МИНИСТЕРСТВО СВЯЗИ СССР
ЛЕНИНГРАДСКИЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ СВЯЗИ
ИМ. ПРОФ. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА

С. Ф. Скирко, С. Б. Враский

КОЛЕБАНИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ЛЕНИНГРАД
1981

ВВЕДЕНИЕ

Колебательные процессы имеют основное значение не только в макроскопической физике и технике, но и в законах микрофизики. Несмотря на то, что природа колебательных явлений различна, эти явления обладают общими чертами и подчиняются общим закономерностям.

Цель настоящего учебного пособия — помочь студентам усвоить эти общие закономерности для колебаний механической системы и колебаний в электрическом контуре, использовать общий математический аппарат для описания этих видов колебаний и применять метод электромеханических аналогий, который значительно упрощает решение многих вопросов.

Значительное место в учебном пособии отведено задачам, так как именно они развивают навык в использовании общих законов для решения конкретных вопросов, дают возможность оценить глубину усвоения теоретического материала.

В конце каждого раздела приведены упражнения с решениями характерных задач и рекомендованы задачи для самостоятельного решения.

Приведенные в учебном пособии задачи для самостоятельного решения могут быть использованы также на упражнениях, для контрольных и самостоятельных работ и домашних заданий.

В некоторых разделах есть задания, часть из которых связана с имеющимися лабораторными работами.

Учебное пособие предназначено для студентов всех факультетов дневного, вечернего и заочного отделений Ленинградского электротехнического института связи им. проф. М. А. Бонч-Бруевича.

Особое значение они имеют для студентов заочного отделения, которые работают над курсом самостоятельно.

§ 1. ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАНИЕ

Колебания — процессы, точно или приблизительно повторяющиеся через одинаковые промежутки времени.

Простейшим является гармоническое колебание, описываемое уравнениями:

$$x = \mathrm{a}\sin(\omega t + \varphi), \qquad (1.1)$$

$$x = \mathrm{a}\cos(\omega t + \varphi)\ , \qquad (1.2)$$

где: x — физическая величина, характеризующая колебание [1],

а — амплитуда колебания — наибольшее значение величины, x,

$\omega t + \varphi$ — фаза колебания, которая совместно с амплитудой определяет величину x в любой момент времени,

φ — начальная фаза колебания, то есть значение фазы в момент времени t=0,

ω — циклическая (круговая) частота, определяющая скорость изменения фазы колебания.

При изменении фазы колебаний на 2π значения $\sin(\omega t + \varphi)$, и $\cos(\omega t + \varphi)$ повторяются, поэтому гармоническое колебание — периодический процесс.

При ϕ=0 изменение ωt на 2·π произойдет за время t=T, то есть

$$\omega T = 2\pi \text{ и } T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (1.3)$$

Промежуток времени T—период колебания. В момент времени t, t + 2T, 2 + 3T и т. д. — значения x одинаковы.

Частота колебания:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\cdot\pi} \qquad (1.4)$$

Частота определяет число колебаний за секунду.

Единица измерения [ω] = рад/с; $[\omega t + \varphi]$ =рад; $[\nu]$ = Гц ($с^{-1}$), [T] = с.

Введя в уравнение (1.1) частоту и период, получим:

$$x = a\cdot\sin(2\cdot\pi\frac{t}{T} + \varphi);\ \ x = a\cdot\sin(2\pi\upsilon t + \varphi) \qquad (1.5)$$

[1] Это может быть заряд конденсатора, сила тока в цепи, угол отклонения маятника, координата точки и т. д.

Если x — расстояние колеблющейся точки от положения равновесия, то скорость движения этой точки может быть найдена дифференцированием x по t. Условимся производную x по ℓ обозначить через $\dot{x}$, тогда

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = a\omega\cos(\omega t + \varphi)\ . \qquad (1.6)$$

Из (1.6) видно, что *скорость точки, совершающей гармоническое колебание, тоже совершает простое гармоническое колебание*.

Амплитуда скорости

$$(\dot{x})_{max} = a\omega = 2\pi a\nu = \frac{2\pi a}{T}, \qquad (1.7)$$

т. е. зависит от амплитуды смещения a и от частоты колебания ω или ν, а следовательно, и от периода колебания Т.

Из сравнения (1.1) и (1.6) видно, что аргумент $(\omega t + \varphi)$ один и тот же в обоих уравнениях, но x выражено через синус, а $\dot{x}$ — через косинус.

Если возьмем вторую производную от x по времени, получим выражение для ускорения точки, которое обозначим через $\ddot{x}$

$$\ddot{x} = -a\omega^2\sin(\omega t + \varphi). \qquad (1.8)$$

Таким образом, *ускорение тоже совершает гармоническое колебание.* Амплитуда ускорения

$$(\ddot{x})_{max} = a\omega^2 = 4\pi a^2\nu^2 = \frac{4\pi a^2}{T^2}. \qquad (1.9)$$

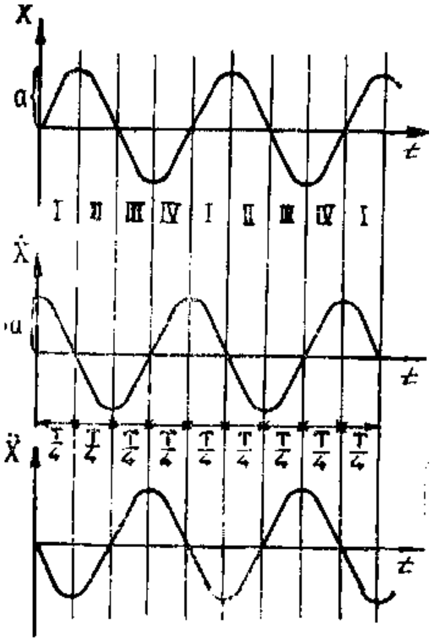

Рис. 1.1

Сравнивая (1.8) с (1.9), видим, что ускорение непосредственно связано со смещением

$$\ddot{x} = -\omega x^2 \qquad (1.10)$$

ускорение пропорционально смещению (из положения равновесия) и направлено против (знак минус) смещения, т. е. направлено к положению равновесия. Это свойство ускорения позволяет утверждать: *тело совершает простое гармоническое колебательное движение, если сила, действующая на него, прямо пропорциональна смещению тела от положения равновесия и направлена против смещения.*

На рис. 1.1 изображены графики зависимости смещения x точки от положения равновесия, скорости $\dot{x}$ и ускорения $\ddot{x}$ точки от времени.

Упражнения

1.1. Каковы возможные значения начальной фазы, если начальное смещение x_0 = —0,15 см, а начальная скорость x_0 = 26 см/с.

Решение: Если смещение отрицательно, а скорость положительна, как это задано условием, то фаза колебания лежит в четвертой четверти периода, т. е. заключена между 270° и 360° (между —90° и 0°).

1.2. Рассчитать начальную фазу и амплитуду колебания, если при частоте 5 Гц начальное смещение x_0 = 0,2 см и начальная скорость x_0 = —15 см/с.

Решение: Воспользовавшись (1.1) и (1.6) и положив в них t = 0, имеем согласно условию систему уравнений:

$$\begin{cases} x_0 = a\sin\varphi; \\ x_0 = a2\pi\nu\cos\varphi; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0{,}2 = a\sin\varphi; \\ -0{,}15 = a\cdot 2\pi\cdot 5\cos\varphi, \end{cases}$$

из которой определяем a и φ.

$a \simeq 0{,}52$ м; $\varphi \simeq 157°$.

1.3. Колебания материальной точки заданы в виде

$$x = 3\sin 100t \quad (\text{см}).$$

Написать уравнение колебаний через косинус.

1.4. Колебания материальной точки заданы в виде

$$x = 3\cos 100t \quad (\text{см}).$$

Написать уравнение колебаний через синус.

Задачи для самостоятельного решения

№ 1—5.

Геометрический способ представления колебания спомощью вектора амплитуды.

На рис. 1.2 показана ось x, из произвольной точки которой проведен радиус — вектор, численно равный амплитуде a. Этот вектор равномерно вращается с угловой скоростью ω против часовой стрелки.

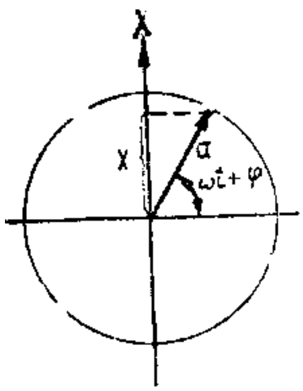

Рис. 1.2

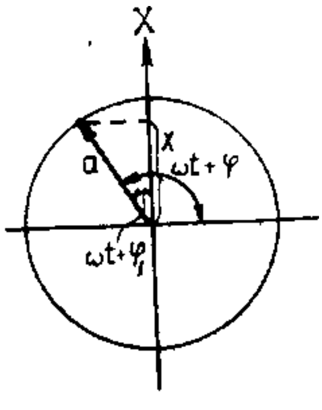

Рис. 1.3

Если при t = 0 радиус—вектор составлял с горизонтальной осью угол φ, то в момент времени t этот угол равен $\omega t + \varphi$.

При этом проекция конца вектора на ось x имеет координату

$$x = a\sin(\omega t + \varphi), \tag{1.11}$$

то есть совершает гармоническое колебание.

Если для описания движения проекции конца вектора использовать угол, отсчитанный от вертикальной оси (рис. 1.3), уравнение ее движения запишется в виде

$$x = a\cos(\omega t + \varphi). \tag{1.12}$$

Это уравнение отличается от (1.11) начальной фазой.

Заключение. *Гармоническое колебание можно представить движением проекции на некоторую ось конца вектора амплитуды, проведенного из произвольной точки на оси и равномерно вращающегося относительно этой точки. При этом модуль а вектора входит в уравнение гармонического колебания как амплитуда, угловая скорость ω как циклическая частота, угол φ, определяющий положение радиуса — вектора в момент начала отсчета времени, как начальная фаза.*

Представление гармонических колебаний с помощью комплексных чисел.

На основании формулы Эйлера

$$ae^{ja} = a(\cos a + i\sin a\ ), \tag{1.13}$$

где a и a —вещественные числа,

е — основание натуральных логарифмов,

$$i = \sqrt{-1}$$

Вещественная часть комплексного числа

$$x = a\sin a \tag{1.14}$$

Уравнение (1.14) носит характер тождества. Следовательно, гармоническое колебание

$$x = a\sin(\omega t + \varphi),\ \text{или}\ x = a\cos(\omega t + \varphi),$$

может быть представлено как вещественная часть комплексного числа

$$x = ae^{j(\omega t + \varphi)}.$$

Если проделать над комплексными числами математические действия, а затем отделить вещественную часть от мнимой, то получится тот же результат, как при действии над соответствующими тригонометрическими функциями. Это позволяет заменить сравнительно громоздкие тригонометрические преобразования более простыми действиями над показательными функциями.

§ 2 СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ БЕЗ ЗАТУХАНИЯ

Свободными называются колебания, возникающие в системе, выведенной внешним воздействием из состояния равновесия

и предоставленной самой себе. Незатухающими называюстя колебания с постоянной амплитудой.

Рассмотрим две задачи:
1. Свободные колебания без затухания механической системы.
2. Свободные колебания без затухания в электрическом контуре.

Изучая решения этих задач обратите внимание на то, что уравнения, описывающие процессы в указанных системах, оказываются одинаковыми, что дает возможность использовать метод аналогий.

1. Механическая система

Система состоит из тела массой m, связанного с неподвижной стенкой при помощи пружины. Тело движется по горизонтальной плоскости абсолютно, без трения. Масса пружины пренебрежимо мала по сравнению с массой тела.

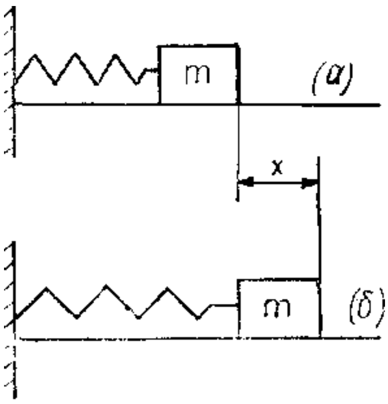

Рис. 2.1

На рис. 2.1, a изображена эта система в положении равновесия на рис. 2.1, b при выведенном из равновесия теле.

Сила, которую надо приложить к пружине для растяжения на x, зависит от свойств пружины.

Примем условие: деформация x под действием силы f мала, систему можно считать упругой и связь f и x линейной:

$$f = kx, \tag{2.1}$$

где k—упругая постоянная пружины.

Таким образом, рассматриваемая механическая система — это линейная упругая система без трения.

После прекращения действия внешней силы (по условию система выведена из состояния равновесия и предоставлена себе) на тело со стороны пружины действует упругая возвращающая сила, равная по величине и противоположная по направлению внешней силе

$$f_{\text{возвр}} = -kx. \tag{2.2}$$

Применив второй закон Ньютона

$$\ddot{x} = -\frac{kx}{m}, \tag{2.3}$$

получаем дифференциальное уравнение собственного движения тела m

$$m\ddot{x} + kx = 0. \tag{2.4}$$

Это линейное (x и $\ddot{x}$ входят в уравнение в первой степени), однородное (уравнение не содержит свободного члена) дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Линейность уравнения имеет место вследствие линейной связи силы f и деформации x пружины.

Так как возвращающая сила удовлетворяет условию (1.10), можно утверждать, что система совершает гармоническое колебание с циклической частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, что непосредственно следует из уравнения (1.10) и (2.3).

Решение уравнения (2.4) напишем в виде

$$x = \mathrm{a}\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi) \tag{2.5}$$

Подстановка x по (2.5) и $\ddot{x}$ в уравнение (2.4) обращает (2.4) в тождество. Следовательно, уравнение (2.5) — решение уравнения (2.4).

Заключение: *упругая система, будучи выведенной из состояния равновесия и предоставленной самой себе, совершает гармоническое колебание с циклической частотой*

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{2.7}$$

зависящей от параметров системы и называемой собственной циклической частотой.

Собственная частота и собсвенный период колебаний такой системы

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{2.8}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{2.9}$$

В (2.5) так же, как ив (1.1), входят еще две величины: амплитуда a и начальная фаза φ. Этих величин не было в исходном дифференциальном уравнении (2.4). Они появляются в результате двукратного интегрирования как произвольные постоянные. Итак, свойства системы не определяют ни амплитуду, ни фазу ее собственных колебаний. Амплитуда колебаний зависит от максимального смещения, вызванного внешней силой; начальная фаза колебаний зависит от выбора начала отсчета времени. Таким образом, амплитуда и начальная фаза колебаний зависят от начальных условий.

2. Электрический контур

Рассмотрим второй пример свободных колебаний — колебания в электрическом контуре, состоящем из емкости C и индуктивности L (рис. 2.2).

Сопротивление контура R = 0 (условие настолько же нереальное, как и отсутствие трения в предыдущей задаче).

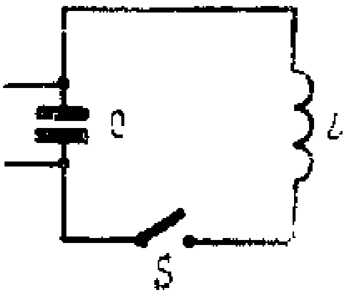

Рис. 2.2

Примем следующий порядок действий:

1. При разомкнутом ключе заряжаем конденсатор некоторым зарядом q_{max} до разности потенциалов U_{max}. Это соответствует выводу системы из состояния равновесия.
2. Отключаем источник (он не показан на рисунке) и замыкаем ключ S. Система предоставлена самой себе. Конденсатор стремится к положению равновесия—он разряжается. Заряд q и разность потенциалов U на конденсаторе изменяются с течением времени

$$U = \frac{q}{C} \qquad (2.10)$$

В контуре идет ток $I = \frac{dq}{dt}$, также изменяющийся с течением времени. При этом в индуктивности возникает ЭДС самоиндукции

$$\left|\varepsilon_{\text{инд}}\right| = L\frac{dL}{dt} = L\frac{d\dot{q}}{dt} = L\ddot{q} \qquad (2.11)$$

В каждый момент должен быть справедлив второй закон Киргофа: алгебраическая сумма падений напряжения, разностей потенциалов и электродвижущих сил в замкнутом контуре равна нулю

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \qquad (2.12)$$

Уравнение (2.12) является дифференциальным уравнением, описывающим свободное колебание в контуре. Оно во всем подобно рассмотренному выше дифференциальному уравнению (2.4) собственного движения тела в упругой системе. Математическое решение этого уравнения не может быть иным, чем математическое решение (2.4), только вместо переменной x надо поставить переменную q — заряд конденсатора, вместо массы m поставить индуктивность L и вместо упругой постоянной k поставить обратную емкость $\frac{1}{C}$. В соответствии с результатом, полученным при рассмотрении (2.4), можно утверждать, *что в контуре, содержащем лишь индуктивность и емкость, собственное колебание будет простым гармоническим колебанием.*

Уравнение этого колебания

$$q = q_{max} \cdot \sin(\sqrt{\frac{1}{LC}} \cdot t + \varphi) \qquad (2.13)$$

Собственпая циклическая частота колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{2.14}$$

Собственная частота

$$\omega = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{2.15}$$

Собственный период

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \tag{2.16}$$

Сила тока определяется как производная от заряда по времени $I = \dot{q}$, т. е. *сила тока в электрическом контуре является аналогом скорости в механической системе*

$$I = \dot{q} = q_{max}\,\omega\cos(\omega t + \varphi) \tag{2.17}$$

Как видно из (2.17) *сила тока тоже совершает простое гармоническое колебание с амплитудой*

$$\dot{q}_{max} = I_{max} = q_{max} \cdot \omega \tag{2.18}$$

На рис. 2.3 (подобном рис. 1.1 для упругой системы) изображено колебание заряда и колебание силы тока, опережающее колебание заряда по фазе на 90°.

Разность потенциалов между обкладками конденсатора также совершает гармоническое колебание:

$$U = \frac{1}{C}q = \frac{q_{max}}{C}\sin(\omega t + \varphi) \tag{2.19}$$

Обе рассмотренные системы — механическая и электрическая — описываются одним и тем же уравнением — линейным уравнением второго порядка. Линейность этого уравнения отражает характерные свойства систем. Она проистекает из линейной зависимости силы и деформации, выраженной в (2.1), и линейной зависимости напряжения на конденсаторе от заряда конденсатора, выраженной (2.10), и ЭДС индукции от $\frac{dI}{dt} = \ddot{q}$, выраженной в (2.11). Аналогия в описании упругой и электрической систем, установленная выше, окажется очень полезной при дальнейшем знакомстве с колебаниями. Приводим таблицу, в которой в одной строке помещены величины, аналогично описываемые математически.

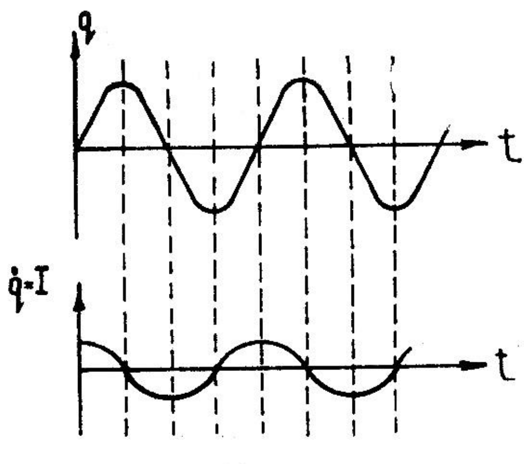

Рис. 2.3

Упругая система		Электрический контур	
Смещение	x	Заряд	q
Скорость	$v = \dot{x}$	Сила тока	$I = \dot{q}$
Масса	m	Индуктивность	L
Упругая постоянная	k	Обратная емкость	$\frac{1}{C}$
Сила	$f = kx$	Напряжение	$U = \frac{1}{C} \cdot q$

3. Квазиупругие системы

Кроме рассмотренного примера упругой системы, имеется еще весьма обширный класс так называемых «квазиупругих», т. е. «как бы упругих» систем. Это системы, в которых так же как в упругой системе, при выведении их из положения равновесия появляется возвращающая сила, пропорциональная удалению от положения равновесия, однако по своей природе эта сила не является силой упругости, т. е. не является следствием упругих свойств системы. Благодаря появлению возвращающей силы свободное движение этих систем будет также гармоническим колебанием, как и в случае упругой системы.

Пример 1. Математический маятник

Математический маятник представляет собой тело массой m (рис. 2.4), подвешенное на нерастяжимой невесомой нити длиной l. Размер тела очень мал по сравнению с l, и масса m поэтому может считаться точечной. Положением равновесия такого маятника является вертикальное положение. Если отклонить маятник из положения равновесия на угол a и отпустить его, он начнет двигаться к положению равновесия под действием возвращающей силы $f_1 = mg \sin a$ (рис. 2.4) — составляющей веса маятника mg. Под действием этой силы масса получит касательное ускорение a_k, которое можно выразить через угловое ускорение $\ddot{a}$ и радиус кривизны траектории (длину подвеса) l. По второму закону Ньютона

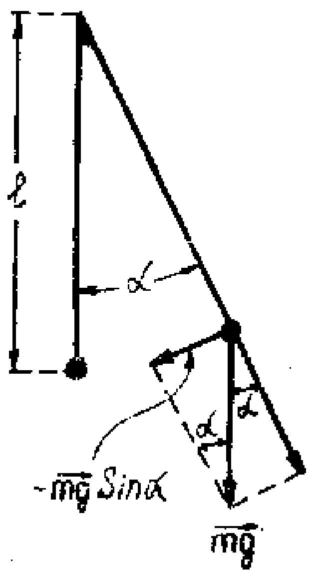

Рис. 2.4

$$a_k = \frac{f_1}{m} \quad \text{или}$$

$$l\ddot{a} = -\frac{mg \cdot \sin a}{m} = -g \cdot \sin a$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение свободного движения маятника

$$la + g \sin a = 0 \qquad (2.20)$$

Написанное уравнение совершенно строго, однако решение его в элементарных функциях невозможно. Задача очень упрощается, если ограничиться рассмотрением лишь малых колебаний, т.е. таких колебаний, при которых $\sin a$ можно положити равным углу a, выраженному в радианах. В том случае (2.20) перепишется в виде:

$$l\ddot{a} + ga = 0 \qquad (2.21)$$

Уравнение (2.21) по форме уже знакомо — это то же уравнение, что и (2.4) или (2.12). Таким образом, маятник при малых углах отклонения совершает гармоническое колебание, только переменная здесь — не линейное отклонение x, как в (2.4), и не заряд q, как в (2.12), а угловое смещение из положения равновесия a. Принимая во внимание, что в (2.21) множителем при второй производной $\ddot{a}$ стоит l, а множителем при смещении a стоит g, и заменяя поэтому в (2.8) m на l и k на g получаем выражение для частоты колебания маятника

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (2.22)$$

и для периода колебания

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (2.23)$$

Обращаем внимание на то, что *период колебани математического маятника не зависит от его массы*.

Пример 2. Физический маятник

Физическим маятником называется твердое тело, которое может совершать колебания относительно неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр тяжести.

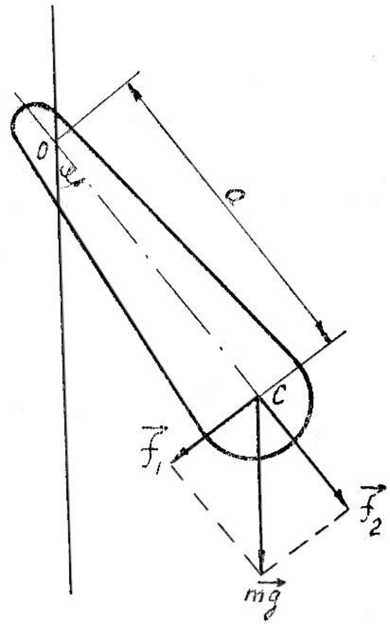

Рис. 2.5

На рис. 2.5 ось проходит через точку О; точка С - центр тяжести тела. При равновесии тела прямая ОС вертикальна.

Как и в примере 1 тело движется к положению равновесия под действие возвращающей силы

$$f_1 = -mg \sin \alpha \qquad (2.24)$$

При малых углах

$$f_1 = -mg\alpha \qquad (2.25)$$

Момент этой силы относительно оси 0

$$M = f_1 a = -mga\alpha \qquad (2.26)$$

Под действием момента М тело приобретает угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{M}{J} \qquad (2.26)$$

где J—момент инерции тела относительно оси О.

Так как

$$\varepsilon = \frac{a\cdot\alpha}{dt^2} = \ddot{a} \qquad (2.27)$$

то на основании (2.27) получим

$$J\ddot{a} + mga\alpha = 0 \qquad (2.28)$$

Уравнение (2.28) аналогично уравнениям (2.4), (2.12), (2.21). Следовательно, физический маятник при малых углах совершает гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}} \qquad (2.29)$$

и частотой

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mga}{J}} \qquad (2.30)$$

Сравнив (2.29) и (2.23), можно сделать заключение: длине l математического маятника в (2.23) соответствует величина

$$L = \frac{J}{ma} \qquad (2.31)$$

После подстановки (2.31) в (2.29)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (2.32)$$

Выведенный из равновесия физический маятник будет совершать колебания с таким же периодом, как и математический маятник длиной L.

Величина $L = \frac{J}{ma}$ *называется приведенной длиной физического маятника.*

Если к оси физического маятника подвесить математический маятник и подобрать его длину так, чтобы она была равна приведенной длине физического маятника, то отклоненные на одинаковые углы оба маятника совершают колебания с одинаковыми периодами.

Точка O', лежащая на прямой OC, на расстоянии $OO' = L$ от оси O, называется центром качания.

Если всю массу физического маятника сосредоточить в центре качания, то период его колебания не изменится.

Так как в выражение момента инерции входит масса m*, то приведенная длина* L *и период* T *колебаний физического маятника не зависят от его полной массы; они зависят только от геометрической формы и распределения массы маятника.*

Упражнения

2.1. Ареометр весом P = 30 гс имеет трубку диаметром d = 1,5 см.

Определить период T собственных колебаний ареометра в воде.

Решение. На помещенный в воду ареометр действует сила тяжести P и выталкивающая архимедова сила f. В положении равновесия эти силы равны друг другу.

Если внешняя сила сместит ареометр на x от положения равновесия, то архимедова сила изменится на величину

$$\Delta f = \rho g S x$$

где S — сечение трубки ареометра;

ρ — плотность жидкости.

После прекращения действия внешней силы равнодействующая сил P и f, равная Δf, возвращает ареометр в положение, равновесия:

$$F_{\text{возвр}} = |\Delta f| = -\rho g S x = -\frac{\pi \rho g\, d^2}{4} x \qquad (2.33)$$

Так как возвращающая сила пропорциональна смещению x от положения равновесия и направлена против смещения, ареометр является квазиупругой системой и совершает гармонические колебания.

Сравнивая (2.33) с выражением для упругой силы $F = -kx$, получим

$$k = \frac{\pi \rho g d^2}{4} \qquad (2.34)$$

Подставив (2.34) в уравнение $T = \frac{2\pi}{\omega}$ для периода собственных колебаний упругой системы, получим для ареометра

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}\,; \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{4m}{\pi \rho g\, d^2}} = \frac{4}{d} \sqrt{\frac{\pi m}{\rho g}};$$

Задачи для самостоятельного решения

№ 6—16.

§ 3. ЭНЕРГИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ

Полная энергия W упругой механической системы слагается из кинетической $W_{\text{кин}}$ и потенциальной $W_{\text{пот}}$ энергии.

Кинетическая энергия

$$W_{\text{кин}} = \frac{m x^2}{2} = \frac{m \omega^2 a^2}{2} \cdot \cos^2(\omega t + \varphi) \qquad (3.1)$$

Потенциальная энергия деформации упругой системы вычисляется как работа, затраченная на смещение тела из положения равновесия на величину x

$$W_{\text{пот}} = k \int_0^x x dx = \frac{k x^2}{2} = \frac{f x}{2} \qquad (3.2)$$

Подставляя вместо x в (3.2) выражение (1.1), а вместо k выражение $m\omega^2$, непосредственно следующее из (2.7), получаем

$$W_{\text{пот}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 a^2}{2} \cdot \sin^2(\omega t + \varphi) \qquad (3.3)$$

Из (3.1) и (3.3) видно, что и *кинетическая, и потенциальная энергия при гармоническом колебании не остаются постоянными*: в крайних положениях колебания максимальна потенциальная энергия, но равна нулю кинетическая; при прохождении через положение равновесия максимальна кинетическая, а потенциальная равна нулю. *Полная энергия колеблющейся системы, т.е. сумма кинетической и потенциальной энергий*

$$W \equiv W_{\text{кин}} + W_{\text{пот}} \equiv \frac{m\omega^2 a^2}{2} \qquad (3.4)$$

остается во времени неизменной. Можно сказать, что *энергия колебания лишь переходит из кинетической формы в потенциальную и обратно в кинетическую.* Частота колебаний энергии в два раза больше частоты колебаний системы.[2]

$$W_{\text{кин}} = \frac{m\omega^2 a^2}{2} \cdot cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{m\omega^2 a^2}{4} + \frac{m\omega^2 a^2}{4} \cos(2\omega t + 2\varphi), \quad (3.5)$$

$$W_{\text{пот}} = \frac{m\omega^2 a^2}{2} \cdot \ sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{m\omega^2 a^2}{4} + \frac{m\omega^2 a^2}{4} \cos(2\omega t + 2\varphi), \quad (3.6)$$

Таким образом, и потенциальная, и кинетическая энергии колеблются с циклической частотой 2ω относительно положения равновесия $\frac{m\omega^2 a^2}{4}$ с амплитудой $\frac{m\omega^2 a^2}{4}$. На рис. 3.1 приведены графики зависимости кинетической энергии, потенциальной энергии и смещения от времени.

Для получения энергии колебания в случае электрического контура можно было бы повторить все рассуждения снова и находить энергию электрического поля заряженного конденсатора и магнитного поля индуктивности. Мы, однако, поступим иначе, и воспользовавшись таблицей, приведенной в § 2, «переведем» выражение для энергии с языка механической системы на язык электрического контура. Заменив в (3.1) массу на индуктивность и скорость па силу тока, получаем выражение для магнитной энергии контура

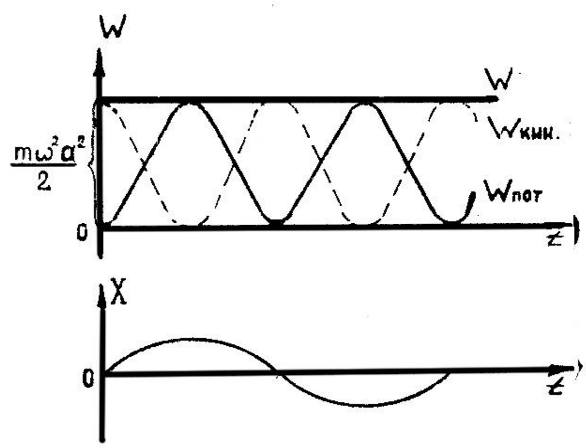

Рис. 3.1

---
2 Это можно проследить с большой наглядностью на примере математического маятника

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{Lq^2}{2} = \frac{Lq_{max}^2 \cdot \omega^2}{2} cos^2(\omega t + \varphi) \qquad (3.7)$$

Аналогично получим выражение для электрической энергии контура, заменив в (3.3) упругую постоянную на обратную емкость и смещение x на заряд q

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_{max}^2}{2C} sin^2(\omega t + \varphi)$$

Так как $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ и $C = \frac{1}{L\omega^2}$, то

$$W_e = \frac{Lq_{max}^2 \cdot \omega^2}{2} sin^2(\omega t + \varphi) \qquad (3.8)$$

Полная энергия колебаний в контуре остается во времени неизменной и равной

$$W = W_m + W_e = \frac{Lq_{max}^2 \cdot \omega^2}{2} = \frac{LI_{max}^2}{2} = \frac{q_{max}^2}{2C} \qquad (3.9)$$

Частота перехода энергии магнитного поля в энергию электрического поля и обратно равна 2ω (то же было сказано выше о частоте перехода кинетической энергии в потенциальную).

Задачи для самостоятельного решения
№ 17—23.

§ 4. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ЗАТУХАНИЕМ

1. Механическая система

На рис. 4.1 изображена система, состоящая из упругой пружины с постоянной k и массой, весьма малой по сравнению с массой m тела, укрепленного на конце пружины. Для того чтобы условия задачи приблизить к реальным условиям, следует учесть воздействие среды, в которую погружено колеблющееся тело и которая тормозит его движение.

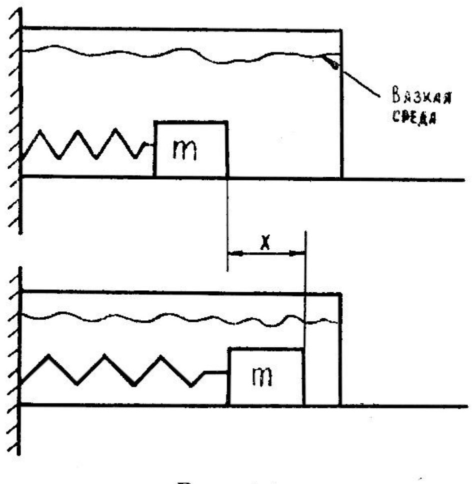

Рис. 4.1

Примем условие: *тело движется с малой скоростью, вследствие чего сила сопротивления пропорциональна скорости*[3]

Тогда на тело, выведенное внешней силой из положения рав-новесия и предоставленное себе, действуют две силы:

1. возвращающая сила $f_1 = -kx$, (4.1)
2. тормозящая сила $f_2 = -r\dot{x}$ (4.2)

[3] Такое утверждение справедливо для очень широкого класса систем.

Сила f_2 направлена против скорости (знак минус), иначе бы она не тормозила, а ускоряла движение. Коэффициент r называется коэффициентом сопротивления. По второму закону Ньютона ускорение тела при свободном движении

$$\ddot{x} = \frac{-rx - kx}{m} \qquad (4.3)$$

откуда получаем *дифференциальное уравнен и решение которог о определит свободное движениесистемы:*

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0 \qquad (4.4)$$

Уравнение (4.4) является обобщением прежде полученного уравнения (2.4), выведенного для системы без сопротивления. Достаточно в (4.4) положить коэффициент сопротивления r равным нулю, как (4.4) автоматически перейдет в (2.4). Разделив (4.4) на m, получаем

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (4.5)$$

Вводим обозначения

$$\omega^2 = \frac{k}{m},$$

Где ω — собственная циклическая частота системы без учета затухания и

$$\alpha = \frac{r}{vm} \qquad (4.6)$$

Величина a называется коэффициентом затухания системы. После подстановки α и ω^2 в (4.5) получаем уравнение

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (4.5)$$

Ход решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами известен из курса математики. В зависимости от величины параметров m, r и k решение может получиться либо колебательным (периодическим):

$$x = A \cdot e^{-at} \cdot \sin(\sqrt{\omega^2 - a^2} \cdot t + \varphi) \qquad (4.7)$$

либо апериодическим (асимптотическим)

$$x = C_1 \cdot e^{-[a - \sqrt{a^2 - \omega^2}] \cdot t} + C_2 \cdot e^{-[a - \sqrt{a^2 - \omega^2}] \cdot t} \qquad (4.8)$$

Можно показать, что колебательным (периодическим) решение уравнение (4.5) будет при условии $\omega > a$, $(r > 2\sqrt{km})$; при условии $\omega < a$, $(r < 2\sqrt{km})$ решение апериодическое (асимптотическое).

1. **Колебательный режим** ($\omega > a, r < 2\sqrt{km}$).

Уравнение (4.7) можно преобразовать к виду

$$x = A \cdot e^{-at} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi) \qquad (4.9)$$

введя обозначение

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - a^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} \qquad (4.10)$$

где ω_1 — циклическая частота затухающего колебания. Строго говоря, (4.9) и (4.7) описывают непериодическое движение, так как множитель $e^{-\tau t}$ убывает непрерывно во времени и, следовательно, через промежуток времени

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \qquad (4.10')$$

когда синус примет свое прежнее значение, ни скорость, ни смещение тела уже не будут такими, как T_1 секунд назад. Однако, если за период колебания синуса множитель e^{-at} изменяется незначительно, можно рассматривать движение, описываемое (4.9) как колебательное с медленно убывающей амплитудой Ae^{-at}

Обратим внимание на следующую закономерность убывания амплитуды в (4.9); **отношение амплитуды Ae^{-at} в некоторый момент к амплитуде $Ae^{-a(t+T)}$ через период после этого момента остается постоянным и равно**

$$D = \frac{e^{-at}}{e^{-a(t+T_1)}} = e^{aT_1} \qquad (4.11)$$

Эта величина называется декрементом. Натуральный логарифм декремента

$$\delta = \ln D = aT_1 \qquad (4.12)$$

называется логарифмическим декрементом.

На рис. 4.2 приведен график затухающего колебания. *Начальная амплитуда A и начальная фаза a затухающего колебания являются* (как и в системе без затухания) *произвольными постоянными*, появившимися при интегрировании уравнения (4.4). *Значения этих величин определяются условиями возбуждения колебаний — начальным смещением и начальной скоростью* (см. упражнения).

Частота затухающего колебания

$$\nu_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} \qquad (4.13)$$

меньше собственной частоты незатухающего колебания

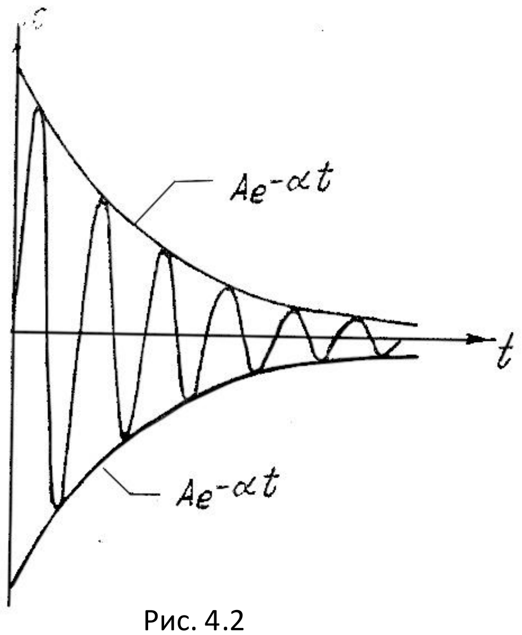

Рис. 4.2

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (4.14)$$

Разумеется, (4.14) является частным случаем (4.13), соответствующим a = 0. При увеличении затухания частота (4.13) уменьшается и остается вещественной, пока $\omega > \alpha$.

2. **Апериодический режим** $(\omega < \alpha); r < 2\sqrt{km}$

При апериодическом режиме уравнение x = x (t) имеет вид

$$x = C_1 \cdot e^{-\left[a-\sqrt{a^2-\omega^2}\right]t} + C_2 \cdot e^{-\left[a-\sqrt{a^2-\omega^2}\right]t}.$$

Оно состоит из двух членов, экспериментально убывающих со временем, в которых C_1 и C_2—произвольные постоянные. Величина и знак этих постоянных определяются условиями приведения системы в колебание (пояснения даны в упражнении 4.3).

3. **Критический режим** $a = \omega; r = 2\sqrt{km}.$

Критический режим — апериодический с наименьшим коэффициентом затухания. Условие $r = 2\sqrt{km}$ обеспечивают в тех случаях, когда необходимо исключить собственные колебания системы. Так, если бы вещательный тракт обладал собственными частотами, то он выделял бы их, или, как говорят, «резонировал» бы на них, и передача была бы совершенно искажена.

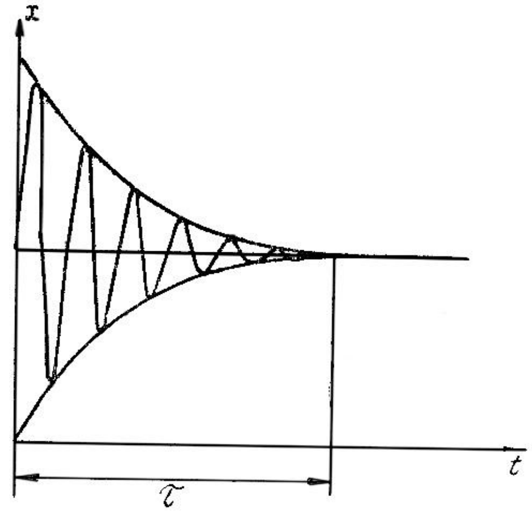

Рис. 4.3

Другим примером может служить электроизмерительный прибор, стрелочный или зеркальный. Если бы система прибора была колебательной, то при включении этого прибора его индикатор устанавливался бы не сразу, а только после затухании собственных колебаний.

Рис. 4.3 показывает, что для производства отсчета по прибору нам пришлось бы ждать время τ, составляющее при малом затухании десятки периодов колебаний, каждый из которых может равняться секунде или более (баллистический гальванометр). В случае апериодического режима установление положения равновесия наступает практически, когда мы перестаем замечать передвижение индикатора. В зависимости от степени затухания это наступит раньше или позже.

При свободных колебаниях с затуханием энергии системы убывает с течением времени; она расходуется на преодоление силы сопротивления.

2. Электрический контур

На рис. 4.4 показам контур, содержащий емкость C, индуктивность L и сопротивление R. Ключ разомкнут, конденсатор приобретает заряд q_0 и разность потенциалов $U_0 = \frac{q_0}{C}$. Отключив источник напряжения, замыкаем ключ и предоставляем систему самой себе. Все происходит далее так же, как было описано в § 2, за исключением того, что в контуре теперь есть сопротивление и на этом сопротивлении происходит падение напряжения. Конденсатор при перезарядке не зарядится более до напряжения U_0. Таким образом, электрические колебания будут затухающими. Дадим этому процессу математическое описание. Для этого напишем второй закон Кирхгофа для замкнутого контура, определив ЭДС индукции $L\ddot{q}$, падение потенциала на сопротивлении $Rl = Rq$ и напряжение на конденсаторе $\frac{1}{C}q$.

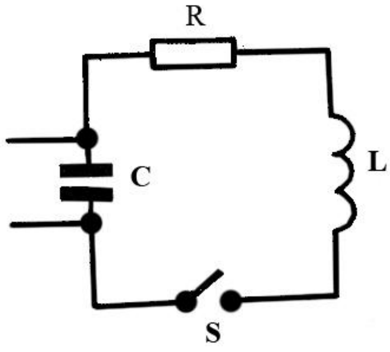

Рис. 4.4

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \qquad (4.15)$$

Уравнение (4.15) формально тождественно с уравнением (4.4) для упругой системы.

Решение его, конечно, не может быть отличным от решения уравнения (4.4), следует только иметь в виду, что коэффициенту сопротивления r в (4.4) соответствует сопротивление R в (4.15). Остальные величины должны быть заменены по таблице из § 2. Учитывая электромеханические аналогии, установленные в § 3, получаем следующую таблицу.

Механическая система		Электрический контур	
Смещение	x	Заряд конденсатора	q
Масса	m	Индуктивность	L
Коэфф. Сопротивления	r	Сопротивление	R
Упругая постоянная	k	Обратная емкость	$\frac{1}{C}$
Скорость	$v = x$	Сила тока	$I = q$
Возвращающая сила	$f_1 = -kx$	Напряжение на конденсат.	$\frac{1}{C}q$
Тормозящая сила	$f_2 = -rx$	Падение напряж. на сопротивлении	$L\ddot{q}$
Равнодействующая сила	$m\ddot{x}$	ЭДС индукции	$L\ddot{q}$
Потенциальная энергия	$\frac{kx^2}{2}$	Энергия электрич. поля	$\frac{q^2}{2C}$
Кинетическая энергия	$\frac{mx^2}{2}$	Энергия магнитного поля	$\frac{Lq^2}{2}$

Пользуясь данными этой таблицы по аналогии с (4.6) находим коэффициент затухания

$$\alpha = \frac{R}{2L} \qquad (4.16)$$

и частоту колебаний в контуре в соответствии с (4.13)

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}; \quad \nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \qquad (4.17)$$

При $\omega > a$, т.е. при $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$ или

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \qquad (4.18)$$

решение (4.15) будет колебательным и запишется в виде:

$$q = q_0 \cdot e^{-at} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi) \qquad (4.19)$$

При $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ электрический контур будет апериодическим.

Критическое сопротивление $R_{\text{кр}}$, соответствующее наименьшему сопротивлению апериодического контура, равно

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (4.20)$$

Логарифмический декремент контура может быть выражен через параметры C, R и L следующим образом

$$\delta = \alpha T_1 - \frac{R}{2L}\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} = \frac{\pi R}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}} \qquad (4.21)$$

При свободных колебаниях с затуханием энергия системы уменьшается с течением времени: происходит выделение тепла на сопротивлении.

Упражнения

4.1. Дана система с массой $m = 40$ г, упругой постоянной $k = 1$ кгс/см и коэффициентом сопротивления $r = 0{,}003$ кг/с. Определить частоту колебаний этой системы и декремент.

Решение: Частоту колебании находим по (4.13)

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}},$$

выразим заданные величины в СИ: $k = 10^3$ Н/м; $r = 3 \cdot 10^{-3}$кг/с; $m = 4 \cdot 10^{-2}$ кг

$$\nu_1 = \frac{1}{6{,}28}\sqrt{\frac{10^3}{4\cdot 10^{-2}} - \frac{9\cdot 10^{-6}}{4\cdot 16\cdot 10^{-4}}}\ \text{Гц} \approx 24\ \text{Гц}$$

Декремент определим по (4.11)

$$D = e^{\alpha T_1} = e^{\frac{r}{2m\nu_1}}$$

$$D = \frac{3\cdot 10^{-3}}{e^{2\cdot 4\cdot 10^{-2}\cdot 24}} = e^{1{,}54} \approx 4{,}7$$

Следует обратить внимание на то, что при весьма большом декременте $D = 4{,}7$, показывающем, что за каждый период амплитуда убывает в 4,7 раза, циклическая частота $\omega_1 = 24{,}4 \cdot 6{,}28 = 154$ рад/с, тогда как без учета затухания она была бы $\omega = \sqrt{\frac{10^3}{4\cdot 10^{-2}}} = 157$ рад/с. Следовательно, даже при столь большом декременте можно без большой ошибки заменять ω_1 на ω.

4.2. Дана система с коэффициентом затухания $a = 10^{-1}$ с и собственной циклической частотой $\omega = 200$ рад/с. Начальное смещение $x_0 = 2$ см, начальная скорость $\dot{x}_0 = 150$ см/с. Определить начальную амплитуду и начальную фазу колебания.

Решение: Смещение согласно (4.9) дается уравнением

$$x = A \cdot e^{-at} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

Скорость получаем как производную смещения по времени

$$\dot{x} = -A\alpha e^{-at} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi) + A\omega_1 e^{-at} \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi).$$

Начальное смещение и начальную скорость можно выразить из уравнений для x и $\dot{x}$, положив $t = 0$:

$$x = A \sin\varphi,$$

$$\dot{x}_0 = -A\alpha \sin\varphi + A\omega_1 \cos\varphi.$$

Решая эту систему двух уравнений с двумя неизвестными, делим второе уравнение на первое и получаем

$$ctg\varphi = \frac{\frac{\dot{x}_0}{x_0}+\alpha}{\omega_1}; \qquad ctg\varphi = \frac{\frac{150}{2}+10}{200} = 0{,}425.$$

Откуда $\varphi = 67°$. (Так как и смещение и скорость положительны, то следовательно, начальная фаза заключена между 0° и 90°).

Начальная амплитуда равна:

$$A = \frac{x_0}{\sin\varphi}; \qquad A = \frac{2}{0{,}95} \text{ см} = 2{,}17 \text{ см}.$$

4.3. Дана система с собственной циклической частотой (без учета затухания) $\omega = 0{,}4$ рад/с и коэффициентом затухания $a = 0{,}5\ c^{-1}$. Определить собственное движение системы при начальных условиях:

1) $x_0 = 3$ см, $\dot{x}_0 = 0$ и
2) $x_0 = 12$ см, $\dot{x}_0 = -40$ см/с.

Решение: Так как по условию $a > \omega$, система является апериодической. Согласно (4.8) собственное движение описывается выражением

$$x = C_1 e^{-\left[a-\sqrt{a^2-\omega^2}\right]t} + C_2 e^{-\left[a+\sqrt{a^2-\omega^2}\right]t} = C_1 e^{-\beta_1 t} + C_2 e^{-\beta_2 t},$$

где для кратности через β_1 и β_2 заменены квадратные скобки в показателях степени первого и второго членов. Подставляя ω и α, указанные в условии, получаем $\beta_1 = 0{,}2\ c^{-1}$, $\beta_2 = 0{,}8\ c^{-1}$

Дифференцируя (4.8) по времени, получаем выражение для скорости

$$-\dot{x} = C_1\beta_1 e^{-\beta_1 t} + C_2\beta_2 e^{-\beta_2 t}.$$

Отсюда получаем выражение для начального смещения и начальной скорости:

$$x_0 = C_1 + C_2 \,,$$

$$-\dot{x}_0 = C_1\beta_1 + C_2\beta_2 \,.$$

Из последней системы уравнений, путем несложных выкладок, определяются произвольные постоянные C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{\beta_1 x_0 + \dot{x}_0}{\beta_1 - \beta_2}\,; \quad C_2 = \frac{\beta_2 x_0 + \dot{x}_0}{\beta_2 - \beta_1}$$

1. Начальные условия: $x_0 = 3$ см, $\dot{x}_0 = 0$.

Из (4.29) $C_1 = 4$ см и $C_2 = -1$ см.

Уравнение движения в этом случае

$$x = x_1 + x_2 = 4e^{0,2t} - 1 \cdot e^{-0,8t} \text{ (см).}$$

Поскольку $\dot{x} = 0$, возбуждение системы произведено следующим образом: она выведена из положения равновесия на величину $x_0 = 3$ см и отпущена. Система стремится к положению равновесия: смещение ее уменьшается с течением времени, оставаясь положительным.

2. Начальные условия: $x_0 = 12$ см, $\dot{x}_0 = -40$ см/с .

$$C_1 = -62{,}8 \text{ см}\,, \; C_2 = 74{,}8 \text{ см}.$$

$$x = x_1 + x_2 = 4e^{0,2t} - 1 \cdot e^{-0,8t} \text{ (см).}$$

Система под действием полученного толчка перейдет через положение равновесия и затем будет стремиться приблизиться к нему со стороны отрицательных значений смещения.

На основании решения задачи можно сделать заключение: характер движения системы в апериодическом режиме зависит от начальных условий.

Рекомендуем сделать расчеты для x_1, x_2 и x для различных моментов времени и построить графики $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ и $x = x(t)$ при заданных начальных условиях.

4.4. Дана колебательная система с циклической частотой $\omega_1 = 200$ рад/с и коэффициентом затухания $a = 20$ с$^{-1}$. Определить значение фазы, при которой смещение достигает максимума.

Решение: График затухающего колебания позволяет видеть, что линия амплитуды $Ae^{-\alpha t}$ касается графика $x = x(t)$ не в точках максимума кривой. Фазе $\omega_1 t + \varphi = 90°$, т.е. синусу, равному единице, соответствует точка касания амплитудной кривой к графику колебания. Точка же максимума графика колебаний несколько опережает по времени точку касания. Для нахождения максимума надо производную от смещения по времени приравнять нулю, другими словами, надо найти точку, в которой скорость равна нулю. Выражение для скорости было получено в упражнении 4.2.

$$\dot{x} = -A\alpha e^{-at}\sin(\omega_1 t+\varphi) + A\,\omega_1 e^{-at}\cos(\omega_1 t+\varphi).$$

Приравняв скорость нулю, имеем

$$\alpha\cdot\sin\varphi(\omega_1 t+\varphi) = \omega_1\cos(\omega_1 t+\varphi),$$

откуда

$$tg(\omega_1 t+\varphi) = \frac{\omega_1}{\alpha} = 10$$

или $\omega_1 t+\varphi = 84°20'$, так как, согласно сказанному выше, фаза должна быть меньше 90°.

4.5. Камертон приведен в колебание. Конец ножки камертона в первую половину первого периода имел амплитуду 0,2 см. Коэффициент затухания камертона $\alpha = 10\,c^{-1}$, период колебания $T = 0{,}001$ с. Определить путь, пройденный концом ножки камертона до полного прекращения колебаний.

Решение: Искомая величина находится суммированием всех путей, пройденных системой за отдельные колебания. За первые полпериода система проходит путь равный удвоенной амплитуде: $2A = 0{,}4$ см, за следующие полпериода этот путь будет $2Ae^{-\frac{\alpha T}{2}} = 2Ae^{-\frac{\delta}{2}}$,т. е. согласно условию $0{,}4e^{-0{,}005}$; за третий полупериод пройденный путь равен $2Ae^{-\frac{\delta}{2}2}$ и т. д. Сумма всех этих путей образует убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $x = e^{-0{,}005}$.Так как по условию требуется найти путь, пройденный вплоть до прекращения колебаний, прогрессию надо считать бесконечной. Согласно известному выражению для суммы членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии $S = \frac{a_1}{1-x}$ имеем для вычисления искомого пути формулу:

$$S = \frac{2A}{1-e^{-0{,}005}}$$

Для вычисления последнего выражения разлагаем $e^{-\frac{\delta}{2}}$ в ряд:

$$e^{-\frac{\delta}{2}} = 1 - \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{1}{31}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 + \cdots =$$

$$1 - 5\cdot10^{-3} + \frac{1}{2}\cdot 25\cdot10^{-6} - \frac{1}{6}\cdot 125\cdot10^{-9} + \cdots$$

Отбрасывая ввиду малости члены, содержащие $\frac{\delta}{2}$ в степени выше первой, имеем $e^{-\frac{\delta}{2}} = 1 - \frac{\delta}{2}$, и искомый путь оказывается

$$S = \frac{2A}{1-e^{-\frac{\delta}{2}}} \approx \frac{2A}{1-(1-\frac{\delta}{2})} = \frac{2A}{\frac{\delta}{2}}\ ;\quad S = \frac{0{,}4}{0{,}005}\ \text{см} = 80\ \text{см}$$

Задачи для самостоятельного решения

№ 24—37.

§ 5 и 6. СЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

Пусть некоторая система участвует одновременно в двух колебаниях. Требуется определить результирующее движение этой системы. Результат сложения двух одновременных колебаний зависит от того, каков закон сложения смещений, полученных системой под воздействием каждой из сил, действующих порознь. Если система линейная, то, как будет показано ниже, имеет место закон независимости смещений, т. е. справедлив принцип суперпозиции (наложения) смещений. В этом случае результирующее смещение ОС точки (рис. 5.1) является геометрической суммой смещений ОА и ОБ, которые были бы получены под воздействием одной первой и одной второй сил в отдельности.

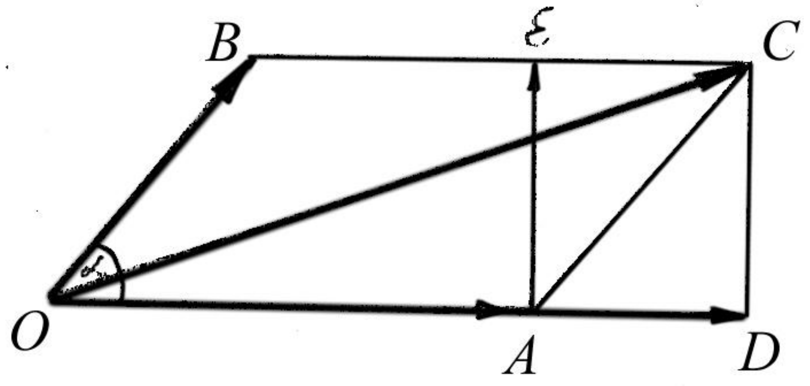

Рис. 5.1

На рис. 5.1 направления слагаемых колебаний составляют угол α. Совершенно ясно, что результат сложения не изменится, т.е. будет получено такое же результирующее смещение ОС, если предварительно разложить смещение ОВ = АС, получаемое под воздействием второй силы, па смещение AD, направленное вдоль ОА (т.е. по одной прямой со смещением, полученным под воздействием первой силы) и на смещение $\mathrm{AE} = \mathrm{DC}$, направленное перпендикулярно ОА. Производя последовательно сложение ОА с AD и с АЕ = DC, опять приходим к смещению ОС. Так как такое разложение может быть произведено для каждого мгновенного значения смещения, можно утверждать, что сложение двух колебаний, образующих угол α, может быть представлено как сложение двух колебаний, направленных вдоль одной прямой, и сложение результирующего движения, полученного таким образом, с колебанием, направленным перпендикулярно к направлению первых двух слагаемых. Такое разложение тем более интересно, что на практике по большей части имеет место либо сложение колебаний, направленных вдоль одной прямой, либо сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

§ 5. СЛОЖЕНИЕ ОДИНАКОВО НАПРАВЛЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Пусть некоторая точка, принадлежащая упругой системе, получает под действием первой силы F_1 смещение вдоль оси x, равное x_1 ; под действием второй силы F_2 эта точка получает смещение вдоль той же оси, равное x_2. Если система линейная, т.е. действующая сила связана с вызываемым ею смещением линейной зависимостью,

$$f = kx \tag{5.1}$$

то равнодействующая F направленных вдоль одной прямой сил F_1 и F_2 вызывает результирующее смещение, равное алгебраической сумме смещений

$$x = \frac{F}{k} = \frac{F_1+F_2}{k} = x_1 + x_2 \tag{5.2}$$

Для решения задачи о результирующем движении при сложении колебаний, направленных вдоль одной прямой, т.е. удовлетворяющих условию (5.2), обратимся к векторной диаграмме рис. 5.2.

Как уже говорилось (см § 1), гармоническое колебание может быть представлено как движение проекции конца вектора, равномерно обращающегося вокруг своего основания.

На рис. 5.2 изображены два таких вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Смещения x_1 и x_2 являются проекциями этих векторов на направление x. Суммарное смещение $x = x_1 + x_2$. Это требование должно выполняться тождественно, т.е. для всех моментов времени, и тем самым для всех положений векторов. Так как алгебраическая сумма проекций двух векторов равна проекции геометрической суммы этих векторов, для решения задачи надо построить эту геометрическую сумму.

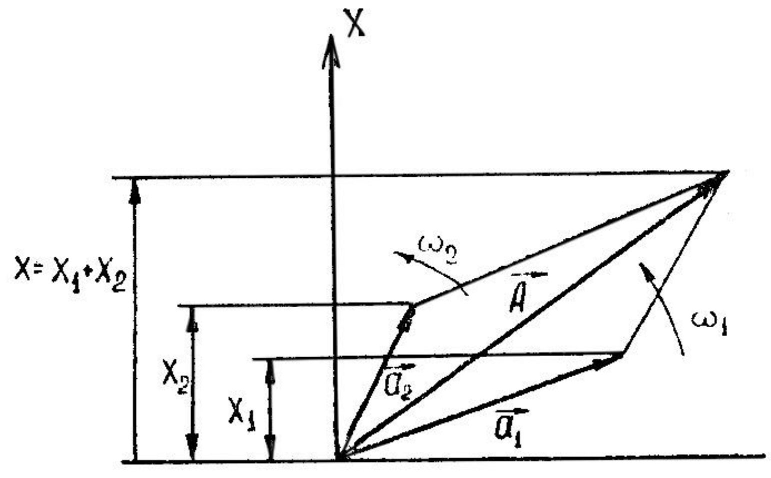

Рис. 5.2

На рис. 5.2 она обозначена $\vec{A}$. Проекция x этого результирующего вектора в каждый момент равна алгебраической сумме проекций x_1 и x_2 двух данных векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Таким образом, смещение в результирующем движении при сложении колебаний, направленных вдоль одной прямой, равно проекции вектора $\vec{A}$, являющегося геометрической суммой векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, проекции которых определяют слагаемые смещения.

Характер результирующего движения можно определить графически, производя непосредственное сложение смещений для многих моментов времени и соединяя полученные точки плавной кривой.

Рассмотрим представляющие наибольший интерес примеры сложения одинаково направленных колебаний:

1) сложение колебаний равных частот,
2) сложение колебаний близких частот,
3) сложение колебаний кратных частот.

1. Сложение колебаний равных частот

Пусть система под влиянием двух сил, действующих порознь, совершает колебания

$$x_1 = \mathrm{a}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad (5.3)$$

$$x_2 = \mathrm{a}_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \quad (5.4)$$

При равных частотах разность фаз двух колебаний остается во времени неизменной и, следовательно, равна разности начальных фаз:

$$(\omega t + \varphi_1) - (\omega t + \varphi_2) = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (5.5)$$

Таким и будет неизменный во времени угол между векторами a_1 и a_2 (рис.5.3). Геометрическая сумма этих двух векторов равна $\vec{A} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}$.

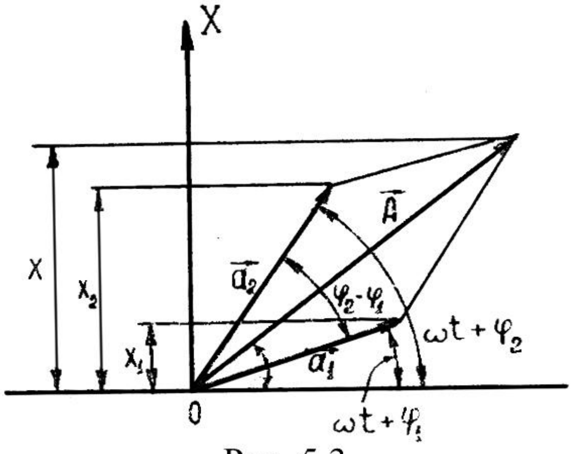

Рис. 5.3

Проекция x конца вектора $\vec{A}$, т.е. смещение результирующего движения, совершает гармоническое колебание той же частоты, что и слагаемые колебания

$$x = A \cdot \sin(\omega t + \psi), \quad (5.6)$$

где А — амплитуда,

ω — циклическая частота, рав-ная частотам слагаемых колебаний,

ψ — начальная фаза результирующего колебания.

Как видно из рис. 5.3,

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (5\text{-}7)$$

Величина ψ легко может быть найдена из векторной диаграммы, построенной для момента времени $t = 0$.[4]

$$tg\psi = \frac{a_1 \sin\ \varphi_1 + a_2 \sin\ \varphi_2}{a_1 \cos\ \ \varphi_1 + a_2 \cos\ \ \varphi_2}$$

Таким образом, при сложении двух колебаний равных частот, направленных вдоль одной прямой, получается гармоническое колебание той же частоты, амплитуда и начальная фаза которого зависят от амплитуд и начальных фаз слагаемых колебаний.

[4] Постройте эту векторную диаграмму и найдите $tg\psi$

Уравнение (5.7) можно получить, представив колебания x_1 и x_2 с помощью комплексных чисел

$$x_1 = a_1 e^{i(\omega t+\varphi_1)} \text{ и } x_2 = a_2 e^{i(\omega t+\varphi_2)},$$

Для получения квадрата амплитуды колебания следует составить произведения комплексно сопряженных чисел.

Действительно, $ae^{i(\omega t+\varphi)} \cdot ae^{-i(\omega t+\varphi)} = a^2$.

При сложении одинаково направленных колебаний

$$x = x_1 + x_2; \quad x = a_1 e^{i(\omega t+\varphi_1)} + a_2 e^{i(\omega t+\varphi_2)}$$

Умножим правую часть на величину с ней сопряженную

$$a^2 = \left[a_1 e^{i(\omega t+\varphi_1)} + a_2 e^{i(\omega t+\varphi_2)}\right]\left[a_1 e^{-i(\omega t+\varphi_1)} + a_2 e^{-i(\omega t+\varphi_2)}\right],$$

откуда

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2\left[e^{i(\varphi_2-\varphi_1)} + e^{-i(\varphi_2-\varphi_1)}\right]$$

По (1.13)

$$e^{i(\varphi_2-\varphi_1)} + e^{-i(\varphi_2-\varphi_1)} = 2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Следовательно,

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\text{и } a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Определим энергию результирующего колебания по (3.4)

$$W = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \tag{5.9}$$

После подстановки (5.7) в (5.9) и преобразований получим

$$W = \frac{m\omega^2 a_1^2}{2} + \frac{m\omega^2 a_2^2}{2} + 2\sqrt{\frac{m\omega^2 a_1^2}{2} \cdot \frac{m\omega^2 a_2^2}{2}} \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Энергия слагаемых колебаний, взятых порознь, равна соответственно

$$W_1 = \frac{m\omega^2 a_1^2}{2} \tag{5.10}$$

$$W_2 = \frac{m\omega^2 a_2^2}{2} \tag{5.11}$$

Воспользовавшись (5.10) и (5.11), получаем

$$W = W_1 + W_2 + 2\sqrt{W_1 W_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{5.12}$$

Последнее выражение имеет чрезвычайно большое значение. Из него видно, что энергия результирующего колебания в общем случае не равна сумме энергий слагаемых колебаний, совершающихся порознь. В зависимости от знака последнего члена в (5.12) суммарная энергия больше или меньше суммы энергий слагаемых колебаний. Этот член $2\sqrt{W_1 W_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ называется интерференционным членом.

Как видно из (5.12)

$$W = W_{max} \text{ при } \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1 \text{ или } \varphi_2 - \varphi_1 = k2\pi$$

где $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$$W = W_{min} \text{ при } \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1 \quad \text{или } \varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi$$ [5].

2. Сложение колебаний близких частот. Биения

Близкими называются такие частоты ω_1 и ω_2, разность которых

$$\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2| \tag{5.13}$$

очень мала по сравнению со средним арифметическим

$$\varpi = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \tag{5.14}$$

т. е.

$$\Delta\omega \ll \omega \tag{5.15}$$

Для простоты вывода будем считать, что амплитуды слагаемых колебаний одинаковы $a_1 = a_2 = a$, и запишем слагаемые колебания в виде

$$x_1 = \text{a}\sin\omega_1 t \tag{5.16}$$

$$x_2 = \text{a}\sin\omega_2 t \tag{5.17}$$

То обстоятельство, что начальные фазы обоих слагаемых колебаний положены одинаковыми и равными нулю, не уменьшает общности результата, который мы получим, так как разность фаз при различных частотах слагаемых колебаний не остается неизменной во времени и поэтому совершенно безразлично, какова была разность фаз в момент времени $t = 0$. Что же касается принятого условия о равенстве амплитуд слагаемых колебаний, это приведет к некоторому ограничению общности полученного результата. На этом ограничении мы впоследствии остановимся. Выражение для результирующего движения получается согласно (5.2) простым суммированием (5.16) и (5.17)

$$x = x_1 + x_2 = 2\,\text{a}\cos\frac{\Delta\omega}{2}t \cdot \sin\omega t = 2\,\text{a}\cos 2\pi\frac{\Delta\nu}{2}t \cdot \sin 2\pi\nu t \tag{5.18}$$

При соблюдении неравенства (5.15) множитель $2\,\text{a}\cos\frac{\Delta\omega}{2}t$ можно рассматривать как медленно изменяющуюся амплитуду. График зависимости $x = x(t)$ по (5.18) изображен на рис. 5.4. **Колебания с периодически изменяющейся амплитудой называются биениями.** Биение можно получить, заставив звучать громкоговоритель под действием двух звуковых генераторов с мало отличающимися частотами. Можно взять также два одинаковых камертона и, слегка расстроив их (укрепив на ножке одного из них небольшой груз),

[5] Подробнее о выражении (5.12) и его физическом истолковании см. упражнения 5.1 и 5.2.

заставить одновременно звучать. Число слышимых биений, т.е. число слышимых усилений в секунду, как это видно из рис. 5.4, равно не полуразности частот $\frac{\Delta\nu}{2}$, а их разности $\Delta\nu$, так как за один период колебания амплитуды два раза имеет место максимум энергии. Явление биений позволяет производить на слух настройку системы по другой, эталонной, с точностью до 0,3 Гц. так как ухо хорошо улавливает биения, с частотой одно биение за три секунды.

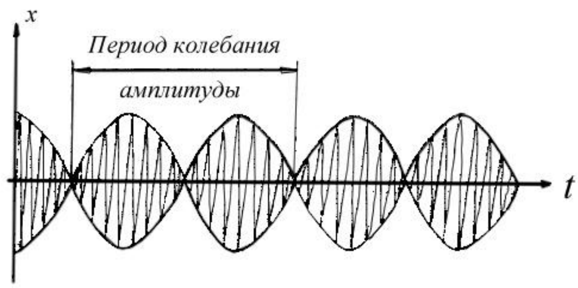

Рис. 5.4

Если мы не сделали бы в начале вывода предположения о равенстве амплитуд слагаемых колебаний близких частот, математическое описание явления было бы сложнее, однако результат был бы принципиально тот же, только наибольшая амплитуда результирующих колебаний равнялась бы не удвоенной амплитуде слагаемых колебаний $2\,a$, а их сумме $a_1 + a_2$. Минимальная амплитуда при биениях равнялась бы не нулю, а разности амплитуд слагаемых колебаний $|a_1 - a_2|$.

3. Сложение колебаний кратных частот

Кратными называются частоты отличающиеся в целое число раз.

Сложение колебаний кратных частот выполним графически. На рис. 5.5 показаны графики двух колебаний $x_1 = x_1(t)$ и $x_2 = x_2(t)$, частоты которых отличаются в два раза. На том же рисунке приведен график $x = x(t)$, полученный суммированием x_1 и x_2 для каждого момента времени.[6]

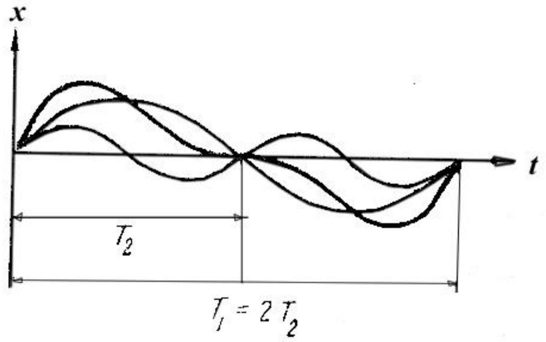

Рис. 5.5

Из рис. 5.5 видно, что *при сложении колебаний кратных частот, результирующее движение будет периодическим, но не будет простым гармоническим колебательным движением. Форма кривой результирующего движения зависит и от отношения частот слагаемых колебаний, от отношения их амплитуд и от фазовых соотношений.*

Большое значение в современной физике, технике и вообще в современном естествознании имеет обратная задача: *представление периодического движения в виде суммы гармонических колебательных движений.* В математике разработан специальный прием (ряды Фурье), при

[6] Рекомендуем сделать такое же построение для колебаний, частоты которых отличаются в три раза.

помощи которого периодическое движение любой формы может быть с наперед заданной точностью представлено в виде суммы конечного числа гармонических колебаний. Такое разложение в математике называется гармоническим анализом, а в физике разложением в спектр или спектральным разложением.

На рис. 5.6 показаны величины амплитуд, соответствующие тем гармоническим колебаниям, сумма которых образует несинусоидальное периодическое движение, полученное на рис. 5.5, т.е. спектр данных несинусоидальных колебаний, который в данном случае является линейным.

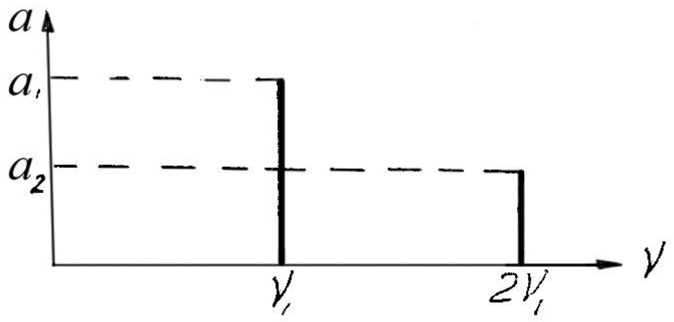

Рис. 5.6

При спектральном анализе непериодических процессов получается спектр, содержащий непрерывное многообразие частот и охватывающий некоторый диапазон (математический аппарат в этом случае называется интегралом Фурье). Такой спектр называется сплошным или непрерывным.

Упражнения

5.1. Найти выражение для результирующей амплитуды и энергии результирующего движения при сложении двух одинаково направленных колебаний одинаковых частот при разности фаз 1) 0°, 2) 90° или 270° и 3) 180°.

Решение: 1) $\varphi_2 - \varphi_1 = 0°$

Результирующую амплитуду A можно найти, воспользовавшись (5.6) и положив $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = +1$;

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2} = \sqrt{(a_1 + a_2)^2} = a_1 + a_2 \qquad (5.19)$$

Начальная фаза результирующего движения может быть определена по (5.8). Так как $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2$ и $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$ то $\varphi = 0$.

2) $\varphi_2 - \varphi_1 = 90°$ или 270°.

Из уравнения (5.6)

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \qquad (5.20)$$

Начальная фаза результирующего колебания зависит от соотношения амплитуд слагаемых колебаний и должна определяться по (5.8).

3) $\varphi_2 - \varphi_1 = 180°$.

Ясно, что результирующая амплитуда будет равняться разности амплитуд слагаемых колебаний, что получается из (5.6), если положить $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2} = \sqrt{(a_1 + a_2)^2} = |a_1 - a_2| \qquad (5.21)$$

В полученном выражении надо брать разность амплитуд со знаком «плюс», так как амплитуда существенно положительная величина. Изменение знака амплитуды всегда толкуют как изменение фазы колебания на 180°.

Начальная фаза результирующего колебания совпадает с начальной фазой слагаемого колебания с большей амплитудой. Следует обратить внимание, что в случае одинаковых амплитуд слагаемых колебаний в результате сложения колебаний в противоположных фазах движения не получается: А = 0. Таким образом, одно колебание может погасить, уничтожить другое.

Задание:

1) Постройте векторные диаграммы и графики зависимостей $x_1 = x_1(t)$; $x_2 = x_2(t)$ и $x = x(t)$ для случаев 1, 2, 3, приняв $a_1 = 3$ см, $a_2 = 5$ см, $T = 1$ с.

2) Из векторных диаграмм и графиков получите результирующую амплитуду и начальную фазу результирующего движения. Сделайте расчеты по формулам 5.19, 5.20, 5.21, сравните результаты.

Энергия результирующего движения может быть определена по (5.12). При разности фаз 0°, энергия результирующего движения выразится через энергии слагаемых колебаний, совершающихся порознь следующим образом:

$$W = W_1 + W_2 + 2\sqrt{W_1 W_2} = \left(\sqrt{W_1} + \sqrt{W_2}\right)^2 \qquad (5.22)$$

При одинаковых амплитудах слагаемых колебаний результирующая энергия будет в четыре раза превосходить энергию каждого из слагаемых колебаний, совершающихся порознь.

При разности фаз 270° или 90°, т.е. при $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$ выражение (5.12) превращается в

$$W = W_1 + W_2 \qquad (5.23)$$

При разности фаз 180°, т.е. при $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$, (5.12) превращается в

$$W = W_1 + W_2 - 2\sqrt{W_1 W_2} = \left(\sqrt{W_1} - \sqrt{W_2}\right)^2 \qquad (5.24)$$

Результирующая энергия в этом случае всегда меньше, чем сумма энергий слагаемых колебаний, а при одинаковых амплитудах слагаемых колебаний обращается в нуль (одно колебание уничтожает другое).

То обстоятельство, что энергия результирующего колебания в общем случае не равна сумме энергий слагаемых колебаний, совершающихся порознь, требует пояснения, которое дается в следующей задаче.

5.2. Пружина, одним концом укрепленная на стене, растягивается на 1 см под действием силы 5 кгс. К пружине подходит человек и растягивает ее с силой 20 кгс. Затем к ней подходит другой человек и растягивает ее с силой 30 кгс. Наконец к пружине подходят оба человека и вместе растягивают ее — один с силой 20 кгс, а другой с силой 30 кгс. Определить работу растяжения пружины при воздействии каждым из людей порознь и при их совместном воздействии.

Решение: Работа растяжения пружины и энергия W растянутой пружины определяются согласно (3.2) выражением

$$W = \frac{kx^2}{2} + \frac{fx}{2} \tag{5.25}$$

где k — упругая постоянная пружины, равная по условию 500 кгс/м.

Растяжение, получаемое пружиной, определяется по (2.1)

$$x = \frac{f}{k} \tag{5.26}$$

Следовательно, при действии одного первого человека растяжение

$$x_1 = \frac{20}{500}\ \text{м} = 0{,}04\ \text{м}.$$

При действии одного второго человека

$$x_2 = \frac{30}{500}\ \text{м} = 0{,}06\ \text{м}.$$

При совместном действии обоих людей растяжение было:

$$x = \frac{f_1+f_2}{k} = x_1 + x_2;\ \ x = 0{,}10\ \text{м}.$$

По выражению $W = \frac{fx}{2}$, взятому из (5.25), подсчитаем энергию растянутой пружины во всех трех случаях

$$W_1 = \frac{f_1x_1}{2};\ W_1 = \frac{20\cdot 9{,}8\cdot 0{,}04}{2}\ \text{Дж} \simeq 4\ \text{Дж}$$

$$W_2 = \frac{f_2x_2}{2};\ W_2 = \frac{30\cdot 9{,}8\cdot 0{,}06}{2}\ \text{Дж} \simeq 9\ \text{Дж}$$

$$W = \frac{(f_1+f_2)x}{2}; W = \frac{(20+30)9{,}8\cdot 0{,}10}{2}\ \text{Дж} \simeq 25\ \text{Дж}$$

Энергия растяжения пружины (а следовательно, и работа, произведенная людьми) при одновременном действии обоих людей не равна сумме энергий растяжения пружины при действии людей порознь. Для того чтобы разъяснить это обстоятельство, подсчитаем работу каждого из людей при их совместном действии.

При совместном действии сила, приложенная каждым из участников, осталась такой же, как и при действии порознь, однако путь, на котором совершала работу эта сила, определяется растяжением пружины при совместном действии обоих людей и не остается таким, каким был при действии порознь.

При работе людей вместе имеем: первый человек и второй человек совершат работу на пути $x = x_1 + x_2$ и сообщат пружине энергию соответственно $W_1^{`}$ и$W_2^{`}$.

$$W_1^{`} = \frac{f_1x}{2};\ \ W_1^{`} = \frac{20\cdot 9{,}8\cdot 0{,}10}{2}\ \text{Дж} \simeq 10\ \text{Дж};$$

$$W_2^{`} = \frac{f_2 x}{2}; \;\; W_2^{`} = \frac{30 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}10}{2} \text{ Дж} \simeq 15 \text{ Дж};$$

При совместном действии людей

$$W = W_1^{`} + W_2^{`} = 25 \text{ Дж}.$$

Из рассмотренного примера видно, что работа, совершаемая внешней силой при деформации системы, будет различной при действии в одиночку и при действии на данную систему совместно с другой силой. Энергия деформации системы обязательно равна сумме энергий, затраченных внешними силами при их совместном действии, но не равна в общем случае сумме энергий, затрачиваемых при воздействии порознь.

Если бы один человек тянул пружину в одну сторону, а другой стремился бы ее сжать в противоположную сторону, то равнодействующая сила равнялась бы разности сил, приложенных этими людьми, и результирующее смещение было бы меньшим, чем при действии каждой из этих сил порознь. При этом результирующая энергия оказалась бы меньше суммы энергий деформации, получаемой под действием каждой из слагаемых сил в отдельности. Такой случай соответствует сложению колебаний в противоположных фазах, тогда как задача, рассмотренная нами выше, соответствует сложению колебаний в одинаковых фазах.

§ 6. СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Если под действием одной силы система совершает колебания в некотором направлении и имеет смещение x, а под действием другой силы в направлении, перпендикулярном первому, — смещение y, то в случае одновременного действия обеих сил движение системы определяется результатом сложения двух перпендикулярных колебаний. Результирующее смещение линейной системы

$$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{6.1}$$

Приняв закон сложения смещений (6.1), рассмотрим вопрос об энергии результирующего движения при сложении взаимно перпендикулярных колебаний.

Потенциальная энергия деформированной системы в силу (6.1) может быть представлена в виде:

$$W_{\text{пот}} = \frac{kr^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \frac{ky^2}{2} = W_{\text{пот } x} + W_{\text{пот } y} \tag{6.2}$$

Скорость результирующего движения системы (рис. 6.1)

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} \tag{6.3}$$

Следовательно, кинетическая энергия результирующего движения

$$W_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} = W_{\text{кин }x} + W_{\text{кин }y} \tag{6.4}$$

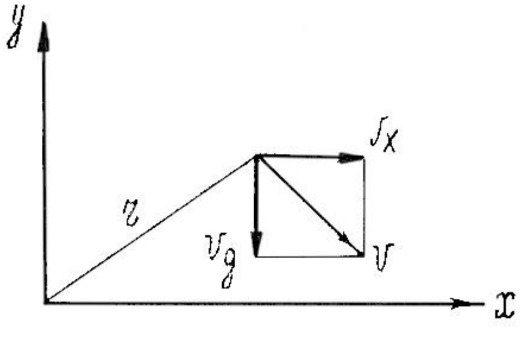

Рис. 6.1

Из (6.2) и (6.3) непосредственно следует, что *при сложении взаимно перпендикулярных колебаний энергия результирующего движения равна сумме энергий слагаемых колебаний, совершающихся порознь, и не зависит от разности фаз слагаемых колебаний.*

$$W = W_{\text{пот}} + W_{\text{кин}} = W_{\text{пот }x} + W_{\text{пот }y} + W_{\text{кин }x} + W_{\text{кин }y} \tag{6.5}$$

1. Сложение колебаний равных частот

Уравнение слагаемых колебаний:

$$x = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \tag{6.6}$$

$$y = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2). \tag{6.7}$$

Не будем выводить общей формулы траектории результирующего движения, а ограничимся рассмотрением отдельных частных случаев именно: разность фаз слагаемых колебаний равна: а) нулю, б) 90° или 270° и в) 180°.[7]

1. Разность фаз слагаемых колебаний $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$.

В этом случае (6.6) и (6.7) перепишутся в виде:

$$x = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \tag{6.8}$$

$$y = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \tag{6.9}$$

Теперь v обоих колебаний одинаковый аргумент синуса. Разделив (6.9) на (6.8), получаем

$$y = \frac{a_2}{a_1} x \tag{6.10}$$

Таким образом, при сложении взаимно перпендикулярных колебаний одинаковых частот с разностью фаз, равной нулю, результирующее движение системы происходит по прямой, проходящей через положение равновесия и наклоненной к оси x под углом, тангенс которого равен отношению амплитуд.

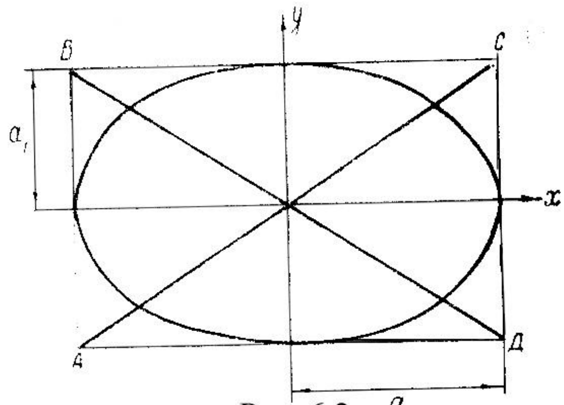

Рис. 6.2

На рис. 6.2 нанесен прямоугольник со сторонами, равными удвоенным амплитудам слагаемых колебаний. Диагональю этого прямоугольника, проходящей через первый и третий квадраты, является траектория, описываемая (6.10).

[7] Вывод общей формулы траектории результирующего движения см. в руководстве к лабораторной работе «Изучение сложения электрических колебаний при помощи осциллографа».

2. **Разность фаз слагаемых колебаний** $\varphi_2 - \varphi_1 = 90°$ или $\varphi_2 - \varphi_1 = 270°$

В этом случае перепишем (6.6) и (6.7) в виде

$$x = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \tag{6.11}$$

$$y = \pm a_2\, cos(\omega t + \varphi_1) \tag{6.12}$$

где знак « + » соответствует $\varphi_2 - \varphi_1 = 90°$,

а знак «—» $\varphi_2 - \varphi_1 = 270° = -90°$.

Аргумент синуса в (6.11) такой же, как аргумент косинуса в (6.12). Разделив каждое из этих уравнений на амплитуду, имеем:

$$\frac{x}{a_1} = \sin(\omega t + \varphi_1),$$

$$\frac{y}{a_2} = \pm\, cos(\omega t + \varphi_1).$$

Возведя последние уравнения в квадрат и складывая, получаем:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1 \tag{6.13}$$

т.е. уравнение эллипса, полуосями которого являются амплитуды слагаемых колебаний. Этот эллипс также показан на рис. 6.1. Таким образом, траектории движения точки одинаковы как при разности фаз 90°, так и при 270°. Направления движения по эллиптической траектории различны: при опережении вертикального колебания, т.е. при $\varphi_2 - \varphi_1 = 90°$, движение происходит по часовой стрелке, в случае $\varphi_2 - \varphi_1 = -90°$ против часовой стрелки.

3. **Разность фаз слагаемых колебаний** $\varphi_2 - \varphi_1 = 180°$.

Уравнения (6.6) и (6.7) принимают вид:

$$x = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \tag{6.14}$$

$$y = -a_1\, sin(\omega t + \varphi_1) \tag{6.15}$$

и результирующее движение происходит по диагонали прямоугольника рис. 6.1, проходящей через четные квадранты.

Уравнение этой диагонали

$$y = -\frac{a_2}{a_1} x, \tag{6.16}$$

непосредственно получается из (6.14) и (6.15).

В общем случае при сложении взаимно перпендикулярных колебаний одинаковых частот при любой разности фаз слагаемых колебаний всегда получается эллипс, вписанный в прямоугольник рисунка 6.1. Эксцентриситет этого эллипса различен в зависимости от разности фаз.

2. Сложение колебаний близких частот

При сложении взаимно перпендикулярных колебаний близких частот разность фаз этих колебаний медленно(по сравнению с их частотой)изменяется.

В результате этого изменяется также траектория суммарного движения: прямая, характерная для разности фаз, равной нулю, превращается в эллипс, а он, в свою очередь, — в другую диагональ прямоугольника. Таким образом, устойчивой фигуры здесь не получается. Вследствие того, что энергия результирующего движения при всех разностях фаз остается неизменной, никаких энергетических явлений (как, например, «биения» при сложении одинаково направленных колебаний близких частот) здесь не наблюдается.

Задачи для самостоятельного решения

№ 38—41.

2. Сложение колебаний, частоты которых находятся в отношении небольших целых чисел

Если частоты слагаемых колебаний находятся в простом соотношении или одна частота в целое число раз больше другой, получающаяся фигура будет устойчивой. Вид фигуры зависит как от соотношения частот, так и от соотношения амплитуд и от фазовых соотношений. Получающиеся фигуры называются фигурами Лиссажу. Фигуры, получающиеся при сложении взаимно перпендикулярных колебаний, наблюдаются на практике на экране катодного осциллографа, когда на одну пару управляющих электродов подается переменное напряжение от одного генератора, а на другую пару электродов — от другого генератора. В таком случае, пользуясь катодным осциллографом, можно исследуемый генератор настроить точно на частоту эталонного или па заданную кратную частоту.[8] Способ построения фигур Лиссажу разбирается в упражнениях.

§ 7. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Вынужденными называются колебания, которые совершает система под действием внешней (вынуждающей) силы.

Рассмотрим две задачи:

1. Вынужденные колебания механической системы,
2. Вынужденные колебания в электрическом контуре.

1. Механическая система

К системе, совершающей вынужденные колебания, приложены три силы: возвращающая $f_1 = -kx$, тормозящая $f_2 = -r\dot{x}$ и внешняя F.

[8] См. лабораторную работу «Изучение сложения электрических колебаний при помощи осциллографа».

По второму закону Ньютона

$$\ddot{x} = \frac{-r\dot{x} - kx + F}{m} \tag{7.1}$$

Откуда получаем дифференциальное уравнение

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F \tag{7.2}$$

Это уравнение является линейным, второго порядка с постоянными коэффициентами, но не является однородным, так как содержит свободный член F, т е. член, не зависящий от смещения системы или его производных.

Рассмотрим два конкретных примера внешней силы: постоянную во времени внешнюю силу и внешнюю силу, совершающую гармоническое колебание.

1. Внешняя сила постоянна

Если внешняя сила постоянна, т.е. F = const, то решение уравнения (7.2) имеет вид:

$$x = A \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi) + \frac{F}{k} \tag{7.3}$$

Первый член этого решения описывает собственные затухающие колебания, возникшие вследствие возмущения системы, вызванного приложением внешней силы; второй член представляет собой деформацию под воздействием внешней силы. Во времени эти два члена не равноценны: как бы велики ни были колебания, возникшие при приложении внешней силы, с течением времени они затухают, и остается только второй член — постоянная во времени деформация.

На рис. 7.1 показан ход смещения во времени. Этот график построен по выражению (7.3). Промежуток времени τ, в течение которого практически происходит установление вынужденной деформации, и к концу которого исчезают заметные собственные колебания, является длительностью переходного процесса (или неустановившегося режима). Этот процесс является переходным от прежнего состояния недеформированной системы к новому состоянию деформированной системе. Каждому хорошо известен рассмотренный процесс: если к пружине, укрепленной на крюке, подвесить гирю (постоянная сила), то возникнут колебания. Эти колебания будут совершаться не около положения равновесия, соответствующего ненапряженной пружине, а около положения равновесия, соответствующего статической деформации пружины под действием веса гири. Эта деформация и устанавливается по окончании переходного процесса.

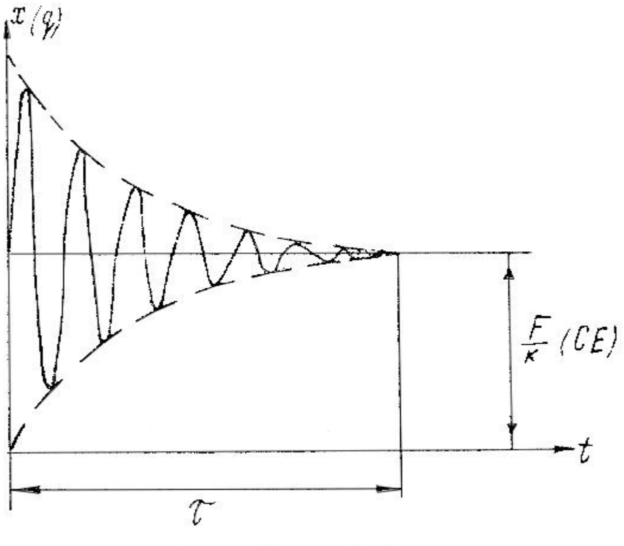

Рис. 7.1

2. Внешняя сила совершает гармоническое колебание

В этом случае внешняя сила задается выражением

$$F = F_{max} \cdot \sin \Omega t \tag{7.4}$$

Здесь F_{max} — амплитуда вынуждающей силы, Ω—циклическая частота ее колебаний. Значение этой частоты в общем случае совершенно произвольно и не связано с собственной частотой системы.

1. Уравнение вынужденных колебаний

Приняв (7.4), перепишем дифференциальное уравнение (7.2) в следующем виде

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_{max} \cdot \sin \Omega t \tag{7.5}$$

Решение этого уравнения

$$x = A \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi) + a \sin(\Omega t - \psi) \tag{7.6}$$

Первое слагаемое в (7.6) описывает собственные колебания системы, возникающие при включении внешней силы; второе описывает вынужденное движение системы. После затухания собственных колебаний, т.е. после окончания переходного процесса, в установившемся режиме вынужденное движение системы определяется уравнением

$$x = a \sin(\Omega t - \psi) \tag{7.7}$$

т.е. является гармоническим колебанием с частотой, равной частоте колебания вынуждающей силы, и отстающим по фазе от колебания вынуждающей силы на угол Ψ. В (7.6) и (7.7) начальная фаза вынужденного колебания написана со знаком «минус». Тем самым заранее принято, что благодаря инерционности системы (наличию массы в механической системе или индуктивности в электрической) движение запаздывает по фазе по отношению к вынуждающей силе. *Амплитуда a и фазовый сдвиг Ψ вынужденного колебания не являются произвольными постоянными,* как это имело место в случае собственных колебаний. Дело в том, что в настоящей задаче заданы не только параметры самой системы (которые только и задавались в задаче о свободных колебаниях), но также величина и характер действующей внешней силы. Тем самым указаны начальные условия, удовлетворять которым должны произвольные, постоянные. Следовательно, движение системы полностью определяется ее параметрами, а также величиной и характером внешней силы.

2. Определение амплитуды a и фазового сдвига Ψ вынужденного колебания

Для получения амплитуды a вынужденных колебаний и отставания по фазе Ψ вынужденных колебаний от колебаний вынуждающей силы можно использовать метод построения векторной диаграммы (см. § 1).

Подставим в уравнение (7.5)

$$x = a\sin(\Omega t - \psi) \qquad (7.8)$$

$$\dot{x} = a\omega\cos(\Omega t - \psi) \qquad (7.9)$$

$$\ddot{x} = -a\omega^2\sin(\Omega t - \psi) \qquad (7.10)$$

$$F = F_{max} \cdot \sin\Omega t \qquad (7.4)$$

получим уравнение

$$-m\Omega^2\sin(\Omega t - \psi) + r\Omega\cos(\Omega t - \psi) + k\sin(\Omega t - \psi) = \frac{F_{max}\ \sin\ \Omega t}{a} \qquad (7.11)$$

из которого можно найти a и Ψ.

Представим слагаемые левой части уравнения (7.11) с помощью векторов амплитуды соответственно $m\Omega^2$, $r\Omega$, k. На основании (7.11) построим векторную диаграмму (рис. 7.2).

Углы между векторами, равные разности фаз соответствующих колебаний, не изменяются с течением времени, так как эти колебания имеют одинаковые частоты.

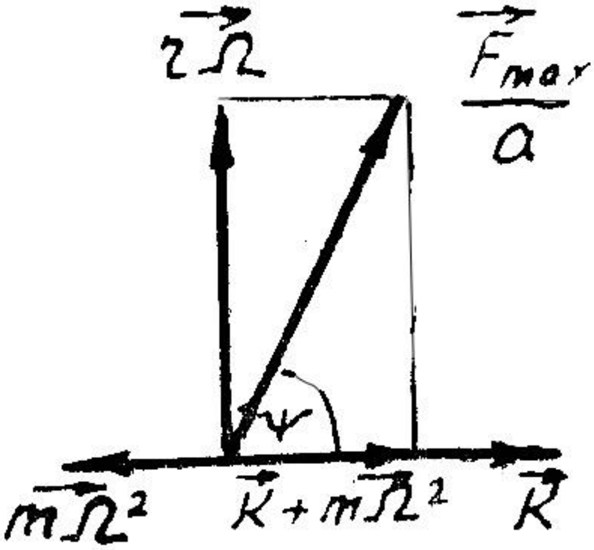

Рис. 7.2

$$\frac{F_{max}}{a} = \sqrt{(k - m\Omega^2) + r^2\Omega^2}$$

и

$$a = \frac{F_{max}}{m\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + r^2\Omega^2}};$$

$$tg\Psi = \frac{r\Omega}{\mathrm{k - m\Omega^2}}.$$

Так как $k = m\omega^2$ и $a = \frac{r}{2m}$ после несложных преобразований получаем

$$a = \frac{F_{max}}{m\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4a^2\Omega^2}}, \qquad (7.12)$$

$$tg\Psi = \frac{2a\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}. \qquad (7.13)$$

Величины a и Ψ можно получить также следующим образом:

1) преобразовать $\sin(\Omega t - \psi)$ и $\cos(\Omega t - \psi)$ в уравнении (7.11), привести подобные члены и получить уравнение

$$a(k - m\Omega^2)\,(\cos\Psi\sin\Omega t - \sin\Psi\, cos\Omega t) + ra\Omega\,(\cos\Psi\cos\Omega t + \sin\Psi\, sin\Omega t) = F_{max}\, sin\Omega t \qquad (7.11a)$$

2) так как синус и косинус — независимые функции, то для тождественного выполнения равенства (7.11а) следует приравнять коэффициент при $sin\Omega t$ в левой и правой частях уравнения, то же сделать для $cos\Omega t$. Это дает уравнения

$$a[(k - m\Omega^2)\cos\Psi + r\Omega\sin\Psi] = F_{max}$$
$$a[-(k - m\Omega^2)\sin\Psi + r\Omega\cos\Psi] = 0$$

3) решив систему полученных уравнений, определить a и $tg\Psi$.

Заключение. *В установившемся режиме вынужденные колебания системы — гармонические колебания, частота которых равна частоте вынуждающей силы. Амплитуда a колебаний и начальная фаза Ψ зависят от частоты вынуждающей силы.*

3. Зависимость амплитуды смещения от частоты вынуждающей силы.

При частоте $\Omega = 0$ выражение для амплитуды принимает вид:

$$a = \frac{F_{max}}{m\omega^2} = \frac{F_{max}}{k} \qquad (7.14)$$

Это выражение совпадает с (7.3): воздействие с частотой $\Omega = 0$ является статическим воздействием.

Получим выражение для частоты $\Omega_{a_{\max}}$ соответствующей максимуму амплитуды a. Для этого следовало бы взять производную от амплитуды по частоте $\frac{da}{d\Omega}$ и приравнять ее нулю. Ввиду того что числитель выражения амплитуды (7.12) не зависит от частоты, достаточно найти частоту, соответствующую минимуму знаменателя, которая, очевидно, будет искомой частотой $\Omega_{a_{\max}}$.

Производим указанное дифференцирование знамеиателя (7.12):

$$\frac{d\left[\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+4a^2\Omega^2\right]}{d\Omega} = -2(\omega^2 - \Omega^2)\cdot 2\Omega + 8a^2\Omega$$

Приравняв эту производную нулю, имеем:

$$\Omega(\omega^2 - \Omega^2) = 2a^2\Omega$$

Последнее выражение имеет решение $\Omega = 0$, которое следует отбросить, так как оно соответствует максимуму знаменателя (7.12) и минимуму амплитуды. Минимальное значение амплитуды можно получить, если продлить амплитудные кривые в область отрицательных частот Ω (это математически допустимо, но не имеет физического смысла).

Отбросив это решение, имеем:

$$\omega^2 - \Omega^2 = 2a^2,$$

откуда получается

$$\Omega_{a_{\max}} = \sqrt{\omega^2 - 2a^2} \qquad (7.15)$$

Из (7.15) видно, что максимум амплитуды имеет место при частоте, меньшей $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - a^2}$ — частоты системы с учетом затухания. При коэффициенте затухания a, равном нулю, максимум имеет место при частоте $\Omega = \omega$. При коэффициенте a, большем, чем $\frac{\omega}{\sqrt{2}}$, амплитуда не имеет максимума.

Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к собственной частоте системы называется резонансом. График зависимости $a = f(\Omega)$ приведен на рис. 7.3.

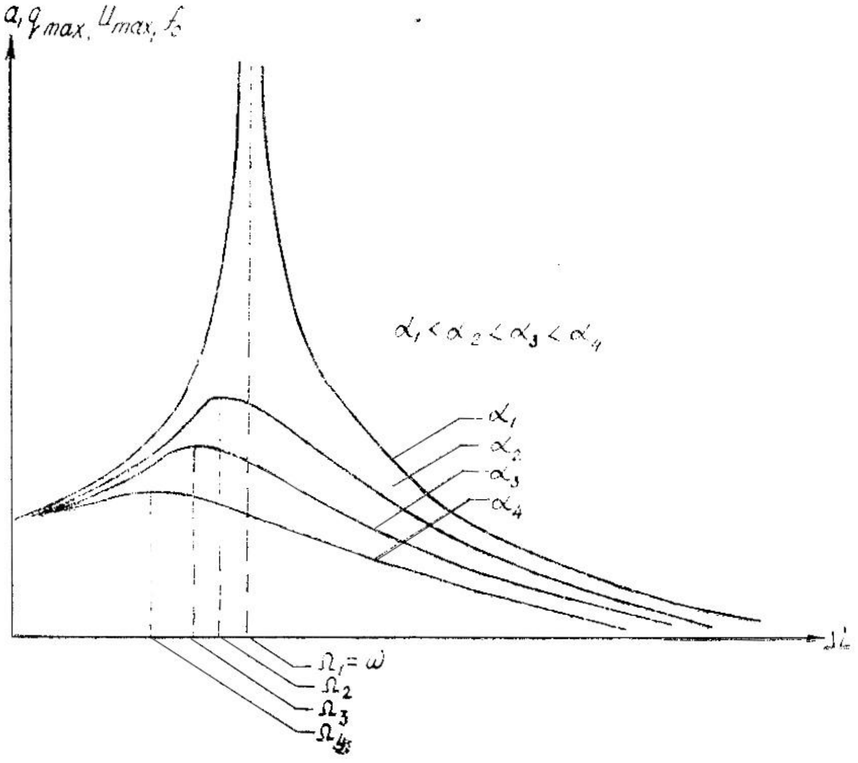

Рис. 7.3

Вместе с колебанием смещения совершает колебание и упругое напряжение $f = kx$ (сила натяжения пружины в пашем примере).

Уравнение этих колебаний может быть получено из (7.7) $x = a\sin(\Omega t - \Psi)$ простым умножением смещения на упругий коэффициент k

$$f = kx = ak\sin(\Omega t - \Psi) = f_0 \sin(\Omega t - \Psi) \qquad (7.16)$$

Максимум амплитуды имеет место при той же частоте $\Omega_{a_{\max}}$ при которой достигает максимального значения амплитуда смещения a. Воспользовавшись (7.12), получаем выражение для амплитуды упругой силы, которая определяет величину внутреннего напряжения упругой системы, совершающей колебания:

$$f_0 = ka_{max} = \frac{kF_{max}}{m\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4a^2\Omega^2}}. \qquad (7.17)$$

Из последнего выражения видно, что вблизи резонанса, где выражение $\frac{k}{m\sqrt{\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+4a^2\Omega^2}}$ в случае малого коэффициента затухания a может принимать очень большие значения, амплитуда упругой силы может быть больше амплитуды вынуждающей силы.

2. Электрический контур

Вынужденные колебания в электрическом контуре происходят под действием источника с ЭДС ε.

Рассмотрим два случая: 1) ЭДС источника постоянна,

2) ЭДС совершает гармоническое колебание по закону $\varepsilon = \varepsilon_{max} \sin \Omega t$

Как видно, задача аналогична решенной для механической системы. Роль внешней вынуждающей силы в механической системе выполняет источник в электрическом контуре.

1. ЭДС источника постоянна.

На рис. 7.4, приведена схема электрического контура, содержащего источник, емкость, индуктивность и сопротивление. При замыкании ключа в цепи начинаются колебания, вызванные включенным в схему источником с постоянной электродвижущей силой. После затухания этих собственных колебаний конденсатор имеет постоянный заряд. Изменение заряда (или напряжения) конденсатора во времени изображается тем же рисунком 7.1, что и для механического примера.

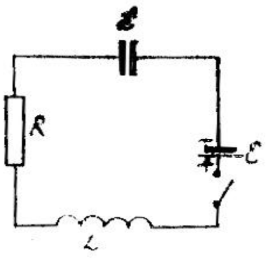

Рис. 7.4

2. ЭДС источника совершает гармонические колебания.

На рис. 7.4 показан контур, в котором ЭДС источника изменяется но закону $E = E_{max} \sin \Omega t$.

Дифференциальное уравнение для этого контур

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E_{max} \sin \Omega t \qquad (7.18)$$

Уравнение (7.18) аналогично (7.5); общее решение этого уравнения аналогично (7.6)

$$q = q_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi) + q_{max} \sin(\Omega t - \psi) \qquad (7.19)$$

После затухания собственных колебаний в установившемся режиме

$$q = q_{max} \sin(\Omega t - \psi) \qquad (7.20)$$

Амплитуда q_{max} вынужденных колебаний заряда в контуре может быть определена по аналогии с (7.12) на основании таблицы § 4:

$$q_{max} = \frac{E_{max}}{L\sqrt{\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+4a^2\Omega^2}} \tag{7.21}$$

После подстановки (7.21) в (7.20)

$$q = \frac{E_{max}}{L\sqrt{\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+4a^2\Omega^2}}\sin(\Omega t-\psi) \tag{7.22}$$

Разделив (7.22) на емкость *C* конденсатора, получим уравнение колебаний разности потенциалов на конденсаторе

$$U = \frac{q}{C} = U_{max}\sin(\Omega t-\psi)$$

$$U = \frac{E_{max}}{LC\sqrt{\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+4a^2\Omega^2}}\sin(\Omega t-\psi) \tag{7.23}$$

Заключение: *заряд и разность потенциалов конденсатора совершают гармоническое колебание с частотой Ω колебаний ЭДС источника. Амплитуда колебаний зависит от частоты Ω. Отставание по фазе вынужденных колебаний от колебаний ЭДС источника обусловлено индуктивностью и зависит от частоты Ω по (7.13).*

Амплитуда колебаний заряда (и напряжения) на конденсаторе, имеет максимум при частоте $\Omega = \sqrt{\omega^2 - 2a^2}$, определяемой по (7.15). На рис. 7.3 на оси ординат показаны не только амплитуда a смещения, но и амплитуды q_{max} заряда и U_{max} напряжения на конденсаторе.

Вблизи резонанса амплитуда U_{max} колебаний разности потенциалов конденсатора может быть больше амплитуды E_{max} колебаний ЭДС внешнего источника, подобно тому как упругое натяжение в механической системе может быть больше амплитуды внешней силы.

Рассмотрим **зависимость амплитуды силы тока в электрическом контуре от частоты колебаний ЭДС источника.**

Выражение для силы тока в контуре получается дифференцированием выражения (7.20) для заряда. Взяв производную от заряда q по времени, имеем:

$$I \equiv \dot{q} = q_{max}\cos(\Omega t-\psi) = \frac{E_{max}\cdot\Omega}{L\cdot\sqrt{\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+4a^2\Omega^2}}\cdot\cos(\Omega t-\psi) \tag{7.24}$$

Разделив в последнем выражении числитель и знаменатель на Ω и положив $\cos(\Omega t-\psi)=1$, получим выражение для амплитуды тока:

$$I = \frac{E_{max}}{L\sqrt{\frac{\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2}{\Omega^2}+4a^2}} \tag{7.25}$$

Выражение (7.25) можно преобразовать, внося индуктивность под корень и производя замены $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ и $a^2 = \frac{R^2}{4L^2}$

$$I_{max} = \frac{E_{max}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\Omega} - L\Omega\right)^2}} \qquad (7.26)$$

Полученная формула является выражением для амплитуды переменного тока в цепи, содержащей сопротивление, индуктивность и емкость. На месте обычного сопротивления R в цепи постоянного тока здесь стоит величина

$$\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{LC} - L\Omega\right)^2},$$

называемая полным сопротивлением цепи переменному току. Это сопротивление состоит из активного R и реактивного $\left(\frac{1}{C\Omega} - L\Omega\right)$ сопротивлений. Реактивное сопротивление состоит, в свою очередь, из емкостного сопротивления $\frac{1}{C\Omega}$ и индуктивного сопротивления $L\Omega$.

Минимум полного сопротивления и тем самым максимум амплитуды I_{max} силы тока имеют место при реактивном сопротивлении, равном нулю. При этом

$$\Omega^2 = \frac{1}{LC} = \omega^2, \text{ т.е. } \Omega_{(I_{max})_{\max}} = \omega \qquad (7.26)$$

Таким образом, при любом коэффициенте затухания максимум амплитуды силы тока имеет место при частоте колебаний ЭДС внешнего источника, равной собственной частоте контура.[9]

3. Энергия вынужденных колебаний

1. Механическая система

Полная энергия механической системы равна сумме кинетической энергии и потенциальной энергии упругой деформации. Кинетическая энергия по (7.8)

$$W_k = \frac{mx^2}{2} = \frac{ma^2\Omega^2}{2}\cos^2(\Omega t - \Psi) \qquad (7.27)$$

Потенциальная энергия по (7.7) после замены $k = m\omega^2$

$$W_п = \frac{mx^2}{2} = \frac{ma^2\omega^2}{2} sin^2(\Omega t - \Psi) \qquad (7.28)$$

$$W = W_k + W_п = \frac{ma^2\Omega^2}{2}\cos^2(\Omega t - \Psi) + \frac{ma^2\omega^2}{2} sin^2(\Omega t - \Psi) \qquad (7.29)$$

[9] Рассмотрите зависимость колебательной скорости механической системы от частоты вынуждающей силы, воспользовавшись методом электромеханических аналогий.
Начертите графики зависимости $\dot{x}_{max}$ от частоты вынуждающей силы и q_{max} от частоты внешней ЭДС.

Из (7.27) и (7.28) видно, что амплитуда потенциальной энергии не равна амплитуде кинетической энергии.

Следовательно, *полная энергия в течение периода колебания не остается неизменной: имеет место переход энергии из источника в систему и обратно.* Только при $\Omega = \omega$ амплитуды обоих видов энергии одинаковы и полная энергия неизменна во времени. При $\Omega > \omega$ $W_k > W_п$ при $\Omega < \omega$ $W_k < W_п$.

Кинетическая энергия максимальна при максимальной амплитуде колебательной скорости системы, то есть при $\Omega = \omega$ при любом коэффициенте затухания.

Потенциальная энергия максимальна при максимальной амплитуде смещения, то есть при $\Omega = \sqrt{\omega^2 - 2a^2}$.

2. Электрический контур

Вопрос об энергии при вынужденных колебаниях в электрическом контуре рассмотрите самостоятельно, пользуясь методом электромеханических аналогий (см. таблицу на стр. 19)

3. Отставание по фазе вынужденных колебаний от колебаний вынуждающей силы

В выражениях (7.6) и (7.7) различие в фазах вынужденных колебаний вынуждающей силы было предусмотрено введением начальной фазы T. При этом начальная фаза колебаний вынуждающей силы в (7.4) и (7.5) была принята равной нулю. Поэтому величина W является разностью фаз колебаний вынуждающей силы и вынужденных колебаний системы.

Согласно (7.13)

$$tg\Psi = \frac{2a\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}$$

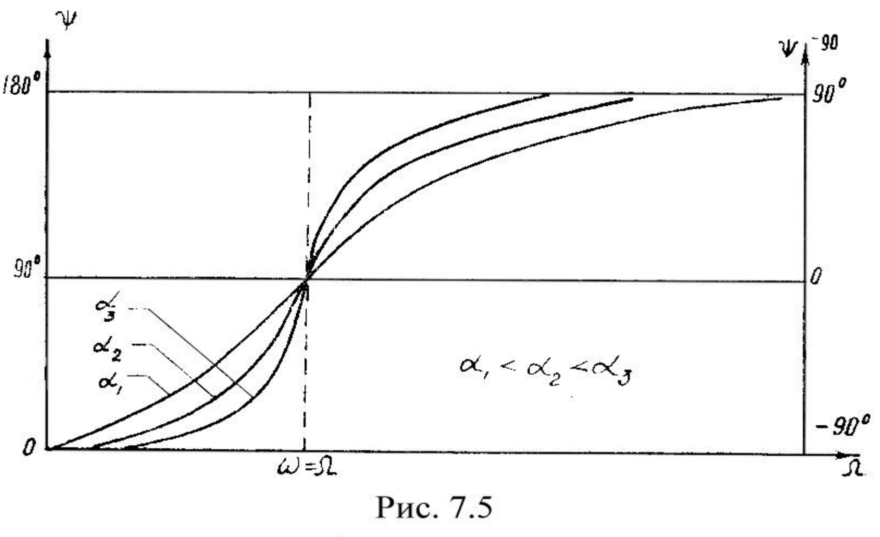

Рис. 7.5

На рис. 7.5 построено семейство кривых, изображающих зависимость Ψ от Ω при различных значениях коэффициента затух. a

Из формулы (7.13) видно, что отставание по фазе $\Psi = 90°$ при $\Omega = \omega$ имеет место при любых значениях коэффициента затухания и справедливо даже для апериодической системы.

При этом, как указано выше, кинетическая энергия системы максимальная, то есть передача энергии системе от источника наиболее эффектна.

Это обстоятельство легко понять, рассмотрев при $\Psi = 90°$ законы изменения во времени смещения x системы, ее скорости $\dot{x}$ и ускорения $\ddot{x}$, которое сообщает вынуждающая сила[10]:

$$x = a\sin\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -a\cos\Omega t,$$

$$\dot{x} = a\sin t,$$

$$\ddot{x}_F = \frac{F}{m} = \frac{F_{max}}{m}\sin\Omega t.$$

На рис. 7.6 показаны графики зависимости $F, x, \dot{x}, \text{и}\ \ddot{x}_F$ от времени.

При $\Omega = \omega$ колебания скорости $\dot{x}$ происходят в той же фазе, что и колебания вынуждающей силы F, и ускорение $\ddot{x}_F$ совпадает по направлению со скоростью в любой момент времени. Очевидно, что при этом условии вынуждающая сила наиболее эффективно увеличивает скорость системы, следовательно, ее кинетическую энергию. При $\Omega < \omega$ колебания вынуждающей силы отстают по фазе от колебаний скорости системы; при $\Omega > \omega$ — опережают их (рис. 7.5).

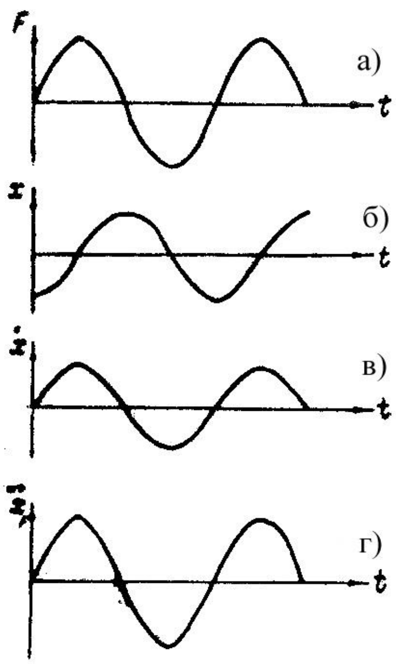

Рис. 7.6

Отсюда можно сделать вывод: резонанс наступает только в том случае, если форма функции, определяющей колебания смещения, и форма производной этой функции, определяющей колебания скорости, одна и та же. Это условие выполняется только в случае синусоидальных колебаний. Именно поэтому все анализирующие устройства и фильтры (а они работают по резонансному принципу) «разлагают» сложный сигнал по синусоидам, а не по каким-либо другим функциям.

[10] Не полное ускорение $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = \frac{F_{max}\ \sin\Omega t - kx - r\dot{x}}{m}$!

Упражнения

Груз массой 300 г подвешен к пружине, которая растягивается на 1 см под действием силы 200 гс. Вынужд. сила действующая на груз, задана уравнением

$$F = 2\sin 20t\ (H).$$

Коэффициент сопротивления среды 0,2 кг/с.

Написать уравнение вынужденных колебаний груза при установившемся режиме.

Определить частоту вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна.

Решение. Уравнение вынужденных колебаний имеет вид:

$$x = \mathrm{a}\sin(\Omega t - \Psi),$$

Для написания этого уравнения необходимо определить амплитуду a вынужденных колебаний, отставание по фазе Ψ вынужденных колебаний от колебаний вынуждающей силы и частоту Ω вынужденных колебаний.

Амплитуда и отставание по фазе вынужденных колебаний зависят от частоты вынуждающей силы по (7.12) и (7.13).

$$a = \frac{F_{max}}{m\cdot\sqrt{\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+4a^2\Omega^2}},$$

$$tg\Psi = \frac{2a\Omega}{\omega^2-\Omega^2}$$

Величины Ω и F_{max} легко определить из заданной функции $F = F(t)$

$$F_{max} = 2H;\ \Omega = 20\ \text{рад/с},$$

величины ω и a можно рассчитать по данным задачи:

$m = 300$ г $= 0{,}3$ кг; $k = 200$ гс/см $= 200H$/м; $r = 0{,}2$ кг/с —

$$\omega\sqrt{\frac{200}{0{,}3}}\ \text{рад/с} \simeq 27\ \text{рад/с};$$

$$a = \frac{0{,}2}{2\cdot 0{,}3}c^{-1} \simeq 0{,}3\ c^{-1}$$

Подставив вычисленные величины ω и a получим:

$$a = \frac{2}{0{,}3\sqrt{(27^2-20^2)^2+4\cdot 0{,}3^2\cdot 20^2}}\text{м} \simeq 2\cdot 10^{-2}\text{м};$$

$$tg\Psi = \frac{2\cdot 0{,}3\cdot 20}{27^2-20^2} = 3{,}6\cdot 10^{-2};\ \Psi = 3{,}6\cdot 10^{-2}\ \text{рад}.$$

Уравнение вынужденных колебаний:

$$x = 2\cdot 10^{-2}\sin(30t - 3{,}6\cdot 10^{-2})\quad (\text{м}).$$

Амплитуда вынужденных колебаний максимальна при условии:

$$\Omega_{\mathrm{a}_{\max}} = \sqrt{\omega^2 - 2\mathrm{a}^2},$$

$$\Omega_{\mathrm{a}_{\max}} = \sqrt{27^2 - 2\cdot 0{,}3^2}\ \text{рад/с}.$$

Так как $2\cdot 0{,}3^2 \ll 27^2$, амплитуда вынужденных колебаний максимальна при условии $\Omega \simeq \omega$.

Задачи для самостоятельного решения

№ 42—17.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Тело совершает гармонические колебания по закону

$x = 3\sin 10\,(t + 0{,}5)$ (см).

Определить:

1) амплитуду, период и начальную фазу колебаний
2) скорость и ускорение тела в момент времени $t = \frac{T}{3}$,

2. Амплитуда колебаний точки 5 см, частота 2 Гц. В начальный момент времени смещение точки от положения равновесия равно 2 см.

Написать уравнение колебаний точки.

Определить скорость и ускорение точки в момент времени t =T/4.

3. Определить скорость, которую будет иметь точка, совершающая гармоническое колебание, в тот момент времени, когда смещение равно половине максимального. Частота колебаний 2 Гц. Амплитуда 5 см. В начальный момент времени смещение точки равно нулю.

4. Амплитуда колебаний материальной точки 5 см, период 0,2 с, начальная фаза равна нулю. Какова скорость точки в момент, когда ее смещение равно 3 см?

5. Определить амплитуду и начальную фазу колебания, имеющею частоту 4 Гц, если начальная скорость равна 86,5 см/с, а начальное смещение

$$x_{t=0} = -2\text{ см}$$

6. Тело весом 100 гс подвешено к пружине, которая растягивается на 1 см под действием силы 20 гс (весом пружины пренебречь).

Амплитуда колебаний 10 см.

Написать уравнение вертикальных колебаний тела. В момент начала отсчета времени смещение тела 2 см.

7. К пружине прикреплен груз весом 500 гс. Пружина растягивается на 1 см под действием силы 10 гс. Весом пружины пренебречь.

Написать уравнение вертикальных колебаний этого груза, если в момент начала отчета времени его скорость 10 см/с и смещение 2 см.

8. Шарик массой m подвешен на двух последовательно соединенных пружинах с коэффициентами упругости k_1 и k_2.

Определить период его вертикальных колебании.

9. В момент времени t =0 частица начинает двигаться вдоль оси x так, что проекция ее скорости изменяется по закону

$\dot{x} = 35\cos \pi t$ см/с.

Определить путь, который пройдет эта частица за первые $t = 2{,}80$ с после начала движения.

10. На горизонтальной пружине укреплено тело массой 10 кг, лежащее на гладком столе, по которому оно может скользить без трения. В это тело попадает и застревает в нем пуля массой 10 г, летящая горизонтально со скоростью 500 м/с, направленной вдоль оси пружины. Тело с застрявшей в нем пулей начинает колебаться с амплитудой 10 см.
Определить период колебаний тела.

11. Закон изменения во времени разности потенциалов на обкладках конденсаторов задан в виде:

$U = 50 \cos 10^4 \pi t$ (В).

Емкость конденсатора 10^{-5} Ф.

Определить: 1) индуктивность контура, 2) закон изменения во времени тока в контуре.

12. Конденсатор емкостью 0,03 мкФ, катушка индуктивностью 0,5 Гн и источник, ЭДС которого 100 В, соединены, как показано на рис. 2.2. Сопротивлением контура можно пренебречь. После зарядки конденсатора от источника ключ 5 замыкается.

Написать закон изменения во времени разности потенциалов на обкладках конденсатора и силы тока в контуре. Считать, что при $t = 0 q = q_{max}$.

13. На середину плавающей в воде льдины, имеющей форму параллелепипеда размером 3x2x0,3 м^3 вскакивает человек, весящий 60 кгс. Плотнось льда 0,9 г/см^3.

Определить период вертикальных колебаний, которые будет совершать льдина (трением пренебречь).

14. Определить период колебания 120 г ртути, находящейся в U образной трубке.

Площадь сечения канала трубки 0,3 см^2.

Зависит ли период колебаний от рода жидкости, налитой в трубку? Рассмотреть два случая: 1) массы разных жидкостей одинаковы, 2) объемы жидкостей одинаковы.

15. Шар катается по дну сферичеекой чаши. Радиус чаши R, радиус шара r.

Считая движение шара гармоническим колебанием, определить период этого колебания.

16. Частица массой m находится в одномерном потенциальном поле, где ее потенциальная энергия зависит от координаты, как $U(x) = U_0(1 - \cos bx)$, где U_0 и b — некоторые постоянные.
Определить период малых колебаний частицы около положения равновесия.

17. К пружине подвешены два груза А и В. Груз А внезапно обрывается.

Определить период и полную энергию колебания груза В, если груз А + В растягивает пружину на 5 см. Вес груза А равен 2 кгс, вес груза В равен 500 гс.

18. Уравнение колебаний тела массой 10 г имеет вид:

$$x = 10\sin(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{3}) \text{ (см)}$$

Определить: 1) максимальную силу, действующую на тело,
2) полную энергию тела.

19. Уравнение гармонического колебания тела массой 10 г задано в виде

$$x = 3\sin 2\pi(0{,}5t + 0{,}2) \text{ (см)}.$$

Определить силу, действующую на тело, кинетическую и потенциальную энергию тела в момент времени t =2 с, полную энергию тела.

20. Уравнение колебания тела массой 10 г имеет вид:

$$x = 5\sin\frac{\pi}{4}(t + 1) \text{ (см)}.$$

Определить: 1) силу, действующую на тело в момент времени $t = \frac{T}{4}$,
2) закон изменения во времени кинетической и потенциальной энергии тела,
3) полную энергию тела.

21. Полная энергия тела, совершающего гармоническое колебательное движение, равна 500 эрг, максимальная сила действующая на тело, равна 250 дин.

Написать уравнение движения этого тела. Начальная фаза 60°, частота колебания 0,5 Гц.

22. Закон изменения разности потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре имеет вид:

$$U = 100\sin 10^3\pi t \quad \text{(В)}.$$

Емкость конденсатора 10 мкФ.

Определить:

1) индуктивность контура,
2) закон изменения силы тока в контуре,
3) во сколько раз отличаются энергия электрического поля и энергия магнитного поля в момент времени t =T/3.

23. Полная энергия колебательного контура 500 эрг. Емкость конденсатора 0,25 мкФ, индуктивность катушки 0,5 Гп.
Сопротивлением можно пренебречь.
Написать закон изменения силы тока в контуре и разности потенциалов на обкладках конденсатора.

24. Уравнение затухающего колебания тела массой 100 г имеет вид:

$$x = 6x^{-0,2t} \sin\frac{\pi}{4}t \text{ см.}$$

Определить:

1) собственную частоту колебаний тела,
2) логарифмический декремент,
3) коэффициент сопротивления среды,
4) амплитуду в момент времени t =10 с.

25. Груз весом 50 гс, прикрепленный к невесовой пружине жесткостью 100 дин/см, совершает колебания в среде, имея коэффициент сопротивления 40 г/с. Начальная амплитуда колебаний 3 см, начальная фаза 30°.

Написать уравнение колебаний груза.

Определить, во сколько раз изменится амплитуда колебаний груза за от по полное колебание.

26. Период затухающего колебания 4 с. Логарифмический декремент 0,8.

Написать уравнение этого колебания. Время отсчитывать от наибольшего смещения, равного 10 см.

Определить время, в течение которого амплитуда уменьшится в 10 раз.

27. Зайчик зеркального гальванометра после отключения совершает свободные затухающие колебания. Первый отброс вправо составляет 10 см. Второй отброс в ту же сторону 8 см. Через сколько колебаний отключения зайчика станут меньше 1 мм?

28. Три последовательных крайних положения стрелки гальванометра пришлись против следующих делений шкалы: $n_1 = 20,0$; $n_2 = 5,6$; $n_3 = 12,8$.

Считая декремент постоянным, определить деление, соответствующее положению равновесия стрелки.

29. Масса системы 100 г, коэффициент упругости 2500 $\frac{\text{дин}}{\text{см}}$.

Каким будет движение системы, если коэффициент сопротивления среды 800 г/с, 1000 г/с, 1200 г/с.

30. Логарифмический декремент 0,008. Частота колебания 60 Гц.

Определить время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшится в 100 раз.

31. Масса тела 100 г, коэффициент упругости 2 Н/м, коэффициент сопротивления 0,4 кг/с. Начальная амплитуда колебаний 4 см, начальное смещение 2 см.

Написать уравнение колебаний.

Определить полную энергию колебаний в момент времени t =0,5 с.

32. Уравнение затухающего колебания системы имеет вид:

$$x = 4e^{-0,1t} \sin\frac{\pi}{4}t \qquad \text{(см)}.$$

Масса системы 100 г.
Определить: 1) логарифмический декремент, 2) собственную частоту системы, 3) работу, произведенную против силы сопротивления за 10 с движения.

33. Заряд на обкладках конденсатора изменяется по закону

$$q = 10^{-100t} \sin 2 \cdot 10^2 t \ \text{(Кл)}$$

Индуктивность контура 0,1 Гн. Определить: 1) емкость и сопротивление контура, 2) во сколько раз изменится энергия электрического поля в контуре за время одного полного колебания.

34. Катушка колебательного контура с параметрами L, C, R = 0 помещена в постоянное магнитное поле, создающее в ней магнитный поток Φ_0.

В момент времени t =0 магнитное поле выключается. Время выключения пренебрежимо мало по сравнению с периодом собственных колебаний контура. Найти закон изменения во времени тока в контуре после выключения поля.

35. Какое наименьшее сопротивление нужно включить в контур с индуктивностью 10^{-3} Гн и емкостью 10^{-6}ф, чтобы разряд был апериодическим?

36. Контур, содержащий емкость и индуктивность, имеет период собственных колебаний $4 \cdot 10^{-5}$ с. Разряд контура переходит из колебательного в апериодический, если в него включить сопротивление 314 Ом.

Определить емкость и индуктивность контура.

37. Батарея, состоящая из двух конденсаторов емкостью 2 мкФ каждый, разряжается через катушку индуктивностью 1 мГн, сопротивление которой 50 Ом.
Возникнут ли при этом колебания, если конденсаторы соединены:
а) параллельно, б) последовательно.

38. Написать уравнение колебания, полученного в результате сложения одинаково направленных колебаний, заданных уравнениями:

$$x_1 = 2\cos(5\pi t + \frac{\pi}{2}) \qquad \text{(см)}$$

$$x_2 = 3\sin(5\pi t + \frac{\pi}{4}) \qquad \text{(см)}.$$

39. Точка массой 10 г участвует в двух окинаково направленных колебаниях, заданных уравнениями:

$$x_1 = 2\sin\pi\,(3t + \frac{1}{6}) \qquad \text{(см)},$$

$$x_2 = 3\sin\pi\,(3t + \frac{1}{3}) \qquad \text{(см)}.$$

Определить: 1) смещение от положения равновесия, скорость и ускорение точки в'момент времени t =T/3, 2) полную энергию точки.

40. Точка участвует в двух колебаниях одинакового периода с одинаковыми начальными фазами, равными нулю. Амплитуды колебаний 5 см и 8 см.
Масса точки 10 г, частота 5 Гц.

Определить максимальную скорость и энергию точки в двух случаях:

1) колебания совершаются в одном направлении,
2) колебания взаимно перпендикулярны.

41. Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях:
$x = \sin 2t$ (см) и $y = \cos 2t$ (см).
Найти уравнение траектории.

42. Тело массой 400 г подвешено к пружине, которая растягивается на 1 см под действием силы 40 гс. Вынуждающая сила задана уравнением F = 2 sin 20 t (Н). Коэффициент сопротивления 200 г/с.
Определить:

1) логарифмический декремент колеблющегося тела.
2) собственную частоту колебаний,
3) резонансную амплитуду.

43. Груз массой 0,5 кг, подвешенный на пружине, коэффициент упругости которой 50 гс/см, повешен в масло. Коэффициент трения в масле 0,5 кг/с.
На верхний конец пружины действуют вынуждающая сила, изменяющаяся по закону $F = 2\sin\Omega t$ (кгс).
Определить:

1) при какой частоте вынуждающей силы амплитуда колебаний груза максимальна, чему равна максимальная амплитуда,
2) при какой частоте вынуждающей силы максимальна скорость груза.

44. Амплитуды смещений вынужденных гармонических колебаний при частотах Ω_1 = 400 рад/с и Ω_2 = 600 рад/с равны между собой.
Определить частоту, при которой амплитуда смещения максимальна.

45. При частотах вынуждающей гармонической силы Ω_1 и Ω_2 амплитуда скорости частицы равна половине максимального значения.

Определить частоту, соответствующую резонансу скорости.

46. Шарик массой 50 г подвешен на невесомой пружине жесткостью 20 Н/м. Под действием вынуждающей вертикальной гармонической силы с частотой 25 рад/с шарик совершает установившиеся колебания с амплитудой 1,3 см. При этом смещение шарика отстает по фазе от колебаний вынуждающей силы на $3/4\pi$.

Определить работу вынуждающей силы за период колебаний.

47. В контур, индуктивность которого 0,1 Гн, емкость 0,2 мкФ и сопротивление 200 Ом включена ЭДС, изменяющаяся по синусоидальному закону.

Определить:

1) частоту колебаний ЭДС, при которой максимальна амплитуда разности потенциалов между обкладками конденсатора,
2) частоту колебаний ЭДС, при которой максимальна амплитуда силы тока.