

# Übungen aus der Mechanik

Von

Dr. techn. **Erwin Pawelka**  
Berlin

Mit 59 Abbildungen im Text



Springer-Verlag Wien GmbH  
1942

# Übungen aus der Mechanik

Von

Dr. techn. **Erwin Pawelka**  
Berlin

Mit 59 Abbildungen im Text



Springer-Verlag Wien GmbH

1942

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung  
in fremde Sprachen, vorbehalten.

ISBN 978-3-662-35476-6      ISBN 978-3-662-36304-1 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-662-36304-1

## Vorwort.

Die Mechanik, allgemein überhaupt die Theorie, kann und soll dem Konstrukteur eine zuverlässige Hilfe sein. Darüber hinaus verdanke ich der Mechanik schon seit der Hochschulzeit viele angeregte Stunden. Das nun vorliegende Heft habe ich in der Absicht geschrieben, bei den Studierenden Technischer Hochschulen die Liebe zur Mechanik zu fördern und dadurch mittelbar die Anwendung der Mechanik bei der Berufsausübung des Ingenieurs.

Den ersten Anstoß zur Erweckung tieferen Interesses an der Mechanik geben in der Regel die akademischen Vorlesungen, in welchen das schöne und zweckmäßige Lehrgebäude dieser Wissenschaft vor den Hörern errichtet wird. Daneben braucht der Studierende aber Beispiele und Übungen, um sein Wissen in Können zu verwandeln, und zur Veranschaulichung der Theorie. So hoffe ich, daß es Nutzen stiften wird, Aufgaben auf mechanischem Gebiet, welche mir als Konstrukteur unterkamen, gesammelt und hiermit veröffentlicht zu haben. Als Ergänzung kamen noch einige wenige Übungen hinzu, die ich mir als solche eigens erdacht habe.

Als Übungen in der Mechanik für Studierende Technischer Hochschulen können naturgemäß nur solche dienen, deren Fragestellung keine weitausholenden Erklärungen oder Voraussetzung weitgehender spezieller Kenntnisse erfordert. In einigen Fällen (Übungen 9, 20, 25) habe ich Aufgabe und Lösung, nachdem sie mir gestellt, bzw. von mir gefunden wurde, im Schrifttum angetroffen. Wahrscheinlich sind in der vorliegenden Sammlung auch Aufgaben enthalten, die, ohne daß es mir bekannt ist, schon anderweitig behandelt wurden. Es hängt dies mit meiner Gepflogenheit zusammen, die ich Studierenden und jungen Ingenieuren sehr empfehlen möchte: jedes Problem selbst zu bewältigen zu suchen und nicht sogleich in Büchern oder Zeitschriften nach der Lösung Umschau zu halten. Dieser Rat trägt sich durchaus mit der „Ökonomie der Wissenschaft“.

Was die Zahl der Übungen betrifft, ist die vorliegende Sammlung nur eine geringe Ergänzung der schönen und reichen Aufgabensammlung von WITTENBAUER und PÖSCHL. Den Gang der Lösungen habe ich aber weit ausführlicher dargestellt, als dies dort der Fall ist, und ich hoffe, dadurch manche didaktische Absicht verwirklicht zu haben. Dem Springer-Verlag danke ich für die Sorgfalt, die er bei der Drucklegung angewendet hat.

Berlin, im August 1942.

Erwin Pawelka

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. Statik.	
1.—5. Übung .....	1—6
II. Kinematik.	
6.—9. Übung .....	7—12
III. Kinetik und Schwingungen.	
10.—20. Übung .....	12—42
IV. Elastizität.	
21.—31. Übung .....	42—62
V. Kurze Übungen aus verschiedenen Gebieten.	
32.—40. Übung .....	62—70

## Erster Teil.

### Statik.

#### 1. Übung.

Ein Differentialgetriebe hat drei um eine gemeinsame Achse drehbare Systeme oder Zweige, 1, 2, 3 genannt. Gegeben ist für den Gleichgewichtsfall das Verhältnis  $\frac{M_2}{M_1}$  der Drehmomente  $M_2$  und  $M_1$  an den Zweigen 2 bzw. 1. Man bestimme daraus  $\frac{M_3}{M_1}$  und  $\frac{M_3}{M_2}$  und die Beziehung zwischen den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  der drei Zweige.

Die Momentengleichung um die gemeinsame Drehachse lautet:

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0. \quad (1)$$

Division von Gl. (1) durch  $M_1$  ergibt  $1 + \frac{M_2}{M_1} + \frac{M_3}{M_1} = 0$ , also

$$\frac{M_3}{M_1} = -1 - \frac{M_2}{M_1}.$$

Division von Gl. (1) durch  $M_2$  ergibt:  $\frac{M_1}{M_2} + 1 + \frac{M_3}{M_2} = 0$  und weiterhin

$$\frac{M_3}{M_2} = -1 - \frac{1}{\frac{M_2}{M_1}}.$$

Da Gl. (1) auch beim Vorhandensein von Widerständen und Reibungen *innerhalb* des Differentialgetriebes gilt, tun dies auch die gewonnenen Beziehungen.

Bekanntlich folgt aus zwei Winkelgeschwindigkeiten am Differentialgetriebe die dritte in linearem Zusammenhang, also etwa

$$\omega_3 = a \omega_1 + b \omega_2. \quad (2)$$

Wenn keine Widerstände und Reibungen im Getriebe auftreten

und weil die Wucht des Getriebes bei gleichmäßigem Umlauf unveränderlich ist, gilt für unseren Fall die Leistungsgleichung

$$M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2 + M_3 \omega_3 = 0. \quad (3)$$

Gl. (1) und (2) werden in Gl. (3) eingesetzt:

$$M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2 - (M_1 + M_2) (a \omega_1 + b \omega_2) = 0$$

oder

$$\omega_1 (M_1 - M_1 a - M_2 a) + \omega_2 (M_2 - M_2 b - M_1 b) = 0;$$

da  $\omega_1$  und  $\omega_2$  voneinander unabhängig, also frei wählbar sind, erfordert die allgemeine Gültigkeit der letzten Gleichung, daß ihre Klammerausdrücke verschwinden:

$$M_1 - a M_1 - a M_2 = 0, \text{ also } a = \frac{1}{1 + \frac{M_2}{M_1}}.$$

$$M_2 - b M_1 - b M_2 = 0, \text{ also } b = \frac{\frac{M_2}{M_1}}{1 + \frac{M_2}{M_1}}.$$

Gl. (3) lautet dann

$$\omega_3 = \frac{\omega_1 + \frac{M_2}{M_1} \omega_2}{1 + \frac{M_2}{M_1}}$$

oder in anderer Form

$$\omega_3 \left( 1 + \frac{M_2}{M_1} \right) = \omega_1 + \frac{M_2}{M_1} \omega_2.$$

## 2. Übung.

Ein Kran, der sich um den senkrechten Zapfen  $O$  (reibunglos) dreht, überträgt mittels in seinem drehbaren Teil (reibunglos)

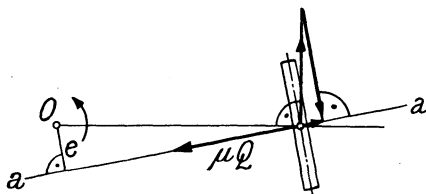


Abb. 1.

gelagerter Laufrollen die Vertikalkräfte auf einen Laufschienenkranz. Welches der Krandrehung entgegenwirkende Moment  $M_w$  entsteht durch eine mit  $Q$  belastete Laufrolle, wenn ihre Achse  $a a$  infolge ungenauer Montage um  $e$  an

der Achse des Zapfens  $O$  vorbeigeht? (Abb. 1.)

Es muß ein Gleiten der Rolle auf der Schiene eintreten, denn die Teilbewegungen, aus denen sich die Bewegung des Rollpunktes, welcher die Schiene berührt, zusammensetzt, und die von den Drehungen um  $O$  und  $a$  herrühren, schließen einen Winkel ein, können daher nur eine von Null verschiedene Resultierende geben. Entgegengesetzt diesem Gleiten wirkt von der Schiene her die Gleitreibungskraft  $\mu \cdot Q$  auf die Rolle. Bei reibungsfreier Lagerung derselben bedingt das Momentengleichgewicht der Rolle, daß  $\mu Q \parallel aa$  ist. Die Krandrehung wird somit

mit dem Moment  $M_w = Q \mu e$  gehemmt.

### 3. Übung.

Wie sind die Flanken der in Abb. 2 gezeichneten Freilaufkupplung zu formen, damit die Mitnahmeverhältnisse von Abweichungen des Rollendurchmessers (und der Zusammendrückung der Rollen) unabhängig sind?

Die Rolle berührt den Außenteil in  $A$ , den Innenring in  $J$ . Da keine weiteren Kräfte an der Rolle wirken, wird sie im Gleichgewicht gehalten durch zwei entgegengesetzte und gleich große Kräfte, deren gemeinsame Wirkungslinie mit  $AJ$  zusammenfallen muß.

Damit zwischen Außen- und Innenteil Drehmomente übertragen werden können, müssen die genannten Kräfte bezüglich  $O$  einen Hebelarm haben, d. h.  $AJ$  muß neben  $O$  vorbeigehen. Das bedingt, daß  $AJ$  mit den Berührungsnormalen in  $A$  sowie in  $J$  je den Winkel  $\alpha$  einschließt. Damit in  $A$  und  $J$  Kräfte in Richtung  $AJ$  übertragen werden können, muß  $\alpha$  kleiner oder höchstens gleich dem Reibungswinkel sein. Die Mitnahmeverhältnisse sind somit durch  $\alpha$  gekennzeichnet und sollen vom Rollendurchmesser unabhängig sein;  $\alpha$  ist klein, ebenso der Winkel  $\delta$  zwischen Radiusvektor  $r$  und Kurvennormale  $n$ ; daher ist laut Abb. 2

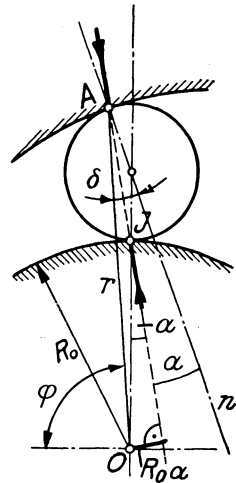


Abb. 2.

$$\delta = \frac{R_0 \alpha}{r} + \alpha$$

oder

$$\delta = \alpha \frac{R_0 + r}{r}. \tag{1}$$



Nach der Lehre von den Polarkoordinaten ist  $\operatorname{tg} \delta = \frac{dr}{r d\varphi}$  oder, weil  $\delta$  klein ist, sehr angenähert

$$\delta = \frac{dr}{r d\varphi}.$$

Hierin setzen wir Gl. (1) ein und erhalten als Differentialgleichung der gesuchten Flankenkurve

$$\frac{dr}{R_0 + r} = \alpha d\varphi. \quad (2)$$

Weil  $dr = d(R_0 + r)$  gesetzt werden kann, ist die Integration leicht und gibt mit der Integrationskonstanten  $C'$

$$\log \operatorname{nat} C' (R_0 + r) = \alpha \varphi, \text{ oder mit } \frac{1}{C'} = C$$

$$\boxed{r = C e^{\alpha \varphi} - R_0.} \quad (3)$$

In der Praxis ersetzt man die Kurve durch ihren Krümmungskreis, dessen Radius  $\varrho$  bekanntlich ist:

$$\varrho = \frac{\left[ r^2 + \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right]^{3/2}}{r^2 + 2 \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - r \frac{d^2 r}{d\varphi^2}}. \quad (4)$$

Aus Gl. (3) ergibt sich  $\frac{dr}{d\varphi} = C \alpha e^{\alpha \varphi}$  und  $\frac{d^2 r}{d\varphi^2} = C \alpha^2 e^{\alpha \varphi}$ , oder weil nach Gl. (3)  $C e^{\alpha \varphi} = r + R_0$  ist,  $\frac{dr}{d\varphi} = \alpha (r + R_0)$  und  $\frac{d^2 r}{d\varphi^2} = \alpha^2 (r + R_0)$ ; Gl. (4) ergibt damit:

$$\varrho = r \frac{\left( 1 + \alpha^2 \left[ 1 + \frac{R_0}{r} \right]^2 \right)^{3/2}}{1 + \alpha^2 \left[ 1 + \frac{R_0}{r} \right] \left[ 1 + 2 \frac{R_0}{r} \right]}.$$

Daraus folgt für die praktisch vorkommenden Fälle mit großer Annäherung  $\boxed{\varrho = r}$ .

#### 4. Übung.

Der Doppelkegel nach Abb. 3 soll auf den Linealen  $l_1, l_2$  an jeder Stelle im indifferenten Gleichgewicht ruhen können. Welche Beziehung muß dazu zwischen  $\varphi, \psi$  und  $\delta$  herrschen?

Wenn eine Gerade, sich selbst parallel bleibend, einen Kegel, dessen Achse ebenfalls parallel bleibt, dauernd berührt, erfüllt

sie eine Tangentialebene des Kegels; der Basiskreis  $K$  unseres Kegels berührt somit dauernd die Schnittgerade  $t$  der Tangentialebene mit der Ebene des Basiskreises. Abb. 3 zeigt den Doppelkegel in der Stellung, in welcher seine Spitzen  $S_1, S_2$  gerade auf den Linealen  $l_1$  und  $l_2$  liegen. Da  $l_1$  der Tangentialebene des Kegels angehört, ist  $P$  ein Punkt der Schnittgeraden  $t$ , welche außerdem  $K$  berühren muß und somit leicht gezeichnet werden kann. Es bewegt sich also der Schwerpunkt  $S$  des Doppelkegels auf der zu  $t$  parallelen Geraden  $s$ ; für die Neigung  $\sigma$  der letzteren ergibt sich an Hand von Abb. 3 die Beziehung:

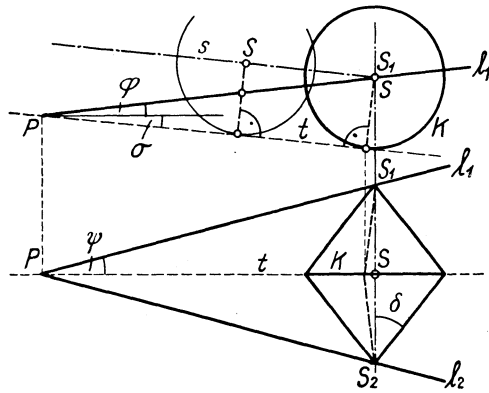


Abb. 3.

$$\sin(\varphi + \sigma) = \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \psi \cos \varphi. \quad (1)$$

Damit der Doppelkegel im Gleichgewicht ist, muß die virtuelle Bahn  $s$  seines Schwerpunktes  $S$  waagrecht sein, also  $\sigma = 0$ ; damit erhält man aus Gl. (1):

$$\operatorname{tg} \delta \frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \varphi} = 1. \quad (2)$$

Je nachdem  $\operatorname{tg} \delta \frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \varphi} \geq 1$ , will der Doppelkegel auf den Linealen „bergauf“ oder „bergab“ rollen.

### 5. Übung.

Zwei gegeneinander geführte Körper  $A$  und  $B$  (Abb. 4) sollen mittels des Körpers  $C$  in Richtung der Führung mit  $P$  gegeneinander wirken. Welche höchste Pressung  $p_{\max}$  zwischen  $A$  und  $C$ , bzw.  $B$  und  $C$  tritt auf, wenn die Haftreibungszahl daselbst  $\mu$  beträgt und geradlinige Pres-

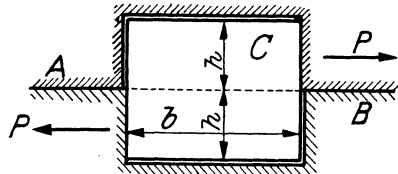


Abb. 4.

sungsverteilung angenommen wird? (Länge der Anordnung senkrecht zur Bildebene =  $l$ .)

Die Kraftübertragung erfolgt (Abb. 5) durch die Kräfte  $T$ ,  $T'$  wo  $\bar{T}' = \bar{P} + \mu \bar{P}$ , welche des Gleichgewichtes von  $C$  wegen gemeinsame Wirkungslinie haben müssen. Dar- aus der Randabstand  $e$  von  $P$ :

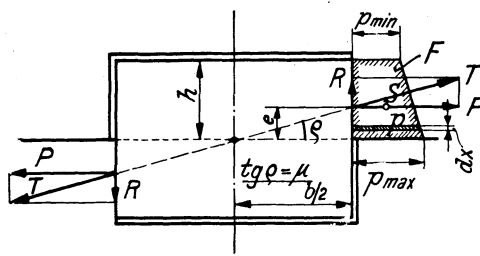


Abb. 5.

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{b}{2} \operatorname{tg} \varrho \\ \text{oder} \\ e &= \frac{b}{2} \mu. \end{aligned} \right\} (1)$$

Als Resultierende der Elementarkräfte  $p \, l \, dx$  muß  $P$  durch den Schwerpunkt  $S$  der von der Linie der Pressungen gebildeten Fläche  $F$  gehen und die Größe haben:

$$P = l F. \quad (2)$$

Ist  $h \geq 3e = \frac{3}{2} b \mu$ , dann kann die  $p$ -Fläche offenbar nur ein Dreieck sein, um der Schwerpunktsbedingung zu genügen. Gl. (2) ergibt

$$P = l \frac{1}{2} p_{\max} \cdot 3 \frac{b}{2} \mu$$

oder

$$p_{\max} = \frac{4}{3} \frac{P}{l b \mu}.$$

Im Falle  $h < \frac{3}{2} b \mu$  ergibt die Schwerpunktsbedingung

$$p_{\min} h \frac{h}{2} + \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2} h \frac{h}{3} = e h \frac{p_{\max} + p_{\min}}{2}$$

oder

$$\frac{p_{\max}}{p_{\min}} = \frac{2h - 3e}{3e - h}. \quad (3)$$

Gl. (2) lautet diesfalls  $P = l h \left( \frac{p_{\max} + p_{\min}}{2} \right)$ , und mit Gl. (3) wird daraus

$$p_{\max} = 2P \frac{2h - 3e}{l h^2} \quad \text{oder} \quad \boxed{p_{\max} = P \frac{4h - 3b\mu}{l h^2}}.$$

Man beachte, daß das Beispiel die Verhältnisse bei einer Verbindung von Welle und Nabe durch eine eingelegte Feder wiedergibt!

## Zweiter Teil.

## Kinematik.

## 6. Übung.

Zwischen zwei Wellen liegen  $n$  Zahnradgetriebe mit einer Gesamtübersetzung  $\dot{U}$ , die sich in die Einzelübersetzungen  $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dots, \dot{U}_n$  aufteilt und deren Ritzel die Teilkreisradien  $r_1, r_2, \dots, r_n$  haben. Infolge der Zahnspiele  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  der einzelnen Räderpaare kann man bei festgehaltener langsamer (schneller) Welle die schnelle (langsame) Welle um den Winkel  $\varphi_S$  ( $\varphi_L$ ) hin und herdrehen.  $\varphi_S$  und  $\varphi_L$  heißen die Totgänge an der schnellen, bzw. der langsamen Welle. Wie groß sind sie und in welcher Beziehung stehen sie untereinander?

Wir denken uns die langsame Welle festgehalten und durch ein Drehmoment alle Zahnflanken im entsprechenden Sinn anliegend. Wird jetzt das Zahnspiel  $\Delta_1$  durchlaufen, immer bei festgehaltener langsamer Welle, so dreht sich die schnelle Welle um den Winkel  $\frac{\Delta_1}{r_1} \dot{U}_2 \cdot \dot{U}_3 \dots \dot{U}_n$ . Wird das Zahnspiel  $\Delta_2$  durchlaufen, dann dreht sich die schnelle Welle um  $\frac{\Delta_2}{r_2} \dot{U}_3 \cdot \dot{U}_4 \dots \dot{U}_n$ . Sind sämtliche Zahnspiele durchlaufen, dann hat sich die schnelle Welle um insgesamt  $\varphi_S$  verdreht:

$$\varphi_S = \frac{\Delta_1}{r_1} \dot{U}_2 \cdot \dot{U}_3 \dots \dot{U}_n + \frac{\Delta_2}{r_2} \dot{U}_3 \cdot \dot{U}_4 \dots \dot{U}_n + \dots \frac{\Delta_n}{r_n}. \quad (1)$$

Bei festgehaltener schneller Welle bewirkt das Durchlaufen von  $\Delta_n$  eine Drehung der langsamen Welle um

$$\frac{\Delta_n}{\dot{U}_n r_n} \cdot \frac{1}{\dot{U}_{n-1} \dots \dot{U}_1} = \frac{\Delta_n}{r_n \cdot \dot{U}_1 \dots \dot{U}_n}$$

usw., schließlich das Durchlaufen von  $\Delta_1$  die Drehung  $\frac{\Delta_1}{r_1 \dot{U}_1}$ , so daß durch Summenbildung der einzelnen Drehungen folgt:

$$\varphi_L = \frac{\Delta_1}{r_1} \frac{1}{\dot{U}_1} + \frac{\Delta_2}{r_2} \frac{1}{\dot{U}_1 \dot{U}_2} + \dots \frac{\Delta_n}{r_n} \frac{1}{\dot{U}_1 \dot{U}_2 \dots \dot{U}_n}. \quad (2)$$

Durch Multiplikation von Gl. (2) mit  $\dot{U} = \dot{U}_1, \dot{U}_2 \dots \dot{U}_n$  folgt

$$\dot{U} \varphi_L = \frac{\Delta_1}{r_1} \dot{U}_2 \cdot \dot{U}_3 \dots \dot{U}_n + \frac{\Delta_2}{r_2} \dot{U}_3 \dot{U}_4 \dots \dot{U}_n + \dots \frac{\Delta_n}{r_n}$$

und durch Vergleich mit Gl. (1)

$$\frac{\varphi_S}{\varphi_L} = \ddot{U}.$$

Demnach verhalten sich die Totgänge an der schnellen und an der langsamen Welle wie die Gesamtübersetzung.

## 7. Übung.

Bestimme (auf kinematischem Weg), in welcher Richtung sich das in Abb. 6 dargestellte Fahrzeug in Bewegung setzt, wenn am

Ende des Hebels  $H$  eine von außen kommende Kraft in der eingezeichneten Richtung wirkt.

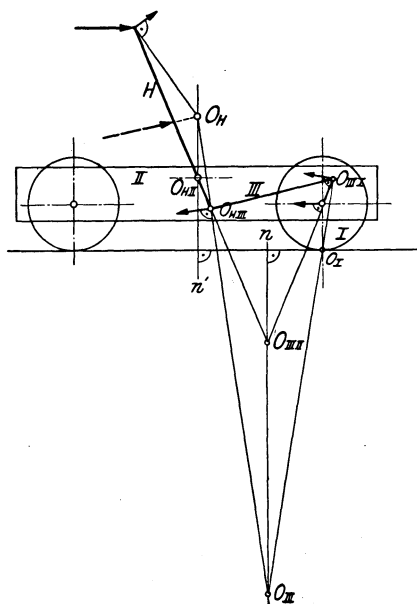


Abb. 6.

Damit Bewegung eingeleitet (Wucht erzeugt, Reibung überwunden) wird, muß positive Arbeit von der Kraft am Hebel geleistet werden, deren Angriffspunkt also jedenfalls eine Bewegungskomponente in Kraftrichtung haben muß. Wie die Fahrzeugbewegung mit der Bewegung des Hebelpunktes zusammenhängt, ist eine rein kinematische Angelegenheit (solange die angetriebene Achse nicht gleitet). Der Momentanpol  $O_I$  des angetriebenen Rades ist dessen Aufstandspunkt. Der Momentanpol  $O_{III II}$  der

Stange  $III$  gegenüber dem Fahrzeuggestell  $II$  ist der Schnitt der (verlängerten) Richtungen von Kurbelradius und Hebel  $H$ . Der absolute Pol  $O_{III}$  von  $III$  muß auf der Senkrechten  $n$  zur Fahrriichtung durch  $O_{III II}$  liegen. Der Pol  $O_{III I}$  von Stange  $III$  gegen das Rad  $I$  ist der Kurbelzapfen. Nach dem Satz der drei Pole muß  $O_{III}$  auf der Geraden  $O_I - O_{III I}$  liegen, wodurch in deren Schnittpunkt mit  $n$  der Punkt  $O_{III}$  gefunden ist. Da der Drehpunkt des Hebels  $H$  dessen Momentanpol  $O_{H II}$  gegen das

Fahrzeuggestell ist, liegt der absolute Pol  $O_H$  von  $H$  auf der durch  $O_{HII}$  gezogenen Senkrechten  $n'$  zur Fahrriichtung.

Das Gelenk zwischen  $H$  und  $III$  ist der Pol  $O_{HIII}$  von  $H$  gegen  $III$ . Wieder nach dem Satz der drei Pole muß auf  $O_{III}—O_{HIII}$  der absolute Pol  $O_H$  von  $H$  liegen, ist also der Schnitt der letztgenannten Geraden mit  $n'$ . Die Kraft am Ende von  $H$  bestimmt nach dem eingangs Gesagten den Drehsinn von  $H$  um den absoluten Pol  $O_H$ , wodurch wieder der Drehsinn von  $III$  um  $O_{III}$  und der des Rades  $I$  um  $O_I$  festgelegt ist. Bei der gezeichneten Sachlage entspricht dem eine der Kraftrichtung am Hebelnde entgegengesetzte Fahrzeugbewegung.

Ginge die Kraft am Hebel z. B. durch den Pol  $O_H$  (in der Abbildung gestrichelt), dann könnte sie keine Arbeit leisten und das Fahrzeug überhaupt nicht von der Stelle bewegen.

## 8. Übung.

Abb. 7 zeigt eine Gelenkkupplung zur Verbindung zweier Wellen, deren Mittel im allgemeinen nicht zusammenfallen (Abb. 7 zeigt die Kupplung bei zusammenfallenden Wellenmitteln). Man bestimme die Winkelgeschwindigkeit der Welle 2 aus der von Welle 1 im Verlaufe einer Umdrehung der letzteren, wenn die beiden Wellenmittel  $M_1, M_2$  um die kleine Strecke  $e$  gegenseitig versetzt sind.

Die Indizes  $z, 1, 2, r$  bezeichnen bzw. die Zwischenscheibe, die Welle 1, die Welle 2 und den ruhenden Raum.  $\omega_{z2}$  bedeutet dann z. B. die Winkelgeschwindigkeit des Systems  $z$  gegen das System 2.

Aus der Vereinigung von

$$\omega_{2r} = \omega_{1r} + \omega_{21} \quad \text{und} \quad \omega_{21} = \omega_{z1} + \omega_{z2} = \omega_{z1} - \omega_{z2}$$

entsteht unter Weglassung des Index  $r$ :

$$\omega_2 = \omega_1 + \omega_{z1} - \omega_{z2}. \quad (1)$$

Um  $\omega_{z1}$  und  $\omega_{z2}$  zu bestimmen, betrachte man eine kleine Verschiebung des Zwischenscheibenmittelpunktes  $M_z$  gegenüber System 1 bzw. 2 um  $\Delta_{z1}$  bzw.  $\Delta_{z2}$  (Abb. 8). Aus Symmetriegründen muß die Bahn von  $M_z$  in der Mittellage dieses Punktes

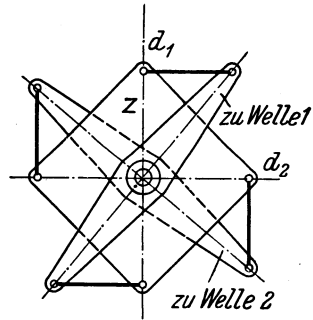


Abb. 7.

einen Wendepunkt haben, d. h.  $M_z$  verschiebt sich praktisch geradlinig. Die Lenkerachsen schneiden sich im Momentanzentrum von  $z$  gegen 1 bzw. 2, und es ist

$$\omega_{z1} = \frac{\dot{\Delta}_{z1}}{e_1}, \quad \omega_{z2} = \frac{\dot{\Delta}_{z2}}{e_2}. \quad (2)$$

Laut Abbildung ist sehr annähernd

$$\frac{r}{e_1} = \frac{\Delta_{z1}}{l}, \quad \frac{r}{e_2} = \frac{\Delta_{z2}}{l},$$

daher Gl. (2) übergeht in

$$\omega_{z1} = \frac{\dot{\Delta}_{z1} \Delta_{z1}}{r l}, \quad \omega_{z2} = \frac{\dot{\Delta}_{z2} \Delta_{z2}}{r l};$$

in Gl. (1) eingesetzt wird:

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{1}{r l} (\dot{\Delta}_{z1} \Delta_{z1} - \dot{\Delta}_{z2} \Delta_{z2}). \quad (3)$$

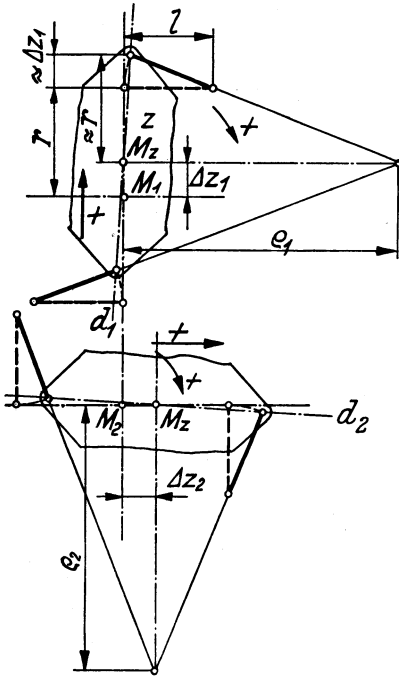


Abb. 8.

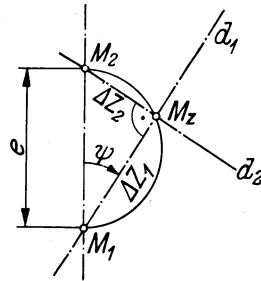


Abb. 9.

Fast genau geht durch jedes der beiden Wellenmittel stets eine der Diagonalen  $d_1$   $d_2$  der Zwischenscheibe, und es ist (Abb. 9):

$$\Delta_{z1} = e \cos \psi, \quad \Delta_{z2} = e \sin \psi$$

und daher

$$\dot{\Delta}_{z1} = -e \dot{\psi} \sin \psi,$$

$$\dot{\Delta}_{z2} = e \dot{\psi} \cos \psi.$$

Damit wird Gl. (3):

$$\omega_2 = \omega_1 - \frac{1}{r l} \cdot 2 e^2 \dot{\psi} \sin \psi \cos \psi.$$

$$\omega_2 = \omega_1 - \frac{e^2}{r l} \dot{\psi} \sin 2 \psi.$$

Insofern die Ungleichförmigkeit der Übertragung, wie es die Praxis verlangt, klein ist, kann  $\dot{\psi} = \omega_1$  gesetzt werden und  $\psi$  gleich dem Drehwinkel  $\varphi_1$  von Welle 1, so daß schließlich wird:

$$\omega_2 = \omega_1 \left( 1 - \frac{e^2}{r l} \sin 2\varphi_1 \right).$$

Der Winkelgeschwindigkeit von 1 überlagert sich eine Sinuslinie mit zwei Wellen je Umdrehung und der Amplitude  $\omega_1 \frac{e^2}{r l}$ .

### 9. Übung.

Das in Abb. 10 gezeigte Pendelgehänge wird im Punkt  $Q$  mit der senkrechten Kraft  $V$  belastet. Welche waagrechte Kraft  $H$  in  $Q$  ist zur Herstellung der kleinen waagrechten Auslenkung von  $Q$  im Betrage  $h$  erforderlich? (Geg.:  $a, b, c, \alpha$ .)

Für kleine Auslenkungen kann die Bahn von  $Q$  durch ihren Krümmungskreis ersetzt werden, dessen Radius  $q$  genannt werde.

Im Gleichgewichtsfall muß die Resultierende aus  $H$  und  $V$  radial zu liegen kommen, daher ist laut Abbildung  $\frac{H}{V} = \frac{h}{q}$  oder  $H = \frac{V}{q} \cdot h$ ;  $H$  ist somit proportional  $h$ , und wir führen die einer Federsteifigkeit analoge Größe  $C$  ein:

$$C = \frac{H}{h} = \frac{V}{q}.$$

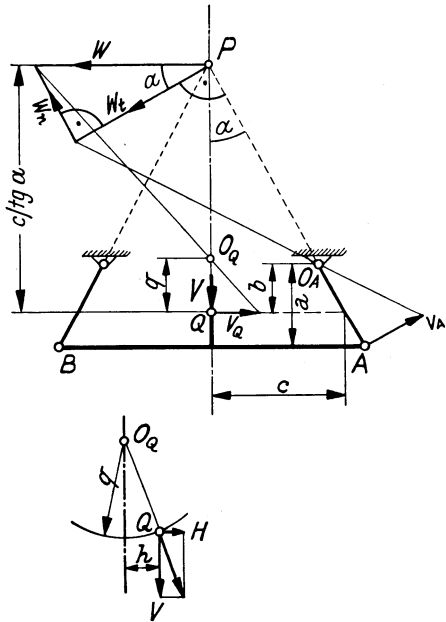


Abb. 10.

Nach der bekannten kinematischen Methode denken wir uns aus dem gegebenen Krümmungsmittelpunkt  $O_A$  der Bahn von  $A$  den Krümmungsmittelpunkt  $O_Q$  der Bahn von  $Q$  gemäß Abb. 10 konstruiert.  $P$  ist der Momentanpol für den Körper  $ABQ$ ,  $W$  die Polwechselgeschwindigkeit mit ihren Komponenten  $W_t$  und  $W_n$ ,



$V_A$  bzw.  $V_Q$  die Geschwindigkeit der Punkte  $A$  bzw.  $Q$ . Laut Abb. 10 ist

$$\frac{W}{V_Q} = \frac{PO_Q}{O_Q Q} = \frac{c/\operatorname{tg} \alpha - q}{q} = \frac{c}{q \operatorname{tg} \alpha} - 1$$

oder

$$\frac{1}{q} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{c} \left( 1 + \frac{W}{V_Q} \right), \quad (2)$$

weiter

$$\frac{W \cos \alpha}{V_A} = \frac{PO_A}{O_A A}$$

oder

$$W = V_A \frac{PO_A}{O_A A \cos \alpha} = V_A \frac{(c/\operatorname{tg} \alpha - b)/\cos \alpha}{a}$$

oder

$$W = \frac{c - b \operatorname{tg} \alpha}{a \sin \alpha} V_A. \quad (3)$$

Außerdem ist gemäß der Bedeutung des Pols:

$$\frac{V_Q}{V_A} = \frac{PQ}{PA} = \frac{PQ}{(PQ + a - b)/\cos \alpha} \quad \text{und mit } PQ = c/\operatorname{tg} \alpha$$

$$V_Q = V_A \frac{c \cos \alpha}{c + (a - b) \operatorname{tg} \alpha}. \quad (4)$$

Indem man Gl. (3) und (4) in Gl. (2) einsetzt und diese Gleichung sodann in Gl. (1), erhält man unter Anwendung der Beziehung  $1/\cos^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$

$$C = V \left[ \frac{1}{c} \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{a} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \left( 1 - \frac{b}{c} \operatorname{tg} \alpha \right) \left( 1 - \frac{b}{c} \operatorname{tg} \alpha + \frac{a}{c} \operatorname{tg} \alpha \right) \right].$$

Zur Probe setzen wir einmal  $\alpha = 0$  und lassen andermal  $P$  mit  $Q$  zusammenfallen, was  $c = 0$ ,  $b < 0$  bedeutet und erhalten  $C = \frac{V}{a}$  bzw.  $C = \infty$ , was für diese beiden Sonderfälle auch unmittelbar folgt.

Dritter Teil.

## Kinetik und Schwingungen.

### 10. Übung.

Eine Kugel (Masse  $m$ ) läuft (Abb. 11) infolge der Anziehung durch eine in großer Entfernung  $R_s$  befindliche andere Kugel

(Masse  $M$ ) in einer Kegelschnittbahn. Es ist das Gravitationsfeld anzugeben, wie es ein Beobachter auf  $m$  feststellen würde. (Angabe der Äquipotentialflächen.)

Es handelt sich also um Bestimmung der Relativkräfte, und zwar für die Masseneinheit und bezüglich des Achsenkreuzes, welches in der Kugel  $m$  verankert ist.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{P}_{\text{abs}} = \text{Absolutkraft} \\ \overline{P}_{\text{rel}} = \text{Relativkraft} \\ \overline{P}_f = \text{Führungskraft} \end{array} \right\} \overline{P}_{\text{abs}} = \overline{P}_f + \overline{P}_{\text{rel}}$$

oder

$$\overline{P}_{\text{rel}} = \overline{P}_{\text{abs}} - \overline{P}_f. \quad (1)$$

$\overline{P}_{\text{abs}}$  setzt sich zusammen aus der Anziehungskraft seitens der Kugel  $M$  und der seitens der Kugel  $m$ :

$$\overline{P}_{\text{abs}} = \overline{P}_M + \overline{P}_m. \quad (2)$$

$\overline{P}_f$  ist die Kraft, welche der Masseneinheit die Beschleunigung des Koordinatensystems, also die des Schwerpunktes (Mittelpunktes)  $S$  von  $m$  erteilt. Da die Schwerpunktsbewegung von  $m$  durch die Anziehung der in  $S$  vereinigt zu denkenden Masse  $m$  seitens  $M$  erfolgt, ist  $\overline{P}_f = \overline{P}_M^S$ . ( $\overline{P}_M^S$  Anziehung der Masseneinheit in  $S$  seitens  $M$ .) Dies sowie Gl. (2) wird in Gl. (1) eingesetzt:

$$\overline{P}_{\text{rel}} = \overline{P}_m + (\overline{P}_M - \overline{P}_M^S). \quad (3)$$

Die Relativkraft ist somit gleich der Anziehung der Masseneinheit seitens  $m$ , vermehrt um den Unterschied der Anziehung im Beobachtungspunkt gegenüber dem Punkt  $S$ , und zwar seitens  $M$ .

Nach dem NEWTONSchen Gravitationsgesetz ( $k$  Gravitationskonstante) ist

$$P_m = k \frac{m}{r^2}, \quad P_M = k \frac{M}{R^2}, \quad P_M^S = k \frac{M}{R_s^2}. \quad (4)$$

In einem Bereich um  $S$ , der gegenüber  $R_s$  klein ist (Abb. 11), hat

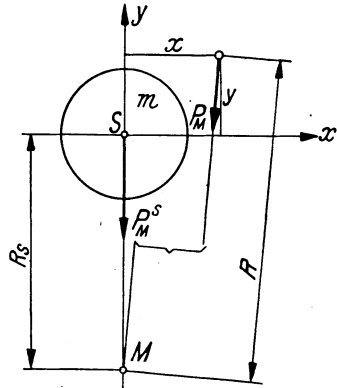


Abb. 11.

$\overline{P_M} - \overline{P_M^S}$  annähernd die Größe  $P_M - P_M^S$  und ist annähernd  $\parallel S y$ . Weil  $R \approx R_s + y$ , ist nach Gl. (4)

$$P_M - P_M^S = k M \left[ \frac{1}{(R_s + y)^2} - \frac{1}{R_s^2} \right]$$

und annähernd (Kurve durch ihre Tangente ersetzt)

$$P_M - P_M^S = -\frac{2 k M}{R_s^3} y.$$

Die Kraft  $P_M - P_M^S$  hat ein Potential  $-\int (P_M - P_M^S) dy + \text{Konst.} = \frac{k M}{R_s^3} y^2$ , die Kraft  $P_n$  hat bekanntlich das Potential  $\frac{k m}{r} + \text{Konst.}$  Im Kraftfeld der  $P_{\text{rel}}$  ist daher im Hinblick auf Gl. (3) das Potential  $U_{\text{rel}} = k \left[ \frac{m}{r} + \frac{M}{R_s^3} y^2 \right] + \text{Konst.}$  oder, da die Konstante, als willkürlich, Null gesetzt werden kann:

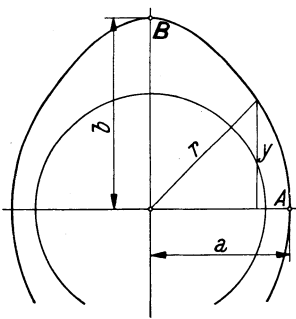


Abb. 12.

$$U_{\text{rel}} = k \left[ \frac{m}{r} + \frac{M}{R_s^3} y^2 \right]. \quad (5)$$

Die Äquipotentialflächen lassen sich nach dieser Gleichung leicht punktweise bestimmen. Sie sind naturgemäß Drehflächen; die Meridianlinie einer solchen ist in Abb. 12 gezeichnet. Für den Scheitel A ist  $y = 0$ ,  $r = a$ , und es ergibt dies in Gl. (5) eingesetzt:

$$a = \frac{m k}{U_{\text{rel}}}. \quad (6)$$

Für den Scheitel B ist  $y = r = b$ , und es ergibt dies in Gl. (5) eingesetzt:

$$b^3 - U_{\text{rel}} \frac{R_s^3}{M k} b + m \frac{R_s^3}{M} = 0. \quad (7)$$

Mit Berücksichtigung von Gl. (6) läßt sich auch schreiben:

$$b^3 - \frac{1}{a} \frac{m}{M} R_s^3 b + \frac{m}{M} R_s^3 = 0. \quad (8)$$

Eine der Wurzeln von Gl. (7) bzw. Gl. (8) ergibt die Lage des Scheitels B, die beiden anderen bestimmen isolierte Punkte der Kurve.

*Anmerkung:* Die Oberfläche von Flüssigkeit auf der Kugel würde eine Äquipotentialfläche bilden. Dreht sich die Kugel um eine Achse, die durch S geht (und nicht mit  $R_s$  zusammenfällt!),

dann ist die Tiefe der Flüssigkeit über einem Punkt der Kugeloberfläche periodisch veränderlich. In dieser Art erklärt unser Beispiel in strenger Weise die Erscheinung von Ebbe und Flut.

### 11. Übung.

Der in Abb. 13 gezeigte Beschleunigungsmesser besteht aus dem Hebel *1*, der durch die einstellbare und meßbare Kraft *F* der Feder *2* gegen die beiden auf dem Gestell *3* des Apparats angebrachten Stützen *4* und *5* gedrückt wird; wenn *1* auf *4* und *5* aufliegt, ist ein elektrischer Stromkreis geschlossen. Wird *3* im Pfeilsinne beschleunigt bewegt, dann hängt es von *F* und von der Beschleunigung *b* ab, ob sich *1* von *5* abhebt oder nicht, was mittels eines in den Stromkreis geschalteten Mikrophons beurteilt wird. Wiederholt man den gleichen Bewegungsvorgang mehrmals mit verschiedenen Federkräften *F*, dann läßt sich die größte vorkommende Beschleunigung eingrenzen.

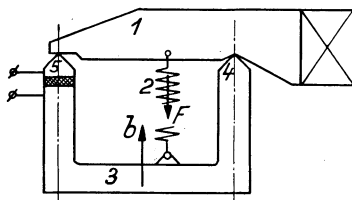


Abb. 13.

1. In welchem Zusammenhang stehen untereinander die Abmessungen der Anordnung, die Kraft *F* und die Beschleunigung *b*<sub>0</sub>, bei der der Druck zwischen *1* und *5* eben verschwindet?

2. Wie groß ist die Empfindlichkeit des Gerätes, ausgedrückt durch das Verhältnis  $e = \frac{b_{15}}{\Delta b}$ , wobei *b*<sub>15</sub> die Beschleunigung ist, mit der sich *1* von *5* entfernt, wenn die Beschleunigung *b* des Gestelles den Wert *b*<sub>0</sub> um  $\Delta b$  übersteigt?

Nach dem Satz Absolutkraft = Führungskraft + Relativkraft kommen für das Verhalten von *1* gegen *3* (Relativkräfte) die tatsächlichen Kräfte (Absolutkräfte) im Verein mit der im Schwerpunkt *S* angreifenden Kraft  $-b m$  (negative Resultierende der auf die einzelnen Teile der Hebelmasse *m* wirkenden Führungskräfte) in Betracht.

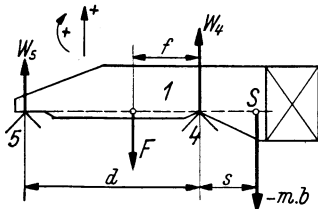


Abb. 14.

Es ergibt sich daher, wenn der Hebel in relativer Ruhe ist, der Auflagerdruck *W*<sub>5</sub> bei *5* an Hand von Abb. 14 aus der Momentengleichung um Auflager *4*:  $m b s + W_5 d - F \cdot f = 0$

zu  $W_5 = \frac{Ff - mb_0s}{d}$ ;  $W_5$  wird gerade Null, wenn  $Ff - mb_0s = 0$ ,  
oder

$$\boxed{b_0 = \frac{Ff}{ms}}. \quad (1)$$

Im abgehobenen Zustand gilt für die Drehung mit der Winkelbeschleunigung  $\gamma$  um die relativ feste Drehachse durch  $d$  bei einem zugehörigen Trägheitsmoment  $J_4$ :  $J_4\gamma = mb_0s - Ff$ ; daraus folgt mit  $b_{15} = \gamma d$ :

$$b_{15} = \frac{mb_0s - Ff}{J_4} d. \quad (2)$$

Es ist  $b = b_0 + \Delta$  und mit Gl. (1)  $b = \frac{Ff}{ms} + \Delta$ , was wir in Gl. (2) einsetzen:

$$b_{15} = \frac{msd}{J_4} \Delta.$$

Daraus folgt die gesuchte Empfindlichkeit  $e = \frac{b_{15}}{\Delta}$  zu  $e = \frac{msd}{J_4}$ ; führen wir den Trägheitsradius  $\varrho_4$  gemäß  $J_4 = m\varrho_4^2$  ein, so wird

$$e = \frac{sd}{\varrho_4^2}. \quad (3)$$

Das Trägheitsmoment  $J_s$  um den Schwerpunkt hängt mit  $J_4$  zusammen durch  $J_4 = J_s + ms^2$ , so daß auch gilt:

$$e = \frac{\frac{d}{s}}{1 + \frac{J_s}{ms^2}};$$

führen wir die Definition von  $J_s$  ein,  $J_s = \sum d m \cdot r^2$ , so ergibt sich

$$\boxed{e = \frac{\frac{d}{s}}{1 + \frac{1}{m} \sum \left(\frac{r}{s}\right)^2 dm}}. \quad (4)$$

Aus Gl. (4) folgt, daß die Empfindlichkeit von den absoluten Abmessungen nicht abhängt. Für das richtige Anzeigen des Gerätes ist die Starrheit auch des Hebels Grundbedingung; Gl. (4) lehrt, daß die Masse möglichst konzentriert in  $S$  angeordnet, und im übrigen die Steifigkeit des Hebels mit kleinstem Gewicht erzielt werden sollte.

## 12. Übung.

Eine zweizylindrige Dampflokomotive nach Abb. 15 mit der Masse  $M_l$  habe die hin- und hergehenden Triebwerkmassen  $m$ . Die drehenden Massen  $m_a$  sind ausgeglichen und haben das Trägheitsmoment  $J$ . Die übrige Masse der Lokomotive sei  $M$ . Man ermittle den periodischen Verlauf der Geschwindigkeit  $v$  der leerlaufenden, reibungs- und widerstandslos und mit einem spiel-freien Triebwerk gedachten Lokomotive (Treibstangenlänge  $\infty$ ).

Da keine Arbeitsleistung erfolgt, muß die Wucht  $L$  des Systems unveränderlich sein.

Der Kolbenweg relativ zum Rahmen beträgt (Abb. 15):

a) rechte Seite  $\xi_1 = r \sin \varphi_1$ ,

b) linke Seite  $\xi_2 = -r \cos \varphi_1$ .

Die entsprechenden Geschwindigkeiten sind daher:

a)  $\dot{\xi}_1 = r \cos \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1$ ,

b)  $\dot{\xi}_2 = r \sin \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1$ .

Die absoluten Geschwindigkeiten  $v_1$  bzw.  $v_2$  der hin- und hergehenden Massen sind daher:

a)  $v_1 = v + r \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1$ ,

b)  $v_2 = v + r \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1$

und ihre gesamte Wucht

$$L_m = \frac{1}{2} \frac{m}{2} v_1^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{2} v_2^2 = \frac{1}{2} \frac{m}{2} [(v + r \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1)^2 + (v + r \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1)^2]$$

oder ausgeführt

$$L_m = \frac{1}{2} \frac{m}{2} \left[ 2v^2 + (r \dot{\varphi}_1)^2 + 2\sqrt{2}v(r \dot{\varphi}_1) \cos \left( \varphi_1 - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (1)$$

Wir nennen

$$\left( \varphi_1 - \frac{\pi}{4} \right) = \varphi, \quad (2)$$

es ist der Winkel, den die Symmetrale der beiden Kurbeln mit der Vertikalen bildet; reines Rollen der Räder vorausgesetzt, ist

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{v}{R}. \quad (3)$$

Gl. (2) und (3) setzen wir in Gl. (1) ein:

$$L_m = \frac{1}{2} \frac{m}{2} v^2 \left[ 2 + \left( \frac{r}{R} \right)^2 + 2\sqrt{2} \left( \frac{r}{R} \right) \cos \varphi \right]. \quad (4)$$

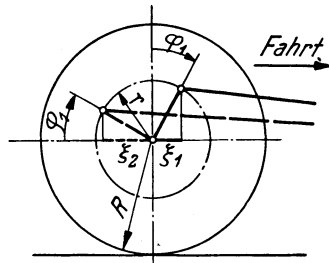


Abb. 15.

Die Radsätze haben die Drehwucht  $\frac{1}{2} J \dot{\varphi}_1^2$  und eine Wucht der Schwerpunktsbewegung von  $\frac{1}{2} m_r v^2$ , somit insgesamt

$$L_{m\dot{a}} = \frac{1}{2} (J \dot{\varphi}_1^2 + m_d v^2),$$

somit wegen Gl. (3)

$$L_{m\dot{a}} = \frac{1}{2} v^2 \left[ m_d + \frac{J}{R^2} \right]. \quad (5)$$

Die noch verbleibende Lokomotivmasse  $M$  hat die Wucht

$$L_M = \frac{1}{2} M v^2. \quad (6)$$

Die Addition von Gl. (4), (5) und (6) ergibt die Gesamtwucht  $L$  des Systems:

$$L = \frac{1}{2} v^2 \left[ m + m_d + M + \frac{J + \frac{m}{2} r^2}{R^2} + \sqrt{2} m \frac{r}{R} \cos \varphi \right].$$

Hierin ist  $m + m_d + M = M_l$ ; außerdem setzen wir

$$M_l + \frac{J + \frac{m}{2} r^2}{R^2} = M_r. \quad (7)$$

$M_r$  kann man die *konstante* reduzierte Lokomotivmasse nennen; es ist also

$$L = \frac{1}{2} v^2 \left( M_r + \sqrt{2} m \frac{r}{R} \cos \varphi \right). \quad (8)$$

Die Geschwindigkeit der Lokomotive für  $\cos \varphi = 0$ , also für  $\varphi = \frac{\pi}{2}, 3 \frac{\pi}{2}, 5 \frac{\pi}{2}, \dots$  nennen wir  $v_0$ ; für diese Zustände lautet Gl. (8):  $L = \frac{1}{2} v_0^2 M_r$ . Wegen des unveränderlichen  $L$  ist

$$\frac{1}{2} v^2 \left( M_r + \sqrt{2} m \frac{r}{R} \cos \varphi \right) = \frac{1}{2} v_0^2 M_r$$

und daraus folgt:

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{1 + \sqrt{2} \frac{m}{M_r} \frac{r}{R} \cos \varphi}}.$$

$\varphi$  soll durch den Weg  $s$  der Lokomotive ausgedrückt, also  $\varphi = \frac{s}{R}$  eingesetzt werden. Dann wird:

$$\boxed{v = \frac{v_0}{\sqrt{1 + \sqrt{2} \frac{m}{M_r} \cdot \frac{r}{R} \cos \frac{s}{R}}}}. \quad (9)$$

Falls, wie tatsächlich,  $\sqrt{2} \frac{m}{M_r} \frac{r}{R} \cos \varphi$  klein gegen 1 ist, ist angenähert

$$v = v_0 \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{m}{M_r} \frac{r}{R} \cos \frac{s}{R} \right).$$

Zur Ermittlung des Zeit-Weg-Zusammenhanges wird in Gl. (9)

$v = \frac{ds}{dt}$  gesetzt:

$$\sqrt{1 + \sqrt{2} \frac{m}{M_r} \frac{r}{R} \cos \frac{s}{R}} ds = v_0 dt.$$

Kann der Wurzelausdruck angenähert  $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{m}{M_r} \cdot \frac{r}{R} \cos \frac{s}{R}$  gesetzt werden, so wird nach Integration

$$s + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{m}{M_r} \cdot r \sin \frac{s}{R} = v_0 t + C.$$

Läßt man  $t = 0$  mit  $s = 0$  zusammenfallen, dann verschwindet  $C$  und es bleibt

$$s - v_0 t = - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{m}{M_r} r \sin \frac{s}{R}.$$

Man sieht:  $v_0 t$  wäre der Weg, der unter dem Einfluß der konstanten Geschwindigkeit  $v_0$  zurückgelegt würde. Ihm überlagert sich ein periodisch veränderlicher Zusatzweg, dessen Amplitude  $\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{m}{M_r} \cdot r$  beträgt.

### 13. Übung.

Bei der in Abb. 16 gezeichneten Luftpumpe wird der Mittelpunkt  $M$  des Verdrängers  $V$  durch den Kurbelzapfen  $K$  auf einem Kreis im Gehäuse  $G$  herumgeführt, während die Achse  $aa$  der mit  $V$  starr verbundenen Zunge  $Z$  stets durch den Punkt  $A$  geht.

Zu ermitteln ist:

- der Druck zwischen Führung und Zunge in  $A$ ;
- das Biegemoment in der Zungenwurzel  $W$ , beide hervorgerufen durch die Trägheitswirkung des Verdrängers (Schwerpunkt von Verdränger samt Zunge in  $M$ , Ermittlung in der Umgebung der Stellen, in welchen die gesuchten Größen ihr Maximum haben;  $d/r$  verhältnismäßig groß, etwa 5).

Die Schwerpunktsbewegung von Verdränger samt Zunge ist der gleichförmige Umlauf auf dem Kurbelkreis; die sie erzwingende



Kraft (Zentripetalkraft) wirkt unmittelbar vom Kurbelzapfen her. Der Druck  $P$  in  $A$  hat daher nur das Moment  $\mathfrak{M}$  zu liefern, welches die Drehung von  $V + Z$  um den Schwerpunkt bewirkt, wobei mit der Winkelbeschleunigung  $\gamma$  und dem Schwerpunktsträgheitsmoment  $J$  von Verdränger samt Zunge ist:

$$\mathfrak{M} = J \cdot \gamma. \quad (1)$$

Die Massenwirkungen sind offenbar am größten in der Umgebung der Lage, bei welcher  $aa$  den Kurbelkreis tangiert (Abb. 17). Dieser Lage liegt unser Achsenkreuz zugrunde.

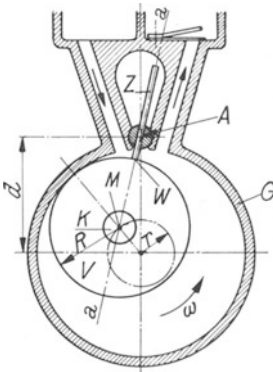


Abb. 16.

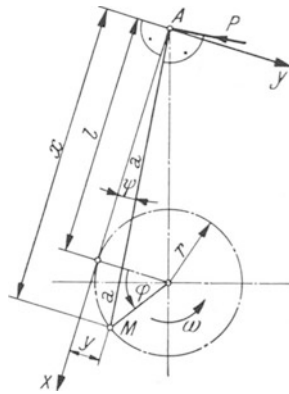


Abb. 17.

Weil  $\gamma = \frac{d^2 \psi}{dt^2}$  und  $\psi \approx \frac{y}{x}$ , schreibt sich Gl. (1):

$$\mathfrak{M} = J \frac{d^2 \left( \frac{y}{x} \right)}{dt^2} = \frac{J}{x} \left[ \left( \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{y}{x} \right) - 2 \frac{dx}{dt} \left( \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} \frac{y}{x} \right) \right].$$

Man entnimmt der Abb. 17

$$\left. \begin{aligned} x &= l + r \sin \varphi, \\ y &= r (1 - \cos \varphi), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Gl. (2) differenziert gibt:

$$\frac{dx}{dt} = r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}.$$

Da  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$  die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Kurbeldrehung ist, gilt

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= r \omega \cos \varphi, \\ \frac{dy}{dt} &= r \omega \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Gl. (3) differenziert gibt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -r \omega^2 \sin \varphi, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= r \omega^2 \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Gl. (2), (3) und (4) werden in die letzterhaltene Gleichung für  $\mathfrak{M}$  eingesetzt:

$$\mathfrak{M} = \frac{J \frac{r}{l} \omega^2}{\left(1 + \frac{r}{l} \sin \varphi\right)^3} \left[ \cos \varphi + \frac{r}{l} \sin \varphi (1 - \cos \varphi) + \left(\frac{r}{l}\right)^2 (1 - \cos \varphi)^2 \right].$$

In der eckigen Klammer treten zweites und drittes Glied für den Bereich von  $\varphi$  zwischen etwa  $\pm 40^\circ$  gegen das erste Glied völlig zurück, so daß angenähert gilt:

$$\mathfrak{M} = J \frac{r}{l} \omega^2 \frac{\cos \varphi}{\left(1 + \frac{r}{l} \sin \varphi\right)^3}. \quad (5)$$

Der gesuchte Druck  $P$  der Führung gegen die Zunge hat in unserem Bereich sehr angenähert den Hebelarm  $l + r \sin \varphi = l \left(1 + \frac{r}{l} \sin \varphi\right)$  bezüglich  $M$ , so daß  $\mathfrak{M} = P l \left(1 + \frac{r}{l} \sin \varphi\right)$  und daraus mit Gl. (5) wird:

$$P = J \frac{r}{l^2} \omega^2 \frac{\cos \varphi}{\left(1 + \frac{r}{l} \sin \varphi\right)^4}. \quad (6)$$

Der Größtwert von  $P$  tritt offenbar für  $\varphi = 0$  ein und ist

$$P_{\max} = J \frac{r}{l^2} \omega^2. \quad (7)$$

Das Biegemoment an der Wurzel der Zunge ist  $\mathfrak{M}_b = P (l + r \sin \varphi - R) = \mathfrak{M} - R P$  und mit Gl. (5) und (6)

$$\mathfrak{M}_b = J \frac{r}{l} \omega^2 \frac{\cos \varphi \left(1 + \frac{r}{l} \sin \varphi - \frac{R}{l}\right)}{\left(1 + \frac{r}{l} \sin \varphi\right)^4}.$$

14. Übung.

Welche Massenwirkungen ruft die in Abb. 18 gezeichnete Taumelscheibe hervor, wenn die Kurbelwelle mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_K$  und der Winkelbeschleunigung  $\gamma_K$  umläuft?

Damit jeder Taumelscheibenpunkt nach jedem Umlauf der Kurbelwelle wieder an seinen Platz zurückkehrt, muß das Kegelhäderpaar die Übersetzung 1:1 haben. Daher halbiert die

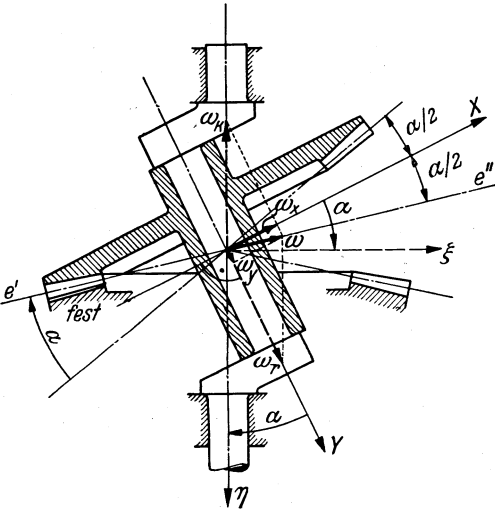


Abb. 18.

Teilkegelerzeugende  $e'$ ,  $e''$  den Winkel  $180 - \alpha$ . Nun ist  $e'$ ,  $e''$  die Momentanachse der absoluten Taumelscheibenbewegung, und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um  $e'$ ,  $e''$  folgt aus der Zusammensetzung von  $\omega_K$  mit der um die Kurbelzapfenachse mit  $\omega_r$  erfolgenden Relativedrehung der Scheibe gegen die Kurbelwelle. Es ergibt sich aus der Abbildung  $\omega_r = \omega_K$  und

$$\omega = 2 \omega_K \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (1)$$

Wir legen ein Achsenkreuz  $x y$  so in die gemeinsame Ebene von Kurbelwellen- und Kurbelzapfenachse, daß die  $y$ -Achse mit letzterer zusammenfällt und zerlegen  $\omega$  in  $\omega_x$  und  $\omega_y$ . Unter der Voraussetzung, daß das Trägheitseffipsoid der Scheibe ein Drehellipsoid um die  $y$ -Achse ist, fällt der Drall  $\Theta$  der Scheibe stets mit  $x y$ -Ebene zusammen und hat die Komponenten

$$\Theta_x = \omega_x J_x, \quad (2)$$

$$\Theta_y = \omega_y J_y. \quad (3)$$

Darin sind  $J_x$  und  $J_y$  die Trägheitsmomente der Scheibe um  $x$  bzw.  $y$ . Laut Abbildung ist  $\omega_x = \omega \cos \frac{\alpha}{2}$ ,  $\omega_y = \omega \sin \frac{\alpha}{2}$ ; und mit Gl. (1):  $\omega_x = \omega_K \sin \alpha$ ,  $\omega_y = \omega_K (1 - \cos \alpha)$ ; hiermit verändern sich die Gl. (2) und (3) in:

$$\Theta_x = J_x \omega_K \sin \alpha, \quad (4)$$

$$\Theta_y = J_y \omega_K (1 - \cos \alpha). \quad (5)$$

Nun legen wir noch das in Abb. 19 gezeigte  $\xi, \eta$ -Achsenkreuz und erhalten die darauf bezogenen Drallkomponenten zu

$$\Theta_\xi = \Theta_x \cos \alpha + \Theta_y \sin \alpha,$$

$$\Theta_\eta = \Theta_y \cos \alpha - \Theta_x \sin \alpha$$

und mit Gl. (4) und (5)

$$\Theta_\xi = \omega_K \left( J_y \sin \alpha - \frac{J_y - J_x}{2} \sin 2\alpha \right),$$

$$\Theta_\eta = \omega_K \times$$

$$\left( J_y \cos \alpha - \frac{J_y - J_x}{2} \cos 2\alpha - \frac{J_y + J_x}{2} \right).$$

Durch Ableiten, wobei  $\frac{d\omega_K}{dt} = \gamma_K$ , folgen die Komponenten der Dralländerungen je Zeiteinheit in der  $\xi$ - $\eta$ -Ebene zu

$$\frac{d\Theta_\xi}{dt} = \gamma_K \times$$

$$\left[ J_y \sin \alpha - \frac{J_y - J_x}{2} \sin 2\alpha \right], \quad (6)$$

$$\frac{d\Theta_\eta}{dt} = \gamma_K \left[ J_y \cos \alpha - \frac{J_y - J_x}{2} \cos 2\alpha - \frac{J_y + J_x}{2} \right]. \quad (7)$$

Nun dreht sich die  $\xi$ - $\eta$ -Ebene und der in ihr liegende Drallvektor  $\Theta$  mit  $\omega_K$ ; infolgedessen entsteht senkrecht dazu, in der  $\zeta$ -Richtung, eine absolute zeitbezogene Dralländerung von der Größe

$$\omega_K \cdot \Theta_\xi = \omega_K^2 \left[ J_y \sin \alpha - \frac{J_y - J_x}{2} \sin 2\alpha \right],$$

während durch  $\frac{d\Theta_\xi}{dt}$  und  $\frac{d\Theta_\eta}{dt}$  schon die absoluten Dralländerungen je Zeiteinheit in den Richtungen  $\xi$  bzw.  $\eta$  gegeben sind.

Die Kräfte, welche die Bewegung bewirken, haben ein Moment, welches der absoluten Dralländerung je Zeiteinheit gleich ist. Als Reaktionen dazu haben die Massenwirkungen ein Moment  $M^m$  mit den Komponenten:

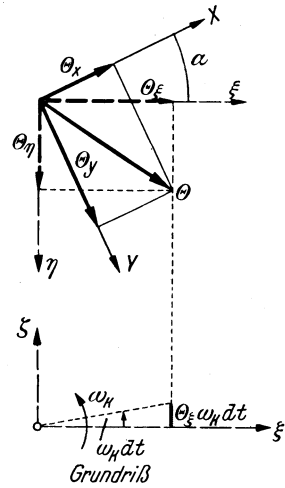


Abb. 19.

$$\begin{aligned}
 M_{\xi}^m &= -\gamma_K \left[ J_y \sin \alpha - \frac{J_y - J_x}{2} \sin 2\alpha \right], \\
 M_{\eta}^m &= -\gamma_K \left[ J_y \cos \alpha - \frac{J_y - J_x}{2} \cos 2\alpha - \frac{J_y + J_x}{2} \right], \\
 M_{\zeta}^m &= -\omega^2 \left[ J_y \sin \alpha - \frac{J_y - J_x}{2} \sin 2\alpha \right].
 \end{aligned}$$

Da man den Schwerpunkt der Scheibe in das Zentrum unseres Koordinatensystems legen wird, er somit dauernd ruht und daher keine resultierende Massenwirkungskraft besteht, rührt  $M^m$  von einem reinen Kräftepaar her. Bei gleichförmigem Umlauf,  $\gamma_K = 0$ , bleibt nur  $M_m = M_{\zeta}^m$  übrig,  $M_{\xi}$  und  $M_{\eta}$  verschwinden.

### 15. Übung.

Abb. 20 zeigt den Antrieb eines Radsatzes durch einen elektrischen Motor mittels eines Wurmgetriebes mit der Übersetzung  $\ddot{u}$ . Das Getriebegehäuse, mit dem auch der Motorständer starr verbunden ist, ist auf der Radachse gelagert und bei  $A$  federnd am Fahrzeugg Rahmen aufgehängt. Durch Gleisunebenheiten bewege

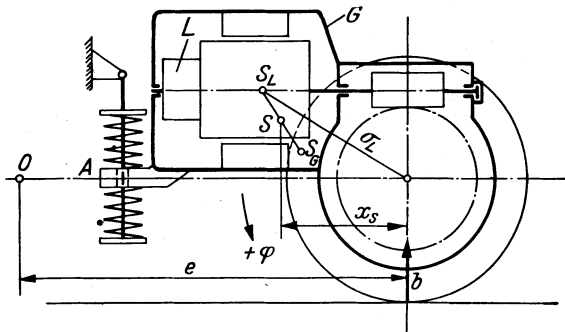


Abb. 20.

sich der Radsatz mit der großen Beschleunigung  $b$  nach aufwärts, wobei er aber völlig gleichmäßig weiter rotieren möge.

Welcher vertikale Druck der Schienen auf die Räder entsteht durch die Trägheitswirkungen des Antriebes?

Um welchen Punkt dreht sich das Antriebsgehäuse?

Welches Drehmoment an der Achse ist nötig, um die gleichmäßige Rotation des Radsatzes aufrechtzuerhalten?

(Bei der Bewegung des Punktes  $A$  entstehen zusätzliche

Kräfte infolge der Deformation der Aufhängefedern. Abgesehen davon, daß diese Verformungen und daher auch die zusätzlichen Kräfte zu Bewegungsbeginn Null sind, sind letztere im Vergleich mit den Trägheitskräften bei großen, kurz andauernden Werten von  $b$ , die vor allem interessieren, vernachlässigbar.)

Statt einer gleichförmigen Drehung des Radsatzes können wir dynamisch gleichwertig der Untersuchung zugrunde legen, daß er sich dauernd nicht drehen möge.

Wir wenden auf die Drehung des Antriebsatzes um die Radachse den Satz von Arbeit und Wucht an, müssen jedoch, da unser Bezugssystem mit  $b$  nach oben beschleunigt bewegt wird, an jedem Massenteilchen  $dm$  die Kraft  $b \cdot dm$  nach unten (negative Führungskraft) anbringen, was als Resultierende die im Schwerpunkt  $S$  der Gesamtmasse  $M$  angreifende Kraft  $M \cdot b$ , nach unten gerichtet, ergibt.

Man sieht, Abb. 20, daß  $M \cdot b$  den Antrieb entgegen dem Uhrzeiger drehen will; wir nennen  $\varphi$  den bezüglichen Drehwinkel, während  $\psi$  der Drehwinkel des Läufers in seinen Lagern sei.

Die Wucht  $L_G$  des Gehäuses ist  $L_G = \frac{1}{2} J_G \cdot \dot{\varphi}^2$ . Darin ist  $J_G$  das Trägheitsmoment des Gehäuses um die Radsatzachse.

Die Wucht  $L_L$  des Läufers ist, falls er dynamisch symmetrisch bezüglich seiner Lagerachse ist,

$$\begin{aligned} L_L &= \frac{1}{2} J_L^S \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} i \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} M_L (\sigma_L \dot{\varphi})^2 = \\ &= \frac{1}{2} (J_L^S + M_L \sigma_L^2) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} i \dot{\psi}^2. \end{aligned}$$

Darin ist  $J_L^S$  das Trägheitsmoment des Läufers um seine zur Radachse parallele Schwerpunktachse.  $i$  das Trägheitsmoment des Läufers um die Achse seiner Lagerung,  $M_L$  die Läufermasse.

Da (STEINERScher Satz)  $J_L^S + M_L \sigma_L^2 = J_L$ , wobei  $J_L$  das Trägheitsmoment des Läufers um die Radachse ist, gilt

$$L_L = \frac{1}{2} J_L \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} i \dot{\psi}^2$$

und für die Gesamtwucht

$$L = L_G + L_L = \frac{1}{2} (J_G + J_L) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} i \dot{\psi}^2. \quad (1)$$

$J_G + J_L = J$  ist das Trägheitsmoment des gesamten Antriebes (ohne Radsatz) um die Radsatzachse. Dreht sich das Gehäuse mit der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  um die Radachse, dann ist,

wenn der Radsatz sich nicht dreht, die Winkelgeschwindigkeit  $\psi$  des Läufers in seinen Lagern  $\dot{\psi} = \ddot{u} \dot{\varphi}$ .

Somit wird aus Gl. (1)  $L = \frac{1}{2} (J + \ddot{u}^2 i) \dot{\varphi}^2$  und die elementare Änderung der Wucht

$$dL = (J + \ddot{u}^2 i) \dot{\varphi} d\dot{\varphi}. \quad (2)$$

Arbeit leistet lediglich die Kraft  $M \cdot b$ , und zwar wird bei einer Elementardrehung des Gehäuses um  $d\varphi$

$$dA = M \cdot b \cdot x_s d\varphi. \quad (3)$$

Gemäß der grundlegenden Beziehung  $dL = dA$  folgt aus Gl. (2) und (3)  $(J + \ddot{u}^2 i) \dot{\varphi} d\dot{\varphi} = M \cdot b \cdot x_s \cdot d\varphi$ .

Führt man  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$  ein, so erhält man, weil  $\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \ddot{\varphi}$ ,

$$\ddot{\varphi} = \frac{M x_s}{J + \ddot{u}^2 i} b. \quad (4)$$

Der Schwerpunkt  $S$  hat gegen den Radsatz die Beschleunigung  $\ddot{\varphi} x_s$  nach unten, daher ist seine absolute Beschleunigung  $b_s = b - \ddot{\varphi} x_s$  nach oben und ist mit Gl. (4)

$$b_s = b \frac{J - M x_s^2 + \ddot{u}^2 i}{J + \ddot{u}^2 i}. \quad (5)$$

Die Kraft  $P$ , welche die Beschleunigung  $b_s$  an der Masse  $M$  hervorruft, geht von der Schiene aus und hat die Größe  $P = M b_s$ , somit mit Gl. (5)

$$P = M \frac{J - M x_s^2 + \ddot{u}^2 i}{J + \ddot{u}^2 i} b. \quad (6)$$

Darnach kann man die „scheinbare Masse“ unseres Antriebes einführen als die Größe

$$M' = M \frac{J - M x_s^2 + \ddot{u}^2 i}{J + \ddot{u}^2 i}. \quad (7)$$

Sie ist stets kleiner als die wirkliche Masse  $M$ , nähert sich ihr aber bei großen Übersetzungen. Vom *Stillstand* an gerechnet hat vermöge  $b$  das System die Geschwindigkeit  $v = \int b dt$  und dreht sich vermöge  $\ddot{\varphi}$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi} = \int \ddot{\varphi} dt$ , wobei wegen Gl. (4) ist

$$\dot{\varphi} = \frac{M x_s}{J + \ddot{u}^2 i} \int b dt \quad \text{oder mit } v = \int b dt \quad \dot{\varphi} = \frac{M x_s}{J + \ddot{u}^2 i} v. \quad (8)$$

(Streng gilt das allerdings nur, solange  $x_s$  als unveränderlich angesehen werden kann.)

Der Momentanpol  $O$  des Antriebsgehäuses liegt auf einer Parallelen zur Schiene durch die Radachse. Die Entfernung  $e$  von dieser ergibt sich daraus, daß in  $O$   $v$  und die vermög  $\dot{\varphi}$  erlangte Geschwindigkeit  $e \dot{\varphi}$  sich tilgen:  $v = e \dot{\varphi}$ ; mit Gl. (8) wird  $v = e \frac{M x_s}{J + \dot{u}^2 i} v$  oder

$$e = \frac{J + \dot{u}^2 i}{M x_s}. \quad (9)$$

Bei großem  $\dot{u}$  wird  $e$  sehr groß; der Antrieb verschiebt sich fast parallel zu sich selbst.

Das Drehmoment  $\mathfrak{M}_L$  um die Achse des Läufers ist  $\mathfrak{M}_L = i \ddot{\psi}$  (unter der gleichen Voraussetzung dynamischer Symmetrie wie oben) und wird durch die Flankenkraft am Wurm ausgeübt, deren Reaktion auf den Radsatz um dessen Achse ein Moment  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_L \dot{u} = i \dot{u} \ddot{\psi}$  ergibt.

Andere Kräfte, welche ebenso momentbildend auf den Radsatz wirken, bestehen nicht. Daher ist das Moment, welches die gleichförmige Drehung des Radsatzes aufrecht erhält, gleich (und entgegengesetzt)  $\mathfrak{M}$ . In der letzten Gleichung setzen wir  $\ddot{\psi} = \dot{u} \ddot{\varphi}$  entsprechend  $\dot{\psi} = \dot{u} \dot{\varphi}$  und drücken  $\ddot{\varphi}$  gemäß Gl. (4) aus; man erhält:

$$\mathfrak{M} = \frac{i \dot{u}^2}{J + i \dot{u}^2} M x_s b.$$

## 16. Übung.

Berechne die Massenwirkung eines Kardangelenkstückes, wenn die eine der durch das Kardangelnk gekuppelten Wellen gleichförmig umläuft. (Für kleine Ablenkungswinkel der Wellen!)

In der gemeinsamen Ebene der Wellen  $I$  und  $II$  liegt der gegebene Schnittwinkel  $c$  der Wellen. Mit dieser Ebene bildet die durch  $I$  und  $BB$  gelegte Ebene den Winkel  $\alpha$  und die durch  $II$  und  $AA$  gelegte Ebene den Winkel  $\beta$ . Die Ebene durch  $I$  und  $BB$  und die durch  $II$  und  $AA$  stehen aufeinander senkrecht und schneiden sich in der Geraden  $Oz$ , die auf der Ebene  $ABAB$  senkrecht steht.  $I$ ,  $II$  und  $Oz$  bilden ein bei  $Oz$  rechtwinkeliges Dreieck, dem das in Abb. 21 eingetragene rechtwinkelige sphärische Dreieck  $abc$  entspricht. Die absolute Bewegung des Gelenkstückes besteht aus der Drehung der Welle  $I$  mit der



Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$  und der Drehung des Gelenkstücker gegen Welle  $I$  um die Achse  $AA$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_A = \frac{db}{dt}$ .

Wir setzen voraus, der Schwerpunkt des Gelenkstücker falle nach  $O$ , ruhe daher dauernd, womit die Massenwirkung des Gelenkes zu einem reinen

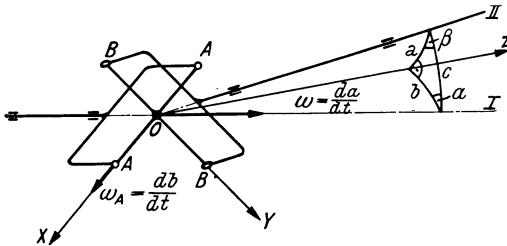


Abb. 21.

Kräftepaar wird, dessen Komponenten  $M_x^m$ ,  $M_y^m$ ,  $M_z^m$  bezüglich der Richtungen  $Ox \equiv AA$ ,  $Oy \equiv BB$  und  $Oz$  nach den EULERSCHEN Gleichungen berechnet werden sollen.  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  sind wohl stets Hauptträgheits-

achsen des Gelenkstücker, bezüglich welcher die Trägheitsmomente  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  heißen.

Die Winkelgeschwindigkeitskomponenten  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  ergeben sich laut Abb. 21 zu

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \omega_A = \frac{db}{dt}, \\ \omega_y &= \omega \sin b, \\ \omega_z &= \omega \cos b, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

und ihre Ableitungen nach der Zeit daraus zu

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega_x}{dt} &= \frac{d^2b}{dt^2}, \\ \frac{d\omega_y}{dt} &= \omega \cos b \frac{db}{dt}, \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= -\omega \sin b \frac{db}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Nach EULER ist

$$\left. \begin{aligned} -M_x^m &= J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_z \omega_y, \\ -M_y^m &= J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z, \\ -M_z^m &= J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_y \omega_x. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Bei praktischen Ausführungen ist wohl stets  $J_x = J_y$ , wofür wir die gemeinsame Bezeichnung  $J_{xy}$  einführen.

Unter Einsetzen von Gl. (1) und (2) wird dann Gl. (3):

$$\left. \begin{aligned} M_x^m &= -J_{xy} \frac{d^2 b}{dt^2} - (J_z - J_{xy}) \omega^2 \sin b \cos b, \\ M_y^m &= (J_z - 2 J_{xy}) \omega \cos b \frac{db}{dt}, \\ M_z^m &= J_z \omega \sin b \frac{db}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Für das sphärische Dreieck  $abc$  gilt

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cdot \cos \alpha, \quad (5)$$

woraus durch Ableiten nach  $t$  mit  $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$  folgt:

$$\frac{db}{dt} = -\cos^2 b \sin \alpha \omega \operatorname{tg} c. \quad (6)$$

Die Ableitung von Gl. (5) nach  $t$  ergibt unter Verwendung von Gl. (6)

$$\frac{d^2 b}{dt^2} = -\omega^2 \operatorname{tg} c \cos^2 b [\cos \alpha - 2 \operatorname{tg} c \sin b \cos b \sin^2 \alpha]. \quad (7)$$

Es müssen nun in Gl. (4) berücksichtigt werden Gl. (5), (6) und (7).

Übersichtliche Ergebnisse sind nur zu erlangen durch Annäherungen, welche im Hinblick, daß  $b$  höchstens  $c$  gleich werden kann, und wenn dieser Winkel  $15^\circ$  nicht übersteigt, zulässig sind. Wir setzen  $\operatorname{tg} c \sim c$ ,  $\sin b \sim \operatorname{tg} b$ ,  $\cos b \sim 1$ ,  $\cos^2 b \sim 1$ . Damit schreibt sich Gl. (7)  $\frac{d^2 b}{dt^2} = -\omega^2 c \cos \alpha [1 - 2 c^2 \sin^2 \alpha]$  und man kann daher näherungsweise schreiben

$$\frac{d^2 b}{dt^2} = -\omega^2 c \cos \alpha. \quad (7 a)$$

Es wird dann

$$\left. \begin{aligned} M_x^m &= \omega^2 c (2 J_{xy} - J_z) \cos \alpha, \\ M_y^m &= \omega^2 c (2 J_{xy} - J_z) \sin \alpha, \\ M_z^m &= \frac{\omega^2 c^2}{2} J_z \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (4 a)$$

Wir setzen  $M_x^m$  und  $M_y^m$  zu einem Moment  $M_{xy}^m$ , dessen Achse in die  $xy$ -Ebene fällt, zusammen (Abb. 22).

Seine Größe ist

$$M_{xy}^m = \sqrt{M_x^{m2} + M_y^{m2}}$$

und mit Gl. (4a)

$$M_{xy}^m = \omega^2 c (2 J_{xy} - J_z). \quad (8)$$

Der Winkel ( $x M_{yx}^m$ ) zwischen  $x$ -Achse und  $M_{xy}^m$  folgt aus  $\operatorname{tg} (x M_{xy}^m) = \frac{M_y^m}{M_x^m} = \operatorname{tg} \alpha$  zu ( $x M_{xy}^m$ ) =  $\alpha$ ; gegenüber dem Kardangelenstück läuft somit  $M_{xy}^m$  mit der Winkelgeschwindigkeit der Welle  $I$  um, gegenüber dem ruhenden Raum doppelt so schnell.

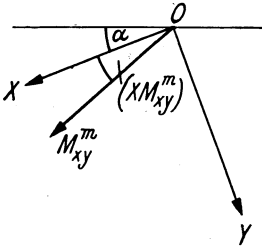


Abb. 22.

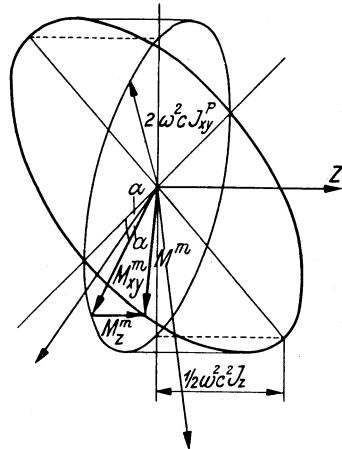


Abb. 23.

Wir formen den Ausdruck  $(2 J_{xy} - J_z)$  in Gl. (8) um:

$$\begin{aligned} 2 J_{xy} - J_z &= \sum 2 dm (y^2 + z^2) - \sum dm (x^2 + y^2) = 2 \sum dm z^2 + \\ &+ \sum dm y^2 - \sum dm x^2 = 2 \sum dm z^2 + \sum dm (y^2 + z^2) - \\ &- \sum dm (x^2 + z^2) = 2 \sum dm z^2 + J_x - J_y. \end{aligned}$$

Wir haben  $J_x = J_y$  angenommen,  $\sum dm z^2$  nennen wir das planare Trägheitsmoment  $J_{xy}^p$  bezüglich der  $xy$ -Ebene, somit ist  $2 J_{xy} - J_z = 2 J_{xy}^p$  und Gl. (8) wird damit

$$\boxed{M_{xy}^m = 2 \omega^2 c J_{xy}^p.} \quad (9)$$

Nach dem Bisherigen ist die in Abb. 23 gezeigte einfache und übersichtliche Darstellung des Momentes  $M^m$  der Massenwirkungen, welches aus  $M_{xy}^m$  und  $M_z^m$  resultiert, verständlich.

## 17. Übung.

Die Geschwindigkeitsregelung einer Kraftmaschine habe folgende Einrichtung:

Das die Geschwindigkeit der Kraftmaschine anzeigende Fliehkraftpendel veranlaßt bei Abweichung der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  nach unten bzw. oben über einen Servomotor eine der Zeit proportionale Steigerung bzw. Ermäßigung des Kraftmaschinendrehmomentes  $M$ , so daß  $M = M_0 + c t$ .

Die Einrichtung soll jedoch mit zwei verschiedenen Reguliergeschwindigkeiten  $c$  arbeiten; mit dem größeren Betrag  $c'$ , solange bei wachsendem  $M$  die Winkelgeschwindigkeit sinkt oder bei sinkendem  $M$  die Winkelgeschwindigkeit wächst, in den anderen Fällen mit dem kleineren Betrag  $c''$  (dies kommt so zustande, daß sowohl die Bewegungsumkehr der Muffe des Fliehkraftpendels als auch die des Servomotors einen Wechsel in den Reguliergeschwindigkeiten bewirkt). Man untersuche den Regelungsvorgang bezüglich der größten Abweichung der Winkelgeschwindigkeit als auch bezüglich Schwingungen.

Während eines Reguliervorganges wirken auf das System Kraftmaschine + angetriebene Maschine (Trägheitsmoment  $J$ ) das Drehmoment  $M = M_0 + c t$  der Kraftmaschine und das Widerstandsdrehmoment  $W$  der angetriebenen Maschine, daher die Bewegungsgleichung lautet:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_0 + c t - W = (M_0 - W) + c t.$$

Ihr Integral ist

$$\omega + C = \frac{1}{J} \left[ (M_0 - W) t + \frac{c}{2} t^2 \right],$$

oder anders geschrieben mit einer Konstanten  $C'$

$$\omega + C' = \frac{c}{2J} \left[ t + \frac{M_0 - W}{c} \right]^2.$$

Diese Gleichung stellt Parabeln dar, deren Scheitel die Koordinaten  $-C'$ ,  $-\frac{M_0 - W}{c}$  haben, deren Gestalt jedoch unabhängig davon durch  $\frac{c}{2J}$  definiert ist. Auf ein Achsenkreuz mit dem Ursprung im Parabelsichel bezogen, hat man einfach

$$\omega = \frac{c}{2J} t^2. \quad (1)$$

Natürlich ist  $c \geq 0$ , je nachdem, ob die Regulierung die Kraft-

maschinenfüllung gerade vermehrt oder vermindert. Der ganze Regelvorgang setzt sich im  $t$ - $\omega$ -Bild aus lauter Parabelstücken zusammen (Abb. 24). Diese gehen ohne Knick ineinander über, denn die Kurvensteigung  $\frac{d\omega}{dt}$  ist gleich der Winkelbeschleunigung  $\gamma$ , und solange sich die Momente stetig ändern, tut dies auch letztere. Ausgangspunkt ist der Beharrungszustand mit  $\omega_0 M_0$  und  $W_0 = M_0$ . Nun trete eine plötzliche Entlastung der angetriebenen Maschine um  $\Delta W$  ein; dem entspricht eine Winkelbeschleunigung  $\gamma = \frac{\Delta W}{J}$ . Die steigende

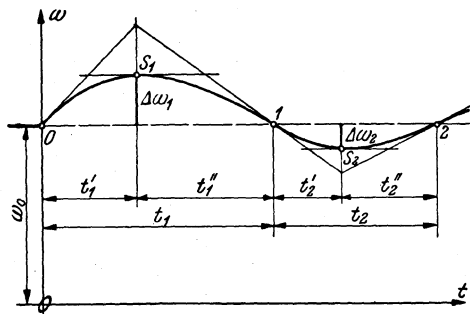


Abb. 24.

Reglermuffe löst die Reguliergeschwindigkeit  $-c'$  aus; es beginnt ein entsprechender Parabelbogen mit der Anfangssteigung  $\frac{d\omega}{dt} = \gamma = \frac{\Delta W}{J}$ . Die steigende

Reglermuffe löst die Reguliergeschwindigkeit  $-c'$  aus; es beginnt ein entsprechender Parabelbogen mit der Anfangssteigung

$$\frac{d\omega}{dt} = \gamma = \frac{\Delta W}{J}.$$

Es folgt aus Gl. (1)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{c}{J} t. \quad (2)$$

Setzt man  $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta W}{J}$  und  $c = -c'$  in Gl. (2) ein, so erhält man  $t = -\frac{\Delta W}{c'}$ . Der Parabelscheitel  $S_1$  ist also nach dieser Zeit, wir nennen sie  $t_1'$ , erreicht.

$$t_1' = \frac{\Delta W}{c'}. \quad (3)$$

Die Steigerung  $\Delta\omega_1$  der Winkelgeschwindigkeit während  $t_1'$  ergibt sich durch Einsetzen von  $t = -t_1'$  in Gl. (1) mit  $c = c'$  zu

$$\Delta\omega_1 = \frac{\Delta W^2}{2Jc'}. \quad (4)$$

Ab  $S_1$  erfolgt die Regelung weiter mit  $-c''$  bis zur Linie  $\omega_0$ . Hier schaltet das Fliehkraftpendel die Reguliergeschwindigkeit  $+c'$  ein bis zum Parabelscheitel  $S_2$ , ab hier herrscht  $+c''$  bis zur Linie  $\omega_0$  usw.

$\Delta\omega_1$  nach Gl. (1), ausgedrückt durch  $-t_1'$  und  $-c'$ , sodann

durch  $t_1''$  und  $-c''$  und gleichgesetzt, liefert  $\frac{c'}{2J} t_1'^2 = \frac{c''}{2J} t_1''^2$  und daraus folgt verallgemeinert

$$\frac{t_1''}{t_1'} = \frac{t_2''}{t_2'} = \dots \sqrt{\frac{c'}{c''}}. \quad (5)$$

Die Tangentenneigung in 1, ausgedrückt nach Gl. (2) durch  $-c''$  und  $t_1''$ , sodann durch  $c'$  und  $-t_2'$ , ergibt

$$\frac{-c''}{J} t_1'' = \frac{c'}{J} (-t_2')$$

und daraus folgt verallgemeinert

$$\frac{t_2'}{t_1''} = \frac{t_3'}{t_2''} = \dots \frac{c''}{c'}. \quad (6)$$

Die Multiplikation von Gl. (5) und (6) liefert

$$\frac{t_2'}{t_1'} = \frac{t_3'}{t_2'} = \dots \sqrt{\frac{c''}{c'}}. \quad (7)$$

Nun drücken wir nach Gl. (1)  $\Delta\omega_1$  durch  $-c''$  und  $t_1''$  sowie  $\Delta\omega_2$  durch  $c'$  und  $-t_2'$  aus und dividieren:

$$\frac{\Delta\omega_2}{\Delta\omega_1} = \frac{c'}{-c''} \left( \frac{t_2'}{t_1''} \right)^2;$$

daraus folgt (Vorzeichen unterdrückt) mit Gl. (6) und verallgemeinert

$$\frac{\Delta\omega_2}{\Delta\omega_1} = \frac{\Delta\omega_3}{\Delta\omega_2} = \dots \frac{c''}{c'}. \quad (8)$$

Mit Gl. (5) wird

$$t_1 = t_1' + t_1'' = t_1' \left( 1 + \sqrt{\frac{c'}{c''}} \right),$$

$$t_2 = t_2' + t_2'' = t_2' \left( 1 + \sqrt{\frac{c'}{c''}} \right),$$

und

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_2'}{t_1'}.$$

Mit Gl. (7) und verallgemeinert wird

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \dots \sqrt{\frac{c''}{c'}}. \quad (9)$$

Schließlich bestimmt sich noch  $t_1 = t_1' \left( 1 + \sqrt{\frac{c'}{c''}} \right)$  mit Gl. (3) zu:

$$t_1 = \frac{\Delta W}{c'} \left( 1 + \sqrt{\frac{c'}{c''}} \right). \quad (10)$$

Das Ergebnis zusammengefaßt, lautet:

Der Reguliervorgang vollzieht sich in gedämpften Schwingungen. Die größte Amplitude der Winkelgeschwindigkeitsabweichung ist die erste, und zwar  $\Delta\omega_1 = \frac{\Delta W^2}{2Jc'}$ . Die Amplituden folgen laut Gl. (8) einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten  $\frac{c''}{c'}$ . Die längste Schwingungshalbperiode ist die erste, und zwar  $t_1 = \frac{\Delta W}{c'} \left(1 + \sqrt{\frac{c''}{c'}}\right)$ . Die weiteren folgen laut Gl. (9) einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten  $\sqrt{\frac{c''}{c'}}$ .

### 18. Übung.

Der Körper  $K$  in Abb. 25 stützt sich auf in den Ebenen 1 und 2 angebrachte Federn ab. Bei einer Verdrehung des Körpers um  $\varphi$

um die Längsrichtung üben die Federn ein rückdrehendes Kräftepaar  $-\varphi\gamma$  aus, während für waagrechte Auslenkungen der Punkte  $A$  oder  $B$  gegen die Unterlagen  $U_1$  bzw.  $U_2$  die Federsteifigkeit  $c$  sei. Welche Bewegungen führt der Körper  $K$  aus, wenn die Unterlage  $U_1$  plötzlich quer die (unveränderliche) Geschwindigkeit  $v$  erhält? (Bewegung eines auf zwei Wiegendrehgestellen gelagerten Fahrzeugkastens beim Anlaufen eines Drehgestells an die Fahr-schienen.)

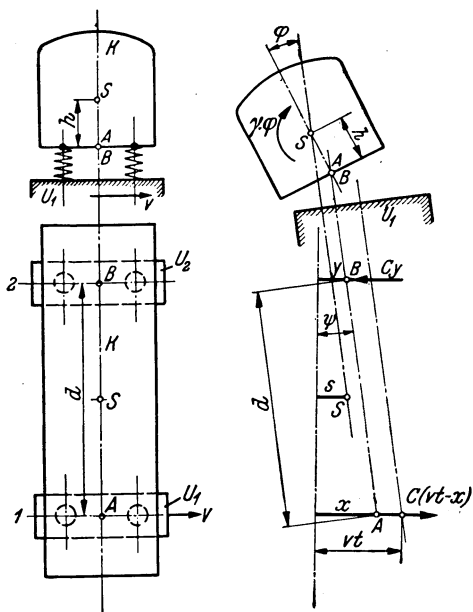


Abb. 25.

Abb. 26.

Wir werden später sehen, daß  $A$  und  $B$  nur waagrechte Bewegungen ausführen. In Abb. 26 sind die die Lage von  $K$  im Raume bestimmenden Stücke  $x$ ,  $y$  und  $\varphi$  eingetragen, desgleichen die auf  $K$  wirkenden Kräfte und das Kräftepaar, wenn  $U_1$  im Zeitpunkt  $t$  die absolute Verschiebung  $v \cdot t$  erreicht hat.

Für die waagrechte Bewegung des Schwerpunktes, dessen Verschiebung  $s$  sei, gilt ( $M =$  Masse von  $K$ )  $M\ddot{s} = c(vt - x) - cy$  oder wenn  $s = \frac{1}{2}(x + y) - \varphi h$  berücksichtigt und  $x + y = u$  genannt wird:

$$M \cdot \left[ \frac{1}{2} \ddot{u} - \ddot{\varphi} h \right] = c [vt - u]. \quad (1)$$

Außer den Schwerpunktsbewegungen führt  $K$  zweierlei Drehungen aus: eine um die Längsschwerpunktsachse ( $\varphi$ -Drehung genannt) und eine um die Vertikalschwerpunktsachse (nach der dabei stattfindenden Veränderung von  $\psi$  die  $\psi$ -Drehung genannt). Wir fassen die  $\psi$ -Drehung als Führungsbewegung, die  $\varphi$ -Drehung als Relativbewegung auf. Da die  $\varphi$ -Drehung um eine Trägheitshauptachse erfolgt, die  $\psi$ -Drehung um eine Achse, die nur um höchstens  $\varphi$  von einer Trägheitshauptachse abweicht, erfordern die Teildrehungen Kräftepaare, deren Achsen mit den bezüglichen Drehachsen zusammenfallen. Das resultierende Kräftepaar, welches die resultierende Drehung des Körpers um seinen Schwerpunkt bewirkt, resultiert aus den Kräftepaaren für die  $\varphi$ - und die  $\psi$ -Drehung und dem Kräftepaar der Corioliskräfte. Dieses (Kreiselwirkung) hat eine Achse, die zu der Ebene der Achsen der beiden Teildrehungen senkrecht steht, und die Größe

$$[J_\varphi - (J_\psi - J_{\varphi\psi})] \dot{\varphi} \dot{\psi}.$$

Darin sind  $J_\varphi$ ,  $J_\psi$  und  $J_{\varphi\psi}$ , bzw. die Schwerpunktträgheitsmomente um die Achse der  $\varphi$ -Drehung, der  $\psi$ -Drehung und um die zu beiden Achsen senkrechte Achse. Da nun das Produkt der Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\varphi} \dot{\psi}$  im Ausdruck für das Coriolismoment vorkommt, ist es für unseren praktischen Fall, bei dem  $\dot{\varphi}$  und  $\dot{\psi}$  klein bleiben, ohne Belang und damit unsere Annahme begründet, daß  $A$  und  $B$  nur waagrechte Bewegungen vollführen.

Nach unseren Überlegungen gilt:

$$J_\varphi \ddot{\varphi} = [c(vt - x) - cy] h - \gamma \varphi$$

oder mit  $x + y = u$

$$J_\varphi \ddot{\varphi} = ch [vt - u] - \gamma \varphi. \quad (2)$$

Außerdem:

$$J_\psi \ddot{\psi} = \frac{d}{2} [c(vt - x) + cy]$$

und unter Benützung der geometrischen Beziehung  $\psi = \frac{x - y}{d}$

mit  $x - y = z$ :

$$\ddot{z} + \frac{d^2 c}{2 J_\psi} z = \frac{d^2 c}{2 J_\psi} \cdot v \cdot t. \quad (3)$$



Gl. (3), eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und der Störungsfunktion  $\frac{d^2c}{2J_\varphi} \cdot v \cdot t$ , hat das Integral

$$z = C' \sin \omega_\varphi t + C'' \cos \omega_\varphi t + v t, \quad (4)$$

wobei

$$\omega_\varphi^2 = \frac{d^2c}{2J_\varphi}. \quad (5)$$

Die Konstanten  $C'$  und  $C''$  bestimmen sich daraus, daß für  $t = 0$  auch  $z = x - y = 0$  und  $\dot{z} = \dot{x} - \dot{y} = 0$  ist, zu  $C'' = 0$ ,  $C' = -\frac{v}{\omega_\varphi}$ . Damit wird Gl. (4):

$$z = x - y = v \left[ t - \frac{\sin \omega_\varphi t}{\omega_\varphi} \right]. \quad (6)$$

Um aus Gl. (1) und (2) eine Differentialgleichung zu erhalten, die von  $u$  frei ist, setzen wir in Gl. (1) ein:

a) den aus Gl. (2) ausgedrückten Wert

$$v t - u = \frac{J_\varphi \ddot{\varphi} + \gamma \varphi}{c h};$$

b) den daraus folgenden Wert

$$\ddot{u} = -\frac{J_\varphi \ddot{\varphi} + \gamma \varphi}{c h}.$$

Wir erhalten so die lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$\ddot{\varphi} + \ddot{\varphi} \left[ \frac{2c}{M} + \frac{\gamma}{J_\varphi} + \frac{2c h^2}{J_\varphi} \right] + \varphi \cdot \frac{2c}{M} \cdot \frac{\gamma}{J_\varphi} = 0. \quad (7)$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} \frac{2c}{M} &= \omega_h^2, \\ \frac{\gamma}{J_\varphi} &= \omega_\varphi^2, \\ \frac{2c h^2}{J_\varphi} &= \omega_r^2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Das Integral von Gl. (7) lautet:

$$\varphi = A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t + B_2 \cos \omega_2 t, \quad (9)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{1}{2} \left[ (\omega_h^2 + \omega_\varphi^2 + \omega_r^2) - \sqrt{(\omega_h^2 + \omega_\varphi^2 + \omega_r^2)^2 - 4 \omega_h^2 \omega_\varphi^2} \right], \\ \omega_2^2 &= \frac{1}{2} \left[ (\omega_h^2 + \omega_\varphi^2 + \omega_r^2) + \sqrt{(\omega_h^2 + \omega_\varphi^2 + \omega_r^2)^2 - 4 \omega_h^2 \omega_\varphi^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Zur Zeit  $t = 0$  ist  $\varphi = 0$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ ,  $\ddot{\varphi} = 0$  [gemäß Gl. (2)],  $\ddot{\varphi} = c h v$  [gemäß der nach  $t$  differenzierten Gl. (2)]. Setzt man dies in Gl. (9), bzw. in diese ein-, zwei- und dreimal nach  $t$  differenzierte Gleichung ein, dann ergeben sich:

$$\begin{aligned} B_1 + B_2 &= 0, \\ A_1 \omega_1 + A_2 \omega_2 &= 0, \\ B_1 \omega_1^2 + B_2 \omega_2^2 &= 0, \\ -A_1 \omega_1^3 - A_2 \omega_2^3 &= \frac{c h v}{J_\varphi}. \end{aligned}$$

Aus diesen vier Gleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{c h v}{J_\varphi \omega_1 (\omega_2^2 - \omega_1^2)}, \quad B_1 = 0, \\ A_2 &= -\frac{c h v}{J_\varphi \omega_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)}, \quad B_2 = 0, \end{aligned}$$

und damit wird Gl. (9)

$$\varphi = \frac{c h v}{J_\varphi (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \left[ \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} - \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} \right],$$

und wenn man  $\omega_r$  gemäß Gl. (8) einführt:

$$\boxed{\varphi = \frac{v}{h} \frac{\omega_r^2}{2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \left[ \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} - \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} \right]}. \quad (11)$$

Wenn wir Gl. (11) und diese nach  $t$  differenzierte Gleichung in Gl. (2) einsetzen, wird mit  $\frac{\gamma}{J_\varphi} = \omega_\varphi^2$  [siehe Gl. (8)]:

$$u = x + y = v \left( t - \frac{\omega_\varphi^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} - \frac{\omega_\varphi^2 - \omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} \right).$$

In Verbindung mit Gl. (6) ergibt sich daraus:

$$x = v \left( t - \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin \omega_\psi t}{\omega_\psi} + \frac{(\omega_\varphi^2 - \omega_1^2) \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} + (\omega_\varphi^2 - \omega_2^2) \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2}}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \right] \right), \quad (12)$$

$$y = \frac{1}{2} v \left[ \frac{\sin \omega_\psi t}{\omega_\psi} - \frac{(\omega_\varphi^2 - \omega_1^2) \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} + (\omega_\varphi^2 - \omega_2^2) \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2}}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \right]. \quad (13)$$

Gl. (11), (12) und (13) bestimmen den Bewegungsverlauf des Körpers in Abhängigkeit von der Zeit, natürlich nur solange die Vernachlässigung, die z. B. in  $\psi = \frac{x-y}{d}$  steckt (es sollte ja  $\sin \psi = \frac{x-y}{d}$  heißen), zulässig ist. Es interessiert der Ausschlag  $x_r$  von  $A$  relativ zu  $U_1$ ;  $x_r = x - vt$  wird mit Gl. (12):

$$x_r = -\frac{1}{2} v \left[ \frac{\sin \omega_\psi t}{\omega_\psi} + \frac{(\omega_\varphi^2 - \omega_1^2) \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} + (\omega_\varphi^2 - \omega_2^2) \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2}}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \right]. \quad (14)$$

In den Bewegungen des Körpers  $K$  kommen drei Sinusschwingungen mit den Kreisfrequenzen  $\omega_\psi$ ,  $\omega_1$  und  $\omega_2$  zum Ausdruck.

Gl. (12) und (14) können zur Abschätzung des notwendigen Spieles von Drehgestellwägen gegen die Drehgestellrahmen dienen.

Durch genügende Dämpfung muß für das schnelle Erlöschen der Schwingungen gesorgt werden.

Aus den Gl. (8) ist die Bedeutung von  $\omega_h$ ,  $\omega_\varphi$  und  $\omega_r$  zu erkennen; es sind die Kreisfrequenzen folgender drei Eigenschwingungen:

1.  $\omega_h$ :  $K$  parallel geführt.
2.  $\omega_\varphi$ : Schwingung um die zu  $AB$  parallele Schwerpunktsachse, wobei  $c = 0$ .
3.  $\omega_r$ : Schwingung um eine feste, zu  $AB$  parallele Schwerpunktsachse, wobei  $\gamma = 0$ .

### 19. Übung.

Man ermittle die Eigenschwingungsfrequenzen der in Abb. 27 gezeigten Drehschwingungsanordnung. Die Drehsteifigkeiten (Momente je Bogeneinheit Verdrehung) des federnden Zahnrades und die der beiden Wellenstücke heißen bzw.  $C, c, \gamma$ . Die Trägheitsmomente sind laut Abbildung  $J, i, \iota$ , wobei  $J$  auf die gemeinsame Welle reduziert ist.

An einem mit der Frequenz  $\omega$  dreh-schwingenden Körper tritt im Augenblick der Amplitude  $A$  (Bogenmaß) die Winkelbeschleunigung  $-A \omega^2$  auf. Nach der Schwingungslehre treten die Amplituden  $A, a, \alpha$  der drei Massenkörper gleichzeitig ein. In diesem Augenblick betrachten wir das System und stellen für jede Masse das dynamische Grundgesetz für Drehung auf, wobei noch die Drehungsamplitude  $X$  der Welle, dort wo das Zahnrad sitzt, einzuführen ist:

$$\left. \begin{aligned} -A J \omega^2 &= C (X - A), \\ -a i \omega^2 &= c (X - a), \\ -\alpha \iota \omega^2 &= \gamma (X - \alpha). \end{aligned} \right\} (1)$$

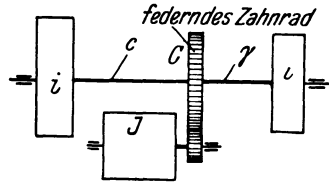


Abb. 27.

An dem Punkte der Welle mit der Amplitude  $X$  stehen (die federnden Teile sind ja masselos gedacht) die Reaktionen der Drehmomente, welche auf die drei Massenkörper wirken [rechte Seiten in Gl. (1)], miteinander im Gleichgewicht, also:

$$-C (X - A) - c (X - a) - \gamma (X - \alpha) = 0$$

oder

$$X = \frac{C A + c a + \gamma \alpha}{C + c + \gamma}. \quad (2)$$

Gl. (2) in Gl. (1) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} A [C (c + \gamma) - J (C + c + \gamma) \omega^2] - a C c & \\ - A C c & \qquad \qquad \qquad + a [c (C + \gamma) - \\ - A C \gamma & \qquad \qquad \qquad - a c \gamma \\ & \qquad \qquad \qquad - \alpha C \gamma & = 0 \\ - i (C + c + \gamma) \omega^2] - \alpha c \gamma & = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad + \alpha [\gamma (C + c) - \iota (C + c + \gamma) \omega^2] = 0 \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen können  $A, a, \alpha$  bestimmt werden; da sie aber homogen sind, haben sie nach der Gleichungslehre nur dann von Null verschiedene Lösungen für  $A, a, \alpha$ , d. h. Eigenschwingungen kommen nur zustande, wenn die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} C(c+\gamma) - J(C+c+\gamma)\omega^2, & -C c, & -C \gamma, \\ -C c, & c(C+\gamma) - i(C+c+\gamma)\omega^2, & -c \gamma, \\ -C \gamma, & -c \gamma, & \gamma(C+c) - i(C+c+\gamma)\omega^2, \end{vmatrix}$$

verschwindet.

$D = 0$ , oder nach längerer Ausrechnung

$$\omega^2 \left[ \omega^4 - \omega^2 \frac{C(c+\gamma)}{J} + \frac{c(\gamma+C)}{i} + \frac{\gamma(C+c)}{i} + \frac{(J+i+i)C \cdot c \cdot \gamma}{J \cdot i \cdot i (C+c+\gamma)} \right] = 0,$$

ist die Beziehung zur Bestimmung der Eigenfrequenzen. Die Lösungen  $\omega = \pm 0$  sind bedeutungslos, es bleibt als maßgebende Gleichung für die zwei Eigenfrequenzen:

$$\omega^4 - \omega^2 \frac{C(c+\gamma)}{J} + \frac{c(\gamma+C)}{i} + \frac{\gamma(C+c)}{i} + \frac{(J+i+i)C \cdot c \cdot \gamma}{J \cdot i \cdot i (C+c+\gamma)} = 0.$$

## 20. Übung.

Eine ringförmige Scheibe aus elastischem Material ist an ihrer Innenseite festgehalten (Abb. 28) und führt Drehschwingungen aus. Wie ist die Scheibe zu profilieren, wenn die Eigenfrequenzen der Drehschwingungen sich wie  $1:3:5:\dots$  verhalten sollen, und wie bestimmen sich diese Frequenzen?

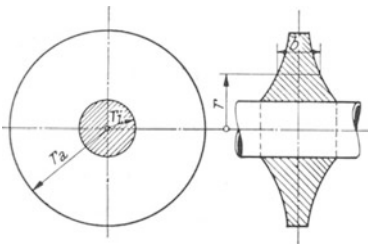


Abb. 28.

Die auf einem Zylinder vom Radius  $r$  liegenden Punkte haben beim größten Schwingungsausschlag, den alle Scheibenpunkte gleichzeitig erreichen, einen dem Winkel  $\varphi$  entsprechenden Weg zurückgelegt. In diesem Augenblick ist bei einer Kreisfrequenz  $\omega$  der Sinusschwingung die Winkelbeschleunigung

$$\ddot{\varphi} = -\varphi \omega^2. \quad (1)$$

Der in Abb. 29 gezeichnete Kreisring hat das Trägheitsmoment

$$dJ = \mu 2 r^3 \pi b dr \quad (2)$$

( $\mu =$  spezifische Masse); an ihm wirkt innen die Schubspannung  $\tau$ , somit das Moment  $M = 2\pi r^2 b \tau$ . Außen wirkt dann  $M + \frac{dM}{dr} dr$  und resultierend daher

$$dM = \frac{dM}{dr} dr = 2\pi \left( r^2 b \frac{d\tau}{dr} + r^2 \tau \frac{db}{dr} + 2rb\tau \right) dr. \quad (3)$$

Die Schubspannung  $\tau$  ist mit dem Schiebungswinkel  $\delta$  verknüpft durch  $\tau = \delta G$ , wo  $G$  der Gleitmodul ist; laut Abb. 29 ist  $\delta = \frac{r d\varphi}{dr}$ , also

$$\tau = G r \frac{d\varphi}{dr}. \quad (4)$$

Das dynamische Grundgesetz für Drehung lautet für unseren Kreisring  $dJ \ddot{\varphi} = dM$  und ergibt mit Gl. (1), (2), (3) und (4) schließlich die Gleichung

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{d\varphi}{dr} \left( \frac{3}{r} + \frac{\frac{db}{dr}}{b} \right) + \frac{\mu \omega^2}{G} \varphi = 0. \quad (5)$$

Aus Analogie mit den Längsschwingungen von Stäben z. B. vermuten wir, daß von Gl. (5) nur übrigbleiben darf

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{\mu \omega^2}{G} \varphi = 0, \quad (6)$$

damit auch hier die Eigenfrequenzen im Verhältnis 1:3:5:... auftreten. Es müßte dann sein:

$$\frac{3}{r} + \frac{\frac{db}{dr}}{b} = 0. \quad (7)$$

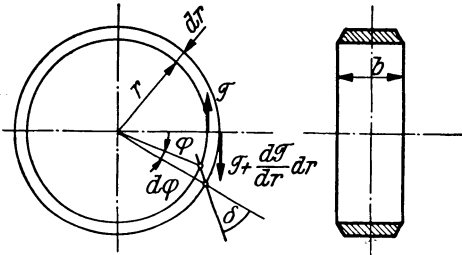


Abb. 29.

Das Integral von Gl. (6) lautet mit den Konstanten  $A, \alpha$

$$\varphi = A \sin \left( \omega \sqrt{\frac{\mu}{G}} r + \alpha \right). \quad (8)$$

Grenzbedingungen:

1. Für  $r = r_i$  ist  $\varphi = 0$ .
2. Für  $r = r_a$  ist  $\tau = 0$ , d. h. gemäß Gl. (4)  $\frac{d\varphi}{dr} = 0$ .

Einsetzen von 1 in Gl. (8) ergibt

$$\sin \left( \omega \sqrt{\frac{\mu}{G}} r_i + \alpha \right) = 0$$

oder

$$\omega \sqrt{\frac{\mu}{G}} r_i + \alpha = 0, \pi, 2\pi, \dots, \quad (9)$$

womit Gl. (8) übergeht in

$$\varphi = A \sin \left( \omega \sqrt{\frac{\mu}{G}} [r - r_i] + 0, \pi, 2\pi, \dots \right).$$

Diese Gleichung wird nach  $r$  differenziert:

$$\frac{d\varphi}{dr} = A \omega \sqrt{\frac{\mu}{G}} \cos \left( \omega \sqrt{\frac{\mu}{G}} [r - r_i] + 0, \pi, 2\pi, \dots \right).$$

Hierin werden die Werte von Grenzbedingung 2 eingesetzt; es folgt

$$\cos \left( \omega \sqrt{\frac{\mu}{G}} [r_a - r_i] + 0, \pi, 2\pi, \dots \right) = 0,$$

d. h.

$$\omega \sqrt{\frac{\mu}{G}} [r_a - r_i] + 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}, \dots,$$

oder

$$\omega = (1, 3, 5, \dots) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{G}{\mu}} \frac{1}{r_a - r_i}.$$

Unsere Vermutung stimmte somit und die Eigenfrequenzen ergeben sich als die ungeradzahligen Vielfachen der Grund-

frequenz  $\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{G}{\mu}} \frac{1}{r_a - r_i}$ .

Das Scheibenprofil ergibt sich durch Integration von Gl. (7) zu  $\boxed{b r^3 = \text{konst.}}$ .

Vierter Teil.

**Elastizität.**

**21. Übung.**

Das Verhalten eines der eigenen Schwere unterworfenen, steifen Bandes vom Querschnitt  $b \times h$ , aus einem Material vom spezifischen Gewicht  $\gamma$  und dem Elastizitätsmodul  $E$ , soll durch einen Modellversuch im Längenmaßstab  $m_l$  mit einem Bande mit den kennzeichnenden Größen  $b' \times h'$ ,  $\gamma'$ ,  $E'$  geklärt werden. Welche Zusammenhänge zwischen Wirklichkeit und Modell sind zu wahren?

Für den Krümmungsradius  $\rho$  an einer Stelle, das Biegemoment  $M_b$  und das Trägheitsmoment  $J$  gilt der Zusammenhang (Abb. 30):

$$\rho = \frac{E J}{M_b}. \quad (1)$$

Für ähnliche Bandformen gilt:

a)  $\rho$  ist proportional  $l$ , also

$$\rho = C_1 \cdot l. \quad (2)$$

b)  $M_b$  ist proportional dem Bandgewicht  $G$  und der Länge  $l$ , also  $M_b = C_2 \cdot G \cdot l$  und, weil  $G$  proportional  $b, h, \gamma, l$  ist, auch

$$M_b = C_3 \cdot b \cdot h \cdot \gamma \cdot l^2. \quad (3)$$

Außerdem ist

$$J = \frac{1}{12} b h^3. \quad (4)$$

Gl. (2), (3) und (4) werden in Gl. (1) eingesetzt:

$$12 C_1 C_3 = \frac{E h^2}{\gamma l^3}. \quad (5)$$

Für das Modell schreibt sich dies

$$12 C_1 C_3 = \frac{E' h'^2}{\gamma' l'^3}. \quad (6)$$

Die Division Gl. (5) : Gl. (6) ergibt:

$$\frac{\frac{E}{E'} \left( \frac{h}{h'} \right)^2}{\frac{\gamma}{\gamma'} \left( \frac{l}{l'} \right)^3} = 1. \quad (7)$$

Führt man außer dem Maßstab  $m_l = \frac{l}{l'}$  die Maßstäbe  $m_E, m_h, m_\gamma$  für  $E, h, \gamma$  ein, so wird

$$\boxed{\frac{m_E \cdot m_h^2}{m_\gamma \cdot m_l^3} = 1.}$$

## 22. Übung.

Eine spiralförmige Feder ist an den Enden fest eingespannt. Die eine Einspannstelle ruht, die andere wird um den Mittelpunkt  $O$  eines Kreises gedreht. Welcher Bedingung muß die Feder genügen, wenn an den Einspannstellen lediglich Einspann-

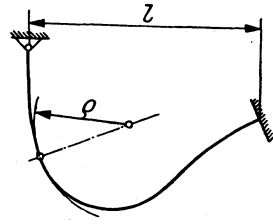


Abb. 30.



momente (Kräftepaare), aber keinerlei Einzelkräfte auftreten sollen? (Die Momente an den beiden Einspannstellen sind dann natürlich gleich und entgegengesetzt.)

Wir führen, Abb. 31, außer dem Einspannmoment  $M$  noch die Radialkraft  $P$  und die Tangentialkraft  $Q$  ein, welche im weiteren Verlaufe der Rechnung dann Null gesetzt werden. Bei einer Deformationsarbeit  $A$  der Feder ist nach CASTIGLIANO der Drehwinkel  $\varphi$  der Einspannstelle

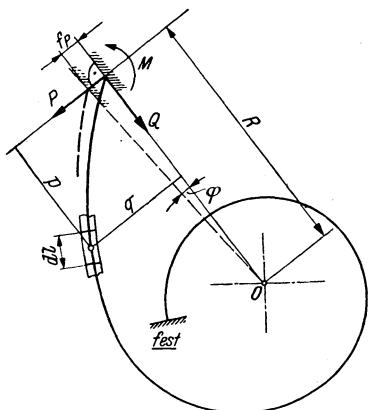


Abb. 31.

$$\varphi = \frac{\partial A}{\partial M}. \quad (1)$$

Gemäß dem gleichen Satz sind die Verschiebungen  $f_P$  und  $f_Q$  der Einspannstelle in den Richtungen von  $P$  bzw.  $Q$ :

$$f_P = \frac{\partial A}{\partial P},$$

$$f_Q = \frac{\partial A}{\partial Q}.$$

Da sich die Einspannstelle, deren Abstand von  $O$  gleich  $R$  sei, um  $O$  um den Winkel  $\varphi$  dreht, gilt  $f_P = R\varphi$  und  $f_Q = 0$ , so daß ist:

$$R\varphi = \frac{\partial A}{\partial P}, \quad (2)$$

$$0 = \frac{\partial A}{\partial Q}. \quad (3)$$

Bezeichnet  $\alpha$  die Elastizitätszahl,  $J$  das Trägheitsmoment,  $M_b$  das Biegemoment und  $dl$  ein Längenelement der Feder, dann ist bekanntlich  $A = \frac{\alpha}{2} \int \frac{M_b^2}{J} dl$  und Gl. (1), (2) und (3) gehen über in

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial M} \int \frac{M_b^2}{J} dl, \quad R\varphi = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial P} \int \frac{M_b^2}{J} dl, \quad 0 = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial Q} \int \frac{M_b^2}{J} dl.$$

Die Differentiation darf unter dem  $\int$ -Zeichen geschehen:

$$\varphi = \alpha \int \frac{M_b}{J} \frac{\partial M_b}{\partial M} dl, \quad (4)$$

$$R\varphi = \alpha \int \frac{M_b}{J} \frac{\partial M_b}{\partial P} dl, \quad (5)$$

$$0 = \int \frac{M_b}{J} \frac{\partial M_b}{\partial Q} dl. \quad (6)$$

Der Abb. 31 entnimmt man

$$M_b = M + P p - Q q. \quad (7)$$

Daraus gewinnt man zwecks Einsetzen in Gl. (4), (5) und (6):

$$\frac{\partial M_b}{\partial M} = 1, \quad \frac{\partial M_b}{\partial P} = p, \quad \frac{\partial M_b}{\partial Q} = -q.$$

Man erhält

$$\varphi = \alpha \int \frac{M_b}{J} dl, \quad R \varphi = \alpha \int \frac{M_b}{J} p dl, \quad 0 = \int \frac{M_b}{J} q dl.$$

Da  $P = Q = 0$  sein soll, ist laut Gl. (7)  $M_b = M$  und die letzten drei Gleichungen werden

$$\begin{aligned} \varphi &= \alpha M \int \frac{dl}{J}, \\ R \varphi &= \alpha M \int \frac{p dl}{J}, \\ 0 &= \int \frac{q dl}{J}. \end{aligned}$$

Ein anschauliches Ergebnis erhält man, wenn man sich die Spiralfeder in eine solche gleicher Form umgewandelt denkt, deren Querschnitt  $F$  jedoch umgekehrt proportional  $J$  ist, also

$$F = \frac{C}{J}. \quad (8)$$

Die umgewandelte Spiralfeder wollen wir die reziproke nennen.

Mit  $\frac{1}{J} = \frac{F}{C}$  schreibt sich das letzte Gleichungstriple

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\alpha M}{C} \int F dl, \\ R \varphi &= \frac{\alpha M}{C} \int p (F dl), \\ 0 &= \int q (F dl). \end{aligned} \quad (9)$$

Die Division der beiden ersten Gleichungen ergibt

$$R = \frac{\int p (F dl)}{\int F dl}. \quad (10)$$

Es ist  $F dl = dV$  ein Volumelement der reziproken Feder und daher  $\int F dl = \int dV = V$  dessen Volumen.

In dieser Schreibung wird Gl. (10) bzw. Gl. (9):

$$\int \frac{p dV}{V} = R,$$

$$\int q dV = 0.$$

Diese Gleichungen besagen, daß der Schwerpunkt der reziproken Feder in den Drehpunkt  $O$  fallen muß, wenn an den Einspannstellen lediglich Kräftepaare (und zwar dem Betrage nach gleiche) auftreten sollen.

### 23. Übung.

Ein Kontaktfinger (Abb. 32) bestehe aus einer Blattfeder (Elastizitätsmodul  $E$ , Trägheitsmoment  $J$ ) und einem daran befestigten starren Kontaktstück. Welche Bewegung macht letzteres während der Durchbiegung der Feder durch den Gegenkontakt?

Durchbiegung  $f$  sowohl als Biegewinkel  $\varphi$  sind dem Kontaktdruck  $K$  proportional, daher sich das Kontaktstück um einen fixen Drehpunkt  $P$  dreht, dessen Lage durch  $p$  angegeben sei.

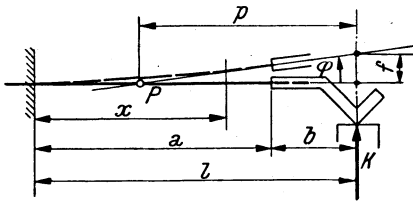


Abb. 32.

$$\varphi = \frac{f}{p} \quad \text{oder} \quad p = \frac{f}{\varphi}. \quad (1)$$

Mit  $M_b$  als Biegemoment ist

$$\varphi = \frac{1}{E} \int_0^a \frac{M_b}{J} dx. \quad (2)$$

Für die Berechnung von  $f$  benutzen wir etwa die Formänderungsarbeit  $A$ . Es ist allgemein

$$A = \frac{1}{2E} \int \frac{M_b^2}{J} dx$$

und hier, da das starre Stück keine Formänderungsarbeit erfordert,

$$A = \frac{1}{2E} \int_0^a \frac{M_b^2}{J} dx.$$

Nach CASTIGLIANO ist

$$f = \frac{\partial A}{\partial K} = \frac{1}{2E} \int_0^a \frac{2M_b}{J} \frac{\partial M_b}{\partial K} dx,$$

also

$$j = \frac{1}{E} \int_0^a \frac{M_b}{J} \frac{\partial M_b}{\partial K} dx. \quad (3)$$

Gl. (2) und (3) in Gl. (1) eingesetzt ergibt ( $J = \text{konst.}$ )

$$p = \frac{\int_0^a M_b \frac{\partial M_b}{\partial K} dx}{\int_0^a M_b dx}.$$

Es ist  $M_b = K(l-x)$  und daher  $\frac{\partial M_b}{\partial K} = l-x$ , womit aus Gl. (4) folgt:

$$p = \frac{2}{3} \frac{l^3 - b^3}{a(l+b)}.$$

## 24. Übung.

Wie verändert sich der Kontaktdruck  $K$  an der Kontaktfeder, Abb. 33, welche sich bei  $a$  abstützt, vom Augenblick der Berührung des Gegenkontaktes bis zum Abheben bei  $a$  in Abhängigkeit vom Weg  $\Delta$  der Kontakte? Es sind Einflußzahlen der Kontaktfeder einzuführen.

Bei  $a$  wirkt der Auflagedruck  $A$ , bei  $k$  der Kontaktdruck  $K$  auf die Feder. Vom spannungslosen Zustand der Feder an gerechnet sind die Durchbiegungen bei  $a$  und  $k$  bzw.  $f_a$  und  $f_k$ . Die Einflußzahl beispielsweise der Wirkung einer Kraft in  $a$  an der Stelle  $k$  sei  $\alpha_{ak}$ .

Es ist dann

$$f_a = A\alpha_{aa} + K\alpha_{ka}, \quad (1)$$

$$f_k = A\alpha_{ak} + K\alpha_{kk}. \quad (2)$$

Durch Entfernen von  $A$  folgt daraus

$$K = \frac{f_k \alpha_{aa} - f_a \alpha_{ak}}{\alpha_{aa} \alpha_{kk} - \alpha_{ak} \alpha_{ka}}. \quad (3)$$

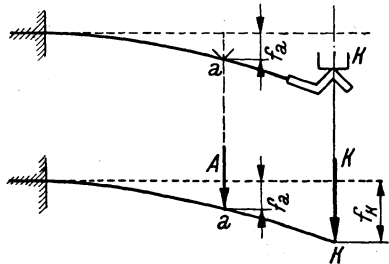


Abb. 33.

Die Werte von  $A$  und  $f_k$ , solange  $K$  nicht wirkt, seien bzw.  $A_0$  und  $f_{k0}$ . Auf diesen Zustand ( $K = 0$ ) angewendet, lauten Gl. (1)

und (2):  $f_a = A_0 \alpha_{aa}$ ,  $f_{k0} = A_0 \alpha_{ak}$ , woraus folgt  $f_a = f_{k0} \frac{\alpha_{ak}}{\alpha_{aa}}$ .  
Dies setzen wir in Gl. (3) ein:

$$K = (f_k - f_{k0}) \frac{\alpha_{aa}}{\alpha_{aa} \alpha_{kk} - \alpha_{ak} \alpha_{ka}}$$

Es ist  $f_k - f_{k0} = \Delta$  der gemeinsame Weg der Kontakte; nach MAXWELL ist außerdem  $\alpha_{ak} = \alpha_{ka}$  (Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen), womit man erhält:

$$K = \frac{\alpha_{aa}}{\alpha_{aa} \alpha_{kk} - (\alpha_{ak})^2} \Delta$$

Es ist also  $K$  proportional  $\Delta$  und, da der Kontaktdruck in der betrachteten Periode möglichst rasch ansteigen soll, soll  $\frac{\alpha_{aa}}{\alpha_{aa} \alpha_{kk} - (\alpha_{ak})^2}$  möglichst groß sein.

## 25. Übung.

Es sind die Biegemomente in der Wand eines Rohres von rechteckigem Querschnitt zu bestimmen, das einem inneren Überdruck von  $p$  ausgesetzt ist und gleichmäßige Wandstärke hat.

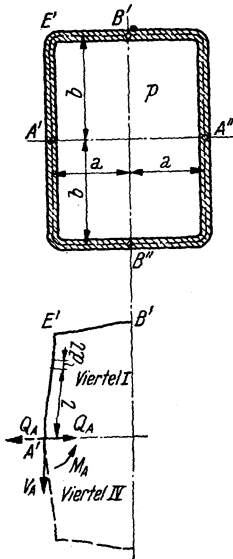


Abb. 34.

Die Rechnung wird für ein Rohrstück von der Länge eins durchgeführt, Abb. 34.

In  $A'$  und  $A''$  müssen aus Symmetriegründen die Tangenten an die elastische Linie ihre ursprüngliche Richtung beibehalten, ebenso in  $B'$  und  $B''$ , d. h. der Biegewinkel z. B. des Viertelträgers I zwischen  $A'$  und  $B'$  muß verschwinden. In  $A'$  wirken am Viertel I Längskraft  $V_A$ , Biegemoment  $M_A$  und Querkraft  $Q_A$ . Letztere muß Null sein, denn: am Viertel 4 wirkt als Reaktion zu  $Q_A$  die Querkraft  $-Q_A$  und durch Umklappen um  $A' A''$  kommen die Viertel I und 4, auch was Belastungsverhältnisse betrifft, zur Deckung. Dabei sieht man, daß  $Q_A = 0$  sein muß, und das gilt aus analogen Gründen auch für die Querkräfte in  $A''$ ,  $B'$ ,  $B''$ . Das Gleichgewicht der Kräfte in Richtung  $B' B''$  erfordert dann

$$V_A = a p. \quad (1)$$

Mit  $J =$  Biegungsträgheitsmoment eines eine Längeneinheit breiten Wandstreifens,  $E =$  Elastizitätsmodul,  $M_b =$  Biegemoment eines eine Längeneinheit breiten Streifens,  $dl =$  Länge eines Elements der neutralen Faser der Rohrwand, schreibt sich der Biegewinkel  $\varphi$ :

$$\varphi = \frac{1}{E} \int \frac{M_b}{J} dl. \quad (2)$$

In unserem Fall ist längs der Strecke  $b$

$$M_{bb} = M_A - p l \frac{l}{2} \quad (3)$$

und längs der Strecke  $a$

$$M_{ba} = M_A - p b \frac{b}{2} + V_A l - p l \frac{l}{2}$$

und mit Gl. (1)

$$M_{ba} = M_A - p \left( \frac{b^2}{2} - a l + \frac{l^2}{2} \right). \quad (4)$$

Gl. (3) und (4) setzen wir in Gl. (2) ein, wobei zwei Teilintegrale auftreten:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{EJ} \left[ \int_0^b \left( M_A - \frac{p}{2} l^2 \right) dl + \int_0^a \left[ M_A - p \left( \frac{b^2}{2} - a l + \frac{l^2}{2} \right) \right] dl \right] = \\ &= \frac{1}{EJ} \left[ M_A (a + b) - p \left( \frac{b^3}{6} + \frac{a b^2}{2} - \frac{a^3}{3} \right) \right]. \end{aligned}$$

Nach dem vorhin Erkannten ist  $\varphi = 0$  zu setzen, woraus sich ergibt:

$$M_A = \frac{p}{3} \left( \frac{b^2}{2} + a b - a^2 \right). \quad (5)$$

In der Ecke herrscht ein Biegemoment  $M_E = M_A - p b \frac{b}{2}$ , somit mit Gl. (5)

$$M_E = \frac{p}{3} (a b - a^2 - b^2). \quad (6)$$

Durch Vertauschung von  $a$  mit  $b$  in Gl. (5) ergibt sich das Biegemoment in  $B_4$

$$M_B = \frac{p}{3} \left( \frac{a^2}{2} + a b - b^2 \right). \quad (7)$$

## 26. Übung.

Wenn man nach Abb. 35 zwischen den an sich sehr torsionsnachgiebigen Wangen  $n$  torsionssteife Querstäbe, etwa Rohre, anordnet, entsteht ein torsionssteifer Stab. Es sind die Beziehungen aufzustellen, mittels derer man die Torsionsmomente in den Querstäben und die Biegemomente in den Wangen er-

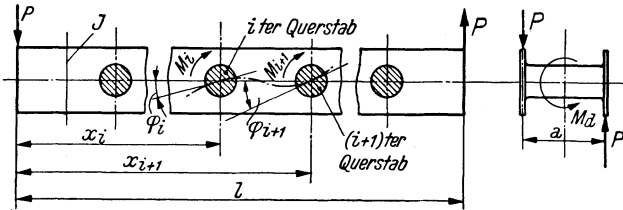


Abb. 35.

mitteln kann. Wie sind die Querstäbe auszuteilen, damit ihre Torsionsmomente gleich werden? Wie verlaufen dann die Biegemomente in den Wangen?

Da die Wangen für Torsion nur verschwindende Steifigkeit haben und flachkantig biegende Momente, wie leicht einzusehen, nicht in Frage kommen, übertragen die Querstäbe auf die Wangen lediglich die in Abb. 35 eingetragenen Momente. Einzelkräfte sind ebenfalls undenkbar. Die Verdrehungen der Querstäbe sind offenbar die doppelten Neigungen  $\varphi$  der elastischen Linie der einen Wange und proportional dem Moment  $M$ , das der Querstab auf die Wange ausübt. Also ist z. B. für den  $i$ ten Querstab

$$\varphi_i = K_t M_i. \quad (1)$$

(Darin ist  $K_t = \frac{a}{2GJ_t}$ , wo  $G$  Schubmodul,  $J$  Torsionsträgheitsmoment.) Der Biegewinkel des Wangenstückes zwischen den Querstäben  $i$  und  $i + 1$  ist  $\varphi_{i+1} - \varphi_i$ ; er ist der Biegemomentenfläche für dieses Stück proportional:

$$\varphi_{i+1} - \varphi_i = K_b (x_{i+1} - x_i) \left[ -P \frac{1}{2} (x_i + x_{i+1}) + (M_1 + \dots + M_i) \right]$$

(darin ist  $K_b = \frac{1}{EJ}$ , wo  $E$  Elastizitätsmodul,  $J$  Biegeträgheitsmoment). Mit Gl. (1) ist dann

$$(M_{i+1} - M_i) K_t = K_b (x_{i+1} - x_i) \left[ -P \frac{1}{2} (x_i + x_{i+1}) + (M_1 + \dots + M_i) \right]. \quad (2)$$

Entsprechend den  $n - 1$ -Wangenstücken können  $n - 1$  solche Gleichungen angeschrieben werden, zu welchen als  $n$ te zur Bestimmung von  $M_1 \dots M_n$  noch hinzukommt:

$$M_1 + \dots + M_n = Pl. \quad (3)$$

Es soll sein:  $M_{i+1} = M_i = M_1 = \dots = M_n = \frac{Pl}{n}$  und damit ergibt Gl. (2)

$$\frac{x_i + x_{i+1}}{2} = l \frac{i}{n}. \quad (4)$$

$\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$  ist die Entfernung der Mitte des Feldes zwischen den Stäben  $i$  und  $i + 1$  vom Stabende.

Laut Gl. (4) müssen diese Mitten auf der Stablänge gleichmäßig verteilt liegen. Die Stäbe müssen also (Abbildung 36) gleiche Teilung erhalten und die Endstäbe um die halbe Teilung von den Stabenden abstehen.

Das Torsionsmoment jedes Stabes ist

$$M = \frac{P \cdot l}{n} = \frac{M_a}{a} \cdot \frac{l}{n},$$

und weil  $l = n t$ :

$$M = M_a \frac{t}{a}. \quad (5)$$

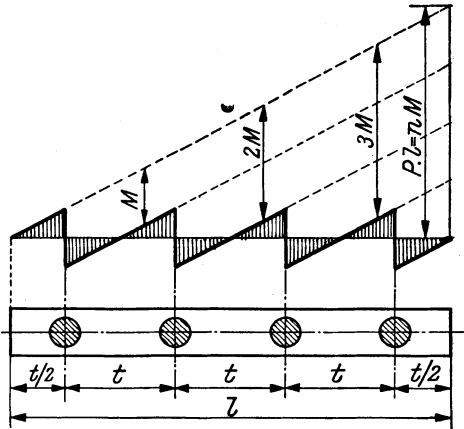


Abb. 36.

Der Biegemomentenverlauf laut Abb. 36 ergibt als höchstes Biegemoment in den Wangen  $M_b = \frac{M}{2}$  oder

$$M_{b \max} = \frac{M_a}{2} \frac{t}{a}.$$

## 27. Übung.

Ein torsionssteifer Stab, wie in Übung 26 behandelt, weise zwar gleichförmige Teilung der Querstäbe auf, die Stabenden stehen jedoch von den Endquerstäben um  $l_1$  und  $l_2$  ab. Wie groß sind die Torsionsmomente in den Querstäben und die Biegemomente in den Wangen?



Wir ersetzen (Abb. 37) die Kräfte  $P$  durch gleich große in der Entfernung  $\frac{t}{2}$  von den Endstäben in Verbindung mit den Kräftepaaren  $M' = P \left( l_1 - \frac{t}{2} \right)$  und  $M'' = P \left( l_2 - \frac{t}{2} \right)$ . An

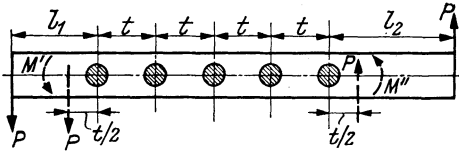


Abb. 37.

den Verhältnissen des Trägers im Bereich der Querstäbe hat sich dadurch nichts geändert, und wir lösen unsere Aufgabe durch Überlagerung des schon bekannten Falles — Be-

lastung durch  $P$  in  $\frac{t}{2}$  Abstand von den Endquerstäben — mit zwei Fällen in der Art von Abb. 38.

Es ist ähnlich wie in Übung 26

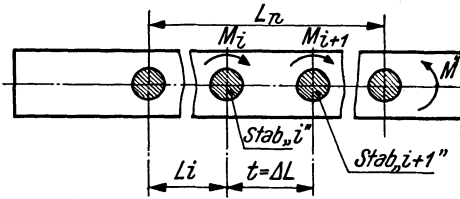


Abb. 38.

$$M'' = (M_1 + M_2 + \dots + M_i + \dots + M_n) \quad (1)$$

$$\varphi_i = K_t M_i, \quad (2)$$

$$\varphi_{i+1} - \varphi_i = K_b t (M_1 + \dots + M_i). \quad (3)$$

Durch Einsetzen von Gl. (2) in Gl. (3) wird

$$M_{i+1} - M_i = \frac{K_b}{K_t} t (M_1 + \dots + M_i).$$

Wir schreiben dies

$$\frac{M_{i+1} - M_i}{t} = \frac{K_b}{t \cdot K_t} \cdot t (M_1 + \dots + M_i)$$

und führen ein  $M_{i+1} - M_i = \Delta M_i$  und  $t = \Delta L$  (siehe Abb. 38),

sowie  $(M_1 + \dots + M_i) = \sum_1^i M_i$ :

$$\frac{\Delta M_i}{\Delta L} = \frac{K_b}{t K_t} \sum_1^i M_i \Delta L. \quad (4)$$

Wenn man sich mit einer Genauigkeit begnügt, die in dem Ersatz einer Stufenkurve durch eine stetige Kurve und dem Identifizieren von Sekanten und Tangenten einer Kurve liegt, kann an Stelle von Gl. (4) die Gleichung

$$\frac{dM}{dL} = \frac{K_b}{t K_t} \int_0^L M dL \quad (5)$$

treten, welche durch Differenzieren nach  $L$  übergeht in die bekannte Differentialgleichung

$$\frac{d^2 M}{dL^2} - \frac{K_b}{t K_t} M = 0. \quad (6)$$

Ihr Integral enthält die Konstanten  $A$  und  $B$  und lautet:

$$M = A e^{eL} + B e^{-eL}, \quad (7)$$

wobei

$$e = \sqrt{\frac{K_b}{t K_t}}. \quad (8)$$

Zu  $L = 0$  gehört laut Gl. (5)  $\frac{dM}{dL} = 0$ .

Das ergibt, wenn wir uns aus Gl. (7)  $\frac{dM}{dL}$  bilden,  $A = B$ , so daß Gl. (7) übergeht in

$$M = A (e^{eL} + e^{-eL}). \quad (9)$$

$L$  hat nur an den Stellen  $L_1 \dots L_n$  Bedeutung für uns, und durch Einsetzen von  $L = L_1 = 0, L_2 = t, \dots L_n = (n-1)t$  in Gl. (9) und Division der erhaltenen Gleichungen folgt

$$M_1 : M_2 : \dots M_n = 2 : (e^{et} + e^{-et}) : \dots (e^{(n-1)et} + e^{-(n-1)et}).$$

Nach den in Übung 26 gemachten Angaben ist

$$e t = \sqrt{\frac{K_b t}{K_t}} = \sqrt{2 \frac{G}{E} \frac{t}{a} \frac{J_t}{J}}.$$

Setzt man

$$\sqrt{2 \frac{G}{E} \frac{t}{a} \frac{J_t}{J}} = \varepsilon, \quad (10)$$

dann wird

$$\begin{aligned} M_1 : M_2 : M_3 : \dots M_n &= \\ &= 1 : \frac{e^\varepsilon + e^{-\varepsilon}}{2} : \frac{e^{2\varepsilon} + e^{-2\varepsilon}}{2} : \dots \frac{e^{(n-1)\varepsilon} + e^{-(n-1)\varepsilon}}{2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Die tatsächliche Größe von  $M_1 \dots M_n$  ergibt sich aus Gl. (11) in Verbindung mit Gl. (1).

Je kleiner  $\varepsilon$ , desto geringer sind die Unterschiede zwischen  $M_1 \dots M_n$ . Die Wangenbiegemomente sind über eine Teilung jeweils konstant und im Stück zwischen  $i$  und  $i+1$  gleich  $M_1 + \dots M_i$ .

## 28. Übung.

Ein aus dünnen Platten aus elastischem Material bestehender quaderförmiger Kasten, Abb. 39, wird durch Kräftepaare  $M_d$  in den Endflächen tordiert. Wie groß sind die Beanspruchungen der Seitenwände und der gegenseitige Verdrehungswinkel der Endflächen?

Wegen der Dünnheit der Platten ist ihre Steifigkeit einzeln gegen Torsion und flachkantige Biegung vernachlässigbar. Daher treten an den Begrenzungen der einzelnen Platten nur Kräfte auf, welche in die Kantenrichtungen des Quaders fallen.

Machen wir die zweimal vorkommenden Wände  $a \times l$  und  $b \times l$  frei, dann erkennt man aus der Symmetrie der Anord-

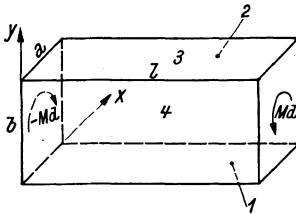


Abb. 39.

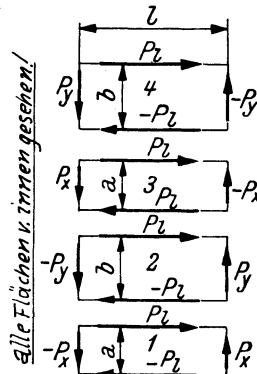


Abb. 40.

nung, daß in gegenüberliegenden Kanten einer Wand gleiche und entgegengesetzte Kräfte wirken, Abb. 40, und daß nach dem Momentensatz  $P_x \cdot l = P_l \cdot a$  und  $P_y \cdot l = P_l \cdot b$  ist, also auch

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{a}{b}. \quad (1)$$

Die Reaktionen der Kräfte in den Wänden  $a \times l$  und  $b \times l$  wirken auf die Endplatten  $a \times b$  und halten den darauf wirkenden Kräftepaaren Gleichgewicht. Also ist

$$P_x \cdot b + P_y \cdot a = M_d$$

und mit Gl. (1)

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \frac{M_d}{2b}, \\ P_y &= \frac{M_d}{2a}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Schließlich wird

$$P_l = \frac{M_d}{2ab} \cdot l. \quad (3)$$

Bei der sehr zwanglosen Annahme gleichmäßiger Verteilung der Kräfte in den Kanten auf die Längeneinheit derselben ist die Schubspannung  $\tau_a$  und  $\tau_b$  in den Wänden  $a \times l$ , Dicke  $s_a$  bzw.  $b \times l$ , Dicke  $s_b$ ,

$$\tau_a = \frac{P_l}{l \cdot s_a} \quad \text{und} \quad \tau_b = \frac{P_l}{l \cdot s_b},$$

und mit Gl. (3)

$$\left. \begin{array}{l} \tau_a = \frac{M_d}{2ab s_a}, \\ \tau_b = \frac{M_d}{2ab s_b} \end{array} \right\} \quad (4)$$

Wegen des paarweisen Auftretens von Schubspannungen kommt das gleiche Resultat heraus, wenn von  $P_x$  und  $P_y$  statt  $P_l$  ausgegangen wird:

$$\tau_a = \frac{P_x}{a s_a} = \frac{M_d}{2ab s_a} \quad \text{und} \quad \tau_b = \frac{P_y}{b s_b} = \frac{M_d}{2ab s_b}.$$

Wenn  $s_a = s_b$ , dann sind die Schubspannungen in allen vier Seitenwänden gleich.

Aus Symmetriegründen müssen sich die Endflächen bei der Deformation des Kastens um dessen Achse verdrehen, Abb. 41. Demzufolge gilt für die Verschiebungen  $\Delta_a$   $\Delta_b$  der Endpunkte der Längskanten und den Verdrehungswinkel  $\delta$

$$\delta = \frac{\Delta_a}{b/2} = \frac{\Delta_b}{a/2}. \quad (5)$$

Die Winkeländerungen  $\varphi_a$  und  $\varphi_b$  der Rechtecke  $a \times l$  bzw.  $b \times l$  infolge  $\tau_a$  bzw.  $\tau_b$  sind ( $G$  = Gleitmodul):

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_a = \frac{\tau_a}{G}, \\ \varphi_b = \frac{\tau_b}{G}. \end{array} \right\} \quad (6)$$

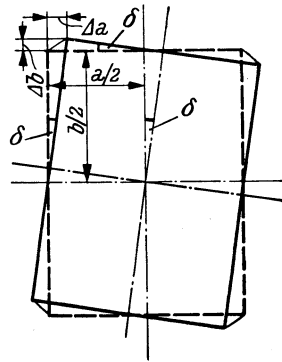


Abb. 41.

Blieben die Endflächen bei der Deformation eben, dann wäre

$$\frac{\Delta_a}{\Delta_b} = \frac{\varphi_a}{\varphi_b} = \frac{\tau_a}{\tau_b}$$

und wegen Gl. (4)

$$\frac{\Delta_a}{\Delta_b} = \frac{s_b}{s_a}.$$

Gl. (5) fordert aber  $\frac{\Delta_a}{\Delta_b} = \frac{b}{a}$ , was widersprechend ist. Daher muß im allgemeinen immer das eine Paar Diagonalepunkte jeder Endfläche um  $h$  aus der Ebene heraus, das andere Paar um ebensoviel zurücktreten.

Laut Abb. 42 ist

$$\varphi_a = \frac{\Delta_a}{l} + \frac{h}{a/2}, \quad \varphi_b = \frac{\Delta_b}{l} - \frac{h}{b/2}.$$

$h$  wird eliminiert:

$$\frac{\varphi_a}{b} + \frac{\varphi_b}{a} = \frac{1}{l} \left( \frac{\Delta_a}{b} + \frac{\Delta_b}{a} \right).$$

Mit Gl. (5) wird

$$\frac{\varphi_a}{b} + \frac{\varphi_b}{a} = \frac{\delta}{l},$$

und mit Gl. (6)

$$\delta = \frac{l}{G} \left( \frac{\tau_a}{b} + \frac{\tau_b}{a} \right).$$

Bei Einführung von Gl. (4) ist:

$$\delta = \frac{l}{G} \frac{M_d}{2ab} \left( \frac{1}{s_a \cdot b} + \frac{1}{s_b \cdot a} \right).$$

$h$  wird

$$h = \frac{\tau_a a - \tau_b \cdot b}{4G} = \frac{M_d}{8abG} \left( \frac{a}{s_a} - \frac{b}{s_b} \right).$$

Die Endplatten bleiben somit nur eben, wenn sich die Breiten der Seitenwände wie ihre Dicken verhalten!

## 29. Übung.

Eine der vollen Längswände des Kastens in Übung 28 wird durch einen Rahmen nach Abb. 43 ersetzt, dessen größte Biegemomente zu ermitteln sind.

Die äußeren Belastungen des Rahmens sind die Kantenkräfte  $P_a$  und  $P_l$ . Wir führen, Abb. 44, den Schnitt  $mm$  durch die Mitte der Kanten  $l$  und bringen zwecks Erhaltung des Gleich-

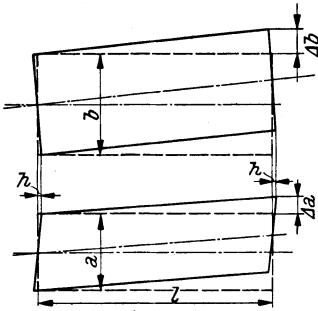


Abb. 42.

gewichtet am linken Rahmenteil die Querkräfte  $Q'$ ,  $Q''$ , die Längskräfte  $Z'$ ,  $Z''$  und die Kräftepaare  $M'$ ,  $M''$  an. Am rechten Rahmenteil sind die dazu gleichen und entgegengesetzten Kräfte und Momente anzubringen. Kehren wir sämtliche am rechten Rahmenteil tätigen Kräfte und Momente um, Abb. 45, dann muß sich natürlich wieder ein Gleichgewichtsfall ergeben.

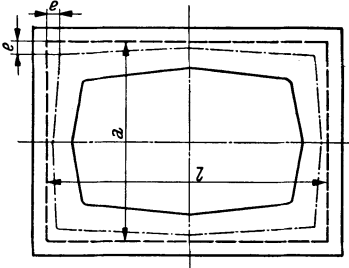


Abb. 43.

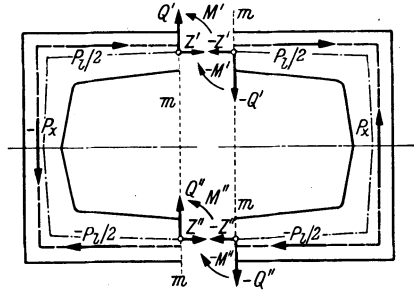


Abb. 44.

Klappt man nun den rechten Rahmenteil um  $m m$  um, dann deckt er sich, was Form und äußere Belastung betrifft, mit dem linken Rahmenteil; da auch Gleichheit bezüglich der an der Schnittfläche tätigen Kräfte und Momente bestehen muß, ergibt der Vergleich von Abb. 44 und 45

$$M' = M'' = 0,$$

$$Z' = Z'' = 0.$$

Bringt man die in Abb. 44 dargestellten Rahmenteile durch Drehung in der Rahmenenebene zur Deckung, dann erkennt man, ähnlich wie vorher,

$$Q' = Q'' = Q = \frac{P_x}{2}.$$

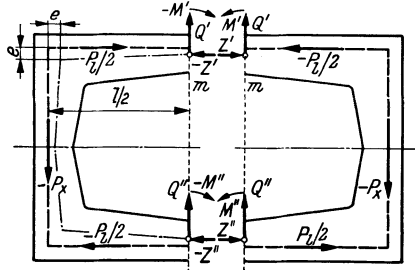


Abb. 45.

Analoges ergibt sich für die Mitten der Kanten  $a$ : weder Biegemoment noch Längskraft; Querkraft  $= \frac{P_l}{2}$ .

Das größte Biegemoment ist offensichtlich das für alle vier Ecken dem Betrage nach gleiche Eckenmoment  $M_e$ :

$$M_e = Q \left( \frac{l}{2} - e \right) - \frac{P_l}{2} e = \frac{1}{2} \left[ P_x \left( \frac{l}{2} - e \right) - P_l e \right].$$

Mit den in Übung 28 erhaltenen Werten wird

$$M_e = \frac{M_a}{8} \cdot \frac{l}{b} \left[ 1 - 2e \frac{a+l}{al} \right].$$

Liegt die neutrale Faser statt innerhalb der Kanten um  $e$  außerhalb derselben, dann hat das Glied mit  $e$  das Zeichen  $+$ .

Da wir über die Verteilung von  $P_x$  und  $P_l$  längs der Kanten  $a$  und  $l$  nichts aussagen können,<sup>1</sup> bleibt der Verlauf des Abfalles der Biegemomente von  $M_e$  in der Ecke auf 0 in Kantenmitte unbestimmt.

### 30. Übung.

Ein Ring (Abb. 46) ist je Längeneinheit seines Umfanges mit  $q$  senkrecht zu seiner Ebene belastet und wird durch  $n$  gleichmäßig ausgeteilte Stützen  $S$  getragen. Gesucht ist der Verlauf der Biege- und der Torsionsmomente längs des Ringumfanges, ferner die

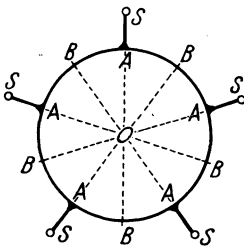


Abb. 46.

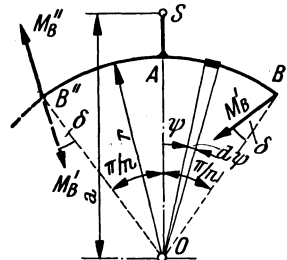


Abb. 47.

Bedingungen, unter denen a) das Biegemoment in den Punkten  $A$  bzw.  $B$  verschwindet, b) die Biegemomente in  $A$  und  $B$  gleiche Beträge haben.

Infolge der Symmetrie sind die Stützendrücke untereinander gleich und  $\frac{2r\pi q}{n}$ . Wir denken uns den Ring symmetrisch zu den Stützen in  $n$  gleiche Segmente geteilt, deren Deformation symmetrisch zu  $OS$  verlaufen wird (Abb. 47). Das ist nur denkbar, wenn die Querkräfte  $Q_{B'}$  und  $Q_{B''}$  in  $B'$  bzw.  $B''$  gleich und gleichgerichtet sind:  $Q_{B'} = Q_{B''}$ . Da andererseits dem auf das Segment entfallenden Anteil der ganzen Ringbelastung durch den Stützwiderstand in  $S$  gerade Gleichgewicht gehalten wird, ist  $Q_{B'} + Q_{B''} = 0$ , somit  $Q_{B'} = Q_{B''} = 0$ .

<sup>1</sup> Außer, symmetriebedingt, daß auf eine halbe Kantenlänge die halbe Längskraft entfällt.

In  $B'$  wirke das Moment  $M_{B'}$ . Da sich ja alle Ringsegmente gleich verhalten, wirkt in  $B''$  auf den strichliert gezeichneten Ringteil ein ebenso dargestelltes Moment in gleicher Größe wie  $M_{B'}$  und unter dem gleichen Winkel  $\delta$  gegen den Radius geneigt wie dieses. Die Reaktion des strichlierten Momentes ist das in  $B''$  auf den Ringteil  $B' B''$  wirkende Moment  $M_{B''}$ . Das aus  $M_{B'}$  und  $M_{B''}$  resultierende Moment muß aus Symmetriegründen  $\perp OS$  stehen, wodurch sich  $\delta = 0$  ergibt.  $M_{B'} = M_{B''} = M_B$  sind somit reine Biegemomente und in  $B'$  und  $B''$  herrscht keine Torsion. Das Momentengleichgewicht um eine Achse  $\perp OS$  durch  $O$  erfordert

$$2 M_B \sin \frac{\pi}{n} - \frac{2 r \pi q}{n} a + 2 \int_0^{\pi/n} q r d\psi \cdot r \cos \psi = 0,$$

woraus

$$M_B = q r^2 \left[ \frac{a}{r} \frac{\pi/n}{\sin \pi/n} - 1 \right]. \quad (1)$$

An Hand von Abb. 48 ergibt sich das Biegemoment  $M_b$  an der durch  $\varphi \leq \frac{\pi}{n}$  gekennzeichneten Stelle zu

$$M_b = M_B \cos \varphi - \int_0^{\varphi} q r d\varphi r \sin \varphi,$$

und mit Gl. (1) zu

$$M_b = q r^2 \left( \frac{a}{r} \frac{\pi/n}{\sin \pi/n} \cos \varphi - 1 \right). \quad (2)$$

Ähnlich ist das Torsionsmoment

$$M_a = M_B \sin \varphi - \int_0^{\varphi} q r d\varphi r (1 - \cos \varphi),$$

und mit Gl. (1)

$$M_a = q r^2 \left( \frac{a}{r} \frac{\pi/n}{\sin \pi/n} \sin \varphi - \varphi \right). \quad (3)$$

Für Punkt  $A$  wird mit  $\varphi = \pi/n$

$$M_{bA} = q r^2 \left( \frac{a}{r} \frac{\pi/n}{\sin \pi/n} - 1 \right), \quad (4)$$

$$M_{aA} = \frac{q r \pi}{n} (a - r). \quad (5)$$

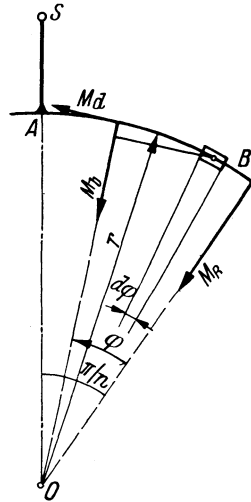


Abb. 48.



Nach Gl. (3) verschwindet, außer für  $\varphi = 0$ , das Torsionsmoment nur, wenn

$$\frac{\sin \varphi}{\varphi} = \frac{r}{a} \frac{\sin \pi/n}{\pi/n};$$

da  $\varphi \leq \frac{\pi}{n}$  und daher  $\frac{\sin \varphi}{\varphi} \geq \frac{\sin \pi/n}{\pi/n}$ , tritt dies nur für

$$r \geq a$$

ein.

Laut Gl. (4) wird  $M_{bA} = 0$ , wenn

$$\frac{\operatorname{tg} \pi/n}{\pi/n} = \frac{a}{r};$$

das erfordert jedenfalls

$$r < a.$$

$M_B = 0$  tritt gemäß Gl. (1) ein für

$$\frac{\sin \pi/n}{\pi/n} = \frac{a}{r},$$

was nur für

$$r > a$$

möglich ist.

Der Vergleich von Gl. (1) und Gl. (4) zeigt, daß  $M_B$  und  $M_{bA}$  bei gleichem Vorzeichen nicht gleich sein können. Die Bedingung, daß die *Beträge* von  $M_B$  und  $M_{bA}$  gleich sind, lautet nach Gl. (1) und Gl. (4):

$$\frac{a}{r} \frac{\pi/n}{\sin \pi/n} - 1 = 1 - \frac{a}{r} \frac{\pi/n}{\operatorname{tg} \pi/n},$$

oder unter Benutzung der trigonometrischen Formeln  $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$  und  $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$

$$\frac{\operatorname{tg} \pi/2n}{\pi/2n} = \frac{a}{r}.$$

Dies kann nur bei

$$r < a$$

bestehen.

Differenziert man Gl. (3) nach  $\varphi$ , so erweist sich durch Vergleich mit Gl. (2) bemerkenswerterweise

$$\frac{d M_a}{d \varphi} = M_b.$$

### 31. Übung.

Der Ring nach Übung 30 (Abb. 49) weise in jedem Segment eine Stoßfuge  $F$  auf, welche nur ein beschränktes Torsionsmoment  $\pm M_F$  übertragen kann. Wie verändert dies die Ergebnisse der Übung 30?

Setzt man in Gl. (3) der Übung 30  $\varphi = \varphi_F$  ein und erweist sich  $M_a$  im Betrage kleiner als  $M_F$ , dann gelten die Ausführungen von Übung 30 unverändert. Im anderen Falle ist jedoch eine Symmetrie der Deformation bezüglich  $OS$  nicht mehr zu erwarten. Daher treten die Querkräfte  $Q_{B'}$  und  $Q_{B''}$  auf, wobei die Beziehung  $Q_{B'} + Q_{B''} = 0$  gültig bleibt, so daß  $Q_{B'} = -Q_{B''} = \pm Q_B$ .

$M_{B'}$  und  $M_{B''}$  sind jetzt keine reinen Biegemomente mehr, sondern es herrschen in  $B'$  und  $B''$  die in Abbildung 49 ersichtlich gemachten Biegemomente  $M_{Bb}$  und die Torsionsmomente  $M_{Ba}$ . Wenn man  $M_B$  durch  $M_{Bb}$  ersetzt, gilt Gl. (1) der Übung 30 unverändert:

$$M_{Bb} = q r^2 \left[ \frac{a}{r} \frac{\pi/n}{\sin \pi/n} - 1 \right]. \quad (1)$$

Das Momentengleichgewicht um Achse  $OS$  bedingt

$$2 M_{Ba} \sin \pi/n = 2 Q_B r \sin \pi/n$$

oder

$$M_{Ba} = Q_B \cdot r. \quad (2)$$

Setzt man  $Q_B$  mit  $M_{Ba}$  zusammen, so ergibt das vermöge der Beziehung Gl. (2) eine Kraft  $Q_B$ , die, parallel verschoben, im Ringmittelpunkt  $O$  wirkt. Sie erzeugt nirgends im Ring ein Biegemoment, jedoch ein für alle Ringquerschnitte gleiches Torsionsmoment  $Q_B \cdot r = M_{Ba}$ .

Somit gilt Gl. (2) der Übung 30 unverändert, in Gl. (3) der Übung 30 kommt additiv  $M_{Ba}$  hinzu:

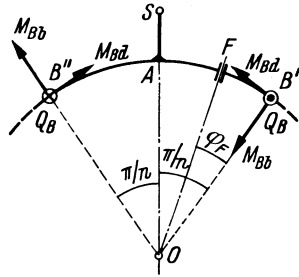


Abb. 49.

$$M_b = q r^2 \left( \frac{a}{r} \frac{\pi/n}{\sin \pi/n} \cos \varphi - 1 \right), \quad (3)$$

$$M_a = M_{Ba} + q r^2 \left( \frac{a}{r} \frac{\pi/n}{\sin \pi/n} \sin \varphi - \varphi \right). \quad (4)$$

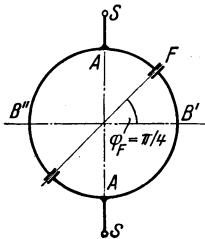
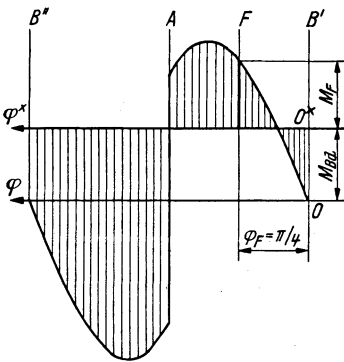


Abb. 50.

Die Größe von  $M_{Ba}$  ist dadurch festgelegt, daß an der Stelle der Stoßfuge, also für  $\varphi = \varphi_F$ ,  $M_a = \pm M_F$  sein muß.

Rechnerisch wäre also in Gl. (4)  $M_a = M_F$  und  $\varphi = \varphi_F$  zu setzen und aus dieser Gleichung und Gl. (4)  $M_{Ba}$  zu eliminieren. Viel anschaulicher ist hier die zeichnerische Darstellung, die einfach auf eine Verschiebung der Abszissenachse hinausläuft. In Abb. 50 ist nach Übung 30 der  $M_a$ -Verlauf für einen Fall  $n = 2$ ,  $a = 1,5 r$ ,  $\varphi_F = \frac{\pi}{4}$  über der Abszissenachse  $O\varphi$  aufgetragen. Die maßgebende parallel verschobene Abszissenachse  $O^*\varphi^*$  ist einfach so zu zeichnen, daß, auf diese bezogen, für  $\varphi_F$  die Kurve die Ordinate  $M_F$  aufweist.

## Fünfter Teil.

## Kurze Übungen aus verschiedenen Gebieten.

## 32. Übung.

Abb. 51 zeigt ein Umlaufräderwerk aus Kettentrieben. Es ist zeichnerisch die Übersetzung zwischen dem umlaufenden Steg  $S$  und Rad 3 zu bestimmen, wenn Rad 1 feststeht.

Der Drehpol  $O_2$  des Rädersatzes 2 muß, Satz der drei Pole, auf Mitte Steg liegen. Das Kettenstück  $AB$  dreht sich momentan gegen 1 um  $A$ , andererseits dreht sich Rädersatz 2 gegen Ketten-

stück  $AB$  um  $B$ . Als zweiter geometrischer Ort von  $O_2$  ergibt sich, wieder nach obigem Satz, die Verlängerung von  $AB$  und damit  $O_2$  selbst. Die gleiche Überlegung ergibt  $O_{32}$  als momentanen Drehpol von Rad 3 gegen Rädersatz 2. Daher ergibt sich folgende Geschwindigkeitsverteilung für die Zentrale des Getriebes. *Steg*: Geschwindigkeit steigt längs  $O_s$  II. *Rädersatz 2*: Geschwin-

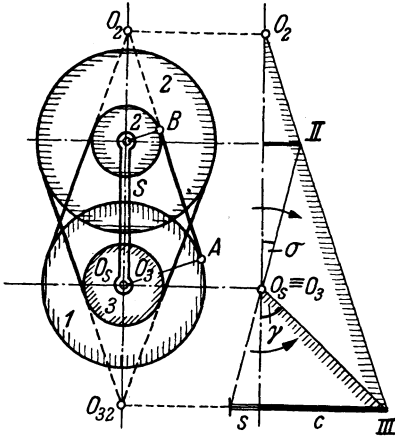


Abb. 51.

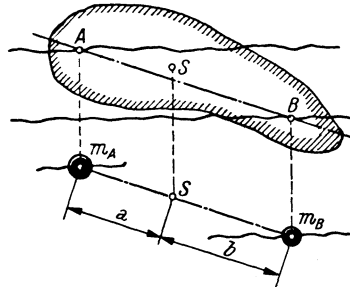


Abb. 52.

digkeit steigt längs  $O_2$  II III. *Rad 3*: Geschwindigkeit steigt längs  $O_3$  III. Demgemäß ist das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_3$  und  $\omega_s$  von Rad 3, bzw. vom Steg:

$$\frac{\omega_3}{\omega_s} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \sigma} = \frac{c}{s}.$$

Man sieht auch, daß beide entgegengesetzt sind.

### 33. Übung.

Zwei Punkte eines Körpers werden auf im großen ganzen geraden und parallelen Bahnen geführt (die auch zusammenfallen können), Abb. 52. Die Bahnen haben jedoch kleine Unebenheiten und es entstehen dadurch dynamische Führungsdrücke. Die Unebenheiten an der einen Führungsstelle sollen die Führungsdrücke an der anderen nicht beeinflussen und umgekehrt. Wie muß die Massenverteilung des Körpers sein? (Anwendung: Fahrzeuge, Fahrzeug und Stromabnehmer!)

Der gestellten Forderung wird genügt, wenn sich der Körper durch je eine Masse in den beiden Führungspunkten dynamisch

ersetzen läßt. Ersatzmassen und ersetzter Körper müssen bei ebener Bewegung 1. gleichen Schwerpunkt  $S$ , 2. gleiche Gesamtmasse  $m$ , 3. gleiches Trägheitsmoment um die Schwerachse senkrecht zur Bewegungsebene haben, also lassen sich folgende Gleichungen ansetzen:

$$m_A a - m_B b = 0,$$

außerdem muß  $S$  auf  $AB$  liegen.

$$m_A + m_B = m,$$

$$m_A a^2 + m_B b^2 = m \varrho_s^2.$$

$\varrho_s$  bedeutet den Schwerpunktradius. Eliminiert man  $m_A$  und  $m_B$ , dann erhält man die gesuchte Lösung:

$$a b = \varrho_s^2.$$

### 34. Übung.

Ein steifes (unbelastet gerades) Band legt sich um eine kreisbogenförmige Unterlage vermöge der Belastung durch eine Einzelkraft, deren Lage Abb. 53 zeigt. Welche Pressungen herrschen zwischen Band und Unterlage?

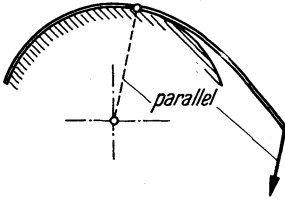


Abb. 53.

Im aufliegenden Teil hat das Band konstante Krümmung, daher muß in diesem Teil das Biegemoment des Bandes unveränderlich sein, was nur bei Abwesenheit von Pressungen möglich ist. Das konstante Biegemoment kommt durch die Wirkung der gegebenen Kraft und einer gleichen und entgegengesetzten zustande, welche dort von der Unterlage her auf das Band wirkt, wo die Berührung der beiden aufhört bzw. beginnt. Dort ist also die Pressung äußerst groß, überall sonst aber Null!

### 35. Übung.

Zwei Maschinen stehen über eine Zwischenwelle, welche von einem Moment  $M$  beansprucht wird, gemäß Abb. 54 (welches einen Grundriß darstellt) in Verbindung. Wo liegen die resultierenden Kräfte, mit welchen, zusätzlich zum Gewicht, die Fundamente der beiden Maschinen beansprucht werden? (Radialkomponenten der Zahndrücke vernachlässigt.)

Auf Maschine *I* wirken resultierend der Lagerdruck  $L_I$  in  $A_I$  und der Zahndruck  $Z_I$  in  $B_I$ , auf Maschine *II* wirken der Lagerdruck  $L_{II}$  in  $A_{II}$  und der Zahndruck  $Z_{II}$  in  $B_{II}$ . Die Reaktionen von  $Z_I$  und  $L_I$  und von  $Z_{II}$  und  $L_{II}$  halten einander an der Zwischenwelle Gleichgewicht. Daher muß die Resultierende der Reaktionen von  $Z_I$  und  $L_I$  und jene der Reaktionen von  $Z_{II}$  und  $L_{II}$  durch den Punkt  $T$  hindurchgehen, woselbst sie einander tilgen. Daher stehen auch die beiden resultierenden

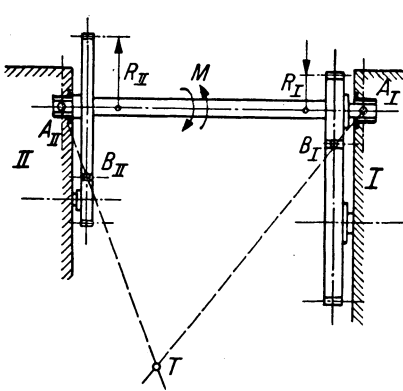


Abb. 54.

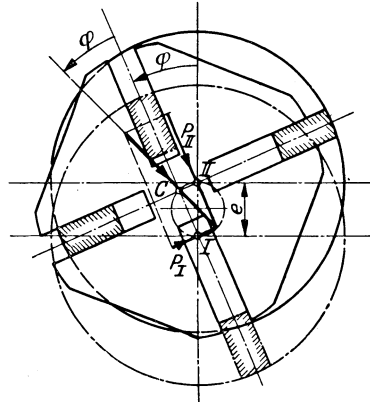


Abb. 55.

Kräfte auf die Fundamente der beiden Maschinen im Verhältnis von Aktion und Reaktion und gehen durch  $T$ . Die Größe ist durch

$$\frac{M}{R_I} \cdot \frac{A_I B_I}{A_I T} = \frac{M}{R_{II}} \cdot \frac{A_{II} B_{II}}{A_{II} T}$$

gegeben.

Ist  $A_I B_I \parallel A_{II} B_{II}$ , dann besteht die Wirkung in einem Kräftepaar!

### 36. Übung.

Welche Kraftwirkungen auf die beiden im Abstand  $e$  voneinander befindlichen Wellen, welche durch die bekannte **OLDHAM**sche oder **Kreuzscheibenkupplung** miteinander verbunden sind, entsteht durch die Massenwirkung der Zwischenscheibe (Masse  $m$ ) bei gleichförmigem Umlauf der Wellen? Abb. 55.

Außer den beiden Wellen dreht sich auch die **Zwischenscheibe** gleichförmig, erfordert daher kein Moment um ihren Schwerpunkt

zu ihrer Bewegung. Dieser durchläuft, wie man in der Abbildung erkennt, einen Kreis vom Durchmesser  $e$ , und zwar gleichförmig mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Wellen. Somit muß eine durch den Scheibenschwerpunkt und den Kreismittelpunkt gehende Kraft  $C = m \frac{e}{2} (2\omega)^2 = 2 m e \omega^2$  seitens der beiden Wellen auf die Scheibe ausgeübt werden. Jede Welle kann nur mit einer senkrecht auf die zugehörige Führungsnut stehenden Kraft auf die Scheibe einwirken, wodurch die Krafttrichtung festliegt. Die Lage der Kraft ist dadurch bestimmt, daß ihre Reaktion kein Drehmoment auf die Welle ergeben darf, weil diese gleichförmig umläuft. Daher geht die Kraft durch Mitte Welle. Die Zerlegung von  $C$  in zwei derartige Kräfte  $P_I$  und  $P_{II}$ , welche von den Wellen  $I$  bzw.  $II$  herkommen, ergibt, wenn der Winkel  $\varphi$  der Abb. 55 die Stellung der Kupplung kennzeichnet,  $P_I = C \sin \varphi$ ,  $P_{II} = C \cos \varphi$  oder

$$P_I = 2 m e \omega^2 \sin \varphi$$

und

$$P_{II} = 2 m e \omega^2 \cos \varphi.$$

Die Reaktionen dieser Kräfte sind die gesuchten Kräfte.

### 37. Übung.

An einem Punkt  $P$  eines ruhenden Körpers, Abb. 56, tritt die Stoßkraft (Impuls)  $K$  auf, parallel zu einer der Schwerpunkts-Hauptträgheitsachsen  $x, y, z$  des Körpers. Welche Geschwindigkeit wird dem Körper in  $P$  erteilt?

Der Schwerpunkt  $S$  des Körpers, Masse  $m$ , erhält durch die Stoßkraft  $K$  eine derartige Geschwindigkeit  $v_s$ , daß die Bewegungsgröße  $m v_s$  gleich und gleichgerichtet  $K$  ist:

$$m v_s = K. \quad (1)$$

Da die Stoßkraft um die Hauptträgheitsachsen  $x$  und  $z$  Momente hat, entstehen gleich große Drallkomponenten bezüglich dieser:

$$K x = J_z \omega_z, \quad (2)$$

$$K z = -J_x \omega_x. \quad (3)$$

Es bedeuten darin  $\omega_x, \omega_z$  Komponenten der Winkelgeschwindigkeit,  $J_x, J_z$  Hauptträgheitsmomente. Die infolge  $v_s, \omega_x, \omega_z$  sich ergebende

Geschwindigkeit von  $P$  ist:

$$v = v_s + \omega_z x - \omega_x z; \quad (4)$$

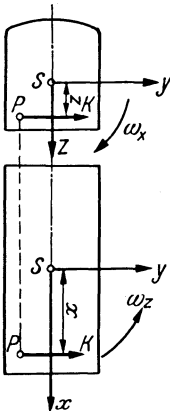


Abb. 56.

darein werden Gl. (1), (2) und (3) eingesetzt:

$$v = \frac{K}{m} \left( 1 + \frac{x^2}{\frac{J_z}{m}} + \frac{z^2}{\frac{J_x}{m}} \right).$$

Führt man die Trägheitsradien ein,  $\varrho_z^2 = \frac{J_z}{m}$  und

$\varrho_x^2 = \frac{J_x}{m}$ , so erhält man:

$$v = \frac{K}{m} \left( 1 + \left[ \frac{x}{\varrho_z} \right]^2 + \left[ \frac{z}{\varrho_x} \right]^2 \right).$$

Es ist bezüglich  $v$  so, als ob in  $P$  eine konzentrierte Masse

$$m^* = \frac{m}{1 + \left( \frac{x}{\varrho_z} \right)^2 + \left( \frac{z}{\varrho_x} \right)^2}$$

vorhanden wäre.

### 38. Übung.

Gegeben das Gelenkvier-eck  $0\ 1\ 2\ 3$ , Abb. 57, bei welchem die Seite  $0$  ruht und Punkt  $(1\ 2)$  eine bekannte Geschwindigkeit  $v$  hat. Ohne an den relativen Geschwindigkeitsverhältnissen der Glieder gegeneinander etwas zu ändern, werden der Reihe nach statt  $0$  die Seiten  $1$ ,  $2$ ,  $3$  festgehalten. Ermittle auf einfachste Art zeichnerisch die nunmehr auftretenden Geschwindigkeiten der Gelenkpunkte.

Man greife jeweils zwei sich deckende Punkte so heraus, daß der eine dem *ursprünglich* ruhenden, der andere dem *nachher* ruhenden Glied angehört. Die Geschwindigkeit des zweitgenannten Punktes bei der ersten Bewegungsart ist leicht zu bestimmen. Die gleiche und entgegengesetzte Geschwindigkeit ist die relative des ersten Punktes gegen das nachher ruhende Glied, wird also nach der kinematischen Umkehrung zu der absoluten, nach

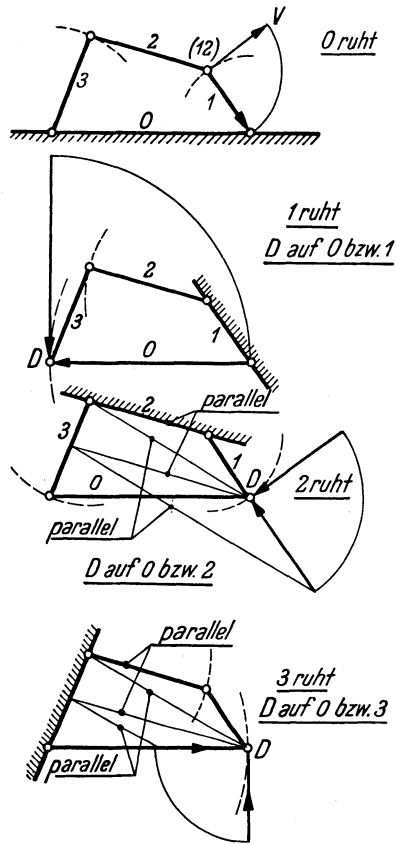


Abb. 57.



welcher gefragt war. Zweckmäßig stellt man  $v$  so in der Zeichnung dar, daß die gedrehte Geschwindigkeit  $v$  mit der Länge der zugehörigen Kurbel zusammenfällt. Die gewählten Deckpunkte sind jeweils durch  $D$  bezeichnet. Die Ermittlungen geschehen mittels der gedrehten Geschwindigkeiten in bekannter Weise.

### 39. Übung.

Ein Ring ist auf einem Armstern von  $n$  Armen aufgeschraubt, Abb. 58. In welcher Beziehung steht die Summe  $P$  aller Schrumpfkraften zwischen Ring und Armstern zum größten im Ring auftretenden Biegemoment  $M_{\max}$ ?

Man denke einen Ringsektor herausgeschnitten, wie Abb. 58 andeutet, und bringe die vom Arm herrührende Schrumpfkraft  $\frac{P}{n}$

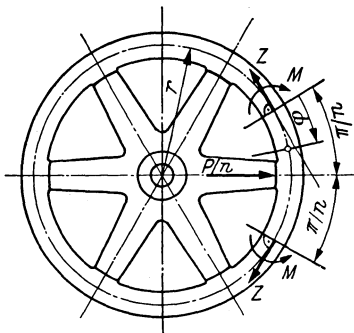


Abb. 58.

an, sowie in den Schnittstellen Zugkräfte und Biegemomente, die von den weggeschnittenen Ringteilen herkommen. Querkräfte fehlen aus Symmetriegründen. Die Zugkräfte sind statisch bestimmt:

$$2Z \sin \frac{\pi}{n} = \frac{P}{n}. \quad (1)$$

Die Momente  $M$  werden dadurch ermittelbar, daß in dem halben betrachteten Sektor die Endtangentialen gegeneinander sich nicht verdrehen, daß also die Fläche der

(abgewickelten) Linie der Biegemomente  $M_b$  für diesen Bereich verschwinden muß:

$$\int_A^E M_b d\varphi \cdot r = \int_0^{\frac{\pi}{n}} (M - Zr [1 - \cos \varphi]) r d\varphi =$$

$$= r \left[ M \cdot \frac{\pi}{n} - Zr \frac{\pi}{n} + Zr \sin \frac{\pi}{n} \right] = 0.$$

Das ergibt

$$M = Zr \left[ 1 - \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \right];$$

daher ist an beliebiger Stelle  $\varphi$

$$M_{\varphi} = \left[ \frac{\frac{\pi}{n} \cos \varphi - \sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \right] Z r$$

und das größte Biegemoment jenes für  $\varphi = \frac{\pi}{n}$ . Es beträgt

$$M_{\max} = \left[ \cos \frac{\pi}{n} - \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \right] Z r. \quad (2)$$

$Z$  aus Gl. (1) hier eingesetzt, gibt die gewünschte Beziehung (Vorzeichen von  $M_{\max}$  unterdrückt):

$$M_{\max} = \frac{P r}{2 \pi} \left[ 1 - \frac{\pi}{n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} \right].$$

#### 40. Übung.

Es gibt Vorrichtungen, Abb. 59, bei welchen durch einen kleinen Motor Massen  $m$  in Umlauf gesetzt werden, wobei durch ihre Fliehkraft Bewegungen entgegen der Kraft  $P$  erzeugt werden. Die Nutzarbeit  $\int P ds$  dieser Vorrichtungen wird zum Lösen von Bremsen usw. verwendet. Welche Arbeit muß der Antriebsmotor an die Vorrichtung abgeben, wenn seine Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  dabei konstant ist und von Reibungen abgesehen werden kann?

Um die Fliehgewichte umlauflos betrachten zu können, wird ihre Fliehkraft  $F = m r \omega^2$  sowie ihre negative Corioliskraft

$$C = 2 m \frac{dr}{dt} \omega$$

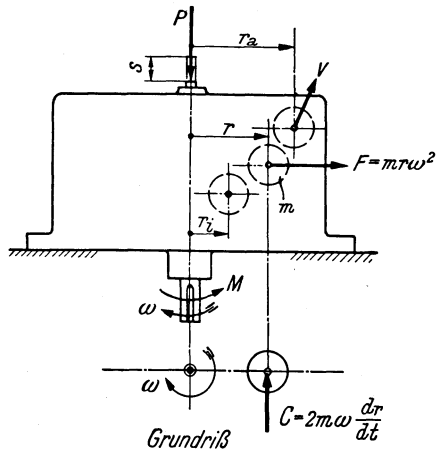


Abb. 59.

angebracht. Letztere wirkt hier senkrecht zum jeweiligen Radius; das Gleichgewicht in dieser Richtung erfordert die Ausübung eines

Führungsdruckes —  $C$  auf das Fliehgewicht; d. h. auf den rein umlaufenden Teil wirkt als Reaktion  $C$  und bedingt, daß an der Welle der Antriebsmotor mit dem Moment  $M = C r = 2 m r \frac{dr}{dt} \omega$  dreht. Er gibt daher an die Vorrichtung die Arbeit

$$A_M = \int_0^t M \omega dt = \int_{r_i}^{r_a} 2 m \omega^2 r dr$$

ab. Die Integration gibt:

$$A_M = m \omega^2 (r_a^2 - r_i^2). \quad (1)$$

Ist  $v$  die Geschwindigkeit des Fliehgewichtes relativ zum umlaufenden Teil, wenn der Weg  $s$  beendet ist, dann ergibt der Satz von der lebendigen Kraft:

$$\frac{m v^2}{2} = \int_{r_i}^{r_a} F dr - \int_0^s P ds = \int_{r_i}^{r_a} m r \omega^2 dr - A.$$

Ausgeführt erhält man:

$$A = \frac{1}{2} m \omega^2 (r_a^2 - r_i^2) - \frac{1}{2} m v^2,$$

und mit Gl. (1):

$$A = \frac{1}{2} A_M - \frac{1}{2} m v^2$$

oder

$$A_M = 2 \left( A + \frac{m v^2}{2} \right);$$

$v$  ist in der Regel unbedeutend. Also muß der Antriebsmotor die doppelte Nutzarbeit leisten. Dies wird verständlich durch die Tatsache, daß die Fliehgewichte während der Zurücklegung des Weges auf größeren Radius gelangen und dadurch ihre Umlaufswucht wächst.

**Führer durch die technische Mechanik.** Eine neuartige Übersicht über ihre Grundlagen, Methoden und Ergebnisse für Studium und Praxis. Von Privatdozent Dr.-Ing. **Horst Müller**, Hannover. Mit 166 Textabbildungen. VIII, 118 Seiten. 1935. RM 8.50

---

**Einführung in die Mechanik fester elastischer Körper und das zugehörige Versuchswesen.** (Elastizitäts- und Festigkeitslehre.) Von Professor Dr. **Rudolf Girtler**, Brünn. Mit 182 Textabbildungen. VIII, 450 Seiten. 1931. (Springer-Verlag, Wien.) Ganzleinen RM 29.—

---

**Lehrbuch der technischen Mechanik starrer Systeme.** Zum Vorlesungsgebrauch und zum Selbststudium. Von Professor Dr. **Karl Wolf**, Wien. Mit 250 Textabbildungen. IX, 359 Seiten. 1931. (Springer-Verlag, Wien.) Halbleinen RM 18.85

---

**Technische Mechanik starrer Gebilde.** Von Geh. Reg.-Rat Professor Dr. Dr.-Ing. **Hans Lorenz**, Danzig. Zweite, vollständig neubearbeitete Auflage der Technischen Mechanik starrer Systeme. (Lehrbuch der technischen Physik, Bd. I.)

Erster Teil: Mechanik ebener Gebilde. Mit 295 Textabbildungen. VIII, 390 Seiten. 1924. Ganzleinen RM 16.20

Zweiter Teil: Mechanik räumlicher Gebilde. Mit 144 Textabbildungen. VIII, 294 Seiten. 1926. Ganzleinen RM 18.90

---

**Hundert Versuche aus der Mechanik.** Von Professor **Georg v. Hanffstengel**, Berlin. Mit 100 Abbildungen im Text. V, 49 Seiten. 1925. RM 2.97

---

**Lehrbuch der technischen Mechanik für Ingenieure und Physiker.** Zum Gebrauche bei Vorlesungen und zum Selbststudium. Von Professor Dr.-Ing. **Theodor Pöschl**, Karlsruhe. Zweite, vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 294 Textabbildungen. VIII, 318 Seiten. 1930. RM 15.75; Ganzleinen RM 17.10

---

**Leitfaden der Mechanik für Maschinenbauer.** Mit zahlreichen Beispielen für den Selbstunterricht. Von Oberstudien-  
direktor Professor Dr.-Ing. **Karl Laudien**, Stettin.

Erstes Heft: Statik und Dynamik. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 246 Textabbildungen. VI, 179 Seiten. 1927. RM 4.95

Zweites Heft: Hydraulik. Mit 82 Textabbildungen. IV, 46 Seiten. 1928. RM 2.25

---

**Kurzes Lehrbuch der Physik.** Von Professor Dr. **Herbert Stuart**, Dresden. Mit 378 Textabbildungen. VII, 269 Seiten. 1942.  
RM 9.60

---

**Technische Dynamik.** Von Professor Dr. **C. B. Biezeno**, Delft, und Professor Dr. Dr.-Ing. **R. Grammel**, Stuttgart. Mit 667 Abbildungen und 5 Anhängen. XII, 1056 Seiten. 1939. Ganzleinen RM 78.—

---

**Graphische Dynamik.** Ein Lehrbuch für Studierende und Ingenieure. Mit zahlreichen Anwendungen und Aufgaben. Von Professor **Ferdinand Wittenbauer** †, Graz. Mit 745 Textfiguren. XVI, 797 Seiten. 1923. Ganzleinen RM 27.—

---

**Christmann-Baer, Grundzüge der Kinematik.** Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Von Professor Dr.-Ing. **H. Baer**, Breslau. Mit 164 Textabbildungen. VI, 138 Seiten. 1923.  
RM 3.60; Ganzleinen RM 4.95

---

**Einführung in die theoretische Kinematik**, insbesondere für Studierende des Maschinenbaues, der Elektrotechnik und der Mathematik. Von Professor Dr. phil. Dr. rer. techn. h. c. **Reinhold Müller**, Darmstadt. Mit 137 Abbildungen im Text. VII, 124 Seiten. 1932. RM 6.80

---

**Graphische Kinematik und Kinetostatik des starren räumlichen Systems.** Von Professor Dr.-Ing. **Karl Federhofer**, Graz. Mit 48 Abbildungen im Text und auf 5 Tafeln. VII, 81 Seiten. 1928. (Springer-Verlag, Wien.) RM 9.90

---

**Kurze Einführung in die Elemente der Punkt- und Körpermechanik.** Eine zusammenfassende vektorielle Darstellung für Studium und Praxis. Von Professor Dr.-Ing. **Friedrich Tölke**, Berlin. (Sonderabdruck des Abschnittes „Mechanik starrer Körper“ aus dem in Vorbereitung befindlichen Taschenbuch für Bauingenieure, herausgegeben von Professor Dr.-Ing. F. Schleicher.) Mit 62 Textabbildungen. IV, 30 Seiten. 1937.  
RM 1.80

---

**Einführung in die ebene Getriebelehre.** Zum Gebrauche bei Vorlesungen an Technischen Hochschulen und für die Praxis, Von Professor Dr.-Ing. **Theodor Pöschl**, Karlsruhe. Mit 84 Textabbildungen. VI, 127 Seiten. 1932. RM 9.75

---