Beitrag zur Berechnung des durch einen vollwandigen Balken verstärkten steifen Bogens und verwandter statischer Systeme

Von

Dipl.-Ing. ARNOLD SPILKER

*

Auszug aus der von der Technischen Hochschule Berlin genehmigten

DISSERTATION

zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs

*

Referent: Geh. Reg.-Rat Prof. Dr.-Ing. Müller, Breslau
Korreferent: Geh. Reg.-Rat Prof. S. Müller.

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1922

Sonderabdruck aus
„DER BAUINGENIEUR",
Zeitschrift für das gesamte Bauwesen
3. Jahrgang, 1922, Heft 3.

ISBN 978-3-662-27824-6 ISBN 978-3-662-29324-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-29324-9

Quellenangabe.

Müller-Breslau, Vorlesung an der Technischen Hochschule zu Berlin, in denen die Anregung zu vorliegender Arbeit gegeben wurde.

Müller-Breslau, Die Graphische Statik der Baukonstruktionen Band II, Abt. 2. (In der Abhandlung abgekürzt Gr. St.).

Müller-Breslau, Theorie des durch einen Balken verstärkten steifen Bogens (Zivil-Ingenieur 1883).

Paul Gottschalk, Biegungssteifer Zweigelenkbogen mit vollwandigem Versteifungsbalken (Diss. Berlin T. H.).

Otto Birkenstock, Untersuchung der Kontinuität der Längsträger zweigleisiger Balkenbrücken (Diss. Berlin T. H.).

Die in der vorliegenden Arbeit zu untersuchenden Systeme können zusammenfassend als Kombinationen von 2 oder mehr biegungssteifen, durch elastische Zwischenstäbe in gleichmäßigen Abständen zu gemeinsamer Tragwirkung miteinander verbundenen Trägern gekennzeichnet werden. Ihre Berechnung erfolgt abweichend von dem allgemein üblichen Verfahren in der Weise, daß die äußere Belastung in passende Teilbelastungszustände zerlegt wird. Die Untersuchung des Systems für diese Teilbelastungen führt bei jedem der hier behandelten Tragwerke auf das Problem des durchlaufenden Balkens auf elastischen Stützen, dessen Berechnung bei Benutzung der bekannten Tabellen von Müller-Breslau (Gr. St. II, 2) schnell und ohne irgendwelche Schwierigkeiten durchzuführen ist. Der Gang des Untersuchungsverfahrens möge zunächst an dem etwas allgemeineren Fall des durch einen vollwandigen Balken verstärkten steifen Bogens kurz dargelegt werden. Es soll jedoch alsdann vor allem auf eine praktisch wichtige Anwendung bei der Untersuchung der Längsträger von Eisenbahn-Balkenbrücken näher eingegangen werden.

I. Entwickelung des Rechnungsverfahrens.

Das in Abb. 1 dargestellte Tragwerk ist mit n Feldern n-fach statisch unbestimmt. Als überzählige Größen werden der Horizontalschub H des Bogens und die Biegungsmomente $\overline{M}_r$ im Versteifungsbalken über den Pfosten eingeführt. Es

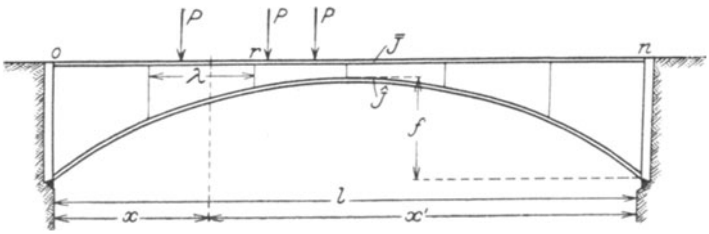

Abb. 1.

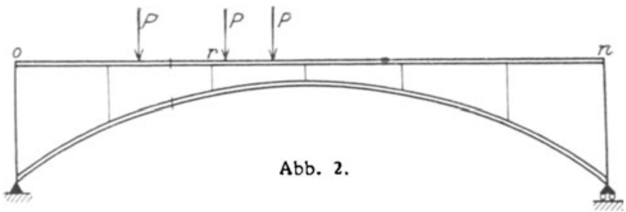

Abb. 2.

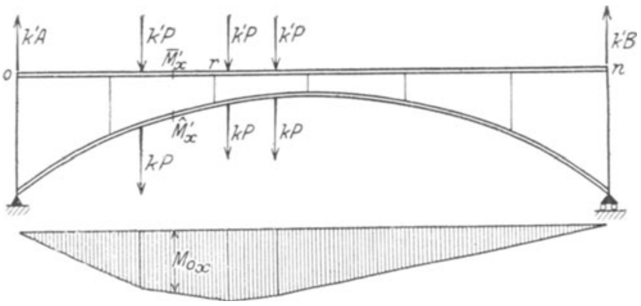

Abb. 2a.

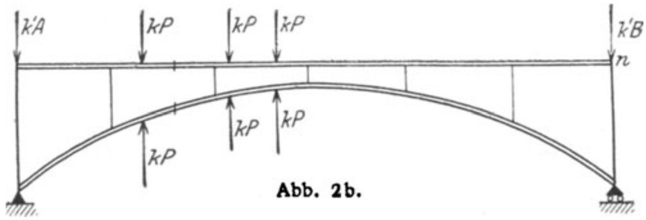

Abb. 2b.

wird zunächst das (n — 1)-fach statisch unbestimmte System untersucht, das man erhält, wenn das eine Auflager in wagerechter Richtung verschieblich angeordnet wird. Die äußere Belastung des Systems wird in die Teilbelastungen nach Abb. 2a und 2b zerlegt. In dieser Abb. bedeuten A und B die Auflagerdrücke des stellvertretenden einfachen Balkens von der Spannweite. Ferner ist:

$$k = \frac{\hat{J}}{\hat{J}+\overline{J}} = \frac{1}{1+\frac{\overline{J}}{\hat{J}}}\ ;\ k' = 1 - k = \frac{\overline{J}}{\hat{J}+\overline{J}}$$

Wo $\overline{J}$ das Trägheitsmoment des Versteifungsbalkens $\hat{J}$ das mit dem Cosinus des jeweiligen Neigungswinkels φ der Tangente an die Bogenachse multiplizierte Trägheitsmoment des Bogens bedeuten.

Bei dem mit a bezeichneten ersten Belastungsfall sind die Lasten im Verhältnis der Trägheitsmomente auf Balken und Bogen verteilt. Die Pfosten sind dann offenbar spannungslos, da Balken und Bogen die gleichen „reduzierten Momentenflächen“ und somit auch gleiche Durchbiegung haben. Das Moment $\overline{M}_x'$ für irgend einen Querschnitt x des Versteifungsbalkens ist daher gleich dem mit k′ multiplizierten entsprechenden $M_{0,x}$ des stellvertretenden einfachen Balkens von gleicher Spannweite. Es ist also:

$$\overline{M}_x' = k'\, M_{0,x}$$

und für den Bogen $\qquad \hat{M}_x = k\, M_{0,x},$

Bei dem anderen Belastungsfall nach Abb. 2b sind Balken und Bogen mit den gleichen aber entgegengesetzt gerichteten Kräften P k und an den Enden A k' bzw. B k' belastet. Die Elastizitätsgleichungen zur Ermittlung der statisch unbestimmten Größen lauten alsdann

$$4 + \alpha_0 + 4\,\alpha_1 + \alpha_2)\,\overline{M}_1''\ [1 - 2\,(\alpha_1 + \alpha_2)]\,\overline{M}_2'' + \alpha_2\,\overline{M}_3'' = Z_1''$$

$$[1 - 2\,(\alpha_1 + \alpha_2)]\,\overline{M}_1'' + (4 + \alpha_1 + 4\,\alpha_2 + \alpha_3)\,\overline{M}_2\ .$$
$$+ [1 - 2\,(\alpha_2 + \alpha_3)]\,\overline{M}_3'' + \alpha_3\,\overline{M}_4'' = Z_2''$$

. . . .

$$\alpha_{r-1}\,\overline{M}''_{r-2} + [1 - 2(\alpha_{r-1} + \alpha\quad \overline{M}''_{r-1} + \ 4 + \alpha_{r-1} + \alpha_r + \alpha_{r+1})\,\overline{M}_r'$$
$$+ [1 - 2\,(\alpha\cdot + \alpha_{r+1})]\,\overline{M}''_{r+1} + \alpha_{r+1}\,\overline{M}''_{r+2} = Z_r'' \quad (3$$

Hierin bedeuten:

$$\alpha_r = 6\,\overline{J}\,\frac{k}{\lambda^3}\cdot\frac{s_r}{F_r}\ ;\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (4$$

$$Z_r'' = -k\left\{\frac{6L_{0,r}+R_{0,r+1}}{\lambda^2} - \lambda(C_{0,r-1}\alpha_{r-1} - 2C_{0,r}\alpha_r + C_{0,r+1}\alpha_{r+1})\right\} \quad (5$$

s_r die Länge des r-ten Pfostens,

λ die konstante Feldweite,

F_r' der Querschnitt des r-ten Pfostens,

$L_{0,r}$ das statische Moment der Momentfläche des einfachen Balkens r, r—1 infolge der Belastung durch die Kräfte P bzw. A u. B bezogen auf die Senkrechte durch den linken Auflagerpunkt r—1,

$R_{0\,r}$ desgleichen auf den rechten Auflagerpunkt r,

$C_{0.r}$ der Auflagerdruck der einfachen Balken r—1, r und r, r+1 auf dem r-ten Pfosten.

Die Gleichungen selbst stimmen völlig überein mit den Bedingungsgleichungen zur Ermittlung der Stützenmomente eines elastisch gestützten durchlaufenden Trägers von überall gleichem Querschnitt (vergl. Gr. St. II. 2, S. 75). Als Trägheitsmoment des Balkens ist $\bar{J}\cdot k = \frac{J\,\hat{J}}{J+\hat{J}}$ aufzufassen. Die Elastizität der Stützen ist durch $W_r = \frac{s_r}{F_r'}$ gegeben. Belastet ist dieser gedachte Balken mit den Kräften P k und an den Enden mit den Einzellasten A k' bzw. B k'.

Um den Einfluß des Horizontalschubes H auf das n—1-fach stati ch unbestimmte System zu ermitteln, braucht man in den Gl. (3) nur das Belastungsglied Z neu zu bestimmen. Die aus diesen neuen Gleichungen sich ergebenden Stützenmomente sollen mit $\bar{M}_r'''$ bezeichnet werden. Das Belastungsglied lautet für den Fall, daß die Bogenachse nach einer Parabel gekrümmt ist, was bei genügend flachem Bogen stets angenommen werden kann,

$$Z_r''' = k'(6\,y_r - 4\,f') + 48\,\frac{k\bar{J}}{F}\cdot\frac{f}{l^2} = W_r \;\ldots\ldots \quad (6$$

wenn

y_r die Ordinate der Bogenachse an der Stelle r,

f die Pfeilhöhe des Bogens,

$f' = f\,\frac{\lambda^2}{l^2}$ die Pfeilhöhe des Parabelabschnittes zwischen 2 benachbarten Punkten r und r+1,

F den Bogenquerschnitt

bedeuten.

Die Lösungen der 5-gliedrigen Elastizitätsgleichungen (3) lassen sich ausschreiben in der Form:

$$\left.\begin{array}{ll} & \overline{M}_r'' = \sum\limits_{i=0}^{i=n} \beta_{i,r} Z_i'' \\ \text{bzw.} & \overline{M}_r''' = \sum\limits_{i=0}^{i=n} \beta_{i,r} Z_i''' = \sum \beta_{i,r} W_i; \quad \ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (7$$

hierin sind die $\beta_{i,r}$ von der äußeren Belastung unabhängige Zahlen, deren Ermittlung in bekannter Weise erfolgen kann (Müller-Breslau Gr. St. II, 2, 1908, Ostenfeld E. B. 13 M. Br. E. B. 16 Hertwig E. B. 17 usw.). Für den Fall, daß sämtliche Werte α_r gleich groß sind, was auch bei verschiedenen α wie in der dieser Arbeit zugrunde liegenden Dissertation des Verfassers gezeigt wird, zur Berechnung eines Momentes M_r ohne wesentliche Beeinträchtigung der Genauigkeit des Ergebnisses angenommen werden darf, können die β-Zahlen unmittelbar den in M. Br. Gr. St. mitgeteilten Tabellen entnommen werden. In diesen sind die Werte β für den durchlaufenden Balken auf elastischen Stützen bei verschiedenen α zwischen $1/\alpha = 25$ und $1/\alpha = 0{,}05$ sowohl für ein Stützenmoment in Balkenmitte wie auch für ein solches im Endfelde des Balkens angegeben. Da der Einfluß der Felderzahl auf die Größe der β-Werte nur geringfügig ist, hat man der Berechnung der Tabellen die Annahme zugrunde gelegt, daß bereits $\beta_5 = 0$ gesetzt werden kann.

Nach Erledigung der Teilbelastungsfälle ergibt sich das endgültige Moment $\overline{M}_r$ im Versteifungsbalken des n-fach statisch unbestimmten Systems durch Addition der Teilergebnisse zu

$$\overline{M}_r = \overline{M}_r' + \overline{M}_r'' - H\,\overline{M}_r''' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8$$

Der Bogenschub H ist daher zu ermitteln aus der Gleichung;

$$H = \frac{k \sum M_{0,i}\, W_i - \sum M_i''\, W_i}{Z_H - \sum M_i'''\, W_i}$$

wo

$$Z_H = 6\,k' \frac{1}{\lambda}\left(\frac{8}{15} f^2 + \frac{\hat{J}}{\overline{J}}\right)$$

zu setzen ist.

Entsprechend Gl. (8) besteht auch die Einflußlinie für $\overline{M}_i$ aus 3 Teilflächen:

Der erste Teil ist gleich der Einflußlinie für das Moment M_i des stellvertretenden einfachen Balkens von der Spannweite l, deren Ordinaten mit dem Multiplikator k' multipliziert sind. Dargestellt wird diese Teilfläche durch ein Dreieck, das unter dem Querschnitt i die größte Ordinate

$$\eta_i'' = k' \frac{x_i \, x_i'}{l}$$

hat.

Von der gebrochenen Umgrenzungslinie dieser Fläche aus werden die Ordinaten der zweiten Teilfläche abgetragen (s. Abb. 3). Es ist dies die mit k multiplizierte Einflußlinie

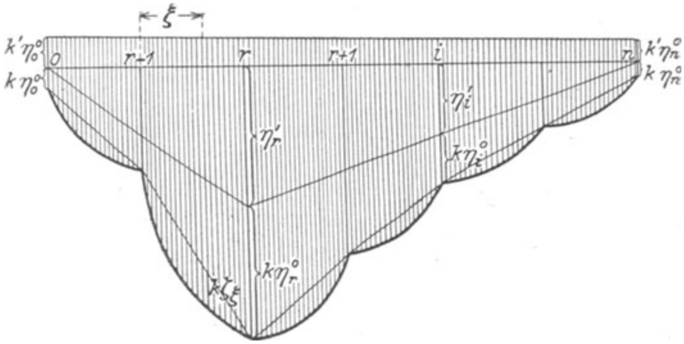

Abb. 3.

für das Stützenmoment M_i des „stellvertretenden Balkens" auf elastischen Stützen. Die Ordinate dieser Linie an der Stelle r sei mit $k\,\eta^{(0)}_{i.r}$ bezeichnet. Zu beachten ist, daß über den Endquerschnitten o und n der stellvertretende Balken stets mit den Kräften k' A bzw. k' B zu belasten ist. Der Einfluß dieser Kräfte ist $= k'(A\,\eta_o^{(0)} + B\,\eta_n^{(0)})$; dabei sind A bzw. B die jeweiligen Auflagerdrücke des stellvertretenden einfachen Balkens hervorgerufen durch die wandernde Last $P=1$. Die Konstruktion der $\eta_i^{()}$-Linie ist aus der Theorie des Balkens auf elastischen Stützen bekannt (vergl. Gr. St. II, 2). Ihre Ableitung dürfte sich daher an dieser Stelle erübrigen. Die dem r-ten Pfosten zugeordnete Ordinate ist (Gr. St. II, 2 S. 72):

$$\eta^{(0)}_{i,r} = -\lambda\,\alpha_r\,(\beta_{i,r-1} - 2\,\beta_{i,r} + \beta_{i,r+1}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9$$

Die Endpunkte dieser Ordinaten werden durch einen fortlaufenden Linienzug miteinander verbunden. Von diesem aus werden die Zwischenordinaten ζ, die den Einfluß der Feldbelastung darstellen, aufgetragen. Für die Stelle ξ im Feld r, r + 1 ist dabei (Gr. St. II, 2 S. 211):

$$\zeta_\xi = -\lambda\,(\beta_r\,\omega_D' + \beta_{r+1}\,\omega_D) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10$$

wo $\omega_D = \frac{\xi}{\lambda} - \frac{\xi^3}{\lambda^3}$ und $\omega_D' = \frac{\xi'}{\lambda} - \frac{\xi'^3}{\lambda^3}$ die bekannten Dreieckzahlen sind (s. Gr. St. II, 2 S. 105). Nach Auftragung der Ordinaten ist noch der Beitrag der Kräfte k′ A bzw. k′ B zu beachten. Da die Einflußlinie für den Auflagerdruck eines einfachen Balkens aus einem Dreieck mit der größten Ordinate 1 unter dem betreffenden Auflager besteht, so wird dieser Beitrag dargestellt durch eine trapezförmige Fläche, die an den Enden des Systems die Ordinaten k′ A bzw. k′ B besitzt. Die Berücksichtigung der k′ A bzw. k′b bedeutet also lediglich eine Verschiebung der o-Linie in der Weise, daß die Endordinaten nunmehr

$$\eta_0'' = \eta_0^{(0)} (k + k') = \eta_0^{(0)} \text{ und } \eta_n'' = \eta_n^{(0)} \quad . \; . \; . \; . \quad (11$$

werden.

Der 3. Teil der Einflußfläche ist die mit $\overline{M}_r'''$ multiplizierte H-Fläche. Nach einigen Umformungen erhält man aus (7) die einfache Beziehung:

$$\frac{\overline{M}_i'''}{k'} = y_i + C_1 \sum \beta_{i,r} - 4 f (n+1) \alpha_0 (\beta_1 + \beta_{n-1}),$$

worin $$C_1 = 4 f' \left(1 - \frac{12 J}{F \lambda^2} + 96 \frac{J k' f'}{F' \lambda^3}\right)$$

Die Einflußlinie für den Horizontalschub H selbst setzt sich ebenfalls aus einem von der elastischen Nachgiebigkeit der Stützen unabhängigen Teil und einem solchen zusammen, der den Einfluß dieser Nachgiebigkeit darstellt. Auf ihre Ableitung näher einzugehen, erübrigt sich an dieser Stelle, sie findet sich in der Hauptarbeit des Verfassers. Bemerkt sei hier nur, daß die Ordinaten des 2. Teiles in ganz ähnlicher Weise wie die der Teilfläche $\overline{M}_r'''$ ermittelt, und aufgetragen werden, es sind nur die Werte $\beta_{i,r}$ durch die Momente $\frac{\overline{M}_r'''}{k\,k'}$ zu ersetzen.

II. Untersuchung der Längsträger von Eisenbahn-Balkenbrücken.

Im 2. Band, Teil 2 seiner „Graphischen Statik" wird von Müller-Breslau die Berechnung der Längsträger einer eingleisigen Eisenbahn-Balkenbrücke durchgeführt und an Hand eines Zahlenbeispiels gezeigt, wie wichtig die Berücksichtigung der Kontinuität der Träger ist für die Herstellung eines einwandfreien Anschlusses an die Querträger. Birkenstock behandelt in seiner Dissertation im Anschluß an die Müller-Breslausche Arbeit die Längsträger zweigleisiger Eisenbahnbrücken bei gleichartiger Belastung beider Gleisstränge und kommt bei seiner Untersuchung auf 10-gliedrige Elastizitäts gleichungen, aus denen die statisch unbestimmten Größen — die Biegungsmomente der Längsträger an den Anschluß-stellen der Querträger — ermittelt werden müssen. Es möge nun gezeigt werden, wie auch diese Aufgaben in einfacher Weise auf das Problem des Balkens auf elastischen Stützen zurückgeführt werden können.

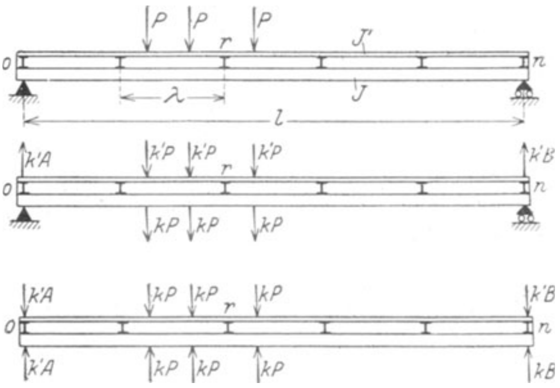

Abb. 4.

Eingleisige Eisenbahn-Balkenbrücke.

Es handele sich zunächst um die Ermittlung des Biegungsmomentes M_i im Längsträger einer eingleisigen Balkenbrücke von der Spannweite l (s. Abb. 4). Die Entfernung der Querträger voneinander sei λ, die Trägheitsmomente des Längsträgers und des Hauptträgers seien mit J' bzw. J bezeichnet. Infolge der Belastung mit den Auflagerdrücken der Längsträge r C = 1 biege sich der Querträger an der Stelle a durch um das Maß ω (s. Abb. 5). Durch Zerlegen der äußeren Belastung in zwei Teilbelastungen erhält man in gleicher Weise wie im Abschnitt I das Biegungsmoment M_i als Summe der durch die Teil belastungen hervorgerufenen Momente:

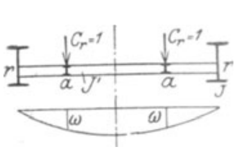

Abb. 5.

$$M_i = M_i' + M_i''.$$

Hier bedeuten:

$M_i' = k' M_{0,i}$ das mit k' multiplizierte Biegungsmoment des stellvertretenden einfachen Balkens von der Spannweite 1,

$M_i'' = k M_i^{(0)}$ das mit k multiplizierte Biegungsmoment des stellvertretenden Balkens auf elastischen Stützen, dessen elnstisches Verhalten gekennzeichnet ist durch den Wert

$$\alpha = \frac{6 E J' k}{\lambda^3} = \omega.$$

Dabei ist

$$k = \frac{J}{J+J'}; \quad k' = 1 - k = \frac{J'}{J+J'}.$$

Zur Darstellung des Anteils M_i'' können wieder die bekannten Tabellen der Gr. St. benutzt werden.

Zahlenbeispiel.

Bei einer eingleisigen Eisenbahn-Balkenbrücke von 10 m Stützweite und einer Feldweite $\lambda = 2$ m soll die Einflußlinie für das Biegungsmoment M_2 im Längsträger ermittelt werden. Das Trägheitsmoment des Hauptträgers der Brücke sei $J = 376\,000$ cm^4, das des Längsträgers $J' = 12\,600$ cm^4. Die Durchbiegung der Querträger sei zu $\omega = 0{,}0122$ cm/t gefunden. Mit

$$k = \frac{376\,000}{388\,600} = 0{,}9676$$

und

$$k = \frac{12\,600}{388\,600} = 0{,}0324$$

erhält man als größte Ordinate der dreieckigen Einflußfläche für M_2:

$$\eta_2' = 0{,}0324 \, \frac{4 \cdot 6}{10} = 0{,}077 \text{ m}.$$

Für

$$\alpha = \frac{6 \cdot 2150 \cdot 12\,600 \cdot 0{,}9676}{200} \cdot 0{,}0122 = 0{,}24$$

d. i.

$$\frac{1}{\alpha} = 4{,}17$$

liefert die Tabelle der Gr. St.

$$\beta_{2,2} = 0{,}185, \quad \beta_{2,1} = \beta_{2,3} = -0{,}001, \quad \beta_{2,4} = -0{,}008$$

und als Ordinaten der M-Fläche:

$$\begin{aligned}
k\eta_0{}^0 &= 2{,}0 \cdot 0{,}24 \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}9676 &&= +0{,}001 \text{ m}\\
k\eta_1{}^0 &= -2{,}0 \cdot 0{,}24 \cdot (0{,}002 - 0{,}185)\ 0{,}9676 &&= -0{,}085 \text{ m}\\
k\eta_2{}^0 &= 2{,}0 \cdot 0{,}089 \cdot 0{,}9676 &&= +0{,}172 \text{ m}\\
k\eta_3{}^0 &= -2{,}0 \cdot 0{,}043 \cdot 0{,}9676 &&= -0{,}083 \text{ m}\\
k\eta_4{}^0 &= -2{,}0 \cdot 0{,}004 \cdot 0{,}9676 &&= -0{,}008 \text{ m}\\
k\eta_5{}^0 &= +2{,}0 \cdot 0{,}002 \cdot 0{,}9676 &&= +0{,}004 \text{ m}
\end{aligned}$$

Die Addition $\eta' + k\eta^0$ erfolgt am einfachsten auf zeichnerischem Wege durch Abtragen der $k\eta_0$ von dem die M'-Fläche umschließenden Linienzuge. Die o-Linie ist alsdann noch zu verschieben um

$$k'\eta_0{}^0 = \frac{0{,}0324}{0{,}9676} \, 0{,}001 = 0{,}00003 \text{ am linken}$$

bzw.

$$k'\eta_5{}^0 = \frac{0{,}0324}{0{,}9676} \, 0{,}004 = 0{,}00013 \text{ am rechten}$$

Balkenende. Die Verschiebung ist also praktisch belanglos. Um den Einfluß der Feldbelastung zu berücksichtigen, genügt die Ermittlung der mittleren Zwischenordinate in einem Felde r, r + 1 nach der Formel:

$$\zeta_r = -0{,}9676 \cdot 2{,}0 \cdot 0{,}375\,(\beta_{r-1} + \beta_r) = -0{,}726\,(\beta_{r-1} + \beta_r)$$
$$\zeta_1 = -0{,}726\,(-0{,}001) = +0{,}001 \text{ m}$$
$$\zeta_2 = -0{,}726\,(-0{,}001 + 0{,}185) = -0{,}134 \text{ m}$$
$$\zeta_3 = -0{,}726\,(0{,}185 - 0{,}001) = -0{,}134 \text{ m}$$
$$\zeta_4 = -0{,}726\,(-0{,}001 - 0{,}008) = +0{,}007 \text{ m}$$
$$\zeta_5 = -0{,}726\,(-0{,}008) = +0{,}006 \text{ m}$$

Die fertige M_2-Linie zeigt Abb. 6.

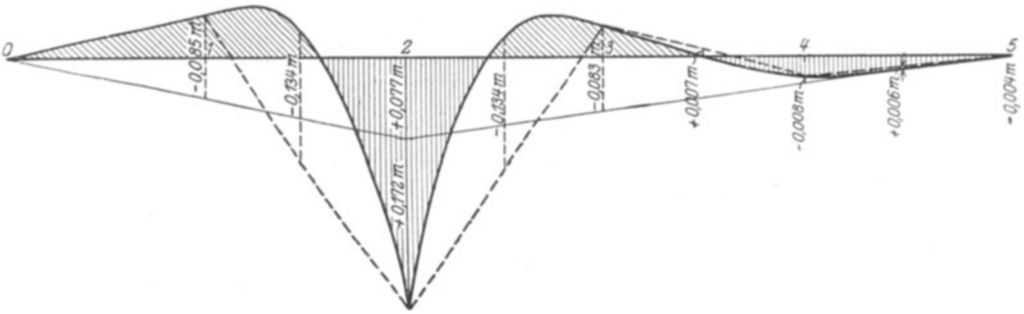

Abb 6.

Zweigleisige Eisenbahn-Balkenbrücke.

Die oben durchgeführte Untersuchung der Längsträger einer eingleisigen Eisenbahnbrücke schließt sich eng an die im ersten Teil der vorliegenden Arbeit hergeleitete Berechnung des allgemeineren Problems an, von dem das zuletzt be-

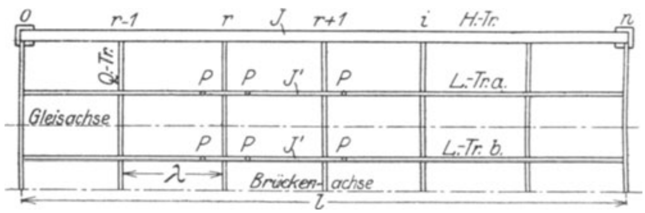

Abb. 7.

handelte nur ein Sonderfall ist, insofern, als H=0 ist und sämtliche Pfosten (hier Querträger) gleich elastisch sind. Im Gegensatz hierzu läßt sich die nunmehr zu behandelnde Aufgabe erst durch wiederholte Zerlegung der äußeren Belastung in passende Teilbelastungen auf die gewünschte Form des Balkens auf elastisch senkbaren Stützen zurückführen. Das Brückensystem zeigt Abb. 7 im Grundriß, es sei in bezug auf die Brückenachse symmetrisch. Die Bezeichnungen J, J', l und λ haben dieselbe Bedeutung wie im letzten Abschnitt. Die

Momente in den äußeren Längsträgern mögen mit M_a, die der inneren mit M_b bezeichnet werden. Die Belastung soll zunächst ebenfalls symmetrisch sein. Sie wird in derselben

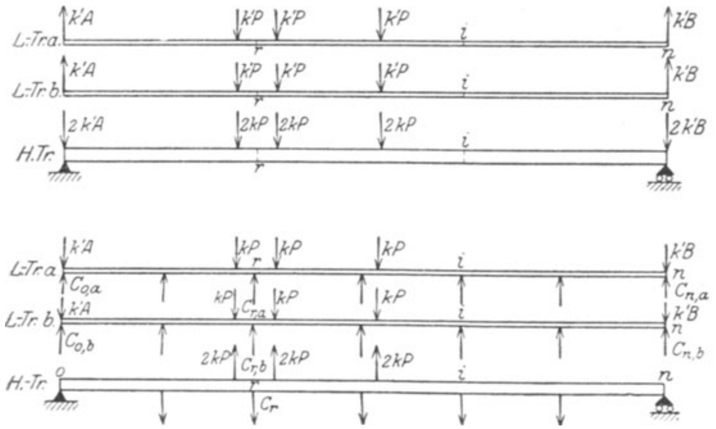

Abb. 8.

Weise wie bei dem früher behandelten System in zwei Teilbelastungen I und II entsprechend Abb. 8 zerlegt. Dabei ist jetzt:

$$k = \frac{J}{J + 2\,J'}\,; \quad k' = 1 - k = \frac{2\,J'}{J + 2\,J'}$$

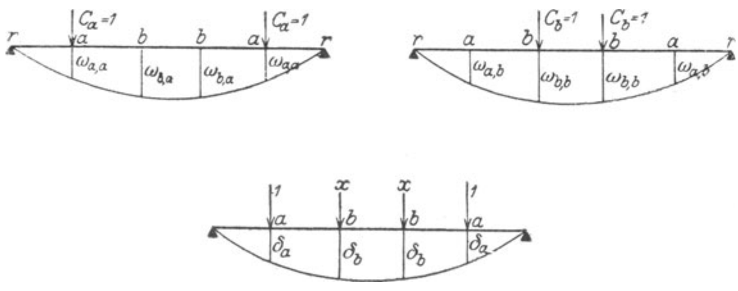

Abb. 9.

Teilbelastung I:

Längsträger und Hauptträger biegen sich gleichmäßig durch, die Querträger sind spannungslos. In diesem Fall erhält man also an der Stelle i des Längsträgers das Biegungsmoment $M'_{a,i} - M'_{b,i} = k'\ M_{0,i}$, wo $M_{0,i}$ die bekannte Bedeutung hat.

Teilbelastung *II*:

Wird der Querträger entsprechend Abb. 9 durch die Kräfte $C_a = 1$ und $C_b = X$ belastet, so erhält man als Durchbiegungen der Punkte a und b des Querträgers:

$$\delta_a = \omega_{aa} + X\,\omega_{ab} \qquad \delta_b = \omega_{a,b} + X\,\omega_{b,b}.$$

Die Bedeutung der Verschiebungen ω_{aa}, ω_{ab}, ω_{bb} geht dabei aus Abb. 9 hervor. X möge nun so gewählt werden, daß das Verhältnis besteht:

$$\frac{\delta_a}{\delta_b} = \frac{1}{X}.$$

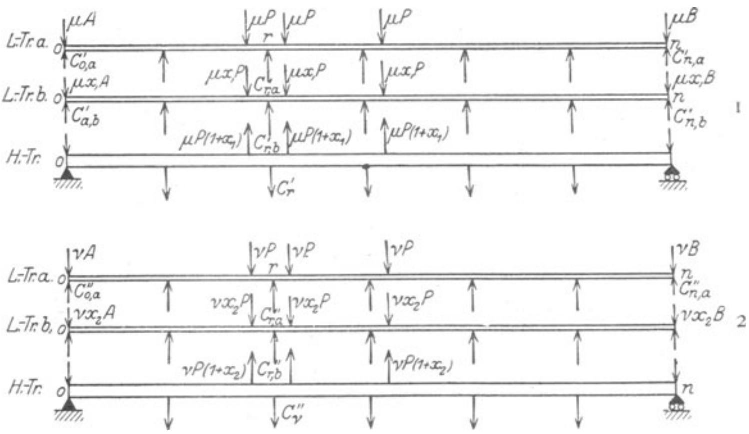

Abb. 10.

Diese Bedingung ergibt mit

$$\varepsilon = \frac{\omega_{b,b} - \omega_{a,a}}{2\,\omega_{a,b}} \quad . \quad .$$

$$X_1 = \varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon^2}\,,\quad X_2 = \varepsilon - \sqrt{1 + \varepsilon^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12$$

Der Wert X_2 ist negativ, ihm entspricht demnach auch eine negative Verschiebung δ_b. Unter Benutzung der Werte X_1 und X_2 soll nunmehr die Teilbelastung II in zwei weitere Teilbelastungen 1 und 2 nach Abb. 10 zerlegt werden. Die Größe von μ und ν folgt aus der Bedingung, daß $\mu + \nu = \mu X_1 + \nu X_2 = k$ sein muß. Man erhält damit:

$$\mu = \frac{1 - X_2}{X_1 - X_2}\,k, \quad \nu = \frac{X_1 - X_1}{X_1 - X_2}\,k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13$$

Bei dem Belastungsfall II, 1 verhalten sich die Belastungen der Längsträger a und b zueinander wie $1 : X_1$. Würde für die Auflagerdrücke der Längsträger auf den Querträgern ebenfalls die Proportion $C_a'/C'_b = 1/X_1$ gelten, so würden die Durchbiegungen der Querträger in den Punkten a und b entsprechend der Wahl von X_1 den Auflagerdrücken C_a' bzw. C_b' proportional sein, und es müßten auch die einander entsprechenden Biegungsmomente M_a und M_b für diese Teilbelastung im Verhältnis $1 : X_1$ zueinander stehen. Man könnte sich in diesem Fall das zu untersuchende System, was die Beanspruchung der Haupt- und Längsträger anbelangt, ersetzt denken durch das in Abb. 11 skizzierte. Bei diesem ist der Balken vom Trägheitsmoment J durch je einen elastischen Stab s mit einem der Längsträger a und b verbunden. Die Elastizität des Stabes s ist dadurch bestimmt, daß dieser unter der Belastung 1 die Längsänderung $\Delta = \omega = \omega_{a,a} + X_1\,\omega_{a,b}$ erfährt. Das neue System läßt sich nun leicht durch Zerlegung der Belastung in einen symmetrischen und einen spiegelsymmetrischen Bestandteil berechnen (s. Abb. 11). Für beide Fälle können die Momente in den Längsträgern ermittelt werden als Momente eines stellvertretenden Balkens auf elastischen Stützen, der im ersten Fall durch $\alpha_{1,s}$ im zweiten durch $\alpha_{1,a}$ gekennzeichnet werden möge. Die Größe der α-Werte und der Belastungen sowie die Bezeichnung der Momente geht aus nachfolgender Tabelle hervor.

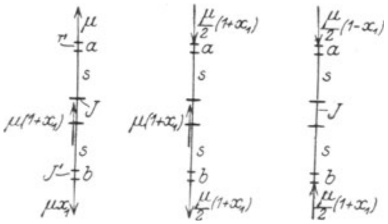

Abb. 11.

	Längsträger	Symmetrische Belastung	Spiegelsymmetrische Belastung
Belastungs-Multiplikator	a	$\frac{\mu}{2}(1 + X_1)$	$\frac{\mu}{2}(1 - X_1)$
	b	$\frac{\mu}{2}(1 + X_1)$	$-\frac{\mu}{2}(1 - X_1)$
α	a	$\alpha_{1,s} = \dfrac{6\,E\,J'\,\omega\,1}{\lambda^3\left(1 + \frac{2\,J'}{J}\right)}$	$\alpha_{1,a} = \dfrac{6\,E\,J'\,\omega' 1}{\lambda^3}$
	b	„	„
Biegungsmoment des stellvertr. Balkens	a u. b	$M^{(1,s)}$	$M^{(1,a)}$

Mit den obigen Bezeichnungen erhält man als Biegungsmomente der Längsträger in dem Ersatzsystem Abb. 11:

$$\left.\begin{aligned} [M_a]_{\pi,1} &= \frac{\mu}{2}(1+X_1)\,M^{(1,s)} + \frac{\mu}{2}(1-X_1)\;M^{(1,a)} \\ [M_b]_{\pi,1} &= \frac{\mu}{2}(1+X_1)\,M^{(1,s)} + \frac{\mu}{2}(1-X_1)\;M^{(1,a)} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (14$$

Würde für diese Werte die Proportion bestehen $[M_a]_{II,1}/[M_b]_{II,1} = 1/X_1$, so gäben die Gl. (14) die streng richtigen Momente für den Belastungsfall II, 1 an. Die Proportion ist jedoch nur dann möglich, wenn $M^{(1,s)} = M^{(1,a)}$, d. h. wenn $\alpha_{1,s} = \alpha_{1,a}$ ist. Dies ist der Fall, wenn der Bruch $2\,J'/J$ verschwindet. In der Tat ist dieser Ausdruck in der Regel eine gegenüber 1 sehr kleine Zahl, sodaß $M^{(1,s)}$ und $M^{(1,a)}$ sich praktisch nicht voneinander unterscheiden. Als Ergebnis der Untersuchung des Belastungsfalles II,1 läßt sich darum anschreiben:

$$[M_a]_{II,1} = \mu\, M^{(1)}, \qquad [M_b]_{II,1} = \mu\, X_1\, M^{(1)},$$

wo $M^{(1)}$ das Biegungsmoment im stellvertretenden Balken auf elastischen Stützen mit

$$\alpha_{(1)} = 6\,\frac{E\,J'\,\omega_I}{\lambda^3}$$

bedeutet.

Untersucht man in gleicher Weise den Belastungsfall II, 2, so erhält man

$$[M_a]_{II,2} = \nu\, M^{(2)}, \qquad [M_b]_{II,2} = \nu\, X_2\, M^{(2)}.$$

Hier stellt $M^{(2)}$ das Moment in einem stellvertretenden Balken auf elastischen Stützen dar, für den

$$\alpha_2 = 6\,\frac{E\,J'\,\omega_{II}}{\lambda^3}$$

ist. Dabei ist $\omega_{II} = \omega_{a,a} + X_2\,\omega_{a,b}$ zu setzen. Schließlich findet man also als Biegungsmoment in den Längsträgern, hervorgerufen durch die Teilbelastung II:

$$\left.\begin{aligned} M_a'' &= [M_a]_I + [M_a]_{II} = \mu\, M^{(1)}\,\nu\, M^{(2)} \\ M_b'' &= [M_b]_I + [M_b]_{II} = \mu\, X_1\, M^{(1)} + \nu X_2 M^{(2)} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (15$$

Damit ist das Problem auf das bekannte des Balkens auf elastischen Stützen zurückgeführt.

Zahlenbeispiel.

Um die Anwendung des beschriebenen Verfahrens zu zeigen, und um zugleich einen Maßstab für den Grad seiner Genauigkeit zu erhalten, soll die Einflußlinie für das Moment $M_{a,3}$ des von Birkenstock in seiner Dissertation zahlenmäßig durchgerechneten Brückensystems ermittelt werden (vergl. Abb. 12).

Es ist $l = 18$ m, $\lambda = 3$ m, $J' = 24\,000$ cm^4.

Die Trägheitsmomente des Hauptträgers sind:

ohne Platte	$J = 1\,790\,000$ cm^4
mit einer „	$J = 2\,730\,000$ cm^4
„ zwei Platten	$J = 3\,720\,000$ cm^4
„ drei „	$J = 4\,750\,000$ cm^4.

Birkenstock rechnet bei Auflösung seiner Elastizitätsgleichungen mit einem Mittelwert $J'/J = 0{,}006$. Das entspricht der Annahme eines konstanten Tragheitsmomentes $J_c = 24\,000 : 0{,}006 = J_c = 4\,000\,000$ cm^4. Dieser Mittelwert ist daher auch unserer Vergleichsrechnung zugrunde zu legen, wenngleich bei der Aufstellung der Einflußlinie für $M_{a,3}$ die Annahme eines $J_c = 4\,750\,000$ cm dem Verhalten des Systems bei der wirklichen Verteilung der Trägheitsmomente besser entsprochen haben würde. Man erhält also:

$$k = \frac{4\,000\,000}{4\,048\,000} = 0{,}9882,$$

$$k' = \frac{48\,000}{4\,048\,000} = 0{,}0118.$$

Der Teilbelastung I entspricht eine dreieckige Einflußfläche mit der größten Ordinate:

$$\eta'_{a,3} = \frac{18}{4}\;0{,}018 = 0{,}053 \text{ m}.$$

Die Verschiebungen ω ermittelt Birkenstock zu:

$$\omega_{aa} = 0{,}0033 \text{ cm/t},$$
$$\omega_{bb} = 0{,}0142 \quad „$$
$$\omega_{ab} = 0{,}0064 \quad „$$

damit wird $$\varepsilon = \frac{0{,}0142 - 0{,}0033}{2 . 0{,}0064} = 0{,}8516$$

und man erhält:

$$X_1 = 0{,}8516 + \sqrt{1 - 0{,}8516^2} = 2{,}167,$$
$$X_2 = 0{,}8516 - \sqrt{1 + 0{,}8512^2} = -0{,}463,$$
$$\omega_I' = 0{,}0033 + 2{,}167 . 0{,}0064 = 0{,}0172,$$
$$\omega_{II}' = 0{,}0033 - 0{,}463 . 0{,}0064 = 0{,}00034,$$

$$\mu = \frac{(1 + 0{,}463)\;0{,}9882}{2{,}167 + 0{,}463} = 0{,}550$$

$$\nu = \frac{(2{,}167 - 1)\;0{,}9882}{2{,}167 + 0{,}463} = 0{,}439.$$

Die Zahl $2\frac{J'}{J} = \frac{48\,000}{4\,000\,000} = 0{,}01201$ kann gegen 1 vernachlässigt werden. Mit den obigen Zahlen werden:

$$\alpha_1 = \frac{6 \cdot 2150 \cdot 24\,000}{300} \,.\, 0{,}0172 = 0{,}197 \text{ bzw. } \frac{1}{\alpha_1} = 5{,}07,$$

$$\alpha_2 = \frac{6 \cdot 2150 \cdot 24\,000}{300} = 0{,}00034 = 0{,}004 \text{ bzw. } \frac{1}{\alpha_2} = 250.$$

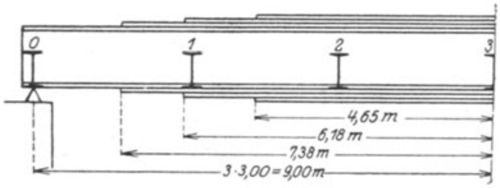

Abb. 12.

Aus den Tabellen für den durchlaufenden Balken auf elastischen Stützen erhält man die zugehörigen β-Werte und Ordinaten der Einflußlinien für $M^{(1)}$ und $M^{(2)}$:

r	3	2 u. 4	1 u. 5	0 u. 6
$\beta_r^{(1)}$	$= 0{,}195$	$-0{,}007$	$-0{,}007$	$+0{,}001$
$\beta_r^{(2)}$	$= 0{,}285$	$-0{,}074$	$+0{,}019$	$-0{,}005$
$\eta_r^{(1)}/\lambda$	$= 0{,}079$	$-0{,}040$	$-0{,}001$	$+0{,}001$
$\eta_r^{(2)}/\lambda$	$= 0{,}003$	$-0{,}002$	$+0{,}000$	$-0{,}000$

Damit wird nach Gl. (15):

$$\eta''_{a,3} = 3{,}0\,(0{,}550 \cdot 0{,}079 + 439 \cdot 0{,}003) = +0{,}134$$
$$\eta''_{a,2} = \eta''_{a,4} = -3{,}0\,(0{,}550 \cdot 0{,}040 + 0{,}439 \cdot 0{,}001) = -0{,}067$$
$$\eta''_{a,1} = \eta''_{a,5} = 3{,}0\,(-0{,}550 \cdot 0{,}020) = -0{,}002$$
$$\eta''_{a,0} = \eta''_{a,6} = 3{,}0\,(0{,}550 \cdot 0{,}001) = +0{,}002$$

Die Verschiebung der o-Linie beträgt:

$$\frac{k'}{k}\,\eta_0'' = \frac{0{,}0118}{0{,}9882}\,0{,}002 = 0{,}0002;$$

sie braucht also nicht berücksichtigt zu werden. Durch Addition der η' und η'' erhält man die folgenden Ordinaten der $M_{a,3}$-Linie:

r	3	2 u. 4	1 u. 5	0 u. 6
η'	$+0{,}053$	$+0{,}035$	$+0{,}018$	$+0{,}000$
η''	$+0{,}134$	$-0{,}067$	$-0{,}002$	$+0{,}002$
$\eta_{a,3}$	$+0{,}187$	$-0{,}032$	$-0{,}016$	$+0{,}002$
	$(+0{,}186)$	$(-0{,}032)$	$(+0{,}017)$	$(+0{,}002)$

Die eingeklammerten Zahlen geben die von Birkenstock ermittelten Werte an. Die Abweichungen sind unwesentlich. Aus dem Rechnungsgang des untersuchten Beispiels läßt sich ersehen, daß die Wahl des konstanten Trägheitsmomentes J_c von erheblichem Einfluß auf die Ordinaten ist, und daher auch das Endresultat $\eta_{a,3}$ nicht unwesentlich beeinflußt. Würde man in obigem Beispiele $J_c = 4\,750\,000$ cm setzen — ein Wert, der der tatsächlichen Verteilung der Trägheitsmomente für den vorliegenden Zweck am besten Rechnung trüge, — erhielte man

$$k' = \frac{48\,000}{4\,798\,000} = 0{,}001$$

und damit

$$\eta_3' = \frac{18}{4} \cdot 0{,}001 = 0{,}045 \text{ m}.$$

Da η_3'' sich nur unwesentlich ändert, so erhielte man damit als größte Ordinate der $M_{a,3}$-Linie $\eta_{a,3} = 0{,}045 + 0{,}134 = 0{,}179$ m, d. h. eine Abweichung von $\frac{0{,}008}{0{,}187} = 4{,}3\ \%$.

Zur Ermittlung der Zwischenordinaten $\zeta_{2,3}$ im Felde 2 — 3 setze man:

$$\beta_{3,a} = \mu\,\beta_3^{(1)} + \nu\,\beta_3^{(2)} = 0{,}550 \cdot 0{,}195 + 0{,}439 \cdot 9{,}285 = 0{,}232,$$

$$\beta_{2,a} = \mu\,\beta_2^{(1)} + \nu\,\beta_2^{(2)} = -\,0{,}550 \cdot 0{,}007 - 0{,}439 \cdot 0{,}074 = 0{,}004;$$

dann erhält man die ζ mittels der Gl. (10):

$$\zeta_{2,3} = -(\beta_2\,\omega'_D + \beta_3\,\omega_D).$$

Vernachlässigt man mit Birkenstock das erste Glied dieses Ausdrucks so wird:

$$\zeta_{2,3} = -\lambda\,\beta_3\,\omega_D = -3 \cdot 0{,}232\ \omega_D = -0{,}696\ \omega_D.$$

ξ/λ	$\zeta'_{2,3}$
0,2	$-0{,}696 \cdot 0{,}192 = -0{,}134$ $(-0{,}134)$
0,4	$-0{,}696 \cdot 0{,}336 = -0{,}234$ $(-0{,}234)$
0,6	$-0{,}696 \cdot 0{,}384 = -0{,}267$ $(-0{,}268)$
0,8	$-0{,}696 \cdot 0{,}288 = -0{,}201$ $(-0{,}201)$

Die von Birkenstock gefundenen Ordinaten sind in Klammern beigefügt.

Das Zahlenbeispiel beweist die Brauchbarkeit des beschriebenen Verfahrens. Bedingung für seine Anwendbarkeit ist, daß der Bruch $\frac{2\,J'}{J}$ gegenüber 1 klein ist.

In gleicher Weise wie der hier untersuchte Fall symmetrischer Belastung beider Gleisstränge der Brücke kann auch der Fall spiegel-symmetrischer Belastung behandelt werden. Durch Kombination der bei diesen beiden Belastungsfällen ermittelten Momente erhält man die Beanspruchung der Längsträger bei einseitig befahrener Brücke, sodaß sich also auch dieser allgemeinste Fall auf die Untersuchung des Balkens auf elastischen Stützen zurückführen läßt.

Die vorstehenden Untersuchungen zeigen, daß die hier behandelten vielfach statisch unbestimmten Gebilde sich durch die Zurückführung auf das Problem des durchlaufenden Balkens auf elastisch senkbaren Stützen in einfacher und bequemer Weise erledigen lassen. Die stets zeitraubende und fehlerempfindliche Rechenarbeit, die das Auflösen einer