$$\overline{DC} = \overline{DE} = 2.7222; \quad \overline{CB} = \overline{EF} = 2.0008.$$

Я хотел бы добавить, что вопрос о решении граничной задачи теории потенциала для области, для которой известна функция, отображающая ее на круг, приводит к известным практическим трудностям. Если пере-

нести граничные значения на окружность, то можно при помощи рядов Фурье определить гармоническую функцию, принимающую заданные значения.



Фиг. 6а



Фиг. 6б

Вычисление коэффициентов Фурье, например, при помощи анализаторов не представляет никаких трудностей. Но определение функции из заданных коэффициентов Фурье сопряжено с очень большой вычислительной работой, и мне кажется, что следовало бы создать аппараты для решения этой задачи. В случае, если производные функции имеют разрывы, при вычислении целесообразно применить метод, указанный А. Н. Крыловым (см., например, И. И. Привалов, «Ряды Фурье» 1935, стр. 88—92), или же, в случае полигональной области, метод, указанный в работе Бернштейна<sup>1</sup>.

## § 2

Другой предлагаемый нами метод основывается на построении комплексных ортогональных функций и в связи с ними неевклидовой метрики, инвариантной при конформных отображениях [1, 9].

Пусть  $\mathfrak{B}$  какая-нибудь связная область, лежащая целиком в ограниченной части плоскости;  $\varphi_\nu(z)$  (при  $\nu = 1, 2, \dots$ ) — полная система функций, ортогональных в ней, т. е. таких, что

$$\begin{aligned} \delta_{\nu\nu} &= 1; & d\omega &= dx dy \\ \int_{\mathfrak{B}} \varphi_\nu(z) \overline{\varphi_\mu(z)} d\omega &= \delta_{\nu\mu}, & & \\ \delta_{\nu\mu} &= 0; & \nu &\neq \mu \end{aligned} \quad (1, 2)$$

и что для всякой функции  $f$ , регулярной в  $\mathfrak{B}$ ,

$$\int_{\mathfrak{B}} |f|^2 d\omega = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \int_{\mathfrak{B}} f \overline{\varphi_\nu} d\omega \right|^2. \quad (2, 2)$$

Тогда, как можно показать,  $K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} |\varphi_\nu(z)|^2$  есть действительная функция, которая регулярна (будучи рассматриваема как функция двух

<sup>1</sup> Указанный метод состоит в том, что для функции  $H$ , заданной на контуре полигональной области  $\mathfrak{B}$ , строится гармонический полином  $P$  так, чтобы после преобразования на окружность функция  $H - P$  имела повсюду (также и в точках круга, соответствующих угловым точкам  $\mathfrak{B}$ ) непрерывную производную.

переменных  $x, y$ ) для всех  $z = x + iy$ ,  $z \in \mathfrak{B}$  [1, 12]. Мы ее называем *кери-функцией* области  $\mathfrak{B}$ . Она не зависит от выбора полной системы ортогональных функций и является интегральной инвариантой при конформных отображениях. *Линейный элемент*

$$ds^2 = K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z}) |dz|^2 \quad (3, 2)$$

дает нам метрику, инвариантную при этих отображениях. Инвариант конформных отображений (отличается от кривизны отрицательным постоянным множителем)

$$J_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z}) = \frac{\pi}{K_{\mathfrak{B}}} \cdot \frac{\partial^2 \ln K_{\mathfrak{B}}}{\partial z \partial \bar{z}} [3]. \quad (4, 2)$$

Заметим, что  $K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z})$  можно определить также и иным путем: если  $h(z)$  пробегает совокупность  $L$  функций, регулярных в  $\mathfrak{B}$ , для которых  $\int_{\mathfrak{B}} |h(z)|^2 d\omega \leq 1$ , то

$$K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z}) = \max_{h \in L} |h(z)|^2. \quad (5, 2)$$

В случае односвязных областей из теоремы Римана легко следует, что полученная метрика есть метрика гиперболическая. (Для круга  $\mathfrak{K}$   $|\omega| < 1$ ;  $K_{\mathfrak{K}}(\omega, \bar{\omega}) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 - \omega\bar{\omega})^2}$ ;  $J_{\mathfrak{K}}(\omega, \bar{\omega}) = 2$ .) В случае многосвязных областей мы получаем Риманову метрику с переменной кривизной. Функция

$$\omega(z, a) = \int_a^z \frac{K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{a})}{K_{\mathfrak{B}}(a, \bar{a})} dz, \quad a \in \mathfrak{B} \quad (6, 2)$$

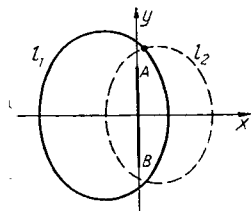
отображает область  $\mathfrak{B}$  на так называемую *минимальную область*, т. е. такую, которая нормированной функцией  $f(\omega)$  ( $|f'(0)| = 1$ ) не может быть отображена на область меньшей площади.  $M_{\mathfrak{B}}(z, \bar{a}) = \frac{K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{a})}{K_{\mathfrak{B}}(a, \bar{a})}$  называется *минимальной функцией* области  $\mathfrak{B}$ . В случае односвязной области минимальная область — круг<sup>1</sup>, а в случае двусвязных областей — это области, лежащие на двулистной Римановой поверхности (фиг. 7) [17].

Функция  $\nu(z, \bar{a}) = \frac{1}{K_{\mathfrak{B}}(a, \bar{a})} \cdot \frac{\partial \ln M_{\mathfrak{B}}(z, \bar{a})}{\partial a}$  отображает  $\mathfrak{B}$  на так на-

<sup>1</sup> В виду того что существование функции, отображающей на минимальную область, может быть доказано независимо от теоремы Римана о существовании функции, отображающей на круг, интересно было бы доказать (не прибегая к теореме Римана), что всякая односвязная минимальная область  $\mathfrak{M}$  есть круг, и таким образом дать новое доказательство теоремы Римана. До сих пор однако удалось показать, что  $\mathfrak{M}$  есть круг только в том случае, если  $\mathfrak{M}$  звездная область и ограничена всюду дифференцируемой кривой [6].

зываемую репрезентативную область [21, 19]. Для односвязной области репрезентативная область является тоже кругом.

Что касается эффективного построения ортогональных функций, например в случае односвязной области полиномов, то их можно получить, хотя бы при помощи ортогонализации степеней  $z^v$  ( $v = 1, 2, \dots$ ). Но на практике можно вычислить только небольшое количество ортогональных функций, а ряды, в особенности вблизи границы, очень плохо сходятся; кроме того, область, получаемая



Фиг. 7. Минимальная двусвязная область. Граничные кривые  $l_1$  и  $l_2$  лежат в различных листах Римановой поверхности.  $AB$ —купюра

из  $\mathfrak{B}$  при помощи приближений  $\sum_{v=1}^n \varphi_v(z) \overline{\varphi_v(a)}$ , в общем случае не однолистка, и поэтому этот метод целесообразно применять только в случае, если  $\mathfrak{B}$  мало отличается от круга<sup>1</sup>.

Если нам известны ортогональные функции для области  $\mathfrak{B}$  и для  $\mathfrak{B}^*$ , то нетрудно с их помощью выразить функцию, отображающую  $\mathfrak{B}$  на  $\mathfrak{B}^*$  [8, стр. 670].

Ортогональные функции можно непосредственно применить для решения краевых задач, в особенности для уравнений  $\Delta u = 0$ ,  $\Delta \Delta u = 0$  и уравнений теории упругости [4, 5]. (Эти ортогональные функции являются частными решениями данного уравнения.) На фиг. 8а—8д указаны приближения такого рода для гармонической функции в цилиндре, основание которого есть круг радиуса, равного 1, а высота тоже равна 1 [5]. Искомая функция принимает на кругах радиуса 0.5, лежащих на обоих основаниях, значение 1, а на остальной части исчезает. На фиг. 8а—8д указаны изменения заданной и аппроксимирующих функций вдоль радиуса основания и вдоль образующей.

Мне кажется, что было бы целесообразно серьезно заняться вопросом о том, насколько применение ортогональных функций в общем случае позволяет разрешить граничные задачи. В особенности можно было бы рассчитывать на успех, если бы были построены машины для решения системы линейных уравнений со многими неизвестными.

Использование неевклидовой метрики дает метод для отображения двусвязных областей. Как известно, можно отобразить всякую двусвязную область на кольцо, причем отношение радиусов обоих кругов.

<sup>1</sup> Этот метод для односвязных областей был в другой форме указан Бибербахом[14].

В еще неопубликованной работе М. В. Келдыш указал условия, когда ряд

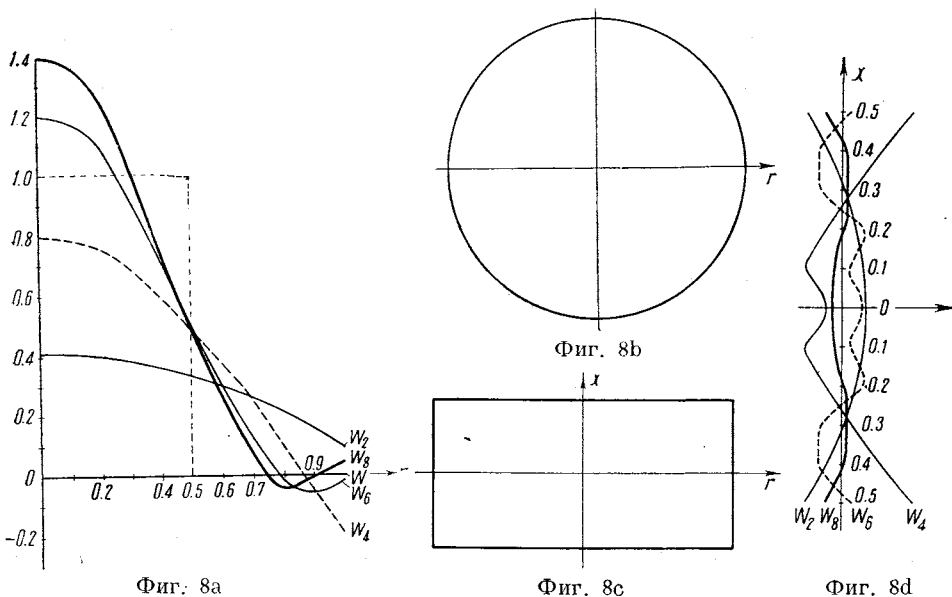
$$\sum_{v=1}^{\infty} \varphi_v(z) \overline{\varphi_v(a)}, \quad a \in \mathfrak{B},$$

сходится на границе области  $\mathfrak{B}$  в том случае, если  $\varphi_v^*(z)$ —ортогональные полиномы.



(модуль двусвязной области) является инвариантой при конформных отображениях.

Для кольца  $\mathfrak{R} = E[r < |\omega| < 1]$  метрика (3, 2) изучена Заранкевичем [14, 15]. Инвариант  $J_{\mathfrak{R}}(\omega, \bar{\omega})$  не постоянен, изменения  $J_{\mathfrak{R}}(\omega, \bar{\omega})$  вдоль радиуса  $\arg \omega = \text{const}$  указаны на фиг. 9b. На границе  $J_{\mathfrak{R}}(\omega, \bar{\omega}) = 2$ , а для  $|\omega| = \sqrt{z} J_{\mathfrak{R}}(\omega, \bar{\omega})$  принимает максимальное значение  $J_{\mathfrak{R}}^{(\max)}$ . Вдоль концентрических кругов  $J_{\mathfrak{R}}(\omega, \bar{\omega})$ , конечно, постоянно.  $J_{\mathfrak{R}}^{(\max)}$  является ра-

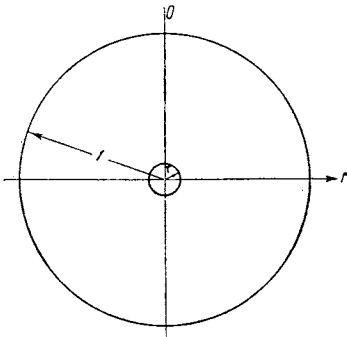


стущей функцией модуля двусвязной области. Если поэтому нам задана двусвязная область  $\mathfrak{B}_2$  и мы можем высчитать достаточно большое количество ортогональных функций [например, путем ортогонализации системы  $z^\nu, (z - a)^{-\nu}$  (при  $\nu = 1, 2, \dots$ ), где  $a$  — внешняя точка области  $\mathfrak{B}_2$ , лежащая внутри внутреннего контура], то можно с известной степенью точности сконструировать кривые  $J_{\mathfrak{B}_2}(z, \bar{z}) = \text{const}$ , которые являются образами концентрических кругов  $|\omega| = \text{const}$  кольца  $\mathfrak{R}$ ; ортогональные траектории к ним являются образами радиусов кольца  $\arg \omega = \text{const}$ . То что  $J_{\mathfrak{R}}^{(\max)}$  является возрастающей функцией модуля, позволяет нам определить этот модуль, так как мы можем высчитать приближенно  $J_{\mathfrak{B}_2}^{(\max)} = J_{\mathfrak{R}}^{(\max)}$ , а это позволяет определить радиус  $r$  кольца  $\mathfrak{R}$ , на которое отображается  $\mathfrak{B}_2$ . Если мы теперь любую точку кривой  $J_{\mathfrak{B}_2}(z, \bar{z}) = J_{\mathfrak{B}_2}^{(\max)}$  примем за начало координат, линии  $J_{\mathfrak{B}_2}(z, \bar{z}) = \text{const}$  и их ортогональные траектории — за координаты, а расстояния вдоль них будем измерять при помощи инвариантной метрики (3, 2), то мы получим так называемые «естественные координаты», которые инвариантны при отображениях. (Построение этих координат, конечно,

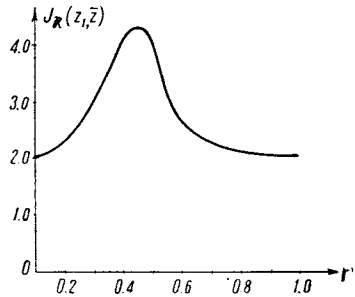
позволяет отобразить  $\mathfrak{B}_2$  на кольцо!) [14, 15]. Примеры эффективного применения этого метода не были вычислены. Его недостаток состоит в том, что практически возможно вычислить только небольшое число ортогональных функций, сумма которых в частях области  $\mathfrak{B}_2$ , близко лежащих к границе, плохо сходится.

Мы переходим к указанию других методов для вычисления kern-функции, инвариант и т. д., которые в особенности можно использовать на практике для точек, близко лежащих к границе области [9].

Как  $\frac{1}{K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z})}$ , так и все другие величины, встречающиеся в неевклидовой метрике, являются минимальными значениями в известных ва-



Фиг. 9а



Фиг. 9б

риационных задачах. Если мы, например, ищем минимум  $\int_{\mathfrak{B}} |h|^2 d\omega$  при условии, что  $h$  регулярна в области  $\mathfrak{B}$  и  $|h(t)| = 1$ ,  $t \subset \mathfrak{B}$ , то минимум равен  $\frac{1}{K_{\mathfrak{B}}(t, \bar{t})}$ . Если мы на  $h(t)$  накладываем более сложные условия, то для минимального значения получаются другие характерные для нашей метрики величины. Если поэтому  $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ , то

$$K_{\mathfrak{Z}}(z, \bar{z}) \geq K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z}) \geq K_{\mathfrak{A}}(z, \bar{z}). \quad (7, 2)$$

Во многих случаях нетрудно выбрать такие  $\mathfrak{Z}$  и  $\mathfrak{A}$  (внутренняя и внешняя области сравнения), для которых функции, отображающие их на круг (или кольцо), известны, и часть границы  $\mathfrak{Z}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{A}$  совпадает. Тогда в известной окрестности этой части границы  $K_{\mathfrak{Z}}(z, \bar{z})$  и  $K_{\mathfrak{A}}(z, \bar{z})$  практически мало отличаются одна от другой, а на основании (7, 2) мы можем в данных точках определить  $K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z})$ . Заметим, что этот метод можно использовать для получения предельных формул: пусть  $Q$  — граничная точка  $\mathfrak{B}$ , в которой существует нормаль  $n$ , и пусть положительная ось  $x$  совпадает с внутренней нормалью  $n$ , а ось  $y$  с касательной  $\bar{t}$  в точке  $Q$ . Такие координаты называются нормальными в точке  $Q$ . Положим, что существуют два круга  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{Z}$  с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ , каса-

ющиеся в точке  $Q$  касательной  $\dagger$  так, что  $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \supset \mathfrak{Z}$ . Тогда легко вычислить, что при приближении

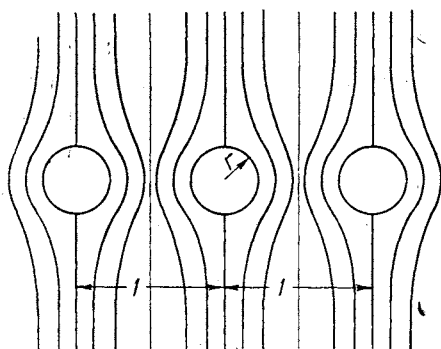
$$A^I \quad \left( \frac{2|z|}{z + \bar{z}} < \frac{1}{\cos \alpha}, \quad |\alpha| < \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\lim_{z \rightarrow Q} (z + \bar{z})^2 K_{\mathfrak{Z}}(z, \bar{z}) = \lim_{z \rightarrow \infty} (z + \bar{z})^2 K_{\mathfrak{A}}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\pi}.$$

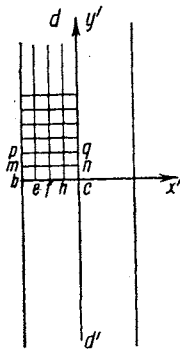
На основании (7, 2) следует, что при приближении  $A^I$

$$\lim_{z \rightarrow Q} (z + \bar{z})^2 K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\pi} [9].$$

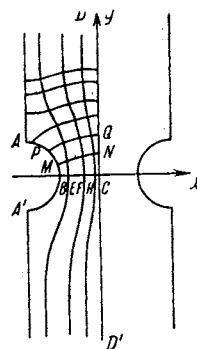
Этого рода методы позволяют вычислить выражения, которые в окрестности данных частей границы хорошо аппроксимируют  $K_{\mathfrak{Z}}(z, \bar{z})$ ,  $K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z})$



Фиг. 10



Фиг. 11а



Фиг. 11б

и т. д. Во многих случаях можно также подобрать области сравнения  $\mathfrak{Z}$  и  $\mathfrak{A}$  так, что в известной части области  $\mathfrak{B}$  выражения  $K_{\mathfrak{Z}}(z, \bar{z})$  и  $K_{\mathfrak{A}}(z, \bar{z})$  практически будут совпадать.

Поясним в общих чертах на примере применение этого метода. Известная задача гидродинамики состоит в том, чтобы найти линии тока в области, указанной на фиг. 10. Очевидно задача будет решена, если мы сумеем отобразить область  $\mathfrak{S} = E[0 < \text{Re } \omega < 1]$  (фиг. 11а) на  $\mathfrak{B} = E[0 < \text{Re } z < 1, |z| > a, |z-1| > a]$  (фиг. 11б) так, чтобы точки  $d, d'$  перешли в точки  $D, D'$ , а действительная и мнимая ось—в самих себя. В окрестности точки  $C$  можно  $K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z})$  вычислить при помощи ортогональных функций и, пользуясь затем метрикой (3, 2), найти на  $\overline{BC}$  и  $\overline{CD}$  точки  $e, f \dots$ . Чтобы найти  $K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z})$  вблизи дуги  $\overline{AB}$ , можно взять  $\mathfrak{Z} = E[0 < \text{Re } z < 1 - a, |z| > a]$ , и  $\mathfrak{A} = E[0 < \text{Re } z, |z| > a]$ , а вблизи  $D$   $\mathfrak{Z} = E[0 < \text{Re } z < 1, \text{Im } z > a]$ ,  $\mathfrak{A} = E[0 < \text{Re } z < 1]$ . Для того чтобы перенести геодезические линии  $ed_1, fd_2, hd_3, \dots$  и  $mn, pq, \dots$ , мы строим в  $\mathfrak{B}$  геодезические линии, исходящие из точек  $E, F, H, N$  и образующие с  $BC$  или  $CD$  прямой угол. Уравнение геодезической линии имеет вид:

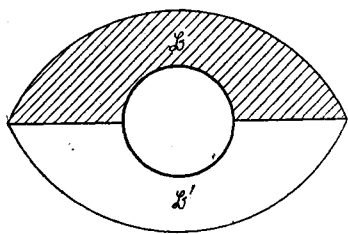
$$\frac{d^2z}{ds^2} + \frac{1}{K_{\mathfrak{B}}} \cdot \frac{dK_{\mathfrak{B}}}{dz} \left( \frac{dz}{ds} \right)^2 = 0,$$

причем  $\frac{dK_{\mathfrak{B}}}{dz}$  можно вычислять подобным же образом, что и  $K_{\mathfrak{B}}(z)$  [10].

Заметим, что совокупность геодезических линий метрики (3, 2) может быть построена или аппроксимирована, исходя из следующей теоремы [19].  
Кривые

$$\frac{\partial \ln M_{\mathfrak{B}}(z, \bar{a})}{\partial a} = \alpha p,$$

где  $\alpha$  — комплексное постоянное,  $p$  — параметр,  $M_{\mathfrak{B}}(z, \bar{a})$  — минимальная функция области  $\mathfrak{B}$  (см. стр. 117), проходят через точку и имеют в ней соприкосновение не менее второго порядка с геодезическими линиями метрики (3, 2), установленной внутри области  $\mathfrak{B}$ . В случае, если область  $\mathfrak{B}$  односвязная, эти кривые полностью совпадают с геодезическими линиями.



Фиг. 12

В некоторых случаях для определения  $K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z})$  следует вычислить несколько ортогональных функций  $\varphi_s(z)$  (при  $s = 1, 2, \dots, n$ ), и затем только для определения

$\left[ K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z}) - \sum_{s=1}^n |\varphi_s(z)|^2 \right]$  пользоваться внешней и внутренней областью сравнения. Нередко (см., например, область, указанную на фиг. 12) целесообразно путем зеркального отображения перейти от односвязной области  $\mathfrak{B}$  к двусвязной  $\mathfrak{B} + \mathfrak{B}'$  и применять для отображения указанный на стр. 118 метод для двусвязных областей.

В заключение заметим, что ортогональные функции можно привлечь также для определения констант в интегралах Шварц-Кристоффеля [2].

#### ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Бергман [Bergmann], МА, 86, 237—271 (1922). <sup>2</sup> МЗ, 19, 8—23 (1923).
- <sup>3</sup> ЗаММ, 5, 319—331 (1925); 8, 452—453 (1928). <sup>4</sup> МА, 98, 248—269 (1927).
- <sup>5</sup> ЗаММ, 8 (1928). <sup>6</sup> Sitzungsb. d. Berl. math. Gesellschaft, 30, 11—13 (1892).
- <sup>7</sup> МЗ, 29, 481—486 (1929). <sup>8</sup> МЗ, 29, 640—670 (1929). <sup>9</sup> Crellès Journal f. reine u. angew. Math., 169, 1—42 (1933); 172, 89—128 (1934). <sup>10</sup> ТИ, 1, 69—74 (1935).
- <sup>11</sup> Бибербах [Bieberbach], Rendiconti di Circolo mat. di Palermo, 38, 98 (1915).
- <sup>12</sup> Бохнер [Bochner], МЗ, 14 (1922).
- <sup>13</sup> Бернштейн [Bernstein], Zum Torsionsproblem des Winkelquerschnittes, ПММ (печатается).
- <sup>14</sup> Заранкевич [Zarankiewicz], ЗаММ, 14, 97—104 (1934).
- <sup>15</sup> — СР, 198, 1347 (1934).
- <sup>16</sup> Куфарев [Kufareff], К вопросу о кручении и изгибе стержней полигонального сечения, ПММ (печатается).
- <sup>17</sup> Куфарев [Kufareff], ТИ, 1, 228—235 (1936).
- <sup>18</sup> Штейн [Stein], ЗаММ, 9, 23 (1929).
- <sup>19</sup> Фукс [Fuchs], Über die geodätischen Mannigfaltigkeiten einer gegenüber analytische Abbildungen invarianten Metrik, Матем. сб. (печатается).

<sup>20</sup> Бергман и Куйфарев [Bergmann u. Kufareff], ПММ (печатается).

<sup>21</sup> Бергман (Bergmann) МА, 104, 611—636 (1931).

С о к р а щ е н и я

ТИ—Известия НИИММа при Томском гос. университете им. Куйбышева.

ПММ—Прикладная математика и механика.

МА—Mathematische Annalen.

MZ—Mathematische Zeitschrift.

ZaMM—Zeitschrift für angew. Mathematik u. Mechanik.

CR—Comptes Rendus de l'Academie de Sciences (Paris).

Научно-исслед. институт математики и механики  
при Томском гос. университете  
им. Куйбышева.

**STEFAN BERGMANN. ÜBER EINIGE METHODEN ZUR EFFEKTIVEN  
DURCHFÜHRUNG DER KONFORMEN ABBILDUNG**

**ZUSAMMENFASSUNG**

In der vorliegenden Note schildern wir einige neue Methoden der konformen Abbildung, welche sich im Zusammenhange mit der Schwarz-Christoffelschen Formel und mit der Theorie der komplexen Orthogonalfunktionen befinden.