DETERMINANTEN UND MATRIZEN

VON

DR. FRITZ NEISS
OBERSTUDIENRAT,
A. PL. PROFESSOR A. D. UNIVERSITÄT IN BERLIN

ZWEITE, VERBESSERTE AUFLAGE

MIT 1 ABBILDUNG

SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH
1943

DETERMINANTEN
UND
MATRIZEN

VON

DR. FRITZ NEISS

OBERSTUDIENRAT,
A. PL. PROFESSOR A. D. UNIVERSITÄT IN BERLIN

ZWEITE, VERBESSERTE AUFLAGE

MIT 1 ABBILDUNG

SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH 1943

ISBN 978-3-662-36184-9 ISBN 978-3-662-37014-8 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-37014-8

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag OHG in Berlin 1941

Vorwort.

Das vorliegende Buch ist aus Vorlesungen entstanden, die ich mehrfach als Einführung in die höhere Mathematik an den Universitäten Halle und Berlin gehalten habe.

Es soll dazu beitragen, die Schwierigkeiten zu überwinden, die sich dem Studierenden beim Übergang von der Schule zur Hochschule bieten. Diese ergeben sich z. T. daraus, daß der Lernende, von der Schule her an die Form des abfragenden Unterrichts gewöhnt, vielfach noch nicht die Reife für die Übermittelung des Stoffes durch akademische Vorlesungen besitzt. Denn hier bleibt die Kontrolle darüber, ob wirklich alles verstanden ist, der eigenen Initiative und Selbstkritik überlassen.

Es ist daher anzustreben, den Studenten besonders im Anfang seines Studiums zur stärkeren aktiven Mitarbeit heranzuziehen. Diese soll außer im Lösen von Aufgaben gelegentlich auch in der Wiedergabe des in der Vorlesung gebrachten Stoffes sowie in Referaten einzelner Abschnitte des Buches bestehen. Auf diese Weise tritt an die Stelle der Vorlesung teilweise eine geleitete Lektüre.

An Vorkenntnissen wird so wenig wie möglich vorausgesetzt. Kombinatorik, binomischer Satz und andere Dinge, die noch in das Pensum der Schule gehören, werden daher entwickelt, jedoch in einer Form, die sich vom elementaren Unterricht loslöst und den Studierenden gleich zu Anfang mit Hilfsmitteln vertraut macht, die ihm neu, aber für strenge Durchführung mathematischer Beweise von grundlegender Bedeutung sind.

Es ist dies in erster Linie der Induktionsschluß. Seine vielfache Verwendung kann den Anfänger zunächst befremden; ebenso verhält es sich mit dem Aufbau der Determinantentheorie nach der WEIERSTRASSschen Definition. Trotzdem habe ich diese Darstellung gewählt. Denn erstens werden so die Beweise kurz und einfach, und die ganze Theorie gewinnt an Schönheit und Eleganz, zweitens soll neben der Übermittelung des Stoffes eine Einführung in mathematische Methoden und Gedankengänge überhaupt erfolgen, wie sie im elementaren Unterricht nicht gegeben werden können.

In der Behandlung der linearen Gleichungen bin ich einer Anregung des Herrn Prof. H. W. E. JUNG, Halle, gefolgt.

Die Paragraphen 13, 14, 15 und 16 sind für die folgenden Kapitel nicht erforderlich und können übergangen werden.

In den Anwendungen wird die Bedeutung der Determinanten und Matrizen für die analytische Geometrie gezeigt. Besonderer Wert ist darauf gelegt, die Grundlagen für das Rechnen mit Vektoren zu schaffen.

Die Übungsaufgaben bieten keine besonderen Schwierigkeiten. Einige davon sind mir von Assistenten gegeben worden, sie stammen aus Vorlesungen, die früher an der Berliner Universität gehalten wurden.

Besonderen Dank schulde ich dem Verlag, der trotz der schwierigen Zeitlage das Erscheinen in so kurzer Zeit ermöglichte.

Charlottenburg, Oktober 1941.

NEISS.

Vorwort zur zweiten Auflage.

In der zweiten Auflage ist noch ein Kapitel über quadratische Formen hinzugefügt worden. Es enthält die wichtigsten Sätze über die charakteristische Gleichung einer symmetrischen Matrix und die Hauptachsentransformation. Sonst sind keine wesentlichen Veränderungen vorgenommen worden.

Charlottenburg, August 1943.

NEISS.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Vorbemerkungen.

§ 1. Der Induktionsschluß.

Ein in der Mathematik häufig gebrauchtes Beweisverfahren ist der Schluß der vollständigen Induktion, auch Schluß von n auf $n + 1$ genannt. Zur Erläuterung dieser Schlußweise beweisen wir folgende Formel:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

wo n eine positive ganze Zahl ist. Man kann die Richtigkeit dieser Formel für besondere Werte von n leicht durch Einsetzen bestätigen, z. B. für

$$n = 1 \text{ ist: } 1 = \frac{1(1+1)}{2}, \quad n = 2\colon\ 1 + 2 = \frac{2 \cdot (2+1)}{2},$$

$$n = 4\colon\ 1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot (4+1)}{2} \quad \text{usw.}$$

Derartige Proben kann man beliebig vermehren. Will man indessen aus diesen einzelnen Feststellungen folgern, daß die Formel für jeden Wert von n richtig ist, so ist dies ein Schluß vom Besonderen zum Allgemeinen, er wird Induktionsschluß genannt und ist in dieser Form als mathematischer Beweis nicht zulässig.

Dagegen ist folgende Schlußweise bindend:

Wir überzeugen uns durch Einsetzen zunächst von der Richtigkeit der Formel für $n = 1$. Dann nehmen wir an, die Formel sei für alle $n \leqq r$ bewiesen, wo unter r eine beliebige feste, positive ganze Zahl zu verstehen ist. Vielleicht erscheint es im ersten Augenblick widersinnig, das als richtig anzunehmen, was doch erst bewiesen werden soll. Das trifft aber nicht zu; denn die Annahme bezieht sich nur auf alle $n \leqq r$, der Beweis soll aber die Gültigkeit der Formel für alle n erbringen. Wir zeigen jetzt: Wenn die Annahme erfüllt sein sollte, d. h. wenn die Formel für $n \leqq r$ richtig ist, dann ist sie auch für die folgende Zahl $r + 1$ richtig, oder anders ausgedrückt:

Voraussetzung: $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ für $n \leqq r$.

Behauptung: (n wird durch $r + 1$ ersetzt)

$$1 + 2 + \cdots + r + r + 1 = \frac{(r+1)(r+2)}{2}.$$

Zum Beweis wird die Summe $1 + 2 + \cdots + r$ in die nach der Voraussetzung zulässige Form $\frac{r(r+1)}{2}$ geschrieben. Danach lautet die Behauptung:

$$\frac{r(r+1)}{2} + r + 1 = \frac{(r+1)(r+2)}{2},$$

eine Identität, wie man durch Umformung leicht bestätigt.

Damit ist der Beweis natürlich noch nicht fertig, es ist nur gezeigt: Wenn die Formel etwa für alle $n \leqq 17$ richtig ist, dann ist sie es auch für $n = 18$. Die Beweisführung beruhte auf einer Annahme, deren Gültigkeit zunächst noch offen ist und einstweilen nur für $n = 1$ feststeht. Daher gilt aber die Formel, wie eben gezeigt wurde, auch für $n = 2$, ebenso kommt man von $n = 2$ zu $n = 3$, und diese Schlußweise kann beliebig weit fortgesetzt werden.

Der Induktionsschluß ist, wie man sieht, nur zu gebrauchen, wenn der zu beweisende Satz eine Aussage über eine ganze Zahl enthält. Es ist auch nicht immer gesagt, daß die Gültigkeit bei $n = 1$ anfängt, sie kann auch schon bei $n = 0$ oder erst an einer späteren Stelle einsetzen.

§ 2. Gebrauch des Summenzeichens.

$\sum$ (großes griechisches Sigma) ist das Summenzeichen. Ist $f(\varrho)$ eine Funktion von ϱ, die nur für ganzzahlige ϱ erklärt zu sein braucht, und will man die Summe

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

bilden, so schreibt man dafür

$$\sum_{\varrho=1}^{n} f(\varrho),$$

lies: „Summe von $\varrho = 1$ bis n"; d. h.: es werden für ϱ der Reihe nach die Zahlen 1, 2, bis n eingesetzt, und die so erhaltenen Werte $f(\varrho)$ werden addiert. Häufig tritt der Summationsbuchstabe als Index auf:

$$\sum_{\varrho=1}^{n} a_\varrho = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Auf die Bezeichnung dieser Zahl kommt es nicht an, daher ist:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = \sum_{\varrho=1}^{n} a_\varrho = \sum_{\lambda=0}^{n-1} a_{\lambda+1},$$

ϱ ist durch $\lambda + 1$ ersetzt; wenn ϱ die Werte von 1 bis n durchläuft, geht λ von 0 bis $n - 1$.

Die Regel für die Multiplikation zweier Summen nimmt jetzt folgende Form an:

$$\sum_{\varrho=1}^{n} a_\varrho \sum_{\lambda=1}^{m} b_\lambda = \sum_{\varrho=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{m} a_\varrho b_\lambda.$$

Die rechte Seite ist eine Doppelsumme, denn ϱ und λ durchlaufen unabhängig von einander die Werte von 1 bis n bzw. von 1 bis m. Natürlich müssen hier die beiden Summationsbuchstaben verschieden bezeichnet werden.

§ 3. Aufgaben.

Folgende Formeln sind durch vollständige Induktion zu beweisen. Die linken Seiten sind bei Aufgabe 1 bis 7 auf zwei Arten geschrieben, um den Leser an den Gebrauch des Summenzeichens zu gewöhnen.

1. $$\sum_{\varrho=0}^{n} \varrho^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad n \geqq 0$$

2. $$\sum_{\varrho=0}^{n} \varrho^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad n \geqq 0$$

3. $$\sum_{\varrho=2}^{n} \frac{1}{(\varrho-1)\varrho} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-1}{n} \qquad n \geqq 2$$

4. $$\sum_{\varrho=1}^{n} \frac{1}{\varrho(\varrho+2)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)} \qquad n \geqq 1$$

5. $$\sum_{\varrho=1}^{n} \frac{1}{\varrho(\varrho+1)(\varrho+2)} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \qquad n \geqq 1$$

6. $$\sum_{\varrho=0}^{n-1} q^\varrho = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n-1}{q-1} \qquad n \geqq 1$$

7. $$\sum_{\varrho=2}^{n} \varrho\, 2^{\varrho-1} = 2\cdot 2^1 + 3\cdot 2^2 + \cdots + n\, 2^{n-1} = (n-1)\, 2^n \qquad n \geqq 2$$

8. $$\sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\varrho}{2^\varrho} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \qquad n \geqq 1$$

9. $$\sum_{\varrho=0}^{n} \cos(\varrho x) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} \qquad n \geqq 0$$

10. Jede ganze Zahl N läßt sich auf die Form bringen:
$$N = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cdot 3 + \varepsilon_2\, 3^2 + \cdots + \varepsilon_n\, 3^n,$$
wo die Größen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ nur die Werte $+1, 0, -1$ annehmen dürfen.

11. Man beweise die Bernoullische Ungleichung:
$$(1+p)^n \geqq 1 + np$$
für $p > -1$ und n positiv und ganz.

Zweites Kapitel.

Kombinatorik.

§ 4. Permutationen.

$n!$ (lies „n Fakultät“) ist für ganze positive n als das Produkt der n Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ erklärt, also

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n;$$

für $n = 0$ wird ergänzend $0! = 1$ gesetzt. Danach ist: $1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$; $5! = 120$; $6! = 720$ usw.

Es seien $a, b, c, \ldots$ eine Anzahl begrifflich unterschiedener Dinge, die auch Elemente genannt werden. Eine bestimmte Anordnung derselben heißt eine Permutation; z. B. sind acb; bac; abc Permutationen der drei Elemente abc.

Satz 1: *Die Anzahl der verschiedenen Permutationen von n Elementen (sie soll mit P_n bezeichnet werden) ist $n!$.*

Beweis: Für $n = 1$ ist $P_1 = 1! = 1$. Wir nehmen an, für $n \leqq r$ sei $P_n = n!$, wo r eine feste Zahl bezeichnet, und zeigen, daß auch $P_{r+1} = (r + 1)!$ ist.

Um alle Permutationen von $r + 1$ Elementen zu bilden, denken wir uns alle von r Elementen aufgestellt: $abc\ldots$ sei eine solche. x ist ein $r + 1^{\text{tes}}$ Element. Aus jeder Permutation von r Elementen machen wir durch Hinzufügen von x genau $r + 1$ Permutationen von $r + 1$ Elementen, indem x erst an den Anfang, dann zwischen das erste und zweite Element usw. gesetzt wird:

$$xabc\ldots \qquad axbc\ldots \qquad abxc\ldots \qquad abcx\ldots$$

Verfährt man in gleicher Weise mit allen $r!$ Permutationen der r Elemente, so erhält man alle Permutationen der $r + 1$ Elemente und jede nur einmal, daher ist:

$$P_{r+1} = P_r\,(r + 1) = r!\,(r + 1) = (r + 1)!.$$

Permutationen mit Wiederholungen sind solche, bei denen einzelne Elemente mehrfach auftreten, z. B. $aaabb$. Ihre Anzahl ergibt sich aus folgendem

Satz 2: *a möge αmal, b möge βmal usw. vorkommen, dann ist die Anzahl P der verschiedenen Permutationen:*

$$P = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots}.$$

Für das obige Beispiel ist $n = 5$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$, also $P = 10$.

Beweis: Wir denken uns alle verschiedenen Permutationen dieser Art hingeschrieben, z. B.:

$$abcaacab\ldots$$

An die Elemente a fügen wir Indices:

$$a_1 b c a_2 a_3 c a_4 b \ldots$$

und permutieren unter Beibehaltung der b, c nur die $a_1, a_2, a_3, \ldots$, etwa:

$$a_3 b c a_1 a_4 c a_2 b \ldots$$

Man erhält aus jeder Permutation $\alpha!$ neue, bei denen die $a_1, a_2, a_3, \ldots$, als verschieden anzusehen sind. Insgesamt ist also $P\alpha!$ die Anzahl der verschiedenen Permutationen von den n Elementen:

$$a_1 a_2 \ldots a_\alpha b b \ldots c c \ldots,$$

wo die $a_1, a_2, a_3 \ldots$ verschieden sind und nur unter den b bzw. c gleiche auftreten können. Wendet man dasselbe Verfahren auf die b, dann auf die c an, so erhält man alle Permutationen von n verschiedenen Elementen, deren Anzahl $n!$ ist. Also:

$$P\alpha!\,\beta! \ldots = n!$$

§ 5. Kombinationen.

p sei eine positive ganze Zahl, n beliebig, dann wird das Zeichen $\binom{n}{p}$ (lies „n über p"), wie folgt, erklärt:

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \ldots p}.$$

Z. B.:

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56, \quad \binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{1 \cdot 2} = -\frac{1}{8}.$$

Für $p = 0$ wird ergänzend $\binom{n}{0} = 1$ festgesetzt.

Da wir im folgenden das Symbol nur für positive ganzzahlige n gebrauchen, soll jetzt n eine solche Zahl bezeichnen. Ist $p > n$, so kommt im Zähler einmal der Faktor 0 vor. Also ist

$$\binom{n}{p} = 0 \qquad \text{für } n < p.$$

Für $0 \leqq p \leqq n$ läßt sich das Symbol durch Einführung von $q = n - p$ in eine symmetrische Form bringen, indem mit $q!$ erweitert wird:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,q!},$$

woraus $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$ sofort zu erkennen ist. Das ist auch für $p = 0$, $q = n$ richtig:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Satz 3:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Diese Formel ergibt sich leicht, wenn man die beiden Brüche links gleichnamig macht und addiert:

$$\frac{n!}{p!\,q!} + \frac{n!}{(p+1)!\,(q-1)!} = \frac{n!\,(p+1) + n!\,q}{(p+1)!\,q!}$$
$$= \frac{n!\,(p+q+1)}{(p+1)!\,q} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!\,q!} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Für $p > n$ ist die Formel auch richtig, ebenfalls für beliebige n.

Satz 4: $\binom{n}{p}$ *ist immer eine ganze Zahl.*

Beweis durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist der Satz richtig, weil $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$, sonst $\binom{1}{p} = 0$. Ferner ist $\binom{n}{0} = 1$ für jedes n, wir brauchen nur noch $p \geqq 1$ zu betrachten. Angenommen, $\binom{n}{p}$ sei für $n \leqq r$, wo r einen festen Wert bezeichnet, und alle p bereits als ganzzahlig erkannt, dann ist für $p \geqq 1$:

$$\binom{r+1}{p} = \binom{r}{p} + \binom{r}{p-1};$$

das ist die Summe zweier ganzen Zahlen, also ist der Satz auch für $n = r + 1$ richtig.

Greift man aus n verschiedenen Elementen p heraus, wobei es auf die Reihenfolge nicht ankommt, so heißt eine solche Zusammenstellung eine Kombination von n Elementen zur p^{ten} Klasse. Z. B. sind *acd, bce, ade* Kombinationen der fünf Elemente *abcde* zur dritten Klasse.

Satz 5: *Die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur p^{ten} Klasse ist* $\binom{n}{p}$.

Nimmt man aus n Elementen p heraus, so bleiben q übrig, die dann alle Kombinationen zur p^{ten} Klasse bilden. In der Tat ist $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$.

Erster Beweis durch Induktion nach p. Es sei n eine feste Zahl, und p durchlaufe die Werte von 1 bis n. Für $p = 1$ ist $\binom{n}{1} = n$, und n Möglichkeiten gibt es, aus n Elementen eines herauszunehmen. Bis zu $p = r$, wo $1 < r < n$, sei der Satz bewiesen, dann lassen sich die Kombinationen zur $r + 1^{\text{ten}}$ Klasse folgendermaßen abzählen: Wir bilden alle Kombinationen zur r^{ten} Klasse, deren Anzahl $\binom{n}{r}$ ist, und setzen jedesmal eines der übrigen $n - r$ Elemente dazu, so daß aus jeder Kombination zur r^{ten} Klasse $n - r$ Kombinationen zur $r + 1^{\text{ten}}$ Klasse entstehen. So erhält man alle Kombinationen zur $r + 1^{\text{ten}}$ Klasse und jede einzelne $r + 1$ mal, denn jedes der $r + 1$ Elemente einer solchen Kombination kann das hinzugefügte $r + 1^{\text{te}}$ Element sein. Demnach ist die Anzahl der verschiedenen Kombinationen zur $r + 1^{\text{ten}}$ Klasse:

$$\binom{n}{r}\frac{n-r}{r+1} = \binom{n}{r+1}.$$

Zweiter Beweis. Er wird gezeigt, daß die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur p^{ten} Klasse gleich der Anzahl der Permutationen von n Elementen ist, von denen je p und je q einander gleich sind:

$$\begin{array}{l} aa\ldots abb\ldots b \\ 12\ldots \qquad\; n \end{array}$$

In der ersten Zeile steht p mal a und q mal b, in der zweiten entsprechend darunter die Zahlen von 1 bis n, so daß unter jeden Buchstaben eine Zahl kommt. Führen wir in der ersten Zeile eine Permutation aus und lassen die Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge darunter stehen:

$$\begin{array}{l} babaa\ldots \\ 12345\ldots \end{array}$$

so bilden die unter den a stehenden Zahlen eine Kombination von n Elementen zur p^{ten} Klasse. Jeder solchen Permutation wird dadurch eine und nur eine Kombination zugeordnet und umgekehrt. Die Anzahl der Permutationen ist bekannt, nämlich gleich $\frac{n!}{p!\,q!} = \binom{n}{p}$, und dies ist auch die Anzahl der verschiedenen Kombinationen.

Dritter Beweis durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist der Satz richtig, ebenso für $p = 1$ und jedes n, daher betrachten wir nur $p > 1$. Wir nehmen an, er sei für alle $n \leqq r$ und für jedes p bewiesen. Alle Kombinationen von $r + 1$ Elementen zur p^{ten} Klasse sollen jetzt in der Weise gebildet werden, daß unter den $r + 1$ Elementen eines hervorgehoben wird (es möge x genannt werden), und die Kombinationen in solche eingeteilt werden, die x enthalten, und in solche, die x nicht enthalten. Die Anzahl der ersteren ist $\binom{r}{p-1}$, denn läßt man x weg, so bleiben alle Kombinationen der restlichen r Elemente zur $p - 1^{\text{ten}}$ Klasse übrig, deren Anzahl auf Grund der Induktionsannahme bekannt ist. Die Kombinationen ohne x sind einfach diejenigen von r Elementen zur p^{ten} Klasse, deren Anzahl $\binom{r}{p}$ ist. Insgesamt ist also nach Satz **3**:

$$\binom{r}{p-1} + \binom{r}{p} = \binom{r+1}{p}$$

die gesuchte Anzahl der Kombinationen von $r + 1$ Elementen zur p^{ten} Klasse.

§ 6. Der binomische Satz.

Für ganzzahlige positive n und beliebige a und b ist

$$(a+b)^n = \sum_{\varrho=0}^{n} \binom{n}{\varrho} a^{n-\varrho} b^{\varrho} = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + b^n$$

$$= \sum \frac{n!}{p!\,q!} a^p b^q ,$$

wo diese Summe über alle Werte p und q zu erstrecken ist, für die $p + q = n$ ist.

Der **Beweis** wird entweder so geführt, daß man das Produkt

$$(a + x_1)\,(a + x_2)\ldots(a + x_n)$$

ausmultipliziert, nach Potenzen von a ordnet und dann $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = b$ setzt, oder durch Induktion nach n:

Multipliziert man die als richtig angenommene Gleichung

$$(a + b)^r = \sum_{p=0}^{r} \binom{r}{p} a^{r-p}\, b^p$$

beiderseits mit $a + b$, so wird

$$(a + b)^{r+1} = \sum_{p=0}^{r} \binom{r}{p} a^{r-p+1}\, b^p + \sum_{p=0}^{r} \binom{r}{p} a^{r-p}\, b^{p+1}$$

$$= a^{r+1} + \sum_{p=1}^{r} \binom{r}{p} a^{r-p+1}\, b^p + \sum_{p=0}^{r-1} \binom{r}{p} a^{r-p}\, b^{p+1} + b^{r+1}.$$

In der zweiten Summe wird p durch $p - 1$ ersetzt und die Summation von $p = 1$ bis $p = r$ erstreckt:

$$= a^{r+1} + \sum_{p=1}^{r} \binom{r}{p} a^{r-p+1}\, b^p + \sum_{p=1}^{r} \binom{r}{p-1} a^{r-p+1}\, b^p + b^{r+1}$$

$$= a^{r+1} + \sum_{p=1}^{r} \left[\binom{r}{p} + \binom{r}{p-1}\right] a^{r-p+1}\, b^p + b^{r+1} = \sum_{p=0}^{r+1} \binom{r+1}{p} a^{r-p+1}\, b^p,$$

was zu beweisen war.

Eine entsprechende Formel für eine Summe von drei Gliedern erhält man, wenn $b = c + d$ gesetzt wird:

$$(a + c + d)^n = \sum_{r+q=n} \frac{n!}{p!\,q!} a^p\,(c + d)^q$$

$$= \sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!\,q!} a^p \sum_{r+s=q} \frac{q!}{r!\,s!} c^r\, d^s$$

$$= \sum \frac{n!}{p!\,r!\,s!} a^p\, c^r\, d^s,$$

wo p, r, s alle Werte annehmen, für die $p + r + s = n$ ist. Das Verfahren läßt sich auf Summen von beliebig vielen Gliedern ausdehnen, und so erhält man den polynomischen Satz:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_r)^n = \sum \frac{n!}{p_1!\,p_2!\ldots p_r!} a_1^{p_1}\, a_2^{p_2} \ldots a_r^{p_r},$$

hier ist die Summe über alle $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r$ zu erstrecken, für die

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_r = n \quad \text{ist.}$$

§ 7. Gerade und ungerade Permutationen.

Setzt man für die Elemente einer Permutation eine bestimmte Reihenfolge als die „natürliche" oder „ursprüngliche" fest, so bezeichnet man bei einer Permutation die Stellung zweier Elemente als eine Inversion, wenn ein Element, das bei der natürlichen Reihenfolge vor einem anderen steht, jetzt nach diesem seinen Platz hat. Z. B. 1 2 3 4 5 sei die natürliche Reihenfolge, 2 4 1 5 3 eine Permutation, dann bilden 2 und 1, 4 und 1, 3 und 4, 3 und 5 je eine Inversion; hier sind also vier Inversionen vorhanden. Würde man 5 4 3 2 1 als natürliche Reihenfolge festsetzen, so hätten wir sechs Inversionen, nämlich 2 und 5, 4 und 5, 1 und 5, 2 und 4, 3 und 1, 3 und 2. Je nachdem diese Anzahl der Inversionen gerade oder ungerade ist, sprechen wir von einer geraden oder ungeraden Permutation.

Vertauscht man in einer Permutation zwei Elemente miteinander, so sagt man, es sei eine Transposition ausgeführt worden. Jede Permutation kann durch eine gewisse Anzahl von Transpositionen aus der natürlichen Reihenfolge hergestellt werden. Z. B.:

Aus

1 2 3 4 5	entsteht:		
2 1 3 4 5	durch Vertauschung	von	2 u. 1,
2 4 3 1 5	„ „	„	4 u. 1,
2 4 1 3 5	„ „	„	3 u. 1,
2 4 1 5 3	„ „	„	5 u. 3.

Es waren vier Transpositionen erforderlich. Diese Anzahl steht nicht eindeutig fest, denn man kann auch anders verfahren, so daß evtl. mehr Transpositionen herauskommen, aber es gilt folgender

Satz 6: *Jede gerade (bzw. ungerade) Permutation kann nur durch eine gerade (bzw. ungerade) Anzahl von Transpositionen aus der natürlichen Reihenfolge gebildet werden.*

Zunächst beweisen wir

Satz 7: *Wird eine Transposition ausgeführt, so ändert sich die Anzahl der Inversionen um eine ungerade Zahl.*

Ist

$$ab\ldots xy\ldots mn\ldots$$

eine Permutation, in der die beiden nebeneinander stehenden Elemente x und y umgestellt werden:

$$ab\ldots yx\ldots mn\ldots,$$

so wird, je nachdem x vor oder nach y eingeordnet ist, eine Inversion gewonnen, oder es geht eine verloren. Ihre Anzahl ändert sich also um $+1$ oder -1.

Stehen die beiden Elemente nicht nebeneinander, etwa:

$$ab\ldots xc_1c_2\ldots c_ry\ldots mn\ldots,$$

so wird die Transposition x, y in folgenden einzelnen Schritten durchgeführt:

$$
\begin{array}{l}
\ldots c_1 x\, c_2 \ldots c_r y \ldots \\
\ldots c_1 c_2 x \ldots c_r y \ldots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\ldots c_1 c_2 \ldots c_r y\, x \ldots
\end{array}
$$

Bis dahin sind $r+1$ Transpositionen gemacht worden. Jetzt wird y nach links gebracht:

$$
\begin{array}{l}
\ldots c_1 c_2 \ldots y\, c_r x \ldots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\ldots c_1 y\, c_2 \ldots c_r x \ldots \\
\ldots y\, c_1 c_2 \ldots c_r x \ldots
\end{array}
$$

Hierzu waren r Transpositionen erforderlich. Die Umstellung von x und y ist durch $2r+1$ Transpositionen ausgeführt worden, die so beschaffen waren, daß immer nur zwei nebeneinander stehende Elemente vertauscht wurden. Die Anzahl der Inversionen ist also $2r+1$ mal um eine ungerade Zahl verändert worden. Wenn aber eine ungerade Anzahl von ungeraden Zahlen addiert wird, so ist die Summe ungerade.

Bei der natürlichen Reihenfolge ist die Anzahl der Inversionen $= 0$. Führt man t Transpositionen aus, so hat sich die Zahl der Inversionen $t$mal um eine ungerade Zahl geändert, ist t gerade, so ist die Anzahl der Inversionen auch gerade und umgekehrt, womit auch Satz 6 bewiesen ist.

§ 8. Aufgaben.

Die drei ersten Aufgaben sind Beziehungen zwischen Binomialkoeffizienten, die durch Induktion zu beweisen sind.

1. $\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha+1}{1} + \cdots + \binom{\alpha+n}{n} = \binom{\alpha+n+1}{n}$,

2. $\binom{n+k-1}{k} + \binom{n+k-2}{k} + \cdots + \binom{k}{k} = \binom{n+k}{k+1}$,

3. $\dfrac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}} \leqq \binom{2n}{n} \leqq \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{3n+1}}$.

4. Jede ganze rationale Funktion

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

läßt sich auf die Form bringen:

$$f(x) = A_0 + A_1 \binom{x}{1} + A_2 \binom{x}{2} + \cdots + A_n \binom{x}{n},$$

wo $\quad A_k = f(k) - \binom{k}{1} f(k-1) + \binom{k}{2} f(k-2) - \cdots \pm f(0).$

Anleitung: Es genügt, den Satz für ganzzahlige $x \geqq 0$ zu beweisen. Für $x = 0$ ist die Identität leicht zu erkennen. Wir nehmen an, die Formel sei bis zu einer Zahl x als richtig erkannt, und zeigen ihre Gültigkeit für $x+1$. Wir setzen

$$f(x+1) = f(x) + g(x),$$

dann ist $g(x)$ auch ganz und rational vom Grade $n-1$ und kann in der Form

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \binom{x}{k}$$

geschrieben werden. Dann ist:

$$B_0 = g(0) = f(1) - f(0) = A_1$$
$$B_1 = g(1) - g(0) = f(2) - f(1) - f(1) + f(0) = A_2$$

5. Ist p eine Primzahl und a eine beliebige ganze Zahl, so ist $a^p - a$ durch p teilbar.

Anleitung: Man nehme a positiv und schließe von a auf $a+1$. Es ist zu beachten, daß $\binom{p}{k}$ für $1 \leqq k < p$ immer durch p teilbar ist.

Aufgabe 6 und 7 sind aus MANGOLDT-KNOPP, Einführung in die höhere Mathematik, entnommen.

6. Man bezeichne die Anzahl aller Inversionen, die alle Permutationen von n Elementen zusammengenommen aufweisen, mit J_n, so daß $J_1 = 0$, $J_2 = 1$, $J_3 = 9$ ist. Man zeige, daß sich diese Anzahlen rekursiv mittels der Formel

$$J_{n+1} = (n+1)\, J_n + \tfrac{1}{2}\, n\, [(n+1)!]$$

und unmittelbar durch die Formel

$$J_n = (n-2)!\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$$

bestimmen lassen. Hiernach ist $J_4 = 72$, $J_5 = 600$ usw.

7. Ein Stadtteil von der Form eines Rechtecks ist auf seinen 4 Seiten von Straßen begrenzt und außerdem von α Straßen durchzogen, welche dem einen, und β Straßen, welche dem anderen Paar von Gegenseiten des begrenzenden Rechtecks parallel laufen. Auf wieviel verschiedenen Wegen kann man, ohne Umwege zu machen, von einer der vier äußersten Ecken des Stadtteils zu der diagonal gegenüberliegenden Ecke gelangen?

Antwort: Auf $\frac{(\alpha+\beta+2)!}{(\alpha+1)!\,(\beta+1)!}$ Wegen.

8. Es ist zu zeigen, daß die Anzahl der geraden Permutationen von n Elementen gleich der Anzahl der ungeraden ist.

Drittes Kapitel.

Determinanten.

§ 9. Definition der Determinante nach LEIBNIZ.

Bei der Auflösung eines Systems von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten treten gewisse Funktionen der Koeffizienten auf, die auch sonst mehrfach vorkommen. Mit Hilfe dieser Funktionen, die

Determinanten genannt werden, lassen sich die Ergebnisse vieler Sätze oder die Lösungen von Aufgaben elegant und übersichtlich formulieren, so daß die Theorie der Determinanten ein unentbehrliches Hilfsmittel aller Gebiete der Mathematik geworden ist. Die Determinante zu definieren, ihre Eigenschaften kennenzulernen, ist das Ziel dieses Kapitels.

Gehen wir von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten aus:

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2,$$

so wird, wenn die erste Gleichung mit b_2, die zweite mit $-b_1$, bzw. mit $-a_2$ und a_1 multipliziert wird und beide addiert werden:

$$x\,(a_1 b_2 - b_1 a_2) = c_1 b_2 - b_1 c_2$$
$$y\,(a_1 b_2 - b_1 a_2) = a_1 c_2 - c_1 a_2.$$

Ist $a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0$, so kann man dividieren, und das Gleichungssystem ist gelöst. Den Ausdruck $a_1 b_2 - a_2 b_1$ schreiben wir in der Form

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

und nennen ihn eine zweireihige Determinante. Die Lösung des Gleichungssystems hat jetzt die Gestalt

$$x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Die zweireihige Determinante ist also eine ganze rationale Funktion von vier Größen, die in zwei Zeilen (das sind die horizontalen Reihen) und zwei Spalten (das sind die vertikalen Reihen) angeordnet sind. Wenn wir kurz von Reihen sprechen, können damit Zeilen oder Spalten gemeint sein.

Die Auflösung eines Systems von drei Gleichungen mit drei Unbekannten führt uns zur Erklärung der dreireihigen Determinante.

$$\begin{array}{l|c} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 & b_2 c_3 - c_2 b_3 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 & -(b_1 c_3 - c_1 b_3) \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 & b_1 c_2 - c_1 b_2 \end{array}$$

Die Gleichungen werden mit den danebenstehenden Ausdrücken multipliziert und addiert:

$$x\,(a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1)$$
$$= d_1 b_2 c_3 - d_1 b_3 c_2 + d_2 b_3 c_1 - d_2 b_1 c_3 + d_3 b_1 c_2 - d_3 b_2 c_1.$$

Die Glieder mit y und z verschwinden, und x wird Quotient zweier Summen, deren Eigenschaften uns beschäftigen werden.

Weiter wollen wir hier nicht auf die Lösung des Gleichungssystems eingehen.

Der Koeffizient von x ist eine dreireihige Determinante und wird so geschrieben:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 .$$

Werden hier a_1, a_2, a_3 durch d_1, d_2, d_3 ersetzt, so entsteht die rechte Seite der letzten Gleichung.

Betrachten wir die Determinante näher: sie ist eine ganze rationale Funktion von $3^2 = 9$ Größen, die in 3 Zeilen und 3 Spalten angeordnet sind. Der Index bezeichnet die Zeile und der Buchstabe die Spalte. Die Summe hat 3 positive und 3 negative Glieder, und jedes Glied ist Produkt aus 3 Faktoren und so beschaffen, daß weder zweimal derselbe Buchstabe noch zweimal derselbe Index vorkommt, oder: in jedem einzelnen Gliede können niemals zwei Faktoren stehen, die derselben Zeile oder derselben Spalte angehören. Die Summanden haben alle die Form: $\pm a_\alpha b_\beta c_\gamma$, wo α, β, γ eine Permutation der Ziffern 1, 2, 3 ist. Die einzelnen Faktoren der Glieder sind ferner so geschrieben, daß der an erster Stelle stehende Faktor a_α der ersten, der zweite b_β der zweiten Spalte usw. angehört. Trifft man diese Festsetzung, so ist jedem Glied eine Permutation zugeordnet, und da $3! = 6$ Glieder vorhanden sind, treten alle Permutationen auf. Wir bemerken ferner, daß den geraden Permutationen, das sind: 1 2 3, 2 3 1, 3 1 2, die positiven, und den ungeraden, das sind: 1 3 2, 2 1 3, 3 2 1, die negativen Glieder entsprechen. Danach läßt sich die Determinante in folgender Form schreiben:

$$D = \sum (-1)^J a_\alpha b_\beta c_\gamma ,$$

wo die Indices α, β, γ alle Permutationen der Ziffern 1, 2, 3 durchlaufen, und J jedesmal die Anzahl der Inversionen einer solchen Permutation ist. Die Reihenfolge der Zeilen ist hierbei die natürliche Anordnung der zu permutierenden Indices.

Diese von LEIBNIZ herrührende Definition läßt sich auf n-reihige Determinanten übertragen:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots \end{vmatrix} = \sum (-1)^J a_\alpha b_\beta c_\gamma \ldots$$

Wie vorher durchlaufen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ alle Permutationen der Ziffern $1, 2, \ldots, n$ und J ist die Anzahl der Inversionen. Unter den $n!$ Gliedern sind ebensoviele positive wie negative vorhanden (§ 8 Aufgabe 8). Auch die Erklärung einer zweireihigen Determinante, wie sie oben gegeben wurde, ist hierin enthalten.

Unabhängig von dieser Definition der Determinante als Summe von $n!$ Gliedern wird im folgenden Abschnitt eine Definition nach WEIERSTRASS gegeben. Der Leser muß sich daher zunächst auf den Standpunkt stellen, als sei „Determinante nach WEIERSTRASS" etwas anderes als „Determinante nach LEIBNIZ", weil beide verschieden erklärt sind. Daß beide identisch sind, ergibt erst der Beweis des folgenden Satzes 8.

§ 10. Definition der Determinante nach WEIERSTRASS.

Im folgenden Abschnitt wird der Begriff „homogene lineare Funktion" gebraucht, daher soll zunächst einiges darüber gesagt werden.

$$f(x, y, z) = 3\,x^2 + 2\,xy + 5\,y^2 + 3\,z^2$$

heißt homogen in x, y, z, weil die einzelnen Glieder die Eigenschaft haben, daß die Summe der Exponenten der Veränderlichen immer gleich ist; und weil sie gleich 2 ist, ist die vorliegende Funktion homogen und vom zweiten Grade. Man kann das auch so ausdrücken: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist homogen vom Grade m in $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wenn

$$f(tx_1,\ tx_2, \ldots, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

D. h.: werden die Veränderlichen durch $tx_1, tx_2, \ldots, tx_n$ ersetzt, so kann der Faktor t^m herausgenommen werden.

Spricht man von homogenen Funktionen, so sind die Veränderlichen zu nennen; denn in dem obigen Beispiel ist f homogen in x, y, z, dagegen ist f, als Funktion von x und y betrachtet, nicht homogen.

Funktionen ersten Grades heißen auch linear.

$$f = ax + by + cz$$

ist also homogen und linear in x, y, z, sofern a, b, c von diesen Veränderlichen unabhängig sind. Werden x, y, z mittels linearer homogener Funktionen durch neue Veränderliche u, v, w ersetzt, so sagt man, es wird eine lineare Substitution ausgeführt, etwa:

$$x = 3\,u + 4\,v - 6\,w; \qquad y = u - v + 3\,w; \qquad z = 2\,u + v - w;$$

dann wird f wieder eine homogene lineare Funktion von u, v, w:

$$f = (3\,a + b + 2\,c)\,u + (4a - b + c)\,v + (-\,6a + 3b - c)\,w.$$

Wir ändern jetzt die Bezeichnung für die Elemente einer Determinante und schreiben:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Jedes Element hat zwei Indices, z. B. a_{34}, lies „a drei, vier" bezeichnet das Element, das in der dritten Zeile und vierten Spalte steht, der erste Index gibt die Zeile, der zweite die Spalte an. Mitunter schreibt man auch:

$$D = |a_{ik}|_n .$$

Hier bedeutet der Index n rechts unten, daß D eine n-reihige Determinante ist, i und k durchlaufen die Werte 1 bis n.

Nach WEIERSTRASS wird die Determinante — sie soll mit D_W bezeichnet werden — folgendermaßen definiert:

D_W ist eine ganze rationale Funktion von n^2 Größen a_{ik} ($i = 1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, n$), die in n Zeilen und n Spalten angeordnet sind, und folgende Eigenschaften besitzt:

I. D_W ist homogen und linear in bezug auf die Elemente einer jeden Zeile.

II. D_W wechselt das Zeichen, wenn man zwei Zeilen vertauscht.

III. D_W wird $= 1$, wenn die Glieder der Diagonale, das sind a_{11}, a_{22}, $\ldots$, a_{nn} gleich 1, alle übrigen gleich 0 gesetzt werden.

Eine solche Definition bekommt erst dann einen Sinn, wenn die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit geklärt ist. D. h.: Sind überhaupt Funktionen vorhanden, die diesen Bedingungen entsprechen? Gibt es nur eine oder mehrere? In welcher Form kann man alle angeben? Die Antwort gibt

Satz 8: *Für jedes n gibt es eine und nur eine den Forderungen I, II, III genügende Funktion, und diese ist mit der Determinante nach* LEIBNIZ — *D_L genannt — identisch. Wird nur I und II verlangt, so ist die Funktion nicht eindeutig, aber bis auf einen konstanten Faktor k erklärt und gleich $k D_L$.*

Beweis: Es muß Existenz und Eindeutigkeit gezeigt werden, daher besteht der Beweis aus zwei Teilen.

a) Es existiert eine Funktion mit den Eigenschaften I, II, III, nämlich D_L.

In der Schreibweise der doppelten Indices ist:

$$D_L = \sum (-1)^J a_{\alpha_1 1}\, a_{\alpha_2 2} \cdots a_{\alpha_n n};$$

hier durchlaufen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ alle Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, J ist jedesmal die Anzahl der Inversionen der zugehörigen Permutation, und es ist die Reihenfolge der Zeilen als die natürliche zugrunde zu legen. Diese braucht weder hinsichtlich der Zeilen noch der Spalten mit $1, 2, \ldots, n$ übereinzustimmen, man kann die Elemente auch anders bezeichnen. Wollen wir z. B. in der vierreihigen Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} & a_{23} & a_{22} \\ a_{41} & a_{44} & a_{43} & a_{42} \\ a_{11} & a_{14} & a_{13} & a_{12} \\ a_{31} & a_{34} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$$

das Vorzeichen von $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ bestimmen, so sind erst die Faktoren den Spalten entsprechend zu vertauschen, d. h. die zweiten Indices müssen die Folge 1 4 3 2 haben: $a_{41}a_{14}a_{23}a_{32}$; dann ist J für die ersten Indices 4 1 2 3 abzuzählen, wenn 2 4 1 3, das ist die Reihenfolge der Zeilen, die natürliche ist. Es ist $J = 2$, denn 1, 2 und 4, 2 bilden je eine Inversion.

Weil bei einer Permutation $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jede der n Zahlen $1, 2, \ldots, n$ einmal und nur einmal vorkommt, so ist auch in jedem Gliede von D_L ein und nur ein Faktor aus jeder einzelnen Zeile enthalten, also ist I erfüllt.

Wir sehen uns daraufhin die dreireihige Determinante an:

$$D_L = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - \\ - a_{11}a_{32}a_{23}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}).$$

In der zweiten Form ist D_L, wie man sagt, „nach der ersten Zeile entwickelt", und hier ist sofort zu erkennen, daß D in bezug auf die erste Zeile homogen und linear ist. Durch andere Zusammenfassung kann man ebenso nach der zweiten oder dritten Zeile entwickeln. Daß hinsichtlich der Spalten auch I erfüllt ist, soll einstweilen nur beiläufig erwähnt werden.

Die Anzahl der Inversionen einer Permutation hängt bekanntlich davon ab, welche Reihenfolge als die natürliche angesehen wird. Wir vertauschen in dieser zwei Elemente und legen jetzt die so gebildete Anordnung als die natürliche zugrunde. Waren vorher t Transpositionen erforderlich, um $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ herzustellen, so kann man, von der neuen Anordnung ausgehend, durch $t + 1$ Transpositionen zu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ gelangen, weil zuerst durch eine Transposition die abgeänderte natürliche Reihenfolge in die vorherige übergeführt wird; von da aus kommt man durch t Transpositionen zu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. War also J vorher gerade, so ist es jetzt ungerade und umgekehrt. Weil nun bei D_L zur Bestimmung des Vorzeichens der einzelnen Glieder die Reihenfolge der Zeilen maßgebend ist, so hat die Vertauschung zweier Zeilen zur Folge, daß jedes Glied sein Vorzeichen umkehrt. D_L erfüllt II.

Werden alle $a_{ik} = 0$ für $i \neq k$, so bleibt von der ganzen Summe D_L nur das Glied $a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$ mit $J = 0$ übrig, also ist auch III erfüllt.

b) D_W sei jetzt eine beliebige Funktion mit den verlangten Eigenschaften, wir beweisen, daß es nur eine solche Funktion geben kann.

Es kommt darauf an, nur unter Benutzung der Bedingungen, denen D_W entsprechen soll, diese Funktion zu konstruieren.

Um den Leser in den Gedankengang einzuführen und an einem einfachen Beispiel deutlich zu machen, daß durch solche Eigenschaften eine Funktion vollständig charakterisiert werden kann, möge der Fall $n = 2$ gesondert behandelt werden.

Mit Rücksicht auf I muß D_W die Form haben

$$D_W = A a_{11} + B a_{12},$$

wo A und B von a_{11} und a_{12} unabhängig sind. D_W ist auch homogen und linear in a_{21} und a_{22}, und daran ändert sich auch nichts, wenn $a_{11} = 1$ und $a_{12} = 0$ gesetzt werden. Dann ist

$$D_W = A = \alpha a_{21} + \beta a_{22}.$$

Ebenso wird

$$B = \gamma a_{21} + \delta a_{22},$$

wo a, β, γ, δ Konstante sind. Durch den Ansatz

$$D_W = (\alpha a_{21} + \beta a_{22})\, a_{11} + (\gamma a_{21} + \delta a_{22})\, a_{12}$$

ist I erfüllt. Wir vertauschen die beiden Zeilen, so entsteht

$$(\alpha a_{11} + \beta a_{12})\, a_{21} + (\gamma a_{11} + \delta a_{12})\, a_{22},$$

und die vier Glieder dieses Ausdrucks müssen nach Umkehrung des Vorzeichens mit denen von D_W übereinstimmen; daraus ergeben sich zur Bestimmung der Konstanten folgende Beziehungen:

$$\alpha = -\alpha, \quad \beta = -\gamma, \quad \gamma = -\beta, \quad \delta = -\delta$$

oder $\alpha = \delta = 0, \beta$ bleibt unbestimmt und $\gamma = -\beta$, also

$$D_W = \beta\,(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

Wenn also nur I und II gefordert werden, ist D_W bis auf einen konstanten Faktor erklärt. Um diesen zu bestimmen, setzen wir

$$a_{11} = a_{22} = 1, \quad a_{12} = a_{21} = 0.$$

Dann wird nach III $D_W = 1$. Also ist $\beta = 1$ und $D_W = D_L$.

Wir führen den allgemeinen Beweis durch Induktion. Für $n = 1$ ist $D_W = D_L = a_{11}$, und der Satz ist richtig. Der Umstand, daß die Forderung II hier gar nicht anwendbar ist, ist kein Grund, die Gültigkeit für $n = 1$ auszuschließen.

Wir bestimmen folgende besonderen Determinanten:

$$E_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Wird die erste Zeile mit der zweiten vertauscht, so entsteht die Determinante E_2. Wir gehen wieder von E_1 aus, vertauschen die dritte Zeile mit der zweiten, dann die zweite mit der ersten, so erhalten wir E_3, und es ist

$$E_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad \text{und} \quad E_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = +1.$$

E_2 ist durch eine, E_3 durch zwei Transpositionen zweier Zeilen aus E_1 entstanden. Allgemein wird E_k so gebildet: In E_1 vertauscht man die k^{te} Zeile mit der $k-1^{\text{ten}}$, danach die $k-1^{\text{te}}$ mit der $k-2^{\text{ten}}$ usw., bis die k^{te} Zeile an die erste Stelle gerückt ist. Weil $k-1$ Transpositionen ausgeführt wurden, ist

$$E_k = (-1)^{k-1}.$$

In der ersten Zeile von E_k ist das Element der k^{ten} Spalte $= 1$, die übrigen sind $= 0$, in der k^{ten} Spalte stehen auch lauter Nullen bis auf das Element der ersten Zeile. Läßt man in E_k die erste Zeile und k^{te} Spalte fort, so bleibt eine $n-1$-reihige Determinante, deren Elemente der Hauptdiagonale $= 1$, alle übrigen $= 0$ sind.

Setzen wir jetzt D_W als homogene lineare Funktion von den Elementen der ersten Zeile an, so wird

$$D_W = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n},$$

wo $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ von $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ unabhängig sind. (Die Bezeichnung der doppelten Indices bei den A wird sich erst später als zweckmäßig erweisen). Es kann aber auch A_{1k} kein Element aus der k^{ten} Spalte enthalten. Denn nehmen wir an, in A_{1k} würden Glieder mit dem Faktor a_{ik} auftreten, dann lassen sich diese mit $a_{ik}B$ zusammenfassen, und dieses B kann aber auch kein Glied der i^{ten} Zeile enthalten, weil D auch homogen und linear in bezug auf die i^{te} Zeile ist. B ändert sich also nicht, wenn die erste mit der i^{ten} Zeile vertauscht wird. In der Entwicklung von D_W müßte ein Glied $a_{1k}a_{ik}B$ vorkommen. Nach II geht dieses Glied in den entgegengesetzten Wert über, wenn die erste und die i^{te} Zeile vertauscht werden; es ist also $B = -B = 0$. Jedes A_{1k} $(k = 1, 2, \dots, n)$ erweist sich als eine Funktion der $(n-1)^2$ Größen, die übrig bleiben, wenn man in D_W die erste Zeile und k^{te} Spalte wegläßt, und diese Funktionen erfüllen I und II. Um dies einzusehen, setze man $a_{1k} = 1$, alle anderen Glieder der ersten Zeile $= 0$. Dann wird

$$D_W = A_{1k}.$$

Da D_W auch homogen von der zweiten, dritten, $\dots$, n^{ten} Zeile ist, so gilt dasselbe für A_{1k}. Ebenso ergibt sich der Zeichenwechsel bei Vertauschungen innerhalb der letzten $n-1$ Zeilen. Für $(n-1)$-reihige Determinanten ist aber auf Grund der Induktionsannahme der Satz anwendbar, und A_{1k} ist bis auf einen konstanten Faktor α_k bestimmt.

$$A_{1k} = \alpha_k \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,k-1} & a_{3,k+1} & \dots & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Es kommt also nur noch auf die Bestimmung der n Größen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ an. Weil sie von den a_{ik} unabhängig sind, können diese Größen durch besondere Werte ersetzt werden. Dies geschieht so, daß an Stelle von D_W der Reihe nach die Determinanten $E_1, E_2, \dots, E_n$ genommen werden, deren Werte uns bekannt sind. In der Summe

$$D_W = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

bleibt dann nur ein von Null verschiedenes Glied stehen:

$$E_k = 1 \cdot A_{1k} = \alpha_k \cdot 1 = (-1)^{k-1}.$$

Denn die Determinante A_{1k} hat nach III den Wert 1. Mit der Ermittlung der $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ist D_W vollständig bestimmt, und es ist gezeigt: wenn es überhaupt eine den Bedingungen I, II und III genügende Funktion gibt, kann es nur diese sein. Wir wissen aber, daß D_L diese Eigenschaften besitzt. Also ist D_W mit D_L identisch.

Wir haben noch eine Funktion $F(a_{ik})$ zu betrachten, die nur I und II erfüllt. Wir setzen in F die Glieder der Diagonale $= 1$, alle übrigen $= 0$, dann möge $F = k$ sein. D sei die aus den $a_{i\kappa}$ gebildete Determinante. Die Funktion

$$F(a_{ik}) - (k-1)\,D$$

genügt dann den Bedingungen I, II und III, ist also gleich D oder:

$$F(a_{ik}) = (k-1)\,D + D = kD.$$

§ 11. Einfache Sätze über Determinanten.

Die Darstellung

$$D = \sum_{\varrho=1}^{n} a_{1\varrho} A_{1\varrho}$$

heißt, wie erwähnt, die Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile. Natürlich kann man D auch als homogene lineare Funktion einer jeden anderen Zeile ansetzen:

$$D = \sum_{\varrho=1}^{n} a_{i\varrho} A_{i\varrho}. \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Zur Ermittlung der $A_{i\varrho}$ bringen wir durch $i-1$ Vertauschungen die i^{te} Zeile an die erste Stelle. Dann geht D in

$$D' = (-1)^{i-1} D$$

über. Wird D' in bekannter Weise nach der ersten Zeile entwickelt:

$$D' = \sum_{\varrho=1}^{n} a_{i\varrho} A'_{i\varrho},$$

so ist

$$A'_{i\varrho} = (-1)^{\varrho-1} \, | a_{k,l} |_{n-1}$$

und
$$A_{i\varrho} = (-1)^{i-1} A'_{i\varrho} = (-1)^{i+\varrho} \, | a_{k,l} |_{n-1},$$

wo diese $(n-1)$-reihigen Determinanten — sie werden Unterdeterminanten genannt — durch Weglassen der i^{ten} Zeile und ϱ^{ten} Spalte aus D gebildet sind. $A_{i\varrho}$ heißt die zu $a_{i\varrho}$ gehörige Adjunkte. Sie ist also die genannte Unterdeterminante, versehen mit dem Vorzeichen $(-1)^{i+\varrho}$. Letztere verteilen sich wie die schwarzen und weißen Felder eines Schachbrettes:

$$\begin{matrix} + & - & + \cdots \\ - & + & - \cdots \\ + & - & + \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \end{matrix}$$

Andere Unterdeterminanten von D werden erhalten, wenn beliebige Zeilen und ebensoviele Spalten weggelassen werden.

Satz 9. *D wechselt das Zeichen, wenn man zwei Spalten vertauscht.*

Zum Beweis nehmen wir die Leibnizsche Darstellung. Da die Zeilen bleiben, ändert sich auch die natürliche Reihenfolge der ersten Indices nicht. Dagegen muß die Reihenfolge der Faktoren mit der der Spalten übereinstimmen, es muß daher in jedem Glied eine Transposition gemacht werden, bevor J ermittelt wird. Das Vorzeichen ändert sich dadurch bei jedem Glied.

Satz 10. *D ändert sich nicht, wenn man Zeilen und Spalten vertauscht.*

Beweis: D besitzt auch hinsichtlich der Spalten die Eigenschaften I, II und III. Weil es nach Satz 8 nur eine Funktion mit diesen Eigenschaften geben kann, ist D mit der Determinante identisch, in der die Spalten von D zu Zeilen gemacht werden.

Zeilen und Spalten sind daher gleichberechtigt. Insbesondere ist

$$D = \sum_{\varrho=1}^{n} a_{\varrho k} A_{\varrho k}$$

die Entwicklung der Determinante nach der k^{ten} Spalte.

Satz 11. *Sind die Elemente einer Reihe (d. h. Zeile oder Spalte) Summen von zwei Gliedern, so läßt sich D als Summe zweier Determinanten schreiben.* Ist z. B. für die erste Zeile

$$a_{11} = \alpha_1 + \beta_1, \quad a_{12} = \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \quad a_{1n} = \alpha_n + \beta_n,$$

dann ist

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Der Beweis ergibt sich leicht aus I oder aus der Entwicklung nach der betreffenden Reihe. In gleicher Weise folgt

Satz 12. *Werden die Elemente einer Reihe mit einem Faktor λ multipliziert, so geht D in λD über.*

Satz 13. *Sind die Elemente einer Reihe denen einer parallelen Reihe proportional, so ist $D = 0$.*

Beweis: Es sei für die beiden ersten Zeilen:

$$a_{11} = \lambda a_{21}, \quad a_{12} = \lambda a_{22}, \dots, \quad a_{1n} = \lambda a_{2n}.$$

Dann nehme man λ vor die Determinante:

$$D = \lambda D'.$$

In D' sind die beiden ersten Zeilen gliedweise einander gleich. Werden diese vertauscht, so tritt einerseits Zeichenwechsel, andererseits keine Veränderung ein, also

$$D' = -D' = 0.$$

Satz 14. *D ändert sich nicht, wenn man die mit einem Faktor λ multiplizierten Glieder einer Reihe zu denen einer parallelen Reihe addiert.*

Beweis: Nach Satz 11 zerlege man die in der angegebenen Weise umgeformte Determinante in eine Summe, und nach Satz 13 verschwindet dann das zweite Glied. Für den Fall, daß die zweite Spalte mit λ multipliziert und zur ersten addiert wird, schreiben wir die Zerlegung auf:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{12} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} + \lambda a_{22} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} + \lambda a_{n2} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n2} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Satz 15. *Zwischen den Adjunkten bestehen folgende Beziehungen:*

$$\sum_{\varrho=1}^{n} a_{i\varrho} A_{k\varrho} = \begin{cases} D & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}$$

$$\sum_{\varrho=1}^{n} a_{\varrho i} A_{\varrho k} = \begin{cases} D & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k. \end{cases}$$

Beweis: Für $i = k$ haben wir die bekannten Entwicklungen nach einer Reihe, und für $i \neq k$ können wir diese Summen als Determinante mit zwei gleichen Reihen schreiben, so ist z. B. im ersten Falle für $i = 2$ und $k = 1$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{21} A_{11} + a_{22} A_{12} + \cdots + a_{2n} A_{1n} = 0.$$

Man kann diesen Satz auch so aussprechen: Werden die Elemente einer Reihe mit den Adjunkten einer von dieser verschiedenen, aber parallelen Reihe multipliziert und addiert, so verschwindet diese Summe.

Satz 16. (*Multiplikationstheorem*) *Es seien*

$$A = | a_{ik} |_n, \quad B = | b_{ik} |_n, \quad C = | c_{ik} |_n$$

drei n-reihige Determinanten, deren Elemente in folgender Beziehung zueinander stehen:

$$c_{ik} = \sum_{\varrho=1}^{n} a_{i\varrho} b_{k\varrho}.$$

Dann ist

$$C = A B.$$

c_{ik} wird das innere Produkt der i^{ten} Zeile aus A mit der k^{ten} Zeile aus B genannt.

Beweis: Wir betrachten C als Funktion der Veränderlichen a_{ik} und die b_{ik} als Konstante. Dann ist C, als Determinante, eine homogene lineare Funktion einer jeden Zeile, etwa von $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}$. Diese sind ihrerseits homogen und linear von $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ abhängig. Sonst kommen die Elemente der ersten Zeile der a_{ik} nicht mehr in C vor. Es ist also C auch homogen und linear in $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$. (Vgl. § 10 Bemerkungen über homogene Funktionen.) Das gleiche gilt für jede andere Zeile aus A. C ist also eine homogene lineare Funktion von den Elementen einer jeden Zeile der a_{ik}.

Vertauscht man zwei Zeilen aus A, so werden dadurch auch die beiden entsprechenden Zeilen der c_{ik} vertauscht. Hiervon überzeugen wir uns leicht, indem wir die beiden ersten Zeilen aus C aufschreiben:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \sum a_{1\varrho} b_{1\varrho}, \quad c_{12} = \sum a_{1\varrho} b_{2\varrho}, \dots, \quad c_{1n} = \sum a_{1\varrho} b_{n\varrho}, \\ c_{21} &= \sum a_{2\varrho} b_{1\varrho}, \quad c_{22} = \sum a_{2\varrho} b_{2\varrho}, \dots, \quad c_{2n} = \sum a_{2\varrho} b_{n\varrho}. \end{aligned} \quad \varrho = 1, 2 \dots, n$$

Wird die erste mit der zweiten Zeile aus A vertauscht, so heißt das, aus $a_{1\varrho}$ wird $a_{2\varrho}$ und umgekehrt. Man sieht sofort, daß dadurch auch die beiden ersten Indices 1 und 2 bei den c_{ik} vertauscht werden; das liegt daran, daß in den allgemeinen Formeln für die c_{ik} der erste Index i bei den $b_{k\varrho}$ nicht vorkommt.

C erfüllt daher die Bedingungen I und II des Satzes 8 hinsichtlich der a_{ik}, also ist

$$C = \beta A,$$

wo β eine Konstante, d. h. von den a_{ik} unabhängige Größe ist. Um sie zu finden, setzen wir $a_{ik} = 1$ für $i = k$, sonst $= 0$, dann wird

$$c_{ik} = b_{ki}.$$

Denn in $\sum a_{i\varrho} b_{k\varrho}$ bleibt nur das Glied übrig, in dem $\varrho = i$ ist, denn sonst ist $a_{i\varrho} = 0$. Für diese besonderen Werte der a_{ik} wird

$$A = 1 \quad \text{und} \quad C = |\, b_{ik} \,|_n = \beta = B.$$

Hier sind bei der Bildung des Produktes Zeilen mit Zeilen kombiniert worden. Wegen der Vertauschbarkeit von Zeilen und Spalten können die c_{ik} auf vier verschiedene Arten angegeben werden:

$$\left.\begin{array}{lll} & c_{ik} = \sum a_{i\varrho} b_{k\varrho} & \text{Zeilen mit Zeilen} \\ \text{oder} & c_{ik} = \sum a_{i\varrho} b_{\varrho k} & \text{Zeilen mit Spalten} \\ \text{oder} & c_{ik} = \sum a_{\varrho i} b_{k\varrho} & \text{Spalten mit Zeilen} \\ \text{oder} & c_{ik} = \sum a_{\varrho i} b_{\varrho k} & \text{Spalten mit Spalten.} \end{array}\right| \quad \varrho = 1, 2, \ldots, n$$

Wenn von den Elementen der ersten Zeile a_{11} beliebig ist, aber $a_{12} = a_{13} = \cdots = a_{1n} = 0$, so kann D als $(n-1)$-reihige Determinante geschrieben werden:

$$D = a_{11} A_{11}.$$

Eine wiederholte Anwendung führt zu folgendem

Satz 17. *Wenn D die Form hat*

$$D = \left|\begin{array}{cccc:ccc} a_{11} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} & 0 & \ldots & 0 \\ \hdashline & & B & & & C & \end{array}\right|$$

d. h. rechts von $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$ stehen lauter Nullen, dann ist

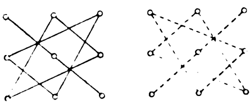
$$D = a_{11} a_{22} a_{33} \ldots a_{mm} C.$$

C bezeichnet die rechts unten stehende $(n-m)$-reihige Unterdeterminante. D ist also unabhängig von den mit B zusammengefaßten Elementen, sowie von a_{ik} für $i \neq k$.

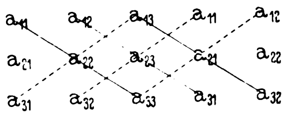
Es bleibt noch zu beachten, daß die obige Form unter Umständen erst durch Reihenvertauschung zu bilden ist.

§ 12. Beispiele, Aufgaben und Anwendungen.

1. Die Berechnung einer dreireihigen Determinante läßt sich folgendermaßen veranschaulichen:



oder



Im linken Schema sind die Glieder, deren Produkt positiv ist, durch starke Linien und die mit negativem Produkt durch punktierte Linien verbunden. Im rechten Schema sind die beiden ersten Spalten noch einmal daneben geschrieben, positive und negative Produkte werden durch starke und punktierte Linien unterschieden.

2. Die Gleichung einer geraden Linie durch zwei Punkte in der Ebene

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

soll auf die Form $D = 0$ gebracht werden, wo D eine dreireihige Determinante ist.

3. Man beweise folgende Identität:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos b \\ \cos a & 1 & \cos c \\ \cos b & \cos c & 1 \end{vmatrix} = 4 \sin s \sin(s - a) \sin(s - b) \sin(s - c),$$

wo $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ ist.

4. Wie man zweckmäßig verfährt, um eine Determinante zu berechnen, soll an folgendem Beispiel gezeigt werden. Die einzelnen Schritte sind unter a) bis f) unten erklärt.

$$\begin{vmatrix} 0 & 13 & 14 & 15 \\ 13 & 0 & 15 & 14 \\ 14 & 15 & 0 & 13 \\ 15 & 14 & 13 & 0 \end{vmatrix} = 42 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 13 & 0 & 15 & 14 \\ 14 & 15 & 0 & 13 \\ 15 & 14 & 13 & 0 \end{vmatrix} = 42 \cdot 14 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 15 & 14 \\ -1 & 15 & 0 & 13 \\ 1 & 14 & 13 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 42 \cdot 14 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 15 & 15 & 27 \\ -1 & 15 & 0 & 13 \\ 0 & 29 & 13 & 13 \end{vmatrix} = -42 \cdot 14 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 9 \\ 29 & 13 & 13 \end{vmatrix} = -42 \cdot 14 \cdot 3 \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 9 \\ 16 & 13 & 13 \end{vmatrix} = -42 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = -112896 = -16 \cdot 84^2.$$

a) Die zweite, dritte und vierte Zeile wurde zur ersten addiert und 42 herausgenommen.

b) Die erste Spalte wurde verändert, indem die zweite und vierte Spalte subtrahiert und die dritte addiert wurde, 14 wurde herausgenommen.

c) Die dritte Zeile wurde zur zweiten und vierten addiert.

d) Nach der ersten Spalte wurde entwickelt und 3 herausgenommen.

e) Die zweite Spalte wurde von der ersten abgezogen.

f) Nach der ersten Spalte wurde entwickelt, usw.

Man formt, wie das Beispiel zeigt, die Determinante so um, daß in einer Reihe nur noch ein von 0 verschiedenes Glied vorkommt. Dann streiche man Zeile und Spalte, in der dieses Glied steht, setze es als Faktor vor und gebe das Vorzeichen $(-1)^{i+k}$ nach dem Schachbrettprinzip.

5. V bezeichnet das Volumen eines Tetraeders, α, β, γ sind drei von einer Ecke ausgehende Kanten, a, b, c die diesen bzw. gegenüberliegenden. Es gilt folgende Formel, die später abgeleitet wird:

$$288\,V^2 = \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & \alpha^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & \beta^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & \gamma^2 & 1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Zur Übung im Berechnen von Determinanten sind folgende Zahlenbeispiele nachzuprüfen. Sie sind so gewählt, daß alle sieben Größen rational sind. (Vgl. Otto Schulz: Über Tetraeder mit rationalen Maßzahlen der Kantenlängen und des Volumens. Diss. Leipzig 1913.)

α	β	γ	a	b	c	V
2	3	3	4	3	3	$\frac{8}{3}$
2	4	5	7	6	4	6
5	6	4	8	7	2	6
7	3	7	8	7	5	0

6. Es ist zu zeigen, daß die aus den n^2 Adjungierten gebildete Determinante

$$|A_{ik}|_n = D^{n-1}$$

ist.

Anleitung: Man multipliziere mit D und wende Satz 15 an.

7. Bei der Auflösung einer Gleichung vierten Grades kommt es darauf an, das gegebene Polynom in zwei quadratische Faktoren zu zerlegen:

$$a x^4 + 4 b x^3 + 6 c x^2 + 4 d x + e = (u x^2 + 2 v x + w)\,(u' x^2 + 2 v' x + w').$$

Zur Berechnung der Unbekannten u, v, w, u', v', w' erhalten wir durch Vergleich entsprechender Koeffizienten folgende Beziehungen:

$$a = uu',\ 2b = uv' + u'v,\ 6c = uw' + u'w + 4vv',$$

$$2d = vw' + wv',\ e = ww'.$$

Die Elimination gelingt durch folgenden Kunstgriff: Wir führen noch eine weitere Unbekannte s ein, setzen

$$vv' = c + s$$

und bilden durch Multiplikation von Zeilen mit Zeilen das Produkt:

$$\begin{vmatrix} u & u' & 0 \\ v & v' & 0 \\ w & w' & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u' & u & 0 \\ v' & v & 0 \\ w' & w & 0 \end{vmatrix} = 8\cdot \begin{vmatrix} a & b & c-2s \\ b & c+s & d \\ c-2s & d & e \end{vmatrix}$$

$$= 8\cdot(-4s^3 + g_2 s + g_3) = 0,$$

wo $\qquad g_2 = ae - 4bd + 3c^2$ und $g_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}$ ist.

Diese Gleichung heißt kubische Resolvente und wird mittels der Cardanischen Formeln gelöst

$$s = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{g_3 + \sqrt{g_3^2 - \tfrac{1}{27}g_2^3}} + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{g_3 - \sqrt{g_3^2 - \tfrac{1}{27}g_2^3}}\,.$$

Die weitere Elimination zur Bestimmung der Unbekannten macht keine Schwierigkeiten mehr. Als Beispiel löse man die Gleichung:

$$x^4 + 3x^3 - x - 3 = 0.$$

Es ist so gewählt, daß, soweit dies überhaupt möglich ist, alle Radikale rational sind.

Diese Lösung einer Gleichung vierten Grades stammt von LUDOVICI FERRARI (1522—1565). Veröffentlicht hat sie zuerst CARDANO in seinem Werk Ars magna (1545). Die hier angegebene elegante Form der Bildung der kubischen Resolvente habe ich in den Vorlesungen von FROBENIUS kennengelernt. Sie stammt, soviel ich weiß, von WEIERSTRASS, die Bezeichnung g_2 und g_3 für die Invarianten der biquadratischen Funktion läßt auch darauf schließen.

Bei der Lösung der Aufgaben 8 bis 15 sind einfache Eigenschaften einer ganzen rationalen Funktion $f(x)$ zu verwenden, nämlich: aus $f(a) = 0$ folgt, daß $f(x)$ durch $x - a$ teilbar ist, und $f(x)$ kann nicht mehr Nullstellen haben als der Grad angibt.

Wir bringen als Beispiel die Lösung der Aufgabe

8. $$D = \begin{vmatrix} x^3 & y^3 & z^3 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ soll in vier lineare Faktoren zerlegt werden.

Werden die drei veränderlichen Größen durch tx, ty, tz ersetzt, so erweist sich D als homogene Funktion vierten Grades in x, y, z. Als Funktion von x ist D nur vom dritten Grade und verschwindet für $x = y$ und $x = z$, ist also durch $(x - y)(x - z)$ teilbar; ebenso erkennt man $y - z$ als Faktor von D, so daß

$$D = (x - y)(x - z)(y - z) F$$

angesetzt werden kann, wo F homogen und linear in x, y, z ist:

$$F = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Weil $\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = y - z$ der Koeffizient von x^3 in der Entwicklung von D ist, muß $\alpha = 1$ sein; ebenso folgt $\beta = \gamma = 1$, also

$$D = (x - y)(x - z)(y - z)(x + y + z).$$

9. $$\begin{vmatrix} yz & zx & xy \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ soll in drei Faktoren zerlegt werden.

10. $$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$$ in drei Faktoren.

11. $$\begin{vmatrix} x^4 & y^4 & z^4 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ in vier Faktoren.

12. $$\begin{vmatrix} x^4 & y^4 & z^4 & u^4 \\ x^2 & y^2 & z^2 & u^2 \\ x & y & z & u \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ in sieben Faktoren.

13. $$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & a & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$$ in vier Faktoren.

Anleitung: Durch geeignete Addition oder Subtraktion der drei letzten Zeilen zur ersten lassen sich die einzelnen Faktoren leicht erkennen. Man kann auch so verfahren: Man multipliziere die Determinante mit

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix},$$

einem Faktor, von dem man durch Quadrieren leicht erkennt, daß er $\neq 0$ ist. In dem Produkt kann man die gesuchten linearen Faktoren vor die Determinante schreiben und den Faktor, mit dem erweitert wurde, wieder wegheben.

Setzt man $x = 0$, so ist die Determinante $= -16\,J^2$, wenn J der Inhalt des aus a, b, c gebildeten Dreiecks ist (vgl. Beispiel 4).

14. $$\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & z^2 & y^2 \\ b^2 & z^2 & 0 & x^2 \\ c^2 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$ ist in vier Faktoren zu zerlegen.

Anleitung: Man führe durch Umformungen folgender Art auf das vorige Beispiel zurück; die beiden ersten Zeilen multipliziere man mit $\frac{x}{a}$ und die beiden letzten Spalten mit $\frac{a}{x}$ usw.

15. $$\begin{vmatrix} a & b & b \dots b \\ b & a & b \dots b \\ b & b & a \dots b \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ b & b & b \dots a \end{vmatrix}_n = [a + (n-1)\,b]\,(a-b)^{n-1}.$$

16. Die Vandermondesche Determinante ist ein Produkt aus $\frac{n\,(n-1)}{2}$ Faktoren:

$$\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} \dots x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} \dots x_2 & 1 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} \dots x_n & 1 \end{vmatrix}_n = \begin{array}{r} (x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3)\,(x_1 - x_4) \dots (x_1 - x_n) \\ (x_2 - x_3)\,(x_2 - x_4) \dots (x_2 - x_n) \\ (x_3 - x_4) \dots (x_3 - x_n) \\ \dots \quad \cdot \\ (x_{n-1} - x_n) \end{array}$$

Der Beweis dieser Identität wird durch Induktion geführt. Wir haben hier eine ganze rationale Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von x_1 und der Koeffizient von x_1^{n-1} ist eine $(n-1)$-reihige Vandermondesche Determinante.

17. Die Beispiele 8 und 12 sind auf entsprechend gebildete n-reihige Determinanten zu verallgemeinern.

Die beiden folgenden Aufgaben 18 und 19 sind aus POLYA und SZEGÖ: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, VII. Abschnitt, entnommen.

18. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$ soll in n Faktoren zerlegt werden.

19. $$\begin{vmatrix} r_1 & a & a & \dots & a \\ b & r_2 & a & \dots & a \\ b & b & r_3 & \dots & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b & b & b & \dots & r_n \end{vmatrix} = \frac{a f(b) - b f(a)}{a - b},$$

wo $f(x) = (r_1 - x)(r_2 - x)(r_3 - x) \dots (r_n - x)$ gesetzt ist.

Anleitung: Addiert man zu sämtlichen n^2 Elementen der Determinante eine veränderliche Größe x, so ist die so entsteheden Funktion $D(x)$ linear: $D(x) = Ax + B$. Wenn man für zwei Werte von x das zugehörige $D(x)$ angeben kann, so lassen sich A und B berechnen.

20. Einè schiefsymmetrische n-reihige Determinante (d. h. $a_{ik} = -a_{ki}$) verschwindet, wenn n ungerade ist.

Anleitung: Man multipliziere alle Zeilen mit -1.

21. Für gerades n ist eine schiefsymmetrische Determinante das Quadrat einer rationalen Funktion. Zunächst soll dieser Satz nur für $n = 4$ nachgewiesen werden. Zur Abkürzung wird $p = ux + vy + wz$ gesetzt, dann ist:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & u & v & w \\ -u & 0 & z & -y \\ -v & -z & 0 & x \\ -w & y & -x & -0 \end{vmatrix} = p^2.$$

Anleitung: Zweite Spalte mit x multiplizieren, dann dritte Spalte mit y, vierte mit z multiplizieren und zur zweiten addieren. So wird Dx das Produkt aus p und einer dreireihigen Determinante. In dieser wird die erste Zeile mit x multipliziert und ähnlich verfahren. Man erhält: $Dx^2 = x^2 p^2$.

Um den Satz allgemein zu beweisen, zeige man der Reihe nach:

1. $D = | a_{ik} |_n$, n gerade und $a_{ik} + a_{ki} = 0$. D bleibt schiefsymmetrisch, wenn die i^{te} und k^{te} Spalte und zugleich die i^{te} und k^{te} Zeile vertauscht werden.

2. Desgleichen, wenn die mit λ multiplizierte i^{te} Spalte zur k^{ten} und die mit λ multiplizierte i^{te} Zeile zur k^{ten} addiert werden.

3. D läßt sich auf die Form bringen, in der $a_{12} = -a_{21} \neq 0$, während alle übrigen Elemente der ersten Zeile und ersten Spalte verschwinden.

4. Danach wird D Produkt aus a_{12}^2 und einer schiefsymmetrischen $(n-2)$-reihigen Determinante, die auf Grund einer Induktionsannahme die gewünschte Form besitzt.

Aufgabe 22, 23, 24 sind Identitäten, die durch Induktion zu beweisen sind.

22. $$\begin{vmatrix} \cos\varphi & 1 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\varphi & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\varphi & 1 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 1 & 2\cos\varphi \end{vmatrix}_n = \cos(n\varphi).$$

23. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \ldots & . & . & 0 \\ -1 & 1 & 2^2 & 0 \ldots & . & . & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3^2 \ldots & . & . & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & -1 & 1 & (n-1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}_n = n!$$

24. $$\begin{vmatrix} 1! & 2! & \ldots & n! \\ 2! & 3! & \ldots & (n+1)! \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ n! & (n+1)! & \ldots & (2n-1)! \end{vmatrix}_n = [1!\,2! \ldots (n-1)!]^2\, n!$$

25. $\psi(n)$ ist die Anzahl der Glieder einer n-reihigen Determinante, die keinen Faktor aus der Hauptdiagonale enthalten, oder, was dasselbe ist, die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, die kein Element an seiner Stelle lassen; man zeige:

$$\psi(n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots \pm \frac{1}{n!}\right).$$

Zuerst beweise man die Rekursionsformel:

$$\psi(n) = (n-1)\,[\psi(n-1) + \psi(n-2)].$$

Wie viele von diesen Gliedern haben positives und wie viele negatives Vorzeichen? Oder: Wie viele von diesen Permutationen sind gerade und wie viele ungerade?

Um die letzte Frage zu beantworten, beachte man, daß die Differenz der beiden gesuchten Zahlen gleich dem Wert einer n-reihigen Determinante ist, deren Glieder der Hauptdiagonale $= 0$, alle übrigen $= 1$ sind.

§ 13. Erweiterung der Weierstrassschen Definition.

Die in § 10 gegebene Definition einer Determinante läßt sich verallgemeinern und auf ein System von Veränderlichen übertragen, in dem die Anzahl der Zeilen nicht gleich der der Spalten zu sein braucht. Wie wir bald sehen werden, hat nur der Fall Interesse, wo mehr Spalten als Zeilen auftreten.

Es seien a_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, m;\; k = 1, 2, \ldots, n)$ mn veränderliche Größen, die in m Zeilen und n Spalten angeordnet sind, und es soll $n \geqq m$ sein. Eine ganze rationale Funktion $F(a_{ik})$ möge die Eigenschaften I und II besitzen, d. h.

I. F ist linear und homogen in bezug auf die Elemente einer jeden Zeile.

II. F wechselt das Zeichen, wenn zwei Zeilen vertauscht werden.

Aus dem System

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} \end{matrix}$$

lassen sich $s = \binom{n}{m}$ m-reihige Determinanten bilden; $D_1, D_2, \ldots, D_s$, indem unter Beibehaltung der Zeilen aus den n Spalten m herausgegriffen werden; in welcher Reihenfolge diese Spalten bei der Bildung der Determinanten eingesetzt werden, ist für das folgende gleichgültig, wir können aber festsetzen, daß der kleinere Spaltenindex vor dem größeren stehen soll. Es gilt folgender

Satz 18. *F ist eine homogene lineare Verbindung von $D_1, D_2, \ldots, D_r$:*

$$F = k_1 D_1 + k_2 D_2 + \cdots + k_s D_s,$$

wo $k_1, k_2, \ldots, k_s$ konstante Größen sind.

Beweis: Denkt man sich F als Summe aufgeschrieben, so muß mit Rücksicht auf I jedes Glied ein und nur ein Element aus jeder Zeile als Faktor enthalten. Werden mit $C_1, C_2, \ldots$ gewisse Konstante bezeichnet, so kann man

$$F = \sum C_\varrho\, a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{m\alpha_m}$$

ansetzen. Daß bei den Spaltenindices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ in einem Gliede nicht zwei gleiche vorkommen dürfen, folgt hier ebenso wie beim Beweise des Satzes 8. Demnach ist die Summe so zu bilden, daß man aus den n Zahlen $1, 2, \ldots, n$ auf alle möglichen Arten m herausgreift, diese permutiert und als Spaltenindices nimmt. Alle Glieder aus F, die zu derselben Kombination gehören, d. h. bei denen die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ immer nur Permutationen derselben m Zahlen sind, werden zusammengefaßt, so daß einer jeden Kombination eine bestimmte Anzahl der Glieder aus F

zugeordnet wird. Die so gebildeten Teilsummen werden mit $T_1, T_2, \ldots$ bezeichnet. Da je zwei dieser Teilsummen kein gemeinsames Glied haben können und andererseits alle Glieder von F durch die $T_1, T_2, \ldots$ erfaßt werden, ist

$$F = T_1 + T_2 + \cdots + T_s.$$

Jedes T_ν ist aber eine Funktion von m^2 Größen mit den Eigenschaften I und II. Also ist nach Satz 8 bei entsprechender Zuteilung der Indices:

$$T_\nu = k_\nu D_\nu.$$

Zusatz: Für $m > n$ muß F identisch verschwinden, weil dann in der obigen Summe bei keinem Gliede die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ alle verschieden sein können.

§ 14. Satz von LAPLACE.

Trennt man in einer n-reihigen Determinante die ersten m Zeilen ab:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \\ \hdashline a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & \ldots & a_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

und betrachtet man D als Funktion der Elemente dieser ersten Zeilen, so sind I und II des § 13 erfüllt. Daher kann D unter Beibehaltung der dort gebrauchten Bezeichnungen in die Form:

$$D = k_1 D_1 + k_2 D_2 + \cdots + k_s D_s$$

gebracht werden, wo die $k_1, k_2, \ldots, k_s$ Konstante, d. h. unabhängig von den Elementen der ersten m Zeilen sind, sie können also nur noch von den letzten $n - m$ Zeilen abhängen. Es sei:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}.$$

Um k_1 zu bestimmen, setzten wir in D_1 die Glieder der Diagonalen $= 1$, alle übrigen Elemente der ersten m Zeilen $= 0$, dann wird einerseits $D = k_1$, andererseits (Satz 17):

$$D = \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \ldots & a_{m+1,n} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n,m+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

k_1 ist also die $(n - m)$-reihige Unterdeterminante, die aus den letzten $n - m$ Zeilen und denjenigen Spalten gebildet ist, die übrig bleiben, wenn die zu D_1 gebrauchten Spalten weggelassen werden. In der gleichen Weise erhält man $k_2, k_3, \ldots$ Es sei

$$D_\varrho = \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} & \cdots & a_{1\alpha_m} \\ a_{2\alpha_1} & a_{2\alpha_2} & \cdots & a_{2\alpha_m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m\alpha_1} & a_{m\alpha_2} & \cdots & a_{m\alpha_m} \end{vmatrix}.$$

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m.$$

Wir nehmen in D folgende Vertauschungen der Spalten vor: Die α_1^{te} Spalte kommt an die erste Stelle, das erfordert $\alpha_1 - 1$ Vertauschungen, dann soll die α_2^{te} Spalte an die zweite Stelle rücken, dazu sind $\alpha_2 - 2$ Vertauschungen notwendig usw. Insgesamt wechselt D

$$\begin{aligned} \sigma &= \alpha_1 - 1 + \alpha_2 - 2 + \cdots + \alpha_m - m \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m - \frac{m\,(m+1)}{2} \end{aligned}$$

mal das Vorzeichen und geht in $(-1)^\sigma D$ über. Die Bestimmung von k_ϱ geschieht jetzt ebenso wie bei k_1:

$$k_\varrho = (-1)^\sigma \begin{vmatrix} a_{m+1,\beta_1} & \cdots & a_{m+1,\beta\, n-m} \\ \vdots & & \cdot \\ a_{n\beta_1} & \cdots & a_{n\beta n-m} \end{vmatrix}$$

Hier sind die $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-m}$ auch so angeordnet, daß $\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_{n-m}$ ist, und diese Indices ergeben sich aus den Zahlen $1, 2, \ldots, n$, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ weggelassen werden. k_ϱ heißen die zu D_ϱ komplementären Unterdeterminanten. Schreiben wir $\overline{D}_\varrho$ statt k_ϱ, so lautet die Laplacesche Entwickelung einer Determinante:

Satz 19: $$D = D_1\overline{D}_1 + D_2\overline{D}_2 + \cdots + D_s\overline{D}_s.$$

In gleicher Weise gilt der Satz auch für die Spalten; man kann ferner statt der m ersten beliebige andere Reihen herausgreifen, die durch Vertauschungen an die erste Stelle gebracht werden können. Der Satz ist eine Verallgemeinerung der Entwicklung einer Determinante nach einer Reihe.

§ 15. Verallgemeinertes Multiplikationstheorem.

Wir gehen von zwei rechteckigen Systemen veränderlicher Größen mit m Zeilen und n Spalten ($m \leqq n$) aus:

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{matrix}$$

und wenden formal die Regel der zeilenweisen Multiplikation zweier Determinanten an. So entsteht eine m-reihige Determinante

$$C = |\,c_{ik}\,|_m, \quad c_{ik} = a_{i1}b_{k1} + a_{i2}b_{k2} + \cdots + a_{in}b_{kn}$$
$$i, k = 1, 2, \ldots, m.$$

Wie vorher bezeichne $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ eine Kombination der Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Die zugehörigen Determinanten seien

$$A_\varrho = \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} \ldots a_{1\alpha_m} \\ a_{2\alpha_1} & a_{2\alpha_2} \ldots a_{2\alpha_m} \\ \cdot & \cdot \;\; \cdots \;\; \cdot \\ a_{m\alpha_1} & a_{m\alpha_2} \ldots a_{m\alpha_m} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad B_\varrho = \begin{vmatrix} b_{1\alpha_1} & b_{1\alpha_2} \ldots b_{1\alpha_m} \\ b_{2\alpha_1} & b_{2\alpha_2} \ldots b_{2\alpha_m} \\ \cdot & \cdot \;\; \cdots \;\; \cdot \\ b_{m\alpha_1} & b_{m\alpha_2} \ldots b_{m\alpha_m} \end{vmatrix},$$

ϱ durchläuft die Werte $1, 2, \ldots, s$ und $s = \binom{n}{m}$. A_ϱ und B_ϱ sind also jedesmal aus den gleichen Spalten in der gleichen Reihenfolge gebildet.

Satz 20: $\qquad C = A_1 B_1 + A_2 B_2 + \cdots + A_s B_s.$

Beweis: Wie beim Beweise des Satzes 16 erkennt man, daß C, als Funktion der a_{ik} betrachtet, I und II erfüllt. Nach Satz 18 ist deshalb

$$C = k_1 A_1 + k_2 A_2 + \cdots + k_s A_s,$$

wo die k_ϱ nur noch von den b_{ik} abhängen. Um k_ϱ zu bestimmen, werden die Glieder der Diagonale aus A_ϱ gleich 1, alle übrigen a_{ik} gleich 0 gesetzt. Dann wird $A_\varrho = 1$, die anderen A_λ $(\lambda \neq \varrho)$ enthalten eine aus lauter Nullen bestehende Spalte. Also ist

$$C = k_\varrho.$$

Andererseits ist

$$c_{ik} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda} b_{k\lambda} = b_{k\alpha_i}$$

Denn in der i^{ten} Zeile der a_{ik}

$$a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$$

steht nur ein von Null verschiedenes Element, nämlich das in der Diagonale von A_ϱ vorkommende:

$$a_{i,\alpha_i} = 1.$$

Es bleibt also von der Summe nur das Glied mit $\lambda = \alpha_i$ übrig. Daher ist

$$C = k_\varrho = |\,c_{ik}\,|_m = |\,b_{k\alpha_i}\,|_m,$$

und diese Determinante ist nach Vertauschung von Zeilen und Spalten B_ϱ.

§ 16. Der Sylvestersche Satz.

In diesem Paragraphen wird die Ausführung der Umformungen im einzelnen dem Leser überlassen.

Eine r-reihige Determinante

$$A = | a_{\alpha\beta} |_r$$

werde durch Hinzufügen einer Zeile und einer Spalte „gerändert“:

$$D_{\varkappa\lambda} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & b_{1\lambda} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & b_{2\lambda} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & b_{r\lambda} \\ c_{\varkappa 1} & c_{\varkappa 2} & \dots & c_{\varkappa r} & d_{\varkappa\lambda} \end{vmatrix}.$$

Dann ist

$$D_{\varkappa\lambda} = d_{\varkappa\lambda} A - \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} A_{\alpha\beta}\, c_{\varkappa\beta}\, b_{\alpha\lambda},$$

wo die $A_{\alpha\beta}$ die Adjunkten zu $\alpha_{\alpha\beta}$ innerhalb A bezeichnen. Die Summe ist über alle r^2 Größen $A_{\alpha\beta}$ zu bilden. Die Einführung der Indices $\varkappa$ und λ wird sofort verständlich. Wir sagen, $D_{\varkappa\lambda}$ ist nach dem Rande entwickelt.

Um diese Identität zu beweisen, wird $D_{\varkappa\lambda}$ zuerst nach der letzten Spalte, danach werden die einzelnen Unterdeterminanten nach der letzten Zeile entwickelt.

Wir betrachten jetzt eine $(r+s)$-reihige Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & b_{11} & \dots & b_{1s} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & b_{r1} & \dots & b_{rs} \\ c_{11} & \dots & c_{1r} & d_{11} & \dots & d_{1s} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ c_{s1} & \dots & c_{sr} & d_{s1} & \dots & d_{ss} \end{vmatrix}.$$

Daraus können wir unter Beibehaltung der obigen Bezeichnung s^2 Größen $D_{\varkappa\lambda}$ und hieraus eine s-reihige Determinante $|D_{\varkappa\lambda}|_s$ bilden.

Satz 21. *Der Sylvestersche Satz lautet:*

$$| D_{\varkappa\lambda} |_s = D A^{s-1}.$$

α und β durchlaufen die Werte von 1 bis r, $\varkappa$ und λ die Werte von 1 bis s.

Zum Beweise sei folgende Anleitung gegeben: Wir setzen

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha\beta}\, b_{\alpha\lambda} = C_{\lambda\beta} \quad \text{und} \quad \sum_{\beta} A_{\alpha\beta}\, c_{\varkappa\beta} = B_{\varkappa\alpha},$$

dann wird

$$D_{\varkappa\lambda} = d_{\varkappa\lambda} A - \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta}\, c_{\varkappa\beta}\, b_{\alpha\lambda} = d_{\varkappa\lambda} A - \sum_{\beta} C_{\lambda\beta}\, c_{\varkappa\beta}.$$

Durch zeilenweise Multiplikation und unter Beachtung des Beispiels 6 § 12 und des Satzes 15 bestätige man folgende Identität:

$$(-1)^s D A^{r+s-1} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1r} & b_{11} \dots b_{1s} \\ \vdots \quad\; \vdots & \vdots \quad\; \vdots \\ a_{r1} \dots a_{rr} & b_{r1} \dots b_{rs} \\ c_{11} \dots c_{1r} & d_{11} \dots d_{1s} \\ \vdots \quad\; \vdots & \vdots \quad\; \vdots \\ c_{s1} \dots c_{sr} & d_{s1} \dots d_{ss} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} \dots A_{1r} & 0 & 0 \dots & 0 \\ \vdots \quad\; \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{r1} \dots A_{rr} & 0 & 0 \dots & 0 \\ C_{11} \dots C_{1r} & -A & 0 \dots & 0 \\ C_{21} \dots C_{2r} & 0 & -A \dots & 0 \\ \vdots \quad\; \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{s1} \dots C_{sr} & 0 & 0 \dots & -A \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A & 0 & \dots 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots A & 0 & \dots & 0 \\ B_{11} & B_{12} & \dots B_{1r} & -D_{11} & \dots & -D_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \dots B_{sr} & -D_{s1} & \dots & -D_{ss} \end{vmatrix} = (-1)^s A^r \,|\, D_{\varkappa\lambda} \,|\,.$$

§ 17. Aufgaben.

1. In einer Determinante seien diejenigen Elemente, die in den ersten r Zeilen und letzten s Spalten stehen, $= 0$; es ist zu zeigen, daß für $s > n - r$ die Determinante verschwindet.

2. Aus dem System

$$\begin{matrix} a_1 \, b_1 \, c_1 \, d_1 \\ a_2 \, b_2 \, c_2 \, d_2 \end{matrix}$$

lassen sich sechs zweireihige Unterdeterminanten bilden. Zur Abkürzung ist folgende Schreibweise zu empfehlen:

$$(a, b) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \quad (a, c) = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \text{usw.}$$

Es soll eine Beziehung zwischen diesen sechs Größen gefunden werden. (Zu einer vierreihigen Determinante ergänzen, dann die Laplacesche Entwicklung ansetzen!).

3. Die Gleichung

$$(a_1^2 + b_1^2)\,(a_2^2 + b_2^2) = (a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2$$

besagt, daß das Produkt der Summen zweier Quadrate wieder Summe zweier Quadrate ist. Man kann diese Identität verallgemeinern und in der Form

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = (a_1 \alpha_1 + b_1 \beta_1)\,(a_2 \alpha_2 + b_2 \beta_2) - \\ - (a_1 \alpha_2 + b_1 \beta_2)\,(a_2 \alpha_1 + b_2 \beta_1)$$

schreiben, die für $a_1 = \alpha_1$, $b_1 = \beta_1$, $a_2 = \alpha_2$ und $b_2 = \beta_2$ in die vorige übergeht.

Versteht man aber unter a_1 und α_1, a_2 und α_2 usw. je zwei konjugiert komplexe Größen, so zeigt diese Formel, daß auch das Produkt aus zwei Summen von je vier Quadraten wieder Summe von vier Quadraten ist.

Mit Hilfe des verallgemeinerten Multiplikationstheorems und des Ergebnisses der vorigen Aufgabe beweise man:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 + d_1\delta_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 + d_1\delta_2 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 + d_2\delta_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 + d_2\delta_2 \end{vmatrix}$$
$$= [(a,b) + (\gamma,\delta)]\,[(\alpha,\beta) + (c,d)] + [(a,c) + (\delta,\beta)]\,[(\alpha,\gamma) + (d,b)] +$$
$$+ [(a,d) + (\beta,\gamma)]\,[(\alpha,\delta) + (b,c)].$$

$a_1 = \alpha_1$, $b_1 = \beta_1$ usw. ergibt den Satz für Summen von vier Quadraten ohne Benutzung komplexer Größen. Nimmt man a_1 und α_1, a_2 und α_2 usw. konjugiert komplex, so erhalten wir den entsprechenden Satz für Summen von acht Quadraten.

Viertes Kapitel.

Matrizen.

§ 18. Rechnen mit Matrizen.

Sind n veränderliche Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und m veränderliche Größen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

miteinander verbunden, so spricht man von einer linearen Substitution, durch welche die y_i durch die x_k ersetzt werden können. Solche Umformungen kommen z. B. beim Übergang eines Koordinatensystems zu einem anderen vor. Die Bezeichnung der Veränderlichen ist für die lineare Substitution gleichgültig, es kommt nur auf das System der Koeffizienten an. Dieses schreibt man in der Form

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und nennt es eine Matrix aus m Zeilen und n Spalten. Man sagt auch: Die Matrix ist vom Typ (m, n). Ist $m = n$, so haben wir eine quadratische Matrix vor uns, in diesem Falle verstehen wir unter $|\mathfrak{A}|$ die Determinante $|a_{ik}|$. Wir bezeichnen die Matrizen mit großen deutschen Buchstaben. Während eine Determinante einen bestimmten Wert hat, hat es keinen Sinn, von dem Wert einer Matrix zu sprechen. So können zwei Determinanten einander gleich sein, während ihre Elemente verschieden sind, dagegen wird die Gleichheit zweier Matrizen folgendermaßen definiert:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$$

bedeutet, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind vom gleichen Typ, und jedes einzelne Element von $\mathfrak{A}$ ist gleich dem entsprechenden von $\mathfrak{B}$,

$$a_{ik} = b_{ik} \text{ für } i = 1, 2, \ldots, m \text{ und } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Durch das eine Gleichheitszeichen in $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ sind also mn einzelne Gleichungen ausgedrückt.

Sind alle $a_{ik} = 0$, so heißt $\mathfrak{A}$ die Nullmatrix; sie wird in Übereinstimmung mit Bieberbachs analytischer Geometrie mit $\mathfrak{O}$ bezeichnet.

Sind $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ und $\mathfrak{B} = (b_{ik})$ zwei Matrizen vom gleichen Typ, so läßt sich die Summe bilden. Man versteht unter

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$$

eine Matrix, die gebildet wird, indem man zu jedem Element von $\mathfrak{A}$ das entsprechende von $\mathfrak{B}$ addiert. Wird also $\mathfrak{C} = (c_{ik})$ gesetzt, so ist

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}.$$

Sind die beiden Matrizen nicht vom gleichen Typ, so hat das Symbol $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ keinen Sinn.

Die Addition ist kommutativ, d. h.

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}.$$

Ist λ eine Zahl, so versteht man unter $\lambda\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{A}\lambda$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \ldots \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \ldots \lambda a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \ldots \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Hier wird im Gegensatz zur Multiplikation einer Determinante jedes Element mit λ multipliziert. Für quadratische Matrizen gilt

$$|\lambda\mathfrak{A}| = \lambda^n |\mathfrak{A}|.$$

Wie man leicht erkennt, ist

$$\lambda(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \lambda\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A} + \mathfrak{O} = \mathfrak{A}, \quad 0 \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{O}.$$

Um auch das Produkt zweier Matrizen $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ und $\mathfrak{B} = (b_{ik})$ zu erklären, betrachten wir die linearen Substitutionen

$$\begin{array}{lcl} z_1 = a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + \cdots + a_{1n}\, y_n & & y_1 = b_{11}\, x_1 + b_{12}\, x_2 + \cdots + b_{1r}\, x_r \\ z_2 = a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + \cdots + a_{2n}\, y_n & \text{und} & y_2 = b_{21}\, x_1 + b_{22}\, x_2 + \cdots + b_{2r}\, x_r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_m = a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \cdots + a_{mn} y_n & & y_n = b_{n1}\, x_1 + b_{n2}\, x_2 + \cdots + b_{nr}\, x_r. \end{array}$$

Vermöge $\mathfrak{A}$ werden $z_1, z_2, \ldots, z_m$ als lineare Funktionen der $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dargestellt. $\mathfrak{B}$ gestattet, die $y_1, y_2, \ldots, y_n$ durch $x_1, x_2, \ldots, x_r$ zu ersetzen. Dadurch werden $z_1, z_2, \ldots, z_m$ lineare Funktionen der $x_1, x_2, \ldots, x_r$:

$$\begin{array}{l} z_1 = c_{11}\, x_1 + c_{12}\, x_2 + \cdots + c_{1r}\, x_r \\ z_2 = c_{21}\, x_1 + c_{22}\, x_2 + \cdots + c_{2r}\, x_r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_m = c_{m1}\, x_1 + c_{m2}\, x_2 + \cdots + c_{mr}\, x_r \end{array}, \quad c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{in} b_{nk}.$$

Man beachte, daß in den $c_{ik} = \sum_{\varrho=1}^{n} a_{i\varrho} b_{\varrho k}$ der veränderliche Index ϱ bei $a_{i\varrho}$ an zweiter, bei $b_{\varrho k}$ an erster Stelle steht. Daher ist c_{ik} das innere Produkt der i^{ten} Zeile aus $\mathfrak{A}$ mit der k^{ten} Spalte aus $\mathfrak{B}$. Die Matrix $\mathfrak{C} = (c_{ik})$ heißt das Produkt

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}.$$

Es wurde gebildet, indem zwei nacheinander auszuführende Substitutionen durch eine ersetzt wurden.

Die beiden Faktoren des Produktes können nicht beliebig gewählt werden. Damit die Bildung der inneren Produkte c_{ik} möglich ist, muß die Anzahl der Variabelen y in beiden Substitutionen die gleiche sein, oder: Die Anzahl der Spalten von $\mathfrak{A}$ muß gleich der Anzahl der Zeilen von $\mathfrak{B}$ sein. Nur für diesen Fall ist das Produkt zweier Matrizen erklärt. J. SCHUR bezeichnete in seinen Vorlesungen solche Matrizen als „verkettet", genauer: $\mathfrak{A}$ ist mit $\mathfrak{B}$ verkettet, wenn $\mathfrak{A}$ vom Typ (m, n) und $\mathfrak{B}$ vom Typ (n, r) ist. Das Produkt ist dann vom Typ (m, r). Wenn $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$ verkettet ist, braucht nicht auch $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}$ verkettet zu sein. Die Ausdrucksweise gilt auch für Produkte aus mehreren Faktoren, z. B. sind vier Matrizen verkettet, wenn sie der Reihe nach vom Typ (m, n), (n, r), (r, s), (s, t) sind; ihr Produkt ist dann vom Typ (m, t). Für quadratische Matrizen gleicher Reihenzahl gilt der

Satz 22. *Die Determinante eines Produktes ist gleich dem Produkt der Determinanten der einzelnen Faktoren.*

Denn das Produkt der Determinanten kann ebenfalls durch Multiplikation von Zeilen mit Spalten gebildet werden.

Für quadratische Matrizen ist auch die Potenz, etwa $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}$ erklärt.

Mitunter schreibt man auch Matrizen, deren Elemente selber wieder Matrizen sind. Die Multiplikationsregel bleibt dabei erhalten, z. B.

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{A}' & \mathfrak{B}' \\ \mathfrak{C}' & \mathfrak{D}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}\mathfrak{C}' & \mathfrak{A}\mathfrak{B}' + \mathfrak{B}\mathfrak{D}' \\ \mathfrak{C}\mathfrak{A}' + \mathfrak{D}\mathfrak{C}' & \mathfrak{C}\mathfrak{B}' + \mathfrak{D}\mathfrak{D}' \end{pmatrix}.$$

Natürlich müssen die Rechtecke aneinander passen, d. h. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ müssen gleich viel Zeilen haben usw. Ferner müssen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}'$ usw. verkettet sein.

Bekanntlich ist das Produkt zweier Zahlen dann und nur dann $= 0$, wenn einer der Faktoren verschwindet. Dieses Gesetz gilt für das Rechnen mit Matrizen nicht. Es kann

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{O}$$

sein, während $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beide von der Nullmatrix verschieden sind. Z. B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Multiplikation von Matrizen ist a s s o z i a t i v:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C},$$

d. h. wenn Produkte von drei oder mehreren Matrizen zu bilden sind, so kann man erst $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ berechnen, dann rechts mit $\mathfrak{C}$ multiplizieren, oder erst $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ bilden, dann links mit $\mathfrak{A}$ multiplizieren. Um einzusehen, daß das Ergebnis das gleiche ist, stelle man sich vor, daß drei lineare Substitutionen nacheinander ausgeführt werden sollen. Gewisse Variabele u mögen durch v, diese durch x, diese durch y ersetzt werden. Die lineare Substitution, durch die die u als Funktionen der y dargestellt werden, kann entweder erhalten werden, indem man erst die u als Funktion der x ausdrückt, danach die x durch die y ersetzt — diese Rechnung entspricht dem Symbol $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,\mathfrak{C}$ — oder man stellt erst die v als Funktionen der y dar und setzt diese Ausdrücke in die Summen u ein. Das Endergebnis, in dem die u als Funktionen der x erscheinen, ist in beiden Fällen dasselbe.

Wir wollen das assoziative Gesetz auch durch direkte Bildung des allgemeinen Gliedes d_{ik} von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ beweisen. Es sei

$$\mathfrak{A} = (a_{ik}), \quad \mathfrak{B} = (b_{ik}), \quad \mathfrak{C} = (c_{ik}), \quad \mathfrak{A}\mathfrak{B} = (\alpha_{ik}), \quad \mathfrak{B}\mathfrak{C} = (\beta_{ik}).$$

Dann ist

$$\alpha_{ik} = \sum_{\varrho} a_{i\varrho} b_{\varrho k}, \quad \beta_{ik} = \sum_{\sigma} b_{i\sigma} c_{\sigma k},$$

$$d_{ik} = \sum_{\sigma} \alpha_{i\sigma} c_{\sigma k} = \sum_{\sigma} \Big(\sum_{\varrho} a_{i\varrho} b_{\varrho\sigma}\Big) c_{\sigma k} = \sum_{\varrho,\sigma} a_{i\varrho} b_{\varrho\sigma} c_{\sigma k} = \sum_{\varrho} a_{i\varrho} \sum_{\sigma} b_{\varrho\sigma} c_{\sigma k}$$
$$= \sum_{\varrho} a_{i\varrho} \beta_{\varrho k}.$$

Die Multiplikation ist nicht kommutativ, d. h. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ brauchen nicht gleich zu sein. Das geht schon daraus hervor, daß $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$ verkettet sein kann, aber deshalb $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}$ nicht verkettet zu sein braucht. Für quadratische Matrizen kann man leicht Beispiele bilden, bei denen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ verschieden ist. Ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$, so nennt man solche Matrizen vertauschbar. Z. B. ist

$$\mathfrak{A}^2 \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^3 = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^2.$$

Die quadratische Matrix

$$\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ . & . & \ldots . \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{pmatrix}_n$$

heißt Einheitsmatrix, und es ist — Verkettung vorausgesetzt —

$$\mathfrak{E}\mathfrak{A} = \mathfrak{A} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}\mathfrak{E} = \mathfrak{A}.$$

Die Multiplikation ist distributiv, d. h.

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\,\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}\,(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}.$$

Beweis: $\sum\limits_{\varrho}(a_{i\varrho} + b_{i\varrho})\,c_{\varrho k} = \sum\limits_{\varrho} a_{i\varrho}\,c_{\varrho k} + \sum\limits_{\varrho} b_{i\varrho}\,c_{\varrho k}$

und $\sum\limits_{\varrho} a_{i\varrho}\,(b_{\varrho k} + c_{\varrho k}) = \sum\limits_{\varrho} a_{i\varrho}\,b_{\varrho k} + \sum\limits_{\varrho} a_{i\varrho}\,c_{\varrho k}\,.$

Quadratische Matrizen des gleichen Typs haben demnach die Eigenschaft, daß Summe und Produkt erklärt sind und wieder eine Matrix des gleichen Typs ergeben. Die Addition ist kommutativ und assoziativ, die Multiplikation assoziativ und distributiv. Eine Menge von Größen, denen diese Eigenschaften zukommen, bezeichnet man als einen Ring.

§ 19. Cramersche Regel; inverse, transponierte, orthogonale Matrizen.

Matrizen, die nur aus einer Spalte bestehen, werden auch Vektoren genannt; wir werden sie mit kleinen deutschen Buchstaben bezeichnen:

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Diese Symbolik ermöglicht, die lineare Substitution

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}\;x_1 + a_{12}\;x_2 + \cdots + a_{1n}\;x_n \\ y_2 &= a_{21}\;x_1 + a_{22}\;x_2 + \cdots + a_{2n}\;x_n \\ &\cdot\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \\ y_m &= a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n \end{aligned}$$

in der abgekürzten Form

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$$

zu schreiben, wo $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ vom Typ (m, n) und $\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ ebenso wie $\mathfrak{y}$ aus m Zeilen und einer Spalte besteht.

Wir wollen jetzt $\mathfrak{A}$ als quadratisch voraussetzen und durch Umformung die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als lineare Funktionen der $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ausdrücken. Zu diesem Zweck multiplizieren wir die n Gleichungen der Reihe nach mit den Adjunkten $A_{1k}, A_{2k}, \ldots, A_{nk}$ der k^{ten} Spalte von $\mathfrak{A}$ und addieren. Dann ist nach Satz 15

$$y_1 A_{1k} + y_2 A_{2k} + \cdots + y_n A_{nk} = A x_k,$$

wo $A = |\mathfrak{A}|$ gesetzt ist (vgl. § 9).

Entscheidend ist für die weitere Rechnung, ob A verschwindet oder nicht. Ist $A \neq 0$, so kann man dividieren, und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind als lineare Funktionen der $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dargestellt.

Diese Rechnung läßt noch eine andere Deutung zu. Wir fassen

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$$

als ein System von n Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auf, während $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und a_{ik} gegebene Größen sind.

Der hier behandelte Fall $m = n$ und $A \neq 0$ wird Cramerscher Hauptfall genannt. In der Lösung des Systems erscheinen die Unbekannten als Quotient zweier Determinanten; die Nenner sind überall A, und die Zähler

$$A_{1k} y_1 + A_{2k} y_2 + \cdots + A_{nk} y_n$$

können auch in Determinantenform geschrieben werden, indem in A die k^{te} Spalte durch $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ersetzt wird:

$$x_k \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & y_1 & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & y_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Die angegebene Umformung zeigt: Wenn das Gleichungssystem überhaupt eine Lösung besitzt, so kann es nur diese sein. Daß die errechneten Werte für $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auch wirklich die Gleichungen erfüllen, ist nicht selbstverständlich, sondern muß erst durch Einsetzen gezeigt werden. Setzen wir

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{B}\mathfrak{y},$$

so ist $\mathfrak{B}$ aus den Adjunkten von a_{ik} mit Vertauschung von Zeilen und Spalten und nach Division durch A gebildet:

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \frac{1}{A}\begin{pmatrix} A & 0 \ldots 0 \\ 0 & A \ldots 0 \\ . & . \ldots . \\ 0 & 0 \ldots A \end{pmatrix} = \mathfrak{E}.$$

Denn dieses ist Satz 15 in anderer Form.

Wir setzen für $\mathfrak{x}$ den gefundenen Vektor ein und erhalten die Identität

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{y} = \mathfrak{E}\mathfrak{y} = \mathfrak{y}.$$

Die Schreibweise eines Gleichungssystems im Matrizenkalkül führt dazu, nicht mehr von n Gleichungen mit n Unbekannten zu sprechen, sondern von einer Gleichung mit einer Unbekannten, in der die gegebenen Größen Matrizen, die gesuchte ein Vektor ist.

$\mathfrak{B}$ heißt die zu $\mathfrak{A}$ inverse Matrix, sie wird von jetzt ab mit $\mathfrak{A}^{-1}$ bezeichnet. Geht man nicht von der Umkehrung einer linearen Substitution aus, so erklärt man $\mathfrak{A}^{-1}$ als diejenige Matrix, die der Bedingung

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{E} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$$

genügt. Ist $|\mathfrak{A}| = 0$, so kann keine inverse Matrix existieren, weil nach Satz 22

$$|\mathfrak{A}|\,|\mathfrak{A}^{-1}| = |\mathfrak{E}| = 1 \qquad \text{ist.}$$

Es kann auch nur eine solche Matrix geben, denn angenommen

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{E} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{E},$$

so muß

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1) = \mathfrak{O},$$
$$\mathfrak{B}\mathfrak{A}(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1) = \mathfrak{B}\mathfrak{O} = \mathfrak{O},$$
$$\mathfrak{E}(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1) = \mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{O},$$

oder

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1$$

sein.

Die Lösung des Gleichungssystems

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$$

gestaltet sich jetzt formal so, als ob $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{x}$ Zahlen bedeuten, es wird durch $\mathfrak{A}$ dividiert! Nur dürfen wir beim Rechnen mit Matrizen nicht von einer Division sprechen noch ein Symbol $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ schreiben, weil $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1}$ unterschieden werden müssen. Man sagt deshalb: zur Lösung der Gleichung $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ wird links mit $\mathfrak{A}^{-1}$ multipliziert.

Für $A = 0$ existiert keine inverse Matrix, aber das Gleichungssystem kann bei passender Wahl der $y_1, y_2, \ldots, y_n$ Lösungen besitzen, wie im fünften Kapitel gezeigt werden soll.

Für die Inverse eines Produktes gilt

Satz 23:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^{-1} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1}.$$

Beweis: Weil

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{E}$$

ist, ist $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1}$ die Inverse zu $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

Mit $\mathfrak{A}'$ wird die Matrix bezeichnet, die durch Vertauschung von Zeilen und Spalten aus $\mathfrak{A}$ entsteht; sie heißt die transponierte Matrix. Wie bei den Inversen gilt auch für die Transponierte eines Produktes der

Satz 24:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})' = \mathfrak{B}'\mathfrak{A}'.$$

Beweis: Das Element der i^{ten} Zeile und k^{ten} Spalte von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist:

$$c_{ik} = \sum_{\varrho} a_{i\varrho}\, b_{\varrho k}.$$

Also steht c_{ik} in $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})'$ in der k^{ten} Zeile und i^{ten} Spalte. Das an gleicher Stelle stehende Element aus $\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'$ heißt

$$\sum_{\varrho} b_{\varrho k}\, a_{i\varrho} = c_{ik},$$

weil infolge der Vertauschung von Zeilen und Spalten bei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ jetzt der erste Index die Spalte und der zweite die Zeile angibt.

Zu erwähnen ist noch

$$(\mathfrak{A}')' = \mathfrak{A} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}'^{-1} = (\mathfrak{A}^{-1})'.$$

$\mathfrak{A}'^{-1}$ wird die zu $\mathfrak{A}$ kontragrediente Matrix genannt.

Ist $a_{ik} = a_{ki}$, so wird $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ und heißt symmetrisch.

Ist $a_{ik} = -a_{ki}$, so heißt $\mathfrak{A}$ schief-symmetrisch.

Sind $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zwei Vektoren gleichen Typs $(n, 1)$, so heißt, wie bereits erwähnt

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{y} = (x_1 x_2 \ldots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

das innere Produkt. Es ist eine nur aus einem Element bestehende Matrix und wird deshalb eine skalare Größe genannt. Weil sie mit ihrer Transponierten identisch ist, ist

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{y} = (\mathfrak{x}'\mathfrak{y})' = \mathfrak{y}'\mathfrak{x}.$$

Ist $\mathfrak{x}'\mathfrak{y} = 0$, so heißen die beiden Vektoren orthogonal zueinander, man sagt auch, sie stehen aufeinander senkrecht, eine Ausdrucksweise, die erst bei den geometrischen Anwendungen verständlich wird (vgl. Seite 55).

Eine Matrix wird orthogonal genannt, wenn sie quadratisch ist und das innere Produkt je zweier verschiedener Zeilen $= 0$ und jeder Zeile mit sich selbst $= 1$ ist:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{lk}\, a_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq l \\ 1 & \text{für } i = l \end{cases}.$$

Diese Beziehungen sind gleichbedeutend mit

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}' = \mathfrak{E} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}^{-1}.$$

Man kann auch sagen, eine Matrix ist dann orthogonal, wenn die Inverse mit der Transponierten übereinstimmt.

Wird die letzte Gleichung rechts mit $\mathfrak{A}$ multipliziert, so erhält man

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{A} = \mathfrak{E},$$

d. h. auch $\mathfrak{A}'$ ist orthogonal oder aus der Orthogonalität der Zeilen folgt die der Spalten und umgekehrt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, a_{il} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \\ 1 & \text{für } k = l \end{cases}.$$

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ orthogonal, so ist es auch das Produkt, weil

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B})' = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}'\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}\mathfrak{A}' = \mathfrak{E}.$$

Aus $\mathfrak{A}\mathfrak{A}' = \mathfrak{E}$ folgt

$$|\mathfrak{A}|\,|\mathfrak{A}'| = |\mathfrak{E}| = |\mathfrak{A}|^2 = 1 \quad \text{oder} \quad |\mathfrak{A}| = \pm 1.$$

Werden die beiden Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ vermöge einer orthogonalen Substitution durch $\bar{\mathfrak{x}}$ und $\bar{\mathfrak{y}}$ ersetzt:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\bar{\mathfrak{x}}, \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{A}\bar{\mathfrak{y}},$$

so bleibt das innere Produkt unverändert. Denn

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{y} = \bar{\mathfrak{x}}'\mathfrak{A}'\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{y}} = \bar{\mathfrak{x}}'\bar{\mathfrak{y}}.$$

Dasselbe gilt auch, wenn statt $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{y}}$ die Differenzen zweier Vektoren $\mathfrak{x} - \mathfrak{a}$, $\mathfrak{y} - \mathfrak{b}$, $\bar{\mathfrak{x}} - \bar{\mathfrak{a}}$, $\bar{\mathfrak{y}} - \bar{\mathfrak{b}}$ genommen werden:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{x} - \mathfrak{a})'(\mathfrak{y} - \mathfrak{b}) &= (\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{A}\bar{\mathfrak{a}})'(\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{y}} - \mathfrak{A}\bar{\mathfrak{b}}) = (\bar{\mathfrak{x}} - \bar{\mathfrak{a}})'\mathfrak{A}'\mathfrak{A}(\bar{\mathfrak{y}} - \bar{\mathfrak{b}}) \\ &= (\bar{\mathfrak{x}} - \bar{\mathfrak{a}})'(\bar{\mathfrak{y}} - \bar{\mathfrak{b}}).\end{aligned}$$

Man sagt auch, das innere Produkt ist **invariant** gegenüber orthogonalen Transformationen.

Eine weitere Invariante wird folgendermaßen erhalten: Aus den Elementen der $n + 1$ Vektoren

$$\mathfrak{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1,1} \\ x_{n+1,2} \\ \vdots \\ x_{n+1,n} \end{pmatrix}.$$

bilden wir die $(n+1)$-reihige Determinante

$$D = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n+1,1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n+1,2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{n+1,n} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Wir machen eine orthogonale Substitution:

$$\mathfrak{x}_i = \mathfrak{A}\,\mathfrak{y}_i.$$

Das sind $n(n+1)$ Gleichungen, die, ausführlich geschrieben, folgende Form haben:

$$\begin{aligned} x_{i1} &= a_{11}\,y_{i1} + a_{12}\,y_{i2} + \dots + a_{1n}\,y_{in} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{ik} &= a_{k1}\,y_{i1} + a_{k2}\,y_{i2} + \dots + a_{kn}\,y_{in}. \qquad (i = 1, 2, \dots, n+1) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{in} &= a_{n1}\,y_{i1} + a_{n2}\,y_{i2} + \dots + a_{nn}\,y_{in} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich folgende Identität:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \; \begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} & \dots & y_{n+1,1} \\ y_{12} & y_{22} & \dots & y_{n+1,2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ y_{1n} & y_{2n} & \dots & y_{n+1,n} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

die man durch Multiplikation von Zeilen und Spalten leicht bestätigt. Der erste Faktor ist gleich $|\mathfrak{A}| = \pm 1$, und der zweite ist aus den $\mathfrak{y}_i$ ebenso gebildet wie D aus den $\mathfrak{x}_i$.

Wir fassen diese Besonderheiten der orthogonalen Matrizen zusammen:

Satz 25. *Wenn $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}^{-1}$ ist, heißt die Matrix orthogonal und hat folgende Eigenschaften:*

a) Auch die transponierte ist orthogonal.

b) Die inneren Produkte je zweier verschiedener paralleler Reihen sind $= 0$ und jeder Reihe mit sich selbst $= 1$.

c) Die Determinante ist $= \pm 1$.

d) Produkte orthogonaler Matrizen sind wieder orthogonal.

e) Das innere Produkt zweier Vektoren ist gegenüber einer orthogonalen Substitution invariant.

f) Dasselbe gilt für die oben erklärte Determinante D, wenn $|\mathfrak{A}| = +1$ ist, dagegen geht D in $-D$ über, wenn $|\mathfrak{A}| = -1$ ist.

Werden Vektoren in der Weise verändert, daß überall ein konstanter Vektor $\mathfrak{c}$ addiert wird, so spricht man von einer **Parallelverschiebung** des Koordinatensystems. Dadurch bleiben die Differenzen

$$\mathfrak{x} - \mathfrak{a} = \mathfrak{x} + \mathfrak{c} - (\mathfrak{a} + \mathfrak{c})$$

unverändert, also ist das innere Produkt in der Form

$$(\mathfrak{x} - \mathfrak{a})'(\mathfrak{y} - \mathfrak{b})$$

invariant bei einer Parallelverschiebung.

Ebenso verhält sich D, weil

$$\begin{vmatrix} x_{11} + c_1 & x_{21} + c_1 & \dots & x_{n+1,1} + c_1 \\ x_{12} + c_2 & x_{22} + c_2 & \dots & x_{n+1,2} + c_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_{1n} + c_n & x_{2n} + c_n & \dots & x_{n+1,n} + c_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n+1,1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n+1,2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{n+1,n} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

ist. (Letzte Zeile mit c_i multiplizieren und von der i^{ten} subtrahieren.)

§ 20. Aufgaben.

1. Folgendes Gleichungssystem soll mit Hilfe der Cramerschen Regel gelöst werden:

$$\begin{aligned} 3x - y - 2z + u &= 1 \\ 2x + y + z + 3u &= 6 \\ -x + 3y + 2z + 4u &= 1 \\ -2x - 2y + 3z - 2u &= 7. \end{aligned}$$

2. Durch Bildung der inversen Matrix soll folgende lineare Substitution umgekehrt werden:

$$\begin{aligned} y_1 &= 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ y_2 &= 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ y_3 &= 7x_1 + 2x_2 + 4x_3. \end{aligned}$$

3. Es sei

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix}$$

eine Matrix, in der alle außerhalb der Hauptdiagonale stehenden Elemente verschwinden. Die Größen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ sollen alle untereinander verschieden sein und keine von ihnen soll verschwinden. Es sollen alle Matrizen $\mathfrak{A}$ angegeben werden, für die

$$\mathfrak{A}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\mathfrak{A}$$

ist.

4. Die 6 Matrizen

$$\mathfrak{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{S}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -11 \\ -2 & 7 & -12 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}_6 = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -12 \\ -2 & 7 & -12 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

haben die Eigenschaft, daß das Produkt von je zweien wieder eine der 6 Matrizen ist. Man sagt auch, sie bilden eine endliche Gruppe. Aufgabe: Die Gruppentafel ist aufzustellen, d. h. eine quadratische Tafel aus 6 Zeilen und 6 Spalten ist auszufüllen, die Reihen sind mit 1 bis 6 numeriert, und es wird z. B. in das Feld der zweiten Zeile und dritten Spalte $\mathfrak{S}_4$ eingetragen, weil $\mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}_4$ ist.

§ 21. Geometrische Anwendungen.

(Vgl. Bieberbach, Analyt. Geometrie § 11 und 12.)

Es sind X_1 und X_2 bzw. X_1, X_2 und X_3 die aufeinander senkrechten Koordinatenachsen der Ebene bzw. des Raumes. Es werden in den folgenden Betrachtungen nur rechtwinklige Koordinatensysteme zugrunde gelegt. Die Koordinaten eines Punktes werden mit x_1, x_2 bzw. x_1, x_2, x_3 bezeichnet. Anfangspunkt ist O, und die Strecke

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

ist der stets positiv zu nehmende Abstand des Punktes P vom Anfangspunkt.

Jedem Punkte ist, je nachdem wir Geometrie der Ebene oder des Raumes treiben, ein Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ zugeordnet, den wir mit $\overrightarrow{OP}$ oder wie vorher mit $\mathfrak{x}$ bezeichnen. Ist $\mathfrak{y} = \overrightarrow{OQ}$ ein zweiter Vektor, so wird durch P und Q der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ bestimmt, und es ist

$$\overrightarrow{PQ} = \mathfrak{y} - \mathfrak{x} \quad \text{oder} \quad \overrightarrow{QP} = \mathfrak{x} - \mathfrak{y}.$$

Es besteht die Identität

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QO} = \mathfrak{O}.$$

Denn es ist $\overrightarrow{QO} = -\overrightarrow{OQ} = -\mathfrak{y}$.

Ein Punkt P kann auch durch seinen Abstand r vom Nullpunkt und durch die Richtung des Vektors $\overrightarrow{OP}$ gegeben sein. Diese ist durch die drei Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, die $\overrightarrow{OP}$ mit den Achsen bildet, festgelegt, und es ist

$$x_1 = r\cos\alpha_1, \quad x_2 = r\cos\alpha_2, \quad x_3 = r\cos\alpha_3.$$

Für die Ebene ist $\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$ und $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. Also

$$x_1 = r\cos\alpha_1, \quad x_2 = r\sin\alpha_1.$$

Wir führen eine Drehung der Koordinatenachsen in der Ebene um den Winkel φ (Abb. 1) aus. In bezug auf das neue System habe P die Koordinaten y_1, y_2. Der Abstand r bleibt, α_1 geht in β_1 über; dann ist

$$\alpha_1 = \beta_1 + \varphi$$

und

$$x_1 = r\cos(\beta_1 + \varphi) = r\cos\beta_1\cos\varphi - r\sin\beta_1\sin\varphi = y_1\cos\varphi - y_2\sin\varphi,$$
$$x_2 = r\sin(\beta_1 + \varphi) = r\cos\beta_1\sin\varphi + r\sin\beta_1\cos\varphi = y_1\sin\varphi + y_2\cos\varphi.$$

Oder

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

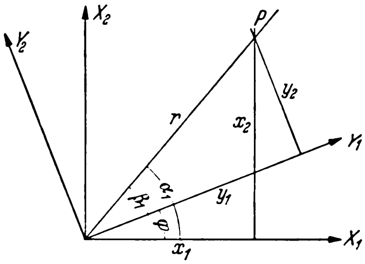


Abb. 1.

Die hier auftretende Matrix ist orthogonal. Denn die Umkehrung der Substitution ergibt

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix ist also mit der transponierten identisch, sie entsteht, wenn φ durch $-\varphi$ ersetzt wird; das bedeutet, die Drehung wird rückgängig gemacht.

Die Form

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

gibt die Möglichkeit, durch beliebige Wahl des Winkels zweireihige orthogonale Matrizen anzugeben. Man nennt einen solchen Ausdruck eine Parameterdarstellung und die veränderliche Größe φ den Parameter.

Es fragt sich, ob in dieser Darstellung alle derartige Matrizen enthalten sind; das ist für solche mit der Determinante $+1$ richtig.

Denn es sei $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ orthogonal, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$ und die a_{ik} reell. Dann gibt es, weil $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$ ist, stets einen Winkel φ, so daß

$$a_{11} = \cos\varphi \quad \text{und} \quad a_{12} = -\sin\varphi$$

wird, und aus

$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = a_{21}\cos\varphi - a_{22}\sin\varphi = 0$$

folgt

$$a_{21} = \lambda\sin\varphi \quad \text{und} \quad a_{22} = \lambda\cos\varphi,$$

wo λ mit Rücksicht auf $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$ den Wert 1 haben muß.

Um dreireihige orthogonale Matrizen zu erhalten, betrachten wir Drehungen im Raum. Sie werden in drei Schritten ausgeführt. Wir drehen zunächst nur die X_2X_3-Ebene, wobei die X_1-Achse festgehalten wird. y_1, y_2, y_3 sind die Koordinaten in bezug auf das so veränderte System, dann ist

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2\cos\varphi + x_3\sin\varphi \\ y_3 &= -x_2\sin\varphi + x_3\cos\varphi \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Dreht man danach um die soeben entstandene Y_2-Achse, so wird, wenn χ der Drehungswinkel ist,

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\chi & 0 & \sin\chi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\chi & 0 & \cos\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Schließlich wird die Z_3-Achse festgehalten und um ψ gedreht:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

u_1, u_2, u_3 sind die Koordinaten in bezug auf das durch drei Drehungen entstandene System; sie lassen sich durch Zusammensetzen dieser drei Transformationen durch x_1, x_2, x_3 ausdrücken:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\chi & 0 & \sin\chi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\chi & 0 & \cos\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Die so gebildete Matrix ist orthogonal, weil sie Produkt aus drei orthogonalen Matrizen ist. φ, χ und ψ heißen Eulersche Winkel. Sie sind die Parameter dieser Darstellung von dreireihigen orthogonalen Matrizen.

Indem wir zugleich auf n-reihige Matrizen erweitern, werden wir zeigen, daß durch eine solche Parameterdarstellung alle orthogonalen Matrizen mit positiver Determinante erhalten werden.

Wir verstehen unter $\mathfrak{P}_{ik}(\varphi)$ $(i < k)$ folgende Matrix: In der i^{ten} Zeile und i^{ten} Spalte steht $\cos\varphi$, ebenso in der k^{ten} Zeile und k^{ten} Spalte. Das Element der i^{ten} Zeile und k^{ten} Spalte ist $\sin\varphi$ und das der k^{ten} Zeile und i^{ten} Spalte ist $-\sin\varphi$. Alle übrigen Elemente sind, sofern sie nicht in der

Hauptdiagonale stehen, $= 0$, und die letzteren $= 1$. Alle $\mathfrak{P}_{ik}$ sind orthogonal, ihre Determinante ist $+1$, und es gilt:

$$\mathfrak{P}'_{ik}(\varphi) = \mathfrak{P}_{ik}^{-1}(\varphi) = \mathfrak{P}_{ik}(-\varphi).$$

In dieser Schreibweise erhält die oben angegebene dreireihige Matrix die Form:

$\mathfrak{P}_{12}(\psi)\,\mathfrak{P}_{13}(\chi)\,\mathfrak{P}_{23}(\varphi)$ und die inverse: $\mathfrak{P}_{23}(-\varphi)\,\mathfrak{P}_{13}(-\chi)\,\mathfrak{P}_{12}(-\psi)$.

Satz 26. *Jede n-reihige quadratische Matrix $\mathfrak{S} = (s_{ik})$ läßt sich auf die Form bringen:*

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{P}_{12}\,\mathfrak{P}_{13}\ldots\mathfrak{P}_{1n}\,\mathfrak{P}_{23}\,\mathfrak{P}_{24}\ldots\mathfrak{P}_{2n}\ldots\mathfrak{P}_{n-1,n}\cdot\mathfrak{B}.$$

Jedes $\mathfrak{P}_{ik}$ hängt noch von einem Winkel φ_{ik} ab, und diese Größen können so bestimmt werden, daß alle unterhalb der Hauptdiagonale von $\mathfrak{B}$ stehende Elemente verschwinden; also

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\ldots b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23}\ldots b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33}\ldots b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdots\;\cdot \\ 0 & 0 & 0\;\ldots b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Außerdem kann man noch erreichen, daß $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{n-1,n-1}$ nicht negativ ausfallen.

Die Anzahl der verfügbaren Winkel φ_{ik} ist

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Andererseits treten in $\mathfrak{B}$ ebenso viele Nullen auf. D. h. die Zahl der Bedingungen ist ebenso groß wie die Zahl der zu bestimmenden Größen.

Beweis: Wir bringen durch linksseitige Multiplikation der Reihe nach die Faktoren $\mathfrak{P}_{ik}$ auf die andere Seite und bestimmen die Winkel. φ_{12} wird so gewählt, daß in

$$\mathfrak{P}_{12}^{-1}(\varphi_{12})\,\mathfrak{S} = \mathfrak{T} = (t_{ik})$$

das Element $t_{21} = 0$ wird. Es wird durch Multiplikation der zweiten Zeile von $\mathfrak{P}_{12}(-\varphi_{12})$ mit der ersten Spalte von $\mathfrak{S}$ erhalten:

$$t_{21} = s_{11}\sin\varphi_{12} + s_{21}\cos\varphi_{12} = 0.$$

Ist $s_{11} = 0$, so wird $\varphi_{12} = \frac{\pi}{2}$, sonst

$$\operatorname{tg}\varphi_{12} = -\frac{s_{21}}{s_{11}}.$$

Jetzt wird φ_{13} in gleicher Weise ermittelt. In

$$\mathfrak{P}_{13}(-\varphi_{13})\,\mathfrak{T}$$

soll das Element der dritten Zeile und ersten Spalte verschwinden, also:

$$t_{11}\sin\varphi_{13} + t_{31}\cos\varphi_{13} = 0$$

dient zur Bestimmung von φ_{13}.

Wir beachten noch, daß $t_{21} = 0$ war und auch bei dieser Umformung nicht verändert wird, denn die Multiplikation der zweiten Zeile aus $\mathfrak{P}_{13}(-\varphi_{13})$ mit der ersten Spalte aus $\mathfrak{T}$ ergibt

$$0 \cdot t_{11} + 1 \cdot t_{21} + 0 \cdot t_{31} + \cdots + 0 \cdot t_{n1} = 0.$$

In der Weise fortfahrend, kommen wir zu einer Matrix

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{P}_{1n}^{-1} \mathfrak{P}_{1,n-1}^{-1} \ldots \mathfrak{P}_{13}^{-1} \mathfrak{P}_{12}^{-1} \mathfrak{S} = (c_{ik}),$$

bei der $c_{21} = c_{31} = \cdots = c_{n1} = 0$ ist. Es soll aber noch $c_{11} \geqq 0$ sein. Dies wird bei der letzten Multiplikation erreicht. Wird die vorletzte Matrix mit (r_{ik}) bezeichnet, so haben wir zuletzt folgendes Produkt:

$$\mathfrak{P}_{1n}(-\varphi_{1n})(r_{ik}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_{1n} & 0 \ldots 0 & -\sin\varphi_{1n} \\ 0 & 1 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots 1 & 0 \\ \sin\varphi_{1n} & 0 \ldots 0 & \cos\varphi_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & \ldots \\ 0 & \\ \cdot & \\ 0 & \\ r_{n1} & \ldots \end{pmatrix} = (c_{ik})$$

$$c_{11} = r_{11}\cos\varphi_{1n} - r_{n1}\sin\varphi_{1n} \geqq 0$$
$$c_{n1} = r_{11}\sin\varphi_{1n} + r_{n1}\cos\varphi_{1n} = 0.$$

Den aus der letzten Gleichung entnommenen Winkel φ_{1n} darf man um π vermehren; würde also c_{11} negativ ausfallen, so nehme man statt φ_{1n} den Winkel $\varphi_{1n} + \pi$, dadurch ändern Sinus und Kosinus ihr Vorzeichen.

Durch linksseitige Multiplikation mit $\mathfrak{P}_{23}^{-1}(\varphi_{23})$ wird das unter c_{22} stehende Element zum Verschwinden gebracht. Bei dieser und allen folgenden Umformungen bleibt die erste Spalte unverändert, wie aus folgendem Schema ersichtlich ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \cdot & \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots \\ 0 & \\ \cdot & \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots \\ 0 & \\ \cdot & \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

Denn jedes $\mathfrak{P}_{2k}^{-1}$ $(k = 3, \ldots, n)$ hat die im linken Faktor angegebene erste Zeile und erste Spalte.

In gleicher Weise werden die übrigen Spalten behandelt. Daß dabei die bereits vorhandenen Nullen nicht mehr verändert werden, zeigt folgendes Schema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots . \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0 & 0 \ldots . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \ldots \\ 0 & d_{22} \ldots \\ 0 & 0 \;\ldots \\ \cdot & \cdot\;\;\cdots \\ 0 & 0 \;\ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \ldots \\ 0 & d_{22} \ldots \\ 0 & 0 \;\ldots \\ \cdot & \cdot\;\;\cdots \\ 0 & 0 \;\ldots \end{pmatrix}.$$

Damit ist der Satz bewiesen. Man erkennt auch, daß die Bestimmung der Vorzeichen der Glieder in der Diagonale nur bis $b_{n-1,n-1}$ möglich ist; bis dahin sind alle $\geqq 0$, b_{nn} kann auch negativ sein.

Satz 27. *Ist $\mathfrak{S}$ orthogonal, so ist $\mathfrak{B}$ für den Fall $|\mathfrak{S}| = +1$ die Einheitsmatrix, und für $|\mathfrak{S}| = -1$ ist $b_{nn} = -1$, sonst ist $\mathfrak{B}$ mit der Einheitsmatrix identisch.*

Beweis: $\mathfrak{B}$ ist das Produkt aller $\mathfrak{P}_{ik}$ und $\mathfrak{S}$, also Produkt lauter orthogonaler Faktoren, also selber orthogonal. Das innere Produkt der ersten Spalte mit sich selbst ist $b_{11}^2 = 1$, und da b_{11} nicht negativ ist, muß $b_{11} = 1$ sein. Für die erste Zeile ist

$$b_{11}^2 + b_{12}^2 + \cdots + b_{1n}^2 = 1,$$

das ist aber, da wir es nur mit reellen Zahlen zu tun haben, nur möglich, wenn

$$b_{12} = b_{13} = \cdots = b_{1n} = 0$$

ist. Jetzt läßt sich die gleiche Überlegung für die zweite Spalte und zweite Zeile anwenden, woraus

$$b_{22} = 1,\ b_{23} = \cdots = b_{2n} = 0$$

folgt; das geht so weiter bis $b_{n-1,n-1} = 1$, $b_{n-1,n} = 0$. Für b_{nn} bleibt jetzt nur noch ± 1. Welcher dieser beiden Werte zu nehmen ist, ergibt sich durch Vergleich der Determinanten. Da alle $|\mathfrak{P}_{ik}| = +1$ sind, ist

$$|\mathfrak{S}| = |\mathfrak{B}|.$$

Alle n-reihigen orthogonalen Matrizen mit positiver Determinante sind durch das Produkt der $\mathfrak{P}_{ik}$ als Funktionen der $\frac{n(n-1)}{2}$ Parameter φ_{ik} dargestellt. Im Falle negativer Determinante ist noch ein Faktor zuzufügen, der sich von der Einheitsmatrix nur dadurch unterscheidet, daß an letzter Stelle -1 steht.

Orthogonale Transformationen mit positiver Determinante sind also gleichbedeutend mit einer Reihe von Drehungen um gewisse feste Achsen. Ist die Determinante -1, so kommt zu der Drehung noch hinzu, daß eine der Achsen ihre Richtung ändert, während die anderen bleiben, also eine Transformation der Form

$$y_1 = x_1,\ y_2 = x_2,\ \ldots,\ y_{n-1} = x_{n-1},\ y_n = -x_n.$$

Das bedeutet bei $n = 2$, daß die obere Halbebene auf die untere umgeklappt wird und ebenso die untere auf die obere. Es ist eine Spiegelung mit der X_1-Achse als Symmetrieachse. Für $n = 3$ liegt eine Spiegelung vor, bei der die X_1X_2-Ebene Symmetrieebene ist. Während bei Drehungen Figuren oder Körper in kongruente übergehen, werden bei einer Spiegelung aus den betreffenden Gebilden die symmetrischen.

Satz 26 läßt folgende geometrische Deutung zu: Die einzelnen Spalten der Matrix $\mathfrak{S}$ mögen die Koordinaten je eines Punktes bezeichnen; z. B. für den Raum:

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \ldots \\ x_2 & y_2 \ldots \\ x_3 & y_3 \ldots \end{pmatrix}.$$

Satz 26 sagt aus, daß man das Koordinatensystem so drehen kann, daß $x_2 = x_3 = y_3 = 0$ wird, das transformierte System kann also so gelegt werden, daß die X_1-Achse durch einen vorgegebenen Punkt geht, und ein zweiter gegebener Punkt in der X_1X_2-Ebene liegt. Der Inhalt dieses Satzes ist für $n = 2$ oder $n = 3$ anschaulich ohne weiteres klar, er ermöglicht, die Drehungswinkel anzugeben. Für beliebiges n ist natürlich ein Beweis erforderlich.

Wir kommen zur geometrischen Deutung der im § 19 erklärten Invarianten.

1. Das innere Produkt betrachten wir in der Form

$$(\mathfrak{x} - \mathfrak{a})' (\mathfrak{y} - \mathfrak{b}).$$

Es ist durch die vier Punkte X, A, Y, B bestimmt. Durch Parallelverschiebung machen wir A zum Nullpunkt, und durch Drehung wird erreicht, daß X auf der X_1-Achse liegt. Dann ist

$$(\mathfrak{x} - \mathfrak{a})' (\mathfrak{y} - \mathfrak{b}) = (x_1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} y_1 - b_1 \\ y_2 - b_2 \\ y_3 - b_3 \end{pmatrix} = x_1 (y_1 - b_1).$$

x_1 ist die Strecke $AX = r_1$, und $y_1 - b_1$ ist die Projektion der Strecke $BY = r_2$ auf die X_1-Achse. Also:

$$y_1 - b_1 = r_2 \cos\varphi,$$

wo φ den Winkel bezeichnet, den die Vektoren $\overrightarrow{AX}$ und $\overrightarrow{BY}$ miteinander bilden. Da durch zwei Richtungen im Raum der Drehungssinn nicht gegeben ist, kann $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ angenommen werden. Haben x_1 und $y_1 - b_1$ gleiches Vorzeichen, so ist $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, andernfalls liegt φ im zweiten Quadranten. Da die Abstände zweier Punkte und die Winkel zweier Geraden auch bei Drehungen und Parallelverschiebungen unverändert bleiben, gilt bei beliebiger Lage der Achsen:

$$(\mathfrak{x} - \mathfrak{a})'(\mathfrak{y} - \mathfrak{b}) = r_1 r_2 \cos\varphi.$$

Ist insbesondere $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, so ist $\varphi = 0$, und wir erhalten die Formel

$$(\mathfrak{x} - \mathfrak{a})'(\mathfrak{x} - \mathfrak{a}) = (x_1 - a_1,\ x_2 - a_2,\ x_3 - a_3) \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 \end{pmatrix}$$
$$= (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = AX^2,$$

durch die der Abstand zweier Punkte angegeben wird.

Die Anwendung des Distributivgesetzes auf die letzte Gleichung ergibt

$$* \quad \overline{AX}^2 = (\mathfrak{x}' - \mathfrak{a}')(\mathfrak{x} - \mathfrak{a}) = \mathfrak{x}'(\mathfrak{x} - \mathfrak{a}) - \mathfrak{a}'(\mathfrak{x} - \mathfrak{a}) = \mathfrak{x}'\mathfrak{x} + \mathfrak{a}'\mathfrak{a} - \mathfrak{x}'\mathfrak{a} - \mathfrak{a}'\mathfrak{x}$$
$$= \overline{OX}^2 + \overline{OA}^2 - 2 \cdot \overline{OX} \cdot \overline{OA} \cos(AOX).$$

Denn

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'\mathfrak{x} \text{ (vgl. S. 44).}$$

* ist der Kosinussatz der ebenen Trigonometrie.

Um den Winkel φ zweier vom Nullpunkt ausgehender Vektoren $\overrightarrow{OX}$ und $\overrightarrow{OY}$ zu bestimmen, setze man $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{O}$. Dann ist

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = r_1 r_2 \cos\varphi,$$

eine Beziehung, die durch Einführung der Richtungskosinus in

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1 \cos\beta_1 + \cos\alpha_2 \cos\beta_2 + \cos\alpha_3 \cos\beta_3$$

übergeht.

Ist $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$, so ist $\varphi = 0$ und $\alpha_1 = \beta_1$ usw. Danach ergibt sich eine Bedingung, die die Richtungskosinus eines Vektors erfüllen müssen:

$$1 = \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3.$$

Ist das innere Produkt $= 0$, so haben wir die Vektoren orthogonal genannt; in der Tat ist dann $\cos\varphi = 0$ und die Vektoren stehen senkrecht aufeinander.

2. Die in § 19 betrachtete Determinante war aus den Koordinaten von $n + 1$ Punkten gebildet. Für die geometrischen Anwendungen kommen nur $n = 2$ und $n = 3$ in Betracht. Es ergeben sich Formeln für den Inhalt eines Dreiecks und das Volumen eines Tetraeders. Es genügt, den Fall $n = 3$ durchzuführen.

Wir brauchen vier Punkte A_ν mit den Koordinaten $x_{\nu 1}, x_{\nu 2}, x_{\nu 3}$ $(\nu = 1, 2, 3, 4)$ und bilden

$$D = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{41} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{42} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{43} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Durch Parallelverschiebung wird A_4 zum Nullpunkt gemacht, dann ist

$$D = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix},$$

und durch Drehung wird erreicht, daß $x_{12} = x_{13} = x_{23} = 0$ wird. Nach dieser Vereinfachung ist

$$D = x_{11} x_{22} x_{33}.$$

Ergänzt man die beiden Vektoren $\overrightarrow{OA_1}$ und $\overrightarrow{OA_2}$, indem man durch A_1 und A_2 Parallele zieht, zu einem Parallelogramm, so ist $x_{11}x_{22}$ sein Inhalt. In gleicher Weise lassen sich $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$ zu einem Parallelepiped ergänzen. Nimmt man das eben genannte Parallelogramm als Grundfläche, so ist x_{33} die Höhe und D sein Volumen.

Das Parallelepiped läßt sich durch eine durch A_1A_2 gehende zu OA_3 parallele Ebene in zwei gleich große dreiseitige Prismen zerlegen, und ein solches durch geeignete Schnitte in drei inhaltsgleiche Tetraeder aufteilen; demnach ist das Volumen V des Tetraeders $OA_1A_2A_3$

$$V = \tfrac{1}{6} D.$$

Da dieser Körper bei Drehung und Parallelverschiebung in einen kongruenten übergeht, so ist allgemein das Volumen eines Tetraeders, ausgedrückt durch die Koordinaten seiner vier Eckpunkte,

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{41} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{42} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{43} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Läßt man in D eine Zeile und eine Spalte fort, so erhalten wir die entsprechende Formel für die Ebene; der Inhalt eines Dreiecks ist

$$J = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ist die Determinante der transformierenden orthogonalen Matrix -1, so liegt, wie erwähnt, eine Spiegelung vor. Dabei wechselt D das Vorzeichen. Das ist gleichbedeutend mit der Vertauschung zweier Ecken. Man sagt auch, der „Windungssinn“ bzw. der „Umlaufssinn“ wird geändert. (Zur genaueren Erklärung dieser Begriffe wird auf Bieberbach: Analytische Geometrie, verwiesen.)

Nimmt man ein Dreieck im Raum, so kann durch die Lage der drei Eckpunkte der Umlaufssinn nicht bestimmt sein, da er sich ändert, wenn das Dreieck von der anderen Seite betrachtet wird. Eine Formel, durch die der Inhalt J eines im Raum gelegenen Dreiecks aus den Koordinaten seiner Eckpunkte gegeben wird, kann daher nicht rational sein, da das Vorzeichen von J hierbei unbestimmt bleiben muß.

Wir leiten eine solche Formel ab. Der eine Eckpunkt liegt im Nullpunkt, die beiden anderen seien X und Y und die entsprechenden Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$. Aus den Koordinaten bilden wir die Systeme:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix}.$$

Das verallgemeinerte Multiplikationstheorem (Satz 20) auf diese Systeme angewendet, führt zu folgender Identität:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{x}'\mathfrak{x} & \mathfrak{x}'\mathfrak{y} \\ \mathfrak{y}'\mathfrak{x} & \mathfrak{y}'\mathfrak{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}^2 .$$

Weil links nur innere Produkte stehen, die bei Drehungen invariant bleiben, darf man das Koordinatensystem so drehen, daß X auf der X_1-Achse, Y in der X_1X_2-Ebene liegt, dadurch wird $x_2 = x_3 = y_3 = 0$. Dann wird die rechte Seite $= (x_1 y_2)^2$, also $= 4\,J^2$. Es gilt daher allgemein:

$$4\,J^2 = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}'\mathfrak{x} & \mathfrak{x}'\mathfrak{y} \\ \mathfrak{y}'\mathfrak{x} & \mathfrak{y}'\mathfrak{y} \end{vmatrix} .$$

Von hier aus kann man leicht auf die Dreiecksseiten übergehen. Wir setzen $OX = a$, $OY = b$, $XY = c$. Dann ist:

$$4\,J^2 = \begin{vmatrix} a^2 & ab\cos(a, b) \\ ab\cos(a, b) & b^2 \end{vmatrix}$$

$$16\,J^2 = \begin{vmatrix} 2\,a^2 & a^2 + b^2 - c^2 \\ a^2 + b^2 - c^2 & 2\,b^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = (a + b + c)\,(-a + b + c)\,(a - b + c)\,(a + b - c) .$$

Die letzten Umformungen möge der Leser selber nachprüfen (vgl. § 12, Aufgabe 13).

Das Volumen eines Tetraeders soll durch seine sechs Kanten ausgedrückt werden (vgl. § 12, Aufgabe 5). Die Eckpunkte seien O, X, Y, Z, und die Kanten werden folgendermaßen bezeichnet:

$$OX = \alpha, \quad OY = \beta, \quad OZ = \gamma, \quad XY = c, \quad YZ = a, \quad ZX = b .$$

Dann ist

$$V = \tfrac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} .$$

Wir bilden durch spaltenweise Multiplikation V^2, dabei werden die auftretenden inneren Produkte $\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'\,\mathfrak{y}, \ldots$ durch die Kanten und die

Kosinus der eingeschlossenen Winkel ersetzt:

$$36\,V^2 = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha\,\beta\cos(\alpha,\beta) & \alpha\,\gamma\cos(\alpha,\gamma) \\ \alpha\,\beta\cos(\alpha,\beta) & \beta^2 & \beta\,\gamma\cos(\beta,\gamma) \\ \alpha\gamma\cos(\alpha,\gamma) & \beta\gamma\cos(\beta,\gamma) & \gamma^2 \end{vmatrix}$$

$$8\cdot 36\,V^2 = \begin{vmatrix} 2\alpha^2 & \alpha^2+\beta^2-c^2 & \alpha^2+\gamma^2-b^2 \\ \alpha^2+\beta^2-c^2 & 2\beta^2 & \beta^2+\gamma^2-a^2 \\ \alpha^2+\gamma^2-b^2 & \beta^2+\gamma^2-a^2 & 2\gamma^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & \alpha^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & \beta^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & \gamma^2 & 1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Um die fünfreihige Determinante auf die dreireihige zurückzuführen, subtrahiere man die vierte Zeile von den drei ersten und verfahre ebenso mit der vierten Spalte. Eine Zerlegung in Faktoren gelingt bei dieser Determinante nicht.

§ 22. Transformation einer Matrix auf die Diagonalform.

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie eine beliebige Matrix durch rechts- und linksseitige Multiplikation auf eine besonders einfache Form gebracht werden kann. Wir betrachten zunächst drei Typen von Matrizen und untersuchen, welche Veränderungen durch Multiplikationen mit diesen bewirkt werden.

1. Vertauscht man in der Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ die i^{te} und k^{te} Zeile oder, was auf dasselbe hinauskommt, die i^{te} und k^{te} Spalte, so entsteht eine Matrix, die mit $\mathfrak{V}_{ik}$ bezeichnet wird. Z. B. ist für $n = 4$

$$\mathfrak{V}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es entsteht $\mathfrak{V}_{ik}\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{A}$ durch Vertauschung der i^{ten} und k^{ten} Zeile und $\mathfrak{A}\,\mathfrak{V}_{ik}$ aus $\mathfrak{A}$ durch Vertauschung der i^{ten} und k^{ten} Spalte. Um dies einzusehen, genügt folgendes einfache Beispiel:

$$\mathfrak{V}_{13}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

und

$$(x_1 x_2 x_3)\,\mathfrak{B}_{13} = (x_1 x_2 x_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (x_3 x_2 x_1)\,.$$

Ferner ist $|\mathfrak{B}_{ik}| = -1$ und $\mathfrak{B}_{ik} = \mathfrak{B}_{ki} = \mathfrak{B}_{ik}^{-1}$.

2. Wir gehen wieder von der Einheitsmatrix aus, ersetzen die Null in der i^{ten} Zeile und k^{ten} Spalte $(i \neq k)$ durch eine Größe x und nennen eine solche Matrix $\mathfrak{E}_{ik}(x)$. Wird $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{E}_{ik}(x)$ links multipliziert, so wird dadurch in $\mathfrak{A}$ die k^{te} Zeile mit x multipliziert und zur i^{ten} addiert; $\mathfrak{A}\,\mathfrak{E}_{ik}(x)$ entsteht aus $\mathfrak{A}$, wenn die mit x multiplizierte i^{te} Spalte zur k^{ten} addiert wird. Auch hier genügt ein Beispiel, bei dem $\mathfrak{A}$ nur aus einer Reihe besteht, denn die parallelen Reihen verändern sich ebenso.

$$\mathfrak{E}_{24}(x)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 + x a_4 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4)\,\mathfrak{E}_{23}(x) = (a_1, a_2, a_3, a_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3 + x a_2, a_4).$$

Ferner ist $|\mathfrak{E}_{ik}(x)| = 1$ und $\mathfrak{E}_{ik}^{-1}(x) = \mathfrak{E}_{ik}(-x)$.

3. Eine Matrix, in der alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonale verschwinden, heißt eine Diagonalmatrix. Sie ist auch für rechteckige Matrizen erklärt und soll mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet werden. Je nach der Gestalt des Rechtecks können sie folgende Form haben:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \mu_m \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \left|\begin{matrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \mu_m \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}\right| \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \mu_m & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Für quadratisches $\mathfrak{M}$ ist

$$|\mathfrak{M}| = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_m.$$

Multipliziert man $\mathfrak{A}$ mit einer Diagonalmatrix, so werden, wie man sich leicht überzeugt, bei $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$ die Zeilen und bei $\mathfrak{A}\mathfrak{M}$ die Spalten von $\mathfrak{A}$ der Reihe nach mit $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ multipliziert.

Quadratische Diagonalmatrizen sind vertauschbar (vgl. § 20, Aufgabe 3).

Wir kommen zu folgendem wichtigen

Satz 28: *Ist* $\mathfrak{A}$ *eine beliebige Matrix vom Typ* (m, n), *so gibt es zwei quadratische Matrizen* $\mathfrak{S}$ *und* $\mathfrak{T}$ *von* m *bzw.* n *Reihen, sodaß*

$$\mathfrak{S}\mathfrak{A}\mathfrak{T} = \mathfrak{M}$$

wird. Hier ist $\mathfrak{M}$ *eine Diagonalmatrix,* $\mathfrak{S}$ *und* $\mathfrak{T}$ *sind Produkte von Matrizen* $\mathfrak{V}_{ik}$ *und* $\mathfrak{E}_{ik}(x)$, *also sind* $|\mathfrak{S}|$ *und* $|\mathfrak{T}| \neq 0$.

Beweis: Würde $\mathfrak{A}$ aus lauter Nullen bestehen, so hätte es die Diagonalform; andernfalls hat $\mathfrak{A}$ von Null verschiedene Elemente. Durch Vertauschen von gewissen Zeilen oder Spalten, d. h. durch Multiplikation mit geeigneten $\mathfrak{V}_{ik}$ links oder rechts, erreichen wir, daß ein solches Element an den Anfang kommt. Die neue Matrix bezeichnen wir wieder mit $\mathfrak{A}$, und jetzt ist $a_{11} \neq 0$.

Folgende Produktbildung zeigt, wie man schrittweise zur Diagonalform gelangt:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 \ldots 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot \\ -\frac{a_{m1}}{a_{11}} & 0 \ldots 1 \end{matrix}\right| \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \ldots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \mathfrak{B} \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

Der linke Faktor ist das Produkt

$$\mathfrak{E}_{21}\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) \cdot \mathfrak{E}_{31}\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right) \ldots \mathfrak{E}_{m1}\left(-\frac{a_{m1}}{a_{11}}\right)$$

und der rechte

$$\mathfrak{E}_{12}\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) \cdot \mathfrak{E}_{13}\left(-\frac{a_{13}}{a_{11}}\right) \ldots \mathfrak{E}_{1n}\left(-\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right).$$

$\mathfrak{B}$ hat eine Zeile und eine Spalte weniger als $\mathfrak{A}$, und die weitere Umformung kann in gleicher Weise erfolgen. Ist $\mathfrak{A}$ einreihig, so hat man entweder nur links oder nur rechts zu multiplizieren, womit für diesen Fall der Satz bewiesen ist. Wir wenden den Induktionsschluß an. Danach existieren zwei Matrizen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{T}_1$, sodaß

$$\mathfrak{S}_1 \mathfrak{B} \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{M}_1$$

ist, und $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{M}_1$ die verlangten Eigenschaften haben. Dann ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \mathfrak{S}_1 \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \mathfrak{B}_1 \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \mathfrak{T}_1 \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \mathfrak{M}_1 \\ 0 & \end{pmatrix},$$

was zu beweisen war.

Ohne Beweis sei noch folgende Ergänzung zu diesem Satz erwähnt:

Wenn die a_{ik} ganze Zahlen sind, so kann die Diagonalform stets in der Weise erreicht werden, daß überall in den $\mathfrak{E}_{ik}(x)$ für die Größen x ganze Zahlen gesetzt werden. Das gleiche gilt, wenn die Elemente ganze rationale Funktionen einer oder mehrerer Veränderlichen mit rationalen Koeffizienten sind. Die Elemente der Matrizen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ haben dann die gleiche Eigenschaft und ihre Determinante ist ± 1. (Vgl. SCHREIER-SPERNER: Analyt. Geometrie II § 8.)

Eine andere Formulierung des Satzes 28 ist folgender

Satz 29: *Jede Matrix ist Produkt von Matrizen der Form $\mathfrak{E}_{ik}(x)$, $\mathfrak{B}_{ik}$ und einer Diagonalmatrix.*

Denn aus $\mathfrak{S}\mathfrak{A}\mathfrak{T} = \mathfrak{M}$ folgt $\mathfrak{A} = \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{M}\mathfrak{T}^{-1}$, und $\mathfrak{S}^{-1}$ und $\mathfrak{T}^{-1}$ sind als inverse von solchen Produkten wieder Produkte von $\mathfrak{E}_{ik}(x)$ und $\mathfrak{B}_{ik}$.

Ist $\mathfrak{A}$ quadratisch, so ist

$$|\mathfrak{A}| = \pm |\mathfrak{M}| = \pm \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_m.$$

Beispiel: Die Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

soll auf die Diagonalform gebracht werden.

Um die erste Zeile auf die gewünschte Form zu bringen, wird rechts mit $\mathfrak{E}_{12}(-7)$ und $\mathfrak{E}_{13}(-5)$ multipliziert, und die linksseitige Multiplikation mit $\mathfrak{E}_{21}(-3)\ \mathfrak{E}_{31}(-1)$ führt hinsichtlich der ersten Spalte zum Ziel. Die Faktoren werden zusammengefaßt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & -13 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Es bleibt

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} -15 & -13 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

noch zu transformieren. Zur Vermeidung von Brüchen sorge man dafür, daß ein Element, wenn möglich, den Wert ± 1 erhält. Wir subtrahieren deshalb die zweite Spalte von der ersten, d. h. wir multiplizieren rechts mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Danach werden beide Zeilen vertauscht:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -15 & -13 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -13 \end{pmatrix} = \mathfrak{B}_1.$$

Schließlich ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Alle diese zweireihigen Matrizen werden durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & . & . \\ 0 & . & . \end{pmatrix}$ gerändert, und so wird:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{E}_{32}(-2)\ \mathfrak{B}_{23}\mathfrak{E}_{21}(-3)\ \mathfrak{E}_{31}(-1)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{E}_{12}(-7)\ \mathfrak{E}_{13}(-5)\ \mathfrak{E}_{32}(-1)\ \mathfrak{E}_{23}(-2)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathfrak{S}\mathfrak{A}\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = \mathfrak{M}.$$

Die Darstellung der Matrix $\mathfrak{A}$ gemäß Satz 29 lautet:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{E}_{31}(1)\ \mathfrak{E}_{21}(3)\ \mathfrak{B}_{23}\mathfrak{E}_{32}(2)\ \mathfrak{M}\mathfrak{E}_{23}(2)\ \mathfrak{E}_{32}(1)\ \mathfrak{E}_{13}(5)\ \mathfrak{E}_{12}(7),$$

und es ist

$$|\mathfrak{A}| = -|\mathfrak{M}| = -9.$$

§ 23. Rang einer Matrix.

FROBENIUS hat den Begriff „Rang einer Matrix" eingeführt; die Bedeutung dieser Größe und die Zweckmäßigkeit, sie zu benennen, tritt bei allen Anwendungen, insbesondere bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems, in der analytischen und projektiven Geometrie klar hervor. Wir geben drei Definitionen, von denen die dritte erst im nächsten Kapitel folgen wird.

Erste Erklärung: *Der Rang einer Matrix ist r, wenn mindestens eine r-reihige von Null verschiedene Unterdeterminante vorhanden ist, aber alle $r+1$-reihigen Unterdeterminanten verschwinden.*

Daß dann auch alle höheren Unterdeterminanten $= 0$ sind, bedarf wohl keiner weiteren Ausführung.

Danach ist z. B. die Angabe, der Rang eines Vektors ist $= 1$, gleichbedeutend mit: Der Vektor ist von $\mathfrak{O}$ verschieden. Größer als 1 kann der Rang natürlich nicht sein, weil aus einer einreihigen Matrix nur aus einem Element bestehende Unterdeterminanten gebildet werden können. Ist also mindestens eine solche Unterdeterminante, das ist aber ein Element (eine Koordinate) von Null verschieden, so ist der Vektor nicht $\mathfrak{O}$.

Ist bei einer quadratischen n-reihigen Matrix $r < n$, so ist sicher die Determinante dieser Matrix $= 0$. Die genauere Angabe $r = n - 1$ besagt, daß unter den n^2 Unterdeterminanten aus $n - 1$ Reihen sicher eine von Null verschieden ist.

Satz 30: (*Invarianz des Ranges*). *Ist* $\mathfrak{B}$ *quadratisch und* $|\mathfrak{B}| \neq 0$, *so ändert sich der Rang einer beliebigen Matrix* $\mathfrak{A}$ *nicht, wenn mit* $\mathfrak{B}$ *multipliziert wird; wir schreiben auch:*

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \text{Rang}\,(\mathfrak{A})$$

und

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{B}\mathfrak{A}) = \text{Rang}\,(\mathfrak{A}).$$

Ist $\mathfrak{B}$ *beliebig, so kann durch Multiplikation mit* $\mathfrak{B}$ *der Rang nur verkleinert werden:*

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \leqq \text{Rang}\,(\mathfrak{A})$$

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{B}\mathfrak{A}) \leqq \text{Rang}\,(\mathfrak{A}).$$

Erster Beweis: 1. Der Rang ändert sich nicht bei beliebiger Multiplikation mit einer Matrix $\mathfrak{B}_{ik}$, weil dadurch nur Zeilen oder Spalten untereinander vertauscht werden, und die Frage, ob eine Unterdeterminante verschwindet oder nicht, ist von einer solchen Veränderung unabhängig.

2. Wird $\mathfrak{A}$ mit einer Diagonalmatrix multipliziert, so werden bei $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$ alle Zeilen und bei $\mathfrak{A}\mathfrak{M}$ alle Spalten der Reihe nach mit $\mu_1, \mu_2, \ldots$ multipliziert. Ist Δ eine Unterdeterminante aus $\mathfrak{A}$ und $\overline{\Delta}$ die aus den gleichen Zeilen und Spalten gebildete aus $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$, so ist $\overline{\Delta}$ ein Produkt aus Δ und gewissen Faktoren μ_i. Ist also $\Delta = 0$, so ist auf jeden Fall auch $\overline{\Delta} = 0$. Wenn also alle $(r + 1)$-reihigen Unterdeterminanten aus $\mathfrak{A}$ verschwinden, so gilt das gleiche für $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$; d. h.

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{M}\mathfrak{A}) \leqq \text{Rang}\,(\mathfrak{A}).$$

Ist aber $|\mathfrak{M}| \neq 0$, so sind alle $\mu_i \neq 0$, und wenn dann $\Delta \neq 0$ ist, muß auch $\overline{\Delta} \neq 0$ sein. In diesem Falle ist

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{M}\mathfrak{A}) = \text{Rang}\,(\mathfrak{A}).$$

3. Auch die Multiplikation mit $\mathfrak{E}_{ik}(x)$ ändert den Rang nicht. Es sei

$$\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{E}_{ik}(x)\,\mathfrak{A}.$$

$\overline{\mathfrak{A}}$ ist aus $\mathfrak{A}$ entstanden, indem die k^{te} Zeile mit x multipliziert und zur i^{ten} addiert wurde. Ist $\overline{\Delta}$ eine Unterdeterminante aus $\overline{\mathfrak{A}}$, so ist zu unterscheiden, ob $\overline{\Delta}$ die i^{te} Zeile enthält oder nicht; im letzteren Falle ist $\overline{\Delta}$ auch zugleich Unterdeterminante aus $\mathfrak{A}$ und verschwindet, wenn sie mehr als r Reihen hat, denn nur die i^{te} Zeile hat ja eine Veränderung erfahren. Andernfalls ist

$$\overline{\Delta} = \Delta_1 + x\Delta_2;$$

hier ist Δ_1 eine Unterdeterminante aus $\mathfrak{A}$, Δ_2 hängt mit Δ_1 so zusammen, daß die i^{te} Zeile durch die k^{te} aus $\mathfrak{A}$ ersetzt ist. Δ_2 enthält also entweder zwei gleiche Zeilen, oder es ist eine andere Unterdeterminante aus $\mathfrak{A}$, je nachdem, ob die k^{te} Zeile in Δ_1 vorkommt oder nicht.

Besteht $\overline{\Delta}$ aus $r + 1$ Reihen, so gilt dasselbe für Δ_1 und Δ_2; diese verschwinden aber, weil Rang $(\mathfrak{A}) = r$ ist. Also sind alle $r + 1$-reihigen Unterdeterminanten aus $\overline{\mathfrak{A}}$ gleich Null, und

$$\text{Rang}\,(\overline{\mathfrak{A}}) \leqq \text{Rang}\,(\mathfrak{A}).$$

Um aber noch zu zeigen, daß hier das Gleichheitszeichen stehen muß, beachten wir, daß umgekehrt $\mathfrak{A}$ aus $\overline{\mathfrak{A}}$ in gleicher Weise gebildet werden kann:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{E}_{ik}(-x)\overline{\mathfrak{A}}.$$

Daher kommen wir auf Grund der gleichen Schlußweise zu

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{A}) \leqq \text{Rang}\,(\overline{\mathfrak{A}}).$$

Diese beiden Beziehungen sind aber nur miteinander verträglich, wenn

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{A}) = \text{Rang}\,(\overline{\mathfrak{A}})$$

ist.

Es soll noch auf anderem Wege die Existenz eines r-reihigen $\overline{\Delta} \neq 0$ gezeigt werden. Ein $\Delta_1 \neq 0$ ist vorhanden, wir bilden das zugehörige

$$\overline{\Delta} = \Delta_1 + x\Delta_2.$$

Ist dieses auch $\neq 0$, so sind wir fertig. Ist aber $\overline{\Delta} = 0$, so muß $\Delta_2 \neq 0$ sein und kann nicht zwei gleiche Zeilen enthalten, ist also Unterdeterminante aus $\mathfrak{A}$. Δ_2 enthält aber die i^{te} Zeile nicht, denn diese ist ja durch die k^{te} ersetzt; also ist Δ_2 auch zugleich Unterdeterminante aus $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\neq 0$.

Nach Satz 29 läßt sich jede Matrix $\mathfrak{B}$ als Produkt der unter 1, 2 und 3 behandelten besonderen Matrizen darstellen. Der Rang von $\mathfrak{A}$ kann nur bei der Multiplikation mit $\mathfrak{M}$ verkleinert werden, und dies geschieht nur, wenn $|\mathfrak{B}| = \pm|\mathfrak{M}| = 0$ ist.

Ob man rechts oder links multipliziert, ist für die Beweisführung gleichgültig, weil statt der Zeilen die Spalten verändert werden.

Zweiter Beweis: Die Elemente einer jeden Unterdeterminante von $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ sind innere Produkte der Zeilen von $\mathfrak{B}$ mit den Spalten von $\mathfrak{A}$. So entsteht z. B. die aus den ersten s Zeilen und ersten s Spalten von $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ gebildete Unterdeterminante, indem man aus folgenden beiden Systemen:

$$\begin{matrix} b_{11} \dots b_{1m} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{s1} \dots b_{sm} \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} a_{11} \dots a_{1s} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1} \dots a_{ms} \end{matrix}$$

eine s-reihige Determinante herstellt, wie es das verallgemeinerte Multiplikationstheorem § 15, Satz 20, verlangt. Im System der a_{ik} sind nur, um auf die dortige Schreibweise zu kommen, Zeilen und Spalten zu vertauschen. Danach ist jede s-reihige Unterdeterminante aus $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ eine lineare Verbindung von s-reihigen Unterdeterminanten aus $\mathfrak{A}$. Letztere verschwinden aber alle, wenn $s = r + 1$ ist, daher ist immer:

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{B}\mathfrak{A}) \leqq \text{Rang}\,(\mathfrak{A}).$$

Wenn $\mathfrak{B}$ eine inverse besitzt, folgt in gleicher Weise:

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{A}) \leqq \text{Rang}\,(\mathfrak{B}\mathfrak{A})$$

oder

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{A}) \leqq \text{Rang}\,(\mathfrak{B}\mathfrak{A}),$$

womit für diesen Fall die Gleichheit der Rangzahlen bewiesen ist.

Wird $\mathfrak{A}$ auf die Diagonalform gebracht: $\mathfrak{S}\mathfrak{A}\mathfrak{T} = \mathfrak{M}$, so haben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{M}$ den gleichen Rang, der bei $\mathfrak{M}$ sofort zu erkennen ist.

Zweite Erklärung: *Der Rang einer Matrix $\mathfrak{A}$ ist die Anzahl der von Null verschiedenen Elemente der zugehörigen Diagonalmatrix $\mathfrak{M}$.*

Denn nehmen wir, was durch geeignete Vertauschung stets zu machen ist, die r ersten Größen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r \neq 0$, alle anderen $\mu_{r+1} = \dots = \mu_n = 0$, so ist die r-reihige Determinante

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mu_r \end{vmatrix} = \mu_1\mu_2 \dots \mu_r \neq 0.$$

Aber jede $r + 1$-reihige verschwindet, weil sie mindestens eine aus lauter Nullen bestehende Reihe enthalten muß.

Aufgabe: Es sei $\mathfrak{A}$ quadratisch. Die Summe der Glieder der Hauptdiagonale: $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ wird Spur der Matrix genannt.

Man beweise folgenden Satz:

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{G}\mathfrak{A}\mathfrak{G}^{-1}$ haben die gleiche Spur, wo $\mathfrak{G}$ quadratisch und $|\mathfrak{G}| \neq 0$ ist.

Dieser Satz läßt sich auch ohne die sog. „charakteristische Gleichung" mit den hier zur Verfügung stehenden Mitteln leicht beweisen. Man wende auf $\mathfrak{G}$ Satz 29 an und verfahre ähnlich wie beim Beweise des Satzes 30.

Fünftes Kapitel.

Systeme linearer Gleichungen.

§ 24. Allgemeine Lösung eines Systems linearer Gleichungen.

In § 19 ist für einen besonderen Fall die Lösung eines Systems linearer Gleichungen gegeben worden. Wir betrachten jetzt allgemein m Gleichungen mit n Unbekannten:

$$\begin{matrix} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \cdots + a_{1n}\ x_n = y_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \cdots + a_{2n}\ x_n = y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \cdots + a_{mn}\, x_n = y_m \end{matrix} \quad \text{oder } \mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{y}.$$

a_{ik} und y_i sind gegebene Größen, und x_k sind die Unbekannten.

In den folgenden Untersuchungen handelt es sich darum, zu prüfen, ob bzw. unter welchen Bedingungen ein solches System Lösungen besitzt, eine Übersicht über die Lösungen zu gewinnen und eine Form anzugeben, in der alle Lösungen enthalten sind. Der hier eingeschlagene Weg führt zwar bei dieser theoretischen Erörterung sehr rasch zum Ziel, ist aber für praktische numerische Berechnung der Unbekannten wenig geeignet.

Daß ein solches System keineswegs immer eine Lösung zu haben braucht, ist leicht einzusehen, z. B.

$$x + y = 2$$
$$x + y = 3$$

hat keine Lösung.

Wir erledigen zuerst den Fall $m = n = 1$. Also:

$$a_{11} x_1 = y_1.$$

Hier ist zu unterscheiden:

1. $a_{11} \neq 0$. Es ist eine und nur eine Lösung vorhanden: $x_1 = \frac{y_1}{a_{11}}$.

2. $a_{11} = 0$ und $y_1 \neq 0$. Die Gleichung besitzt keine Lösung.

3. $a_{11} = 0$ und $y_1 = 0$. Wir haben unendlich viele Lösungen; denn jeder Wert von x_1 erfüllt die Gleichung.

Satz 28 ermöglicht es, den allgemeinen Fall auf diese einfachen Betrachtungen zurückzuführen.

Zu diesem Zweck wird das gegebene System

$$\text{I} \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$$

durch ein anderes ersetzt; das kann so geschehen, daß man zunächst $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vermöge einer linearen Substitution durch n neue Unbekannte $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ausdrückt:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{T}\mathfrak{u},$$

wo $\mathfrak{T}$ vom Typ (n, n) sein muß. So entsteht

$$\text{II} \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{T}\mathfrak{u} = \mathfrak{y}.$$

Würde man $\mathfrak{T}$ beliebig wählen, könnte man nur schließen, daß jeder Lösung von II in den $u_1, u_2, \ldots, u_n$ auch eine von I entspricht, nämlich $\mathfrak{x} = \mathfrak{T}\mathfrak{u}$. Es muß sich aber auch umgekehrt aus jeder Lösung von I eine von II angeben lassen, dies trifft sicher zu, wenn $\mathfrak{x} = \mathfrak{T}\mathfrak{u}$ umkehrbar, also $|\mathfrak{T}| \neq 0$ ist.

Eine andere Möglichkeit, das System durch ein gleichwertiges zu ersetzen, besteht darin, daß man die erste Gleichung mit s_{11}, die zweite mit $s_{12}, \ldots$, die m^{te} mit s_{1m} multipliziert und dann addiert. Danach führe man die gleiche Rechnung mit anderen Zahlen $s_{21}, s_{22}, \ldots, s_{2m}$ usw. aus. Macht man das m-mal, so ergeben sich m neue Gleichungen. Die s_{ik} bilden eine Matrix $\mathfrak{S}$, und das neue System kann kurz in der Form

$$\text{III} \qquad \mathfrak{S}\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{S}\mathfrak{y} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{S}\mathfrak{A}\mathfrak{T}\mathfrak{u} = \mathfrak{S}\mathfrak{y}$$

geschrieben werden.

Wenn I durch ein Wertsystem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erfüllt ist, so gilt dasselbe für III. Damit aber aus dem Bestehen von III auch auf I geschlossen werden kann, wählen wir $\mathfrak{S}$ so, daß $|\mathfrak{S}| \neq 0$ ist.

Nunmehr kann III links mit $\mathfrak{S}^{-1}$ multipliziert werden, und I ist aus III hergeleitet.

Jetzt wenden wir Satz 28 an; danach werden $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ so gewählt, daß

$$\mathfrak{S}\mathfrak{A}\mathfrak{T} = \mathfrak{M}$$

Diagonalmatrix wird. Zur Abkürzung wird

$$\mathfrak{S}\mathfrak{y} = \mathfrak{v}$$

gesetzt. Das transformierte System III hat folgende Gestalt:

für $m \geqq n$

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \mu_n \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} \mu_1 u_1 = v_1 \\ \mu_2 u_2 = v_2 \\ \ldots \\ \mu_n u_n = v_n, \\ 0 = v_{n+1} \\ \ldots \\ 0 = v_m \end{array}$$

für $m \leqq n$

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \mu_m & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} \mu_1 u_1 = v_1 \\ \mu_2 u_2 = v_2 \\ \ldots \\ \mu_m u_m = v_m \end{array}.$$

Im letzteren Falle kommen die Unbekannten $u_{m+1}, \ldots, u_n$ nicht mehr vor. Das System ist also so transformiert, daß jede einzelne Gleichung nur noch eine Unbekannte enthält. Danach gewinnen wir folgendes Ergebnis: Damit I (oder III) Lösungen besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß jedesmal, wenn $\mu_k = 0$ ist, auch das zugehörige v_k verschwinden muß; dazu kommt noch im Falle $m > n$, daß $v_{n+1} = \cdots = v_m = 0$ sein muß.

Dieser Bedingung geben wir eine andere Form. Dazu brauchen wir zwei Matrizen, nämlich einmal die Matrix der Koeffizienten $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{M}$, dann die Matrix, die aus $\mathfrak{A}$ entsteht, wenn die Spalte $\mathfrak{y}$ zugefügt wird, bzw. wenn zu $\mathfrak{M}$ die Spalte $\mathfrak{v}$ hinzugesetzt wird; sie soll mit $(\mathfrak{A}, \mathfrak{y})$ bzw. $(\mathfrak{M}, \mathfrak{v})$ bezeichnet werden. Also ist:

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{y}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & y_m \end{pmatrix}, \quad (\mathfrak{M}, \mathfrak{v}) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \ldots & 0 & v_1 \\ 0 & \mu_2 & \ldots & 0 & v_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \cdot & v_m \end{pmatrix}.$$

Daß Rang $(\mathfrak{A})$ = Rang $(\mathfrak{M})$ ist, ist klar. Aber es ist auch Rang $(\mathfrak{A}, \mathfrak{y})$ = Rang $(\mathfrak{M}, \mathfrak{v})$. Denn

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{y}) \begin{pmatrix} & & 0 \\ & \mathfrak{T} & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \ldots\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\mathfrak{A}\mathfrak{T}, \mathfrak{y}),$$

und weil

$$\begin{vmatrix} & & 0 \\ & \mathfrak{T} & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \ldots\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |\mathfrak{T}| \neq 0,$$

ist

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{A}, \mathfrak{y}) = \text{Rang}\,(\mathfrak{A}\mathfrak{T}, \mathfrak{y}).$$

Schließlich ist

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{A}\mathfrak{T}, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{S}\mathfrak{A}\mathfrak{T}, \mathfrak{S}\mathfrak{y}) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{v})$$

und Rang $(\mathfrak{A}\mathfrak{T}, \mathfrak{y})$ = Rang $(\mathfrak{M}, \mathfrak{v})$.

Die Matrix $\mathfrak{M}$ kann durch passende Vertauschungen so angeordnet werden, daß $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r \neq 0$, $\mu_{r+1} = \mu_{r+2} = \cdots = 0$ sind, wo r der Rang von $\mathfrak{A}$ ist.

Unsere Bedingung für die Lösbarkeit eines Systems linearer Gleichungen kann jetzt in die für beide Fälle passende Form: $v_{r+1} = v_{r+2} = \cdots = v_m = 0$ gebracht werden. Dieses ist aber gleichbedeutend mit:

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{M}, \mathfrak{v}) = r.$$

Daß dieser Rang $\geqq r$ sein muß, geht einfach daraus hervor, daß er durch Zusatz einer Spalte niemals verkleinert werden kann. Wenn aber von v_{r+1} an abwärts alle v_i verschwinden, stehen in den letzten $m - r$ Zeilen von $(\mathfrak{M}, \mathfrak{v})$ nur Nullen:

$$(\mathfrak{M}, \mathfrak{v}) = \begin{pmatrix} \mu_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & v_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \mu_r & 0 & \dots & v_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

und es kann keine $r + 1$-reihige nicht verschwindende Unterdeterminante gebildet werden.

Umgekehrt, wenn Rang $(\mathfrak{M}, \mathfrak{v}) = r$ ist, müssen alle $v_i = 0$ $(i \geqq r + 1)$ sein. Denn wäre etwa $v_{r+1} \neq 0$, so nehme man folgende $r + 1$-reihige Unterdeterminante (die ersten $r + 1$ Zeilen dazu die ersten r und die letzte Spalte):

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \dots & 0 & v_1 \\ & & & \\ 0 & \dots & \mu_r & v_r \\ 0 & \dots & 0 & v_{r+1} \end{vmatrix} = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_r v_{r+1} \neq 0.$$

Danach lautet die Bedingung:

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{M}, \mathfrak{v}) = \text{Rang}\,(\mathfrak{M})$$

oder

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{A}, \mathfrak{y}) = \text{Rang}\,(\mathfrak{A}).$$

Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 31: *Ein System linearer Gleichungen ist dann und nur dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich dem Rang derjenigen Matrix ist, bei der zu den Koeffizienten noch die Spalte der von den Unbekannten freien Gliedern zugefügt wird.*

Unter der Voraussetzung, daß diese Bedingung, die wir kurz „Rangbedingung" nennen wollen, erfüllt ist, werden jetzt alle Lösungen angegeben. Aus III sind $u_1 \dots u_r$ eindeutig bestimmt:

$$u_1 = \frac{v_1}{\mu_1}, \quad u_2 = \frac{v_2}{\mu_2}, \quad \dots, \quad u_r = \frac{v_r}{\mu_r}.$$

Für $n = r$ haben wir nur diese eine Lösung. Sofern $n > r$ ist, bleiben noch $u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n$, die jeden Wert annehmen können. Wir setzen:

$$u_{r+1} = t_1, \quad u_{r+2} = t_2, \dots, u_n = t_{n-r},$$

wo die Parameter t_i unabhängig voneinander alle Werte durchlaufen.

Wir schreiben das Ergebnis noch in einer anderen Form und setzen

$$\mathfrak{u}_0 = \begin{vmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_r \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{u}_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{u}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{vmatrix}, \ldots, \mathfrak{u}_{n-r} = \begin{vmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Für $u_1, \ldots, u_r$ sind die oben angegebenen Werte einzusetzen. Die anderen Vektoren sind so gebildet, daß in $\mathfrak{u}_1$ die 1 an $r+1^{\text{ter}}$, in $\mathfrak{u}_2$ an $r+2^{\text{ter}}$ Stelle usw. steht. Danach ist

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0 + t_1 \mathfrak{u}_1 + t_2 \mathfrak{u}_2 + \cdots + t_{n-r} \mathfrak{u}_{n-r}$$

die allgemeine Lösung von III.

Multipliziert man links mit $\mathfrak{T}$ und setzt

$$\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{T}\mathfrak{u}_0, \quad \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{T}\mathfrak{u}_1, \quad \ldots, \quad \mathfrak{x}_{n-r} = \mathfrak{T}\mathfrak{u}_{n-r},$$

so ist

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_1 t_1 + \mathfrak{x}_2 t_2 + \cdots + \mathfrak{x}_{n-r} t_{n-r}$$

die allgemeine Lösung von I, d. h. jede spezielle Lösung wird dadurch erhalten, daß man den Parametern besondere Werte beilegt.

Zur Erläuterung dieses Verfahrens zur Auflösung eines Systems linearer Gleichungen wird ein Beispiel gezeigt. Hier ist $m = 3$ und $n = 4$.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 3x_4 &= 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 3x_4 &= 15 \\ 7x_1 + 12x_2 - 24x_3 + 12x_4 &= 54 \end{aligned} \qquad \begin{array}{|r|r|r} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}.$$

Die Matrix der Koeffizienten wird auf die Diagonalform gebracht:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 & 3 \\ 2 & 3 & -6 & 3 \\ 7 & 12 & -24 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hieraus sind $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ ersichtlich. Man erkennt auch $r = 2$. Wir formen zunächst vermöge $\mathfrak{S}$ das System um. Dies geschieht in der Weise, daß die Gleichungen mit den daneben stehenden Zahlen multipliziert und addiert werden.

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= 6 \\ 3x_2 - 6x_3 + 3x_4 &= 3; \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad (\mathfrak{S}\mathfrak{A}, \mathfrak{S}\mathfrak{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -6 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Rangbedingung ist erfüllt, denn Rang $(\mathfrak{S}\mathfrak{A}, \mathfrak{v}) = 2$.

Jetzt werden die neuen Unbekannten eingeführt:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{T}\mathfrak{u} \text{ oder } \begin{array}{l} x_1 = u_1 \\ x_2 = 6u_1 + u_2 + 2u_3 - u_4 \\ x_3 = 3u_1 \qquad + u_3 \\ x_4 = \qquad\qquad\qquad u_4 \end{array},$$

dadurch gehen die letzten Gleichungen über in

$$u_1 = 6 \text{ und } 3u_2 = 3.$$

Damit ist

$$\mathfrak{u}_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0 + \mathfrak{u}_1 t + \mathfrak{u}_2 t_2$$

und nach Multiplikation mit $\mathfrak{T}$

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 37 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_2 \text{ oder } \begin{array}{l} x_1 = 6 \\ x_2 = 37 + 2t_1 - t_2 \\ x_3 = 18 + t_1 \\ x_4 = \qquad\qquad t_2 \end{array}.$$

Diese Methode ist, wie erwähnt, für das praktische Rechnen nicht zu empfehlen, weil die Transformation auf die Diagonalform zu umständlich ist. Wir kommen an späterer Stelle auf dieses Beispiel zurück.

§ 25. Lineare Abhängigkeit.

Der Begriff „linear abhängig" oder „linear unabhängig" ist in Anbetracht seiner vielfachen Verwendung von besonderer Bedeutung. Er wird auf Matrizen, insbesondere Vektoren, auch auf Funktionen und anderes angewandt.

Es seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_l$ Matrizen gleichen Typs und $k_1, k_2, \ldots, k_l$ konstante Größen. Die Gleichung

$$k_1\mathfrak{A}_1 + k_2\mathfrak{A}_2 + \cdots + k_l\mathfrak{A}_l = \mathfrak{O}$$

ist stets erfüllt, wenn alle $k_\lambda = 0$ sind. In der Regel fragt man aber, ob diese Beziehung auch besteht, wenn nicht alle k_λ verschwinden.

Erklärung: $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_l$ *heißen linear abhängig, wenn eine Gleichung der Form*

$$k_1\mathfrak{A}_1 + k_2\mathfrak{A}_2 + \cdots + k_l\mathfrak{A}_l = \mathfrak{O}$$

besteht, während nicht alle $k_\lambda = 0$ *sind.*

Dagegen nennt man solche Matrizen linear unabhängig, wenn diese Beziehung nur möglich ist für $k_1 = k_2 = \cdots = k_l = 0$.

Beispiele:

1. $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig; denn $k_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}=\mathfrak{O}$ oder $k_1=k_2=0$.

2. $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ sind linear abhängig, weil

$$2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ heißen auch die Einheitsvektoren in der X_1X_2-Ebene; jeder Vektor, der in dieser Ebene liegt, ist von diesen linear abhängig. Denn

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Im Raume gibt es natürlich drei linear unabhängige Einheitsvektoren, und jeder andere Vektor ist eine lineare Verbindung dieser.

3. Die Funktionen

$$x^2-7x+3,\quad 2x^2+5x+1,\quad x^2+50x-12$$

sind linear abhängig, denn

$$5(x^2-7x+3)-3(2x^2+5x+1)+(x^2+50x-12)=0.$$

Weil es hier nur auf die Koeffizienten ankommt, kann man die Funktionen auch durch folgende Matrizen ersetzen:

$$5(1,\ -7,3)-3(2,5,1)+(1,50,\ -12)=(0,0,0).$$

4. $\sin x$ und $\cos x$ sind linear unabhängig, man braucht in

$$k_1\sin x+k_2\cos x=0$$

nur für x die Werte 0 und $\frac{\pi}{2}$ einzusetzen und erhält $k_1=k_2=0$.

$\mathfrak{A}_1\ldots\mathfrak{A}_l$ seien Matrizen gleichen Typs. Ihr Verhalten hinsichtlich ihrer linearen Abhängigkeit oder Unabhängigkeit wird nicht geändert, wenn mit $\mathfrak{S}$, einer Matrix mit nicht verschwindender Determinante, rechts oder links multipliziert wird, weil von den beiden Beziehungen

$$k_1\mathfrak{A}_1+k_2\mathfrak{A}_2+\cdots+k_l\mathfrak{A}_l=\mathfrak{O}\qquad\text{und}$$
$$k_1\mathfrak{S}\mathfrak{A}_1+k_2\mathfrak{S}\mathfrak{A}_2+\cdots+k_l\mathfrak{S}\mathfrak{A}_l=\mathfrak{O}$$

die eine aus der anderen hervorgeht.

Bei der Lösung eines Systems linearer Gleichungen blieb noch die Frage offen, ob die Anzahl der willkürlichen Parameter genau $n-r$ sein muß, oder ob man schon mit einer geringeren Anzahl von Parametern auskommen kann. Dies wäre nämlich der Fall, wenn sich einer der Vektoren, etwa $\mathfrak{x}_{n-r}$, als eine lineare Verbindung der anderen erweisen würde:

$$\mathfrak{x}_{n-r} = k_1\mathfrak{x}_1 + k_2\mathfrak{x}_2 + \cdots + k_{n-r-1}\mathfrak{x}_{n-r-1}.$$

Dann könnte die allgemeine Lösung in die Form

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + (t_1 + k_1 t_{n-r})\,\mathfrak{x}_1 + \cdots + (t_{n-r-1} + k_{n-r-1}t_{n-r})\,\mathfrak{x}_{n-r-1}$$

gebracht werden, und diese ist dann nur noch von $n - r - 1$ Parametern abhängig, nämlich:

$$t_1' = t_1 + k_1 t_{n-r},\ t_2' = t_2 + k_2 t_{n-r}, \ldots, t_{n-r-1}' = t_{n-r-1} + k_{n-r-1}t_{n-r}.$$

Es ist leicht zu erkennen, daß eine solche Beziehung zwischen den Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_{n-r}$ nicht bestehen kann, weil $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \ldots, \mathfrak{u}_{n-r}$ linear unabhängig sind.

$$k_1\mathfrak{u}_1 + k_2\mathfrak{u}_2 + \cdots + k_{n-r}\mathfrak{u}_{n-r}$$

ist nämlich ein Vektor, dessen r erste Zeilen Nullen sind, die $r + 1^{\text{te}}$ ist k_1, die $r + 2^{\text{te}}$ ist k_2 usw. Soll dieser Vektor $\mathfrak{O}$ sein, so müssen alle k_i verschwinden. Die $\mathfrak{x}_i$ sind also auch linear unabhängig und die Anzahl der Parameter kann nicht vermindert werden.

Eine besondere Erwähnung verdient noch der Fall

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{O}.$$

Ein solches Gleichungssystem heißt homogen. Hier ist die Rangbedingung immer erfüllt, weil durch Hinzufügen von lauter Nullen als letzte Spalte der Rang nicht vergrößert werden kann. Wir haben auch stets die Lösung $\mathfrak{x} = \mathfrak{O}$. Aus $\mathfrak{y} = \mathfrak{O}$ folgt $\mathfrak{v} = \mathfrak{O}$ und $\mathfrak{u}_0 = \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{O}$.

Bei einem solchen System fragt man meistens nur nach Lösungen $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{O}$. Solche Lösungen können aber nur auftreten, wenn $r < n$ ist. Denn bei $r = n$ bleibt in der Formel der allgemeinen Lösung nur das Glied $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0$ übrig. Wenn man umgekehrt von einem System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten weiß, daß eine Lösung $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{O}$ vorhanden ist, so muß $r < n$ sein, also die Determinante der Koeffizienten verschwinden.

Ist $m < n$, muß auch $r < n$ sein, ein solches System hat, wenn es homogen ist, immer eine von $\mathfrak{O}$ verschiedene Lösung.

Wir fassen diese Ergänzungen zu Satz 31 in folgenden beiden Sätzen zusammen:

Satz 32: *Die Lösung eines Gleichungssystems, das die Rangbedingung erfüllt, hat die Form*

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t_1\mathfrak{x}_1 + t_2\mathfrak{x}_2 + \cdots + t_{n-r}\mathfrak{x}_{n-r},$$

wo $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_{n-r}$ *linear unabhängige Vektoren sind.*

Ist das System homogen, so ist $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{O}$, und das System hat $n - r$ linear unabhängige Lösungen, und jede Lösung ist eine lineare Verbindung dieser.

Häufig angewendet wird folgende Umkehrung:

Satz 33: *Wenn ein System von n homogenen linearen Gleichungen mit n Unbekannten eine Lösung $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{O}$ besitzt, muß die Determinante der Koeffizienten verschwinden.*

Aus l linear unabhängigen Matrizen gleichen Typs $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_l$ bilden wir durch lineare Verbindung

$$\mathfrak{B}_\nu = k_{\nu 1}\mathfrak{A}_1 + k_{\nu 2}\mathfrak{A}_2 + \cdots + k_{\nu l}\mathfrak{A}_l$$

beliebig viele $\mathfrak{B}_\nu$ mit irgend welchen Konstanten $k_{\nu\varrho}$ ($\varrho = 1, 2, \ldots, l$). Dann gilt: je $l + 1$ der $\mathfrak{B}_\nu$ sind linear abhängig.

Um dies zu zeigen, sind $l + 1$ Konstante $x_1, x_2, \ldots, x_{l+1}$ zu bestimmen, so daß

$$x_1\mathfrak{B}_1 + x_2\mathfrak{B}_2 + \cdots + x_{l+1}\mathfrak{B}_{l+1} = \mathfrak{O}.$$

Werden die $\mathfrak{B}_\nu$ durch die $\mathfrak{A}_\nu$ ersetzt, so müssen die Koeffizienten von $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_l$ einzeln $= 0$ sein:

$$\begin{aligned}
k_{11}x_1 + k_{21}x_2 + \cdots + k_{l+1,1}x_{l+1} &= 0\\
k_{12}x_1 + k_{22}x_2 + \cdots + k_{l+1,2}x_{l+1} &= 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\\
k_{1l}x_1 + k_{2l}x_2 + \cdots + k_{l+1,l}x_{l+1} &= 0,
\end{aligned}$$

und dieses System hat sicher eine Lösung, bei der nicht alle x_ν verschwinden.

Nimmt man nur l Vektoren und ist $|k_{\nu\varrho}|_l \neq 0$, so sind die $\mathfrak{B}_\nu$ linear unabhängig, weil dann das Gleichungssystem in den $x_1, \ldots, x_l$ eine Unbekannte weniger enthält und der Rang $= l$ ist.

Greifen wir l Reihen (Zeilen oder Spalten) aus einer Matrix heraus, also l Vektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_l$, so ist die Frage, ob sie linear unabhängig sind oder nicht, durch die Lösung des Gleichungssystems

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + \cdots + x_l\mathfrak{a}_l = \mathfrak{O}$$

zu entscheiden. Die Anzahl der Elemente in jedem einzelnen $\mathfrak{a}_\nu$ gibt an, aus wieviel Gleichungen das System besteht.

Ist r der Rang der Matrix, aus der diese Reihen ausgewählt wurden, so kann der Rang der Koeffizienten dieses Systems sicher nicht größer sein. Ist also $l = r + 1$, so haben wir auf jeden Fall eine Lösung, bei der nicht alle $x_1, \ldots, x_l$ verschwinden, dann sind also je $r + 1$ Reihen linear abhängig. Ist $l = r$, so lassen sich die Reihen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_l$ so auswählen, daß die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems eine r-reihige, von Null verschiedene Unterdeterminante enthält. Dann ist also auch hier der Rang $= r$, und es existiert nur die Lösung $x_1 = \cdots = x_l = 0$, d. h. es sind r linear unabhängige Zeilen und ebenso r linear unabhängige Spalten vorhanden. Danach ergibt sich folgende

dritte Erklärung für den Rang: *Er ist die Maximalzahl linear unabhängiger Reihen.*

Es gilt natürlich auch umgekehrt: *Wenn r linear unabhängige Reihen vorhanden sind und je $r+1$ Reihen linear abhängig sind, so ist r der Rang.*

Für das Verschwinden einer Determinante sind an früherer Stelle mehrere hinreichende Bedingungen angegeben worden. Schärfer ist folgender

Satz 34: *Die lineare Abhängigkeit der Zeilen oder Spalten ist notwendig und hinreichend dafür, daß die Determinante $= 0$ ist.*

Der Beweis liegt in vorangehenden Untersuchungen über Rang und lineare Abhängigkeit.

Will man den Rang einer Matrix bestimmen, so muß eine r-reihige Determinante gefunden werden, die $\neq 0$ ist, danach sind alle $r+1$-reihigen zu untersuchen. Dabei kann man sich aber darauf beschränken, nur diejenigen Unterdeterminanten zu betrachten, die entstehen, wenn zu der vorhandenen von Null verschiedenen r-reihigen auf jede mögliche Art eine Zeile und Spalte zugefügt wird. Denn es gilt der

Satz 35: *A sei eine r-reihige Unterdeterminante von $\mathfrak{A}$ und $\neq 0$. Wenn $\mathfrak{A}$ auf jede mögliche Weise gerändert wird und wenn alle so gebildeten Determinanten verschwinden, dann ist Rang $(\mathfrak{A}) = r$.*

Beweis: Die Zeilen und Spalten in $\mathfrak{A}$ mögen so angeordnet sein, daß A aus den r ersten Zeilen und Spalten gebildet ist. Wir betrachten zuerst die Matrix

$$\mathfrak{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots a_{rn} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \dots a_{r+1,n} \end{pmatrix}$$

und bezeichnen die einzelnen Spalten der Reihe nach mit $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n$. Dann ist der Rang von $(\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_r)$ gleich r, der sich auch nicht ändert, wenn eine der übrigen Spalten $\mathfrak{a}_\varrho$ $(r+1 \leqq \varrho \leqq n)$ zugefügt wird. $\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_r$ sind also linear unabhängig, aber $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_\varrho$ sind linear abhängig:

$$k_1 \mathfrak{a}_1 + k_2 \mathfrak{a}_2 + \dots + k_r \mathfrak{a}_r + k_\varrho \mathfrak{a}_\varrho = \mathfrak{O},$$

dabei kann k_ϱ nicht $= 0$ sein; durch Division kann also erreicht werden, daß $k_\varrho = -1$ und $\mathfrak{a}_\varrho$ eine lineare Verbindung der r ersten Spalten wird. Demnach sind, wie oben ausgeführt wurde, je $r+1$ der $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n$ linear abhängig und Rang $(\mathfrak{A}_1) = r$. Daher müssen auch die $r+1$ Zeilen von $\mathfrak{A}_1$ linear abhängig sein, genauer: die r ersten Zeilen sind linear unabhängig, und die $r+1^{\text{te}}$ ist eine lineare Verbindung dieser. Das gleiche gilt für die $r+2^{\text{te}}$ und alle folgenden Zeilen aus $\mathfrak{A}$. So führt die gleiche Schlußweise zu dem Ergebnis, daß in $\mathfrak{A}$ je $r+1$ Zeilen linear abhängig sind, daher ist gemäß der dritten Erklärung Rang $(\mathfrak{A}) = r$.

§ 26. Zusätze zur Lösung linearer Gleichungen.

Ein inhomogenes System $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ läßt sich durch Einführung einer weiteren Unbekannten homogen machen. Wir setzen

$$\frac{x_1}{x_{n+1}}, \frac{x_2}{x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1}} \quad \text{statt} \quad x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

multiplizieren mit x_{n+1}, und die Gleichungen erhalten folgende Form:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - y_i x_{n+1} = 0. \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

Um aus der Lösung des homogenen eine des inhomogenen zu erhalten, muß $x_{n+1} \neq 0$ sein. Solche Lösungen sind nur vorhanden, wenn die Rangbedingung erfüllt ist. So hat z. B. das System

$$x_1 + x_2 = 1 \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 = 2$$

keine Lösung, aber das zugehörige homogene System

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0 \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

hat eine Lösung:

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} t.$$

Mit Hilfe einer bekannten Lösung $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0$ läßt sich ebenfalls ein inhomogenes auf ein homogenes System zurückführen, wir setzen $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{z}$, dann ist $\mathfrak{A}\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{A}\mathfrak{z} = \mathfrak{y}$ oder $\mathfrak{A}\mathfrak{z} = \mathfrak{O}$, und der neue unbekannte Vektor $\mathfrak{z}$ genügt einem homogenen System.

Für die praktische Berechnung der Unbekannten ist es zweckmäßig, unter den vorliegenden m Gleichungen zunächst die linear unabhängigen auszusuchen. Schreiben wir das System in der Form

$$L_i \equiv \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - y_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

so können wir die Bezeichnung so wählen, daß $L_1, L_2, \ldots, L_r$ linear unabhängig sind, während alle folgenden $L_{r+1}, \ldots, L_m$ lineare Verbindungen dieser sind; hierbei ist $r = $ Rang $(\mathfrak{A}, \mathfrak{y})$. Für die Auflösung genügt es, sich auf die r ersten zu beschränken; wenn diese erfüllt sind, ist auch $L_{r+1} = 0$ usw. Wenn das System Lösungen besitzt, muß der Rang der Koeffizientenmatrix auch gleich r sein, es müssen sich also r Spalten auswählen lassen, so daß die aus diesen gebildete Determinante $\neq 0$ ist. Wir nehmen wieder die r ersten. Dann setze man

$$x_{r+1} = t_1, \; x_{r+2} = t_2, \ldots, x_n = t_{n-r}$$

und berechne $x_1, x_2, \ldots, x_r$ nach der Regel des Cramerschen Hauptfalles; diese erscheinen dann als lineare Funktionen der Parameter $t_1, \ldots, t_{n-r}$.

Wir kommen in diesem Zusammenhang noch einmal auf das in § 24 behandelte Beispiel zurück. Die drei Gleichungen

$$L_1 \equiv x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 3x_4 - 9 = 0$$
$$L_2 \equiv 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 3x_4 - 15 = 0$$
$$L_3 \equiv 7x_1 + 12x_2 - 24x_3 + 12x_4 - 54 = 0$$

sind linear abhängig:

$$L_3 = L_1 + 3L_2.$$

L_3 kann weggelassen werden. Eine weitere Vereinfachung ergibt sich durch Einführung von

$$y = x_2 - 2x_3 + x_4.$$

Danach lauten die Gleichungen:

$x_1 + 3y = 9$ und $2x_1 + 3y = 15$, und die Lösung: $x_1 = 6$, $y = 1$.

Es bleibt noch

$$1 = x_2 - 2x_3 + x_4$$

zu erfüllen. Wir setzen $x_3 = t_1'$ und $x_4 = t_2'$, dann ist $x_2 = 1 + 2t_1' - t_2'$. Diese Lösung geht in die frühere über, wenn t_1' durch $18 + t_1$ und t_2' durch t_2 ersetzt werden.

Ist ein beliebiges System vorgelegt, bei dem sich solche Vereinfachungen nicht sofort erkennen lassen, so verfahre man so:

Wenn $a_{11} \neq 0$ ist, wird die erste Gleichung mit $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ multipliziert und zur zweiten addiert, darauf wird in gleicher Weise x_1 aus der ersten und dritten eliminiert, usw. Diese Rechnungen sind aber nichts anderes als die Konstruktion der Matrix $\mathfrak{S}$, wie sie beim Beweise des Satzes 28 angegeben wurde.

Hat man so ein System aufgestellt, das eine Gleichung und eine Unbekannte weniger enthält, so eliminiere man in derselben Weise weiter. Es kann dabei eine unmögliche Gleichung der Form $0x = 1$ kommen; dann besitzt das System keine Lösung, oder man kann auf eine Identität $0 = 0$ geführt werden, dann findet man auf diese Weise lineare Abhängigkeit und kann die Anzahl der Gleichungen verringern.

§ 27. Geometrische Anwendungen.

$L \equiv Ax_1 + Bx_2 + C = 0$ und $E \equiv Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$ sind die Gleichungen einer Geraden in der Ebene oder einer Ebene im Raum. x_i sind, wie vorher, rechtwinkelige Koordinaten. Wenn diese Gleichungen eigentliche Gebilde darstellen sollen, dürfen die Koeffizienten der laufenden Koordinaten nicht sämtlich verschwinden. Sind L_1 und L_2 oder E_1 und E_2 zwei linear abhängige Funktionen dieser Art, so fallen die beiden Gebilde zusammen, wie man leicht erkennt. Sind sie linear unabhängig, so sind, wenn t_1 und t_2 beliebige Konstante sind:

$$L \equiv t_1 L_1 + t_2 L_2 = 0 \quad \text{und} \quad E \equiv t_1 E_1 + t_2 E_2 = 0$$

auch Gleichungen von Geraden bzw. Ebenen. Werden den Parametern t_1 und t_2 alle möglichen Werte beigelegt, so erhält man eine Schar von Geraden oder Ebenen, und zwar geht jede einzelne dieser Schar durch die gemeinsamen Punkte von $L_1 = 0$ und $L_2 = 0$ bzw. $E_1 = 0$ und $E_2 = 0$, sofern überhaupt Schnittpunkte vorhanden sind. Eine solche Menge von Geraden, die alle durch einen Punkt gehen, heißt ein Geradenbüschel, ebenso nennt man eine Menge von Ebenen, die alle durch dieselbe Gerade hindurchgehen, ein Ebenenbüschel. Die einzelnen Gebilde eines solchen Büschels dürfen nicht zusammenfallen, aber das ist auch nicht möglich, wenn L_1 und L_2 bzw. E_1 und E_2 linear unabhängig sind.

Hat man drei linear unabhängige Gerade der Ebene, so läßt sich jede Gerade in die Form:

$$L \equiv k_1 L_1 + k_2 L_2 + k_3 L_3 = 0$$

bringen. Denn die Berechnung der Konstanten k_1, k_2, k_3 führt auf ein inhomogenes System von drei linearen Gleichungen mit nicht verschwindender Determinante.

Drei linear unabhängige Ebenen bestimmen ein Ebenenbündel:

$$E \equiv t_1 E_1 + t_2 E_2 + t_3 E_3 = 0.$$

Denn alle Ebenen $E = 0$ gehen durch den Schnittpunkt der drei anderen.

Wenn Schnittpunkte nicht vorhanden sind, bekommt man im Falle der Büschel parallele Gebilde, und ein Ebenenbündel ist dann so beschaffen, daß die Spurgeraden je zweier Ebenen parallel sind.

Mit Hilfe von vier linear unabhängigen Ebenen läßt sich jede als lineare Verbindung dieser darstellen.

Es seien $P, Q, R, \ldots$ eine Reihe von Punkten, deren Koordinaten bzw. mit $p_1, p_2; q_1, q_2; r_1, r_2; \ldots$ oder mit $p_1, p_2, p_3; \ldots$ bezeichnet werden. Ob diese Punkte zusammenfallen oder auf einer Geraden liegen oder in einer Ebenen, wird durch den Rang der Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ r_1 & r_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & 1 \\ q_1 & q_2 & q_3 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

entschieden. Es gilt:

Rang $(\mathfrak{A}) = 1$, die Punkte fallen in einen zusammen.
Rang $(\mathfrak{A}) = 2$, die Punkte liegen auf einer Geraden.
Rang $(\mathfrak{A}) = 3$, die Punkte liegen in einer Ebene.

Wir führen diese Untersuchung gleich für den Raum durch und fragen, ob es eine oder mehrere Ebenen gibt, die zugleich alle Punkte $P, Q, R, \ldots$ enthält. Wenn

$$A x_1 + B x_2 + C x_3 + D = 0$$

die Gleichung einer solchen Ebene ist, muß sie erfüllt sein, wenn der Reihe nach die Koordinaten der Punkte $P, Q, R, \ldots$ eingesetzt werden:

$$\begin{gathered} A p_1 + B p_2 + C p_3 + D = 0 \\ A q_1 + B q_2 + C q_3 + D = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

Das ist ein System von homogenen linearen Gleichungen, in denen A, B, C und D die Unbekannten sind. $\mathfrak{A}$ ist die Matrix der Koeffizienten.

Ist Rang $(\mathfrak{A}) = 1$, so haben wir $4 - 1 = 3$ linear unabhängige Lösungen, und die allgemeine Lösung ist:

$$\begin{gathered} A = t_1 A_1 + t_2 A_2 + t_3 A_3 \\ B = t_1 B_1 + t_2 B_2 + t_3 B_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

und wenn

$$E_i \equiv A_i x_1 + B_i x_2 + C_i x_3 + D_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

gesetzt wird, so sind E_i linear unabhängig. Fragt man umgekehrt nach den gemeinsamen Punkten dieser drei Ebenen, so gehören sicher $P, Q, R, \ldots$ dazu; das inhomogene System $E_i = 0$, indem x_1, x_2, x_3 die Unbekannten sind, erfüllt also die Rangbedingung. Da die Anzahl der Unbekannten gleich dem Rang ist, ist nur eine Lösung möglich, daher fallen $P, Q, R, \ldots$ zusammen, und alle Ebenen des Bündels

$$E \equiv t_1 E_1 + t_2 E_2 + t_3 E_3 = 0$$

haben diesen als gemeinsamen Punkt.

Ist Rang $(\mathfrak{A}) = 2$, so sind $4 - 2 = 2$ unabhängige Lösungen vorhanden. Wir haben einen Parameter weniger, und alle Ebenen, die zugleich die Punkte $P, Q, R, \ldots$ enthalten, bilden ein Ebenenbüschel:

$$E \equiv t_1 E_1 + t_2 E_2 = 0.$$

Die genannten Punkte liegen also auf einer Geraden, nämlich auf der Spurgeraden aller Ebenen des Büschels.

Ist Rang $(\mathfrak{A}) = 3$, so gibt es unter den gegebenen Punkten sicher drei, die nicht zusammenfallen und nicht auf einer Geraden liegen, diese bestimmen dann eine und nur eine Ebene, deren Koeffizienten die Lösungen des homogenen Gleichungssystems sind.

Die Frage nach Schnittpunkten von Geraden in der Ebene oder von Ebenen im Raum ist mit der Auflösung eines inhomogenen Gleichungssystems beantwortet und ist durch die vorstehenden Betrachtungen im wesentlichen erörtert. Wir fassen nur zusammen:

Sind $E_i = 0$ eine Anzahl Ebenen,

$$r' = \text{Rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ . & . & . \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r = \text{Rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ . & . & . & . \end{pmatrix},$$

so wird die verschiedene Lage der Ebenen zueinander durch folgende Fälle gekennzeichnet:

1. $r' = 1$, $r = 2$, die Ebenen sind parallel, denn sie haben keinen gemeinsamen Punkt.
2. $r' = 2$, $r = 2$, die Ebenen schneiden sich in einer Geraden.
3. $r' = 2$, $r = 3$, unter den Ebenen gibt es drei linear unabhängige, von diesen können höchstens zwei parallel sein, dann muß die dritte diese schneiden, oder je zwei dieser drei Ebenen schneiden sich in je einer Geraden, und diese sind parallel.
4. $r' = 3$, $r = 3$, alle Ebenen gehen durch einen Punkt.
5. $r' = 3$, $r = 4$, kein gemeinsamer Punkt, die Ebenen begrenzen i. a. ein Tetraeder.

Fragen:

1. Können im Falle 5 auch parallele Ebenen auftreten?
2. Warum ist $r' = 2$, $r = 4$ unmöglich?
3. Welcher Fall liegt vor, wenn die $E_i = 0$ die vier Seitenflächen eines Quaders sind?

Ähnliche Betrachtungen für gerade Linien in der Ebene durchzuführen erübrigt sich.

Indessen ist noch eine geometrische Deutung des Satzes 35 erwähnenswert. Die Matrix $\mathfrak{A}$, die aus den Koordinaten der Punkte $P, Q, R, \ldots$ gebildet war, enthielt drei oder vier Spalten und beliebig viele Zeilen. Ist ihr Rang $= 2$, so liegen die Punkte auf einer Geraden. In diesem Falle ist eine zweireihige Unterdeterminante $\neq 0$ vorhanden, es möge $\begin{vmatrix} p_1 & 1 \\ q_1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ sein, d. h. P und Q fallen nicht zusammen. Wird diese auf jede mögliche Art gerändert und sind alle so gebildeten Unterdeterminanten $= 0$, so verschwinden alle dreireihigen Determinanten. Das bedeutet für die Ebene: Wenn PQR, PQS, $PQT, \ldots$ auf einer Geraden liegen, so auch je drei beliebige unter diesen Punkten. Für den Raum besagt

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_3 & 1 \\ q_1 & q_3 & 1 \\ r_1 & r_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

daß die Projektionen der Punkte PQR in die X_1X_3-Ebene in einer Geraden liegen. Bleiben wir bei drei Punkten, so sind drei derartige Determinanten vorhanden, wenn zwei davon verschwinden, ist auch die dritte $= 0$, oder wenn die Projektionen der Punkte in die X_1X_3-Ebene und in die X_1X_2-Ebene auf einer Geraden liegen, so gilt das gleiche für PQR, immer vorausgesetzt, daß $p_1 \neq q_1$ ist.

Die Gerade im Raum kann als Schnitt zweier Ebenen aufgefaßt werden, und die gemeinsamen Punkte von $E_1 = 0$ und $E_2 = 0$ werden durch die Parameterdarstellung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_1 t$$

erfaßt, und dieses ist die Gleichung einer Geraden in einer Form, wie sie für die Geometrie der Ebene und des Raumes paßt. Denn die Gleichung der Geraden in der Ebene ist anzusehen als eine Gleichung mit zwei Unbekannten, deren Lösung ebenfalls die oben angegebene Form hat, nur sind hier die Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{x}_1$ zweireihig.

Über die geometrische Bedeutung von $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{x}_1$ ist folgendes zu sagen: Werden den Matrizen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{x}_1$ wieder die Vektoren $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OX_0}$, $\overrightarrow{OX_1}$ zugeordnet, so erweist sich X_0 als ein Punkt der Geraden, der dem Werte $t = 0$ entspricht. Der Vektor $t\mathfrak{x}_1$ ist parallel zu $\overrightarrow{OX_1}$ und je nach dem Vorzeichen von t gleich oder entgegengesetzt gerichtet. Durch t wird die Länge des Vektors bestimmt. Die Summe $\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_1 t$ wird demnach so konstruiert, daß in X_0, dem Endpunkt von $\mathfrak{x}_0$, die Parallele zu $\overrightarrow{OX_1}$ gezogen wird, deren einzelne Punkte die Endpunkte von $\mathfrak{x}_1 t$ sind. Alle Punkte $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_1 t$ liegen also auf dieser Geraden. $\mathfrak{x}_1$ gibt ihre Richtung an.

Zu einer entsprechenden Parameterdarstellung der Gleichung einer Ebene führt die gleiche Überlegung. Alle Punkte einer Ebene genügen einer Gleichung, in der $n = 3$ und $r = 1$ sind. Also ist die allgemeinste Lösung:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_1 t_1 + \mathfrak{x}_2 t_2,$$

wo $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ linear unabhängig, also nicht parallel sind. Jeder Punkt der Ebene wird demnach so erhalten, daß an einen festen Punkt X_0 ein Vektor veränderlicher Länge aber konstanter Richtung $\mathfrak{x}_1 t_1$ und an diesen noch ein solcher, aber von anderer Richtung angesetzt wird.

Die Gleichung einer Ebene durch drei gegebene Punkte P, Q, R ist

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 1 \\ q_1 & q_2 & q_3 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

wie man direkt so einsieht: Diese Determinante ist linear in x_1, x_2, x_3, also die Gleichung einer Ebene, sie verschwindet, wenn die laufenden Koordinaten durch die der Punkte P, Q, R ersetzt werden, daher geht diese Ebene durch die gegebenen Punkte. Endlich muß noch gesagt werden, daß nicht $A = B = C = 0$ sein darf; dies wäre gleichbedeutend damit, daß der Rang der drei letzten Zeilen $= 2$ ist. Die Punkte P, Q, R dürfen also nicht auf einer Geraden liegen.

Auch folgende Ableitung der Gleichung einer Ebene durch drei gegebene Punkte ist beachtenswert: Es sei

$$A x_1 + B x_2 + C x_3 + D = 0$$

die gesuchte Gleichung; sie muß erfüllt sein für $x_1 = p_1, x_2 = p_2, x_3 = p_3$ usw. So erhält man vier homogene lineare Gleichungen in A, B, C, D. Nach Satz 33 muß die Determinante der Koeffizienten verschwinden.

Schließlich kann man auch sagen, P, Q, R, X liegen dann in einer Ebene, wenn das Volumen des aus diesen vier Punkten gebildeten Tetraeders verschwindet.

Daß man auch die Gleichung einer geraden Linie in der Ebene durch zwei gegebene Punkte in Determinantenform schreiben kann, ist in § 12, Aufgabe 2 erwähnt.

Die Inhaltsformeln für Dreiecke und Tetraeder ermöglichen eine geometrische Deutung des Satzes 14, § 11. Sind P, Q, R, O die Ecken eines Tetraeders, so ist sein Volumen

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}.$$

Wir wollen P durch einen veränderlichen Punkt X ersetzen und suchen nach allen Punkten X, so daß die Volumina aller Tetraeder $XQRO$ gleich V sind. Die Koordinaten dieser Punkte genügen der Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}.$$

Sie liegen also auf einer Ebene. Andererseits bleibt V unverändert, wenn die zweite Zeile mit t_1, die dritte mit t_2 multipliziert und zur ersten addiert werden, wenn also p_1, p_2, p_3 durch

$$x_1 = p_1 + q_1 t_1 + r_1 t_2$$
$$x_2 = p_2 + q_2 t_1 + r_2 t_2$$
$$x_3 = p_3 + q_3 t_1 + r_3 t_3$$

ersetzt werden, und dies ist eine Parameterdarstellung der genannten Ebene, die, wie man sieht, durch P geht und zu $\overrightarrow{OR}$ und $\overrightarrow{OQ}$ parallel ist. Satz 14, auf zwei- bzw. dreireihige Determinanten angewendet, enthält also den elementargeometrischen Satz, wonach Dreiecke oder Tetraeder von gleicher Grundlinie bzw. Grundfläche und gleicher Höhe inhaltsgleich sind.

Diese in Satz 14 ausgedrückte Eigenschaft kann auch zur Charakterisierung einer Determinante dienen. Unter Beibehaltung von I und III der Weierstraßschen Erklärung kann II durch folgende Forderung ersetzt werden:

II′ D bleibt ungeändert, wenn die Glieder einer Zeile zu denen einer anderen Zeile addiert werden.

Wir hatten von der zu bildenden Funktion I, II und III vorausgesetzt und II′ nachgewiesen. Man kann aber auch I, II′ und III voraussetzen und Existenz, Eindeutigkeit und die übrigen Eigenschaften der Determinanten beweisen. Dieser Gedankengang hat den Vorzug, daß sich die Voraussetzungen auf natürlichem Weg ergeben. Stellt man nämlich an die zu erklärende Funktion die Forderung, daß ihr Wert gleich dem Volumen eines Parallelepipeds (Inhalt eines Parallelogramms) sein soll, so erweisen sich diese drei Bedingungen als bekannte elementargeometrische Eigenschaften. (Vgl. Bieberbach: Analytische Geometrie.)

Die folgenden Untersuchungen im einzelnen auszuführen, ist leicht und bleibt dem Leser überlassen.

Aufgabe 1. Gegeben sind die Gleichungen zweier Geraden:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_1 t_1, \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}_0 + \mathfrak{y}_1 t_2.$$

Welche Bedingungen müssen $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{y}_1$ erfüllen, damit die Geraden zusammenfallen, parallel sind, sich schneiden oder windschief sind?

Aufgabe 2. Entsprechende Untersuchungen für eine Ebene und eine Gerade.

Aufgabe 3. Es soll gezeigt werden, daß der Vektor $\mathfrak{k}$ mit den Komponenten

$$k_1 = \begin{vmatrix} q_2 & q_3 \\ r_2 & r_3 \end{vmatrix}, \quad k_2 = \begin{vmatrix} q_3 & q_1 \\ r_3 & r_1 \end{vmatrix}, \quad k_3 = \begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}$$

auf $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$ senkrecht steht.

Aufgabe 4. Aus der Gleichung einer Ebene $\mathfrak{x} = \mathfrak{p} + \mathfrak{q} t_1 + \mathfrak{r} t_2$ soll die Form $A x_1 + B x_2 + C x_3 + D = 0$ hergeleitet werden.

Das geschieht durch Elimination von t_1 und t_2 und ergibt

$$\begin{vmatrix} p_1 - x_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 - x_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 - x_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder $\mathfrak{p} - \mathfrak{x} + \mathfrak{q} t_1 + \mathfrak{r} t_2 = \mathfrak{O}$ wird links mit $\mathfrak{k}'$ multipliziert:

$$\mathfrak{k}' (\mathfrak{p} - \mathfrak{x}) = 0.$$

Man überzeuge sich, daß beide Formen identisch sind. Danach sind A, B, C die Komponenten von $\mathfrak{k}$, eines auf der Ebene senkrechten Vektors.

Aufgabe 5. Wie findet man den Winkel, den zwei Geraden oder eine Ebene und eine Gerade oder zwei Ebenen miteinander bilden?

Aufgabe 6. Gegeben sind ein Punkt P (2; 1; 1) und eine Gerade g als Spurgerade der beiden Ebenen

$$2x + 3y - z = 1 \text{ und } x - y + 2z = 3.$$

Gesucht sind die Gleichung der Parallelen zu g durch P, die Gleichung der zu g senkrechten Ebene durch P und die Gleichung des Lotes von P auf g.

Aufgabe 7. Gegeben sind zwei windschiefe Gerade g_1 und g_2 durch ihre Gleichungen

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} t \text{ und } \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} t.$$

a) Welcher Vektor $\mathfrak{k}$ steht auf beiden senkrecht?

b) Gleichung der Ebene E_1, die parallel zu $\mathfrak{k}$ ist und g_1 ganz enthält.

c) Gleichung der Ebene E_2, die parallel zu $\mathfrak{k}$ ist und g_2 ganz enthält.

d) Die Spurgerade von E_1 und E_2 steht senkrecht auf g_1 und g_2 und schneidet diese beiden Geraden in P und Q. PQ ist der kürzeste Abstand der beiden Geraden und ist zu berechnen.

Sechstes Kapitel.

Hauptachsentransformation.

§ 28. Die charakteristische Gleichung.

Wir brauchen im folgenden den Fundamentalsatz der Algebra: Jede Gleichung $f(x) = 0$ hat n Wurzeln, wenn n der Grad des Polynoms $f(x)$ ist. Sind die Koeffizienten reelle Zahlen, so treten die imaginären Wurzeln paarweise auf; ist nämlich $x = \alpha + \beta i$ eine Wurzel, so ist die konjugiert komplexe Wurzel $\alpha - \beta i$ ebenfalls Wurzel der Gleichung.

Ein Beweis dieses Satzes kann hier nicht gegeben werden.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine quadratische n-reihige Matrix. Wir fragen nach einem Vektor $\mathfrak{x}$ und einer Größe λ, so daß

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{x}$$

ist. Oder ausführlicher geschrieben:

$$\begin{array}{lllll} (a_{11} - \lambda)\, x_1 + & a_{12} x_2 & + \cdots + a_{1n} x_n & & = 0 \\ \quad a_{21}\, x_1 + & (a_{22} - \lambda)\, x_2 & + \cdots + a_{2n} x_n & & = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \quad a_{n1} x_1 + & a_{n2} x_2 & + \cdots + & (a_{nn} - \lambda)\, x_n & = 0 \end{array}$$

Das System ist in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ homogen und linear. Damit eine Lösung $\neq \mathfrak{D}$ existiert, muß

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

sein. Das ist eine Gleichung n^{ten} Grades in λ, die in der Form

$$|\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E}| = 0$$

geschrieben werden kann. Sie heißt die charakteristische Gleichung, und ihre Wurzeln werden die Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{A}$ genannt.

Satz 36. *Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ und sind λ_1 und λ_2 zwei verschiedene Eigenwerte, $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ die dazugehörigen Vektoren, so sind diese orthogonal:*

$$\mathfrak{x}_1' \mathfrak{x}_2 = 0\,.$$

Beweis: Aus

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1 = \lambda_1 \mathfrak{x}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}\mathfrak{x}_2 = \lambda_2 \mathfrak{x}_2$$

folgt

$$\lambda_1 \mathfrak{x}_1' = \mathfrak{x}_1' \mathfrak{A}' = \mathfrak{x}_1' \mathfrak{A}\,.$$

Rechts wird mit $\mathfrak{x}_2$ multipliziert:

$$\lambda_1 \mathfrak{x}_1' \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_1' \mathfrak{A} \mathfrak{x}_2.$$

Ebenso zeigt man

$$\lambda_2 \mathfrak{x}_2' \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_2' \mathfrak{A} \mathfrak{x}_1.$$

Wir bilden die transponierte

$$\lambda_2 \mathfrak{x}_1' \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_1' \mathfrak{A} \mathfrak{x}_2.$$

Also ist

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\, \mathfrak{x}_1' \mathfrak{x}_2 = 0.$$

Da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ vorausgesetzt war, muß

$$\mathfrak{x}_1' \mathfrak{x}_2 = 0 \qquad \text{sein.}$$

Satz 37. *Die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix sind sämtlich reell.*

Beweis: Wir nehmen an, λ sei ein komplexer Eigenwert und bezeichnen mit $\bar{\lambda}$ den konjugiert komplexen. Die einzelnen Koordinaten von $\mathfrak{x}$ werden durch Auflösen eines linearen Gleichungssystems gefunden, dessen Koeffizienten infolge des darin auftretenden Wertes λ auch komplex sein können. Wird überall i durch $-i$ ersetzt, so gehen $\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n$ in die konjugierten $\bar{\lambda}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ über. Nach Satz 36 ist, da $\lambda \neq \bar{\lambda}$,

$$x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_n \bar{x}_n = 0.$$

Nun ist aber das Produkt zweier konjugiert komplexer Größen stets Summe zweier Quadrate $[(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2]$. Die obige

Summe kann also keine negativen Glieder enthalten, und jedes einzelne Glied muß verschwinden; das ist aber nicht möglich, weil $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{O}$ ist.

§ 29. Orthogonale Transformationen quadratischer Formen.

Unter einer quadratischen Form von n Veränderlichen $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ versteht man eine homogene Funktion zweiten Grades, die für $n = 3$ folgende Gestalt hat:

$$F = (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3)\,x_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3)\,x_2 \\ + (a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3)\,x_3.$$

In dieser Schreibweise kommen die Glieder mit x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3 je zweimal vor, und man kann sie mit

$$(a_{21} + a_{12})\,x_1x_2 \quad \text{usw.}$$

zusammenfassen. Es ist daher keine Einschränkung, wenn $a_{12} = a_{21}$ gesetzt wird, da F doch nur von der Summe dieser beiden Größen abhängt. Es sei jetzt $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ eine n-reihige symmetrische Matrix. F läßt sich als eine nur aus einem Element bestehende Matrix in der Form

$$F = \mathfrak{x}'\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}$$

schreiben.

Die veränderlichen Größen $x_1, \ldots, x_n$ sollen vermöge einer linearen Substitution durch $y_1, \ldots, y_n$ ersetzt werden:

$$y_\nu = \sum_{\varrho=1}^{n} s_{\nu\varrho}\,x_\varrho \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{S}\,\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{S}^{-1}\,\mathfrak{y}.$$

F geht über in

$$\mathfrak{y}'\,\mathfrak{S}'^{-1}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{S}^{-1}\,\mathfrak{y}.$$

Es kommt jetzt darauf an, durch passende Wahl der Matrix $\mathfrak{S}$ die gegebene Form auf eine möglichst einfache Gestalt zu bringen. Außerdem wird uns noch folgende Fragestellung beschäftigen: Welche Bedingung müssen zwei Formen $F(x_1, \ldots, x_n)$ und $G(z_1, \ldots, z_n)$ erfüllen, damit sie sich durch eine lineare Substitution

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{S}\,\mathfrak{x}$$

ineinander überführen lassen? Man spricht in diesem Falle von äquivalenten Formen. Schließlich ist bei dieser Fragestellung zu beachten, ob $\mathfrak{S}$ beliebig ist oder gewissen Einschränkungen unterworfen wird. Wir wollen zunächst nur orthogonale Transformationen zulassen.

Satz 38. *Jede quadratische Form $F(x_1, \ldots, x_n)$ mit reellen Koeffizienten läßt sich durch eine orthogonale Substitution auf folgende Form bringen:*

$$F = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

wo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{A}$ sind.

Im Matrizenkalkül wird der Satz so formuliert:

Es sei $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ eine n-reihige symmetrische Matrix; es ist stets eine orthogonale Matrix $\mathfrak{S}\,(= \mathfrak{S}'^{-1})$ vorhanden, so daß

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{S}\mathfrak{A}\mathfrak{S}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Diagonalform hat.

Beweis: Für $n = 1$ ist der Satz richtig. Wir nehmen an, er sei für $(n-1)$-reihige Matrizen bewiesen. Zunächst wird eine orthogonale Matrix $\mathfrak{S}_1$ angegeben, durch die $\mathfrak{A}$ auf die Form

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{S}_1\mathfrak{A}\mathfrak{S}_1' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \mathfrak{B} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

gebracht wird. Weil $\mathfrak{M}_1$ symmetrisch ist, hat auch $\mathfrak{B}$ diese Eigenschaft. $\mathfrak{S}_1 = (s_{ik})$ wird so erhalten: Setzt man in

$$\mathfrak{S}_1\mathfrak{A} = \mathfrak{M}_1\mathfrak{S}_1$$

beiderseits die Elemente der ersten Zeile einander gleich, so ergibt sich das System:

$$\sum_{\varrho=1}^{n} s_{1\varrho}\, a_{\varrho i} = \lambda_1 s_{1i} \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

das in $s_{11}, \dots, s_{1n}$ homogen und linear ist. λ_1 ist Eigenwert und reell.

Die Größen $s_{1\varrho}$ sind nicht sämtlich $= 0$. Als Lösung eines homogenen Systems dürfen sie mit einem Faktor multipliziert werden, der so gewählt werden kann, daß die Summe ihrer Quadrate $= 1$ wird. Man sagt auch, die Größen werden normiert.

Damit ist die erste Zeile von $\mathfrak{S}_1$ bestimmt. Bezeichnet $\mathfrak{s}_i$ die i^{te} Zeile $(i = 1, \dots, n)$ aus $\mathfrak{S}_1$, so muß $\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2' = 0$ sein. Das ist eine homogene lineare Gleichung in $s_{21}, \dots, s_{2n}$, die sicher eine Lösung $\neq \mathfrak{O}$ besitzt. Ebenso bestimmt man $\mathfrak{s}_3$ aus den beiden Gleichungen

$$\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_3' = 0, \quad \mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_3' = 0 \quad \text{usw.},$$

bis schließlich zur Ermittelung von $\mathfrak{s}_n$ $n-1$ homogene lineare Gleichungen zur Verfügung stehen:

$$\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_n' = 0, \quad \mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_n' = 0, \quad \dots, \quad \mathfrak{s}_{n-1}\mathfrak{s}_n' = 0.$$

Da sich alle diese Gleichungen so erfüllen lassen, daß in keiner Zeile lauter Nullen stehen, kann jede Zeile normiert werden, und $\mathfrak{S}_1$ ist orthogonal.

$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{S}_1 \mathfrak{A} \mathfrak{S}_1'$ ist dadurch auch eindeutig bestimmt, und wir müssen uns nur noch davon überzeugen, daß die erste Zeile und erste Spalte die vorgeschriebenen Werte haben. Die erste Zeile von $\mathfrak{M}_1$ kann wieder durch ein Gleichungssystem ermittelt werden, indem in

$$\mathfrak{S}_1 \mathfrak{A} = \mathfrak{M}_1 \mathfrak{S}_1$$

die Elemente der ersten Zeilen einander gleich gesetzt werden. Dieses System allein genügt, um die fraglichen Elemente aus $\mathfrak{M}_1$ zu berechnen. Es ist erfüllt durch $\lambda_1, 0, 0, \ldots, 0$, und mit Rücksicht auf die Eindeutigkeit kommen auch keine anderen Werte in Frage. Weil ferner $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_1'$ ist, ist die erste Spalte mit der ersten Zeile identisch und $\mathfrak{M}_1$ hat die gewünschte Form.

Auf Grund der Induktionsannahme gibt es eine orthogonale $(n-1)$-reihige Matrix $\mathfrak{S}_2$, so daß

$$\mathfrak{S}_2 \mathfrak{B} \mathfrak{S}_2' = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

wird. Die n-reihige Matrix

$$\mathfrak{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \mathfrak{S}_2 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

ist auch orthogonal, ebenso das Produkt $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_3 \mathfrak{S}_1$, und es ist

$$\mathfrak{S} \mathfrak{A} \mathfrak{S}' = \mathfrak{S}_3 \mathfrak{M}_1 \mathfrak{S}_3' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \mathfrak{S}_2 \mathfrak{B} \mathfrak{S}_2' \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Satz 39. *Ist λ ein p-facher Eigenwert, so ist Rang* $(\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E}) = n - p$.

Beweis: Es ist

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E}) = \text{Rang}\,[\mathfrak{S}(\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E})\mathfrak{S}'] = \text{Rang}\,(\mathfrak{M} - \lambda \mathfrak{E})$$

nach Satz 30. Die letzte Matrix ist diagonal und enthält in der Hauptdiagonalen p Nullen, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = \lambda$ ist.

§ 30. Invarianten quadratischer Formen.

Ist $\mathfrak{G}$ eine beliebige n-reihige quadratische Matrix mit nicht verschwindender Determinante, so haben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{G} \mathfrak{A} \mathfrak{G}^{-1}$ dieselben Eigenwerte. Denn die charakteristischen Gleichungen

$$|\mathfrak{A} - x \mathfrak{E}| = 0 \quad \text{und} \quad |\mathfrak{G} \mathfrak{A} \mathfrak{G}^{-1} - x \mathfrak{E}| = 0$$

sind identisch, wie man erkennt, wenn in

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{A} - x\mathfrak{E})\mathfrak{G}^{-1} = \mathfrak{G}\mathfrak{A}\mathfrak{G}^{-1} - x\mathfrak{E}$$

beiderseits die Determinanten gebildet werden.

Beiläufig sei noch bemerkt, daß die Summe der Eigenwerte dasselbe ist wie die am Schluß des § 23 erklärte Spur. Die dort gestellte Aufgabe findet damit auch ihre Lösung.

Nimmt man insbesondere statt $\mathfrak{G}$ eine orthogonale Matrix $\mathfrak{S}$, so ist $\mathfrak{G}^{-1} = \mathfrak{S}'$, und wir erhalten

Satz 40. *Die Eigenwerte einer quadratischen Form sind gegenüber einer orthogonalen Transformation invariant.*

Es gilt aber auch das Umgekehrte:

Satz 41. *Wenn die Eigenwerte zweier symmetrischer Matrizen* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *übereinstimmen, so gibt es eine orthogonale Matrix* $\mathfrak{T}$, *so daß*

$$\mathfrak{T}\mathfrak{A}\mathfrak{T}' = \mathfrak{B}$$

ist.

Beweis: Es gibt zwei orthogonale Matrizen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$, so daß

$$\mathfrak{S}\mathfrak{A}\mathfrak{S}' = \mathfrak{M} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}_1\mathfrak{B}\mathfrak{S}_1' = \mathfrak{M}$$

ist. Die beiden mit $\mathfrak{M}$ bezeichneten Matrizen könnten sich allenfalls durch die Reihenfolge der Eigenwerte unterscheiden. Es ist leicht einzusehen, daß diese beliebig gewählt werden kann. Aus

$$\mathfrak{S}\mathfrak{A}\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}_1\mathfrak{B}\mathfrak{S}_1'$$

folgt:

$$\mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}\mathfrak{A}\mathfrak{S}'\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{B} \quad \text{und} \quad \mathfrak{T} = \mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}.$$

Es sei $r = \text{Rang}\,(\mathfrak{A}) = \text{Rang}\,(\mathfrak{M})$. Dann ist r zugleich die Anzahl der von Null verschiedenen Eigenwerte. Unter diesen seien p positive: $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ und q negative vorhanden: $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{p+q}$ $(p + q = r)$. Die Zahl $s = p - q$ heißt die Signatur der Form.

Wir nennen, wie erwähnt, zwei Formen äquivalent, wenn sie durch eine reelle, aber sonst beliebige Substitution mit nicht verschwindender Determinante ineinander übergeführt werden können.

Satz 42 (*Trägheitsgesetz der quadratischen Formen*). *Zwei Formen sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie gleichen Rang und gleiche Signatur haben.*

Beweis: Durch eine orthogonale Transformation erhält unsere Form zunächst die Gestalt

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_p y_p^2 + \lambda_{p+1} y_{p+1}^2 + \cdots + \lambda_{p+q} y_{p+q}^2 .$$

Diese wird durch

$$y_1 = \frac{z_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \; y_2 = \frac{z_2}{\sqrt{\lambda_2}}, \ldots, y_p = \frac{z_p}{\sqrt{\lambda_p}}, \; y_{p+1} = \frac{z_{p+1}}{\sqrt{-\lambda_{p+1}}}, \ldots, y_r = \frac{z_r}{\sqrt{-\lambda_r}}$$

auf

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$$

transformiert.

Diese einfachste Gestalt, auf die jede Form gebracht werden kann, ist durch r und s vollkommen bestimmt; also sind Formen äquivalent, wenn sie in r und s übereinstimmen.

Es muß noch das Umgekehrte gezeigt werden, nämlich daß die Übereinstimmung in r und s notwendig ist, d. h. daß durch eine lineare Substitution diese Zahlen nicht geändert werden können, also Invarianten sind.

Daß r diese Eigenschaft hat, folgt aus Satz 30. Um das gleiche für s zu beweisen, nehmen wir an, zwei Formen mit verschiedener Signatur seien äquivalent:

$z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$ und $u_1^2 + \cdots + u_{p'}^2 - u_{p'+1}^2 - \cdots - u_r^2$ und $p < p'$. Dann müßte eine lineare Substitution $\mathfrak{S}$ existieren, so daß

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{S}\mathfrak{u}$$

die eine Form in die andere überführt. Setzt man

$$z_1 = 0, \ldots, z_p = 0 \quad \text{und} \quad u_{p'+1} = 0, \ldots, u_r = 0\,,$$

so entsteht ein homogenes lineares Gleichungssystem in den Unbekannten $u_1, u_2, \ldots, u_r$, denn $z_1, \ldots, z_p$ sind lineare Verbindungen dieser Größen. Die Anzahl der Gleichungen ist $p + (r - p') = r - (p - p')$ also $< r$. Es gibt daher eine Lösung, bei der nicht alle $u_1, \ldots, u_r$ verschwinden. Diese Zahlenwerte, in die erste Form eingesetzt, würden einen Wert ergeben, der nicht positiv sein kann; die zweite Form, deren Wert damit übereinstimmen soll, würde aber positiv sein. Es muß also $p = p'$ sein.

Die Transformation einer quadratischen Form, sei es nun durch orthogonale oder durch beliebige reelle Matrizen, ermöglicht eine Klassifikation der Kurven und Flächen zweiter Ordnung, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll. Die Koordinatenachsen werden so geändert, daß sie in die Richtungen der Hauptachsen der Kurve oder Fläche fallen.

Sachverzeichnis.

Die Zahlen geben die Seiten an.