

СИНТЕЗ ПАССИВНЫХ ЦЕПЕЙ

Е. А. ГИЛЛЕМИН

SYNTHESIS of PASSIVE NETWORKS

Theory and Methods Appropriate to
the Realization and Approximation Problems

Ernst A. Guillemin

PROFESSOR OF ELECTRICAL COMMUNICATION
DEPARTMENT OF ELECTRICAL ENGINEERING
MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

NEW YORK JOHN WILEY & SONS, INC
London Chapman & Hall, Limited

Э. А. ГИЛЛЕМИН

СИНТЕЗ ПАССИВНЫХ ЦЕПЕЙ

**перевод с английского Н. И. ВИНОГРАДОВОЙ,
В. В. УСТИНОВА, Р. А. ШАЛКЕВИЧ**

**под редакцией
доктора технических наук М. М. АЙЗИНОВА**

УДК 621.3.011.1

СИНТЕЗ ПАССИВНЫХ ЦЕПЕЙ

Перевод с английского под ред. Айзинова М. М.

Год выпуска 1970.

Рассматривается широкий круг вопросов, связанных с синтезом электрических цепей. Даны как традиционные, классические методы синтеза двухполюсных и четырехполюсных цепей, так и современные методы синтеза, развитие которых во многом обязано исследованиям автора.

Методы синтеза цепей изложены последовательно и четко. Многочисленные примеры и задачи завершают каждую главу.

Книга рассчитана на научных работников и инженеров, работающих в области синтеза электрических цепей. Она может быть также весьма полезной студентам и аспирантам электротехнической и радиотехнической специальностей.

Таблиц 73. Иллюстраций 311. Библиографий 2.

От редактора перевода

В последние годы заметно возрос интерес к теории электрических цепей. Дело, видимо, в том, что основные идеи и методы теории цепей применимы, помимо электрических, и к цепям другой физической природы. Представляется возможным распространить эту теорию на очень широкий круг цепей и систем не только линейных постоянных, но и параметрических (а возможно, и нелинейных). Наконец, многого можно ожидать при использовании ее методов в теории сигналов. Вполне вероятно, что в ближайшее время будет создана единая теория сигналов и цепей.

Имеется и ряд других причин, к числу которых, несомненно, относится резкое увеличение количества кибернетических устройств, составленных из большого числа сложных электрических цепей.

Одной из наиболее важных и далеко не полностью решенных в современной теории цепей является проблема их синтеза. Синтезу электрических цепей посвящены труды советских ученых — П. К. Акульшина, Г. И. Атабекова, А. Ф. Белецкого, Б. В. Булгакова, Н. С. Кочанова, П. И. Матханова, В. А. Тафта и др. Однако в большинстве из них рассматриваются лишь некоторые специальные вопросы.

Предлагаемая вниманию читателей монография принадлежит американскому ученому Э. А. Гиллемину — автору ряда фундаментальных работ по теории цепей («Цепи связи», «Математический аппарат теории цепей», «Введение в теорию цепей», «Синтез пассивных цепей», «Теория линейных систем») и множества статей. К сожалению, ни одна из его книг не была переведена на русский язык, что, разумеется, затрудняло знакомство с ними советских читателей.

По инициативе издательства «Связь» впервые в русском переводе появится один из наиболее ценных трудов Гиллемина — «Синтез пассивных цепей», в котором подробно рассмотрены обе задачи синтеза: аппроксимация и реализация.

Принципы, положенные в основу книги, изложены в предисловии автора.

Переводчики и редактор стремились сохранить максимальную близость к оригиналу и возможно более точно передать все оттенки мысли автора. Поэтому, хотя в основном использованная терминология соответствует принятой в отечественной литературе, в некоторых случаях указывается также терминология, применяемая автором. Оставлены без изменения все обозначения математических символов.

Однако ряд отступлений от оригинала все же имеется. Так, вместо подстрочных ссылок на цитируемую литературу было сочтено целесообразным дать список литературы в конце книги. Кроме трудов, на которые ссылается автор, в эту библиографию добавлены работы советских ученых. Для уменьшения объема книги пришлось значительно сократить предисловие автора и уменьшить число приводимых им задач. Все задачи вместе с приложением к главе X перенесены в конец книги. При редактировании были устранены некоторые замеченные неточности и опечатки.

Монография Гиллемина несомненно принесет пользу научным работникам и инженерам, студентам и аспирантам.

М. АЙЗИНОВ

Из предисловия автора

...Теория линейных электрических цепей, по существу, является теорией линейных систем и поэтому находит применение во многих областях, помимо той, в которой она возникла и развивалась, достигнув современного состояния. Вторая причина, имеющая не меньшее значение, заключается в той важной роли, какую теория линейных пассивных цепей играет при рассмотрении более широкого класса задач, связанных с неактивными, односторонними, нелинейными и статистическими цепями. Практически все, что нам известно о том, как проводить исследования в этих областях, основано на методах, позволяющих использовать теорию линейных пассивных двусторонних цепей.

Касаясь предмета, которому посвящена эта книга, важно в самом начале отметить, что синтез и анализ различаются по двум основным признакам:

- а) не обязательно существует решение поставленной задачи и
- б) если оно и существует, то не является единственным; теоретически возможно бесконечное количество цепей, причем все они имеют одинаковую функцию или функции. Таким образом, подход к проблеме синтеза следует начинать с установления необходимых условий существования решения и эффективных способов определения того, удовлетворяются ли эти условия в данной ситуации. Неединственность решения приводит нас к малоизученным вопросам определения эквивалентных цепей — дополнительной задаче, которую в настоящее время приходится считать далеко еще не решенной.

Подход к проблеме синтеза усложняется также тем, что исходные данные, относящиеся к возбуждению и реакции, могут быть представлены в различных формах: в форме временных либо частотных функций. Кроме того, в любом из указанных случаев требуемую характеристику цепи можно описать графически или аналитически, либо частично аналитически, либо с помощью различных комбинаций этих способов.

Известные методы реализации конечных цепей с сосредоточенными параметрами удается приспособить к требованиям, предъявляемым к характеристике, лишь в том случае, когда они выражены в форме рациональных функций комплексной частоты, например, в виде входного сопротивления или сопротивления передачи. Следовательно, прежде чем получить решение задачи синтеза, необходимо придать предъявляемым требованиям эту форму. На этапе, где характеристики могут рассматриваться как во временной, так и в частотной областях, по существу, производится аппроксимация с заданными допусками, но обычно без ограничений в других отношениях, так что опять существует любое число возможных решений.

Для того чтобы произвести обоснованный выбор, нужно сначала основательно познакомиться с методами реализации, поскольку тогда появляется возможность управления такими важными практическими факторами, как экономия числа элементов, структурная форма результирующей цепи и возможное влияние паразитных элементов.

Это и определило расположение материала в книге.

В главах I—XIII рассматриваются теория и методы реализации, а в последних двух главах, XIV и XV — задача аппроксимации соответственно в частотной и временной областях. Рассмотрение теории реализации начинается с изучения свойств функций сопротивлений, формулирования необходимых условий реализации и методов проверки данной функции для того, чтобы установить, удовлетворяются ли поставленные условия. Этим вопросам посвящены две первые главы.

В главе I исследуются функции цепей общего вида (RLC цепи), в главе II — специфические особенности двухэлементных цепей. Синтез входного сопротивления LC цепей без потерь изложен в главе III, аналогичные методы, применимые к RC и RL цепям, — в главе IV. Полученные результаты наглядно показывают неоднозначность методов реализации, а также наличие свойства обратимости,

проявляющегося в том, что реализуемая входная функция обладает одинаковыми особенностями как в прямом, так и в обратном направлениях. Эти вопросы рассматриваются в главе V.

Проблема реализации цепей общего вида (RLC) характеризуется некоторыми существенными оттенками. Вытекающее отсюда разнообразие возможных способов ее решения вызывает необходимость предварительного изучения дополнительных вопросов, в том числе некоторых свойств четырехполюсников, методов реализации данных цепей, в том случае, когда они не имеют потерь, и построение сопротивления по его вещественной части, рассматриваемой на мнимой оси. Эти вопросы анализируются в главах VI, VII и VIII соответственно. В главе VIII, кроме того, исследуются методы построения сопротивления по его модулю, заданному на мнимой оси, или углу, а также особенность этих методов, если допускается существование импульсов у заданной вещественной части на мнимой оси.

В главе IX описаны классические методы синтеза входных сопротивлений по Бруне и Дарлингтону, а в главе X — методы реализации по Ботту и Даффину и по Мията, позволяющие устранить из схем взаимные индуктивности. Второй метод, в отличие от первого метода, неприменимого в общих случаях, изложен более подробно, чем это сделал сам Мията. Метод Ботта и Даффина уточнен с учетом результатов исследований, проведенных автором данной книги.

В главах XI и XII рассматриваются вопросы синтеза передаточных функций, причем в главе XI описаны различные классические методы, а в главе XII — некоторые другие методы, а также излагаются более общие точки зрения. Синтезу передаточной функции RC цепи посвящена глава XIII.

На этом этапе уже создается соответствующая база для изучения задачи аппроксимации. Ее исследование в частотной области, приведенное в главе XIV, основано на использовании функций Баттерворта, Чебышева и эллиптических, а также метода Фурье и методов полубесконечных наклонов и потенциальной аналогии. Синтез во временной области, отличие которого сводится лишь к особенностям решения соответствующей задачи аппроксимации, рассматривается в последней, XV главе, в которую включен и метод Фурье, позволяющий использовать известные способы непосредственного контроля погрешности во временной области.

На протяжении всей книги, но особенно в последней главе и в тех главах, где рассматриваются вопросы синтеза передаточной функции, пришлось опустить значительный материал, углубляющий и расширяющий обсуждение этих вопросов. Однако указанный материал менее важен как для практического применения, так и для методики. . .

Э. А. ГИЛЛЕМИН

Свойства входных сопротивлений и сопротивлений передачи

1.1. Физические соображения

Из рассмотрения поведения цепей в переходном или свободном режимах (например, реакций цепей на импульсное возбуждение) известно, что нули и полюсы функции входного сопротивления отождествляются с комплексными собственными частотами соответствующей цепи при ограничениях, накладываемых в режиме короткого замыкания и холостого хода. Таким образом, если

$$Z(s) = \frac{H(s-s_1)(s-s_3)\dots}{(s-s_2)(s-s_4)\dots} \quad (1.1)$$

представляет собой сопротивление линейной, пассивной цепи N (рис. 1.1) с сосредоточенными параметрами, то комплексные частоты s_1, s_3, \dots являются собственными частотами этой цепи, когда входные зажимы замкнуты накоротко, а s_2, s_4, \dots — собственными частотами той же цепи, когда входные зажимы разомкнуты. Другими словами, если цепь с замкнутыми накоротко входными зажимами возбуждается каким-либо образом (например, зарядом емкостей некоторым количеством электричества), то выражение для тока на ее входе имеет вид

$$i_1(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_3 e^{s_3 t} + \dots \quad (1.2)$$

В случае цепи с разомкнутыми зажимами выражение для напряжения на ее входе имеет вид

$$e_1(t) = B_2 e^{s_2 t} + B_4 e^{s_4 t} + \dots \quad (1.3)$$

Назовем s_1, s_3, \dots собственными частотами цепи в режиме короткого замыкания, а s_2, s_4, \dots ее собственными частотами в режиме холостого хода. Таким образом, нули и полюсы сопротивления $Z(s)$, измеренного со стороны определенных входных зажимов, представляют собой собственные частоты цепи соответственно в

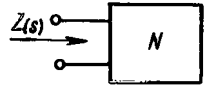


Рис. 1.1

режиме короткого замыкания и холостого хода. Выражение (I.2) для тока можно рассматривать как реакцию цепи на приложенный импульс напряжения, а выражение (I.3) для напряжения — как реакцию на приложенный импульс тока.

Из физической интерпретации критических частот входного сопротивления очевидно, что, если подключиться непосредственно к любому выбранному парам узлов цепи (прямые входы), все соответствующие сопротивления будут иметь одинаковые полюсы s_2, s_4, \dots , поскольку они представляют собой собственные частоты той же цепи при тех же условиях. Аналогично, если замкнуть накоротко данную пару зажимов и создать новый вход при помощи разреза какой-либо ветви (разрезные входы), то сопротивление в любой другой паре зажимов будет иметь такие же нули s_1, s_3, \dots . Если использовать разрезные входы, но не замыкать накоротко первоначальную пару зажимов, то нулями соответствующих сопротивлений будут s_2, s_4, \dots , т. е. точно такие же полюсы, как у сопротивлений прямых входов.

Когда одновременно используется несколько прямых входов, можно рассматривать как сопротивления передачи цепи в режиме холостого хода, так и входные сопротивления, причем все они имеют одинаковые полюсы. Если же одновременно используется несколько разрезных входов, то целесообразно рассматривать входные проводимости и проводимости передачи цепи в режиме короткого замыкания, причем все их полюсы будут одинаковыми и выражены через s_1, s_3, \dots .

При этом, подобно любым общим утверждениям относительно свойств цепи, предполагается, конечно, что в ней никоим образом не могут возникнуть колебания собственных частот, не возбуждаемые в одной из ее ветвей. Однако и подобные цепи всегда можно построить так, чтобы высказанные утверждения остались справедливыми. Действительно, если данное сопротивление не будет иметь определенного полюса (вследствие того, что соответствующее колебание собственной частоты не возбуждается при воздействии рассматриваемой входной функции), то можно считать, что сопротивление имеет этот полюс, но с нулевым вычетом в нем.

[Мы будем рассматривать лишь пассивные цепи. В этом случае, очевидно, функции (I.2) и (I.3) должны затухать с течением времени и, следовательно, все критические частоты сопротивления (I.1) — иметь отрицательную вещественную часть, а нули и полюсы входного сопротивления — лежать в левой полуплоскости комплексных частот. Таким образом, это основное свойство входных сопротивлений сразу же становится очевидным из физического рассмотрения поведения цепей.

Что касается сопротивлений передачи в режиме холостого хода или проводимостей передачи в режиме короткого замыкания, то приведенное выше рассуждение не поясняет расположения их нулей, которые никак не связаны с собственными частотами цепи. С этими частотами свя-

заны только полюсы передаточных функций (сопротивление в режиме холостого хода или проводимость в режиме короткого замыкания, а также отношение выходной функции к входной). Вполне понятно, что указанные полюсы, подобно полюсам соответствующих входных функций, должны лежать в левой полуплоскости комплексных частот. Это условие, вытекающее из того факта, что переходная характеристика пассивной цепи должна затухать со временем, представляет собой одновременно *требование устойчивости*. Система, независимо от того пассивна она или нет, не может иметь устойчивую характеристику (т. е. такую характеристику, которая не станет изменяться сама по себе, без внешнего воздействия), если соответствующая функция системы (входная или передаточная, сопротивление или проводимость или безразмерный коэффициент передачи) не будет аналитической в правой полуплоскости комплексных частот.

Что касается передаточных функций, то именно это положение и является для них определяющим, за исключением очевидного требования ограничения мнимой осью, куда бы ни включались потери. С другой стороны, входное сопротивление (или проводимость) не может быть достаточно просто описано путем ограничения расположения его нулей и полюсов только левой полуплоскостью. Прежде всего, числа конечных нулей и полюсов могут отличаться не более чем на единицу. Это эквивалентно тому, что асимптотическое поведение функции на очень малых или очень больших частотах может быть сведено только к одному из трех ее видов, а именно: к постоянной; к постоянной, помноженной на частоту s , и к постоянной, деленной на частоту s . Физически причина такого ограничения, накладываемого на асимптотическое поведение функции, является результатом того, что на очень высоких или на очень низких частотах цепь вырождается в одну из трех ее постоянных: R , L или C . В противоположность этому передаточная функция может иметь значительно больше конечных полюсов, чем нулей (требования к ограничению исключают обратную ситуацию). Фактически ее числитель может быть сведен к постоянной, а знаменатель — иметь любую конечную степень. Все нули передаточной функции тогда лежат на бесконечности, а ее полюсы конечны. Входная функция не имеет такой свободы, причем важно также напомнить, что она является функцией реакции или системной функцией (отношение выходной функции к входной) независимо от того, рассматривается ли передача в прямом направлении или в обратном. С другой стороны, при обратном направлении передачи передаточная функция уже не является более функцией реакции (в случае входной функции возбуждение и реакция не могут меняться ролями, когда эти две зависимые переменные относятся к различным точкам входа). При обращении передаточной функции (т. е. для функции, обратной передаточной, у которой степень полинома знаменателя в несколько раз больше, чем степень полинома числителя) известные граничные условия нарушаются. Для вход-

ной функции, степени полиномов числителя и знаменателя которой отличаются на единицу, граничные условия также нарушаются, но она, по крайней мере, имеет простые полюсы на мнимой оси, допустимые и в предельном случае (без учета потерь). В том же смысле простые полюсы на мнимой оси допускаются и в передаточной функции, но это практически имеет меньшее значение, чем в случае входной функции (см. § 1.6).

Поскольку входная функция должна быть функцией реакции при передаче в прямом или обратном направлении, то условия устойчивости, очевидно, требуют, чтобы и нули и полюсы имели отрицательные вещественные части. На нули передаточной функции такие ограничения не накладываются.

Входная функция ограничивается далее пассивностью схемы. Для всех точек на мнимой оси, соответствующих синусоидальному поведению при устойчивой амплитуде, средняя энергия, поглощаемая цепью, положительна. Следовательно, вещественная часть входной функции должна быть положительной на всей мнимой оси плоскости комплексных частот. (Заметим, что отрицательный знак вещественной части передаточной функции отнюдь не означает отрицательного поглощения средней энергии ни цепью, ни нагрузочным сопротивлением.) Поскольку вещественная часть сопротивления должна оставаться положительной, необходимо и достаточно, чтобы угол этого сопротивления ограничивался диапазоном значений от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Нетрудно определить, что это ограничение, налагаемое на угол, может быть нарушено даже в случае равенства конечных нулей и полюсов и расположения их в левой полуплоскости. Можно представить себе в этой связи скопление нулей на отрицательной вещественной полуоси вблизи начала координат и скопление полюсов на значительном расстоянии от него. Углы частотных множителей, обусловленные нулями, тогда быстро суммируются с увеличением частоты, в то время как углы, обусловленные полюсами, не суммируются, пока не будут достигнуты значительно более высокие частоты. Хотя чистый прирост угла (для всего частотного спектра) равен нулю при одинаковом числе конечных нулей и полюсов, величина угла может во много раз превышать $\frac{\pi}{2}$ на некоторых конечных частотах, отличных от нуля.

Поэтому ограничения, накладываемые на расположение полюсов и нулей, и соотношения степеней полиномов числителя и знаменателя входной функции не являются достаточными. Кроме того, требуется, чтобы либо вещественная часть оставалась положительной, либо значение угла оставалось в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ во всех точках мнимой оси.

Как будет показано ниже, совместное выполнение этих необходимых условий реализуемости входных сопротивлений или проводимостей является также достаточным.

1.2. Аналитические основы изучения свойств функций сопротивления или проводимости

Эффективный аналитический подход при изучении основных свойств входных и передаточных функций основан на использовании энергетических функций соответствующей цепи [1]¹. Используя метод контурных токов, получим систему уравнений

$$\sum_{i, k=1}^p z_{ik} I_i \bar{I}_k = sT_0 + F_0 + \frac{V_0}{s}, \quad (1.4)$$

где z_{ik} — входные сопротивления и сопротивления передачи цепи в режиме холостого хода, имеющей l геометрически независимых контуров, в которых протекают контурные токи с комплексными амплитудами I_1, \dots, I_l . Число доступных пар, образованных соответствующим выбором из рассматриваемых контуров, равно p .

Так называемые «энергетические функции» [1]² математически определяются следующими выражениями:

$$T_0 = \sum_{i, k=1}^l L_{ik} I_i \bar{I}_k; \quad (1.5)$$

$$F_0 = \sum_{i, k=1}^l R_{ik} I_i \bar{I}_k; \quad (1.6)$$

$$V_0 = \sum_{i, k=1}^l S_{ik} I_i \bar{I}_k. \quad (1.7)$$

Заметим, что двойное суммирование распространяется здесь на все l контуров, тогда как знак суммы в уравнении (1.4) — только на выбранные пары, к которым относятся z_{ik} . Параметры L_{ik} , R_{ik} и S_{ik} представляют собой соответственно индуктивность, сопротивление и обратную емкость в выбранном контуре.

Если состояние равновесия выразить системой уравнений узловых напряжений, то аналогично для проводимостей получим

$$\sum_{i, k=1}^p y_{ik} E_i \bar{E}_k = sV_0^* + F_0^* + \frac{T_0^*}{s}. \quad (1.8)$$

Здесь y_{ik} — входные проводимости и проводимости передачи цепи в режиме короткого замыкания относительно выбранных p нагрузочных пар или пар узлов, которые представляют собой любые или все n геометрически независимые пары узлов цепи. Переменные в

¹ Такой подход к проблеме впервые был сформулирован в 1930 г. О. Бруне. См. также [49, 50, 51] (прим. ред.).

² В работе [1], однако, T_0 имеет размерность энергии. См. также [49, 50, 51] (прим. ред.).

выражении (I.8) представляют собой ряд напряжений узловых пар с комплексными амплитудами E_1, \dots, E_n , а энергетические функции для данного случая определяются выражениями:

$$V_0^* = \sum_{i, k=1}^n C_{ik} E_i \bar{E}_k; \quad (I.9)$$

$$F_0^* = \sum_{i, k=1}^n G_{ik} E_i \bar{E}_k; \quad (I.10)$$

$$T_0^* = \sum_{i, k=1}^n \Gamma_{ik} E_i \bar{E}_k. \quad (I.11)$$

Здесь суммирование распространяется на все пары узлов от 1 до n , тогда как суммирование в ур-нии (I.8) — только на p пар, которые выбраны в качестве входов. Параметры C_{ik} , G_{ik} и Γ_{ik} представляют собой емкость, проводимость и обратную индуктивность в соответствующих парах узлов.

Комплексная частота s появляется либо в ур-нии (I.4), либо в ур-нии (I.8). Она более широко используется вследствие того, что сопротивления z_{ik} и проводимости y_{ik} являются ее функциями, а комплексные амплитуды токов I_1, \dots, I_l или напряжений E_1, \dots, E_n , найденные из решения соответствующего ряда уравнений равновесия, зависят от комплексной частоты источника или источников возбуждения. Следовательно, когда в (I.4) или (I.8) рассматриваются функции от частотной переменной s , необходимо помнить об их явной и подразумеваемой зависимости от s . В этой связи важнее всего тот факт (см. первую ссылку на стр. 15), что энергетические функции, определяемые ф-лами (I.5), (I.6), (I.7), а также (I.9), (I.10) и (I.11), являются и вещественными и положительными для всех комплексных значений частотной переменной s .

Нетрудно заметить, что функции комплексной частотной переменной s , определяемые ур-ниями (I.4) и (I.8), имеют следующие общие свойства:

- *Функции вещественны, если s вещественно;*
- *Функции имеют положительную вещественную часть, если положительна вещественная часть s .* (I.12)

Функция комплексной переменной, обладающая этими основными свойствами (впервые введенная в синтез цепей О. Бруне), называется *положительной вещественной функцией*. Термин «положительная» указывает на положительный знак ее вещественной части при вещественных положительных значениях s . При этом положительная функция не обязательно имеет вещественную часть при всех вещественных значениях s . Положительные вещественные функции (сокращенно п. в. ф.), определяемые ур-ниями (I.4) и (I.8), являются, таким образом, более ограниченными, чем просто положительные функции. Далее будет показано, что функции вход-

ного сопротивления и проводимости линейных пассивных цепей представляют собой п. в. ф., причем это свойство является необходимым и достаточным для их реализуемости. Ниже мы, кроме того, докажем, что все тонкие особенности поведения указанных функций цепей обнаруживаются именно потому, что они положительны и вещественны.

Поскольку двойные суммы в ур-ниях (I.4) и (I.8) являются п. в. ф., можно сформулировать некоторые свойства входных и передаточных сопротивлений z_{ik} и проводимостей y_{ik} . Прежде всего необходимо устранить трудность, заключающуюся в том, что в этих суммах присутствуют комплексные переменные I_i и E_i . Метод, посредством которого выполняется указанная задача, будет подробно рассмотрен применительно к двойной сумме, определяемой ур-нием (I.4). Однако изложенные положения справедливы также и для ур-ния (I.8).

Запишем комплексную величину I_i в виде

$$I_i = a_i + jb_i, \quad (I.13)$$

где a_i и b_i — вещественные величины, на которые более не накладывается никаких ограничений. Тогда сопряженную величину I_k можно представить в виде

$$\bar{I}_k = a_k - jb_k. \quad (I.14)$$

В результате получается

$$I_i \bar{I}_k = (a_i a_k + b_i b_k) + j(a_k b_i - a_i b_k). \quad (I.15)$$

Подстановка этого выражения в двойную сумму, определяемую ур-нием (I.4), дает

$$\sum_{i,k=1}^p z_{ik} I_i \bar{I}_k = \sum_{i,k=1}^p z_{ik} (a_i a_k + b_i b_k) + j \sum_{i,k=1}^p z_{ik} (a_k b_i - a_i b_k). \quad (I.16)$$

Используя условие симметрии $z_{ik} = z_{ki}$, можно показать, что вторая сумма в правой части рассматриваемого уравнения, равна нулю. Принимая во внимание, что функция в левой части уравнения должна быть п. в. ф. даже в том случае, если токи обусловлены соответствующим образом выбранными, но произвольными источниками возбуждения, ограничения, накладываемые на эту функцию, точно такие же, как и исходные. Они заключаются в том, что функция

$$Z(s) = \sum_{i,k=1}^p z_{ik} x_i x_k \quad (I.17)$$

должна быть п. в. ф. при всех значениях независимых вещественных переменных x_1, \dots, x_p .

Функция $Z(s)$ является квадратичной формой этих переменных с матрицей

$$\begin{bmatrix} z_{11} & \dots & z_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_{p1} & \dots & z_{pp} \end{bmatrix}, \quad (I.18)$$

которая характеризует входные сопротивления и сопротивления передачи цепи с выбранными p парами зажимов в режиме холостого хода. Поскольку коэффициенты z_{ik} матрицы (I.18) являются функциями комплексной частоты s , квадратичная форма $Z(s)$ также является функцией s и, кроме того, функцией вещественных переменных x_1, \dots, x_p . Она должна оставаться п. в. ф. от s для всех вещественных конечных значений этих переменных. Указанное требование накладывает определенные ограничения на z_{ik} .

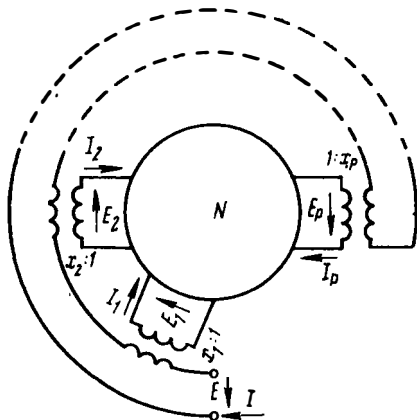


Рис. I.2

Рассмотрим данный вопрос, а также физическую интерпретацию функции $Z(s)$.

На рис. I.2 показана цепь N с p парами зажимов, напряжения и токи на которых соответственно обозначены $E_1, I_1; E_2, I_2; \dots; E_p, I_p$. К каждой паре зажимов подключен идеальный трансформатор с последовательно соединенными вторичными обмотками. Отношения числа витков вторичных

обмоток трансформаторов к числу витков их первичных обмоток обозначены вещественными величинами x_1, \dots, x_p . Поскольку напряжения на вторичных обмотках равны $x_1 E_1; x_2 E_2; \dots; x_p E_p$, то общее напряжение при последовательном соединении этих обмоток определяется выражением

$$E = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \dots + x_p E_p. \quad (I.19)$$

Общий ток вторичных обмоток I связан с различными частными токами посредством коэффициентов трансформации:

$$I_1 = x_1 I; \quad I_2 = x_2 I; \quad \dots; \quad I_p = x_p I. \quad (I.20)$$

В матричной форме два последних уравнения имеют вид

$$E = [x_1 x_2 \dots x_p] \times \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_p \end{bmatrix}; \quad (I.21)$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \times I. \quad (I.22)$$

При использовании матрицы сопротивлений (I.18) уравнения, связывающие напряжения и токи, можно записать так:

$$\begin{bmatrix} z_{11} & \dots & z_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_{p1} & \dots & z_{pp} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_p \end{bmatrix}. \quad (I.23)$$

Если подставить в матрицу-столбец токов эквивалентное выражение, определяемое ур-нием (I.22), а затем умножить обе части уравнения на матрицу-строку

$$[x_1 x_2 \dots x_p], \quad (I.24)$$

то получим с учетом ур-ния (I.21)

$$[x_1 x_2 \dots x_p] \times \begin{bmatrix} z_{11} & \dots & z_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_{p1} & \dots & z_{pp} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \frac{E}{I} = Z(s). \quad (I.25)$$

Левая часть этого уравнения фактически является матрицей, эквивалентной двойной сумме ур-ния (I.17), а отношение $\frac{E}{I}$ представляет собой суммарное сопротивление со стороны последовательного соединения всех вторичных обмоток трансформаторов (см. рис. I.2). Следовательно, функция $Z(s)$, определяемая ур-нием (I.17), имеет простое физическое толкование (впервые данное Бруне в 1930 г.), а именно: суммарное сопротивление создается последовательным соединением p пар зажимов цепи при условии, что каждая пара имеет идеальный трансформатор с независимо регулируемым вещественным коэффициентом трансформации. Если рассмотреть ур-ние (I.17) для случая $p = 1$, то увидим, что любое входное сопротивление должно быть п. в. ф. Из рис. I.2 видно, что цепь с p парами зажимов вырождается при этом в цепь с одной парой зажимов, а функция $Z(s)$ представляет собой входное сопротивление со стороны данных зажимов. Физически ясно, что если рассматриваемое входное сопротивление не будет п. в. ф. при всех значениях вещественных коэффициентов x_1, \dots, x_p , то ряд сопротивлений z_{ik} , определяющий функцию $Z(s)$, не может представлять собой физической цепи. По существу, именно это условие и подразумевают, когда говорят, что функция, определяемая ур-нием (I.17), должна быть п. в. ф. при всех вещественных значениях x_k .

для того, чтобы данный ряд z_{ik} соответствовал входным сопротивлениям и сопротивлениям передачи цепи с p парами зажимов, находящейся в режиме холостого хода.

До сих пор было показано, что указанное условие является лишь необходимым для физической реализуемости. Достаточность его можно доказать, поскольку физическая цепь оказывается действительно осуществимой, если не накладывается никаких других ограничений кроме этого.

Аналогичное рассмотрение применительно к параметрам цепи — проводимостям приводит к функции вида

$$Y(s) = \sum_{i, k=1}^p y_{ik} x_i x_k, \quad (I.26)$$

где y_{ik} — входные проводимости и проводимости передачи цепи с p парами зажимов, находящейся в режиме короткого замыкания. Для этого выражения справедливо такое же физическое толкование, как и для рассмотренного ранее (см. рис. I.2). Используя ту же цепь N , получим матрицу проводимостей

$$\begin{bmatrix} y_{11} & \dots & y_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{p1} & \dots & y_{pp} \end{bmatrix}, \quad (I.27)$$

которая представляет собой матрицу, обратную матрице сопротивлений, выраженной f -лой (I.18).

Полученный результат показывает, что если функция $Z(s)$, определяемая ур-нием (I.17), является п. в. ф. для всех вещественных x_1, \dots, x_p , то она будет такой же функцией и в случае матрицы z , замененной обратной матрицей. Если эту обратную матрицу снова рассматривать как матрицу сопротивлений, то она будет характеризовать вторую цепь с p парами зажимов (в противоположность первоначальной цепи N ее можно обозначить как цепь R), рассматриваемую как обратную для данной цепи N [1]¹.

Таким образом, можно показать, что обратная цепь по отношению к любой данной цепи всегда осуществима, тогда как дуальная ей цепь неосуществима (подробное сравнение дуальных и обратных цепей изложено в работе [1]¹).

I.3. Свойства положительных вещественных функций

Используя соответствующие положения теории функций комплексного переменного, можно подробно сформулировать свойства функций, относящихся к классу п. в. ф. Нетрудно доказать, что п. в. ф. не может иметь полюсов в правой полуплоскости комплексных частот, так как вещественная часть ее изменяет свой алгебраи-

¹ См. также [49, 50, 51] (прим. ред.).

ческий знак по меньшей мере дважды при полном обходе вокруг полюса в непосредственной близости от него. Поскольку в правой полуплоскости вещественная часть п. в. ф. остается положительной, то в данной области, очевидно, вещественная часть не может изменить знака. Поэтому предположение относительно того, что п. в. ф. имеет полюсы в правой полуплоскости, несправедливо. Подробный анализ, подтверждающий такое утверждение, состоит в следующем.

Если функция $Z(s)$ имеет полюс порядка n в точке $s = s_1$, то ее разложение Лорана около этой точки будет

$$Z(s) = \frac{a_{-n}}{(s-s_1)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(s-s_1)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{s-s_1} + a_0 + a_1(s-s_1) + \dots \quad (I.28)$$

Заменив в непосредственной близости от нее ряд доминирующим членом, получим

$$Z(s) \approx \frac{a_{-n}}{(s-s_1)^n}. \quad (I.29)$$

Для комплексного коэффициента a_{-n} можно записать

$$a_{-n} = Ae^{j\varphi}. \quad (I.30)$$

Чтобы упростить прохождение вокруг полюса по концентрической окружности, примем

$$(s-s_1) = \rho e^{j\theta}, \quad (I.31)$$

где ρ — произвольное малое, но не равное нулю число. Тогда для вещественной части функции $Z(s)$ имеем

$$\operatorname{Re} \left(\frac{A}{\rho^n} e^{j(\varphi-n\theta)} \right) = \frac{A}{\rho^n} \cos(n\theta - \varphi). \quad (I.32)$$

Угол φ постоянен, а угол θ изменяется от нуля до 2π , тогда как ρ остается постоянным по мере прохождения вокруг полюса по концентрической окружности. Ясно, что вещественная часть ур-ния (I.32) принимает произвольно большие положительные и отрицательные значения на этой окружности, изменяя свой алгебраический знак $2n$ раз при полном обходе вокруг полюса. Таким образом, видно, что п. в. ф. должна быть аналитической в правой полуплоскости, где ее вещественная часть остается положительной.

Покажем далее, что функция не может быть п. в. ф., если обратная ей функция не является п. в. ф., или что обратная функция будет п. в. ф., если данная функция является п. в. ф. Предположим, что

$$Z(s) = R(\sigma, \omega) + jX(\sigma, \omega) \quad (I.33)$$

при $s = \sigma + j\omega$.

Тогда обратная функция будет

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}. \quad (I.34)$$

Отсюда ясно, что исходная функция и обратная ей имеют одинаковые алгебраические знаки для своих вещественных частей. Утверждение, сформулированное в начале этого параграфа, сразу же становится очевидным.

Поскольку нулями исходной функции являются полюсы обратной функции, которые не могут располагаться в правой полуплоскости, то нули также не могут располагаться в ней. Таким образом, можно сказать, что п. в. ф. не может иметь ни нулей, ни полюсов в правой полуплоскости или, иными словами, исходная и обратная ей функции должны быть аналитическими в правой полуплоскости комплексной частоты. Это свойство входных функций ранее было рассмотрено на основе физических представлений. Сейчас оно трактуется так же, как свойство п. в. ф.

Логично теперь выяснить, могут ли полюсы п. в. ф. лежать на мнимой оси, которая является границей между левой и правой полуплоскостями. Чтобы ответить на этот вопрос, снова рассмотрим выражение (I.32) для вещественной части функции вблизи полюса. Заметим, что если полюс простой ($n = 1$) и коэффициент $a_n = a_{-1}$ (который при $n = 1$ становится вычетом функции в этом полюсе) является вещественным и положительным, так что согласно ур-нию (I.30) $\varphi = 0$, то вещественная часть в непосредственной близости от полюса остается положительной, по крайней мере, в правой полуплоскости, где $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Это доказательство не объясняет полностью, могут ли полюсы функции лежать на мнимой оси. Оно лишь показывает, что если полюсы на мнимой оси простые, а вычеты вещественны и положительны, то вещественная часть несомненно положительна (и может быть сколь угодно большой по абсолютному значению, за исключением точек $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$) на окружности сравнительно небольшого радиуса, лежащей полностью в правой полуплоскости. Ясно, что приведенное условие как раз позволяет допустить существование таких полюсов на мнимой оси. Однако для полного доказательства этого утверждения необходимо воспользоваться другим разделом теории функций комплексного переменного.

П. в. ф., как следует из ее названия, имеет вещественную часть, положительную во всей правой полуплоскости комплексных частот. Она является также функцией аналитической во всей этой полуплоскости. Существует теорема относительно вещественной части функции, аналитической в данной области и на границе ее. Она гласит, что наибольшее и наименьшее значения, которые принимает вещественная часть функции в этой области, включая ее границу, должны лежать на границе области [2]¹. Чтобы применить эту теорему для п. в. ф., имеющей полюсы на мнимой оси, а также в левой полуплоскости, выберем в качестве границы правой полу-

¹ См. также [52] (прим. ред.).

плоскости мнимую ось, включая области, непосредственно примыкающие к полюсам, и заполним промежутки в этих точках с помощью концентрических полуокружностей, лежащих полностью в пределах правой полуплоскости, как это показано на рис. 1.3. Диаграмма на этом рисунке соответствует случаю, когда рассматриваемая функция является сопротивлением, причем его вещественная часть вдоль мнимой оси должна быть неотрицательной.

Поскольку наименьшие значения, принимаемые вещественной частью во всей правой полуплоскости, лежат на этой границе, то положительный знак функции здесь гарантирует ее положительное значение во всей правой полуплоскости. Следовательно, если считать доказанным вещественность функции для вещественных значений s , то это гарантирует, что функция будет п. в. ф. Другими словами, функция может иметь полюсы на мнимой оси и все же быть п. в. ф., когда полюсы простые, а вычеты вещественны и положительны. При этом вещественная часть функции не будет отрицательной на дугах полуокружностей в случае, если на линейных участках мнимой оси, включая участки в непосредственной близости от полюсов, вещественная часть функции также не отрицательна.

Приведенное ранее рассмотрение, основанное на физических представлениях, уже показало, что вещественная часть функции не должна быть отрицательной на мнимой оси, но при этом не было дано никакой специальной информации относительно полюсов на мнимой оси. Аналитический подход проливает больший свет на характеристики функций сопротивления и проводимости.

Теперь можно сформулировать условия, необходимые для того, чтобы функция была п. в. ф. В случае цепей с конечным числом сосредоточенных параметров она является рациональной функцией (частное от деления конечных полиномов), как это было исчерпывающе показано раньше. Для вещественности функции при всех значениях s требуется лишь, чтобы полиномы имели вещественные коэффициенты. В свою очередь, нули этих полиномов симметрично расположены относительно вещественной оси плоскости s . Картина расположения полюсов и нулей рациональной п. в. ф. должна прежде всего показывать эту симметрию.

Кроме того, вещественная часть такой функции должна быть положительной во всей правой полуплоскости s . Если рассматривать, кроме s -плоскости, еще плоскость, в которой построены комплексные значения функции (f -плоскость или Z -плоскость для функции сопротивления Z), то данное условие выразится как требование, накладываемое на отображение свойств функции $f(s)$ или $Z(s)$, а именно: точки в правой полуплоскости s должны быть ото-

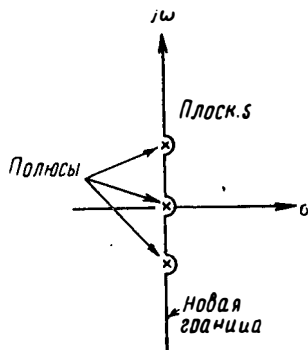


Рис. 1.3

бражены в точках, лежащих в правой половине f -плоскости или Z -плоскости, причем границы полуплоскостей должны быть включены как граничные точки. Следовательно, точка на мнимой оси плоскости s может быть отображена в правой полуплоскости f или же точка на мнимой оси в одной плоскости — стать точкой на мнимой оси в другой плоскости. Такие предельные случаи возникают только в идеализированных условиях и практически не имеют большого значения, но поскольку, в принципе, их можно представить себе, то общее положение, установленное относительно п. в. ф., должно допускать возможность существования подобных случаев.

Необходимо заметить, что точку в правой полуплоскости s нельзя отобразить на мнимую ось плоскости f , так как свойство п. в. ф. выразится в эквивалентной форме в полярных координатах (в противоположность прямоугольным координатам, которыми мы пользовались при всех ее рассмотренных). Эквивалентная форма в полярных координатах имеет вид ¹

$$|\arg Z| \leq |\arg s| \text{ при } |\arg s| \leq \frac{\pi}{2}. \quad (\text{I.35})$$

Другими словами, угол функции всегда меньше по абсолютному значению, чем угол независимой переменной при ее значениях в пределах правой полуплоскости. Обе формы математически полностью эквивалентны в том отношении, что они могут быть получены одна из другой. По всей видимости такое утверждение гораздо более строго, чем приведенное ранее о том, что вещественная часть функции $f(s)$ является положительной для всех значений s с положительной вещественной частью. Полярная система по сравнению с прямоугольной системой координат оказывается более удобной для выявления одних свойств функций и, наоборот, прямоугольная система позволяет легче выявить другие свойства. Следовательно, в общем случае необходимо пользоваться обеими системами.

В результате применения упомянутой выше теоремы о вещественной части функции комплексной переменной и анализа ее поведения вблизи полюса можно сформулировать следующие необходимые и достаточные условия: функция, являющаяся вещественной при вещественных s , имеет положительную вещественную часть во всей правой полуплоскости s . Таким образом, если функция аналитическая в правой полуплоскости и на мнимой оси, то надо только убедиться, что ее вещественная часть не будет отрицательной на мнимой оси и что она останется положительной во всей правой полуплоскости. Исследование поведения вещественной части вдоль мнимой оси является, по-видимому, менее сложной задачей, чем исследование ее во всей правой полуплоскости. Практический эффект применения соответствующей теоремы для этого случая оче-

¹ Детальный вывод и рассмотрение этой формы см. [2].
См. также [49, 50, 51] (прим. ред.).

виден. Однако необходимо убедиться прежде всего в том, что функция является аналитической в правой полуплоскости s , включая мнимую ось. В противном случае теорема неприменима.

При наличии полюсов на мнимой оси можно изменить границу правой полуплоскости так, как показано на рис. 1.3. На этой измененной границе функция является аналитической, и к ней может быть применена теорема, позволяющая сформулировать следующее предложение: если вещественная часть функции положительна вдоль все этой новой границы, то она положительна и во всей правой полуплоскости. Рассматривая вещественную часть функции вдоль измененной границы, можно разделить последнюю на две части: линейные участки и дуги полуокружностей. Неотрицательность вещественной части на дугах полуокружности обеспечивается тем, что полюсы являются простыми, а вычеты функции в них — положительными вещественными. Неотрицательность вещественной части вдоль линейных участков может быть исследована (как это будет показано далее) теми же методами, которые используются при отсутствии полюсов на мнимой оси. Когда функция имеет полюсы на мнимой оси, необходимые и достаточные условия принадлежности данной функции к классу п. в. ф. отличаются от аналогичных условий для функций, аналитических только на мнимой оси. Отличие заключается в дополнительном требовании, чтобы полюсы были простыми, а вычеты в них — положительными вещественными.

Все вышеприведенные рассуждения относительно необходимых и достаточных условий для получения п. в. ф. можно обобщить в одно, содержащее три основных положения:

Рациональная функция, вещественная при вещественных значениях s , является п. в. ф., если

А. *Функция является аналитической в правой полуплоскости.*

Б. *Вещественная часть функции неотрицательна на мнимой оси.*

В. *Любые полюсы функции на мнимой оси являются простыми и имеют положительные вещественные вычеты.* (1.36)

1.4. Методы определения принадлежности функции к классу п. в. ф.

Первый основной этап при определении, является ли данная рациональная функция п. в. ф.¹, заключается в выяснении того, аналитична ли она в правой полуплоскости. Другими словами, необходимо исследовать полином знаменателя функции для того, чтобы определить, имеют ли его нули отрицательные вещественные части. Если он имеет только такие нули, то его можно рассматривать как полином Гурвица. Указанная проверка известна как за-

¹ Предполагается, что ее полиномы имеют вещественные коэффициенты.

дача Гурвица¹. Напомним некоторые важные свойства полинома Гурвица. Запишем полином

$$Q(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_n s^n \quad (I.37)$$

со следующими четными и нечетными частями:

$$\left. \begin{aligned} m(s) &= a_0 + a_2s^2 + a_4s^4 + \dots + a_n s^n \\ n(s) &= a_1s + a_3s^3 + a_5s^5 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (I.38)$$

Здесь n — четная степень, в противном случае последние члены должны быть переставлены местами. Рассматривая необходимые условия проверки, следует учесть, что полином не может быть полиномом Гурвица, если не все его коэффициенты положительны и если пропущены промежуточные члены. Нетрудно оценить эти требования, заметив, что полином Гурвица может быть получен только при использовании трех видов сомножителей:

$$\left. \begin{aligned} (s + a) &\text{ для } a \text{ — вещественного и положительного;} \\ (s^2 + b^2) &\text{ для } b \text{ — вещественного;} \\ (s^2 + 2as + a^2 + b^2) &\text{ для } a \text{ — вещественного и положительного и} \\ &\text{ } b \text{ — вещественного.} \end{aligned} \right\} \quad (I.39)$$

Первый из сомножителей дает нуль на отрицательной вещественной оси, второй — пару нулей на мнимой оси (которую мы рассматриваем как предельный случай, хотя математическое определение полинома Гурвица не включает такие нули); третий — пару сопряженных комплексных нулей вида $s = -a \pm jb$. Важной особенностью этих сомножителей является отсутствие в них отрицательных слагаемых. Ясно, что произведение любой комбинации таких сомножителей может дать в результате полиномы только с положительными слагаемыми. При этом никакие члены не будут сокращаться, так что в полученном полиноме не окажется каких-либо отсутствующих степеней s . Единственным исключением является случай вырождения, когда полином состоит только из произведения сомножителей, расположенных на мнимой оси, и становится четной или нечетной функцией s (нечетной, когда имеет место нуль при $s = 0$).

Предположим, что все коэффициенты в полиноме положительны и ни один не пропущен, тогда при определении его принадлежности к классу полиномов Гурвица необходимо использовать более строгие методы. В этой связи рассмотрим подробнее некоторые свойства четной и нечетной частей полиномов $m(s)$ и $n(s)$, которые формулируются следующим образом. Все нули полиномов $m(s)$ и $n(s)$ являются простыми и расположение их ограничено мнимой осью,

¹ Для детального рассмотрения этого вопроса следует обратиться к работе [2]. Здесь приводятся только наиболее важные аспекты рассмотрения.

См. также учебники по радиотехнике и учебники по автоматическому регулированию, например, [53, 54] (*прим. ред.*).

где они появляются сопряженными парами, чередуясь друг с другом. Таким образом, полином $n(s)$ — нечетный с коэффициентом s и, следовательно, равен нулю при $s = 0$. Следующая, самая большая по абсолютному значению пара нулей относится к полиному $m(s)$, последующие за ней пары нулей на мнимой оси — к полиному $n(s)$ и т. д. Здесь проявляется свойство чередования нулей полиномов m и n на мнимой оси. Если можно доказать, что четная и нечетная части произвольного полинома имеют такие простые чередующиеся нули, он должен быть полиномом Гурвица и наоборот.

На рис. 1.4 показан общий характер поведения пары функций $m(j\omega)$ и $n(j\omega)$ вдоль мнимой оси, на которой рациональная функция

$$\psi(s) = \frac{m(s)}{n(s)} \quad (I.40)$$

имеет простые полюсы в нулях $s = s_v$, функции $n(s)$ с вычетами, равными

$$k_v = \left[\frac{m(s)}{n'(s)} \right]_{s=s_v}, \quad (I.41)$$

где

$$n'(s) = \frac{dn}{ds} = \frac{dn}{jd\omega} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{n}{j} \right). \quad (I.42)$$

Из рис. 1.4 видно (по отношению к нулям полинома n), что когда функция m — положительная, наклон функции n/j также по-

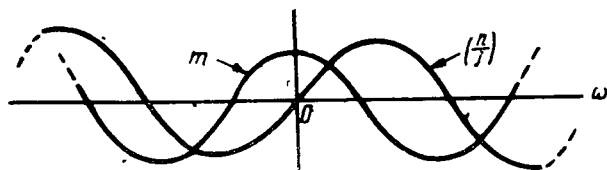


Рис. 1.4

ложительный. Если же функция m — отрицательна, то функция n/j имеет отрицательный наклон. Отсюда следует, что вычеты в ур-нии (I.41) все вещественные и положительные. Этот результат является следствием чередования нулей полиномов m и n . Аналогично можно утверждать, что рациональная функция $\frac{n}{m}$, обратная ур-нию (I.40), точно так же имеет все простые полюсы, ограниченные мнимой осью, и положительные вещественные вычеты. Фактически функция $\psi(s)$ и обратная ей имеют предельную форму п. в. ф., все полюсы которой лежат на мнимой оси. Такая функция, как мы увидим далее, является входным сопротивлением или про-

водимостью цепи без потерь, т. е. имеющей только индуктивность и емкость.

Весьма важно в связи с этим отметить, что если данная рациональная функция обладает таким свойством, то и обратная ей имеет тот же характер, а значит соответствующие полиномы $m(s)$ и $n(s)$ должны иметь простые нули, чередующиеся на мнимой оси. Чередование нулей обеих функций и то, что они должны быть простыми, являются необходимыми условиями для положительности всех вычетов функции $\psi(s)$ или обратной ей. Точно так же справедливо обратное утверждение, а именно, что если полюсы функции $\psi(s)$ простые, а вычеты положительны, то нули функций $m(s)$ и $n(s)$ должны быть простыми и чередоваться. При этом никакое другое расположение нулей не может дать постоянных положительных вычетов. Следовательно, функция, обратная $\psi(s)$, будет, очевидно, обладать тем же свойством, а сумма функций $m(s) + n(s) = Q(s)$ должна быть полиномом Гурвица.

На основании рассмотренных результатов нетрудно сформулировать простой метод проверки, является ли данный полином полиномом Гурвица. Предположим задан полином четной степени. Тогда функция $\psi(s) = \frac{m}{n}$ имеет простой полюс на бесконечности и ее вычет там (отношение коэффициентов при членах с наибольшей степенью в полиномах m и n) положителен, поскольку все коэффициенты в таком полиноме должны быть положительными. Пусть α_1 обозначает этот вычет и функция

$$\psi'(s) = \psi(s) - \alpha_1 s = \frac{m}{n} - \alpha_1 s = \frac{m'}{n} \quad (1.43)$$

соответствует удалению полюса на бесконечности из функции $\psi(s)$. Оставшаяся функция $\psi'(s)$ имеет все другие полюсы $\psi(s)$ с теми же вычетами. Если это полином Гурвица, то полюсы будут простыми и вычеты положительными. Обратная функция $\frac{1}{\psi'}$ также имеет все простые полюсы с положительными вычетами. В противном случае рассматриваемый полином не может быть полиномом Гурвица. Другими словами, метод проверки необходимого условия принадлежности функции ψ' к классу полиномов Гурвица такой же, как и для функции $\frac{1}{\psi'}$. Мы выбрали этот последний метод проверки данной функции, поскольку она имеет полюс на бесконечности и может рассматриваться точно так же, как исходная функция $\psi(s)$. Таким образом, из ур-ния (1.43) ясно, что степень полинома m' на две единицы меньше степени полинома m , потому что при вычитании исключается член с наибольшей степенью, а члены в полиномах m или n содержат только чередующиеся степени s . Следовательно, функция $\psi' = 0$ при $s = \infty$, а обратная ей имеет там простой полюс. Если вычет в этом полюсе снова не является положительным, то

$\frac{1}{\psi'}$, а следовательно, и ψ' не удовлетворяют необходимому условию принадлежности к классу полиномов Гурвица. Как и в ур-нии (I.43), составим функцию

$$\psi''(s) = \frac{1}{\psi'(s)} - \alpha_2 s = \frac{n}{m'} - \alpha_2 s = \frac{n'}{m'}, \quad (I.44)$$

где коэффициент α_2 должен быть положительным, а полином n' будет иметь степень на две единицы ниже, чем полином n и, значит, на одну единицу ниже, чем полином m' . Поэтому функция $\frac{1}{\psi''}$ снова имеет простой полюс на бесконечности с положительным вычетом.

Таким образом, картина проверки ясна. Если продолжать процесс точно так же дальше, то получим разложение в непрерывную дробь рациональной функции $\psi(s)$ вида

$$\psi(s) = \alpha_1 s + \frac{1}{\alpha_2 s} + \frac{1}{\alpha_3 s} + \frac{1}{\alpha_4 s} + \dots + \frac{1}{\alpha_n s}, \quad (I.45)$$

где n — степень первоначального полинома. Если это полином Гурвица, то все коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ должны быть положительными.

При необходимости указанную методику можно изменить исключением полюсов в точке $s = 0$ для непрерывной последовательности, полученной из первоначальной функции $\psi(s) = \frac{m}{n}$ и ее последующих инвертированных остатков. Такое изменение дает в результате непрерывное разложение, подобное выражению (I.45), в котором члены представляют собой постоянные, умноженные на $\frac{1}{s}$. Рассмотрим еще один способ проверки. Заменим в заданном полиноме $Q(s)$ s на $\frac{1}{s}$ и затем полученный в результате полином проверим точно так же, как это делалось первоначально. Поскольку преобразование, соответствующее замене s на $\frac{1}{s}$, отображает левую полуплоскость на саму себя, то, очевидно, что если функция $Q\left(\frac{1}{s}\right)$ является полиномом Гурвица, то и функция $Q(s)$ должна быть полиномом Гурвица. Ясно также, что коэффициенты полинома $Q\left(\frac{1}{s}\right)$ если они расположены в порядке возрастания степеней s , являются коэффициентами полинома $Q(s)$, следующими в обратном порядке. Таким образом, любой критерий Гурвица (эквивалентный

критерию Рауса¹, выраженный непосредственно в значениях коэффициентов, остается фактически неизменным при изменении их порядка.

В предложенной выше методике проверки подразумевается, что рассматриваемый полином не имеет нулей на мнимой оси. Действительно, если бы он имел такие нули, то процесс разложения в непрерывную дробь не продолжался бы до n членов, а закончился раньше и сомножители, относящиеся к мнимой оси, нужно было бы поместить в точке окончания. Дело в том, что эти сомножители, как показано в условиях (I.39), имеют вид $(s^2 + b^2)$, являются четными функциями s , и, следовательно, когда полином $Q(s) = m(s) + n(s)$ содержит такой множитель, то он должен содержаться в обоих полиномах $m(s)$ и $n(s)$. В рациональной функции $\psi(s) = \frac{m}{n}$ указанные множители, являющиеся общим делителем (или делителями), фактически сокращаются. Следовательно, процесс непрерывного деления и инверсии закончится быстрее, чем в нормальных условиях.

Описанный процесс знаком читателю по аналогии с арифметикой — это метод нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел (например 32 и 56), известный как алгоритм Евклида [4]. Он заключается в том же непрерывном делении и в процессе инверсии остатка, что и рассмотренный выше метод для функции $\psi(s)$. Для двух взятых целых чисел процесс деления может быть компактно записан следующим образом:

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 \hline
 32 \overline{) 56} \\
 \underline{32 } \\
 24 \\
 \underline{24 } \\
 8 \\
 \underline{8 } \\
 0
 \end{array}
 \tag{I.46}$$

Из приведенного примера видно, что наибольшим общим делителем в данном случае является число 8. Здесь частные от деления играют лишь вспомогательную роль при определении наибольшего общего делителя. В аналогичном делении для рациональной функции $\psi(s)$ эти частные представляют собой члены в разложении (I.45), и если процесс заканчивается преждевременно, то сразу же можно увидеть, что предшествующий делитель является наибольшим общим делителем полиномов $m(s)$ и $n(s)$. Такой общий делитель, как отмечалось выше, должен быть четным полиномом от s . Если он представляет собой полином второго порядка, то вид его

¹ См., например, [3].

См. также учебники по радиотехнике и автоматическому регулированию, например, [53] (*прим. ред.*).

будет $(s^2 \pm b^2)$. При знаке плюс в этом выражении полином имеет пару нулей на мнимой оси. При знаке минус полином также имеет пару нулей, но расположенных на вещественной оси симметрично относительно начала координат. В последнем случае исследуемый полином, конечно, отбрасывается.

Когда определенный подобным образом общий делитель имеет четвертую степень (вторая степень от s^2), то для нахождения нулей полинома от s^2 можно применить «квадратную» формулу. Только при условии, что нули отрицательные вещественные, они будут являться нулями общего делителя, ограниченными мнимой осью. В общем случае, для того чтобы исследуемый полином удовлетворял нас, общий делитель должен иметь простые отрицательные вещественные нули относительно s^2 . Это обусловлено тем обстоятельством, что в исследуемых выражениях для сопротивления или проводимости полиномы знаменателей могут иметь лишь простые полюсы на мнимой оси. Рассмотрим теперь метод проверки того, являются ли все нули данного полинома или некоторые из них простыми отрицательными и вещественными. Пусть задан полином

$$Q(s) = s^6 + 2s^5 + 14s^4 + 26s^3 + 49s^2 + 72s + 36. \quad (I.47)$$

Процесс деления и инверсии, аналогичный приведенному в выражении (I.46), можно записать в виде

$$\begin{array}{r} \frac{s}{2} \\ 2s^5 + 26s^3 + 72s \overline{) s^6 + 14s^4 + 49s^2 + 36} \\ \underline{s^6 + 13s^4 + 36s^2} \quad | 2s \\ 0 + s^4 + 13s^2 + 36 \overline{) 2s^5 + 26s^3 + 72s} \\ \underline{2s^5 + 26s^3 + 72s} \\ 0 + 0 \quad + 0 \end{array} \quad (I.48)$$

Непосредственно перед получением делителя

$$s^4 + 13s^2 + 36 = (s^2 + 4)(s^2 + 9) \quad (I.49)$$

процесс заканчивается, т. е. этот делитель является сомножителем полинома $Q(s)$. Если разделить на него полином $Q(s)$, то получим

$$s^2 + 2s + 1 = (s + 1)^2. \quad (I.50)$$

В этом простом примере мы полностью разложили на множители заданный полином, являющийся полиномом Гурвица. Такой результат обусловлен положительным знаком двух частных в выражении (I.48) и особенностями общего делителя (I.49), который может быть получен и непосредственно. Нетрудно убедиться, что он состоит только из множителей, расположенных на мнимой оси.

Из графиков четных и нечетных частей полинома Гурвица, приведенных на рис. I.4, очевидно, что производные его также относятся к классу полиномов Гурвица. Это следует из того факта, что при дифференцировании нули и четной и нечетной частей полинома

Гурвица остаются простыми и чередующимися, хотя четная часть полинома становится нечетной и наоборот. По той же причине ясно, что полиномы $\left(m + \frac{dm}{ds}\right)$ и $\left(n + \frac{dn}{ds}\right)$ являются полиномами Гурвица, если к ним принадлежит полином $(m + n)$.

Аналогичные рассуждения приводят к более простому методу определения (не требующему разложения на множители), имеет ли данный четный полином, подобно выражению (I.49), только простые нули на мнимой оси. Если такое условие соблюдается, то производная этого полинома точно так же имеет только простые нули, чередующиеся с нулями исходного. Частное от деления исходного полинома на его производную будет тогда представлять собой функцию ψ , определяемую ур-нием (I.45), и давать непрерывную дробь со всеми положительными коэффициентами. В противном случае можно сделать вывод, что у рассматриваемого четного полинома не все нули, лежащие на мнимой оси, являются простыми. Когда проверяется четный полином, имеющий кратные нули на мнимой оси, то на ней появляются множители.

Рассмотренный метод проверки принадлежности полинома к классу полиномов Гурвица уже учитывает условие **A** критерия (I.36) и требует учета условия **B** того же критерия, причем часть его, устанавливающая, что полюсы на мнимой оси должны быть простыми, также была учтена. Одновременно необходимо исследовать вычеты в этих полюсах. Для упрощения рассмотрения упомянутой части условия **B** следует предварительно осуществить проверку по условию **B**. При этом задача сводится к изучению свойств вещественной части заданной функции. Необходимо убедиться, остается ли вещественная часть положительной (или, точнее, неотрицательной) на всей мнимой оси, поскольку она может стать равной нулю в конечном числе точек. Чтобы облегчить задачу исследования вещественной части, запишем функцию в виде

$$Z(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2}, \quad (I.51)$$

где m и n означают соответственно четные и нечетные части соответствующих полиномов. При $s = j\omega$ четные части — вещественные, а нечетные — мнимые. Представив функцию $Z(s)$ в другом виде

$$Z(s) = \frac{P(s)Q(-s)}{Q(s)Q(-s)} = \frac{(m_1 + n_1)(m_2 - n_2)}{(m_2 + n_2)(m_2 - n_2)}, \quad (I.52)$$

перемножив сомножители числителя и разбив функцию на четное и нечетное слагаемые, получим

$$Z(s) = \frac{m_1 m_2 - n_1 n_2}{m_2^2 - n_2^2} + \frac{m_2 n_1 - m_1 n_2}{m_2^2 - n_2^2}. \quad (I.53)$$

При $s = j\omega$ общий знаменатель в этих членах становится квадратом абсолютного значения [заметим, что $n_2(j\omega)$ — чисто мнимая

всличина и, следовательно, $-n_2^2(j\omega)$ — положительная вещественная величина при всех ω точно так же, как m_2^2 при $s = j\omega$. Поэтому первый член выражения (1.53) является вещественной частью, а второй член — мнимой частью функции $Z(s)$. Следовательно,

$$\operatorname{Re} [Z(j\omega)] = \left(\frac{m_1 m_2 - n_1 n_2}{m_2^2 - n_2^2} \right)_{s=j\omega}. \quad (1.54)$$

Важно заметить, что оба члена в ур-нии (1.53) становятся соответственно вещественной и мнимой частями функции $Z(s)$ только при $s = j\omega$. Для любого комплексного числа $s = \sigma + j\omega$ эти члены не являются соответственно вещественной и мнимой частями рассматриваемой функции.

Непосредственная задача, стоящая перед нами, заключается в том, чтобы определить условия, при которых выражение (1.54) остается положительным (или неотрицательным) при всех вещественных значениях ω . Поскольку знаменатель этого выражения представляет собой квадрат абсолютной величины и, очевидно, является положительным, то достаточно (а также необходимо), чтобы

$$(m_1 m_2 - n_1 n_2)_{s=j\omega} \geq 0 \text{ при всех вещественных } \omega. \quad (1.55)$$

Выражение в скобках, которое является четной частью числителя $P(s)Q(-s)$, представляет собой четный полином от s .

Поскольку при $s = j\omega$ $s^2 = -\omega^2$, целесообразно обозначить его через

$$A(-s^2) = m_1 m_2 - n_1 n_2 \quad (1.56)$$

и представить в виде разложения на множители

$$A(-s^2) = A_n (s_1^2 - s^2)(s_2^2 - s^2) \dots (s_n^2 - s^2), \quad (1.57)$$

где n — общая степень полиномов P и Q . Заметим, что если степени их неодинаковы, то степень полинома $A(-s^2)$ от переменной s^2 будет ниже, но выражение (1.57) останется прежним. Для $s = j\omega$ имеем

$$A(\omega^2) = A_n (s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2) \dots (s_n^2 + \omega^2). \quad (1.58)$$

Условие (1.55) требует, чтобы последнее выражение оставалось положительным (или, по крайней мере, не стало отрицательным) для всех вещественных значений ω .

Нетрудно видеть, что при этом необходимо выполнение условия $A_n > 0$, так как иначе полином $A(\omega^2)$ будет отрицательным при больших значениях ω . Рассмотрим отдельно возможные случаи. Нули s^2 полинома $A(-s^2)$ согласно ур-нию (1.56) могут быть: а) положительными вещественными; б) сопряженными комплексными парами и в) отрицательными вещественными. Сомножители $(s_k^2 + \omega^2)$, у которых s_k^2 — положительное вещественное число, не могут стать отрицательными при любом вещественном значении ω .

Пара сомножителей $(s_k^2 + \omega^2)(\bar{s}_k^2 + \omega^2)$, имеющая сопряженные комплексные значения s_k^2 , является сама по себе комплексной величиной и, следовательно, дает в результате произведение, которое представляет собой квадрат абсолютного значения. Такие сомножители также не могут стать отрицательными при любом вещественном ω . Однако сомножители, у которых имеются отрицательные вещественные величины s_k^2 , безусловно, станут отрицательными при некоторых значениях ω . Знак минус перед этими сомножителями можно устранить только в том случае, если в выражении (I.58) имеется другой аналогичный сомножитель. Тогда полином $A(-s^2)$ будет иметь отрицательный вещественный нуль s^2 с кратностью 2 или с нулем второго порядка на мнимой оси.

Нули и полюсы функции $Z(s)$ на мнимой оси являются, очевидно, нулями полинома (I.56). Обратное положение не обязательно справедливо, так как нули этого полинома не должны быть нулями функции $P(s)$ или $Q(s)$ в ур-нии (I.51). В нулях второго порядка на мнимой оси [см. выражение (I.56)] второй член в ур-нии (I.53) является необходимым не только для функции $Z(s)$, но также и для вычисления ее производной. Поскольку здесь

$$m_2 n_1 - m_1 n_2 = \frac{n_1}{m_2} (m_2^2 - n_2^2),$$

то

$$Z(s) = \frac{n_1}{m_2} = \frac{m_1}{n_2}, \quad (I.59)$$

и производная $Z(s)$ будет иметь вид

$$\frac{dZ}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{n_1}{m_2} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{m_1}{n_2} \right), \quad (I.60)$$

где бы ни располагался на мнимой оси нуль вещественной части этого положительного вещественного сопротивления.

Анализ ур-ния (I.59) показывает, что сопротивление не обязательно равно нулю, если его вещественная часть равна нулю. Ниже мы увидим [см. ур-ние (II.26)], что функция $Z(s)$, определяемая ур-нием (I.59), ведет себя в окрестности рассматриваемой точки аналогично реактивной функции (сопротивление цепи, не имеющей потерь). Как нетрудно заключить из ур-ния (I.60), производная указанной функции в этой точке всегда вещественна и положительна.

Заметим далее, что хотя вещественная часть функции $\text{Re}[Z(j\omega)]$ должна быть равна нулю, когда нуль функции $Z(s)$ располагается на мнимой оси, она не имеет полюса на мнимой оси, когда функция $Z(s)$ его имеет. Это происходит в том случае, если нули полинома (I.56), расположенные на мнимой оси, являются четными, причем сомножитель $(s_k^2 + \omega^2)^2$, имеющийся в знаменателе выражения (I.54), появляется и в его числителе и, следовательно, сокращается.

Ниже, в главе VIII, будет показано, что на мнимой оси функция $\text{Re}[Z(j\omega)]$ имеет импульсы там, где функция $Z(s)$ имеет полюсы. Это весьма интересное свойство не обнаруживается при использовании алгебраических методов вычисления вещественной части. Во всех других случаях вещественная часть положительного вещественного сопротивления на мнимой оси представляет собой ограниченную функцию.

С помощью обычного алгебраического анализа нетрудно установить, что сопротивление с полюсами только на мнимой оси имеет вдоль нее вещественную часть, тождественно равную нулю. Поскольку вычеты в этих полюсах должны быть положительными вещественными, такое сопротивление выражается суммой функций вида

$$\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{s + j\omega_0} = \frac{2s}{s^2 + \omega_0^2}. \quad (\text{I.61})$$

При $s = j\omega$ выражение (I.61) является чисто мнимым.

Любое сопротивление, содержащее полюсы на мнимой оси, может быть представлено (путем разложения на элементарную дробь) как сумма двух компонент, одна из которых не имеет там полюсов, а другая имеет только такие полюсы. Вещественная часть всего сопротивления на мнимой оси, таким образом, тождественно равна вещественной части компоненты, не имеющей полюсов, и, следовательно, остается регулярной в окрестности полюса сопротивления, расположенного на мнимой оси. Наличие этого полюса совершенно не сказывается на поведении сопротивления в окрестности полюса.

Если полином, определяемый выражением (I.58), построить в зависимости от ω , то его простой нуль будет точкой, где кривая пересекает нулевую ось при конечном, отличном от нуля наклоне, тогда как при нуле второго порядка кривая касается этой оси, не пересекая ее. При нуле третьего порядка кривая снова пересекает ось, но уже с нулевым наклоном. В окрестности нуля четвертого порядка функция остается положительной, как и для нуля второго порядка, но имеет меньшую величину и т. д. Таким образом, нули нечетной кратности полинома $A(-s^2)$ на мнимой оси плоскости s являются точками, в которых вещественная часть полинома (I.54) будет, безусловно, менять знак, тогда как нули четной кратности на мнимой оси или нули в любой другой точке плоскости s (независимо от их порядка) не могут вызвать изменения знака вещественной части вдоль этой оси.

Ясно, что выражение (I.58) остается положительным при всех вещественных значениях ω , если полином $A(-s^2)$, определяемый ур-нием (I.56), не имеет отрицательных вещественных нулей s^2 нечетной кратности. В этом случае вещественная часть, определяемая ур-нием (I.54), несомненно неотрицательна при всех вещественных значениях ω , как и требуется по условию Б критерия (I.36). Следовательно, проверка данного условия свелась к проверке того, имеет ли полином какие-либо отрицательные веществен-

ные нули нечетной кратности. Если, например, в выражении полинома (I.58) положить $\omega^2 = x$, то при $-\infty < \omega < \infty$ x будет находиться в диапазоне $0 < x < \infty$. Следовательно, полученный полином от x не должен иметь положительных вещественных нулей нечетной кратности.

Метод определения числа вещественных нулей полинома в пределах заданного интервала изменения переменной основан на теореме Штурма¹. Рассмотрим вначале построение ряда Штурма. Запишем полином

$$f_0(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (I.62)$$

и его первую производную

$$f_1(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}. \quad (I.63)$$

Выражения (I.62) и (I.63) представляют собой первые два полинома так называемого ряда функций Штурма. Остальные функции Штурма можно получить, используя полиномы $f_0(x)$ и $f_1(x)$ и процесс деления, аналогичный рассмотренному в методе Гурвица. Единственное отличие данного процесса заключается в том, что при каждом делении используется частное двух полиномов. Получающиеся в результате деления последующие остатки являются полиномами, степень которых отличается на единицу от степени соответствующего полинома — делимого. Каждый из остатков, взятый с обратным алгебраическим знаком, будет последующей функцией ряда Штурма.

Процесс деления начнем с деления $f_0(x)$ на $f_1(x)$ и будем записывать все промежуточные действия. Первый член частного представляет собой постоянную, умноженную на x , а второй — постоянную. У полученного остатка степень окажется на единицу ниже, чем степень полинома $f_1(x)$. Этот остаток, взятый с обратным алгебраическим знаком, обозначается через $f_2(x)$ и представляет собой последующую функцию ряда Штурма. Далее проводится аналогичный процесс деления $f_1(x)$ на $f_2(x)$ и находится остаток, степень которого на единицу меньше степени $f_2(x)$. Снова остаток берут с обратным алгебраическим знаком, обозначают его через $f_3(x)$ и т. д. Процесс построения ряда Штурма заканчивается получением функции $f_n(x) = \text{const}$, где n — степень первоначального полинома (I.62). Если обозначить частные двух полиномов, используемых при делении (которые, вообще говоря, не представляют интереса), через q_1, q_2, \dots , то можно компактно записать рассмотренный процесс деления в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= q_1 f_1 - f_2 \\ f_1 &= q_2 f_2 - f_3 \\ f_2 &= q_3 f_3 - f_4 \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (I.64)$$

¹ См., например, [5].
См. также [55], стр. 95 (прим. ред.).

Описанный метод определения наличия каких-либо нулей функции $f_0(x)$ в интервале $a < x < b$ удобно представить в виде таблицы:

	f_0	f_1	f_2	...	f_n	Число перемен знака
$x = a$	+	-	-	...	+	v_a
$x = b$	-	+	+	...	+	v_b

(I.65)

В этой таблице в столбцах для ряда функций Штурма f_0, f_1, \dots, f_n записываются лишь алгебраические знаки соответствующих функций, вычисленных соответственно для $x = a$ и $x = b$. Величины в последнем столбце, обозначенные через v_a и v_b , представляют собой целые числа перемен знака в соответствующих строках. Модуль разности $v_a - v_b$ равняется числу нулей функции $f_0(x)$ в пределах указанного интервала при условии, что все эти нули простые.

Если полином $f_0(x)$ имеет кратные нули, то и его производная — полином $f_1(x)$ — тоже имеет такие нули. Отсюда можно сделать вывод, что полиномы $f_0(x)$ и $f_1(x)$ имеют общий делитель. Согласно алгоритму Евклида в этом случае процесс построения ряда функций Штурма, записанный в виде выражений (I.64), преждевременно закончится и даст в результате такие общие делители. Если эти делители достаточно просты, т. е. можно непосредственно определить, какие из нулей полинома $f_0(x)$ являются кратными и каков порядок их кратности, то сразу становится ясно, потребуется ли дальнейшее исследование остатка функции $f_0(x)$ после ее деления на указанные делители. Если же для непосредственного анализа общий делитель слишком сложен, то необходимо применить к нему теорему Штурма. На любом этапе построения ряда функций Штурма, когда оказывается, что полином $f_0(x)$ имеет какие-либо нули нечетной кратности, процесс дальнейшего исследования следует прекратить, поскольку очевидно, что данный полином нас не удовлетворяет.

Теперь покажем правомерность использования таблицы (I.65) для получения требуемых сведений. Рассмотрим некоторые основные закономерности, касающиеся числа перемен знака у данного ряда величин таблицы и приведенные в виде диаграммы на рис. I.5. Предположим, что ряд величин f_0, \dots, f_{10} имеет случайное распределение алгебраических знаков. Положительные знаки приведены в столбце слева от вертикальной оси, а отрицательные — в столбце справа от нее. Ломаная линия соединяет числа по порядку.

Как видно из диаграммы, число перемен знака в ряду функций равняется числу пересечений ломаной линией вертикальной оси. Рассмотрим функцию, соответствующую индексу 2, 3 и 6, для которой смежные функции аналогичны по знаку. Если она будет иметь обратный алгебраический знак, то число пересечений вер-

тикальной оси изменится на два. Однако, когда функция, соответствующая индексу 1, 4, 5, 7, 8 или 9 (для которой смежные функции имеют противоположные знаки), сдвинута с одной стороны на другую относительно указанной оси, тогда изменение в числе пересечений этой оси не произойдет. Если же такой сдвиг произойдет у функции с индексом 0, то число пересечений этой оси всегда изменится на единицу.

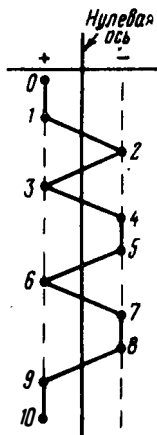


Рис. 1.5

В пределах интервала $a < x < b$ функция f_0 изменяет знак в каждом из своих нулей. Некоторые из функций f_1, f_2, \dots также могут иметь нули в данном интервале. Обозначим все эти нули через $x = r_1 < r_2 < r_3 < \dots$, и пусть величины x_1, x_2, x_3, \dots будут значениями x , лежащими между нулями. На рис. 1.6 показано расположение нулей указанных функций (функций Штурма) в интервале $a < x < b$. Отсюда непосредственно следует, что

$$v_a - v_b = (v_a - v_{x_1}) + (v_{x_1} - v_{x_2}) + (v_{x_2} - v_{x_3}) + \dots + (v_{x_n} - v_b), \quad (I.66)$$

где v_{x_1}, v_{x_2}, \dots — число перемен знака функций f_0, \dots, f_n в промежуточных точках x_1, x_2, \dots .

В пределах любого подынтервала типа $x_1 < x < x_2$ только одна из функций ряда f_0, \dots, f_n проходит через нуль. Эта функция имеет противоположные знаки в точках $x = x_1$ и $x = x_2$; другие функции имеют одинаковые знаки в обеих точках. Теперь можно показать,

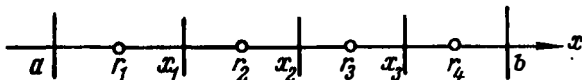


Рис. 1.6

что если функцией, равной нулю в пределах подынтервала, будет любая функция, кроме f_0 , то функции, смежные с ней, имеют противоположные знаки по всему подынтервалу. Тогда согласно рис. 1.5 число пересечений оси нулей (их не следует путать с нулями, расположенными на оси x и изображенными на рис. 1.6) для функций ряда f_0, \dots, f_n одинаково как при $x = x_1$, так и при $x = x_2$. Следовательно, $(v_{x_1} - v_{x_2}) = 0$. С другой стороны, если f_0 — функция, проходящая через нуль в пределах подынтервала, то, как видно из рис. 1.5, v_{x_1} и v_{x_2} отличаются на единицу.

Предположим, что функция f_k равна нулю при $x = r_2$ в пределах интервала $x_1 < x < x_2$ и что $k \neq 0$. Согласно процессу построения ряда функций, записанному в виде выражения (I.64), имеем

$$f_{k-1} = q_k f_k - f_{k+1}. \quad (I.67)$$

Ясно, что функции f_{h-1} и f_{h+1} при $x = r_2$, когда $f_h = 0$, имеют противоположные знаки, которые не изменяются в пределах подынтервала. Поэтому знаки функций в точках x_1 и x_2 противоположны. Таким образом, удовлетворяется приведенное выше условие и подтверждается справедливость теоремы Штурма.

Для того чтобы пояснить сказанное, обратимся к рис. 1.7, на котором показан ряд функций f_0, f_1, f_2, f_3 и f_4 , построенных в зависимости от x в интервале $a < x < b$. Последняя функция, в данном случае f_4 , всегда величина постоянная и, следовательно, изображается в виде горизонтальной линии. Предполагается, что функция f_0 (заданный полином) не имеет нулей в указанном интервале и поэтому не изменяет знака на границах различных подынтервалов,

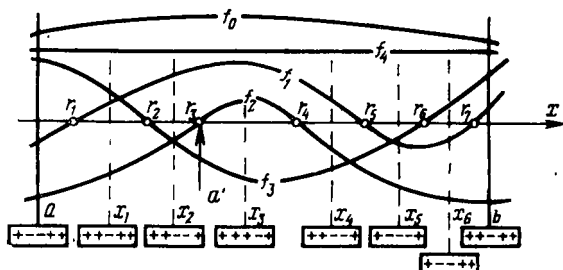


Рис. 1.7

как это можно заметить из последовательностей знаков для каждой функции на границах подынтервалов a, x_1, x_2, \dots, b . Если граница интервала a совпадает с точкой a' , где $f_2 = 0$, то у функции f_2 может быть знак либо плюс, либо минус, как если бы граница была немного сдвинута влево или вправо от точки, в которой $f_2 = 0$. Ясно, что в любом из этих случаев число перемен знака одинаково. Можно также не учитывать f_2 на границе до тех пор, пока знак не изменится. В общем же случае пренебрегать функцией f_2 нельзя, особенно на других границах, где она не обращается в нуль.

Теперь целесообразно привести пример проверки принадлежности функции к классу п. в. ф. Допустим, что необходимо произвести проверку следующего сопротивления:

$$Z(s) = \frac{s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 3s + 1}{s^4 + 7s^3 + 6s^2 + 4s + 1}. \quad (I. 68)$$

Сначала определим, принадлежит ли полином знаменателя к классу полиномов Гурвица, для чего произведем деление

$$\begin{array}{r} 7s^3 + 4s \quad | \quad 0,143s \\ \hline s^2 + 6 \quad | \quad s^2 + 1 \\ \hline s^4 + 0,57s^2 \quad | \quad 1,29s \\ \hline 5,43s^2 + 1 \quad | \quad 7s^3 + 4s \\ \hline 7s^3 + 1,29s \quad | \quad 2,0s \\ \hline 2,71s \quad | \quad 5,43s^2 + 1 \\ \hline 5,43s^2 \quad | \quad 2,71s \\ \hline 1 \quad | \quad 2,71s \end{array}. \quad (I. 69)$$

Если разделить полином f_0 на полином f_1 , то получим частное $\frac{1}{7}x - \frac{10}{49}$ и остаток

$$\frac{30}{49}x^5 - \frac{270}{49}x^4 + \frac{912}{49}x^3 - \frac{1440}{49}x^2 + \frac{1056}{49}x - \frac{228}{49}.$$

Этот полином, взятый с обратным знаком, представляет собой функцию $f_2(x)$. Нетрудно видеть, что любую функцию можно умножить на положительную постоянную величину, не влияя на результаты рассматриваемого метода. Поэтому прежде чем изменить знак полученного полинома, умножим его на $\frac{49}{6}$.

Обозначим новый полином через

$$f_2(x) = -5x^5 + 45x^4 - 152x^3 + 240x^2 - 176x + 48. \quad (I.78)$$

Поделив полином f_1 на полином f_2 , получим частное $-\frac{7}{5}x - \frac{3}{5}$ и остаток

$$\frac{196}{5}x^4 - \frac{1176}{5}x^3 + \frac{2548}{5}x^2 - \frac{2352}{5}x + \frac{784}{5}.$$

Умножим последний полином на $\frac{5}{196}$ и изменим его знак. Тогда

$$f_3(x) = -x^4 + 6x^3 - 13x^2 + 12x - 4. \quad (I.79)$$

Разделив полином f_2 на полином f_3 , получим частное $5x - 15$ и остаток $3x^3 - 15x^2 + 24x - 12$.

Умножение последнего выражения на $\frac{1}{3}$ и изменение знака дает

$$f_4(x) = -x^3 + 5x^2 - 8x + 4. \quad (I.80)$$

Следующий цикл оказывается завершающим в этой последовательности, так как в результате получается остаток, тождественно равный нулю. Очевидно, что полином $f_4(x)$ является общим делителем полиномов f_0 и f_1 . Поскольку его нельзя проанализировать непосредственно, применим к нему теорему Штурма. Для этого рассмотрим полином

$$h_0(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \quad (I.81)$$

и его первую производную

$$h_1(x) = 3x^2 - 10x + 8. \quad (I.82)$$

При делении полинома h_0 на полином h_1 получается частное $\frac{1}{3}x - \frac{5}{9}$ и остаток $-\frac{2}{9}x + \frac{4}{9}$.

После умножения остатка на $-\frac{9}{2}$ получим

$$h_2(x) = x - 2. \quad (I.83)$$

Разделив полином h_1 на полученный полином, найдем, что в данном случае остаток тождественно равен нулю. Таким образом, $(x - 2)$ является общим делителем полиномов $h_0(x)$ и $h_1(x)$ и, следовательно, полином $h_0(x)$ имеет сомножитель $(x - 2)^2$. Теперь нетрудно найти второй сомножитель полинома h_0 , который равен $(x - 1)$. Отсюда

$$h_0(x) = (x - 1)(x - 2)^2. \quad (I.84)$$

Полученный полином является общим делителем первоначального полинома $f_0(x)$, определяемого ур-нием (I.76), и полинома производной, определяемого ур-нием (I.77). Ясно, что полином $f_0(x)$ содержит множители $(x - 1)^2(x - 2)^3$. Поскольку $(x - 2)^3$ является множителем нечетной кратности, функция $(m_1, m_2 - n_1, n_2)$, из которой получен полином f_0 , не может оставаться положительной при всех вещественных значениях ω .

Прежде чем сделать соответствующие выводы из применения теоремы Штурма для рассмотренного полинома, напомним о том, что проверка принадлежности его к классу полиномов Гурвица дает в результате четную функцию от s , когда $m(s)$ и $n(s)$ имеют общий делитель. В этом случае необходимо проверить, лежат ли нули этого делителя на мнимой оси и какова их кратность. Если заменить s^2 на $-\omega^2$, а затем принять $\omega^2 = x$, получим полином $f_0(x)$, положительные вещественные нули которого соответствуют парам сопряженных нулей первоначального полинома от s на мнимой оси (общий делитель полиномов m и n). Таким образом, снова можно использовать теорему Штурма, хотя метод, приведенный выше, с точки зрения вычислений более прост.

Если в этой части проверки по Гурвицу у полинома обнаруживаются кратные нули на мнимой оси, то от данной функции сопротивления или проводимости следует немедленно отказаться, так как она не может быть п. в. ф. Если, однако, такие нули (а следовательно, соответствующие полюсы сопротивления на мнимой оси) — простые, тогда необходимо определить вычеты сопротивления в данных полюсах для того, чтобы убедиться, являются ли они вещественными и положительными. Как будет показано ниже, эти вычисления могут оказаться довольно громоздкими.

Если рассматриваемое сопротивление представлено в виде ур-ния (I.51), то можно непосредственно вычислить вычет в простом полюсе на мнимой оси при $s_v = j\omega_v$:

$$k_v = \left[\frac{P(s)}{Q'(s)} \right]_{s=s_v}, \quad (I.85)$$

где $Q'(s)$ — производная полинома $Q(s)$ по s . Полиномы $P(s)$ и $Q'(s)$, вычисленные при $s = s_v$, всегда комплексные, даже в том случае, если вычет k_v вещественен. При вычислениях, однако, можно совершенно избежать комплексных членов, используя приведенные ниже свойства полинома.

Пусть функция $Z(s)$, определяемая ур-нием (I.51), имеет простой полюс на мнимой оси. Пусть, далее, полиномы m_2 и n_2 содержат простой множитель $(s^2 + \omega_v^2)$, рассмотренный ранее. Вещественная часть функции $Z(j\omega)$ на мнимой оси, определяемая ур-нием (I.54), не имеет особенностей в этой точке, поскольку полиномы $(m_1 m_2 - n_1 n_2)$ и $(m_2^2 - n_2^2)$ содержат квадратный множитель $(s^2 + \omega_v)^2$.

Запишем

$$\left. \begin{aligned} m_2 &= m_2^* (s^2 + \omega_v^2) \\ n_2 &= n_2^* (s^2 + \omega_v^2) \end{aligned} \right\}, \quad (I.86)$$

откуда

$$\left(\frac{m_1}{n_1} \right)_v = \left(\frac{n_2^*}{m_2^*} \right)_v = \left(\frac{n_2'}{m_2'} \right)_v, \quad (I.87)$$

где штрихи обозначают дифференцирование по s , а индекс v указывает, что соответствующее отношение вычисляется при $s = j\omega_v$. Согласно выражению (I.85) вычет k_v может быть представлен в виде:

$$k_v = \left(\frac{m_1 + n_1}{m_2' + n_2'} \right)_v = \left(\frac{m_1}{n_2'} \right)_v = \left(\frac{n_1}{m_2'} \right)_v. \quad (I.88)$$

С другой стороны, полином $(m_1 m_2 - n_1 n_2)$ может содержать множитель $(s^2 + \omega_v^2)^2$ потому, что полиномы m_1 и m_2 имеют простой множитель, а полином n_2 — квадратный. Следовательно, вместо ур-ния (I.86) можно записать:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= m_1^* (s^2 + \omega_v^2); & m_2 &= m_2^* (s^2 + \omega_v^2) \\ n_2 &= n_2^* (s^2 + \omega_v^2)^2 \end{aligned} \right\}. \quad (I.89)$$

Тогда из ур-ния (I.85) имеем

$$k_v = \left(\frac{n_1}{m_2'} \right)_v. \quad (I.90)$$

Другое отношение $\left(\frac{m_1}{n_2'} \right)_v$ из выражения (I.88) становится теперь неопределенным и несправедливым, поскольку здесь нельзя использовать зависимость, аналогичную той, которая дается уравнением (I.87).

Случай, когда полиномы n_1 и n_2 содержат множитель $(s^2 + \omega_v^2)$, а полином m_2 — квадрат этого множителя, является лишь вариантом рассмотренной ситуации. Конечные результаты совпадают с полученными выше при условии, что в соответствующих аналитиче-

ских выражениях полиномы m и n переставлены местами. Таким образом, вместо ур-ния (I.89) имеем

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= n_1^* (s^2 + \omega_v^2); & n_2 &= n_2^* (s^2 + \omega_v^2) \\ m_2 &= m_2^* (s^2 + \omega_v^2)^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.91})$$

Вычет можно вычислить из выражения

$$k_v = \left(\frac{m_1}{n_2} \right), \quad (\text{I.92})$$

причем теперь уже другое отношение из выражения (I.88) становится неопределенным и несправедливым. В данном случае функция $Z(s)$ не имеет простых полюсов на мнимой оси, поэтому соответствующий вычет всегда может быть вычислен из отношения четных полиномов при $s^2 = -\omega_v^2$, так, что комплексные члены полностью исключаются.

Поскольку такое отношение, очевидно, должно быть всегда вещественным, неотрицательность полинома $\text{Re}[Z(j\omega)]$ (когда он имеет нули) гарантирует вещественность вычетов в соответствующих полюсах функции $Z(s)$ на мнимой оси. Однако это не дает уверенности в том, что указанные вычеты будут положительными. Поэтому для проверки условия **В** критерия (I.36) необходимо найти эти вычеты.

Прежде чем сделать выводы из рассмотрения методов проверки принадлежности рациональных функций к классу п. в. ф., следует отметить несколько моментов, представляющих, правда, ограниченный интерес, но иногда полезных. Так, метод, описанный в этом параграфе, приводит к весьма громоздкой проверке того, является ли полином числителя полиномом Гурвица, хотя он бесспорно должен быть таковым, если данная рациональная функция является п. в. ф. В то же время, когда в процессе проверки принадлежности полинома знаменателя к классу полиномов Гурвица обнаруживается, что он имеет простые полюсы на мнимой оси (т. е. необходимо вычисление вычетов), то может оказаться целесообразным переключиться на проверку обратной рациональной функции, поскольку полином ее знаменателя (который первоначально был полиномом числителя) может не иметь нулей на мнимой оси. В этом случае проще проверить обратную функцию, что не потребует вычисления вычета. Другими словами, проверка положительной вещественной функции по условиям **А**, **Б** и **В** критерия (I.36) сводится только к проверке по условиям **А** и **Б**, когда полюсы на мнимой оси отсутствуют. Поскольку рациональная функция либо имеет полюсы на мнимой оси и не имеет на ней нулей, либо наоборот, то данная ориентация функции (прямая или обратная) может быть наиболее выгодной.

В любом случае при проверке функции на принадлежность ее к классу п. в. ф. необходимо последовательно выявлять все присущие ей свойства, не пропуская ни одного условия проверки. По-

линомы должны быть полными, т. е. содержать все члены, иметь положительные вещественные коэффициенты; наибольшая и наименьшая степени членов не должны отличаться более, чем на единицу. Если непосредственно видно, что любое из этих свойств не выполняется, то ясно, что нет необходимости прибегать к какому-либо более совершенным средствам проверки. Очевидно, могут возникнуть случаи, когда адекватными окажутся более простые критерии, чем формальные методы проверки Гурвица и Штурма. Однако данный вопрос выходит за рамки настоящего параграфа.

Отметим некоторые необходимые свойства полинома $(m_1 m_2 - n_1 n_2)$, знание которых в отдельных случаях может оказаться нужным. Как известно, алгебраический знак полиномов $m_1 m_2$ или $-n_1 n_2$ изменяется в нуле функций m_1 или m_2 , либо n_1 или n_2 . Известно также, что если знак полинома $(m_1 m_2 - n_1 n_2)$ должен оставаться неизменным, то знаки функций $m_1 m_2$ и $-n_1 n_2$ не могут изменяться один за другим. Иными словами, если на какой-то частоте функция $m_1 m_2$ изменяет знак, то последующее изменение его не может произойти у функции $-n_1 n_2$, так как при этом весь полином $(m_1 m_2 - n_1 n_2)$ изменит знак. Значит, такое следующее изменение знака вповь будет у функции $m_1 m_2$. Поскольку нули функций m_1 и n_1 , а также функций m_2 и n_2 чередуются, отсюда следует, что затем должна претерпевать два изменения знака функция $-n_1 n_2$. Вследствие этого полиномы $m_1 m_2$; $-n_1 n_2$ и т. д. будут иметь два нуля подряд. Это двойное чередование нулей функций $m_1 m_2$ и $-n_1 n_2$ является необходимым, хотя, очевидно, недостаточным условием гарантии того, что полином $(m_1 m_2 - n_1 n_2)$ при $s = j\omega$ будет положительным. В тех случаях, когда нули этих функций либо известны, либо легко находятся, нетрудно убедиться, есть ли необходимость прибегать к проверке по методу Штурма.

Как показал Реза, можно компактно выразить условия принадлежности функции к классу п. в. ф. Для этого необходимо образовать функцию $\frac{m_1 m_2}{-n_1 n_2}$ при $s = j\omega$, изобразив ее графически как

функцию переменной ω^2 в виде, показанном на рис. I.8. График соответствует случаю, когда функция $Z(s)$ представляет собой отношение двух полиномов пятой степени. Важное значение имеет также следующий факт: двойное чередование нулей функций $m_1 m_2$ и $-n_1 n_2$ гарантирует, что наименьший минимум функции, изображенной на рис. I.8, не может быть меньше, чем ее наибольший максимум при $\omega^2 > 0$ (см. заштрихованную полосу на рис. I.8). Доказательство этого положения следует из условия $m_1 m_2 - kn_1 n_2 = 0$, или $\frac{m_1 m_2}{-n_1 n_2} = -k$. В противном случае, очевидно,

рассматриваемое уравнение может иметь больше положительных вещественных (для ω^2) корней при соответствующем значении k , чем позволяет степень полинома от ω^2 . Например, для функции, изображенной на рис. I.8, количество таких корней может быть максимально равно 5. Соответствующее сопротивление $Z(s)$ яв-

ляется положительным вещественным, если (и только если) точка -1 лежит в пределах заштрихованного участка.

Предположение о том, что частота — удобный критерий быстрой проверки, является или нет данная рациональная функция п. в. ф., следует из выражения

$$(m_1 m_2 - n_1 n_2) = m_1 n_2 \left(\frac{m_2}{n_2} - \frac{n_1}{m_1} \right) = m_1 n_2 (\psi_2 - \psi_1). \quad (I.93)$$

Как отмечалось в связи с проверкой принадлежности данного полинома к классу полиномов Гурвица, функции ψ_1 и ψ_2 имеют

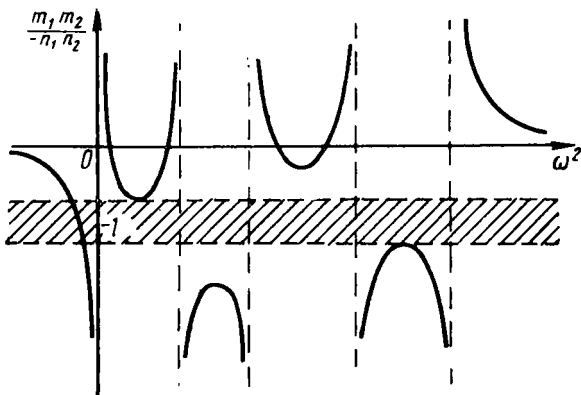


Рис. I.8

простые нули и полюсы, чередующиеся на мнимой оси. Поскольку их разность изменяет знак в каждом полюсе той или другой функции и упомянутые нули и полюсы являются нулями полинома $m_1 n_2$,

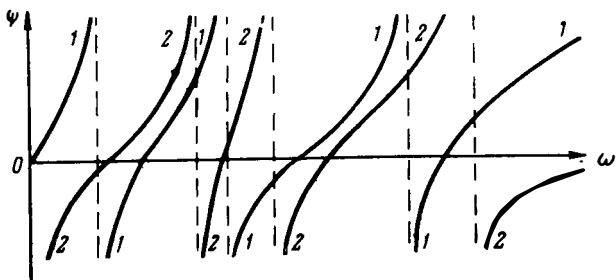


Рис. I.9

то функция, определяемая выражением (I.93), не изменяет знака в данных точках. Она может изменять знак на мнимой оси только в том случае, если разность $(\psi_2 - \psi_1)$ изменяет знак в точках, где полиномы ψ_1 и ψ_2 конечны.

На рис. I.9 приведены графики функций ψ_1 и ψ_2 . Они соответствуют случаю, когда исследуемое сопротивление является п. в. ф.

(цифры на кривых указывают индексы функций). Как видно из рисунка, функция, определяемая выражением (I.93), изменяет знак на мнимой оси лишь тогда, когда графики обоих полиномов пересекаются. Если известно только расположение их нулей и полюсов, можно без дальнейшего вычисления ориентировочно определить, является ли соответствующая рациональная функция п. в. ф. Для того чтобы получить точное решение поставленной задачи, необходимо выполнить детальную проверку (например, по рассмотренному выше методу, использующему ряд функций Штурма). Однако уже знания приближенного расположения полюсов и нулей, которого с помощью соответствующих вычислений нетрудно достигнуть и для сравнительно сложных рациональных функций, часто вполне достаточно, чтобы получить правильный ответ на вопрос, принадлежит ли данная функция к классу п. в. ф.

1.5. Некоторые дополнительные свойства положительной вещественной функции

Рассмотрим часто встречающееся преобразование

$$z(s) = \frac{1 - Z(s)}{1 + Z(s)}; \quad Z(s) = \frac{1 - z(s)}{1 + z(s)}, \quad (I.94)$$

которое отображает правую половину Z -плоскости на внутреннюю часть единичного круга z -плоскости и наоборот. Если функция $Z(s)$ является п. в. ф., тогда $\operatorname{Re}[Z(s)] \geq 0$ при $\operatorname{Re}(s) \geq 0$. Из свойств отображения функции (I.94) следует, что $|z(s)| \leq 1$ при $\operatorname{Re}(s) \geq 0$. Наоборот, если $|z(s)| \leq 1$ при $\operatorname{Re}(s) \geq 0$, то функция $Z(s)$ должна быть, очевидно, п. в. ф. (предполагая, что она вещественна при вещественном s).

Эта взаимная зависимость между функциями $z(s)$ и $Z(s)$ может быть сформулирована по-иному, что в ряде случаев оказывается более удобным на практике. Если функция $Z(s)$ является п. в. ф., то функция $1 + Z(s)$, очевидно, также является п. в. ф. Следовательно, она не имеет нулей в правой полуплоскости и на мнимой оси, так как функция $1 + Z(j\omega)$ не может равняться нулю при $\operatorname{Re}[Z(j\omega)] \geq 0$. Функция $z(s)$ является аналитической в правой полуплоскости s и на мнимой оси. Используя принцип максимума модуля [2]¹, можно установить, что максимальное абсолютное значение функции $z(s)$ для всех значений $s = \sigma + j\omega$ ($\sigma \geq 0$) должно иметь место при $\sigma = 0$. Таким образом, если функция $Z(s)$ является п. в. ф. (с нулями или полюсами на мнимой оси или без них), то функция $z(s)$ будет аналитической в правой полуплоскости s , включая мнимую ось, причем $|z(j\omega)| \leq 1$. Наоборот, если $z(s)$ — вещественная функция при вещественных s и известно, что она аналитична в правой полуплоскости s , включая мнимую ось, и если

¹ См. также [52], стр. 56 (прим. ред.).

$|z(j\omega)| \leq 1$, то согласно принципу максимума модуля $|z(s)| \leq 1$ для всех значений $s = \sigma + j\omega$ при $\sigma \geq 0$. Свойство отображения, характеризующее ур-нием (I.94), показывает при этом, что функция $Z(s)$ является п. в. ф.

Представим функцию $Z(s)$ в виде выражения (I.51).

Тогда

$$z(s) = \frac{(m_2 - m_1) + (n_2 - n_1)}{(m_2 + m_1) + (n_2 + n_1)} \quad (I.95)$$

и

$$|z(j\omega)|^2 = \left[\frac{(m_2 - m_1)^2 - (n_2 - n_1)^2}{(m_2 + m_1)^2 - (n_2 + n_1)^2} \right]_{s=j\omega} \quad (I.96)$$

Из этих соотношений видно, что перестановка полиномов m_1 и m_2 или n_1 и n_2 не влияет ни на знаменатель функции $z(s)$, ни на ее абсолютное значение при $s = j\omega$. Следовательно, если функция $Z(s)$ является п. в. ф., так что $z(s)$ аналитична в правой полуплоскости и $|z(j\omega)| \leq 1$, то это положение остается справедливым при перестановке мест полиномов m_1 и m_2 или n_1 и n_2 . Таким образом, можно утверждать, что когда

$$Z(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2} \quad (I.97)$$

является п. в. ф., то функция

$$Z^*(s) = \frac{m_2 + n_1}{m_1 + n_2} = \frac{P^*(s)}{Q^*(s)} \quad (I.98)$$

и обратная ей функция также будут п. в. ф. Четную или нечетную части полиномов $P(s)$ и $Q(s)$ можно поменять местами. При этом функция $Z(s)$ останется положительной вещественной.

Следствием рассмотренных свойств является также утверждение о том, что если $Z(s)$ представляет собой п. в. ф., то не только функции $P(s)$ и $Q(s)$, но и функции $P^*(s)$ и $Q^*(s)$, полученные в результате перестановки четных или нечетных частей исходной функции, будут полиномами Гурвица.

I.6. Некоторые замечания, относящиеся к сопротивлению передачи

Рассматривая квадратичную форму (I.17) и учитывая, что она должна быть п. в. ф. при всех вещественных значениях x_1, \dots, x_p , запишем функцию $z_{ik}(s)$ в прямоугольной системе координат

$$z_{ik}(s) = r_{ik}(\sigma, \omega) + jx_{ik}(\sigma, \omega). \quad (I.99)$$

Тогда, поскольку

$$\operatorname{Re} \sum_{i,k=1}^p z_{ik} x_i x_k = \sum_{i,k=1}^p r_{ik} x_i x_k, \quad (I.100)$$

применение рассмотренного ранее метода проверки положительных вещественных функций к сопротивлению $Z(s)$, выраженному в виде соотношения (I.17), показывает, что если $Z(s)$ должна быть п. в. ф., то и все входные сопротивления и сопротивления передачи $z_{ik}(s)$ также должны быть вещественными при вещественном s . При этом необходимо, чтобы они были аналитичными в правой полуплоскости s и чтобы выполнялось соотношение

$$\sum_{i,k=1}^p r_{ik} x_i x_k \geq 0 \text{ при } s = j\omega (\sigma = 0). \quad (\text{I.101})$$

Если любое из сопротивлений $z_{ik}(s)$ имеет полюсы на мнимой оси, то последние должны быть простыми, а вычеты функции $Z(s)$ в них — вещественными и положительными. Это утверждение вытекает из того факта, что любые полюсы функции $z_{ik}(s)$ являются полюсами функции $Z(s)$. Обозначим вычеты функции $z_{ik}(s)$ в ее полюсах на мнимой оси через k_{ik} , а аналогичные вычеты функции $Z(s)$ — через k . Тогда очевидно, что выражение

$$k = \sum_{i,k=1}^p k_{ik} x_i x_k \quad (\text{I.102})$$

будет положительной вещественной функцией.

Таким образом, для того чтобы функция $Z(s)$ была п. в. ф., квадратичные формы (I.101) и (I.102) должны быть положительно определенными. Вспомнив известный способ выражения необходимых и достаточных условий принадлежности данной вещественной квадратичной формы к классу положительно определенных (см. [2]¹), можно сделать вывод, что, кроме условия $r_{ii} \geq 0$ (при $s = j\omega$) и $k_{ii} \geq 0$, следующие определители

$$\begin{vmatrix} r_{11} & \dots & r_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{p1} & \dots & r_{pp} \end{vmatrix}; \quad (\text{I.103})$$

$$\begin{vmatrix} k_{11} & \dots & k_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ k_{p1} & \dots & k_{pp} \end{vmatrix} \quad (\text{I.104})$$

и все их главные миноры должны быть положительными.

Для четырехполюсника этот результат означает, что при $s = j\omega$ необходимо выполнение условий:

$$r_{11} \geq 0; \quad r_{22} \geq 0; \quad r_{11}r_{22} - r_{12}^2 \geq 0. \quad (\text{I.105})$$

Любые полюсы функции $z_{ik}(s)$ на мнимой оси должны быть простыми, а вычеты в этих полюсах — вещественными, причем должны удовлетворяться следующие неравенства:

$$k_{11} \geq 0; \quad k_{22} \geq 0; \quad k_{11}k_{22} - k_{12}^2 \geq 0. \quad (\text{I.106})$$

¹ См. также [56], стр. 21 (прим. ред.).

Важным следствием полученных результатов является условие, что r_{12} и k_{12} не должны быть положительными. Именно оно приводит к тому, что нули сопротивления передачи $z_{12} = z_{21}$ могут иметь любую кратность и лежать в любой точке плоскости комплексных частот. При этом степень полинома знаменателя должна быть на единицу больше степени полинома числителя. Тогда угол функции z_{12} изменится более, чем на 90° в интервале частот $0 < \omega < \infty$ и, следовательно, вещественная часть r_{12} на некоторых частотах будет отрицательной.

На основе приведенных рассуждений можно заключить, что если выражение (I.54) представляет собой вещественную часть сопротивления передачи (I.51), то полином (I.56) может иметь простые множители, относящиеся к мнимой оси. Исключением является тот случай, когда соответствующая частота будет полюсом этого сопротивления. Тогда вещественная часть, определяемая выражением (I.54), также будет иметь полюс, если знаменатель данного выражения не имеет в рассматриваемой точке кратных нулей второго порядка. Поскольку вещественная часть входного сопротивления на мнимой оси не может иметь полюса, условия (I.105) не допускают наличия полюса и у вещественной части сопротивления передачи. Таким образом, если сопротивление передачи имеет полюс на мнимой оси, то полином $(m_1 m_2 - n_1 n_2)$ подобно п. в. ф. должен иметь кратный нуль двойного порядка.

Для симметричного четырехполюсника $r_{11} = r_{22}$ и условия (I.105) принимают вид

$$r_{11} \geq 0; \quad r_{11}^2 - r_{12}^2 = (r_{11} + r_{12})(r_{11} - r_{12}) \geq 0. \quad (\text{I.107})$$

Для симметричной скрещенной цепи, изображенной на рис. 1.10, получим

$$z_{11} = \frac{1}{2}(z_b + z_a); \quad z_{12} = \frac{1}{2}(z_b - z_a) \quad (\text{I.108})$$

или

$$z_a = z_{11} - z_{12}; \quad z_b = z_{11} + z_{12}. \quad (\text{I.109})$$

Следовательно,

$$r_a = r_{11} - r_{12}; \quad r_b = r_{11} + r_{12}. \quad (\text{I.110})$$

Неравенства (I.107) теперь будут иметь вид

$$r_a + r_b \geq 0; \quad r_a r_b \geq 0 \quad (\text{I.111})$$

или

$$r_a \geq 0; \quad r_b \geq 0.$$

Аналогичные зависимости справедливы для вычетов, определяемых выражениями (I.106). Условия осуществимости симметричного

четыреполюсника таким образом определяются условиями осуществимости сопротивлений z_a и z_b скрещенной цепи. Следовательно, если симметричный четырехполюсник реализуем, то он во всяком случае реализуем в виде скрещенной цепи. Другими словами, скрещенная цепь является наиболее общей формой симметричной цепи. Этот результат практически очень полезен, так как ясно, что если в качестве исходной при проектировании симметричных цепей используется скрещенная цепь, то метод расчета будет наиболее общим, чего нельзя сказать применительно к Т- или П-образной или перекрытой Т-образной цепям. По той же причине скрещенная цепь играет важную роль в методах синтеза.

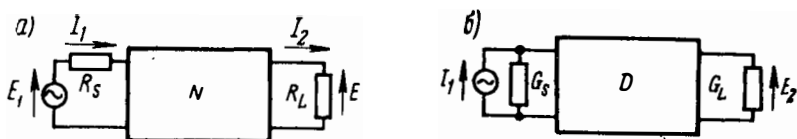


Рис. 1.11

Важным для практики является и тот факт, что для любой данной цепи и обратной ей передаточные функции обладают одинаковыми свойствами. Чтобы оценить справедливость этого утверждения, рассмотрим цепь N , работающую между соответствующими источником и нагрузкой (рис. 1.11а), и дуальную ей цепь (рис. 1.11б). Четыреполюсники N и D являются дуальными или обратными так же, как их источники и нагрузки. Для сопротивлений источника и нагрузки в этом случае справедливы следующие количественные соотношения:

$$G_S = R_S; \quad G_L = R_L. \quad (1.112)$$

Поскольку проводимость передачи первой схемы, приведенной на рис. 1.11а, численно равна сопротивлению передачи второй схемы, изображенной на рис. 1.11б, то имеем

$$\left(\frac{I_2}{E_1} \right)_N = \left(\frac{E_2}{I_1} \right)_D. \quad (1.113)$$

Однако для первой схемы справедливо выражение

$$\left(\frac{E_2}{E_1} \right)_N = \left(\frac{I_2}{E_1} \right)_N R_L. \quad (1.114)$$

¹ Для количественного равенства величин неодинаковой размерности в книге используется знак \doteq (прим. ред.).

Заменяя на второй схеме источник тока с параллельно включенной проводимостью G_S источником напряжения $E_1 = \frac{I_1}{G_S} = \frac{I_1}{R_S}$ с последовательно включенным сопротивлением R_S , получим

$$\left(\frac{E_2}{E_1}\right)_D = \left(\frac{E_2}{I_1}\right)_D R_S. \quad (\text{I. 115})$$

Следовательно,

$$\left(\frac{E_2}{E_1}\right)_D \equiv \left(\frac{E_2}{E_1}\right)_N \frac{R_S}{R_L}. \quad (\text{I. 116})$$

При $R_S = R_L$, как это часто имеет место, коэффициент передачи по напряжению будет одинаковым для цепи N и для дуальной цепи. Если сопротивления источника и нагрузки представляют собой любые резистивные элементы, то передаточные функции отличаются только постоянным множителем.



II.

ГЛАВА

Входные и передаточные функции двухэлементных цепей

В этой главе подробно исследуются характеристики входных и передаточных сопротивлений и проводимостей цепей, в которых содержатся два из трех возможных типов элементов R , L и C . Иными словами, рассматриваются различные виды тех положительных вещественных функций, которые являются сопротивлениями или проводимостями так называемых двухэлементных цепей. В последующих главах будет показано, что относительная простота указанных функций по сравнению с соответствующими функциями цепей, содержащих все три типа элементов, позволяет разработать простые и прямые методы синтеза. Эти методы являются полезными не только при практическом применении, но могут служить базой для более сложных методов синтеза RLC цепей.

II.1. Функции LC цепей

Сопротивления LC цепей представляют собой простейшие из трех возможных типов функций двухэлементных цепей, так как на вещественных частотах они имеют только мнимую часть, а не вещественную и мнимую, как на комплексных частотах вида $s = \sigma + j\omega$. Поэтому логично начать исследование с данного простейшего случая.

Рассмотрим соотношение (I.4) при $F_0 \equiv 0$ и $p = 1$, когда

$$z_{11}(s) = Z(s) = \left(sT_0 + \frac{V_0}{s} \right)_{I_1=1} \quad (\text{II.1})$$

Учитывая, что функции T_0 и V_0 — положительные вещественные, сопротивление $Z(j\omega)$ представляет чисто мнимую величину. Это вытекает из физических соображений, заключающихся в том, что цепь, не содержащая резисторов, не может потреблять в синусоидальном установившемся режиме какое-либо среднее количество

энергии. Цепь, у которой вещественная часть любого сопротивления или проводимости равна нулю при $s = j\omega$, называется *цепью без потерь*, так как в ней не может быть средних потерь энергии.

Полагая, что для ур-ния (II.1) справедливо условие $I_1 = 1$ и приравнявая это уравнение нулю, получим

$$s = \sqrt{-\frac{V_0}{T_0}} = \pm j \sqrt{\frac{V_0}{T_0}}. \quad (\text{II.2})$$

Здесь T_0 и V_0 — неявные функции s . Однако поскольку T_0 и V_0 являются п. в. ф., то все нули $Z(s)$, определяемые ур-нием (II.2), должны иметь чисто мнимые значения. Все полюсы функции $Z(s)$, которые являются нулями функции $Y(s) = \frac{1}{Z(s)}$, представленной

выражением, аналогичным ур-нию (II.1), тоже располагаются на мнимой оси плоскости s . Следовательно, входное сопротивление (или проводимость) цепи без потерь является предельной формой п. в. ф., все нули и полюсы которой лежат на мнимой оси плоскости комплексных частот. Как мы уже знаем, такие нули и полюсы п. в. ф. должны быть простыми, поэтому можно сказать, что входное сопротивление (или проводимость) цепи без потерь (LC цепи) имеет только простые нули и полюсы, ограниченные мнимой осью.

Анализ, приведенный в предыдущей главе, показал, что вычеты в полюсах, лежащих на мнимой оси, должны быть вещественными и положительными. В то же время функция, имеющая полюсы только на мнимой оси с положительными вещественными вычетами (аналогично функции $\psi(s) = \frac{m}{n}$, образованной из четной и нечетной частей полинома Гурвица), может иметь лишь простые нули и полюсы, которые на этой оси чередуются. Входное сопротивление цепи без потерь (называемое также *реактивной функцией*), как раз обладающее такими свойствами, представляет собой отношение четной и нечетной частей полинома Гурвица.

Утверждение о том, что нули и полюсы функции LC цепи на мнимой оси являются простыми и чередуются, можно доказать и другим способом. Рассмотрим функцию (II.1) для комплексных значений s

$$Z(s) = R(\sigma, \omega) + jX(\sigma, \omega) = (\sigma + j\omega)T_0 + \frac{V_0}{\sigma + j\omega}. \quad (\text{II.3})$$

Тогда

$$R(\sigma, \omega) = \sigma T_0 + \frac{\sigma V_0}{\sigma^2 + \omega^2} \quad (\text{II.4})$$

и

$$X(\sigma, \omega) = \omega T_0 - \frac{\omega V_0}{\sigma^2 + \omega^2}. \quad (\text{II.5})$$

Используя ур-ние (II.4), получим

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma} = \sigma \frac{\partial T_0}{\partial \sigma} + T_0 + \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} \frac{\partial V_0}{\partial \sigma} + \frac{\omega^2 - \sigma^2}{(\sigma^2 + \omega^2)^2} V_0 \quad (\text{II.6})$$

или после преобразований

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=0} = T_0 + \frac{V_0}{\omega^2} = 4(T_{\text{ср}} + V_{\text{ср}}). \quad (\text{II.7})$$

Выражение (II.7) является положительным для всех вещественных частот ω (и не равно нулю, так как $T_{\text{ср}} + V_{\text{ср}}$ при $I_1 = 1$ в точке, не лежащей на мнимой оси, может быть равно нулю в любых нетривиальных случаях), поэтому условие Коши — Римана [2]¹

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma} = \frac{\partial X}{\partial \omega} \quad (\text{II.8})$$

дает

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \right)_{\sigma=0} > 0, \quad (\text{II.9})$$

а, значит, реактивная функция имеет на мнимой оси положительный, не равный нулю наклон на всех частотах.

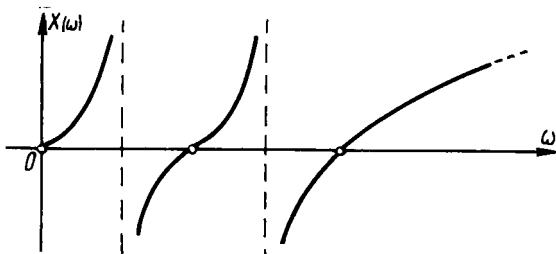


Рис. II.1

Полученный результат показывает, что все нули должны быть простыми, ибо наклон в нуле более высокого порядка равен нулю и изменяет знак в любом нуле четной кратности.

При использовании проводимостей оказывается, что наклон функции реактивной проводимости (susceptance) $Y(j\omega) = jB(\omega)$ является положительным и не равным нулю; следовательно, нули $Y(s)$, т. е. полюсы $Z(s)$, также простые. Далее, согласно выражению (II.9), представляющему условие положительного наклона, полюсы и нули рассматриваемой функции должны чередоваться. При этом реактивная функция (или функция реактивной проводимости) обязательно должна иметь общий вид, графически показанный на рис. II.1. Ввиду того что она с увеличением частоты только

¹ См. также [52], стр. 21 (прим. ред.).

возрастает, то очевидно, что два нуля не могут следовать один за другим. Поскольку полюсы функции являются нулями обратной ей функции, а последние обладают теми же свойствами, что и полюсы исходной функции, то два полюса также не могут следовать друг за другом.

Рассмотрим поведение функции $Z(s)$ на комплексной плоскости. Согласно известному представлению комплексная плоскость является поверхностью бесконечно большой сферы, а мнимая ось представляет собой большой круг, проходящий через южный полюс при $Z = 0$ и через северный полюс при $Z = \infty$. Из рис. II.1 видно, что функция достигает значения $+\infty$, затем имеет разрыв и вновь начинается при значении $-\infty$, причем условие, согласно которому она должна непрерывно возрастать, не нарушается.

Указанное условие, при котором наклон является положительным, можно также обосновать следующим образом. Из ур-ния (II.3) имеем

$$Z(j\omega) = jX(\omega) = j \left(T_0\omega - \frac{V_0}{\omega} \right). \quad (\text{II.10})$$

Отсюда

$$X(\omega) = T_0\omega - \frac{V_0}{\omega}. \quad (\text{II.11})$$

После дифференцирования с учетом того, что функции T_0 и V_0 являются явными функциями ω , получаем

$$\frac{dX}{d\omega} = T_0 + \frac{V_0}{\omega^2} + \omega \frac{dT_0}{d\omega} - \frac{1}{\omega} \frac{dV_0}{d\omega}. \quad (\text{II.12})$$

В последних двух членах выражения (II.12) T_0 и V_0 необходимо рассматривать как функции всех комплексных амплитуд тока и их сопряженных величин [см. ур-ния (I.5), (I.6), (I.7)], т. е.

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= T_0(I_1, \dots, I_l; \bar{I}_1, \dots, \bar{I}_l) \\ V_0 &= V_0(I_1, \dots, I_l; \bar{I}_1, \dots, \bar{I}_l) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.13})$$

Производные этих функций принимают вид

$$\frac{dT_0}{d\omega} = \sum_{i=1}^l \left(\frac{\partial T_0}{\partial I_i} \frac{dI_i}{d\omega} + \frac{\partial T_0}{\partial \bar{I}_i} \frac{d\bar{I}_i}{d\omega} \right) \quad (\text{II.14})$$

и

$$\frac{dV_0}{d\omega} = \sum_{i=1}^l \left(\frac{\partial V_0}{\partial I_i} \frac{dI_i}{d\omega} + \frac{\partial V_0}{\partial \bar{I}_i} \frac{d\bar{I}_i}{d\omega} \right). \quad (\text{II.15})$$

Теперь можно использовать то обстоятельство, что в цепи без потерь токи контуров оказываются либо в фазе, либо в противофазе; следовательно, если I_1 принимается за эталон [как в ур-нии

(II.1)], то все комплексные амплитуды тока являются вещественными. В таком случае, объединив два члена в ур-ниях (II.14) и (II.15) и записав функции T_0 и V_0 в виде

$$T_0 = \sum_{i,k=1}^l L_{ik} \bar{I}_i I_k; \quad V_0 = \sum_{i,k=1}^l S_{ik} \bar{I}_i I_k \quad (\text{II.16})$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial T_0}{\partial \bar{I}_i} = \sum_{k=1}^l L_{ik} I_k; \quad \frac{\partial V_0}{\partial \bar{I}_i} = \sum_{k=1}^l S_{ik} I_k, \quad (\text{II.17})$$

получим

$$\omega \frac{dT_0}{d\omega} - \frac{1}{\omega} \frac{dV_0}{d\omega} = \frac{2}{j} \sum_{i=1}^l \left[\sum_{k=1}^l j \left(L_{ik} \omega - \frac{S_{ik}}{\omega} \right) I_k \right] \frac{d\bar{I}_i}{d\omega}. \quad (\text{II.18})$$

Величина

$$\sum_{k=1}^l j \left(L_{ik} \omega - \frac{S_{ik}}{\omega} \right) I_k = E_i \quad (\text{II.19})$$

представляет собой напряжение источника в i -м контуре. Согласно принятому ранее предположению в цепи действует лишь один источник напряжения в первом контуре, т. е. напряжения всех источников, за исключением указанного, равны нулю, поэтому ур-ние (II.18) с учетом того, что $I_1 = \text{const} = 1$, принимает вид

$$\omega \frac{dT_0}{d\omega} - \frac{1}{\omega} \frac{dV_0}{d\omega} = \frac{2}{j} E_1 \frac{d\bar{I}_1}{d\omega} = 2X(\omega) I_1 \frac{dI_1}{d\omega} = 0. \quad (\text{II.20})$$

Тогда из ур-ния (II.12) получим

$$\frac{dX}{d\omega} = T_0 + \frac{V_0}{\omega^2} > 0, \quad (\text{II.21})$$

а из ур-ния (II.11)

$$\frac{dX}{d\omega} - \frac{X}{\omega} = \frac{2V_0}{\omega^2} > 0. \quad (\text{II.22})$$

Следует отметить не только то, что реактивная функция имеет положительный наклон, но и что он в любой точке этой кривой должен быть больше наклона прямой линии, проведенной из начала координат до этой точки. На рис. II.2 дан график, для которого условие (II.22) не выполнено, хотя наклон везде положительный. Указанное условие, очевидно, более строгое, чем только одно условие положительного наклона. Для любой кривой, заданной графически, это можно легко проверить, если нанести на графике луч, исходящий из начала координат, и использовать его свободное вращение (при закреплении луча в начале координат)

около кривой $X(\omega)$. Наклон этой кривой, где бы она ни пересекала луч, должен быть больше его наклона.

Выражение для реактивной функции как отношение полиномов можно получить из общего равенства

$$Z(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2} \quad (\text{II. 23})$$

с учетом условия

$$\operatorname{Re} [Z(j\omega)] = \left(\frac{m_1 m_2 - n_1 n_2}{m_2^2 - n_2^2} \right)_{s=j\omega} \equiv 0. \quad (\text{II. 24})$$

Отсюда

$$m_1 m_2 - n_1 n_2 \equiv 0, \quad (\text{II. 25})$$

так как функция, стремящаяся к нулю вдоль отрезка линии, должна стремиться тождественно к нулю¹. Могут возникнуть два нетривиальных случая, для которых выполняется условие (II.25): либо $m_1 \equiv n_2 \equiv 0$, либо $n_1 \equiv m_2 \equiv 0$.

Таким образом, можно записать

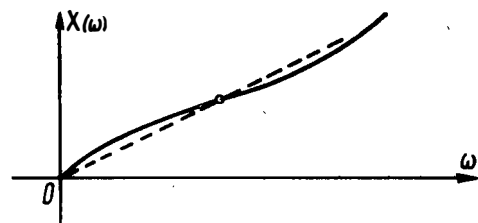


Рис. II.2

$$\left. \begin{aligned} & Z(s) = \frac{n_1}{m_2} \\ \text{или} & Z(s) = \frac{m_1}{n_2} \end{aligned} \right\} (\text{II. 26})$$

Как показано в § I.5, четные и нечетные части m_1 и n_2 , а также m_2 и n_1 являются соответственно четными и нечетными частями полинома Гурвица, и, таким образом, реактивная функция по своим характеристикам, очевидно, идентична функции $\psi(s) = \frac{m}{n}$

(или $\frac{1}{\psi} = \frac{n}{m}$), рассмотренной при исследовании полиномов Гурвица. Важно учитывать, что реактивная функция должна быть отношением двух полиномов, один из которых нечетный, а другой четный. Следовательно, в полиноме Гурвица, помимо других свойств, не могут отсутствовать какие-либо члены, и, очевидно, в точках $s = 0$ и $s = \infty$ он всегда будет иметь соответственно нуль или полюс. Иными словами, реактивная функция (сопротивление цепи без потерь) в точках $s = 0$ и $s = \infty$ всегда должна иметь либо нуль, либо полюс. Обе точки могут быть либо нулями, либо полюсами, либо одна из них может быть нулем, а другая — полю-

¹ Согласно другой интерпретации, также справедливой для изложенного в настоящей работе анализа, вещественная часть реактивной функции на мнимой оси имеет импульсы в полюсах этой функции и, следовательно, не равна тождественно нулю. Такой более общий подход (см. § VIII.2) в данной главе не рассматривается.

сом (какая именно — не имеет значения). Аналогичные замечания относятся, разумеется, и к проводимости цепи без потерь.

Для анализа характеристик сопротивлений передачи такой цепи следует рассмотреть ур-ние (I.17) при $p = 2$. В этом случае функция

$$Z(s) = z_{11}x_1^2 + 2z_{12}x_1x_2 + z_{22}x_2^2 \quad (\text{II.27})$$

должна обладать всеми свойствами функции входного сопротивления цепи без потерь, только что описанной при всех вещественных значениях переменных x_1 и x_2 . Нетрудно заметить, что сопротивление передачи z_{12} и входные сопротивления z_{11} и z_{22} могут иметь только простые полюсы, ограниченные мнимой осью. Поскольку вычет

$$k = k_{11}x_1^2 + 2k_{12}x_1x_2 + k_{22}x_2^2 \quad (\text{II.28})$$

функции $Z(s)$ в таких полюсах должен быть вещественным и положительным, очевидно, что все три вычета k_{11} , k_{22} , k_{12} сопротивлений z_{11} , z_{22} , z_{12} соответственно должны быть вещественными. Следовательно, вычеты сопротивления передачи, подобно вычетам входных сопротивлений z_{11} и z_{22} должны быть вещественными, но не обязательно положительными, так как если k в ур-нии (II.28) положителен при всех вещественных значениях x_1 и x_2 , то, помимо условий $k_{11} \geq 0$ и $k_{22} \geq 0$, будет удовлетворяться только так называемое *условие вычетов*

$$k_{11}k_{22} - k_{12}^2 \geq 0. \quad (\text{II.29})$$

Ясно, что это условие может быть удовлетворено и при отрицательном значении k_{12} .

Разложение входного сопротивления или сопротивления передачи на элементарные дроби имеет вид

$$z_{ik}(s) = \frac{k_{ik}^{(0)}}{s} + \frac{k_{ik}^{(2)}}{s-s_2} + \frac{k_{ik}^{(2)}}{s+s_2} + \dots + \frac{k_{ik}^{(2n)}}{s-s_{2n}} + \frac{k_{ik}^{(2n)}}{s+s_{2n}} + k_{ik}^{(2n+2)}s, \quad (\text{II.30})$$

где $s = 0; \pm s_2; \pm s_4; \dots; \infty$ — полюсы на мнимой оси, сопряженные величины которых имеют обратный алгебраический знак. Вычеты в сопряженных полюсах обычно являются сопряженными при условии, что функция характеризуется вещественными значениями при всех вещественных s . Вследствие условия вещественности в данном случае эти вычеты одинаковы в сопряженных полюсах. После объединения членов с сопряженными полюсами ур-ние (II.30) принимает вид

$$z_{ik}(s) = \frac{k_{ik}^{(0)}}{s} + \frac{2k_{ik}^{(2)}s}{s^2-s_2^2} + \frac{2k_{ik}^{(4)}s}{s^2-s_4^2} + \dots + \frac{2k_{ik}^{(2n)}s}{s^2-s_{2n}^2} + k_{ik}^{(2n+2)}s. \quad (\text{II.31})$$

Если начало координат или бесконечно удаленная точка, или обе точки одновременно являются регулярными, то первый или

последний, или и первый и последний члены в выражении (II.31) отсутствуют.

В любом случае, если это выражение представлено в виде отношения полиномов, очевидно, что один из них будет четным, а другой — нечетным, как указывалось выше при анализе входных реактивных функций. В частности, когда имеется полюс в точке $s = 0$, то функция $z_{ik}(s)$ представляет собой отношение четного полинома к нечетному. Наоборот, при отсутствии полюса в указанной точке функция $z_{ik}(s)$ представляет собой отношение нечетного полинома к четному. Для входного сопротивления и сопротивления передачи цепи без потерь точки $s = 0$ и $s = \infty$ всегда являются особыми точками (нуль или полюс в любой комбинации).

Если ур-ние (II.31) описывает сопротивление передачи ($i \neq k$) и вычеты имеют смешанные, т. е. положительные и отрицательные значения, то в полином числителя функции $z_{12}(s)$ также могут входить смешанные (положительные и отрицательные) коэффициенты, но, в отличие от четных или нечетных частей полинома Гурвица, он не обязательно будет иметь простые нули, ограниченные мнимой осью, а может иметь нули любой кратности, расположенные в любом месте конечной плоскости s . Расположение этих нулей, однако, всегда полностью симметрично и относительно мнимой, и относительно вещественной осей, так как все нули четного или нечетного полиномов не изменяются при замене s на $-s$.

Важно также отметить, что при наличии смешанных положительных и отрицательных значений вычетов степень полинома числителя будет меньше степени полинома знаменателя, причем вторая степень не может отличаться от первой более чем на единицу. Практически полином числителя может стать постоянной величиной, но лишь тогда, когда полином знаменателя нечетный. Однако в любом случае необходимо выполнение требования, согласно которому полиномы числителя и знаменателя (напомним, что их отношение представляет собой z_{12}) должны быть соответственно четным и нечетным.

Снова обращаясь к условию (II.29), можно сделать несколько интересных заключений относительно распределения полюсов трех сопротивлений z_{11} , z_{22} , z_{12} , характеризующих четырехполюсник без потерь. Очевидно, что одно или оба входных сопротивления могут иметь полюсы там, где другое входное сопротивление или сопротивление передачи их не имеют. Обратное утверждение несправедливо. Там, где находится полюс сопротивления передачи, должны располагаться полюсы обоим входным сопротивлениям (с соответствующими вычетами). Если представить себе цепь в виде T-образного звена (несмотря на то, что оно не представляет наиболее общей физически реализуемой формы четырехполюсника), то такой вывод станет очевидным, так как последовательные ветви этого звена оказывают влияние только на входное сопротивление, в то время как сопротивление параллельной ветви z_{12} является аддитивной составляющей обоих входных сопротивлений.

II.2. Функции RL цепей

В RL цепях энергетическая функция V_0 или V_0^* тождественно равна нулю. Тогда, используя ур-ние (I.4) при $I_1 = 1$, получим

$$Z(s) = sT_0 + F_0 = R(\sigma, \omega) + jX(\sigma, \omega). \quad (\text{II.32})$$

Аналогично, используя ур-ние (I.8) при $E_1 = 1$, получим

$$Y(s) = F_0^* + \frac{T_0^*}{s} = G(\sigma, \omega) + jB(\sigma, \omega). \quad (\text{II.33})$$

Нули функции $Z(s)$ должны удовлетворять условию

$$s = \frac{-F_0}{T_0}, \quad (\text{II.34})$$

а полюсы (нули функции Y) — соответствовать зависимости

$$s = \frac{-T_0^*}{F_0^*}. \quad (\text{II.35})$$

Так же, как и в случае LC цепи, эти выражения практически бесполезны при определении нулей и полюсов. Однако энергетические функции являются п. в. ф., и поэтому ясно, что нули и полюсы входных сопротивлений и проводимостей RL цепи располагаются на отрицательной вещественной оси плоскости комплексных частот.

Из ур-ний (II.32) и (II.33) при условии, что $s = \sigma + j\omega$, имеем:

$$R(\sigma, \omega) = \sigma T_0 + F_0; \quad X(\sigma, \omega) = \omega T_0; \quad (\text{II.36})$$

$$G(\sigma, \omega) = F_0^* + \frac{\sigma T_0^*}{\sigma^2 + \omega^2}; \quad B(\sigma, \omega) = \frac{-\omega T_0^*}{\sigma^2 + \omega^2}. \quad (\text{II.37})$$

Анализ полученных соотношений показывает, что функции X и B являются соответственно положительной и отрицательной в любой точке верхней полуплоскости комплексных частот. Для положительной части мнимой оси этот вывод подтверждает известный факт — сопротивление RL цепи имеет положительную мнимую часть; следовательно, мнимая часть соответствующей проводимости является отрицательной.

Из ур-ния (II.36) следует, что

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \right)_{\omega=0} = T_0 > 0. \quad (\text{II.38})$$

Отсюда условие (II.8) Коши — Римана дает

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \sigma} \right)_{\omega=0} = T_0 > 0. \quad (\text{II.39})$$

При $\omega = 0$ сопротивление $Z(s)$ чисто вещественно. Уравнение (II.39) показывает, что если построить график зависимости входного сопротивления RL цепи в функции от σ при $\omega = 0$, т. е. график зависимости $Z(\sigma) = R(\sigma, 0)$ вдоль вещественной оси, точно так же, как в случае LC цепи, был построен график для реактивной функции вдоль мнимой оси (см. рис. II.1), то эта кривая везде будет иметь положительный наклон, отличный от нуля. Практически полученная кривая окажется в значительной степени подобной кривой, изображенной на рис. II.1, так как нули и полюсы входного сопротивления RL цепи расположены на вещественной оси. Поскольку функция T_0 при $I_1 = 1$ в любом нетривиальном случае не равна нулю, наклон рассматриваемой кривой не может быть равен нулю. Поэтому нули должны быть простыми, и два нуля не могут следовать друг за другом вдоль отрицательной вещественной полуоси.

Из выражения (II.37) имеем

$$\left(\frac{\partial B}{\partial \omega} \right)_{\omega=0} = \frac{-T_0^*}{\sigma^2} < 0. \quad (\text{II.40})$$

Используя условие (II.8) Коши — Римана, получим следующую зависимость:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \sigma} \right)_{\omega=0} = \frac{-T_0^*}{\sigma^2} < 0. \quad (\text{II.41})$$

Таким образом, входная проводимость RL цепи, представленная на графике как функция σ , имеет отрицательный наклон, отличный от нуля. Следовательно, нули этой проводимости, которые являются полюсами входного сопротивления RL цепи, должны быть простыми и два из них не могут следовать друг за другом вдоль отрицательной вещественной полуоси.

На основании приведенных рассуждений можно сделать вывод, что нули и полюсы входного сопротивления или проводимости RL цепи будут простыми и чередоваться на отрицательной вещественной оси. График сопротивления как функции σ имеет положительный наклон, тогда как соответствующий график проводимости — отрицательный. Как видно из рис. II.3, эти графики подобны аналогичным кривым, построенным для LC цепей на мнимой оси, за исключением того, что там обе функции — сопротивление и проводимость — имеют положительный наклон, а здесь у первой наклон положительный, а у второй отрицательный. Указанное обстоятельство можно оценить и с другой точки зрения. Обратной величиной для чисто мнимой величины jX является $1/jX = -j/X$. Следовательно, она имеет обратный алгебраический знак, тогда как величина, обратная вещественной величине $Z(\sigma)$ для RL цепи, имеет одинаковый с исходной величиной алгебраический знак. Учитывая это, а также то, что при увеличении абсолютного значения Z уменьшается абсолютное значение Y и наоборот, функции $Z(\sigma)$ и

$Y(\sigma)$ цепи должны иметь противоположные по знаку наклоны, как показано на рис. 11.3. Напомним, что у функций $Z(j\omega)$ и $Y(j\omega)$ LC цепи наклоны положительны.

Помимо сказанного выше, входные функции RL цепи характеризуются и другим важным отличием, а именно они не обязательно должны иметь особые точки при $s = 0$ и $s = \infty$. В случае, если эти функции имеют там особые точки, последние не могут быть полюсом или нулем. Действительно, достаточно вспомнить, что на нулевой частоте индуктивность идентична короткому замыканию, в то время как на бесконечной частоте она становится разомкнутой цепью. Отсюда очевидно, что входное сопротивление RL цепи не может иметь полюса в точке $s = 0$ или нуля в точке $s = \infty$. Начало координат плоскости s является либо нулем, либо точкой, в которой функция $Z(s)$ имеет конечное значение. На бесконечности она имеет либо полюс, либо конечное значение, отличное от нуля.

Входное сопротивление RL цепи можно полностью описать рациональной функцией, имеющей простые нули и полюсы, чередующиеся на отрицательной вещественной оси, и обладающей самой низкой критической частотой, равной нулю. При таком представлении полином числителя должен иметь степень, равную (или большую на единицу) степени полинома знаменателя, причем степень полинома знаменателя не может быть выше степени полинома числителя. Следовательно, удовлетворяются ограничения, наложенные на рассматриваемые функции в предыдущем параграфе. Входную проводимость RL цепи можно описать подобным образом. Отличие будет состоять лишь в том, что самая низкая критическая частота в этом случае является полюсом. Не требует доказательств и тот факт, что полиномы имеют положительные (неотрицательные) коэффициенты и $Z(0) \geq 0$, как, очевидно, и должно быть.

Поскольку вычеты функции $Z(s)$ в конечных полюсах равны обратным значениям наклонов функции $Y(s)$ в ее нулях [2]¹, они являются отрицательными вещественными. По той же причине вычеты функции $Y(s)$ в полюсах — положительные вещественные.

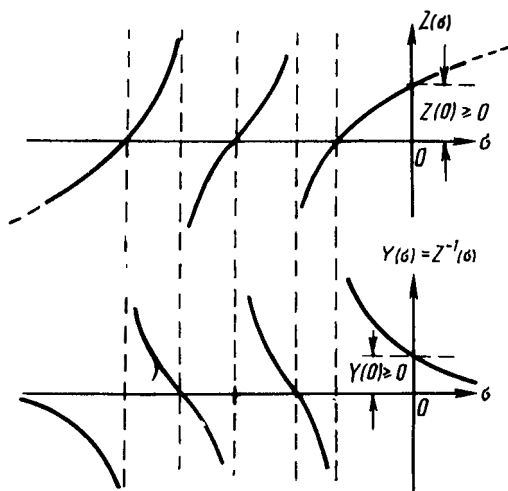


Рис. 11.3

¹ См. также [52], стр. 84 (прим. ред.).

Разложение входного сопротивления RL цепи на элементарные дроби дает

$$Z(s) = \frac{k_2}{s-s_2} + \frac{k_4}{s-s_4} + \dots + \frac{k_{2n}}{s-s_{2n}} + k_{2n+2}s + k_\infty, \quad (\text{II.42})$$

где все вещественные коэффициенты k , являются отрицательными, за исключением $k = \infty$ и k_{2n+2} . Таким образом, в то время как вычеты во всех конечных полюсах являются отрицательными, вычет k_{2n+2} для возможного полюса на бесконечности, безусловно, должен быть положительным. Если $s_k = -\sigma_k$ для отрицательных вещественных полюсов, то ур-ние (II.42) примет вид

$$Z(s) = \frac{k_2}{s+\sigma_2} + \frac{k_4}{s+\sigma_4} + \dots + \frac{k_{2n}}{s+\sigma_{2n}} + k_{2n+2}s + k_\infty. \quad (\text{II.43})$$

Из этого уравнения можно получить следующее выражение для входного сопротивления RL цепи на нулевой частоте

$$Z(0) = k_\infty + \frac{k_2}{\sigma_2} + \dots + \frac{k_{2n}}{\sigma_{2n}} \geq 0. \quad (\text{II.44})$$

Полученное сопротивление, как указывалось выше, должно быть неотрицательным, несмотря на отрицательные значения k_2, \dots, k_{2n} . Если $s = \infty$ является регулярной точкой ($k_{2n+2} = 0$), то $Z(\infty) = k_\infty > 0$. Здесь знак равенства не введен по причине, отмеченной выше. Из ур-ния (II.44) следует, что в любой подобной ситуации $Z(0) \leq Z(\infty)$. Ввиду того что

$$\operatorname{Re} \left(\frac{k_v}{j\omega + \sigma_v} \right) = \frac{k_v \sigma_v}{\sigma_v^2 + \omega^2} \quad (\text{II.45})$$

непрерывно уменьшается по абсолютной величине, из ур-ния (II.43) можно сделать следующий вывод:

Для RL цепи $\operatorname{Re}[Z(j\omega)]$ является непрерывно возрастающей функцией ω . (II.46)

Это утверждение, наряду с установленным выше положением о том, что мнимая часть сопротивления $Z(j\omega)$ положительна при всех положительных вещественных ω , характеризует поведение сопротивления RL цепи на вещественных частотах ($s = j\omega$).

Разложение входной проводимости RL цепи на элементарные дроби можно представить в виде

$$Y(s) = \frac{h_1}{s-s_1} + \frac{h_3}{s-s_3} + \dots + \frac{h_{2n-1}}{s-s_{2n-1}} + h_{2n+1}, \quad (\text{II.47})$$

где коэффициенты h , положительны¹. При $s_k = -\sigma_k$

¹ Подобно разложению (II.42) для $Z(s)$ рассматриваемое выражение для $Y(s)$ представляет наиболее общую форму, которую может иметь эта RL функция. Не следует думать, что $Z(s)$ в (II.42) и $Y(s)$ в (II.47) являются взаимно обратными величинами. Итак, если выражение (II.47) для $Y(s)$ соответствует представлению $Z(s)$ в виде выражения (II.42), то $h_{2n+1} = 0$. Наоборот, если выражение (II.42) соответствует проводимости (II.47), то k_{2n+2} должно быть равно нулю.

это выражение примет вид

$$Y(s) = \frac{h_1}{s + \sigma_1} + \frac{h_3}{s + \sigma_3} + \dots + \frac{h_{2n-1}}{s + \sigma_{2n-1}} + h_{2n+1}. \quad (\text{II.48})$$

На основании изложенного можно сделать следующий вывод:

Для RL цепи $\text{Re}[Y(j\omega)]$ является непрерывно уменьшающейся функцией ω . (II.49)

Мнимая часть, как видно из ур-ния (II.37), отрицательна при всех положительных вещественных величинах ω .

Если функция входного сопротивления RL цепи не имеет особых точек при $s = 0$ или $s = \infty$, то ее значение на нулевой частоте всегда меньше асимптотического значения при $s \rightarrow \infty$. Для соответствующей входной проводимости RL цепи ее значение на нулевой частоте всегда больше асимптотического значения при $s \rightarrow \infty$.

Для того чтобы определить сопротивление передачи RL цепи, необходимо применить приведенные выше рассуждения относительно входных сопротивлений RL цепи к функции $Z(s)$, выраженной ур-нием (I.17). Это уравнение при $p = 2$ превращается в ур-ние (II.27), которое использовалось при анализе цепей без потерь. Здесь сопротивлениями z_{11} и z_{22} являются входные сопротивления RL цепей, а z_{12} — сопротивлением передачи такой цепи. Очевидно, что последнее сопротивление подобно первым двум должно иметь простые полюсы только на отрицательной вещественной полуоси. Вполне понятно, что вычет функции $Z(s)$, выраженный через вычеты z_{ik} , дается выражением (II.28). Поэтому рассуждения, аналогичные приведенным в случае LC цепи, позволяют установить, что вычеты функции z_{12} , хотя и являются вещественными, не должны быть отрицательными подобно вычетам z_{11} и z_{22} в их конечных полюсах. Вычет, определяемый ур-нием (II.28), должен (для RL цепей) представлять собой отрицательную определенную квадратичную форму от переменных x_1 и x_2 во всех конечных полюсах и положительную форму в возможном полюсе на бесконечности. В конечных полюсах это условие удовлетворяется, так как требуется, чтобы, кроме условий $k_{11} \leq 0$ и $k_{22} \leq 0$, выполнялось условие вычетов (II.29) по форме такое же, как в случае LC цепи, и с той же ориентацией знака неравенства.

Известно, что сопротивления z_{11} или z_{22} могут иметь полюсы, отсутствующие в любом из двух других сопротивлений. Возможно также, что z_{11} и z_{22} имеют полюсы, которых не содержит z_{12} . Однако условие вычетов (как и в случае LC цепи) не допускает наличия в z_{12} полюсов, не содержащихся одновременно в z_{11} и z_{22} .

Разложение z_{ik} на элементарные дроби имеет вид

$$z_{ik} = \frac{k_{ik}^{(2)}}{s - s_2} + \frac{k_{ik}^{(4)}}{s - s_4} + \dots + \frac{k_{ik}^{(2n)}}{s - s_{2n}} + k_{ik}^{(2n+2)}s + k_{ik}^{(\infty)}. \quad (\text{II.50})$$

Несмотря на то, что $k_{ik}^{(\infty)}$ не является вычетом, а представляет собой асимптотическое значение вещественной части z_{ik} при $s = j\omega$, соотношения, определяемые выражениями (I.105) и (I.106), показывают, что условие вычетов (II.29) относится к этим коэффициентам так же, как и к вычетам в ур-нии (II.50). Коэффициенты $k_{ik}^{(v)}$ в разложении сопротивления передачи z_{12} на элементарные дроби могут иметь любые положительные или отрицательные вещественные значения. Следовательно, если выражение для z_{12} представить в виде отношения полиномов, то числителем оказывается полином, который может иметь нули любой кратности, расположенные в любой точке плоскости s ; его степень может быть либо равна степени полинома знаменателя, либо больше ее на единицу.

Интересно отметить, что выполнение условия вычетов и требования $Z(0) \geq 0$ связаны с условиями вещественной части (см. главу I), необходимыми для реализации сопротивлений цепей общего вида (*RLC* цепей). Таким образом, свойство входных *RL* сопротивлений, определяемое выражением (II.46), и выполнение требования $Z(0) > 0$ обеспечивают выполнение условий осуществимости вещественной части. Из условия вычетов (II.29) следует, что функция $Z(s)$, определяемая ур-нием (II.27), обладает свойством, выраженным в предположении (II.46).

Для исследования свойств функций проводимости передачи *RL* цепей целесообразно проанализировать следующую, аналогичную ур-нию (II.27) зависимость [см. ф-лу (I.26) для $p = 2$]:

$$Y(s) = y_{11}x_1^2 + 2y_{12}x_1x_2 + y_{22}x_2^2 \quad (\text{II.51})$$

при условии, что y_{11} , y_{22} и $Y(s)$ обладают свойствами входных проводимостей *RL* цепей. Таким образом, снова можно заметить, что функция y_{12} должна иметь простые полюсы, расположенные только на отрицательной вещественной полуоси. Вычеты в этих полюсах должны быть вещественными, причем, как и в случае входных функций, они не могут быть положительными. Однако дополнительно к условию $Y(\infty) \geq 0$ во всех полюсах должно выполняться условие вычетов (II.29). Проводимость передачи y_{12} обладает точно такими же свойствами, как сопротивление z_{12} , рассмотренное выше (за исключением наличия полюса на бесконечности).

II.3. Функции *RC* цепей

При рассмотрении функций *RC* цепи функция магнитной энергии T_0 или T_0^* равна нулю. Используя ур-ния (I.8) при $E_1 = 1$, получим

$$Y(s) = sV_0^* + F_0^* = G(\sigma, \omega) + jB(\sigma, \omega). \quad (\text{II.52})$$

Уравнения (I.4), описывающие сопротивление, дают

$$Z(s) = F_0 + \frac{V_0}{s} = R(\sigma, \omega) + jX(\sigma, \omega). \quad (\text{II.53})$$

Сравнивая ур-ния (II.52) и (II.53) с ур-ниями (II.32) и (II.33), видим, что функция проводимости $Y(s)$ для RC цепи по форме подобна функции сопротивления $Z(s)$ для RL цепи и наоборот. Следовательно, все полученные ранее результаты остаются справедливыми, если поменять местами функции Y и Z .

Итак, можно утверждать, что входные сопротивление и проводимости цепей RC имеют простые нули и полюсы, чередующиеся на отрицательной вещественной оси плоскости s . Для сопротивления самая нижняя критическая частота (особая точка) является полюсом, а для проводимости — нулем. При построении графика зависимости от σ сопротивление имеет отрицательный наклон, проводимость — положительный. Вычеты функции $Z(s)$ в ее полюсах являются положительными, вычеты $Y(s)$ в ее конечных полюсах — отрицательными. Разложение входного сопротивления на элементарные дроби

$$Z(s) = \frac{k_1}{s-s_1} + \frac{k_3}{s-s_3} + \dots + \frac{k_{2n-1}}{s-s_{2n-1}} + k_{2n+1} \quad (\text{II.54})$$

подобно уравнению (II.47) для проводимости RL цепи, тогда как разложение входной проводимости на элементарные дроби

$$Y(s) = \frac{h_2}{s-s_2} + \frac{h_4}{s-s_4} + \dots + \frac{h_{2n}}{s-s_{2n}} + h_{2n+2}s + h_\infty \quad (\text{II.55})$$

подобно уравнению (II.42) для сопротивления RL цепи¹. В уравнении (II.54) все вычеты k , вещественны и положительны, в ур-нии (II.55) вычеты h_2, \dots, h_{2n} оказываются отрицательными, а h_∞ и h_{2n+2} положительными вещественными. По аналогии с предложениями (II.46) и (II.49) можно сделать следующий вывод:

Для RC цепи $\text{Re}[Y(j\omega)]$ является непрерывно возрастающей функцией ω , тогда как $\text{Re}[Z(j\omega)]$ — непрерывно уменьшающейся функцией. (II.56)

Мнимая часть входного сопротивления RC цепи является отрицательной при всех положительных вещественных значениях ω , мнимая же часть соответствующей проводимости — положительной.

Для изучения свойств сопротивлений передачи и связи между входными сопротивлениями и сопротивлением передачи четырехполюсника рассмотрим одновременно ур-ния (II.27) и (II.54) [для проводимости соответственно ур-ния (II.51) и (II.55)]. Очевидно, что для функции z_{ik} RC цепи разложение на элементарные дроби имеет вид

$$z_{ik} = \frac{k_{ik}^{(1)}}{s-s_1} + \frac{k_{ik}^{(3)}}{s-s_3} + \dots + \frac{k_{ik}^{(2n-1)}}{s-s_{2n-1}} + k_{ik}^{(2n+1)}, \quad (\text{II.57})$$

¹ Как уже говорилось в связи с разложениями (II.42) и (II.47) для функций $Z(s)$ и $Y(s)$, их нельзя считать соответствующими одной и той же цепи. Для того чтобы (II.55) соответствовало (II.54), должен отсутствовать член h_{2n+2} , и, если (II.54) соответствует (II.55), вычет k_{2n+1} равен нулю.

Таблица II.1

Свойства входных сопротивлений и сопротивлений передачи
 1. Условие—функция $Z(s)$ вещественна при вещественном s — относится ко всем функциям.

Входные сопротивления

RL		RC	LC	RLC
2. Положительные множители — чередующиеся простые полюсы и нули				Полюсы и нули ограничены левой полуплоскостью или мнимой осью. Нули должны быть простыми, полюсы могут иметь любую кратность и любое расположение, пока вещественная часть на мнимой оси неотрицательна. Вычеты в полюсах на мнимой оси должны быть положительными вещественными. Вычеты в других полюсах могут иметь комплексные значения
на отрицательной вещественной оси		на мнимой оси		
3. Критическая частота вблизи точки $s = 0$ является		3. Функция представляет собой отношение четного и нечетного полиномов. Точки $s = 0$ и $s = \infty$ всегда являются особыми точками. Вещественная часть на мнимой оси $\equiv 0$		
нулем	полюсом			
4. Вещественная часть на мнимой оси является монотонной функцией				
возрастающей	уменьшающейся			
функцией ω				
5. $\operatorname{Re}[Z(0)] = Z(0) \geq 0$	6. Вычеты в конечных полюсах — отрицательные вещественные		4. Простые полюсы на мнимой оси с положительными вещественными вычетами	
7. $\operatorname{Re}[Z(\infty)] = Z(\infty) \geq 0$		Вычеты во всех полюсах — положительные вещественные	5. Наклон реактивной функции $X(\omega)$ — положительный и больший, чем для функции X	
Свойства 1, 2 и 3 достаточны для описания функций				
Свойства 1 и 2 эквивалентны свойствам 1 и 4. Любая пара свойств достаточна для описания функций				

Сопротивления передачи

Простые полюсы		на мнимой оси	Полюсы ограничены левой полуплоскостью или мнимой осью. Они должны быть простыми и давать вещественные вычеты. Должно удовлетворяться условие $k_{11}k_{22} - k_{12}^2 \geq 0$.
на отрицательной вещественной оси			
Произвольные нули		Нули с квадратной симметрией. Полиномы — соответственно четные и нечетные	Вещественная часть ограничена мнимой осью и должна удовлетворять условию $r_{11}r_{22} - r_{12}^2 \geq 0$
Вещественная часть на мнимой оси			
ограничена и $r_{12}^2 \leq r_{11}r_{22}$ при $s = 0$	при $s = \infty$	тождественна равна нулю	
Вычеты должны быть вещественными и удовлетворять условию $k_{11}k_{22} - k_{12}^2 \geq 0$ во всех полюсах			

где, кроме $k_{11} \geq 0$ и $k_{22} \geq 0$, вычеты k_{ik} должны удовлетворять условию вычетов (II.29) для того, чтобы можно было утверждать, что вычет k функции $Z(s)$, определяемый ур-нием (II.28), представляет собой положительную определенную квадратичную форму от вещественных переменных x_1 и x_2 .

В ур-нии (II.54) требование, чтобы вычет $k_{2n+1} = Z(\infty)$ был положительным, позволяет считать (с учетом (II.56)), что вещественная часть функции $Z(j\omega)$ является положительной при всех вещественных ω . В ур-нии (II.55) требование

$$h_{\infty} - \left(\frac{h_2}{s_2} + \frac{h_4}{s_4} + \dots + \frac{h_{2n}}{s_{2n}} \right) = Y(0) \geq 0 \quad (\text{II.58})$$

позволяет считать, что вещественная часть функции $Y(j\omega)$ является положительной. Следовательно, нет необходимости вводить дополнительные условия для вещественной части.

В последующих главах рассматриваются методы синтеза цепей двухэлементного типа. Там показано, что достаточные условия для реализуемости сопротивлений или проводимостей RC цепи (как и в случае RL цепи) определяются требованиями, чтобы нули и полюсы этих функций были простыми и чередующимися или же полюсы простыми и чтобы выполнялось условие вычетов. Кроме того, необходимо выполнение неравенства $Z(\infty) \geq 0$ или $Y(0) \geq 0$.

В табл. II.1 приведены свойства входных сопротивлений и сопротивлений передачи цепей различного вида.



Синтез входных сопротивлений LC цепей

III.1. Общие замечания о синтезе

Теория цепей опирается на три основных фактора: возбуждение, реакцию и цепь. В том случае, когда известны два из них, третий можно найти. Если заданы цепь и либо возбуждение, либо реакция, то возникает задача *анализа* цепи. Если цепь неизвестна, а заданы возбуждение и реакция, процесс решения принято называть *синтезом* цепи. Хотя такое определение синтеза является достаточно общим, оно, однако, непригодно для точного описания методов, рассматриваемых в данной работе.

Термин «синтез» цепи при правильном его использовании не относится ко всем операциям, связанным с расчетом цепи в соответствии с установленными требованиями; он также не может рассматриваться и как замена термина «расчет» цепи. На практике, как правило, при расчете цепи делаются предположения (основанные на предыдущем опыте) относительно ее общей конфигурации, а затем методом последовательных приближений и путем некоторых незначительных изменений структуры цепи получают заданные характеристики. Такой порядок проектирования нельзя назвать синтезом цепи, сущность которого состоит в том, что структура цепи и значения ее элементов определяются в самом процессе проектирования. Здесь все вопросы, касающиеся допусков и приемлемых характеристик, решаются вначале, когда образуется рациональная функция (отношение полиномов от комплексной частоты) с учетом требуемой характеристики, с одной стороны, и определенных условий реализуемости, с другой. Этот начальный этап, безусловно, являющийся существенной частью всего процесса синтеза, называется *задачей аппроксимации*. После того как она решена и найдена соответствующая рациональная функция, метод последовательных приближений не применяется и далее никаких предположений не делается. В процессе синтеза получают семейство так называемых *эквивалентных цепей*, любая из которых точно реализует заданную рациональную функцию.

Как можно заметить, задача синтеза отличается от задачи анализа некоторыми важными особенностями. Первая из них связана с существованием решений. Когда заданы цепь и возбуждение, вопрос о существовании реакции не является сложным; если задана реакция и требуется найти возбуждение, возникает та же задача, но с соответственной заменой названия «известная» и «неизвестная» величина. Необходимо отметить, что функция реакции не инвертируется, так как это означало бы, что следует поменять местами названия «возбуждение» и «реакция».

Однако когда заданы возбуждение и реакция и требуется найти цепь, то неизбежно возникает вопрос о существовании решения. Процесс решения зависит от того, определяются ли данные функции во временной или в частотной области. В случае частотной области отношение этих функций представляет собой требуемую функцию цепи. Она должна быть п. в. ф., если существует решение для входной функции, и рациональной, если предполагается получить конечную цепь. В случае, когда исходные характеристики заданы в форме временных функций, прежде всего производится их перевод в частотную область. При этом нет никакой уверенности, что результирующая функция, полученная из отношения соответствующих функций во временной области, отвечает обязательному требованию устойчивости для реализации пассивной цепи.

Второе важное различие между задачами анализа и синтеза состоит в том, что когда выполнены условия существования решения, это решение не является единственным. Теоретически существует бесконечное число решений (известных как эквивалентные цепи), о чем более подробно сказано далее.

Задача, которая будет исследована в первую очередь, заключается в том, чтобы найти реализации входных сопротивлений или проводимостей, заданных в виде положительных вещественных рациональных функций. Если такая функция известна, решение сводится к нахождению способов построения цепи, которые при заданной входной функции точно реализуют ее. В этой и следующей главах мы рассмотрим только п. в. ф., характеризующие цепи с двумя типами элементов. Однако соображения, на которых базируется синтез указанных цепей, являются основой последующих исследований при создании более сложных схем. Об этом будет сказано позже в связи с обобщением рассматриваемой задачи, а именно, с введением в цепь всех трех типов элементов и использованием большего числа пар входных зажимов.

Таким образом, сущность поставленной задачи заключается в том, чтобы установить зависимость между структурой физической цепи и данной рациональной функцией. На первый взгляд может показаться, что это процесс простой, если проста заданная функция. Например, когда функция сопротивления представляет собой постоянную, умноженную на переменную s , или постоянную, деленную на s , то, очевидно, цепь является либо только одной индуктивностью, либо только одной емкостью соответственно. Рацио-

нальная функция, характеризующая последовательную или параллельную комбинацию этих двух элементов, также достаточно проста. Следовательно, даже при отсутствии большого опыта можно непосредственно определять соответствующую физическую реализацию. Но как поступить в случае, когда функция довольно сложная и нельзя непосредственно говорить о возможности реализации?

Ответ вытекает из логического рассуждения: вероятно тогда представляется возможным отделить от данной функции простую часть, которую можно считать физическим компонентом (или, по крайней мере, выявить, существует ли такая возможность). Если остаток функции упростился и (после некоторых преобразований) можно отделить другую простую часть, то продолжение этой операции в конце концов приведет к полному разложению первоначальной функции в реализацию цепи. Описанный процесс основан на предположении, что если данная функция слишком сложна для непосредственного синтеза, то, по-видимому, целесообразно применять каждый раз отделение небольшой ее части.

Такая, сравнительно простая, процедура может привести к полезным результатам при решении многих вопросов, связанных с проблемой синтеза. При этом в процессе выполнения каждого этапа (или нескольких этапов) обязательно необходимо соблюдать следующие три условия:

1. Часть, которая отделяется от данной функции, должна быть реализуемой и достаточно простой, чтобы ее реализацию можно было определить непосредственно.

2. Остаток функции должен представлять собой п. в. ф. Иными словами, процесс разбиения функции не должен нарушать положительного вещественного ее характера.

3. Степень полинома, получающегося в остатке, должна быть более низкой, чем степень функции.

Если все три перечисленные условия не удовлетворяются, то рассмотренный процесс не может привести к нужным результатам. Если же они удовлетворяются при выполнении ряда операций, то их повторное использование обязательно приведет к полной реализации данной функции.

В некоторых случаях можно сократить процесс разложения функции путем ее разбиения сразу на аддитивные составляющие, реализуемые непосредственно. Как далее станет ясно, такой упрощенный метод весьма эффективен для любых цепей с двумя типами элементов, а иногда даже и для цепи общего вида, т. е. RLC цепи.

Сущность рассматриваемого метода состоит в нахождении математического приема разложения какой-либо рациональной функции на простые (и реализуемые) составляющие члены, причем в таких случаях пригоден способ разложения на элементарные дроби. Иногда он может быть применен непосредственно к данной функции, иногда лишь после соответствующих преобразований.

При выполнении этих операций часто оказываются необходимыми интуиция и изобретательность. Некоторые особенности данного метода синтеза рассмотрены в следующем параграфе на примере входных функций сопротивлений и проводимости LC цепей.

III.2. Синтез реактивных функций и функций реактивной проводимости посредством их разложений на элементарные дроби

Предположим, что реактивная функция имеет простые нули в точках $s = \pm s_1; \pm s_3; \pm s_5; \dots$ и простые полюсы в точках $s = 0; \pm s_2; \pm s_4; \dots$. Таковую функцию можно выразить в виде отношения полиномов

$$Z(s) = \frac{H(s^2 - s_1^2)(s^2 - s_3^2)(s^2 - s_5^2)\dots}{s(s^2 - s_2^2)(s^2 - s_4^2)(s^2 - s_6^2)\dots}, \quad (\text{III.1})$$

где каждый множитель представляет собой пару сопряженных мнимых критических частот. Например, при $s_v = j\omega_v$ множитель $(s^2 - s_v^2) = (s^2 + \omega_v^2) = (s + s_v)(s - s_v) = (s + j\omega_v)(s - j\omega_v)$ ясно указывает на то, что в сопряженных точках $s = +j\omega_v$ и $s = -j\omega_v$ на мнимой оси существуют критические частоты. Если этот множитель находится в числителе, его степень, очевидно, на единицу больше степени знаменателя, и функция $Z(s)$ имеет простой полюс в точке $s = \infty$. Если указанный множитель находится в знаменателе, то степень знаменателя на единицу больше степени числителя и $Z(s)$ имеет нуль в точке $s = \infty$. Полюс в точке $s = 0$ обусловлен наличием коэффициента s в знаменателе, который в данном случае является нечетным полиномом. Если $Z(s)$ представляет собой отношение нечетного полинома к четному, то точка $s = 0$ становится вместо полюса нулем. При этом независимо от того, является ли точка $s = \infty$ нулем или полюсом, точка $s = 0$ может быть либо нулем, либо полюсом.

Важно отметить, что, поскольку нули и полюсы чередуются, т. е.

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \dots, \quad (\text{III.2})$$

вид конечных ненулевых критических частот (нулей и полюсов) функции $Z(s)$ автоматически определяется характером точек $s = 0$ и $s = \infty$.

Итак, если самая низкая ненулевая критическая частота является нулем [см. ур-ние (III.1)], то в точке $s = 0$ должен быть полюс. Если же самая низкая ненулевая критическая частота — полюс, то в точке $s = 0$ должен быть нуль. Аналогично, если самая высокая критическая частота является нулем, то в точке $s = \infty$ должен быть полюс, и наоборот. Поэтому после определения конечных ненулевых критических частот уже нет необходимости

определять характер точек $s = 0$ и $s = \infty$, такие дополнительные данные не нужны.

Аналитическое выражение для реактивной функции, представленное ур-нием (III.1), однозначно характеризуется ее конечными ненулевыми критическими частотами с точностью до постоянного множителя H , называемого *коэффициентом уровня сопротивления* (impedance level factor)¹.

На рис. III.1 приведен график распределения критических точек реактивной функции (за исключением постоянного множителя), который мы будем называть ее *частотной диаграммой* (frequency pattern). Этот график, по существу, состоит из оси частот ω , на которой в качестве конечных отмечены точки $\omega = \infty$ и $\omega = 0$. Конечные ненулевые нули и полюсы, обозначенные соответственно кружками и крестиками, отмечены как частоты $\omega_1, \omega_2, \dots$. В численном примере эти символы заменяются их численными значениями,

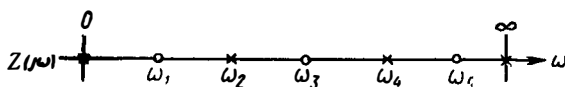


Рис. III.1

причем нет необходимости задавать количественные значения каких-либо критических частот.

Таким образом, частотная диаграмма, являясь просто качественным представлением реактивной функции, тем не менее позволяет найти (за исключением коэффициента уровня) аналитическое выражение для этой функции. Следовательно, если принять коэффициент уровня для функции, представленной на рис. III.1, равным единице, можно записать

$$Z(s) = \frac{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_3^2)(s^2 + \omega_5^2)}{s(s^2 + \omega_2^2)(s^2 + \omega_4^2)}. \quad (\text{III.3})$$

Уравнение (III.3) и частотная диаграмма на рис. III.1 полностью эквивалентны в том смысле, что, если известна диаграмма, можно найти аналитическое выражение, и наоборот.

Определение цепи, реализующей реактивную функцию, осуществляется посредством разложения на элементарные дроби после того, как каждая пара членов, представляющих сопряженные полюсы, объединена, как это делалось при переходе от ур-ния (II.30) к ур-нию (II.31) в предыдущей главе. Записывая подобным способом разложение для функции $Z(s)$, представленной ур-нием (III.3), получим

$$Z(s) = \frac{k_0}{s} + \frac{2k_2s}{s^2 + \omega_2^2} + \frac{2k_4s}{s^2 + \omega_4^2} + k_6s, \quad (\text{III.4})$$

¹ Обычно эту величину называют масштабным множителем (прим. ред.).

где k_0, k_2, k_4 и k_6 — вычеты функции $Z(s)$ в ее полюсах в точках $s = 0, s = \pm j\omega_2, s = \pm j\omega_4$ и $s = \infty$ соответственно. Вычеты можно вычислить различными способами, например, воспользовавшись известной формулой

$$k_v = [(s - s_v)Z(s)]_{s=s_v}. \quad (\text{III.5})$$

В данном примере для $s_v = 0$

$$(s - s_v)Z(s) = \frac{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_3^2)(s^2 + \omega_5^2)}{(s^2 + \omega_2^2)(s^2 + \omega_4^2)}. \quad (\text{III.6})$$

Тогда из ур-ния (III.5)

$$k_0 = \frac{\omega_1^2 \omega_3^2 \omega_5^2}{\omega_2^2 \omega_4^2}. \quad (\text{III.7})$$

Аналогично, для полюса в точке $s = j\omega_2$ находим

$$(s - s_v)Z(s) = \frac{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_3^2)(s^2 + \omega_5^2)}{s(s + j\omega_2)(s^2 + \omega_4^2)}. \quad (\text{III.8})$$

Ввиду того что при $s = j\omega_2$ $s^2 = -\omega_2^2$, из ур-ния (III.5) имеем

$$k_2 = \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_3^2 - \omega_2^2)(\omega_5^2 - \omega_2^2)}{-2\omega_2^2(\omega_4^2 - \omega_2^2)}. \quad (\text{III.9})$$

В этом случае вычет является положительным, как и можно было предположить на основе рассуждений, приведенных во II главе.

При прямом методе вычисления вычетов необходимо исследовать область в непосредственной близости от любого полюса и установить, что в разложении на элементарные дроби вида (III.4) только доминирующий член дает адекватное представление функции $Z(s)$ в данной области. Например, для $s \rightarrow j\omega_2$ или $s^2 \rightarrow -\omega_2^2$ из ур-ний (III.3) и (III.4) следует

$$Z(s) = \frac{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_3^2)(s^2 + \omega_5^2)}{s(s^2 + \omega_2^2)(s^2 + \omega_4^2)} \rightarrow \frac{2k_2 s}{s^2 + \omega_2^2}. \quad (\text{III.10})$$

После сокращения коэффициента $(s^2 + \omega_2^2)$ получим

$$k_2 \rightarrow \frac{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_3^2)(s^2 + \omega_5^2)}{2s^2(s^2 + \omega_4^2)} \text{ при } s^2 \rightarrow -\omega_2^2, \quad (\text{III.11})$$

что соответствует ур-нию (III.9).

Наконец, формула

$$k_v = \left[\frac{dY(s)}{ds} \right]_{s=s_v}^{-1} \quad (\text{III.12})$$

может быть использована в том случае, когда $Y(s) = \frac{1}{Z(s)}$ — соответствующая функция реактивной проводимости — имеет нули там, где функция $Z(s)$ имеет полюсы. Легко показать, что анализ функции $Y(s)$ аналогичен рассмотренному выше, а результаты согласуются с полученными ранее. Например, рассматривая функцию, выраженную ур-нием (III.3), можно записать

$$Y(s) = \frac{s(s^2 + \omega_2^2)(s + \omega_4^2)}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_3^2)(s^2 + \omega_5^2)} = \frac{Q(s)}{P(s)}. \quad (\text{III.13})$$

Дифференцируя эту функцию по s , получим

$$\left(\frac{dY}{ds} \right)_{s=s_2} = \left[\frac{P(s)Q'(s) - Q(s)P'(s)}{P^2(s)} \right]_{s=s_2} = \frac{Q'(s_2)}{P(s_2)}, \quad (\text{III.14})$$

что вытекает из условия $Q(s_2) = 0$.

Если записать

$$Q(s) = (s^2 + \omega_2^2)q(s), \quad (\text{III.15})$$

то

$$Q'(s_2) = [(s^2 + \omega_2^2)q'(s) + 2sq(s)]_{s=s_2} = 2s_2q(s_2). \quad (\text{III.16})$$

Подставив эту величину в ур-ние (III.14) и используя ур-ние (III.12), можно найти, что

$$k_2 = \frac{P(s_2)}{2s_2q(s_2)}. \quad (\text{III.17})$$

Принимая во внимание выражения для $P(s)$ и $q(s)$ [ур-ния (III.13) и (III.15)], получим

$$k_2 = \left[\frac{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_3^2)(s^2 + \omega_5^2)}{2s^2(s^2 + \omega_4^2)} \right]_{s^2 = -\omega_2^2}, \quad (\text{III.18})$$

что также соответствует уравнению (III.9).

Вычет функции $Z(s)$ в простом полюсе в точке $s = \infty$ определяется с учетом ее поведения при большом значении s . Так, если функция $Z(s)$ имеет полюс в бесконечности, она ведет себя при $s \rightarrow \infty$ как постоянная, умноженная на s , и является вычетом в этом полюсе. Формально можно записать

$$k_6 = \frac{Z(s)}{s} \text{ при } s \rightarrow \infty, \quad (\text{III.19})$$

откуда следует, что функция, определяемая выражением (III.3), равна единице, поскольку было сделано предположение, что постоянный множитель равен единице.

При сравнении разложения на элементарные дроби функции $Z(s)$ посредством ур-ния (III.4) и частотной диаграммы, приведенной на рис. III.1, очевидно, что каждому полюсу этой характе-

ристики соответствует член разложения. Первый и последний члены представляют собой полюсы в точках $s = 0$ и $s = \infty$ соответственно, тогда как оставшиеся члены — конечные ненулевые полюсы. После того как определена аналитическая форма каждого из этих трех типов членов, нетрудно найти разложение на элементарные дроби для функции $Z(s)$ непосредственно по ее частотной диаграмме. Аналогично по разложению на элементарные дроби можно легко построить частотную диаграмму.

Переходя к реализации цепи, необходимо отметить, что первый и последний члены разложения функции на элементарные дроби являются соответственно реактансом емкости и реактансом индуктивности, а член для конечного ненулевого полюса — реактансом

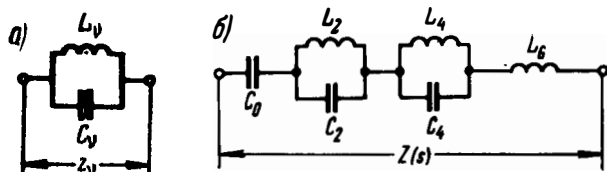


Рис. III.2

параллельного LC контура, изображенного на рис. III.2а. Для этого контура

$$z_v = \frac{1}{C_v s + \frac{1}{L_v s}} = \frac{L_v s}{1 + L_v C_v s^2} = \frac{\frac{1}{C_v} s}{s^2 + \frac{1}{L_v C_v}}. \quad (\text{III. 20})$$

При сравнении с соответствующим членом разложения на элементарные дроби видно, что

$$\left. \begin{aligned} \omega_v^2 &= \frac{1}{L_v C_v} \\ 2k_v &= \frac{1}{C_v} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III. 21})$$

откуда легко вычислить значения L_v и C_v .

Таким образом, полная цепь для функции, представленной ур-нием (III.4), имеет вид, показанный на рис. III.2б, где L_2 , C_2 , L_4 , C_4 определяются из выражений (III.21) и соотношений

$$C_0 = \frac{1}{k_0}, \quad L_6 = k_6. \quad (\text{III. 22})$$

При анализе полученного результата особый интерес представляют два момента. Во-первых, если вычеты являются положительными вещественными, то величины всех элементов также будут положительными и вещественными. Следовательно, условие, со-

гласно которому функция $Z(s)$ принадлежит к классу п. в. ф., является достаточным условием физической реализуемости входного сопротивления LC цепи. Во-вторых, число элементов в реализации точно равно числу соответствующих параметров, определяющих функцию $Z(s)$. Функция (III.3), как нетрудно заметить, определяется пятью конечными ненулевыми критическими частотами и постоянным множителем (равным единице), т. е. всего шестью параметрами. Соответственно цепь, показанная на рис. III.26, содержит шесть элементов.

Если рассматривать аналитическое представление функции $Z(s)$ в виде выражения (III.4) вместо выражения (III.3), то соответствующими параметрами окажутся местоположения конечных ненулевых полюсов и вычеты, в том числе и вычеты в полюсах (в точках $s = 0$ и $s = \infty$). Таким образом, и в данном случае используются шесть параметров. Эти параметры, характеризующие функцию $Z(s)$ в любой из форм, представленных ур-ниями (III.3) или (III.4), позволяют получить шесть значений элементов в реализующей цепи. Следовательно, описанный метод синтеза приводит к реализации с минимальным числом элементов. По этой причине подобная форма реализации заданной функции $Z(s)$ называется *канонической*.

Точно такой же метод синтеза можно применить к функции реактивной проводимости, определяемой ур-нием (III.13). Для нее получаются полюсы только на конечных ненулевых критических частотах $\pm j\omega_1, \pm j\omega_3, \pm j\omega_5$, причем точки $s = 0$ и $s = \infty$ будут являться нулями. Отсюда соответствующее разложение на элементарные дроби имеет вид

$$Y(s) = \frac{2k_1s}{s^2 + \omega_1^2} + \frac{2k_3s}{s^2 + \omega_3^2} + \frac{2k_5s}{s^2 + \omega_5^2}. \quad (\text{III.23})$$

Вычеты вычисляются одним из трех методов, предложенных для реактивной функции.

Каждый член разложения (III.23) можно рассматривать как функцию реактивной проводимости последовательного LC контура, изображенного на рис. III.3а. При этом

$$y_v = \frac{1}{L_v s + \frac{1}{C_v s}} = \frac{C_v s}{1 + L_v C_v s^2} = \frac{\frac{1}{L_v} s}{s^2 + \frac{1}{L_v C_v}}. \quad (\text{III.24})$$

Сравнивая полученное выражение с соответствующим членом разложения (III.23), находим

$$\left. \begin{aligned} \omega_v^2 &= \frac{1}{L_v C_v} \\ 2k_v &= \frac{1}{L_v} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III.25})$$

Таким образом, полная цепь для реализации функции (III.23) должна иметь вид, показанный на рис. III.3б, причем значения ее элементов определяются из ур-ний (III.25) с учетом соответствующих вычетов и частот полюсов.

Очевидно, что этот процесс (но не конечный результат!) полностью аналогичен рассмотренному выше процессу разложения для функции сопротивления, в результате которого была получена цепь, показанная на рис. III.2б. Итак, разложения на элементарные дроби (III.4) и (III.23), по существу, одинаковы по форме, тогда как цепи-компоненты на рис. III.2а и III3а и результирующие цепи на рис. III.2б и III3б дуальны по форме. При этом соотношения

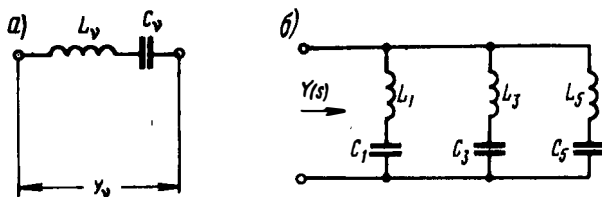


Рис. III.3

элементов, представленные ур-ниями (III.21) и (III.25), одинаковы, за исключением взаимной замены дуальных элементов L и C . Достаточными условиями для реализации канонической цепи¹ (т. е. цепи с минимальным количеством элементов) в этом случае являются условия принадлежности функции $Y(s)$ к классу п. в. ф., которые, таким образом, совпадают с соответствующими условиями для функции $Z(s)$, полученными выше.

III.3. Свойства канонических реализаций цепей

Рассмотрим частотную диаграмму общего вида, изображенную на рис. III.1, применительно к цепи, показанной на рис. III.2б. Ясно, что каждый полюс функции $Z(s)$ соответствует одному из четырех компонентов полной последовательной цепи. Полюс в точке $s = 0$ обусловлен емкостью C_0 , полюсы в точках $s = s_2$ и $s = s_1$, очевидно, соответствуют двум параллельным LC контурам, имеющим на этих частотах резонансы, а полюс в точке $s = \infty$ обусловлен последовательной индуктивностью, включенной в конце цепи. При такой интерпретации целесообразно рассматривать емкость C_0

¹ Структуры цепей, изображенных на рис. III.2б и III.3б, получены путем разложения на элементарные дроби соответствующих функций сопротивления и проводимости. Эти структуры называются *формами Фостера*, поскольку метод синтеза реактивных функций был предложен Фостером в его классической работе [6], где впервые описан точный метод синтеза любой положительной вещественной рациональной функции. Указанная работа положила начало современной теории синтеза цепей.

и индуктивность L_6 как вырожденные формы параллельных LC контуров, имеющих резонансы соответственно в точках $s = 0$ и $s = \infty$. Поскольку реактивная функция цепи, приведенной на рис. III.2б, имеет полюсы, метод синтеза называется синтезом посредством полюсов реактивной функции.

Аналогично последовательные резонансные LC контуры в реализации, показанной на рис. III.3б, приводят к появлению полюсов соответствующей функции реактивной проводимости $Y(s)$ или нулей реактивного сопротивления $Z(s)$. Форма указанной цепи, а также цепи, приведенной на рис. III.2б, может быть определена непосредственно из рассмотрения частотной диаграммы, изображенной на рис. III.1. Процесс, позволяющий получить цепь, показанную на рис. III.3б, называется синтезом посредством полюсов функции реактивной проводимости (нулей реактивного сопротивления).

В связи с этим интересно отметить возможность использования ф-лы (III.12) для определения вычетов функции $Z(s)$. Если необходимо вычислить вычеты функции $Y(s)$, то формула (III.12) приобретает вид

$$k_v = \left[\frac{dZ(s)}{ds} \right]_{s=s_v}^{-1}. \quad (III.26)$$

При рассмотрении цепи на рис. III.2б целесообразно объединить ур-ния (III.12) и (III.21). Тогда значения элементов можно найти по формулам

$$\left. \begin{aligned} C_v &= \frac{1}{2} \left[\frac{dY(s)}{ds} \right]_{s=s_v} \\ L_v &= \frac{1}{C_v \omega_v^2} \text{ для } v = 2, 4, \dots \end{aligned} \right\}. \quad (III.27)$$

В этом случае $s_v = j\omega_v$ являются полюсами функции $Z(s)$ или нулями функции $Y(s)$. Элементы цепи, определяемые соотношениями (III.27) (ср. с параллельными контурами цепи на рис. III.2б), выражены через нули функции $Y(s)$ и ее наклоны в нулях.

Аналогично, если объединить ур-ния (III.25) и (III.26), описывающие цепь, изображенную на рис. III.3б, можно найти выражения для значений ее элементов:

$$\left. \begin{aligned} L_v &= \frac{1}{2} \left[\frac{dZ(s)}{ds} \right]_{s=s_v} \\ C_v &= \frac{1}{L_v \omega_v^2} \text{ для } v = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \right\}. \quad (III.28)$$

где $s_v = j\omega_v$ — полюсы функции $Y(s)$ или нули функции $Z(s)$. Элементы цепи, определяемые соотношениями (III.28) (ср. с последовательными LC контурами цепи на рис. III.3б), выражены через нули функции $Z(s)$ и ее наклоны в нулях.

В случае, когда нули и наклоны реактивной функции или функции реактивной проводимости известны, либо их можно вычислить, нетрудно найти реализации этих функций в виде любой из цепей, показанных на рис. III.26 и III.36. Целесообразность применения рассмотренного метода можно показать на примере. На рис. III.4 изображена однородная линия передачи без потерь длиной l , замкнутая накоротко на дальнем конце. Входное сопротивление линии является реактивной функцией с равномерно распределенными нулями и полюсами, причем их число бесконечно. Если L и C — распределенные параметры индуктивности и емкости на единицу длины, то входное сопротивление линии определяется известным выражением

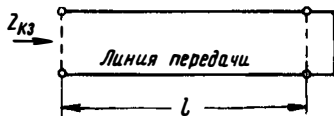


Рис. III.4

$$Z_{к.з} = j \sqrt{\frac{L}{C}} \operatorname{tg} \omega l \sqrt{LC}, \quad (\text{III.29})$$

а соответствующая проводимость

$$Y_{к.з} = -j \sqrt{\frac{C}{L}} \operatorname{ctg} \omega l \sqrt{CL}. \quad (\text{III.30})$$

Это — трансцендентные мероморфные функции и, значит, они имеют бесконечное число обычных полюсов в конечной s -плоскости. Следовательно, в лучшем случае, их можно только приближенно представить конечной цепью. Однако поскольку все эти полюсы простые и лежат на мнимой оси, а их вычеты вещественные и положительные, то есть основание считать, что может быть составлена конечная цепь с сосредоточенными параметрами, имитирующая сопротивление $Z_{к.з}$ в конечном диапазоне частот. Такая имитирующая цепь (simulating network) имеет различное практическое применение и поэтому рассмотрение способа ее синтеза представляет некоторый интерес.

Из ур-ния (III.29) видно, что нули функции $Z_{к.з}$ расположены в точках $s = j\omega_v$, где

$$\omega_v l \sqrt{LC} = \theta_v = \frac{v\pi}{2} \quad \text{или} \quad \omega_v = \frac{v\pi}{2l \sqrt{LC}} \quad \text{для} \quad v = 0, 2, 4 \dots, \quad (\text{III.31})$$

и что наклоны функции $Z_{к.з}$ в этих точках определяются выражениями

$$\left(\frac{dZ_{к.з}}{jd\omega} \right)_{\omega=\omega_v} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{l \sqrt{LC}}{\cos^2 \theta_v} = Ll = L_0, \quad (\text{III.32})$$

где L_0 — суммарная (полная) индуктивность линии. Из соотношения (III.28) и структуры цепи, изображенной на рис. III.36, к ко-

торой они относятся, сразу видно, что имитирующая цепь может иметь конфигурацию, показанную на рис. III.5а. Здесь первая параллельная ветвь представляет собой индуктивность, в два раза превышающую индуктивность других ветвей. Выбор таких значений индуктивности обусловлен необходимостью выполнения требования наклона в точке $s = 0$.

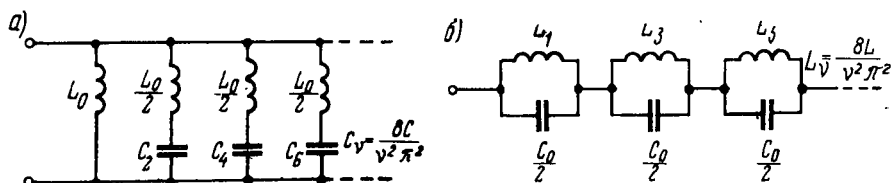


Рис. III.5

С другой стороны, из ур-ния (III.30) следует, что нули функции $Y_{к.з}$ располагаются в точках $s = j\omega_v$, где частоты ω_v также определяются выражением (III.31) для v — нечетного целого. При этом

$$\left(\frac{dY_{к.з}}{jd\omega} \right)_{\omega=\omega_v} = \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{l\sqrt{LC}}{\sin^2 \theta_v} = Cl = C_0, \quad (III.33)$$

где C_0 — суммарная (полная) емкость линии. Пользуясь соотношениями (III.27), относящимися к цепи, изображенной на рис. III.2б, получают имитирующую цепь, показанную на рис. III.5б.

С учетом известного местоположения полюсов и нулей можно записать выражение для функции $Z_{к.з}$ в форме ур-ния (III.1). Разлагая (III.1) на элементарные дроби (для конечного числа полюсов), получают имитирующую цепь по форме такую же, как и на рис. III.5б. Аналогично, разлагая на такие же дроби соответствующую функцию $Y_{к.з}$, получают цепь, подобную показанной на рис. III.5а. Однако значения элементов указанных цепей не совпадают в точности с величинами элементов цепей, изображенных на рис. III.5а и III.5б. Это объясняется тем, что данные цепи построены в соответствии с точными значениями полюсов и нулей. Вместе с тем при реализации функций $Y_{к.з}$ и $Z_{к.з}$ в виде таких цепей приходится использовать полюсы и вычеты соответствующих трансцендентных функций. Более подробно имитирующие свойства, которыми обладают различные аппроксимирующие цепи, рассмотрены ниже.

III.4. Другие канонические реализации цепей

С учетом идей и представлений процесса реализации, описанного в предыдущих параграфах, нетрудно составить цепи нового вида, которые соответствуют данной реактивной функции. Так,

цепи, показанные на рис. III.26 и III.36, можно получить путем устранения сразу всех полюсов данной функции $Z(s)$ или $Y(s)$ соответственно]. Используется и другой путь, состоящий в том, что из функции $Z(s)$ выделяется только один или два из ее полюсов. Тогда остаток функции, содержащий неустраненные полюсы, очевидно, будет представлять собой положительную вещественную реактивную функцию. Обратная ей функция обязательно будет п. в. ф. реактивной проводимости, которую можно реализовать по Фостеру в виде параллельного соединения последовательных LC контуров. Таким образом, синтез данной функции $Z(s)$ сводится к образованию последовательного соединения частей цепи, соответствующих устраненным из функции полюсам, и реализации инвертированного остатка в виде другой формы Фостера.

Разумеется, существуют более трудоемкие способы объединения двух цепей Фостера. Например, можно сначала выделить один полюс из функции $Z(s)$, затем инвертировать остаток и устранить еще один полюс, из инвертированного второго остатка снова устранить один полюс и т. д. Первый, выделенный из функции, полюс дает последовательную ветвь в результирующей цепи, тогда как полюс, выделенный из инвертированного первого остатка функции, дает параллельную ветвь, поскольку эта функция является проводимостью.

Второй инвертированный остаток является сопротивлением, и поэтому полюс, выделенный из него, даст последовательную ветвь, так как сопротивления суммируются при последовательном соединении, а проводимости — при параллельном. Нетрудно заметить, что применение описанного метода приводит к несимметричной лестничной структуре общего вида, изображенной на рис. III.6, причем здесь предполагается, что все выделенные полюсы существуют на конечных ненулевых частотах. Последнее означает, что в цепи отсутствуют вырожденные формы последовательных или параллельных резонансных LC контуров.

Иногда процесс может быть изменен путем выделения из инвертированной остаточной функции более чем одного полюса. Возможность осуществления любой из этих комбинаций очевидна. Действительно, после устранения из положительной вещественной входной LC функции одного или нескольких полюсов должен в результате получиться остаток, который является п. в. ф. и может быть реализован в виде LC цепи рассмотренным выше методом. Отсюда ясно, что все указанные формы реализации содержат одинаковое минимальное число элементов.

При использовании подобного смешанного метода реализации возможно бесконечное число вариаций, если учесть, что на любом

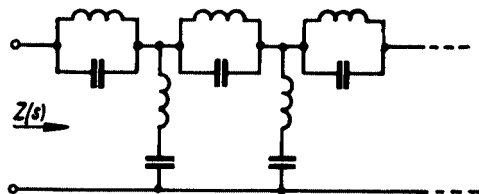


Рис. III.6

этапе нет необходимости полностью устранять полюс. В том случае, когда применяется выделение полюса, процесс рассматривают как вычитание какого-то члена из разложения на элементарные дроби соответствующей функции сопротивления или проводимости. Этот член имеет вид $\frac{2ks}{s^2 + \omega_v^2}$, где k — вычет в данном полюсе. Если

вместо этого члена вычитается член $2k's(s^2 + \omega_v^2)$, где $k' < k$, то полюс лишь частично устраняется из исследуемой функции. Такое частичное устранение его может повторяться многократно, и в результате оказывается бесконечное множество реализаций цепи для любой заданной функции. Таким образом, эти цепи уже не содержат больше минимального числа элементов, но позволяют проверить распределение их значений и поэтому имеют большую практическую ценность.

Две формы рассматриваемых цепей представляют теоретический интерес. Одну из них получают путем выделения из данной функции и ее инвертированных остатков только полюса в точке $s = \infty$, вторую — путем устранения только полюса в точке $s = 0$.

Пусть данная функция $Z(s)$ имеет полюс в точке $s = \infty$. После его устранения, т. е. выделения последовательной индуктивности, получим остаток, который обязательно является п. в. ф. и реализуется в виде LC цепи. Кроме того, появится остаток, который обязательно имеет нуль в точке $s = \infty$. Это обусловлено тем фактом, что в этой точке реактивная функция должна иметь нуль или полюс, а последний устранен. Инвертированный остаток (функция реактивной проводимости), следовательно, имеет полюс в точке $s = \infty$, выделение которого дает параллельную емкость. Оставшаяся реактивная проводимость, также являющаяся п. в. ф., реализуется в виде LC цепи и имеет нуль в точке $s = \infty$. Таким образом, обратная величина этого остатка имеет в данной точке полюс. Далее повторяется первоначальное положение, а именно получение реактивной п. в. ф., реализуемой в виде LC цепи, с полюсом в точке $s = \infty$. При выполнении аналогичного цикла операций можно получить другую последовательную индуктивность, затем параллельную емкость и другую реактивную функцию с полюсом в точке $s = \infty$. После каждого цикла оставшаяся реактивная функция имеет на один конечный ненулевой полюс и нуль меньше, чем предыдущая функция, т. е. на две конечные ненулевые критические частоты меньше, чем в начале цикла. После того как устранены все полюсы и нули, процесс заканчивается. Функция реализуется в виде несимметричной лестничной цепи, в которой все последовательные ветви — индуктивности, а параллельные — емкости, как показано на рис. III.7а.

Используется также метод, согласно которому из реактивности и ее последующих инвертированных остатков устраняются лишь полюсы в точках $s = 0$. Он полностью аналогичен описанному выше и подтверждает его общую применимость. В этом случае можно

предположить, что заданная функция $Z(s)$ имеет полюс в точке $s = 0$. После его устранения, т. е. выделения последовательной емкостной ветви, получают остаточный реактанс, который обязательно является п. в. ф., реализуемой в виде LC цепи и имеющей нуль в точке $s = 0$. Инвертированный остаток (функция реактивной проводимости) имеет полюс в точке $s = 0$, после устранения которого, т. е. выделения параллельной индуктивности, получают остаток, обладающий, если его инвертировать, тем же характером, что и первоначальная реактивная функция. После многократного повторения этого цикла получают несимметричную лестничную цепь с последовательными емкостями и параллельными индуктивностями, как показано на рис. III.7б.

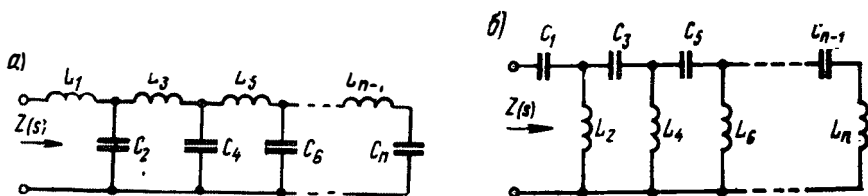


Рис. III.7

Следует отметить, что первый и последний элементы в каждой из полученных лестничных цепей определяют поведение функции в точках $s = 0$ и $s = \infty$ соответственно. Так, если в цепи, приведенной на рис. III.7а, функция $Z(s)$ имеет полюс в точке $s = \infty$, то $L_1 \neq 0$. Если же точка $s = \infty$ является нулем функции, то, очевидно, $L_1 = 0$. С другой стороны, если точка $s = 0$ является полюсом, то $C_n \neq \infty$, а если она является нулем, то $C_n = \infty$ (короткое замыкание). В том случае, когда заданная функция $Z(s)$ не имеет полюса в точке $s = \infty$, ее необходимо инвертировать и рассматривать функцию $Y(s) = \frac{1}{Z(s)}$, которая имеет полюс в точке $s = \infty$ и дает параллельную емкость C_2 .

Аналогично в цепи, изображенной на рис. III.7б, не будет последовательной емкости C_1 , если функция $Z(s)$ не имеет полюса в точке $s = 0$, и не будет конечной индуктивности L_n , если та же функция не имеет полюса в точке $s = \infty$. Из рассмотрения цепи, показанной на рис. III.7а, видно, что функция $Z(s)$ имеет полюсы в точках $s = \infty$ и $s = 0$; это в равной мере относится и к цепи, приведенной на рис. III.7б. Ввиду того что указанные реализации, как отмечалось выше, дают цепи, содержащие минимальное число элементов, общее количество последних в обеих цепях одинаково. Описанные реализации также известны как канонические формы¹

¹ Впервые они были описаны в работе [7] и часто называются *формами Каузера*, в отличие от форм Фостера, о которых упоминалось ранее.

Более глубокое понимание процесса последовательных выделений полюсов в точках $s = 0$ и $s = \infty$ достигается с помощью графиков, на рис. III.8а, где приведены функции реактивного сопротивления $X_1(\omega)$ с полюсом в точке $s = \infty$. Этот полюс и

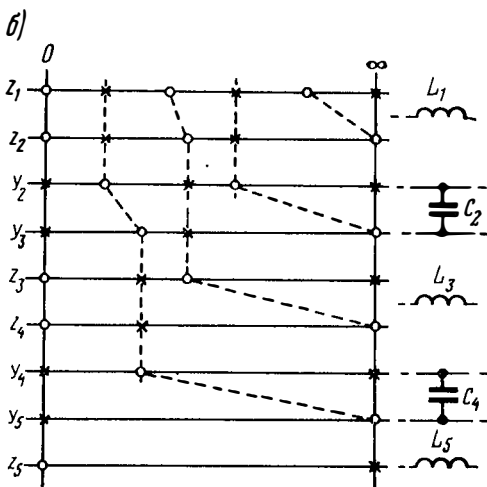
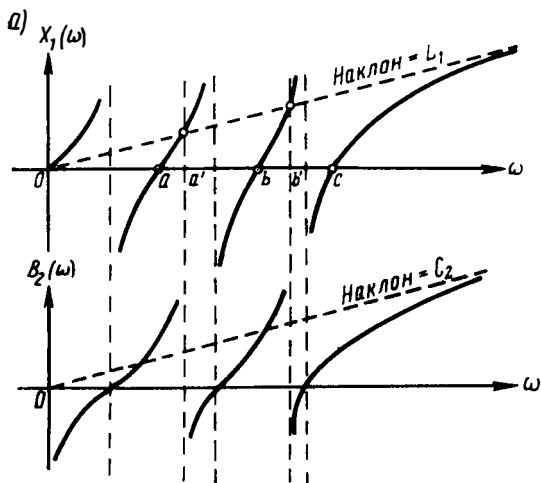


Рис. III.8

должен быть устранен, что приводит к выделению последовательной индуктивности L_1 . Пунктирная линия — прямая представляет собой асимптоту функции $X_1(\omega)$. Наклон ее равен вычету функции в полюсе $s = \infty$ и, следовательно, величине L_1 . Устранение из функции полюса в точке $s = \infty$ соответствует вычитанию из нее асимптоты. При этом процессе положение оставшихся полюсов не изменяется, но нули в точках a и b смещаются в положения a' и b' , расположенные по вертикали под точками пересечения кривой $X_1(\omega)$ и асимптоты. Для нуля в точке c точка пересечения лежит на бесконечности, и этот нуль смещается в точку $s = \infty$.

Инвертированная остаточная функция $B_2(\omega)$, изображенная на рис. III.8а под кривой $X_1(\omega)$, очевидно, имеет полюс в точке $s = \infty$. Вычет в полюсе снова равен накло-

ну асимптоты и представляет собой значение емкости C_2 следующей параллельной ветви лестничной цепи. В результате устранения из функции $B_2(\omega)$ этого полюса ее нуль, имеющий наибольшее значение, смещается в точку $s = \infty$, причем следующий инвертированный остаток снова имеет полюс на бесконечности. Таким образом, на каждом этапе данного процесса число конечных

ненулевых критических частот уменьшается на одну. Когда не останется ни одной конечной (критической) частоты получится функция, имеющая критические частоты только в точках $s = 0$ и $s = \infty$ и представляющая собой просто индуктивность или емкость. Следовательно, общее число элементов в полной лестничной цепи на единицу больше числа конечных ненулевых критических частот и точно равно числу соответствующих параметров, характеризующих данную реактивную функцию или функцию реактивной проводимости.

Итак, получено еще одно, независимое подтверждение того, что при описанном методе реализации достигается минимальное число элементов.

Весь процесс разложения заданного импеданса z_1 представлен графически на рис. III.86 в виде ряда частотных диаграмм последовательных членов функции и ее инвертированных остатков. На первом этапе устранение из функции z_1 полюса в точке $s = \infty$ дает последовательную индуктивность L_1 и остаток z_2 , конечные ненулевые полюсы которого такие же, как у функции z_1 , но нули смещены относительно их первоначального положения (в частности, нуль, имеющий наибольшее значение, сдвигается в точку $s = \infty$). На третьей линии рисунка показана частотная диаграмма для инвертированной функции z_2 — проводимости $y_2 = \frac{1}{z_2}$, имеющей полюсы

в тех точках, где расположены нули функции z_2 , и наоборот. После устранения полюса в точке $s = \infty$ получают параллельную емкость C_2 , а наибольший нуль снова сдвигается в точку на бесконечности; при этом появляется остаток — функция y_3 . Следующее сопротивление $z_3 = \frac{1}{y_3}$ аналогично сопротивлению z_1 и, значит, можно,

повторив тот же цикл операций, получить последовательную ветвь — индуктивность L_3 и параллельную ветвь — емкость C_4 . На этом этапе выделены все первоначальные конечные, отличные от нуля, полюсы и нули, а остаток y_5 или его обратная величина — сопротивление z_5 имеет критические частоты только в точках $s = 0$ и $s = \infty$. Как уже говорилось, такой остаток дает последовательную индуктивность L_5 , которой оканчивается цепь. Рассмотренное графическое представление последовательности операций, связанных с получением полной лестничной цепи, является весьма удобным способом поэтапного анализа и позволяет увидеть чем заканчивается процесс.

Для того чтобы исследовать метод построения лестничной цепи с алгебраической точки зрения, наиболее целесообразно представить реактивную функцию в виде полиномов, не разложенных на множители

$$Z(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_2 s^2 + a_0}{b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-3} s^{n-3} + \dots + b_3 s^3 + b_1 s} \quad (\text{III.34})$$

Полюс в точке $s = \infty$ устраняется делением полинома знаменателя на полином числителя. При этом получится частное $\frac{a_n s}{b_{n-1}}$ и остаток — функция, которая является отношением полинома степени $(n - 2)$ к полиному степени $(n - 1)$

$$Z(s) = L_1 s + \frac{a'_{n-2} s^{n-2} + a'_{n-4} s^{n-4} + \dots + a'_2 s^2 + a'_0}{b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-3} s^{n-3} + \dots + b_3 s^3 + b_1 s}, \quad (\text{III. 35})$$

где $L_1 = \frac{a_n}{b_{n-1}}$ — величина первой последовательной индуктивности. После инвертирования остатка и повторения процесса получим

$$Z(s) = L_1 s + \frac{1}{C_2 s + \frac{b'_{n-3} s^{n-3} + \dots + b'_1 s}{a'_{n-2} s^{n-2} + \dots + a'_2 s^2 + a'_0}}, \quad (\text{III. 36})$$

где C_2 — значение последующей параллельной емкости. Второй остаток представляет собой функцию, являющуюся отношением полинома степени $(n - 3)$ к полиному степени $(n - 2)$. Продолжение этого процесса позволяет получить следующее разложение данного входного сопротивления в непрерывную (цепную) дробь:

$$Z(s) = L_1 s + \frac{1}{C_2 s + \frac{1}{L_3 s + \frac{1}{C_4 s + \dots + \frac{1}{L_{n-1} s + \frac{1}{C_n s}}}}}. \quad (\text{III. 37})$$

В выражении (III.34) для сопротивления $Z(s)$ предполагается, что n — четное. Если же n — нечетное, то сопротивление $Z(s)$ представляет собой рациональную функцию в виде отношения нечетного полинома к четному, а конечный член — индуктивное сопротивление $L_n s$.

Описанный процесс последовательного деления и инверсии, очевидно, идентичен методу проверки Гурвица. Выше уже отмечалось, что реактивная функция является такой же предельной формой п. в. ф., как и отношение нечетной части полинома Гурвица к четной его части или как отношение четной части этого полинома к нечетной части. Для таких отношений разложение в цепную дробь [см. ур-ние (I.45)] дает все положительные вещественные коэффициенты. Таким образом, вновь независимо проверяется физическая реализуемость цепи, полученной в результате рассмотренного процесса.

Можно воспользоваться и другим разложением в непрерывную дробь — по параметру $\frac{1}{s}$, при котором устраняется полюс в точке $s = 0$. В этом случае полиномы функции $Z(s)$ целесообразно записать в виде

$$Z(s) = \frac{a_0 + a_2 s^2 + a_4 s^4 + \dots + a_n s^n}{b_1 s + b_3 s^3 + b_5 s^5 + \dots + b_{n-1} s^{n-1}}. \quad (\text{III. 38})$$

После деления полинома знаменателя на полином числителя получают частное $\frac{a_0}{b_1 s}$ и остаток в виде

$$Z(s) = \frac{1}{C_1 s} + \frac{a'_2 s^2 + a'_4 s^4 + \dots + a'_n s^n}{b_1 s + b_3 s^3 + \dots + b_{n-1} s^{n-1}}, \quad (\text{III. 39})$$

где $C_1 = \frac{b_1}{a_0}$ — значение первой последовательной емкости (см. рис. III.76). Инвертированный остаток также имеет полюс в точке $s = 0$. Выделение этого полюса приводит к выражению

$$Z(s) = \frac{1}{C_1 s} + \frac{1}{\frac{1}{L_2 s} + \frac{b'_3 s^3 + \dots + b'_{n-1} s^{n-1}}{a'_2 s^2 + \dots + a'_n s^n}}, \quad (\text{III. 40})$$

где $L_2 = \frac{a'_2}{b_1}$ — значение следующей параллельной индуктивности.

Продолжение процесса дает разложение в непрерывную дробь в виде

$$Z(s) = \frac{1}{C_1 s} + \frac{1}{\frac{1}{L_2 s} + \frac{1}{\frac{1}{C_3 s} + \frac{1}{L_4 s} + \dots + \frac{1}{\frac{1}{C_{n-1} s} + \frac{1}{L_n s}}}}. \quad (\text{III. 41})$$

Здесь последующими членами являются $\frac{1}{C_1 s}$, $\frac{1}{L_2 s}$, $\frac{1}{C_3 s}$ и т. д., которые представляют собой полюсы в точке $s = 0$.

Указанный процесс аналогичен проверке полинома Гурвица $P(s)$, где сначала производится замена переменной $s \rightarrow \frac{1}{s}$ (см. § 1.3). Положительность всех элементов L и C обеспечивается, во-первых, тем, что реактивная функция $Z(s)$ является функцией LC цепи, а во-вторых, условием принадлежности ее к классу п. в. ф. Рассматриваемая реактивная функция $Z(s)$ идентична отношению четной части полинома Гурвица к его нечетной части.

При выполнении подобного разложения по Кауэру в численном примере необходимо в процессе непрерывного деления и инвертирования обращать внимание на физические особенности, по крайней мере, начальных стадий этого процесса. В противном случае формальное применение алгебраических операций может привести к ошибке. Так, нетрудно заметить, что одна из лестничных цепей получена выше с помощью полиномов, у которых переменная расположена по восходящим степеням, а другая цепь — путем применения полиномов с нисходящей степенью переменной. Очевидно, что рассматриваемый процесс предусматривает одно из четырех возможных исходных построений функции $Z(s)$. Два из них в любом случае дают формы Кауэра, два других неприемлемы. Лучший способ предотвратить появление двух последних форм — дать физическую интерпретацию проводимых математических преобразований согласно приведенным выше рассуждениям. Иными словами, синтез следует осуществлять очень внимательно, а не просто действовать по формальной схеме.

III.5. Численные примеры

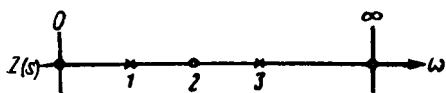


Рис. III.9

Рассмотрим реактивную функцию, частотная диаграмма которой показана на рис. III.9. Аналитическим выражением для данной функции является отношение частотных множителей и ее разложение на элементарные дроби, т. е.

$$Z(s) = \frac{s(s^2 + 4)}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)} = \frac{\frac{3}{8}s}{s^2 + 1} + \frac{\frac{5}{8}s}{s^2 + 9}. \quad (\text{III.42})$$

Соответствующая функция реактивной проводимости и ее разложение на элементарные дроби имеет вид

$$Y(s) = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)} = \frac{\frac{9}{4}}{s} + \frac{\frac{15}{4}s}{s^2 + 4} + s. \quad (\text{III.43})$$

Две формы Фостера, связанные с разложениями (III.42) и (III.43), показаны соответственно на рис. III.10а и III.10б.

Можно сделать проверку точности вычислений для указанных разложений, обратив внимание на то, дают ли эти цепи одинаковые результаты для очень низких и очень высоких частот. Так, при $s = 0$ цепь, показанная на рис. III.10а, вырождается в индуктивность со значением $\frac{3}{8} + \frac{5}{72} = \frac{4}{9}$. Это является проверкой поведения цепи, изображенной на рис. III.10б, на низких частотах, где емкости представляют собой разомкнутые ветви. На высоких частотах цепь, приведенная на первом рисунке, вырождается в емкость со значением, равным единице, что совпадает с соответствующим асимптотическим поведением цепи, показанной на втором рисунке. Можно произвести проверку и другим способом. Если замкнуть накоротко любую цепь, то собственная частота должна быть нулем функции $Z(s)$ при $s^2 = -4$ или $s = \pm j2$. Во второй цепи при коротком замыкании остается средний последовательный LC контур, замкнутый накоротко. При этом $\omega_0^2 =$

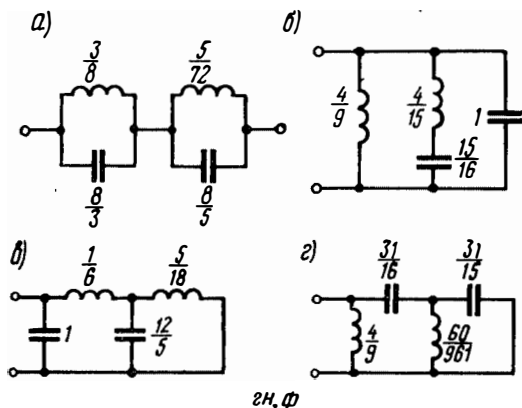


Рис. III.10

$= \frac{1}{LC}$ или $\omega^2 = 4$, т. е. $\omega_0 = 2$. В первой цепи при коротком замыкании емкости как и индуктивности соединяются параллельно. Значение результирующей емкости составляет $\frac{8}{3} + \frac{8}{5}$ или $\frac{15}{256}$; значение результирующей индуктивности равно $\frac{15}{32}$. Таким образом, произведение LC составляет $\frac{1}{4} = \frac{1}{\omega_0^2}$ и, следовательно, $\omega_0 = 2$.

Для того чтобы получить формы Кауэра, нужно представить функцию $Z(s)$ в виде

$$Z(s) = \frac{s^3 + 4s}{s^4 + 10s^2 + 9}. \quad (\text{III.44})$$

Если желательно прежде всего получить форму, содержащую последовательные индуктивности и параллельные емкости, необходимо устранить полюсы в точке $s = \infty$. Ввиду того что функция $Z(s)$ не имеет полюсов в этой точке, следует на первом этапе инвер-

тировать функцию (III.44). Процесс дальнейшего деления и инверсии можно представить в виде

$$\begin{array}{r}
 \frac{s}{s^3 + 4s} \quad | \quad s^4 + 10s^2 + 9 \\
 \hline
 s^4 + 4s^2 \quad | \quad \frac{s}{6} \\
 \hline
 6s^3 + 9 \quad | \quad s^3 + 4s \\
 \hline
 s^3 + \frac{3}{2}s \quad | \quad \frac{12}{5}s \\
 \hline
 \frac{5}{2}s \quad | \quad 6s^2 + 9 \\
 \hline
 6s^2 \quad | \quad 5\frac{s}{18} \\
 \hline
 + 9 \quad | \quad \frac{5}{2}s
 \end{array} \quad (III.45)$$

Соответствующая цепь показана на рис. III.10в.

В связи с тем что функция $Z(s)$ не имеет полюсов и в точке $s = 0$, процесс деления и инверсии, приводящий к другой форме Кауэра, также начинается с инверсии. Вычисления производятся в приводимой ниже последовательности

$$\begin{array}{r}
 \frac{9}{4s} \\
 \hline
 4s + s^3 \quad | \quad 9 + 10s^2 + s^4 \\
 \hline
 9 + \frac{9}{4}s^2 \quad | \quad \frac{16}{31s} \\
 \hline
 \frac{31}{4}s^2 + s^4 \quad | \quad 4s + s^3 \\
 \hline
 4s + \frac{16}{31}s^3 \quad | \quad \frac{961}{60s} \\
 \hline
 \frac{15}{31}s^3 \quad | \quad \frac{31}{4}s^2 + s^4 \\
 \hline
 \frac{31}{4}s^2 \quad | \quad \frac{15}{31s} \\
 \hline
 s^4 \quad | \quad \frac{15}{31}s^3
 \end{array} \quad (III.46)$$

Соответствующая цепь показана на рис. III.10г. Обе цепи вырождаются в индуктивность со значением $\frac{4}{9} \text{ гн}$ в точке $s = 0$ и емкость величиной 1 ф в точке $s = \infty$. Если входные зажимы замкнуты накоротко, то эти цепи имеют собственную частоту $\omega_0 = 2$.

III.6. Эквивалентные и обратные цепи

В данном параграфе будет показано, что задача синтеза не имеет единственного решения. Например, для каждой положительной вещественной реактивной функции можно найти не только две формы Фостера и две формы Кауэра для ее реализации, но, кроме того, как окажется — составить бесчисленное множество дополнительных цепей, которые будут иметь то же входное сопротивление со стороны заданной пары зажимов. Все эти цепи называются *эквивалентными* относительно рассматриваемого входа. Важно отметить, что под термином «эквивалентный» подразумевается не только определенная конфигурация цепей, но и то, что их элементы имеют такие значения, при которых становятся одинаковыми входные сопротивления цепей как функции переменной комплексной частоты. Например, четыре структуры, изображенные на рис. III.10 без указания значений элементов, называются *потенциально эквивалентными*.

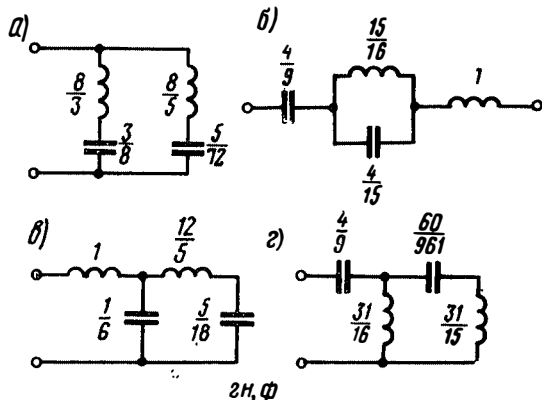


Рис. III.11

Под этим термином подразумевается, что цепи будут эквивалентными, когда их элементы получат соответствующие значения.

Очевидно, что описанные ранее методы синтеза позволяют, кроме того, построить цепь, входная реактивная функция которой является обратной по отношению к аналогичной функции некоторой заданной цепи¹. Иными словами, с помощью этих методов можно построить обратные цепи относительно одной пары зажимов. В том случае, когда требуется построить дуальную цепь [1]², соответствующая обратная цепь находится без применения описанной методики. Однако, если граф схемы является непланарным или если наряду с индуктивностями в схеме имеются также и взаимные индуктивности, обратную цепь, тем не менее, можно найти путем вычисления входного сопротивления обычным способом (инвертированием) и затем синтезируя его в виде любой из рассмотренных выше форм. Очевидно, что обратная цепь, в отличие от дуальной, существует всегда и может быть составлена простым способом.

¹ Два двухполюсника называются обратными, если произведение их сопротивлений равно постоянной величине, т. е. $Z_1 Z_2 = a^2$ (прим. ред.).

² См. также [50], стр. 149, 213, 266 (прим. ред.).

Структуры, обратные любой из канонических форм, изображенных на рис. III.10, легко получаются использованием простого принципа дуальности. Таким образом, индуктивность и емкость, имеющие одинаковые численные значения, являются дуальными, а параллельное соединение элементов — дуальным относительно последовательного соединения соответствующих дуальных элементов. Нетрудно заметить, что цепи, показанные на рис. III.11а и III.11б являются обратными по отношению к формам Фостера, приведенным на рис. III.10а и III.10б, а цепи, изображенные на рис. III.11в и III.11г,— обратными по отношению к формам Кауэра (см. рис. III.10в и III.10г).

Ввиду того что дуальная цепь по Фостеру или по Кауэру по своей структуре аналогична соответствующей эквивалентной цепи, необходимо во избежание ошибки различать эти типы, а также, как и в случае эквивалентных цепей,— обратные и потенциально обратные цепи. Вследствие того, что в схемах потенциально эквивалентных или потенциально обратных цепей значения элементов обычно не указываются, для их различия требуется еще больше внимания.

III.7. Преобразование относительно нормальной системы координат

Из всех эквивалентных цепей, которые можно построить с помощью одного из описанных выше методов, формы Фостера обладают отличительной особенностью, заключающейся в возможности применения к ним нормальных координат, общих для всех цепей. Рассмотрение этого явления с математической и физической точек зрения представляет не только некоторый теоретический интерес, но позволяет разработать другой, более удобный метод построения обратных цепей и глубже понять связь между элементами их анализа и синтеза.

Допустим, что T и V — мгновенные функции соответственно магнитной и электрической энергии, относящиеся к любой физической LC цепи. Если эти функции выразить через контурные токи i_1, \dots, i_l , их неопределенные интегралы и контурные заряды — через q_1, \dots, q_l , то получим положительные определенные квадратичные формы [1]¹

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^l L_{ik} i_i i_k \quad (\text{III. 47})$$

и

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^l S_{ik} q_i q_k, \quad (\text{III. 48})$$

¹ См. также [57], стр. 30, 346 (прим. ред.).

где L_{ik} и S_{ik} — параметры индуктивности и обратной емкости при анализе методом контурных токов. Указанные квадратичные формы можно представить в виде эквивалентных матриц [1]¹:

$$2T = \underline{i} \times [L] \times i; \quad (\text{III. 49})$$

$$2V = \underline{q} \times [S] \times q, \quad (\text{III. 50})$$

где $[L]$ и $[S]$ — соответственно матрицы контурных индуктивностей и обратных емкостей [1]¹, а

$$i] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_l \end{bmatrix}; \quad q] = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_l \end{bmatrix} \quad (\text{III. 51})$$

— соответственно матрицы-столбцы контурных токов и зарядов.

С помощью известных методов можно определить вещественное невырожденное преобразование переменных

$$i] = [A] \times i']; \quad q] = [A] \times q' \quad (\text{III. 52})$$

с матрицей $[A]$, которая одновременно преобразует функции T и V в сумму квадратов. Тогда выражения (III.49) и (III.50) принимают вид:

$$2T = \underline{i}' \times [A]_t \times [L] \times [A] \times i'; \quad (\text{III. 53})$$

$$2V = \underline{q}' \times [A]_t \times [S] \times [A] \times q', \quad (\text{III. 54})$$

где $[A]_t$ — матрица, транспонированная по отношению к матрице $[A]$, а

$$[A]_t \times [L] \times [A] = [L']; \quad (\text{III. 55})$$

$$[A]_t \times [S] \times [A] = [S'] \quad (\text{III. 56})$$

— диагональные матрицы.

Характеристическое уравнение $[L']s + [S']s^{-1} = 0$ оказывается разложенным на множители и, таким образом, подтверждается существование нормальных мод (собственных частот). Координаты, к которым относятся переменные i'_k и q'_k , обладают той особенностью, что они отделяют нормальные моды и поэтому называются *нормальными координатами* исходной цепи. Обычно эти координаты считаются фиктивными и представляют интерес только с математической точки зрения. Однако дальше станет очевидным, что можно построить действительную цепь, эквивалентную исходной относительно первого входа, в которой указанные нормальные координаты появляются как действительные контуры.

¹ См. [57], стр. 338, 345 (прим. ред.).

Далее вводится дополнительное преобразование

$$i' = [D] \times i'' \quad (III.57)$$

с диагональной матрицей

$$[D] = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{12}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_{1l}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (III.58)$$

где $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1l}$ — коэффициенты в первой строке матрицы $[A]$. В результате этого дополнительного преобразования получаем

$$i = [A] \times [D] \times i'' = [B] \times i'', \quad (III.59)$$

где

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{l1} & b_{l2} & \dots & b_{ll} \end{bmatrix}. \quad (III.60)$$

Все коэффициенты в первой строке равны единице, следовательно, первое преобразование (III.59) имеет вид

$$i_1 = i_1'' + i_2'' + i_3'' + \dots + i_l''. \quad (III.61)$$

Матрицы параметров, связанные с переменными i_k'' (и q_k''), являются диагональными и могут быть представлены в виде

$$[L''] = [B]_l \times [L] \times [B]; \quad (III.62)$$

$$[S''] = [B]_l \times [S] \times [B]. \quad (III.63)$$

Фактически дополнительное преобразование сводится просто к изменению уровней сопротивления различных нормальных координат.

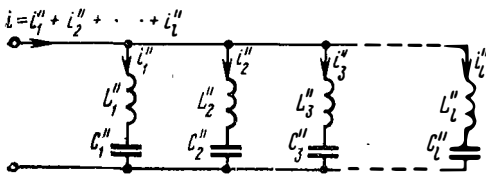


Рис. III.12

Каждая нормальная координата содержит последовательную ветвь с параметрами, выраженными матрицами (III.62) и (III.63). Сумма токов в этих ветвях согласно ур-нию (III.61) численно равна входному току исходной цепи при некотором приложенном на-

пряжении возбуждения. Входное сопротивление цепи равно входному сопротивлению заданной цепи с матрицами параметров $[L]$ и $[S]$. Иными словами, в выражении (III.59) входное сопротивление остается инвариантным при преобразовании в нормальную форму, в которой проявляется существование собственных частот. Цепь, изображенная на рис. III.12, представляет собой конечный

результат рассмотренного преобразования. Ясно, что она идентична одной из форм Фостера, полученных путем разложения на элементарные дроби входной проводимости.

Другую форму Фостера можно получить точно таким же способом, производя аналогичные преобразования на основе метода узловых напряжений. Таким образом, *две канонические формы Фостера в действительности являются формами, в которых нормальные координаты системы становятся реальностью.*

Несмотря на то, что исходная цепь с матрицами $[L]$ и $[S]$ может быть непланарной и содержать произвольные взаимные индуктивные связи, изложенный прямой метод позволяет осуществлять преобразование цепи в любую из эквивалентных (а следовательно, обратных) канонических форм.



IV.

ГЛАВА

Синтез входных сопротивлений RC и RL цепей

IV.1. Реализация RC цепей по Фостеру

Во второй главе было показано, что если рациональная функция имеет простые полюсы, ограниченные конечной отрицательной вещественной осью (причем вычеты в этих полюсах положительные вещественные), и если, кроме того, ее значение в точке $s = \infty$ является неотрицательным и конечным, то такая функция удовлетворяет необходимым условиям принадлежности к классу входных сопротивлений RC цепей. Легко заметить, что перечисленные условия являются также и достаточными, так как рациональная функция, удовлетворяющая лишь им, всегда является реализуемой. Метод синтеза такой функции аналогичен использованному в предыдущей главе при реализации входных LC функций.

Разложение на элементарные дроби указанной рациональной функции имеет вид

$$Z(s) = \frac{k_1}{s-s_1} + \frac{k_3}{s-s_3} + \dots + \frac{k_{2n-1}}{s-s_{2n-1}} + k_{2n+1} \quad (\text{IV.1})$$

при

$$-\infty < s_{2n-1} < \dots < s_3 < s_1 \leq 0. \quad (\text{IV.2})$$

Используя σ , вместо $-s$, получим

$$Z(s) = \frac{k_1}{s+\sigma_1} + \frac{k_3}{s+\sigma_3} + \dots + \frac{k_{2n-1}}{s+\sigma_{2n-1}} + k_{2n+1}, \quad (\text{IV.3})$$

где k — положительные вещественные числа и $k_{2n+1} \neq 0$, если функция $Z(s)$ не имеет нуля в точке $s = \infty$. Представив сопротивление параллельного RC контура, изображенного на рис. IV.1а в виде

$$z_v = \frac{1}{\frac{1}{R_v} + C_v s} = \frac{R_v}{1 + R_v C_v s} = \frac{1}{s + \frac{1}{R_v C_v}}, \quad (\text{IV.4})$$

можно слагаемые в ур-нии (IV.3) считать тождественными z_v в ур-нии (IV.4), где

$$k_v = \frac{1}{C_v} \quad (IV.5)$$

и

$$\sigma_v = \frac{1}{R_v C_v} \quad (\text{за исключением } v = 2n + 1). \quad (IV.6)$$

Ввиду того что k_v и σ_v являются положительными вещественными благодаря указанным свойствам функции $Z(s)$, значения R_v и C_v обязательно также будут вещественными положительными.

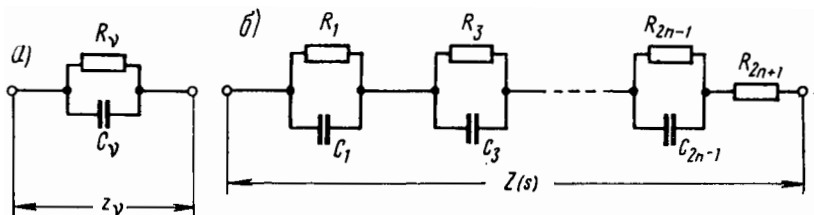


Рис. IV.1

Следовательно, функция $Z(s)$ всегда реализуется в форме, показанной на рис. IV.1б, со следующими значениями элементов:

$$\left. \begin{aligned} R_v = \frac{k_v}{\sigma_v}, \quad C_v = \frac{1}{k_v} \quad \text{при } v = 1, 3, \dots, (2n-1) \\ R_{2n+1} = k_{2n+1} = Z(\infty) \end{aligned} \right\} \quad (IV.7)$$

где R — в омах, C — в фарадах.

Если самый низкий (the lowest)¹ полюс функции $Z(s)$ находится в точке $s = 0$, то $\sigma_1 = 0$, $R_1 = \infty$ и первый параллельный RC контур, приведенный на рис. IV.1б, вырождается в одну емкость C_1 .

Эта цепь аналогична форме Фостера при реализации входного LC сопротивления методом разложения на элементарные дроби, и потому называется *формой Фостера*². Она содержит минимальное число элементов, необходимых для реализации заданной функции $Z(s)$, поскольку этот минимум точно равен числу постоянных k_1, \dots, k_{2n+1} и $\sigma_1, \dots, \sigma_{2n-1}$, характеризующих функцию, представленную ур-нием (IV.3). Подобно аналогичной LC цепи рассматриваемая цепь называется канонической формой.

Логично предположить, что, пользуясь разложением на элементарные дроби соответствующей функции проводимости $Y(s) =$

¹ Термины «низкий и высокий» употребляются здесь и ниже для того, чтобы указать соответственно на значения, близкие к точке $s = 0$ или удаленные от нее, независимо от их алгебраического знака.

² Эта и другие формы реализации RC и RL цепей, рассматриваемые в данной главе, впервые были описаны Кауэром (см. главу III).

$= \frac{1}{Z(s)}$, можно получить другую форму Фостера. Прежде чем применить данный метод, целесообразно несколько глубже исследовать свойства входных функций сопротивления и проводимости RC цепей и, таким образом, определить необходимые и достаточные условия для их реализации. Рассмотрим эти условия иным способом, а именно, не через полюсы и вычеты, а через нули и полюсы. В главе II указывалось, что рациональная функция является п. в. ф. и реализуется в виде RC цепи (как входное сопротивление), если, помимо выполнения требования $0 \leq Z(\infty) < \infty$, ее нули и полюсы простые и чередуются на отрицательной вещественной оси, причем самая низкая критическая частота является полюсом.

Для удовлетворения требования устойчивости (закрывающегося в том, что критические частоты не должны лежать в правой полуплоскости) необходимо выполнение условий, согласно которым полюсы и нули функции должны быть ограничены вещественной осью (что обуславливает вещественность вычетов), а также быть простыми и чередующимися. Последнее является обязательным условием положительности вычетов. Перечисленные условия можно интерпретировать графически, для чего нужно воспользоваться ф-лой (III.5):

$$k_v = [(s - s_v) Z(s)]_{s=s_v}. \quad (IV.8)$$

Если допустить, что функция $Z(s)$ представляет отношение частотных множителей, то величина в скобках будет являться этой

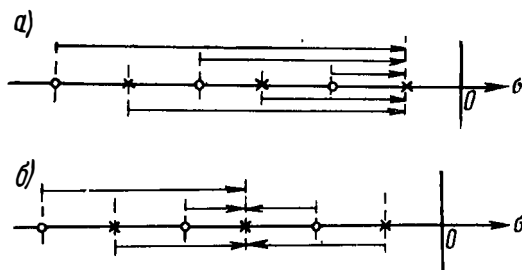


Рис. IV.2

же функцией, но без v -го множителя знаменателя (полюса). При $s = s_v$, другие множители можно рассматривать как векторы, начинающиеся из оставшихся нулей и полюсов и заканчивающиеся в v -м полюсе.

На рис. IV.2а изображено типичное расположение полюсов и нулей вдоль отрицательной оси σ плоскости s ($s = \sigma + j\omega$). Группа частотных множителей показана на этом рисунке в виде векторов для вычисления вычета в полюсе, ближайшем к началу координат, причем множители нулей расположены над осью σ , а множители полюсов — под ней. Поскольку все векторы являются положительными вещественными, отношение произведения множителей нулей к произведению множителей полюсов, очевидно, также является положительным вещественным.

На рис. IV.2б графически показана другая группа множителей, полученных при вычислении вычета в следующем полюсе. Как видно из рисунка, вследствие чередования нулей и полюсов, один

множитель нуля и один множитель полюса имеют обратные знаки, и, таким образом, вычет снова является положительным вещественным. С помощью такого графического представления процесса вычисления вычета нетрудно заметить, что чередование нулей и полюсов (начиная с полюса, ближайшего к началу координат) является необходимым и достаточным условием положительности всех вычетов. Расположение их на вещественной оси является необходимым и достаточным условием того, чтобы все множители были вещественными, а следовательно, были вещественными и вычеты.

Вещественность вычетов фактически требует лишь, чтобы полюсы располагались на вещественной оси, так как комплексные нули должны появиться в сопряженных парах. Для положительности вычетов необходимо, чтобы нули лежали на вещественной оси и чтобы полюсы и нули были простыми и чередовались.

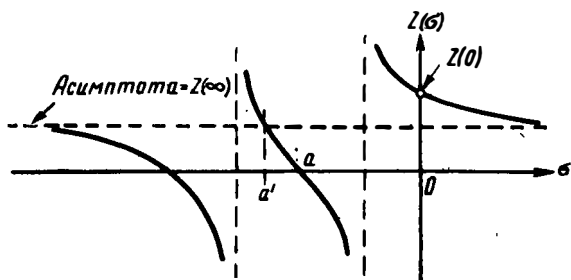


Рис. IV.3

Достаточные условия реализации RC функций были приведены выше. Естественно, что необходимые условия, сформулированные при помощи нулей и полюсов, являются также и достаточными.

График простой рациональной функции $Z(s)$, удовлетворяющей перечисленным условиям, приведен на рис. IV.3 для значений переменной s вдоль вещественной оси (ось σ). Вполне понятно, что поскольку эта функция должна стремиться к одной и той же конечной положительной асимптоте при больших положительных и отрицательных значениях σ , то значение функции на нулевой частоте должно быть больше ее значения на бесконечной частоте. Фактически в то время как второе значение ограничено, первое — неограничено, так как самый низкий полюс может совпасть с точкой $s = 0$. Из рис. IV.3, кроме того, следует, что особые свойства функции $Z(s)$, описанные выше, сохраняются при вычитании из нее положительной вещественной постоянной до тех пор, пока величина последней меньше величины функции $Z(\infty)$. Действительно, при вычитании постоянной происходит сдвиг нулей функции $Z(s)$ влево, причем он становится бесконечным для самого высокого нуля, когда вычитаемая постоянная имеет значение, равное $Z(\infty)$. Если вычи-

тается бóльшая по величине постоянная, то результирующая кривая пересекает положительную вещественную ось, что недопустимо, так как ни одна п. в. ф. не может иметь нулей в правой полуплоскости.

То обстоятельство, что вычитание положительной постоянной, меньшей $Z(\infty)$, не вызывает ухудшения свойств функции, свидетельствует о соответствии минимального значения вещественной части $Z(j\omega)$ точке $s = \infty$ для всех вещественных значений ω [см. условия (II.56)]. Это можно объяснить следующим образом. Если минимальное значение $\text{Re}\{Z(j\omega)\}$ является конечным, то вычитание $Z(\infty)$, превышающее его, несомненно нарушит условия принадлежности функции $Z(s)$ к классу п. в. ф. В этой связи бесконечность целесообразно рассматривать как точку, к которой может стремиться функция при изменении переменной вдоль вещественной или мнимой оси. Поскольку функция $Z(s)$ является рациональной, ее предельное значение не зависит от того, вдоль какой оси изменяется переменная.

Результат вычитания значения $Z(\infty)$ из функции $Z(s)$, представленной на рис. IV.3, показан графически в верхней части рис. IV.4, где остаточная функция, обозначенная $Z'(s)$, нанесена вдоль оси σ . На нижней части этого рисунка показана соответствующая проводимость $Y'(s)$, полюсы которой являются нулями функции $Z'(s)$, и наоборот. Итак, поскольку функция $Z'(s)$ при $s \rightarrow \infty$ имеет нуль, функция $Y'(s)$ имеет в этой точке полюс, что иллюстрируется ее асимптотическим поведением. Несмотря на то, что графики на рис. IV.4 построены для весьма простых функций, их общий характер, очевидно, останется неизменным, если ввести дополнительные нули и полюсы слева от корней исходных функций. Следовательно, с достаточной уверенностью можно предположить, что последующие выводы, как и предыдущие, будут иметь общий характер.

Наклон кривых проводимости оказывается положительным, тогда как наклон кривых сопротивления — отрицательным. Поэтому легко установить, что вычеты функции $Z(s)$ в ее полюсах (равные обратным наклонам функции $Y(s)$ в ее нулях) являются положительными, в то время как вычеты функции $Y(s)$ в ее конечных полюсах [равные обратным наклонам функции $Z(s)$ в ее конечных нулях] — отрицательными. Вычет проводимости $Y(s)$ в ее полюсе при $s = \infty$ [как и для функции $Y'(s)$, изображенной на рис. IV.4], однако, является положительным, так как он равен наклону асимптоты. Уравнение этой асимптоты имеет вид

$$y = C(s - s_0) = Cs + g_0, \quad (\text{IV.9})$$

где C — наклон асимптоты; g_0 — ее пересечение с осью ординат (т. е. при $\sigma = 0$). При $s \rightarrow \infty$ поведение проводимости соответствует поведению вырожденной цепи, состоящей из параллельного соединения емкости C и активной проводимости g_0 .

В более общем случае входную RC проводимость, имеющую полюс в точке $s = \infty$, можно представить в виде

$$Y(s) = \frac{(s + \sigma_1)(s + \sigma_3) \dots (s + \sigma_n)}{(s + \sigma_2)(s + \sigma_4) \dots (s + \sigma_{n-1})} \text{ при } n \text{ — нечетном.} \quad (\text{IV.10})$$

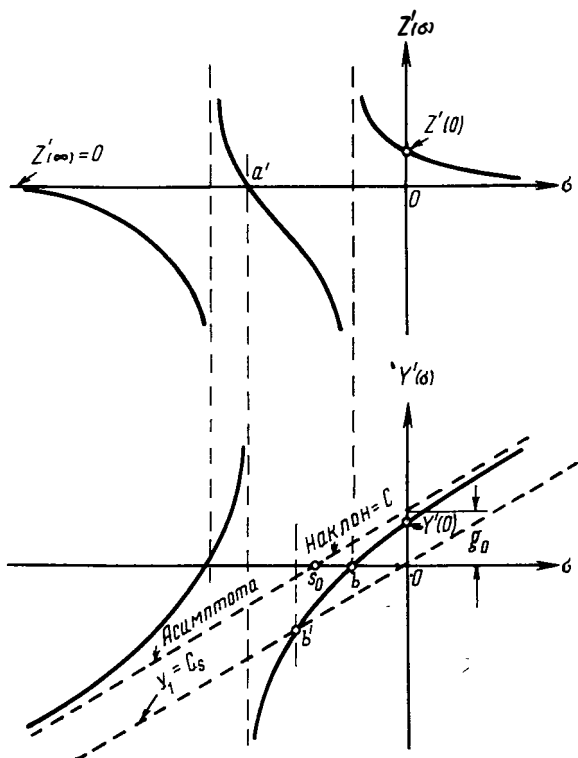


Рис. IV.4

Ее асимптотическое поведение при большом значении s определяется делением знаменателя на числитель. Частное имеет вид

$$y = s + g_0. \quad (\text{IV.11})$$

Отсюда легко найти точку пересечения асимптотой оси ординат

$$g_0 = (\sigma_1 + \sigma_3 + \dots + \sigma_n) - (\sigma_2 + \sigma_4 + \dots + \sigma_{n-1}). \quad (\text{IV.12})$$

Если согласно рис. IV.4 обозначить через $Y''(s)$ разность графиков проводимости $Y'(s)$ и прямой линии Cs , проходящей через начало координат, то, как показано на рис. IV.5, асимптота $Y''(\sigma)$ будет постоянной, равной g_0 [см. ур-ние (IV.9)]. Значение Y' на нулевой частоте (или равное ему значение Y''), очевидно, меньше значения этой постоянной асимптоты. Иными словами, условие

$Y''(0) < Y''(\infty)$, характерное для входных RC проводимостей (см. рис. IV.5), является общим, как уже упоминалось в главе II.

Приведенные графики показывают, что свойства входной RC проводимости не изменяются при вычитании положительной постоянной, если значение последней меньше значения проводимости на нулевой частоте, ибо при таком вычитании происходит лишь сдвиг нулей к началу координат. При этом, если вычитаемая постоянная равна $Y(0)$, т. е. значению соответствующей проводимости на нулевой частоте, то один из нулей совпадает с началом координат. Очевидно, что при вычитании постоянной с большим значением произойдет сдвиг нуля в правую полуплоскость и функция уже не будет принадлежать к классу п. в. ф.

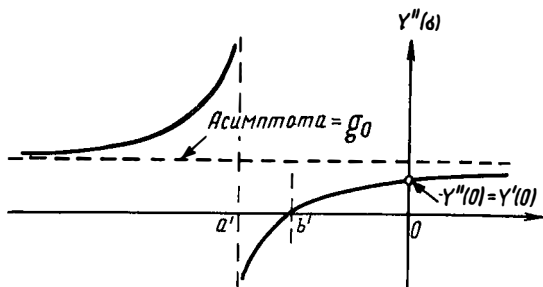


Рис. IV.5

По той же причине нельзя, например, вычитать значения, выраженные ур-ниями (IV.9) и (IV.11), и предполагать, что остаток будет являться п. в. ф.

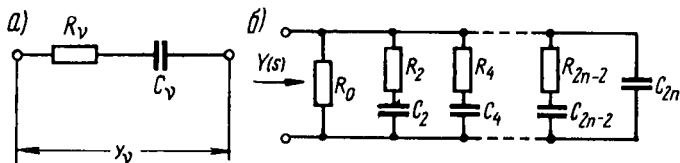


Рис. IV.6

Из этих графиков видно также, что минимальное значение вещественной части $Y(j\omega)$ для всех вещественных значений ω соответствует точке $s = 0$ [см. также условие (II.56)]. Это объясняется тем, что если минимальное значение $\text{Re}[Y(j\omega)]$ соответствует конечной частоте ω , то при вычитании $Y(0)$, большего, чем указанное минимальное значение, функция $Y(s)$ уже не будет принадлежать к классу п. в. ф.

Предположим, далее, что рассматривается реализация по Фостеру функции $Y(s)$ в виде разложения на элементарные дроби, аналогичная описанной выше реализации сопротивления $Z(s)$, приводящей к цепи, показанной на рис. IV.16. При этом предполагается также, что в конечном итоге будет получена цепь, представляющая собой параллельное соединение проводимостей, каждая из которых является последовательным RC контуром типа, изображенного на рис. IV.6а (с соответствующими вырожденными формами для возможного полюса в точке $s = \infty$ и для аддитивной по-

стоянной на нулевой частоте). Проводимость такого контура имеет вид

$$y_v = \frac{1}{R_v + \frac{1}{C_v s}} = \frac{C_v s}{1 + R_v C_v s} = \frac{\frac{1}{R_v} s}{s + \frac{1}{R_v C_v}} = \frac{k_v s}{s - s_v} = \frac{k_v s_v}{s + \sigma_v}, \quad (\text{IV. 13})$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_v &= \frac{1}{R_v} \\ -s_v &= \sigma_v = \frac{1}{R_v C_v} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV. 14})$$

Здесь появляется очевидная трудность: член $\frac{k_v}{s - s_v}$ в разложении на элементарные дроби не имеет коэффициента s , который есть в числителе выражения (IV.13) для y_v . Однако ее можно преодолеть. Так, отсутствующий коэффициент s может быть введен путем обычного разложения на элементарные дроби функции $\frac{Y(s)}{s}$, которая затем умножается на s . В результате этой операции получаем требуемое разложение функции $Y(s)$, в котором каждый член будет теперь иметь необходимую форму, соответствующую ур-нию (IV.13). Единственное условие, предъявляемое в данном случае к разложению, состоит в том, чтобы члены имели положительные вещественные коэффициенты k_v . Однако поскольку это вычеты функции $\frac{Y(s)}{s}$, а не функции $Y(s)$, они являются положительными, так как вычеты $Y(s)$ отрицательные! Указанное обстоятельство становится очевидным, если вспомнить, что вычет функции $\frac{Y(s)}{s}$ в полюсе $s = s_v$ является соответствующим вычетом функции $Y(s)$, деленным на отрицательное вещественное число s_v . Функция $\frac{Y(s)}{s}$, безусловно, не имеет полюса в точке $s = \infty$; в общем случае она может иметь полюс в точке $s = 0$. Однако отмеченные свойства не препятствуют разложению функции по общей методике, которая оказывается теперь применимой.

Рассмотрим разложение на элементарные дроби

$$\frac{Y(s)}{s} = \frac{k_0}{s} + \frac{k_2}{s - s_2} + \frac{k_4}{s - s_4} + \dots + \frac{k_{2n-2}}{s - s_{2n-2}} + k_{2n}. \quad (\text{IV. 15})$$

Умножая это разложение на s , получим следующее выражение для проводимости

$$Y(s) = k_0 + \frac{k_2 s}{s - s_2} + \frac{k_4 s}{s - s_4} + \dots + \frac{k_{2n-2} s}{s - s_{2n-2}} + k_{2n} s, \quad (\text{IV. 16})$$

где все коэффициенты k_ν положительны. Положительными являются и коэффициенты $k_0 = Y(0)$ и k_{2n} . Последний представляет вычет функции $Y(s)$ в ее полюсе при $s = \infty$. Полная реализация цепи для выражения (IV.16) схематически показана на рис. IV.6б, на котором согласно ур-нию (IV.14)

$$\left. \begin{aligned} R_\nu &= \frac{1}{k_\nu}; & C_\nu &= \frac{k_\nu}{\sigma_\nu} \text{ при } \nu = 0, 2, 4, \dots, (2n-2) \\ & & C_{2n} &= k_{2n} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{IV.17})$$

где R — в омах, C — в фарадах.

Как и форма Фостера, приведенная на рис. IV.1б, полученная реализация содержит минимальное число элементов, поскольку оно точно равно числу определяющих постоянных в выражении для проводимости (IV.16). Нетрудно видеть, что цепи, изображенные на рис. IV.1б и IV.6б, характеризуются разными входными сопротивлениями. В первом случае входное сопротивление имеет конечное нулевое значение в точке $s = \infty$, тогда как во втором случае его значение в этой точке равно нулю, а соответствующая проводимость здесь имеет полюс.

IV.2. Другие канонические формы реализации сопротивлений RC цепей

Используя два основных способа реализации входных сопротивлений RC цепей, можно найти много других эквивалентных схем, как и в случаях LC цепей. Две из них аналогичны тем, которые приводят к формам Кауэра или лестничным LC цепям, рассмотренным в предыдущей главе. Применительно к одной форме из исходной функции цепи и ее инвертированных остатков последовательно устранялись полюсы в точке $s = \infty$. Вторая форма (дуальная по отношению к первой) обуславливала необходимость устранения из исходной функции полюсов в точке $s = 0$. Существенное отличие, наблюдаемое при использовании аналогичного способа для функций RC цепи, состоит в том, что приходится попеременно устранять полюс и постоянную величину в точках $s = \infty$ или $s = 0$, а не только полюсы. Причина такого различия в методике реализации сразу станет понятной, если обратить внимание на то, что лишь входное сопротивление RC цепи может иметь полюс в точке $s = 0$ и лишь проводимость может иметь полюс в точке $s = \infty$. В этой точке сопротивление имеет положительное вещественное конечное значение; такое же значение имеет проводимость в точке $s = 0$ (см. рис. IV.3 и IV.5).

Сказанное иллюстрируется цепями, показанными на рис. IV.1б и IV.6б, где при сравнении с подобными LC цепями оказывается,

что индуктивности заменены сопротивлениями. Для сопротивления индуктивность представляет полюс в точке $s = \infty$, а для проводимости — в точке $s = 0$. Таким образом, по аналогии можно в случае RC цепи устранить постоянную, в то время как в соответствующей LC цепи устраняется полюс, который реализуется индуктивностью.

Рассмотрим этот метод синтеза более подробно, для чего предположим, что имеется некоторое сопротивление $z_1(s)$, которое необходимо синтезировать в виде RC цепи. Как показано на рис. IV.3, в общем случае в точке $s = \infty$ оно имеет конечное ненулевое положительное вещественное значение. Вычтем это значение из исходного сопротивления $z_1(s)$. Ясно, что полученная разность, так же как и сама функция, будет п. в. ф. и относиться к классу RC

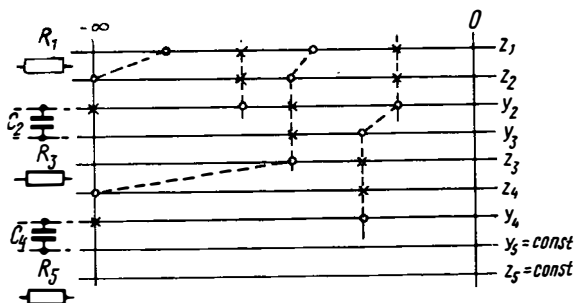


Рис. IV.7

функций. Следовательно, можно выделить в начале цепи последовательное резистивное сопротивление, соответствующее указанному выше постоянному значению. Оставшееся сопротивление (обозначим его z_2) равно нулю в точке $s = \infty$, как показано в верхней части рис. IV.4, и, таким образом, обратная функция $y_2 = \frac{1}{z_2}$,

показанная в нижней части того же рисунка, имеет полюс в точке $s = \infty$. После его устранения появляется параллельная емкость, равная по значению наклону асимптоты, изображенной на рис. IV.4. Остаточная функция (обозначим ее y_3), графически представленная на рис. IV.5, имеет положительное вещественное, отличное от нуля значение в точке $s = \infty$. Это значение должно быть больше неотрицательного значения на нулевой частоте. Следовательно, обратная функция $z_3 = \frac{1}{y_3}$, как и функция z_1 , имеет конечное ненулевое положительное вещественное значение. С выделения последнего начинается второй этап процесса получения лестничной цепи, который аналогичен описанному выше первому этапу.

На рис. IV.7 показано последовательное использование ряда частотных диаграмм для получения лестничной цепи, подобных построенным для реактивных функций. Отличие состоит в том, что

На рис. IV.7 показано последовательное использование ряда частотных диаграмм для получения лестничной цепи, подобных построенным для реактивных функций. Отличие состоит в том, что

здесь горизонтальные оси соответствуют отрицательной вещественной оси плоскости s . Как видно из рисунка, при выделении первого последовательного резистивного сопротивления $R_1 = z_1(\infty)$ происходит сдвиг самого нижнего нуля в точке $s = -\infty$, причем инвертированный остаток, т. е. функция y_2 , будет иметь в этой точке полюс. Затем он устраняется, т. е. выделяется последующая параллельная емкость C_2 лестничной цепи. Следует отметить, что на данном этапе из функции y_2 исключается не только полюс в точке $s = \infty$, но и следующий смещенный нуль. Таким образом, функция y_3 имеет на две критические частоты меньше, чем функция y_2 . Отметим, что функция z_2 (или y_2) обладает одинаковым с функцией z_1 числом критических частот. Однако было бы неправильно утверждать, что функция z_2 (или y_2) настолько же сложна, как и функция z_1 . Действительно, если представить обе функции в виде отношения частотных множителей, то можно увидеть, что и та и

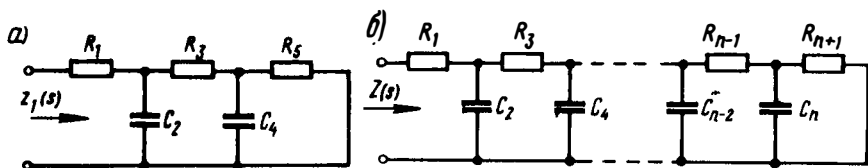


Рис. IV.8

другая содержат на один параметр меньше. Так, например, z_2 содержит в числителе на один множитель меньше, чем z_1 .

Инвертированный остаток, т. е. $z_3 = \frac{1}{y_3}$, аналогичен z_1 и позволяет вычесть из исходной функции значение $R_3 = z_3(\infty)$, как это было сделано на первом этапе и т. д. После того как из функции y_4 выделена емкость C_4 , все полюсы и нули исключены, но остается одна постоянная, которая дает конечную ветвь R_5 .

Полная лестничная цепь показана на рис. IV.8а. Очевидно, что она реализует данную функцию с минимальным числом элементов, так как оно на единицу больше числа конечных ненулевых критических частот, что, в свою очередь, равно числу параметров, характеризующих данное сопротивление. Описанная методика синтеза справедлива не только для данного конкретного примера, но имеет общий характер, поскольку при образовании цепи в процессе устранения особых точек каждый элемент соответствует конечной ненулевой критической частоте, а последний элемент — оставшейся постоянной.

Отдельные выделенные элементы показаны в левой части рис. IV.7, различные промежуточные функции (остатки), к которым относятся соответствующие части диаграммы, приведены в правой части того же рисунка. Таким образом, рис. IV.7 дает в компактной форме полную информацию относительно методики рассмотренной реализации, за исключением численных значений элементов. Эти

значения можно получить путем алгебраических вычислений, приведенных ниже.

Прежде всего рассмотрим рациональную функцию $Z(s)$ в виде отношения неразложенных на множители полиномов:

$$Z(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}. \quad (\text{IV.18})$$

В отличие от реактивной функции, это входное сопротивление RC цепи представляет собой отношение полиномов, которые содержат все степени переменного s (а не как у четных или нечетных полиномов). В таком сопротивлении нет отсутствующих членов, и все коэффициенты должны быть положительными. Как видно из урния (IV.18), сопротивление $Z(s)$ имеет конечные ненулевые значения в точках $s = 0$ и $s = \infty$. Таким образом, это уравнение является наиболее общей формой входного сопротивления RC цепи.

Если задана подобная функция, причем нет уверенности в том, что она является п. в. ф. и реализуется в виде RC цепи, то необходимо проверить распределение нулей полиномов числителя и знаменателя функции по теореме Штурма. Однако к такому же результату можно прийти значительно быстрее, пользуясь алгебраическим методом, который изложен ниже.

В процессе реализации лестничной цепи, к которому относится ряд операций, показанных на рис. IV.7, производится попеременное исключение постоянной величины и полюса в точке $s = \infty$, начиная с постоянного значения $Z(\infty)$. В соответствии с этим алгебраические вычисления начинаются с выражения

$$Z(s) = R_1 + \frac{a'_{n-1} s^{n-1} + a'_{n-2} s^{n-2} + \dots + a'_1 s + a'_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}, \quad (\text{IV.19})$$

где $R_1 = \frac{a_n}{b_n}$, а остаточный полином степени $(n - 1)$ в числителе второго члена определяется обычным делением полиномов. Второй член, очевидно, является нулем в точке $s = \infty$. Следовательно, обратная величина остатка (проводимость) имеет полюс в данной точке. Его устранение является вторым этапом процесса разложения и также осуществляется методом непрерывного деления. В результате получаем

$$Z(s) = R_1 + \frac{1}{C_2 s + \frac{b'_{n-1} s^{n-1} + \dots + b'_0}{a'_{n-1} s^{n-1} + \dots + a'_0}}, \quad (\text{IV.20})$$

где $C_2 = \frac{b_n}{a'_{n-1}}$. Обратная величина остаточной рациональной функции теперь представляет сопротивление с теми же свойствами, что и функция $Z(s)$. Это объясняется тем, что ни один из рассмотрен-

ных двух этапов, связанных с выделением R_1 и C_2 , не приведет (согласно сказанному выше) к такому положению, что исходная функция уже не будет больше принадлежать к классу п. в. ф. типа RC . Следовательно, можно повторять цикл операций до тех пор, пока остаток не станет постоянной.

Следует отметить, что каждый этап синтеза дает два элемента цепи и уменьшает число коэффициентов полинома на два. В результате получится цепь с минимальным числом элементов или каноническая форма. При этом производятся такие же алгебраические действия (деление и инверсия), как и при реализации сопротивлений LC цепи по Кауэру и при проверке по методу Гурвица. Окончательно получаем разложение функции в непрерывную дробь вида

$$Z(s) = R_1 + \frac{1}{C_2s + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{C_4s} + \dots + \frac{1}{R_{n-1} + \frac{1}{C_ns + \frac{1}{R_{n+1}}}}}}. \quad (\text{IV.21})$$

Несмотря на то, что в выражении (IV.18) для функции $Z(s)$ появляются $(n+2)$ коэффициента, лишь $(n+1)$ из них оказываются независимыми, так как постоянным множителем является отношение $\frac{a_n}{b_n}$. Следовательно, в процессе реализации будет получено $(n+1)$ элементов. Это число, как указывалось выше, на единицу больше числа конечных ненулевых критических частот. Результирующая цепь показана на рис. IV.86.

Другая реализация лестничной цепи, аналогичная второй форме Кауэра для сопротивлений LC цепи, предполагает иной способ исключения постоянной величины и полюса в точке $s=0$. Ввиду того что постоянную величину в этой точке можно вычесть из проводимости RC цепи (см. рис. IV.5 и соответствующий метод реализации), полюс в точке $s=0$ устраняется из сопротивления, а постоянная величина — из его инвертированного остатка. В конце процесса реализации получится лестничная цепь с последовательными емкостями (так как последовательные ветви исключены из сопротивлений) и параллельными резистивными сопротивлениями. На рис. IV.9 графически представлена общая последовательность операций синтеза, аналогичных изображенным на рис. IV.7, для дополнительной реализации по Кауэру того же входного сопротивления $z_1(s)$.

Вследствие того что данное сопротивление не имеет полюса в точке $s = 0$, необходимо прежде всего изменить критические частоты, чтобы получить в ней полюс. Поскольку полюсы нельзя перемещать, а нули можно, операция состоит в следующем. Вначале необходимо инвертировать функцию z_1 , изменяя полюсы на нули и наоборот. Самый нижний нуль функции y_1 можно затем сдвинуть к началу координат, если вычесть из исходной функции активную проводимость $G_1 = y_1(0)$. Эта проводимость соответствует выделению первой параллельной ветви в требуемой лестничной реализации. Остаточной функцией в данной точке является функция y_2 . Соответствующее сопротивление $z_2 = \frac{1}{y_2}$ теперь имеет требуемый нуль в точке $s = 0$. После выделения последовательной емкости C_2 получится остаток — функция z_3 , имеющая одинаковые с функцией z_1 свойства. Цикл повторяется, появляются ветви G_3 и G_4 ,

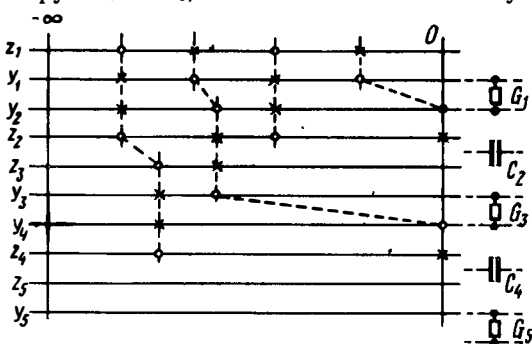


Рис. IV.9

после чего остается только постоянная величина. Полная лестничная цепь показана на рис. IV.10а.

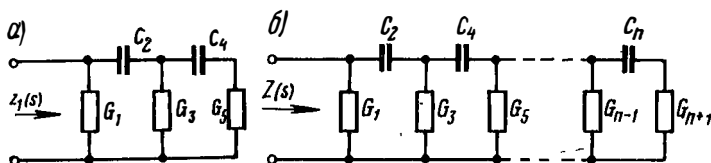


Рис. IV.10

после чего остается только постоянная величина. Полная лестничная цепь показана на рис. IV.10а.

Снова необходимо подчеркнуть, что если данная функция относится к классу п. в. ф. и реализуется в виде RC цепи, то все элементы реализации будут положительными, а число элементов превысит на единицу число конечных ненулевых критических частот.

При рассмотрении соответствующего алгебраического способа синтеза следует обратить внимание на выражение (IV.18) для функции $Z(s)$. Вследствие того что из нее необходимо устранить постоянные величины и полюсы в точке $s = 0$, члены полиномов выражения (IV.18) располагаются по восходящим степеням переменного s , и, таким образом, функция, определяемая указанным уравнением, должна быть записана в обратном порядке. В начале

следует инвертировать его, так как постоянная величина в точке $s = 0$ должна быть исключена из проводимости, а не из сопротивления. Поскольку на первом этапе осуществляется процесс непрерывного деления и инверсии, то

$$Z(s) = \frac{1}{G_1 + \frac{b'_1 s + b'_2 s^2 + \dots + b'_n s^n}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}}, \quad (\text{IV.22})$$

где $G_1 = \frac{b_0}{a_0}$. Далее операции производятся в уже известной последовательности, в результате которой получаем чередующиеся члены от переменного $\frac{1}{s}$ и постоянные, т. е.

$$Z(s) = \frac{1}{G_1 + \frac{1}{\frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{G_3 + \frac{1}{C_4 s} + \dots + \frac{1}{G_{n-1} + \frac{1}{\frac{1}{C_n s} + \frac{1}{G_{n+1}}}}}}}. \quad (\text{IV.23})$$

Полное разложение содержит $(n + 1)$ членов, число которых, как и раньше, на единицу превышает число конечных ненулевых критических частот. Соответствующая каноническая цепь показана на рис. IV.10б. Подобно лестничной LC цепи первый и последний элементы определяют ее поведение в точках $s = 0$ и $s = \infty$ соответственно. Таким образом, в цепи, показанной на рис. IV.10б, не будет параллельной активной проводимости G_1 , если функция $Z(s)$ имеет полюс в точке $s = 0$, и не будет конечной параллельной проводимости G_{n+1} , если функция $Z(s)$ имеет нуль в точке $s = \infty$. Аналогично в цепи, показанной на рис. IV.8б, первое резистивное сопротивление R_1 отсутствует, если функция $Z(s)$ имеет нуль в точке $s = \infty$, а последнее сопротивление R_{n+1} отсутствует, если функция $Z(s)$ имеет полюс в точке $s = 0$.

При рассмотрении разложений на непрерывные дроби вида (IV.21) или (IV.23), используемых для получения лестничных цепей, показанных на рис. IV.8б и IV.10б, в начале процесса непрерывного деления и инверсии необходимо обратить особое внимание на правильное расположение полиномов по восходящей или нисходящей степени и правильный выбор полинома-делимого и полино-

ма-делителя. Для получения требуемой цепи пригодна лишь одна из четырех возможных комбинаций записи функций. Две другие приводят к тому, что на некотором этапе процесса деления и инверсии получится неприемлемая остаточная функция. Такие неудачные комбинации трудно обнаружить в самом начале процесса синтеза, и проектировщик, который руководствуется картиной расположения особых точек цепи, а не общепринятыми физическими соображениями, быстро «увязнет» в середине расчетного процесса. Это может, кроме того, случиться из-за численной ошибки или недостаточной точности. Поэтому, прежде чем приступить к построению одной из рассмотренных лестничных реализаций, важно убедиться в том, что исходные данные правильны. Указанное физическое и математическое обоснование является обязательным при использовании любого метода синтеза.

IV.3. Более общие, «смешанные» методы синтеза RC цепей

Дополнительные лестничные реализации можно, очевидно, получить путем объединения обоих методов реализации по Фостеру. Этот прием является более общим по сравнению с устранением компоненты, характеризующей асимптотическое поведение функции в точках $s = 0$ и $s = \infty$, поскольку одновременно представляется возможным устранить один или часть одного конечного ненулевого полюса, либо несколько таких полюсов. В этом случае следует помнить, однако, что конечные ненулевые полюсы RC функции могут быть устранены либо из функции $Z(s)$, либо $Y(s)/s$, но не $Y(s)$.

При устранении полюса, т. е. алгебраически при вычитании из такой функции члена, аналогичного $\frac{k_v}{s-s_v}$, исходная функция по-прежнему принадлежит к классу п. в. ф. и входных RC сопротивлений или проводимостей. Это объясняется следующим. Известно, что функция $Z(s)$ реализуется RC цепью, если она имеет простые отрицательные вещественные (возможно, в том числе равные нулю) полюсы с положительными вещественными вычетами и если величина $Z(\infty)$ является неотрицательной. Функция $Y(s)$ реализуется RC цепью, если функция $Y(s)/s$ имеет простые отрицательные вещественные (возможно, в том числе равные нулю) полюсы с положительными вещественными вычетами и если величина $\left[\frac{Y(s)}{s} \right]_{s=\infty}$ является неотрицательной. Ввиду того что член типа $\frac{k_v}{s-s_v}$ равен нулю в точке $s = \infty$, его вычитание не может оказывать влияния на неотрицательный характер функции $Z(s)$ или $Y(s)/s$ в данной точке. Кроме того, это вычитание, очевидно, также не влияет на соответствующие свойства аналогичных членов, представляющих оставшиеся полюсы. Таким образом, применение «смешанного»

метода, предполагающего исключение указанных полюсов в произвольной последовательности, всегда позволит реализовать заданную функцию. Более того, если полюсы исключаются полностью, реализация будет содержать минимальное число элементов. При частичном же исключении полюсов могут появиться лишние элементы.

IV.4. Примеры синтеза входных функций RC цепей

Рассмотрим входное сопротивление RC цепи

$$Z(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)(s+5)} = \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s+3} + \frac{3}{s+5}. \quad (IV.24)$$

Вычеты функции $Z(s)$ легко определить, если исключить соответствующий множитель полюса и вычислить оставшееся выражение в точке, где этот множитель равен нулю. Например, для вычета в точке $s = -3$ имеем

$$k_3 = \left[\frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+5)} \right]_{s=-3} = \frac{(-1)(1)}{(-2)(2)} = \frac{1}{4}. \quad (IV.25)$$

Поскольку каждый член разложения (IV.24) на элементарные дроби представляет параллельный RC контур, полная цепь, реализующая это сопротивление, аналогична показанной на рис. IV.11а.

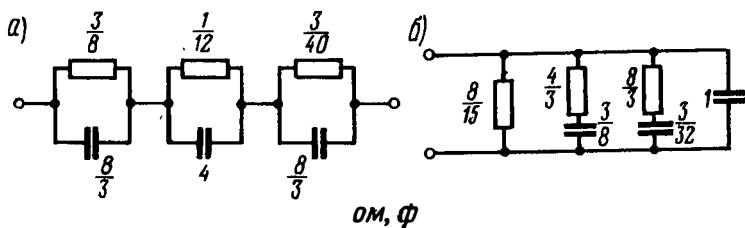


Рис. IV.11

Для того чтобы получить вторую форму Фостера, следует разложить на элементарные дроби соответствующую функцию $Y(s)/s$:

$$\frac{Y(s)}{s} = \frac{(s+1)(s+3)(s+5)}{s(s+2)(s+4)} = \frac{15}{8s} + \frac{3}{s+2} + \frac{3}{s+4} + 1. \quad (IV.26)$$

Постоянный член $+1$ в правой части выражения (IV.26) необходим для того, чтобы учесть поведение функции при $s \rightarrow \infty$. Как принято говорить, при разложении на элементарные дроби этот член представляет собой рациональный целый остаток. Вычеты функции определяются так же просто, как и в приведенном выше примере.

После умножения разложения (IV.26) на s получим

$$Y(s) = \frac{15}{8} + \frac{\frac{3}{4}s}{s+2} + \frac{\frac{3}{8}s}{s+4} + s. \quad (\text{IV.27})$$

Очевидно, что выражение (IV.27) соответствует проводимости цепи, изображенной на рис. IV.116.

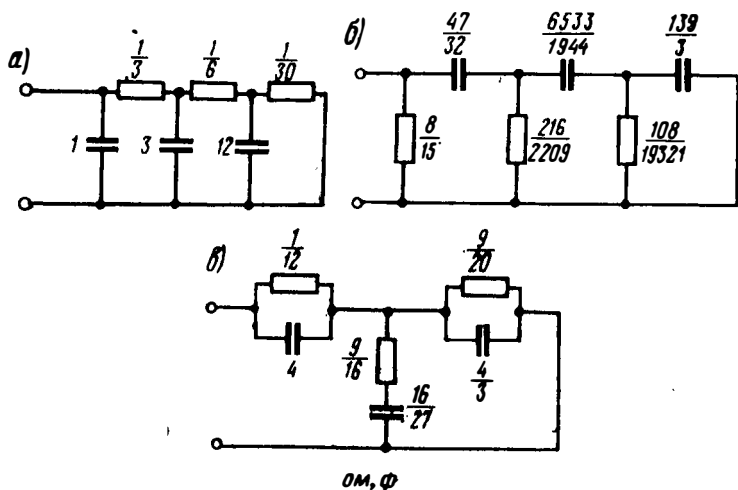
Для того чтобы получить лестничные цепи, нужно прежде всего представить сопротивление, определяемое выражением (IV.24), в форме, не разложенной на множители

$$Z(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^3 + 9s^2 + 23s + 15}. \quad (\text{IV.28})$$

Предположим, что требуется получить лестничную цепь, содержащую резистивные сопротивления в последовательных ветвях и емкости в параллельных ветвях. Для получения реализации такого типа необходимо произвести вычитание из сопротивления постоянных членов и выделение из проводимости емкостной реактивной проводимости, которые характеризуют поведение первоначальной функции и последующих остаточных функций в точке $s = \infty$. В соответствии с этим полиномы должны располагаться по нисходящим степеням s . Ввиду того что функция $Z(s)$, определяемая ур-нием (IV.28), имеет нулевые значения в точке $s = \infty$, на первом этапе необходимо произвести инверсию. Тогда последующие операции можно записать в виде

$$\begin{array}{r} \frac{s}{s^2 + 6s + 8} \Big| \frac{1}{s^3 + 9s^2 + 23s + 15} \\ \hline \frac{s^3 + 6s^2 + 8s}{3s^2 + 15s + 15} \Big| \frac{1}{3} \\ \hline \frac{s^2 + 5s + 5}{s + 3} \Big| \frac{1}{3s^2 + 15s + 15} \\ \hline \frac{3s^2 + 9s}{6s + 15} \Big| \frac{1}{6} \\ \hline \frac{s + \frac{3}{2}}{s + \frac{5}{2}} \\ \hline \frac{1}{2} \\ \hline \frac{-12s}{\frac{1}{2}} \Big| \frac{6s + 15}{6s} \Big| \frac{1}{30} \\ \hline \frac{15}{15} \Big| \frac{1}{2} \end{array} \quad (\text{IV.29})$$

Как видно из приведенной записи, численные расчеты легко выполнить на листе бумаги нормальных размеров путем перемещения остаточных полиномов в процессе непрерывного деления левее и ниже предыдущей строчки каждый раз, когда достигается край правой стороны листа. Последовательные частные s ; $\frac{1}{3}$; $3s$; $\frac{1}{6}$; $12s$; $\frac{1}{30}$ являются соответственно чередующимися проводимостями и сопротивлениями ветвей лестничной цепи. Легко установить, что требуемой реализацией является цепь, показанная на рис. IV.12а.



Ом, Ф

Рис. IV.12

Для того чтобы получить лестничную цепь, в которой последовательными ветвями являются емкости, а параллельными — резистивные сопротивления, нужно устранить из сопротивлений полюсы в точке $s = 0$ и из проводимостей постоянные величины в точке $s = 0$. Полиномы, таким образом, должны располагаться по восходящим степеням, и выражение (IV.28) для функции $Z(s)$ должно быть записано в обратном порядке. Кроме того, его необходимо инвертировать, так как исходное сопротивление не имеет полюса в точке $s = 0$. Соответствующие алгебраические расчеты можно представить в виде

$$\frac{15}{8} \Big| \frac{15 + 23s + 9s^2 + s^3}{8 + 6s + s^2} \Big| \frac{32}{47s} \Big| \frac{57}{8}s^2 + s^3 \Big| 8 + 6s + s^2$$

$$\begin{array}{r}
8 + \frac{228}{47}s + \frac{32}{47}s^2 \quad \Big| \quad \frac{2209}{216} \\
\hline
\frac{54}{47}s + \frac{15}{47}s^2 \quad \Big| \quad \frac{47}{4}s + \frac{57}{8}s^2 + s^3 \\
\frac{47}{4}s + \frac{235}{72}s^2 \\
\hline
\frac{139}{36}s^2 + s^3 \\
\hline
\frac{1944}{6533s} \\
\frac{139}{36}s^2 + s^3 \quad \Big| \quad \frac{54}{47}s + \frac{15}{47}s^2 \\
\frac{54}{47}s + \frac{1944}{6533}s^2 \quad \Big| \quad \frac{19321}{108} \\
\hline
\frac{3}{139}s^2 \quad \Big| \quad \frac{139}{36}s^2 + s^3 \\
\frac{139}{36}s^2 \quad \Big| \quad \frac{3}{139s} \\
\hline
s^3 \quad \Big| \quad \frac{3}{139}s^2
\end{array} \quad (IV.30)$$

Последующие частные снова являются чередующимися проводимостями и сопротивлениями соответственно. Их интерпретация для получения цепи, показанной на рис. IV.126, не вызывает затруднений. В случаях более сложных, чем приведенный выше, целесообразно использовать десятичные, а не простые дроби, как в примере (IV.30).

Наконец, исходное сопротивление преобразуется в лестничную цепь путем устранения поочередно из функций $Z(s)$ и $Y(s)/s$ конечных ненулевых полюсов. Используя ур-ние (IV.24), предположим, что сначала из функций $Z(s)$ устраняется полюс в точке $s = -3$. Обозначив остаточную функцию через $Z_1(s)$, можно записать:

$$\begin{aligned}
Z_1(s) &= \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)(s+5)} - \frac{1}{s+3}; \\
Z_1(s) &= \left(\frac{s^2+6s+8}{s^2+6s+5} - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{s+3} = \frac{\frac{3}{4}s^2 + \frac{9}{2}s + \frac{27}{4}}{(s^2+6s+5)(s+3)} = \frac{\frac{3}{4}s + \frac{9}{4}}{s^2+6s+5}.
\end{aligned} \quad (IV.31)$$

После вычитания в круглых скобка в числителе появляется полином, который должен делиться на множитель $(s+3)$, ибо остаток $Z_1(s)$ не может уже содержать полюс в точке $s = -3$. То условие,

что множитель $(s + 3)$ должен быть в этой точке делителем, т. е. деление осуществляется без остатка, можно использовать при проверке численной точности расчетов.

Образуем далее функцию $Y_1(s)/s$, где $Y_1(s) = \frac{1}{Z_1(s)}$.

Следует отметить, что вновь лишь конечный ненулевой полюс этой функции лежит в точке $s = -3$. Из ур-ния (IV.31) вытекает, что

$$\frac{Y_1(s)}{s} = \frac{\frac{4}{3}(s+1)(s+5)}{s(s+3)}. \quad (\text{IV.32})$$

Вычет данной функции в точке $s = -3$ имеет вид

$$k = \left[\frac{\frac{4}{3}(s+1)(s+5)}{s} \right]_{s=-3} = \frac{\frac{4}{3}(-2)(2)}{-3} = \frac{16}{9}. \quad (\text{IV.33})$$

После вычитания этого полюса получим

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{4}{3}(s+1)(s+5)}{s(s+3)} - \frac{16}{9} = \left(\frac{\frac{4}{3}s^2 + 8s + \frac{20}{3}}{s} - \frac{16}{9} \right) \frac{1}{s+3} = \\ & = \frac{\frac{4}{3}s^2 + \frac{56}{9}s + \frac{20}{3}}{s(s+3)} = \frac{12s^2 + 56s + 60}{9s(s+3)} = \frac{12s + 20}{9s} = \frac{Y_2(s)}{s}. \end{aligned} \quad (\text{IV.34})$$

Итак, второй остаток имеет вид

$$Y_2(s) = \frac{4}{3}s + \frac{20}{9} \quad \text{или} \quad Z_2(s) = \frac{\frac{3}{4}}{s + \frac{5}{3}}. \quad (\text{IV.35})$$

Сопротивление, выделенное в виде первой последовательной ветви, как видно из выражения (IV.31), можно представить выражением

$$z_1 = \frac{1}{\frac{4}{s+3}}. \quad (\text{IV.36})$$

Проводимость следующей параллельной ветви согласно (IV.34) равна

$$y_2 = \frac{\frac{16}{9}s}{s+3}. \quad (\text{IV.37})$$

Нетрудно видеть, что конечная последовательная ветвь является сопротивлением, определяемым ур-нием (IV.35). Соответствующая лестничная цепь показана на рис. IV.12в.

IV.5. Способ синтеза RL цепей, аналогичный способу синтеза RC цепей

Анализ результатов, полученных в главе II, показывает, что функция входной проводимости RL цепи по своей форме и свойствам идентична функции входного сопротивления RC цепи и наоборот. Таким образом, входная проводимость $Y(s)$ RL цепи имеет простые полюсы, расположенные на отрицательной вещественной полуоси, где ее вычеты являются положительными вещественными, при этом $0 \leq Y(\infty) < \infty$. Ту часть сделанного вывода, которая касается требований, предъявляемых к полюсам и вычетам, можно заменить соответствующими требованиями к нулям и полюсам. В этом случае они должны быть простыми и чередоваться на отрицательной вещественной полуоси, причем самая нижняя критическая частота должна быть полюсом функции.

Представим отношение частотных множителей в виде

$$\frac{(s+2)(s+4)(s+6)\dots}{(s+1)(s+3)(s+5)\dots} \quad (IV.38)$$

Поскольку множители числителя и знаменателя чередуются на отрицательной вещественной оси, то автоматически удовлетворяются требования, согласно которым рассматриваемое отношение должно быть при $s = \infty$ конечным и неотрицательным независимо от того, находится последний множитель в числителе или знаменателе. Такое выражение, следовательно, представляет собой входное сопротивление RC цепи или входную проводимость RL цепи. Первый частотный множитель $(s+1)$ может стать просто коэффициентом s , и в этом случае функция имеет полюс в начале координат.

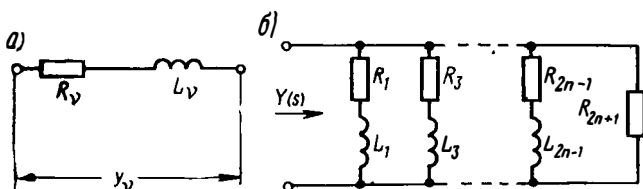


Рис. IV.13

Реализация функции $Y(s)$ в виде RL цепи по Фостеру начинается с разложения на элементарные дроби, аналогичного ур-ниям (IV.1) и (IV.3) для функции $Z(s)$, реализуемой RC цепью. Каждый член в этом разложении имеет форму проводимости обычного последовательного RL контура, показанного на рис. IV.13а. Для этого контура

$$y_v = \frac{1}{R_v + L_v s} = \frac{\frac{1}{L_v}}{s + \frac{R_v}{L_v}} \quad (IV.39)$$

Полная цепь, соответствующая разложению (IV.3) для функции $Y(s)$, реализуемой в виде RL цепи, имеет вид, изображенный на рис. IV.136,

$$\left. \begin{aligned} \text{где } R_\nu &= \frac{\sigma_\nu}{k_\nu}; \quad L_\nu = \frac{1}{k_\nu} \text{ при } \nu = 1, 3, \dots, (2n-1) \\ \frac{1}{R_{2n+1}} &= k_{2n+1} = Y(\infty) \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.40})$$

Здесь R_ν — в омах, L_ν — в генри.

Вторую форму Фостера можно получить с помощью разложения на элементарные дроби функции $Z(s)/s$, которое аналогично разложению для функции $Y(s)/s$, реализуемой в виде RC цепи [см. ур-ние (IV.15)]. Таким образом, получается разложение функции $Z(s)$, по форме идентичное правой части ур-ния (IV.16). Типичным

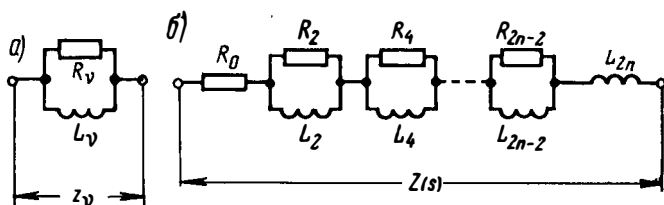


Рис. IV.14

членом в этом выражении является сопротивление параллельного RL контура, показанного на рис. IV.14а. Для такого контура имеем

$$z_\nu = \frac{1}{\frac{1}{R_\nu} + \frac{1}{L_\nu s}} = \frac{R_\nu s}{s + \frac{R_\nu}{L_\nu}} \quad (\text{IV.41})$$

Полная цепь, для которой

$$\left. \begin{aligned} R_\nu &= k_\nu; \quad L_\nu = \frac{k_\nu}{\sigma_\nu} \\ \text{при } \nu &= 0, 2, 4, \dots, (2n-2); \quad L_{2n} = k_{2n} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.42})$$

показана на рис. IV.14б.

То обстоятельство, что вычеты являются положительными вещественными, а функции $Y(s)$ или $Z(s)/s$ при $s = \infty$ — конечными неотрицательными, гарантирует реализуемость этих RL цепей по Фостеру. Кроме того, очевидно, что они содержат минимальное число элементов.

Способ получения лестничной цепи идентичен способу реализации RC цепи, если поменять местами функции $Y(s)$ и $Z(s)$. Для RL цепи величина $Z(0)$ всегда вычитается из функции $Z(s)$, а величина $Y(\infty)$ — из функции $Y(s)$, так как эти величины равны

[согласно ур-ниям (II.46) и (II.49)] минимальной вещественной части соответствующей функции вдоль всей мнимой оси. Таким образом, лестничную цепь с последовательными сопротивлениями и параллельными индуктивностями можно получить вычитанием из сопротивления $Z(s)$ и его последующих инвертированных остатков попеременно постоянной величины и полюса в точке $s = 0$. Такую цепь с последовательными индуктивностями и параллельными резистивными сопротивлениями можно получить вычитанием из сопротивления $Z(s)$ и его последующих инвертированных остатков попеременно полюса и постоянной величины в точке $s = \infty$.

Итак, в выражении для $Z(s)$, определяемом ур-нием (IV.18) (которое в аналитической форме в равной степени может описывать сопротивление RL или RC цепей), полиномы располагают по восходящим степеням для первой из двух рассмотренных лестничных цепей и по нисходящим степеням для второй. В результате аналогичного процесса непрерывного деления и инверсии получают, с одной стороны, разложение на непрерывные дроби в виде

$$Z(s) = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{L_2 s} + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{\frac{1}{L_4 s} + \dots + \frac{1}{R_{n-1} + \frac{1}{\frac{1}{L_n s} + \frac{1}{R_{n+1}}}}}}, \quad (\text{IV.43})$$

а с другой — в виде

$$Z(s) = \frac{1}{G_1 + \frac{1}{L_2 s + \frac{1}{G_3 + \frac{1}{L_4 s + \dots + \frac{1}{G_{n-1} + \frac{1}{L_n s + \frac{1}{G_{n+1}}}}}}}. \quad (\text{IV.44})$$

Цепи, описываемые приведенными разложениями, показаны на рис. IV.15а и IV.15б соответственно. Как и в случае лестничных RC цепей, наличие или отсутствие первого и последнего элементов зависит от свойств функции $Z(s)$ в точках $s = 0$ и $s = \infty$.

В конечном итоге можно получить неограниченное число дополнительных лестничных цепей путем устранения из функций $Z(s)/s$ и $Y(s)$ всех или части конечных ненулевых полюсов поочередно. Этот процесс аналогичен синтезу RC цепей.

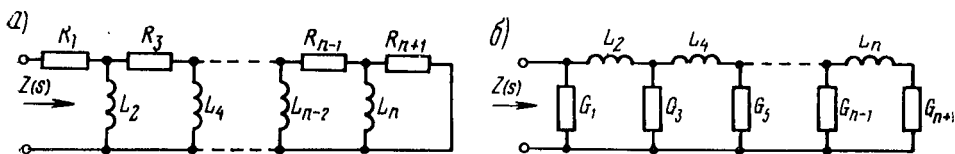


Рис. IV.15

IV.6. Эквивалентные, обратные и дополнительные цепи

Целесообразно обратить внимание на эквивалентность свойств различных RC и RL цепей, полученных для данной входной функции сопротивления или проводимости различными методами синтеза, рассмотренными выше. Здесь как и в аналогичном рассмотрении, приведенном в главе III для LC цепей, в общем случае необходимо различать эквивалентность и потенциальную эквивалентность. Кроме того, следует обратить внимание на то, что все эти цепи эквивалентны лишь со стороны одной пары зажимов (входа), к которой относится данное сопротивление.

Что касается RL или RC цепей, входные сопротивления которых обратны, то они несколько отличаются от LC цепей. Действительно, цепь, обратная LC цепи, снова является LC цепью, но цепь, обратная RC цепи, является RL цепью и наоборот. Этот результат очевиден, поскольку методы синтеза RL и RC цепей по форме идентичны, при том условии, однако, что выражения для функций $Z(s)$ и $Y(s)$ необходимо поменять местами. Иными словами, величина, обратная сопротивлению RC цепи, если она снова рассматривается как сопротивление, удовлетворяет требованиям реализуемости сопротивления RL цепи и наоборот.

Таким образом, решение задачи построения цепи, входное сопротивление которой является величиной, обратной сопротивлению данной RC и RL цепи, не вызывает затруднений. Очевидно также, что решение может быть получено независимо от того, является ли цепь планарной и содержит ли она взаимные индуктивности. Использование метода преобразований нормальных координат, описанного в связи с рассмотрением LC цепей в § III.7, допустимо и в рассматриваемом случае, но с некоторыми изменениями. При этом к квадратичным формам T и F или V и F можно применить способ одновременного сведения к сумме квадратов, так же как для LC цепей по отношению к формам T и V .

Помимо взаимной связи, существующей между эквивалентными и обратными цепями относительно их входов, какие-либо две цепи при соответствующих условиях могут обладать другим важ-

ным свойством, а именно дополнять друг друга. Если функции $Z_1(s)$ и $Z_2(s)$ обозначают соответствующие входные сопротивления, то для описания взаимных свойств эквивалентных, обратных и дополнительных цепей соответственно справедливы следующие зависимости:

$$\frac{Z_1(s)}{Z_2(s)} = 1; \quad (IV.45)$$

$$Z_1(s)Z_2(s) = 1; \quad (IV.46)$$

$$Z_1(s) + Z_2(s) = 1. \quad (IV.47)$$

Постоянная в приведенных выражениях не обязательно равна единице, но всегда можно так нормализовать заданные сопротивления (путем выбора их постоянных множителей), чтобы это условие равенства единице было соблюдено. Тогда в большинстве случаев оказывается возможным значительно упростить численные расчеты, связанные с построением одной цепи, когда известна другая.

Например, если по заданной планарной цепи находят обратную, предварительно построив дуальную ей цепь, то подразумевается, что постоянная в выражении (IV.46) равна единице. В этом случае значения индуктивностей в одной цепи становятся значениями емкостей в другой; то же можно сказать о значениях резистивных сопротивлений и проводимостей, и в результате не требуется никаких численных расчетов.

Необходимо отметить, что цепи без потерь с сопротивлениями, содержащими полюсы на мнимой оси, не имеют дополнительных цепей, поведение которых описывается выражением (IV.47). Это объясняется тем, что вычеты в полюсах на мнимой оси сопротивлений Z_1 и Z_2 цепей без потерь должны быть вещественными и положительными. Следовательно, они не могут взаимно сокращаться, и невозможно получить сумму функций, не имеющую на этой оси полюсов. С другой стороны, входные RC сопротивления имеют положительные вычеты, а вычеты RL сопротивлений являются отрицательными. Таким образом, можно составить цепь, имеющую дополнительное сопротивление; вполне понятно, что дополнительной цепью для RC цепи будет являться RL цепь и наоборот. Учитывая сказанное, условие реализуемости для RL и RC цепей запишется в следующем виде:

$$Z_{RC}(\infty) \geq 0; \quad Y_{RC}(0) \geq 0; \quad (IV.48)$$

$$R_{RL}(0) \geq 0; \quad Y_{RL}(\infty) \geq 0. \quad (IV.49)$$

Если дано сопротивление Z_{RC} и требуется составить цепь по сопротивлению $Z_{RL} = 1 - Z_{RC}$, то согласно условию (IV.49) необходимо, чтобы выполнялось требование $Z_{RC}(0) \leq 1$. Если же дана проводимость Y_{RC} , то для построения цепи по проводимости $Y_{RL} = 1 - Y_{RC}$ необходимо, чтобы выполнялось требование $Y_{RC}(\infty) \leq 1$. Условия (IV.48) накладывают аналогичные требования на

RL сопротивление или проводимость, когда существует соответствующая дополнительная цепь. Даже если первоначально эти условия не выполнялись, они всегда могут быть удовлетворены путем введения для данных функций масштабных коэффициентов (и соответственно путем изменения цепей), что в большинстве практических случаев не вызывает серьезных затруднений.

В качестве примера рассмотрим сопротивление RC цепи

$$Z(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)} = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4s + 3}. \quad (\text{IV. 50})$$

Лестничную цепь, состоящую из последовательных сопротивлений и параллельных емкостей, определим путем деления и инверсии

$$\begin{array}{r} | 1 \\ s^2 + 4s + 3 \mid s^2 + 6s + 8 \\ \hline s^2 + 4s + 3 \mid \frac{s}{2} \\ \hline 2s + 5 \mid s^2 + 4s + 3 \\ \hline s^2 + \frac{5}{2}s \mid \frac{4}{3} \\ \hline \frac{3}{2}s + 3 \mid 2s + 5 \\ \hline 2s + 4 \mid \frac{3}{2}s \\ \hline 1 \mid \frac{3}{2}s + 3 \\ \hline \frac{3}{2}s \mid \frac{1}{3} \\ \hline 3 \mid 1 \end{array}. \quad (\text{IV. 51})$$

Эта цепь показана на рис. IV.16а.

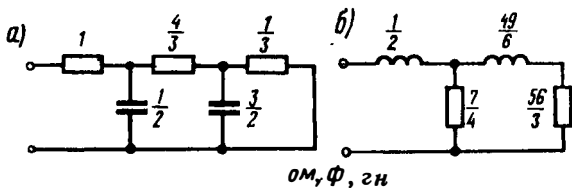


Рис. IV.16

Предположим, что требуется найти вторую цепь, которую можно соединить параллельно с первой и получить результирующее резистивное входное сопротивление, равное 1 ом. Для этого необходимо составить цепь, проводимость которой является дополнительной к проводимости $Y(s) = \frac{1}{Z(s)}$, определяемой выражением

(IV.50). Поскольку данная RC проводимость при $s = \infty$ равна единице, необходимое условие существования дополнительной к ней проводимости удовлетворяется, и она имеет вид

$$Y_{RL} = 1 - \frac{s^2 + 4s + 3}{s^2 + 6s + 8} = \frac{2s + 5}{s^2 + 6s + 8}. \quad (IV.52)$$

Для синтеза лестничной цепи с последовательными L элементами и параллельными R элементами по указанной проводимости необходимо произвести следующие расчеты:

$$\begin{array}{r|l}
 \frac{s}{2} & \\
 \hline
 2s + 5 & | \quad s^2 + 6s + 8 \\
 s^2 + \frac{5}{2}s & | \quad \frac{4}{7} \\
 \hline
 \frac{7}{2}s + 8 & | \quad 2s + 5 \\
 2s + \frac{32}{7} & | \quad \frac{49}{6}s \\
 \hline
 \frac{3}{7} & | \quad \frac{7}{2}s + 8 \\
 \frac{7}{2}s & | \quad \frac{3}{56} \\
 \hline
 8 & | \quad \frac{3}{7}
 \end{array} \quad (IV.53)$$

Соответствующая цепь показана на рис. IV.166. Если эту цепь и цепь, приведенную на рис. IV.16а, соединить параллельно со стороны входных полюсов, то проводимость или сопротивление результирующей цепи будет представлять собой резистивное сопротивление, равное 1 ом . О практическом использовании таких цепей будет сказано ниже.



Исследование эквивалентных и обратных цепей

V.1. Эквивалентные цепи, полученные при помощи линейного преобразования переменных

В двух предыдущих главах при анализе методов реализации был рассмотрен вопрос об эквивалентности цепей. Свойство эквивалентности, хотя и является одним из интересных и полезных в проблеме синтеза, в настоящее время недостаточно изучено. Дополнительное рассмотрение указанного вопроса целесообразно само по себе, поскольку оно дает нам не только средства для решения задач синтеза, но и позволяет использовать свойство эквивалентности в последующих исследованиях.

Возможный подход к изучению этого свойства, позволяющий оценить потенциальные возможности цепи, основан на применении линейных преобразований переменных цепи, ограничиваемых только требуемой инвариантностью определенных входных и передаточных сопротивлений¹. Примером может служить цепь, для которой только одно входное сопротивление является неизменным, и соответствующий вход расположен в контуре l цепи. Применяя к этой цепи обычное преобразование произвольно выбранных контурных токов, можно получить цепи, отличающиеся как по структуре, так и значениями элементов², в то время как входное сопротивление со стороны соответствующего входа у всех цепей будет одно и то же.

За исключением ряда частных случаев, такой, казалось бы удобный, подход не приводит к требуемым результатам. Для того чтобы лучше раскрыть положительные и отрицательные стороны этого метода или, по крайней мере, оценить те потенциальные возможности, которые можно реализовать, необходимо кратко обсудить его математические основы.

¹ Этот метод был впервые предложен В. Кауэром [8] и в дальнейшем развит Н. Ховиттом [9].

² Единственное ограничение в данной задаче состоит в том, что контурный ток i_l должен быть одинаков для всех цепей.

входное сопротивление цепи будет п. в. ф. Известно также (по крайней мере, для двухэлементных цепей), что в этом случае допустимо применение к цепям нормального координатного преобразования, которое позволяет реализовать эквивалентные канонические конфигурации цепей. Следовательно, упомянутое свойство форм T , F и V можно рассматривать как основной, необходимый и достаточный критерий реализуемости. Поэтому, если матрицы $[L]$, $[R]$ и $[S]$ получены из заданной физической цепи, должен быть реализован трансформированный ее вариант, которому соответствуют матрицы, определяемые выражениями (V.6). Однако такой способ реализации не совсем ясен, кроме особых случаев, которые будут рассмотрены ниже.

Если заданная цепь имеет один вход, расположенный, например, в контуре 1 , тогда инвариантность тока этого контура (при некотором заданном напряжении возбуждения в нем) обеспечивается выбором матрицы $[A]$ так, чтобы

$$a_{11} = 1 \text{ и } a_{1k} = 0 \text{ при } k \neq 1. \quad (\text{V.7})$$

Несмотря на то, что остальные вещественные элементы матрицы $[A]$ могут быть любыми (единственное ограничение заключается в том, что эта матрица должна быть неособенной), преобразованная цепь, характеризуемая матрицами вида (V.6), будет иметь то же входное сопротивление, что и заданная цепь. Если она имеет два входа, например, в контурах 1 и 2 и требуется, чтобы входные и передаточные сопротивления z_{11} , z_{22} , z_{12} были инвариантными, тогда, кроме условий (V.7), должны удовлетворяться следующие условия:

$$a_{22} = 1 \text{ и } a_{2k} = 0 \text{ при } k \neq 2. \quad (\text{V.8})$$

Процесс можно продолжить дальше и, наконец, предположить, что входы имеются в каждом контуре цепи. При этом, если потребовать, чтобы все ее входные и передаточные сопротивления оставались инвариантными, то матрица $[A]$ сведется к единичной матрице и преобразование станет тривиальным.

Причина ограниченной применимости изложенного метода заключается в отсутствии однозначного соответствия между матрицами параметров и соответствующей цепью. Даже если выбор контуров и переменных (контурных токов) не ограничен определенным образом, трудно интерпретировать это соответствие в значениях графов и величин элементов, особенно если такой выбор достаточно сложен.

Чтобы упростить процесс интерпретации, полезно рассматривать матрицу преобразования $[A]$ как произведение матриц элементарных преобразований $[2]^1$ и соответственно — преобразование

¹ См. также [56] (прим. ред.).

первоначальной цепи на базе преобразований простых подцепей. Используются три элементарных преобразования матрицы:

- а) перестановка пар строк или столбцов;
- б) добавление элементов одной строки (или столбца) к соответствующим элементам другой строки (или столбца);
- в) умножение строки или столбца на постоянную.

Вследствие симметричности преобразований, определяемых выражениями (V.6), для соответствующих столбцов необходимо использовать преобразование, которое применимо к выбранным строкам. Оно должно, разумеется, применяться ко всем соответствующим матрицам параметров, причем следует рассматривать только преобразования, не нарушающие требуемых условий инвариантности типа (V.7) или (V.8).

В этой связи становится очевидным, что преобразование а) тривиально, поскольку оно просто равносильно введению новой нумерации контуров; преобразование б) либо трудно представить физически, либо также тривиально. Следовательно, из всего этого общего и весьма изящного математического метода получения эквивалентных цепей практически можно использовать лишь результаты, достижимые при помощи элементарного преобразования в). Несмотря на такой обескураживающий результат, не будем спешить с отказом от всего метода в целом, ибо практическая полезность используемого в нем единственного нетривиального преобразования оправдывает усилия, затрачиваемые на то, чтобы понять математическую и физическую значимость метода.

Таким образом, можно прийти к заключению, что все эквивалентные цепи, получаемые описанными выше методами, должны иметь одинаковое число геометрически независимых контуров или при использовании системы уравнений узловых напряжений — одинаковое число геометрически независимых пар узлов. Существуют рассматриваемые в настоящем параграфе специальные приемы, посредством которых число контуров (при использовании метода контурных токов) или число узлов (при использовании метода узловых напряжений) может быть изменено, несмотря на их очевидную инвариантность при соответствующих преобразованиях. Эти приемы, а также удобство использования в каждом конкретном случае либо контуров, либо узлов приводят к ряду интересных и полезных результатов.

Для иллюстрации рассмотрим сопротивление 10 ом на рис. V.1а, а также двухконтурную цепь на рис. V.1б, эквивалентную исходному сопротивлению. Несмотря на то, что второй вариант представляет собой тривиальный случай, он может быть превращен в нетривиальный посредством простых преобразований матрицы сопротивлений

$$[R] = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, \quad [R'] = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\uparrow 2]{\leftarrow 2} \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}, \quad (\text{V.9})$$

где вторая строка и второй столбец умножены на 2. Эта операция соответствует выбору матрицы преобразования (V.5) вида

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (V.10)$$

Ясно, что последняя матрица удовлетворяет условию инвариантности (V.7).

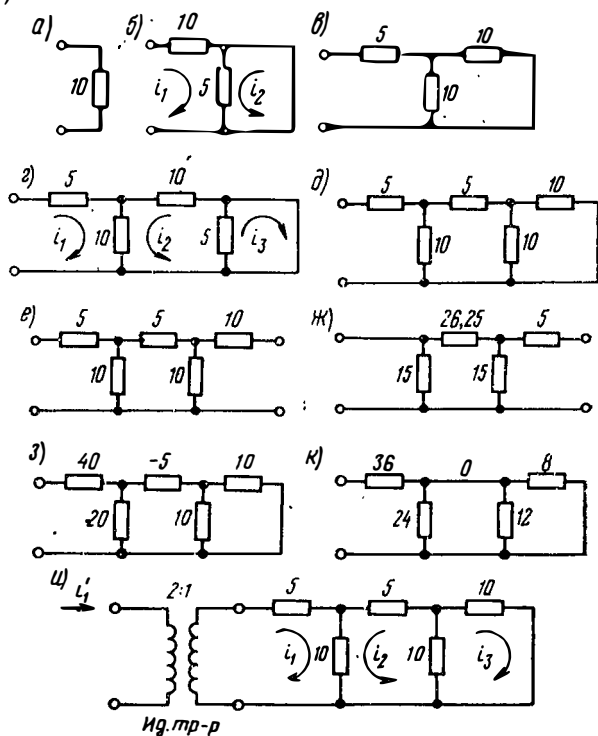


Рис. V.1

Из анализа методом контурных токов нетрудно видеть, что цепи, изображенной на рис. V.1в, соответствует матрица сопротивлений $[R']$. Входное сопротивление этой цепи также равно 10 ом. Процесс добавления контуров можно продолжить, введя, например, в контур 2 трехконтурной цепи, показанной на рис. V.1г, дополнительное сопротивление 5 ом, замкнутое накоротко. В данном случае осуществляется следующее преобразование:

$$\begin{bmatrix} 15 & 10 & 0 \\ 10 & 25 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\uparrow 2]{\leftarrow 2} \begin{bmatrix} 15 & 10 & 0 \\ 10 & 25 & 10 \\ 0 & 10 & 20 \end{bmatrix}. \quad (V.11)$$

Оно обуславливает цепь, изображенную на рис. V.1д, которая представляет собой трехконтурную цепь с входным сопротивлением, также равным 10 ом , и соответствует нетривиальному случаю.

Если в контур 3 этой цепи ввести вторую пару зажимов, как показано на рис. V.1е, и применить матричное преобразование

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{3}{2}} \\ \left[\begin{array}{ccc} 15 & 10 & 0 \\ 10 & 25 & 10 \\ 0 & 10 & 20 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 15 & 15 & 0 \\ 15 & 56,25 & 15 \\ 0 & 15 & 20 \end{array} \right], \end{array} \quad (\text{V.12})$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \frac{3}{2} \\ | \\ \frac{3}{2} \end{array}$$

которому соответствует матрица преобразования

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{V.13})$$

то получим четырехполюсник, изображенный на рис. V.1ж, имеющий такие же входные и передаточные сопротивления, как и у четырехполюсника, показанного на рис. V.1е.

Этот прием можно, разумеется, использовать и тогда, когда требуется изменить в определенное число раз входное сопротивление цепи. Например, если умножить первую строку и первый столбец матрицы (V.11), описывающей цепь, приведенную на рис. V.1д, на 2, т. е.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{2} \\ \left[\begin{array}{ccc} 15 & 10 & 0 \\ 10 & 25 & 10 \\ 0 & 10 & 20 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 60 & 20 & 0 \\ 20 & 25 & 10 \\ 0 & 10 & 20 \end{array} \right], \end{array} \quad (\text{V.14})$$

$$\begin{array}{c} \uparrow 2 \\ | \\ 2 \end{array}$$

то получим цепь, изображенную на рис. V.1з, входное сопротивление которой в 2^2 раз больше ($Z_{\text{вх}} = 40 \text{ ом}$), чем входное сопротивление исходной цепи. При этом соответствующее преобразование (V.4) дает $i_1 = 2i'_1$; $i_2 = i'_2$; ...; $i_l = i'_l$, в то время как квадратичная форма F [см. ур-ние (V.2)] для общей входной мощности остается инвариантной¹.

Осуществленному преобразованию можно дать следующее физическое объяснение. Ко входным зажимам цепи, приведенной на рис. V.1д, необходимо подключить идеальный трансформатор, как показано на рис. V.1и, где входной ток имеет новое значение

¹ Для данных значений i_1, \dots, i_l функция F имеет определенное значение. Подстановка преобразования (V.4) в ур-ние (V.2) просто выражает функцию F при помощи нового ряда токов i'_1, \dots, i'_l . Система ур-ний (V.4) позволяет вычислить соответствующие значения новых токов, для которых получено рассматриваемое условие.

$i_1' = \frac{i_1}{2}$, а рассеиваемая мощность при заданном токе i_1 не изменилась по сравнению с первоначальной цепью. Для того чтобы ток i_1 остался прежним, напряжение со стороны входа идеального трансформатора должно быть вдвое больше, чем исходное. Поэтому входное сопротивление производной цепи необходимо умножить на квадрат коэффициента трансформации идеального трансформатора. Таким образом, в процессе перехода от цепи рис. V.1д к цепи рис. V.1з можно говорить об «увеличении уровня сопротивления» контура 1 в четыре раза.

Недостатком второй цепи (рис. V.1з) является появление в ней отрицательного сопротивления. Это не означает, однако, что цепь больше не является пассивной, так как функция потерь для нее осталась положительно определенной, поскольку последнее свойство инвариантно линейному конгруэнтному преобразованию с вещественной неособенной матрицей $[A]$. Такую цепь практически трудно построить вследствие наличия отрицательного сопротивления — 5 ом. Поэтому его целесообразно устранить, для чего можно соответствующим образом повысить уровень сопротивления контура 2 при помощи следующего преобразования матрицы (V.14):

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{6}{5}} \\ \left[\begin{array}{ccc} 60 & 20 & 0 \\ 20 & 25 & 10 \\ 0 & 10 & 20 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 60 & 24 & 0 \\ 24 & 36 & 12 \\ 0 & 12 & 20 \end{array} \right]. \end{array} \quad (V.15)$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \frac{6}{5} \\ | \end{array}$$

Рассмотрим детально причину возникновения в последнем выражении коэффициента $\frac{6}{5}$. Прежде всего отметим, что появление сопротивления — 5 ом в цепи (рис. V.1з) обусловлено диагональными элементами матрицы (V.14), которые представляют собой значения полных сопротивлений контуров. Каждый из диагональных элементов по величине не превышает сумму недиагональных элементов одного ряда или столбца. Во второй строке матрицы диагональный элемент равен 25, а сумма недиагональных элементов составляет 30. Умножением второй строки и второго столбца матрицы на соответствующий множитель, больший единицы (что эквивалентно умножению уровня сопротивления контура 2 на квадрат этого множителя), можно добиться их равенства. При этом диагональный элемент умножается на квадрат множителя, тогда как недиагональные элементы — на сам множитель. Элементарные алгебраические преобразования показывают, что если множитель выбрать равным сумме недиагональных элементов, поделенной на диагональный элемент (в приведенном примере $\frac{20+10}{25} = \frac{6}{5}$), то в результате получается матрица с диагональным элементом, равным сумме недиагональных элементов. Это значение множителя позво-

ляет повысить сопротивление в контуре 2 и, следовательно, устранить из цепи отрицательное сопротивление.

Цепь, соответствующая матрице (V.15), показана на рис. V.1к. Она может быть приведена к двухконтурной цепи путем объединения параллельно включенных сопротивлений 24 ом и 12 ом. Нетрудно видеть, что если в качестве множителя матричного преобразования (V.15) выбрать множитель, больший двух, то отрицательное сопротивление появится в контуре 3. Множитель $\frac{6}{5}$, необходимый для устранения отрицательного сопротивления в контуре 2, является не столь большим, чтобы привести к появлению отрицательного сопротивления в контуре 3. Можно сказать, что этот контур имеет достаточное положительное сопротивление для компенсации отрицательного сопротивления, возникающего в нем при использовании преобразования (V.15).

В связи с приведенным рассмотрением возникает вопрос: всегда ли возможно, используя процесс преобразования, полностью освободиться от отрицательного сопротивления? На этот вопрос можно дать утвердительный ответ. Даже для наиболее неблагоприятных случаев не потребуется никаких операций, кроме умножения всех строк и столбцов данной матрицы на один и тот же множитель. Эта операция приведет к известной цепи, сопротивление которой при увеличении значений всех ее резистивных сопротивлений в a раз будет в a раз больше первоначального сопротивления. В любом менее неблагоприятном случае преобразованию подвергаются только сопротивления, расположенные вблизи входа, и отрицательные сопротивления исчезают постепенно, по мере продвижения к концу цепи. Процесс компенсации отрицательных величин элементов от контура к контуру посредством преобразования в контурах не затрагивает входного сопротивления, которое остается инвариантным. Данный способ получения эквивалентной цепи является результатом применения методов линейного преобразования и поэтому заслуживает внимания.

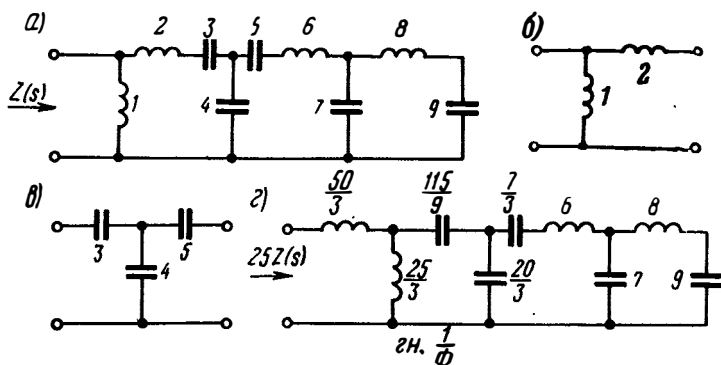


Рис. V.2

Покажем применение описанного метода к более сложным цепям, для чего рассмотрим LC цепь, изображенную на рис. V.2а. Допустим, что необходимо изменить эту цепь так, чтобы получить в 25 раз большее входное сопротивление. Можно, конечно, найти матрицы полных индуктивностей и обратных емкостей и оперировать с преобразованиями вида (V.6). Однако учитывая, что заданная цепь — лестничная, нецелесообразно применять такой громоздкий метод. Значительно проще иметь дело с отдельным звеном лестничной цепи, в котором используется только один тип элемента. Например, если выделить на входе цепи звено в виде двух индуктивных ветвей, как показано на рис. V.2б, то вначале необходимо рассмотреть только преобразование простой матрицы индуктивностей порядка 2×2

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad [L'] = \overset{\uparrow 5}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 25 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}. \quad (V.16)$$

Заметим, что если не увеличивать уровня сопротивления контура 2, то в нем появится некоторая отрицательная индуктивность. Запишем операцию преобразования, освобождающую от встретившегося затруднения, в виде

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \xleftarrow{\frac{5}{3}} \\ \uparrow \frac{5}{3} \end{matrix} \begin{bmatrix} 25 & \frac{25}{3} \\ \frac{25}{3} & \frac{25}{3} \end{bmatrix}. \quad (V.17)$$

Поскольку предполагается, что уровень сопротивления контура 2 должен быть увеличен в $25/9$ раз, операцию преобразования необходимо провести также для емкостных элементов рассматриваемого контура. Заменим емкостную подцепь, примыкающую к звену, приведенному на рис. V.2а, цепью, приведенной на рис. V.2в. Матрицу обратных емкостей этой цепи порядка 2×2 можно записать так:

$$[S] = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}. \quad (V.18)$$

Здесь номер строки и номер столбца соответствуют контуру 2 исходной цепи. Следовательно, преобразование, совместное с преобразованием (V.17), имеет вид

$$\overset{\downarrow \frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{175}{9} & \frac{20}{3} \\ \frac{20}{3} & 9 \end{bmatrix}. \quad (V.19)$$

Таким образом, отрицательная индуктивность, возникшая в результате первого преобразования (V.16), оказывается скомпенсированной, причем в данном случае некоторая отрицательная индуктивность компенсируется некоторой положительной емкостью. Правильнее, конечно, сказать, что отрицательная индуктивность компенсируется соответствующим увеличением уровня сопротивления контура 2, и что увеличение обусловлено емкостными элементами этого контура.

Соединим индуктивную цепь, описываемую матрицей (V.17), каскадно с емкостной цепью, описываемой матрицей (V.19), к выходу которой подключим оставшуюся подцепь первоначальной цепи, изображенной на рис. V.2а. Указанное построение показано на рис. V.2г. На этом решение задачи заканчивается. Интересно

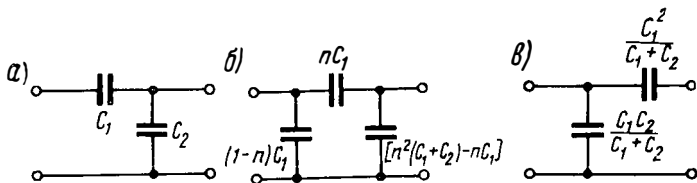


Рис. V.3

отметить, что в процессе решения только преобразование (V.16) дает требуемый результат, поскольку речь идет об увеличении входного сопротивления в 25 раз. Последующие действия, относящиеся к преобразованию уровня внутреннего сопротивления, оставляют входное сопротивление неизменным.

При этом преобразовании для лестничной цепи основным является преобразование простого Г-образного звена, точнее звена, полученного при повороте Г-образного звена на 180° (рис. V.3а), элементами которого являются емкости. При этом основной принцип сохраняется независимо от типа используемого элемента цепи, если только в обеих ветвях звена он один и тот же. Разнообразия ради, рассмотрим последнюю цепь в системе узловых напряжений. Обозначив верхние левый и правый узлы через 1 и 2, а нижние узлы приняв за базовый (нулевой) узел, получим матрицу емкостей вида

$$[C] = \begin{bmatrix} C_1 & -C_1 \\ -C_1 & C_1 + C_2 \end{bmatrix}. \quad (V.20)$$

Увеличим уровень проводимости узла 2 в n^2 раз, что дает преобразованную матрицу емкостей вида

$$[C'] = \begin{bmatrix} C_1 & -C_1 \\ -C_1 & C_1 + C_2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\uparrow n]{\cdot n} \begin{bmatrix} C_1 & -nC_1 \\ -nC_1 & n^2(C_1 + C_2) \end{bmatrix}. \quad (V.21)$$

Этой матрице соответствует П-образное звено, изображенное на рис. V.3б. Для того чтобы все величины элементов оставались положительными, множитель n ограничивается диапазоном величин, определяемых выражением

$$\frac{C_1}{C_1 + C_2} \leq n \leq 1. \quad (V.22)$$

Из этого выражения ясно, что для звена, приведенного на рис. V.3а, уровень проводимости может быть уменьшен (соответственно уровень сопротивления — увеличен) только со стороны правого входа звена. Максимальная величина изменения уровня проводимости достигается при

$$n = \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{1}{1 + \frac{C_2}{C_1}}. \quad (V.23)$$

Таким образом, коэффициент n зависит исключительно от отношения заданных величин емкостей. Цепь, получающаяся в результате

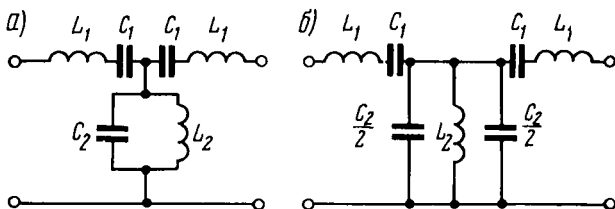


Рис. V.4

максимального изменения уровня проводимости или сопротивления, показана на рис. V.3в. Она представляет собой Г-образную цепь, но повернутую на 180° по отношению к цепи, изображенной на рис. V.3а. Ее можно рассматривать как полностью трансформированный вариант Г-образной цепи, причем промежуточный вариант представлен цепью, приведенной на рис. V.3б для значений n в пределах, определяемых выражением (V.22).

Полученные результаты находят практическое применение при расчете полосовых фильтров. Общий тип такого фильтра показан на рис. V.4а, где $L_1 C_1 = L_2 C_2$. Во многих случаях отношение $\frac{L_1}{L_2} = \frac{C_2}{C_1}$ оказывается чрезвычайно большим (10^4 и более). Подобный диапазон величин элементов трудно выполнить, особенно для индуктивностей. Нормализуя уровень сопротивления со стороны входа цепи, можно изменить в одинаковое число раз оба значения индуктивностей. Тогда одна из них будет либо весьма большой, либо весьма малой; величина другой при этом будет иметь умеренное значение.

Путем преобразования уровня внутреннего сопротивления можно еще больше облегчить проектирование. Для этого построим цепь, изображенную на рис. V.4б. Параллельная индуктивность соединяется здесь справа и слева с симметричными цепями: Г-образной и перевернутой Г-образной. Сравнивая построенную цепь с цепями, изображенными на рис. V.3а, V.3б, V.3в, видим, что уровень сопротивления в месте подключения индуктивности L_2 может быть увеличен в большее число раз, чем в случае, когда удастся обеспечить близкие значения индуктивностей L_2 и L_1 . Отношения величин емкостей в некоторых случаях оказываются значитель-

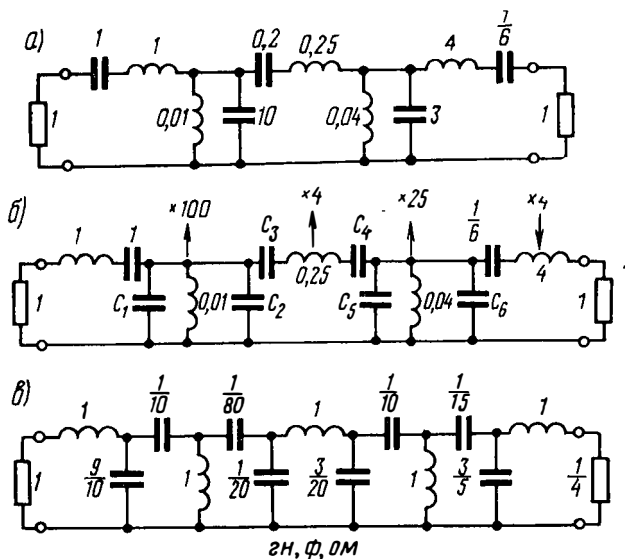


Рис. V.5

ными; однако с точки зрения практического использования здесь не возникает никаких трудностей.

Существует несколько дополнительных способов, посредством которых цепь, изображенную на рис. V.4а, можно превратить в более пригодную для практики; в одном из них используется взаимная индуктивная связь, причем ослабление связи отражает сравнительно малость параллельной индуктивности. Читателю целесообразно проделать подобные преобразования в качестве упражнения.

Рассмотрим другой метод изменения уровня сопротивления на примере цепи, приведенной на рис. V.5а. Задача заключается в том, чтобы, изменяя реактивную часть сопротивления цепи, добиться равенства всех индуктивных элементов. Поскольку последовательно можно нормализовать все индуктивности до любой требуемой одинаковой величины, попытаемся приравнять их единице.

На первом этапе построим цепь, показанную на рис. V.5б, где каждая индуктивность граничит с емкостными Г-образными цепями, а коэффициенты изменения уровня каждого сопротивления около данной индуктивности показаны цифрами у стрелок. Направление стрелки указывает на увеличение или уменьшение уровня соответствующего сопротивления. Тогда должны удовлетворяться следующие условия:

$$C_1 + C_2 = 10; \quad (V.24)$$

$$\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} = 5; \quad (V.25)$$

$$C_5 + C_6 = 3. \quad (V.26)$$

Далее необходимо определить величины емкостей C_1, \dots, C_6 , которые, с одной стороны, будут удовлетворять уравнениям (V.24), (V.25) и (V.26), а с другой — соответствовать рассматриваемым изменениям уровня сопротивления.

Приведенный процесс преобразования, конечно, не является единственным, так как при данном изменении уровня, зависящем от того, как распределены величины емкостей C_1 и C_2 , C_3 и C_4 , C_5 и C_6 , преобразования емкостных Г-образных звеньев могут привести к бесконечному числу П-образных звеньев. Однако этот процесс будет единственным, если потребовать, чтобы каждое Г-образное звено преобразовывалось в противоположное. Такое условие при заданных значениях элементов иногда невыполнимо, но во всяком случае оно может оставаться верным до тех пор, пока это возможно.

Рассмотрим первое слева Г-образное звено цепи, изображенной на рис. V.5б, и применим преобразование к его матрице емкостей

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 + C_1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\leftarrow \frac{1}{10} \\ \uparrow \frac{1}{10}}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1 + C_1}{100} \end{bmatrix}. \quad (V.27)$$

Для того чтобы полученная матрица соответствовала полностью преобразованному Г-образному звену, необходимо выполнение соотношения

$$\frac{1}{10} = \frac{1 + C_1}{100} \quad \text{или} \quad C_1 = 9, \quad (V.28)$$

которое получается также из равенства (V.24) при

$$C_2 = 1. \quad (V.29)$$

Далее составим матрицу емкостей для примыкающего к первому звену Г-образного звена, содержащего емкости C_2 и C_3 . При преобразовании этой матрицы проводимость ее элемента, стоящего

в первом ряду и в первом столбце, необходимо умножить на коэффициент $\frac{1}{100}$, а проводимость элемента, стоящего во второй строке и втором столбце, — на коэффициент $\frac{1}{4}$, т. е.

$$\frac{1}{10} \left[\begin{array}{cc} \downarrow \frac{1}{10} & \\ 1 + C_3 & -C_3 \\ \leftarrow & \frac{1}{2} \\ -C_3 & C_3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc} \frac{1 + C_3}{100} & -\frac{C_3}{20} \\ -\frac{C_3}{20} & \frac{C_3}{4} \end{array} \right]. \quad (\text{V.30})$$

В данном случае полному преобразованию цепи соответствует равенство

$$\frac{1 + C_3}{100} = \frac{C_3}{20} \quad \text{или} \quad C_3 = \frac{1}{4}. \quad (\text{V.31})$$

Тогда из ур-ния (V.25) находим

$$C_4 = 1. \quad (\text{V.32})$$

Таким образом, снова возможно полное преобразование звена. При рассмотрении Г-образного звена, содержащего емкости C_4 и C_5 , уровень его проводимости со стороны левой пары зажимов необходимо умножить на $\frac{1}{4}$, а со стороны правой пары зажимов — на $\frac{1}{25}$. Соответствующую матрицу емкостей можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \left[\begin{array}{cc} \downarrow \frac{1}{2} & \\ 1 & -1 \\ \leftarrow & \frac{1}{5} \\ -1 & 1 + C_5 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{4} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1 + C_5}{25} \end{array} \right]. \quad (\text{V.33})$$

Из условия полного преобразования находим, что

$$\frac{1}{10} = \frac{1 + C_5}{25} \quad \text{или} \quad C_5 = \frac{3}{2}. \quad (\text{V.34})$$

Тогда из ур-ния (V.26) получим

$$C_6 = \frac{3}{2}. \quad (\text{V.35})$$

При преобразовании последнего Г-образного звена матрица емкостей имеет вид

$$\begin{array}{c} \downarrow \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \left[\begin{array}{cc} \frac{5}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{5}} \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{15} & \frac{-1}{15} \\ -\frac{1}{15} & \frac{2}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}} \end{array} \quad (V.36)$$

Ясно, что в результате получится полностью преобразованное звено. Подставив значения емкостей C_1 , C_3 и C_5 из ф-л (V.28), (V.31) и (V.34) в соответствующие элементы матриц (V.27), (V.30) и (V.33), находим матрицы:

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{-1}{10} \\ \frac{-1}{10} & 1 \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{80} & \frac{-1}{80} \\ \frac{-1}{80} & \frac{1}{16} \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{4} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-1}{10} & \frac{1}{10} \end{array} \right]. \quad (V.37)$$

Матрицы, определяемые ф-лами (V.36) и (V.37), дают значения всех емкостей полностью преобразованной цепи, приведенной на рис. V.5в. Для этой цепи уровень сопротивления выходного контура в четыре раза меньше соответствующего уровня исходной цепи, а нагрузочное сопротивление стало равным $\frac{1}{4}$ ом. Сравнение с цепью, изображенной на рис. V.5а, показывает, что преобразованная цепь имеет то же входное сопротивление z_{11} , сопротивление z_{22} , равное $\frac{1}{4}$ сопротивления z_{11} , и сопротивление передачи z_{12} , равное половине входного. Частотная зависимость этих функций в результате преобразования не изменяется.

Интересно заметить, что полученная цепь имеет на три емкости больше, чем первоначальная. С практической точки зрения на это можно пойти, чтобы иметь возможность подобрать некоторые значения элементов так, как это сделано в рассмотренном примере.

Хотя данный пример был приведен только для того, чтобы проиллюстрировать полное преобразование каждого Г-образного звена, было бы несправедливо считать, что подобный процесс выравнивания сопротивлений может редко встретиться на практике. Отметим прежде всего, что практические ситуации никогда не бывают случайными. Проектирование схем не является беспорядочным действием (tossing dice) — оно протекает в определенной последовательности; кроме того, в процессе проектирования имеется возможность влиять даже на характер результатов эксперимента. Не всегда, конечно, удастся спроектировать схему настолько хорошо, как в указанном примере, но даже, если некоторые Г-об-

разные звенья останутся в процессе преобразования П-образными, это приведет только к тому, что количество емкостей станет несколько большим. Несмотря на то, что в некоторых случаях невозможно достигнуть равенства всех индуктивностей, описанный метод все же очень полезен, так как он позволяет значительно уменьшить чрезвычайно большой первоначальный диапазон значений элементов цепи.

V.2. Метод определения потенциально эквивалентных цепей

Как известно, собственными частотами цепи в режиме холостого хода и короткого замыкания для данного входа являются полюсы и нули соответствующей функции сопротивления. Поэтому определение потенциальной эквивалентности цепей различной конфигурации представляет собой по существу задачу непосредственного определения числа собственных частот цепи по ее геометрической структуре и распределению типов элементов. Предсказание степени характеристического уравнения из такого непосредственного рассмотрения данной цепи уже долгое время интересует исследователей в связи с анализом цепей, ввиду чего рассмотрение этой задачи здесь представляется весьма важным.

Первый подход к ее решению был основан на том, что степень, являющаяся целым числом, должна быть равна количеству независимых элементов накопления энергии (индуктивностей и емкостей), существующих в цепи, т. е. числу независимых начальных условий. С помощью их можно определить число постоянных интегрирования, которое, как известно, равно числу собственных частот. Это следует из рассмотрения известной аналитической формы собственного поведения цепи, описываемого уравнениями (I.2) и (I.3). Указанное замечание, хотя и является довольно веским аргументом в пользу такого подхода, не оказывает существенной помощи. Однако при непосредственном определении элементов накопления энергии в данной цепи возникают, за исключением сравнительно простых случаев, некоторые трудности, аналогичные первоначальной задаче.

Для решения поставленной проблемы более целесообразно использовать понятие нормальных координат. Каждая нормальная координата соответствует одной собственной частоте или паре сопряженно-комплексных частот (когда они комплексные), и, таким образом, цель заключается в том, чтобы найти метод предсказания числа нормальных координат, относящихся к данной динамической системе. При этом подходе сразу становится очевидным один важный аспект рассматриваемой проблемы, а именно, если цепь содержит все три типа элементов, точного решения не существует, поскольку для такой системы нельзя определить нормальные координаты в их обычном смысле. Дело в том, что обычно невозможно

одновременно свести три квадратичные формы (формы T , F и V) к сумме квадратов [2]. Поэтому все дальнейшее рассмотрение ведется только применительно к цепям, в которых используются два типа элементов.

При определении числа нормальных координат динамической системы необходимо установить число ее степеней свободы или число динамически независимых переменных, необходимых для полного описания состояния системы в любой момент. Важно обратить внимание на термин «динамический», так как он означает, что в данном случае число независимых переменных рассматривается с другой точки зрения по сравнению с принятой при выводе уравнений равновесия системы по методу контурных токов и узловых напряжений. Важно также ясно понимать значение термина «степень свободы». Часто это понятие ошибочно отождествляют с числом переменных, определяющих динамическое равновесие системы, подобно числу контурных токов (при анализе методом контурных токов) или числу напряжений пар узлов (при анализе методом узловых напряжений). Число контурных токов в общем случае не равно числу напряжений пар узлов, поэтому их отождествление с числом степеней свободы системы приведет, очевидно, к ошибке. Поскольку свойства динамической системы адекватны ее физическому содержанию, число степеней свободы системы должно быть постоянным и не зависеть от особенностей алгебраических методов, применяемых для определения уравнений равновесия.

Другими словами, число динамически независимых переменных среди контурных токов или узловых напряжений должно быть одним и тем же и может, в крайнем случае, быть равным меньшему из двух чисел l и n , представляющих соответственно количество геометрически независимых контуров и пар узлов графа цепи.

При обсуждении вопроса о независимых переменных в связи с определением уравнений равновесия методами контурных токов и узловых напряжений мы касались лишь получения числа независимых уравнений, равного числу переменных, содержащихся в них. Для доказательства этого использовалась только геометрия графа цепи, а все, что относилось к независимости используемых переменных, ограничивалось их топологической или геометрической независимостью. Последнее не зависит от типов используемых в цепи элементов и, следовательно, не связано с условиями динамической независимости.

Для того чтобы стало ясным различие между геометрической и динамической независимостью, достаточно обратить внимание на следующий факт: хотя чисто резистивная цепь может содержать l геометрически независимых переменных, соответствующих контурным токам, только одна из переменных независима в динамическом смысле. При этом система в целом имеет одну степень свободы, так как если зафиксировать величину одного из токов, то величины всех других токов определяются однозначно. Таким

образом, существует лишь одна возможность независимого выбора контурного тока; после того как выбор сделан, величины всех других токов в любой данный момент оказываются фиксированными. С динамической точки зрения это означает, что система l независимых уравнений контурных токов рассматривается как система связей (set of constraints).

Уравнения связи представляют собой обычные алгебраические уравнения с несколькими переменными, в отличие от системы дифференциальных уравнений, содержащей производные различных порядков. В последней выбор величины одной из переменных в данный момент не будет однозначно определять величины всех других переменных. Для определения их необходимо либо знать величины одной или более последовательных производных выбранной переменной в тот же момент времени, либо значения не одной, а нескольких переменных. Нужное количество переменных, которое должно быть известно, или количество соответствующей информации относительно одной или нескольких переменных определяет число динамически независимых переменных или число степеней свободы системы.

Уравнения связи подобны «скобам» (clamps): они отбирают определенную часть свободы от данной системы — свободы в динамическом смысле. В чисто резистивной цепи все уравнения равновесия представляют собой такие «скобы» — система прочно сжата. Вот почему, зная одну переменную, можно найти остальные. За исключением определенных канонических форм, динамические системы обычно имеют ряд «скоб» или «ограничителей свободы» (freedom snatchers). Число динамически независимых переменных в этом случае равно разности между общим числом переменных, однозначно определяющих состояние равновесия системы, и числом независимых уравнений связи (существующей между переменными).

Рассмотрим прямой метод нахождения числа уравнений связи. На первом этапе определяется вид физической ситуации, которая приводит к появлению связей. Из системы уравнений, составленных по методу контурных токов, нетрудно видеть, что связь существует всякий раз, когда внутри цепи, содержащей один тип элементов, можно найти замкнутый путь. Примером может служить простой контур, изображенный на рис. V.6а, у которого в качестве единственного типа элемента выбрана обратная емкость (или емкость). Уравнение равновесия контура, записанное на основе закона напряжений Кирхгофа, имеет вид

$$\int [S_1(i_1 - i_0) + S_2(i_2 - i_0) + S_3(i_3 - i_0) + S_4(i_4 - i_0)] dt = 0, \quad (V.38)$$

где $(i_1 - i_0)$, $(i_2 - i_0)$, ... — токи в отдельных емкостях. После дифференцирования и группировки членов имеем

$$S_1 i_1 + S_2 i_2 + S_3 i_3 + S_4 i_4 = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) i_0. \quad (V.39)$$

Из этого уравнения четко видна связь, существующая между током i_0 , протекающим в так называемом емкостном контуре, и между токами, протекающими в смежных контурах.

Очевидно, что такой же тип связи окажется и тогда, когда емкостный контур образует не простой, а более сложный замкнутый путь. Аналогичная ситуация имеет место и для случая, когда единственным элементом цепи является индуктивность; при этом наличие или отсутствие в цепи взаимных индуктивностей несущественно. Допустим, что ветви 1, 2, ..., τ представляют собой любую

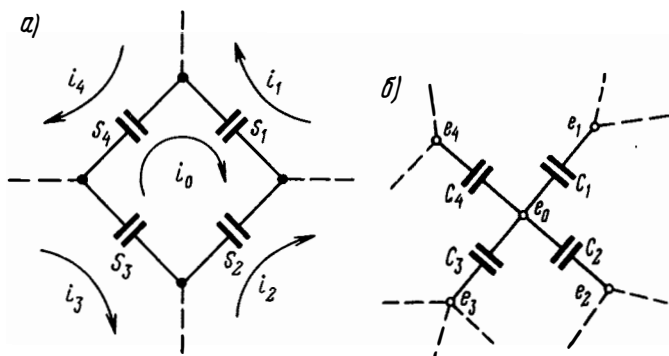


Рис. V.6

последовательность ветвей среди индуктивных ветвей 1, 2, ..., λ , которые все вместе образуют сложный замкнутый путь. Для падений напряжений в этих ветвях можно записать следующее уравнение:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_\tau = 0. \quad (V.40)$$

Тогда

$$v_i = \sum_{k=1}^{\lambda} l_{ik} \frac{dj_k}{dt}, \quad (V.41)$$

где j_1, \dots, j_λ — токи во всех индуктивных ветвях, а l_{ik} — соответствующие коэффициенты собственной и взаимной индуктивностей. Токи ветвей связаны с выбранной последовательностью контурных токов линейными уравнениями вида

$$j_i = \sum_{k=1}^l \beta_{ki} i_k, \quad (V.42)$$

в которых коэффициенты β равны ± 1 или нулю. После подстановки ур-ния (V.42) в ур-ние (V.41) и найденных в результате величин v — в ур-ние (V.40) получим уравнение

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + \dots + L_l \frac{di_l}{dt} = 0, \quad (V.43)$$

в котором L_1, \dots, L_l — некоторые коэффициенты суммарной индуктивности (интерпретация их в данном случае не представляет интереса). После интегрирования уравнения (V.43) получим

$$L_1 i_1 + L_2 i_2 + \dots + L_l i_l = \text{const.} \quad (\text{V. 44})$$

Уравнение (V.44) и представляет собой требуемое уравнение связи.

Аналогичное уравнение можно получить при рассмотрении уравнений равновесия цепи методом узловых напряжений. В этом случае соблюдается условие линейной связи напряжений пар узлов, если в цепи имеется соединение в виде звезды, все ветви которой содержат один и тот же тип элемента. При индуктивной звезде наличие или отсутствие любых взаимных индуктивностей несущественно. На рис. V.6б показана цепь с таким соединением типа звезды, где ветви сходятся в одном узле e_0 , а в качестве элементов служат емкости. Уравнение для этого узла, записанное на основе закона Кирхгофа, имеет вид

$$\frac{d}{dt} [C_1(e_1 - e_0) + C_2(e_2 - e_0) + C_3(e_3 - e_0) + C_4(e_4 - e_0)] = 0. \quad (\text{V. 45})$$

После интегрирования и группировки членов получим

$$C_1 e_1 + C_2 e_2 + C_3 e_3 + C_4 e_4 = (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) e_0 + \text{const.} \quad (\text{V. 46})$$

Узлы, подобные изображенному на рис. V.6б узлу e_0 , в зависимости от вида используемого элемента называются резистивными, индуктивными или емкостными узлами или звездами. Используя метод контурных токов, можно аналогично найти выражения для линейных связей соответствующих резистивных индуктивных или емкостных простых или сложных (meshes or loops) контуров. Возникает задача, заключающаяся в том, чтобы разработать способы однозначного определения числа независимых узлов, соединений типа звезды, сложных или простых контуров в любой произвольно заданной цепи. Поскольку должна быть уверенность относительно независимости перечисленных соединений цепей¹, то при их определении нельзя полагаться на какую-то случайность. Аналогично в любом графе цепи существует значительно больше различных замкнутых, чем геометрически независимых контуров. Например, число таких емкостных контуров, которые мы можем обнаружить в данной цепи, обычно больше, чем число независимых емкостных контуров.

Решение этой дополнительной задачи сводится к тому, чтобы для данной двухэлементной цепи построить не только полный граф, но также и подграфы для каждого из двух видов элементов. Например, в случае LC цепи, кроме полного графа, строят подграф, состоящий только из ветвей, содержащих индуктивности, и другой подграф, состоящий только из ветвей, содержащих емкости. Иначе

¹ Т. е. узлов, звезд и т. д. (прим. ред.).

говоря, так называемый *индуктивный подграф* получается при удалении из общего графа цепи тех ветвей, которые содержат емкости, тогда как *емкостный подграф* получается при удалении из общего графа тех ветвей, которые содержат индуктивности.

Анализ подграфов позволяет непосредственно определить число индуктивных или емкостных контуров. При этом число геометрически независимых контуров в каждом подграфе соответственно равно числу независимых контуров данного типа в общем графе. Поскольку для каждого подграфа легко и однозначно определяется число ветвей b , общее число узлов n_t и число отдельных частей (separate parts) s , без труда можно вычислить и соответствующее число независимых контуров $l = b - n_t + s$. Таким образом, в каждом из подграфов цепи, все контурные токи которой динамически независимы, замкнутых путей не будет. Если же подграфы содержат замкнутые пути, то общее число таких независимых контуров для обоих подграфов равно числу динамически избыточных (superfluons) переменных (контурных токов). Иными словами, разность между числом геометрически независимых контурных токов полной цепи и числом независимых контуров обоих подграфов равна числу динамически независимых контурных токов и, следовательно, числу нормальных координат или нормальных мод системы.

Аналогично определяется число динамически независимых переменных цепи методом узловых напряжений путем вычитания из числа геометрически независимых пар узлов полной цепи числа независимых индуктивных и емкостных звезд, которые могут быть определены непосредственно из подграфов. Однако количество звезд не просто равно числу независимых звезд для обоих подграфов, как это можно было предположить вначале. Для того чтобы правильно найти число индуктивных или емкостных звезд, необходимо рассмотреть отдельно те звезды, которые созданы ветвями, сходящимися в одиночных узлах (индуктивных или емкостных), и те, которые содержат ветви, сходящиеся в группу узлов с соответствующими ветвями меньшего подграфа внутри рассматриваемого.

Относительно индуктивных или емкостных узлов можно отметить следующее: индуктивный узел отсутствует, например, в емкостном подграфе. Точно так же емкостной узел отсутствует в индуктивном подграфе. Поэтому число независимых индуктивных узлов равно разности между общими числами узлов графа полной цепи (первоначального графа) и емкостного подграфа; число независимых емкостных узлов равно разности между общими числами узлов первоначального графа и индуктивного подграфа. Если через n_t обозначить общее число узлов исходного графа, а через n_{L_t} и n_{C_t} — общее число узлов индуктивного и емкостного подграфов, то соответственно:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Число независимых индуктивных и емкостных узлов равно } n_t - n_{C_t} \\ \text{Число независимых емкостных узлов равно } n_t - n_{L_t} \end{array} \right\} \quad (\text{V.47})$$

Далее можно увидеть, что при удалении из звезды ветвей, сходящихся к группе узлов, последняя вместе со своими ветвями (меньший подграф, упомянутый выше) отделяется от остальной цепи. Если указанная звезда содержит индуктивные ветви, то емкостный подграф по сравнению с первоначальным графом будет иметь дополнительную отдельную часть. Обозначим через s число отдельных частей первоначального графа, а через s_L и s_C — число отдельных элементов индуктивного и емкостного подграфов, тогда:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Число независимых индуктивных звезд равно } s_C - s \\ \text{Число независимых емкостных звезд равно } s_L - s \end{array} \right\}. \quad (\text{V.48})$$

Очевидно, что в соотношения (V.48) будут входить также и индуктивные или емкостные звезды, сходящиеся в одиночные узлы, если при удалении ветвей, образующих подграфы, узлы с ветвями не удаляются и если отдельный, изолированный узел рассматривается как образующий подграф. Поскольку этого обычно не делают, будем рассматривать индуктивные и емкостные узлы, определяемые соотношениями (V.47), отдельно от звезд, для которых справедливы зависимости (V.48).

Обозначая общее число независимых индуктивных и емкостных узлов и звезд через n_{L_s} и n_{C_s} , соответственно, можно с учетом (V.47) и (V.48) записать:

$$n_{L_s} = (n_t - n_{C_t}) + (s_C - s); \quad (\text{V.49})$$

$$n_{C_s} = (n_t - n_{L_t}) + (s_L - s). \quad (\text{V.50})$$

Сумма

$$n_s = n_{L_s} + n_{C_s} \quad (\text{V.51})$$

равна общему числу независимых условий линейной связи, существующей между переменными, полученными по методу узловых напряжений (полное число динамически избыточных переменных).

Обозначим через b , n и l соответственно число ветвей, число геометрически независимых пар узлов и число геометрически независимых контуров первоначального графа и, кроме того, используем соответствующие индексы для обозначения указанных величин подграфов:

$$n_t = n + s; \quad n_{C_t} = n_C + s_C; \quad n_{L_t} = n_L + s_L \quad (\text{V.52})$$

и

$$b = n + l; \quad b_C = n_C + l_C; \quad b_L = n_L + l_L. \quad (\text{V.53})$$

Величины l_L и l_C , как следует из приведенного анализа, представляют собой числа независимых индуктивных и емкостных контуров, а их сумма

$$l_s = l_L + l_C \quad (\text{V.54})$$

равна числу независимых условий линейной связи, существующей между контурными токами, или числу динамически избыточных переменных (контурных токов) подобно тому, как n_s в ур-нии (V.51) представляет собой число динамически избыточных переменных (напряжений пар узлов). После подстановки ур-ний (V.49) и (V.50) в ур-ние (V.51) получим

$$n_s = 2(n_t - s) - (n_{L_t} - s_L) - (n_{C_t} - s_C), \quad (V.55)$$

или с учетом соотношений (V.52)

$$n_s = 2n - n_L - n_C. \quad (V.56)$$

Используя в равенстве (V.56) соотношения (V.53), приходим к следующему выражению:

$$n - n_s = n_L + n_C - n = (b_L - l_L) + (b_C - l_C) + (l - b)$$

или

$$n - n_s = l - l_L - l_C = l - l_s. \quad (V.57)$$

В последнем уравнении, кроме выражения (V.54), была использована следующая очевидная зависимость:

$$b = b_L + b_C. \quad (V.58)$$

Результат, представленный ур-нием (V.57), вообще говоря, можно предсказать на основе физических соображений.

Таким образом, число динамически независимых переменных, полученных при использовании метода узловых напряжений, равно $n - n_s$, а при использовании метода контурных токов $l - l_s$. В обоих случаях число динамически независимых переменных одинаково. Это непосредственно вытекает из того факта, что число таких переменных, характеризующих данную физическую систему (равное числу нормальных мод или нормальных координат), зависит исключительно от ее физических свойств и не может изменяться в зависимости от алгебраического процесса, используемого при составлении уравнений равновесия.

Полученные результаты (с соответствующими изменениями в обозначениях), очевидно, применимы также и к RL и RC цепям. По причинам, уже упомянутым ранее, их, однако, нельзя распространить непосредственно на цепи, в которых используются все три типа элементов.

Рассмотрим теперь применение этих результатов. Предположим, что рассматривается LC цепь, приведенная на рис. V.7а, и сначала определим число ее конечных ненулевых собственных частот. Для этого обратимся к трем графам, изображенным на рис. V.7б. Здесь для полного графа: $b = 15$, $n_t = 10$, $s = 1$, $n = 9$, $l = 6$; для L графа: $b_L = 10$, $n_{L_t} = 10$, $s_L = 2$, $n_L = 8$, $l_L = 2$; для C графа: $b_C = 5$, $n_{C_t} = 10$, $s_C = 5$, $n_C = 5$, $l_C = 0$.

Определим непосредственно из этих графов величины n , n_L , n_C , l , l_L , l_C . По ф-лам (V.54) и (V.56) находим

$$l_s = 2 + 0 = 2 \quad \text{и} \quad n_s = 18 - 8 - 5 = 5. \quad (\text{V.59})$$

Из последних соотношений ясно, что при использовании метода контурных токов динамически избыточными являются две переменные, а при использовании метода узловых напряжений — пять. При любом из используемых методов равновесие в системе можно

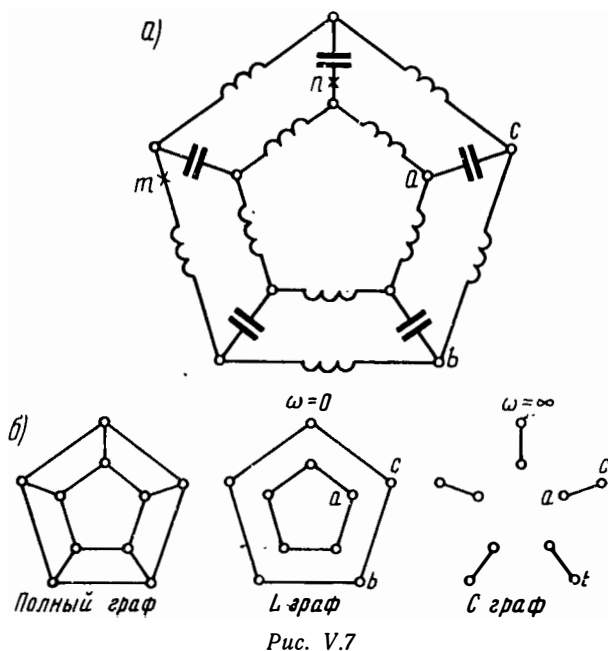


Рис. V.7

представить с помощью динамически независимых переменных, равных

$$l - l_s = n - n_s = 4. \quad (\text{V.60})$$

Цепь имеет четыре конечных ненулевых собственных частоты и обладает нормальной формой, в которой имеются четыре нормальные координаты.

Покажем теперь, как можно при наличии таких данных построить частотную диаграмму для входной реактивной функции, соответствующей произвольно выбранному входу, и, таким образом, найти соответствующие канонические или другие эквивалентные цепи. При этом различают два типа входов: прямые и разрезные [1] — и полагают, что все сопротивления, присоединяемые к парам узлов, должны иметь одинаковые полюсы, а все сопротивления, присоединяемые в точки разрезов ветвей — одинаковые

нули, причем такие же, как и полюсы сопротивлений со стороны прямых входов [1]. Все полученные этим путем критические частоты представляют собой просто конечные ненулевые собственные частоты данной цепи, не имеющей никаких входов.

На основании указанных утверждений не следует делать вывода о том, что все сопротивления со стороны прямых входов к парам узлов или же все сопротивления со стороны разрезных входов имеют одинаковые частотные диаграммы. Соответствующая частотная диаграмма зависит от данного рассматриваемого входа, так как поведение функции сопротивления в точках $s = 0$ и $s = \infty$ определяется им.

Выберем в качестве входа пару узлов $a - c$ цепи, изображенной на рис. V.7а. При $s = 0$ входное сопротивление бесконечно

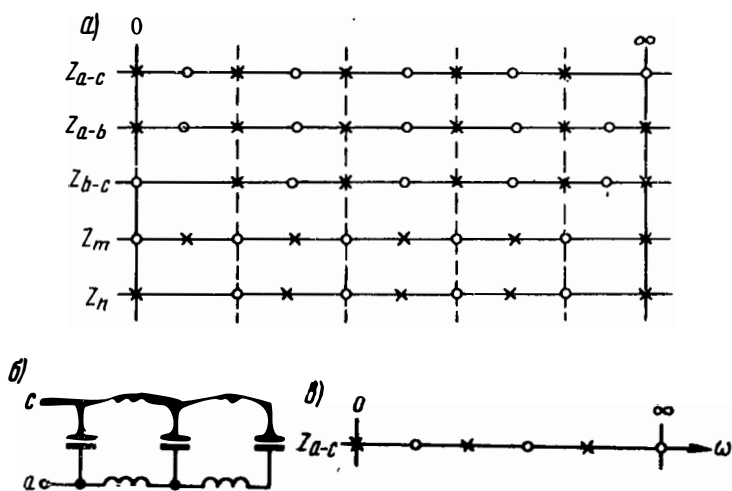


Рис. V.8

велико, а при $s = \infty$ оно равно нулю. Таким образом, это сопротивление, Z_{a-c} , помимо полюса в точке $s = 0$ и нуля в точке $s = \infty$, имеет четыре конечных ненулевых полюса. Частотная диаграмма для этого случая показана первой линией на рис. V.8а. Если в качестве входа выбрать пару узлов $a - b$, то сопротивление будет иметь такие же, как и в предыдущем случае, конечные ненулевые полюсы, но теперь точки $s = 0$ и $s = \infty$ являются полюсами.

Из рассмотрения подграфов, приведенных на рис. V.7б, нетрудно заметить, что поскольку при $s = 0$ разомкнутые цепи вырождаются в емкости, а при $s = \infty$ в — индуктивности, то можно считать индуктивный подграф — графом на нулевой частоте, а емкостный подграф — графом на бесконечной частоте. Аналогично, поскольку при $s = 0$ и $s = \infty$ индуктивности и емкости вырождаются в короткозамкнутые цепи соответственно, то ветви этих подграфов можно рассматривать как цепи, находящиеся в режиме короткого замыка-

ния, если считать, что они характеризуют первоначальную цепь для предельных частот $s = 0$ и $s = \infty$.

Таким образом, для заданного входа, подобного паре узлов $a - b$, всегда можно определить, является ли критическая частота в точке $s = 0$ (или в точке $s = \infty$) нулем или полюсом соответствующей функции сопротивления. Частотная диаграмма для сопротивления Z_{a-b} показана второй линией на рис. V.8а, а частотная диаграмма для сопротивления Z_{b-c} , имеющего нуль в точке $s = 0$ и полюс в точке $s = \infty$, — третьей линией на этом рисунке. И, наконец, последние две линии на нем показывают частотные диаграммы для входных сопротивлений, получаемых при разрезе ветвей цепи, приведенной на рис. V.7а, в точках m и n соответственно. Эти сопротивления имеют четыре конечных ненулевых нуля там, где ранее они имели полюсы. Их поведение в точках $s = 0$ и $s = \infty$ видно непосредственно из диаграмм.

На всех рассмотренных диаграммах нули между фиксированными полюсами или полюсы между фиксированными нулями расположены произвольно. Общий характер любой частотной диаграммы определяется числом конечных ненулевых полюсов и видом критических частот в точках $s = 0$ и $s = \infty$, либо видом последних и числом конечных нулей, величины которых отличны от нуля.

В тех случаях, когда это требуется, можно определить число конечных не равных нулю полюсов и нулей. Если в качестве входа выбрана пара узлов, то для создания модифицированного графа она остается; если же вход создается при помощи разреза ветви, тогда, чтобы получить модифицированный граф, необходимо устранить ветвь. Число конечных отличных от нуля нулей сопротивления, соответствующего паре узлов, представляет собой число собственных частот модифицированного графа. Эти нули являются в то же время конечными, не равными нулю полюсами сопротивления, соответствующего входу, полученному при разрезе ветви. Если число определенных таким образом конечных равных нулю полюсов и нулей для данного входа одинаково (самое большее они могут отличаться на единицу), то для определения полной частотной диаграммы необходимо найти еще вид критических частот либо в точке $s = 0$, либо в точке $s = \infty$.

На практике иногда приходится иметь дело с симметричными или однородными схемами. Рассмотрим, например, цепь, аналогичную изображенной на рис. V.7а, в которой все индуктивности и емкости одинаковы. Такой однородной цепью с сосредоточенными параметрами можно аппроксимировать анодную цепь магнетрона со связками. Уместно обратить внимание на тот факт, что при вырождении этой системы число ее собственных частот значительно уменьшается по сравнению с тем, которое она имела бы в реальной ситуации.

Найдем сопротивление Z_{a-c} для цепи, приведенной на рис. V.7а, когда значения элементов одинаковы. Если к паре узлов $a - c$ присоединить источник тока, то, учитывая симметрию схемы, мож-

но прийти к выводу, что токи в диаметрально противоположных ветвях равны нулю. Поскольку искомым является результирующее напряжение на паре зажимов $a - c$, то можно устранить указанные ветви и, учитывая, что остальные участки цепи слева и справа от входа — одинаковые, ограничиться рассмотрением только одной половины цепи, как показано на рис. V.8б. Очевидно, что ее частотная диаграмма будет представлена рис. V.8в, где имеются только два конечных отличных от нуля полюса вместо четырех, как это бывает в цепях с произвольными значениями элементов.

Рассмотренные свойства однородных цепей можно использовать для быстрого построения схем, потенциально эквивалентных заданной цепи. На практике часто необходимо знать, будет ли в цепи нарушаться условие потенциальной эквивалентности, если в одном ее месте добавить емкость, а в другом — индуктивность, либо если на каком-то участке устранить один из этих элементов. Другими словами, предполагается, например, что в конфигурации цепи произошли те или иные изменения (обусловленные иногда неизбежными паразитными элементами) и необходимо определить, сохранится ли при учете их прежняя характеристика цепи. На этот вопрос, разумеется, можно дать положительный ответ в том случае, когда предполагаемые изменения в конфигурации цепи приводят к потенциально эквивалентной структуре, так как при этом соответствующее изменение значений элементов позволяет восстановить первоначальную характеристику цепи.

Метод, с помощью которого можно быстро найти модификации цепи, сохраняющие инвариантной потенциальную эквивалентность входного сопротивления, основан на отмеченном выше факте, заключающемся в том, что частотная диаграмма этого сопротивления остается неизменной до тех пор, пока остается неизменным число собственных частот цепи и ее поведение в точках $s = 0$ и $s = \infty$. Если в цепь ввести избыточный элемент (или исключить его из цепи), то число динамически независимых переменных и, следовательно, число собственных частот не изменится.

Элемент является избыточным, когда при его введении в схему образуется индуктивный или емкостный контур или звезда, а при его исключении из схемы — эти контуры или звезда нарушаются. И в том, и в другом случаях не должно оказываться никакого влияния на поведение соответствующей функции сопротивления в точке $s = 0$ или $s = \infty$. Часто удается непосредственно определить, что данные условия удовлетворяются, а значит, можно быстро найти большое количество модификаций цепи.

Рисунок V.9 иллюстрирует принцип, положенный в основу описанного метода. Цепь, приведенная на рис. V.9а, представляет собой известную LC цепь Фостера. На рис. V.9б показана цепь с введенной емкостью, которая, очевидно, является избыточной, так как при этом образуется емкостный контур. Частотные диаграммы входного сопротивления обеих цепей одинаковы и, следовательно, вторая цепь потенциально эквивалентна исходной.

Цепь, изображенная на рис. V.9в, является модификацией первой цепи (рис. V.9а), поскольку при введении избыточной индуктивности образуется индуктивный контур. Ясно, что эта третья цепь (рис. V.9в) будет иметь входную функцию сопротивления, потенциально эквивалентную соответствующей функции исходной цепи.

В цепь, приведенную на рис. V.9г, введены три избыточные индуктивности и три избыточные емкости, и, таким образом, исходная и эта четвертая цепи все еще являются потенциально эквивалентными относительно их входов.

Теперь будем исключать по одному избыточные элементы так, чтобы при каждом исключении нарушать индуктивный или емкостный контур. Однако нельзя исключать те же элементы, какие были введены при переходе от первой к четвертой цепи. Элементы, которые могут быть исключены (по одному или все вместе), показаны на рис. V.9д пунктиром. Интересно заметить, что когда все эти элементы исключены из схемы, то получается другая форма Фостера для исходной схемы, изображенной на рис. V.9а.

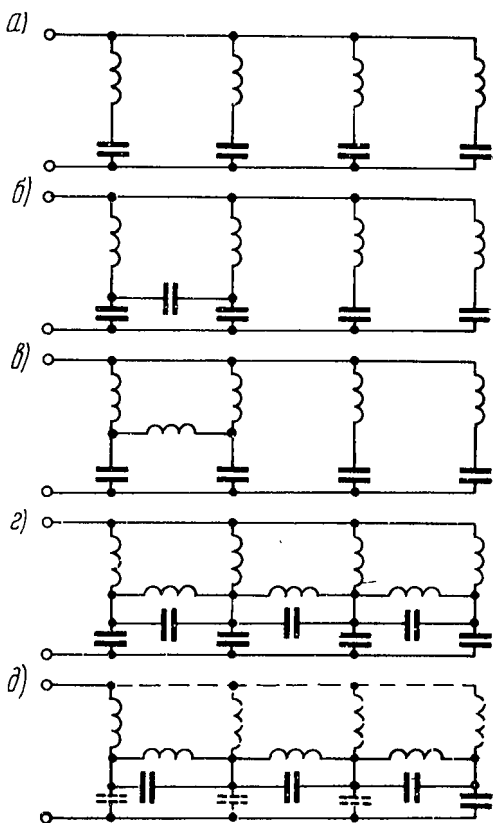


Рис. V.9

При исключении избыточных элементов необходимо соблюдать осторожность, чтобы в цепи не создавались дополнительные отдельные части. Например, если на рис. V.9д нижнюю правую емкость поместить в один из пунктирных участков (где в соответствии с приведенными выше теоретическими положениями она должна была бы находиться), то часть цепи становится развязанной от входа, однако при этом нельзя предполагать, что индуктивности связаны взаимно индуктивной связью (в общем случае, конечно, такая ситуация возможна). Результат не противоречит теоретическому положению о том, что система потенциально имеет те же собственные частоты, что и прежде. Она действительно имеет такие частоты, хотя не все они могут возбуждаться с того же входа.

Термин «потенциальная эквивалентность», следовательно, учитывает и эту вырожденную ситуацию, которую, тем не менее, безусловно нетрудно избежать.

У.3. Некоторые замечания, относящиеся к обратным цепям

Используя методы, описанные в предыдущих разделах, можно найти частотную диаграмму любой двухэлементной цепи и изобразить все потенциально эквивалентные канонические ее формы. Кроме того, при взаимной замене нулей и полюсов цепи можно также найти частотную диаграмму, а следовательно, и все канонические формы для цепей, потенциально обратных первоначальной. Однако если нужно построить реальную цепь, обратную исходной, с соответствующими значениями элементов и конфигурацией, то упомянутые методы, конечно, непригодны. В данном случае весьма полезно применение принципа дуальности, который позволяет избежать необходимости численного представления подлинной функции сопротивления, записывая ее в перевернутом виде и синтезируя обратную цепь даже в тех случаях, когда заданная цепь является непланарной. Ниже рассматриваются некоторые основные вопросы, относящиеся к построению обратных схем при использовании принципа дуальности и его распространение на непланарные цепи.

На рис. V.10 показано построение цепи, дуальной данной планарной цепи, которое основано на известном методе [1]¹ построения дуального графа, когда элементы соответствующих ветвей первоначальной цепи заменяются дуальными элементами. При этом, если цепь, изображенную на рис. V.10а, рассматривать как заданную, то цепь, приведенная на рис. V.10б, будет дуальной ей, хотя дуальность является взаимным свойством и, следовательно, можно с равным успехом предполагать, что справедливо обратное положение.

На рис. V.10б пунктиром показан граф исходной цепи, изображенной на рис. V.10а. Это сделано для того, чтобы обратить внимание на процесс определения узлов, дуальных соответствующим контурам данного графа; периферийный узел дуальной схемы² является соответствующим «контуром», граница которого служит границей данной схемы. Прохождение по часовой стрелке вокруг контуров цепи, приведенной на рис. V.10а, соответствует вращению вокруг узлов цепи на рис. V.29б. Нумерация ветвей на рисунках не дана; расположение ветвей очевидно из их относительных положений. «Прямой» вход одной цепи соответствует «разрезному» входу другой в том отношении, что он является прямым до тех пор, пока

¹ См. также [57, 58] (прим. ред.).

² Окружность на рис. V.10б (прим. ред.).

пары узлов соединены одиночными ветвями. Когда рассматриваемая пара узлов не связана непосредственно ветвью, метод нахождения соответствующего входа дуальной цепи лишь несколько усложняется (если известны графы обеих цепей, как это имеет место для цепи, изображенной на рис. V.10б).

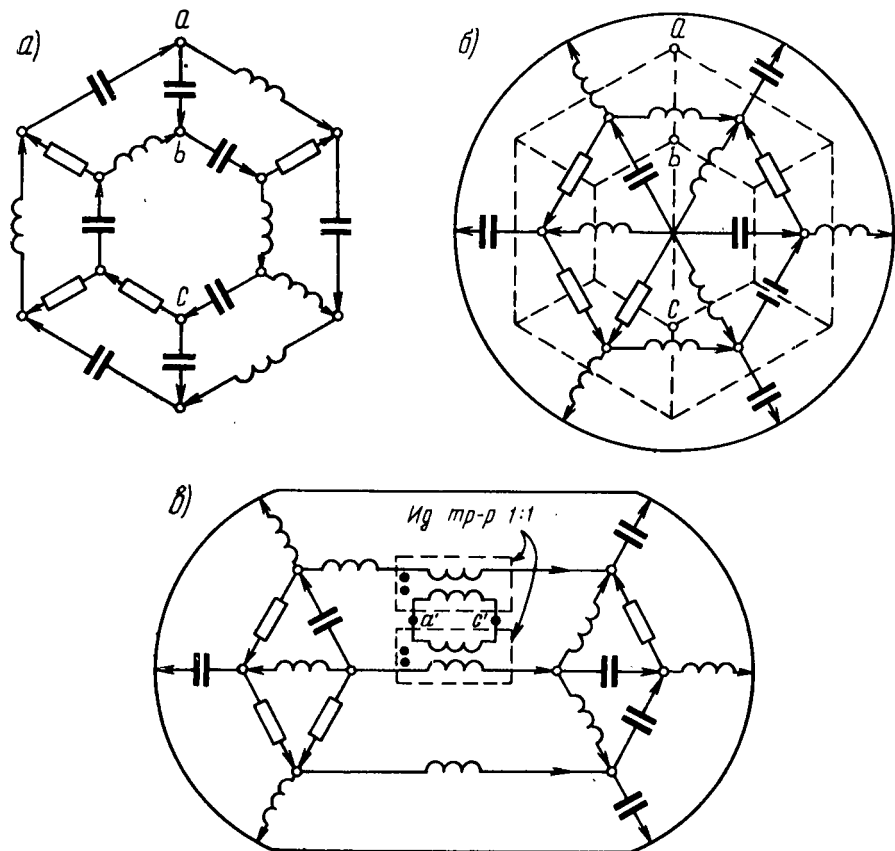


Рис. V.10

Рассмотрим пару узлов $b - c$ цепи на рис. V.10а. Из ее графа видно, что дополнительная ветвь, введенная между этими узлами, делит центральный контур цепи на два контура, ограничиваемые соответственно дополнительной ветвью и тремя ветвями, симметрично расположенными слева и справа от ветвей $b - c$. Аналогично в дуальном графе добавление ветви делит центральный узел на два узла, с каждым из которых соединяется указанная дополнительная ветвь и три ветви, симметрично расположенные слева и справа от узла. На рис. V.10б разделение центрального узла показано пунктирной линией, проведенной через узлы b и c исходного графа,

приведенного на рис. V.10а. При этом шесть ветвей, сходящихся в центральном узле дуального графа, оказываются разделенными на две группы, каждая по три ветви. Таким образом, в дуальной цепи (рис. V.10б) получается дуальный вход, соответствующий паре узлов $b - c$ исходной цепи (рис. V.10а).

Точно так же легко найти любой другой дуальный вход, соответствующий выбранной паре узлов, исключая лишь случай, когда ветвь, добавляемая между соответствующими узлами выбранной пары, превращает граф в непланарный. Этот случай соответствует паре узлов $a - c$ цепи на рис. V.10а. Тем не менее все же можно, используя принцип дуальности, определить вид предполагаемого дуального входа.

Допустим, что в цепи, изображенной на рис. V.9а, сопротивление между узлами $a - c$ трактуется как напряжение, возникающее между этими узлами, когда к ним присоединяется источник тока силой в 1 а . Представим этот источник в виде двух отдельных источников, каждый по 1 а , причем один из них отбирает ток из узла a и направляет его в узел b ; другой — отбирает ток из узла b и направляет его в узел c . Очевидно, что такое представление эквивалентно действию между узлами a и c первоначального источника. Сопротивление Z_{a-c} численно равно сумме напряжений между узлами $a - b$ и $b - c$.

В дуальной цепи, показанной на рис. V.9б, соответствующий источник будет состоять из двух единичных источников напряжения, приложенных соответственно ко входам, которые являются дуальными по отношению к парам узлов $a - b$ и $b - c$ схемы, приведенной на рис. V.9а. Сумма токов, возбуждаемых этими двумя источниками напряжений, численно равна сопротивлению Z_{a-c} исходной цепи, так как последнее численно равно сумме напряжений, создаваемых двумя источниками тока в этой цепи. Следовательно, если к каждому из двух дуальных входов цепи на рис. V.9б подключить идеальный трансформатор с коэффициентом трансформации $1:1$, а их вторичные обмотки включить параллельно, то получится реализация требуемого сопротивления, обратного сопротивлению Z_{a-c} исходной схемы.

Таким образом, с помощью идеальных трансформаторов можно, используя только принцип дуальности, построить обратные цепи даже в тех случаях, когда исходный граф является непланарным. Хотя идеальные трансформаторы практически неприменимы, однако данный метод построения обратных схем представляет определенный теоретический интерес и может оказаться практически полезным в тех случаях, когда идеальный трансформатор вместе с индуктивностями можно заменить парой индуктивно связанных катушек.

Построение входа цепи, приведенной на рис. V.10б, дуального паре узлов $a - c$ исходной цепи на рис. V.10а с применением идеальных трансформаторов, показано на рис. V.10в. Здесь точки $a' - c'$ представляют соответствующую пару, со стороны которой

функция сопротивления является обратной Z_{a-c} . За исключением идеальных трансформаторов, конфигурация этой цепи при подключении к узлам $a' - c'$ источника напряжения E_s дуальна цепи, изображенной на рис. V.10а, где к паре узлов $a - c$ подключен источник тока I_s , численно равного E_s . При удалении источника тока $I_s = 0$, что эквивалентно замыканию накоротко точек $a' - c'$. Если между парой узлов $a - c$ цепи на рис. V.10а включить любой элемент, а между парой узлов $a' - c'$ цепи на рис. V.10в включить дуальный элемент, то обе цепи станут полностью дуальными (без учета влияния идеальных трансформаторов на другие характеристики сравниваемых цепей).

Из этого примера видно, что при условии соблюдения отмеченных ограничений можно построить цепь, дуальную любой данной непланарной цепи, если рассматривать соответствующие ветви так, как это было сделано выше с ветвью $a - c$ цепи, показанной на рис. V.10а. Ясно, что рассмотренный метод не является единственным, поскольку при его использовании можно варьировать выбором ветвей. Итак, напомним, что в приведенном выше примере мы поступили следующим образом: источник тока, действующий между парой узлов $a - c$ цепи на рис. V.10а, заменялся рядом одинаковых источников тока, включаемых в произвольных вырожденных ветвях, соединяющих узел a с узлом c . Относительные направления токов выбирались таким образом, чтобы, за исключением рассматриваемой пары узлов, ток не поступал и не выходил ни из одного какого-либо другого узла. В дуальной цепи на рис. V.10б последовательно с соответствующими дуальными ветвями включались одинаковые источники напряжения. Идеальные трансформаторы с коэффициентом трансформации $1:1$ помещались в эти дуальные ветви, причем вторичные обмотки трансформаторов соединялись параллельно (полярность обмоток должна быть выбрана надлежащим образом относительно направлений токов ветвей и источников заданной цепи). Перечисленные меры обеспечивали требуемый вариант дуального входа.

Такие «квазидуальные» цепи, которые можно построить описанным способом, в отличие от дуальных цепей, построение которых осуществимо только для планарных цепей, не являются, следовательно, единственными. По этой причине они и рассматривались как обратные, а не как дуальные цепи.



VI.

ГЛАВА

Свойства четырехполюсников

VI.1. Параметры четырехполюсников¹

При рассмотрении методов синтеза входных и передаточных сопротивлений RLC цепей широко используются различные свойства четырехполюсников и взаимные зависимости, существующие между системами параметров. Поэтому, прежде чем перейти к основной теме данной главы, необходимо рассмотреть эти зависимости.

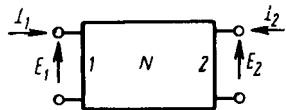


Рис. VI.1

Из трех различных пар зависимостей, связывающих две из четырех величин E_1 , I_1 , E_2 , I_2 с остальными двумя (рис. VI.1), в

первую очередь представляют интерес известные системы y - и z -параметров:

$$\left. \begin{aligned} y_{11}E_1 + y_{12}E_2 &= I_1 \\ y_{21}E_1 + y_{22}E_2 &= I_2 \end{aligned} \right\} \quad (VI.1)$$

и

$$\left. \begin{aligned} z_{11}I_1 + z_{12}I_2 &= E_1 \\ z_{21}I_1 + z_{22}I_2 &= E_2 \end{aligned} \right\}, \quad (VI.2)$$

а также системы так называемых общих параметров цепи (системы параметров $ABCD$):

$$\left. \begin{aligned} AE_2 - BI_2 &= E_1 \\ CE_2 - DI_2 &= I_1 \end{aligned} \right\} \quad (VI.3)$$

и

$$\left. \begin{aligned} DE_1 - BI_1 &= E_2 \\ CE_1 - AI_1 &= I_2 \end{aligned} \right\}. \quad (VI.4)$$

¹ Предполагается, что читатель достаточно знаком с этим вопросом из теории цепей. В настоящем параграфе дано только краткое изложение основных положений.

Определители систем ур-ний (VI.1) и (VI.2) имеют вид:

$$|y| = y_{11}y_{22} - y_{12}^2; \quad (\text{VI.5})$$

$$|z| = z_{11}z_{22} - z_{12}^2. \quad (\text{VI.6})$$

Взаимосвязь между системами y - и z -параметров определяется следующими выражениями:

$$y_{11} = \frac{z_{22}}{|z|}; \quad y_{22} = \frac{z_{11}}{|z|}; \quad y_{12} = \frac{-z_{12}}{|z|} \quad (\text{VI.7})$$

и

$$z_{11} = \frac{y_{22}}{|y|}; \quad z_{22} = \frac{y_{11}}{|y|}; \quad z_{12} = \frac{-y_{12}}{|y|}. \quad (\text{VI.8})$$

Из ур-ний (VI.1) — (VI.4) непосредственно следует:

$$A = \left(\frac{E_1}{E_2} \right)_{I_2=0} = -\frac{y_{22}}{y_{12}} = \frac{z_{11}}{z_{12}} = -\left(\frac{I_2}{I_1} \right)_{E_1=0}; \quad (\text{VI.9})$$

$$B = -\left(\frac{E_1}{I_2} \right)_{E_2=0} = \frac{-1}{y_{12}} = \frac{|z|}{z_{12}} = -\left(\frac{E_2}{I_1} \right)_{E_1=0}; \quad (\text{VI.10})$$

$$C = \left(\frac{I_1}{E_2} \right)_{I_2=0} = \frac{1}{z_{12}} = -\frac{|y|}{y_{12}} = \left(\frac{I_2}{E_1} \right)_{I_1=0}; \quad (\text{VI.11})$$

$$D = -\left(\frac{I_1}{I_2} \right)_{E_2=0} = \frac{z_{22}}{z_{12}} = -\frac{y_{11}}{y_{12}} = \left(\frac{E_2}{E_1} \right)_{I_1=0}. \quad (\text{VI.12})$$

Отсюда получаем связь между системами y - и z -параметров и системой параметров $ABCD$:

$$z_{12} = \frac{1}{C}, \quad z_{11} = \frac{A}{C}, \quad z_{22} = \frac{D}{C}; \quad (\text{VI.13})$$

$$y_{12} = \frac{-1}{B}, \quad y_{11} = \frac{D}{B}, \quad y_{22} = \frac{A}{B}. \quad (\text{VI.14})$$

Кроме того, выполняется соотношение

$$AD - BC = 1. \quad (\text{VI.15})$$

Нетрудно установить, что электрическая симметрия ($z_{11} = z_{22}$ или $y_{11} = y_{22}$) в системе $ABCD$ означает выполнение равенства

$$A = D. \quad (\text{VI.16})$$

Симметричный четырехполюсник характеризуется двумя параметрами, а несимметричный — тремя.

Третья пара взаимно обратных зависимостей, связывающих напряжения и токи на зажимах четырехполюсника, используется

реже, но иногда необходима. Эти зависимости характеризуют системы смешанных параметров:

$$\left. \begin{aligned} g_{11}E_1 + g_{12}I_2 &= I_1 \\ g_{21}E_1 + g_{22}I_2 &= E_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.17})$$

и

$$\left. \begin{aligned} h_{11}I_1 + h_{12}E_2 &= E_1 \\ h_{21}I_1 + h_{22}E_2 &= I_2 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VI.18})$$

Взаимосвязь между системами g -, y - и z -параметров определяется следующими выражениями:

$$g_{11} = \left(\frac{I_1}{E_1} \right)_{I_2=0} = \frac{|y|}{y_{22}} = \frac{1}{z_{11}}; \quad (\text{VI.19})$$

$$g_{22} = \left(\frac{E_2}{I_2} \right)_{E_1=0} = \frac{1}{y_{22}} = \frac{|z|}{z_{11}}; \quad (\text{VI.20})$$

$$g_{12} = \left(\frac{I_1}{I_2} \right)_{E_1=0} = \frac{y_{12}}{y_{22}} = \frac{-z_{12}}{z_{11}}; \quad (\text{VI.21})$$

$$g_{21} = \left(\frac{E_2}{E_1} \right)_{I_2=0} = \frac{-y_{12}}{y_{22}} = \frac{z_{12}}{z_{11}}. \quad (\text{VI.22})$$

Соответствующие зависимости для связи систем h -, y - и z -параметров имеют вид:

$$h_{11} = \left(\frac{E_1}{I_1} \right)_{E_2=0} = \frac{1}{y_{11}} = \frac{|z|}{z_{22}}; \quad (\text{VI.23})$$

$$h_{22} = \left(\frac{I_2}{E_2} \right)_{I_1=0} = \frac{|y|}{y_{11}} = \frac{1}{z_{22}}; \quad (\text{VI.24})$$

$$h_{12} = \left(\frac{E_1}{E_2} \right)_{I_1=0} = \frac{-y_{12}}{y_{11}} = \frac{-z_{12}}{z_{22}}; \quad (\text{VI.25})$$

$$h_{21} = \left(\frac{I_2}{I_1} \right)_{E_2=0} = \frac{y_{12}}{y_{11}} = \frac{-z_{12}}{z_{22}}. \quad (\text{VI.26})$$

Интересно отметить, что смешанные системы ур-ний (V.17) и (VI.18) представляют собой такие системы, определители которых

$$|g| = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = \frac{z_{22}}{z_{11}} = \frac{y_{11}}{y_{22}} \quad (\text{VI.27})$$

и

$$|h| = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = |g|^{-1} \quad (\text{VI.28})$$

являются отношениями сопротивлений и, следовательно, безразмерными величинами.

Другой ряд параметров, наиболее удобный при использовании обычных методов расчета фильтров, связан с так называемыми

характеристическими сопротивлениями и характеристической функцией распространения¹.

Когда четырехполюсник нагружен со стороны обоих входов на соответствующие характеристические сопротивления, на этих входах выполняется условие согласования сопротивлений. Используя определение характеристического сопротивления, нетрудно найти это условие в значениях приведенного выше ряда параметров.

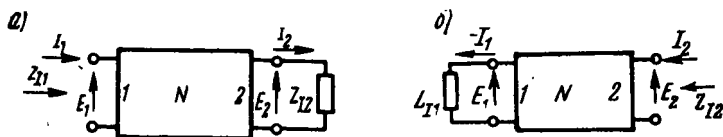


Рис. VI.2

Рассмотрим четырехполюсник, изображенный на рис. VI.2а. Для этого четырехполюсника $Z_{I_1} = \frac{E_1}{I_1}$; $Z_{I_2} = \frac{E_2}{-I_2}$, поэтому, разделив первое уравнение системы (VI.3) на второе, получим

$$Z_{I_1} = \frac{AZ_{I_2} + B}{CZ_{I_2} + D}. \quad (\text{VI.29})$$

С другой стороны, для четырехполюсника, изображенного на рис. VI.2б, имеем:

$$Z_{I_2} = \frac{E_2}{I_2}, \quad Z_{I_1} = \frac{E_1}{-I_1}.$$

Следовательно, разделив первое уравнение системы (VI.4) на второе, получим

$$Z_{I_2} = \frac{DZ_{I_1} + B}{CZ_{I_1} + A}. \quad (\text{VI.30})$$

Совместное решение уравнений (VI.29) и (VI.30) дает

$$Z_{I_1} = \sqrt{\frac{AB}{CD}} = Z_{I_2} \frac{A}{D}. \quad (\text{VI.31})$$

Характеристические сопротивления можно выразить через параметры y_{ik} и z_{ik} , используя ф-лы (VI.9) — (VI.12):

$$Z_{I_1} = \sqrt{\frac{z_{11}}{y_{11}}}, \quad Z_{I_2} = \sqrt{\frac{z_{22}}{y_{22}}}. \quad (\text{VI.32})$$

Как можно видеть, каждое характеристическое сопротивление равно среднему геометрическому из сопротивлений холостого хода

¹ В отечественной литературе эту величину принято называть «постоянной передачи» четырехполюсника или, реже, «мерой передачи» (прим. ред.).

и короткого замыкания, относящихся к одной и той же паре зажимов цепи (режимы холостого хода или короткого замыкания создаются, разумеется, на противоположной паре зажимов).

Нагрузим четырехполюсник на характеристическое сопротивление, как показано на рис. VI.2а. Из ур-ния (VI.3) можно получить коэффициент передачи напряжений¹

$$\frac{E_1}{E_2} = \sqrt{\frac{A}{D}} (V\overline{AD} + V\overline{BC}) \quad (\text{VI.33})$$

и коэффициент передачи тока

$$\frac{I_1}{-I_2} = \sqrt{\frac{D}{A}} (V\overline{AD} + V\overline{BC}). \quad (\text{VI.34})$$

Если нагрузить четырехполюсник, изображенный на рис. VI.2б, на характеристическое сопротивление и найти из ур-ния (VI.4) соответствующие зависимости, то они будут аналогичны ф-лам (VI.33) и (VI.34) при замене в последних индекса 1 на индекс 2 и буквы A на букву D (и наоборот).

Постоянная передачи θ определяется выражением

$$e^\theta = \sqrt{\frac{E_1 I_1}{-E_2 I_2}} = V\overline{AD} + V\overline{BC}. \quad (\text{VI.35})$$

Используя ур-ние (VI.15), можно получить

$$e^{-\theta} = V\overline{AD} - V\overline{BC}. \quad (\text{VI.36})$$

Следовательно,

$$\text{ch } \theta = V\overline{AD}; \quad \text{sh } \theta = V\overline{BC}. \quad (\text{VI.37})$$

Если принять

$$\sqrt{\frac{A}{D}} = \sqrt{\frac{Z_{I_1}}{Z_{I_2}}} = n, \quad (\text{VI.38})$$

то можно найти

$$\left. \begin{aligned} A &= n \text{ ch } \theta; & B &= n Z_{I_2} \text{ sh } \theta \\ C &= \frac{1}{n} \frac{\text{sh } \theta}{Z_{I_2}}; & D &= \frac{\text{ch } \theta}{n} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.39})$$

После подстановки полученных соотношений в ур-ние (VI.3) получим:

$$E_1 = n(E_2 \text{ ch } \theta - I_2 Z_{I_2} \text{ sh } \theta); \quad I_1 = \frac{1}{n} \left(E_2 \frac{\text{sh } \theta}{Z_{I_2}} - I_2 \text{ ch } \theta \right). \quad (\text{VI.40})$$

¹ Обычно коэффициентом передачи называют обратную величину, т. е. $\frac{E_2}{E_1}$ или $\frac{-I_2}{I_1}$ (прим. ред.).

Система ур-ний (VI.40) аналогична системе уравнений линии передачи с волновым сопротивлением Z_{I_2} , постоянной распространения θ и включенным на ее входе трансформатором с коэффициентом трансформации $n : 1$.

Таким образом, использование при описании цепи с сосредоточенными элементами характеристических параметров приводит к выражению ее характеристик передачи при помощи понятия «распространение волны»¹. Последнее особенно полезно при анализе однородных повторяющихся структур (например, каскадных соединений четырехполюсников) или каскадных соединений неоднородных цепей, имеющих равные (или почти равные) смежные характеристические сопротивления. В других, часто встречающихся на практике случаях, когда понятия «распространение волны» и «отражение» являются основой для квазифизической интерпретации поведения цепи, также уместно описание соответствующей цепи при помощи характеристических (или аналогичных им) параметров.

Интересно отметить, что система ур-ний (VI.40) остается справедливой при перестановке местами индексов 1 и 2 и при замене коэффициента n на обратный, т. е. на $\frac{1}{n}$. В этом случае

уравнения системы имеют ту же форму, что и уравнения для линии передачи с волновым сопротивлением Z_{I_1} , постоянной распространения θ и включенным на ее выходе трансформатором с коэффициентом трансформации $n : 1$.

Постоянную передачи можно выразить через проводимость и сопротивление цепи. Для этого сначала разделим ур-ние (VI.35) на ур-ние (VI.36):

$$e^{2\theta} = \frac{\sqrt{\frac{AD}{BC} + 1}}{\sqrt{\frac{AD}{BC} - 1}}. \quad (\text{VI.41})$$

Затем, используя ур-ния (VI.9) — (VI.13), получим

$$e^{2\theta} = \frac{\sqrt{y_{11}z_{11} + 1}}{\sqrt{y_{11}z_{11} - 1}} = \frac{\sqrt{y_{22}z_{22} + 1}}{\sqrt{y_{22}z_{22} - 1}}. \quad (\text{VI.42})$$

¹ Необходимо учитывать, что в цепях с сосредоточенными параметрами нег «распространения волны». Именно поэтому моменты начала процесса на входе и выходе системы совпадают. Структурное сходство уравнений четырехполюсника с сосредоточенными параметрами и длинной линии не удивительно — ведь линия тоже четырехполюсник. Однако физическое содержание процессов, а поэтому и коэффициентов здесь совершенно другое. В связи с этим вряд ли целесообразно использовать терминологию теории распределенных цепей при исследовании цепей с сосредоточенными параметрами (*прим. ред.*).

VI.2. Соединения четырехполюсников

При последовательном, параллельном, последовательно-параллельном или каскадном соединении нескольких четырехполюсников в задачах анализа целесообразно выразить параметры результирующей цепи через параметры, характеризующие каждый из четырехполюсников. С другой стороны, при синтезе может возникнуть необходимость использовать эти же зависимости как

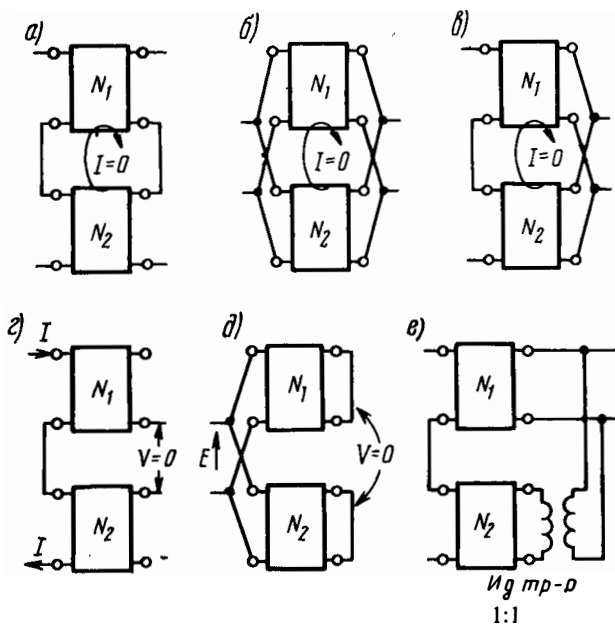


Рис. VI.3

средство для разбиения общей функции цепи с тем, чтобы получить возможность непосредственной реализации отдельных компонентов цепи, а также соединения их между собой. Знания зависимостей, связывающих параметры отдельных четырехполюсников и цепи в целом, необходимы для осуществления основных приемов, используемых в таких процессах, как соединение четырехполюсников или их разбиение.

Последовательное, параллельное и последовательно-параллельное соединения четырехполюсников показаны соответственно на рис. VI.3а, б, в. Параметры результирующего четырехполюсника нетрудно выразить через параметры четырехполюсников-компонентов при условии, что уравнивающий ток, протекающий между соответствующими зажимами составного четырехполюсника, равен

нулю¹ (см. рис. VI.3). Это ограничение обусловлено тем, что в нормальных условиях ток, протекающий от зажима одного из соединяемых четырехполюсников, должен быть равен току, протекающему к соответствующему зажиму другого четырехполюсника. Если же предположить, что уравнивающий ток не равен нулю, то условия нормального соединения нарушаются. При неравенстве входящего и выходящего токов соответствующей пары зажимов четырехполюсника уравнения, связывающие напряжения и токи четырехполюсников-компонентов, в этом случае не будут уравнениями, характеризующими отдельно каждый из них. Другими словами, уравнения, выражающие зависимость между напряжениями и токами на парах зажимов каждого четырехполюсника, становятся несправедливыми, если при соединении четырехполюсников между собой появляется уравнивающий ток.

Пусть даны два четырехполюсника N_1 и N_2 и требуется осуществить их соединение между собой, тогда, в первую очередь, необходимо определить, существует ли указанный уравнивающий ток при воздействии произвольных задающих токов или напряжений, приложенных к зажимам результирующего четырехполюсника. Определим это для четырехполюсников, изображенных на рис. VI.3г, д, е, воспользовавшись теоремой Тевенина и принципом наложения реакций, обусловленных отдельными источниками.

Пусть далее необходимо установить равенство нулю уравнивающего тока для соединения, изображенного на рис. VI.3а, при всех значениях независимых задающих токов I_1 и I_2 . Будем считать I_1 и I_2 источниками тока и рассматривать отдельно действие каждого из них. В случае $I_1 = I$ и $I_2 = 0$ разомкнем контур, по которому может протекать уравнивающий ток, и определим, будет ли напряжение на зажимах этого разомкнутого контура (напряжение V на рис. VI.3г) равно нулю. Затем проведем аналогичный эксперимент для случая, когда $I_2 = I$ и $I_1 = 0$. Если в обоих случаях $V = 0$, то при любых значениях токов I_1 и I_2 , действующих одновременно, никакой уравнивающий ток в составном четырехполюснике протекать не будет.

Аналогично можно определить, существует ли уравнивающий ток в схеме соединений, показанной на рис. VI.3д. При этом необходимо убедиться, что уравнивающий ток равен нулю при всех значениях напряжений E_1 и E_2 , независимо приложенных к соответствующим парам зажимов составного четырехполюсника. Считая E_1 и E_2 источниками напряжения, рассмотрим в отдельности действие каждого из них. В случае $E_1 = E$ и $E_2 = 0$ (обе пары выходных зажимов замкнуты накоротко) разомкнем контур, по которому может протекать уравнивающий ток, и определим, равно

¹ Другими словами, приведенные выше формулы соединений четырехполюсников справедливы лишь в тех случаях, когда соединение регулярно, т. е. когда ток, входящий в четырехполюсник через один из зажимов, равен току, выходящему из другого зажима той же пары зажимов (*прим. ред.*).

ли нулю напряжение на зажимах этого разомкнутого контура (напряжение V на рис. VI.3д). Далее проведем аналогичный эксперимент для случая, когда $E_2 = E$ и $E_1 = 0$ (обе пары входных зажимов замкнуты накоротко). Если в обоих случаях $V = 0$, то при любых значениях напряжений E_1 и E_2 , действующих одновременно, никакой уравнивающий ток в составном четырехполюснике протекать не будет.

Определение уравнивающего тока в последовательно-параллельном соединении четырехполюсников сводится к применению описанных выше методов нахождения этого тока отдельно для последовательного и параллельного соединений. При этом с одной стороны составного четырехполюсника входы обоих четырехполюсников соединяются последовательно (последовательное соединение), а с другой стороны — параллельно (параллельное соединение). Для того чтобы в составном четырехполюснике (рис. V.3в) отсутствовал уравнивающий ток, необходимо проделать два соответствующих измерения по упомянутой выше методике и убедиться, что в обоих случаях $V = 0$.

При любом варианте, когда в процессе проведения экспериментов обнаруживается, что уравнивающий ток существует, можно сделать его равным нулю, если к одной из пар зажимов подключить идеальный трансформатор с коэффициентом трансформации $1:1$, как это показано в схеме последовательно-параллельного соединения четырехполюсников на рис. VI.3е. В различных методах синтеза, когда требуется построить результирующую характеристику посредством соответствующего соединения четырехполюсников-компонентов, приходится довольно часто прибегать к описанному приему.

Для последовательного и параллельного соединений четырехполюсников нетрудно установить физический смысл полученных результатов, рассмотрев поведение соединяемых четырехполюсников при отсутствии уравнивающего тока.

При последовательном соединении входные и выходные токи обоих соединяемых четырехполюсников равны соответственно входному и выходному токам составного четырехполюсника, а соответствующие результирующие напряжения последнего равны суммам входных и выходных напряжений соединяемых четырехполюсников. Таким образом, для последовательного соединения четырехполюсников система z -параметров, определяемая уравнениями (VI.2), получается путем сложения соответствующих уравнений для четырехполюсников-компонентов. Группируя нужным образом слагаемые в уравнениях системы (VI.2), можно показать, что z -матрица для результирующей системы уравнений представляет собой просто сумму z -матриц соединяемых четырехполюсников.

Очевидно также, что при параллельном соединении четырехполюсников необходимо сложить y -матрицы, при последовательно-параллельном — h -матрицы, а при параллельно-последователь-

ном — g -матрицы соединяемых четырехполюсников [см. системы ур-ний (VI.1), (VI.17) и (VI.18) соответственно].

На рис. VI.4 показано каскадное соединение четырехполюсников. Здесь выход первого четырехполюсника является входом второго. Следовательно, когда поведение каждого четырехполюсника характеризуется системой ур-ний (VI.3) параметров $ABCD$, то чтобы определить поведение составного четырехполюсника, необходимо подставить одно из уравнений этой системы в другое. Если систему ур-ний (VI.3) для соединяемых четырехполюсников записать в матричном виде

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ I_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{VI.43})$$

где направления токов I_1 и $-I_2$ выбраны слева направо, то нетрудно заметить, что общая матрица $ABCD$ составного четырехполюсника представляет собой просто произведение матриц $ABCD$ четырехполюсников-компонентов, в котором порядок матриц-сомножителей совпадает с расположением в соединении четырехполюсников N_1 и N_2 , т. е. также слева направо. Из рассмотрения схемы рис. VI.4 видим, что матрицу $ABCD$ четырехполюсника N_1 необходимо умножить на матрицу $ABCD$ четырехполюсника N_2 .

Когда в последовательном или параллельном соединении используется более двух четырехполюсников, то все их z - или y -матрицы необходимо сложить. Это справедливо, если выполняются условия отсутствия уравнительного тока при соединении с первыми двумя четырехполюсниками третьего и т. д. Уравнительные токи, возникающие при таких соединениях, снова можно свести к нулю посредством подключения идеальных трансформаторов либо к входам, либо к выходам всех соединяемых четырехполюсников, кроме одного.

При каскадном соединении более двух четырехполюсников общая матрица $ABCD$ составного четырехполюсника определяется произведением матриц $ABCD$ всех соединяемых четырехполюсников, причем порядок матриц-сомножителей в этом произведении совпадает с расположением четырехполюсников в каскадном соединении.

VI.3. Симметричные скрещенные четырехполюсники

Поскольку для описания поведения симметричных четырехполюсников требуются только два параметра, во многих задачах синтеза проще иметь дело именно с такими четырехполюсниками. Тогда ограничения, накладываемые условиями симметрии на характеристики синтезируемой цепи, не являются жесткими. Другое

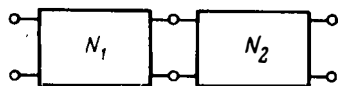


Рис. VI.4

не менее важное преимущество применения четырехполюсника этого вида обусловлено тем, что, как показано в § 1.6, симметричный скрещенный четырехполюсник является наиболее общим типом симметричного четырехполюсника. Следовательно, при синтезе можно использовать данную конфигурацию в качестве исходной, причем на характеристики синтезируемого четырехполюсника не накладываются никакие другие ограничения, кроме условий симметрии.

Симметричный скрещенный четырехполюсник, изображенный на рис. VI.5а, характеризуется двумя параметрами — сопротивлениями z_a и z_b . Вначале целесообразно отметить, что скрещивание одной пары зажимов эквивалентно взаимной замене этих сопротивлений.

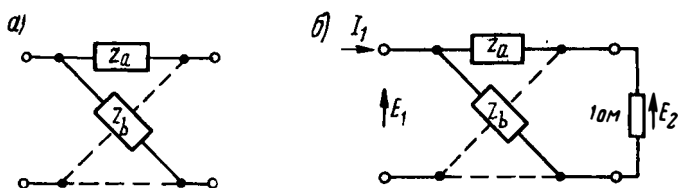


Рис. VI.5

Такая замена только вносит знак минус в выражение для передаточного сопротивления четырехполюсника и не оказывает влияния на его входное сопротивление. Это можно видеть из следующих зависимостей:

$$\left. \begin{aligned} z_{11} &= \frac{1}{2}(z_b + z_a) \\ z_{12} &= \frac{1}{2}(z_b - z_a) \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.44})$$

Определитель системы уравнений z -параметров имеет вид

$$|z| = z_{11}^2 - z_{12}^2 = \frac{1}{4}(z_b + z_a)^2 - \frac{1}{4}(z_b - z_a)^2 = z_a z_b. \quad (\text{VI.45})$$

Следовательно, проводимости четырехполюсника в режиме короткого замыкания согласно ф-лам (VI.7) определяются выражениями:

$$y_{11} = \frac{z_b + z_a}{2z_a z_b}; \quad y_{12} = \frac{z_b - z_a}{2z_a z_b}. \quad (\text{VI.46})$$

Используя проводимости скрещенного четырехполюсника

$$y_a = \frac{1}{z_a}; \quad y_b = \frac{1}{z_b}, \quad (\text{VI.47})$$

можно найти:

$$\left. \begin{aligned} y_{11} &= \frac{1}{2}(y_b + y_a) \\ y_{12} &= \frac{1}{2}(y_b - y_a) \end{aligned} \right\} \quad (VI.48)$$

Последние равенства идентичны зависимостям (VI.44), если в них заменить z на y . Таким образом, скрещенный четырехполюсник дуален относительно своих z - и y -параметров.

Характеристическое сопротивление симметричного скрещенного четырехполюсника можно найти, используя ур-ния (VI.32), (VI.44) и (VI.46). Оно определяется соотношением

$$Z_I = \sqrt{z_a z_b}. \quad (VI.49)$$

Последнее выражение показывает, что характеристическое сопротивление симметричного скрещенного четырехполюсника является средним геометрическим сопротивлений его ветвей. Подстановка ур-ний (VI.44) и (VI.48) в ур-ние (VI.42) дает следующее выражение для постоянной передачи θ :

$$e^{2\theta} = \frac{z_b + z_a + 2\sqrt{z_a z_b}}{z_b + z_a - 2\sqrt{z_a z_b}} = \left(\frac{\sqrt{z_b} + \sqrt{z_a}}{\sqrt{z_b} - \sqrt{z_a}} \right)^2. \quad (VI.50)$$

Отсюда получаем

$$e^{\theta} = \frac{1 + \sqrt{\frac{z_a}{z_b}}}{1 - \sqrt{\frac{z_a}{z_b}}} \quad (VI.51)$$

или

$$\theta = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\frac{z_a}{z_b}}}{1 - \sqrt{\frac{z_a}{z_b}}} \right). \quad (VI.52)$$

Если сопротивления скрещенного четырехполюсника обратны, т. е.

$$z_a z_b = 1, \quad (VI.53)$$

то характеристическое сопротивление, описываемое ур-нием (VI.49), будет чисто резистивным и равным 1 ом. Если такой четырехполюсник нагрузить на сопротивление 1 ом, то он, очевидно, будет иметь резистивное входное сопротивление, также равное 1 ом. Симметричный скрещенный четырехполюсник, удовлетворяющий условию (VI.53), называется поэтому *скрещенным четырехполюсником постоянного сопротивления*. Поскольку функция, определяе-

мая выражением (VI.51), представляет собой коэффициент передачи по напряжению $\frac{E_1}{E_2}$ при сопротивлении нагрузки Z_I , скрещенный четырехполюсник постоянного сопротивления, нагруженный на сопротивление 1 ом (рис. VI.56), имеет передаточную функцию

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{E_2}{I_1} = Z_{12} = \frac{1 - z_a}{1 + z_a}, \quad (\text{VI.54})$$

где Z_{12} — передаточное сопротивление четырехполюсника, нагруженного на сопротивление 1 ом , в противоположность передаточному сопротивлению z_{12} четырехполюсника, находящегося в режиме холостого хода. Решив ур-ние (VI.54), определим сопротивление z_a через сопротивление Z_{12} :

$$z_a = \frac{1 - Z_{12}}{1 + Z_{12}}. \quad (\text{VI.55})$$

Используя соображения, высказанные в § 1.5, можно сделать вывод, что если функция передаточного сопротивления $Z_{12}(s)$ аналитична в правой полуплоскости s (какой она и должна быть для того, чтобы представлять собой устойчивую передаточную функцию) и если $|Z_{12}(j\omega)|$ не превышает 1 при всех вещественных значениях ω , тогда z_a является п. в. ф. Именно поэтому скрещенный четырехполюсник постоянного сопротивления целесообразно применять при синтезе передаточных функций (см. ниже).

VI.4. Теорема бисекции цепи (теорема Бартлетта)

Хотя симметричный скрещенный четырехполюсник удобен для аналитического исследования, во многих практических случаях использование его нежелательно, поскольку он представляет собой уравновешенную цепь (относительно центральной горизонтальной оси). По указанной и другим причинам, например с целью экономии элементов, скрещенный четырехполюсник обычно стремятся преобразовать в какую-либо иную эквивалентную форму. В этой связи полезно иметь простые и эффективные средства для выражения эквивалентных зависимостей между скрещенной и другими симметричными структурами. Для установления таких зависимостей (при сокращении до минимума вычислений) особенно полезными оказываются некоторые, рассматриваемые ниже общие свойства физически и электрически симметричных цепей.

На рис. VI.6а представлен четырехполюсник, который физически и электрически симметричен относительно вертикальной центральной оси. Он может быть уравновешенным или неуравновешенным (речь идет о его симметрии относительно центральной горизонтальной оси). Согласно системе ур-ний (VI.2) поведение четырехполюсника характеризуется зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} z_{11}I_1 + z_{12}I_2 &= E_1 \\ z_{12}I_1 + z_{11}I_2 &= E_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.56})$$

На рис. VI.6б показан тот же четырехполюсник после разбиения его на две половины, причем число проводов, соединяющих обе половины, может быть произвольным.

Рассмотрим два вида возбуждений, приложенных к зажимам четырехполюсника, а именно: а) симметричное возбуждение, при котором $E_1 = E_2 = E$; б) асимметричное возбуждение, при котором $E_1 = E$; $E_2 = -E$. Благодаря симметрии четырехполюсника имеем

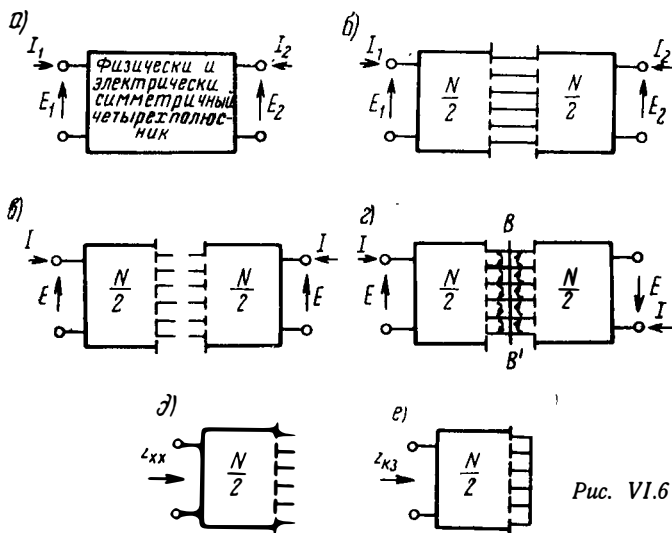


Рис. VI.6

$I_1 = I_2 = I$ в первом случае и $I_1 = I$, $I_2 = -I$ во втором. Более того, нетрудно установить, что при симметричном возбуждении токи, протекающие во всех соединительных проводах, связывающих две секции четырехполюсника, равны нулю. Следовательно, если эти провода разорвать, как показано на рис. VI.6в, то напряжения и токи на входе и выходе четырехполюсника не изменяются. С другой стороны, при асимметричном возбуждении, в силу симметрии четырехполюсника, потенциалы всех соединительных проводов оказываются одинаковыми. Поэтому эти провода можно соединить в общий узел, как показано на рис. VI.6г (провод $B-B'$), причем напряжения и токи на входе и выходе четырехполюсника также не изменятся. Справедливость последнего утверждения очевидна, так как токи (показанные на рис. VI.6г стрелками), протекающие в смежных контурах и в проводе $B-B'$, равны и направлены встречно, и, следовательно, в этом проводе тока нет.

В обоих рассмотренных случаях напряжения и токи на входных и выходных зажимах четырехполюсника остаются неизменными,

поэтому секции исходного четырехполюсника можно представить в виде цепей, изображенных на рис. VI.6д, е. Подставив в систему ур-ний (VI.56) соответственно $E_1 = E_2 = E$; $I_1 = I_2 = I$ и $E_1 = -E_2 = E$; $I_1 = -I_2 = I$, получим выражения:

$$z_{x.x} = z_{11} + z_{12}; \quad (VI.57)$$

$$z_{к.з} = z_{11} - z_{12} \quad (VI.58)$$

соответственно для входных сопротивлений холостого хода и короткого замыкания половины первоначального симметричного четырехполюсника.

Для симметричного скрещенного четырехполюсника, показанного на рис. VI.5а, из системы ур-ний (VI.44) можно найти:

$$z_b = z_{11} + z_{12}; \quad (VI.59)$$

$$z_a = z_{11} - z_{12}. \quad (VI.60)$$

Сравнив полученные уравнения с ур-ниями (VI.57) и (VI.58), находим следующие соотношения:

$$z_a = z_{к.з}; \quad z_b = z_{x.x}. \quad (VI.61)$$

Они отображают в самом общем виде эквивалентные зависимости, существующие между сопротивлениями симметричного скрещенного четырехполюсника и любой другой симметричной структуры, в которую скрещенный четырехполюсник может быть преобразован¹.

При выводе соотношений (VI.61) на схему четырехполюсника, приведенного на рис. VI.6б, было наложено важное ограничение, заключающееся в том, что провода, соединяющие секции этого четырехполюсника, не перекрещены. Такие четырехполюсники иногда называются «двухсекционными разделенными» («bisectable») *четыре-полюсниками*. Скрещенный же четырехполюсник обычно не относится к данному классу. Бруне предложил простой способ, с помощью которого указанное выше ограничение, по крайней мере для некоторых случаев, может быть снято.

Скрещенный четырехполюсник можно заменить четырехполюсником, изображенным на рис. VI.7а, где в точках присоединения ветвей z_b включен идеальный трансформатор с коэффициентом трансформации $-1 : 1$. Эквивалентность полученного четырехполюсника обычному скрещенному нетрудно установить, если рассмотреть параллельное соединение четырехполюсников, имеющих y -матрицы вида

$$\begin{bmatrix} \frac{y_a}{2} & -\frac{y_a}{2} \\ -\frac{y_a}{2} & \frac{y_a}{2} \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} \frac{y_b}{2} & \frac{y_b}{2} \\ \frac{y_b}{2} & \frac{y_b}{2} \end{bmatrix}. \quad (VI.62)$$

¹ Этот результат известен как теорема бисекции цепи, впервые сформулированная Барглеттом [10]. Приведенное здесь доказательство теоремы Барглетта значительно проще, чем алгебраическое доказательство О. Бруне в его работе [11].

Результирующая матрица, равная сумме этих матриц, очевидно, представляет собой y -матрицу скрещенного четырехполюсника.

Если к преобразованному варианту скрещенного четырехполюсника (рис. VI.7а) приложить симметричное возбуждение, то в ветвях z_a ток будет равен нулю, в то время как идеальный трансформатор ведет себя, как короткозамкнутая цепь в ветвях z_b . Это объясняется тем, что только при нулевом напряжении на его обмотках могут удовлетворяться ограничения, накладываемые в данном случае на схему четырехполюсника. Секция исходного четырехполюсника, соответствующая указанному случаю, показана на рис. VI.7б.

Если к преобразованному варианту скрещенного четырехполюсника приложить асимметричное возбуждение, то идеальный

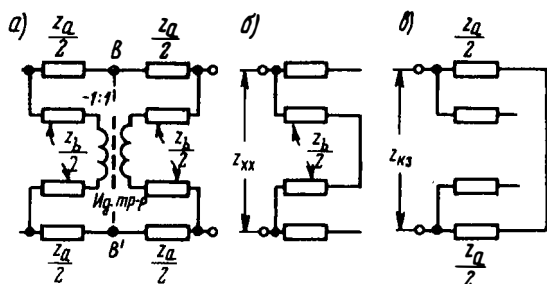


Рис. VI.7

трансформатор ведет себя подобно разомкнутой цепи. Последнее очевидно, так как только при нулевом токе в ветвях z_b могут удовлетворяться ограничения, налагаемые в этом случае на схему четырехполюсника (асимметричное возбуждение; отсутствие тока в обмотках трансформатора). Нетрудно заметить, что точки B — B' на схеме рис. VI.7а имеют одинаковый потенциал, следовательно, их можно объединить в один узел, как это было сделано ранее для схемы рис. VI.6г. Секция исходного четырехполюсника, соответствующая этому случаю, показана на рис. VI.7в.

Анализ схем, изображенных на рис. VI.7б, в, показывает, что для четырехполюсника на рис. VI.7а соотношения (VI.61) удовлетворяются. Таким образом, можно прийти к заключению, что если при разбиении данного симметричного четырехполюсника (рис. VI.6б) получатся скрещенные пары проводов, то для него соотношения (VI.61) остаются справедливыми при условии, что для схемы рис. VI.6д скрещенные пары проводов замкнуты накоротко, а для схемы рис. VI.6е — разомкнуты. Однако этот модифицированный вариант теоремы бисекции справедлив только тогда, когда замена скрещенных проводов первоначального четырехполюсника идеальным трансформатором с коэффициентом трансформации — 1 : 1 не

изменяет поведения схемы как четырехполюсника, что и имеет место в случае обычной скрещенной цепи¹.

В качестве другого примера рассмотрим симметричный скрещенный четырехполюсник, у которого удалена одна из ветвей z_a . Он все еще представляет собой физически и электрически симметричную цепь, но скрещенные провода здесь нельзя заменить идеальным трансформатором с коэффициентом трансформации $-1 : 1$. К этому частному виду скрещенного четырехполюсника неприменима теорема бисекции, даже если мы попытаемся преобразовать его по описанной выше методике (см. рис. VI.6д, е).

VI.5. Преобразование скрещенных четырехполюсников в эквивалентные неуравновешенные

Применяя теорему разбивания, нетрудно получить эквивалентные соотношения для скрещенных и симметричных Т- или П-образных четырехполюсников. Для звена и полувзвена Т-образного четы-

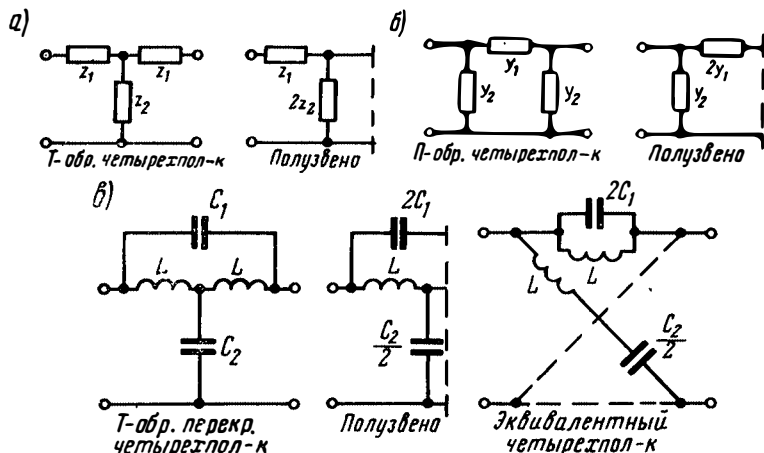


Рис. VI.8

рехполюсника, изображенных на рис. VI.8а, соотношения (VI.61) можно записать непосредственно в виде:

$$z_a = z_1; \quad z_b = z_1 + 2z_2; \quad z_2 = \frac{1}{2}(z_b - z_a). \quad (\text{VI. 63})$$

Поскольку выражение для z_2 включает операцию вычитания, ясно, что Т-образный четырехполюсник, эквивалентный скрещенному, не всегда реализуем.

¹ Нетрудно установить, что это условие выполняется для любого четырехполюсника, симметричного относительно центральной горизонтальной оси.

Для П-образного четырехполюсника, показанного на рис. VI.8б, можно получить аналогичные соотношения при использовании y -параметров:

$$y_b = y_2; \quad y_a = y_2 + 2y_1; \quad y_1 = \frac{1}{2}(y_a - y_b). \quad (\text{VI.64})$$

Здесь операция вычитания включена в выражение проводимости последовательной ветви П-образного четырехполюсника, эквивалентного скрещенному, и снова преобразование может оказаться невозможным.

Рисунок VI.8в иллюстрирует применение теоремы бисекции для преобразования Т-образного перекрытого четырехполюсника в эквивалентный скрещенный. На практике часто приходится делать подобные преобразования, так как при использовании различного рода аналитических выражений скрещенный четырехполюсник оказывается более удобным. Эквивалентные соотношения, вытекающие из сравнения изображенных на рис. VI.8в схем, позволяют также произвести обратную операцию, т. е. преобразовать скрещенный четырехполюсник указанного на рисунке вида в эквивалентный Т-образный перекрытый четырехполюсник. Однако в этом случае более подходящими оказываются рассматриваемые ниже методы.

Эквивалентность цепей, приведенных на рис. VI.9а, б, показывает, что ветвь z_a скрещенного четырехполюсника целесообразно представить (там, где это возможно) в виде параллельного соединения элементов z_{a1} и z_{a2} , а ветвь z_b — в виде последовательного соединения элементов z_{b1} и z_{b2} . Из анализа системы ур-ний (VI.44) следует, что половина любого из последовательных элементов ветви z_b (например, $\frac{z_{b1}}{2}$) входит в качестве слагаемого в выражения для z_{11} и z_{22} . Таким образом, любой из последовательных элементов ветви z_b можно удалить из скрещенного четырехполюсника, выделив его в виде отдельного четырехполюсника и соединив затем последовательно с оставшейся частью первоначального четырехполюсника, как показано в нижней части рис. VI.9б. В результате такого преобразования схемы z -матрица получившегося четырехполюсника не изменяется при условии, что в его схему введен идеальный трансформатор. Аналогичная операция устранения из скрещенного четырехполюсника параллельного элемента z_{a1} ветви z_a , выделения его в виде отдельного четырехполюсника и включения параллельно оставшейся части первоначального четырехполюсника (см. верхнюю часть рис. VI.9б) также требует применения идеального трансформатора. Последнее объясняется тем обстоятельством, что при отсутствии этого трансформатора соединение двух элементов z_{a1} (по одному в каждой из двух ветвей z_a) в одну ветвь с сопротивлением $2z_{a1}$ приводит к нарушению уравнивания соответствующего четырехполюсника.

Можно, конечно, считать общие сопротивления z_a и z_b просто равными сопротивлениям z_{a1} и z_{b2} соответственно, что эквивалент-

но условию $z_{a1} = \infty$ и $z_{b2} = 0$. При этом скрещенный четырехполюсник, изображенный в центральной части рис. VI.9б, вырождается в пару скрещенных проводов, которые можно заменить идеальным трансформатором с коэффициентом трансформации $-1:1$. Тогда два других идеальных трансформатора не требуются, и эквивалентный четырехполюсник принимает вид, показанный на рис. VI.9в. Наконец, схему его можно изменить, как показано на рис. VI.9г.

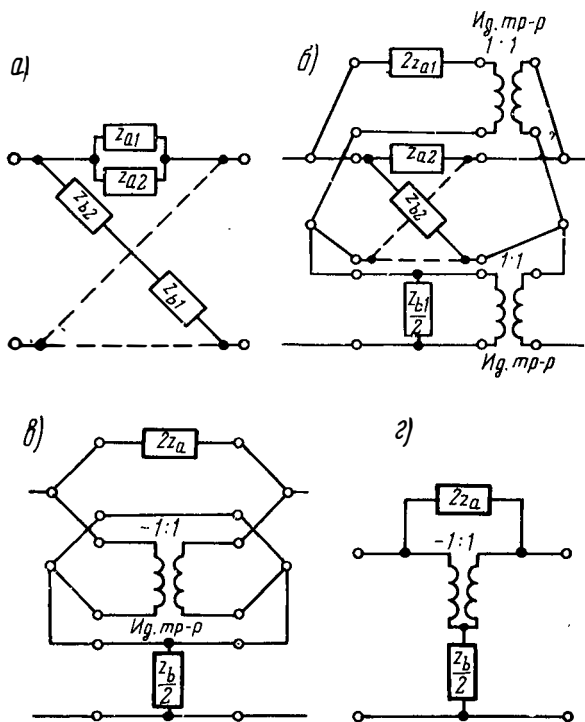


Рис. VI.9

Если скрещенный четырехполюсник, изображенный в центральной части рис. VI.9б, возможно преобразовать в эквивалентный неуравновешенный, подобный, например, скрещенному четырехполюснику на рис. VI.8в, то идеальные трансформаторы не требуются совсем. Поэтому первоначальный скрещенный четырехполюсник, приведенный на рис. VI.9а, может быть преобразован в неуравновешенную схему, которая удобнее для практической реализации. В большинстве случаев для данного скрещенного четырехполюсника допустимо несколько различных разложений сопротивлений z_a и z_b на соответственно параллельные и последовательные соединения. Следовательно, вполне вероятно, что, по крайней мере для

одного из этих разложений, осуществимо указанное полное преобразование исходного четырехполюсника в неуравновешенный.

На рис. VI.10а, б показаны другие виды преобразований скрещенного четырехполюсника в эквивалентный неуравновешенный. Из ур-ний (VI.61) следует, что любое общее слагаемое, входящее в выражения для z_a и z_b , является также общим для сопротивлений $z_{к.в}$ и $z_{к.х}$. Значит, сопротивления, описываемые подобными слагаемыми, можно включить последовательно с обеими парами зажимов четырехполюсника. На рис. VI.10а таким общим сопротивлением является z .

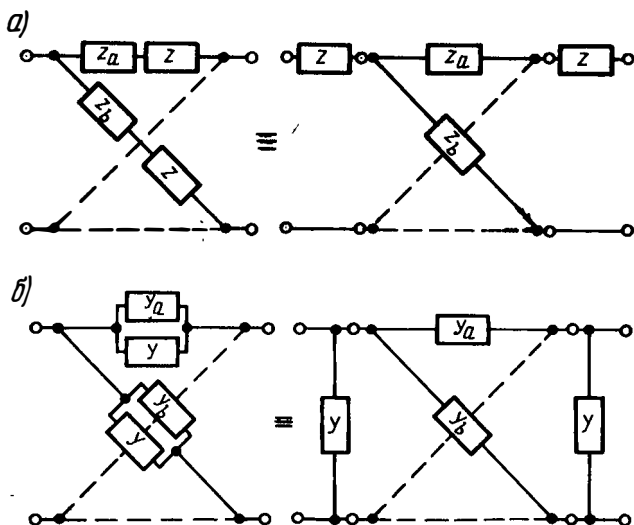


Рис. VI.10

Для системы уравнений в y -параметрах, т. е. дуальной системы ур-ний (VI.61), получается дуальный случай. Тогда проводимость y (общее слагаемое) будет включаться параллельно каждой из ветвей скрещенного четырехполюсника, и его можно рассматривать как сопротивление, включенное параллельно каждой из пар зажимов, как показано на рис. VI.10б.

Пример использования преобразования, изображенного на рис. VI.10а, приведен на рис. VI.11а. Здесь индуктивность L_1 в ветви z_a данного скрещенного четырехполюсника рассматривается как сопротивление z (общее слагаемое). Если исключить эту индуктивность, то останется скрещенный четырехполюсник, у которого появляется короткозамкнутая ветвь вместо ветви z_a , и, таким образом, обе ветви z_b окажутся включенными параллельно.

Результирующей индуктивностью в ветви z_b является индуктивность $(L_2 - L_1)$, поскольку и из сопротивления z_a , и из сопротивления z_b вычитается одно и то же слагаемое (индуктивность L_1).

Окончательный вариант неуравновешенного четырехполюсника, эквивалентного данному скрещенному, представляет собой Т-образный четырехполюсник, изображенный на этом рисунке справа. Если индуктивность $(L_2 - L_1)$ отрицательна, то Т-образное расположение индуктивностей можно заменить парой взаимосвязанных индуктивностей. В этом случае коэффициент связи имеет вид

$$k = \left| \frac{L_2 - L_1}{L_2 + L_1} \right| < 1, \quad (\text{VI. 65})$$

и, следовательно, указанный четырехполюсник всегда реализуем.

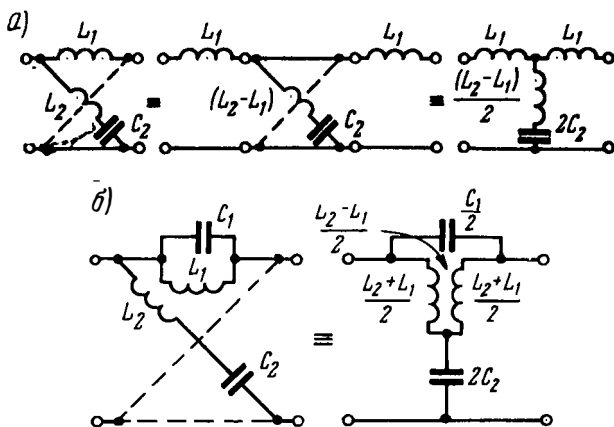


Рис. VI.11

Пусть рассматриваемый скрещенный четырехполюсник имеет ветвь z_a в виде параллельного соединения емкости C_1 и индуктивности L_1 (рис. VI.11б). Выделим емкость C_1 , как это было проделано на рис. VI.9а, б применительно к ветви z , и преобразуем оставшийся скрещенный четырехполюсник, используя преобразования, показанные на рис. VI.11а. Теперь можно снова включить указанную емкость параллельно в схему, но при этом ее сопротивление должно быть в два раза больше исходного, т. е. емкость должна быть равна половине своего первоначального значения. Проведя данную операцию, получим в результате Т-образный перекрытый четырехполюсник (рис. VI.11б, справа). Взаимная индуктивность в последней схеме необходима, конечно, только в том случае, если $L_1 > L_2$.

Интересно заметить, что используя преобразования, приведенные на рис. VI.10а, б, можно в некоторых случаях преобразовать заданный скрещенный четырехполюсник в цепной. Допустим, что ветви z_a и z_b скрещенного четырехполюсника имеют вид, изображенный на рис. VI.12а, б. С помощью преобразований, показанных на рис. VI.10а, можно выделить первую общую последовательную

индуктивность L_1 , затем, пользуясь преобразованиями, изображенными на рис. VI.10б,— выделить общую параллельную емкость C_1 и т. д. Осуществив полное преобразование исходного скрещенного четырехполюсника, получим цепной четырехполюсник, приведенный на рис. VI.12в, а применив для него теорему бисекции — вновь получим скрещенный четырехполюсник с ветвями z_a и z_b .

Для RC цепей отсутствует возможность использования взаимных индуктивностей, как это имело место в некоторых приведенных выше примерах. В данном случае для преобразования скрещенного четырехполюсника в эквивалентный неуравновешенный (если оно вообще возможно) необходимы дополнительные приемы. Для иллюстрации некоторых из них рассмотрим скрещенный RC четырехполюсник на рис. VI.13а.

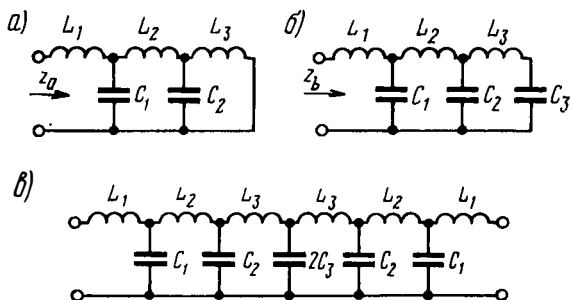


Рис. VI.12

Вначале попытаемся преобразовать его в тот или иной из двух Т-образных перекрытых четырехполюсников, показанных на рис. VI.13б. Применяя преобразования, изображенные на рис. VI.9, выделим параллельную емкость C_1 ветви z_a ; затем, используя эквивалентность цепей, приведенных на рис. VI.11а, преобразуем оставшуюся после устранения емкости C_1 часть скрещенного четырехполюсника в эквивалентный Т-образный. После осуществления указанных операций получим четырехполюсник, изображенный на рис. VI.13б. Аналогично можно преобразовать исходный скрещенный RC четырехполюсник (рис. VI.13а) в эквивалентный Т-образный перекрытый (рис. VI.13в); только теперь необходимо поменять местами элементы R_1 и C_1 . Аналитические соотношения, характеризующие реализуемость любого из этих преобразований, записаны под соответствующим четырехполюсником на рис. VI.13б, в.

Когда ни одно из указанных условий не выполняется, скрещенный четырехполюсник, изображенный на рис. VI.13а, все же можно преобразовать в эквивалентный неуравновешенный. Для этого нужно заменить ветвь z_b параллельным соединением соответствующих элементов и затем представить исходный скрещенный четырехполюсник в виде параллельного соединения двух скрещенных

четырёхполюсников, как показано на рис. VI.13г. На этом рисунке α — некоторое положительное число, меньше единицы. Верхний

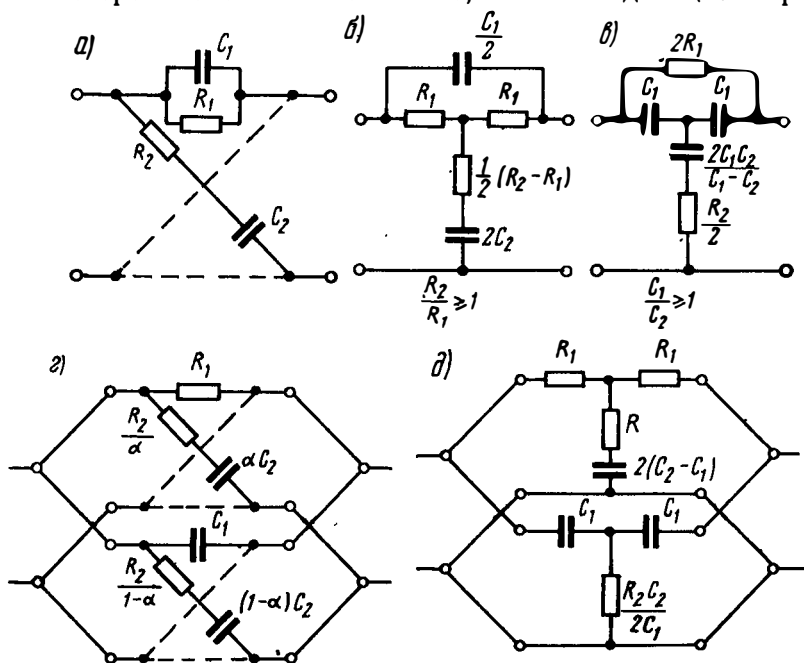


Рис. VI.13

четырёхполюсник можно преобразовать в эквивалентный Т-образный при условии, что

$$R_1 \leq \frac{R_2}{\alpha}, \quad (\text{VI.66})$$

а нижний — при условии, что

$$C_1 \geq (1-\alpha)C_2. \quad (\text{VI.67})$$

Коэффициент α может, таким образом, иметь любое значение в пределах

$$1 - \frac{C_1}{C_2} \leq \alpha \leq \frac{R_2}{R_1}. \quad (\text{VI.68})$$

Ограничение (VI.68) приводит к соотношению

$$\frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} \geq 1, \quad (\text{VI.69})$$

являющемуся условием, при котором выполним данный метод преобразования скрещенного четырёхполюсника. Нетрудно заметить, что оно менее жестко, чем любое из условий для преобразо-

вания скрещенного четырехполюсника в Т-образный перекрытый, приведенный на рис. VI.13б, в.

Если условие (VI.69) выполняется со знаком неравенства, то теоретически возможно бесконечное разнообразие неуравновешенных четырехполюсников, эквивалентных данному скрещенному. Выбрав коэффициент a равным его нижнему предельному значению из соотношения (VI.68), получим Т-образный четырехполюсник, эквивалентный скрещенному, изображенному в нижней части рис. VI.13г, который будет содержать вместо трех емкостей лишь две. Поэтому обычно предпочитают именно такой выбор. Тогда результирующий неуравновешенный четырехполюсник, эквивалентный скрещенному, показанному на рис. VI.13а, превращается в двойной Т-образный, приведенный на рис. VI.13д. Для этого четырехполюсника элемент R определяется из соотношения:

$$R = \frac{R_1 C_2}{2} \frac{\frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} - 1}{C_2 - C_1} \quad (\text{VI.70})$$

При $C_2 > C_1$ величины всех элементов схемы являются положительными, Т-образный перекрытый четырехполюсник, изображенный на рис. VI.13в, реализуем, и в нем используется не более трех емкостей.

VI.6. Преобразование симметричных скрещенных четырехполюсников в несимметричные

Для того чтобы сохранить преимущества использования симметричных скрещенных четырехполюсников в тех случаях, когда их входные и выходные пары зажимов нагружены на неравные

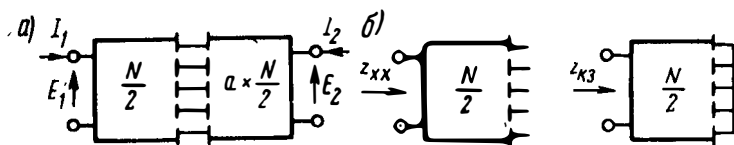


Рис. VI.14

сопротивления, можно следующим образом обобщить теорему бисекции.

На рис. VI.14а показан симметричный четырехполюсник, правая половина которого имеет уровень сопротивления, в a раз отличающийся от сопротивления левой половины, где a — вещественный коэффициент, больший нуля. Будем следовать методу Бруне для доказательства теоремы бисекции:

а) Пусть $E_2 = E_1 = E$. Если разорвать провода, соединяющие обе секции четырехполюсника, то напряжения между ними будут

одинаковыми, потому что уровень сопротивления не влияет на коэффициент передачи по напряжению. В этом случае $I_1 = aI_2 = I$, и условия на зажимах составного четырехполюсника не изменяются независимо от того, разбит он на две секции или нет. Система ур-ний (VI.2) для составного четырехполюсника принимает вид

$$E = \left(z_{11} + \frac{z_{12}}{a} \right) I = \left(z_{12} + \frac{z_{22}}{a} \right) I. \quad (\text{VI.71})$$

б) Пусть $\frac{E_2}{a} = -E_1 = -E$. Если при таком возбуждении объединить накоротко в один узел соединительные провода между секциями составного четырехполюсника, то токи, протекающие по обе стороны от этого узла, будут равны по величине, но противоположны по направлению и, следовательно, ток через короткозамкнутую цепь протекать не будет. В этом случае $I_2 = -I_1 = -I$, и условия на зажимах составного четырехполюсника не изменятся независимо от того, изолируются две его секции короткозамкнутым проводом или нет. Система ур-ний (VI.2) для составного четырехполюсника принимает вид

$$E = (z_{11} - z_{12}) I = (z_{22} - z_{12}) \frac{I}{a}. \quad (\text{VI.72})$$

Применительно к схемам, изображенным на рис. VI.14б, где $N/2$ представляет собой левую половину четырехполюсника, приведенного на рис. VI.14а, из ур-ний (VI.71) и (VI.72) находим:

$$z_{x,x} = z_{11} + \frac{z_{12}}{a} = z_{12} + \frac{z_{22}}{a} = z_b; \quad (\text{VI.73})$$

$$z_{к,с} = z_{11} - z_{12} = \frac{z_{22} - z_{12}}{a} = z_a. \quad (\text{VI.74})$$

Здесь z_a и z_b — сопротивления симметричного скрещенного четырехполюсника, преобразованного в несимметричный, приведенный на рис. VI.14а. Из ур-ний (VI.73) и (VI.74) определяем:

$$z_{11} = \frac{az_b + z_a}{a + 1}; \quad (\text{VI.75})$$

$$\bullet \frac{z_{22}}{a} = \frac{z_b + az_a}{a + 1}; \quad (\text{VI.76})$$

$$z_{12} = \frac{a(z_b - z_a)}{a + 1}; \quad (\text{VI.77})$$

$$a = \frac{z_{22} - z_{12}}{z_{11} - z_{12}}. \quad (\text{VI.78})$$

Интересно отметить, что сопротивление передачи преобразованного четырехполюсника отличается от сопротивления передачи симметричного скрещенного четырехполюсника только постоянным множителем. Полюсы входных сопротивлений преобразованного

четыреполюсника совпадают с полюсами входного сопротивления симметричного скрещенного, а нули соответствующих входных сопротивлений не совпадают. С другой стороны, эти нули у преобразованного четырехполюсника одинаковы для сопротивлений z_{11} и z_{22} . В данном отношении четырехполюсник, изображенный на рис. VI.14а, является более общим по сравнению с симметричным скрещенным, каскадно соединенным с идеальным трансформатором.

В задачах синтеза сопротивления z_{11} , z_{22} и z_{12} обычно считаются известными, поэтому сопротивления ветвей z_a и z_b можно найти из ур-ний (VI.73) и (VI.74), а множитель a — из ур-ния (VI.78). Кроме выполнения обычных условий реализуемости [аналитичность в правой полуплоскости и условия, определяемые выражениями (I.105) и (I.106)], сопротивления z_{11} , z_{22} и z_{12} должны быть такими, чтобы множитель a был положительным вещественным числом. Указанные условия, как и в случае симметричного четырехполюсника, обеспечивают реализуемость сопротивлений z_a и z_b скрещенного четырехполюсника. Таким образом, если r_{11} , r_{22} , r_{12} обозначают соответствующие вещественные части сопротивлений z_{11} , z_{22} , z_{12} , а k_{11} , k_{22} , k_{12} — их вычеты в полюсах на мнимой оси, то из ур-ний (VI.75), (VI.76) и (VI.77) можно определить:

$$\left. \begin{aligned} r_{11} &= \frac{ar_b + r_a}{a+1}; & r_{22} &= \frac{a(r_b + ar_a)}{a+1} \\ r_{11}r_{22} - r_{12}^2 &= ar_a r_b \end{aligned} \right\}, \quad (\text{VI.79})$$

а также аналогичные выражения для k_{ik} . Теперь нетрудно установить, что условия, определяемые выражениями (I.105) и (I.106), обеспечивают принадлежность функций z_a и z_b к классу п. в. ф. Отсюда следует, что по любым заданным сопротивлениям z_{11} , z_{22} , z_{12} , для которых выполняются обычные условия реализуемости, можно синтезировать четырехполюсник, изображенный на рис. VI.14а, если множитель a , вычисленный из ур-ния (VI.78), является положительным вещественным числом.

Требуемый четырехполюсник (рис. VI.14а) найден путем преобразования скрещенного четырехполюсника в эквивалентный неуравновешенный, причем в данном случае параметры правой половины составного четырехполюсника необходимо соответствующим образом изменить, введя коэффициент уровня сопротивления a . Для осуществления этого преобразования нужно разбить эквивалентный неуравновешенный четырехполюсник на две секции, изменить соответствующие параметры одной из секций с учетом множителя a , а затем снова соединить обе секции четырехполюсника вместе.

Поскольку иногда целесообразно использовать вместо z -параметров y -параметры, необходимо познакомиться с дуальной формой предыдущих результатов. Используя дуальность Т- и П-образных четырехполюсников, приведенных на рис. VI.8а, б, эквивалентные зависимости (VI.63) и (VI.64), связывающие пара-

метры скрещенного четырехполюсника с параметрами указанных дуальных схем, можно сделать вывод, что скрещенный четырехполюсник является структурно дуальной схемой. Аналитические соотношения, выражающие переход от заданного скрещенного четырехполюсника к дуальному, определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} z_a &\rightarrow y_b; & z_b &\rightarrow y_a \\ z_{12} &\rightarrow -y_{12} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VI.80})$$

Тогда зависимости, дуальные соответственно уравнениям (VI.73) — (VI.78), принимают вид:

$$y_{x.x} = y_{11} - ay_{12} = -y_{12} + ay_{22} = y_a; \quad (\text{VI.81})$$

$$y_{x.3} = y_{11} + y_{12} = a(y_{22} + y_{12}) = y_b; \quad (\text{VI.82})$$

$$y_{11} = \frac{ay_b + y_a}{a + 1}; \quad (\text{VI.83})$$

$$ay_{22} = \frac{ay_a + y_b}{a + 1}; \quad (\text{VI.84})$$

$$y_{12} = \frac{y_b - y_a}{a + 1}; \quad (\text{VI.85})$$

$$a = \frac{y_{11} + y_{12}}{y_{22} + y_{12}}, \quad (\text{VI.86})$$

где множитель a также представляет собой коэффициент уровня сопротивления.



VII.

ГЛАВА

Синтез четырехполюсников без потерь

VII.1. Обобщение теоремы Фостера

Предметом настоящего параграфа является распространение методов, описанных в главе III, на синтез входных реактивных функций цепей с двумя парами зажимов¹. Как отмечалось в главе II, такие реактивные четырехполюсники характеризуются рядом входных сопротивлений и сопротивлением передачи — z_{11} , z_{22} , z_{12} , обладающих следующими свойствами. Все сопротивления имеют только простые полюсы на мнимой оси; вычеты k_{11} и k_{22} функций z_{11} и z_{22} соответственно в этих полюсах являются положительными вещественными; вычеты k_{12} сопротивления передачи z_{12} хотя и являются вещественными, не обязательно будут положительными. Однако они должны удовлетворять условию вычетов

$$k_{11}k_{22} - k_{12}^2 \geq 0. \quad (\text{VII.1})$$

Требование, чтобы сопротивления были вещественными при вещественных значениях комплексной частоты $s = \sigma + j\omega$, приводит к тому, что их полюсы на мнимой оси появляются в виде сопряженных пар. Такие функции (это также было показано в главе II) можно представить в виде частного от деления двух полиномов, из которых один является четным, а другой — нечетным. При этом точки $s = 0$ и $s = \infty$ будут либо нулем, либо полюсом функции. Нули и полюсы входных функций — простые и расположены сопряженными парами на мнимой оси, где они чередуются. Нули сопротивления передачи могут иметь любую кратность и располагаться в любой точке плоскости комплексной частоты; диаграмма расположения нулей в зависимости от того, является ли полином числителя z_{12} четным или нечетным, должна иметь пол-

¹ Обобщение теоремы на цепи с n парами зажимов, имеющие одинаковые частотные диаграммы со стороны каждого входа, дано в работе [12].

ную симметрию относительно мнимой либо соответственно вещественной оси.

В главе II было установлено, что отмеченные свойства функций z_{11} , z_{22} , z_{12} являются необходимыми для реализации цепей без потерь. Ниже мы покажем, что они также достаточны. В этом можно будет непосредственно убедиться при синтезе ряда функций сопротивления, удовлетворяющих только перечисленным необходимым условиям.

При разработке такого метода синтеза целесообразно обобщить способы, успешно применявшиеся ранее к входным функциям. Прибегнув к методу Фостера, при котором используется разложение функции на элементарные дроби, можно получить нужное решение, причем для данного случая необходимо рассмотреть одновременно разложение всех заданных сопротивлений. Если объединить члены, содержащие сопряженные полюсы [см. ур-ние (II.31)], то выражения для этих сопротивлений запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} z_{11} &= \frac{k_{11}^{(0)}}{s} + \frac{2k_{11}^{(2)}s}{s^2 - s_2^2} + \dots + \frac{2k_{11}^{(2n-2)}s}{s^2 - s_{2n-2}^2} + k_{11}^{(2n)}s \\ z_{22} &= \frac{k_{22}^{(0)}}{s} + \frac{2k_{22}^{(2)}s}{s^2 - s_2^2} + \dots + \frac{2k_{22}^{(2n-2)}s}{s^2 - s_{2n-2}^2} + k_{22}^{(2n)}s \\ z_{12} &= \frac{k_{12}^{(0)}}{s} + \frac{2k_{12}^{(2)}s}{s^2 - s_2^2} + \dots + \frac{2k_{12}^{(2n-2)}s}{s^2 - s_{2n-2}^2} + k_{12}^{(2n)}s \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.2})$$

Выражения (VII.2) можно представить в виде разложения матрицы

$$[z] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{VII.3})$$

в следующей форме:

$$[z] = [z]_0 + [z]_2 + \dots + [z]_{2n-2} + [z]_{2n}. \quad (\text{VII.4})$$

Типичная форма слагаемого в выражении (VII.4) для конечного полюса, отличного от нуля, имеет вид

$$[z]_v = \begin{bmatrix} \frac{2k_{11}^{(v)}s}{s^2 - s_v^2} & \frac{2k_{12}^{(v)}s}{s^2 - s_v^2} \\ \frac{2k_{21}^{(v)}s}{s^2 - s_v^2} & \frac{2k_{22}^{(v)}s}{s^2 - s_v^2} \end{bmatrix}. \quad (\text{VII.5})$$

Если построить реактивный четырехполюсник с z матрицей, соответствующей матрице, определяемой выражением (VII.5), то, как видно из § VI.2, требуемую реализацию общей матрицы [см.

ф-лу (VII.3)] можно получить, используя последовательное соединение четырехполюсников. Каждый из них имеет матрицу, соответствующую определенному члену разложения (VII.4) при условии, конечно, что удовлетворяются указанные в § VI.2 ограничения на поведение всего составного четырехполюсника.

Как будет видно из дальнейшего, четырехполюсник, реализующий матрицу (VII.5), может быть построен на базе схемы, изображенной на рис. VII.1.

Положим, что первый, последний и любой промежуточный члены разложения (VII.2) имеют вид:

$$f(s) = \frac{1}{s}; \quad (\text{VII.6})$$

$$f(s) = \frac{2s}{s^2 - s_0^2}; \quad (\text{VII.7})$$

$$f(s) = s. \quad (\text{VII.8})$$

Тогда типовая матрица сопротивлений запишется в более простой форме

$$\begin{bmatrix} k_{11}f(s) & k_{12}f(s) \\ k_{21}f(s) & k_{22}f(s) \end{bmatrix}. \quad (\text{VII.9})$$

Здесь верхние индексы при k_{ih} опущены, так как при последующем детальном рассмотрении в них нет необходимости.

Функция $f(s)$, рассматриваемая как сопротивление, в соответствии с видом ур-ний (VII.6), (VII.7) или (VII.8) характеризует либо емкость, либо параллельный LC контур, либо индуктивность (рис. VII.2). Очевидно, не представляет труда и реализация постоянного вещественного положительного множителя при $f(s)$. Так, если сопротивления T-образной цепи, изображенной на рис. VII.1, записать в виде

$$z_A = af(s); \quad z_B = bf(s); \quad z_C = cf(s), \quad (\text{VII.10})$$

где a , b и c — положительные, вещественные числа, тогда очевидно, что эта T-образная цепь физически реализуема и легко выполняема, как только становятся известными численные значения

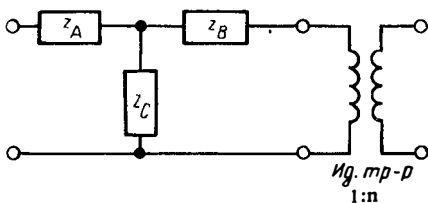


Рис. VII.1

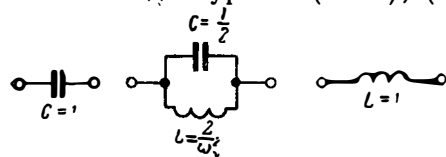


Рис. VII.2

либо емкость, либо параллельный LC контур, либо индуктивность (рис. VII.2). Очевидно, не представляет труда и реализация постоянного вещественного положительного множителя при $f(s)$. Так, если сопротивления T-образной цепи, изображенной на рис. VII.1, записать в виде

коэффициентов. Для всей цепи, показанной на рис. VII.1, непосредственно можно найти:

$$\left. \begin{aligned} z_{11} &= z_A + z_C \\ z_{22} &= n^2(z_B + z_C) \\ z_{12} &= nz_C \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.11})$$

Эти сопротивления необходимо отождествить с соответствующими элементами матрицы (VII.9), т. е.

$$k_{11} = a + c; \quad k_{22} = n^2(b + c); \quad k_{12} = nc. \quad (\text{VII.12})$$

Решая ур-ния (VII.12) относительно коэффициентов a , b и c , получим

$$a = k_{11} - \frac{k_{12}}{n}; \quad b = \frac{k_{22}}{n^2} - \frac{k_{12}}{n}; \quad c = \frac{k_{12}}{n}. \quad (\text{VII.13})$$

Поскольку коэффициенты должны быть положительными, то прежде всего очевидно, что коэффициент трансформации n идеального трансформатора будет иметь тот же знак, что и вычет k_{12} . Таким образом, удовлетворяется условие

$$k_{11} \geq \frac{|k_{12}|}{|n|} \quad \text{и} \quad k_{22} \geq |n| \cdot |k_{12}|, \quad (\text{VII.14})$$

или

$$\frac{|k_{12}|}{k_{11}} \leq |n| \leq \frac{k_{22}}{|k_{12}|}. \quad (\text{VII.15})$$

Неравенство (VII.15) устанавливает пределы возможных изменений коэффициента трансформации идеального трансформатора, причем, для того чтобы оно выполнялось, необходимо и достаточно соблюдать условие

$$\frac{|k_{12}|}{k_{11}} \leq \frac{k_{22}}{|k_{12}|} \quad \text{или} \quad k_{12}^2 \leq k_{11}k_{22}. \quad (\text{VII.16})$$

Нетрудно видеть, что последнее неравенство удовлетворяет условию вычетов, определяемому выражением (VII.1).

Следовательно, матрица (VII.9) всегда реализуется в виде цепи, приведенной на рис. VII.1, а последовательное соединение таких цепей реализует данный ряд сопротивлений, определяемых ур-ниями (VII.2). Сопротивления Т-образной цепи, показанной на рис. VII.1, представляют собой один из трех элементов, изображенных на рис. VII.2, умноженный на соответствующий коэффициент, как это следует из выражения (VII.10). Таким образом, по крайней мере формально, мы рассмотрели метод синтеза реактивных четырехполюсников и доказали, что необходимые условия реализуемости, отмеченные в главе II, являются также и достаточными.

Когда условие вычетов (VII.1) выполняется со знаком неравен-

ства, то согласно ур-нию (VII.15) теоретически возможно бесконечное множество величин коэффициента трансформации идеального трансформатора. Представляют интерес два предельных значения рассматриваемого диапазона изменения n , при которых Т-образная цепь, приведенная на рис. VII.1, вырождается в Г-образную цепь, а именно при

$$|n| = \frac{|k_{12}|}{k_{11}}; \quad a=0; \quad z_A=0 \quad (\text{VII.17})$$

и при

$$|n| = \frac{k_{22}}{|k_{12}|}; \quad b=0; \quad z_B=0. \quad (\text{VII.18})$$

Если условие вычетов (VII.1) выполняется со знаком равенства, то z_A и z_B будут равны нулю, а четырехполюсник, реализующий матрицу (VII.9), вырождается в идеальный трансформатор, шунтированный со стороны входа параллельным сопротивлением z_C .

При реализации цепи, показанной на рис. VII.1, в ряде случаев идеальный трансформатор не требуется. Так, если вычет k_{12} в соответствующем полюсе положительный и если

$$k_{11} \geq k_{12} \geq 0 \quad \text{и} \quad k_{22} \geq k_{12}, \quad (\text{VII.19})$$

то по условию (VII.15) коэффициент трансформации n можно выбрать равным +1 и обойтись без идеального трансформатора.

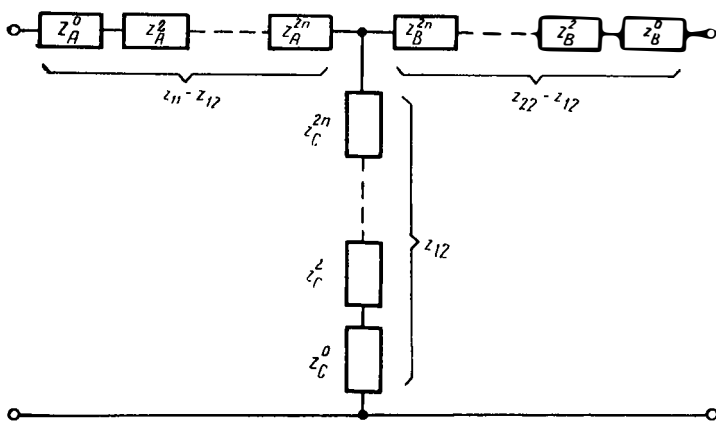


Рис. VII.3

При совместном удовлетворении данного условия для всех полюсов в процессе синтеза получают Т-образную цепь, приведенную на рис. VII.3. Однако такой случай не представляет практического интереса, поскольку условия (VII.19) являются настолько жесткими, что не удастся получить достаточно приемлемых характеристик. Из рис. VII.3 нетрудно увидеть, что условия (VII.19) эквивалентны

условию реализации сопротивлений $z_{11} - z_{12}$ и $z_{22} - z_{12}$, а также сопротивление z_{12} в виде входных реактивных функций.

В большинстве практических приложений, где применяются реактивные цепи, сопротивление передачи не может иметь те же свойства, что и входное реактивное сопротивление. Тем не менее в подобных случаях использование идеальных трансформаторов не требуется.

Рассмотрим цепь, изображенную на рис. VII.1, у которой функция $f(s)$ определяется ур-нием (VII.7), и выберем коэффициент трансформации идеального трансформатора исходя из условия (VII.18), т. е. при $z_B = 0$. Полученная цепь показана на рис. VII.4а. Идеальный трансформатор и параллельную индуктивность L_C можно заменить парой взаимосвязанных индуктивностей

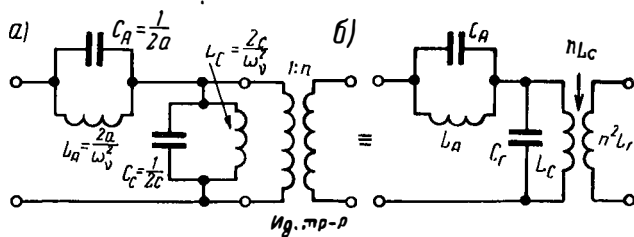


Рис. VII.4

и, таким образом, получить цепь, приведенную на рис. VII.4б. Аналогично можно поступить с идеальным трансформатором в цепи, где функция $f(s)$ представляет индуктивность, а не чистую емкость, та же функция которой определяется выражением (VII.6). В данном случае, чтобы избежать необходимости использования идеального трансформатора, обычно допустимо изменить уровень сопротивления, например, на выходных зажимах общей цепи. Это равноценно умножению z_{12} на коэффициент m , а z_{22} на m^2 . Применительно к разложениям, определяемым ур-ниями (VII.2), m нужно выбрать так, чтобы выполнялось соотношение

$$k_{11}^{(0)} \geq m^2 k_{22}^{(0)} = m k_{12}^{(0)} > 0. \quad (\text{VII. 20})$$

Соответствующая емкостная цепь на рис. VII.1 будет тогда представлять собой просто Г-образную цепь без идеального трансформатора. Если на остальные члены в разложениях (VII.2) наложить ограничение, согласно которому в цепи отсутствует идеальный трансформатор (см. эквивалентную схему на рис. VII.4), то полная реализация заданной функции z_{ik} (за исключением изменений уровня выходного сопротивления) принимает вид, показанный на рис. VII.5.

В результирующей цепи не используются идеальные трансформаторы, но пары взаимосвязанных индуктивностей в параллельной ветви сильно связаны (все коэффициенты связи равны единице). Однако эту связь можно ослабить, если в последовательную ветвь

цепи включить индуктивность, которую затем объединить с первой индуктивностью параллельной ветви.

Благодаря добавлению индуктивности сильная связь, существовавшая ранее в верхней паре индуктивностей параллельной ветви цепи, ослабляется. Указанный эффект в равной степени возможно трактовать как наличие у правой индуктивности в дополнительной паре некоторой избыточной индуктивности по сравнению с индуктивностью при сильной связи. Для того чтобы уменьшить связь во всех индуктивно связанных парах, эту избыточную индуктивность можно распределить среди всех правых катушек. Однако если заданное сопротивление z_{ih} не имеет полюса в точке $s = \infty$, при ко-

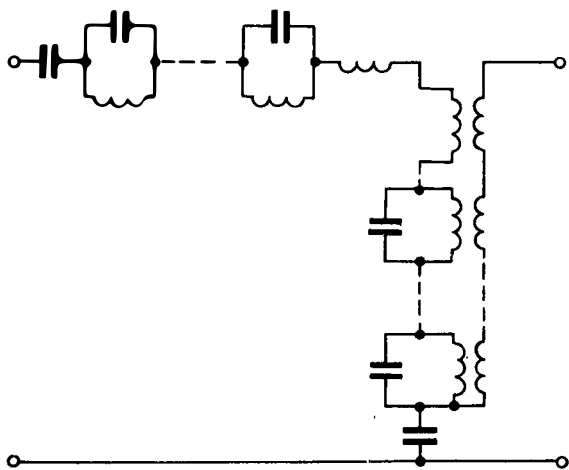


Рис. VII.5

тором условие вычетов выполняется со знаком неравенства, то описанный способ уменьшения сильной связи неприемлем.

Из рассмотрения структурной схемы, изображенной на рис. VII.5, очевидна аналогия с формой реализации входного реактивного сопротивления (или реактивной проводимости), получаемой посредством его разложения на элементарные дроби. Точно также можно распространить на четырехполюсники процесс нахождения другой формы Фостера, получаемой с помощью разложения на элементарные дроби соответствующих функций реактивной проводимости. Входные и передаточная проводимости y_{11} , y_{22} и y_{12} , имеющие те же свойства, что и сопротивления z_{11} , z_{22} и z_{12} , разлагаются на элементарные дроби аналогично функции сопротивлений в ур-ниях (VII.2). Все этапы синтеза дуальны тем, которые описаны для сопротивлений, причем типовой схемой (дуальной схеме, приведенной на рис. VII.1) является П-образная цепь, соединенная каскадно с идеальным трансформатором. Полная реализация имеет вид параллельно соединенных четырехполюсников.

На рис. VII.6 показана окончательная цепь, полученная при разложении функции проводимости. При этом уровень проводимости на одной паре зажимов изменен так, чтобы исключить из

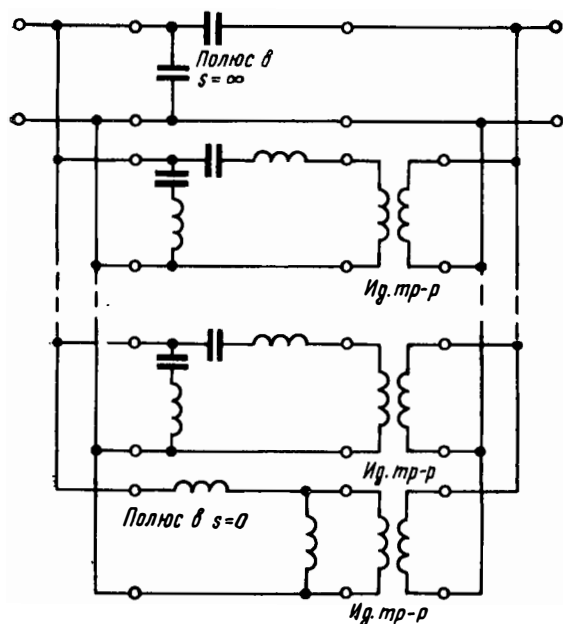


Рис. VII.6

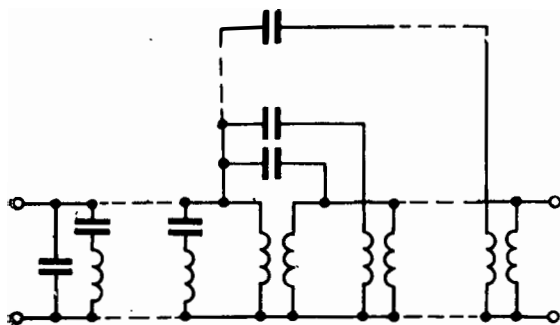


Рис. VII.7

На рис. VII.7 изображен вариант результирующей цепи (ср. с цепью, показанной на рис. VII.5). Здесь вновь очевидна аналогия с формой Фостера для двухполюсника.

Поясним этот метод синтеза численным примером. Выберем следующий ряд сопротивлений:

компонентной цепи, обладающей возможным полюсом в точке $s = \infty$, идеальный трансформатор, а коэффициенты трансформации идеальных трансформаторов остальных компонентных цепей выбираются таким образом, чтобы в результате получить Г-образные структуры, как это видно из рисунка. Параллельная индуктивность Г-образной цепи (ей соответствует полюс в точке $s = 0$), будучи пересчитана во вторичную (правую) обмотку смежного с ней идеального трансформатора, оказывается подключенной параллельно всем идеальным трансформаторам и, следовательно, может быть распределена между ними. Каждый идеальный трансформатор с соответствующими последовательной и параллельной индуктивностями можно затем преобразовать в пару взаимно связанных индуктивностей с коэффициентом связи меньше единицы.

$$\left. \begin{aligned} z_{11} &= \frac{s(s^2+2)(s^2+4)}{(s^2+1)(s^2+3)} = \frac{\frac{3}{2}s}{s^2+1} + \frac{\frac{1}{2}s}{s^2+3} + s \\ z_{12} &= \frac{s^5}{(s^2+1)(s^2+3)} = \frac{\frac{1}{2}s}{s^2+1} - \frac{\frac{9}{2}s}{s^2+3} + s \\ z_{22} &= \frac{s(3s^4+134s^2+132)}{3(s^2+1)(s^2+3)} = \frac{\frac{1}{6}s}{s^2+1} + \frac{\frac{81}{2}s}{s^2+3} + s \end{aligned} \right\} \text{ (VII.21)}$$

Здесь множители полюсов и нулей сопротивления z_{11} выбраны произвольно. Числитель полинома z_{12} хотя выбирается простым, тем не менее иллюстрирует обычное отклонение от известной картины чередования полюсов и нулей входных сопротивлений цепей без потерь. В данном примере сопротивление z_{22} связано с другими двумя сопротивлениями. Для этого после разложения сопротивлений z_{11} и z_{12} на элементарные дроби их вычеты выбираются таким образом, чтобы в каждом полюсе условие вычетов выполнялось со знаком равенства.

Используя приведенные разложения на элементарные дроби, нетрудно построить результирующую цепь (рис. VII.8). Она соответствует цепи, показанной на рис. VII.5. Здесь последовательная ветвь схемы отсутствует, потому что для всех полюсов, включая полюс в точке $s = \infty$, условие вычетов выполняется со знаком равенства. Таким образом, все индуктивно связанные пары катушек имеют сильную связь.

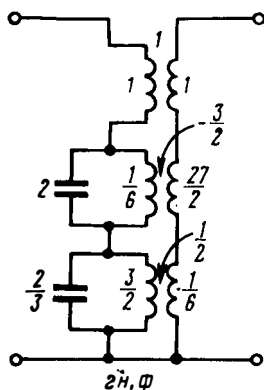


Рис. VII.8

Реализуем теперь тот же ряд сопротивлений, используя метод узловых напряжений. Для того чтобы найти соответствующую проводимость y_{ik} , необходимо сначала составить определитель z цепи. В связи с этим важно отметить, что при выполнении для всех полюсов условия вычетов со знаком равенства определитель z цепи будет иметь только простые полюсы, несмотря на то, что он является квадратной функцией полинома z_{ik} . Если в выражении $z_{11}z_{22} - z_{12}^2$ подставить соответствующие разложения на элементарные дроби, определяемые ϕ -лами (VII.21), то все члены, содержащие множители знаменателя типа $(s^2+1)^2$ или $(s^2+3)^2$, сокращаются и останутся только члены, содержащие простые множители (s^2+1) или (s^2+3) . Поэтому можно сказать, что при выполнении для всех полюсов условия вычетов со знаком равенства определитель цепи z будет иметь только простые полюсы и, наоборот, если этот

определитель имеет только простые полюсы, для всех полюсов условные вычеты должны удовлетворяться со знаком равенства.

Разность между произведением полиномов числителей z_{11} и z_{22} и квадратом полинома числителя z_{12} должна делиться на множители $(s^2 + 1)$ и $(s^2 + 3)$. Таким образом, находим

$$z_{11}z_{22} - z_{12}^2 = \frac{152s^2 \left(s^2 + \frac{44}{19} \right)}{3(s^2 + 1)(s^2 + 3)} \quad (\text{VII.22})$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} y_{11} &= \frac{3s^4 + 134s^2 + 132}{152s \left(s^2 + \frac{44}{19} \right)} = \frac{132}{352s} + \frac{0,461s}{s^2 + \frac{44}{19}} + \frac{3s}{152} \\ y_{22} &= \frac{3(s^2 + 2)(s^2 + 4)}{152s \left(s^2 + \frac{44}{19} \right)} = \frac{24}{352s} + \frac{0,00445s}{s^2 + \frac{44}{19}} + \frac{3s}{152} \\ y_{12} &= \frac{-3s^3}{152 \left(s^2 + \frac{44}{19} \right)} = 0 + \frac{0,0453s}{s^2 + \frac{44}{19}} - \frac{3s}{152} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.23})$$

Реализация, соответствующая цепи, приведенной на рис. VII.6, принимает вид цепи, показанной на рис. VII.9а. Две первые состав-

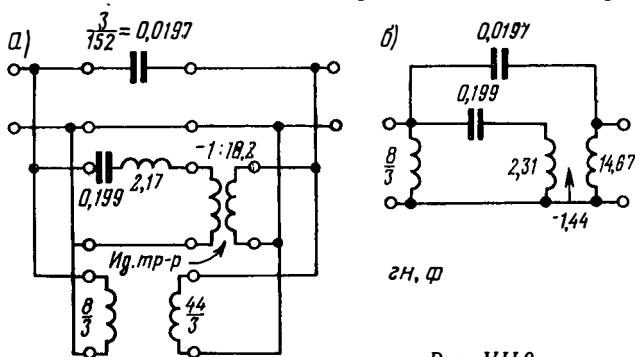


Рис. VII.9

ные цепи не имеют параллельных ветвей потому, что условие вычетов для полюсов этих цепей выполняется со знаком равенства. Поскольку проводимость передачи не имеет полюса в точке $s = 0$, в третьей составной цепи отсутствует последовательная ветвь, которой соответствовал бы указанный полюс. Идеальный трансформатор с соответствующими последовательной и параллельной индуктивностями можно легко преобразовать в пару взаимно связанных индуктивностей (рис. VII.9б), при этом коэффициент связи оказывается равным 0,25. Такая форма реализации не только про-

ше, чем форма, полученная методом контурных токов (см. рис. VII.8), но имеет также большее практическое значение, так как в ней исключаются сильно связанные индуктивности.

VII.2. Использование скрещенных цепей при синтезе

На практике встречаются случаи, когда требуется синтезировать четырехполюсник без потерь по двум сопротивлениям z_{11} и z_{12} либо z_{22} и z_{12} , либо только по одному сопротивлению передачи z_{12} . Подобные задачи синтеза решаются легче, чем рассмотренные выше, благодаря тому, что неизвестное сопротивление (или сопротивления) можно выбирать так, чтобы ускорить процесс синтеза. Всегда возможно составить зависимости, связывающие соответствующие функции неизвестных сопротивлений таким образом, чтобы при любых выбранных значениях их вычетов выполнялось условие вычетов. Другими словами, если разложить на элементарные дроби сопротивления z_{12} и z_{11} (или только z_{12} , если задана лишь эта функция), то нетрудно записать разложение на элементарные дроби и выражения для сопротивления z_{22} или же z_{11} и z_{22} (при произвольно выбранных значениях вычетов, удовлетворяющих условию вычетов). Следует, разумеется, учесть, что в данном условии произвольно выбирается либо знак равенства, либо знак неравенства в зависимости от того, какой выбор приводит к окончательной цепи, наиболее удовлетворяющей поставленным требованиям.

В задачах такого рода в качестве исходной для расчета можно использовать симметричную скрещенную цепь, поскольку выбор неизвестных сопротивлений произволен и нет никаких причин, препятствующих этому выбору сопротивления из условия $z_{11} = z_{22}$. В свою очередь, такое решение позволяет получить указанную структуру цепи. Следовательно, если заданы сопротивления z_{11} и z_{12} и если во всех полюсах $k_{11} \geq |k_{12}|$, то можно выбрать $z_{22} = z_{11}$. Это, очевидно, не нарушает условия вычетов. Заметим, однако, что в случае невыполнения во всех полюсах соотношения $k_{11} \geq |k_{12}|$ нельзя выбрать $z_{22} = z_{11}$. По этой причине невозможна и реализация в виде симметричной цепи. Наиболее экономичная симметричная цепь получается, когда во всех полюсах $k_{11} = |k_{12}|$.

Проиллюстрируем данный метод, допустив, что из функций, определяемых выражениями (VII.21), известна только функция z_{12} . Тогда нет необходимости записывать соответствующие разложения для неизвестных сопротивлений ($z_{11} = z_{22}$), полагая, что в различных полюсах $k_{11} = k_{22} = |k_{12}|$. Можно просто использовать выражение для сопротивления передачи скрещенной цепи [см. уравнение (VI.44)]

$$z_{12} = \frac{1}{2}(z_b - z_a) \quad (\text{VII.24})$$

и отнести положительные слагаемые разложения z_{12} на элементарные дроби к члену $\frac{z_b}{2}$, а отрицательные — к члену $\frac{z_a}{2}$. Применяя этот способ к сопротивлению z_{12} , определяемому соответствующим выражением системы (VII.21), получаем:

$$z_b = \frac{s}{s^2 + 1} + 2s; \quad (\text{VII.25})$$

$$z_a = \frac{9s}{s^2 + 3}. \quad (\text{VII.26})$$

Скращенная цепь для данного случая показана на рис. VII.10а. Заменяв ветвь z_b другой схемой Фостера, как показано на рис. VII.10б, можно согласно методу, рассмотренному в § VI.5,

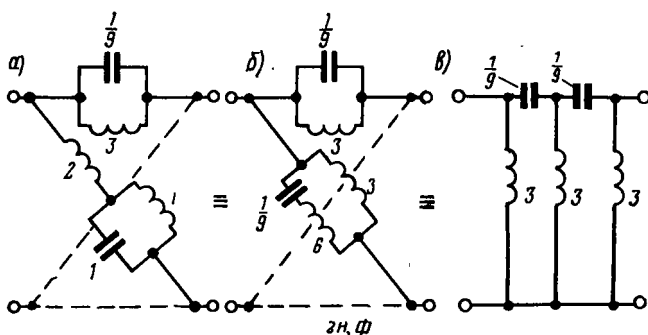


Рис. VII.10

легко осуществить преобразование этой скращенной схемы в эквивалентную неуравновешенную цепную схему, изображенную на рис. VII.10в.

Если уровень выходного сопротивления не играет никакой роли, то во всех полюсах всегда выполнимо условие $k_{11} \geq |k_{12}|$ при умножении z_{12} на постоянную (это эквивалентно подключению на выходные зажимы цепи идеального трансформатора). Так, если в соответствующем уравнении системы (VII.21) умножить z_{12} на коэффициент $\frac{1}{9}$, то

$$\left. \begin{aligned} z_{11} &= \frac{1}{2} (z'_b + z'_a) = \frac{\frac{3}{2}s}{s^2 + 1} + \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + 3} + s \\ z_{12} &= \frac{1}{2} (z'_b - z'_a) = \frac{\frac{1}{18}s}{s^2 + 1} - \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + 3} + \frac{1}{9}s \end{aligned} \right\}, \quad (\text{VII.27})$$

откуда

$$z'_b = \frac{\frac{14}{9}s}{s^2 + 1} + \frac{10}{9}s \quad (\text{VII.28})$$

и

$$z'_a = \frac{\frac{13}{9}s}{s^2 + 1} + \frac{s}{s^2 + 3} + \frac{8}{9}s. \quad (\text{VII.29})$$

Сравнение выражений (VII.28) и (VII.29) с ур-ниями (VII.25) и (VII.26) показывает, что

$$z'_b = \frac{z_b}{9} + \frac{\frac{13}{9}s}{s^2 + 1} + \frac{8}{9}s; \quad (\text{VII.30})$$

$$z'_a = \frac{z_a}{9} + \frac{\frac{13}{9}s}{s^2 + 1} + \frac{8}{9}s. \quad (\text{VII.31})$$

Первые члены в последних выражениях реализуются посредством цепи, изображенной на рис. VII.10, при условии, что они умножаются на коэффициент $\frac{1}{9}$. Два других члена, общие для сопротивлений z'_a и z'_b , представляют собой реактивные сопротивления, которые в соответствии со свойством скрещенной цепи (см. рис. VI.10а) можно соединить последовательно с входными и выходными зажимами. Следовательно, реализация скрещенной цепи, имеющей сопротивление, определяемые выражениями (VII.30) и (VII.31), после преобразования в эквивалентную неуравновешенную цепь приводит к цепи, изображенной на рис. VII.11. Поскольку сопротивление z_{22} , по-видимому, не представляет интереса, так как в задаче считаются известными только z_{11} и z_{12} , то дополнительную последовательную ветвь в правой части цепи можно опустить.

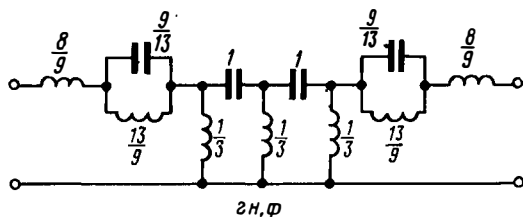


Рис. VII.11

Выше было установлено, что цепь, приведенная на рис. VII.11, реализует сопротивления, определяемые ф-лами (VII.27), в предположении, что $z_{22} = z_{11}$. Для указанных входного сопротивления и сопротивления передачи условие вычетов выполняется со знаком равенства только для пары комплексно-сопряженных полюсов в точке $s = \pm j\sqrt{3}$. Для двух других полюсов условие вычетов выполняется со знаком неравенства, так сказать с «некоторым

запасом надежности» (margin of safety). Этот запас приводит к появлению дополнительных последовательных сопротивлений с обеих сторон цепи (см. рис. VII.11). Если нет особых причин, требующих выполнения условия вычетов со знаком неравенства, то введение запаса надежности не рекомендуется, поскольку тогда в цепи появляются дополнительные элементы и, следовательно, цепь не является наиболее экономичной. В отличие от инженеров-строителей мостов, которые вводят запасы прочности для получения лучших конструкций, инженеры-проектировщики цепей отказываются от введения подобных запасов, так как при синтезе электрических цепей наилучшие результаты обычно получаются, когда необходимые и достаточные условия для реализуемости цепей выполняются без всякого запаса¹.

VII.3. Синтез одного входного сопротивления каскадным (цепным) соединением

Когда известны только одно входное сопротивление и сопротивление передачи, то возможен другой метод синтеза, при котором получают неуравновешенную цепную схему. Построение входного сопротивления можно осуществить таким образом, что если выходная пара зажимов соединяется с противоположным концом цепной схемы, то результирующее сопротивление передачи будет иметь требуемые нули, а его полюсы автоматически будут такими же, как и полюсы заданного входного сопротивления (предполагается, что вырожденные цепи, препятствующие удовлетворению указанного условия, не допускаются). Мы говорим об этом процессе, как о построении входного сопротивления, при котором имеет место управление нулями сопротивления передачи.

Управление нулями сопротивления передачи цепной схемы основано на первоначальном логическом наблюдении, показывающем что такие нули, называемые также *нулями передачи* (zero of transmission), получаются либо когда последовательная ветвь цепной схемы эквивалентна схеме, находящейся в режиме холостого хода, либо когда параллельная ветвь эквивалентна цепи, находящейся в режиме короткого замыкания. Это условие является необходимым для получения нулей передачи, однако оно не всегда достаточно. Сопротивление передачи цепной схемы не обязательно равно нулю в тех случаях, когда сопротивление последовательной ветви равно бесконечности или же сопротивление параллельной

¹ Это замечание автора справедливо, если не предъявляются дополнительные требования к чувствительности или надежности. В ряде случаев для уменьшения чувствительности приходится вводить дополнительные — избыточные элементы. Аналогично обстоит дело и при необходимости повышения надежности. Иными словами, за уменьшение чувствительности и повышение надежности приходится платить введением избыточности, в частности, по числу элементов, т. е. отходить от того, что автор называет «наилучшим результатом» (*прим. ред.*).

ветви равно нулю. Действительно, если данное условие выполняется на какой-либо частоте, на которой сопротивление передачи части цепи, расположенной справа или слева от этой ветви, имеет полюс, то сопротивление передачи всей цепи будет конечным и отличным от нуля.

В § III.4 было показано, что преобразование входного реактивного сопротивления в цепную схему можно осуществить различными способами, используя выделение полюсов из заданного сопротивления и его последующих инвертированных остатков. Там было показано также, что в тех случаях, когда вместо полного устранения полюсов производят только их частичное выделение, этот процесс может дать в результате еще большее разнообразие реализаций цепей. При выделении полюса из сопротивления для получения последовательной ветви в соответствующей цепной схеме сопротивление ветви будет бесконечным на частоте полюса. При выделении полюса из проводимости с целью получения параллельной ветви сопротивление ее будет равно нулю на соответствующей частоте полюса. Однако сопротивления таких ветвей на соответствующих критических частотах не создают нулей передачи полной цепной схемы, если они образуются путем частичного выделения полюсов. Дело в том, что в данном случае оставшаяся после выделения какого-либо полюса функция все еще содержит этот полюс, а поэтому его содержит и сопротивление или проводимость передачи оставшейся цепной схемы, что позволяет осуществить дальнейшее разложение указанной функции-остатка. Для рассматриваемой критической частоты соответствующая последовательная или параллельная ветвь обязательно представляет собой бесконечные сопротивления или проводимость. Однако напряжение или ток в этой ветви также будут равны бесконечности, поэтому обе особые точки (или полюсы) будут простыми. Следовательно, общая передаточная функция не будет иметь критической точки на указанной частоте.

Отмеченное обстоятельство позволяет управлять получением нулей передачи цепной схемы, соответствующей разложению входной реактивной функции. Действительно, если требуется получить нуль передачи, то необходимо полностью выделить соответствующий полюс; если же получение такого нуля на заданной частоте полюса не требуется, то необходимо просто сохранить часть этого полюса в оставшейся функции.

При рассмотрении процесса образования цепной схемы мы видели, что выделение полюса (либо полное, либо частичное) приводит к сдвигу нулей, которые превращаются в полюсы инвертированной оставшейся функции. Поскольку указанным способом можно сдвинуть полюс в любое требуемое положение (используя при необходимости два или больше последовательных этапа сдвига), то становится ясно, что образование заданной входной функции можно осуществить так, чтобы получить любое требуемое распределение нулей передачи.

Для иллюстрации сказанного обратимся к функциям z_{11} и z_{12} , представленным соответствующими выражениями системы ур-ний (VII.21). Все нули рассматриваемой передаточной функции лежат в точке $s = 0$. Поэтому требуемые нули передачи получаются за счет полного выделения полюсов в этой точке из сопротивления z_{11} и (или) его последующих инвертированных остаточных функций, образуемых в процессе непрерывного разложения пятью этапами (поскольку нули полинома z_{12} в точке $s = 0$ пятого порядка). Данный процесс аналогичен процессу разложения в одну из канонических цепей по Кауэру. Вычисление дает

$$\begin{array}{r}
 \frac{3}{8s} \\
 \hline
 8s + 6s^3 + s^5 \mid 3 + \frac{4s^2 + s^4}{4} \mid \frac{32}{7s} \\
 \hline
 3 + \frac{9}{4}s^2 + \frac{3}{8}s^4 \mid \frac{32}{7s} \\
 \hline
 \frac{7}{4}s^2 + \frac{5}{8}s^4 \mid 8s + 6s^3 + s^5 \\
 \hline
 8s + \frac{20}{7}s^3 \mid \frac{49}{88s} \\
 \hline
 \frac{22}{7}s^3 + s^5 \mid \frac{7}{4}s^2 + \frac{5}{8}s^4 \\
 \hline
 \frac{7}{4}s^2 + \frac{49}{88}s^4 \mid \frac{968}{21s} \\
 \hline
 \frac{3}{44}s^4 \mid \frac{22}{7}s^3 + s^5 \\
 \hline
 \frac{22}{7}s^3 \mid \frac{3}{44s} \\
 \hline
 s^5 \mid \frac{3}{44}s^4
 \end{array}
 \tag{VII.32}$$

Результирующая цепь показана на рис. VII.12а. На этом рисунке $L_1 = \frac{8}{3}$; $L_3 = \frac{88}{49}$; $L_5 = \frac{44}{3}$; $C_2 = \frac{7}{32}$ и $C_4 = \frac{21}{968}$.

Поскольку при описанном методе имеется уверенность, что сопротивление z_{12} будет иметь требуемые полюсы и нули, то не требуется контроля постоянного множителя, соответствующего этой функции. Однако, не прибегая к ее полному вычислению, из окончательной цепи легко найти постоянный множитель. Из рис. VII.12а видно, что для очень высоких частот схема вырождается в одну параллельную индуктивность, обратную величину которой можно найти из соотношения

$$\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_5} = \frac{3}{8} + \frac{49}{88} + \frac{3}{44} = 1.
 \tag{VII.33}$$

Следовательно, при $s \rightarrow \infty$ $z_{12} \rightarrow s$, что совпадает с соответствующим поведением сопротивления передачи из системы (VII.21). Поэтому приведенная схема дает точное значение постоянного множителя для функции z_{12} .

Он может быть найден и другим способом, который легко уяснить из рассмотрения асимптотического поведения функции z_{12} при $s \rightarrow 0$. Предположим, что на выходе схемы напряжение равно 1 в, тогда ток, протекающий по индуктивности L_5 , составляет $\frac{1}{L_5 s}$, создавая на емкости C_4 напряжение, равное $\frac{1}{L_5 s} \cdot \frac{1}{C_4 s}$ и близкое по величине напряжению на индуктивности L_3 . Следовательно, ток, протекающий по этой индуктивности, равен $\frac{1}{L_5 s} \frac{1}{C_4 s} \frac{1}{L_3 s}$ и

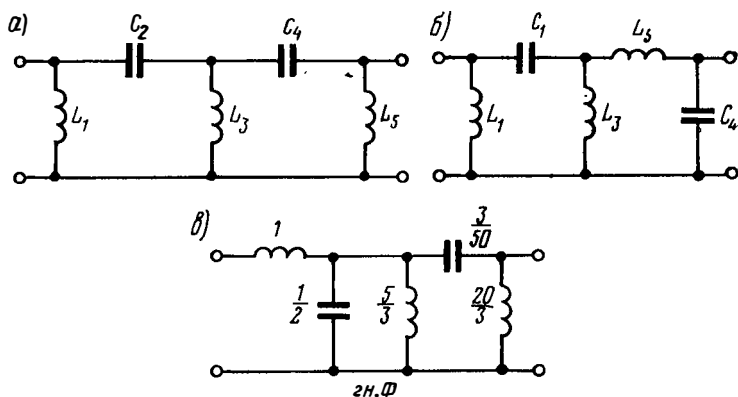


Рис. VII.12

почти равен току, протекающему через емкость C_2 , так как сопротивление ветви L_3 значительно меньше, чем сопротивление ветви C_4 . Продолжая доказательство, можно видеть, что

$$\text{при } s \rightarrow 0 \quad \frac{I_1}{E_2} = \frac{1}{z_{12}} \rightarrow \frac{1}{L_1 C_2 L_3 C_4 L_5 s^5}. \quad (\text{VII.34})$$

Подстановка величин элементов цепи, изображенной на рис. VII.12а, дает

$$\text{при } s \rightarrow 0 \quad z_{12} \rightarrow \frac{8}{3} \times \frac{7}{32} \times \frac{88}{49} \times \frac{21}{968} \times \frac{44}{3} s^5 = \frac{s^5}{3}. \quad (\text{VII.35})$$

Сравнив полученный результат с соответствующим выражением из системы (VII.21), убеждаемся, что снова получился требуемый постоянный множитель.

В рассмотренном простом примере получается такая же функция z_{22} , как и приведенная в системе (VII.21). Это нетрудно установить, если по разложению функции z_{22} , определяемой соот-

ветствующим выражением из указанной системы, построить цепную схему, как это было выше проделано для функции z_{11} . В результате получается цепь, показанная на рис. VII.12а, в чем читатель может убедиться самостоятельно. Таким образом, рассматриваемый четырехполюсник полностью эквивалентен цепям, изображенным на рис. VII.8 и VII.9. Полученный результат весьма интересен, его нельзя предвидеть заранее, если не известны свойства разложений в цепную схему. Частично ввиду перечисленных причин целесообразно располагать несколькими методами синтеза для одного и того же типа задач, поскольку при этом можно получить различные решения, из которых затем выбрать наиболее подходящее с точки зрения практических или каких-либо иных соображений.

В качестве примера рассмотрим функцию z_{11} из системы ур-ний (VII.21) и новую функцию z_{12} , измененную таким образом, чтобы в точке $s = 0$ был нуль третьего порядка, т. е. функцию вида

$$z_{12} = \frac{s^3}{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}. \quad (\text{VII.36})$$

Из этого выражения видно, между прочим, что числитель функции нельзя выбрать равным s^4 или s^2 , поскольку он должен быть нечетным полиномом при четном полиноме знаменателя. Новая функция z_{12} имеет три нуля в точке $s = 0$ и один — в точке $s = \infty$.

Разложение функции z_{11} можно начать аналогично разложению, рассмотренному в предыдущем примере, но процесс нужно прекратить после трех этапов. Функцию-остаток необходимо разложить таким образом, чтобы нуль передачи получился в точке $s = \infty$. Согласно разложению (VII.32), этим остатком является сопротивление

$$z' = \frac{s^2 + \frac{22}{7}}{\frac{3}{44}s} = \frac{44s}{3} + \frac{968}{21s}. \quad (\text{VII.37})$$

Полученная часть цепи состоит из ветвей L_1 , C_2 и L_3 цепи, приведенной на рис. VII.12а. Так как сопротивление передачи данной части цепи имеет полюс в точке $s = \infty$ (что можно увидеть непосредственно), то при выделении из функции z' полюса в точке $s = \infty$ (в виде последовательной ветви) нуль передачи на этой частоте не создается. Он образуется при выделении из последующего инвертированного остатка (проводимость $\frac{21s}{968}$) полюса в точке $s = \infty$ (в виде параллельной ветви). На этом процесс образования цепи заканчивается.

Полученная цепь показана на рис. VII.12б, где величины элементов совпадают с соответствующими величинами элементов цепи на рис. VII.12а. Очевидно, что последние два элемента, C_4 и L_5 , просто поменялись местами. Рассматривая асимптотическое поведение

ние для $s \rightarrow 0$ или $s \rightarrow \infty$, можно установить, что цепь, изображенная на рис. VII.12б, реализует сопротивление передачи (VII.36) с постоянным множителем $\frac{22}{7}$.

Другой подход в решении той же задачи синтеза заключается в том, чтобы начало разложения функции z_{11} было таким, при котором получается нуль передачи в точке $s = \infty$. Поскольку z_{11} имеет полюс в этой точке, можно начать разложение с выделения его, т. е. выделения последовательной ветви. Однако снова данный этап не даст нуля в сопротивлении передачи, поскольку предполагается, что на входе цепи включен источник тока. Поэтому, прежде чем перейти к выделению полюсов в точке $s = 0$, необходимо проделать второй этап в процессе разложения. Запишем процесс вычисления:

$$\begin{array}{r}
 s \\
 s^4 + 4s^2 + 3 \mid s^5 + 6s^3 + 8s \\
 \hline
 s^5 + 4s^3 + 3s \mid \frac{s}{2} \\
 \hline
 2s^3 + 5s \mid s^4 + 4s^2 + 3 \\
 \hline
 s^4 + \frac{5}{2}s^2 \\
 \hline
 \frac{3}{2}s^2 + 3
 \end{array} ; \quad \text{(VII.38)}$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{3}{5s} \\
 5s + 2s^3 \mid 3 + \frac{3}{2}s^2 \\
 \hline
 3 + \frac{6}{5}s^2 \mid \frac{50}{3s} \\
 \hline
 \frac{3}{10}s^2 \mid 5s + 2s^3 \\
 \hline
 5s \mid \frac{3}{20s} \\
 \hline
 2s^3 \mid \frac{3}{10}s^2
 \end{array} . \quad \text{(VII.39)}$$

Выражение (VII.38) относится к первым двум этапам в разложении, дающем нуль передачи в точке $s = \infty$; выражение (VII.39) относится к трем последним этапам, когда для получения трех требуемых нулей функции z_{12} в точке $s = 0$ выделяются полюсы в этой точке.

Результирующая цепь для данного разложения изображена на рис. VII.12в. Рассмотрение ее асимптотического поведения при $s \rightarrow 0$ или $s \rightarrow \infty$ показывает, что сопротивление передачи (VII.36) реализуется в этом случае с постоянным множителем, равным 2.

В качестве дальнейшей иллюстрации метода образования цепной схемы рассмотрим сопротивление:

$$z_{11} = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)(s^2 + 16)}; \quad (\text{VII.40})$$

$$z_{12} = \frac{(s^2 + 25)(s^2 + 36)}{s(s^2 + 4)(s^2 + 16)}. \quad (\text{VII.41})$$

Очевидно, что сопротивление передачи, помимо нуля в точке $s = \infty$ имеет некоторые конечные нули, отличные от нуля. В соответствии с порядком, при котором мы получаем нули передачи, здесь возможны различные цепные схемы. Начнем с получения нуля передачи в точке $s = \infty$, для чего выделим параллельную емкость. Это, разумеется, можно сделать, поскольку проводимость $y_1 = \frac{1}{z_{11}}$ имеет полюс в точке $s = \infty$. Непосредственно находим, что вычет этой проводимости в точке $s = \infty$ равен 1, и, таким образом, первой ветвью цепной схемы является параллельная емкость

$$c_1 = 1. \quad (\text{VII.42})$$

Остаток имеет вид

$$y_2 = y_1 - s = \frac{10s(s^2 + 5,5)}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}. \quad (\text{VII.43})$$

Графики на рис. VII.13а, б, в иллюстрируют процесс образования цепи на данной первоначальной ступени разложения. На рис. VII.13а показана заданная функция реактивного сопротивления z_{11} , а на рис. VII.13б — обратная ей, т. е. реактивная проводимость $y_1 = \frac{1}{z_{11}}$, имеющая полюс в точке $s = \infty$. Вычет в этом полюсе равен наклону асимптоты, а он, в свою очередь, равен величине емкости c_1 . Функция-остаток, y_2 , получающаяся после вычитания асимптоты из функции y_1 , показана на рис. VII.13в, а обратная ей функция, реактивное сопротивление $z_2 = \frac{1}{y_2}$, изображена на рис. VII.13г.

Попробуем теперь получить нуль передачи на частоте $s = \pm j5$, для чего необходимо сдвинуть нуль функции z_2 в указанную точку с тем, чтобы инвертированный остаток имел в ней полюс. Как видно из рис. VII.13г, требуемое смещение нуля можно осуществить путем выделения соответствующей части полюса в точке $s = \infty$, причем эта часть равна наклону прямой линии, проходящей через начало координат и точку на кривой z_2 при частоте $\omega = 5$. Используя выражение (VII.43), получим

$$z_2(j5) = \frac{(-25 + 1)(-25 + 9)}{j50(-25 + 5,5)} = j0,394. \quad (\text{VII.44})$$

Наклон соответствующей прямой, равный индуктивности l_2 последовательной ветви цепной схемы,

$$l_2 = \frac{0,394}{5} = 0,0788. \quad (\text{VII. 45})$$

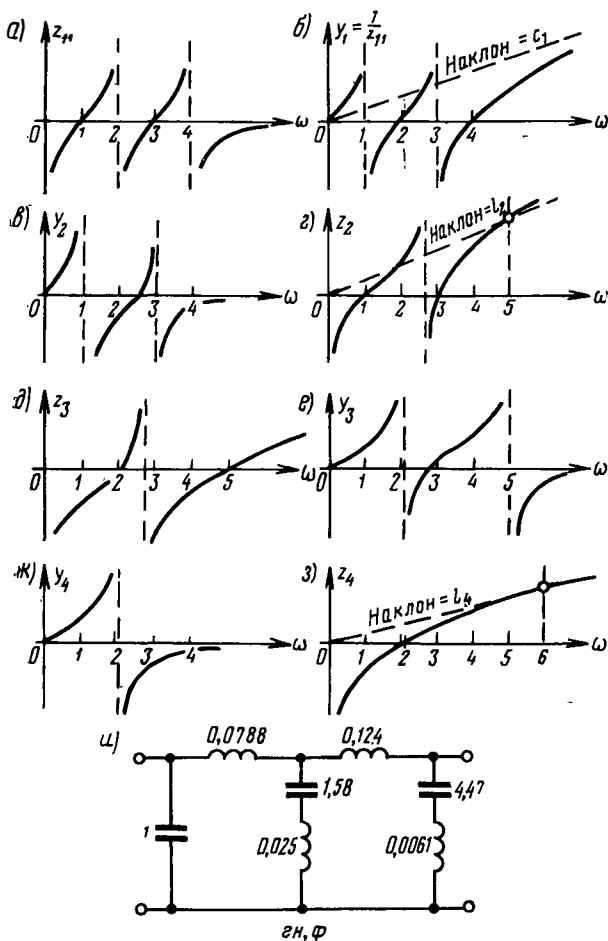


Рис. VII.13

Функция, оставшаяся после вычитания из функции z_2 соответствующего индуктивного сопротивления, имеет вид

$$z_3 = z_2 - l_2 s = \frac{0,212s^4 + 5,66s^2 + 9}{10s(s^2 + 5,5)}. \quad (\text{VII. 46})$$

Полином числителя в выражении (VII.46) должен содержать множитель $(s^2 + 25)$. Представив числитель в виде произведения

сомножителей, получим

$$z_3 = \frac{(s^2 + 25)(0,212s^2 + 0,36)}{10s(s^2 + 5,5)}. \quad (\text{VII. 47})$$

Обратная функция имеет полюс в точке $s = \pm j5$, который теперь необходимо выделить. Следовательно,

$$\frac{1}{z_3} = y_3 \Big|_{s^2 \rightarrow -25} \rightarrow \frac{10s}{s^2 + 25} \left[\frac{s^2 + 5,5}{0,212s^2 + 0,36} \right]_{s^2 = -25} = \frac{39,5s}{s^2 + 25}. \quad (\text{VII. 48})$$

Правая часть этого выражения представляет собой проводимость параллельной ветви, содержащей последовательное соединение элементов l_3 и c_3 со значениями

$$l_3 = \frac{1}{39,5} = 0,0253; \quad c_3 = \frac{39,5}{25} = 1,58. \quad (\text{VII. 49})$$

Графики функций z_3 и y_3 показаны на рис. VII.13д и рис. VII.13е; график функции-остатка, полученной после вычитания проводимости (VII.48) (выделение из функции y_3 полюса в точке $s = \pm j5$), приведен на рис. VII.13ж. Аналитическую операцию вычитания можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} y_3 - \frac{39,5s}{s^2 + 25} &= \frac{s}{s^2 + 25} \left(\frac{10s^2 + 55}{0,212s^2 + 0,36} - 39,5 \right) = \\ &= \frac{s}{s^2 + 25} \left(\frac{1,63s^2 + 40,75}{0,212s^2 + 0,36} \right) = \frac{1,63s}{0,212s^2 + 0,36} = y_4. \end{aligned} \quad (\text{VII. 50})$$

Мы еще должны получить нуль передачи в точке $s = \pm j6$, для чего, как следует из рис. VII.13з, нужно выделить из сопротивления z_4 соответствующую часть его полюса в точке $s = \infty$; при этом нуль сопротивления сдвинется в точку $\omega = 6$. Вычисляем

$$\frac{1}{y_4(j6)} = z_4(j6) = \frac{-0,212 \cdot 36 + 0,36}{j6 \cdot 1,63} = j0,743. \quad (\text{VII. 51})$$

Соответствующая прямая линия, проходящая через начало координат и точку $z_4(j6)$, имеет наклон

$$l_4 = \frac{0,743}{6} = 0,124, \quad (\text{VII. 52})$$

величина которого представляет собой значение последовательной индуктивности следующей ветви цепной схемы. Вычтем индуктивное сопротивление из сопротивления z_4 . Тогда

$$z_5 = z_4 - l_4 s = \frac{s^2 + 36}{163s} = \frac{1}{y_5}. \quad (\text{VII. 53})$$

Проводимость y_5 образует последнюю параллельную ветвь цепной схемы. Она состоит из последовательного соединения элементов l_5 и c_5 со значениями

$$l_5 = \frac{1}{163} = 0,00613; \quad c_5 = \frac{163}{36} = 4,47. \quad (\text{VII. 54})$$

Результирующая цепь, значения элементов которой определяются выражениями (VII.42), (VII.45), (VII.49), (VII.52) и (VII.54), показана на рис. VII.13и. В ней параллельные ветви создают нули передачи в точках $s = \infty$; $s = \pm j5$ и $s = \pm j6$. Последовательные ветви соответствуют тем этапам процесса построения цепной схемы, которые необходимы для того, чтобы нули передачи прихордились на требуемые частоты. Эти этапы можно рассматривать как «сдвиги нулей» (zero-shifting). Этапы, при которых выделяются параллельные ветви цепной схемы, изображенной на рис. VII.13и, рассматриваются как «создание нулей» (zero-producing). Процесс построения цепи состоит, таким образом, из чередования сдвигов нулей и создания нулей.

На рис. VII.14 графически изображены этапы построения другой цепной схемы, реализующей такие же функции (VII.40) и (VII.41) (за исключением последней ветви). В отличие от предыдущей, здесь сдвиг нулей осуществлен при помощи параллельных ветвей, а создание нулей — при помощи последовательных ветвей.

На рис. VII.14а, как и на рис. VII.13б, показан график функции $y_1 = \frac{1}{z_{11}}$, но теперь мы не будем полностью выделять полюс в

точке $s = \infty$, а устраним лишь часть его с тем, чтобы сдвинуть нуль функции y_1 из точки $\omega = 4$ в точку $\omega = 5$. Такой сдвиг нуля эквивалентен выделению параллельной емкостной ветви, в которой величина емкости c_1 равна наклону пунктирной прямой, проходящей через точку функции $y_1(j5)$ при частоте $\omega = 5$. График функции-остатка y_2 , имеющей в этой точке нуль, показан на рис. VII.14б, а график обратной функции z_2 — на рис. VII.14в.

Следующий этап построения цепной схемы заключается в полном выделении полюса функции z_2 в точке $\omega = 5$. В этом случае создается нуль и выделяется последовательная ветвь в виде параллельного контура l_2c_2 , имеющего резонансную частоту $\omega = 5$. График функции-остатка z_3 для указанного случая изображен на рис. VII.14г, а график обратной функции y_3 — на рис. VII.14д. На данном этапе процесса построения цепной схемы заканчивается один цикл сдвига нуля; теперь снова необходимо сдвинуть нуль в соответствующее положение, как было сделано с первоначальной функцией y_1 , график которой приведен на рис. VII.14а.

На этот раз сдвинем нуль в точку $\omega = 6$ (второй требуемый конечный нуль функции z_{12} , отличный от нуля), для чего выделим часть полюса в точке $s = \infty$. Такой шаг соответствует выделению второй параллельной емкости c_3 и образованию функции-остатка y_4 (рис. VII.14е), которая имеет нуль в точке $\omega = 6$. Ясно, что функция z_4 , обратная функции y_4 (рис. VII.14ж), имеет полюс в этой точке, при выделении которого появляется последовательная ветвь в виде параллельного контура l_4c_4 с резонансной частотой $\omega = 6$.

Функция-остаток z_5 имеет теперь в точке $s = 0$ только полюс; обратная ей функция является проводимостью, имеющей лишь.

один полюс в точке $s = \infty$. Полное выделение его, соответствующее появлению в конце схемы параллельной емкости c_5 , обеспечивает создание требуемого нуля передачи в точке $s = \infty$ (рис. VII.14з)

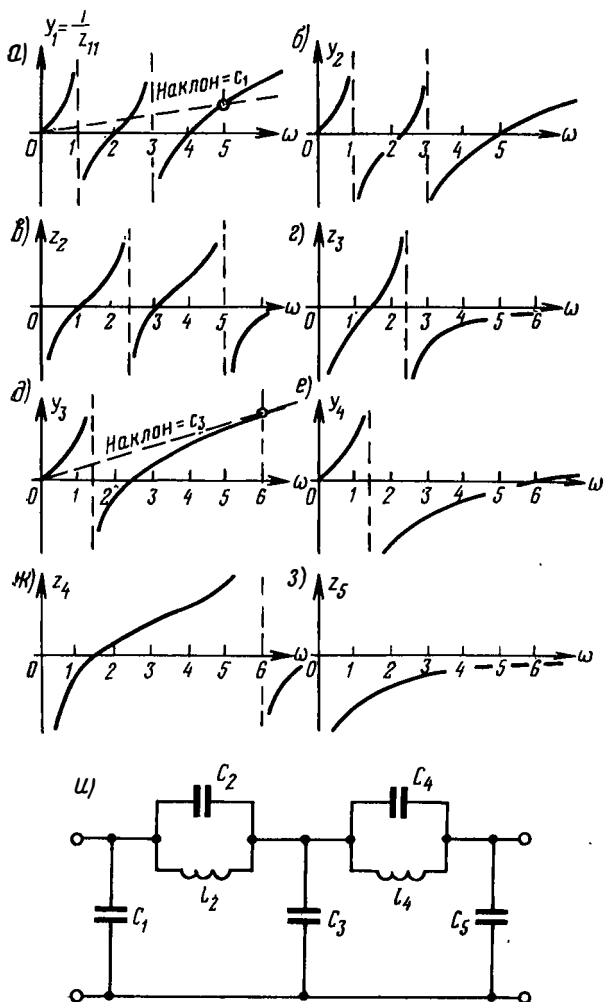


Рис. VII.14

и завершает процесс построения цепного четырехполюсника. Результирующая схема изображена на рис. VII.14и.

Интересно отметить, что структура ее была получена без единого вычисления. Возможность подобного построения структуры цепи (структурная часть синтеза) только при помощи графиков соответствующих функций, как это было сделано на рис. VII.14, полезна на практике, так как экономит труд, затрачиваемый на

проведение вычислительных операций, особенно в процессе выбора оптимальной структуры, наилучшим образом удовлетворяющей поставленной задаче.

Для дальнейшей иллюстрации гибкости данного метода синтеза вернемся к той точке построения схемы, когда требуется выделением второй параллельной емкости c_3 сдвинуть нуль к частоте $\omega = 6$ (рис. VII.14д). График проводимости y_3 показан на рис. VII.15а. Допустим, что на этом этапе производится полное выделение полюса в точке $s = \infty$, что обеспечивается выбором емкости c_3 , равной наклону асимптоты. После выполнения указанных операций получится требуемый нуль передачи в точке $s = \infty$,

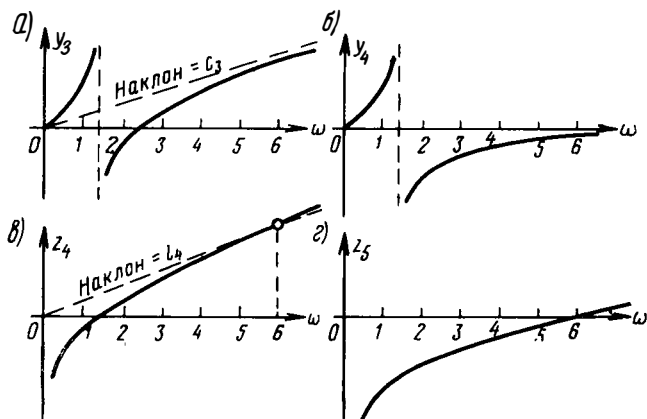


Рис. VII.15

а графики функции-остатка y_4 и обратной ей функции z_4 будут иметь вид, показанный соответственно на рис. VII.15б и VII.15в.

Далее сдвинем нуль в точку $\omega = 6$, для чего выделим из схемы соответствующую последовательную индуктивность l_4 , величина которой равна наклону пунктирной прямой (см. рис. VII.15в), проходящей через точку $z_4(j6)$. После этого шага получим функцию-остаток z_5 (рис. VII.15г), которая описывает поведение последовательного контура $l_5 c_5$ с резонансной частотой $\omega = 6$. Этот контур представляет собой конечную параллельную ветвь искомой цепной схемы и обеспечивает требуемый нуль передачи в данной точке.

Полученная рассмотренным способом цепная схема показана на рис. VII.16. Особенность ее состоит в том, что здесь процесс сдвига нуля обеспечивается и параллельной, и последовательной ветвями. Заметим, что, в отличие от этой реализации, в двух предыдущих реализациях для тех же входного сопротивления и сопротивления передачи сдвиг нуля осуществлялся либо за счет параллельной, либо за счет последовательной ветвей. Таким образом, ветви c_1 и l_4 обуславливают сдвиг нуля, а остальные соответствуют требуемым нулям сопротивления передачи.

В приведенных примерах все необходимые сдвиги нуля обеспечивались посредством частичного выделения полюса в точке $s = \infty$. Иногда может оказаться нужным выделить часть конечного ненулевого полюса или часть полюса в точке $s = 0$. В таких случаях частичное выделение полюса приводит к тому, что все нули, расположенные по обе его стороны, будут двигаться в направлении к полюсу, или, иными словами, — притягиваться к нему. При этом под более сильным влиянием оказываются нули, находящиеся в непосредственной близости от полюса, а не те, которые расположены дальше от него. Следовательно, для того чтобы требуемая величина сдвига обеспечивалась без выделения слишком большой части полюса, сдвиг нулей обычно должен осуществляться за счет ближайшего полюса¹.

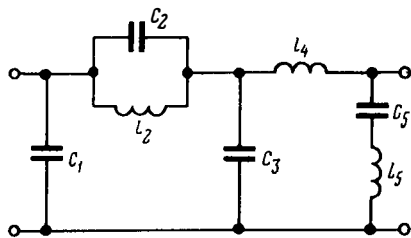


Рис. VII.16

Важно также отметить, что нули в точках $s = 0$ и $s = \infty$ не могут быть сдвинуты частичным выделением следующего смежного полюса, однако эта трудность легко преодолевается путем перехода к функции, обратной входной. Поскольку для сдвига нулей

можно использовать либо последовательные, либо параллельные ветви цепной схемы, данная функция или обратная ей подходят в равной степени. Таким образом, нужный сдвиг нуля можно осуществить всегда при единственном ограничении, требующем, чтобы нули заданного сопротивления или проводимости передачи лежали на мнимой оси. Если же они расположены в комплексной плоскости, то описанный метод синтеза непригоден.

В связи с изложенным может возникнуть вопрос: как удостовериться в том, что разложение входного сопротивления z_{11} продолжается достаточно долго для получения требуемого числа нулей функции z_{12} ? Другими словами, может ли разложение z_{11} закончиться до того, как будут найдены все нули z_{12} ? Или же, после того как это осуществится, — может ли при реализации остаться неразложенная часть функции z_{11} ?

Разумеется, ответ на оба поставленных вопроса будет отрицательным. Анализ предыдущих примеров раскрывает причины такого заключения. Если числитель функции z_{12} представляет собой постоянную, так что все нули передачи лежат в точке $s = \infty$, то соответствующее разложение z_{11} дает каноническую цепь Кауэра и число этапов создания нулей равно степени полинома знаменателя

¹ Затрагиваемый здесь вопрос связан с вредным влиянием паразитных потерь, которые неизбежны в физической структуре. Если остается только небольшая часть полюса, то появление случайных потерь может привести к полному его устранению. Поэтому целесообразно получать требуемый сдвиг в несколько этапов, когда на каждом из них выделяется лишь небольшая часть полюса. Правда, в этом случае потребуется большее количество элементов.

z_{11} либо z_{12} . С другой стороны, если функция z_{12} имеет некоторые (или все) нули в точке $s = 0$, то разложение снова даст каноническую цепь, и общее число элементов и число нулей передачи должно совпадать. Если нужно, чтобы нуль передачи создавался на конечной ненулевой частоте, то может потребоваться один или несколько этапов сдвига нуля. Однако степень разложенного входного сопротивления не уменьшится. Только этапы создания нулей уменьшают степень этой функции и всегда точно на число созданных нулей передачи, т. е. так же, как и в канонических разложениях.

Выше отмечалось, что частичное выделение полюса на этапе сдвига нуля не создает нуля передачи, несмотря на то, что соответствующая последовательная или параллельная ветвь представляет собой бесконечное сопротивление или проводимость на рассматриваемой частоте полюса. Это объясняется тем, что функция-остаток содержит указанный полюс и, следовательно, передаточная функция неразложенной части цепи также будет содержать его. Когда синтез осуществляется по заданным функциям z_{11} и z_{12} , то в данном случае учитывается характер полученной функции z_{22} .

Хотя первоначально предполагалось, что не требуется управлять функцией z_{22} , тем не менее, целесообразно предсказать ее общий вид и остановиться на некоторых, присущих ей особенностях. Рассмотренный метод синтеза в общем случае не дает такой функции z_{22} , для которой во всех полюсах условие вычетов выполнялось бы со знаком равенства. Входное сопротивление z_{22} может даже иметь полюсы¹, отсутствующие у сопротивлений z_{11} или z_{12} . Полезно знать, как получаются такие результаты.

Если сдвиг нуля в начале производится для заданной функции z_{11} , то соответствующий полюс будет одним из полюсов функций z_{11} и z_{12} . Очевидно, что в нем условие вычетов не может быть выполнено со знаком равенства, так как это должно иметь место, когда сопротивление z_{22} выражается через входное сопротивление и сопротивление передачи (например, z'_{11} и z'_{12}) остальной (еще неразложенной) цепной схемы. Несмотря на то, что здесь $z'_{12} = z_{12}$, вычет сопротивления z_{11} в интересующем нас полюсе больше, чем тот, который имеет z'_{11} (на величину, выделенную на этапе сдвига). Поэтому если даже для ряда функций z'_{11} , z'_{12} и z'_{22} условие вычетов выполняется со знаком равенства, то для функций z_{11} , z_{12} и z_{22} оно, несомненно, должно выполняться со знаком неравенства.

¹ В таком полюсе условие вычетов выполняется со знаком равенства только в вырожденном случае, так как $k_{11} = k_{12} = 0$, в то время как $k_{22} \neq 0$. Для того чтобы отличить этот случай от нормального (не вырожденного), когда условие вычетов также выполняется со знаком равенства, последний рассматривают как такой, когда z_{ik} — компактное сопротивление. Термин «компактный» впервые предложил Б. Дашер.

Когда этап сдвига нуля сопротивления сопровождается получением некоторой функции-остатка (в противоположность сопротивлению z_{11}), то рассматриваемый полюс не обязательно будет полюсом z_{11} , потому что полюсы функций-остатков обычно не связаны с полюсами первоначальной функции (ср., например, на рис. VII.13 z_3 с z_{11} или на рис. VII.14 y_3 с y_1). Тем не менее этот полюс содержится в сопротивлении z_{22} полной цепи, поскольку он содержится в сопротивлении z'_{22} неразложженной части цепной схемы. На соответствующей частоте полюса разложенная часть цепи фактически изолирована от неразложженной части последовательной ветвь, создаваемой на данном этапе сдвига нуля.

Исключением в указанной ситуации является только тот случай, когда на некотором последующем этапе разложения полюс полностью выделен с тем, чтобы на рассматриваемой частоте получить нуль передачи. При этом, хотя полюс является собственной частотой внутренней части цепи, он не появляется при возбуждении полной цепи со стороны любого входа.

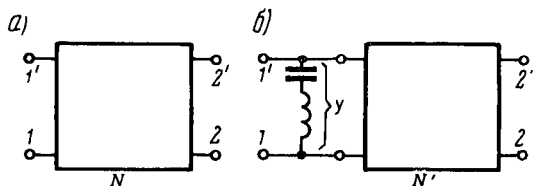


Рис. VII.17

Отсюда ясно, что сдвиг нуля сопротивления (дающий последовательную ветвь при разложении в цепную схему) приведет к тому, что функция z_{22} полной схемы будет иметь вычет, превышающий вычет, необходимый для выполнения условия вычетов со знаком равенства. Если такой вычет получился при некоторой функции-остатке, то обычно этот процесс вносит в сопротивление z_{22} полюсы, не присутствующие ни в одном из заданных сопротивлений z_{11} или z_{12} .

Когда сдвиг нуля осуществляется для проводимости (в этом случае при разложении в цепную схему выделяется параллельная ветвь), то получается тот же эффект в отношении результирующей функции z_{22} , хотя причина этого не столь очевидна, как в рассмотренном выше случае. Однако причину можно установить из следующего. Рассмотрим цепь N , изображенную на рис. VII.17а, и предположим, что ее входное сопротивление z_{11} в режиме холостого хода имеет нуль на частоте $s = s_k$. Если зажимы $1-1'$ в цепи N замкнуты накоротко, эта частота будет одной из ее собственных частот; при этом в режиме холостого хода собственными частотами будут полюсы сопротивления z_{11} , а также полюсы сопротивления z_{22} той же цепи, которые могут быть получены с помощью канонического разложения функции z_{11} .

Рассмотрим далее проводимость $y_1 = \frac{1}{z_{11}}$ и выделим из нее часть полюса в точке $s = s_k$ в виде параллельной ветви y . Это показано на рис. VII.17б, где цепь N' получена при помощи канони-

ческого разложения в цепную схему функции-остатка $z'_{11} = (y_1 - y)^{-1}$. Сопротивление z'_{11} имеет те же нули, что и z_{11} , но полюсы их не одинаковы, так как они в процессе выделения ветви y сдвигаются. Поскольку s_k является нулем функции z'_{11} , то это и есть собственная частота цепи, изображенной на рис. VII.17б, у которой зажимы $1-1'$ замкнуты накоротко. С другой стороны, на частоте $s = s_k$ ветвь y фактически находится в режиме короткого замыкания, и, таким образом, s_k является также собственной частотой данной цепи, когда ее зажимы $1-1'$ разомкнуты. Хотя при этой частоте у сопротивления z_{11} полюс отсутствует (со стороны зажимов $1-1'$ в данном случае имеет место вырожденный случай), частота s_k является полюсом сопротивления z_{22} рассматриваемой цепи в режиме холостого хода. Таким образом, сопротивление z'_{22} , помимо полюсов, совпадающих с полюсами функции z_{11} или z_{22} цепи, приведенной на рис. VII.17а, содержит и этот полюс. Сдвиг нуля проводимости может также создавать дополнительные полюсы в результирующей функции z_{22} .

Исключением является случай, когда имеется нуль функции z_{11} , а следовательно, и нуль функции z_{12} , в точке $s = \infty$ (последнее объясняется тем, что если бы сопротивление z_{12} имело полюс в точке $s = \infty$, то это противоречило бы предположению о том, что функция z_{11} равна там нулю). У цепи, изображенной на рис. VII.17б, ветвь y сводится к емкости. При этом, если нуль функции z_{12} в точке $s = \infty$ получается выделением конечной параллельной емкости, то соответствующая функция z_{22} в данной точке также становится равной нулю. Приведенный пример характеризует упомянутое выше исключение, когда полюс, частично выделенный на этапе сдвига нуля, оказывается, в конечном счете, полностью выделенным при создании нуля передачи.

Следовательно, если заданная функция z_{sk} имеет нули в точке $s = \infty$ и в процессе разложения функции z_{11} (для создания требуемых нулей функции z_{12}) сдвиг нуля производится только при помощи параллельных емкостных ветвей, то результирующая цепь также имеет сопротивление z_{sk} , которое является компактным. Аналогично, если данная функция имеет нули в точке $s = 0$ и в процессе разложения функции производится сдвиг нуля только посредством параллельных индуктивностей, то результирующая цепь также будет иметь сопротивление z_{sk} , которое является компактным. Дуальные результаты получаются и для проводимостей.

Выясним далее вопрос о том, являются ли для заданной цепи сопротивления z_{sk} компактными, т. е. такими, что условие вычетов выполняется со знаком равенства. Выше, в § VII.1, отмечалось, что когда это условие выполняется со знаком равенства во всех полюсах, то определитель z имеет только простые полюсы; и наоборот, если известно, что определитель z имеет только простые полюсы, то условие вычетов должно выполняться со знаком равенства во всех полюсах.

Рассмотрим теперь четырехполюсник без потерь, нагруженный на выходной паре зажимов на резистивное сопротивление R . Легко найти, что входное сопротивление четырехполюсника определяется выражением

$$Z_1 = \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}^2 + z_{11}R}{z_{22} + R}. \quad (\text{VII.55})$$

Из этого выражения видно, что если определитель $|z| = z_{11}z_{22} - z_{12}^2$ имеет только простые полюсы, то входное сопротивление регулярно в рассматриваемых точках на мнимой оси (за исключением вырожденного случая, когда сопротивление z_{11} имеет полюс, отсутствующий у сопротивления z_{12} или z_{22} , т. е. того случая, который в данный момент исключается из рассмотрения). Поскольку знаменатель выражения (VII.55), $z_{22} + R$, не может равняться нулю на мнимой оси, то отсюда вытекает следующее предложение:

Сопротивление Z_1 не может иметь полюсов на мнимой оси, если определитель $|z|$ имеет только простые полюсы, содержащиеся во всех трех сопротивлениях z_{sk} ; и, наоборот, если сопротивление Z_1 не имеет полюсов на мнимой оси, то определитель $|z|$ может иметь только простые полюсы.

(VII.56)

С учетом рассмотренного выше условия вычетов это предложение можно сформулировать (за исключением случаев вырождения) в другом виде:

Сопротивление Z_1 не может иметь полюсов на мнимой оси, если сопротивления z_{sk} , характеризующие четырехполюсник без потерь, являются компактными; и, наоборот, если сопротивление Z_1 не имеет полюсов на мнимой оси, то сопротивления z_{sk} должны образовывать ряд компактных сопротивлений.

(VII.57)

Однако полюсы функции Z_1 являются собственными частотами цепи, входные зажимы которой находятся в режиме холостого хода (это применимо в равной степени и к цепям без потерь). Поэтому можно сказать, что если четырехполюсник без потерь, нагруженный со стороны одной из пар зажимов на резистивное сопротивление, не имеет собственных частот на мнимой оси, то (за исключением вырожденных случаев¹ сопротивления z_{sk} образуют ряд компактных сопротивлений. При этом не имеет значения, к какой из пар зажимов четырехполюсника подключается указанное резистивное сопротивление.

Исключения, связанные с вырожденными случаями, соответствуют обратному утверждению в предложении (VII.57). Таким

¹ Эти случаи обусловлены только полюсом сопротивления z_{11} или z_{22} .

образом, сопротивление Z_1 не имеет того полюса на мнимой оси, который содержится в сопротивлении z_{22} (но не в z_{11} или z_{12}). Следовательно, отсутствие данного полюса в Z_1 не гарантирует выполнения условия компактности на этой частоте. Несмотря на то, что в рассматриваемом случае резистивное сопротивление со стороны входа 2 действительно изолировано на соответствующей частоте полюса, последняя не является собственной частотой при возбуждении цепи со стороны входа. Здесь цепь возбуждается со стороны входа 2, а со стороны входа 1 она нагружена на резистивное сопротивление.

Учитывая сказанное, нетрудно видеть, что любое разложение, при котором требуется осуществить сдвиг нуля, может, вообще говоря, не дать функцию z_{ik} , удовлетворяющую условию компактности во всех полюсах. Для цепей, изображенных на рис. VII.13и и VII.16, применялись частичные выделения полюса в точке $s = \infty$ из функций-остатков сопротивления; при этом получались функции z_{ik} , удовлетворяющие условию компактности во всех полюсах, кроме полюса в точке $s = \infty$. Разложение, приводящее к цепи, показанной на рис. VII.14з, служит примером одного из особых случаев, когда при сдвиге нуля результирующая функция z_{ik} удовлетворяет условию компактности во всех полюсах. Для канонических цепных схем, приведенных на рис. VII.12а, б, в, где отсутствуют этапы сдвига нулей, условие компактности выполняется, конечно, во всех полюсах.

VII.4. Синтез каскадных включенных четырехполюсников

С практической точки зрения важно, что существуют общие методы синтеза четырехполюсников без потерь, приводящие к неуравновешенным схемам, реализация которых не представляет труда (разумеется, кроме реализации элементов без потерь). Несмотря на то, что рассмотренный в предыдущем параграфе метод приводит к практически полезным (в указанном смысле) схемам, он может быть применим только в тех случаях, когда нули передачи расположены на вещественных частотах (точки на мнимой оси плоскости комплексной частоты). Целесообразно устранить это ограничение, сохраняя основные особенности схемы, используемой при данном методе синтеза, а именно: а) чтобы схема была неуравновешенной; б) чтобы, используя независимые части цепи, можно было управлять нулями передачи и, следовательно, выбирать соответствующие значения этих нулей.

Когда нули передачи расположены на комплексных частотах, мы видим, что все еще возможно независимо управлять нулями передачи, но не с помощью отдельных ветвей, как это было для цепной схемы. В этом случае необходимо применить каскадное включение отдельных четырехполюсников, как показано на рис. VII.18а, каждый из которых содержит ряд комплексных нулей передачи. Под словом «ряд» подразумеваются две пары комплекс-

но-сопряженных чисел, обратных друг другу по знаку. Выше отмечалось, что нули передаточной функции цепи без потерь (нули четного или нечетного полинома) образуют диаграмму в плоскости комплексной частоты, симметричную как относительно вещественной, так и мнимой оси. Следовательно, эти комплексные нули появляются в виде четверок¹.

Каждый из четырехполюсников каскадной схемы, изображенной на рис. VII.18а (в дальнейшем будем называть его «нулевым звеном» — zero section), создает один ряд четверок комплексных нулей передачи. Его всегда можно реализовать в виде неуравновешенной схемы (либо в виде Т-образной перекрытой, либо в виде двойной Т-образной схемы), причем во многих случаях эта схема не требует применения взаимных индуктивностей.

Обозначим входные сопротивления и сопротивление передачи составной цепи без потерь соответственно через Z_{11} , Z_{22} и Z_{12} , а

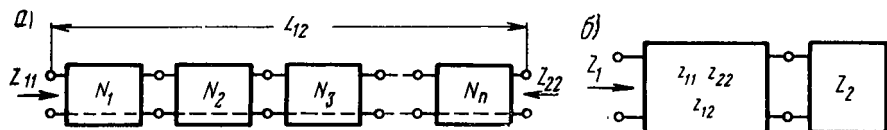


Рис. VII.18

аналогичные сопротивления отдельного четырехполюсника — через z_{11} , z_{22} и z_{12} . Покажем, в частности, как можно получить из заданного входного сопротивления Z_{11} или из некоторой типовой промежуточной функции-остатка Z_1 ряд сопротивлений z_{11} , z_{22} и z_{12} , характеризующих отдельный четырехполюсник (реализуемый в виде требуемой схемы), создающий одну четверку нулей функции z_{12} и имеющий функцию-остаток Z_2 (реализуемую в виде LC схемы) точно такую же, как и функция Z_1 .

Указанный типовой этап формирования цепи, приведенной на рис. VII.18б, можно затем повторять до тех пор, пока не исчезнет остаток. Предполагается, что любые нули на мнимой оси, которые могла иметь первоначально заданная функция Z_{12} (за исключением возможного нуля в точке $s = 0$ или в точке $s = \infty$), получаются в результате предыдущего разложения в цепную схему согласно уже рассмотренным выше методам, причем данная цепь является продолжением (в соответствующим образом измененной форме) такого процесса образования каскадной цепи.

Несмотря на то, что каждый из четырехполюсников в каскадном соединении, изображенном на рис. VII.18а, является компактной схемой, составной четырехполюсник не будет обладать этим

¹ Здесь рассматривается метод синтеза цепи, содержащей такие четверки нулей. Далее будет показано, что метод применим и для тех случаев, когда используется соответствующим образом модифицированная схема, для которой пары нулей расположены на вещественной оси.

свойством. Однако в большинстве случаев можно построить системы, общие сопротивления которых удовлетворяют условию компактности во всех полюсах, за исключением полюсов в точках $s = 0$ и $s = \infty$. Поэтому если подобный составной четырехполюсник нагружен на одном конце на резистивное сопротивление, то конечные ненулевые частоты цепи, на которых это сопротивление действительно может быть изолировано, будут только комплексными. Следовательно, никакие конечные ненулевые частоты на мнимой оси не могут быть собственными частотами этой системы.

Из анализа типовой каскадной схемы, приведенной на рис. VII.18б, и из предположения, что цепь без потерь с сопротивлениями z_{11} , z_{22} и z_{12} создает четверку комплексных нулей передачи в сопряженных точках $s = \pm s_0$ и $s = \pm \bar{s}_0$ (причем $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$), видно, что простейшая форма соответствующего сопротивления передачи имеет вид

$$z_{12} = \frac{Kt(s)}{s(s^2 - s_a^2)}, \quad (\text{VII.58})$$

где K — положительная вещественная постоянная, а нули передачи определяются выражением

$$t(s) = (s^2 - s_0^2)(s^2 - \bar{s}_0^2) = [(s + \sigma_0)^2 + \omega_0^2][(s - \sigma_0)^2 + \omega_0^2]. \quad (\text{VII.59})$$

Разложение на элементарные дроби передаточной функции, определяемой ф-лой (VII.58), имеет вид

$$z_{12} = Ks + \frac{k_0}{s} - \frac{2k_{12}s}{s^2 - s_a^2}, \quad (\text{VII.60})$$

где $-k_{12}$ — вычет функции в полюсе на мнимой оси в точке $s = s_a$, а члены для комплексно-сопряженной пары этих полюсов находятся обычным способом. Соответствующие входные сопротивления можно записать в виде

$$z_{11} = Ks + \frac{k_0}{s} + \frac{2k_{11}s}{s^2 - s_a^2} \quad (\text{VII.61})$$

и

$$z_{22} = Ks + \frac{k_0}{s} + \frac{2k_{22}s}{s^2 - s_a^2}. \quad (\text{VII.62})$$

Соотношения (VII.61) и (VII.62) справедливы при условии, что

$$k_{11}k_{22} - k_{12}^2 = 0. \quad (\text{VII.63})$$

Условие (VII.63) должно выполняться автоматически, поскольку функция Z_1 не имеет полюса в точке $s = s_a$. Таким образом, при замене в ур-нии (VII.55) Z_2 на R становится очевидным, что если Z_1 не имеет полюса в точке s_a , то определитель z должен иметь в

этой точке простой полюс и, следовательно, условие вычетов должно выполняться со знаком равенства.

Несмотря на то, что, как предполагается, все три сопротивления имеют одинаковые вычеты в своих полюсах в точках $s = \infty$ и $s = 0$, на их вычеты в полюсах на мнимой оси в точке $s = s_a$ не накладывается никаких ограничений, кроме условия (VII.63). Позже будет показано, что относительно произвольный выбор указанных сопротивлений является единственным возможным допущением в случае, если для их реализации необходима простая схема неуравновешенной цепи.

Используя ур-ние (VII.58), находим вычеты функции z_{12} :

$$k_0 = \frac{Kt(0)}{-s_a^2}; \quad (\text{VII.64})$$

$$k_{12} = \frac{Kt(s_a)}{-2s_a^2}. \quad (\text{VII.65})$$

Предположим, что входное сопротивление для соответствующего этапа построения цепи имеет вид

$$\begin{aligned} Z_1 &= A \frac{sp(s)}{q(s)} + \frac{\rho_0}{s} + \rho_\infty s = \\ &= A \frac{s(s^2 - s_{p_1}^2)(s^2 - s_{p_2}^2) \dots (s^2 - s_{p_{n-1}}^2)}{(s^2 - s_1^2)(s^2 - s_2^2) \dots (s^2 - s_n^2)} + \frac{\rho_0}{s} + \rho_\infty s. \end{aligned} \quad (\text{VII.66})$$

Здесь A — положительная вещественная постоянная, а простые нули и полюсы на мнимой оси, как обычно, чередуются. Остаточная функция Z_2 должна иметь тот же вид, что и функция Z_1 , включая полиномы, степени которых на четыре единицы ниже степеней полиномов $sp(s)$ и $q(s)$ соответственно. Весьма важным в отношении функции Z_1 является тот факт, что она имеет полюсы в точках $s = 0$ и $s = \infty$.

В данном случае аналитическую зависимость между пятью сопротивлениями z_{11} , z_{12} , z_{22} , Z_1 и Z_2 можно записать в виде

$$(z_{11} - Z_1)(z_{22} + Z_2) = z_{12}^2 = \frac{K^2 t^2(s)}{s^2(s^2 - s_a^2)^2}. \quad (\text{VII.67})$$

Из рассмотрения разложений функций Z_1 и z_{11} , определяемых соответственно ф-лами (VII.66) и (VII.61), ясно, что множитель $(z_{11} - Z_1)$ [см. выражение (VII.67)] имеет знаменатель вида $s(s^2 - s_a^2)q$; из ур-ния (VII.62) видно, что знаменатель множителя $(z_{22} + Z_2)$ должен, кроме того, содержать множители вида $s(s^2 - s_a^2)$. Правая часть соотношения (VII.67) содержит в числителе множитель $t^2(s)$, который поэтому должен появиться также в левой части указанного соотношения. Мы не можем ввести этот

множитель в функцию $(z_{22} + Z_2)$, поскольку она является положительной вещественной функцией LC схемы и, следовательно, может иметь нули только на мнимой оси. Поэтому рассматриваемый множитель должен быть включен в числитель функции $(z_{11} - Z_1)$, которая, благодаря знаку минус в скобках, может его содержать. Таким образом, сомножители в левой части ур-ния (VII.67) будут определяться выражениями

$$(z_{11} - Z_1) = \frac{K^2 t^2 h}{s(s^2 - s_a^2)q}; \quad (\text{VII.68})$$

$$(z_{22} + Z_2) = \frac{q}{s(s^2 - s_a^2)h}. \quad (\text{VII.69})$$

Полином $h(s)$ в числителе множителя $(z_{11} - Z_1)$ должен быть четным полиномом степени $(n - 2)$ от переменной s^2 , так как весь множитель должен представлять собой отношение полиномов, которые являются соответственно четным и нечетным. Он должен иметь так же, как и полиномы z_{11} и Z_1 , простой полюс в точке $s = \infty$. Таким образом, можно сказать, что, поскольку знаменатель этого множителя имеет степень $(2n + 3)$, числитель должен иметь степень $(2n + 4)$, полином $t(s)$ — четвертую, а полином $t^2(s)$ — восьмую. При этом требуется, чтобы полином $h(s)$ имел степень $(2n - 4)$ или, как четный полином, — степень $(n - 2)$ от переменной s^2 . Теперь нетрудно найти полное выражение для множителя $(z_{22} + Z_2)$, представленного дробью (VII.69), так как, кроме знаменателя $s(s^2 - s_a^2)$, он должен иметь другие множители такого вида, при которых левые и правые части ур-ния (VII.67) оказываются равными.

По существу, задача заключается в том, чтобы построить полином $h(s)$ в виде

$$h(s) = H(s^2 - s_{h_1}^2)(s^2 - s_{h_2}^2) \dots (s^2 - s_{h_{n-2}}^2) \quad (\text{VII.70})$$

и определить конечные ненулевые полюсы s_a функции z_{ih} . Если они будут известны, то функцию z_{ih} цепи, создающей требуемый нуль передачи (нулевое звено), и функцию-остаток Z_2 можно легко найти из соответствующих множителей в ур-ниях (VII.68) и (VII.69).

Для нахождения полинома $h(s)$ используем ур-ние (VII.68), откуда видно, что рациональная функция

$$\frac{h(s)}{q(s)} = \frac{s(s^2 - s_a^2)(z_{11} - Z_1)}{K^2 t^2(s)} \quad (\text{VII.71})$$

может быть записана в виде разложения на элементарные дроби.

Типовая пара его членов для комплексно-сопряженной пары полюсов в точке $s = \pm s_v$ определяется выражением

$$\frac{-s_v (s_v^2 - s_a^2) k_v}{K^2 t^2 (s_v)} \left(\frac{1}{s - s_v} - \frac{1}{s + s_v} \right) = \frac{-2s_v^2 k_v}{K^2 t^2 (s_v)} \frac{s_v^2 - s_a^2}{s^2 - s_v^2}, \quad (\text{VII.72})$$

где вычеты функции $Z_1(s)$ в этих конечных ненулевых полюсах можно найти из соотношения

$$k_v = \left[\frac{A(s - s_v) s p(s)}{q(s)} \right]_{s=s_v} = \left[\frac{A(s^2 - s_v^2) p(s)}{2q(s)} \right]_{s=s_v}. \quad (\text{VII.73})$$

Таким образом, функция $\frac{h}{q}$ имеет вид

$$\frac{h(s)}{q(s)} = \frac{1}{K^2} \sum_{v=1}^n m_v \left(\frac{s_v^2 - s_a^2}{s^2 - s_v^2} \right), \quad (\text{VII.74})$$

где

$$m_v = \frac{-2s_v^2 k_v}{t^2 (s_v)}. \quad (\text{VII.75})$$

Поскольку степень полинома $h(s)$, как полинома от переменной s^2 , является $(n - 2)$, а степень полинома $q(s) - n$, рациональная функция, определяемая ф-лой (VII.74), должна при большом s обладать теми же свойствами, что и дробь $\frac{1}{s^4}$. Для того чтобы показать это, определим асимптотическое поведение функции (VII.74). Запишем

$$\frac{1}{s^2 - s_v^2} = \frac{1}{s^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{s_v^2}{s^2}} \right) = \frac{1}{s^2} \left(1 + \frac{s_v^2}{s^2} + \frac{s_v^4}{s^4} + \dots \right). \quad (\text{VII.76})$$

Из этого выражения следует, что должно выполняться равенство

$$\sum_{v=1}^n m_v (s_v^2 - s_a^2) = 0. \quad (\text{VII.77})$$

Тогда постоянный множитель H в выражении (VII.70) можно записать в виде

$$H = \frac{1}{K^2} \sum m_v s_v^2 (s_v^2 - s_a^2). \quad (\text{VII.78})$$

Используя ур-ние (VII.77), найдем конечную ненулевую пару полюсов функции z_{sh} :

$$s_a^2 = \frac{\sum m_v s_v^2}{\sum m_v}. \quad (\text{VII.79})$$

Поскольку m_v — положительные, а s_a^2 — отрицательные вещественные числа, величина s_a^2 , как это и должно быть, оказывается отрицательной вещественной.

Если считать, что m_v представляют собой ряд масс, расположенных в точках s_v^2 на оси отрицательных вещественных величин s_v^2 , тогда s_a^2 можно рассматривать как центр тяжести этих масс. Такое толкование приводит к удобным физическому и геометрическому способам, позволяющим ясно представить определение полюса s_a .

В ур-нии (VII.78) для H величины $m_v (s_v^2 - s_a^2)$ можно рассматривать как ряд сил, отрицательных слева и положительных справа от точки s_a^2 ; алгебраическая сумма этих сил равна нулю, как видно из рис. VII.19. Таким образом, умножение в выражении (VII.78) на $s_v^2 < 0$ и последующее суммирование должно дать в результате положительное значение для величины H .

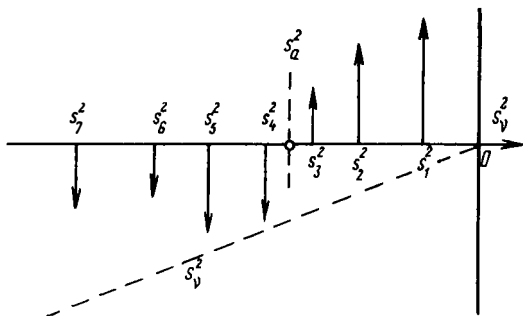


Рис. VII.19

Учитывая разложения (VII.61) и (VII.62) для сопротивлений z_{11} и z_{22} и условие, согласно которому остаток Z_2 (как и функция Z_1) должен иметь полюсы в точках $s = 0$ и $s = \infty$, находим, что в точке $s = 0$ должны выполняться соотношения

$$(sz_{11})_{s=0} \geq k_0 = \frac{Kt(0)}{-s_a^2} \text{ и } [s(z_{22} + Z_2)]_{s=0} > \frac{Kt(0)}{-s_a^2}, \quad (\text{VII.80})$$

а в точке $s = \infty$ — соотношения

$$\left(\frac{z_{11}}{s}\right)_{s=\infty} \geq K \text{ и } \left(\frac{z_{22} + Z_2}{s}\right)_{s=\infty} > K. \quad (\text{VII.81})$$

Учитывая выражения (VII.68) и (VII.69), соотношения (VII.80) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{K^2 t^2(0) h(0)}{-s_a^2 q(0)} + \rho_0 \geq \frac{Kt(0)}{-s_a^2} \text{ и } \frac{q(0)}{-s_a^2 h(0)} > \frac{Kt(0)}{-s_a^2}, \quad (\text{VII.82})$$

а соотношения (VII.81) в виде

$$K^2 H + \rho_\infty \geq K \text{ и } \frac{1}{H} > K. \quad (\text{VII.83})$$

Поскольку $t(0) = |s_0|^4$, выражения (VII.82) и (VII.83) можно представить так:

$$0 < 1 - K |s_0|^4 \frac{h(0)}{q(0)} \leq \frac{-s_a^2}{K |s_0|^4} \rho_0; \quad (\text{VII.84})$$

$$0 < 1 - HK \leq \frac{\rho_\infty}{K}. \quad (\text{VII.85})$$

Наконец, используя ур-ние (VII.74), вновь переписываем неравенство (VII.84) в виде

$$0 < K - |s_0|^4 \sum \frac{m_\nu}{-s_\nu^2} (s_\nu^2 - s_a^2) \leq \frac{-s_a^2}{|s_0|^4} \rho_0. \quad (\text{VII.86})$$

Подстановка выражения (VII.78) в неравенство (VII.85) дает

$$0 < K - \sum m_\nu s_\nu^2 (s_\nu^2 - s_a^2) \leq \rho_\infty. \quad (\text{VII.87})$$

Два последних соотношения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} 0 < K - a &\leq b \\ 0 < K - c &\leq d \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VII.88})$$

Анализ показывает, что совместное выполнение последних неравенств при единственном значении величины K возможно только в том случае, если

$$-b < (a - c) < d. \quad (\text{VII.89})$$

В соответствии с выражениями (VII.86) и (VII.87) (и учитывая, что $s_\nu^2 < 0$) имеем

$$(a - c) = |s_0|^2 \sum \left(\left| \frac{s_0}{s_\nu} \right|^2 + \left| \frac{s_\nu}{s_0} \right|^2 \right) m_\nu (s_\nu^2 - s_a^2). \quad (\text{VII.90})$$

Введем весовую функцию

$$w_\nu = \left| \frac{s_0}{s_\nu} \right|^2 + \left| \frac{s_\nu}{s_0} \right|^2, \quad (\text{VII.91})$$

ряд взвешенных масс

$$\hat{m}_\nu = w_\nu m_\nu, \quad (\text{VII.92})$$

и центр тяжести этих масс

$$\hat{s}_a^2 = \frac{\sum \hat{m}_\nu s_\nu^2}{\sum \hat{m}_\nu}. \quad (\text{VII.93})$$

Тогда выражение (VII.90) можно записать в виде

$$(a - c) = |s_0|^2 (\hat{s}_a^2 - s_a^2) \sum \hat{m}_\nu. \quad (\text{VII.94})$$

Таким образом, единственное положительное вещественное значение K , удовлетворяющее совместному выполнению неравенств (VII.86) и (VII.87), возможно при условии, что

$$-\left|\frac{s_a}{s_0}\right|^2 \rho_0 < |s_0|^4 (\hat{s}_a^2 - s_a^2) \sum \hat{m}_v < |s_0|^2 \rho_\infty. \quad (\text{VII.95})$$

Поскольку величина, стоящая в левой части неравенства (VII.95), отрицательна, а в правой — положительна, центр тяжести взвешенных масс может лежать с любой стороны от центра тяжести невзвешенных масс.

Если в весовой функции, определяемой выражением (VII.91), величину s_v^2 рассматривать в данный момент времени как непрерывную переменную, то нетрудно видеть, что эта функция будет иметь вид кривой, изображенной на рис. VII.20. Если величина

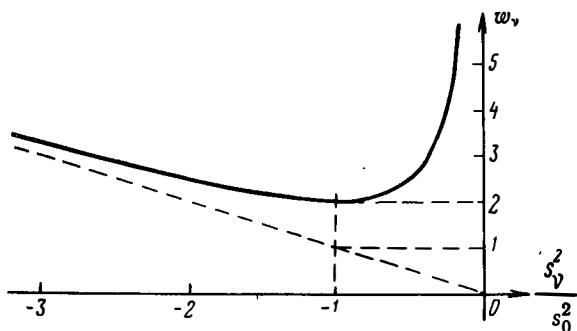


Рис. VII.20

$|s_0|$ мала по сравнению с $|s_a|$, то на нормализованной оси абсцисс этого рисунка все (или почти все) точки s_1^2, \dots, s_n^2 лежат слева от точки -1 и влияние весовой функции заключается в сдвиге центра тяжести \hat{s}_0^2 влево от точки s_a^2 настолько, чтобы величина $(\hat{s}_0^2 - s_a^2)$ стала отрицательной. Аналогично если значение $|s_0|$ велико по сравнению с $|s_a|$, то точки s_1^2, \dots, s_n^2 находятся справа от точки -1 на рис. VII.20 и весовая функция приведет к такому сдвигу точки \hat{s}_0^2 вправо от точки s_a^2 , что величина $(\hat{s}_0^2 - s_a^2)$ станет положительной. Однако при малом $|s_0|$ модуль величины $(\hat{s}_0^2 - s_a^2)$ не может превысить величины $|s_n^2 - s_a^2|$ или при большом $|s_0|$ — величины $|s_a^2 - s_1^2|$; если $|s_0|$ и $|s_a|$ не отличаются заметно, тогда $(\hat{s}_0^2 - s_a^2)$ будет достаточно малой величиной, так как весовая функция только незначительно сдвигает центр тяжести масс.

При рассмотрении возможности выполнения неравенства (VII.95) необходимо обратить внимание на зависимость величины \hat{m}_v от s_0 , определяемую выражениями (VII.59), (VII.75), (VII.91) и (VII.92). Так, при больших значениях $|s_0|$ имеет место прибли-

женное равенство $t^2(s_v) \approx |s_0|^8$. Поскольку ω_v изменяется пропорционально $|s_0|^2$, а m_v — обратно пропорционально $|s_0|^8$, то \hat{m}_v изменяется обратно пропорционально $|s_0|^8$.

Тогда величина в центре ф-лы (VII.95) изменяется обратно пропорционально $|s_0|^2$; поскольку она положительна, правая часть этого неравенства удовлетворяется. Однако величина, стоящая в правой его части, прямо пропорциональна $|s_0|^2$, и, таким образом, все неравенство (VII.95) удовлетворяется. С другой стороны, при малых значениях $|s_0|$ из ур-ния (VII.59) следует, что $t^2(s_0) \approx s_0^8$. Величина ω_v теперь изменяется обратно пропорционально $|s_0|^2$ так же, как и \hat{m}_v , ибо m_v , по существу, не зависит от $|s_0|$. При этом величина в центре неравенства (VII.95) изменяется прямо пропорционально $|s_0|^2$ и, поскольку она отрицательна, левая часть его удовлетворяется. Величина левой части неравенства, обратно пропорциональная $|s_0|^2$, в данном случае очень велика, и, таким образом, рассматриваемое неравенство вновь удовлетворяется. Наконец, в промежуточном случае, когда $|s_0|$ и $|s_a|$ отличаются друг от друга незначительно, неравенство (VII.95) также может быть выполнено, поскольку $(s_a^2 - s_0^2)$ невелико.

Важно заметить, что значения величин ρ_0 и ρ_∞ на любом этапе разложения можно увеличить за счет частичного выделения полюса проводимости $Y_1(s) = \frac{1}{z_1(s)}$. Если представить разложение полинома $Z_1(s)$ на элементарные дроби в виде

$$Z_1(s) = \frac{2sk_1}{s^2 + \omega_1^2} + \frac{2sk_3}{s^2 + \omega_3^2} + \dots + \frac{\rho_0}{s} + \rho_\infty s, \quad (\text{VII.96})$$

а разложение соответствующей проводимости в виде

$$Y_1(s) = \frac{2sk_2}{s^2 + \omega_2^2} + \frac{2sk_4}{s^2 + \omega_4^2} + \dots, \quad (\text{VII.97})$$

то

$$\frac{1}{\rho_0} = [sZ_1(s)]_{s=0}^{-1} = \left[\frac{Y_1(s)}{s} \right]_{s=0} = \frac{2k_2}{\omega_2^2} + \frac{2k_4}{\omega_4^2} + \dots \quad (\text{VII.98})$$

и

$$\frac{1}{\rho_\infty} = \left[\frac{Z_1(s)}{s} \right]_{s=\infty}^{-1} = [sY_1(s)]_{s=\infty} = 2k_2 + 2k_4 + \dots \quad (\text{VII.99})$$

Уменьшение величины k посредством частичного выделения полюса полинома $Y_1(s)$, очевидно, приводит в результате к меньшим значениям величин $\frac{1}{\rho_0}$ и $\frac{1}{\rho_\infty}$ и, следовательно, позволяет расширить допустимые пределы изменения в неравенстве (VII.95).

Вновь обратившись к неравенствам (VII.86) и (VII.87), замечаем, что выполнение первого из них со знаком равенства означает,

что вычет сопротивления z_{11} в точке $s = 0$ равен k_0 , и, значит, нет необходимости выделять последовательную емкостную ветвь на входе нулевого звена. Аналогично выполнение второго со знаком равенства означает, что вычет сопротивления z_{11} в точке $s = \infty$ равен единице, и нет необходимости выделять последовательную индуктивную ветвь на входе нулевого звена. Используя для обоих неравенств (VII.86) и (VII.87) соотношения (VII.88), можно убедиться, что возможность выделения последовательной емкости существует при

$$-b < (a-c) \leq d-b, \quad (\text{VII.100})$$

а последовательной индуктивности при

$$d-b \leq (a-c) < d. \quad (\text{VII.101})$$

Когда значения $|s_0|$ малы, выражение $(a-c)$ — отрицательно и неравенство (VII.100) выполняется всякий раз, если выполняется неравенство (VII.89); с другой стороны, когда значения $|s_0|$ велики, величина b мала и рассматриваемое неравенство становится несколько жестче, чем неравенство (VII.89). При больших значениях $|s_0|$ выражение $(a-c)$ — положительно, поэтому неравенство (VII.101) выполняется всякий раз, если выполняется неравенство (VII.89); с другой стороны, при небольших значениях $|s_0|$ величина d мала и рассматриваемое неравенство становится несколько жестче, чем неравенство (VII.89).

Несмотря на то, что одновременное выделение последовательной индуктивности и последовательной емкости маловероятно, возможность выделения той или иной из них вполне очевидна. При частичном выделении полюса функции $Y_1(s)$, как отмечалось выше, можно убрать последовательную ветвь при исключении параллельной ветви всякий раз, когда такой прием целесообразен.

Наконец, необходимо показать, что функция-остаток Z_2 является п. в. ф. и реализуема в виде LC цепи, что будет справедливо в том случае, когда множитель $(z_{22} + Z_2)$ в ур-нии (VII.69) является п. в. ф. и реализуем в виде LC цепи. Это следует из того обстоятельства, что при выполнении неравенств (VII.86) и (VII.87) вычеты функции $(z_{22} + Z_2)$ в полюсах $s = 0$ и $s = \infty$ больше по величине, чем соответствующие вычеты функции z_{22} . Используя выражения (VII.68) и (VII.69), можно составить функцию

$$\frac{1}{z_{22} + Z_2} = \frac{s^2 (s^2 - s_a^2)^2 (z_{11} - Z_1)}{K^2 t^2 (s)}, \quad (\text{VII.102})$$

которая имеет только конечные ненулевые полюсы полинома $Z_1(s)$ с вычетами, определяемыми выражением

$$\frac{-s_v^2 (s_v^2 - s_a^2)^2 k_v}{K^2 t^2 (s_v)}. \quad (\text{VII.103})$$

Поскольку эти величины явно положительные, функция (VII.102), а следовательно и функция $(z_{22} + Z_2)$ должны быть

п. в. ф. и реализуемыми в виде LC цепи. Поэтому можно считать доказанным, что как z_{22} , так и Z_2 будут п. в. ф. и реализуемы в виде LC цепи.

Таким образом, обеспечена положительность K и k_0 в ур-нии (VII.62), причем из ур-ния (VII.64) следует, что s_a^2 — положительная величина, а из ур-ния (VII.65) следует, что k_{12} — положительная вещественная величина. Поскольку z_{22} является п. в. ф. и реализуема в виде LC цепи, k_{22} должна быть п. в. ф. Кроме того, из условия вычетов (VII.63) следует, что k_{11} также является п. в. ф.

Процесс нахождения Z_2 сводится к следующему: вначале определяются нули функции $h(s)$ и значение величины s_a , затем множитель $(z_{22} + Z_2)$ разлагается на элементарные дроби. При этом множители полюсов в точке $s = \pm s_a$, а также члены $\frac{k_0}{s}$ и Ks относятся к функции z_{22} ; остальные члены разложения представляют собой функцию Z_2 со всеми ее вычетами. Далее можно приступить к следующему этапу разложения¹.

Теперь мы подошли к синтезу нулевого звена по его сопротивлениям z_{ih} . Для того чтобы избежать сложных алгебраических формул, это звено целесообразно образовать из симметричной скрещенной цепи. Однако, поскольку нулевое звено является несимметричной цепью, для согласования необходимо использовать обобщенную теорему бисекции, рассмотренную в § VI.6. Для применения результатов этого обобщения к рассматриваемой проблеме воспользуемся выражениями (VII.73) и (VII.74) для сопротивлений скрещенной цепи и выражением (VII.78) для коэффициента уровня сопротивления (см. главу VI). Они имеют вид:

$$z_a = z_{11} - z_{12}; \quad (\text{VII.104})$$

$$z_b = z_{11} + \frac{z_{12}}{a}; \quad (\text{VII.105})$$

$$a = \frac{z_{22} - z_{12}}{z_{11} - z_{12}}. \quad (\text{VII.106})$$

С помощью этих выражений можно теперь осуществить нахождение скрещенной цепи и получение из нее требуемого нулевого звена. Подстановка соотношений (VII.60), (VII.61) и (VII.62) в выражение (VII.106) дает [с учетом условия (VII.63)]

$$a = \frac{k_{22} + k_{12}}{k_{11} + k_{12}} = \frac{k_{22}}{k_{12}} = \frac{k_{12}}{k_{11}}. \quad (\text{VII.107})$$

Поскольку вычеты k_{11} и k_{22} положительны, а вычет k_{12} , как отмечалось выше, является также вещественным и положительным,

¹ В данном случае можно выбрать любое значение K , одновременно удовлетворяющее условиям (VII.86) и (VII.87).

то отсюда следует, что коэффициент уровня a положителен и веществен.

Подстановка тех же соотношений в выражения (VII.104) и (VII.105) дает сопротивление скрещенной цепи

$$z_a = \frac{2(k_{11} + k_{12})s}{s^2 - s_a^2} \quad (\text{VII.108})$$

и

$$z_b = \left(Ks + \frac{k_0}{s} \right) \frac{k_{11} + k_{12}}{k_{12}}. \quad (\text{VII.109})$$

Величину k_0 , входящую в последние выражения, нетрудно вычислить по ур-нию (VII.64). Вычет k_{22} , как упомянуто выше, определяется из разложения полинома $(z_{22} + Z_2)$ на элементарные дроби в соответствии с выражением (VII.69); вычет k_{12} можно определить из ур-ния (VII.65) после того, как по ур-нию (VII.79) подсчитана величина s_a^2 ; из условия вычетов, определяемого равенством (VII.63), находят затем вычет k_{11} .

Используя сопротивления (VII.108) и (VII.109), можно прийти к скрещенной схеме, изображенной на рис. VII.21а, со следующими значениями элементов:

$$L_a = \frac{2(k_{11} + k_{12})}{-s_a^2}, \quad C_a = \frac{1}{2(k_{11} + k_{12})}; \quad (\text{VII.110})$$

$$L_b = \frac{(k_{11} + k_{12})K}{k_{12}}, \quad C_b = \frac{k_{12}}{k_0(k_{11} + k_{12})}. \quad (\text{VII.111})$$

По этой скрещенной схеме можно теперь получить эквивалентную неуровновешенную схему, если воспользоваться методами, рассмотренными в § VI.5 (см. рис. VI.13а — д, приведенные там для аналогичной RC цепи). Таким образом, всегда можно преобразовать скрещенную схему в эквивалентную перекрытую Т-образную схему, изображенную на рис. VII.21в, поскольку условие $\frac{L_e}{L_a} \geq 1$ связано только с предположением об отсутствии в цепи взаимной индуктивности. Перекрытая Т-образная цепь, показанная на рис. VII.21г, реализуема при указанном выше условии $\frac{C_a}{C_b} \geq 1$.

Если необходимо получить цепь без взаимных индуктивностей, но ни одно из условий, отмеченных на рис. VII.21в, г, не выполнено, то скрещенная схема представляет собой параллельное соединение двух цепей, приведенных на рис. VII.21б. На этом рисунке величину α (как отмечалось в § VI.5) следует выбирать из условия

$$\alpha = 1 - \frac{C_a}{C_b} \quad (\text{VII.112})$$

(она положительна, когда перекрытая Т-образная схема, показанная на рис. VII.21г, не существует).

При выполнении условия (VII.112) емкость в поперечной ветви нижней части скрещенной схемы, изображенной на рис. VII.21б, равна

$$(1 - \alpha)C_b = C_a, \quad (\text{VII.113})$$

т. е. той же величине, что и емкость последовательной ветви. В этом случае преобразование скрещенной схемы в двойную Т-образную

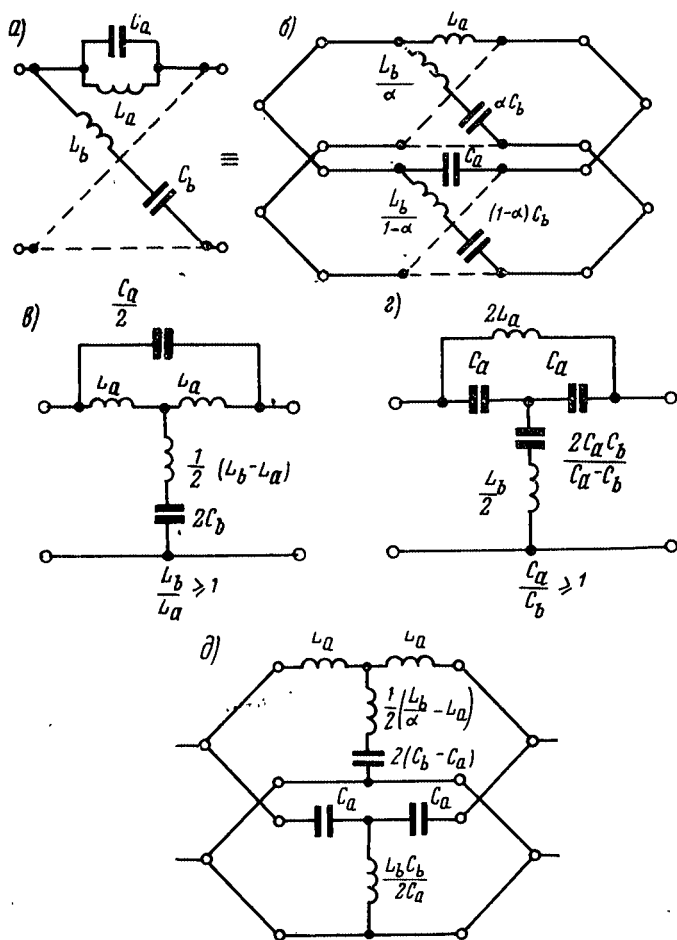


Рис. VII.21

схему, приведенную на рис. VII.21д, осуществляется непосредственно, и согласно ур-нию (VI.69) двойная Т-образная схема реализуется без взаимных индуктивностей, если

$$\frac{L_b}{L_a} + \frac{C_a}{C_b} \geq 1. \quad (\text{VII.114})$$

Подстановка в это неравенство выражений (VII.110) и (VII.111) дает

$$\frac{-s_a^2 K + k_0}{2k_{12}} \geq 1. \quad (\text{VII.115})$$

Используя теперь выражения (VII.64) и (VII.65), найдем

$$s_a^4 + t(0) \geq t(s_a), \text{ или } s_a^4 + |s_0|^4 \geq t(s_a). \quad (\text{VII.116})$$

Изобразив выражение (VII.59) на плоскости s , как показано на рис. VII.22, можно видеть, что $|s_0|^4 = b^4$, а $t(s_a) = c^2 d^2$. Таким образом, неравенства (VII.116) заменяются выражением

$$c^2 d^2 \leq b^4 + s_a^4. \quad (\text{VII.117})$$

Пользуясь известными геометрическими соотношениями, получим:

$$c^2 = b^2 + |s_a|^2 - 2b|s_a| \cos \beta;$$

$$d^2 = b^2 + |s_a|^2 + 2b|s_a| \cos \beta,$$

так что

$$c^2 d^2 = (b^2 + |s_a|^2)^2 - 4b^2 |s_a|^2 \cos^2 \beta.$$

Подстановка полученных выражений в неравенство (VII.117) приводит к сокращению всех коэффициентов, за исключением $\cos \beta$, поэтому

$$\cos^2 \beta \geq \frac{1}{2}; \quad \cos \beta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\text{VII.118})$$

или

$$\beta \leq 45^\circ. \quad (\text{VII.119})$$

Этот результат показывает, что преобразование скрещенной схемы в неуравновешенную, не содержащую взаимных индуктивностей, невозможно для всех комплексных нулей передачи, за исключением тех, которые лежат на мнимой оси или между этой осью и линиями, расположенными в комплексной плоскости s под углом 45° .

Более жесткие условия, относящиеся к перекрытым T-образным схемам, изображенным на рис. VII.21а, б, имеют вид:

$$\frac{L_b}{L_a} = \frac{s_a^4}{t(s_a)} = \frac{s_a^4}{c^2 d^2} \geq 1, \text{ или } cd < s_a^2; \quad (\text{VII.120})$$

$$\frac{C_a}{C_b} = \frac{t(0)}{t(s_a)} = \frac{|s_0|^4}{c^2 d^2} \geq 1, \text{ или } cd < |s_0|^2. \quad (\text{VII.121})$$

Это можно интерпретировать геометрически при помощи рис. VII.22. Использование в перекрытой T-образной схеме, приве-

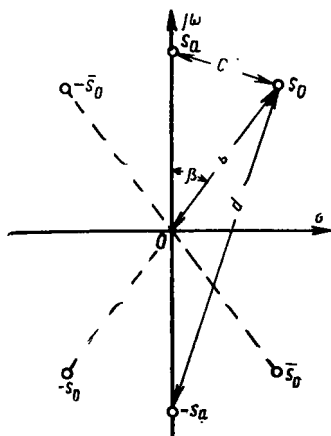


Рис. VII.22

денной на рис. VII.21в, взаимных индуктивностей позволяет реализовать любое комплексное значение нуля передачи s_0 . Необходимо отметить, что до тех пор, пока отношение $\frac{L_b}{L_a} = 0$ (что практически невозможно), коэффициент связи будет меньше единицы, так что сильная связь исключается в любом случае.

Наконец, требуемое нулевое звено получают посредством разбиения соответствующей неуравновешенной схемы на две, умножением уровня сопротивления правой части схемы на коэффициент a [см. уравнение (VII.107)] и повторным соединением обеих половин схемы.

Аналогичная процедура образования цепи может быть выполнена при использовании метода узловых напряжений для входной проводимости $Y_1(s)$, имеющей тот же вид, что и сопротивление $Z_1(s)$, определяемое разложением (VII.66). В данном случае компонентный четырехполюсник (нулевое звено) характеризуется входными проводимостями и проводимостью передачи короткого замыкания:

$$-y_{12} = \frac{Kt(s)}{s(s^2 - s_a^2)} - Ks + \frac{k_0}{s} - \frac{2k_{12}s}{s^2 - s_a^2}; \quad (\text{VII.122})$$

$$y_{11} = \dots = Ks + \frac{k_0}{s} + \frac{2k_{11}s}{s^2 - s_a^2}; \quad (\text{VII.123})$$

$$y_{22} = \dots = Ks + \frac{k_0}{s} + \frac{2k_{22}s}{s^2 - s_a^2}, \quad (\text{VII.124})$$

а функция-остаток представляет собой проводимость $Y_2(s)$, аналогичную проводимости $Y_1(s)$. Поскольку каждый этап процесса синтеза при методе узловых напряжений дуален соответствующему этапу только что описанного процесса (причем все аналитические выражения не изменяются, за исключением обычной замены z на y), нет необходимости детально останавливаться на его рассмотрении.

В этой связи уместно заметить, что использование метода узловых напряжений целесообразно в любом из следующих двух случаев.

1. Даны входная проводимость короткого замыкания $Y_{11}(s)$ и проводимость передачи короткого замыкания $Y_{12}(s)$. Требуется найти соответствующий четырехполюсник без потерь. Аналогично этому в ранее рассмотренной задаче четырехполюсник без потерь был связан с входным сопротивлением холостого хода $Z_{11}(s)$ и сопротивлением передачи холостого хода $Z_{12}(s)$.

2. Даны сопротивления $Z_{11}(s)$ и $Z_{12}(s)$. Требуется определить соответствующий четырехполюсник без потерь при условии, что $Z_{11}(s)$ имеет в точках $s = 0$ и $s = \infty$ нули, а не полюсы.

В таких случаях необходимо просто заменить величину $Z_{11}(s)$ на обратную и далее использовать метод синтеза, справедливый

для случая узловых напряжений, как если бы этим обратным сопротивлением была входная проводимость короткого замыкания $Y_{11}(s)$. Тем не менее, если синтезировать функцию Y_{11} в виде каскадного соединения компонентных четырехполюсников, характеризующихся проводимостями (VII.122), (VII.123) и (VII.124), путем выбора таких же нулей передачи, что и для сопротивления передачи $Z_{12}(s)$ составной цепи, то в результате получим такую же цепь, как и для случая, когда заданы $Z_{11}(s)$ и $Z_{12}(s)$, но используется процедура синтеза, основанная на методе контурных токов.

Справедливость данного утверждения следует из того факта, что синтез функции $Y_{11} = \frac{1}{Z_{11}}$ при использовании метода узловых напряжений должен дать требуемую функцию Z_{11} . В то же время, функция z_{12} любой компонентной схемы должна иметь те же нули, что и функция y_{12} этой схемы, так как $z_{12} = -\frac{y_{12}}{y_{11}y_{22} - y_{12}^2}$, где для проводимостей y_{sk} условие вычетов выполняется со знаком равенства во всех конечных полюсах. Следовательно, синтез функции $Y_{11} = \frac{1}{Z_{11}}$ при использовании метода узловых напряжений обеспечивает:

а) правильное входное сопротивление; б) требуемые нули передачи полной цепи. Эти условия совпадают с аналогичными условиями при синтезе функции $Z_{11}(s)$, когда используется метод контурных токов.

Из сказанного следует, что на любом этапе процесса синтеза можно (если требуется) заменить знак неравенства в левых частях неравенств (VII.86) и (VII.87) на знак равенства. При такой замене функция-остаток $Z_2(s)$ не будет иметь полюсов в точках $s = 0$ и $s = \infty$ и, следовательно, будет иметь там нули. Дальше проводить синтез на базе метода контурных токов (т. е. сопротивлений) уже нельзя, но можно перейти от остатка к обратной функции и продолжить процесс синтеза на базе метода узловых напряжений (т. е. проводимостей). Такая возможность перехода от метода контурных токов к методу узловых напряжений, и наоборот, повторяемая в течение всего процесса синтеза, может оказаться удобной при некоторых обстоятельствах.

Для синтеза нулевого звена методом узловых напряжений используем ур-ния (VI.81), (VI.82) и (VI.86), позволяющие определить проводимости скрещенной схемы и коэффициент уровня сопротивления. Запишем вновь эти уравнения:

$$y_a = y_{11} - ay_{12}; \quad (\text{VII. 125})$$

$$y_b = y_{11} + y_{12}; \quad (\text{VII. 126})$$

$$a = \frac{y_{11} + y_{12}}{y_{22} + y_{12}}. \quad (\text{VII. 127})$$

С помощью выражений (VII.122), (VII.123) и (VII.124) получим

$$a = \frac{k_{11} + k_{12}}{k_{22} + k_{12}} = \frac{k_{12}}{k_{22}} = \frac{k_{11}}{k_{12}}. \quad (\text{VII.128})$$

Эта величина формально представляет собой величину, обратную определяемой выражением (VII.107). Далее получаем

$$y_a = \left(Ks + \frac{k_0}{s} \right) \left(1 + \frac{k_{11}}{k_{12}} \right); \quad (\text{VII.129})$$

$$y_b = \frac{2(k_{11} + k_{12})s}{s^2 - s_a^2}. \quad (\text{VII.130})$$

Таким образом, снова образуется скрещенная схема, изображенная на рис. VII.21а, но вместо величин элементов, выраженных ф-лами (VII.110) и (VII.111), теперь имеем

$$L_a = \frac{k_{12}}{k_0(k_{11} + k_{12})}, \quad C_a = \frac{(k_{11} + k_{12})K}{k_{12}}; \quad (\text{VII.131})$$

$$L_b = \frac{1}{2(k_{11} + k_{12})}, \quad C_b = \frac{2(k_{11} + k_{12})}{-s_a^2}. \quad (\text{VII.132})$$

Методы преобразования скрещенной схемы в эквивалентную неуравновешенную структуру и условия, при которых преобразования выполнимы без использования взаимных индуктивностей, совпадают с рассмотренными ранее. Аналогичные методы полностью применимы и для случая, когда нули передачи представляют собой пару симметричных точек на вещественной оси комплексной плоскости. При этом сопротивление z_{sh} имеет полюсы только в точках $s = 0$ и $s = \infty$, и соответствующее нулевое звено всегда включает в себя взаимную индуктивность. Метод синтеза для данной ситуации почти аналогичен методу синтеза входного сопротивления RLC цепи, который изложен ниже, в § IX.5, и поэтому здесь не рассматривается. Необходимо лишь упомянуть о том, что если две пары нулей передачи на вещественной оси учитываются одновременно (это соответствует случаю четверки нулей), то можно использовать ур-ние (VII.59), записав его в виде

$$t(s) = (s^2 - \sigma_1^2)(s^2 - \sigma_2^2), \quad (\text{VII.133})$$

где $\pm \sigma_1$ и $\pm \sigma_2$ — две пары данных нулей передачи.

Рассмотрим теперь числовой пример, иллюстрирующий указанный выше метод. Пусть функции входного сопротивления и сопротивления передачи имеют вид:

$$Z_{11}(s) = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}{s(s^2 + 2)(s^2 + 4)}; \quad (\text{VII.134})$$

$$Z_{12}(s) = \frac{s^4 + 4}{s(s^2 + 2)(s^2 + 4)}. \quad (\text{VII.135})$$

Кроме четверки нулей передачи в точках $s = \pm 1 \pm j$, сопротивление передачи, определяемое выражением (VII.135), имеет один нуль в точке $s = \infty$. Далее мы увидим, что он создается оконечной нагрузкой, обусловленной остаточной функцией. Входная функция, определяемая выражением (VII.134), не имеет полюса в точке $s = \infty$, и, таким образом, $\rho_\infty = 0$. Этот случай выбран умышленно для того, чтобы показать, что и здесь, тем не менее, непосредственно применим рассмотренный метод синтеза.

Из разложения на элементарные дроби

$$Z_{11}(s) = \frac{1}{s^2+2} + \frac{3}{s^2+4} + \frac{3}{s} \quad (\text{VII.136})$$

находим

$$2k_1 = \frac{1}{4}, \quad 2k_2 = \frac{3}{8}, \quad \rho_0 = \frac{3}{8}. \quad (\text{VII.137})$$

Поскольку $s_1^2 = -2$ и $s_2^2 = -4$, имеем

$$t(s_1) = s_1^4 + 4 = 8; \quad t(s_2) = s_2^4 + 4 = 20. \quad (\text{VII.138})$$

По ур-нию (VII.75) подсчитаем массы

$$m_1 = \frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{64} = \frac{1}{128}, \quad m_2 = \frac{4 \cdot \frac{3}{8}}{400} = \frac{3}{800}, \quad (\text{VII.139})$$

а затем найдем

$$\sum m_v = \frac{1}{128} + \frac{3}{800} = \frac{37}{3200} \quad (\text{VII.140})$$

и

$$\sum m_v s_v^2 = \frac{-2}{128} - \frac{4 \cdot 3}{800} = \frac{-49}{1600}. \quad (\text{VII.141})$$

Тогда из ур-ния (VII.79) получим

$$s_a^2 = -\frac{98}{37} = -2,648. \quad (\text{VII.142})$$

Подсчитаем далее

$$|s_0|^4 \sum \frac{m_v}{-s_v^2} (s_v^2 - s_a^2) = 4 \left[\frac{1}{256} \left(-2 + \frac{98}{37} \right) + \frac{3}{3200} \left(-4 + \frac{98}{37} \right) \right] = \frac{3}{16 \cdot 37}; \quad (\text{VII.143})$$

$$\sum m_v s_v^2 (s_v^2 - s_a^2) = \frac{-2}{128} \left(\frac{24}{37} \right) - \frac{3 \cdot 4}{800} \left(\frac{-50}{37} \right) = \frac{3}{8 \cdot 37} \quad (\text{VII.144})$$

и

$$\frac{-s_a^2}{|s_0|^4} \rho_0 = \frac{98 \cdot 3}{37 \cdot 32} = \frac{147}{16 \cdot 37}. \quad (\text{VII.145})$$

Неравенства (VII.86) и (VII.87) тогда принимают вид

$$0 < K - \frac{3}{16 \cdot 37} \leq \frac{147}{16 \cdot 37}; \quad (\text{VII.146})$$

$$0 < K - \frac{3}{8 \cdot 37} \leq 0, \quad (\text{VII.147})$$

а неравенство (VII.89) —

$$\frac{-147}{16 \cdot 37} < \frac{-3}{16 \cdot 37} < 0 \quad (\text{VII.148})$$

и, очевидно, выполнимо. Поскольку $\rho_\infty = 0$, величину K в неравенстве (VII.147) необходимо выбрать равной

$$K = \frac{3}{8 \cdot 37} = \frac{3}{296} = \frac{1}{98,67}. \quad (\text{VII.149})$$

По ур-ниям (VII.78) и (VII.144) находим

$$H = 98,67, \quad (\text{VII.150})$$

а по уравнению (VII.64) —

$$k_0 = \frac{4 \cdot 37}{98} \cdot \frac{3}{8 \cdot 37} = \frac{3}{196} = \frac{1,51}{98,67}. \quad (\text{VII.151})$$

Поскольку

$$t(s_a) = s_a^4 + 4 = \left(\frac{98}{37}\right)^2 + 4, \quad (\text{VII.152})$$

ур-ние (VII.65) дает

$$k_{12} = \left(\frac{98}{74} + \frac{74}{98}\right) \frac{1}{98,67} = \frac{2,08}{98,67}. \quad (\text{VII.153})$$

Согласно ур-нию (VII.69) и учитывая, что полином $h(s)$ выролдился в постоянную H , имеем

$$\begin{aligned} z_{22} + Z_2 &= \frac{1}{98,67} \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 4)}{s \left(s^2 + \frac{98}{37}\right)} = \\ &= \left(s + \frac{3,02}{s} + \frac{0,331s}{s^2 + \frac{98}{37}}\right) \frac{1}{98,67}. \end{aligned} \quad (\text{VII.154})$$

Отсюда нетрудно найти

$$k_{22} = \frac{0,1655}{98,67}. \quad (\text{VII.155})$$

Затем из условия вычетов (VII.63) можно определить

$$k_{11} = \frac{1}{98,67} \frac{(2,08)^2}{0,1655} = \frac{26,13}{98,67} \quad (\text{VII.156})$$

и, наконец, вычислить параметры нулевого звена.

Из ур-ния (VII.107) определяем коэффициент уровня сопротивления

$$a = \frac{k_{12}}{k_{11}} = \frac{k_{22}}{k_{12}} = \frac{0,1655}{2,08} = 0,0796. \quad (\text{VII.157})$$

Далее, используя ф-лы (VII.110) и (VII.111), находим параметры скрещенной схемы:

$$L_a = \frac{2 \cdot 28,21}{2,684 \cdot 98,67} = 0,216, \quad C_a = \frac{98,67}{2 \cdot 28,21} = 1,748; \quad (\text{VII.158})$$

$$L_b = \frac{28,21}{2,08 \cdot 98,67} = 0,1375, \quad C_b = \frac{2,08 \cdot 98,67}{1,51 \cdot 28,21} = 4,815, \quad (\text{VII.159})$$

откуда получаем

$$\frac{L_b}{L_a} = 0,637 \text{ и } \frac{C_a}{C_b} = 0,363. \quad (\text{VII.160})$$

Сумма последних двух величин равна единице, и, таким образом, условие (VII.114) удовлетворяется со знаком равенства. Это является результатом нашего предположения о том, что нули передачи лежат на линии, проходящей в плоскости s под углом 45° .

Из ур-ния (VII.154), учитывая, что $k_0 = \frac{1,51}{98,67}$, следует

$$Z_2 = \frac{1,51}{98,67s} = \frac{0,0153}{s}. \quad (\text{VII.161})$$

Поскольку правая часть выражения (VII.146) не удовлетворяется со знаком равенства, сопротивление z_{11} имеет в точке $s = 0$ вычет, величина которого больше k_0 . Действительно, непосредственно из выражения (VII.146) находим

$$(sz_{11})_{s=0} = \frac{k_0}{K} \left(\frac{147}{16 \cdot 37} + \frac{13}{16 \cdot 37} \right) = \frac{150k_0}{16 \cdot 37K} = 25k_0. \quad (\text{VII.162})$$

Следовательно, нулевому звену предшествует последовательная ветвь с величиной обратной емкости, равной

$$[(sz_{11})_{s=0} - k_0] = 24k_0 = \frac{24 \cdot 3}{196} = \frac{18}{49} \frac{1}{\phi}. \quad (\text{VII.163})$$

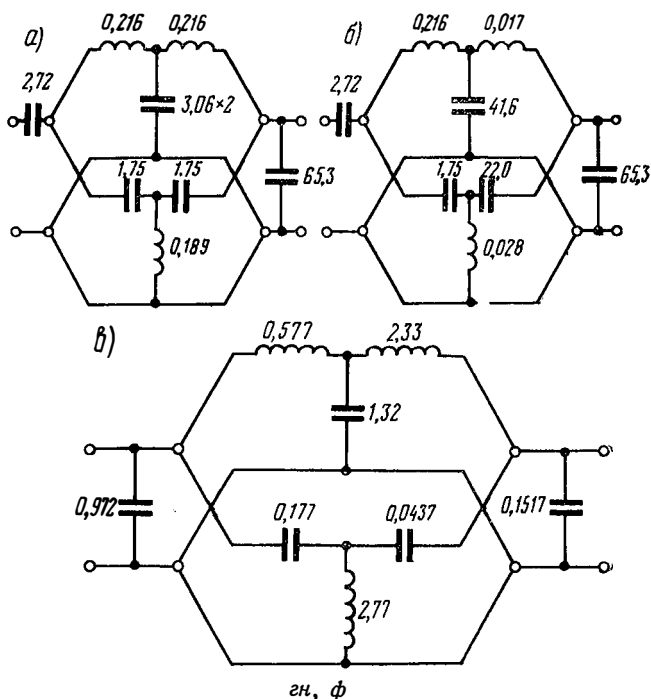
При нагрузке нулевого звена на сопротивление, определяемое выражением (VII.161), требуемые нули передачи располагаются в точке $s = \infty$. В результате получается двойная Т-образная схема, изображенная на рис. VII.21д; численные значения ее элементов показаны на схеме, приведенной на рис. VII.23а. После разбиения двойной Т-образной схемы на две секции, умножения уровня сопротивления правой секции на коэффициент $a = 0,0796$ [см. ф-лу (VII.157)] и последующего объединения обеих секций, получаем окончательную схему, приведенную на рис. VII.23б. Как видно из нее, конечная емкость не является частью двойной Т-образной

схемы и, следовательно, на величину этой емкости не влияет процесс выравнивания сопротивления.

Рассмотрим теперь то же входное сопротивление, определяемое выражением (VII.134), но при условии, что сопротивление передачи цепи имеет значение

$$t(s) = s^4 + 16. \quad (\text{VII. 164})$$

Здесь $|s_0|^4 = 16$, а не 4, как в только что рассмотренном примере. Такой переход к большей величине $|s_0|$, как будет ясно далее, из-



гн, ф
Рис. VII.23

меняет процедуру применения описанного выше метода реализации.

В данном случае выражения (VII.136) и (VII.137) остаются справедливыми, но массы будут иметь значения:

$$m_1 = \frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{400} = \frac{1}{800}, \quad m_2 = \frac{4 \cdot \frac{3}{8}}{1024} = \frac{3}{2048}. \quad (\text{VII. 165})$$

Теперь легко найти

$$\sum m_v = \frac{139}{51\,200} \quad \text{и} \quad \sum m_v s_v^2 = \frac{-107}{12\,800}, \quad (\text{VII. 166})$$

так что

$$s_a^2 = -\frac{428}{139}. \quad (\text{VII.167})$$

Далее находим

$$|s_0|^4 \sum \frac{m_v}{-s_v^2} (s_v^2 - s_a^2) = \frac{3}{4 \cdot 139} \quad (\text{VII.168})$$

и

$$\sum m_v s_v^2 (s_v^2 - s_a^2) = \frac{3}{8 \cdot 139}. \quad (\text{VII.169})$$

Величина $(a - c)$ в неравенстве (VII.89), которая представляет собой разность правых частей выражений (VII.168) и (VII.169), очевидно положительна, а поскольку $d = \rho_\infty = 0$, указанное неравенство не удовлетворяется. Поэтому перейдем к методу узловых напряжений, для чего рассмотрим входную функцию

$$\frac{1}{Z_{11}} = Y_{11} = \frac{s(s^2 + 2)(s^2 + 4)}{(s^2 + 1)(s^2 + 3)} = \frac{\frac{3}{2}s}{s^2 + 1} + \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + 3} + s. \quad (\text{VII.170})$$

Теперь имеем

$$s_1^2 = -1, \quad s_2^2 = -3; \quad (\text{VII.171})$$

$$2k_1 = \frac{3}{2}, \quad 2k_2 = \frac{1}{2}; \quad (\text{VII.172})$$

$$\rho_\infty = 1 \text{ и } \rho_0 = 0.$$

Поскольку из ур-ния (VII.164) следует, что

$$t(s_1) = 17; \quad t(s_2) = 25, \quad (\text{VII.173})$$

то массы оказываются соответственно равными

$$m_1 = \frac{\frac{3}{2}}{289} = \frac{3}{578}; \quad m_2 = \frac{3 \cdot \frac{1}{2}}{625} = \frac{3}{1250}. \quad (\text{VII.174})$$

Используя эти величины, получаем

$$\sum m_v = \frac{3 \cdot 457}{289 \cdot 625} \text{ и } \sum m_v s_v^2 = \frac{-3 \cdot 746}{298 \cdot 625}. \quad (\text{VII.175})$$

Тогда

$$s_a^2 = -\frac{746}{457} = -1,632. \quad (\text{VII.176})$$

Подсчитаем далее

$$|s_0|^2 \sum \frac{m_v}{-s_v^2} (s_v^2 - s_a^2) = \frac{16}{457} \quad (\text{VII.177})$$

и

$$\sum m_v s_v^2 (s_v^2 - s_a^2) = \frac{3}{457}. \quad (\text{VII.178})$$

Неравенства (VII.86) и (VII.87) в данном случае имеют вид

$$0 < K - \frac{16}{457} \leq 0 \quad (\text{VII.179})$$

и

$$0 < K - \frac{3}{457} \leq 1. \quad (\text{VII.180})$$

Ясно, что здесь K необходимо выбрать равным

$$K = \frac{16}{457} = \frac{1}{28,55}. \quad (\text{VII.181})$$

Тогда, используя ур-ние (VII.178), находим

$$H = \frac{3 \cdot 457}{256}. \quad (\text{VII.182})$$

Из ур-ния (VII.64) находим

$$k_0 = \frac{16 \cdot 16}{746} = \frac{128}{373} = \frac{9,8}{28,55}; \quad (\text{VII.183})$$

$$t(s_a) = \left(\frac{746}{457} \right)^2 + 16. \quad (\text{VII.184})$$

Уравнение (VII.65) дает

$$k_{12} = \frac{2 \cdot 16}{457} \left(\frac{746}{1828} + \frac{1828}{746} \right) = \frac{5,716}{28,55}. \quad (\text{VII.185})$$

Теперь можно найти

$$\begin{aligned} (y_{22} + Y_2) &= \frac{16}{457} \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}{s \left(s^2 + \frac{746}{457} \right) \frac{3}{16}} = \\ &= \frac{k_0}{s} + \frac{2k_{22}s}{s^2 + \frac{746}{457}} + \frac{256s}{3 \cdot 457}, \end{aligned} \quad (\text{VII.186})$$

откуда

$$k_{22} = \frac{16}{457} \frac{4 \cdot 289 \cdot 625}{3 \cdot 457 \cdot 373} = \frac{1,412}{28,55} \quad (\text{VII.187})$$

и

$$Y_2(s) = \frac{16}{457} \frac{13}{3} s = 0,1517s. \quad (\text{VII.188})$$

Из неравенства (VII.180) [эквивалентного неравенствам (VII.81)] имеем

$$\left(\frac{y_{11}}{s} \right)_{s=\infty} = 1 + \frac{3}{457} = \frac{460}{457}. \quad (\text{VII.189})$$

Отсюда видно, что на входе цепи должна быть параллельная емкость, равная

$$C_1 = \left(\frac{y_{11}}{s} \right)_{s=\infty} = \frac{16}{457} = \frac{444}{457} = 0,972\phi. \quad (\text{VII.190})$$

Используя условие вычетов (VII.63), а также их численные значения из (VII.185) и (VII.187), находим

$$k_{11} = \frac{1}{28,55} \frac{(5,716)^2}{1,412} = \frac{23,12}{28,55}. \quad (\text{VII.191})$$

Коэффициент уровня сопротивления нулевого звена [см. ур-ние (VII.128)]

$$a = \frac{k_{12}}{k_{22}} = \frac{5,716}{1,412} = 4,046. \quad (\text{VII.192})$$

Вычислим параметры скрещенной схемы по ур-ниям (VII.131) и (VII.132):

$$L_a = \frac{5,716 \cdot 28,55}{9,8 \cdot 28,84} = 0,577, \quad C_a = \frac{28,84}{5,716 \cdot 28,55} = 0,1766; \quad (\text{VII.193})$$

$$L_b = \frac{28,55}{2 \cdot 28,84} = 0,495, \quad C_b = \frac{2 \cdot 28,84}{1,632 \cdot 28,55} = 1,237, \quad (\text{VII.194})$$

откуда

$$\frac{L_b}{L_a} = 0,857; \quad \frac{C_a}{C_b} = 0,143. \quad (\text{VII.195})$$

Снова, как и должно быть, сумма этих отношений равна единице. Оконечная емкость, соответствующая остаточной функции (VII.188), как и ранее, дает требуемый нуль передачи в точке $s = \infty$.

Окончательная схема (ср. со схемой на рис. VII.236) приведена на рис. VII.23в. Обе схемы имеют одно и то же сопротивление Z_{11} , определяемое выражением (VII.134).



VIII

ГЛАВА

Достаточные условия для вещественной части функции

VIII.1. Определение сопротивления по его вещественной части

Свойства пассивных цепей, как известно, состоят в том, что собственное поведение цепи во временной области должно быть ограничено, а в частотной области соответствующие входные сопротивления и сопротивление передачи (или проводимости) цепи должны быть аналитическими в правой полуплоскости. Эти требования накладывают на перечисленные функции ряд условий, выяснение и использование которых имеет важное значение для дальнейшего совершенствования методики синтеза. К ним, прежде всего, относится свойство, касающееся достаточных условий вещественной части сопротивления или проводимости на мнимой оси, однозначно характеризующих эту функцию, а с ее помощью — и цепь в переходном и установившемся режимах. Таким образом, значение вещественной части сопротивления $Z(s)$ при $s = j\omega$ полностью описывает поведение этой функции во всей плоскости комплексной частоты в том смысле, что, зная только величину $\operatorname{Re}[Z(j\omega)]$, можно найти функцию $Z(s)$. Так, если $\operatorname{Re}[Z(j\omega)]$ является заданной рациональной функцией от вещественной переменной ω , то нетрудно построить соответствующую рациональную функцию $Z(s)$ от комплексной переменной (частоты) s . Если, например, графически задана только функция $\operatorname{Re}[Z(j\omega)]$, то можно (по крайней мере теоретически) вычислить значение $Z(s)$ для любого данного комплексного значения s .

Для того чтобы требование, сформулированное в этом утверждении, удовлетворялось однозначно, необходимо обобщить обычную интерпретацию свойств вещественной части функции на случай, когда она содержит импульсы. Этот случай логически соответствует практике, принятой в других отраслях теории цепей. Перечисленный круг вопросов и является содержанием настоящей главы.

Прежде чем перейти к алгебраическим и другим аналитическим приемам, используемым при рассмотрении указанного интересного

свойства функций сопротивлений, попытаемся разобраться, почему оно присуще не всем рациональным функциям, а только сопротивлениям и проводимостям пассивных цепей. Как отмечено в начале главы, данное свойство является результатом устойчивости пассивной цепи, находящим свое отражение в аналитичности входного сопротивления и сопротивления передачи в правой полуплоскости. Это станет очевидным, если представить вещественную часть функции в виде

$$\operatorname{Re}[Z(j\omega)] = \frac{1}{2}[Z(s) + Z(-s)]_{s=j\omega}. \quad (\text{VIII.1})$$

При $s = j\omega$ полином $Z(-s)$ является комплексно-сопряженным с полиномом $Z(s)$, а сумма любого комплексного числа и числа, сопряженного с ним, равна двойному значению его вещественной части. Пусть известна вещественная часть функции, тогда, положив $s = j\omega$ или $-s^2 = \omega^2$ в выражении (VIII.1), получим (за исключением коэффициента $\frac{1}{2}$) сумму полиномов $Z(s)$ и $Z(-s)$. Если эту сумму можно разделить на две части, то тем самым можно построить полином $Z(s)$ по функции $\operatorname{Re}[Z(j\omega)]$. Указанное разделение осуществимо единственным образом только в случае, когда функция $Z(s)$ является аналитической либо в правой, либо в левой полуплоскости, так как тогда нам известно, что полюсы в одной полуплоскости относятся к $Z(s)$, а полюсы в другой полуплоскости — к $Z(-s)$. Если же функция $Z(s)$ не является аналитической в одной из полуплоскостей, то нельзя сказать, какие из полюсов рациональной функции $Z(s) + Z(-s)$ относятся к $Z(s)$, а какие к $Z(-s)$. Следовательно, хотя и возможно построение ряда функций $Z(s)$, однозначно построить требуемую функцию нельзя.

Фактически в процессе построения функции мнимая ось используется в качестве «сортирующей границы» (sorting boundary). Это имеет место, например, когда мы знаем, что все полюсы заданной функции, относящиеся к полиному $Z(s)$, лежат слева от границы. Кроме того, сразу становится ясно, что если полюсы расположены на мнимой оси, то возникает трудность, заключающаяся в том, что граница теряет свою способность «сортировать». Эта трудность, а также то, что вещественная часть функции в рассматриваемых точках уже не является ограниченной, требуют более тщательного исследования задачи. Однако при рассмотрении проблемы построения функции $Z(s)$ по ее вещественной части можно сделать один важный вывод. Он состоит в том, что вопреки обычному представлению решение поставленной задачи не требует построения всей функции, если известна только ее половина.

В самом деле, на первый взгляд, казалось бы, можно считать, что вещественная и мнимая части сопротивления в отдельности содержат лишь половину информации, характеризующей полное комплексное сопротивление. Как видно из ур-ния (VIII.1), ошибочность такого утверждения базируется на допущении, что веществен-

ная часть содержит меньше информации (предположительно половину), чем все сопротивление $Z(s)$. Рациональная функция определяется информацией, содержащейся в ее полюсах. Вещественная часть функции содержит не только полюсы $Z(s)$, расположенные в левой полуплоскости, но также и полюсы, являющиеся их зеркальным отображением относительно начала координат. Таким образом, в действительности вещественная часть является не половиной функции, а полной функцией, содержащей некоторую избыточную информацию в характеризующих ее элементах. Иногда неправильно строят всю функцию, не учитывая избыточную часть данной «половины».

Оказывается полезной и другая точка зрения (исходя из связи с физическими аспектами поведения цепи), имеющая более близкое отношение к временной области. При этом реакцию цепи (в виде напряжения) на приложенный единичный импульс тока можно представить хорошо известной формулой

$$e(t) = \frac{2}{2\pi j} \int_C Z(s)e^{st} ds, \quad (\text{VIII.2})$$

где контур C выбирают совпадающим с мнимой осью, а бесконечно удаленная точка комплексной сферы находится слева (при $t > 0$) и справа (при $t < 0$) от дуг полуокружности [1]¹. В обычной плоскости s эти дуги можно рассматривать как полуокружности достаточно большого размера с тем, чтобы включить в подынтегральную функцию все полюсы, являющиеся полюсами функции $Z(s)$. Поскольку последние расположены в левой полуплоскости, контур интегрирования при $t > 0$ содержит полюсы, а при $t < 0$ не содержит их. Поэтому согласно теореме вычетов (теорема Коши) величина интеграла в первом случае равна нулю, а во втором — не равна. Отсутствие реакции до приложения возбуждения является очевидным требованием устойчивости и, следовательно, результатом аналитичности сопротивления $Z(s)$ в правой полуплоскости. Аналитичность в правой полуплоскости функции цепи является необходимым и достаточным условием, гарантирующим, что реакция не будет предшествовать вызвавшему ее сигналу. Цепь, в которой появляется отклик до прихода сигнала, по существу, возбуждается под воздействием своей собственной мощности и поэтому не может быть пассивной.

Устойчивость (или невозможность безграничного роста) собственных колебаний, аналитичность в правой полуплоскости частотной функции и отсутствие временной реакции до приложения возбуждения являются тремя различными проявлениями одного и того же свойства цепи — пассивности.

Утверждение о том, что вещественная часть функции $Z(j\omega)$ определяет функцию $Z(s)$ непосредственно следует из ф-лы

¹ См. также [52] (прим. ред.).

(VIII.2) для реакции во временной области. Реакцию $e(t)$ при $t > 0$ можно также выразить при помощи вещественного интеграла вида

$$e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (\text{VIII.3})$$

где

$$Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega). \quad (\text{VIII.4})$$

Учитывая, что вещественная и мнимая части функции $Z(j\omega)$ являются соответственно четной и нечетной функциями, после подстановки выражения (VIII.4) в ф-лу (VIII.3) и последующего разбиения интеграла на две части получим

$$e(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (\text{VIII.5})$$

Очевидно, что первый из этих интегралов является четной функцией времени, а второй — нечетной. Поскольку известно, что при $t < 0$ сумма обоих интегралов тождественно равна нулю, то отсюда следует, что при $t > 0$ они должны быть равны друг другу, а, значит, их сумма равна удвоенному значению любого из них. Таким образом, при $t > 0$ можно записать

$$e(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega = \frac{-2}{\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (\text{VIII.6})$$

Из последней формулы видно, что для определения импульсной реакции цепи достаточно знать либо только вещественную часть функции, либо только ее мнимую часть. Поскольку преобразованием Лапласа для функции $e(t)$ является $Z(s)$, то снова видно, во-первых, что данная комплексная функция определяется ее вещественной частью и, во-вторых, что для этого определения существенным является аналитичность функции $Z(s)$ в правой полуплоскости, так как тогда при $t < 0$ $e(t) \equiv 0$, что, в свою очередь, является основой для получения выражения (VIII.6).

Рассмотрим теперь подробно процесс построения функции $Z(s)$ по заданной рациональной функции, представляющей вещественную часть искомого функции. Запишем

$$Z(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n} = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2} \quad (\text{VIII.7})$$

[см. выражение (I.51)]. Используя далее ф-лы (I.52) — (I.54), можно вещественную часть функции при $s = j\omega$ представить сле-

дующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [Z(j\omega)] &= \left(\frac{m_1 m_2 - n_1 n_2}{m_2^2 - n_2^2} \right)_{s=j\omega} = \\ &= \frac{A_0 + A_1 \omega^2 + \dots + A_n \omega^{2n}}{B_0 + B_1 \omega^2 + \dots + B_n \omega^{2n}} = \frac{A(\omega^2)}{B(\omega^2)}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.8})$$

Это выражение является частным от деления двух полиномов от переменной ω^2 . Оно положительно при всех вещественных значениях ω только в том случае, если функция $Z(s)$ является входным сопротивлением, и ограничено только в том случае, если сопротивление не имеет полюсов на мнимой оси.

Теперь рассмотрим сформулированную задачу с учетом указанного ограничения, т. е. когда положительная вещественная функция $Z(s)$ не имеет полюсов на мнимой оси. Используя ур-ние (VIII.1), можно записать

$$\frac{1}{2} [Z(s) + Z(-s)] = \frac{A(-s^2)}{B(-s^2)} = f(s), \quad (\text{VIII.9})$$

где $f(s)$ — функция, имеющая полюсы $Z(s)$, расположенные в левой полуплоскости, и полюсы, являющиеся их зеркальным отображением относительно начала координат. При этом все полюсы вместе дают диаграмму их расположения, обладающую симметрией как относительно вещественной, так и относительно мнимой оси комплексной плоскости s . Если вещественная часть $\operatorname{Re}[Z(j\omega)]$ задана рациональной функцией, определяемой выражением (VIII.8), то имеем

$$f(s) = \frac{A_0 - A_1 s^2 + A_2 s^4 - \dots + (-1)^n A_n s^{2n}}{B_0 - B_1 s^2 + B_2 s^4 - \dots + (-1)^n B_n s^{2n}}. \quad (\text{VIII.10})$$

Полином знаменателя можно представить в виде

$$B(-s^2) = Q(s)Q(-s) = (m_2 + n_2)(m_2 - n_2), \quad (\text{VIII.11})$$

тогда опять очевиден характер диаграммы расположения полюсов функции $f(s)$.

Если в полном разложении функции $f(s)$ на элементарные дроби вычеркнуть все члены, содержащие полюсы в правой полуплоскости, умножить члены, содержащие полюсы в левой полуплоскости, на два, а остаток, представляющий собой просто постоянную

$$R = f(\infty) = \frac{A_n}{B_n}, \quad (\text{VIII.12})$$

оставить без изменения, то получим требуемую функцию $Z(s)$. Так как метод разложения рациональной функции на элементарные дроби хорошо известен, построение функции $Z(s)$ не вызывает затруднений.

Обычно полюсы функции $Z(s)$ или $f(s)$ — все простые, а вычеты определяются выражением

$$k_v = [(s - s_v) f(s)]_{s=s_v}, \quad (\text{VIII.13})$$

где s_1, s_2, \dots, s_n — нули полинома $Q(s)$ или полюсы функции $Z(s)$. Тогда

$$Z(s) = \frac{2k_1}{s-s_1} + \frac{2k_2}{s-s_2} + \dots + \frac{2k_n}{s-s_n} + R, \quad (\text{VIII.14})$$

где для сопряженных полюсов подразумеваются комплексно-сопряженные значения соответствующих вычетов. В связи с этим важно отметить, что вычеты функции $f(s)$ в полюсах, расположенных в левой полуплоскости, представляют собой вычеты функции $Z(s)/2$ в этих полюсах. Таким образом, сопротивление $Z(s)$ полностью характеризуется вычетами в его простых полюсах (с точностью до постоянного слагаемого)¹. Следовательно, функция $\text{Re}\{Z(j\omega)\}$, определяющая функцию $f(s)$, определяет также и функцию $Z(s)$.

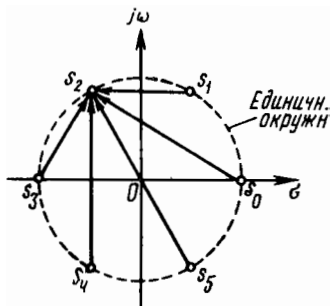


Рис. VIII.1

Проиллюстрируем процесс построения на примере функции

$$\text{Re}\{Z_0(j\omega)\} = \frac{1}{1 + \omega^6}, \quad (\text{VIII.15})$$

для которой

$$f(s) = \frac{1}{1 - s^6}. \quad (\text{VIII.16})$$

Полюсы этой функции определяются выражением

$$s_v = e^{j\frac{\pi v}{3}} \text{ при } v = 0, 1, \dots, 5, \quad (\text{VIII.17})$$

а полюсы в левой полуплоскости — выражениями

$$s_2 = e^{j\frac{2\pi}{3}}; \quad s_3 = -1; \quad s_4 = e^{-j\frac{2\pi}{3}}. \quad (\text{VIII.18})$$

Для вычета в точке $s = s_2$ имеем

$$k_2 = \frac{-1}{(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)(s_2 - s_4)(s_2 - s_5)(s_2 - s_0)}. \quad (\text{VIII.19})$$

Представив эти частотные множители в виде векторов на комплексной плоскости (рис. VIII.1) и используя геометрические

¹ Этот метод построения функции $Z(s)$ по ее вещественной части на мнимой оси не ограничивается, конечно, только случаем сопротивлений, имеющих простые полюсы, хотя выражение (VIII.14) справедливо именно для него. Когда используются функции с полюсами большей кратности, соответствующие члены в разложении $f(s)$ на элементарные дроби необходимо изменить, как это принято делать в хорошо известном методе [1].

свойства последних, находим, что сумма углов всех множителей равна $\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} = 4\pi - \frac{2\pi}{3}$, а произведение их модулей равно $1 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 6$. Следовательно, имеем

$$k_2 = -\frac{e^{j\frac{2\pi}{3}}}{6}; \quad k_3 = \frac{1}{6}; \quad k_4 = -\frac{e^{-j\frac{2\pi}{3}}}{6}. \quad (\text{VIII.20})$$

Величина R согласно выражению (VIII.12) в данном случае равна нулю, поэтому из разложения (VIII.14) находим

$$Z_0(s) = \frac{-1}{3} \left(\frac{e^{j\frac{2\pi}{3}}}{s-s_2} - \frac{1}{s+1} + \frac{e^{-j\frac{2\pi}{3}}}{s-s_4} \right), \quad (\text{VIII.21})$$

а используя соотношения (VIII.18), получим

$$Z_0(s) = \frac{1}{3} \left(\frac{s+2}{s^2+s+1} + \frac{1}{s+1} \right) = \frac{\frac{2}{3}s^2 + \frac{4}{3}s + 1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}. \quad (\text{VIII.22})$$

В изложенном методе, впервые предложенном Г. Боде, фигурирует разложение сопротивления на элементарные дроби, и поэтому данный метод наиболее целесообразно применять при решении тех задач, в которых для последующего использования функции сопротивления удобна именно такая форма представления. Когда требуется выразить сопротивление в виде частного от деления полиномов [см. уравнение (VIII.22)], то наиболее целесообразно использовать приводимый ниже другой способ построения сопротивления по его вещественной части, впервые предложенный С. Геверцем [13].

Из выражения (VIII.7) имеем

$$\begin{aligned} (m_1 m_2 - n_1 n_2) &= (a_0 + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n) (b_0 + \\ &+ b_2 s^2 + \dots + b_n s^n) - s^2 (a_1 + a_3 s^2 + \dots + a_{n-1} s^{n-1}) (b_1 + \\ &+ b_3 s^2 + \dots + b_{n-1} s^{n-1}), \end{aligned} \quad (\text{VIII.23})$$

где произвольно предполагается, что степень n — четная. Если положить $s = j\omega$ или $s^2 = -\omega^2$, то числитель выражения (VIII.8) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 \omega^2 + A_2 \omega^4 + \dots + A_n \omega^{2n} &= (a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - \dots) \times \\ &\times (b_0 - b_2 \omega^2 + b_4 \omega^4 - \dots) + \omega^2 (a_1 - a_3 \omega^2 + a_5 \omega^4 - \dots) \times \\ &\times (b_1 - b_3 \omega^2 + b_5 \omega^4 - \dots). \end{aligned} \quad (\text{VIII.24})$$

Перемножив выражения, стоящие в скобках в правой части последнего уравнения, а затем приравняв коэффициенты при оди-

цах, тогда знаки всех элементов определителя будут положительными, а величина D — неизменной.

Определитель D можно представить в виде

$$D = b_0 \begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 & 0 & \cdot \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \cdot \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & \cdot \\ b_7 & b_6 & b_5 & b_4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}. \quad (\text{VIII.29})$$

Поскольку элементы b_k известны как коэффициенты полинома Гурвица, в соответствии с критерием Гурвица [1] определитель, используемый в рассматриваемом методе, должен быть положительным и отличным от нуля. Поэтому система ур-ний (VIII.25), безусловно, будет иметь единственное решение для коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n .

В качестве примера рассмотрим вещественную часть функции, определяемую выражением (VIII.15). Вначале, используя соотношение (VIII.18), найдем нули полинома $B(-s^2)$, расположенные в левой полуплоскости, а уже по ним образуем полином $Q(s)$ [см. выражение (VIII.27)]:

$$\begin{aligned} Q(s) &= \left(s - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) \left(s - e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right) (s+1) = \\ &= (s^2 + 2s + 1)(s+1) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1. \end{aligned} \quad (\text{VIII.30})$$

Тогда система ур-ний (VIII.25) записывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} A_0 = 1 &= a_0 \\ A_1 = 0 &= -2a_0 + 2a_1 - a_2 \\ A_2 = 0 &= -a_1 + 2a_2 - 2a_3 \\ A_3 = 0 &= a_3 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VIII.31})$$

Нетрудно найти, что решение этой системы имеет вид:

$$a_0 = 1; \quad a_1 = \frac{4}{3}; \quad a_2 = \frac{2}{3}; \quad a_3 = 0. \quad (\text{VIII.32})$$

Полученные коэффициенты, очевидно, совпадают с коэффициентами полинома числителя $Z_0(s)$ в выражении (VIII.22). Полином знаменателя в данном случае совпадает с полиномом, определяемым выражением (VIII.30).

Другой интересный метод [23], полезный при развитии некоторых задач синтеза, рассматриваемых ниже (в главе X), базируется

на следующих положениях. Используя обозначения из выражений (VIII.7) и (VIII.8), запишем для сокращения

$$M = m_1 m_2 - n_1 n_2 \quad (\text{VIII.33})$$

и рассмотрим построение вспомогательного сопротивления $Z'(s) = \frac{P'(s)}{Q(s)}$, имеющего такой полином числителя $P'(s) = m_1' + n_1'$, что выполняется соотношение

$$m_1' m_2 - n_1' n_2 = 1. \quad (\text{VIII.34})$$

Из предыдущего рассмотрения ясно, что всегда можно найти¹ такой полином $P'(s)$. Фактически построение функции по ее вещественной части, определяемой ф-лой (VIII.15), требует точного выполнения соотношения (VIII.34).

Умножая обе его части на M , получим

$$m_1' M m_2 - n_1' M n_2 = m_1 m_2 - n_1 n_2. \quad (\text{VIII.35})$$

Однако из последнего выражения нельзя сделать вывода, что $m_1' M = m_1$ и $n_1' M = n_1$. Скорее можно предположить, что справедливы соотношения:

$$m_1' M = m_1 + m_1^*; \quad n_1' M = n_1 + n_1^*, \quad (\text{VIII.36})$$

где m_1^* и n_1^* — соответственно четный и нечетный полиномы, удовлетворяющие тождеству

$$m_1^* m_2 - n_1^* n_2 = 0. \quad (\text{VIII.37})$$

Используя соотношения (VIII.36), можно записать

$$F(s) = \frac{(m_1' + n_1')M}{m_2 + n_2} = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2} + \frac{m_1^* + n_1^*}{m_2 + n_2}. \quad (\text{VIII.38})$$

Тогда из уравнения (VIII.37) находим, что

$$\frac{m_1^* + n_1^*}{m_2 + n_2} = \frac{m_1^*}{n_2} = \frac{n_1^*}{m_2} = p(s) \text{ — нечетная рациональная функция} \quad (\text{VIII.39})$$

и

$$F(s) = Z(s) + p(s). \quad (\text{VIII.40})$$

Поскольку согласно сделанному предположению сопротивление $Z(s)$ не имеет полюсов на мнимой оси, из выражений (VIII.38) и (VIII.40) следует, что функция $p(s)$ также не может иметь на ней полюсов. С другой стороны, согласно выражению (VIII.39) тре-

¹ Особенно эффективный метод выполнения этой операции рассматривается в § XI.2.

буется, чтобы функция $p(s)$ не имела полюсов нигде, кроме мнимой оси. Таким образом, единственная возможность заключается в том, что функция $p(s)$ совсем не должна иметь конечных, отличных от нуля полюсов и, следовательно, должна быть конечным нечетным полиномом. Если функцию $F(s)$, определяемую выражением (VIII.40), рассматривать как разложение на элементарные дроби, то полный остаток (рациональная функция) с точностью до постоянного члена представит собой функцию $p(s)$.

Таким образом, становится понятным метод получения функции $Z(s)$ по вспомогательному сопротивлению $Z'(s)$. Сначала необходимо образовать неправильную дробь

$$MZ'(s) = \frac{M(m_1' + n_1')}{m_2 + n_2}$$

и затем, производя деление полинома числителя на полином знаменателя, уменьшать степень полинома-делимого (числителя) до тех пор, пока она не будет превышать степени полинома знаменателя. Для иллюстрации допустим, что дано

$$\operatorname{Re} [Z(j\omega)] = \frac{\omega^2}{1 + \omega^6}. \quad (\text{VIII. 41})$$

Это выражение получается из выражения (VIII.15) при умножении последнего на ω^2 . Ясно, что в данном случае $M = -s^2$. Соответствующая функция $F(s)$ является сопротивлением, определяемым выражением (VIII.22), умноженным на $-s^2$. Произведем деление

$$s^3 + 2s^2 + 2s + 1 \left| \begin{array}{l} -\frac{2}{3}s \\ \hline -\frac{2}{3}s^4 - \frac{4}{3}s^3 - s^2 \\ \hline -\frac{2}{3}s^4 - \frac{4}{3}s^3 - \frac{4}{3}s^2 - \frac{2}{3}s \\ \hline \frac{1}{3}s^2 + \frac{2}{3}s \end{array} \right. \quad (\text{VIII. 42})$$

Искомое сопротивление имеет вид

$$Z_1(s) = \frac{\frac{1}{3}s^2 + \frac{2}{3}s}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}. \quad (\text{VIII. 43})$$

Пусть далее требуется найти сопротивление, вещественная часть которого равна

$$\operatorname{Re} [Z(j\omega)] = \frac{\omega^4}{1 + \omega^6}. \quad (\text{VIII. 44})$$

Умножим сопротивление $Z_1(s)$, определяемое выражением (VIII.43), на $-s^2$ и выполним деление

$$s^3 + 2s^2 + 2s + 1 \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{3}s \\ \hline -\frac{1}{3}s^4 - \frac{2}{3}s^3 \\ \hline -\frac{1}{3}s^4 - \frac{2}{3}s^3 - \frac{2}{3}s^2 - \frac{1}{3}s \\ \hline \frac{2}{3}s^2 + \frac{1}{3}s \end{array} \right. \quad (\text{VIII.45})$$

Соответствующее сопротивление находим в виде

$$Z_2(s) = \frac{\frac{2}{3}s^2 + \frac{1}{3}s}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}. \quad (\text{VIII.46})$$

И, наконец, чтобы получить сопротивление с вещественной частью

$$\text{Re}[Z(j\omega)] = \frac{\omega^6}{1 + \omega^6}, \quad (\text{VIII.47})$$

умножим сопротивление $Z_2(s)$, определяемое выражением (VIII.46), на $-s^2$ и выполним деление

$$s^3 + 2s^2 + 2s + 1 \left| \begin{array}{l} -\frac{2}{3}s \\ \hline -\frac{2}{3}s^4 - \frac{1}{3}s^3 \\ \hline -\frac{2}{3}s^4 - \frac{4}{3}s^3 - \frac{4}{3}s^2 - \frac{2}{3}s \\ \hline s^3 + \frac{4}{3}s^2 + \frac{2}{3}s \end{array} \right. \quad (\text{VIII.48})$$

В результате имеем

$$Z_3(s) = \frac{s^3 + \frac{4}{3}s^2 + \frac{2}{3}s}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}. \quad (\text{VIII.49})$$

Это выражение можно также было получить непосредственно по функции $Z_0(s)$, определяемой выражением (VIII.22), для чего необходимо умножить ее на $-s^6$ и проделать три этапа деления. Интересно заметить, что сумма сопротивлений $Z_0(s)$ и $Z_3(s)$, определяемых соответственно ф-лами (VIII.22) и (VIII.49), равна единице. Это объясняется тем, что сумма соответствующих вещественных частей, определяемых выражениями (VIII.15) и (VIII.47), также равна единице.

Пусть теперь требуется найти сопротивление с вещественной частью

$$\operatorname{Re}[Z(j\omega)] = \frac{A_0 + A_1\omega^2 + A_2\omega^4 + A_3\omega^6}{1 + \omega^6}. \quad (\text{VIII.50})$$

Используя ф-лы (VIII.22), (VIII.43), (VIII.46) и (VIII.49), находим искомое решение

$$Z(s) = A_0 Z_0(s) + A_1 Z_1(s) + A_2 Z_2(s) + A_3 Z_3(s). \quad (\text{VIII.51})$$

Рассмотренные методы построения сопротивления по его вещественной части обычно не могут привести к функции, имеющей полюсы на мнимой оси, так как соответствующие множители вида $(s^2 + \omega_0^2)$ в четной части функции $Z(s)$, определяемой выражением (VIII.10), сокращаются. Таким образом, если полином знаменателя $Q(s) = m_2 + n_2$ содержит множитель $(s^2 + \omega_0^2)$, то полином $m_2^2 - n_2^2$ содержит его квадрат. Аналогично, для того чтобы вещественная часть функции при $s = j\omega$ была неотрицательной, полином $m_1 m_2 - n_1 n_2$ также должен содержать квадрат этого множителя.

Указанное ограничение присуще и тем случаям, когда рассматривается реактивная функция, имеющая полюсы только на мнимой оси (сопротивление цепи без потерь), причем вещественная часть ее равна нулю для всех частот на данной оси. Следовательно, добавление к любому заданному сопротивлению реактивной функции не влияет на результирующую вещественную часть, а значит, сопротивление, образуемое из нее, не может иметь полюсов на мнимой оси. Такое входное сопротивление называют *минимально реактивным*, поскольку его мнимая (или реактивная) часть может включать произвольный аддитивный реактанс и, тем не менее, соответствует заданной вещественной части.

Это утверждение предполагает, конечно, что множители вида $(s^2 + \omega_0^2)^2$, содержащиеся в числителе и знаменателе выражения (VIII.10), сокращаются до начала процесса составления системы ур-ний (VIII.25). Если выражение (VIII.8) для вещественной части задано в виде полинома, то общие множители числителя и знаменателя не заданы в явном виде, поэтому интересно выяснить, что будет иметь место в случае, когда система ур-ний (VIII.25) составлена по заданному выражению (вещественной части), содержащему пару сокращаемых множителей. Ясно, что тогда полином $Q(s)$ содержит два нуля на мнимой оси и согласно критерию принадлежности к классу полиномов Гурвица определитель (VIII.28) станет равным нулю. При этом система неоднородных ур-ний (VIII.25) имеет нетривиальные решения только для определенных значений коэффициентов A_0, A_1, A_2, \dots , и поскольку полином числителя функции, определяемой выражением (VIII.10), также содержит множители на мнимой оси, приведенные выше особые условия автоматически выполняются; получающееся нетривиальное решение дает сопротивление $Z(s)$ с полюсом на мнимой оси.

Таким образом, даже если сокращаемые множители на мнимой оси в выражении (VIII.8) для вещественной части функции не сокращены, данный метод построения $Z(s)$, тем не менее, можно непосредственно применять (при условии, что известны соответствующие алгебраические уравнения), и искомое сопротивление будет содержать соответствующие полюсы на мнимой оси.

Поскольку в выражение для данной вещественной части можно произвольно включить множители, то отсюда следует, что построение сопротивления по описанному методу не является единственным. Такое положение нежелательно при решении некоторых задач, однако от этой трудности можно избавиться, учитывая что вещественная часть реактивной функции, хотя и считается в обычном смысле равной нулю на всей мнимой оси, обладает на ней импульсами в полюсах, которые нельзя обнаружить обычными алгебраическими способами. Формирование такой характеристики вещественной части функции и нахождение сопротивления только по этой ее части рассматриваются в следующем параграфе.

VIII.2. Импульсы вещественной части

Для того чтобы убедиться в неравенстве нулю на мнимой оси вещественной части реактивной функции (что вытекает из ее нахождения обычным алгебраическим способом), необходимо тщательно изучить поведение такой вещественной части, которая соответствует функции, имеющей один полюс в левой полуплоскости, при условии, что этот полюс перемещается все ближе и ближе к мнимой оси. Рассмотрим функцию

$$Z(s) = \frac{1}{\pi(s + \alpha)}, \quad (\text{VIII.52})$$

имеющую простой полюс на отрицательной вещественной оси, расположенный на расстоянии α левее начала координат. При $s = j\omega$

$$Z(j\omega) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)} - j \frac{\omega}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}. \quad (\text{VIII.53})$$

В соответствии с ф-лой (VIII.4) вещественная и мнимая части имеют вид

$$R(\omega) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}; \quad X(\omega) = \frac{-\omega}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}. \quad (\text{VIII.54})$$

Если положить $\alpha = 0$, то полюс сопротивления, определяемого выражением (VIII.52), станет полюсом на мнимой оси, а функция $R(\omega)$ из выражений (VIII.54) окажется равной нулю. Однако последнее утверждение, как будет ясно из дальнейшего, неверно. На рис. VIII.2 приведен график функции $R(\omega)$. Из него видно, что максимальное значение данной функции (в точке $\omega = 0$) равно $\frac{1}{\pi\alpha}$ и что ширина полосы под кривой в точках, соответствующих поло-

вине этого максимального значения, равна 2α . Полную площадь под кривой $R(\omega)$ можно легко найти из интегрального выражения

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha d\omega}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (\text{VIII.55})$$

Полагая $\frac{\omega}{\alpha} = x$, находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1. \quad (\text{VIII.56})$$

Важной особенностью полученного результата является то, что площадь под кривой $R(\omega)$ не зависит от α . Нормализуя площадь к единице, видим, что в первоначальное выражение (VIII.52) для функции $Z(s)$ необходимо ввести множитель $1/\pi$.

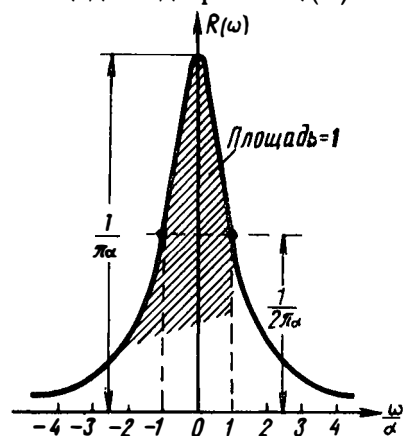


Рис. VIII.2

Поскольку предполагается, что величина α становится все меньше и меньше и полюс перемещается все ближе к мнимой оси, функция $R(\omega)$ все больше приобретает форму импульса, так как становится выше и тоньше; при этом площадь под ней остается равной единице. Отсюда видно, что по мере того, как α стремится к нулю, функция $R(\omega)$ равномерно приближается к единичной импульсной функции $u_0(\omega)$.

Таким образом, реактивная функция

$$Z(s) = \frac{1}{\pi s} \quad (\text{VIII.57})$$

при $s = j\omega$ имеет вид

$$Z(j\omega) = u_0(\omega) - \frac{j}{\pi\omega}. \quad (\text{VIII.58})$$

Аналогично реактивное сопротивление, имеющее простые полюсы в точках $s = \pm j\omega_0$ мнимой оси, с положительными вещественными вычетами $\frac{k_0}{\pi}$ определяется выражением

$$Z(s) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{k_0}{s - j\omega_0} + \frac{k_0}{s + j\omega_0} \right). \quad (\text{VIII.59})$$

При $s = j\omega$ вещественная часть этого сопротивления имеет вид

$$R(\omega) = k_0[u_0(\omega - \omega_0) + u_0(\omega + \omega_0)], \quad (\text{VIII.60})$$

а мнимая часть —

$$X(\omega) = \frac{2k_0}{\pi} \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (\text{VIII.61})$$

Формула (VIII.61) хорошо известна. Результат, даваемый формулой (VIII.60), следует непосредственно из того обстоятельства, что отмеченные выше свойства вещественной части функции с полюсом на вещественной оси, очевидно, остаются неизменными и для случая, когда этот полюс просто смещается параллельно мнимой оси. Поскольку при этом имеются два таких полюса, смещенных на равные и противоположные расстояния от начала координат, выражение (VIII.60) является, очевидно, правильным.

Нетрудно заметить, что использование интегрального соотношения (VIII.6) дает возможность точно найти временную реакцию цепи по выражению для вещественной части функции. Поэтому для сопротивления, определяемого выражением (VIII.57), при условии, что оно представлено в виде ф-лы (VIII.58), можно найти реакцию при воздействии на него единичного импульса тока:

$$e(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} u_0(\omega) \cos \omega t d\omega \quad \text{при } t > 0. \quad (\text{VIII.62})$$

Если мысленно представить функцию $u_0(\omega)$ в форме высокого тонкого импульса, изображенного на рис. VIII.2, но настолько тонкого, что он практически равен нулю всюду в непосредственной близости от начала координат, то станет ясно, что функцию $\cos \omega t$ под знаком интеграла в выражении (VIII.62) можно заменить ее значением в точке $\omega = 0$. Тогда этот интеграл будет равен половине площади импульса. Поскольку при выводе выражения (VIII.6) предполагалось, что $e(t) = 0$ при $t < 0$, а интеграл (VIII.62) при $t > 0$ дает $e(t) = \frac{1}{\pi}$, получим функцию

$$e(t) = \frac{1}{\pi} u_{-1}(t), \quad (\text{VIII.63})$$

которая является ступенчатой функцией величины $\frac{1}{\pi}$. Полученный результат соответствует реакции сопротивления (VIII.57) на единичный импульс тока, как это следует из элементарного анализа цепи.

Если подставить вещественную часть функции, определяемую выражением (VIII.60), в ф-лу (VIII.6), то при $t > 0$

$$e(t) = \frac{2k_0}{\pi} \int_0^{\infty} [u_0(\omega - \omega_0) + u_0(\omega + \omega_0)] \cos \omega t d\omega. \quad (\text{VIII.64})$$

В данной формуле подынтегральное выражение равно нулю всюду, кроме точек $\omega = \pm \omega_0$, где $\cos \omega t = \cos \omega_0 t$. Поскольку интегрирование распространяется только на положительные значения ω , импульс $u_0(\omega + \omega_0)$ не влияет на его результаты.

При $t > 0$ имеем

$$e(t) = \frac{2k_0}{\pi} \cos \omega_0 t \int_0^{\infty} u_0(\omega - \omega_0) d\omega = \frac{2k_0}{\pi} \cos \omega_0 t. \quad (\text{VIII.65})$$

Это выражение также совпадает с хорошо известной реакцией на единичный импульс тока цепи, сопротивление которой определяется выражением (VIII.59).

Обобщим полученные результаты в виде следующих предложений:

а) вещественная часть сопротивления, имеющего полюсы только на мнимой оси, не равна тождественно нулю при $s = j\omega$, а состоит из суммы импульсов (расположенных в указанных полюсах), величина которой в π раз больше величины соответствующих вычетов сопротивления в этих полюсах;

б) в любом случае сопротивление (проводимость или безразмерная передаточная функция) однозначно определяется (и однозначно может быть построена) своей вещественной частью, если последняя известна; при этом считаются заданными любые импульсы, которые она может содержать;

в) для вещественных частей функций, содержащих импульсы в качестве составных элементов, можно непосредственно применять все обычные методы анализа во временной или частотной области. На практике обычно легче пользоваться именно функциями, содержащими импульсы, так как соответствующие функции [подобно $\cos \omega t$ в интегральных выражениях (VIII.62) и (VIII.64)] не представляют интереса, за исключением тех частот, на которых появляются эти импульсы.

VIII.3. Построение произвольной вещественной части по импульсам

В анализе цепей применяют известный прием, заключающийся в том, что при построении произвольной функции импульс представляется как некоторый «строительный блок» («building block»). Обычно считают (рис. VIII.3), что некоторая заданная функция $R(\omega)$ является суммой элементов (импульсов), каждый из которых имеет прямоугольную форму с высотой $R(\omega_0)$ и шириной $d\omega$ и расположен на частоте $\omega = \omega_0$. Этот элемент можно рассматривать как импульс $R(\omega_0)d\omega[u_0(\omega - \omega_0)]$, где $R(\omega_0)d\omega$ — его площадь. Поскольку вещественная часть функции $R(\omega)$ является четной функцией и, следовательно, на частоте $\omega = -\omega_0$ имеется такой же элемент [см. выражение (VIII.60)], то приращение реактивной функ-

ции, соответствующей этому элементу, будет согласно выражению (VIII.59) иметь вид

$$dZ(s) = \frac{R(\omega_0) d\omega}{\pi} \left(\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{s + j\omega_0} \right) = \frac{2sR(\omega_0) d\omega}{\pi (s^2 + \omega_0^2)}. \quad (\text{VIII.66})$$

Полученный результат позволяет найти полезное свойство, касающееся асимптотического поведения сопротивлений. Так, из выражения (VIII.66) при $s \rightarrow \infty$ имеем

$$dZ(s) \rightarrow \frac{2R(\omega) d\omega}{\pi s}. \quad (\text{VIII.67})$$

Полное сопротивление с вещественной частью $R(\omega)$ определяется выражением

$$Z(s) \rightarrow \frac{2}{\pi s} \int_0^{\infty} R(\omega) d\omega \text{ при } s \rightarrow \infty. \quad (\text{VIII.68})$$

Здесь опущен нулевой индекс при частоте ω , так как больше в нем нет необходимости. Анализируя выражение (VIII.68), видим, что каждая функция сопротивления, имеющая под своей вещественной частью конечную и отличную от нуля общую площадь, должна на очень больших частотах вести себя подобно проводимости $\frac{1}{Cs}$. Если рассматри-

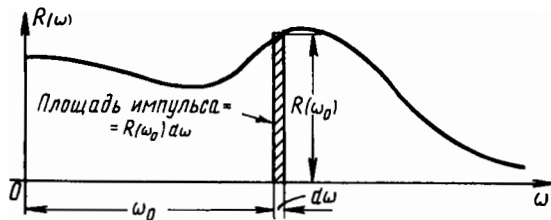


Рис. VIII.3

вается входное сопротивление цепи, то на достаточно высоких частотах цепь со стороны входных зажимов вырождается в емкость, величину которой можно найти из зависимости

$$\int_0^{\infty} R(\omega) d\omega = \frac{\pi}{2C}. \quad (\text{VIII.69})$$

Полученное выражение известно как теорема об интеграле сопротивления¹. Она, как будет ясно из последующего рассмотрения, имеет важное практическое применение. Так, например, емкость C может представлять собой параллельно включенную паразитную емкость, которая, в частности, хотя и не включается в схему, влияет на поведение физической цепи. Используя интегральное соотношение (VIII.69), можно либо вычислить величину этой паразитной емкости по непосредственно или косвенно

¹ Впервые эта теорема была сформулирована и успешно применена Г. Боде [15]. Однако основное ее свойство было предсказано в работе [16].

найденному интегралу сопротивления, либо определить величину его по известной паразитной емкости.

Обычный метод вывода указанного соотношения основан на законе интеграла Коши, согласно которому величина контурного интеграла, взятого по области аналитичности подынтегрального выражения, равна нулю. Для сопротивления $Z(s)$ область аналитичности находится в правой полуплоскости. Замкнутый контур, состоящий из участка мнимой оси от точки $-j\rho$ до точки $+j\rho$ и полуокружности радиуса ρ в правой полуплоскости (рис. VIII.4), является соответствующим контуром для любого (но большого) значения ρ . Если на мнимой оси есть полюсы, то, как отмечалось выше, они обходятся по бесконечно малым полуокружностям. Для такого контура имеем

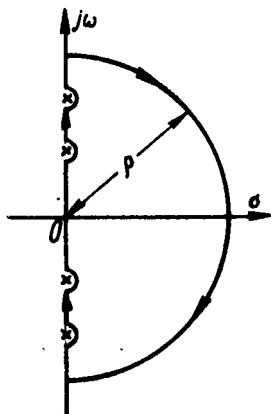


Рис. VIII.4

$$\oint Z(s) ds = 0. \quad (\text{VIII.70})$$

При вычислении этого интеграла рассмотрим отдельно интегралы, соответствующие частям контура — мнимой оси и полуокружности, радиус которой считаем бесконечно большим. Тогда интеграл (VIII.70) будет иметь вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} Z(j\omega) d(j\omega) + \int_{\text{arc}} Z(s) ds = 0. \quad (\text{VIII.71})$$

В первом из интегралов представим сопротивление $Z(j\omega)$ в виде $Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$, тогда интеграл от функции $X(\omega)$ вдоль всей мнимой оси равен нулю, потому что $X(\omega)$ — нечетная функция. Во втором интеграле, который соответствует значениям s вблизи бесконечно удаленной точки, следует перейти к асимптотическому поведению функции $Z(s)$, т. е. к функции $\frac{1}{Cs}$. Учитывая сказанное, вместо уравнения (VIII.71) получим

$$j \int_{-\infty}^{\infty} R(\omega) d\omega + \frac{1}{C} \int_{\text{arc}} \frac{ds}{s} = 0. \quad (\text{VIII.72})$$

Для значений s , соответствующих дуге большого радиуса, запишем

$$s = \rho e^{j\theta}, \quad ds = j\rho e^{j\theta} d\theta \quad (\text{VIII.73})$$

и, следовательно,

$$\frac{ds}{s} = j d\theta. \quad (\text{VIII.74})$$

Интегрирование вдоль полуокружности означает, что θ изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до $-\frac{\pi}{2}$. Поэтому ур-ние (VIII.72) можно записать в виде

$$j \int_{-\infty}^{\infty} R(\omega) d\omega + \frac{j}{C} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} d\theta = 0 \quad (\text{VIII.75})$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(\omega) d\omega = \frac{1}{C} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{C} \quad (\text{VIII.76})$$

Поскольку $R(\omega)$ — четная функция, левый интеграл в выражении (VIII.76) можно вычислить в пределах от 0 до $+\infty$ и результат умножить на 2. Полученное в результате выражение будет совпадать с выражением (VIII.69).

VIII.4. Использование преобразования Гильберта

Аналитически задача построения мнимой части комплексной функции по ее вещественной части, или наоборот (т. е. когда используется другой способ построения комплексной функции — либо по ее вещественной, либо мнимой части); берет свое начало из теории потенциалов. Хорошо известно, что вещественная и мнимая части комплексной функции удовлетворяют уравнению Лапласа в любой области аналитичности и, следовательно, их можно рассматривать как потенциальные функции [1]¹. Две такие функции (например, вещественная и мнимая части функции комплексной переменной), удовлетворяющие условию Коши — Римана, называются в этом случае *сопряженными потенциальными функциями*.

Формула интеграла Коши является аналитической основой, на которой базируется формулировка зависимости между парой таких функций. Если функция $Z(s)$ — аналитическая в определенной области, включая ее границу, то по этой формуле, зная значение функции на границе, нетрудно найти ее значение в любой точке внутри области. Если граница представляет собой окружность, то оказывается, что достаточно знать только граничные значения вещественной или мнимой части, или что граничные значения одной из этих частей можно выразить через граничные значения другой. Формулы, определяющие указанные зависимости, известны под названием интегралов Пуассона [1]¹. Если посред-

¹ См. также [52] (прим. ред.).

ством конформного преобразования внутренняя часть круга отображается в правую полуплоскость в соответствии с новой переменной (которую можно отождествить с комплексной частотой s), то те же самые интегральные зависимости будут характеризовать связь вещественной части сопротивления (или проводимости) с его мнимой частью, или наоборот. В таком виде эти зависимости известны как преобразования Гильберта¹. Полезно уяснить, что источником их является формула интеграла Коши, ибо иначе трудно проследить выполнение условий, при которых они применимы. К таким условиям относится требование, чтобы правая полуплоскость, включая мнимую ось, была областью аналитичности комплексной функции, вещественная и мнимая части которой связаны преобразованиями Гильберта. Эти условия фактически совпадают с условиями, отмеченными в начале главы, важными для построения полной функции по ее вещественной части.

Преобразования Гильберта можно получить непосредственно, без применения формулы интеграла Коши и интегралов Пуассона. Для этого в качестве отправной точки используем представление (см. § VIII.2), согласно которому вещественная и мнимая части комплексной функции, определяемой выражением (VIII.58), являются обычной парой сопряженных потенциальных функций. Другими словами, такое представление означает, что величиной, сопряженной с единичным импульсом, расположенным в точке $\omega = 0$, является $-\frac{1}{\pi\omega}$, а величиной, сопряженной с единичным

импульсом в точке $\omega = \omega_0$, может служить $\frac{1}{\pi(\omega - \omega_0)}$.

Поскольку импульсы суть элементы, используемые для построения произвольных функций (см. рис. VIII.3), то, очевидно, можно найти сопряженное значение для какой-либо величины по известному сопряженному значению импульса. Как будет показано ниже, преобразования Гильберта являются результатом воплощения указанной идеи.

Для того чтобы сохранить общность анализа независимо от того, используется ли сопротивление, проводимость или безразмерная функция передачи, введем в рассмотрение *системную функцию*

$$h(j\omega) = h_1(\omega) + jh_2(\omega). \quad (\text{VIII.77})$$

Если изобразить вещественную часть $h_1(\omega)$ графически в функции от $R(\omega)$, как на рис. VIII.3, и если вместо ω_0 для обозначения произвольного положения обычного элемента использовать символ ξ , то величина элемента, рассматриваемого в качестве импульса, будет равна $h_1(\xi) d\xi$. При этом импульс, сопряженный с заданным импульсом, характеризуется величиной $-\frac{h_1(\xi) d\xi}{\pi(\omega - \xi)}$, а функция

¹ Преобразование Гильберта в теории цепей впервые применил Ли [17].

сопряженная с полной функцией $h_1(\omega)$, — интегралом

$$h_2(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h_1(\xi) d\xi}{\omega - \xi}. \quad (\text{VIII.78})$$

Следует заметить, что в последнем выражении интегрирование производится в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, так как подынтегральное выражение представляет собой сопряженное значение только одного элемента, и пока еще неизвестно, является ли функция $h_1(\omega)$ четной или нечетной. Единственное допущение заключается в том, что она является вещественной частью комплексной функции, которая, в свою очередь, аналитична в правой полуплоскости и на мнимой оси.¹

При нахождении интегрального соотношения между вещественной и мнимой частями функции необходимо помнить, что условия Коши — Римана

$$\frac{\partial h_1}{\partial \sigma} = \frac{\partial h_2}{\partial \omega}; \quad \frac{\partial h_1}{\partial \omega} = -\frac{\partial h_2}{\partial \sigma}, \quad (\text{VIII.79})$$

связывающие обе сопряженные потенциальные функции h_1 и h_2 , остаются неизменными, если поменять их местами и изменить алгебраический знак одной из них. Прделав эту операцию для функции, определяемой выражением (VIII.78), получим требуемую дополнительную зависимость

$$h_1(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h_2(\xi) d\xi}{\omega - \xi}. \quad (\text{VIII.80})$$

Интегральные выражения (VIII.78) и (VIII.80) являются преобразованиями Гильберта. Можно получить много их модификаций либо в зависимости от того, являются ли функции h_1 и h_2 четной или нечетной соответственно (при этом получаются интегралы, относящиеся только к положительной половине спектра), либо введя логарифмический масштаб частоты, либо другими средствами. Здесь мы не будем рассматривать возможные интегральные соотношения, а только обратим внимание на некоторые основные свойства этих интегралов, полезные при решении различного рода задач.

Прежде всего, линейность зависимостей позволяет упростить рассмотрение сложных функций путем разбиения их на части, нахождения сопряженных с этими частями функций и последующего их сложения. Можно также дифференцировать или интегрировать обе функции любое число раз, дифференцировать или интегрировать функцию под знаком интеграла, затем выполнить интегриро-

¹ Принимается, что функция $h_1(\omega)$ остается ограниченной при всех значениях ω , включающих в себя точку на бесконечности.

вание и, наконец, интегрировать или дифференцировать с тем, чтобы избежать соответствующей начальной операции, какой бы она ни была. Более того, полезно заметить, что эти интегралы выражают свертку функции h_1 (или h_2) с функцией $\frac{1}{\pi\omega}$.

Подобно любому интегралу свертки они могут быть модифицированы путем взаимной замены аргументов ξ и $\omega - \xi$ или путем дифференцирования одной из двух свертываемых функций и интегрирования другой и повторения этого процесса столько раз, сколько потребуется. Если при дифференцировании функции в ней появляются импульсы,

то нет необходимости выполнять операцию интегрирования, ибо мы знаем, что любая свертываемая с импульсом функция снова приводит к исходной функции, смещенной по отношению к положению импульса. Перечисленные и другие подобные приемы упрощают использование рассматриваемых интегралов, так что во многих случаях требуется выполнить (если вообще требуется) лишь совсем малое количество операций интегрирования, особенно, если нас удовлетворяет приближенный результат [18].

Ниже приводятся несколько характерных примеров, иллюстрирующих те задачи, для которых данный аналитический подход является более удобным, чем изложенные выше алгебраические

методы. Прежде всего, это удобство сказывается в случаях, когда функция: а) задана графически; б) является нерациональной функцией; в) задана в виде ряда отрезков нерациональных функций, сливающихся на границах частотных интервалов. В таких случаях методы, рассмотренные в начале настоящего параграфа, очевидно, бесполезны.

Рассмотрим первый прием функции такого рода, график которой изображен на рис. VIII.5. Заданная функция $h_1(\omega)$ представляет собой прямоугольный импульс, симметричный относительно начала координат. В интервале изменения аргумента $-\omega_1 < \omega < \omega_1$ функция равна единице, при $|\omega| > \omega_1$ она тождественно равна нулю. При этом интеграл (VIII.78) принимает вид

$$h_2(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} \frac{d\xi}{\omega - \xi} \quad (\text{VIII.81})$$

или

$$h_2(\omega) = \frac{1}{\pi} \ln(\omega - \xi) \Big|_{-\omega_1}^{\omega_1} = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{\omega - \omega_1}{\omega + \omega_1} \right|. \quad (\text{VIII.82})$$

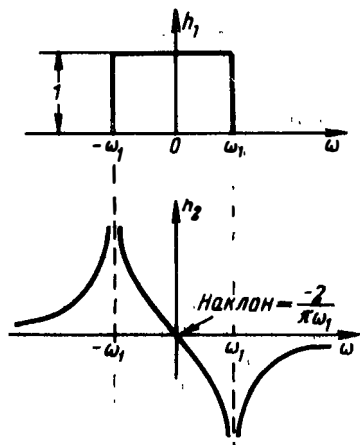


Рис. VIII.5

Знак модуля здесь необходим для того, чтобы функция $h_2(\omega)$ оставалась вещественной. С другой стороны, необходимость введения знака модуля вытекает из рассмотрения выражений (VIII.52) и (VIII.53), на которых основаны все наши рассуждения. Полагая что $\alpha \neq 0$, интегральное выражение (VIII.81) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 h_2(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} \frac{(\omega - \xi) d\xi}{\alpha^2 + (\omega - \xi)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha^2 + (\omega - \omega_1)^2}^{\alpha^2 + (\omega + \omega_1)^2} \frac{du}{u} = \\
 &= \frac{1}{\pi} \ln \sqrt{\frac{\alpha^2 + (\omega - \omega_1)^2}{\alpha^2 + (\omega + \omega_1)^2}}. \quad (\text{VIII.83})
 \end{aligned}$$

Если положить $\alpha = 0$, то получим выражение (VIII.82).

В нижней части рис. VIII.5 показана кривая результирующей функции h_2 , которая в точках, соответствующих точкам разрыва функции h_1 , имеет логарифмические бесконечности; наклон функции h_2 в точке $\omega = 0$ обратно пропорционален ширине импульсной функции h_1 (см. рис. VIII.5). По мере роста частоты ω_1 функции h_1 вырождается в постоянную, а функция h_2 становится тождественно равной нулю. Таким образом, сопряженным значением для постоянной является нуль.

Интегрируя функции, изображенные на рис. VIII.5, можно получить новую пару сопряженных потенциальных функций. В этой связи необходимо отметить, что интегрирование (или дифференцирование) изменяет четную функцию на нечетную (с точностью до возможной постоянной, которую, как мы видели, можно опустить), и наоборот. Поскольку вещественные части функции цепи всегда четные, а мнимые — нечетные, после интегрирования (оно, как отмечалось выше, требует изменения алгебраического знака одной из функций) необходимо произвести взаимную замену функций в тождествах. Если проинтегрировать функцию h_1 , показанную на рис. VIII.5, то получим функцию, которая равна линейному наклону в диапазоне $-\omega_1 < \omega < \omega_1$ и постоянной вне этого диапазона. Интегрируя выражение (VIII.82) в пределах от $-\infty$ до переменного верхнего предела ω и изменяя алгебраический знак, будем иметь

$$\frac{\omega_1}{\pi} \left(\ln |x^2 - 1| - x \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - 2 \right) \quad \text{при } x = \frac{\omega}{\omega_1}. \quad (\text{VIII.84})$$

Эта функция — четная; она является сопряженной с функцией (представляющей собой квазилинейный наклон), описанной выше. Последняя аналогична функции фазового запаздывания, свойственной схемам пропускания нижних частот. Учитывая это, целесообразно полученные функции рассматривать как пару функций: затухания (или потерь) и фазовой. Они, в свою очередь, связаны с известной логарифмической обратной системной функцией соотношением

$$h(j\omega) = e^{-(\alpha + j\beta)}. \quad (\text{VIII.85})$$

Здесь $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$ — соответственно функция потерь в неперях и функция фазового запаздывания в радианах. Интеграл функции $h_1(\omega)$, приведенной на рис. VIII.5 (без учета постоянного члена), нужно отождествить с $\beta(\omega)$, а функцию, представленную выражением (VIII.84) (с отброшенным постоянным членом), — с $\alpha(\omega)$. Поскольку это можно сделать лишь когда логарифм функции $h(s)$ является аналитической функцией в правой полуплоскости s и на мнимой оси, то системная функция $h(s)$ не должна иметь ни нулей, ни полюсов в правой полуплоскости. Если $h(s)$ — входная функция, тогда ее принадлежность к классу п. в. ф. гарантирует выполнение указанного требования. Но если рассматривается передаточная

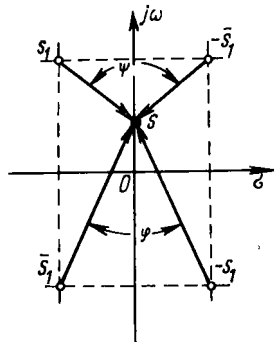


Рис. VIII.6

функция, тогда так называемая *функция распространения* $(\alpha + j\beta)$ не обязательно будет аналитической в правой полуплоскости, поскольку допускается, что нули передаточной функции в общем случае могут находиться в любом месте плоскости комплексной частоты. Для того чтобы функции $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$ были связаны такими же соотношениями, как и функции $h_1(\omega)$ и $h_2(\omega)$, соответствующая передаточная функция $h(s)$ должна иметь и нули, и полюсы, расположенные в левой полуплоскости.

Для такой передаточной функции полный фазовый сдвиг в диапазоне изменения частоты $0 < \omega < \infty$ будет меньше, чем фазовый сдвиг функции, имеющей один или несколько нулей, расположенных в правой полуплоскости симметрично относительно мнимой оси; это объясняется тем, что при подобном перемещении пары комплексных нулей функция $h(s)$ умножается на дробь

$$\frac{(s + s_1)(s + \bar{s}_1)}{(s - s_1)(s - \bar{s}_1)}, \quad (\text{VIII.86})$$

где s_1 и \bar{s}_1 — сопряженные нули в левой полуплоскости, как показано на рис. VIII.6. Модуль дроби (VIII.86) равен единице, а угол равен $-(\psi - \varphi)$; следовательно, хотя рассматриваемое перемещение нулей передаточной функции из левой в правую полуплоскость не изменяет ее модуля (а значит, и α), к отрицательному углу ее (углу запаздывания β) добавляется приращение $\psi - \varphi$, которое возрастает от нуля в точке $s = 0$ до 2π в точке $s = \infty$. Ясно, что угол запаздывания будет наименьшим для любого модуля передаточной функции, имеющей нули, расположенные в левой полуплоскости. Такую передаточную функцию называют *функцией минимально фазового сдвига* (минимально фазовой). Только для указанной функции существуют $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$, связанные преобразованиями Гильберта.

Возвращаясь к интегрированию сопряженных потенциальных функций, изображенных на рис. VIII.5, вспомним, что асимптоти-

ческое значение фазы в физической цепи представляет собой целую величину, кратную π , и поэтому результирующие функции (α и β) будут соответствовать реальности, если наклон, полученный при интегрировании функции h_1 (см. рис. VIII.5), умножить на $\frac{n\pi}{\omega_1}$, а выражение (VIII.84) — на некоторую постоянную.

Тогда

$$\alpha(\omega) = n \ln |x^2 - 1| - nx \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|. \quad (\text{VIII.87})$$

Сопряженные потенциальные функции, полученные таким способом, приведены на рис. VIII.7а. Они используются как прототи-

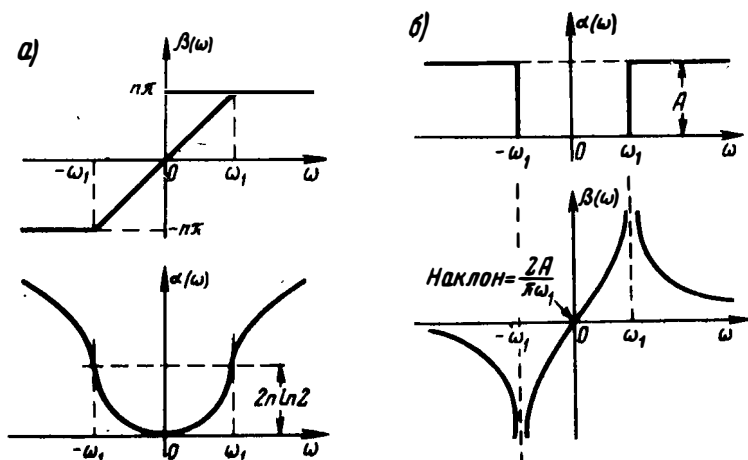


Рис. VIII.7

пы, когда необходимо рассчитать фильтр нижних частот с линейным фазовым сдвигом в полосе пропускания. При кусочно-линейной фазе β функция затухания α имеет бесконечную крутизну в точках разрыва функции $\omega = \pm\omega_1$. Для любой реальной цепи фаза имеет в этих точках скругления, и поэтому наклон функции α будет конечным. Тем не менее, изображенные на рисунке идеализированные характеристики показательны для результатов, получаемых при таком расчете.

Другую пару идеализированных характеристик фильтра нижних частот можно получить непосредственно из функций, приведенных на рис. VIII.5, образовав, например, функцию затухания

$$\alpha(\omega) = A(1 - h_1). \quad (\text{VIII.88})$$

Поскольку сопряженное значение для постоянной есть нуль, соответствующая фаза согласно выражению (VIII.82) будет определяться соотношением

$$\beta(\omega) = \frac{A}{\pi} \ln \left| \frac{\omega + \omega_1}{\omega - \omega_1} \right|. \quad (\text{VIII.89})$$

Пара полученных функций показана на рис. VIII.76. Затухание равно нулю в пределах полосы пропускания $-\omega_1 < \omega < \omega_1$ и равно A *неп* за пределами этой полосы (*полоса запирания*). На так называемых *частотах среза* $-\omega_1$ и ω_1 затухание претерпевает разрыв. Фильтр, характеризуемый такой функцией затухания, называется *идеальным фильтром нижних частот*, в частности, в случае, если величина A предполагается бесконечно большой. Соответствующая фазовая характеристика имеет логарифмические бесконечности на частотах среза, обусловленные разрывами в кривой затухания, и наклон в начале координат, пропорциональный величине A . Поэтому идеальный фильтр нижних частот, обеспечивающий бесконечное затухание в полосе запирания, будет иметь фазу, бесконечную всюду, кроме точек $\omega = 0$ и $\omega = \infty$. Подобный фильтр неосуществим даже теоретически, однако при конечном затухании A характеристики его можно аппроксимировать физической цепью.

Преобразования Гильберта, определяемые ф-лами (VIII.78) и (VIII.80), особенно легко найти, когда функция задана в виде последовательности сопрягающихся прямолинейных отрезков, т. е. является так называемой кусочно-линейной функцией. В этом случае ее вторая производная представляет собой сумму импульсов. Свертывание их со вторым интегралом функции $-\frac{1}{\pi\omega}$ дает требуемый результат, который может быть записан непосредственно.

Обобщая описанный метод, можно при аппроксимации данной вещественной части рассматривать не последовательность прямолинейных отрезков (кусочно-линейная аппроксимация первой или высших производных вещественной части), а ряд сопрягающихся параболических дуг; при этом достигаются более гладкая кривая и меньшие допуски. В любом случае соответствующая производная такой аппроксимации становится суммой импульсов. Если эта сумма представляет собой ν -ю производную вещественной части, то мнимая часть будет являться суммой ν -го кратного интеграла от функции $-\frac{1}{\pi\omega}$.

Функцию $-\frac{1}{\pi\omega}$ удобно обозначить через $v_0(\omega)$, а последующие интегралы от нее — через $v_{-1}(\omega)$, $v_{-2}(\omega)$ и т. д. Эта последовательность содержит функции, являющиеся мнимыми частями, связанными с соответствующими вещественными частями [сингулярными функциями $u_{-\nu}(\omega)$ при $\nu = 0, 1, 2, \dots$], которые определяются

выражениями:

$$\left. \begin{aligned} v_0(\omega) &= -\frac{1}{\pi\omega} \\ v_{-1}(\omega) &= -\frac{1}{2\pi} \ln \omega^2 \\ v_{-2}(\omega) &= -\frac{1}{2\pi} (\omega \ln \omega^2 - 2\omega) \\ v_{-3}(\omega) &= -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\omega^2}{2} \ln \omega^2 - \frac{3\omega^2}{2} \right) \\ v_{-4}(\omega) &= -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\omega^3}{6} \ln \omega^2 - \frac{11\omega^3}{18} \right) \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.90})$$

Суммируя полученные результаты, можно записать следующие выражения для функций $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$:

$$\alpha(\omega) = \sum_{k=1}^n a_k [u_{-\nu}(\omega - \omega_k) + (-1)^\nu u_{-\nu}(\omega + \omega_k)]; \quad (\text{VIII.91})$$

$$\beta(\omega) = \sum_{k=1}^n a_k [v_{-\nu}(\omega - \omega_k) + (-1)^\nu v_{-\nu}(\omega + \omega_k)] \quad (\text{VIII.92})$$

(справедливые также для связи вещественной и мнимой частей сопротивления или проводимости). Угловые частоты $\pm\omega_k$ представляют собой точки перегиба в кусочно-линейном представлении $(\nu - 2)$ -й производной данной вещественной части $\alpha(\omega)$; изменения наклона в этих точках обозначены через a_k . Производная ν -го порядка функции $\alpha(\omega)$ состоит из последовательности импульсов, расположенных в точках $\pm\omega_k$; величины импульсов определяются коэффициентами a_k . Общее число импульсов при $\omega > 0$ равно целому числу n .

Вычисление функции $\beta(\omega)$ путем подстановки в ф-лу (VIII.92) соответствующих выражений для $v_{-\nu}$ [см. систему уравнений (VIII.90)] упрощается, если учесть, что в них при $\nu \geq 2$ вторые члены в правых частях значительно меньше первых, и, следовательно, ими можно пренебречь. Оценивая справедливость данного утверждения, заметим, что эти члены соответствуют членам суммы вида (VIII.92)

$$a_k [(\omega - \omega_k)^{\nu-1} + (-1)^\nu (\omega + \omega_k)^{\nu-1}]. \quad (\text{VIII.93})$$

Если ν — четное, то в скобках будут члены только с четными степенями ω_k , вплоть до степени $(\nu - 2)$. Если ν — нечетное, то в указанном выражении будут только нечетные степени ω_k , вплоть до степени $(\nu - 2)$. Суммирование соответствующих членов в выражении (VIII.92) даст нуль.

Без потери общности можно предположить, что данная четная функция $\alpha(\omega)$ является конечной и отличной от нуля только при $-1 < \omega < 1$, так как этого можно добиться либо вводя соответствующий масштаб частоты, либо производя вычитание из постоянной асимптоты, либо применяя другие подобные средства¹. Поскольку любая производная нечетного порядка от функции $\alpha(\omega)$ должна быть равна нулю как при $\omega = 0$, так и при $\omega = 1$, можно записать

$$\int_0^1 \alpha^{(p)}(\omega) d\omega = 0 \quad \text{при } p = 2, 4, \dots, \quad (\text{VIII.94})$$

где индекс p обозначает порядок производной. Производя повторное интегрирование по частям, получим

$$\int_0^1 \alpha^{(p)}(\omega) d\omega = \frac{(-1)^q}{q!} \int_0^1 \omega^q \alpha^{(p+q)}(\omega) d\omega. \quad (\text{VIII.95})$$

Здесь p и q — любые положительные целые числа, включая нуль. Объединяя ур-ния (VIII.94) и (VIII.95), имеем

$$\int_0^1 \omega^q \alpha^{(p+q)}(\omega) d\omega = 0 \quad \text{при } p = 2, 4, \dots, \quad (\text{VIII.96})$$

или, положив $p + q = \nu$; $q = \nu - p$, получим

$$\int_0^1 \omega^{\nu-p} \alpha^{(\nu)}(\omega) d\omega = 0 \quad \text{при } p = 2, 4, \dots, \leq \nu. \quad (\text{VIII.97})$$

Поскольку при $\omega > 0,91$ имеем

$$\alpha^{(\nu)}(\omega) = \sum_{k=1}^n a_k u_0(\omega - \omega_k), \quad (\text{VIII.98})$$

последняя зависимость дает так называемое *условие моментов*²

$$\sum_{k=1}^n a_k \omega_k^{\nu-p} = 0 \quad \text{при } p = 2, 4, \dots, \leq \nu, \quad (\text{VIII.99})$$

согласно которому сумма членов в выражении (VIII.93) оказывается равной нулю.

¹ Заметим, что при $|\omega| \geq 1$ величина α предполагается тождественно равной нулю.

² Рассматриваемые вопросы, а также другие свойства последовательностей импульсов более полно освещаются в § XV.2.

Таким образом, для фазовой функции, определяемой ф-лой (VIII.92), можно записать следующие выражения:

$$\beta(\omega) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n a_k [(\omega - \omega_k) \ln |\omega - \omega_k| + (\omega + \omega_k) \ln |\omega + \omega_k|]$$

при $\nu = 2$; (VIII.100)

$$\beta(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n a_k [(\omega - \omega_k)^2 \ln |\omega - \omega_k| - (\omega + \omega_k)^2 \ln |\omega + \omega_k|]$$

при $\nu = 3$; (VIII.101)

$$\beta(\omega) = -\frac{1}{6\pi} \sum_{k=1}^n a_k [(\omega - \omega_k)^3 \ln |\omega - \omega_k| + (\omega + \omega_k)^3 \ln |\omega + \omega_k|]$$

при $\nu = 4$; (VIII.102)

.....

Обычно полезно иметь выражение для фазы в окрестности точки $\omega = 0$. Вычисление линейных членов разложения Маклорена для каждой из приведенных выше функций дает

$$\text{при } \nu = 2 \quad \beta(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \sum_{k=1}^n a_k \ln \omega_k + \dots; \quad (\text{VIII.103})$$

$$\text{при } \nu = 3 \quad \beta(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \sum_{k=1}^n a_k \omega_k \ln \omega_k + \dots; \quad (\text{VIII.104})$$

$$\text{при } \nu = 4 \quad \beta(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{a_k \omega_k^2}{2} \ln \omega_k + \dots; \quad (\text{VIII.105})$$

.....

Используя эти выражения, нетрудно найти фазовый наклон в точке $\omega = 0$.

В качестве примера рассмотрим графики функций, изображенных на рис. VIII.8а. На этом рисунке кусочно-линейная функция α имеет на положительной полуоси частот две точки излома:

$$\omega_1 = 1,0; \quad \omega_2 = 1,25. \quad (\text{VIII.106})$$

Изменения наклона кривой в данных точках соответственно равны:

$$a_1 = 4; \quad a_2 = -4. \quad (\text{VIII.107})$$

При указанных значениях α из выражения (VIII.100) находим функцию

$$\beta(\omega) = \frac{4}{\pi} \left[-(\omega-1) \ln |\omega-1| - (\omega+1) \ln |\omega+1| + \left(\omega - \frac{5}{4} \right) \ln \left| \omega - \frac{5}{4} \right| + \left(\omega + \frac{5}{4} \right) \ln \left| \omega + \frac{5}{4} \right| \right], \quad (\text{VIII.108})$$

а из выражения (VIII.103) — наклон

$$\left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega=0} = -\frac{2}{\pi} \left(4 \ln 1 - 4 \ln \frac{5}{4} \right) = \frac{8}{\pi} \ln \frac{5}{4} = 0,568. \quad (\text{VIII.109})$$

Используя выражение (VIII.108), находим, что

$$\begin{aligned} \text{при } \omega = 0,5; 1,0; 1,125; 1,25; 2,0 \quad \beta = & 0,312; 1,003; 1,230; \\ & 1,036; 0,411. \end{aligned} \quad (\text{VIII.110})$$

График функции β построен на том же рис. VIII.8а, где шкала ординат изображена в неперях и радианах. В отличие от функций,

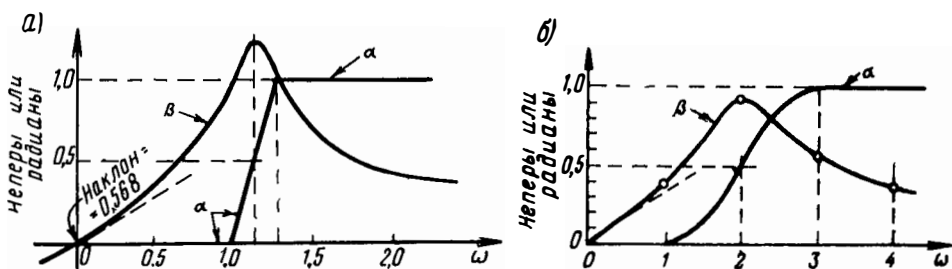


Рис. VIII.8

приведенных на рис. VIII.7б, здесь фаза остается конечной, так как функция затухания возрастает с конечной скоростью и не имеет разрывов. Следовательно, характеристики, показанные на рис. VIII.8а, более соответствуют физической цепи.

В качестве второго примера рассмотрим построение фазовой характеристики, соответствующей функции α , изображенной на рис. VIII.8б, причем график фазы вычертим на том же рисунке. Как видно из него, характеристика затухания $\alpha(\omega)$ имеет две (сопрягающиеся в точке, соответствующей частоте $\omega = 2$) параболические дуги. Вершины кривой α соответствуют частотам $\omega = 1$ и 3 . Опять нормализуем амплитуду функции α относительно 1 непер, и непосредственно из рисунка находим $a_1 = 1$, $a_2 = -2$, $a_3 = 1$ и $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 3$.

Тогда из выражения (VIII.101) имеем

$$\begin{aligned} \beta(\omega) = & -\frac{1}{2\pi} [(\omega-1)^2 \ln |\omega-1| - (\omega+1)^2 \ln |\omega+1| - \\ & - 2(\omega-2)^2 \ln |\omega-2| + 2(\omega+2)^2 \ln |\omega+2| + (\omega-3)^2 \ln |\omega-3| - \\ & - (\omega+3)^2 \ln |\omega+3|], \end{aligned} \quad (\text{VIII.111})$$

а при малых значениях частоты ω , используя выражение (VIII.104), найдем

$$\beta(\omega) = \frac{1,05}{\pi} \omega + \dots \quad (\text{VIII.112})$$

Можно получить довольно хорошее приближение фазовой характеристики, определяемой выражением (VIII.111), если вычислить значения фазы, соответствующие только характерным точкам $\omega = 1, 2, 3$; при этом некоторые члены в полном выражении для фазы опускаются. Используя, кроме того, первоначальный наклон, легко определяемый из выражения (VIII.112), нетрудно построить кривую фазы, изображенную на рис. VIII.86. Существенно отметить, что для выбранной функции α полученная фаза является точной.

Вычисление фазовой характеристики упрощается при наличии тщательно построенных кривых (графиков) функций $x \ln x$, $x^2 \ln x$, $x^3 \ln x$,... в диапазоне изменения переменной $0 < x < \omega$, ибо тогда нетрудно произвести вычисления по ф-ле (VIII.111) примерно для десяти точек; это можно проделать сравнительно быстро. В данной связи целесообразно прежде всего произвести нормализацию по частоте, если по условиям задачи частотный диапазон лежит в пределах от 0 до 10 рад/сек. Когда же заданный диапазон охватывает более широкий интервал частот, чем тот, который может быть легко размещен в указанном пределе, следует разделить его на удобные подынтервалы, рассчитать фазовые функции, соответствующие потерям на каждом из подынтервалов, и далее сложить их. Иногда целесообразно использовать различную нормализацию по частоте для отдельных подынтервалов. При использовании таких простых приемов достаточно для любой практической задачи взять точную таблицу натуральных логарифмов чисел $0 \div 10$, что позволит избежать в расчетах больших чисел.

VIII.5. Другой аналитический метод

Для определения функции, сопряженной с заданной потенциальной функцией, можно использовать иной метод, пригодный как при алгебраическом, так и при графическом решении задачи. Согласно этому методу необходимо ввести преобразование независимой переменной, конформно отображающей правую полуплоскость s на внутреннюю часть единичного круга. Это хорошо известное преобразование записывается в виде

$$\omega = \frac{1-s}{1+s} \quad (\text{VIII.113})$$

Как показано на рис. VIII.9, точки $s = 0$ и $s = \infty$ плоскости s отображаются соответственно в точки $+1$ и -1 плоскости ω , а перемещение вдоль мнимой оси плоскости s в положительном направ-

лении означает обход единичной окружности по часовой стрелке. Следовательно, если записать

$$\omega = e^{-j\varphi} = \frac{1-j\omega}{1+j\omega}, \quad (\text{VIII.114})$$

то соответствующими переменными будут φ и ω . В частности, имеем

$$\varphi = 2 \arctg \omega, \quad \text{или} \quad \omega = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \quad (\text{VIII.115})$$

Отсюда видно, что масштабы переменных ω и φ можно изобразить так, как показано на рис. VIII.10. Для обеих переменных начало координат совпадает; точки $\omega = \pm 1$ соответствуют точкам $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, а точки $\omega = \pm \infty$ преобразуются в точки $\varphi = \pm \pi$.

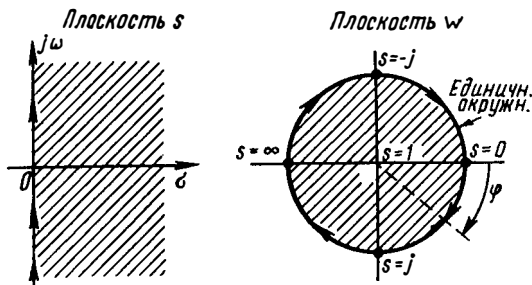


Рис. VIII.9

Так, данную кривую вещественной части $R(\omega)$ можно преобразовать в функцию от φ , если найти каждую из ординат для какой-либо величины ω при соответствующем значении φ , найденном из

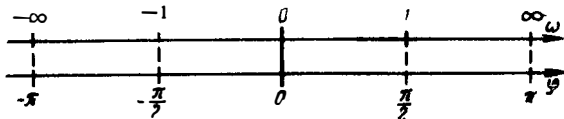


Рис. VIII.10

выражения (VIII.115). Обе функции φ и $R(\omega)$ имеют одну и ту же последовательность величин ординат; значения же абсцисс, относящиеся к определенным значениям ординат, просто меняются между собой. Это изменение независимой переменной можно рассматривать как искажение функции только в направлении оси абсцисс, причем все значения ординат остаются неизменными. Такой процесс называют преобразованием функции $R(\omega)$ из области ω в область φ .

Любую системную функцию $h(j\omega) = h_1(\omega) + jh_2(\omega)$ можно преобразовать в периодическую функцию в области φ вида

$$q(j\varphi) = q_1(\varphi) + jq_2(\varphi), \quad (\text{VIII.116})$$

имеющую периодические вещественную и мнимую части $q_1(\varphi)$ и $q_2(\varphi)$, которым соответствуют функции $h_1(\omega)$ и $h_2(\omega)$. Подобное преобразование позволяет найти весьма простые выражения для определения функции, сопряженной с заданной потенциальной. Четная или нечетная функция в области ω остается соответственно четной или нечетной в области φ . Данная вещественная часть в области ω преобразуется в четную периодическую функцию в области φ , которую в этом случае можно представить в виде ряда, содержащего косинусы

$$q_1(\varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + \dots \quad (\text{VIII.117})$$

Здесь коэффициенты a_k находятся обычным методом, как и при разложении в ряд Фурье. В таком представлении вещественной части подразумевается, что комплексная системная функция в области φ задана выражением

$$q(j\varphi) = a_0 + a_1 e^{-j\varphi} + a_2 e^{-j2\varphi} + \dots \quad (\text{VIII.118})$$

Следовательно, мнимая часть, соответствующая вещественной части, определяемой рядом (VIII.117), имеет вид

$$q_2(\varphi) = -a_1 \sin \varphi - a_2 \sin 2\varphi - \dots \quad (\text{VIII.119})$$

В области φ выражение для функции, сопряженной с данной потенциальной функцией, можно записать, не производя никаких вычислений, если исходная функция имеет вид тригонометрического полинома с членами, кратными целым значениям переменной φ . При графическом задании функции для получения требуемой аппроксимации тригонометрическим полиномом используются обычные методы рядов Фурье. Рассмотрим простую иллюстрацию применения этого метода, когда вещественная часть задана выражением

$$h_1(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}. \quad (\text{VIII.120})$$

Используя выражение (VIII.115), получим

$$q_1(\varphi) = \frac{1}{1 + tg^2 \frac{\varphi}{2}} = \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \varphi. \quad (\text{VIII.121})$$

Соответствующая мнимая часть имеет вид

$$q_2(\varphi) = -\frac{1}{2} \sin \varphi = -\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (\text{VIII.122})$$

Обратное преобразование в область ω [см. выражение (VIII.115)] дает

$$h_2(\omega) = -\frac{\omega}{1 + \omega^2}. \quad (\text{VIII.123})$$

Пользуясь выражениями (VIII.114) и (VIII.118), можно в общем случае записать системную функцию в виде следующего выражения:

$$h(j\omega) = a_0 + a_1 \left(\frac{1-j\omega}{1+j\omega} \right) + a_2 \left(\frac{1-j\omega}{1+j\omega} \right)^2 + \dots \quad (\text{VIII.124})$$

Наконец, для комплексных частот она выражается формулой

$$h(s) = a_0 + a_1 \left(\frac{1-s}{1+s} \right) + a_2 \left(\frac{1-s}{1+s} \right)^2 + \dots \quad (\text{VIII.125})$$

Если вещественная часть функции задана графически, то на основе этого результата и метода рядов Фурье можно найти ап-

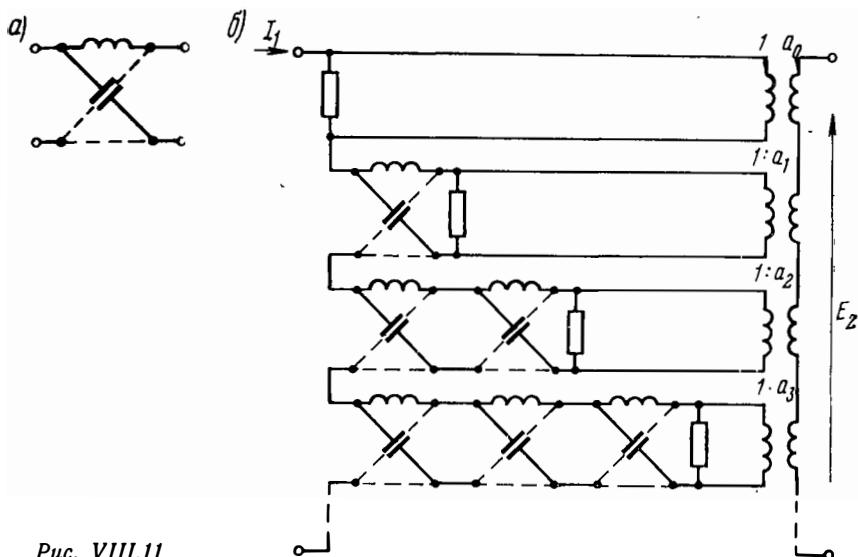


Рис. VIII.11

проксимацию (в виде рационального выражения), соответствующую данной системной функции.

Вспомнив выражение (VI.54) для сопротивления передачи скрещенной цепи постоянного сопротивления, видим, что функция

$$\left(\frac{1-s}{1+s} \right)^n \quad (\text{VIII.126})$$

представляет собой сопротивление передачи каскадного соединения n одинаковых скрещенных четырехполюсников, нагруженного на резистивное сопротивление 1 ом. При этом каждый из них имеет схему, изображенную на рис. VIII.11а. Интересно отметить, что если функция $h(s)$, определяемая выражением (VIII.125), представляет собой сопротивление передачи, то возможной физической

реализацией для него может служить схема, приведенная на рис. VIII.11б, где коэффициенты трансформации идеальных трансформаторов приведены к значениям a_0, a_1, a_2, \dots . Другая схемная реализация данной функции может иметь вид одного каскада, содержащего большое количество скрещенных цепей (или некоторой эквивалентной неуравновешенной цепи задержки). Такой каскад нагружается на резистивное сопротивление нагрузки, с которого напряжения отводятся на соответствующие высокоомные делители, подающие их на сетки отдельных ламп, включенных таким образом, что выходные напряжения складываются последовательно. Основная идея, заложенная здесь (впервые предложена Норбертом Винером и Ли), состоит в возможности получения любой требуемой передаточной характеристики, которую легко подобрать только по характеристике основной цепи задержки; при этом проблема аппроксимации решается использованием обычных методов Фурье.

VIII.6. Дополняющие сопротивления

Как упоминалось в главе VI в связи с рассмотрением синтеза RC и RL цепей, дополняющие входные сопротивления представляют собой пару таких сопротивлений, сумма которых равна постоянной, т. е. не зависит от частоты. Величину постоянной обычно нормализуют относительно сопротивления 1 ом , однако в общем случае можно выбрать любое требуемое значение нормализации. Ясно, что два сопротивления являются дополняющими друг друга, если сумма их вещественных частей равна постоянной, а сумма их мнимых частей равна нулю. Таким образом, достаточно потребовать, чтобы сумма вещественных частей этих сопротивлений равнялась постоянной, поскольку величина, сопряженная с ней, равна нулю.

Очевидно, что в любой практической ситуации постоянная должна быть конечной. Следовательно, только минимально реактивное сопротивление может иметь дополняющее сопротивление с полюсами на мнимой оси, так как импульсы его вещественной части равны нулю всюду, кроме точек, соответствующих полюсам с бесконечно большими значениями.

Дополняющее сопротивление можно построить либо по вещественной части заданного сопротивления, либо по всему сопротивлению. В качестве иллюстрации рассмотрим вещественную часть, определяемую выражением (VIII.15), и вычтем ее из ее максимального значения, равного единице. Тогда получается остаток, положительный при всех значениях ω (в общем случае вычитание производится при любом максимальном значении). При этом вещественную часть искомого дополняющего сопротивления можно представить в виде

$$1 - \frac{1}{1 + \omega^6} = \frac{\omega^6}{1 + \omega^6}. \quad (\text{VIII.127})$$

Правая часть последнего выражения представляет собой вещественную часть, определяемую выражением (VIII.47). Соответствующее сопротивление по ф-ле (VIII.49)

$$Z_d(s) = \frac{s^3 + \frac{4}{3}s^2 + \frac{2}{3}s}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \quad (\text{VIII.128})$$

представляет собой требуемое дополняющее сопротивление для $Z_0(s)$, определяемого ф-лой (VIII.22); его вещественная часть выражается ф-лой (VIII.15). Очевидно, что такой же результат можно получить, если из единицы вычесть величину $Z_0(s)$, определяемую выражением (VIII.22).

Не следует, однако, делать вывода, что дополняющее сопротивление возможно всегда найти посредством вычитания заданного сопротивления из единицы. Во-первых, необходимо убедиться, что оно является минимально реактивным, и, во-вторых,— определить максимальное значение его вещественной части. Если последнюю обозначить через R , то можно составить такую функцию $R - Z(s)$, которая будет п. в. ф. и, значит, реализуемой как входная функция. Можно, конечно, вычесть $Z(s)$ из величины, большей, чем R , хотя задачи, в которых присутствуют дополняющие сопротивления, обычно дают наиболее приемлемые результаты тогда, когда указанная постоянная имеет наименьшее возможное значение. Обычно удобно нормализовать заданное сопротивление таким образом, чтобы эта величина стала равной единице.

По существу, с помощью тех же методов можно построить также передаточную функцию, дополняющую данную. Однако, по крайней мере до сих пор, нельзя назвать ни одного практического случая, в котором подобная функция могла бы быть использованной. Поскольку вещественная часть передаточной функции при $s = j\omega$ не должна оставаться положительной, все устойчивые передаточные функции имеют дополняющие функции, включая те, у которых есть полюсы на мнимой оси.

VIII.7. Построение сопротивления передачи по его вещественной части

Как уже отмечалось, вещественная часть сопротивления передачи как функция переменной ω может принимать и отрицательные, и положительные значения. За исключением конечного числа импульсов, она должна быть ограниченной рациональной функцией, но в других случаях она может быть совершенно произвольной. Применяя описанные выше методы построения входных функций, можно всегда найти устойчивую рациональную передаточную функцию для такой вещественной части. Если у последней имеются импульсы, то решение подобной задачи всегда единственно.

Когда вещественная часть задана графически или кусочно-аналитически, то пользуются либо методами преобразования Гильберта, либо другими методами, основанными на этих преобразованиях (как было проделано выше). Другими словами, построение передаточных функций по их заданным вещественным частям осуществляется так же, как и для входных функций. Единственное отличие заключается в том, что вещественная часть может принимать не только положительные, но и отрицательные значения.

Необходимо подчеркнуть, что в процессе построения передаточной функции по вещественной части не возникает вопроса, является ли она минимально фазовой функцией или нет. При этом процессе однозначно определяется расположение ее нулей и полюсов. Если нули находятся в левой полуплоскости, функция является минимально фазовой; если некоторые из ее нулей оказываются в правой полуплоскости, то функция будет неминимально фазовой (см. § VIII.3). Таким образом, какая бы функция не рассматривалась, ее вид предопределяется вещественной частью, поэтому метод построения функции не может быть произвольным.

Применительно к вопросу реализуемости передаточной функции, вещественная часть которой принимает и отрицательные, и положительные значения, интересно рассмотреть синтез такой функции, основанный на использовании симметричной скрещенной цепи. В гл. VI были получены ф-лы (VI.44) и (VI.48) для сопротивления передачи или проводимости передачи скрещенной цепи, выраженных через сопротивления или проводимости ветвей

$$z_{12} = \frac{1}{2}(z_b - z_a) \quad (\text{VIII.129})$$

или

$$y_{12} = \frac{1}{2}(y_b - y_a). \quad (\text{VIII.130})$$

Как показано на рис. VIII.12, вещественную часть сопротивления $z_{12}(j\omega)$ можно представить в виде разности двух вещественных частей r_b и r_a , принимающих во всем диапазоне изменения аргумента положительные значения. Функции r_b и r_a используются для получения положительных вещественных входных сопротивлений, которые (после умножения на множитель $1/2$) затем отождествляются соответственно с сопротивлениями z_b и z_a скрещенной цепи (с помощью последних реализуется сопротивление передачи с данной вещественной частью). Применяя указанный метод, уже нет необходимости строить полное сопротивление передачи z_{12} , так как сопротивления скрещенной цепи можно построить непосредственно по их известным вещественным частям.

Поскольку в этом случае важно знать только разность между сопротивлениями скрещенной цепи, то существует бесконечное число пар функций z_b и z_a , дающих одну и ту же передаточную функцию. Другими словами, теоретически и к функции r_b , и к функ-

ции r_a , изображенным на рис. VIII.12, можно добавить одну и ту же произвольную функцию r , не влияя на результирующее сопротивление передачи или его вещественную часть. Такая гибкость дает некоторую степень свободы, которая, как будет видно далее, полезна на практике при построении требуемой структуры цепи и выборе величин ее элементов.

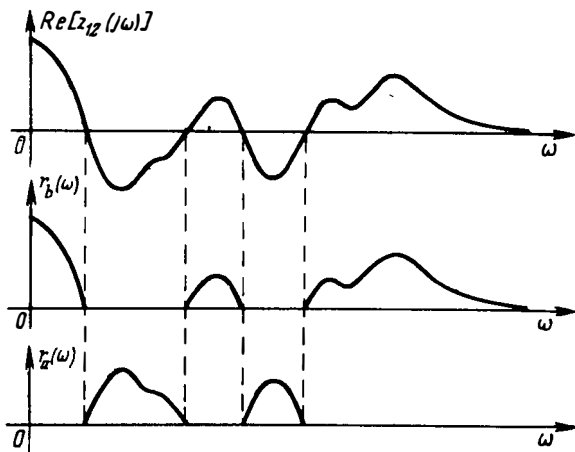


Рис. VIII.12

VIII.8. Построение сопротивления по его модулю

Если функция сопротивления задана выражением (VIII.7), то квадрат ее модуля при $s = j\omega$ имеет вид

$$|Z(j\omega)|^2 = \left[\frac{P(s)P(-s)}{Q(s)Q(-s)} \right]_{s=j\omega} = \left(\frac{m_1^2 - n_1^2}{m_2^2 - n_2^2} \right)_{s=j\omega} = \frac{C(\omega^2)}{B(\omega^2)}. \quad (\text{VIII.131})$$

Здесь полином $B(\omega^2)$ совпадает с полиномом из выражения (VIII.8), а $C(\omega^2)$ и $B(\omega^2)$ — полиномы, представляющие собой соответственно квадраты модулей $P(j\omega)$ и $Q(j\omega)$. Построение сопротивления $Z(s)$ в данном случае значительно проще, чем при его построении по вещественной части. Процесс нахождения функции $Q(s)$ по $B(\omega^2)$ совпадает с аналогичным процессом нахождения функции $P(s)$ по $C(\omega^2)$. Фактически когда $Z(s)$ является входным сопротивлением, то его необходимо строить по тому же методу, так как и нули, и полюсы этого сопротивления должны лежать в левой полуплоскости.

С другой стороны, когда $Z(s)$ является сопротивлением передачи, то некоторые (или все) нули $P(s)$ можно выбрать так, чтобы они лежали в правой полуплоскости, если не оговаривается, что искомая передаточная функция должна быть минимально фазовой. В этом случае описанный метод приводит к единственному реше-

нию, как и для входного сопротивления. Если к сопротивлению передачи не предъявляется требования минимальной фазы, ряд возможных решений может быть получен в соответствии с расположением нулей $P(s)$ между левой и правой полуплоскостями. Если, кроме того, задано входное сопротивление, то положительная вещественная функция существует не для каждой определенной функции модуля, а только для той, которой соответствует угол, не превышающий по абсолютному значению $\frac{\pi}{2}$ рад. Это условие может либо удовлетворяться, либо нет в зависимости от величины и скорости изменения модуля как функции частоты. Указанное положение можно проверить, обратившись к рис. VIII.7б и VIII.8а. Из рассмотрения кривых, изображенных на первом из них, видно, что изменение модуля никогда не может быть резким независимо от того, насколько он мал по величине, так как фаза β содержит логарифмические бесконечности при любом значении затухания A , отличным от нуля.

Когда изменение модуля плавное (см. рис. VIII.8а и VIII.8б), то максимальное значение соответствующего угла конечно. Любой величине изменения модуля соответствует определенная скорость изменения (ее лучше всего выражать в *дб/окт*), при которой максимальный угол не превышает $\frac{\pi}{2}$, а любой данной скорости изменения модуля соответствует максимальная величина его изменения. При скорости изменения кривой модуля, показанной на рис. VIII.8а (4 *неп/окт* или 34,7 *дб/окт*), максимальный угол, соответствующий изменению модуля на 1 *неп* (8,68 *дб*), что эквивалентно отношению амплитуд 2,718 : 1, равен 1,23 рад (около 70,5°). При этой же скорости изменения можно увеличить отношение амплитуд до $\left(\frac{90}{70,5} \cdot 2,718\right) : 1$, т. е. до 3,47 : 1. При большем значении этого отношения скорость изменения необходимо уменьшать, но не просто пропорционально, так как зависимость между α и β в данном случае является более тонкой, чем прежде. При любой скорости можно определить, соответствует ли указанной функции модуля именно п. в. ф. Когда модуль представляет собой рациональную функцию, можно также построить функцию $Z(s)$, а затем провести проверку ее вещественной части по методу Штурма.

VIII.9. Построение входного сопротивления по его углу

Используя выражение (VIII.7), запишем следующие зависимости:

$$M(s) = \frac{1}{2} [P(s)Q(-s) + P(-s)Q(s)] = m_1 m_2 - n_1 n_2; \quad (\text{VIII. 132})$$

$$N(s) = \frac{1}{2} [P(s)Q(-s) - P(-s)Q(s)] = m_2 n_1 - m_1 n_2. \quad (\text{VIII. 133})$$

Угол θ сопротивления $Z(j\omega)$ определяется из выражения

$$j \operatorname{tg} \theta = \frac{N(j\omega)}{M(j\omega)}. \quad (\text{VIII.134})$$

Ясно, что $N(s)$ — нечетный, а $M(s)$ — четный полином от s . Поэтому $\operatorname{tg} \theta$ является нечетной рациональной функцией от ω вида

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\omega(G_0 + G_1\omega^2 + \dots + G_n\omega^{2n})}{A_0 + A_1\omega^2 + \dots + A_n\omega^{2n}}, \quad (\text{VIII.135})$$

в которой полином знаменателя совпадает с полиномом числителя выражения (VIII.8), определяющего вещественную часть.

В рассматриваемой задаче нужно определить входное сопротивление $Z(s)$, имеющее заданный частотнозависимый угол θ (угол изменяется в диапазоне от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$). Для этого прежде всего

необходимо каким-либо способом найти такие полиномы выражения (VIII.135), при которых частотная характеристика фазы была бы достаточно близкой к требуемой. Решение такой задачи аппроксимации мы не будем здесь рассматривать, а ограничимся только вопросом: как построить $Z(s)$, когда известны полиномы рациональной функции (VIII.135)?

Используя указанные полиномы, можно получить полиномы $M(s)$ и $N(s)$ (положив $j\omega = s$ или $\omega^2 = -s^2$). Далее по выражениям (VIII.132) и (VIII.133) составим сумму

$$M(s) + N(s) = P(s)Q(-s), \quad (\text{VIII.136})$$

откуда видно, что нули полинома $M + N$ являются нулями полиномов $P(s)$ и $Q(-s)$ и должны лежать соответственно в левой и правой полуплоскостях. Таким образом, становится очевидным, как строить полиномы $P(s)$ и $Q(s)$. Необходимо решить уравнение $M + N = 0$, т. е. найти его корни, а затем отнести те из них, которые лежат в левой полуплоскости, к полиному $P(s)$, а лежащие в правой полуплоскости — к полиному $Q(-s)$. Если нули данных полиномов известны, то можно найти и сопротивление $Z(s)$ (с точностью до постоянного множителя, который остается произвольным, поскольку он не оказывает влияния на угол θ).

При рассмотрении нулей, относящихся к полиному $P(s)$ (нули, расположенные в левой полуплоскости), и нулей, относящихся к полиному $Q(-s)$ (нули, расположенные в правой полуплоскости), мнимая ось используется как сортирующая граница, и, таким образом, возникает вопрос: как определить нули, которые приходятся на саму мнимую ось? Прежде чем ответить на него, попытаемся, во-первых, понять, почему нули могут попасть на мнимую ось, и, во-вторых, будет ли полином $M + N$ всегда иметь такие нули.

Поскольку нули полинома $M + N$ на мнимой оси являются на ней нулями полинома $P(s)$ или $Q(s)$, то они являются там нулями

или полюсами сопротивления $Z(s)$. Какое же влияние оказывают нули или полюсы этого сопротивления, расположенные на мнимой оси, на его угол? Чтобы ответить на поставленный вопрос, рассмотрим поведение угла частотного множителя $(s - s_0)$ при $s_0 = j\omega_0$, т. е. когда переменная $s = j\omega$ проходит через критическую частоту s_0 . Ясно, что до тех пор, пока $\omega < \omega_0$, этот угол остается постоянным и равным $-\frac{\pi}{2}$; при $\omega > \omega_0$ он будет постоянным и равным $+\frac{\pi}{2}$.

На критической частоте ω_0 угол имеет скачок π рад. Конечно, нельзя определить точно, дает ли скачок θ в этой точке резкое опережение или отставание, поскольку невозможно решить, поворачивается ли частотный множитель на π рад по часовой стрелке или против нее.

Эта неопределенность в направлении поворота угла исчезает, когда критическая частота s_0 лежит немного левее или правее мнимой оси (а не на ней), или, если по мере того, как переменная $s = j\omega$ достигает точки s_0 на мнимой оси, она проходит ее по бесконечно малой полуокружности, расположенной в левой или правой полуплоскости. Такой прием часто используют в задачах анализа и синтеза цепей. Ранее (см. рис. VIII.4) предполагалось, что малые полуокружности обхода лежат в правой полуплоскости; это соответствует очевидному требованию, заключающемуся в том, что реакция цепи не может предшествовать возбуждению, вызывающему ее. Таким образом, при изменении $s = j\omega$ в направлении возрастания ω вращение частотного множителя $(s - s_0)$ всегда осуществляется против часовой стрелки.

Поэтому нуль полинома $Z(s)$ на мнимой оси дает резкий положительный прирост угла θ , равный π рад, а полюс угла — резкое отставание на ту же величину. Если вспомнить, что множитель полинома числителя или знаменателя функции $Z(s)$ на мнимой оси должен быть общим делителем полиномов m_1 и n_1 или m_2 и n_2 , то из выражений (VIII.132) и (VIII.133) можно увидеть, что такие множители будут всегда содержаться и в полиномах M и N . Следовательно, в выражении (VIII.134) для $\text{tg } \theta$ указанные множители сократятся. Алгебраическое выражение для θ не дает никаких резких скачков угла, даже когда функция сопротивления $Z(s)$ создает их за счет своих полюсов или нулей на мнимой оси.

В этой связи было бы неверным утверждать, что, поскольку определение θ требует вычисления функции, обратной тангенсу, а последняя является многозначной, то выражение для θ дает столько скачков, равных π в любом направлении, сколько требуется. Данное предположение соответствует тому, что цепь создает бесконечное число значений угла θ , и можно выбрать любое удобное значение. Здесь несомненная бессмыслица. Цепь не следует путать с многозначностью аналитического выражения для угла (что иногда имеет место при проектировании). Аналитически механизм для устранения путаницы такого рода можно пояснить при помощи поверхности Римана. В границах одного и того же листа римано-

вой поверхности функция θ не может иметь скачков. Скачок величины θ , равный π рад, получается только при условии наличия скачков от одного листа поверхности Римана до следующего.

Если $Z(s)$ представляет собой п. в. ф., имеющую нуль в некоторой точке $s_0 = j\omega_0$ на мнимой оси, то ясно, что это и есть точка, в которой уменьшающийся угол θ как раз достигает величины $-\frac{\pi}{2}$.

Далее угол стал бы меньше этого значения, если бы не влияние нуля, которое заключается в том, что θ изменяется скачком до величины $+\frac{\pi}{2}$, так что дальнейшее уменьшение угла не нарушает

условия $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Полюс $Z(s)$ на мнимой оси точно также представляет собой точку, где возрастающий угол θ как раз достигает величины $+\frac{\pi}{2}$, причем он не может превысить этого значения

в результате резкого отставания угла на π рад. Однако, когда угол θ вычислен по ф-ле (VIII.134) или (VIII.135), необходимые скачки, предотвращающие нарушение условия $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, отсутствуют, и, таким образом, указанное условие нарушается.

Однако нарушение только кажущееся, так как при построении сопротивления $Z(s)$ по данной функции (VIII.135) мы вносим нули и полюсы в нужные точки на мнимой оси. Полином $M(s) + N(s)$ из ур-ния (VIII.136) не имеет никаких нулей на мнимой оси, потому что в правых частях выражений (VIII.134) и (VIII.135) они сокращаются. Таким образом, в данном случае не возникает вопроса, к какому из двух полиномов $P(s)$ или $Q(-s)$ следует их отнести. Вместе с тем необходимо отнести нули, расположенные на мнимой оси, к полиному $P(s)$ или $Q(s)$ в точках, где функция θ , вычисленная из выражения (VIII.135), может привести к нарушению условия $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$. Таким образом, всякий раз, когда эта

функция достигает величины, равной сумме или разности $\frac{\pi}{2}$ и целого числа, кратного π рад, в полином $Q(s)$ или $P(s)$ соответственно вносится нуль, расположенный на мнимой оси, в зависимости от того, будет ли наклон $\frac{d\theta}{d\omega}$ в этой точке положительным или отрицательным [причем θ является функцией (VIII.135), не имеющей скачков].

Теоретически оказывается полезным дополнительное условие, заключающееся в том, что вычеты в полюсах на мнимой оси для п. в. ф. должны быть вещественными и положительными. Вычет в полюсе $Z(s)$ на мнимой оси в точке $s = s_v$ равен

$$k_v = [(s - s_v)Z(s)]_{s=s_v} = \left[\frac{(s^2 - s_v^2)Z(s)}{s + s_v} \right]_{s=s_v}. \quad (\text{VIII.137})$$

Поскольку

$$\Rightarrow (s + s_v) = \Rightarrow j(\omega + \omega_v) = +\frac{\pi}{2}, \quad (\text{VIII.138})$$

то для того чтобы общий угол выражения (VIII.137) был равен нулю, необходимо выполнение соотношения

$$\Rightarrow [(s^2 - s_v^2)Z(s)]_{s=s_v} = +\frac{\pi}{2}. \quad (\text{VIII.139})$$

Функция $(s^2 - s_v^2)Z(s) = Z'(s)$ является частью искомого сопротивления до включения в него пары сопряженных полюсов на мнимой оси, осуществляемого когда частотный множитель $(s^2 - s_v^2)$ относят к полиному $Q(s)$. В точке $s = j\omega_v$ угол функции $Z'(s)$ достигает величины $\frac{\pi}{2}$. Если множитель $(s^2 - s_v^2)$ отнести к полиному

$P(s)$, то проводимость $\frac{1}{(s^2 - s_v^2)Z'(s)}$ будет иметь полюс в точке $s = s_v$, с вычетом

$$k_v = \left[\frac{s - s_v}{(s^2 - s_v^2)Z'(s)} \right]_{s=s_v} = \left[\frac{1}{(s + s_v)(s^2 - s_v^2)Z(s)} \right]_{s=s_v}, \quad (\text{VIII.140})$$

который отрицателен потому, что его углом в соответствии с ур-ниями (VIII.138) и (VIII.139) является угол $-\pi$. Таким образом, остается единственный выход — отнести множитель $(s^2 - s_v^2)$ к полиному $Q(s)$.

Аналогичное доказательство применимо, если функция $Z(s)$ имеет на мнимой оси вместо полюса нуль. Тогда просто необходимо перейти от нее к функции $\frac{1}{Z(s)}$. При этом важным моментом является то, что множитель $(s^2 - s_v^2)$ на мнимой оси относят к полиному $Q(s)$ или к полиному $P(s)$ соответственно в зависимости от того, какая из результирующих функций $Z(s)$ или $Y(s) = \frac{1}{Z(s)}$ имеет положительный вычет в соответствующем полюсе на мнимой оси. Поскольку для одной из указанных функций вычет оказывается отрицательным, множитель $(s^2 - s_v^2)$ всегда однозначно относят к соответствующему полиному.

Рассмотрим в качестве примера функцию

$$\text{tg } \theta = \frac{10\omega(16 - \omega^2)}{(1 - \omega^2)(4 - \omega^2)(9 - \omega^2)}, \quad (\text{VIII.141})$$

для которой

$$M(s) = (s^2 + 1)(s^2 + 4)(s^2 + 9); \quad N(s) = 10s(s^2 + 16). \quad (\text{VIII.142})$$

График θ как функции от ω [см. выражение (VIII.141)] показан на рис. VIII.13. Здесь пунктирные части кривой получены непосредственно из ф-лы (VIII.141), а сплошная кривая отражает действительное поведение угла θ положительной вещественной функции $Z(s)$, имеющей соответствующие нули и полюсы на мнимой оси. Нетрудно заметить, что точки $\omega = 1$ и $\omega = 3$ должны быть полюсами $Z(s)$, а точка $\omega = 2$ — нулем. Чтобы построить полиномы $P(s)$ и $Q(s)$, необходимо определить корни уравнения

$$M(s) + N(s) = s^6 + 14s^4 + 10s^3 + 49s^2 + 160s + 36 = 0. \quad (\text{VIII.143})$$

Обозначим полином, к которому отнесены корни, расположенные в левой полуплоскости, через $P'(s)$, а полином, к которому отнесены корни, расположенные в правой полуплоскости, через $Q'(-s)$. Тогда

$$P(s) = (s^2 + 4)P'(s);$$

$$Q(s) = (s^2 + 1)(s^2 + 9)Q'(s).$$

(VIII.144)

Положительное вещественное входное сопротивление, имеющее угол θ , будет равно $Z(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, а его постоянный множитель можно взять произвольным.

VIII.10. Построение сопротивления передачи по его углу

В случае, если фазовая характеристика передаточной функции не ограничена диапазоном $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$, ее построение по углу проще, поскольку нет необходимости во введении множителей на мнимой оси. При этом, как и прежде, применимы ф-лы (VIII.132)—(VIII.136), помимо того, что углы запаздывания, соответствующие передаточным функциям, принято считать положительными. Так, если β — угол, соответствующий отставанию выходного сигнала по отношению к входному, то в упомянутых выше зависимостях θ изменяют на $-\beta$. Поэтому

$$j \operatorname{tg} \beta = \left[-\frac{N(s)}{M(s)} \right]_{s=j\omega}. \quad (\text{VIII.145})$$

Выражения (VIII.132) и (VIII.133) остаются в данном случае неизменными; следовательно, остается неизменным и выражение (VIII.136).

В зависимости от того, должно ли искомое сопротивление передачи представлять собой функцию минимально фазового сдвига или нет, нули полинома $M + N$ из выражения (VIII.136) необходимо отнести к полиному $P(s)$ или к полиному $Q(-s)$. Если оказывается, что сопротивление является функцией минимально фазового сдвига, то нули, расположенные в левой полуплоскости, относятся к полиному $P(s)$, а расположенные в правой полуплоскости — к $Q(-s)$, т. е. поступают так же, как и при построении входных сопротивлений. Если же искомое сопротивление не является функцией минимально фазового сдвига, то можно также отнести любые нули, расположенные в правой полуплоскости, к полиному $P(s)$, помня, однако, о том, что степень его не может превышать степени полинома $Q(s)$ больше чем на единицу.

В этой связи термины «минимальная» и «неминимальная» фазы отчасти могут ввести в заблуждение, так как решение задачи начинается с определенной фазовой функции $\beta(\omega)$, и эта функция будет фазовым сдвигом результирующей передаточной функции независимо от вида распределения нулей между полиномами $P(s)$ и $Q(-s)$.

Другими словами, свойства фазовых характеристик передаточных функций минимальной и неминимальной фаз будут одинаковыми, если используется предложенный выше метод построения этих функций. Однако амплитудно-частотные характеристики (частотные характеристики модуля) окажутся различными в зависимости от расположения нулей полинома $M + N$ по отношению к полиномам $P(s)$ и $Q(-s)$.

Например, при расчете цепи задержки, когда требуется получить линейную фазовую характеристику, из выражения (VIII.145) видно, что нули полиномов — $N(s)$ и $M(s)$ можно выбрать так, чтобы имело место их чередование на мнимой оси аналогично чередованию нулей и полюсов функции тангенса. В этом случае полином $M - N$ представляет собой полином Гурвица, а полином $M + N$ имеет нули только в правой полуплоскости.

Если отнести все эти нули к полиному $Q(-s)$, то результирующая передаточная функция минимальной фазы будет иметь все свои нули в точке $s = \infty$; полином ее числителя вырождается в постоянную, а амплитудная характеристика при увеличении ω выразится монотонной, быстро убывающей функцией. С другой стороны, если отнести некоторые (вплоть до половины общего числа) из этих нулей к полиному $P(s)$, то функция будет неминимально фазовой, а ее амплитуда выразится медленно убывающей функцией, которая по своему поведению может больше не оказаться монотонной.

Здесь выбор зависит от требуемой переходной характеристики; заметное влияние на нее оказывает вид амплитудной характеристики. Эти вопросы более полно рассматриваются ниже в связи с расчетом цепей задержки.

VIII.11. Границы независимости модуля и угла передаточной функции

На практике иногда требуется построить передаточную функцию, имеющую либо постоянный модуль и произвольную фазовую характеристику, либо постоянную фазу и произвольную частотную характеристику. Рассматривая выражение $Z(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)}$, необходимо, с одной стороны, чтобы функция $P(j\omega)$ при всех ω имела тот же модуль, что и функция $Q(j\omega)$, а с другой стороны, чтобы функция $Q(j\omega)$ имела тот же угол, что и функция $P(j\omega)$ (с точностью до аддитивной постоянной). Посмотрим, в какой степени эти условия могут быть удовлетворены.

Если полином рассматривать как произведение частотных множителей, а последние представить как векторы в плоскости комплексной частоты, то с помощью соответствующего построения станет ясно, что при любой частоте ω :

Функция $Q(-j\omega)$ имеет тот же модуль, что и функция $Q(j\omega)$
(VIII.146)

и что

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{P(-j\omega)} \right] = \Rightarrow [P(j\omega)] - n\pi, \quad (\text{VIII.147})$$

где n — целое число. Следовательно, можно прийти к заключению, что передаточная функция будет иметь постоянный модуль и переменную фазу, если

$$P(s) = Q(-s). \quad (\text{VIII.148})$$

Она будет иметь постоянную фазу и переменный модуль, если

$$Q(s) = \frac{1}{P(-s)}. \quad (\text{VIII.149})$$

Первое из этих условий нетрудно выполнить. Второе условие невозможно выполнить точно (поскольку оно требует, чтобы один из полиномов был обратным по отношению к другому); однако в конечном интервале частот можно получить аппроксимацию с любой степенью точности.

Подстановка выражения (VIII.148) в ф-лу (VIII.136) дает

$$M(s) + N(s) = Q^2(-s) = (m_2 - n_2)^2, \quad (\text{VIII.150})$$

или

$$M(s) = m_2^2 + n_2^2; \quad N(s) = -2m_2n_2. \quad (\text{VIII.151})$$

Используя последние выражения и известные тригонометрические формулы, получим для выражения (VIII.145)

$$j \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \left[\frac{n_2(s)}{m_2(s)} \right]_{s=j\omega}. \quad (\text{VIII.152})$$

На вид полученной функции $\beta(\omega)$ накладывается только одно ограничение, заключающееся в том, что нули полиномов m_2 и n_2

должны быть простыми и не совпадать на мнимой оси. Полином $Q(s) = m_2 + n_2$ должен быть полиномом Гурвица. С учетом условия (VIII.149), выражение для сопротивления можно записать в виде

$$Z(s) = P(s)P(-s). \quad (\text{VIII.153})$$

Оно представляет собой не отношение полиномов, а просто полином. Если полином $P(s)$ имеет степень n , то передаточная функция

$$Z^*(s) = \frac{P(s)P(-s)}{\left(1 + \frac{s}{a}\right)^{2n}} \quad (\text{VIII.154})$$

при достаточно большом положительном вещественном a аппроксимирует функцию $Z(s)$, определяемую выражением (VIII.153). Эта аппроксимация осуществляется с заданной степенью точности в конечном интервале частот $0 < \omega < \omega_0$, а получаемая функция является реализуемой.

На практике использование функции $Z(s)$ ограничено тем обстоятельством, что при $s \rightarrow \infty$ функция

$$Z^*(s) \rightarrow a^{2n} \quad (\text{VIII.155})$$

оказывается довольно большой по величине (если только частота ω_0 не является умеренной); степень этой функции [при которой она обеспечивает требуемую аппроксимацию функции $Z(s)$, определяемой выражением (VIII.153)] также является умеренной. Важность данного вывода заключается в том, что, поскольку высокочастотная характеристика практически ограничена по модулю, низкочастотная характеристика в полосе частот $0 < \omega < \omega_0$ становится весьма малой по сравнению с величиной, получаемой из выражения (VIII.155).

Другими словами, постоянный множитель, необходимый для того, чтобы функция сопротивления (VIII.154) имела при $s \rightarrow \infty$ реальное по величине асимптотическое значение, должен быть порядка $\frac{1}{a^{2n}}$. При этом в полезном частотном диапазоне получается реакция, которая практически весьма мала, если только величина a не слишком велика. В любом случае платой за возможность почти независимого управления амплитудой является значительная потеря в усилении.

Дальнейшее рассмотрение этого вопроса, который, по-видимому, ближе всего связан с процессом построения функции сопротивления, аппроксимирующей в определенном смысле требуемое поведение цепи, дано ниже в § XIV.10.



Синтез входных сопротивлений RLC цепей

IX.1. Предварительные замечания

Стоящая перед нами задача заключается в доказательстве того, что принадлежность рациональной функции к классу п. в. ф. в общем случае является достаточным условием ее реализации в виде входного сопротивления или проводимости линейной конечной пассивной двусторонней цепи с сосредоточенными параметрами. Затем необходимо разработать методы синтеза, позволяющие получить физические конфигурации цепей и определить значения их элементов. Здесь возникает много аспектов, требующих более глубокого понимания свойств функций цепей, чем при синтезе цепей, содержащих только элементы двух типов. Поэтому появляется потребность и в других методах синтеза. За некоторыми исключениями все, что излагалось в предыдущих главах книги, имеет важное значение для ясного понимания задачи синтеза входных сопротивлений цепей общего вида (RLC цепей). Она не рассматривалась ранее, поскольку для этого не было достаточной базы.

Для того чтобы сразу вникнуть в сущность задачи и показать, почему она приводит к появлению новых серьезных трудностей, наиболее целесообразно исследовать общий случай RLC цепи, используя понятие нормальных координат. Итак, посмотрим, насколько широко можно использовать методы, изложенные в § III.7 для цепей без потерь.

Выше было показано, что реализация по Фостеру, в общем одинаково применимая ко всем трем типам двухэлементных цепей, по существу, представляет собой метод, позволяющий получить конфигурации цепей, в которых нормальные координаты становятся реальностью. При рассмотрении синтеза RLC цепей возникает вопрос, нельзя ли в логически обобщенном виде применить для них указанную методику. Рассмотрение задачи синтеза этих цепей на базе нормальных координат сразу позволяет установить, во-первых, что такие простые приемы здесь непригодны и, во-вторых, почему именно. Оказывается, что можно построить каноническую схему,

посредством которой всегда реализуется входное сопротивление RLC цепи, причем принадлежность квадратичных форм F , T , V к классу положительно определенных является достаточным критерием реализуемости.

В матричной системе обозначений (при использовании метода контурных токов) эти формы представляются в следующем виде:

$$2F = \underline{i} \times [R] \times i; \quad (\text{IX.1})$$

$$2T = \underline{i} \times [L] \times i; \quad (\text{IX.2})$$

$$2V = \underline{q} \times [S] \times q, \quad (\text{IX.3})$$

где $[R]$, $[L]$ и $[S]$ — известные матрицы параметров резистивных сопротивлений, индуктивностей и обратных емкостей; i и q — матрицы-столбцы контурных токов и зарядов [ср. с уравнениями (III.49), (III.50) и (III.51) для LC цепей]. Как уже отмечалось в § III.7, можно определить вещественное неособенное преобразование переменных

$$i = [A] \times i'; \quad q = [A] \times q' \quad (\text{IX.4})$$

с матрицей

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \dots & 1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2l} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} \dots & a_{ll} \end{bmatrix}, \quad (\text{IX.5})$$

которая одновременно преобразует F и V в суммы квадратов. Используя новые переменные, можно квадратичные формы, определяемые выражениями (IX.1), (IX.2) и (IX.3), представить в виде:

$$2F = \underline{i}' \times [R'] \times i'; \quad (\text{IX.6})$$

$$2T = \underline{i}' \times [L'] \times i'; \quad (\text{IX.7})$$

$$2V = \underline{q}' \times [S'] \times q', \quad (\text{IX.8})$$

где матрицы параметров выражаются формулами:

$$[R'] = [A]_t \times [R] \times [A]; \quad (\text{IX.9})$$

$$[L'] = [A]_t \times [L] \times [A]; \quad (\text{IX.10})$$

$$[S'] = [A]_t \times [S'] \times [A]. \quad (\text{IX.11})$$

Новые матрицы параметров (резистивных сопротивлений и обратных емкостей) $[R']$ и $[S']$ — диагональные; матрица параметров (индуктивностей) $[L']$ — недиагональная, поскольку в общем случае, применяя вещественное неособенное преобразование, нельзя одновременно свести три квадратичные формы к сумме квадратов.

Так, для RLC цепи невозможно определить нормальные координаты, а тем более реализовать их в физической цепи. Самое большее, чего удастся в данном случае достичь — это построить цепь, соответствующую матрицам (IX.9), (IX.10) и (IX.11). Ввиду того что первое из преобразований (IX.4) можно записать в виде

$$i_1 = i'_1 + i'_2 + \dots + i'_l, \quad (\text{IX.12})$$

получаемая цепь по форме подобна цепи, изображенной на рис. IX.1, которая представляет собой каноническую реализацию произвольного положительного вещественного входного сопротивления. Здесь R'_{kk} и S'_{kk} — диагональные элементы матриц $[R']$ и $[S']$, а каждая индуктивность взаимно связана со всеми другими,

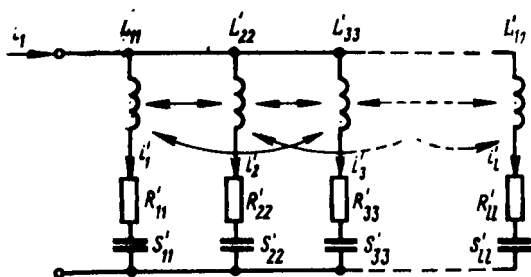


Рис. IX.1

причем значения собственных и взаимных индуктивностей определяются элементами недиагональной матрицы $[L']$.

Принадлежность данных квадратичных форм (IX.1), (IX.2) и (IX.3) к классу положительно определенных, а матрицы $[A]$ — к классу вещественных неособенных гарантирует, что все элементы R'_{kk} , S'_{kk} и L'_{kk} будут положительными вещественными, а взаимные индуктивности — физически реализуемыми. Действительно, они зависят только от условия, согласно которому мгновенное значение накопленной магнитной энергии должно быть положительным при всех возможных вещественных значениях токов ветвей. Следовательно, цепь, изображенная на рис. IX.1, является канонической формой цепи, соответствующей любому реализуемому входному сопротивлению.

Поскольку эта цепь содержит взаимные индуктивности, такая реализация цепи, очевидно, не является логически обобщенной формой Фостера, изображенной на рис. III.12. Таким образом, нельзя ожидать, что данный метод построения цепи по заданной функции сопротивления будет соответствовать применяемому для функций двухэлементных цепей. В более глубоком смысле задача синтеза RLC цепи непосредственно вытекает из того обстоятельства, что преобразования нормальных координат для подобных цепей общего вида не существует.

IX.2. Ограничения метода разложения на элементарные дроби

Хотя приведенные соображения указывают на то, что для реализации общего вида п. в. ф. невозможно применить метод Фостера, подробное изучение его и точное определение условий, при которых он применим, представляют теоретический и практический интерес. В довольно общих чертах можно понять, почему он неприменим, если просто заметить, что любое разложение заданного сопротивления на сумму простых составляющих, например,

$$Z(s) = z_1(s) + z_2(s) + \dots + z_n(s) \quad (\text{IX.13})$$

не гарантирует, что при функции $Z(s)$, являющейся п. в. ф., эти составляющие также относятся к классу п. в. ф. Если $Z(s)$ является функцией аналитической в правой полуплоскости, то все функции z_v также обязательно должны быть в ней аналитическими. С другой стороны, их вещественные части не всегда будут неотрицательными при неотрицательной вещественной части $Z(j\omega)$, поскольку этот результат может быть следствием взаимного сокращения положительных и отрицательных значений вещественных частей составляющих.

Если ур-ние (IX.13) описывает разложение функции $Z(s)$ на элементарные дроби, то каждая составляющая $z_v(s)$ является комбинацией комплексно-сопряженных членов, как видно из выражения

$$z_v = \frac{k_v}{s - s_v} + \frac{\bar{k}_v}{s - \bar{s}_v} = \frac{(k_v + \bar{k}_v)s - (k_v \bar{s}_v + \bar{k}_v s_v)}{(s - \bar{s}_v)(s - s_v)}. \quad (\text{IX.14})$$

Предположим, что

$$k_v = \alpha + j\beta \quad \text{и} \quad s_v = -\sigma_v + j\omega_v. \quad (\text{IX.15})$$

Тогда

$$z_v = \frac{a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0}, \quad (\text{IX.16})$$

причем

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 2(\alpha\sigma_v - \beta\omega_v), & b_0 &= \sigma_v^2 + \omega_v^2 \\ a_1 &= 2\alpha, & b_1 &= 2\sigma_v \end{aligned} \right\}. \quad (\text{IX.17})$$

Так как $-s_v$ — точка в левой полуплоскости, то b_0 и b_1 — положительны. Однако коэффициенты a_0 и a_1 могут иметь любой алгебраический знак. Для того чтобы z_v была п. в. ф., ее вещественная часть при $s = j\omega$ должна быть положительной. Это условие имеет вид

$$(m_1 m_2 - n_1 n_2)_{s=j\omega} = a_0 b_0 + (a_1 b_1 - a_0) \omega^2 \geq 0. \quad (\text{IX.18})$$

Для выполнения его необходимо соблюдение неравенства

$$a_1 b_1 \geq a_0 \geq 0. \quad (\text{IX.19})$$

Используя ур-ния (IX.17), можно эти условия соответственно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \alpha\sigma_v + \beta\omega_v &\geq 0 \\ \alpha\sigma_v - \beta\omega_v &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.20})$$

Очевидно β может быть положительной или отрицательной величиной. Поскольку σ_v и ω_v по определению являются положительными величинами, ограничение, накладываемое на α , имеет вид неравенства

$$\frac{\alpha}{|\beta|} \geq \frac{\omega_v}{\sigma_v}. \quad (\text{IX.21})$$

Как видно из рис. IX.2, данное условие накладывает ограничения на расположение вектора, соответствующего вычету k_v , который в данном случае должен лежать в пределах заштрихованной области.

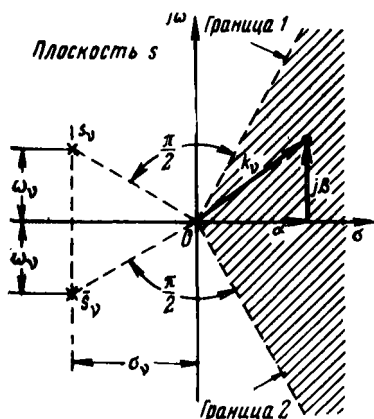


Рис. IX.2

Для любой пары комплексных полюсов s_v и \bar{s}_v функции $Z(s)$ можно сразу определить, как ограничивается соответствующий вычет, если компонентное сопротивление, представляющее эту пару полюсов, является п. в. ф.

Заметим, что k_v представляет вычет функции $Z(s)$ в точке $s = s_v$, а \bar{k}_v — вычет в точке $s = \bar{s}_v$. Таким образом, если k_v лежит на пунктирной линии, обозначенной как граница 1 (см. рис. IX.2), то $a_0 = 0$. С другой стороны, если этот вектор лежит на границе 2, то $a_1 b_1 = a_0$ и од-

но из неравенств (IX.19) оказывается на грани нарушения. Если полюс s_v лежит на мнимой оси, то границы 1 и 2 совпадают с положительной вещественной полуосью и вычет k_v должен быть вещественным и положительным, что уже известно из приведенных выше рассуждений. Чем дальше полюс s_v перемещается в левую полуплоскость, тем большая степень свободы требуется для допустимых комплексных значений вычета k_v , в то время как при s_v отрицательном вещественном вычете k_v может соответствовать любой точке в правой полуплоскости.

В том случае, когда компонентное сопротивление, определяемое выражением (IX.16), является п. в. ф., его легко реализовать физически, учитывая, что обратная функция имеет полюс в точке $s = \infty$. Этот полюс можно выделить в виде параллельной емкостной ветви, причем функция-остаток оказывается п. в. ф. и реализуема

как RL цепь. Алгебраически указанную операцию можно записать так:

$$a_1 s + a_0 \left| \frac{\frac{s}{a_1}}{s^2 + b_1 \frac{s}{a_1} + \frac{a_0}{a_1}} \right| = \frac{s}{\left(b_1 - \frac{a_0}{a_1} \right) s + b_0} \quad (\text{IX.22})$$

Следовательно,

$$z_v = \frac{1}{\frac{s}{a_1} + \frac{1}{z_1}}; \quad z_1 = \frac{a_1 s + a_0}{\left(b_1 - \frac{a_0}{a_1} \right) s + b_0}, \quad (\text{IX.23})$$

где функция-остаток z_1 всегда является сопротивлением, реализуемым в виде RL цепи. Действительно, согласно неравенству (IX.19) все коэффициенты оказываются положительными, и самая низкая критическая частота является нулем. При этом используя соотношения (IX.17), можно неравенство

$$\frac{a_0}{a_1} \leq \frac{a_1 b_0}{a_1 b_1 - a_0} \quad (\text{IX.24})$$

привести к виду

$$\frac{\alpha \sigma_v - \beta \omega_v}{\alpha} \leq \frac{\alpha (\sigma_v^2 + \omega_v^2)}{\alpha \sigma_v + \beta \omega_v}, \quad \text{или} \quad \alpha^2 + \beta^2 \geq 0. \quad (\text{IX.25})$$

Очевидно, что последнее неравенство выполняется.

Результирующая цепь может быть построена в форме, аналогичной изображенной на рис. IX.3, где

$$C = \frac{1}{a_1} \phi; \quad L = \frac{a_1^3}{a_1^2 b_0 - a_0 (a_1 b_1 - a_0)} \text{ гн} \quad (\text{IX.26})$$

и

$$\frac{R}{L} = \frac{a_0}{a_1}; \quad \frac{G}{C} = \frac{a_1 b_1 - a_0}{a_1}. \quad (\text{IX.27})$$

Будем рассматривать эту цепь как параллельный контур, содержащий индуктивность «с потерями» и емкость «с потерями», причем коэффициенты потерь или коэффициенты рассеяния определяются ϕ -лами (IX.27). Итак, если типовое компонентное сопротивление, определяемое выражением (IX.16) из разложения входного сопротивления $Z(s)$ на элементарные дроби, реализуемо, то реализация принимает осуществимую форму, если логически предположить, что диссипативное сопротивление реализуется теми же способами, что

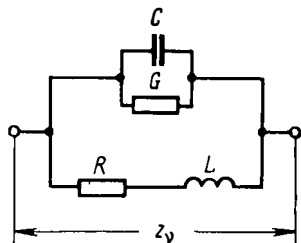


Рис. IX.3

и реактивные функции. Различие состоит лишь в том, что вместо индуктивностей и емкостей без потерь появляются индуктивности и емкости с потерями.

Интересно отметить, что по расположению вектора (вычета) k_v , показанному на рис. IX.2, можно установить, как распределяются потери между индуктивностью и емкостью контура, приведенного на рис. IX.3. Так, если вектор k_v лежит на границе 1 ($a_0 = 0$), то согласно ф-лам (IX.27) индуктивность не будет иметь потерь, тогда как коэффициент рассеяния для емкости $\frac{G}{C} = b_1 = 2\sigma$. С другой

стороны, если вектор k_v лежит на границе 2 ($a_1 b_1 = a_0$), то емкость не будет иметь потерь, а коэффициент рассеяния для индуктивности $\frac{R}{L} = b_1 = 2\sigma$. Наконец, если век-

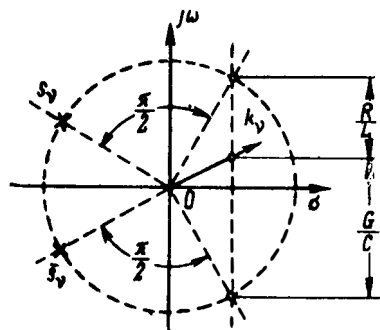


Рис. IX.4

тор k_v лежит на положительной вещественной полуоси, то согласно ф-лам (IX.17) $a_1 b_1 - a_0 = a_0$ и тогда $\frac{R}{L} = \frac{G}{C} = \frac{b_1}{2} = \sigma$. Применительно к коэффициентам потерь, определяемым выражениями (IX.27), эти результаты можно геометрически обобщить в виде диаграммы, изображенной на рис. IX.4.

Используя векторное представление, показанное на рис. IX.2, нетрудно, практически без расчетов, определить, реализуемо ли данное сопротивление по его разложению на элементарные дроби. Для этого достаточно геометрического построения соответствующей диаграммы расположения полюсов и нулей. Таким образом, если предположить, что вычет в данном полюсе вычислен из отношения частотных множителей (векторов), направленных к нему, то угол вычета равен разности между суммами углов множителей нулей и множителей полюсов. В тех случаях, когда имеют место простые геометрические построения даже не нужен транспортир.

Диаграммы расположения полюсов и нулей, изображенные на рис. IX.5, характерны для подобного случая. На рис. IX.5а показаны только полюсы на вещественной оси, когда цепь, приведенная на рис. IX.3, вырождается в параллельное соединение емкости и активной проводимости; при этом необходимо, чтобы вычеты были положительными вещественными. Легко установить, что вычет в точке $s = -2$ является положительным вещественным, а вычеты в точках $s = -1$ и $s = -3$ — отрицательными вещественными. Следовательно, можно сделать вывод, что метод разложения на элементарные дроби в данном случае непосредственно применить нельзя. Однако нужно иметь в виду, что хотя отрицательные вещественные полюсы с положительными вычетами дают сопротивле-

ние RC цепи, такие же полюсы с отрицательными вычетами соответствуют сопротивлению RL цепи. Видимо, рассматриваемое сопротивление можно реализовать как последовательное соединение RC и RL цепей. На этот вопрос легко ответить, если непосредственно записать разложение сопротивления на элементарные дроби

$$Z(s) = \frac{s(s^2 + 4s + 5)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = -\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} - \frac{3}{s+3} + 1. \quad (\text{IX.28})$$

Важным членом в разложении (IX.28) является постоянная, ибо комбинация ее и отрицательных членов реализуема в виде RL цепи.

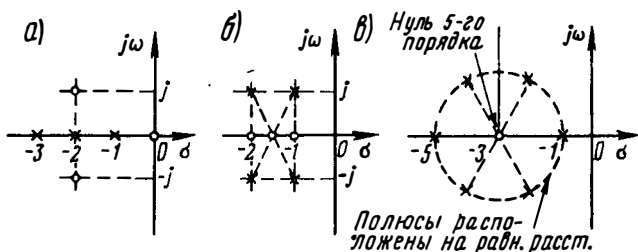


Рис. IX.5

Для контроля можно использовать значение группы членов в данном выражении на нулевой частоте, которое для сопротивления RL цепи должно давать минимум его вещественной части на мнимой оси и, следовательно, быть положительным. Нетрудно видеть, что постоянный член в разложении (IX.28) недостаточен велик для удовлетворения указанного требования, поэтому и эта схема оказывается нереализуемой. Однако, вообще говоря, она представляет практический интерес, поскольку при ее описании рассмотрен возможный простой способ реализации любого сопротивления, имеющего полюсы на вещественной оси.

Из приведенного примера следует и другой важный вывод, связанный с методом реализации посредством разложения на элементарные дроби, а именно, когда не удастся осуществить реализацию заданной функции, можно перейти к обратной функции. Так, если тождественно поменять местами нули и полюсы на диаграмме, изображенной на рис. IX.5а, то очевидно, что вычет в точке $s = 0$ будет вещественным и положительным. Тогда при $s = -2 + j$ сумма углов множителей полюсов будет равна $3\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{2}$, а сумма углов множителей нулей $-\frac{3\pi}{2}$, причем угол вычета оказывается равным $\arctg \frac{1}{2}$ и он, очевидно, меньше максимального допустимого угла. В частности,

$$Y(s) = \frac{(s+1)(s+2)(s+3)}{s(s^2 + 4s + 5)} = \frac{6}{5s} + \frac{4s+6}{5(s^2 + 4s + 5)} + 1. \quad (\text{IX.29})$$

Соответствующая цепь показана на рис. IX.6а.

Рассматривая геометрические построения на диаграмме расположения полюсов и нулей (см. рис. IX.5б), легко заметить, что угол вычета при $s = -1 + j$ равен $+45^\circ$, тогда как при $s = -2 + j$ он равен -45° . Для первого из этих полюсов условие, соответствующее картине, изображенной на рис. IX.2, следовательно, безусловно, выполняется, причем вектор вычета совпадает с границей 1. Для второго полюса это условие выполняется не совсем точно (с некоторым сдвигом). Таким образом, с помощью метода разложения на элементарные дроби удастся найти реализацию рассматриваемого сопротивления.

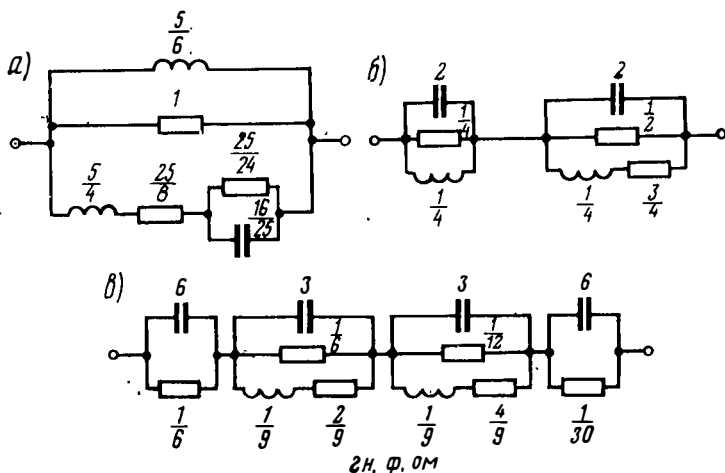


Рис. IX.6

В частности, для вычета в точке $s = -1 + j = s_1$ можно записать

$$k_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \angle 45^\circ = \frac{1+j}{4}. \quad (\text{IX.30})$$

Вычет в точке $s = -2 + j = s_2$ равен

$$k_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \angle -45^\circ = \frac{1-j}{4}. \quad (\text{IX.31})$$

Для определения соответствующих членов разложения на элементарные дроби, представленного выражением (IX.14), необходимо вычислить:

$$k_1 \bar{s}_1 = -\frac{j}{2}, \quad k_2 \bar{s}_2 = \frac{-3+j}{4}. \quad (\text{IX.32})$$

Отсюда сопротивление, характеризующееся диаграммой полюсов и нулей, приведенной на рис. IX.56, принимает вид

$$Z(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{s^2 + 2s + 2} + \frac{s + 3}{s^2 + 4s + 5} \right). \quad (\text{IX.33})$$

Реализация цепи, соответствующая данному сопротивлению, изображена на рис. IX.66. Из него видно, что индуктивность компонентной цепи, относящейся к первому члену выражения (IX.33), не имеет потерь. Такой вывод можно предвидеть заранее, если учесть, что согласно изложенному выше вектор вычета для пары полюсов этого члена лежит на границе I заштрихованной области, показанной на рис. IX.2. Поскольку вектор вычета k_2 [см. формулу (IX.31)] для пары полюсов другого члена разложения (IX.33) имеет отрицательный угол, то, как видно из рис. IX.4, отношение $\frac{R}{L}$ больше отношения $\frac{G}{C}$; соответствующая цепь, приведенная на рис. IX.66, подтверждает сделанное заключение.

Для диаграммы полюсов и нулей, показанной на рис. IX.5в, описанный метод особенно удобен, ибо не трудно заметить, что в данном случае вычеты во всех полюсах одинаковы, а их общая величина является вещественной и положительной. При вычислении любого из вычетов число множителей полюсов равно числу множителей нулей. Следовательно, диаметр окружности, являющейся геометрическим местом точек, на которой расположены полюсы, не влияет на значение вычетов, и можно предположить, что эта окружность имеет единичный радиус. При рассмотрении вычета в точке $s = -1$ оказывается, что существуют пять множителей нулей, каждый из которых равен $+1$, и пять множителей полюсов, равных $1, 1, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2$. Произведение множителей полюсов равно 6. Поскольку их суммарный угол равен нулю, вычет в точке $s = -1$ равен $\frac{1}{6}$.

Далее оказывается, что если рассматривать полюс в точке $s = -2 + j\sqrt{3}$, то все множители нулей и полюсов имеют прежние значения, но их углы смещены на 60° . Вычет в этом полюсе (и, следовательно, во всех других полюсах) также равен $\frac{1}{6}$. Поэтому сопротивление, имеющее такую диаграмму полюсов и нулей, можно представить в виде

$$Z(s) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{s + 1} + \frac{2s + 4}{s^2 + 4s + 7} + \frac{2s + 8}{s^2 + 8s + 19} + \frac{1}{s + 5} \right). \quad (\text{IX.34})$$

Реализация его показана на рис. IX.6в.

IX.3. Обобщение метода реализации с помощью разложения на элементарные дроби

В том случае, когда не выполняется неравенство (IX.19), гарантирующее, что компонентное сопротивление z_v принадлежит к классу п. в. ф., вещественная часть его оказывается отрицательной на некотором участке мнимой оси и имеет минимальное значение на конечной ненулевой частоте ω_v . Если модуль минимальной вещественной части обозначить через R_{\min} , то функция $z_v + R_{\min}$ снова является п. в. ф. на мнимой оси; вещественная часть ее равна нулю при $\omega = \omega_v$.

Добавлением некоторого резистивного сопротивления к каждому члену разложения на элементарные дроби любого положительного вещественного сопротивления всегда можно представить эту функцию в виде выражения (IX.13), в котором компонентные сопротивления z_v будут реализуемы. Однако их уже нельзя реализовать в виде параллельного контура, приведенного на рис. IX.3; метод реализации компонентных сопротивлений оказывается не столь простым, как в случае отсутствия дополнительного резистивного сопротивления. Такой, казалось бы, неожиданный вывод подтверждается при исследовании общего случая, когда вещественная часть на мнимой оси выражается ϕ -лой (IX.16) при $s = j\omega$.

Проследить за поведением вещественной части удобнее всего при исследовании диаграммы полюсов и нулей четной части

$$f(s) = \frac{1}{2} [z_v(s) + z_v(-s)] \quad (\text{IX.35})$$

при $s = j\omega$. Используя выражение (IX.16), находим для указанной функции четной части

$$f(s) = \frac{(a_0 - a_1 b_1) s^2 + a_0 b_0}{(s^2 + b_1 s + b_0)(s^2 - b_1 s + b_0)}. \quad (\text{IX.36})$$

Здесь полюсами являются полюсы z_v и их зеркальные изображения относительно мнимой оси. Предполагая, что выполняется неравенство (IX.19), гарантирующее принадлежность функции к классу п. в. ф., можно найти, что нулями являются пара нулей на вещественной оси в точках

$$s = \pm s_0 = \pm \sqrt{\frac{a_0 b_0}{a_1 b_1 - a_0}} \quad (\text{IX.37})$$

и нуль второго порядка в точке $s = \infty$. Последнее очевидно из того факта, что функция, определяемая выражением (IX.36), при больших значениях s вырождается в $\frac{1}{s^2}$. Диаграмма полюсов и нулей

для этого случая показана на рис. IX.7. Вдоль мнимой оси вид функции $f(s)$ совпадает с одной из двух кривых (1 или 2), изображенных на рис. IX.8а. Если полюсы расположены далеко от мнимой

оси, функция $f(j\omega)$ монотонно убывает (кривая 1). Она будет иметь квазирезонанс (кривая 2) в том случае, если полюсы располагаются достаточно близко к мнимой оси. Поведение этой функции вещественной части не критично к точному расположению конечных нулей $\pm s_0$. По мере того, как приближается момент, когда нарушается условие $a_1 b_1 \geq a_0$ принадлежности функции к классу п. в. ф., нули $\pm s_0$ согласно выражению (IX.37) перемещаются в бесконечно удаленную точку, достигая ее при $a_1 b_1 = a_0$. В этом случае в точке $s = \infty$ вещественная часть имеет нуль четвертого порядка, но ее общее поведение, тем не менее, описывается кривыми, показанными на рис. IX.8а.

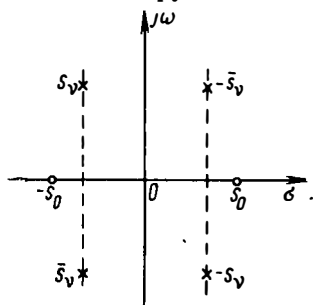


Рис. IX.7

Однако, если условие принадлежности к классу п. в. ф. нарушено и $a_1 b_1 < a_0$, то из выражения (IX.37) следует, что конечные

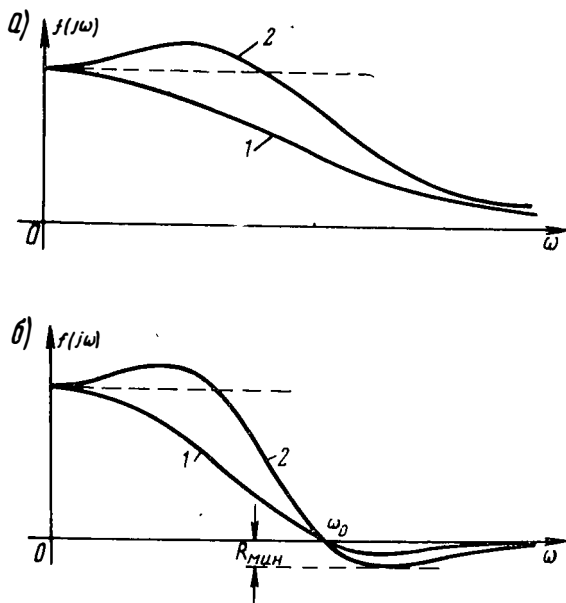


Рис. IX.8

нули лежат в точках $\pm s_0 = \pm j\omega_0$ мнимой оси и поведение вещественной части изменяется, как показывают кривые, приведенные на рис. IX.8б. Поскольку рассматриваемая функция, тем не менее, имеет в точке $s = \infty$ нуль второго порядка и, значит, при большом

значении ω должна изменяться подобно $\frac{1}{\omega^2}$; очевидно, что в данном случае она будет иметь конечный минимум. В результате добавления положительного сопротивления R_{\min} к сопротивлению z_v , вещественная часть которого ведет себя подобным образом, возможно получение положительного вещественного сопротивления при помощи рассмотренного простого метода, однако нельзя получить сопротивление с вещественной частью, соответствующей кривым на рис. IX.8а. Более того, оказывается, что вещественная часть полученного сопротивления при больших значениях s стремится к ненулевому значению R_{\min} , а не ведет себя подобно функции $\frac{1}{s^2}$. Поведение сопротивления z_v полностью отличается от поведения функции, определяемой ур-нием (IX.16), когда оно является п. в. ф., и, следовательно, нельзя считать, что в данном случае применим тот же простой метод реализации.

Методы реализации функций сопротивлений, обладающих более общими свойствами, рассматриваются в следующих параграфах. Пока же целесообразно отметить следующее. Если величина дополнительного резистивного сопротивления несколько больше минимально необходимой для того, чтобы результирующее сопротивление стало положительным вещественным, то снова создается возможность найти простой способ реализации и структуру цепи. На практике возникают ситуации, когда такой способ может быть с пользой применен.

В связи с этим предположим, что к компонентному сопротивлению z_v , представленному ур-нием (IX.16), добавляется некоторое сопротивление R_0 , тогда

$$\begin{aligned} z_v + R_0 = z_v^* &= \frac{a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0} + R_0 = \\ &= \frac{R_0 s^2 + (a_1 + b_1 R_0) s + (a_0 + b_0 R_0)}{s^2 + b_1 s + b_0}. \end{aligned} \quad (\text{IX.38})$$

Это выражение можно разбить на два слагаемых, реализацию каждого из которых легко определить; условие реализации всегда выполнимо путем соответствующего выбора положительного значения R_0 , независимо от алгебраических знаков коэффициентов a_1 и a_0 . При этом в зависимости от алгебраического знака коэффициента a_0 возникает один из двух возможных случаев, обозначенных далее как случаи **А** и **Б**. В частности, при $a_0 > 0$ соотношение (IX.38) запишется в виде

$$z_v^* = \frac{R_0(s^2 + b_0)}{s^2 + b_1 s + b_0} + \frac{(a_1 + b_1 R_0)s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0} \quad (\text{случай А}). \quad (\text{IX.39})$$

Первый член выражения (IX.39) после деления числителя и знаменателя на $(s^2 + b_0)$, очевидно, можно реализовать в виде резистивного сопротивления, соединенного параллельно с простой

реактивностью. Второй член имеет такой же вид, как и сопротивление z_v в выражении (IX.16). Согласно условиям реализуемости, определяемым неравенством (IX.19),

$$(a_1 + b_1 R_0) b_1 \geq a_0 \geq 0 \quad (\text{IX.40})$$

и общие условия реализации сопротивления z_v^* , определяемого выражением (IX.39), принимают вид

$$a_0 \geq 0; \quad R_0 \geq \frac{a_0 - a_1 b_1}{b_1^2} \quad (\text{случай А}). \quad (\text{IX.41})$$

Теперь, очевидно, что неравенство $a_1 b_1 \leq a_0$ дополняет первое из неравенств (IX.19). Следует, кроме того, отметить, что коэффициент a_1 может быть либо положительным, либо отрицательным. Если он отрицателен, то требуемая величина дополнительного резистивного сопротивления, безусловно, должна быть больше.

При отрицательном коэффициенте a_0 выражение для z_v^* можно представить в виде

$$z_v^* = \frac{\left(\frac{a_0}{b_0} + R_0\right)(s^2 + b_0)}{s^2 + b_1 s + b_0} + \frac{\left(\frac{a_1 + b_1 R_0}{b_0}\right) s^{-1} - \frac{a_0}{b_0^2}}{s^{-2} + \frac{b_1}{b_0} s^{-1} + \frac{1}{b_0}} \quad (\text{случай Б}). \quad (\text{IX.42})$$

Первый член этого выражения реализуется указанным выше способом при условии, что

$$\frac{a_0}{b_0} + R_0 \geq 0. \quad (\text{IX.43})$$

Второй член выражения (IX.42) является функцией того же рода, как и рассмотренная выше, за исключением того, что s заменено $\frac{1}{s}$, причем изменение в реализующей ее цепи становится очевидным. Полные условия реализуемости для данного случая принимают вид

$$-a_0 \geq 0; \quad R_0 \geq \frac{-a_0 - a_1 b_1}{b_1^2}, \quad \text{или} \quad R_0 \geq \frac{-a_0}{b_0} \quad (\text{случай Б}). \quad (\text{IX.44})$$

Последнее из записанных неравенств обеспечивает положительность постоянного множителя в первом члене выражения (IX.42) для сопротивления z_v^* . И в этом случае коэффициент a_1 может быть либо положительным, либо отрицательным, а соответствующее значение определяется более сильным из неравенств (IX.44).

С учетом формулы для коэффициента a_0 в выражениях (IX.17) приходим к выводу, что случаи **А** и **Б** можно представить геометрически при условии, если на допустимые комплексные значения вычета k , наложены ограничения в виде заштрихованных областей,

показанных на рис. IX.9. Из рисунков ясно, что оба случая (А и Б) с одной стороны дополняют, а с другой — взаимно исключают друга.

Отметим еще, что сопротивление

$$Z(s) = \frac{s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0} = 1 + \frac{(a_1 - b_1)s + a_0 - b_0}{s^2 + b_1 s + b_0} \quad (\text{IX.45})$$

можно рассматривать как функцию, подобную функции z_v , определяемой выражением (IX.16), с добавочным сопротивлением $R_0 = 1$. Если предположить, что все коэффициенты в выражении (IX.45) положительны, то необходимые и достаточные условия, при

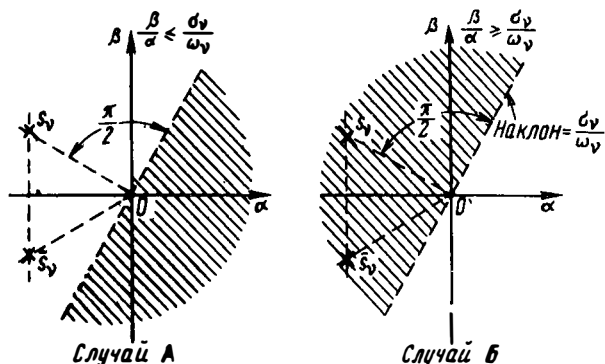


Рис. IX.9

которых рассматриваемая функция является п. в. ф., будут удовлетворять соотношению

$$a_1 b_1 \geq (\sqrt{a_0} - \sqrt{b_0})^2. \quad (\text{IX.46})$$

Тогда условия (IX.41) и (IX.44) реализуемости заданной функции можно представить как:

$$a_1 b_1 \geq a_0 - b_0 \geq 0 \quad \text{для случая А;} \quad (\text{IX.47})$$

$$a_1 b_1 \geq b_0 - a_0 \geq 0 \quad \text{для случая Б.} \quad (\text{IX.48})$$

Поскольку соотношение

$$(a_0 - b_0)^2 \geq (\sqrt{a_0} - \sqrt{b_0})^4$$

приводит к выражению

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a_0}{b_0}} + \sqrt{\frac{b_0}{a_0}} \right) \geq 1,$$

которое выполняется, ясно, что неравенства (IX.47) и (IX.48) сильнее неравенства (IX.46), относящегося к условиям принадлежности функции к классу п. в. ф. Этого и следовало ожидать, так как

реализация упрощенным способом, описанным в случаях А и Б, не является общей и требуется, чтобы данное сопротивление было п. в. ф.

IX.4. Метод синтеза по Бруне

Вопрос о принадлежности рациональной функции к классу п. в. ф. как необходимого и достаточного условия ее реализации в виде входного сопротивления или проводимости пассивной цепи с сосредоточенными параметрами был впервые рассмотрен О. Бруне в его классической работе [19]. Подобно Фостеру, который в своей более ранней работе рассматривал цепи без потерь, Бруне заложил основы для нового подхода к этой задаче. Дополнив и расширив положения Фостера, он создал математический фундамент, на котором развивалась теория, известная ныне под названием теории синтеза цепей.

Как уже говорилось в предыдущих параграфах настоящей главы, для реализации всех положительных вещественных функций не требуется специальных методов, помимо уже известных, описанных при рассмотрении синтеза двухполюсников. Таким образом, если вычеты в полюсах заданной функции удовлетворяют определенным условиям, их выделение и реализация производятся способами, по существу не отличающимися от тех, какие применялись в случае реактивных функций. Иными словами, при подобных обстоятельствах можно получить реализацию цепи только с помощью методов Фостера, используемых для сопротивлений цепей без потерь.

В этой связи особенно важно отметить, что когда п. в. ф. имеет полюсы на мнимой оси, то нет необходимости проверять, удовлетворяют ли вычеты специальным условиям, так как принадлежность заданной функции к классу п. в. ф. уже гарантирует их выполнение. Как указывалось в главе I, если функция принадлежит к классу п. в. ф., то любые полюсы на мнимой оси оказываются простыми, а вычеты в них — вещественными и положительными. Соответствующие члены в разложении заданной функции на элементарные дроби можно с уверенностью считать реализуемыми (так же, как члены в аналогичном разложении реактивной функции по методу Фостера). Оставшаяся часть ее, содержащая полюсы в левой полуплоскости, обязательно является положительной вещественной. Следовательно, условия реализуемости функции не нарушатся при исключении членов, представляющих полюсы на мнимой оси. Последнее вытекает из того, что выделение из п. в. ф. полюсов на мнимой оси не может оказать влияния ни на ее аналитические свойства в правой полуплоскости, ни на значения ее вещественной части на мнимой оси (ибо при $s = j\omega$ вещественная часть, создаваемая такими полюсами, равна нулю).

Таким образом, полюсы п. в. ф. на мнимой оси, безусловно, всегда можно выделить. Они неизменно приводят к реализуемым подцепям, их выделение упрощает заданную функцию и не может на-

рушить свойств реализуемости остатка. Следует отметить, что подобный вывод не относится к полюсам в левой полуплоскости. Как уже говорилось, возможность реализации в разложении на элементарные дроби членов, соответствующих указанным полюсам, не всегда обеспечивается принадлежностью рассматриваемой функции к классу п. в. ф. Даже если эти члены являются реализуемыми, вычитание их из заданной функции может (за исключением особых случаев) нарушить условие ее принадлежности к классу п. в. ф., и, следовательно, остаток нельзя будет реализовать. В таком случае, очевидно, не имеет смысла выделять члены, даже если в отдельности они являются реализуемыми.

В связи с этим на первых этапах решения задачи синтеза заданной п. в. ф. всегда возникает, прежде всего, вопрос: имеет ли функция полюсы на мнимой оси? Если они существуют, то при разложении функции на элементарные дроби производят вычитание соответствующих членов. Остаток может иметь нули на мнимой оси, а функция, обратная остатку,— полюсы на ней, которые возможно выделить. Второй остаток также может иметь нули на мнимой оси, и функцию, обратную ему, тогда рассматривают по аналогии со сказанным выше. Точно так же, как при синтезе реактивных функций, описанном в § III.4, заданное сопротивление (или проводимость) можно разлагать в цепную схему без потерь до того момента, пока функция-остаток на любом этапе разложения имеет нули или полюсы на мнимой оси. Когда процесс реализации остаточной функции на любом этапе заканчивается, полученная цепная структура, очевидно, представляет собой реализацию заданного сопротивления. Может случиться, что указанный простой процесс реализации будет продолжаться до тех пор, пока остаток не станет постоянной величиной. Этому соответствует полная реализация, представляющая собой реактивную лестничную цепь, нагруженную на резистивное сопротивление. Следует подчеркнуть, что новые методы, помимо предложенных Фостером, пока не созданы.

В общем случае, однако, описываемый процесс может привести к ситуации, когда остаточная функция не является постоянной и не имеет ни нулей, ни полюсов на мнимой оси. Такая функция (которая согласно выводам, сделанным в § VIII.1, называется *функцией минимального реактивного сопротивления* или *функцией минимальной реактивной проводимости*) приводит к необходимости применять некоторую новую (отличающуюся от описанных выше) методику синтеза. При этом как раз процесс реализации необходимо осуществлять по методу Бруне. Более простые этапы, на которых возникает необходимость привести заданную функцию к функции минимального реактивного сопротивления или минимальной реактивной проводимости, мы будем рассматривать как «пreamбулу» к методу Бруне. На этих этапах заданная функция упрощается и приводится к виду, при котором ее дальнейшее упрощение уже невозможно осуществить при помощи известных методов. Указанное упрощение производится, как известно, выделением реализуе-

мых элементов цепи таким образом, чтобы получить реализуемый остаток.

Метод Бруне приводит к дальнейшим упрощениям. Он состоит из нескольких этапов, на каждом из которых степень сложности остаточной функции уменьшается на постоянную величину. Таким образом, при рассмотрении метода Бруне достаточно показать, что всегда можно успешно выполнить хотя бы один типовой этап.

Прежде чем приступить к рассмотрению данного метода, целесообразно проиллюстрировать предварительный процесс («преамбулу») на примере, для которого полный синтез уже выполнен. Рассмотрим положительную вещественную функцию (сопротивление)

$$Z(s) = \frac{10s^6 + 4s^5 + 200s^4 + 34s^3 + 550s^2 + 48s + 360}{s^6 + 20s^5 + 16s^4 + 200s^3 + 67s^2 + 180s + 36}. \quad (\text{IX. 49})$$

В процессе проверки полинома знаменателя этого выражения на предмет определения его принадлежности к классу полиномов Гурвица (см. § I.4) оказывается, что этот процесс [как и при делении по ф-ле (I.48)] заканчивается преждевременно, причем нетрудно установить, что член $(s^2 + 9)$ является общим делителем четной и нечетной частей. Следовательно, сопротивление, определяемое выражением (IX.49), имеет на мнимой оси в точках $s = \pm j3$ пару полюсов. Для вычисления в них вычета $Z(s)$ можно использовать ф-лу (I.88). Тогда

$$k_3 = \left(\frac{m_1}{n_2'} \right)_v = \left[\frac{s^6 + 20s^4 + 55s^2 + 36}{2(5s^4 + 30s^2 + 9)} \right]_{s^2 = -9} = \frac{-729 + 1620 - 495 + 36}{2(405 - 270 + 9)} = \frac{3}{2}$$

или

$$k_3 = \left(\frac{n_1}{m_2'} \right)_v = \left(\frac{2s^4 + 17s^2 + 24}{3s^4 + 32s^2 + 67} \right)_{s^2 = -9} = \frac{162 - 153 + 24}{243 - 288 + 67} = \frac{3}{2}. \quad (\text{IX. 50})$$

Чтобы выделить из $Z(s)$ эти полюсы, необходимо произвести следующие очевидные операции:

$$\begin{aligned} Z(s) - \frac{3s}{s^2 + 9} &= \left(\frac{10s^6 + 4s^5 + 200s^4 + 34s^3 + 550s^2 + 48s + 360}{s^6 + 20s^5 + 16s^4 + 200s^3 + 67s^2 + 180s + 36} - 3s \right) \frac{1}{s^2 + 9} = \\ &= \frac{10s^6 + s^5 + 140s^4 + 13s^3 + 490s^2 + 36s + 360}{(s^4 + 20s^3 + 7s^2 + 20s + 4)(s^2 + 9)} = \\ &= \frac{10s^4 + s^3 + 50s^2 + 4s + 40}{s^4 + 20s^3 + 7s^2 + 20s + 4} = Z_1(s). \end{aligned} \quad (\text{IX. 51})$$

Проверка полинома знаменателя функции, обратной полученному остатку, $Y_1(s) = \frac{1}{Z_1(s)}$ на предмет его принадлежности к классу полиномов Гурвица (она проводится аналогично приведенной выше) показывает, что этот полином содержит множитель $(s^2 + 4)$, соответствующий паре полюсов на мнимой оси в точках

$s = \pm j2$. Вычислив описанным выше способом вычет, получим $k_2 = 1$. Следовательно,

$$Y_1(s) - \frac{2s}{s^2 + 4} = \left(\frac{s^4 + 20s^3 + 7s^2 + 20s + 4}{10s^2 + s + 10} - 2s \right) \frac{1}{s^2 + 4} = \\ = \frac{s^4 + 5s^2 + 4}{(10s^2 + s + 10)(s^2 + 4)} = \frac{s^2 + 1}{10s^2 + s + 10} = Y_2(s). \quad (\text{IX.52})$$

Функция, обратная полученному остатку, имеет пару полюсов на мнимой оси в точках $s = \pm j$. Нетрудно установить, что общее значение вычета равно $\frac{1}{2}$, поэтому

$$Z_2(s) - \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{10s^2 + s + 10}{s^2 + 1} - \frac{s}{s^2 + 1} = 10. \quad (\text{IX.53})$$

Теперь можно завершить процесс разложения, записав функцию $Z(s)$, определяемую выражением (IX.49), в виде непрерывной дроби

$$Z(s) = \frac{3s}{s^2 + 9} + \frac{1}{\frac{2s}{s^2 + 4} + \frac{1}{\frac{s}{s^2 + 1} + 10}}. \quad (\text{IX.54})$$

Соответствующая цепь показана на рис. IX.10.

Для того чтобы проанализировать типовой этап синтеза по методу Бруне, рассмотрим п. в. ф. вида

$$Z(s) = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^n}, \quad (\text{IX.55})$$

в которой коэффициенты a_0 , b_0 , a_n и b_n отличны от нуля, а полиномы числителя и знаменателя не имеют нулей на мнимой оси. На начальных этапах метода Бруне основной является операция выделения элементов цепи с тем, чтобы осуществить такое смещение пары нулей функции из левой полуплоскости на мнимую ось, при котором эта функция по-прежнему будет принадлежать к классу п. в. ф. Здесь прежде всего необходимо рассмотреть вещественную часть сопротивления на мнимой оси, которая может, например, иметь вид кривой, изображенной на рис. IX.11. Из рисунка видно, что на некоторой частоте $\omega = \omega_1$ вещественной части соответствует наименьший из нескольких имеющихся у нее минимумов. Если обозначить его через R_1 и вычесть из функции $Z(s)$, то очевидно, что новая функция снова будет п. в. ф.

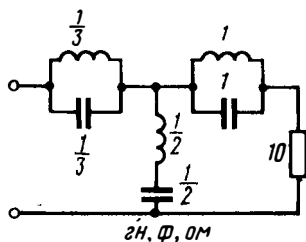


Рис. IX.10

$$Z_1(s) = Z(s) - R_1, \quad (\text{IX.56})$$

которая на частоте $s = s_1 = j\omega_1$ является чисто мнимой, следовательно,

$$Z_1(s_1) = jX. \quad (\text{IX.57})$$

Величина X , хотя и является вещественной, может принимать положительные или отрицательные значения.

Согласно приведенной выше основной идее метода, на следующем этапе необходимо произвести вычитание реактивного сопротивления со значением jX в точке $s = j\omega$ и получить остаток, рав-

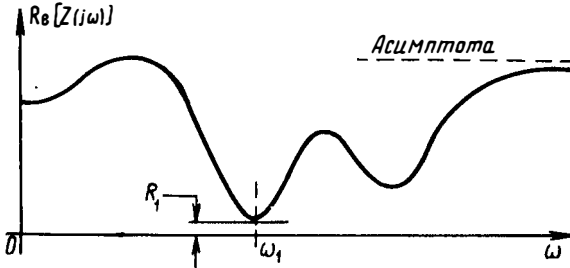


Рис. IX.11

ный в этой точке нулю. Простейшим является реактивное сопротивление, индуктивность которого выражается формулой

$$L_1 = \frac{X}{\omega_1}. \quad (\text{IX.58})$$

Тогда функцию-остаток, имеющую нуль на мнимой оси в точке $s = j\omega_1$, можно записать в виде

$$Z_1(s) - L_1 s. \quad (\text{IX.59})$$

На данном этапе появляются некоторые трудности. Если X — положительная величина, то индуктивность L_1 , определяемая ф-лой (IX.58), будет положительной и реализуемой; с другой стороны, функция, определяемая выражением (IX.59), безусловно, не является п. в. ф., ибо она имеет полюс в точке $s = \infty$ (предельная точка на мнимой оси) с отрицательным вычетом — L_1 . Если X — отрицательная величина, т. е. отрицательно L_1 , то можно утверждать, что функция, определяемая выражением (IX.59), имеет в полюсе в точке $s = \infty$ положительный вычет и, следовательно, является п. в. ф. Однако в данном случае нет уверенности, что в конечном счете можно устранить отрицательную индуктивность L_1 .

На первый взгляд создается впечатление, что описанный этап получения нуля на мнимой оси непригоден. Однако не будем слишком поспешно отказываться от него, а поступим следующим обра-

зом. Предположим на некоторое время, что X — отрицательно, т. е. функция-остаток [выражение (IX.59)] является п. в. ф., причем она имеет нуль на мнимой оси и нам известно, каким способом ее можно упростить. Позже мы вернемся к отрицательной индуктивности L_1 и посмотрим, можно ли найти какой-либо способ ее устранения. А что делать тогда, когда значение X положительно, — над этим следует еще подумать. Пока же нужно довольствоваться тем, чтобы проследить весь процесс от начала до конца.

Итак, для $X < 0$ и $L_1 < 0$ выражение (IX.59) представляет п. в. ф. с нулем на мнимой оси в точке $s = s_1$, и функция

$$\frac{1}{Z_1(s) - L_1 s} \quad (\text{IX.60})$$

является п. в. ф. с полюсом на мнимой оси в данной точке. Известное свойство принадлежности ее к классу п. в. ф. гарантирует, что полюс является простым, а вычет в нем — вещественным и положительным. Доказывать эти утверждения отдельно — нет необходимости. Остановимся теперь на том, каким образом было установлено, что функция, определяемая выражением (IX.60), — п. в. ф. Во-первых, вспомним, что $Z(s)$ согласно гипотезе является п. в. ф. Функция $Z_1(s)$, определяемая выражением (IX.56), также п. в. ф. так как подобно $Z(s)$ она аналитична в правой полуплоскости, включая мнимую ось, где ее вещественная часть неотрицательна. Член $-L_1 s$ — п. в. ф., ибо L_1 — отрицательная величина. Функция, определяемая выражением (IX.59), — п. в. ф., так как сумма двух п. в. ф. также должна быть п. в. ф. Наконец, функция, определяемая выражением (IX.60), является положительной вещественной, ибо функция, обратная п. в. ф., также является положительной вещественной.

Выделение полюсов на мнимой оси из проводимости, определяемой выражением (IX.60), можно осуществить алгебраически следующим образом:

$$\frac{1}{Z_1(s) - L_1 s} - \frac{\frac{1}{L_2} s}{s^2 + \omega_1^2} = \frac{1}{W(s)}. \quad (\text{IX.61})$$

Отсюда, пользуясь формулой для вычисления вычетов, получим

$$2L_2 = \left(\frac{dZ_1}{ds} \right)_{s=s_1} - L_1. \quad (\text{IX.62})$$

Физически операция, осуществляемая выражением (IX.61), соответствует выделению параллельной ветви в лестничной цепи для сопротивления $Z(s)$, причем R_1 и L_1 — начальные последовательные элементы. Указанная параллельная ветвь состоит из индуктивности L_2 , соединенной последовательно с емкостью

$$C_2 = \frac{1}{L_2 \omega_1^2}. \quad (\text{IX.63})$$

Обратная остаточная функция $W(s)$ обязательно является положительным вещественным сопротивлением, так как после выделения из п. в. ф., определяемой выражением (IX.61), полюсов на мнимой оси должен появиться положительный вещественный остаток. Сопротивление $W(s)$, очевидно, имеет полюс в точке $s = \infty$, так как [имея в виду, что $Z_1(s)$ является на бесконечности регулярной функцией] при $s \rightarrow \infty$ из выражения (IX.61) получим

$$\frac{1}{W(s)} \rightarrow -\frac{1}{L_1 s} - \frac{1}{L_2 s} = \frac{L_1 + L_2}{-L_1 L_2 s},$$

или

$$W(s) \rightarrow \frac{-L_1 L_2 s}{L_1 + L_2} = L_3 s. \quad (\text{IX.64})$$

Поскольку $W(s)$ — п. в. ф., не может быть сомнения относительно положительности индуктивности L_3 ; поэтому после выделения из функции $W(s)$ указанного полюса появляется остаточная функция

$$Z_2(s) = W(s) - L_3 s, \quad (\text{IX.65})$$

которая обязательно также является п. в. ф. Подобно функции $Z(s)$, она не имеет нулей или полюсов на мнимой оси и фактически обладает теми же свойствами, что и первоначальная функция $Z(s)$, за исключением (как станет ясно ниже) полиномов числителя и знаменателя, каждый из которых имеет степень на две единицы ниже, чем соответствующий полином $Z(s)$. Цикл завершается получением остаточной функции, и поскольку она аналогична исходной функции $Z(s)$, можно, по-видимому, повторять цикл до тех пор, пока не будет получен остаток, представляющий собой постоянную.

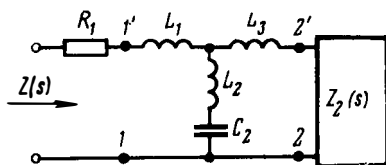


Рис. IX.12

Однако целесообразно выяснить еще ряд обстоятельств. Во-первых, требуется проверить возможность использования отрицательной индуктивности L_1 , для чего нужно тщательно проанализировать цепь, полученную в результате выполненного цикла действий. Такая цепь показана на рис. IX.12, где прямоугольник, обозначенный через $Z_2(s)$, представляет собой цепь, реализующую остаточную функцию.

Приведенное выше утверждение относительно некоторых этапов получения данной части лестничной цепи, соответствующей сопротивлению $Z(s)$, показывает, что значения всех ее элементов, кроме элемента L_1 , положительны. Поскольку эта единственная отрицательная индуктивность соединена в Т-образном звене цепи с двумя другими положительными индуктивностями, вполне вероятно, что Т-образное звено можно заменить парой взаимно связанных поло-

жительных индуктивностей. На рис. IX.13 показано такое преобразование.

Возможность подобной замены зависит от выполнения двух требований: а) алгебраическая сумма $(L_1 + L_2)$ должна быть положительной, даже если численное значение L_1 отрицательно; б) коэффициент связи взаимно связанных катушек не может быть больше единицы. Первое из этих требований вытекает из выражения (IX.64), так как уже известно, что индуктивности L_2 и L_3 — положительны, а

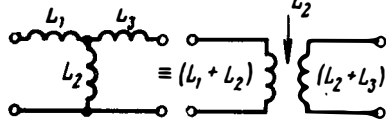


Рис. IX.13

L_1 — отрицательна. Формулу для коэффициента связи можно записать в виде

$$k = \frac{L_2}{\sqrt{(L_1 + L_2)(L_2 + L_3)}} = \frac{L_2}{\sqrt{L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3 + L_2^2}}. \quad (\text{IX.66})$$

С другой стороны, в соответствии с выражением (IX.64)

$$L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3 = 0, \quad (\text{IX.67})$$

и, таким образом, из выражения (IX.66) находим, что $k = 1$. Две индуктивности $(L_1 + L_2)$ и $(L_2 + L_3)$ в цепи, эквивалентной T-образной (см. рис. IX.13), сильно связаны, следовательно, исключение отрицательного значения L_1 вполне возможно.

Используя рассмотренный прием, можно сделать вывод, что применение типового этапа синтеза по Бруне, показанного на рис. IX.12, позволяет получить физическую реализацию части цепи и положительный вещественный остаток; при этом значение реактивности X [сопротивление $Z_1(s)$] отрицательно в точке $s = j\omega$ на мнимой оси.

Для того чтобы определить, насколько остаток $Z_2(s)$ проще первоначального сопротивления $Z(s)$, исследуем, как изменяются степени полиномов числителя и знаменателя функции в процессе перехода от одного этапа синтеза к другому. На начальном этапе, когда используется выражение (IX.56), степени обоих полиномов не изменяются, поэтому функция $Z_1(s)$ содержит полиномы той же степени n , как и функция $Z(s)$. После вычитания $L_1 s$ [см. выражение (IX.59)] получается более сложная функция, содержащая полюс. Функция, определяемая выражением (IX.59), представляет собой частное от деления полинома степени $(n + 1)$ на полином степени n . Обратная функция, определяемая выражением (IX.60), представляет собой отношение полинома степени n к полиному степени $(n + 1)$. После выделения пары полюсов [см. выражение (IX.61)] степень каждого полинома уменьшается на два и остаток $\frac{1}{W(s)}$ представляет собой отношение полинома степени $(n - 2)$ к полиному степени $(n - 1)$. Функцию $W(s)$, имеющую простой полюс на бесконечности, можно представить в виде отношения поли-

номов степеней $(n - 1)$ и $(n - 2)$ соответственно. Следовательно, остаток $Z_2(s)$ после выделения полюса в точке $s = \infty$ будет дробью, числитель и знаменатель которой содержат, как указывалось выше, полиномы степени $(n - 2)$.

Поскольку каждый из полиномов функции $Z_2(s)$ содержит на два коэффициента меньше, чем полиномы исходной функции $Z(s)$, для описания первой из указанных функций требуется на четыре параметра меньше, чем для описания второй. Этот результат согласуется с тем фактом, что хотя цепь, изображенная на рис. IX.12, содержит пять элементов, ограничение (IX.67), налагаемое на индуктивности L_1 , L_2 и L_3 , позволяет независимо определять лишь две из них. Цикл разложения исходной функции $Z(s)$, т. е. переход к функции $Z_2(s)$, связан с потерей четырех коэффициентов полиномов и соответственно позволяет определить значения четырех элементов цепи. В этом смысле данное разложение является каноническим, так как оно снижает сложность исходной функции и дает минимальное число элементов цепи.

Теперь рассмотрим случай, когда реактивность X из урния (IX.57) является положительной. После того как выполнена операция первого этапа, определяемая выражением (IX.56), необходимо перейти к проводимости $Y_1(s) = \frac{1}{Z_1(s)}$, которая в точке $s = j\omega_1$ на мнимой оси представляет собой чисто реактивную проводимость

$$Y_1(s_1) = jB = \frac{1}{jX}. \quad (\text{IX.68})$$

Ясно, что когда X положительно, то B отрицательно. Величину емкости, соответствующую проводимости jB в точке $s = j\omega$, можно найти по формуле

$$C_1' = \frac{B}{\omega_1}. \quad (\text{IX.69})$$

Остаток после вычитания из функции $Y_1(s)$ указанной емкостной проводимости имеет вид

$$Y_1(s) - C_1's. \quad (\text{IX.70})$$

Он, так же как и остаток, определяемый выражением (IX.59), является положительным вещественным, поскольку C_1' отрицательно.

Все остальные этапы синтеза полностью дуальны описанному выше случаю разложения с использованием функций сопротивления. Функция, обратная п. в. ф., определяемой выражением (IX.70), имеет пару полюсов на мнимой оси. Процесс их выделения в виде последовательной ветви, состоящей из параллельного контура LC , можно представить следующим образом:

$$\frac{1}{Y_1(s) - C_1's} = \frac{\frac{1}{C_2'} s}{s^2 + \omega_1^2} = \frac{1}{W(s)}. \quad (\text{IX.71})$$

При этом значения соответствующих индуктивности и емкости можно получить из выражений:

$$2C_2' = \left(\frac{dY_1}{ds} \right)_{s=s_1} - C_1'; \quad (\text{IX.72})$$

$$L_2' = \frac{1}{C_2' \omega_1^2}. \quad (\text{IX.73})$$

Проводимость $W(s)$ имеет полюс в точке $s = \infty$, как это следует из рассмотрения выражения (IX.71), которое в предельном случае, т. е. при $s \rightarrow \infty$, принимает вид

$$W(s) \rightarrow \frac{-C_1' C_2' s}{C_1' + C_2'} = C_3' s. \quad (\text{IX.74})$$

Выделение конечной параллельной ветви, имеющей проводимость (IX.74), как видно из выражения

$$Y_2(s) = W(s) - C_3' s = \frac{1}{Z_2(s)}, \quad (\text{IX.75})$$

завершает цикл и дает положительный вещественный остаток $Y_2(s)$ или $Z_2(s)$. Цепь, полученная таким образом, изображена на рис. IX.14а.

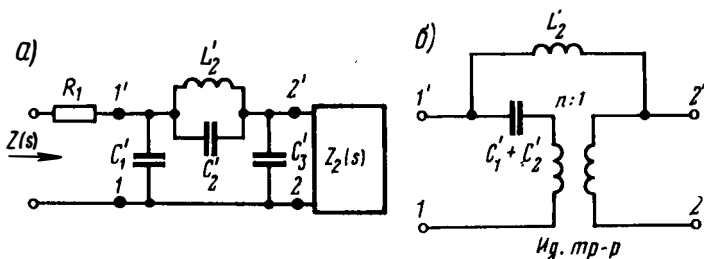


Рис. IX.14

Рассмотренный метод обладает одним недостатком, который состоит в том, что величина C_1' — отрицательна. Его можно устранить путем преобразования реактивной цепи, заключенной между зажимами 1—1' и 2—2', в цепь, изображенную на рис. IX.14б, для которой идеальный трансформатор имеет коэффициент трансформации, равный

$$n = \frac{C_2'}{C_1' + C_2'} = \frac{C_2' + C_3'}{C_2'} = \sqrt{\frac{C_2' + C_3'}{C_1' + C_2'}}. \quad (\text{IX.76})$$

Нетрудно заметить, что возможно несколько эквивалентных форм этого коэффициента, определяемых из соотношения

$$C_1' C_2' + C_1' C_3' + C_2' C_3' = 0, \quad (\text{IX.77})$$

полученного с учетом выражения (IX.74). Последнее аналогично соотношению (IX.67), характеризующему сильную связь, существующую между индуктивностями цепи, приведенной на рис. IX.12. Можно легко доказать эквивалентность реактивных четырехполюсников, показанных на рис. IX.14а, б, если учесть, что как тот, так и другой имеют следующие входные и передаточную проводимость короткого замыкания:

$$y_{11} = (C'_1 + C'_2)s + \frac{1}{L'_2 s}; \quad (\text{IX.78})$$

$$y_{22} = (C'_2 + C'_3)s + \frac{1}{L'_2 s} = n^2 (C'_1 + C'_2)s + \frac{1}{L'_2 s}; \quad (\text{IX.79})$$

$$-y_{12} = C'_2 s + \frac{1}{L'_2 s} = n (C'_1 + C'_2)s + \frac{1}{L'_2 s}. \quad (\text{IX.80})$$

Поскольку сумма $(C'_1 + C'_2)$ положительна [это объясняется тем, что величина C'_3 из выражения (IX.74) положительна], цепь, изображенная на рис. IX.14б, удовлетворяет условиям физической реализуемости, хотя с практической точки зрения идеальный трансформатор менее удобен, чем сильно связанные индуктивности цепи, приведенной на рис. IX.12.

Однако цепь, показанную на рис. IX.14а, всегда можно преобразовать в эквивалентную цепь такого вида, как на рис. IX.12, и, следовательно, обойтись без применения идеального трансформатора, даже если $X > 0$. Для того чтобы осуществить подобное преобразование, необходимо, прежде всего, составить по выражениям (IX.78), (IX.79) и (IX.80) определитель y . Тогда с учетом (IX.77) можно получить

$$|y| = y_{11}y_{22} - y_{12}^2 = \frac{C'_1 + C'_3}{L'_2} \quad (\text{IX.81})$$

и соответствующие входные и передаточные сопротивления холостого хода:

$$z_{11} = \frac{y_{22}}{|y|} = \frac{C'_2 + C'_3}{C'_1 + C'_3} L'_2 s + \frac{1}{(C'_1 + C'_3)s}; \quad (\text{IX.82})$$

$$z_{22} = \frac{y_{11}}{|y|} = \frac{C'_1 + C'_2}{C'_1 + C'_3} L'_2 s + \frac{1}{(C'_1 + C'_3)s}; \quad (\text{IX.83})$$

$$z_{12} = \frac{-y_{12}}{|y|} = \frac{C'_2}{C'_1 + C'_3} L'_2 s + \frac{1}{(C'_1 + C'_3)s}. \quad (\text{IX.84})$$

Принимая во внимание выражения для этих сопротивлений в реактивной цепи, изображенной на рис. IX.12, можно вывести следующие формулы:

$$L_1 = \frac{L'_2 C'_3}{C'_1 + C'_3}; \quad L_2 = \frac{L'_2 C'_2}{C'_1 + C'_3};$$

$$L_3 = \frac{L'_2 C'_1}{C'_1 + C'_3}; \quad C_2 = C'_1 + C'_3.$$
(IX.85)

Исследуя выражения (IX.85), нужно заметить, что соотношение (IX.77) для емкостей снова приводит к соотношению (IX.67) для индуктивностей, обладающих сильной связью; отрицательное значение C'_1 дает отрицательное значение L_3 , причем L_1 и L_2 положительны. Следовательно, всегда возможно преобразование цепи, изображенной на рис. IX.14а, в эквивалентную цепь, аналогичную показанной на рис. IX.12, в которой индуктивное Т-образное звено заменено парой сильно связанных индуктивностей (см. рис. IX.13).

Можно показать, что не обязательно использование метода узловых напряжений при преобразовании цепи, приведенной на рис. IX.14а, в цепь, приведенную на рис. IX.12 (при условии, что реактивное значение X положительно). Однако конечные результаты окажутся точно такими же, если в точке, для которой производится операция вычитания (IX.59), появляется функция, не принадлежащая к классу п. в. ф. При этом можно не учитывать влияния указанного факта и продолжать последовательно выполнять оставшиеся этапы синтеза, используя метод контурных токов, как будто нарушение условия принадлежности функции, определяемой выражением (IX.59), к классу п. в. ф. не играет роли. С точки зрения практических расчетов такой переход позволяет сократить время, затрачиваемое на вычисления. Как правило, большинство возникающих задач решаются именно таким способом. Простое доказательство справедливости полученного конечного результата дано в следующем параграфе.

Рассматривая выражение, соответствующее сильной связи между индуктивностями цепи, изображенной на рис. IX.12, интересно отметить, что оно обусловлено предположением об отсутствии у функции $Z(s)$ полюсов на мнимой оси и, следовательно, тем, что она должна быть регулярной на бесконечности. Если бы ничего не было известно о существовании особых соотношений между индуктивностями цепи, приведенной на рис. IX.12, то, разумеется, по первому впечатлению можно было бы сделать вывод, что ее входное сопротивление, благодаря наличию последовательных индуктивностей, имеет полюс в точке $s = \infty$. В действительности, выражение (IX.67), соответствующее сильной связи, по существу, приводит к устранению общей последовательной индуктивности рассматриваемой цепи.

Последнее легко доказать непосредственно, если представить реактивную часть цепи в виде схемы, показанной на рис. IX.15. Она сравнима с потенциально эквивалентной цепью, изображенной на рис. IX.14б (и является дуальной ей), причем коэффициент трансформации идеального трансформатора этой цепи можно записать в виде

$$n = \frac{L_2}{L_1 + L_2} = \frac{L_2 + L_3}{L_2} = \sqrt{\frac{L_2 + L_3}{L_1 + L_2}}. \quad (\text{IX.86})$$

Эквивалентность последней цепи и реактивной цепи на рис. IX.12 можно легко и просто доказать. Действительно, непосредственно видно, что обе цепи имеют одинаковые входные сопротивления и сопротивление передачи холостого хода. В эквивалентной цепи, показанной на рис. IX.15, очевидно отсутствие влияния последовательной индуктивности, тогда как в цепи, приведенной на рис. IX.12, это отнюдь не очевидно, даже если известно выражение (IX.67), характеризующее сильную связь между индуктивностями.

Если дана рациональная п. в. ф. $Z(s)$, определяемая выражением (IX.55), в котором степень полинома $n \geq 4$, то для полной реализации указанной функции необходимо выполнить

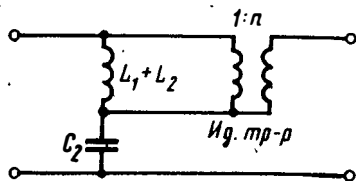


Рис. IX.15

несколько последовательных циклов Бруне, каждый из которых соответствует описанному выше циклу. В начале должна быть вычислена вещественная часть входного сопротивления при $s = j\omega$ и найден его наименьший минимум (см. рис. IX.11). Может случиться, что полный расчет вещественной части исходного сопротивления $Z(s)$ окажется достаточным в том смысле, что следующий наименьший минимум на соответствующей частоте относится ко второму циклу и т. д. Однако этот вывод неправилен, так как оказывается, что между минимумами вещественной части остаточной и исходной функций в общем случае существует более сложная зависимость. Расчет вещественной части необходимо повторять в начале каждого цикла, причем в каждом последующем цикле она упрощается.

Полная реализация заданного сопротивления $Z(s)$, получение которого состоит из нескольких циклов, показана на рис. IX.16. Схема IX.16а более удобна для физической реализации рассматриваемого сопротивления; схема IX.16б, содержащая идеальные трансформаторы, более удобна для аналитического обоснования характера и свойств заданной функции сопротивления и обусловленных ими характеристик цепи.

Учитывая практические соображения, следует отметить, что резистивные сопротивления R_1, R_2, \dots могут быть использованы для компенсации резистивных сопротивлений катушек, применяемых для реализации связанных индуктивностей, и что условием сильной

связи для всех пар катушек можно пренебречь, если заданное сопротивление имеет полюс в точке $s = \infty$. В этом случае на входе цепи образуются несколько последовательных индуктивностей, которые можно сложить с первой из связанных индуктивностей, чтобы ослабить действие условия сильной связи на данном участке цепи. Величину индуктивности вторичной обмотки первой пары связанных катушек можно уменьшить, однако коэффициент связи этой пары будет меньше единицы. Дополнительную величину, вычитаемую из второй индуктивности, складывают с третьей индуктивностью, чтобы пренебречь условием сильной связи во второй

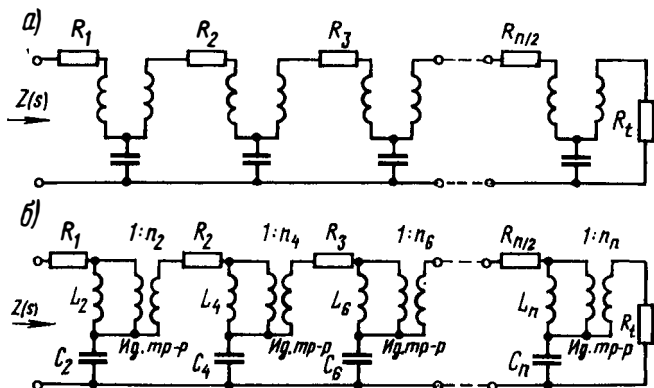


Рис. IX.16

паре катушек индуктивностей и т. д. Таким образом, входную индуктивность можно распределить так, чтобы получить равные и меньшие единицы коэффициенты связи для всех пар катушек индуктивностей. Если имеющаяся последовательная индуктивность достаточна, то для реализации заданного сопротивления удастся получить практически пригодную полную цепь.

IX. 5. Второй метод синтеза по Бруне

Второй метод синтеза по Бруне основан на реализации входного сопротивления цепи без потерь, которая была рассмотрена в § VII.4. Там на рис. VII.18а была изображена цепь, соответствующая реализации общего вида. При рассматриваемом методе необходимо внести лишь небольшие изменения в эту цепь, а именно, включить между каскадно соединенными четырехполюсниками без потерь резистивные сопротивления R_1, R_2, \dots , а на выходе — резистивное сопротивление конечной нагрузки R_t . В результате получится цепь, показанная на рис. IX.17. Известно, что каждая реактивная цепь дает пару нулей вещественной части сопротивления на мнимой оси со стороны его соответствующего входа. Эти нули в

совокупности являются нулями общей передаточной функции цепи¹.

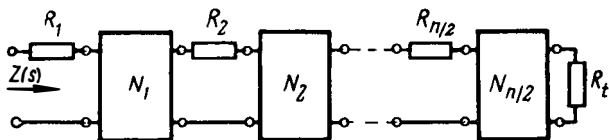


Рис. IX.17

На рис. VII.186 рассматривался типичный цикл реализации, связанный с выделением из входного сопротивления $Z_1(s)$, определяемого выражением (VII.56), одного реализуемого четырехполюсника без потерь. В итоге данной операции появляется положительный вещественный остаток $Z_2(s)$.

Соответствующая пара нулей вещественной части (нули передачи) характеризуется множителем

$$t(s) = s^2 + \omega_0^2, \quad (\text{IX.87})$$

причем простейший ряд входных сопротивлений и сопротивления передачи холостого хода, который может дать такие нули, имеет вид:

$$z_{12} = \frac{Kt(s)}{s} = \frac{k_0}{s} + k_{12}s; \quad (\text{IX.88})$$

$$z_{11} = \dots = \frac{k_0}{s} + k_{11}s; \quad (\text{IX.89})$$

$$z_{22} = \dots = \frac{k_0}{s} + k_{22}s, \quad (\text{IX.90})$$

где K — постоянная. Из выражения (IX.88) имеем

$$k_0 = Kt(0) = K\omega_0^2; \quad (\text{IX.91})$$

$$k_{12} = K. \quad (\text{IX.92})$$

Предполагается, что входное сопротивление имеет определенную форму вида

$$Z_1(s) = \frac{Ap(s)}{q(s)} = \frac{A(s-s_{p1})(s-s_{p2}) \dots (s-s_{pn})}{(s-s_1)(s-s_2) \dots (s-s_n)}. \quad (\text{IX.93})$$

Обратившись к цепи, описанной в § VII.4, и к ур-нию (VII.67), можно записать соотношение, связывающее пять величин $Z_1(s)$, $Z_2(s)$, z_{11} , z_{22} и z_{12} :

$$(z_{11} - Z_1)(z_{22} + Z_2) = z_{12}^2 = \frac{K^2 t^2(s)}{s^2}. \quad (\text{IX.94})$$

¹ В том, что нули вещественной части являются нулями общей передаточной функции, легко убедиться, если учесть, что для таких частот мнимой оси мощность на входе (следовательно, и на выходе) должна быть равна нулю.

Отсюда непосредственно получается разложение на элементарные дроби

$$\frac{1}{z_{22} + Z_2} = \frac{s^2(z_{11} - Z_1)}{K^2 t^2(s)} = \frac{1}{K^2} \sum_{\nu=1}^n \frac{-s_\nu^2 k_\nu}{t^2(s_\nu)} \frac{1}{s - s_\nu}, \quad (\text{IX.95})$$

где k_ν обозначает вычеты сопротивления $Z_1(s)$ в его полюсах s_1, s_2, \dots, s_n . Таким образом, функция $(z_{22} + Z_2)^{-1}$ содержит только полюсы функции $Z_1(s)$, ибо нули на мнимой оси, определяемые функцией $t^2(s)$, должны входить в множитель $(z_{11} - Z_1)$.

Поскольку полюсы z_{sh} на мнимой оси не содержатся в функциях Z_1 или Z_2 , множители $(z_{11} - Z_1)$ и $(z_{22} - Z_2)$ в окрестности этих полюсов вырождаются в функции z_{11} и z_{22} соответственно. Поэтому можно найти их вычеты непосредственно из ур-ний (IX.94) и (IX.95). При $s \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{1}{k_{22}} = \frac{k_{11}}{K^2} = \frac{1}{K^2} \sum_{\nu=1}^n \frac{-s_\nu^2 k_\nu}{t^2(s_\nu)}. \quad (\text{IX.96})$$

Величина, обратная вычету z_{22} в точке $s = 0$, представляет собой производную от выражения (IX.95) в данной точке. Отсюда, используя выражение (IX.91), получаем

$$\frac{1}{k_0} = \frac{1}{K\omega_0^2} = \frac{1}{K^2} \sum_{\nu=1}^n \frac{k_\nu}{t^2(s_\nu)}. \quad (\text{IX.97})$$

Поскольку слагаемые сумм этого выражения являются парами комплексно-сопряженных величин, то из выражений (IX.96) и (IX.97) следует, что величины K, k_0 и k_{11} являются вещественными, а из выражения (IX.89) — что $\text{Re}[z_{11}(j\omega)] \equiv 0$. Далее, из выражения (IX.95) видно, что функция $(z_{22} + Z_2)^{-1}$ является аналитической в правой полуплоскости (включая мнимую ось) и ее вещественная часть там положительна, так как согласно предположению сопротивление Z_1 — положительно. Следовательно, рассматриваемая функция является п. в. ф. и функция $(z_{22} + Z_2)$ также является п. в. ф. Полюсы последней в точках $s = 0$ и $s = \infty$ относятся к z_{22} , а остальные можно отнести к Z_2 . Сопротивления z_{22} и Z_2 , очевидно, являются п. в. ф., значит вычеты k_0 и k_{22} — положительны. Из выражений (IX.91) и (IX.92) следует, что K и k_{12} — положительны и, кроме того, по условию вычетов $k_{11} = \frac{k_{12}^2}{k_{22}}$, вытекающего из ур-ний (IX.92) и (IX.96), — что k_{11} сохраняет положительное значение. Таким образом, обеспечена возможность реализации четырехполюсника без потерь и остаточной функции.

IX.6. Синтез входного сопротивления по Дарлингтону

Согласно методу реализации по Дарлингтону [20] положительное вещественное входное сопротивление представляется как входное сопротивление четырехполюсника без потерь, нагруженного со стороны выхода на одно резистивное сопротивление, которое

всегда можно нормализовать к 1 ом. Схема такой реализации для некоторого входного сопротивления $Z_1(s)$ показана на рис. IX.18. Рассмотрим подробно возможность ее осуществления, для чего запишем известное выражение для сопротивления $Z_1(s)$:



Рис. IX.18

$$Z_1(s) = \frac{(z_{11}z_{12} - z_{12}^2) + z_{11}}{z_{22} + 1}, \quad (\text{IX.98})$$

где z_{11} , z_{22} и z_{12} — входные и передаточное сопротивления холостого хода, характеризующие четырехполюсник без потерь. Если обозначить сокращенно определитель $z_{11}z_{22} - z_{12}^2$ ряда сопротивлений z_{sh} через $|z|$, то входные и передаточная проводимости короткого замыкания можно представить в виде известных соотношений:

$$y_{11} = \frac{z_{22}}{|z|}; \quad y_{22} = \frac{z_{11}}{|z|}; \quad y_{12} = \frac{-z_{12}}{|z|}. \quad (\text{IX.99})$$

Вынесем в выражении (IX.98) общий множитель z_{11} за скобки, тогда

$$Z_1(s) = z_{11} \frac{\frac{1}{z_{22}} + 1}{\frac{y_{22}}{z_{22}} + 1}. \quad (\text{IX.100})$$

Это сопротивление теперь можно представить в виде отношения полиномов

$$Z_1(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2}. \quad (\text{IX.101})$$

В § I.5 и § II.1 было показано, что отношение любой четной части к любой нечетной части полиномов $P(s)$ и $Q(s)$ дает физически реализуемую реактивную функцию или функцию реактивной проводимости. Поэтому очевидно, что можно отождествить оба выражения (IX.100) и (IX.101). При этом если в числителе выражения (IX.101) вынести за скобки множитель m_1 , а в знаменателе — множитель n_2 , то получим

$$Z_1(s) = \frac{m_1}{n_2} \frac{\frac{n_1}{m_1} + 1}{\frac{m_2}{n_2} + 1} \quad (\text{случай А}). \quad (\text{IX.102})$$

части сопротивления $Z_1(s)$, определяемого выражением (IX.101). Для удобства вновь приведем здесь этот четный полином, данный ранее в выражениях (I.56) и (I.57):

$$A(-s^2) = m_1 m_2 - n_1 n_2 = A_n (s_1^2 - s^2) (s_2^2 - s^2) \dots (s_n^2 - s^2). \quad (\text{IX.110})$$

Далее следует иметь в виду, что принадлежность функции $Z_1(s)$ к классу п. в. ф. означает только, что все множители $(s_v^2 - s^2)$, содержащие отрицательные вещественные значения s_v^2 , имеют четную кратность. Поэтому в общем случае данный полином не является полным квадратом и выражения (IX.108) или (IX.109) не дают, как можно было ожидать, рациональную функцию для сопротивления z_{12} .

Эту трудность удается преодолеть, если включить в выражение (IX.101) вспомогательный полином Гурвица $P_0(s) = m_0 + n_0$, например, следующим образом:

$$Z_1(s) = \frac{P(s)P_0(s)}{Q(s)P_0(s)} = \frac{(m_1 + n_1)(m_0 + n_0)}{(m_2 + n_2)(m_0 + n_0)}. \quad (\text{IX.111})$$

Такая мера может показаться тривиальной, но интересно отметить, что после умножения числителя и знаменателя на $(m_2 - n_2)(m_0 - n_0)$ (что соответствует получению четной части) выражение (IX.111) запишется так:

$$\frac{(m_1 + n_1)(m_2 - n_2)(m_0^2 - n_0^2)}{(m_2 + n_2)(m_2 - n_2)(m_0^2 - n_0^2)}, \quad (\text{IX.112})$$

и поскольку полином $(m_0^2 - n_0^2)$ является четным полиномом, то очевидно, что четная часть функции $Z_1(s)$ просто будет содержать этот четный полином, т. е.

$$\frac{1}{2} [Z_1(s) + Z_1(-s)] = \frac{(m_1 m_2 - n_1 n_2)(m_0^2 - n_0^2)}{(m_2^2 - n_2^2)(m_0^2 - n_0^2)}. \quad (\text{IX.113})$$

Безусловно, можно начать процесс с включения в четную часть функции $Z_1(s)$ указанного полинома, как было проделано выше. Тогда обнаружится, что, поскольку влияние на четную часть оказывается тривиальным, этот процесс должен (согласно методам, описанным в главе VIII) давать такое же сопротивление, как и раньше, и, следовательно, влияние на него также будет тривиальным.

В любом случае операция, соответствующая выражению (IX.113), разрешает возникшую трудность, так как полином, определяемый ф-лой (IX.110), теперь умножается на член $(m_0^2 - n_0^2)$, выбираемый так, чтобы получить новый полином в виде полного квадрата

$$\tilde{A}(-s^2) = (m_1 m_2 - n_1 n_2)(m_0^2 - n_0^2). \quad (\text{IX.114})$$

Это, очевидно, справедливо при условии, что член $(m_0^2 - n_0^2)$ принят равным произведению тех множителей $(s_v^2 - s^2)$ в выраже-

нии (IX.110), при которых в новом полиноме, определяемом выражением (IX.114), все множители нулей имеют четную кратность. По образованному таким путем четному полиному $(m_0^2 - n_0^2)$ можно построить полином Гурвица $(m_0 + n_0)$, используя методику построения полинома $(m_2 + n_2)$ по полиному $(m_2^2 - n_2^2)$, изложенную при описании процесса нахождения сопротивления по его вещественной части в § VIII.1. Далее предполагается, что заданное сопротивление $Z_1(s)$ уже содержится в соответственно измененной функции. Поэтому, получив выражение (IX.108) или (IX.109) для сопротивления z_{12} , можно убедиться, что рассматриваемая функция является рациональной.

Здесь уместно сделать несколько дополнительных замечаний относительно описанного процесса изменения функции. Прежде всего оказывается, что различие случаев **А** и **Б**, к которым относятся выражения (IX.108) и (IX.109), очевидно зависит от того, является ли полином $\sqrt{m_1 m_2 - n_1 n_2}$ соответственно четным или нечетным. Это вытекает из того условия, что сопротивление z_{12} (так же как и сопротивления z_{11} и z_{22}) должно быть задано в виде отношения двух полиномов соответственно четного и нечетного (как было показано в § II.1, а также в главе VII). В выражении (IX.108) (для случая **А**) полином знаменателя — нечетный, следовательно, полином числителя должен быть четным. Выражение (IX.109) (для случая **Б**) содержит обратное соотношение.

Случай **Б** возникает тогда, когда в выражении (IX.110) $s_1^2 = 0$. Например, если $s_1^2 = 0$, то это выражение принимает вид

$$A(-s^2) = m_1 m_2 - n_1 n_2 = -s^2 (s_2^2 - s^2) \dots (s_n^2 - s^2) A_n, \quad (\text{IX.115})$$

или

$$-A(-s^2) = n_1 n_2 - m_1 m_2 = s^2 (s_2^2 - s^2) \dots (s_n^2 - s^2) A_n. \quad (\text{IX.116})$$

Поскольку заранее предполагается, что в процессе добавления множителей все множители типа $(s_2^2 - s^2), \dots, (s_n^2 - s^2)$ имеют вид последовательных четных членов (evenly repeated sets), выражение (IX.116) представляет собой полный квадрат, а корень квадратный из этого выражения — нечетный полином с положительными коэффициентами, что и требуется.

В процессе добавления множителей при желании, наряду с другими необходимыми множителями, можно использовать множитель s^2 . При этом возникает ситуация, соответствующая случаю **А**. Такой прием не имеет преимуществ, хотя и является допустимым. Аналогично в качестве дополнительных множителей можно, если потребуется, использовать любые последовательности четных множителей $(s_2^2 - s^2)$. Применение описанных приемов приводит к чрезмерно сложным выражениям для сопротивлений и, следовательно, более сложным цепям, чем требуется. В целях экономии элементов цепи следует добавлять минимальное количество множи-

телей, необходимых для получения сопротивления z_{12} в виде рациональной функции. Таким образом, различить случаи **A** и **Б** можно непосредственно по виду полинома $(m_1 m_2 - n_1 n_2)$. Вид его всегда однозначно соответствует одному из указанных случаев, ибо последние взаимно исключают друг друга. Иными словами, если применимо одно из соотношений (IX.108) или (IX.109), то другое использовать нельзя.

Далее выясним, определяют ли сопротивления z_{11} , z_{22} и z_{12} реализуемый четырехполюсник без потерь? Как указывалось в главе VII в связи с рассмотрением вопросов синтеза таких цепей, а также исходя из выражения (II.29), условие вычетов

$$k_{11} k_{22} - k_{12}^2 \geq 0 \quad (\text{IX.117})$$

— единственное, что требуется в данном случае рассмотреть дополнительно к уже исследованным факторам. Предположим, что с помощью выражений (IX.103) и (IX.108), соответствующих случаю **A**, вычислены вычеты

$$k_{11} = \left(\frac{m_1}{n_2'} \right)_{s=s_v}; \quad k_{22} = \left(\frac{m_2}{n_2'} \right)_{s=s_v}; \quad k_{12} = \left[\frac{\sqrt{m_1 m_2}}{n_2'} \right]_{s=s_v}, \quad (\text{IX.118})$$

где штрих при полиноме n_2 означает дифференцирование по s . Частота s_v является нулем полинома n_2 и, следовательно, общим полюсом сопротивлений z_{sk} на мнимой оси. После подстановки выражения (IX.118) в ф-лу (IX.117) оказывается, что условие вычетов выполняется со знаком равенства. По ранее приведенному выражению (VII.57) можно было предугадать этот результат, так как предполагается, что сопротивление $Z_1(s)$, как и при синтезе по методу Бруне, имеет полюсы на мнимой оси.

Итак, условия реализуемости цепи без потерь выполнены и найден метод построения соответствующего сопротивления z_{sk} . Следовательно, реализация любого положительного вещественного сопротивления в виде схемы, изображенной на рис. IX.18, всегда возможна. Предполагается, что предварительные операции, о которых шла речь при рассмотрении метода Бруне, выполнены ранее, и полученную в результате этого часть цепи можно рассматривать как подцепь общей цепи без потерь, приведенной на указанном рисунке. Таким образом, любое положительное вещественное сопротивление независимо от того, является ли оно минимально реактивной функцией и функцией минимальной реактивной проводимости или нет, всегда можно реализовать по такой схеме.

IX.7. Иллюстративные примеры

В качестве первого примера рассмотрим простую RC цепь, изображенную на рис. IX.19а, и реализуем ее сопротивление по методу Дарлингтона. Ясно, что этот пример не имеет практического значения, но он представляет некоторый теорети-

ческий интерес, так как позволяет рассмотреть RC цепь, как LC цепь, нагруженную на резистивное сопротивление. Сопротивление цепи

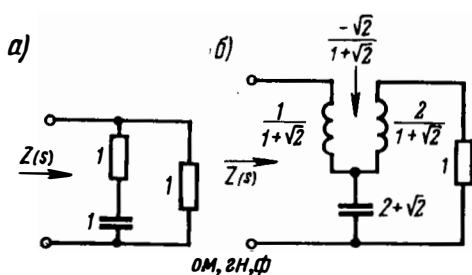


Рис. IX.19

$$Z(s) = \frac{1+s}{1+2s}. \quad (\text{IX.119})$$

Можно найти, что

$$m_1 m_2 - n_1 n_2 = 1 - 2s^2. \quad (\text{IX.120})$$

Следовательно, необходимо принять

$$m_0^2 - n_0^2 = 1 - 2s^2. \quad (\text{IX.121})$$

Тогда вспомогательный полином Гурвица имеет вид

$$P_0 = m_0 + n_0 = 1 + \sqrt{2}s. \quad (\text{IX.122})$$

Используя в выражении (IX.119) в качестве множителя полином, определяемый выражением (IX.122), получим

$$Z(s) = \frac{(1+s)(1+\sqrt{2}s)}{(1+2s)(1+\sqrt{2}s)} = \frac{1+(1+\sqrt{2})s+\sqrt{2}s^2}{1+(2+\sqrt{2})s+2\sqrt{2}s^2}. \quad (\text{IX.123})$$

Для проверки снова найдем полином $(m_1 m_2 - n_1 n_2)$, т. е.

$$m_1 m_2 - n_1 n_2 = (1-2s^2)^2. \quad (\text{IX.124})$$

В результате получился полный квадрат, что и требуется. Такая ситуация, очевидно, соответствует случаю А, и, следовательно, можно использовать выражения (IX.103) и (IX.108). Тогда

$$z_{11} = \frac{1+\sqrt{2}s^2}{(2+\sqrt{2})s} = \frac{1}{(2+\sqrt{2})s} + \frac{s}{1+\sqrt{2}}; \quad (\text{IX.125})$$

$$z_{22} = \frac{1+2\sqrt{2}s^2}{(2+\sqrt{2})s} = \frac{1}{(2+\sqrt{2})s} + \frac{2s}{1+\sqrt{2}}; \quad (\text{IX.126})$$

$$z_{12} = \frac{1-2s^2}{(2+\sqrt{2})s} = \frac{1}{(2+\sqrt{2})s} - \frac{\sqrt{2}s}{1+\sqrt{2}}. \quad (\text{IX.127})$$

Цепь, полученная методом, описанным в §VII.1, показана на рис. IX.196. Нетрудно заметить, что две индуктивности, содержащиеся в этой цепи, сильно связаны друг с другом, так как условие вычетов совместно выполняется со знаком равенства.

Далее произведем синтез сопротивления

$$Z(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + s + 4} = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2}, \quad (\text{IX.128})$$

используя методы Бруне и Дарлингтона. Начнем с использования метода Бруне. При этом, в первую очередь необходимо найти вещественную часть сопротивления при $s = j\omega$

$$\operatorname{Re}[Z(j\omega)] = \left(\frac{m_1 m_2 - n_1 n_2}{m_2^2 - n_2^2} \right)_{s=j\omega} = \frac{\omega^4 - 4\omega^2 + 4}{\omega^4 - 7\omega^2 + 6}. \quad (\text{IX.129})$$

Поскольку числитель последнего выражения равен $(\omega^2 - 2)^2$, его вещественная часть равна нулю при $\omega = \pm \sqrt{2}$. В связи с этим нет необходимости производить вычитание минимального значения вещественной части согласно выражению

(IX.56). Следовательно, сопротивления $Z(s)$ и $Z_1(s)$ представляют собой одну и ту же функцию. Далее необходимо вычислить реактивное сопротивление $Z_1(s)$ при $s = j\omega_1 = j\sqrt{2}$, а именно

$$Z_1(j\sqrt{2}) = \frac{-2 + j\sqrt{2} + 1}{-2 + j\sqrt{2} + 4} = \frac{-1 + j\sqrt{2}}{2 + j\sqrt{2}} = \frac{j(\sqrt{2} + j)}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + j)} = \frac{j}{\sqrt{2}}. \quad (\text{IX.130})$$

Несмотря на то, что X положительно, применяем метод контурных токов. Тогда

$$L_1 = \frac{X}{\omega_1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}. \quad (\text{IX.131})$$

Используя выражение (IX.59), получим

$$Z_1(s) - L_1 s = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + s + 4} - \frac{s}{2} = \frac{-s^3 + s^2 - 2s + 2}{2(s^2 + s + 4)} = \frac{(s^2 + 2)(1 - s)}{2(s^2 + s + 4)}. \quad (\text{IX.132})$$

Обратная функция имеет требуемый полюс на мнимой оси. Ее вычет в этом полюсе можно вычислить, если воспользоваться выражением (I.88). Имеем

$$k_v = \left(\frac{m_1}{n_2'} \right)_v = \left[\frac{2(s^2 + 4)}{-3s^2 - 2} \right]_{s^2 = -2} = 1 = \left(\frac{n_1}{m_2'} \right)_v = \left(\frac{2s}{2s} \right)_{s^2 = -2} = 1. \quad (\text{IX.133})$$

Вычитание согласно выражению (IX.61) дает

$$\frac{2(s^2 + s + 4)}{(s^2 + 2)(1 - s)} - \frac{2s}{s^2 + 2} = \frac{4}{1 - s} = \frac{1}{W(s)}. \quad (\text{IX.134})$$

В конечном итоге получим

$$W(s) = -\frac{s}{4} + \frac{1}{4}. \quad (\text{IX.135})$$

Соответствующие значения элементов схемы будут равны

$$L_1 = \frac{1}{2}; \quad L_2 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = 1; \quad L_3 = -\frac{1}{4}, \quad (\text{IX.136})$$

а остаток, являющийся резистивным сопротивлением, $\frac{1}{4}$ ом. Цепь, полученная после преобразования индук-

тивного T-образного звена в пару взаимно связанных индуктивностей, показана на рис. IX.20.

Эту же задачу можно решить методом Дарлингтона. Из выражения (IX.129) очевидно, что полином

$$m_1 m_2 - n_1 n_2 = s^4 + 4s^2 + 4 = (s^2 + 2)^2 \quad (\text{IX.137})$$

представляет собой полный квадрат и поэтому включать в него дополнительные множители не надо. Ситуация снова соответствует случаю **A**, и из выражений (IX.103) и (IX.108) имеем:

$$z_{11} = \frac{s^2 + 1}{s} = \frac{1}{s} + s; \quad (\text{IX.138})$$

$$z_{22} = \frac{s^2 + 4}{s} = \frac{4}{s} + s; \quad (\text{IX.139})$$

$$z_{12} = \frac{s^2 + 2}{s} = \frac{2}{s} + s. \quad (\text{IX.140})$$

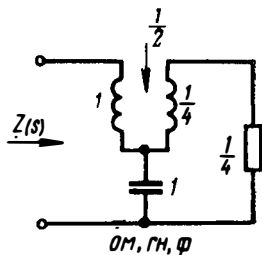


Рис. IX.20

Для того чтобы избежать применения идеального трансформатора [согласно обоснованиям, которые привели к соотношениям (VII.20)], нужно умножить уровень сопротивления схемы без потерь со стороны ее выходных зажимов (для которой известны соответствующие сопротивления) на коэффициент $\frac{1}{4}$. Иными слова-

ми, необходимо умножить сопротивление z_{22} на $\frac{1}{4}$, сопротивление z_{12} на $\frac{1}{2}$ и включить на соответствующем выходе сопротивление $\frac{1}{4}$ ом, а не 1 ом. На входное сопротивление этот процесс, очевидно, не оказывает влияния. Ясно, что полученная в результате цепь, аналогична цепи, приведенной на рис. IX.20, которая была построена по методу Бруне.

Далее рассмотрим сопротивление

$$Z(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + s + 2}, \quad (\text{IX.141})$$

лишь незначительно отличающееся от сопротивления, определяемого выражением (IX.128) из предыдущего примера, и более полно проведем синтез по методам Бруне и Дарлингтона. Сначала воспользуемся методом синтеза Бруне и составим вещественную часть

$$\text{Re}[Z(j\omega)] = \frac{\omega^4 - 2\omega^2 + 2}{\omega^4 - 3\omega^2 + 4}. \quad (\text{IX.142})$$

Минимальное значение этой вещественной части равно

$$R_1 = 0,453 \quad (\text{IX.143})$$

на частоте

$$\omega_1^2 = 2 - \sqrt{2} = 0,586; \quad \omega_1 = 0,7655. \quad (\text{IX.144})$$

Следовательно, выделяя R_1 , получим

$$Z_1(s) = Z(s) - 0,453 = \frac{0,547s^2 + 0,547s + 0,094}{s^2 + s + 2}. \quad (\text{IX.145})$$

Затем найдем

$$Z_1(j0,765) = j0,296 = j0,765L_1, \quad (\text{IX.146})$$

или

$$L_1 = \frac{0,296}{0,765} = 0,387. \quad (\text{IX.147})$$

После вычитания этой последовательной индуктивности получим

$$\begin{aligned} Z_1(s) - L_1s &= \frac{-0,387s^3 + 0,160s^2 - 0,227s + 0,094}{s^2 + s + 2} = \\ &= \frac{(s^2 + 0,586)(-0,387s + 0,160)}{s^2 + s + 2}. \end{aligned} \quad (\text{IX.148})$$

Вычет обратной функции в полюсе при $s = j\omega_1$ наиболее просто вычислить по выражению [см. ф-лу (I.88)]

$$k_v = \left(\frac{m_1}{n_2'} \right)_v = \left(\frac{s}{0,32s} \right)_{s=j\omega_1} = \frac{1}{0,32}. \quad (\text{IX.149})$$

Это выражение равно $\frac{1}{2L_2}$, следовательно,

$$L_2 = 0,16 \text{ и } C_2 = \frac{1}{L_2\omega_1^2} = \frac{1}{0,586 \times 0,16} = 10,66. \quad (\text{IX.150})$$

Осуществив вычитание в ф-ле (IX.61), получим

$$\left(\frac{s^2 + s + 2}{-0,387s + 0,160} - \frac{s}{0,16} \right) \frac{1}{s^2 + 0,586} = \frac{1}{-0,113s + 0,047} = \frac{1}{W(s)}; \quad (\text{IX.151})$$

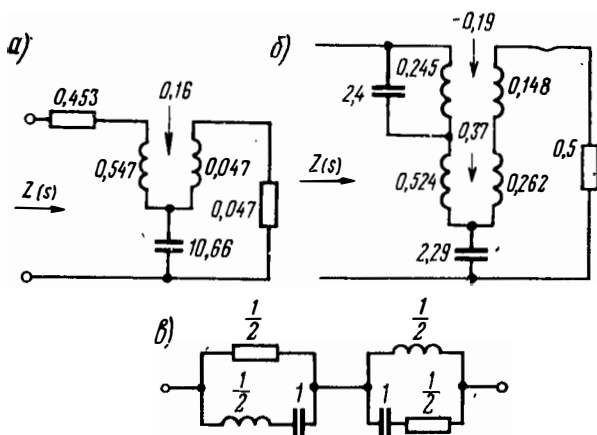
$$W(s) = -0,113s + 0,047. \quad (\text{IX.152})$$

Теперь можно записать значения элементов:

$$R_1 = 0,453; \quad L_1 = 0,387; \quad L_2 = 0,16; \quad C_2 = 10,66; \quad L_3 = -0,113. \quad (\text{IX.153})$$

При этом резистивное сопротивление нагрузки равно 0,047. Результирующая цепь показана на рис. IX.21а.

Интересно отметить, что значение сопротивления на нулевой частоте определяется суммой $0,453 + 0,047 = 0,500$; это следует также и из выражения (IX.141).



2H, Ф. Ом

Рис. IX.21

На очень больших частотах сильно связанные индуктивности (см. эквивалентную цепь, изображенную на рис. IX.15) соответствуют идеальному трансформатору, который преобразует резистивное сопротивление нагрузки 0,047 в сопротивление 0,547. Таким образом, полное входное сопротивление цепи стремится к асимптотическому значению $0,453 + 0,547 = 1$ ом, что также следует непосредственно из выражения (IX.141).

При синтезе рассматриваемого сопротивления по методу Дарлингтона, прежде всего, необходимо вычислить

$$m_1 m_2 - n_1 n_2 = (s_2 + 1)(s^2 + 2) - s^2 = s^4 + 2s^2 + 2. \quad (\text{IX.154})$$

Это выражение не является полным квадратом и поэтому необходимо принять

$$m_0^2 - n_0^2 = s^4 + 2s^2 + 2. \quad (\text{IX.155})$$

Если записать вспомогательный полином Гурвица в виде

$$P_0(s) = m_0 + n_0 = s_2 + 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2,$$

то

$$s^4 + 2s^2 + 2 = P_0(s)P_0(-s) = s^4 + 2(\omega^2 - \sigma^2)s^2 + (\omega^2 + \sigma^2)^2, \quad (\text{IX.156})$$

откуда $\omega^2 - \sigma^2 = 1$; $\omega^2 + \sigma^2 = \sqrt{2}$; $\omega^2 = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$; $\sigma^2 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$. (IX.157)

Таким образом, легко установить, что требуемый полином имеет вид

$$P_0(s) = s^2 + 0,910s + 1,414. \quad (\text{IX.158})$$

Сопоставляя его с выражением (IX.141) для сопротивления и учитывая выражения (IX.103) и (IX.108), можно найти следующие значения для сопротивлений $z_{s,k}$:

$$z_{11} = \frac{s^4 + 3,324s^2 + 1,414}{1,91s(s^2 + 1,693)} = \frac{1}{2,29s} + \frac{0,416s}{s^2 + 1,693} + 0,524s; \quad (\text{IX.159})$$

$$z_{22} = \frac{s^4 + 4,324s^2 + 2,828}{1,91s(s^2 + 1,693)} = \frac{1}{1,145s} + \frac{0,503s}{s^2 + 1,693} + 0,524s; \quad (\text{IX.160})$$

$$z_{12} = \frac{s^4 + 2s^2 + 2}{1,91s(s^2 + 1,693)} = \frac{1}{1,617s} + \frac{0,459s}{s^2 + 1,693} + 0,524s. \quad (\text{IX.161})$$

Для того чтобы избежать применения идеального трансформатора и емкости, снова целесообразно изменить уровень сопротивления на выходе схемы. После умножения сопротивления z_{22} на $\frac{1}{2}$, а сопротивления z_{12} на $\frac{1}{\sqrt{2}}$ получим цепь, изображенную на рис. IX.21б. В отличие от нее цепь, синтезированная по методу Бруне (см. рис. IX.21а), проще и содержит вместо двух только одну пару сильно связанных индуктивностей.

Этот пример является иллюстрацией значительно более простых, но менее общих методов синтеза, описанных выше в § IX.3. Если представить выражение для сопротивления (IX.141) в виде выражения (IX.45), которое удовлетворяет неравенствам (IX.47) и (IX.48), то очевидно, что данная функция соответствует условию реализации случая Б. Это позволяет разбить ее согласно выражению (IX.42) на два слагаемых. Поскольку в приведенном примере сопротивление имеет вид

$$Z(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + s + 2} = 1 - \frac{1}{s^2 + s + 2}, \quad (\text{IX.162})$$

то сравнивая записанное выражение с выражением (IX.42), видим, что

$$R_0 = 1; a_1 = 0; a_0 = -1.$$

Таким образом,

$$Z(s) = \frac{\frac{1}{2}(s^2 + 2)}{s^2 + s + 2} + \frac{\frac{s^{-1}}{2} + \frac{1}{4}}{s^{-2} + \frac{s^{-1}}{2} + \frac{1}{2}}. \quad (\text{IX.163})$$

Результирующая цепь изображена на рис. IX.21в. Нетрудно заметить, что если применяются более простые методы синтеза, то расчеты упрощаются, а получаемые цепи практически более удобны. Общие методы синтеза следует использовать лишь в том случае, если нет иного выхода или по каким-либо причинам требуется получить именно те структуры, которые дают эти методы.

IX.8. Дальнейшее рассмотрение метода Дарлингтона

Метод Дарлингтона представляет интерес лишь как средство синтеза входных сопротивлений. Его главная ценность с практической точки зрения состоит в том, что он дает особую структуру

реализации (называемую реализацией по Дарлингтону), представляющую собой четырехполюсник без потерь, нагруженный на одно резистивное сопротивление. Это обстоятельство сразу же позволяет найти способ расчета четырехполюсников без потерь по заданным передаточным характеристикам. Именно указанные особенности метода Дарлингтона делают его полезным на практике. Поскольку речь идет о синтезе входных сопротивлений, далее будут рассмотрены методы, позволяющие всегда получать практически более пригодные схемы, не содержащие сильно связанных индуктивностей или даже совсем без индуктивных связей (но за счет увеличения числа элементов цепи). Для того чтобы дать соответствующее обоснование этих методов и для последующего рассмотрения вопросов синтеза передаточных функций, целесообразно подробнее остановиться на принципах, лежащих в основе так называемой теории Дарлингтона.

В этой связи интересно сравнить цепи, изображенные на рис. IX.18 и IX.22, и попытаться ответить на вопрос, какое соотношение существует между двумя сопротивлениями $Z_1(s)$ и $Z_2(s)$, когда обе цепи без потерь одинаковы? Этот вопрос эквивалентен другому — как изменяется входное сопротивление, если в цепи без потерь переставить местами входы 1 и 2?

На поставленный вопрос легче будет ответить, если обратить внимание на то, что в этом случае сопротивления z_{11} и z_{22} цепи без потерь оказываются взаимно замененными, а сопротивление z_{12} остается без изменения. Влияние такой замены на вид сопротивления, определяемого выражением (IX.101), различно в зависимости от того, соответствует данная ситуация случаю А или случаю Б. Для случая А, как следует из выражения (IX.103), необходимо поменять местами полиномы m_1 и m_2 . Наоборот, для случая Б местами необходимо поменять нечетные части, т. е. полиномы n_1 и n_2 . Таким образом, если согласно выражению (IX.101),

$$Z_1(s) = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2}, \quad (\text{IX.164})$$

то для случая А

$$Z_2(s) = \frac{m_2 + n_1}{m_1 + n_2}, \quad (\text{IX.165})$$

а для случая Б

$$Z_2(s) = \frac{m_1 + n_2}{m_2 + n_1}. \quad (\text{IX.166})$$

Эти результаты представляют значительный интерес и могут быть использованы в ряде случаев. Например, если в соответствующей ситуации сопротивление $Z_1(s)$ синтезируется в виде

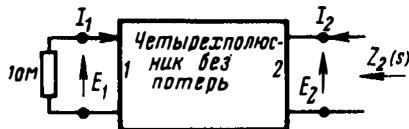


Рис. IX.22

цепной (или другой) схемы без потерь и необходимо знать, каким элементом заканчивается схема (например, каково значение последнего реактивного элемента), то сопротивление $Z_2(s)$ можно построить, не производя расчетов, а просто начав синтез с другого конца схемы¹. Ниже этот метод будет подробно рассмотрен.

По аналогии можно легко получить следующие варианты. Предположим, что в случае **A** $m_1 \equiv m_2$. Тогда из выражений (IX.164) и (IX.165) нетрудно найти, что $Z_1(s) \equiv Z_2(s)$. Последнее означает, что взаимная замена обоих входов цепи без потерь не оказывает влияния на входное или передаточное сопротивление. Цепь оказывается электрически симметричной. С другой стороны, если $n_1 \equiv n_2$ (что соответствует случаю **A**), то из выражений (IX.164) и (IX.165) следует, что сопротивления $Z_1(s)$ и $Z_2(s)$ являются обратными. Иными словами, переход к обратной цепи (образование дуальной цепи) и взаимная замена обоих входов цепи являются эквивалентными операциями. В отличие от электрически симметричной цепи, такая цепь оказывается *антисимметричной*. Эти результаты можно обобщить следующим образом.

*Для случая A: Если $m_1 \equiv m_2$, то $Z_2(s) \equiv Z_1(s)$ —
Цепь является симметричной.*

$$\text{Если } n_1 \equiv n_2, \text{ то } Z_2(s) \equiv \frac{1}{Z_1(s)} \quad \text{(IX.167)}$$

Цепь является антисимметричной.

Для случая **B** можно сделать те же выводы, но поменяв местами четную и нечетную части, т. е. полиномы m и n .

$$\text{Для случая B: Если } m_1 \equiv m_2, \text{ то } Z_2(s) \equiv \frac{1}{Z_1(s)} \quad \text{(IX.168)}$$

Цепь является антисимметричной.

*Если $n_1 \equiv n_2$, то $Z_2(s) \equiv Z_1(s)$ —
Цепь является симметричной.*

Поскольку симметричные и антисимметричные цепи имеют важное значение при практическом расчете цепей связи без потерь, целесообразно иметь возможность заранее предопределять или контролировать появление подобных специальных результатов. Свойства (IX.167) и (IX.168) позволяют установить это простыми средствами.

Можно получить некоторые дополнительные полезные свойства цепи без потерь (нагруженной на резистивное сопротивление), изображенной на рис. IX.18, если рассмотреть связь, существующую между ее входными и передаточным сопротивлениями. Есте-

¹ При этом, разумеется, сопротивление Z_1 должно быть соответствующим образом преобразовано.

ственно, что входное сопротивление цепи определяется выражением $Z_1(s) = \frac{E_1}{I_1}$, а сопротивление передачи нагруженной цепи равно $Z_{12}(s) = \frac{E_2}{I_1}$. Используя теорему Тевенина, найдем

$$Z_{12}(s) = \frac{z_{12}}{1 + z_{22}}. \quad (\text{IX.169})$$

Если предположить, что на входе цепи приложен ток I_1 , то согласно указанной теореме напряжение холостого хода на выходе цепи будет равно $I_1 z_{12}$. Ток $-I_2$ равен этому напряжению, деленному на $(1 + z_{22})$, а напряжение на нагрузке E_2 численно равно $-I_2$.

Используя выражения (IX.103) и (IX.108) для случая А, запишем

$$Z_{12}(s) \times Z_{12}(-s) = \frac{m_1 m_2 - n_1 n_2}{m_2^2 - n_2^2} = \frac{1}{2} [Z_1(s) + Z_1(-s)]. \quad (\text{IX.170})$$

Очевидно, что аналогичный результат можно получить и для случая Б. Поскольку сопротивления z_{12} и z_{22} имеют одинаковый

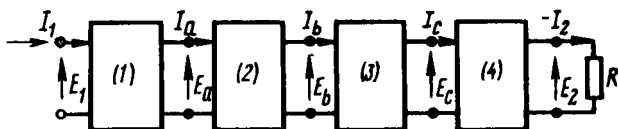


Рис. IX.23

полином знаменателя, из выражения (IX.169) следует, что конечные нули сопротивления Z_{12} являются нулями сопротивления z_{12} ; они должны соответствовать такой диаграмме расположения корней в плоскости s , которая полностью симметрична относительно вещественной и мнимой осей, так как полином числителя z_{12} является четным или нечетным полиномом. Следовательно, сопротивления $Z_{12}(s)$ и $Z_{12}(-s)$ имеют одинаковые нули, которые представляют собой нули второго порядка полинома $(m_1 m_2 - n_1 n_2)$ — второго порядка потому, что указанный полином, как было отмечено выше, должен быть полным квадратом. Кроме того, они являются нулями второго порядка четной части входного сопротивления, выраженной правой частью ур-ния (IX.170). Ясно, что полюсы сопротивления $Z_1(s)$ совпадают с полюсами $Z_{12}(s)$, так как они представляют собой собственные частоты всей цепи, приведенной на рис. IX.18.

Предположим далее, что рассматривается каскадное соединение цепей связи без потерь, нагруженное на резистивное сопротивление (рис. IX.23). Задача состоит в том, чтобы для всей этой цепи найти коэффициенты передачи по напряжению и току, выра-

женные через сопротивления или проводимости составных цепей связи.

При передаче слева направо для различных сопротивлений имеем

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \frac{E_1}{I_1}; & Z_a &= \frac{E_a}{I_a}; & Z_b &= \frac{E_b}{I_b} \\ Z_c &= \frac{E_c}{I_c}; & R &= \frac{E_2}{-I_2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.171})$$

Если использовать для обозначения сопротивлений соответствующих цепей индексы при z_{sh} , то можно записать

$$-\frac{I_2}{I_1} = \frac{z_{12}^{(1)}}{z_{22}^{(1)} + Z_a} \frac{z_{12}^{(2)}}{z_{22}^{(2)} + Z_b} \frac{z_{12}^{(3)}}{z_{22}^{(3)} + Z_c} \frac{z_{12}^{(4)}}{z_{22}^{(4)} + R} = \frac{Z_{12}}{R}, \quad (\text{IX.172})$$

где $Z_{12} = \frac{E_2}{I_1}$ — сопротивление передачи всей цепи.

С помощью теоремы Тевенина легко установить правильность этого выражения. Итак, $I_1 z_{12}^{(1)}$ — напряжение холостого хода цепи на паре зажимов a , а $z_{22}^{(1)} + Z_a$ — сопротивление, при котором указанное напряжение создает ток I_a . Следовательно, первое слагаемое в правой части ур-ния (IX.172) равно $\frac{I_a}{I_1}$, второе слагаемое равно $\frac{I_b}{I_a}$ и т. д.

Полное выражение (IX.172) показывает, что нули Z_{12} (нули сопротивления передачи полной цепи) представляют собой нули сопротивлений $z_{12}^{(1)}$, $z_{12}^{(2)}$ и т. д. Каждая подцепь вносит некоторое число нулей передачи, а вместе взятые они являются нулями сопротивления передачи полной цепи.

Может возникнуть предположение, что выражение (IX.172) имеет дополнительные нули там, где член в знаменателе, подобный $z_{22}^{(1)} + Z_a$ или $z_{22}^{(2)} + Z_b$, имеет полюсы. Однако из дальнейшего рассмотрения станет ясно, что это предположение является ошибочным. Полюсы сопротивления $z_{22}^{(1)} + Z_a$ являются полюсами $z_{22}^{(1)}$ и Z_a . Полюсы сопротивления $z_{22}^{(1)}$ являются также полюсами $z_{12}^{(1)}$, и, таким образом, первое слагаемое в правой части ур-ния (IX.172) не будет соответствовать на рассматриваемых частотах нулю. Полюсы сопротивления Z_a являются нулями выражения $z_{22}^{(2)} + Z_b$, так как они представляют собой собственные частоты цепи, изображенной на рис. IX.23, из которой выброшен первый четырехполюсник. Сопротивления Z_a и $z_{22}^{(2)} + Z_b$ являются сопротивлениями, соответствующими разрезному и прямому входам той же части цепи. Далее полюсы сопротивления $z_{22}^{(2)}$ сокращаются за счет тех же полюсов $z_{22}^{(2)}$, а полюсы сопротивления Z_b являются

нулями $z_{22}^{(3)} + Z_c$. Полюсы сопротивления $z_{22}^{(3)}$ сокращаются за счет полюсов $z_{12}^{(3)}$, а полюсы сопротивления Z_c являются нулями выражения $z_{22}^{(4)} + R$. Наконец, полюсы сопротивления $z_{22}^{(4)}$ сокращаются за счет полюсов $z_{12}^{(4)}$. Таким образом, как указывалось выше, в конце процесса нулями сопротивления Z_{12} являются только различные нули, создаваемые сопротивлениями передачи $z_{12}^{(1)}$, $z_{12}^{(2)}$, ... отдельных подцепей. Очевидно, что могут возникнуть вырожденные случаи, в которых допустимы некоторые отклонения от рассмотренной картины. Однако при разумном подходе к решению рассматриваемой задачи они не играют существенной роли.

Если теперь принять во внимание вывод, сделанный относительно выражения (IX.170), а именно, что нули сопротивления передачи цепи являются нулями четной части ее входного сопротивления, то можно заметить, что для схемы, приведенной на рис. IX.23, нули четной части сопротивления $Z_1(s) = \frac{E_1}{I_1}$ являются одновременно нулями передачи четырехполюсников 1, 2, 3, 4. Нули четной части сопротивления $Z_a(s) = \frac{E_a}{I_a}$ являются одновременно нулями передачи четырехполюсников 2, 3 и 4. Нули четной части сопротивления $Z_b(s) = \frac{E_b}{I_b}$ являются нулями передачи четырехполюсников 3 и 4. Наконец, нули четной части сопротивления $Z_c(s) = \frac{E_c}{I_c}$ являются просто нулями сопротивления $z_{12}^{(4)}$, т. е. нулями передачи последнего четырехполюсника.

Эти выводы весьма полезны, когда требуется получить каскадную реализацию входного сопротивления (см. следующий параграф). В первой цепи без потерь некоторые нули четной части ее входного сопротивления исключены и представлены как нули передачи цепи. Функция-остаток (сопротивление Z_a цепи, приведенной на рис. IX.23) имеет нули четной части, представляющие собой нули четной части сопротивления Z_1 , не создаваемые первой цепью. Нули, не выделяющиеся в процессе разложения за счет первой компонентной цепи, появляются как нули четной части функции-остатка. Различные этапы разложения соответствуют последовательным шагам, в процессе осуществления которых выделяются некоторые из общего числа нулей четной части заданной входной функции. Процесс завершается, когда не остается нулей четной части. В этом случае функция-остаток (сопротивление) вырождается в постоянную, соответствующую резистивному сопротивлению нагрузки.

Следует отметить, что все сказанное выше справедливо, когда нагрузка содержит только резистивное сопротивление. Но это не относится к разложению по Бруне, кроме особого случая, когда все нули четной части лежат на мнимой оси. При этом график четной

части, показанный на рис. IX.11, будет иметь все минимумы, равные нулю. Каскадная реализация, показанная на рис. IX.17, не будет содержать последовательных сопротивлений R_1, R_2, \dots , и полная реализация окажется эквивалентной цепи, полученной при синтезе по Дарлингтону. В подобной ситуации необходимо исследовать вещественную часть только данного сопротивления, чтобы найти его нули, расположенные на мнимой оси, так как они не сдвигаются по мере перехода от одного шага разложения к другому. Если не все, а лишь несколько минимумов вещественной части на мнимой оси равны нулю, все сказанное, тем не менее, оказывается справедливым для этих (равных нулю) минимумов.

Целесообразно также получить выражение, дуальное ур-нию (IX.172). Оно имеет вид

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{-y_{12}^{(1)}}{y_{22}^{(1)} + Y_a} \frac{-y_{12}^{(2)}}{y_{12}^{(2)} + Y_b} \frac{-y_{12}^{(3)}}{y_{22}^{(3)} + Y_c} \frac{-y_{12}^{(4)}}{y_{22}^{(4)} + G} = \frac{Y_{12}}{G}, \quad (\text{IX.173})$$

где $G = R^{-1}$, y_{sh} — известные проводимости короткого замыкания; Y_a, Y_b, \dots — величины, обратные сопротивлениям Z_a, Z_b, \dots из ур-ния (IX.172).

В некоторых случаях оказывается полезным следующее уравнение, содержащее и z - и y -параметры:

$$\frac{E_2}{I_1} = \frac{z_{12}^{(1)} Z_a}{z_{22}^{(1)} + Z_a} \frac{-y_{12}^{(2)} Y_b}{y_{12}^{(2)} + Y_b} \frac{z_{12}^{(3)} Z_c}{z_{22}^{(3)} + Z_c} \frac{-y_{12}^{(4)}}{y_{22}^{(4)} + G} = Z_{12}. \quad (\text{IX.174})$$

IX.9. Использование метода Дарлингтона в каскадном синтезе

В этом параграфе метод каскадного синтеза (который рассматривался в связи с функциями цепей без потерь в § VII.4, а для разложений по Бруне — в § IX.5) применяется для реализации положительного вещественного сопротивления согласно теории Дарлингтона.

Как указывалось выше, нули сопротивления передачи цепи без потерь соответствуют диаграмме корней в плоскости s , обладающей полной симметрией относительно вещественной и мнимой осей. В частности, эти нули могут появиться парами на вещественной оси, парами на мнимой оси или в виде последовательностей четверок в комплексной плоскости. Рассмотрим типичный этап разложения для функции, содержащей четверку нулей передачи, так как этот случай является наиболее общим.

Нули четной части входного сопротивления, которые должны возникнуть в результате рассматриваемого этапа, определяются множителями:

$$\left. \begin{aligned} t(s) &= (s - s_0)(s - \bar{s}_0) = t_+ \\ t(-s) &= (s + s_0)(s + \bar{s}_0) = t_- \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.175})$$

причем

$$s_0 = -\sigma_0 + j\omega_0; \quad \bar{s}_0 = -\sigma_0 - j\omega_0; \quad \sigma_0 > 0; \quad \omega_0 > 0.$$

Из выражения (IX.175) нетрудно видеть, что функция $t(s)$ определяет пару нулей, расположенных в левой полуплоскости, а функция $t(-s)$ — пару нулей, расположенных в правой полуплоскости.

Предполагается, что сопротивления компонентных цепей без потерь имеют ту же форму, что и сопротивления, рассмотренные в § VII.4, а именно:

$$z_{12} = \frac{Kt(s)t(-s)}{s(s^2 - s_a^2)} = K_{12}s + \frac{k_0}{s} - \frac{2k_{12}s}{s^2 - s_a^2}; \quad (\text{IX.176})$$

$$z_{11} = \dots = K_{11}s + \frac{k_0}{s} + \frac{2k_{11}s}{s^2 - s_a^2}; \quad (\text{IX.177})$$

$$z_{22} = \dots = K_{22}s + \frac{k_0}{s} + \frac{2k_{22}s}{s^2 - s_a^2}. \quad (\text{IX.178})$$

Единственное (но существенное) отличие заключается в том, что вычеты в точке $s = \infty$ не предполагаются равными друг другу. Во всех приведенных выражениях K — постоянный множитель.

Из выражения (IX.176) находим:

$$K_{12} = K; \quad (\text{IX.179})$$

$$k_0 = \frac{Kt^2(0)}{-s_a^2}; \quad (\text{IX.180})$$

$$k_{12} = \frac{Kt(s_a)t(-s_a)}{-2s_a^2}. \quad (\text{IX.181})$$

Заданное входное сопротивление имеет тот же вид, что и аналогичное сопротивление, соответствующее разложению по Бруне [см. (IX.93)]. Единственное отличие заключается в том, что в него необходимо включить полином $t(s)$, так как предполагается, что комплексные нули полинома $m_1m_2 - n_1n_2$ первоначально не являются нулями второго порядка. Следует отметить, однако, что в данном случае для получения из полинома $m_1m_2 - n_1n_2$ полного квадрата не включаются все комплексные множители нулей четной части, а лишь тот множитель, который относится к данному этапу. При описываемом методе множители вводятся постепенно, в отличие от метода, рассмотренного в § IX.6, где все нули четной

части получены на одном этапе. Таким образом, исследуемое входное сопротивление можно представить в виде

$$Z_1(s) = \frac{AP(s)}{q(s)} = \frac{A(s-s_{p1}) \dots (s-s_{pn})}{(s-s_1) \dots (s-s_n)} = \frac{AP(s)}{Q(s)}, \quad (\text{IX.182})$$

где

$$P(s) = p(s)t(s) \quad \text{и} \quad Q(s) = q(s)t(s) \quad (\text{IX.183})$$

соответственно полиномы, включающие функцию $t(s)$.

Соотношение между сопротивлениями $Z_1(s)$, z_{sk} и остаточной функцией $Z_2(s)$, как и в выражении (IX.94) для реализации по Бруне или в выражении (VII.67) для синтеза соответствующей цепи без потерь, имеет вид

$$(z_{11} - Z_1)(z_{22} + Z_2) = z_{12}^2 = \frac{K^2 t_+^2 t_-^2}{s^2 (s^2 - s_a^2)^2}. \quad (\text{IX.184})$$

Отдельные множители определяются выражениями

$$(z_{11} - Z_1) = \frac{K^2 t_+^2 t_-^2 h}{s(s^2 - s_a^2)Q} = \frac{K^2 t_+ t_- h}{s(s^2 - s_a^2)q}; \quad (\text{IX.185})$$

$$(z_{22} + Z_2) = \frac{Q}{s^2 (s^2 - s_a^2)h} = \frac{t_+ q}{s(s^2 - s_a^2)h}, \quad (\text{IX.186})$$

где $h(s)$ — полином степени $(n-2)$, так как каждый из этих множителей имеет простой полюс в точке $s = \infty$. Член t_-^2 , соответствующий нулям в правой полуплоскости, должен относиться к множителю $(z_{11} - Z_1)$. Член t_+^2 располагается так, чтобы получить полиномы остаточной функции Z_2 , степени которых на две единицы ниже, чем полиномы функции Z_1 . Поскольку член t_+ в выражении (IX.185) сокращается, очевидно, что при использовании описываемого метода нет необходимости производить включение дополнительных множителей, как это делалось в выражениях (IX.183).

Полином $h(s)$ легче найти путем решения уравнения (IX.185), для чего надо составить рациональную функцию $\frac{h}{q}$ и записать ее разложение на элементарные дроби

$$\frac{h(s)}{q(s)} = \frac{s(s^2 - s_a^2)(z_{11} - Z_1)}{K^2 t_+ t_-} = \frac{1}{K^2} \sum_{v=1}^n \frac{-s_v (s_v^2 - s_0^2) k_v}{t(s_v) t^2(-s_v)} \frac{1}{s - s_v}. \quad (\text{IX.187})$$

Здесь величины k_v являются вычетами функции $Z_1(s)$ в ее полюсах s_1, s_2, \dots, s_n . Введя обозначение

$$m_v = \frac{-s_v k_v}{t(s_v) t^2(-s_v)}, \quad (\text{IX.188})$$

получим

$$\frac{h(s)}{q(s)} = \frac{1}{K^2} \sum_{v=1}^n m_v \frac{s_v^2 - s_a^2}{s - s_v}. \quad (\text{IX.189})$$

При $s \rightarrow \infty$ эта рациональная функция вырождается в функцию вида $\frac{1}{s^2}$, так как полиномы $h(s)$ и $q(s)$ имеют степени $n - 2$ и n соответственно. Для того чтобы нагляднее уяснить поведение функции, определяемой выражением (IX.189), при большом s целесообразно записать

$$\frac{1}{s - s_v} = \frac{1}{s} \frac{1}{1 - \frac{s_v}{s}} = \frac{1}{s} \left(1 + \frac{s_v}{s} + \frac{s_v^2}{s^2} + \dots \right), \quad (\text{IX.190})$$

откуда очевидно, что

$$\sum_{v=1}^n m_v (s_v^2 - s_a^2) = 0. \quad (\text{IX.191})$$

При этом постоянный множитель полинома

$$h(s) = H (s - s_{h_1}) (s - s_{h_2}) \dots (s - s_{h_{n-2}}) \quad (\text{IX.192})$$

имеет вид

$$H = \frac{1}{K^2} \sum_{v=1}^n m_v s_v (s_v^2 - s_a^2). \quad (\text{IX.193})$$

Отличный от нуля полюс функции z_{sh} определяется из уравнения (IX.191)

$$s_a^2 = \frac{\sum m_v s_v^2}{\sum m_v}. \quad (\text{IX.194})$$

Он, очевидно, должен быть вещественным, так как члены, содержащиеся в сумме, встречаются в виде сопряженных пар. Из выражения (IX.187) видно, что сопротивление z_{11} является вещественным при вещественных значениях s . Вычеты K_{11} , k_0 и k_{11} в выражении (IX.177) должны быть также вещественными, поэтому

$$\operatorname{Re} [z_{11}(j\omega)] \equiv 0. \quad (\text{IX.195})$$

Из выражений (IX.186) и (IX.187) находим, что функция

$$\frac{1}{z_{22} + Z_2} = \frac{s (s^2 - s_a^2) h}{t_{+q}} = \frac{s^2 (s^2 - s_a^2)^2 (z_{11} - Z_1)}{K^2 t_{+}^2 t_{-}^2} \quad (\text{IX.196})$$

является аналитической в правой полуплоскости, включая мнимую ось, где ее вещественная часть положительна. Следовательно,

функция (IX.196) представляет собой п. в. ф. Аналогично можно доказать, что функция $(z_{22} + Z_2)$ также является п. в. ф. Полюсы последней в точках $s = \pm s_a$ должны лежать на мнимой оси, так как в противном случае они располагались бы в правой и левой полуплоскостях соответственно. Следовательно, величина $-s_a^2$ должна быть положительной.

Полюсы функции $(z_{22} + Z_2)$ на мнимой оси, являющиеся простыми и имеющие положительные вещественные вычеты, относятся к функции z_{22} . Остальные полюсы характеризуют остаточную функцию $Z_2(s)$, которая, следовательно, является п. в. ф. Поскольку вычеты K_{22} , k_0 и k_{22} являются вещественными и положительными, из ф-лы (IX.180) следует, что K также положительная вещественная величина; учитывая выражения (IX.179) и (IX.181), можно сделать вывод, что K_{12} и k_{12} являются положительными.

Условия вычетов

$$K_{11}K_{22} - K_{12}^2 = 0 \quad (\text{IX.197})$$

и

$$k_{11}k_{22} - k_{12}^2 = 0 \quad (\text{IX.198})$$

должны удовлетворяться, так как функция $Z_1(s)$ не имеет полюсов на мнимой оси. Эти условия в конечном счете обеспечивают также положительные вещественные значения вычетов K_{11} и k_{11} . Таким образом, найдены условия реализуемости цепи без потерь и остаточной функции.

Постоянный множитель K можно найти с помощью выражений (IX.180) и (IX.186), для чего необходимо определить

$$k_0 = \frac{Kt^2(0)}{-s_a^2} = \frac{t(0)q(0)}{-s_a^2 h(0)}. \quad (\text{IX.199})$$

Принимая во внимание, что $t(0) = |s_0|^2$, из выражения (IX.189) получим

$$K = |s_0|^2 \sum_{v=1}^n \frac{m_v}{-s_v} (s_v^2 - s_a^2). \quad (\text{IX.200})$$

При расчетах, связанных с рассматриваемым разложением, необходимо определить значения m^v по ф-ле (IX.188), s_a^2 по ф-ле (IX.194) и K по ф-ле (IX.200), затем составить рациональную функцию, определяемую ф-лой (IX.189), и по отдельным известным разложениям на элементарные дроби для функций z_{22} и $Z_2(s)$ найти выражение для $(z_{22} + Z_2)$. Используя выражения (IX.179) и (IX.181), а также условия вычетов, определяемые соотношениями (IX.197) и (IX.198), находят сопротивления z_{11} и z_{12} . После этого можно построить цепь без потерь.

Указанная цепь изображена на рис. IX.24, причем на рис. IX.24а — обычная форма цепи, полученная методом синтеза,

описанным в § VII.1, а на рис. IX.246 — измененная. Последнюю можно получить, если использовать эквивалентное преобразование цепей, приведенных на рис. IX.25а и IX.25б. Цепь, показанная на рис. IX.246, называется звеном типа Дарлингтона.

Эта цепь без потерь не обязательно всегда должна содержать две пары связанных индуктивностей. Если бычьсть из выражений (IX.176), (IX.177) и (IX.178) члены для сопротивлений z_{sh} ,

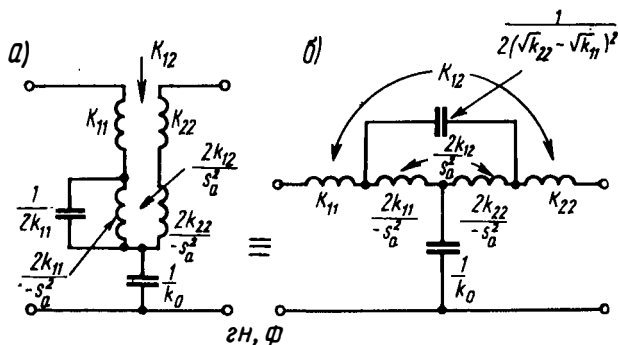


Рис. IX.24

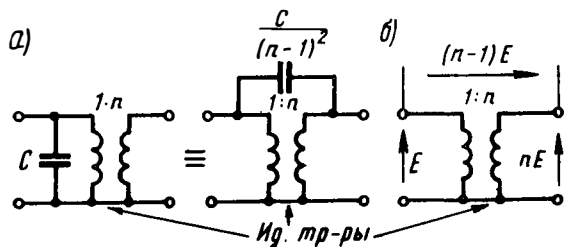


Рис. IX.25

соответствующие полюсу в точке $s = \infty$, то к оставшимся членам в этих выражениях можно применить метод реализации, описанный в § VI.6 и использованный при синтезе цепи без потерь, рассмотренной в § VII.4. Согласно выражениям (IX.104), (IX.105) и (IX.106), соответствующий коэффициент уровня сопротивления имеет вид

$$a = \frac{k_{22} + k_{12}}{k_{11} + k_{12}} = \frac{k_{22}}{k_{12}} = \frac{k_{12}}{k_{11}}. \quad (\text{IX.201})$$

Тогда сопротивления ветвей скрещенной цепи определяются выражениями

$$z_a = \frac{2(k_{11} + k_{12})s}{s^2 - s_a^2}, \quad z_b = \frac{k_0}{s} \left(1 + \frac{k_{11}}{k_{12}} \right). \quad (\text{IX.202})$$

На рис. IX.26 изображена указанная скрещенная цепь и эквивалентная ей Т-образная перекрытая цепь, которая реализуется при $C_a \geq C_b$ или при

$$2k_{12} \leq k_0. \quad (\text{IX.203})$$

Разобьем эту Т-образную перекрытую цепь пополам, умножим соответствующие параметры ее правой секции на коэффициент уровня сопротивления a , определяемый выражением (IX.201), и снова соединим вместе обе секции. Тогда для получения требуемой цепи без потерь необходимо добавить пару сильно связанных

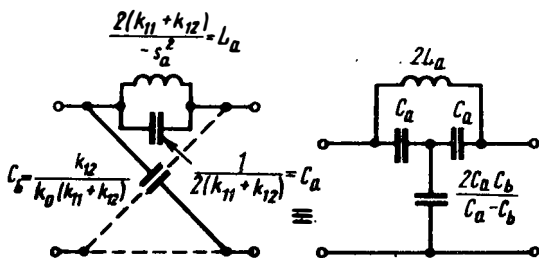


Рис. IX.26

катушек K_{11} и K_{22} (см. рис. IX.246). Таким образом, если выполняется условие (IX.203), то для реализации звена типа Дарлингтона требуется лишь одна пара сильно связанных индуктивностей. С помощью формул (IX.180) и (IX.181) условие (IX.203) можно привести к виду

$$t(s_a)t(-s_a) \leq t^2(0) = |s_0|^4. \quad (\text{IX.204})$$

Введя обозначение

$$s_a = j\omega_a \quad (\text{IX.205})$$

и используя выражение (IX.175), можно условие (IX.203) записать в виде

$$[\sigma_0^2 + (\omega_a - \omega_0)^2][\sigma_0^2 + (\omega_a + \omega_0)^2] \leq (\sigma_0^2 + \omega_0^2)^4, \quad (\text{IX.206})$$

откуда

$$\frac{\omega_a^2}{2} \leq \omega_0^2 - \sigma_0^2. \quad (\text{IX.207})$$

Геометрическая интерпретация этого условия дана в плоскости s на рис. IX.27, где видно, что нули четной части, определяемые членами $t(s)$ и $t(-s)$, должны лежать в заштрихованных областях выше и ниже гипербол, если требуется исключить одну пару сильно связанных индуктивностей.

В том случае, когда нули четной части лежат на вещественной оси, описанный метод можно использовать для функций, имеющих

четверки нулей в комплексной плоскости, если одновременно берутся четыре вещественных нуля. Квадратный член $t(s)$ в выражении (IX.175) может также соответствовать паре отрицательных вещественных нулей. Если общее число пар вещественных нулей нечетное, то одну такую пару оставляют до конца каскадного разложения. Получаемая остаточная функция содержит один отрицательный вещественный полюс, реализация которого не вызывает затруднений. Любые нули четной части на мнимой оси реализуются методом синтеза Бруне, описанным в § IX.5. Таким образом, при использовании метода каскадного синтеза обеспечивается реализация всевозможных видов нулей четной части.

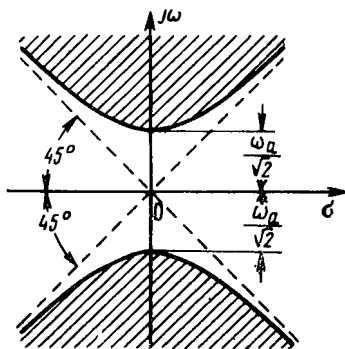


Рис. IX.27

IX.10. Метод синтеза, приводящий к цепям без взаимных индуктивностей

При некоторых ограничениях можно получить каскадную реализацию положительного вещественного сопротивления, которая не будет содержать взаимных индуктивностей. Для этого требуется изменить метод, описанный в предыдущем параграфе, с тем, чтобы он соответствовал методу синтеза четырехполюсников без потерь, рассмотренному в § VII.4. Чтобы получить перекрытую Т-образную и двойную Т-образную цепи, изображенные на рис. VII.21б, в, д, необходимо выбрать сопротивления z_{sh} в выражениях (IX.176), (IX.177) и (IX.178) так, чтобы вычеты в полюсах в точке $s = \infty$ были равны друг другу, а именно

$$K = K_{12} = K_{11} = K_{22}, \quad (\text{IX.208})$$

как это было сделано ранее в выражениях (VII.60), (VII.61) и (VII.62).

Условие (IX.208) будет выполняться, если предположить, что заданное входное сопротивление имеет полюсы в точках $s = 0$ и $s = \infty$. Поэтому вместо выражения (IX.182) будем иметь

$$Z_1(s) = \frac{Ap(s)}{q(s)} + \frac{\rho_0}{s} + \rho_\infty s. \quad (\text{IX.209})$$

Тогда это условие будет выполняться, если

$$(sz_{11})_{s=0} \geq k_0, \quad [s(z_{22} + Z_2)]_{s=0} > k_0; \quad (\text{IX.210})$$

$$\left(\frac{z_{11}}{s}\right)_{s=\infty} \geq K \quad \text{и} \quad \left(\frac{z_{22} + Z_2}{s}\right)_{s=\infty} > K. \quad (\text{IX.211})$$

С помощью выражений (IX.185) и (IX.186) последние два выражения можно привести к виду

$$0 < K - |s_0|^2 \frac{K^2 h(0)}{q(0)} \leq \frac{-s_a^2}{|s_0|^4} \rho_0 \quad (\text{IX.212})$$

и

$$0 < K - HK^2 \leq \rho_\infty, \quad (\text{IX.213})$$

а после подстановки сюда ф-л (IX.189) и (IX.193) — к виду

$$0 < K - |s_0|^2 \sum_{v=1}^n \frac{m_v}{-s_v} (s_v^2 - s_a^2) \leq \frac{-s_a^2}{|s_0|^4} \rho_0 \quad (\text{IX.214})$$

и

$$0 < K - \sum_{v=1}^n m_v s_v (s_v^2 - s_a^2) \leq \rho_\infty. \quad (\text{IX.215})$$

С некоторыми изменениями последние неравенства совпадают с неравенствами (VII.81) и (VII.87), использованными при синтезе входного и передаточного сопротивлений цепи без потерь. Учитывая полученные результаты, нетрудно теперь установить, что описанное разложение можно осуществить, если будет выполнено условие

$$-\left| \frac{s_a}{s_0} \right|^2 \rho_0 < |s_0|^2 (\hat{s}_a^2 - s_a^2) \sum_{v=1}^n \hat{m}_v < |s_0|^2 \rho_\infty, \quad (\text{IX.216})$$

где

$$\hat{m}_v = m_v w_v; \quad (\text{IX.217})$$

$$w_v = \frac{|s_0|}{-s_v} + \frac{-s_v}{|s_0|}; \quad (\text{IX.218})$$

$$\hat{s}_a^2 = \frac{\sum \hat{m}_v s_v^2}{\sum \hat{m}_v}. \quad (\text{IX.219})$$

В зависимости от конкретных условий неравенство (IX.216) может быть выполнено без обязательного требования, чтобы сопротивление $Z_1(s)$ имело полюсы в точках $s = 0$ и $s = \infty$.

Поскольку для реализации двойной T -образной цепи, не содержащей индуктивностей, требуется дополнительное условие, определяемое выражением (VII.114), ограничение (VII.119) (см. рис. IX.22) в этом случае также имеет силу. Следовательно, для того чтобы осуществить описанный здесь процесс разложения, необходимо, помимо требования, согласно которому исследуемое сопротивление должно иметь полюсы в точках $s = 0$ и $s = \infty$, чтобы нули четной части этого входного сопротивления лежали под углом не более 45° к мнимой оси в плоскости s . Если указанные условия не удовлетворяются, все же оказывается возможной реализация любого положительного вещественного входного сопротивления в виде цепи, не содержащей взаимных индуктивностей. Для этого надо использовать один из методов, описанных в главе X.



Х

ГЛАВА

Синтез входных сопротивлений цепей, не содержащих трансформаторов

Х.1. Метод Ботта и Даффина [21]

В отличие от методов, рассмотренных в предыдущей главе, в данном методе отсутствует логическое обоснование последовательности выполняемых этапов. Поэтому, используя его, трудно добиться того, чтобы последовательность этапов при получении решения представлялась естественной и полной, хотя эти этапы в конечном счете приводят к требуемому результату. Можно, однако; отметить основную причину, согласно которой целесообразно использовать некоторые первоначальные этапы рассматриваемого метода.

Прежде всего надо обратить внимание на то, что при помощи соответствующего сочетания заданных минимально реактивной функции сопротивления и минимально реактивной функции проводимости желательно получить п. в. ф., имеющую нули или полюсы на мнимой оси и содержащую полиномы, степени которых не превышают степени полиномов заданного сопротивления. В результате выделения таких полюсов на мнимой оси функцию можно упростить, а получаемый остаток — затем последовательно упрощать.

По существу, это соответствует первоначальным этапам метода синтеза по Бруне. Поскольку заданное сопротивление не имеет нулей или полюсов на мнимой оси, попытаемся преобразовать его с тем, чтобы в нем появились такие нули или полюсы. К сожалению, при использовании метода Бруне необходимые этапы преобразования создают ситуацию, которую нельзя разрешить, не прибегая к использованию сильно связанных индуктивностей. В описываемом ниже методе используются более сложные этапы преобразований. Они, хотя и позволяют полностью избежать взаимных индуктивностей, приводят к появлению двух остаточных функций вместо одной, что требует при реализации большего общего числа элементов. По-видимому, для того чтобы избежать взаимных индуктивностей, на это можно пойти, однако ряд методов, рассматриваемых в последующих параграфах настоящей

главы, позволяют достичь для некоторых функций более высоких степеней таких же результатов при значительно меньшем числе элементов, чем в методе Ботта и Даффина.

Подобно методам синтеза по Бруне и Дарлингтону метод Ботта и Даффина считается классическим; его применение впервые успешно показало, что взаимные индуктивности не являются неотъемлемой частью синтеза входного сопротивления и что их всегда можно избежать.

Перейдем к рассмотрению этого метода, для чего возьмем п. в. ф.

$$Z(s) = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^n}, \quad (X.1)$$

не имеющую нулей или полюсов на мнимой оси. Сначала, как в методе Бруне, выделим наименьшее значение R_1 вещественной части заданной функции на мнимой оси. При этом получим положительный вещественный остаток

$$Z_1(s) = Z(s) - R_1, \quad (X.2)$$

который на частоте $s_1 = j\omega_1$ является чисто реактивным и равным

$$Z_1(s_1) = jX. \quad (X.3)$$

Рассмотрим далее функцию

$$R(s) = \frac{1 - w(s)}{1 + w(s)}, \quad (X.4)$$

где

$$w(s) = \frac{1 - \frac{Z_1(s)}{Z_1(k)}}{1 + \frac{Z_1(s)}{Z_1(k)}} \frac{k + s}{k - s}. \quad (X.5)$$

В последнем выражении величина k определяется из зависимости

$$\frac{Z_1(s_1)}{Z_1(k)} = \frac{s_1}{k}, \quad \text{или} \quad Z_1(k) = \frac{X}{\omega_1} k. \quad (X.6)$$

В методе Ботта и Даффина используется ряд свойств, присущих функции $R(s)$, а именно, она:

- а) является п. в. ф.;
- б) содержит полиномы, имеющие такую же степень, как и полиномы функции $Z_1(s)$ и
- в) имеет нули на мнимой оси в точках $s = \pm j\omega_1$.

Покажем сначала, что функция $R(s)$ действительно обладает указанными свойствами, а затем, используя их, выполним процесс реализации сопротивления $Z_1(s)$.

Для доказательства принадлежности функции $R(s)$ к классу п. в. ф. воспользуемся следующим свойством положительных вещественных функций [2]. Для дробно-линейного преобразования

$$z_a = \frac{1 - z_b}{1 + z_b} \quad (X.7)$$

функция z_a представляет собой п. в. ф., если функция z_b аналитична в правой полуплоскости s и если $|z_b(j\omega)| \leq 1$ при всех вещественных значениях ω . Поэтому доказав, что функция $\omega(s)$ является аналитической в правой полуплоскости и на мнимой оси имеет величину, не превышающую единицы, тем самым мы докажем, что функция $R(s)$, определяемая выражением (X.4), принадлежит к классу п. в. ф.

Если предположить, что можно найти положительное вещественное значение k , удовлетворяющее выражению (X.6), то окажется, что функция $\omega(s)$, определяемая выражением (X.5), является аналитической в правой полуплоскости. Это объясняется тем, что в данном случае функция $Z_1(k)$ принимает положительное вещественное значение и, следовательно, функция $1 + \frac{Z_1(s)}{Z_1(k)}$ может иметь нули только в левой полуплоскости, несмотря на то, что множитель $(k - s)$ содержится в функции $1 - \frac{Z_1(s)}{Z_1(k)}$. Заметим, что в ф-ле (X.5) модуль выражения $\frac{k + j\omega}{k - j\omega}$ равен единице, а модуль остальной части этой формулы не может быть больше единицы на мнимой оси. Действительно, функция $\frac{Z_1(s)}{Z_1(k)}$ принадлежит к классу п. в. ф., а дробно-линейная функция $\omega(s)$ отображает правую половину плоскости $\frac{Z_1(s)}{Z_1(k)}$ на внутреннюю часть единичного круга в плоскости $\omega(s)$.

Рассматривая выражения (X.6), вспомним свойство п. в. ф., согласно которому угол функции $Z_1(s)$ не может быть равен углу вектора s в любом месте правой полуплоскости, за исключением той точки, где равенство выполняется тождественно (как это, очевидно, имеет место на положительной вещественной полуоси). Следовательно, при $X > 0$ выражения (X.6) будут справедливыми, если k положительное вещественное число. Когда X имеет обратный алгебраический знак, то, как и в реализации по Бруне, необходимо использовать метод узловых напряжений (т. е. перейти к проводимостям). Однако здесь использование метода контурных токов (т. е. сопротивлений) соответствует случаю $X > 0$, а не $X < 0$. Подобно функции, определяемой выражением (IX.59) (для $L_i > 0$), функция $Z_1(k) - \frac{X}{\omega} k$ может иметь только один положительный вещественный нуль, потому что ограничение, накладываемое на расположение полюсов и нулей (только в левой полуплоскости),

вызывает изменение $Z_1(\sigma)$ при увеличении σ до такой величины, что $\left| \frac{dZ_1}{d\sigma} \right|$ непрерывно уменьшается.

Упомянутое выше свойство б) функции $R(s)$ оказывается справедливым, так как функция $\omega(s)$ имеет полиномы со степенями, совпадающими со степенями полиномов функции $Z_1(s)$, ибо, как было показано, множитель $(k-s)$ выражения (X.5) сокращается. Учитывая, что определенная из выражения (X.6) величина k обеспечивает при $s = s_1$ выполнение условия $\omega(s) = 1$, получаем, что функция $R(s)$ обладает свойством в).

Для перехода к реализации необходимо выразить сопротивление $Z_1(s)$ через функцию $R(s)$. Этот этап упрощается, если учесть, что преобразование, соответствующее выражению (X.7), допускает собственную инверсию (т. е. справедливо соотношение $z_b = \frac{1-z_a}{1+z_a}$).

Применяя обратное преобразование к выражению (X.4), подставив полученное выражение в ф-лу (X.5) и умножив обе части полученного уравнения на $\frac{k-s}{k+s}$, получим

$$\frac{1 - \frac{Z_1(s)}{Z_1(k)}}{1 + \frac{Z_1(s)}{Z_1(k)}} = \frac{1-R}{1+R} \frac{1 - \frac{s}{k}}{1 + \frac{s}{k}} = \frac{R + \frac{s}{k}}{1 + \frac{sR}{k}} \frac{1 - \frac{s}{k}}{1 + \frac{s}{k}} = \frac{R + \frac{s}{k}}{1 + \frac{sR}{k}} \frac{1 - \frac{s}{k}}{1 + \frac{s}{k}}, \quad (\text{X.8})$$

или

$$\frac{Z_1(s)}{Z_1(k)} = \frac{R + \frac{s}{k}}{1 + \frac{sR}{k}} = \frac{R}{1 + \frac{sR}{k}} + \frac{\frac{s}{k}}{1 + \frac{sR}{k}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{s}{k}} + \frac{1}{\frac{k}{s} + \frac{1}{R}}. \quad (\text{X.9})$$

Поскольку функция $R(s)$ имеет нули на мнимой оси в точках $s = \pm j\omega_1$, то обратная функция имеет там полюсы. Следовательно, можно записать

$$\frac{1}{R(s)} = \frac{as}{s^2 + \omega_1^2} + r(s), \quad (\text{X.10})$$

где $r(s)$ — положительная вещественная функция-остаток, содержащая полиномы, степени которых на две единицы ниже, чем степени соответствующих полиномов функции $Z_1(s)$. Нетрудно заметить, что выражение (X.9) дает теперь конфигурацию схемы,

изображенную на рис. X.1а, в которой Z'_2 и Z''_2 — остаточные функции сопротивлений, определяемые выражениями

$$Z'_2 = \frac{1}{r(s)} \text{ и } Z''_2 = r(s). \quad (\text{X.11})$$

Для того чтобы найти функцию $Z_1(s)$, уровень сопротивления этой цепи необходимо умножить на $Z_1(k)$, а чтобы найти сопротивление $Z(s)$, последовательно со схемой нужно включить резистивное сопротивление R_1 .

Из анализа обеих приведенных функций-остатков можно заметить, что после того, как для каждой из них проведен второй аналогичный цикл реализации, получатся четыре остатка; после проведения следующего цикла — восемь и т. д. Число функций-остатков возрастает по экспоненте при увеличении числа последующих циклов, необходимых для приведения данной функции к остаточной, представляющей собой постоянную. Поскольку каждый цикл уменьшает степень n полиномов выражения (X.1) на две единицы, число последующих циклов, необходимых для

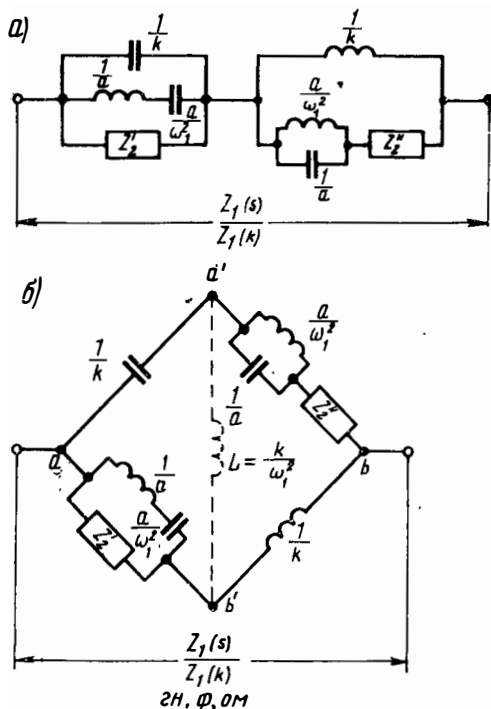


Рис. X.1

выполнения операции приведения функции, составляет $\frac{n}{2}$ (просто ради, предполагается, что n — четные). На последнем из этих

циклов функция будет содержать $2^{\frac{n}{2}}$ звена, подобных двум звеньям цепи, изображенной на рис. X.1а, причем в каждом из них используются три реактивных элемента. Общее число реактивных элементов равно

$$3 \left(2^{\frac{n}{2}} + 2^{\frac{n}{2}-1} + \dots + 2 \right). \quad (\text{X.12})$$

Для $n = 6$ получим 42 реактивных элемента и 8 резистивных; для $n = 8$ они будут соответственно равны 90 и 16; для $n = 10$ — 186

и 32 и т. д. Следовательно, за возможность обойтись без взаимных индуктивностей с помощью описанного метода приходится платить очень дорогой ценой.

В этой связи Ф. М. Реза [22] и другие авторы отмечают, что один реактивный элемент в цепи Ботта и Даффина, приведенной на рис. X.1а, является избыточным. Это легко увидеть, если указанную цепь вычертить заново, в виде моста Уитстона, как показано на рис. X.1б. Тогда ветвь, соединяющая точки $a'—b'$, может быть опущена, а любое требуемое сопротивление — присоединено к этим точкам. В качестве такого сопротивления можно использовать индуктивность L

(пунктирная линия), которая вместе с емкостью, включенной в ветви $a—a'$, дает резонанс на частоте $s = j\omega_1$. Используя эквивалентность цепей, изображенных на рис. X.2, и соединая соответствующим образом параллельные резонансные LC контуры, получаем новую схему моста, показанную на рис. X.3.

Проделанные операции позволяют до некоторой степени уменьшить число необходимых в данном случае элементов цепи, однако оно все еще является экспоненциальной функцией степени n полинома сопротивления, определяемого выражением (X.1). Следовательно, метод остается, по существу, неэкономичным.

Реза подчеркивает в своих работах, что реализацию по Ботту и Даффину можно получить и другим способом, если использовать преобразование цепи Бруне в цепь Ботта и Даффина, применяя соответствующие зависимости. При использовании нескольких последовательных циклов в этом процессе удастся обойтись без некоторых громоздких вычислений. Как будет показано ниже, существует ряд способов получения результатов, эквивалентных тем, какие дает метод Ботта и Даффина.

Между прочим, интересно отметить, что выражение (X.6) как функция от переменной k всегда имеет корни $k = \pm s_1$ на мнимой оси. Когда сопротивление $Z(s)$ содержит полиномы степени n [см.

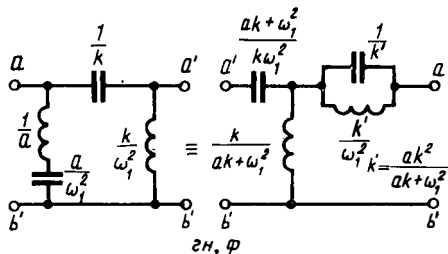


Рис. X.2

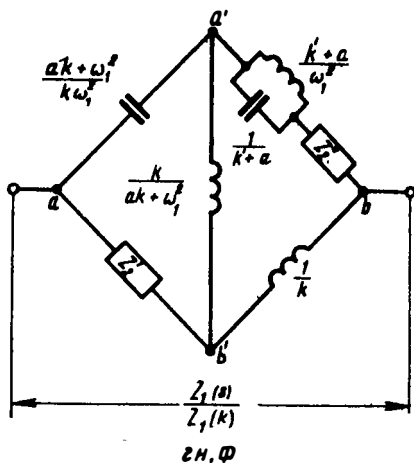


Рис. X.3

выражение (X.1)], то оказывается, что выражение (X.6) представляет собой полином степени $(n + 1)$. Однако поскольку два из корней всегда известны, необходимо сосредоточить внимание на определении лишь одного положительного вещественного корня полинома степени $(n - 1)$. Если учесть известную зависимость между коэффициентами и корнями уравнения, а также то обстоятельство, что два из этих корней определяются величинами $k = \pm j\omega_1$, то при $n = 2$ получается значение k , равное отрицательному значению коэффициента при квадратном члене кубического уравнения (X.6).

В качестве примера рассмотрим сопротивление

$$Z(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + s + 4}, \quad (\text{X.13})$$

которое в § IX.7 [см. выражение (IX.128)] служит иллюстрацией методов Бруне и Дарлингтона и реализует схему, приведенную на рис. IX.20. Вначале можно использовать полученные в главе IX результаты, согласно которым вещественная часть функции $Z(j\omega)$ равна нулю при $\omega_1 = \pm \sqrt{2}$, а значение функции $Z_1(s)$ при этой частоте [см. выражение (IX.130)] равно $\frac{j}{\sqrt{2}}$. Значение $X = \frac{1}{\sqrt{2}}$ положительно, и таким образом для реализации по Ботту и Даффину целесообразно использовать метод контурных токов. Имеем

$$\frac{X}{\omega_1} = \frac{1}{2}. \quad (\text{X.14})$$

Тогда выражение (X.6) принимает вид

$$2(k^2 + k + 1) = k(k^2 + k + 4),$$

или

$$k^3 - k^2 + 2k - 2 = 0. \quad (\text{X.15})$$

Используя приведенное в § IX.7 свойство корней уравнения (X.15), находим, что в рассматриваемом примере требуемым корнем этого уравнения является $k = 1$. Вычислим

$$Z_1(k) = \frac{1}{2}. \quad (\text{X.16})$$

Из выражения (X.5) находим

$$w(s) = \frac{-s^2 - s + 2}{3s^2 + 3s + 6} \frac{1 + s}{1 - s} = \frac{s^2 + 3s + 2}{3s^2 + 3s + 6}, \quad (\text{X.17})$$

а из выражения (X.4) —

$$R(s) = \frac{s^2 + 2}{2s^2 + 3s + 4}. \quad (\text{X.18})$$

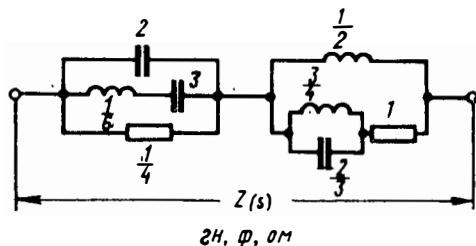
Эта функция имеет в качестве требуемых нули на мнимой оси в точке $s = \pm j\sqrt{2}$. Согласно выражению (X.9) можно записать

$$2Z_1(s) = \frac{1}{\frac{2s^2 + 3s + 4}{s^2 + 2} + s} + \frac{1}{\frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{2s^2 + 3s + 4}{s^2 + 2}}}. \quad (\text{X.19})$$

В результате получим реализацию сопротивления $Z_1(s) = Z(s)$, изображенную на рис. X.4.

В качестве второго примера рассмотрим функцию

$$Z(s) = \frac{s^2 + s + 8}{s^2 + 2s + 2}. \quad (\text{X.20})$$



2H, φ, ом

Рис. X.4

Нетрудно видеть, что вещественная часть ее равна нулю в точке $s_1 = \pm j2$. Отсюда снова имеем $R_1 = 0$ и $Z_1(s) = Z(s)$. Находим

$$Z_1(s_1) = \frac{4 + j^2}{-2 + j4} = -j, \quad (\text{X.21})$$

так что $X = -1$. Далее необходимо перейти к методу узловых напряжений, т. е. к проводимости $Y_1(s) = \frac{1}{Z_1(s)}$. Тогда

$$Y_1(s_1) = jB = j. \quad (\text{X.22})$$

Следовательно, получаем положительные значения $B = 1$ и $\frac{B}{\omega_1} = \frac{1}{2}$. Выражение (X.6) принимает вид

$$Y_1(k) = \frac{k^2 + 2k + 2}{k^2 + k + 8} = \frac{k}{2},$$

или

$$k^3 - k^2 + 4k - 4 = 0. \quad (\text{X.23})$$

Таким образом, в качестве требуемого положительного вещественного корня снова получаем $k = 1$.

Вычислим далее

$$Y_1(k) = Y_1(1) = \frac{1 + 2 + 2}{1 + 1 + 8} = \frac{1}{2}, \quad (\text{X.24})$$

и в соответствии с выражением (X.5) составим функцию

$$\omega(s) = \frac{4 - 3s - s^2}{12 + 5s + 3s^2} \frac{1 + s}{1 - s} = \frac{s^2 + 5s + 4}{3s^2 + 5s + 12}. \quad (\text{X.25})$$

Тогда из выражения (X.4) имеем

$$R(s) = \frac{s^2 + 4}{2s^2 + 5s + 8}. \quad (\text{X.26})$$

И, наконец, используя выражение (X.9), находим

$$\frac{Y_1(s)}{Y_1(k)} = 2Y_1(s) = \frac{1}{s + \frac{2s^2 + 5s + 8}{s^2 + 4}} + \frac{1}{\frac{1}{s} + \frac{s^2 + 4}{2s^2 + 5s + 8}}, \quad (\text{X.27})$$

откуда для сопротивления $Z(s)$, определяемого выражением (X.20), получим реализацию, изображенную на рис. X.5.

X.2. Метод Мяты [14]

Из выражения (X.9) ясно, что метод Ботта и Даффина, по существу, приводит к разделению заданного сопротивления на аддитивные компоненты, каждый из которых в отдельности удовлетворяет определенным особым условиям, допускающим их реализацию в виде простых цепей. Однако, как уже отмечалось, этот метод не может обеспечить полного понимания механизма, посредством которого возможно указанное разделение заданного сопротивления.

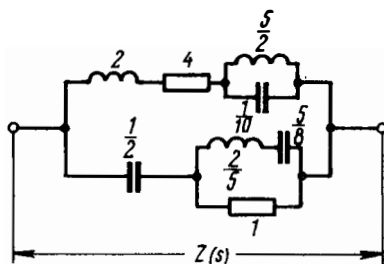
Метод, предложенный Мяты, хотя и имеет определенные ограничения и поэтому не обладает такой общностью как метод Ботта и Даффина, ближе связан с проблемой разделения сопротивления на аддитивные компоненты и, следовательно, проливает больший свет на механизм синтеза цепей, не содержащих трансформаторов. При разделении заданного сопротивления по Мяты используется его вещественная или четная часть. Это вызвано тем, что рассмотренные в § VIII.1 методы построения сопротивления по его четной части вместе с принципами метода Дарлингтона, изложенного в § IX.8, позволяют, используя свойства вещественной части, точно сформулировать условия, достаточные для реализации цепей, не содержащих трансформаторов. Рассмотрим метод Мяты.

Допустим, что задано сопротивление, определяемое выражением (X.1), не имеющее нулей или полюсов на мнимой оси. Запишем это сопротивление в виде

$$Z(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2}. \quad (\text{X.28})$$

Его вещественная часть при $s = j\omega$ определяется выражением

$$\operatorname{Re} [Z(j\omega)] = \left(\frac{m_1 m_2 - n_1 n_2}{m_2^2 - n_2^2} \right)_{s=j\omega} = \frac{A_0 + A_1 \omega^2 + \dots + A_n \omega^{2n}}{B_0 + B_1 \omega^2 + \dots + B_n \omega^{2n}}. \quad (\text{X.29})$$



гн, ф, ом

Рис. X.5

Обозначив в нем сокращенно полином знаменателя через $B(\omega^2)$, представим вещественную часть в виде аддитивных составляющих

$$\operatorname{Re} [Z(j\omega)] = \frac{A_0}{B(\omega^2)} + \frac{A_1\omega^2}{B(\omega^2)} + \frac{A_2\omega^4}{B(\omega^2)} + \dots + \frac{A_n\omega^{2n}}{B(\omega^2)}. \quad (\text{X.30})$$

Можно показать, что каждый из членов правой части выражения (X.30), рассматриваемый как вещественная часть отдельного (компонентного) сопротивления (в предположении, что коэффициенты A_0, \dots, A_n — положительны), соответствует сопротивлению, которое можно легко реализовать в виде цепи без взаимных индуктивностей. Последовательное соединение таких отдельных реализаций, очевидно, и дает требуемую реализацию функции $Z(s)$.

Для того чтобы понять идею метода, разберемся вначале в следующем вопросе. Если каждый член выражения (X.30) рассматривается как вещественная часть компонентного сопротивления (предполагая снова, что все коэффициенты A_k — положительны), то каковы особые свойства (если они вообще имеются) компонентных сопротивлений с такими вещественными частями?

Ответ на этот вопрос можно получить, исследовав характер и распределение нулей вещественных частей непосредственно из выражения (X.30). Легко заметить, что его первый член в точке $s = \infty$ имеет n нулей второго порядка, второй член в точке $s = 0$ — один двойной нуль и в точке $s = \infty$ — $(n - 1)$ нулей, третий член в точке $s = 0$ — два нуля второго порядка и в точке $s = \infty$ — $(n - 2)$ нулей, и, наконец, последний член в точке $s = 0$ — n нулей второго порядка. Таким образом, слагаемые выражения (X.30), рассматриваемые как вещественные части соответствующих сопротивлений, имеют нули второго порядка, расположенные только в точках $s = 0$ и $s = \infty$, причем в любом случае общее их число равно n . Распределение этих нулей между точками $s = 0$ и $s = \infty$ все время изменяется так, что все они либо располагаются в первой из указанных точек, либо во второй.

Когда вещественная часть сопротивления равна нулю в какой-то точке мнимой оси, то из этого, конечно, еще не следует, что общее сопротивление равно нулю. Однако, когда точка на мнимой оси соответствует точке $s = 0$ или $s = \infty$, то общее сопротивление равно нулю, так как в любом случае (при отсутствии полюсов на мнимой оси) его мнимая часть в этих точках равна нулю. Следовательно, минимально реактивное сопротивление должно быть чисто вещественным в точках $s = 0$ и $s = \infty$. Если его вещественная часть в этих точках равна нулю, то общее сопротивление также должно там равняться нулю. Поэтому компонентные сопротивления, которым соответствуют слагаемые выражения (X.30), будут иметь нули в точках $s = 0$ и (или) $s = \infty$. Но возникает вопрос: можно ли полностью разложить эти сопротивления на простые члены?

Именно в этом случае метод Дарлингтона, изложенный в § IX.8, дает исчерпывающий ответ на поставленный вопрос.

Когда используют каскадную реализацию сопротивления в виде схемы, изображенной на рис. IX.23, то из метода Дарлингтона следует, что каждая компонентная цепь без потерь обеспечивает один ряд нулей из общего их количества, содержащихся в четной части (вещественной части на мнимой оси) данного сопротивления. Таким образом, цепь, соответствующая первому циклу разложения, дает один нуль или пару четверок нулей и остаток, четная часть которого содержит остальные нули четной части. Следующая цепь в разложении обеспечивает другой ряд нулей из этих нулей остатка и второй остаток, содержащий остаточные нули четной части, и т. д.

Применяя такое рассуждение, например, к вещественной части, определяемой первым членом выражения (X.30), можно предсказать, что соответствующее сопротивление будет иметь нуль в точке $s = \infty$, а обратное ему сопротивление (т. е. проводимость) — полюс в той же точке. При выделении этого полюса в виде параллельной емкости полный цикл разложения дает вырожденный случай. Соответствующая параллельная емкость представляет собой первый четырехполюсник без потерь в цепи, приведенной на рис. IX.23. Остаточная проводимость после выделения полюса в точке $s = \infty$ даст четную часть, которая все еще имеет в данной точке $(n - 1)$ нулей второго порядка. Это объясняется тем, что до сих пор был вычтен или «использован» только один из первоначального количества n нулей второго порядка в точке $s = \infty$. Поскольку остаточная проводимость является функцией минимально реактивной проводимости, она должна иметь там нуль, а обратная ей величина (т. е. остаточное сопротивление) — полюс. Выделение последнего в виде последовательной индуктивности составляет операцию второго этапа разложения, причем соответствующая ветвь, содержащая последовательную индуктивность, является компонентным четырехполюсником без потерь, создаваемым на указанном втором этапе.

Теперь остаточная функция имеет четную часть с $(n - 2)$ нулями второго порядка в точке $s = \infty$, где, будучи минимально реактивным сопротивлением, она должна равняться нулю. Обратная ей величина (проводимость) должна иметь полюс в этой точке; выделение ее в виде параллельной емкости, как и в описанном выше вырожденном этапе разложения, приводит к завершению третьего этапа. Далее процесс продолжается аналогичным образом, причем получается ряд чередующихся последовательных индуктивных и параллельных емкостных ветвей. Полное число их равно n и числу нулей второго порядка, содержащихся в первоначальной вещественной части. После того, как найден последний из этих нулей, остаток сводится к постоянной, потому что его четная часть не имеет больше нулей.

Полное разложение состоит из простой неуравновешенной цепной схемы (с последовательно включенными индуктивностями L и параллельно включенными емкостями C), нагруженной на рези-

тивное сопротивление. Общее число индуктивностей и емкостей составляет n . В этом процессе разложения по мере перехода от одного этапа разложения к другому нами поочередно использовался то метод контурных токов, то метод узловых напряжений, и наоборот. Следовательно, к описанному процессу разложения применительно выражение (IX.174).

Следует обратить особое внимание на то, что, хотя вещественная часть, определяемая первым членом выражения (X.30), в точке $s = \infty$ имеет n нулей второго порядка, соответствующее ей сопротивление может иметь в данной точке только один простой нуль, так как нули п. в. ф. на мнимой оси должны быть простыми. Заметим, что величина, обратная этому сопротивлению, имеет в точке $s = \infty$ только простой полюс. Когда он выделен, следующий остаток снова имеет там простой нуль. Перейдя к обратной величине остатка и выделив его полюс в точке $s = \infty$, получим следующий остаток, который будет иметь в той же точке другой простой нуль и т. д. Очевидно, первоначальное сопротивление, соответствующее вещественной части, определяемой первым членом выражения (X.30), имеет более сложный вид, чем сопротивление с простым нулем в точке $s = \infty$. Таким образом, рассматриваемое сопротивление обладает всеми свойствами, перечисленными выше, причем весьма интересно, что все это можно определить только по характеру вещественной части. Теория Дарлингтона является действительно замечательной и полезной теорией!

Второй член выражения (X.30) имеет в точке $s = 0$ один нуль второго порядка; остальные его нули находятся в точке $s = \infty$. Сопротивление, соответствующее этой вещественной части, имеет простые нули в точках $s = 0$ и $s = \infty$. Обратная функция имеет в них простые полюсы, и если выделить их в виде параллельных индуктивных и емкостных ветвей, то остаток снова будет иметь простой нуль в точке $s = \infty$.

С этого момента процесс разложения совпадает с описанным выше процессом разложения сопротивления, соответствующего первому члену выражения (X.30). В результате снова получится простая неуравновешенная цепная схема, содержащая по одной индуктивности и емкости в каждой из ветвей и нагруженная на резистивное сопротивление. Общее число реактивных элементов цепи равно n , все последовательные ветви содержат индуктивности, а все (кроме одной) параллельные ветви — емкости.

При разложении указанного второго компонентного сопротивления на первом этапе нет необходимости выделять полюс в точке $s = 0$, а нужно поступать так же, как и в случае первого компонентного сопротивления, т. е. выделять только параллельные емкости и последовательные индуктивности, причем критическая частота будет соответствовать только точке $s = 0$. Эта критическая частота находится в каждой из функций-остатков, и ее можно выделить на любом из выбранных этапов полного разложения. Если для данной частоты выделить параллельную ветвь, то она

будет соответствовать индуктивности (как и в случае, описанном в предыдущем параграфе), а при выделении последовательной ветви — емкости. Нетрудно видеть, что для сопротивления, соответствующего второму члену выражения (X.30), возможно несколько различных разложений. Все они включают одинаковое общее число элементов, но величины их оказываются различными, ввиду чего одно разложение может оказаться предпочтительнее другого.

Третий член выражения (X.30) подобно второму снова соответствует сопротивлению, которое имеет простые нули в точках $s = 0$ и $s = \infty$. Но если выделить параллельную индуктивность и параллельную емкость, как при разложении второго компонентного сопротивления, то для третьего члена оказывается, что остаточная функция (проводимость) снова имеет нули в точках $s = 0$ и $s = \infty$. Значит, из обратной ей функции можно выделить последовательную индуктивность и последовательную емкость. Следующий остаток (сопротивление) имеет теперь нуль только в точке $s = \infty$, так как на этом этапе существуют два нуля четной части в точке $s = 0$ (а также два нуля в точке $s = \infty$) и остаются только $(n - 4)$ нуля четной части второго порядка. Таким образом, рассматриваемая цепная схема содержит в данном случае лишь одну параллельную индуктивность и одну последовательную емкость, а остальные ветви — последовательные индуктивности или параллельные емкости, как и в цепной схеме, реализующей первое компонентное сопротивление.

Аналогично описанному случаю второго компонентного сопротивления, можно различными способами изменять процедуру разложения, выделяя на различных этапах общего разложения две ветви, соответствующие нулям передачи в точке $s = 0$. Значит, обе эти ветви могут стать последовательными емкостями или параллельными индуктивностями, а не последовательной емкостью и параллельной индуктивностью соответственно, как было в предыдущем параграфе. В процессе синтеза в любом случае общее число реактивных элементов снова равно n , и реализация имеет форму простой неуравновешенной цепной схемы, нагруженной на резистивное сопротивление.

Наконец, последний член выражения (IX.30) соответствует сопротивлению, разложение которого приводит к цепной схеме, содержащей только последовательные емкости и параллельные индуктивности, так как это разложение должно дать нули четной части лишь в точке $s = 0$.

При рассмотрении общего числа элементов, необходимых в такой реализации, важно отметить, что можно всегда выделить один из $n + 1$ членов выражения (X.30) посредством вычитания из функции $Z(s)$ или из ее вещественной части, определяемой выражением (X.29), соответствующей постоянной R_0 . В результате вычитания, очевидно вместо коэффициентов A_0, \dots, A_n получатся величины $(A_0 - R_0 B_0), (A_1 - R_0 B_1), \dots$. Постоянная R_0 выбирается

достаточно большой с тем, чтобы сделать наименьший из новых коэффициентов равным нулю.

При использовании данного метода общее число реактивных элементов в реализации сопротивления равно n^2 , где n — степень полинома функции $Z(s)$. По сравнению с общим числом реактивных элементов, необходимых при использовании метода Ботта и

Даффина, которое составляет $5(2^{\frac{n}{2}-1} + 2^{\frac{n}{2}-2} + \dots + 2^0)$, метод Мията (как можно было до сих пор судить) не дает никаких преимуществ до тех пор, пока степень $n \geq 8$. Однако при больших значениях n метод Ботта и Даффина применять не следует. Например, при $n = 20$ он требует 5115 реактивных элементов по сравнению с 400, используемыми в описанном выше методе Мията. В этой связи необходимо, конечно, постоянно помнить о том, что метод Мията обладает ограничением, согласно которому все коэффициенты полинома $(m_1 m_2 - n_1 n_2)_{s=j\omega}$ должны быть положительными. Рассмотрим подробнее указанное ограничение.

Достаточное условие, требующее, чтобы все коэффициенты A_0, \dots, A_n были положительными, легко определяется с учетом того, что полином Гурвица имеет положительные коэффициенты. Таким образом, если полином

$$A(\omega^2) = A_0 + A_1 \omega^2 + \dots + A_n \omega^{2n} \quad (\text{X.31})$$

не имеет нулей в правой полуплоскости ω^2 , то коэффициенты A_0, \dots, A_n , безусловно, являются положительными. С другой стороны, если полином

$$A(-s^2) = m_1 m_2 - n_1 n_2 \quad (\text{X.32})$$

не имеет нулей в левой полуплоскости s^2 , то коэффициенты A_0, \dots, A_n также положительны. Левая полуплоскость s^2 отображается в область s плоскости, содержащей все точки, которые лежат на прямой, расположенной не более чем под углом $\pm 45^\circ$ к мнимой оси. Поэтому коэффициенты полинома (X.31) будут, разумеется, положительными до тех пор, пока не окажется нулей четной части данного сопротивления $Z(s)$, лежащих на прямой, расположенной ближе, чем под углом 45° к мнимой оси.

Эти коэффициенты могут все еще быть положительными и тогда, когда некоторые нули четной части лежат ближе к мнимой оси, чем допускает упомянутое достаточное условие. Последнее, однако, будет выполняться и в том случае, если нули четной части, относительно близко расположенные от мнимой оси, начнут удаляться от нее, причем они полностью исчезают, как только одна пара нулей четной части попадет на мнимую ось.

С грубым приближением можно сказать, что если у полинома (X.32) некоторые из нулей будут расположены выше линии, наклоненной в плоскости s под углом 45° , то, тем не менее, все коэффициенты полинома (X.31) могут быть положительными, если существует достаточное число нулей, расположенных ниже указанной

линии, которые обеспечивают эффект компенсации. Следовательно, когда полином (X.31) имеет некоторые отрицательные коэффициенты [им никогда не может быть коэффициент A_0 или A_n , так как вещественная часть функции $Z(s)$, принадлежащая, по предположению, к классу п. в. ф., должна быть положительной при $\omega = 0$ и $\omega = \infty$], можно соответствующим выбором множителей преобразовать вещественную часть выражения (X.29) и, таким образом, осуществить требуемую компенсацию¹.

Описанный метод включения дополнительных множителей оказывается непригодным, если некоторые нули четной части функции $Z(s)$ расположены на мнимой оси, поскольку число необходимых компенсирующих множителей стремится к бесконечности по мере того, как одна или несколько пар нулей четной части приближаются к этой оси. В любом случае процесс компенсации увеличивает и число членов в вещественной части выражения (X.30), и степень полинома $B(\omega^2)$, появляющегося в каждом члене; следовательно, число требуемых элементов быстро возрастает. Очевидно, что в таких случаях необходимо найти оптимальный вариант использования метода Мията. Ниже рассматривается такая возможность.

Целесообразно дать несколько примеров, иллюстрирующих приведенные выше случаи. Пусть задано сопротивление

$$Z(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{2}s + 1}{s^2 + 2s + 1}, \quad (\text{X.33})$$

для которого находим полином

$$m_1 m_2 - n_1 n_2 = s^4 + s^2 + 1. \quad (\text{X.34})$$

Далее получаем

$$A(\omega^2) = 1 - \omega^2 + \omega^4. \quad (\text{X.35})$$

Поскольку полином, определяемый выражением (X.34), дает четверку нулей, лежащих на единичной окружности под углом 30° к мнимой оси, то можно предсказать, что полином $A(\omega^2)$ будет содержать отрицательный коэффициент. Проведем процесс включения множителей, для чего умножим выражение (X.35) на $(a + \omega^2)$, т. е.

$$(1 - \omega^2 + \omega^4)(a + \omega^2) = a + (1 - a)\omega^2 + (a - 1)\omega^4 + \omega^6. \quad (\text{X.36})$$

Для получения требуемого результата оказывается достаточным один множитель, причем непосредственно видно, что в качестве постоянной a необходимо выбрать единицу. Нетрудно заметить, что в сопротивлении, определяемом выражением (X.33), появляется множитель $(s + 1)$, и, следовательно; выражение (X.30) примет вид

$$\text{Re}[Z(j\omega)] = \frac{1}{B(\omega^2)} + \frac{\omega^6}{B(\omega^2)}, \quad (\text{X.37})$$

где

$$B(\omega^2) = [(1 + s)^3(1 - s)^3]_{s=j\omega}. \quad (\text{X.38})$$

¹ Этот вопрос рассмотрен в приложении 1, в конце книги.

Последнее выражение получено исходя из того, что знаменателем сопротивления (X.33) является полином $(1+s)^2$ и, кроме того, благодаря включению множителя $(1+s)$.

С учетом выражения (X.37) для вещественной части сопротивления, определяемое выражением (X.33), запишется в виде

$$Z(s) = Z_0(s) + Z_6(s). \quad (X.39)$$

Компонентные сопротивления этого выражения можно теперь составить из соответствующих вещественных частей выражения (X.37), используя любые методы, описанные в § VIII.1. В соответствии с методом Геверца для первого члена находим

$$Z_0(s) = \frac{\frac{3}{8}s^2 + \frac{9}{8}s + 1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}. \quad (X.40)$$

Это сопротивление в соответствии с методом построения сопротивлений по Мията (также описанному в указанном параграфе) можно рассматривать как вспомогательное сопротивление вида

$$Z'(s) = \frac{P'(s)}{Q(s)} = \frac{m'_1 + n'_1}{m_2 + n_2}, \quad (X.41)$$

поскольку условие $m'_1 m_2 - n'_1 n_2 = 1$, характеризующее его, очевидно, выполняется при структуре первого члена, заданного выражением (X.37). Поэтому сопротивление $Z_6(s)$, соответствующее второму члену того же выражения, получается умножением сопротивления, определяемого ф-лой (X.40), на множитель $-s^6$ и делением полинома знаменателя на полином числителя до тех пор, пока степень полинома-остатка не будет больше превышать степени полинома знаменателя. Этот процесс выглядит следующим образом:

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 1 \left| \begin{array}{l} -\frac{3}{8}s^5 + \frac{1}{8}s^3 - \frac{3}{8}s \\ -\frac{3}{8}s^8 - \frac{9}{8}s^7 - s^6 \\ \hline -\frac{3}{8}s^8 - \frac{9}{8}s^7 - \frac{9}{8}s^6 - \frac{3}{8}s^5 \\ \hline \frac{1}{8}s^6 + \frac{3}{8}s^5 \\ \hline \frac{1}{8}s^6 + \frac{3}{8}s^5 + \frac{3}{8}s^4 + \frac{1}{8}s^3 \\ \hline -\frac{3}{8}s^4 - \frac{1}{8}s^3 \\ \hline -\frac{3}{8}s^4 - \frac{9}{8}s^3 - \frac{9}{8}s^2 - \frac{3}{8}s \\ \hline s^3 + \frac{9}{8}s^2 + \frac{3}{8}s \end{array} \right. \quad (X.42)$$

Следовательно,

$$Z_6(s) = \frac{s^3 + \frac{9}{8}s^2 + \frac{3}{8}s}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}. \quad (\text{X.43})$$

Метод построения сопротивлений по Мията, очевидно, пригоден для данного способа синтеза сопротивлений, так как одно и то же вспомогательное сопротивление, соответствующее при $A_0 = 1$ первому члену выражения (X.30), легко дает сопротивления, соответствующие остальным членам указанного разложения вещественной части.

В этой связи интересно, используя выражения (X.40) и (X.43), составить следующую сумму:

$$\begin{aligned} Z(s) = Z_0(s) + Z_6(s) &= \frac{s^3 + \frac{3}{2}s^2 + \frac{3}{2}s + 1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} = \\ &= \frac{\left(s^2 + \frac{1}{2}s + 1\right)(s + 1)}{(s^2 + 2s + 1)(s + 1)}. \end{aligned} \quad (\text{X.44})$$

Она совпадает с выражением (X.33), как и должно быть. Теперь нетрудно убедиться, что компоненты $Z_0(s)$ и $Z_6(s)$, на которые разложено данное сопротивление, можно синтезировать в виде простых цепных схем, описанных выше.

Далее можно заметить, что сопротивление Z_0 , определяемое выражением (X.40), и сопротивление Z_6 , определяемое выражением (X.43), получаются одно из другого при замене s на $\frac{1}{s}$. Таким образом, если имеется цепь, реализующая одно из этих сопротивлений, то достаточно просто получить и цепь, реализующую другое, для чего необходимо заменить индуктивности на емкости, имеющие обратные значения, и наоборот. Соответствующее разложение функции $Z_0(s)$ в цепную схему можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{3}{8}s^2 + \frac{9}{8}s + 1 & \left| \frac{8s}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} \right. \\ & \left. \frac{s^3 + 3s^2 + \frac{8}{3}s}{3} \right| \frac{9s}{8} \\ \hline & \frac{1}{3}s + 1 \left| \frac{3}{8}s^2 + \frac{9}{8}s + 1 \right. \\ & \left. \frac{3}{8}s^2 + \frac{9}{8}s \right| \\ \hline & \left. \left. \frac{1}{3}s + 1 \right. \right. \end{aligned} \quad (\text{X.45})$$

Полученное разложение дает цепи, изображенные на рис. X.6. Соединив их последовательно, получим требуемую реализацию сопротивления $Z(s)$, определяемого выражением (X.33).

Отметим, что в выражении (X.45) при каждой операции вычитания уничтожаются два члена; это необходимо для того, чтобы функция-остаток на каждом этапе снова имела нуль в точке $s = \infty$. Как отмечалось выше, данное свойство функции сопротивления вытекает из вида ее вещественной части $\text{Re}[Z(j\omega)]$. Так как само сопротивление $Z(s)$ не дает той же информации, то операции, осуществляемые над вещественной частью, служат ключом к решению

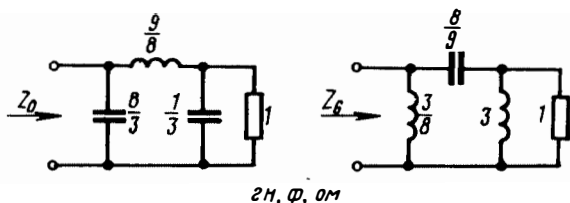


Рис. X.6

проблемы разделения сопротивления на составляющие с заданными особыми свойствами.

Рассмотрим теперь функцию

$$Z(s) = \frac{s^4 + \frac{9}{4}s^3 + 3s^2 + \frac{9}{4}s + 1}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1}, \quad (\text{X.46})$$

построенную таким образом, что она имеет полюс четвертого порядка в точке $s = -1$ и двойную четверку нулей четной части, лежащих на пересечении единичного круга и линии, наклоненной под углом 45° . Последнее вытекает из соотношения

$$m_1 m_2 - n_1 n_2 = (s^4 + 1)^2. \quad (\text{X.47})$$

Для данного случая имеем

$$A(\omega^2) = 1 + 2\omega^4 + \omega^8. \quad (\text{X.48})$$

Все коэффициенты этого полинома положительны, как можно было предвидеть из изложенного выше.

Начнем снова процесс синтеза с образования вспомогательного сопротивления вида (X.41), которое соответствует вещественной части функции $\frac{1}{B(\omega^2)}$ и представляет собой первое из трех компонентных сопротивлений полного сопротивления, определяемого выражением (X.46) [см. общее выражение (X.30) для вещественной

части и выражение (X.48) для полинома $A(\omega^2)$. Используя методы, изложенные в § VIII.1, получаем

$$Z'(s) = Z_0(s) = \frac{\frac{5}{16}s^3 + \frac{5}{4}s^2 + \frac{29}{16}s + 1}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1}. \quad (\text{X.49})$$

Второе сопротивление [обозначим его через $Z_4(s)$] можно найти, умножив выражение (X.49) на $2s^4$ и затем произведя деление, т. е.

$$s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 \left| \begin{array}{l} \frac{5}{8}s^3 - \frac{1}{8}s \\ \hline \frac{5}{8}s^7 + \frac{5}{2}s^6 + \frac{29}{8}s^5 + 2s^4 \\ \frac{5}{8}s^7 + \frac{5}{2}s^6 + \frac{30}{8}s^5 + \frac{5}{2}s^4 + \frac{5}{8}s^3 \\ \hline -\frac{1}{8}s^5 - \frac{1}{2}s^4 - \frac{5}{8}s^3 \\ -\frac{1}{8}s^5 - \frac{1}{2}s^4 - \frac{6}{8}s^3 - \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{8}s \\ \hline \frac{1}{8}s^3 + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{8}s \end{array} \right. \quad (\text{X.50})$$

Тогда требуемое сопротивление определяется выражением

$$Z_4(s) = \frac{1}{8} \frac{s^3 + 4s^2 + s}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1}. \quad (\text{X.51})$$

Далее необходимо проделать следующие операции:

$$s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 \left| \begin{array}{l} \frac{1}{16}s^3 - \frac{5}{16}s \\ \hline \frac{1}{16}s^7 + \frac{1}{4}s^6 + \frac{1}{16}s^5 \\ \frac{1}{16}s^7 + \frac{1}{4}s^6 + \frac{6}{16}s^5 + \frac{1}{4}s^4 + \frac{1}{16}s^3 \\ \hline -\frac{5}{16}s^5 - \frac{1}{4}s^4 - \frac{1}{16}s^3 \\ -\frac{5}{16}s^5 - \frac{5}{4}s^4 - \frac{30}{16}s^3 - \frac{5}{4}s^2 - \frac{5}{16}s \\ \hline s^4 + \frac{29}{16}s^3 + \frac{5}{4}s^2 + \frac{5}{16}s \end{array} \right. \quad (\text{X.52})$$

В результате третье компонентное сопротивление оказывается равным

$$Z_8(s) = \frac{s^4 + \frac{29}{16}s^3 + \frac{5}{4}s^2 + \frac{5}{16}s}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1}. \quad (X.53)$$

Нетрудно проверить, что сложение сопротивлений, определяемых выражениями (X.49), (X.51) и (X.53), даст искомое разложение

$$Z(s) = Z_0(s) + Z_4(s) + Z_8(s) = \frac{s^4 + \frac{9}{4}s^3 + 3s^2 + \frac{9}{4}s + 1}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1}. \quad (X.54)$$

Разложение функции $Z_0(s)$, при котором производится постепенное выделение последовательных индуктивностей и параллельных емкостей, обеспечивается следующими операциями:

$$\begin{array}{r} \frac{5}{16}s^3 + \frac{5}{4}s^2 + \frac{29}{16}s + 1 \left| \frac{16s}{5} \right. \\ \hline s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 \\ \frac{5}{16}s^3 + \frac{5}{4}s^2 + \frac{29}{16}s + 1 \left| \frac{25s}{16} \right. \\ \hline s^4 + 4s^3 + \frac{29}{5}s^2 + \frac{16}{5}s \\ \frac{1}{5}s^2 + \frac{4}{5}s + 1 \left| \frac{5}{16}s^3 + \frac{5}{4}s^2 + \frac{29}{16}s + 1 \right. \\ \hline \frac{5}{16}s^3 + \frac{5}{4}s^2 + \frac{25}{16}s \\ \frac{1}{4}s + 1 \left| \frac{4s}{5} \right. \\ \hline \frac{1}{5}s^2 + \frac{4}{5}s + 1 \\ \frac{1}{5}s^2 + \frac{4}{5}s \left| \right. \\ \hline 1 \left| \frac{1}{4}s + 1 \right. \end{array} \quad (X.55)$$

Прием, согласно которому последовательно устраняются два члена на каждом этапе процесса деления, является несколько необычным. Тот факт, что этот довольно специфический результат должен иметь место, не является столь же очевидным из анализа выражения (X.49) для функции $Z_0(s)$, как следует из рассмотрения ее вещественной части.

При разложении функции $Z_4(s)$, определяемой выражением (X.51), где-то в середине процесса необходимо вместо выделения

полюса в точке $s = \infty$ перейти к выделению полюса в точке $s = 0$. Это приводит в точке $s = \infty$ к следующим вычислениям:

$$\frac{s^3 + 4s^2 + s}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1} \left| \frac{s}{5} \right. \\ \frac{s^4 + 4s^3 + s^2}{5s^2 + 4s + 1} \left| \frac{s^3 + \frac{4}{5}s^2 + \frac{1}{5}s}{\frac{16}{5}s^2 + \frac{4}{5}s} \right. \quad (X.56)$$

в то время как выделение полюса в точке $s = 0$ дает

$$\frac{4}{5}s + \frac{16}{5}s^2 \left| \frac{5}{4s} \right. \\ \frac{1 + 4s}{5s^2} \left| \frac{4}{25s} \right. \\ \frac{4}{5}s + \frac{16}{5}s^2 \left| \frac{4}{5}s + \frac{16}{5}s^2 \right. \\ \frac{4}{5}s \left| \frac{25}{16} \right. \\ \frac{16}{5}s^2 \left| 5s^2 \right. \quad (X.57)$$

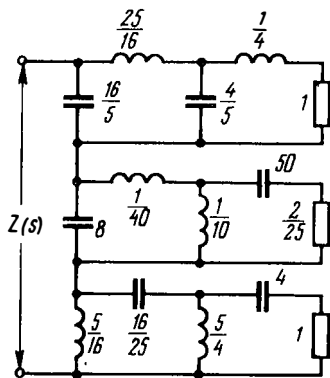
В последнем выражении не учитывается коэффициент уровня сопротивления (равный $\frac{1}{8}$) из выражения (X.51).

При разложении функции $Z_8(s)$ [см. выражение (X.53)] последовательно выделяют полюсы в точке $s = 0$. Этот процесс определяется операциями (X.55); единственное отличие заключается в том, что полиномы в данном случае должны быть записаны в противоположном порядке. При этом непосредственно из выражений (X.49) и (X.53) видно, что $Z_8(s) = Z_0\left(\frac{1}{s}\right)$.

Последнее, как и в предыдущем примере, является результатом того, что полином знаменателя выбран симметричным, и, значит, нет необходимости отдельно выполнять операции, соответствующие разложению функции $Z_8(s)$. Цепь, реализующую функцию Z_8 , получают просто из цепи, реализующей функцию Z_0 , путем замены каждой индуктивности емкостью, имеющей обратную величину, и наоборот.

Таким образом, проделав операции, соответствующие выражениям (X.55) и (X.57), при условии, что в последнем выражении

учитывается коэффициент уровня $\frac{1}{8}$, можно прийти к окончательной цепи, изображенной на рис. X.7, которая и является реализацией сопротивления, определяемого выражением (X.46). Вследствие особого расположения полюсов и нулей, принятого для четной части данного сопротивления, реализация его посредством метода Мията дает бóльшую экономию элементов, чем для сопротивления,



гн, ф. ом
Рис. X.7

включающего полиномы четвертой степени. Это вытекает из выражения (X.48) для функции $A(\omega^2)$, где два члена опущены (обычно в указанном выражении имеется пять членов, из которых, используя описанный выше метод, можно исключить только один).

Резюмируя все изложенное, можно заключить, что реализация, приведенная в рассмотренном примере, требует меньшего количества элементов, чем при использовании метода Ботта и Даффина. Реализация одного и того же сопротивления по последнему методу требует 15 реактивных и 4 резистивных элемента, тогда как реализация, показанная на рис. X.7, — 12

реактивных и 3 резистивных элемента. Кроме того, она оказывается более удобной, так как упрощает вычисления.

Х.3. Модификации метода Мията

В методе, предложенном Мията, процесс разложения можно видоизменять путем разделения полинома числителя $A(\omega^2)$, определяемого выражением (X.29), на части, состоящие из групп членов, а не из отдельных членов. Например, разделим этот полином числителя на две равные части и запишем вместо выражения (X.30) сумму

$$\operatorname{Re}[Z(j\omega)] = \frac{A_0 + A_1\omega^2 + \dots + A_{n-k}\omega^{2(n-k)}}{B(\omega^2)} + \frac{A_{n-k+1}\omega^{2(n-k+1)} + \dots + A_n\omega^{2n}}{B(\omega^2)}, \quad (\text{X.58})$$

где k — целое, изменяющееся от 1 до n (но в данном случае предполагается, что k равно $\frac{n}{2}$ или $\frac{n+1}{2}$ в зависимости от того, является ли n четным или нечетным).

Записав вещественную часть в таком виде, можно предварительно разложить функцию $Z(s)$ только на две составляющие. Имея в виду задачи реализации, интересно определить, какую

информацию дают отдельные составляющие вещественной части [два члена в выражении (X.58)]?

Первый член этого выражения при $\omega^2 = -s^2$ является четной функцией, имеющей k нулей второго порядка в точке $s = \infty$ и $(n - k)$ пар нулей в конечной плоскости s (в общем случае ни один из них не расположен в точке $s = 0$). Второй член при $\omega^2 = -s^2$ является четной функцией, имеющей $(n - k + 1)$ нулей второго порядка в точке $s = 0$ и $(k - 1)$ пар нулей в конечной плоскости s . Следовательно, сопротивление, соответствующее первому члену выражения (X.58), синтезируется в виде простой неуравновешенной цепной схемы с последовательно включенными индуктивностями L и параллельно включенными емкостями C (причем общее число элементов равно k); функция-остаток имеет нули четной части, совпадающие с конечными (отличными от нуля) нулями, которые содержатся в четной части этого сопротивления. Сопротивление, соответствующее второму члену выражения (X.58), синтезируется в виде неуравновешенной цепной схемы с последовательными емкостями C и параллельными индуктивностями L [причем общее число элементов составляет $(n - k + 1)$]. Сопротивление нагрузки (остаток) имеет нули четной части, расположенные в конечной плоскости s и содержащиеся в четной части второго сопротивления.

К исследуемым сопротивлениям нагрузки, которым соответствуют функции-остатки, можно применить аналогичное разложение и продолжать его до тех пор, пока окончательные функции-остатки не будут соответствовать резистивным сопротивлениям. Этот метод разложения называют методом « $\frac{n}{2}$ -синтеза». Он дает меньшее общее число элементов, чем при любом другом разбиении на части полинома числителя $A(\omega^2)$. При этом для любой степени n , равной или большей двух, требуется меньшее число элементов, чем при реализации по методу Ботта и Даффина.

В табл. X.1 приведено сравнение двух рассмотренных модификаций метода Мията и метода Ботта и Даффина. Величины N_{LC} и N_R обозначают число реактивных элементов и резистивных сопротивлений соответственно. Предполагается, что в методе Ботта и Даффина, как отмечалось выше, используется экономия одного элемента на каждый цикл.

Из этой таблицы становится ясно, что применительно к числу элементов метод Ботта и Даффина является геометрическим, а метод Мията — арифметическим. Даже если приходится прибегать к специальным приемам (подобно включению дополнительных множителей или другим методам, рассматриваемым в последующих разделах книги) для того, чтобы опять-таки «спасти» метод Мията в случае, когда первоначально все коэффициенты полинома $A(\omega^2)$ неположительны, все же целесообразнее прибегнуть к таким приемам, особенно в тех случаях, когда функции сопротивления являются сложными.

Таблица X.1

n	«Одночленный» синтез		« $\frac{n}{2}$ - синтез»		Модифицированный синтез Ботта и Даффна	
	N_{LC}	N_R	N_{LC}	N_R	N_{LC}	N_R
1	1	2	1	2	1	2
2	4	3	4	3	5	3
3	9	4	6	4	7	5
4	16	5	10	5	15	7
5	25	6	14	6	19	11
6	36	7	17	7	35	15
8	64	9	25	9	75	31
10	100	11	35	11	155	63
12	144	13	44	13	315	127
14	196	15	52	15	635	255
16	256	17	62	17	1 275	511
18	324	19	74	19	2 555	1 023
20	400	21	86	21	5 115	2 047
30	900	31	139	31	163 835	65 535

При синтезе по методу « $\frac{n}{2}$ » или в аналогичном случае можно заметить, что если коэффициенты A_0, \dots, A_n первоначально положительны, то в полиномах $A(\omega^2)$, связанных с первой парой функций-остатков, не может быть отрицательных коэффициентов. Это объясняется тем, что нули их четной части представляют собой нули конечной плоскости s , определяемые полиномами числителей (при $\omega^2 = -s^2$) отдельных членов выражения (X.58). Следовательно, коэффициенты A_k в выражениях для вещественных частей указанных функций-остатков должны быть одинаковыми. Аналогичный аргумент показывает, что можно не встретить никаких отрицательных коэффициентов при последующем разложении первой пары функций-остатков и т. д.

Первоначально может оказаться необходимым включить в функцию некоторые дополнительные множители для того, чтобы получить полином $A(\omega^2)$ с положительными коэффициентами. В этом случае вещественную часть разделяют любым приемлемым способом и производят последующие разложения вещественных частей функций-остатков любым способом с гарантией, что ни в одной из них не появятся отрицательные коэффициенты.

В качестве примера синтеза по методу « $\frac{n}{2}$ » вновь рассмотрим сопротивление, определяемое выражением (X.46). С учетом функ-

ции $A(\omega^2)$, определяемой ф-лой (X.48), разделим вещественную часть так:

$$\operatorname{Re} [Z(j\omega)] = \frac{1}{B(\omega^2)} + \frac{\omega^4(2 + \omega^4)}{B(\omega^2)}. \quad (\text{X.59})$$

В результате разделения получилось разложение функции $Z(s)$ на две аддитивных составляющих, из которых первой является сопротивление $Z_0(s)$, определяемое, как и раньше, выражением (X.49), а вторая представляет собой сумму сопротивлений $Z_4(s)$ и $Z_8(s)$, определяемых выражениями (X.51) и (X.53) соответственно. Обозначим эту сумму через $Z_a(s)$, тогда

$$Z_a(s) = Z_4(s) + Z_8(s) = \frac{s^4 + \frac{31}{16}s^3 + \frac{7}{4}s^2 + \frac{7}{16}s}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1}. \quad (\text{X.60})$$

Согласно выражению для вещественной части, определяемой вторым членом ф-лы (X.59), сопротивление $Z_a(s)$ необходимо синтезировать путем выделения на двух последующих этапах полюсов в точке $s = 0$. Операция разложения имеет вид

$$\begin{array}{l} \frac{7}{16}s + \frac{7}{4}s^2 + \frac{31}{16}s^3 + s^4 \quad \left| \frac{16}{7s} \right. \\ \hline 1 + 4s + 6s^2 + 4s^3 + s^4 \\ \frac{7}{16}s + \frac{7}{4}s^2 + \frac{31}{16}s^3 + s^4 \quad \left| \frac{31}{7} + \frac{16}{7}s^3 \right. \\ \hline 1 + 4s + \frac{31}{7}s^2 + \frac{16}{7}s^3 \\ \frac{11}{7}s^2 + \frac{12}{7}s^3 + s^4 \quad \left| \frac{49}{176s} \right. \\ \hline \frac{7}{16}s + \frac{7}{4}s^2 + \frac{31}{16}s^3 + s^4 \\ \frac{7}{16}s + \frac{21}{44}s^2 + \frac{49}{176}s^3 \\ \hline \frac{14}{11}s^2 + \frac{73}{44}s^3 + s^4 \end{array} \quad (\text{X.61})$$

Сопротивление, соответствующее функции-остатку, находится по формуле

$$Z_b = \frac{s^2 + \frac{73}{44}s + \frac{14}{11}}{s^2 + \frac{12}{7}s + \frac{11}{7}}, \quad (\text{X.62})$$

причем вещественная часть функции принимает вид

$$\operatorname{Re} [Z_b(j\omega)] = \frac{2 + \omega^4}{B(\omega^2)} = \frac{2}{B(\omega^2)} + \frac{\omega^4}{B(\omega^2)}. \quad (\text{X.63})$$

Здесь $B(\omega^2)$ представляет собой квадрат модуля знаменателя выражения (X.62) при $s = j\omega$. Нетрудно видеть, что сопротивления,

соответствующие отдельным членам правой части выражения (X.63), будут

$$Z_c(s) = \frac{\frac{49}{66}s + \frac{14}{11}}{s^2 + \frac{12}{7}s + \frac{11}{7}} \quad (\text{X.64})$$

и

$$Z_d(s) = \frac{s^2 + \frac{11}{12}s}{s^2 + \frac{12}{7}s + \frac{11}{7}}. \quad (\text{X.65})$$

Сумма этих сопротивлений и даст требуемое разложение $Z_b(s)$. Соответствующие разложения Z_c и Z_d в цепные схемы получаются в результате следующих операций:

$$\frac{\frac{49}{66}s + \frac{14}{11}}{\frac{66}{49}s} \left| \frac{s^2 + \frac{12}{7}s + \frac{11}{7}}{s^2 + \frac{12}{7}s} \right| \frac{\frac{343}{726}s + \frac{98}{121}}{\frac{11}{7} \left| \frac{49}{66}s + \frac{14}{11} \right|} \quad (\text{X.66})$$

и

$$\frac{\frac{11}{12}s + s^2}{\frac{12}{7s}} \left| \frac{\frac{11}{7} + \frac{12}{7}s + s^2}{\frac{11}{7} + \frac{12}{7}s} \right| \frac{\frac{11}{12s} + 1}{s^2 \left| \frac{11}{12}s + s^2 \right|}. \quad (\text{X.67})$$

Цепная схема с двумя ветвями, соответствующая процессу разложения (X.61), нагруженная на последовательное соединение цепей, полученных после выполнения операций (X.66) и (X.67), является реализацией сопротивления Z_a , определяемого выражением (X.60). Последовательное соединение этого сопротивления с сопротивлением Z_0 , реализующим цепь, показанную в верхней части рис. X.7, приводит к цепи, изображенной на рис. X.8, которая является другим вариантом реализации сопротивления (X.46). В последней реализации используются 10 реактивных элементов,

а не 12, как в цепи, приведенной на рис. X.7. Таким образом, даже в этом простом примере метод синтеза « $\frac{n}{2}$ » дает несомненное преимущество.

Можно получить модификацию метода синтеза « $\frac{n}{2}$ » для того же сопротивления, если провести перегруппировку членов в выражении (X.48) так, чтобы сумму $Z_0 + Z_4$ рассматривать как составляющую, подобную сопротивлению Z_6 из приведенного выше примера. Читателю предлагается самостоятельно проделать этот вариант.

В заключение отметим, что представляет интерес ответ на следующий вопрос: как можно воспользоваться методом Мията в случае, когда нули четной части лежат вблизи мнимой оси или на ней, т. е. когда включение дополнительных множителей является либо неэкономичным, либо совершенно невозможным?

X.4. Обобщение метода Мията

Наличие в полиноме $A(\omega^2)$ отрицательных коэффициентов означает, что он содержит квадратные множители от переменной ω^2 вида

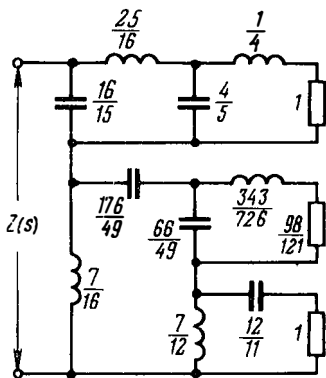
$$\omega^4 - 2\omega_0^2\omega^2 + a^4 = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + a^4 - \omega_0^4. \quad (X.68)$$

В этом выражении величина $(a^4 - \omega_0^4) > 0$ сравнительно близка к нулю. Принадлежность функции $A(\omega^2)$ при вещественных ω к классу положительных функций, конечно, означает, что указанная величина не может быть отрицательной; однако она может стать равной нулю. В последнем случае четная часть функции $Z(s)$ имеет в точках $s = \pm j\omega_0$ на мнимой оси пару нулей второго порядка.

До тех пор, пока член $(a^4 - \omega_0^4)$ отличен от нуля, можно избавиться от отрицательных коэффициентов в полиноме $A(\omega^2)$, если использовать, как уже упоминалось, включение дополнительных множителей. Но когда этот член мал, то число дополнительных множителей, необходимых для включения в функцию, становится чрезвычайно большим и, по-видимому, целесообразно найти какой-то иной, более экономичный способ получения того же результата.

Сгруппируем множители типа (X.68) в один член $A^*(\omega^2)$ и запишем полином $A(\omega^2)$ в виде

$$A(\omega^2) = (A_0 + A_1\omega^2 + \dots + A_k\omega^{2k}) A^*(\omega^2), \quad (X.69)$$



2H, Ф, Ом

Рис. X.8

где $k = n - 2r$ при условии, что существует r множителей типа (X.68), содержащихся в функции $A^*(\omega^2)$. Применим теперь «одночленный» («single-term») метод синтеза или метод синтеза « $\frac{n}{2}$ »,

как описано выше, при условии, что вещественная часть каждой компонентной функции содержит в качестве множителя полином $A^*(\omega^2)$. В этом случае разложение получается не в виде простых цепных схем, заканчивающихся резистивными сопротивлениями, а в виде цепи, общая нагрузка которой определяется некоторой постоянной, умноженной на сопротивление, имеющее вещественную часть $\frac{A^*(\omega^2)}{B^*(\omega^2)}$, причем вид полинома $B^*(\omega^2)$ здесь не имеет существенного значения.

Если перемножить теперь r множителей полинома $A^*(\omega^2)$, определяемых выражением (X.68), то окажется, что данная функция равна сумме членов, каждый из которых содержит положительные постоянные, умноженные на произведение множителей вида $(\omega^2 - \omega_v^2)^2$ на мнимой оси. Это означает, что общая функция-остаток разложена на сумму слагаемых, вещественные части которых имеют нули только на мнимой оси. Поэтому поставленная задача будет решена, если найти метод, позволяющий использовать этот особый тип функции сопротивления.

Допустим, что функция $Z_1(s) = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2}$ представляет собой именно такое сопротивление. Тогда полином $(m_1 m_2 - n_1 n_2)$ состоит исключительно из множителей вида $(s_v^2 - s^2)^2$, в которых s_v^2 — отрицательные вещественные величины. Умножим и разделим это сопротивление на полином Гурвица $P_0 = m_0 + n_0$, т. е.

$$\begin{aligned} Z_1(s) &= \frac{(m_1 + n_1)(m_0 + n_0)}{(m_2 + n_2)(m_0 + n_0)} = \frac{(m_1 m_0 + n_1 n_0) + (m_1 n_0 + n_1 m_0)}{(m_2 m_0 + n_2 n_0) + (m_2 n_0 + n_2 m_0)} = \\ &= \frac{\hat{m}_1 + \hat{n}_1}{\hat{m}_2 + \hat{n}_2}. \end{aligned} \quad (\text{X.70})$$

Если полином P_0 выбран так, что имеет место соотношение

$$\hat{m}_2 = m_2 m_0 + n_2 n_0 = 0, \text{ или } \frac{m_2}{n_2} = -\frac{n_0}{m_0} \text{ при всех } s^2 = s_v^2, \quad (\text{X.71})$$

то учитывая, что s_v^2 — нули полинома $(m_1 m_2 - n_1 n_2)$, получим следующие выражения:

$$\hat{n}_1 = m_1 n_0 + n_1 m_0 = 0, \text{ или } \frac{n_1}{m_1} = -\frac{n_0}{m_0} \text{ при всех } s^2 = s_v^2. \quad (\text{X.72})$$

Теперь необходимо убедиться в том, что полином P_0 удовлетворяет соотношениям (X.71). Если он удовлетворяет им, то теория Дарлингтона, изложенная в § IX.8, дает интересную возможность для синтеза сопротивления $Z_1(s)$. Там было показано, что если при

синтезе по методу Дарлингтона функция $Z_1(s)$ рассматривается как входное сопротивление четырехполюсника без потерь, нагруженного на резистивное сопротивление 1 ом , и если синтезируемая цепь перевернута относительно первоначально выбранного входа [для перехода к входному сопротивлению $Z_2(s)$], то, предполагая, что имеет место случай А, функцию $Z_2(s)$ можно найти из функции $Z_1(s)$ простой перестановкой четных частей соответствующих полиномов. При этом из выражения (X.70) получим

$$Z_2(s) = \frac{\hat{m}_2 + \hat{n}_1}{\hat{m}_1 + \hat{n}_2}, \quad (\text{X.73})$$

откуда видно [см. выражения для полиномов, определяемых формулами (X.71) и (X.72)], что сопротивление $Z_2(s)$ имеет нули на мнимой оси во всех точках $s = \pm s_v$. Если рассматриваемая методика приводит к требуемому результату, то можно сказать, что мы «убили одним выстрелом всех зайцев». Однако прежде чем сделать такой вывод, необходимо выяснить ряд моментов.

Исследуем четную часть сопротивления, определяемого выражением (X.70), для чего введем обозначение, использованное ранее в главе VIII:

$$M = m_1 m_2 - n_1 n_2. \quad (\text{X.74})$$

Тогда четную часть функции $Z_1(s)$ можно записать в виде

$$Z_{1E} = \frac{1}{2} [Z_1(s) + Z_1(-s)] = \frac{M(m_0^2 - n_0^2)}{\hat{m}_2^2 - \hat{n}_2^2}, \quad (\text{X.75})$$

где Z_{1E} — обозначение для четной части функции Z_1 . Подобные обозначения мы будем применять также и к другим функциям сопротивлений. При $s = j\omega$ полином $(m_0^2 - n_0^2)$ имеет вид

$$(m_0^2 - n_0^2)_{s=j\omega} = \alpha_0 + \alpha_1 \omega^2 + \dots + \alpha_k \omega^{2k}, \quad (\text{X.76})$$

где k — степень полинома $P_0 = m_0 + n_0$. Тогда вещественная часть полинома $Z_1(j\omega)$ выглядит следующим образом:

$$\text{Re}[Z_1(j\omega)] = \frac{\alpha_0 M}{\hat{m}_2^2 - \hat{n}_2^2} + \frac{\alpha_1 M \omega^2}{\hat{m}_2^2 - \hat{n}_2^2} + \dots + \frac{\alpha_k M \omega^{2k}}{\hat{m}_2^2 - \hat{n}_2^2}, \quad (\text{X.77})$$

где функции M и $(\hat{m}_2^2 - \hat{n}_2^2)$ вычислены при $s = j\omega$.

Если слагаемые этого выражения рассматривать как вещественные части компонентных сопротивлений, то нетрудно заметить, что все они имеют нули второго порядка множителя M на мнимой оси, причем последний содержится в функции \hat{m}_2^2 . Поэтому вещественным частям будут, прежде всего, соответствовать сопротивления, нечетная часть полинома числителя и четная часть полинома знаменателя которых включает множитель \sqrt{M} . Таким образом, указанные вещественные части содержат простые множители вида

$(s^2 - s^2)$ для всех нулей множителя M на мнимой оси. Это, очевидно, следует из определения полинома P_0 при условии, что соотношения (X.71) и (X.72) совместно удовлетворяются (если они вообще удовлетворяются).

Первый член разложения (X.77) имеет в точке $s = \infty$ дополнительно k нулей второго порядка, второй член — один такой нуль в точке $s = 0$ и $(k - 1)$ остальных нулей — в точке $s = \infty$ и т. д. Наконец, последний член имеет k дополнительных нулей второго порядка в точке $s = 0$.

Таким образом, мы приходим к выводу, что каждое компонентное сопротивление, соответствующее определенному члену (вещественной части) выражения (X.74), синтезируется в виде простой неуравновешенной цепной схемы, состоящей из k одиночных индуктивных или емкостных ветвей, как это имеет место для компонентных сопротивлений в методе синтеза по Мията. Каждому разложению соответствует одинаковая функция нагрузки (разумеется, с точностью до постоянного множителя), содержащая такие же полиномы степени n , как и полиномы функции $Z_1(s)$. Четная часть полинома знаменателя в этом общем остатке содержит все n пар нулей четной части функции на мнимой оси (нули функции \sqrt{M}). Эта функция должна вырождаться в функцию вида

$$\frac{m}{m+n} = \frac{1}{1 + \frac{n}{m}}. \quad (\text{X.78})$$

Цепные схемы, соответствующие последующим членам разложения (X.77), характеризуются остаточными функциями, которые поочередно будут сопротивлениями или проводимостями. Поэтому остаточная функция, определяемая выражением (X.78), независимо от того, является ли она тем или другим, реализуется как резистивное сопротивление, включенное (соответственно) параллельно или последовательно с реактивным сопротивлением или проводимостью.

Каждое компонентное сопротивление [соответствующее члену разложения в выражении (X.77)], синтезируемое по методу Дарлингтона, можно также успешно реализовать путем разложения цепи без потерь со стороны ее выхода. В этой связи отметим, что слагаемые указанного разложения приводят (см. § IX.6) поочередно к случаю А и случаю Б. Если для компонентного сопротивления $Z_1^{(v)}(s)$ (случай А) поменять местами нечетные части полиномов, то получим обратное сопротивление $Z_2^{(v)}(s)$, соответствующее перевернутой ориентации цепи без потерь относительно ее входа и выхода. Полюсы на мнимой оси обратного сопротивления являются полюсами проводимости нагрузки, которая представляет собой функцию, обратную функции, определяемой ф-лой (X.78). В случае Б перестановка нечетных частей полиномов функции $Z_1^{(v)}(s)$ дает сопротивление $Z_2^{(v)}(s)$, полюсами которого на мнимой оси

являются полюсы сопротивления нагрузки [функции, обратной полиному (X.78)].

Если при синтезе цепи без потерь используется подобный подход, то указанные конечные (отличные от нуля) полюсы на мнимой оси выделяются в начале разложения. С другой стороны, если синтез цепи начинается со входа разложением функции $Z_1'(s)$ в цепную схему, то те же полюсы выделяются в конце разложения как часть функции нагрузки, определяемой функцией, обратной выражению (X.78).

Для успешного проведения этого процесса необходимо, чтобы коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ выражений (X.76) и (X.77) были положительными. Таким образом, требования к вспомогательному полиному P_0 являются двойными. С одной стороны, он должен удовлетворять соотношению (X.71) или (X.72) (при удовлетворении одного из этих соотношений автоматически удовлетворяется и другое); с другой стороны, квадрат модуля полинома при $s = j\omega$ [см. выражение (X.76)] не может иметь отрицательных коэффициентов. Прежде чем перейти к задаче нахождения такого полинома, целесообразно рассмотреть простой пример, для которого приведенные соотношения выполняются без какого-либо сложного анализа.

С этой целью обратимся к выражению (X.13), которое используется в § X.1 для иллюстрации метода Ботта и Даффина. Имеем

$$m_1 m_2 - n_1 n_2 = (s^2 + 2)^2. \quad (\text{X.79})$$

Умножим и разделим выражение (X.13) для сопротивления на простой полином $P_0 = (s + a)$, и попытаемся выяснить, можно ли получить требуемый результат. Новое сопротивление имеет следующий вид:

$$Z(s) = \frac{(s^2 + s + 1)(s + a)}{(s^2 + s + 4)(s + a)} = \frac{[(1 + a)s^2 + a] + [s^3 + (1 + a)s]}{[(1 + a)s^2 + 4a] + [s^3 + (4 + a)s]}. \quad (\text{X.80})$$

Выполнение соотношения (X.71) приводит в этом примере к уравнению

$$(1 + a)s^2 + 4a = 0 \text{ при } s^2 = -2, \quad (\text{X.81})$$

из которого получаем

$$a = 1. \quad (\text{X.82})$$

Поэтому

$$m_0 + n_0 = s + 1. \quad (\text{X.83})$$

Тогда

$$\hat{m}_2 + \hat{n}_2 = s^3 + 2s^2 + 5s + 4. \quad (\text{X.84})$$

Преобразованная четная часть функции $Z(s)$ даст следующее разложение на составляющие:

$$Z_E = \frac{(s^2 + 2)^2(1 - s^2)}{4(s^2 + 2)^2 - s^2(s^2 + 5)^2} = \frac{(s^2 + 2)^2}{4(s^2 + 2)^2 - s^2(s^2 + 5)^2} + \frac{-s^2(s^2 + 2)^2}{4(s^2 + 2)^2 - s^2(s^2 + 5)^2}. \quad (\text{X.85})$$

Если обозначить через Z_a и Z_b сопротивления, соответствующие этим двум составляющим, то непосредственно видим, что

$$Z_a(s) = \frac{\frac{1}{2}(s^2+2)}{2(s^2+2) + s(s^2+5)} = \frac{\frac{1}{2}(s^2+2)}{s^3+2s^2+5s+4}. \quad (\text{X.86})$$

Сопротивление Z_b можно найти, умножив сопротивление Z_a на коэффициент $-s^2$ и произведя операцию деления

$$s^3 + 2s^2 + 5s + 4 \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{2}s \\ \hline -\frac{1}{2}s^4 + 0s^3 - s^2 \\ \hline -\frac{1}{2}s^4 - s^3 - \frac{5}{2}s^2 - 2s \\ \hline \end{array} \right. \frac{s^3 + \frac{1}{2}s^2 + 2s}{s^3 + \frac{1}{2}s^2 + 2s}. \quad (\text{X.87})$$

Тогда

$$Z_b(s) = \frac{s^3 + \frac{3}{2}s^2 + 2s}{s^3 + 2s^2 + 5s + 4}. \quad (\text{X.88})$$

Соответствующие реализации двух рассматриваемых компонентных сопротивлений получаются из разложений

$$Z_a(s) = \frac{1}{2s + \frac{1}{\frac{1}{2}(s^2+2)}} = \frac{1}{2(s^2+2) + 3s}. \quad (\text{X.89})$$

и

$$Z_b(s) = \frac{1}{\frac{2}{s} + \frac{2(s^2+2)}{2(s^2+2) + 3s}}. \quad (\text{X.90})$$

Цепные схемы для этого простого примера содержат одиночные ветви (степень k полинома P_0 равна единице); общая функция нагрузки с учетом постоянного множителя определяется выражением

$$\frac{2(s^2+2)}{2(s^2+2) + 3s}. \quad (\text{X.91})$$

Выражение (X.91) совпадает с функцией, определяемой ф-лой (X.78), как и должно быть.

Интересно отметить, что сумма сопротивлений (X.89) и (X.90) дает такое же выражение для полного сопротивления, как и формула (X.19), полученная методом Ботта и Даффина. Поэтому

окончательная цепь, представляющая собой последовательное соединение указанных сопротивлений, совпадает с цепью, изображенной на рис. X.4. Значит, когда исследуемое сопротивление содержит полиномы второй степени, рассматриваемый метод и метод Ботта и Даффина дают аналогичные результаты.

В связи с этим следует отметить, что в том случае, когда постоянная a в ур-нии (X.81) отрицательна, всегда можно сделать ее положительной величиной, если перейти к методу узловых напряжений, либо применив метод контурных токов.

Используя сопротивления Z_a и Z_b , определяемые выражениями (X.86) и (X.88), можно исследовать другие особенности изложенного выше метода Дарлингтона. Так, сопротивление $Z_a(s)$, получаемое из вещественной части, соответствующей случаю **A**, должно быть с точностью до постоянного множителя равно функции, обратной функции входного сопротивления цепи без потерь, синтезируемой в перевернутом виде (если переставить местами нечетные части его полиномов). Обозначив последнее сопротивление через Z_{a2} , из выражения (X.86) находим

$$\frac{1}{Z_{a2}} = \frac{\frac{1}{2}(s^2 + 2) + s(s^2 + 5)}{2(s^2 + 2)}. \quad (\text{X.92})$$

Эта функция, если учесть приведенные выше рассуждения, имеет полюсы на мнимой оси. Аналогично перестановка нечетных частей функции $Z_b(s)$, полученной из вещественной части, соответствующей случаю **B**, должна дать сопротивление $Z_{b2}(s)$ перевернутой цепи без потерь. Тогда из выражения (X.88) получим

$$Z_{b2} = \frac{s^3 + \frac{3}{2}s^2 + 5s}{s^3 + 2s^2 + 2s + 4} = \frac{s^3 + \frac{3}{2}s^2 + 5s}{(s^2 + 2)(s + 2)}. \quad (\text{X.93})$$

Снова видим, что требуемые полюсы расположены на мнимой оси.

Когда заданное сопротивление содержит полиномы более высокой степени, то оно в общем случае больше не будет удовлетворять соотношениям (X.71), если полином P_0 имеет вид линейного множителя $(s + a)$. Для того чтобы лучше понять ограничения, налагаемые в этом случае, необходимо найти более подходящий метод построения вспомогательного полинома P_0 .

Если отношения полиномов $\frac{m_2}{n_2}$ и $\frac{n_0}{m_0}$ из ограничений (X.71) рассматривать как реактивные функции и построить их обычным способом в виде функций от угловой частоты ω , то согласно указанному ограничению необходимо найти такую кривую $\frac{n_0}{m_0}$, которая, будучи взятой с отрицательным знаком, пересекает

кривую $\frac{m_2}{n_2}$ при частотах ω_v , т. е. в точках, в которых вещественная часть исходного сопротивления имеет нули. Для рассмотренного в примере сопротивления, определяемого выражением (X.13), такое графическое изображение ограничения (X.71) дано на рис. X.9а.



Рис. X.9

Ясно, что линейный множитель $(s + a)$ для полинома $m_0 + n_0$ будет всегда пригодным, когда полином $m_2 + n_2$ является квадратичным. Из графического представления видно также, что если частота ω_v больше нуля полинома m_2 , то требуемая прямая $-\frac{n_0}{m_0}$ будет иметь положительный наклон, что невозможно, так как полином $m_0 + n_0$ должен быть полиномом Гурвица. Однако, поскольку

при $\omega = \omega_v$, $\frac{n_1}{m_1} = -\frac{m_2}{n_2}$, можно обойти эту трудность, перейдя к методу узловых напряжений, при котором полиномы $m_2 + n_2$ и $m_1 + n_1$ меняются местами.

Иначе обстоит дело в том случае, когда полином $m_2 + n_2$ имеет более высокую степень (функция $\frac{m_2}{n_2}$ содержит несколько чередующихся нулей и полюсов) и существует ряд частот ω_v , на ко-

торых требуется, чтобы кривая неизвестной функции $\frac{n_0}{m_0}$, взятая с отрицательным знаком, пересекла кривую функции $\frac{m_2}{n_2}$. Здесь графический метод, хотя и способствует разъяснению характера рассматриваемой задачи, однако становится менее эффективным в качестве средства вычисления при построении требуемого полинома $m_0 + n_0$.

Используя сокращенное обозначение (X.74), можно нули второго порядка четной части заданного сопротивления $Z(s)$ на мнимой оси выразить следующим образом:

$$M = (s^2 + \omega_1^2)^2 (s^2 + \omega_2^2)^2 \dots (s^2 + \omega_r^2)^2, \quad (X.94)$$

где четное целое $2r$ равно степени полиномов n функции $Z(s)$. Тогда отношение (X.71) принимает вид

$$\hat{m}_2 = (m_2 m_0 + n_2 n_0) = \sqrt{M} = (s^2 + \omega_1^2) \dots (s^2 + \omega_r^2). \quad (X.95)$$

Нетрудно заметить, что требование, вытекающее из этого уравнения, эквивалентно требованию, которое встречается при построении сопротивления

$$Z^*(s) = \frac{m_0 - n_0}{m_2 + n_2}, \quad (X.96)$$

когда его четная часть определяется зависимостью

$$\frac{m_2 m_0 + n_2 n_0}{m_2^2 - n_2^2} = \frac{\sqrt{M}}{m_2^2 - n_2^2}. \quad (X.97)$$

Таким образом, нам удалось свести задачу построения полинома $P_0 = m_0 + n_0$ к задаче построения сопротивления по его заданной четной части, с которой мы хорошо знакомы и для ее решения располагаем несколькими методами.

Следует заметить, что функция, определяемая выражением (X.96), не является функцией входного сопротивления. Все ее нули находятся в правой полуплоскости. Она представляет собой сопротивление передачи с «максимальным фазовым сдвигом». Это можно также установить из того факта, что ее вещественная часть на мнимой оси [см. выражение (X.97) при $s = j\omega$] изменяет знак во всех нулях полинома M . Следовательно, вещественная часть функции $Z^*(s)$ на мнимой оси имеет только простые нули.

Тем не менее нельзя быть уверенным в том, что построение полинома $m_0 + n_0$ описанным методом приведет к полиному Гурвица. Применительно к графическому построению, изображенному на рис. X.9а, такой результат означает, что не обязательно суще-

ствуует реактивная функция $\frac{n_0}{m_0}$ (взятая с отрицательным знаком), которая пересекает график функции $\frac{m_2}{n_2}$ только при заданных частотах ω . Для того чтобы указанная реактивная функция пересекала в данных точках этот график, она должна пересекать его в одной или более добавочных точках, остающихся произвольными.

Поскольку подобные добавочные пересечения, очевидно, допустимы, выбор их может быть использован как средство для получения полинома P_0 , который является не только полиномом Гурвица (функция $\frac{n_0}{m_0}$ имеет чередующиеся простые нули и полюсы), но и удовлетворяет дополнительному условию, согласно которому все коэффициенты выражения (X.76) положительны.

При построении сопротивления (X.96) по четной части, определяемой выражением (X.97), эти дополнительные произвольные пересечения соответствуют избыточным множителям вида $(s^2 + \omega_k^2)$, вводимым в выражение для функции \sqrt{M} . Метод Мията, применяемый для определения полинома $m_0 - n_0$ в числителе выражения (X.96), является для данного случая весьма удобным. Таким образом, используя только указанные множители функции \sqrt{M} , можно предварительно найти функцию $Z^*(s)$. Если рассматриваемый процесс дает пригодный полином P_0 , то на этом процедура заканчивается. В противном случае необходимо умножить предварительно выбранную функцию $Z^*(s)$ на коэффициент $(s^2 + \omega_k^2)$ с произвольным значением ω_k^2 и далее выполнить известный процесс деления. По полученному в результате остатку можно попробовать определить, возможно ли решение. Если оно невозможно, то следует попытаться ввести дополнительные избыточные множители¹ и использовать метод последовательных приближений. На практике иногда возникает целый ряд случаев, когда этот процесс приводит к описанным неудобным ситуациям.

Проиллюстрируем теперь рассмотренный метод на нескольких примерах. Рассмотрим функцию сопротивления

$$Z(s) = \frac{s^4 + \frac{3}{2}s^3 + \frac{13}{2}s^2 + 6s + 6}{s^4 + s^3 + 11s^2 + 5s + 24}, \quad (\text{X.98})$$

которая построена в предположении, что полюсы расположены в точках $s = -1 \pm j$ и $s = -1 \pm j2$, а нули четной части определяются выражением

$$M = m_1 m_2 - n_1 n_2 = (s^2 + 2)^2 (s^2 + 6)^2. \quad (\text{X.99})$$

¹ Когда включение избыточных множителей превращает выражение (X.97) в неправильную дробь, функцию $Z^*(s)$, определяемую выражением (X.96), все же строят с помощью рассматриваемого процесса; отличие заключается лишь в том, что частное содержит четные члены. Они представляют собой часть функции $Z^*(s)$, которая также является в этом случае неправильной дробью.

Предварительно для построения сопротивления (X.96) определим вспомогательное сопротивление $Z'(s)$, соответствующее функции M , равной единице. В результате получим

$$Z'(s) = \frac{s^3 + s^2 + 7s + 1}{s^4 + s^3 + 11s^2 + 5s + 24}. \quad (\text{X.100})$$

Построение полинома $m_0 - n_0$, определяемого выражением (X.96), требует умножения функции $Z'(s)$ на полином $\sqrt{M} = (s^2 + 2)(s^2 + 6) = s^4 + 8s^2 + 12$ и выполнения операции деления

$$s^4 + s^3 + 11s^2 + 5s + 24 \left| \begin{array}{l} s^3 + 4s \\ \hline s^7 + s^6 + 15s^5 + 9s^4 + 68s^3 + 20s^2 + 84s + 12 \\ s^7 + s^6 + 11s^5 + 5s^4 + 24s^3 \\ \hline 4s^5 + 4s^4 + 44s^3 + 20s^2 + 84s + 12 \\ 4s^5 + 4s^4 + 44s^3 + 20s^2 + 96s \\ \hline -12s + 12 \end{array} \right. \quad (\text{X.101})$$

Постоянный множитель в данном случае тривиален, поэтому оказывается, что $m_0 - n_0 = 1 - s$ или $m_0 + n_0 = s + 1$ является соответствующим вспомогательным полиномом. На рис. X.96 дано графическое построение для этого примера. Так же, как и в предыдущем, более простом примере, линейная функция $\frac{n_0}{m_0}$ обеспечивает выполнение требуемых ограничений.

Четная часть преобразованного сопротивления определяется выражением

$$Z_E = \frac{(s^2 + 2)^2 (s^2 + 6)^2 (1 - s^2)}{[(s^4 + 11s^2 + 24)^2 - s^2 (s^2 + 5)^2] (1 - s^2)} = Z_{aE} + Z_{bE}, \quad (\text{X.102})$$

откуда можно найти

$$Z_{aE} = \frac{(s^2 + 2)^2 (s^2 + 6)^2}{[(s^4 + 11s^2 + 24)^2 - s^2 (s^2 + 5)^2] (1 - s^2)} \quad (\text{X.103})$$

и

$$Z_{bE} = \frac{-s^2 (s^2 + 2)^2 (s^2 + 6)^2}{[(s^4 + 11s^2 + 24)^2 - s^2 (s^2 + 5)^2] (1 - s^2)}. \quad (\text{X.104})$$

Сопротивления, соответствующие этим четным функциям, имеют вид

$$\begin{aligned} Z_a(s) &= \frac{\frac{1}{2} s^4 + 4s^2 + 6}{s^5 + 2s^4 + 12s^3 + 16s^2 + 29s + 24} = \\ &= \frac{1}{2s + 4 + \frac{2s(4s^2 + 17)}{(s^2 + 2)(s^2 + 6)}} \end{aligned} \quad (\text{X.105})$$

и

$$Z_b(s) = \frac{s^5 + 2s^4 + 8s^3 + \frac{17}{2}s^2 + 12s}{s^5 + 2s^4 + 12s^3 + 16s^2 + 29s + 24} = \frac{1}{\frac{2}{s} + \frac{1}{1 + \frac{s(4s^2 + 17)}{2(s^2 + 2)(s^2 + 6)}}}. \quad (\text{X.106})$$

Реализация сопротивлений Z_a и Z_b осуществляется непосредственно.

Рассмотрим далее сопротивление

$$Z(s) = \frac{s^4 + \frac{20}{3}s^3 + \frac{17}{3}s^2 + \frac{62}{3}s + \frac{2}{3}}{s^4 + s^3 + 11s^2 + 5s + 24}, \quad (\text{X.107})$$

имеющее такие же полюсы, как и сопротивление (X.98), но для которого

$$M = m_1 m_2 - n_1 n_2 = (s^2 + 1)^2 (s^2 + 4)^2. \quad (\text{X.108})$$

Вспомогательное сопротивление, соответствующее $M = 1$, совпадает с функцией, определяемой, как и раньше выражением (X.100) (так как полюсы сохраняются прежними).

Попытаемся, прежде всего, построить полином $m_0 - n_0$, выраженный ф-лой (X.96), для чего умножим функцию $Z'(s)$ на $\sqrt{M} = (s^2 + 1)(s^2 + 4) = s^4 + 5s^2 + 4$ и далее осуществим операцию деления

$$s^4 + s^3 + 11s^2 + 5s + 24 \left| \begin{array}{l} s^3 + 5 \\ \hline s^7 + s^6 + 12s^5 + 6s^4 + 39s^3 + 9s^2 + 28s + 4 \\ \hline s^7 + s^6 + 11s^5 + 5s^4 + 24s^3 \\ \hline s^5 + s^4 + 15s^3 + 9s^2 + 28s + 4 \\ \hline s^5 + s^4 + 11s^3 + 5s^2 + 24s \\ \hline 4s^3 + 4s^2 + 4s + 4 \end{array} \right. \quad (\text{X.109})$$

Полученная здесь остаточная функция не является, очевидно, пригодным полиномом $m_0 - n_0$, так как соответствующий полином $m_0 + n_0$ не является полиномом Гурвица. Поэтому умножим его на избыточный множитель $(s^2 + a^2)$ и вновь осуществим деление. Поскольку

$$(s^3 + s^2 + s + 1)(s^2 + a^2) = s^5 + s^4 + (a^2 + 1)s^3 + (a^2 + 1)s^2 + a^2s + a^2, \quad (\text{X.110})$$

операция деления выглядит следующим образом:

$$s^4 + s^3 + 11s^2 + 5s + 24 \left| \begin{array}{l} s \\ \hline s^5 + s^4 + (a^2 + 1)s^3 + (a^2 + 1)s^2 + a^2s + a^2 \\ \hline s^5 + s^4 + 11s^3 + 5s^2 + 24s \\ \hline (a^2 - 10)s^3 + (a^2 - 4)s^2 + (a^2 - 24)s + a^2 \end{array} \right. \quad (\text{X.111})$$

Выберем величину a^2 такой, чтобы остаток при $s \rightarrow -s$ стал полиномом Гурвица и чтобы все коэффициенты полинома $(m_0^2 - n_0^2)$ при $s = j\omega$ были положительными (причем попытаемся достичь всего этого наиболее простым путем). Применительно к нашему примеру видим, что если выбрать $a^2 = 10$, то полином P_0 будет иметь вид

$$P_0 = m_0 + n_0 = 3s^2 + 7s + 5. \quad (\text{X.112})$$

Этот полином представляет собой полином Гурвица, а все коэффициенты полинома

$$m_0^2 - n_0^2 = 9s^4 - 19s^2 + 25 \quad (\text{X.113})$$

являются при $s = j\omega$ положительными. Указанный выбор величины a^2 сводит, в частности, полином P_0 к квадратному полиному, упрощает остальные вычисления и результирующую цепь.

Вычислим теперь

$$\hat{m}_2 + \hat{n}_2 = (s^4 + s^3 + 11s^2 + 5s + 24)(3s^2 + 7s + 5) \quad (\text{X.114})$$

и составим четную часть преобразованного сопротивления

$$Z_E = \frac{(s^2 + 1)^2 (s^2 + 4)^2 (25 - 19s^2 + 9s^4)}{\hat{m}_2^2 - \hat{n}_2^2} = Z_{aE} + Z_{bE} + Z_{cE}, \quad (\text{X.115})$$

компонентами которого являются функции

$$Z_{aE} = \frac{25(s^2 + 1)^2 (s^2 + 4)^2}{\hat{m}_2^2 - \hat{n}_2^2}; \quad (\text{X.116})$$

$$Z_{bE} = \frac{-19s^2 (s^2 + 1)^2 (s^2 + 4)^2}{\hat{m}_2^2 - \hat{n}_2^2}; \quad (\text{X.117})$$

$$Z_{cE} = \frac{9s^4 (s^2 + 1)^2 (s^2 + 4)^2}{\hat{m}_2^2 - \hat{n}_2^2}. \quad (\text{X.118})$$

Построение соответствующих сопротивлений Z_a , Z_b , Z_c и их реализация осуществляются известным способом.

Графическое построение для определения полинома $m_0 + n_0$ приведено на рис. X.9в. Представляет интерес сравнение этого рисунка с рис. X.9б. На обоих рисунках функция $\frac{m_2}{n_2}$ одинакова. Однако из измененного расположения требуемых пересечений с функцией $-\frac{n_0}{m_0}$ становится совершенно очевидным, что линейная функция $-\frac{n_0}{m_0}$ может оказаться неудовлетворительной. Дополни-

тельное пересечение в точке $\omega = \sqrt{10}$, обусловленное добавочным избыточным множителем, также является, очевидно, результатом более общего характера этой функции, необходимой для получения требуемых пересечений в точках $\omega = 1$ и $\omega = 2$.

Иллюстрации, подобные рис. X.96 и X.9в, очень полезны в том отношении, что позволяют произвести быструю оценку степени сложности требуемой функции — $\frac{n_0}{m_0}$ для любого заданного случая. Эти сведения можно затем использовать при управлении процессом последовательных приближений, который включает операцию деления для определения полинома $m_0 — n_0$.

Из приведенного графического представления видно также, что данный метод, очевидно, непригоден, когда величины ω^2 в выражении (X.94) для полинома M совпадают друг с другом, т. е.

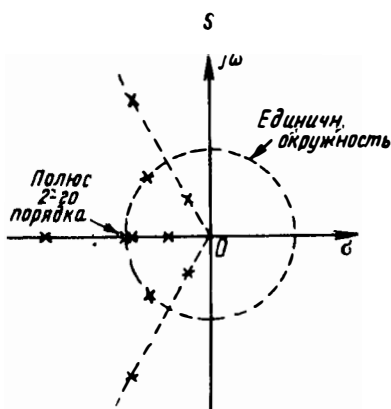


Рис. X.10

когда вещественная часть заданного сопротивления имеет нули на мнимой оси, кратные четырем, шести и т. д. Для того чтобы проанализировать именно такую ситуацию, рассмотрим обобщение метода Мията, справедливое для особого случая, в котором все нули четной части заданного сопротивления расположены в одной и той же конечной точке мнимой оси, отличной от нуля.

Здесь полезно нормализовать частотный масштаб таким образом, чтобы единственный нуль четной части порядка выше первого располагался в точке $\omega = 1$. Тогда заданное сопротивление

$Z(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ с полиномами степени n будет иметь четную часть вида

$$Z_E(s) = \frac{(s^2 + 1)^n}{Q(s)Q(-s)}. \quad (X.119)$$

Если полюсы функции $Z(s)$ расположены надлежащим образом, то функция, определяемая последним выражением, легко может быть синтезирована по методу Мията с помощью преобразования

$$\lambda = s + \frac{1}{s}. \quad (X.120)$$

Таким образом, когда нули функции $Q(s)$ расположены в точках, которые отображаются в плоскости s на единичную окружность или являются на этой окружности комплексно-сопряженными парами (рис. X.10), то рассматриваемую функцию можно представить следующим образом:

$$Q(s) = (s - s_1) \left(s - \frac{1}{s_1} \right) (s - s_2) \left(s - \frac{1}{s_2} \right) \dots (s - s_r) \left(s - \frac{1}{s_r} \right), \quad (X.121)$$

причем $2r = n$. Учитывая, что

$$(s - s_k) \left(s - \frac{1}{s_k} \right) = s \left[\left(s + \frac{1}{s} \right) - \left(s_k + \frac{1}{s_k} \right) \right], \quad (\text{X.122})$$

преобразование (X.120), а также соотношение

$$\lambda_k = s_k + \frac{1}{s_k} \quad (\text{X.123})$$

позволяют представить исследуемый полином в виде

$$Q(s) = s^r (\lambda - \lambda_1) (\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_r) = s_r \tilde{Q}(\lambda) \quad (\text{X.124})$$

и

$$Q(-s) = s^r (\lambda + \lambda_1) (\lambda + \lambda_2) \dots (\lambda + \lambda_r) = (-1)^r s^r \tilde{Q}(-\lambda). \quad (\text{X.125})$$

Поскольку

$$(s^2 + 1)^n = s^n \left(s + \frac{1}{s} \right)^n = s^n \lambda^n, \quad (\text{X.126})$$

то четная часть, определяемая ф-лой (X.119), выраженная в значениях новой частотной переменной λ , примет вид

$$\tilde{Z}_E(\lambda) = \frac{(-1)^r \lambda^n}{\tilde{Q}(\lambda) \tilde{Q}(-\lambda)}. \quad (\text{X.127})$$

На мнимой оси плоскости λ (т. е. при $\lambda = j\omega$) имеет место соотношение

$$\tilde{Q}(j\omega) \tilde{Q}(-j\omega) = \tilde{B}_0 + \tilde{B}_1 \omega^2 + \dots + \tilde{B}_r \omega^{2r} = \tilde{B}(\omega^2). \quad (\text{X.128})$$

Тогда вещественную часть сопротивления $\tilde{Z}(\lambda)$ на мнимой оси, соответствующую четной части, определяемой выражением (X.127), можно записать следующим образом:

$$\text{Re} [\tilde{Z}(j\omega)] = \frac{\omega^{2r}}{\tilde{B}(\omega^2)}. \quad (\text{X.129})$$

Это выражение совпадает с выражением для последнего члена разложения (X.30). Согласно методу Мията видим, что функции $Z(\lambda)$ соответствует реализация (в области λ) в виде простой неуравновешенной цепной схемы, состоящей из параллельных индуктивностей, последовательных емкостей (с общим числом ветвей $r = \frac{n}{2}$) и резистивного сопротивления нагрузки.

По этой реализации в области λ можно легко найти соответствующую реализацию в области s , если учесть, что преобразование переменной, определяемое выражением (X.120), приводит для каждой индуктивности или емкости в области λ соответственно к последовательному или параллельному LC контуру в области s . В частности, индуктивности L в области λ соответствует сопротивление

$$L\lambda = Ls + \frac{L}{s}. \quad (\text{X.130})$$

В области s она преобразуется в последовательный контур с индуктивностью L гн и емкостью $\frac{1}{L} \phi$. Аналогично емкости C в области λ соответствует проводимость

$$C\lambda = Cs + \frac{C}{s}. \quad (\text{X.131})$$

В области s она преобразуется в параллельный контур с емкостью $C \phi$ и индуктивностью $\frac{1}{C}$ гн.

Когда полюсы данного сопротивления имеют отличное от рис. X.10 расположение в плоскости s , то, очевидно, его можно скорректировать путем добавления сопротивления, содержащего частотные множители вида $(s - s_k)$. Точки s_k представляют собой отображения тех полюсов исходного сопротивления, которые до введения коррекции таких отображений не имели. Совокупность указанных множителей образует в данном случае соответствующий вспомогательный полином вида

$$P_0 = m_0 + n_0 = (s - s_a)(s - s_b) \dots (s - s_i). \quad (\text{X.132})$$

Так же, как и в рассмотренном выше процессе добавления множителей, здесь требуется, чтобы полином $(m_0^2 - n_0^2)$ при $s = j\omega$ [см. выражение (X.76)] был полиномом от переменной ω^2 с положительными коэффициентами. Если вначале последнее условие не выполняется, то можно добавлять пары множителей полюсов на вещественной оси до тех пор, пока оно не будет выполняться.

Обозначим число множителей полинома P_0 через k (оно всегда будет четным целым), тогда полиномы $Q(s)$ и $\tilde{Q}(\lambda)$, определяемые соответственно выражениями (X.124) и (X.125), представляют собой преобразованные полиномы, причем целое число $r = \frac{n+k}{2}$.

Теперь вместо выражения (X.119) можно записать

$$Z_E(s) = \frac{(s^2 + 1)^n (m_0^2 - n_0^2)}{Q(s)Q(-s)}, \quad (\text{X.133})$$

а вместо выражения (X.127) —

$$\tilde{Z}_E(\lambda) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \lambda^n}{\tilde{Q}(\lambda)\tilde{Q}(-\lambda)} \frac{m_0^2 - n_0^2}{(-1)^{\frac{k}{2}} s^k}. \quad (\text{X.134})$$

Учитывая, что

$$\left[\frac{m_0^2 - n_0^2}{(-1)^{\frac{k}{2}} s^k} \right]_{s=j\omega} = \frac{\beta_{-k}}{\omega^k} + \dots + \beta_0 + \dots + \beta_k \omega^k, \quad (\text{X.135})$$

можно найти следующее выражение для вещественной части заданного сопротивления на мнимой оси:

$$\operatorname{Re}[\tilde{Z}(ju)] = \operatorname{Re}[Z(j\omega)] = \frac{u^n}{\tilde{B}(u^2)} \left(\frac{\beta_{-k}}{\omega^k} + \dots + \beta_0 + \dots + \beta_k \omega^k \right). \quad (\text{X.136})$$

Полином $\tilde{B}(u^2)$ имеет тот же вид, что и полином, определяемый выражением (X.128), но его степень теперь будет не n , а $n+k$. Поэтому множитель, стоящий перед скобками в правой части выражения (X.136), при малом ω изменяется пропорционально ω^k , а при большом ω — пропорционально $\frac{1}{\omega^k}$. Произведение этого множителя и первого слагаемого суммы, стоящей в скобках, представляет собой компонентную вещественную часть, имеющую в точке $\omega = \infty$ k нулей второго порядка; следующий член имеет один такой нуль в точке $\omega = 0$ и $k-1$ нулей в точке $\omega = \infty$ и т. д.; последний член имеет k нулей второго порядка в точке $\omega = 0$. Кроме того, каждая компонентная вещественная часть содержит совпадающие нули второго порядка в точке $\omega = 1$, так же, как у вещественной части, определяемой выражением (X.129).

Таким образом, компонентные сопротивления, соответствующие членам выражения (X.136), реализуются в области s посредством простых неуравновешенных цепных схем, имеющих общее число ветвей, равное k . Каждая из этих ветвей содержит либо одну индуктивность, либо одну емкость, и все они нагружены на одинаковое (с точностью до постоянного множителя) сопротивление. Реализация его осуществляется по тому же принципу, что и реализация сопротивления, соответствующего вещественной части, определяемой выражением (X.129).

Следует заметить, что в процессе нахождения сопротивлений по слагаемым вещественной части, определяемой выражением (X.136), необходимо определить только основное сопротивление для слагаемого β_0 и сопротивления для слагаемых β_1, \dots, β_k . Сопротивления, соответствующие слагаемым β_{-i} , можно в этом случае получить по сопротивлениям, соответствующим слагаемым β_i , путем простой замены s на $\frac{1}{s}$ и умножения на дробь $\frac{\beta_{-i}}{\beta_i}$, где $i = 1, 2, \dots, k$.

Справедливость этого утверждения следует из того очевидного факта, что между четными частями рассматриваемых сопротивлений существует именно такая связь.

В качестве простого примера рассмотрим сопротивление

$$Z(s) = \frac{s^4 + \frac{2}{3}s^3 + 2s^2 + \frac{2}{3}s + 1}{s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 3s + 1}. \quad (\text{X.137})$$

Нули его четной части даются выражением

$$M = m_1 m_2 - n_1 n_2 = (s^2 + 1)^4, \quad (\text{X.138})$$

а расположение его полюсов можно определить, если представить полином знаменателя следующим образом:

$$s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 3s + 1 = (s^2 + s + 1)(s + 1)^2. \quad (X.139)$$

Полученные полюсы, очевидно, удовлетворяют необходимому требованию, так как расположены в виде пар на единичной окружности. Между прочим, и без разложения полинома знаменателя на множители видно, что нули этого полинома расположены зеркально относительно единичной окружности, учитывая, что его коэффициенты обладают симметрией относительно центрального члена. Нетрудно показать, что отмеченное условие является достаточным для получения требуемого расположения нулей в плоскости s .

Четную часть исследуемого сопротивления, очевидно, можно представить как

$$Z_E(s) = \frac{(s^2 + 1)^4}{(s^2 + s + 1)(s^2 - s + 1)(s^2 + 2s + 1)(s^2 - 2s + 1)}. \quad (X.140)$$

В области λ она принимает вид

$$\tilde{Z}_E(\lambda) = \frac{\lambda^4}{(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 4)} \quad (X.141)$$

и соответствует сопротивлению

$$\tilde{Z}(\lambda) = \frac{\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda}{\lambda^2 + 3\lambda + 2}. \quad (X.142)$$

Используя далее разложение этого сопротивления в непрерывную дробь

$$\tilde{Z}(\lambda) = \frac{1}{\frac{3}{\lambda} + \frac{1}{\frac{2}{3\lambda} + 1}}, \quad (X.143)$$

получим цепь, изображенную на рис. X.11а, соответствующую реализации в области λ , и цепь, изображенную на рис. X.11б, соответствующую реализации в области s .

Определив, что заданное сопротивление, описываемое выражением (X.137), удовлетворяет специальным условиям реализуемости, заключаем, что его можно синтезировать прямо по разложению в области s . При этом

$$Z(s) = \frac{1}{\frac{3s}{s^2 + 1} + \frac{1}{\frac{\frac{2}{3}s}{s^2 + 1} + 1}}. \quad (X.144)$$

Выражению (X.144) соответствует реализация, изображенная на рис. X.11б.

Более интересно рассмотреть другую функцию

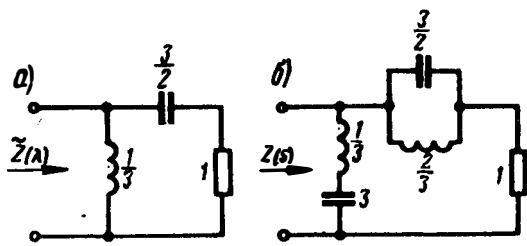
$$Z(s) = \frac{s^4 + \frac{115}{126}s^3 + \frac{208}{126}s^2 + \frac{29}{63}s + \frac{1}{2}}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 5s + 2} \quad (\text{X.145})$$

с теми же нулями четной части, что и в предыдущем примере, но для которой полином знаменателя

$$s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 5s + 2 = (s^2 + s + 1)(s + 1)(s + 2) \quad (\text{X.146})$$

не имеет требуемого расположения нулей. Ясно, что в данном случае необходимо добавить вспомогательный полином

$$P_0 = (s + 1)\left(s + \frac{1}{2}\right). \quad (\text{X.147})$$



ЭН. Ф. 011

Рис. X.11

В результате вещественная часть на мнимой оси согласно разложению (X.136) примет вид

$$\operatorname{Re}[Z(j\omega)] = \frac{u^4}{(u^2 + 1)(u^2 + 4)\left(u^2 + \frac{25}{4}\right)} \left(\frac{1}{4\omega^2} + \frac{5}{4} + \omega^2\right). \quad (\text{X.148})$$

Тогда основная вещественная часть определяется выражением

$$\frac{u^4}{(u^2 + 1)(u^2 + 4)\left(u^2 + \frac{25}{4}\right)} = \frac{\omega^{10} - 4\omega^8 + 6\omega^6 - 4\omega^4 + \omega^2}{[Q(s)Q(-s)]_{s=j\omega}}, \quad (\text{X.149})$$

в котором $Q(s)$ — преобразованный полином знаменателя, определяемый произведением множителей из выражений (X.146) и (X.147). Этой вещественной части соответствует основное сопротивление

$$Z_b(s) = \frac{2}{189} \cdot \frac{38s^5 + 20s^4 + 76s^3 + 20s^2 + 38s}{2s^6 + 11s^5 + 25s^4 + 32s^3 + 25s^2 + 11s + 2}. \quad (\text{X.150})$$

Умножив его на коэффициент — s^2 и произведя деление по методу Мията, получим сопротивление, соответствующее члену при ω^2 из выражения (X.148). Оно имеет вид

$$Z_c(s) = \frac{2}{189} \cdot \frac{189s^6 + 399s^5 + 588s^4 + 437s^3 + 209s^2 + 38s}{2s^6 + 11s^5 + 25s^4 + 32s^3 + 25s^2 + 11s + 2}. \quad (\text{X.151})$$

Заменив s на $\frac{1}{s}$, получим (не считая множителя $\frac{1}{4}$) сопротивление, соответствующее первому члену выражения (X.148):

$$Z_a(s) = \frac{2}{189} \cdot \frac{38s^5 + 209s^4 + 437s^3 + 588s^2 + 399s + 189}{2s^6 + 11s^5 + 25s^4 + 32s^3 + 25s^2 + 11s + 2}. \quad (\text{X.152})$$

Таким образом, сопротивление, заданное выражением (X.145), имеет разложение

$$Z(s) = \frac{1}{4} Z_a(s) + \frac{5}{4} Z_b(s) + Z_c(s). \quad (\text{X.153})$$

Отдельные сопротивления этого выражения, в свою очередь, можно представить в виде следующих разложений:

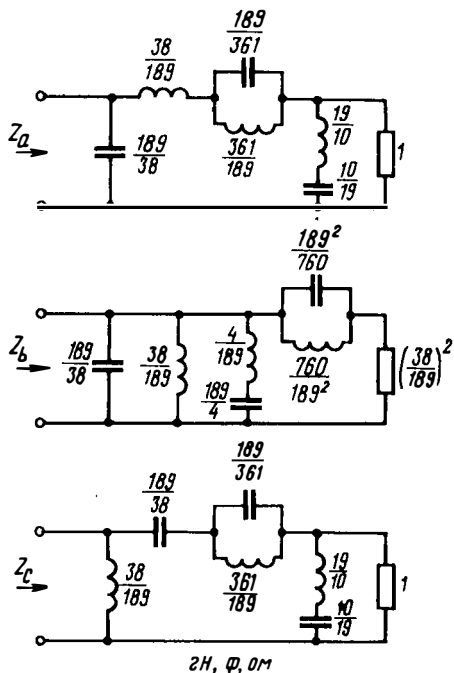
$$\frac{189}{38} Z_a(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{s + f(s)}}; \quad (\text{X.154})$$

$$\frac{189}{38} Z_b(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{s} + f(s)}; \quad (\text{X.155})$$

$$\frac{189}{38} Z_c(s) = \frac{1}{\frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{1}{s} + f\left(\frac{1}{s}\right)}}. \quad (\text{X.156})$$

В этих формулах функция $f(s)$ определяется так:

$$\begin{aligned} f(s) &= f\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{189s^5 + 361s^4 + 568s^3 + 361s^2 + 189s}{38s^5 + 20s^4 + 76s^3 + 20s^2 + 38s} = \\ &= \frac{189\lambda^2 + 361\lambda + 190}{38\lambda^2 + 20\lambda} = \frac{19}{2\lambda} + \frac{1}{\frac{20}{189\lambda} + \frac{38}{189}}. \end{aligned} \quad (\text{X.157})$$



2H, φ, Ом

Рис. X.12

Реализации сопротивлений Z_a , Z_b и Z_c , соответствующие написанным разложениям, изображены на рис. X.12. По ним нетрудно получить и требуемую реализацию сопротивления $Z(s)$, определяемого выражением (X.153).

X.5. Метод, приводящий к результатам Ботта и Даффина [24]

На основе рассмотренных методов синтеза можно разработать более логический и прямой метод получения реализации Ботта и Даффина, при котором вычисления окажутся менее громоздкими. Начнем анализ с рассмотрения сопротивления $Z_1(s)$, имеющего вещественную часть, равную нулю в двух точках мнимой оси. Снова выберем нормализацию относительно точки $\omega = \pm 1$. Тогда нули четной части этого сопротивления могут быть представлены в виде

$$M = m_1 m_2 - n_1 n_2 = (s^2 + 1)^2 p(s^2). \quad (\text{X.158})$$

Здесь четный полином $p(s^2)$ содержит все оставшиеся нули исходной функции, отличные от указанной пары нулей.

Введем в сопротивление $Z_1(s)$ вспомогательный полином $m_0 + n_0$. При этом четная часть

$$Z_{1E} = \frac{(s^2 + 1)^2 (m_0^2 - n_0^2) p(s^2)}{(m_2 m_0 + n_2 n_0)^2 - (m_2 n_0 + n_2 m_0)^2}. \quad (\text{X.159})$$

В последнем выражении полином $m_0^2 - n_0^2$ при $s = j\omega$ рассматривается как полином с положительными коэффициентами, определяемый ф-лой (X.76), причем получаем разложение вещественной части на аддитивные компоненты. Рассмотрим далее основную четную часть

$$\begin{aligned} Z_{BE} &= \frac{(s^2 + 1)^2 p(s^2)}{(m_2 m_0 + n_2 n_0)^2 - (m_2 n_0 + n_2 m_0)^2} = \\ &= \frac{(s^2 + 1)^2 p(s^2)}{(m_2^2 - n_2^2)(m_0^2 - n_0^2)} \end{aligned} \quad (\text{X.160})$$

и найдем по ней соответствующее основное сопротивление, имеющее нули на мнимой оси. Оно имеет вид

$$Z_B(s) = \frac{(s^2 + 1)(m_b + n_b)}{(m_2 + n_2)(m_0 + n_0)}. \quad (\text{X.161})$$

Задача исследования сводится к такому определению полинома $(m_0 + n_0)$, при котором четная часть выражения (X.160) соответствовала бы сопротивлению, определяемому выражением (X.161). В обычном процессе нахождения сопротивления по его четной части прежде всего определялся полином знаменателя сопротивления по знаменателю его четной части. Этот этап довольно прост, так как в данном случае лишь отбрасывались нули знаменателя чет-

ной части, расположенные в правой полуплоскости. Основная задача сводилась к определению полинома числителя требуемого сопротивления, заданного посредством полинома его знаменателя и нулей четной части. В рассматриваемом же случае нельзя независимо построить полином знаменателя, так как неизвестен множитель $(m_0 + n_0)$. Неизвестен, кроме того, не только числитель, но и знаменатель, поскольку для сопротивления (X.161) необходимо найти и полином $(m_b + n_b)$, и полином $(m_0 + n_0)$. Можно, однако, следующим образом свести данную задачу к обычной.

Для того чтобы найти сопротивление, определяемое выражением (X.161), используя четную часть (X.160), умножим числитель и знаменатель выражения (X.161) на произведение $(m_2 - n_2) \times (m_0 - n_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Ev}[(s^2 + 1)(m_b + n_b)(m_2 - n_2)(m_0 - n_0)] &= \\ &= (s^2 + 1)^2 p(s^2), \end{aligned} \quad (\text{X.162})$$

где через Ev сокращенно обозначена «четная часть». Согласно, например, методу Геверца необходимо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях переменной s^2 из обеих частей этого уравнения [после сокращения общего четного множителя $(s^2 + 1)$]. Сравним этот случай с тем, в котором искомым является сопротивление вида

$$\frac{(m_b + n_b)(m_0 - n_0)}{m_2 + n_2} \quad (\text{X.163})$$

при известной четной части вида

$$\frac{(s^2 + 1)p(s^2)}{m_2^2 - n_2^2}. \quad (\text{X.164})$$

Для указанной задачи определяющим является уравнение

$$\text{Ev}[(m_b + n_b)(m_0 - n_0)(m_2 - n_2)] = (s^2 + 1)p(s^2). \quad (\text{X.165})$$

Ясно, что эту задачу можно использовать для определения как вспомогательного полинома $(m_0 + n_0)$, так и множителя $(m_b + n_b)$ числителя основного сопротивления, характеризующегося выражением (X.161). Следовательно, при известном полиноме $(m_2 + n_2)$ уравнение (X.165) позволяет (с помощью обычного метода Геверца) найти полином, представляющий собой произведение $(m_b + n_b) \times (m_0 - n_0)$. Поскольку оба сомножителя в последнем произведении должны быть полиномами Гурвица, нетрудно разделить полученный таким образом полином на два множителя, причем к полиному $(m_0 - n_0)$ отнести нули функции, расположенные в правой полуплоскости.

При рассмотрении степеней полиномов видно, что если полиномы $(m_1 + n_1)$ и $(m_2 + n_2)$ заданного сопротивления имеют степень n , то, обозначив степени полиномов $(m_b + n_b)$ и $(m_0 + n_0)$ через r и k , соответственно, имеем

$$r + k \leq n \text{ или } k \leq n - r. \quad (\text{X.166})$$

Это вытекает из того обстоятельства, что степень числителя сопротивления (X.163) не может превышать n . Основное сопротивление, определяемое ф-лой (X.161), согласно построению его четной части [см. ф-лу (X.160)] должно иметь простой нуль в точке $s = \infty$. При этом

$$r + 2 = n + k - 1. \quad (\text{X.167})$$

Подстановка величины r , полученной из ур-ния (X.167), в выражение (X.166) дает $k \leq \frac{3}{2}$, а поскольку k должно быть целым числом, то

$$k = 1 \text{ и } r = n - 2. \quad (\text{X.168})$$

Следовательно, требуемый вспомогательный полином всегда имеет первую степень, т. е. ур-ние (X.165) всегда приводит к полиному $(m_b + n_b)(m_0 - n_0)$, имеющему не более одного нуля в правой полуплоскости.

К такому результату можно прийти, если учесть, что выражение $(s^2 + 1)p(s^2)$ при $s = j\omega$ изменяет знак только один раз в интервале изменения переменной $0 < \omega < \infty$, и, следовательно, вещественная часть функции, определяемой выражением (X.163), изменяет знак также только один раз в пределах указанного бесконечного интервала. Когда сопротивление имеет более одного нуля в правой полуплоскости, то полное изменение его угла превышает $\frac{3\pi}{2}$, и вещественная часть изменяет знак, по меньшей мере, дважды в пределах интервала $0 < \omega < \infty$.

Однако изменение знака вещественной части сопротивления в какой-либо точке мнимой оси не обязательно означает, что оно имеет нуль в правой полуплоскости. Как известно, вещественная часть сопротивления не может оставаться положительной на мнимой оси, несмотря на то, что все его нули и полюсы находятся в левой полуплоскости. Следовательно, построение сопротивления по четной части, определяемой выражением (X.164), не обязательно должно привести к полиному числителя, имеющему нули в правой полуплоскости; в этом случае оказывается, что требуемый полином $(m_0 + n_0)$ нельзя получить предложенным методом.

Покажем теперь, что для получения необходимого результата может потребоваться переход от метода контурных токов к методу узловых напряжений и что если использование одного из них оказывается неэффективным, то он с успехом заменяется другим.

Поскольку известно, что полином $(m_0 + n_0)$ представляет собой полином первой степени, его можно представить при $a > 0$ как множитель $(a + s)$. Полином числителя выражения (X.163), который можно сокращенно записать как

$$m_a + n_a = (m_b + n_b)(a - s), \quad (\text{X.169})$$

имеет четную степень, а коэффициент при его старшем члене — отрицательный. Если учесть, что четная часть заданного сопротивления $Z_1(s)$ является четной частью выражения (X.164), умноженного на $(s^2 + 1)$, то, используя для построения сопротивления метод Мията, получим

$$\frac{(m_a + n_a)(s^2 + 1)}{m_2 + n_2} = -bs + \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2}, \quad (\text{X.170})$$

где коэффициент b — положительное число. Таким образом,

$$m_a + n_a = \frac{(m_1 - bsn_2) + (n_1 - bsm_2)}{s^2 + 1}, \quad (\text{X.171})$$

откуда вытекает следующее требование:

$$\frac{m_1}{n_2} = \frac{n_1}{m_2} = bs \text{ при } s = j. \quad (\text{X.172})$$

Первое равенство в этой зависимости выполняется автоматически, так как множитель $(s^2 + 1)$ содержится в полиноме $(m_1m_2 - n_1n_2)$. Для выполнения второго равенства необходимо, чтобы соотношение

$$\left(\frac{m_1}{n_2}\right)_{s=j} = \left(\frac{n_1}{m_2}\right)_{s=j} = Z_1(j) = jX \quad (\text{X.173})$$

обеспечило выполнение неравенства $X > 0$.

Когда X — отрицательно, нужно перейти к методу узловых напряжений, что эквивалентно перестановке индексов 1 и 2 в приведенных выше выражениях. Тогда вместо соотношения (X.172) получим

$$\frac{m_2}{n_1} = \frac{n_2}{m_1} = bs \text{ при } s = j. \quad (\text{X.174})$$

Поскольку дроби $\frac{n_2}{m_1}$ и $\frac{m_1}{n_2}$ имеют противоположные знаки в точке $s = j$, то, как и в методе Ботта и Даффина, методы контурных токов и узловых напряжений взаимно исключают друг друга.

В качестве примера, иллюстрирующего описанный метод синтеза, рассмотрим сопротивление

$$Z(s) = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2} = \frac{s^4 + 1,5s^3 + 4s^2 + 2,4s + 1,6}{s^4 + 4s^3 + 11s^2 + 14s + 10}, \quad (\text{X.175})$$

для которого

$$M = m_1m_2 - n_1n_2 = (s^2 + 4)^2(s^4 + s^2 + 1). \quad (\text{X.176})$$

С учетом выражений (X.163) и (X.164) здесь возникает задача нахождения сопротивления, четная часть которого равна

$$\frac{(s^2 + 4)(s^4 + s^2 + 1)}{(s^4 + 11s^2 + 10)^2 - s^2(4s^2 + 14)^2}. \quad (\text{X.177})$$

Это сопротивление имеет, конечно, знаменатель выражения (X.175), и если составить и решить обычные уравнения Геверца

или применить метод Мията, то получим полином числителя

$$(m_b + n_b)(m_0 - n_0) = \frac{4 + s + 2s^2 - 2s^3}{10}. \quad (\text{X.178})$$

Единственный положительный вещественный нуль этого полинома находим обычным методом последовательных приближений. Он оказывается равным 1,8525. Тогда

$$m_0 + n_0 = s + 1,8525; \quad (\text{X.179})$$

$$m_b + n_b = \frac{s^2 + 0,8525s + 1,0793}{5}. \quad (\text{X.180})$$

Знаменатель основного сопротивления, определяемого ф-лой (X.161), будет равен

$$\begin{aligned} (m_2 + n_2)(m_0 + n_0) &= (s^4 + 4s^3 + 11s^2 + 14s + 10) \times \\ &\times (s + 1,8525) = s^5 + 5,8525s^4 + 18,41s^3 + \\ &+ 34,378s^2 + 35,935s + 18,525. \end{aligned} \quad (\text{X.181})$$

Следовательно, имеем

$$Z_B(s) = \frac{(s^2 + 4) \frac{s^2 + 0,8525s + 1,0793}{5}}{s^5 + 5,8525s^4 + 18,41s^3 + 34,378s^2 + 35,935s + 18,525}. \quad (\text{X.182})$$

Поскольку полином $(m_0^2 - n_0^2)$ в четной части, определяемой выражением (X.159), состоит из двух членов, заданное сопротивление соответственно можно разложить на два слагаемых, а именно

$$Z(s) = Z_a(s) + Z_b(s). \quad (\text{X.183})$$

Принимая во внимание, что

$$m_0^2 - n_0^2 = (1,8525)^2 - s^2, \quad (\text{X.184})$$

получим [с учетом выражения (X.182)]

$$\begin{aligned} Z_a(s) &= \frac{0,6863(s^2 + 4)(s^2 + 0,8525s + 1,0793)}{s^5 + 5,8525s^4 + 18,41s^3 + 34,378s^2 + 35,935s + 18,525} = \\ &= \frac{0,6863}{s + \frac{5(s^4 + 2,666s^3 + 6,1935s^2 + 6,3236s + 3,705)}{(s^2 + 4)(s^2 + 0,8525s + 1,0793)}}. \end{aligned} \quad (\text{X.185})$$

Другое компонентное сопротивление лучше всего найти методом Мията, для чего необходимо умножить сопротивление $Z_B(s)$, определяемое выражением (X.182), на $-s^2$ и выполнить один этап операции деления. Тогда остатком будет полином числителя функции $Z_b(s)$ вида

$$\begin{aligned} Z_b(s) &= \frac{s^5 + 2,666s^4 + 6,1935s^3 + 6,3236s^2 + 3,705s}{s^5 + 5,8525s^4 + 18,41s^3 + 34,378s^2 + 35,935s + 18,525} = \\ &= \frac{1}{\frac{5}{s} + \frac{(s^2 + 4)(s^2 + 0,8525s + 1,0793)}{s^4 + 2,666s^3 + 6,1935s^2 + 6,3236s + 3,705}}. \end{aligned} \quad (\text{X.186})$$

Как и следовало ожидать, компонентное сопротивление Z_a имеет нуль в точке $s = \infty$, а компонентное сопротивление Z_b — нуль в точке $s = 0$. После выделения соответствующих полюсов в обратных функциях [см. выражения (X.185) и (X.186)] получится остаток, имеющий соответственно полюс или нуль на мнимой оси, о чем можно судить по множителю $(s^2 + 4)$. Для того чтобы выделить из этого остатка пару полюсов на мнимой оси, отметим, что

$$\left[\frac{s^4 + 2,666s^3 + 6,1935s^2 + 6,3236s + 3,705}{(s^2 + 4)(s^2 + 0,8525s + 1,0793)} \right]_{s^2 \rightarrow -4} \rightarrow \frac{1,486s}{s^2 + 4}. \quad (\text{X.187})$$

Член, стоящий в правой части соотношения (X.187), при дальнейшем разложении функций Z_a и Z_b соответствует проводимости (параллельная ветвь в виде последовательного LC контура) или сопротивлению (последовательная ветвь в виде параллельного LC контура). После его вычитания из выражения, стоящего в квадратных скобках, остаток (рациональная дробь второй степени) оказывается равным

$$r(s) = \frac{s^2 + 1,18s + 0,926}{s^2 + 0,8525s + 1,0793} = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2} \quad (\text{X.188})$$

и представляет собой проводимость при разложении функции $Z_a(s)$ или сопротивление при разложении функции $Z_b(s)$. Его нули четной части находятся из полинома

$$m_1 m_2 - n_1 n_2 = s^4 + s^2 + 1. \quad (\text{X.189})$$

Как и следовало ожидать, этот множитель дает остальные нули выражения (X.176) для четной части заданного сопротивления.

Аналогично методу Ботта и Даффина получились две остаточные функции. Каждую из них можно рассматривать с помощью одного и того же метода после вычитания минимального значения ее вещественной части на мнимой оси. Поскольку остаток в рассматриваемом примере является полиномом второй степени, можно воспользоваться изложенным ранее методом, применимым к тем случаям, когда все нули четной части находятся на мнимой оси, потому что четная часть имеет на ней только одну пару нулей второго порядка. Очевидно, что при рациональной функции второй степени нет необходимости использовать ни метод Ботта и Даффина, ни любой из других, рассмотренных в данном параграфе, для того, чтобы получить форму реализации, к которой обычно они приводят. Функция второй степени слишком проста, чтобы возникла необходимость в каком-нибудь громоздком процессе синтеза.

Такая функция, определяемая выражением (X.188), в данном случае удовлетворяет одному из условий (IX.47) или (IX.48) и, следовательно, может быть синтезирована с помощью более элементарных методов, чем изложенные здесь.

При разложении функции $Z_a(s)$ согласно выражению (X.185), в котором остаток является проводимостью, легко видеть, что со-

ответствующее сопротивление удовлетворяет случаю А для условия (IX.47). Следовательно, можно осуществить такое разложение:

$$\begin{aligned} \frac{s^2 + 0,8525s + 1,0793}{s^2 + 1,18s + 0,926} &= \frac{s^2 + 0,926}{s^2 + 1,18s + 0,926} + \\ + \frac{0,8525s + 0,1533}{s^2 + 1,18s + 0,926} &= \frac{1}{1 + \frac{1,18s}{s^2 + 0,926}} + \\ + \frac{1}{1,173s + 1,173 + \frac{1}{1,143s + 0,2055}}. \end{aligned} \quad (\text{X.190})$$

Отсюда непосредственно очевидна реализация функции либо в виде сопротивления, либо в виде проводимости.

Х.6. Использование принципа дуальности в методе Мяты и других методах

При применении методов, рассмотренных в §§ X.2, X.3 и X.4, можно, используя принцип дуальности, получить большое количество дополнительных вариантов. Прежде всего, ясно, что все сказанное о сопротивлениях и их разложении посредством вещественных частей применимо также в равной степени и к проводимостям. Если при синтезе за основу выбрать метод узловых напряжений, а не метод контурных токов, то окончательная схема будет представлять собой цепное соединение компонентов, включенных параллельно, а не последовательно. При синтезе по методу « $\frac{n}{2}$ » первые две цепные схемы завершаются остаточными функциями (которые затем исследуются отдельно). Эти остаточные функции можно рассматривать либо как сопротивления, либо как проводимости независимо от того, используется ли на первом этапе метод контурных токов или метод узловых напряжений. Поскольку возможен переход от одного метода анализа к другому в начале каждого нового этапа, то, очевидно, возможно и получение многих вариантов синтеза.

При переходе от метода контурных токов к методу узловых напряжений, или наоборот, важно, чтобы соответствующий полином $(m_1 m_2 - n_1 n_2) = A(-s^2)$, будучи симметричным относительно индексов 1 и 2, был одинаковым для любой из исследуемых функций. Поэтому положительность коэффициентов A_0, A_1, \dots полинома $A(\omega^2)$ удовлетворяется для функции проводимости, если она удовлетворяется для соответствующего сопротивления. Следовательно, нет никаких препятствий для перехода к любому из методов анализа на любой стадии всего процесса разложения.



Обычные методы синтеза передаточных функций

XI.1. Синтез сопротивления передачи цепи без потерь, нагруженной на резистивное сопротивление

В данной главе основное внимание уделяется рассмотрению передаточных функций (сопротивлений или проводимостей передачи).

Обычно полагают, что сопротивление передачи является практически наиболее удобной формой передаточной функции, поскольку физически наибольший интерес представляет входной ток (от высокоомного источника, подобного пентоду) и выходное напряжение цепи. Проводимость передачи на практике менее удобна, так как идеальный источник напряжения (источник с нулевым внутренним сопротивлением) значительно труднее аппроксимировать; выходной ток также не представляет значительного интереса с физической точки зрения. По этой же причине практически мало используются коэффициенты передачи по напряжению или по току.

Однако теоретически проводимости передачи нельзя совсем исключить из рассмотрения, учитывая, что они соответствуют дуальному случаю, и, следовательно, мы тем самым исключили бы из анализа половину возможных ситуаций. С другой стороны, особое внимание к свойствам и методам синтеза, связанным с коэффициентами передачи по напряжению или по току, не вызывается необходимостью ни с общей теоретической, ни с практической точек зрения. Это объясняется тем, что характерные свойства таких функций и любые отличительные особенности их синтеза становятся очевидными, как только будут определены некоторые аналогичные свойства сопротивления и проводимости передачи.

Как отмечалось при рассмотрении синтеза входных сопротивлений (см. главу IX), главная практическая ценность метода Дарлингтона, позволяющего понять взаимозависимость между входным сопротивлением и сопротивлением передачи цепей связи без потерь, нагруженных на резистивные сопротивления, заключается в том, что он пригоден также для синтеза передаточных функций. Поэтому прежде всего обратимся к применению теории Дарлингтона именно в этом направлении.

В частности, начнем рассмотрение с выражения (IX.170) (для случая А). Для цепи, изображенной на рис. XI.1, входное сопротивление можно записать в виде

$$Z_1(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2}, \quad (\text{XI.1})$$

а сопротивление передачи — в виде

$$Z_{12}(s) = \frac{E_2}{I_1}.$$

Тогда

$$Z_{12}(s)Z_{12}(-s) = \frac{m_1m_2 - n_1n_2}{m_2^2 - n_2^2} = \frac{1}{2} [Z_1(s) + Z_1(-s)]. \quad (\text{XI.2})$$

При $s = j\omega$

$$|Z_{12}(j\omega)|^2 = \text{Re}[Z_1(j\omega)]. \quad (\text{XI.3})$$

Отсюда ясно, что метод синтеза входных сопротивлений по Дарлингтону обеспечивает возможность осуществления синтеза цепей связи без потерь, нагруженных на резистивные сопротивления, если заданы модули сопротивлений передачи на вещественных частотах ($s = j\omega$).

Прежде чем рассмотреть сформулированную задачу синтеза, полезно отметить, что выражение (XI.3) можно также получить, используя физические соображения, а именно, учитывая, что средняя входная мощность цепи без потерь, приведенной на рис. XI.1, должна (при установленном ее синусоидальном режиме) равняться средней мощности, передаваемой в сопротивление нагрузки, равное 1 ом . Это можно выразить уравнением

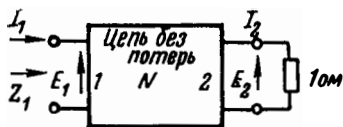


Рис. XI.1

$$|I_1|^2 \text{Re}[Z_1(j\omega)] = \frac{|E_2|^2}{1 \text{ ом}}, \quad (\text{XI.4})$$

из которого затем найти выражение

$$\left| \frac{E_2}{I_1} \right|^2 = |Z_{12}(j\omega)|^2 = \text{Re}[Z_1(j\omega)], \quad (\text{XI.5})$$

совпадающее с выражением (XI.3).

Используя принятые в предыдущих главах обозначения для вещественной части входного сопротивления и предполагая, как обычно, что полиномы $p(s)$ и $q(s)$ имеют степень n , получаем

$$|Z_{12}(j\omega)|^2 = \frac{A_0 + A_1\omega^2 + \dots + A_n\omega^{2n}}{B_0 + B_1\omega^2 + \dots + B_n\omega^{2n}} = \frac{A(\omega^2)}{B(\omega^2)}. \quad (\text{XI.6})$$

Такое представление квадрата модуля сопротивления передачи, конечно, является достаточно общим, поскольку, как было показано в главе I, сопротивление передачи представляет собой рациональную функцию, аналогичную функции входного сопротивления. Следовательно, эту функцию передачи можно записать в виде

$$Z_{12}(s) = \frac{g(s)}{q(s)} = \frac{m+n}{m_2+n_2}. \quad (\text{XI.7})$$

Здесь полином знаменателя $q(s)$ такой же, как и у входного сопротивления той же цепи, ввиду того, что полюсы этих функций представляют собой собственные частоты цепи в режиме холостого хода. Таким образом, квадрат модуля выражения (XI.7) при $s = j\omega$ имеет вид

$$\begin{aligned} |Z_{12}(j\omega)|^2 &= \left[\frac{g(s)g(-s)}{q(s)q(-s)} \right]_{s=j\omega} = \left(\frac{m^2-n^2}{m_2^2-n_2^2} \right)_{s=j\omega} = \\ &= \frac{A_0 + A_1\omega^2 + \dots + A_n\omega^{2n}}{B_0 + B_1\omega^2 + \dots + B_n\omega^{2n}} = \frac{A(\omega^2)}{B(\omega^2)}. \end{aligned} \quad (\text{XI.8})$$

Отождествление последнего выражения с вещественной частью входного сопротивления относится только к случаю, соответствующему рис. XI.1. Следовательно, теория Дарлингтона применима лишь к расчету цепей связи без потерь.

Единственное условие, накладываемое на функцию, определяемую выражением (XI.6), характеризующим цепи без потерь, заключается в том, что указанная функция должна быть вещественной и ограниченной для всех вещественных значений ω , включая точку $\omega = \infty$. В более общем случае, которому соответствуют выражения (XI.7) и (XI.8), требование ограниченности функции можно, по крайней мере теоретически, исключить, хотя, как отмечалось в главе V, это в ряде практических применений не имеет большого значения. Поэтому на практике всегда возможно ограничиться (независимо от того, относится это непосредственно к цепи, приведенной на рис. XI.1, или нет) рассмотрением только ограниченных передаточных функций.

Как было показано в главе VIII, указанные ограничения являются значительно более мягкими, чем ограничения, накладываемые на функцию модуля входного сопротивления. В отличие от последнего случая, в числителе выражений (XI.6) или (XI.8) могут отсутствовать любые коэффициенты. Обычный случай такого рода — когда полином числителя сводится к постоянной.

Метод построения цепи N , показанной на рис. XI.1, используемый, когда исследуемая функция задана в виде квадрата модуля функции $Z_{12}(s)$, определяемого выражением (XI.6), предусматривает рассмотрение данной функции в качестве вещественной части входного сопротивления, построение этого сопротивления любым из способов, описанных в главе VIII, и последующий синтез ее по методу Дарлингтона. Несмотря на то, что последний метод обеспе-

чивает требуемое решение задачи, тем не менее, его нельзя считать прямым, поскольку он накладывает лишние ограничения на синтез четырехполюсника без потерь. Это, в свою очередь, зачастую приводит к менее удобному решению, чем действительно необходимое, учитывая требование задачи.

Таким образом, когда для построения входного сопротивления по его вещественной части используется какой-нибудь алгебраический способ, автоматически достигается функция минимально реактивного сопротивления, а получающаяся в результате цепь без потерь характеризуется рядом сопротивлений z_{sk} , для которых условие вычетов во всех полюсах выполняется со знаком равенства (см. § IX.6). Действительно, сопротивление передачи $Z_{12}(s)$ зависит только от вещественной части входного сопротивления, причем это положение сохраняет силу независимо от того, является ли входное сопротивление минимально реактивной функцией или нет. Другими словами, функция $Z_{12}(s)$, как показывает выражение (IX.169) и как следует из физических соображений, не зависит от входного сопротивления z_{11} цепи без потерь, находящейся в режиме холостого хода. Напомним выражение для функции $Z_{12}(s)$ в значениях функций z_{sk} :

$$Z_{12}(s) = \frac{z_{12}}{1+z_{22}}. \quad (\text{XI.9})$$

Независимость функции $Z_{12}(s)$ от функции z_{11} очевидна, так как согласно предположению на входе включен источник тока, величина тока которого не зависит от входного сопротивления.

Используя описанный выше метод Дарлингтона для синтеза заданной функции $|Z_{12}(j\omega)|^2$, определим, кроме функций z_{12} и z_{22} , также функцию z_{11} ; естественно, что условие вычетов будет, безусловно, выполняться. Если вспомнить результаты, полученные в § VII.1, относящиеся к синтезу цепи без потерь при отмеченных условиях, то очевидно, что в решении обычно не удается избежать сильно связанных индуктивностей, применение которых на практике невозможно. С другой стороны, когда заданы только функции z_{12} и z_{22} , можно убедиться, что с помощью способов, описанных в §§ VII.2, VII.3 и VII.4, получаются более пригодные для практики структуры — цепные и другие неуравновешенные схемы, причем, как правило, не содержащие взаимных индуктивностей. По этой причине, а также учитывая непосредственный характер данного метода, целесообразно воспользоваться им для расчета цепей связи без потерь, применяя выражение (XI.9) для требуемого сопротивления передачи. Указанный метод, впервые предложенный Кауэром [26], имеет и другое преимущество, заключающееся в том, что он дает практически полезную информацию относительно ограничений, налагаемых видом цепи связи без потерь на фазовый сдвиг, соответствующий определенному модулю сопротивления передачи.

Прежде чем воспользоваться выражением (XI.9), необходимо рассмотреть процесс построения функции $Z_{12}(s)$ по ее заданному квадрату модуля при $s = j\omega$ [см. (XI.6)]. Обычные методы построения сопротивления по квадрату его модуля описаны в § VIII.8, причем подробная процедура, приведенная в указанном параграфе, применима и к данной задаче. Однако при построении полинома числителя по квадрату модуля в этом случае нет свободы выбора нулей, так как они являются также нулями функции z_{12} (исключения составляют нули, обусловленные полюсами функции z_{22} , не содержащимися также в функции z_{12} ; это может иметь место в вырожденных случаях). В то же время нули функции z_{12} цепи без потерь образуют диаграмму в плоскости s , симметричную относительно вещественной и мнимой осей (учитывая, что полиномы функций z_{sk} , характеризующих цепь без потерь, должны быть нечетными или четными).

Таким образом, можно заключить, что если требуется реализовать сопротивление передачи $Z_{12}(s)$, используя цепь без потерь, нагруженную на резистивное сопротивление, то его нули должны одинаково распределяться между правой и левой полуплоскостями. Подобная цепь, разумеется, не может применяться для реализации минимально фазовой передаточной функции, нули которой, как известно (см. § VIII.4), расположены в левой полуплоскости, за исключением особого случая, когда все они лежат на мнимой оси. В этом предельном случае также можно считать, что нули расположены в левой полуплоскости, поскольку влияние случайного рассеяния при практической реализации рассматриваемого сопротивления несколько смещает нули с мнимой оси в левую полуплоскость (см. ниже, § XII.6).

Для более точного представления, что именно подразумевается под ограничениями, связанными с методом построения цепей без потерь по известному модулю функции $Z_{12}(s)$, отметим, прежде всего, что условие, согласно которому сопротивление z_{sk} в выражении (XI.9) должны быть отношениями соответственно нечетных и четных полиномов, приводит выражение (XI.7) к виду:

$$Z_{12}(s) = \frac{m}{m_2 + n_2} \quad (\text{случай А}) \quad (\text{XI.10})$$

или

$$Z_{12}(s) = \frac{n}{m_2 + n_2} \quad (\text{случай Б}). \quad (\text{XI.11})$$

Эти случаи аналогичны случаям А и Б в методе Дарлингтона, так как они соответствуют также полиному числителя функции z_{12} , являющейся соответственно четной или нечетной.

Для того чтобы частное $\frac{g(s)}{q(s)}$ в выражении (XI.7) соответствовало сопротивлению передачи цепи без потерь, нагруженной на резистивное сопротивление, полином числителя $g(s)$ должен быть

либо четным, либо нечетным. На полином знаменателя накладывается только одно ограничение, согласно которому он должен быть полиномом Гурвица. Это является необходимым и достаточным условием обеспечения устойчивости цепи с заданной передаточной функцией.

Сравнение выражений (XI.10) и (XI.11) с выражением (XI.9) позволяет записать:

$$z_{12} = \frac{m}{n_2}, \quad z_{22} = \frac{m_2}{n_2} \quad \text{для случая А;} \quad (\text{XI.12})$$

и

$$z_{12} = \frac{n}{m_2}, \quad z_{22} = \frac{n_2}{m_2} \quad \text{для случая Б.} \quad (\text{XI.13})$$

Как и в методе Дарлингтона, оба случая взаимно исключают друг друга.

Теперь нетрудно убедиться, что указанный тип сопротивления передачи можно построить непосредственно по заданному квадрату его модуля, определяемому ф-лами (XI.6) или (XI.8). Учитывая выражения (XI.10) и (XI.11), запишем

$$B(-s^2) = m_2^2 - n_2^2 \quad (\text{XI.14})$$

для любого случая **А** или **Б**, но

$$A(-s^2) = m^2 \quad \text{для случая А} \quad (\text{XI.15})$$

и

$$-A(-s^2) = n^2 \quad \text{для случая Б.} \quad (\text{XI.16})$$

Полином $A(-s^2)$ должен, очевидно, как и следовало ожидать, быть полным квадратом, поскольку подобное условие встречается и в методе Дарлингтона. Таким образом, данный метод дает аналогичный результат, за исключением того, что условия вычетов для функций z_{sk} не обязательно выполняются со знаком равенства. Если полином $A(-s^2)$, с которого следует начинать процесс синтеза, не является полным квадратом, то в частное $A(-s^2)/B(-s^2)$ необходимо включить дополнительные множители. С этой целью числитель и знаменатель умножают на те члены $(s_v^2 - s^2)$ полинома $A(-s^2)$, которые не имеют четной кратности, аналогично тому, как мы поступали в методе Дарлингтона.

Если предположить, что полиномы $A(-s^2)$ и $B(-s^2)$ из выражений (XI.14), (XI.15) и (XI.16) получены путем требуемого включения дополнительных множителей, то построение полинома $(m_2 + n_2)$ и либо полинома m для случая **А**, либо полинома n для случая **Б** осуществляется непосредственно. Таким образом, имеем

$$m = \sqrt{A(-s^2)}; \quad n = \sqrt{-A(-s^2)} \quad (\text{XI.17})$$

соответственно для четного или нечетного полинома (в зависимости от обстоятельств).

Полином Гурвица ($m_2 + n_2$) строят как обычно, используя нули полинома $B(-s^2)$, расположенные в левой полуплоскости. Функции z_{22} и z_{12} можно тогда получить из выражений (XI.12) или (XI.13). С помощью любого из способов, описанных в главе VII, нетрудно построить цепь без потерь по указанным сопротивлениям.

Из рассмотрения приводимого здесь метода построения передаточной функции $Z_{12}(s)$ по квадрату ее модуля и синтеза цепи можно заметить, что нет необходимости контролировать величину постоянного множителя. Он не принимается во внимание, поскольку ни один из описанных методов синтеза не дает возможности осуществлять такой контроль. Для сопротивления передачи этот множитель имеет значение только в том случае, если он нормирован относительно нагрузочного сопротивления 1 ом . Действительно, теоретически выходное напряжение, соответствующее возбуждающему току 1 а , можно надлежащим образом отрегулировать посредством последующего изменения уровня сопротивления всей цепи, включая резистивное нагрузочное сопротивление. На практике более важным является не постоянный множитель, а конфигурация цепи и распределение значений ее элементов. Обычно выбирают такой метод синтеза, который дает приемлемые результаты именно с этой точки зрения и допускает любой получающийся множитель. Поскольку в данном случае используется большое количество переменных, практически не удается рассмотреть проблему оптимизации.

В качестве простого примера, иллюстрирующего предложенные методы, рассмотрим квадрат модуля

$$|Z_{12}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^6}. \quad (\text{XI.18})$$

Для того чтобы можно было воспользоваться методом Дарлингтона, будем рассматривать эту рациональную функцию как вещественную часть сопротивления. Прежде чем начать ее построение, отметим, что нули уравнения

$$B(-s^2) = m_2^2 - n_2^2 = 1 - s^6 = 0 \quad (\text{XI.19})$$

представляют собой корни шестой степени из единицы, определяемые выражениями

$$s_\nu = e^{j \frac{2\pi\nu}{6}} \quad \text{при } \nu = 1, 2, \dots, 6. \quad (\text{XI.20})$$

Нули, расположенные в левой полуплоскости, получаются при $\nu = 2, 3, 4$ или при

$$s_{2,4} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad s_3 = -1. \quad (\text{XI.21})$$

Отсюда знаменатель функции входного сопротивления

$$m_2 + n_2 = (s^2 + s + 1)(s + 1) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1. \quad (\text{XI.22})$$

Ясно, что это сопротивление совпадает со вспомогательным сопротивлением $Z'(s)$ из метода Мията, так как $M = 1$. Используя метод Геверца, находим

$$Z_1(s) = \frac{\frac{2}{3}s^2 + \frac{4}{3}s + 1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}. \quad (\text{XI.23})$$

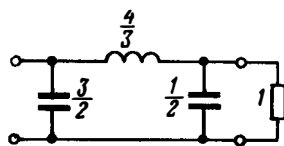
Воспользовавшись известными результатами синтеза по Мията, можно предсказать по виду вещественной части выражения (XI.18), что сопротивлению $Z_1(s)$, определяемому выражением (XI.23), соответствует простая цепная схема без потерь с резистивной нагрузкой. Эта цепная схема и представляет собой искомую цепь связи без потерь. Ее можно получить непосредственно по разложению функции

$$\frac{\frac{3}{2}s}{\frac{2}{3}s^2 + \frac{4}{3}s + 1} \left| \frac{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}{s^3 + 2s^2 + \frac{3}{2}s} \right| \frac{\frac{4}{3}s}{\frac{1}{2}s + 1} \left| \frac{\frac{2}{3}s^2 + \frac{4}{3}s + 1}{\frac{2}{3}s^2 + \frac{4}{3}s} \right| \frac{1}{\frac{1}{2}s + 1}. \quad (\text{XI.24})$$

Результирующая цепь показана на рис. XI.2. Благодаря особому виду заданной функции (XI.18) оказывается, что цепь имеет удобную для практики структуру, не содержащую взаимных индуктивностей.

Решим теперь ту же задачу, используя прямой метод, основанный на выражении (XI.9). Первый этап решения здесь заключается в том, чтобы определить, нужно ли включать в функцию какие-либо дополнительные множители. Поскольку для данного примера $A(-s^2) = 1$, становится очевидным, что указанная операция не требуется. Рассматриваемый пример представляет собой случай **A**, поэтому из выражений (XI.15) и (XI.17) получаем $m = 1$. Построение полинома знаменателя $m_2 + n_2$ по функции $B(-s^2)$ совпадает с аналогичным построением по методу Дарлингтона, следовательно,

$$Z_{12}(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}. \quad (\text{XI.25})$$



гн, ф. ом

Рис. XI.2

Используя соотношения (XI.12), имеем

$$z_{12} = \frac{1}{s^3 + 2s}, \quad z_{22} = \frac{2s^2 + 1}{s^3 + 2s}. \quad (\text{XI.26})$$

Учитывая, что все нули функции z_{12} лежат в точке $s = \infty$, можно (применяя метод разложения в цепную схему, описанный в § VII.3) показать, что требуемая цепь получается при разложении функции z_{22} в непрерывную дробь следующего вида:

$$z_{22} = \frac{1}{\frac{s}{2} + \frac{1}{\frac{4s}{3} + \frac{1}{\frac{3s}{2}}}}. \quad (\text{XI.27})$$

Эта дробь соответствует известной форме Кауэра, состоящей из неуравновешенной цепной схемы с параллельными емкостями и последовательными индуктивностями. Нетрудно видеть, что цепь без потерь будет такой же, как и цепь, изобразенная на рис. XI.2.

XI.2. Связь полученных результатов с методами построения сопротивления по его вещественной части

Изложенный прямой метод синтеза функции $Z_{12}(s)$ представляет дополнительный интерес в связи с задачей построения сопротивления по его вещественной или четной части. Основой этого являются следующие три алгебраических метода, описанные в § VIII.1:

а) разложение на элементарные дроби по методу Боде;
 б) метод Геверца, требующий решения системы однородных уравнений;

в) метод Мията, использующий процесс непрерывного деления.

Из перечисленных методов с наименьшим количеством вычислений связан метод Мията, причем вначале необходимо найти вспомогательное сопротивление $Z'(s)$, соответствующее условию $M = m_1 m_2 - n_1 n_2 = 1$, применяя для этой цели либо метод Боде, либо метод Геверца. В данном случае предпочтение отдается последнему, поскольку он непосредственно приводит к полиномиальной форме функции, необходимой в методе Мията. При использовании вещественной части, имеющей большую степень, решение соответствующей системы однородных уравнений становится довольно трудоемким, даже если систематически прибегать к процессу исключения. В этой связи представляют интерес результаты § XI.1, упрощающие вычислительные операции.

Условие $M = m_1 m_2 - n_1 n_2 = A(-s^2) = 1$, необходимое для построения вспомогательного сопротивления $Z'(s)$ в методе Мията,

всегда приводит в выражениях (XI.17) к случаю А и, следовательно, дает функцию $Z_{12}(s)$ вида:

$$Z_{12}(s) = \frac{1}{m_2 + n_2}, \quad (\text{XI.28})$$

что совпадает с выражением (XI.25) из рассмотренного выше примера. Используя соотношения (XI.12), получим

$$z_{12} = \frac{1}{n_2}; \quad z_{22} = \frac{m_2}{n_2}. \quad (\text{XI.29})$$

Все нули функции z_{12} находятся в точке $s = \infty$, и, таким образом, соответствующее разложение функции z_{22} представляет собой разложение в непрерывную дробь по Кауэру. Оно получается при осуществлении процесса непрерывного деления, описанного в § III.4 для цепной схемы с последовательными индуктивностями и параллельными емкостями.

В соответствии с выражениями (IX.103) сопротивление z_{22} со стороны выходных зажимов указанной реактивной цепной схемы преобразуется в сопротивление

$$\frac{1}{y_{22}} = \frac{n_1}{m_1}, \quad (\text{XI.30})$$

если входная пара зажимов замкнута накоротко. Применение такой короткозамкнутой цепи физически эквивалентно (для случая разложения функции z_{22} в непрерывную дробь) исключению члена, соответствующего сопротивлению последней параллельной ветви (т. е. первой параллельной ветви «номер 1» в конце цепи). Нетрудно видеть, что эта последняя ветвь всегда является параллельной (и никогда не может быть последовательной ветвью). Дело в том, что функцией возбуждения является ток и последовательная ветвь на входе цепи связи без потерь, приведенной на рис. XI.1, не оказывает влияния на функцию $Z_{12}(s)$.

Используя пример из предыдущего параграфа, получим [с учетом выражения (XI.27)]

$$y_{22} = \frac{m_1}{n_1} = \frac{s}{2} + \frac{1}{\frac{4s}{3}} = \frac{2s^2 + 3}{4s}, \quad (\text{XI.31})$$

откуда

$$m_1 + n_1 = 2s^2 + 4s + 3. \quad (\text{XI.32})$$

Последнее выражение получено с точностью до постоянного множителя. При уже известном знаменателе ($m_2 + n_2$), определяемом выражением (XI.22), находим, что вспомогательное сопротивление Мията в этом случае имеет вид

$$Z'(s) = \frac{2s^2 + 4s + 3}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}. \quad (\text{XI.33})$$

С точностью до постоянного множителя это выражение совпадает с выражением (XI.23) для входного сопротивления $Z_1(s)$. Соответствующее значение постоянного множителя можно всегда найти непосредственно, если учесть, что значение сопротивления на нулевой частоте должно равняться значению на той же частоте его известной вещественной части.

Рассмотренный метод построения полинома $(m_1 + n_1)$, соответствующего данному полиному знаменателя $(m_2 + n_2)$ (при условии $M = 1$), требует меньшего объема вычислений, чем методы, предусматривающие решение системы однородных уравнений. Он, как и метод Мията построения сопротивления, соответствующего любому другому четному полиному $M = m_1 m_2 - n_1 n_2$ (при условии, что найдено вспомогательное сопротивление), дает возможность непосредственно построить сопротивление по его известной вещественной части на мнимой оси.

XI.3. Практическое использование цепи без потерь, нагруженной на резистивное сопротивление

При расчете цепи связи без потерь, нагруженной на резистивное сопротивление, можно также использовать метод, аналогичный описанному в § XI.1. Он основан на применении метода узловых напряжений в случаях, когда заданная передаточная проводимость, характеризующая цепь, изображенную на рис. XI.1, имеет вид

$$Y_{12} = \frac{y_{12}}{1 + y_{22}} = \frac{I_2}{E_1}. \quad (\text{XI.34})$$

Здесь y_{sk} — известные входная проводимость и проводимость передачи в режиме короткого замыкания. Поскольку напряжение на резистивном сопротивлении нагрузки, равном 1 ом , численно равно отрицательному значению тока I_2 , можно записать

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{-y_{12}}{1 + y_{22}}. \quad (\text{XI.35})$$

Отсюда нетрудно видеть, что рассмотренный ранее метод синтеза цепи связи можно использовать и тогда, когда заданным является коэффициент передачи по напряжению.

Метод контурных токов удобно применять при расчете выходной цепи усилителя на пентоде или если цепь питается от источника с высокоомным сопротивлением (в пределе — от источника тока) и нагружена на резистивную нагрузку. С другой стороны, метод узловых напряжений целесообразно использовать при расчете выходной цепи таких схем, которые питаются от источника напряжения, имеющего низкоомное сопротивление, создаваемое, например, катодным повторителем.

Необходимо отметить, что метод контурных токов удобен также при расчете цепи связи, работающей от источника напряжения с

конечным внутренним сопротивлением на высокоомную нагрузку (в пределе — цепь, находящаяся в режиме холостого хода). Такой случай возникает, например, на выходе линии передачи, которая должна подключаться к усилителю на электронных лампах. Эквивалентную цепь по Тевенину для линии передачи можно представить источником напряжения с внутренним резистивным сопротивлением, включенным последовательно; при этом сеточная цепь электронной лампы представляет собой, по существу, цепь, находящуюся в режиме холостого хода, или — бесконечно большое сопротивление нагрузки.

Рисунок XI.3 иллюстрирует как можно, используя метод контурных токов, преобразовать схему, приведенную на рис. XI.1,

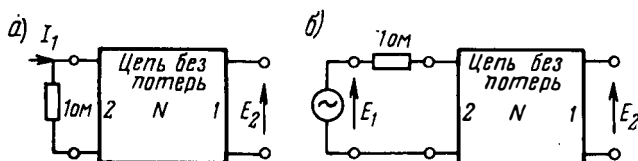


Рис. XI.3

в схему, соответствующую этому случаю, причем на рис. XI.3а показана полная цепь, но при условии, что входные и выходные зажимы переставлены местами. Согласно теореме взаимности отношение $\frac{E_2}{I_1}$ для новой схемы будет таким же, как и для исходной.

На рис. XI.3б источник тока I_1 цепи, изображенной на рис. XI.3а, преобразован в эквивалентный источник напряжения E_1 , который в данном случае оказывается включенным последовательно с резистивным сопротивлением 1 ом. Численно E_1 и I_1 равны, и, таким образом, отношение $\frac{E_2}{E_1}$ для цепи на рис. XI.3б представляет собой сопротивление передачи $Z_{12}(s)$, рассмотренное в § XI.1.

XI.4. Другой способ синтеза цепей без потерь

Если оказывается более удобным использовать метод узловых напряжений, дающий проводимость передачи, определяемую выражением (XI.34), можно воспользоваться еще одним методом синтеза цепи без потерь. Рассмотрим кратко этот метод.

Исходя из соотношений (XI.12) и (XI.13), запишем проводимость передачи цепи без потерь, находящейся в режиме короткого замыкания (для случая А):

$$y_{12} = \frac{m}{n_2} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s^4 + \dots + \alpha_k s^{2k}}{n_2} \quad (\text{XI.36})$$

Основным приемом в данном методе является разложение функции y_{12} на слагаемые, каждое из которых имеет нули только на мнимой оси. При этом реализацию составляющих можно осуществить посредством цепной схемы, полученной при разложении функции y_{22} (см. § VII.3). Реализации всей функции Y_{12} соответствует параллельное соединение таких цепных схем.

Если все коэффициенты α_k выражения (XI.36) положительны, то можно, очевидно, записать следующее разложение, соответствующее указанной процедуре:

$$y_{12} = \frac{\alpha_0}{n_2} + \frac{\alpha_1 s^2}{n_2} + \frac{\alpha_2 s^4}{n_2} + \dots + \frac{\alpha_k s^{2k}}{n_2}. \quad (\text{XI.37})$$

Это выражение совпадает с аналогичным разложением, первоначально используемым при синтезе RC цепей для реализации неуравновешенных структур [27]. Каждая компонентная проводимость передачи, определяемая соответствующим членом приведенного разложения, имеет все нули либо на нулевой, либо на бесконечной частоте. Поэтому разложение функции y_{22} даст цепные схемы с ветвями в виде одиночных индуктивностей или емкостей, как и в методе синтеза Мията (см. § X.2), где разложение вещественной части входного сопротивления RLC цепи производится по такой же схеме.

Коэффициенты α_k в выражении (XI.36) будут положительными, если m представляет собой полином Гурвица от переменной s^2 . Для этого требуется, чтобы нули заданной функции Y_{12} располагались в плоскости s на линиях, лежащих под углом к мнимой оси, не превышающим 45° . Как было показано при рассмотрении метода Мията, если ввести в выражение (XI.36) дополнительные множители, то результирующий полином числителя с положительными коэффициентами можно получить даже в том случае, когда функция Y_{12} имеет нули, расположенные на линии, лежащей под углом к мнимой оси, меньшим 45° . В этом случае в качестве дополнительных используются множители вида $(s^2 + \omega_i^2)$, соответствующие нулям на мнимой оси. До тех пор, пока функция Y_{12} не имеет нулей на вещественной оси плоскости s , конечное число множителей будет всегда достаточным для того, чтобы получить результирующий полином числителя выражения (XI.36) с положительными коэффициентами.

Выше при рассмотрении аналогичного метода синтеза RC цепей [27] отмечалось, что для данного вида реализации можно, очевидно, уменьшить число параллельных цепных схем, если использовать слагаемые, числители которых представляют собой не одиночные члены, а сумму двух следующих друг за другом членов. Такое разложение имеет вид

$$y_{12} = \frac{(\alpha_0 + \alpha_1 s^2)}{n_2} + \frac{s^4 (\alpha_2 + \alpha_3 s^2)}{n_2} + \dots + \frac{s^{2(k-1)} (\alpha_{k-1} + \alpha_k s^2)}{n_2}, \quad (\text{XI.38})$$

где числитель последней дроби имеет только один член, когда k — четное целое. Выражению в скобках в числителе каждого слагае-

мого соответствует пара нулей на мнимой оси. Разложив теперь функцию y_{22} в цепную схему (см. § VII.3), можно для каждого члена этого разложения получить реализацию неуравновешенной цепной схемы без взаимных индуктивностей. Одна из ветвей цепи будет теперь представлять собой параллельное (если ветвь последовательная) или последовательное (если ветвь параллельная) соединение L и C . Остальные ветви имеют только индуктивности или емкости, как и в случае разложения (XI.37).

Следующим важным вопросом является минимизация числа элементов, необходимых для полной реализации. Для экономии числа элементов целесообразно попробовать найти разложение полинома m в выражении (XI.36) на меньшее число компонентов, каждый из которых имеет нули только на мнимой оси (или отрицательные вещественные нули полинома от переменной s^2). Хотя всегда можно разложить любой четный полином на разность двух полиномов, имеющих нули только на мнимой оси¹, его разложение на сумму двух таких компонентных полиномов обычно выполнить нельзя. С другой стороны, легко получить другие особые случаи. Если, например, функция $m(s^2)$ от вещественной переменной s^2 подобна функции, изображенной на рис. XI.4, то нетрудно видеть, что прямую линию, имеющую положительный наклон, и сам отрицательный вещественный нуль можно найти таким способом, чтобы все пересечения прямой с функцией $m(s^2)$ были при отрицательных вещественных значениях s^2 . Поэтому после вычитания прямой линии из указанной функции остается полином $m(s^2) - (s^2 + a^2)$, имеющий все отрицательные вещественные нули от переменной s^2 . В менее благоприятных случаях для получения требуемых пересечений функции $m(s^2)$ при отрицательных вещественных значениях переменной s^2 может оказаться необходимым выбор не прямой линии, а параболы или кривой более высокого порядка². Полином, характеризующий такую функцию, должен, конечно, иметь также все отрицательные вещественные нули от переменной s^2 и, кроме этого, положительный первый коэффициент.

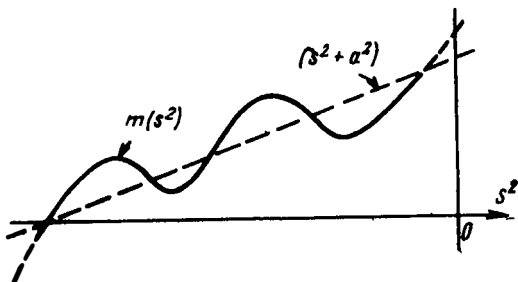


Рис. XI.4

¹ Это можно осуществить, построив полином Гурвица $m_0 - n_0$, соответствующий функции $m(s^2)$, имеющей нули в левой полуплоскости, причем полином $m = m_0^2 - n_0^2$ представляет собой требуемое разложение.

² Данная методика впервые была предложена Тракселом в связи с задачей синтеза RC цепей применительно к сервосистемам [28].

Независимо от того, осуществляется ли разложение функции y_{12} в одночленные или двучленные слагаемые [см. соответственно выражения (XI.37) и (XI.38)] или каким-либо другим способом, основная задача заключается в том, чтобы получить следующее представление функции y_{12} :

$$y_{12} = y_{12}^{(1)} + y_{12}^{(2)} + \dots + y_{12}^{(r)}, \quad (\text{XI.39})$$

в котором каждая функция $y_{12}^{(i)}$ имеет нули только на мнимой оси. При этом разложение функции y_{22} , осуществляемое согласно методам, рассмотренным в § VII.3, дает простую неуравновешенную цепную схему с проводимостью передачи в режиме короткого замыкания, равной (с точностью до постоянного множителя) $y_{12}^{(i)}$.

В этом случае каждая компонентная цепная схема будет иметь входную проводимость короткого замыкания y_{22} и проводимость передачи, которую можно записать в виде $K_i y_{12}^{(i)}$, где результирующий множитель обозначен через K_i . Если умножить уровень проводимости каждой из этих цепных схем на $\frac{K}{K_i}$, где

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \dots + \frac{1}{K_r}, \quad (\text{XI.40})$$

то их параллельное соединение (всех входных, а также выходных пар зажимов) даст в результате четырехполюсник без потерь, который имеет входную проводимость y_{22} и проводимость передачи y_{12} , определяемую выражением (XI.39), умноженную на K . Последний множитель затем становится результирующим множителем для требуемой проводимости y_{12} , определяемой выражением (XI.34), или для коэффициента передачи по напряжению, определяемому выражением (XI.35).

Этот метод реализации позволяет, очевидно, получить неуравновешенную цепь без потерь, не содержащую взаимных индуктивностей даже в том случае, когда некоторые из указанных нулей передачи (нулей функции Y_{12}) находятся на линиях, лежащих под углом к мнимой оси, превышающим 45° . Заметим, что метод каскадного синтеза, описанный в § VII.4, требует, чтобы некоторые индуктивности были взаимно связаны, если окажется, что ряд нулей передачи расположен на линиях, лежащих под углом к вещественной оси, большим 45° . Ранее уже подчеркивалось, что применение взаимных индуктивностей нежелательно с практической точки зрения. Рассмотренная здесь структура, состоящая из параллельного соединения компонентных цепей, еще менее пригодна для практики. Это объясняется тем обстоятельством, что поскольку нули передачи всей цепи зависят от сокращения передаточных проводимостей компонентных цепей, небольшая расстройка одного компонента может вызвать погрешность во всех нулях передачи. Следовательно, возможность правильной настройки такой цепи маловероятна. С другой стороны, каскадная структура, которая

допускает отдельную настройку каждой пары или ряда нулей передачи, по-видимому, может быть более успешно осуществима. Отметим, кроме того, что метод каскадного синтеза в равной степени пригоден для реализации и сопротивления, и проводимости передачи, тогда как параллельная цепная схема осуществима лишь на основе метода узловых напряжений, требующего на входе идеального (без внутреннего сопротивления) генератора напряжения.

XI.5. Цепи связи без потерь, нагруженные с обоих входов

На практике встречаются случаи, когда необходимо спроектировать цепь связи без потерь, нагруженную с обоих концов на резистивные сопротивления, как показано на рис. XI.5а. Передаточ-

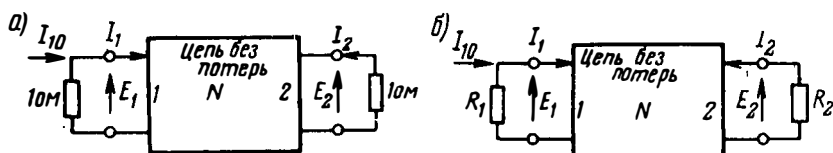


Рис. XI.5

ная функция такой цепи определяется отношением $\frac{E_2}{I_{10}}$. Если источник тока I_{10} с соответствующим резистивным сопротивлением 10 м преобразовать в источник напряжения E_{10} (численно равный I_{10}) с тем же последовательно включенным резистивным сопротивлением (как на входе цепи, показанной на рис. XI.3), то снова будет возможно осуществление синтеза коэффициента передачи по напряжению, с той лишь разницей, что теперь источник может иметь конечное внутреннее сопротивление, отличное от нуля.

Учитывая, что

$$\frac{I_1}{I_{10}} = \frac{1}{1 + Z_1}, \quad (\text{XI.41})$$

где $Z_1 = \frac{E_1}{I_1}$ входное сопротивление цепи без потерь, видим, что требуемое сопротивление передачи определяется выражением

$$\frac{E_2}{I_{10}} = \frac{E_2}{I_1} \frac{I_1}{I_{10}} = \frac{Z_{12}}{1 + Z_1}. \quad (\text{XI.42})$$

Из выражений (XI.2) и (XI.9) [или из выражений (IX.103), (IX.108) и (IX.169)] находим, что для случая А

$$Z_{12}(s) = \frac{\sqrt{m_1 m_2 - n_1 n_2}}{m_2 + n_2}; \quad (\text{XI.43})$$

такое же выражение с взаимно переставленными буквами m и n будет справедливо для случая **Б**. Используя далее ф-лу (XI.1), получим для сопротивления передачи, определяемого ф-лой (XI.42), следующее соотношение:

$$\frac{E_2}{I_{10}} = \frac{\sqrt{m_1 m_2 - n_1 n_2}}{(m_1 + m_2) + (n_1 + n_2)}, \quad (\text{XI.44})$$

а для квадрата его модуля на мнимой оси — выражение

$$\left| \frac{E_2}{I_{10}} \right|_{s=j\omega}^2 = \left[\frac{m_1 m_2 - n_1 n_2}{(m_1 + m_2)^2 - (n_1 + n_2)^2} \right]_{s=j\omega}. \quad (\text{XI.45})$$

Если учесть, что

$$\left| \frac{1 - Z_1}{1 + Z_1} \right|_{s=j\omega}^2 = \left[\frac{(m_2 - m_1)^2 - (n_2 - n_1)^2}{(m_2 + m_1)^2 - (n_2 + n_1)^2} \right]_{s=j\omega}, \quad (\text{XI.46})$$

т. е.

$$1 - \left| \frac{1 - Z_1}{1 + Z_1} \right|_{s=j\omega}^2 = \left[\frac{4(m_1 m_2 - n_1 n_2)}{(m_2 + m_1)^2 - (n_2 + n_1)^2} \right]_{s=j\omega}, \quad (\text{XI.47})$$

то выражение (XI.45) можно записать так:

$$\left| \frac{2E_2}{I_{10}} \right|_{s=j\omega}^2 = 1 - \left| \frac{1 - Z_1}{1 + Z_1} \right|_{s=j\omega}^2. \quad (\text{XI.48})$$

Прежде чем перейти к рассмотрению метода проектирования цепи без потерь для данного случая, полезно понять физическое содержание полученного результата. В этой связи целесообразно рассмотреть вариант цепи, когда соответствующие нагрузочные резистивные сопротивления, обозначенные на рис. XI.5б через R_1 и R_2 , не нормализованы к 1 ом. Запишем выражение для входного сопротивления цепи без потерь как функцию частоты на мнимой оси

$$\frac{E_1}{I_1} = Z_1(j\omega) = R_{11} + jX_{11}. \quad (\text{XI.49})$$

Тогда для средней мощности, поступающей в цепь и отбираемой от этой цепи, справедливо равенство

$$|I_1|^2 R_{11} = \frac{|E_2|^2}{R_2}. \quad (\text{XI.50})$$

Поскольку выражение (XI.41) дает

$$\frac{I_1}{I_{10}} = \frac{R_1}{R_1 + Z_1}, \quad (\text{XI.51})$$

т. е.

$$|I_1|^2 = \frac{|I_{10}|^2 R_1^2}{|R_1 + Z_1|^2}, \quad (\text{XI.52})$$

то с учетом равенства (XI.50) будем иметь

$$\frac{|E_2|^2}{R_1 R_2 |I_{10}|^2} = \frac{R_{11} R_1}{|R_1 + Z_1|^2} = \frac{1}{4} \left(1 - \left| \frac{R_1 - Z_1}{R_1 + Z_1} \right|^2 \right). \quad (\text{XI.53})$$

Окончательный результат можно получить с учетом выполнения следующих соотношений:

$$\left. \begin{aligned} |R_1 - Z_1|^2 &= (R_1 - R_{11})^2 + X_{11}^2 \\ |R_1 + Z_1|^2 &= (R_1 + R_{11})^2 + X_{11}^2 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{XI.54})$$

Если источник тока I_{10} с параллельно включенным сопротивлением R_1 преобразовать в эквивалентный источник напряжения $E_{10} = R_1 I_{10}$, то

$$\frac{4 |E_2|^2}{R_1 R_2 |I_{10}|^2} = \frac{\frac{|E_2|^2}{R_2}}{\frac{|E_{10}|^2}{4R_1}} = |t(j\omega)|^2. \quad (\text{XI.55})$$

Последнее выражение, очевидно, представляет собой отношение мощности, развиваемой в нагрузке R_2 , к максимальной мощности, развиваемой источником. Из физических соображений ясно, что в лучшем случае оно может быть равно единице. Будем рассматривать эту функцию как квадрат абсолютного значения коэффициента передачи $t(s)$ при $s = j\omega$.

В связи с такой физической интерпретацией обычно вводят функцию

$$\rho(s) = \frac{R_1 - Z_1(s)}{R_1 + Z_1(s)}, \quad (\text{XI.56})$$

называемую *коэффициентом отражения*. Он соответствует входу цепи, изображенной на рис. XI.5б и, будучи введенным в выражение (XI.53), приводит к соотношению

$$|t(j\omega)|^2 = 1 - |\rho(j\omega)|^2. \quad (\text{XI.57})$$

Это соотношение имеет ясный физический смысл, означающий, что какая бы средняя мощность ни передавалась в нагрузку, она должна быть возвращена источнику.

Из выражения (XI.55) нетрудно найти, что

$$t(s) = 2 \sqrt{\frac{R_1}{R_2} \frac{E_2}{E_{10}}}. \quad (\text{XI.58})$$

Следовательно, при $t(s) = 1$ имеем

$$\frac{E_2}{E_{10}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}. \quad (\text{XI.59})$$

Напомним, что это выражение соответствует максимально достижимому коэффициенту передачи по напряжению. В рассмотренном случае цепь без потерь эквивалентна идеальному трансформатору, с оптимальным коэффициентом трансформации $\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$.

Целесообразно отметить, что все вышеприведенные аналитические зависимости, относящиеся к ненормализованной цепи, изображенной на рис. XI.5б, отличаются от соответствующих зависимостей, полученных ранее для нормализованного случая только тем,

что Z_1 заменено на $\frac{Z_1}{R_1}$, а $\frac{E_2}{I_{10}}$ — на $\frac{E_2}{\sqrt{R_1 R_2}}$ или $\frac{E_2}{E_{10}}$ — на $\frac{E_2}{E_{10}} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$ (так как $I_{10} = \frac{E_{10}}{R_1}$). Аналогично можно получить зависимость, включающую $Z_2 = \frac{E_2}{I_2}$, если сопротивление Z_2 заменить на $\frac{Z_2}{R_2}$.

Следовательно, аналитические зависимости, характеризующие ненормализованный случай, отличаются тем, что входные сопротивления делятся на соответствующие им резистивные сопротивления нагрузки, а сопротивления передачи — на среднее геометрическое этих двух резистивных сопротивлений. Например, в ненормализованном случае и Z_{12} , и z_{12} в выражении (XI.9) необходимо разделить на $\sqrt{R_1 R_2}$, а z_{22} — на R_2 .

Рассмотренные вопросы особенно важны при проектировании цепей без потерь, нагруженных с обоих входов, так как резистивные сопротивления нагрузок с двух сторон цепи не всегда одинаковы. Когда цепь нагружена лишь на одно резистивное сопротивление, то, очевидно, не произойдет никакой потери общности, если допустить, что его величина равна 1 ом. Нетрудно заметить, что при цепи с двумя резистивными нагрузками обе они могут быть, тем не менее, нормализованы к 1 ом, как в случае, изображенном на рис. XI.5а, без ограничения общности соответствующих аналитических зависимостей. Это возможно при условии, что нормализованные величины резистивных сопротивлений нагрузки, которые мы в конечном итоге хотим присоединить к цепи без потерь, выбраны надлежащим образом.

Для нормализованного случая коэффициенты передачи и отражения определяются с помощью выражений (XI.44) и (XI.48) как

$$t(s) = \frac{2E_2}{I_{10}} = \frac{2 \sqrt{m_1 m_2 - n_1 n_2}}{(m_2 + m_1) + (n_2 + n_1)} \quad (\text{XI. 60})$$

и

$$\rho(s) = \frac{1 - Z_1}{1 + Z_1} = \frac{(m_2 - m_1) + (n_2 - n_1)}{(m_2 + m_1) + (n_2 + n_1)}. \quad (\text{XI. 61})$$

Синтез начинается с известного квадрата модуля функции

$$|t(j\omega)|^2 = \frac{A(\omega^2)}{D(\omega^2)} = \frac{A_0 + A_1 \omega^2 + \dots + A_n \omega^{2n}}{D_0 + D_1 \omega^2 + \dots + D_n \omega^{2n}}, \quad (\text{XI. 62})$$

где соответствующее входное сопротивление $Z_1(s)$, как обычно, предполагается заданным в виде отношения двух полиномов степени n .

Следует отметить, что приведенные результаты в равной степени применимы к случаю **A** и к случаю **B**, так как при взаимной замене букв m и n в выражениях для функций $t(s)$ и $\rho(s)$ последние не изменяются. Если поменять местами оба входа цепи, т. е. сделать соответствующую замену в зависимостях, характеризующих эти входы, то, как и следует ожидать (благодаря теореме взаимности), функция $t(s)$ не изменится. Таким образом, следуя приемам, описанным в § IX.8, можно прийти к выводу, что при взаимной замене полиномов m_1 и m_2 или n_1 и n_2 функция $t(s)$ не изменяется. С другой стороны, такая замена, конечно, повлияет на коэффициент отражения $\rho(s)$, и есть основания предполагать, что коэффициент отражения $\frac{1-Z_2}{1+Z_2}$ на противоположном конце цепи также будет иным. Заметим, однако, что квадрат абсолютного значения функции при $s = j\omega$, как видно из выражения (XI.46), одинаков для обоих коэффициентов отражения. Это, разумеется, определяется тем, что функция $t(s)$ нечувствительна к изменению ориентации цепи.

Нетрудно получить необходимые и достаточные условия, накладываемые на квадрат абсолютной величины, выраженный ф-лой (XI.62), гарантирующие реализацию требуемой цепи. Для этого следует, во-первых, воспользовавшись выражением (XI.61), учесть, что

$$Z_1(s) = \frac{1 - \rho(s)}{1 + \rho(s)} \quad (\text{XI.63})$$

и, во-вторых, вспомнить (см. § I.5), что для принадлежности функции $Z_1(s)$ к классу п. в. ф. необходимо, чтобы функция $\rho(s)$ была аналитической в правой полуплоскости и имела модуль на мнимой оси, не превышающий единицы. Последнее условие автоматически вытекает из выражения (XI.57), так как квадрат абсолютного значения функции $t(j\omega)$ не может быть отрицательным. Однако, чтобы убедиться в этом, а также в том, что квадрат абсолютного значения функции $\rho(j\omega)$ также не будет отрицательным, необходимо и достаточно потребовать, чтобы в выражении (XI.62) выполнялось соотношение

$$0 \leq \frac{A(\omega^2)}{D(\omega^2)} \leq 1. \quad (\text{XI.64})$$

Тогда с учетом выражений (XI.46), (XI.57) и (XI.62) имеем

$$|\rho(j\omega)|^2 = \frac{A(\omega^2) - D(\omega^2)}{D(\omega^2)} = \left[\frac{(m_2 - m_1)^2 - (n_2 - n_1)^2}{(m_2 + m_1)^2 - (n_2 + n_1)^2} \right]_{s=j\omega}. \quad (\text{XI.65})$$

Выполнение условия аналитичности функции $\rho(s)$ в правой полуплоскости осуществляется так же, как при построении полинома $(m_2 + m_1) + (n_2 + n_1)$ по функции $D(-s^2) = (m_2 + m_1)^2 - (n_2 + n_1)^2$, которое производилось для того, чтобы убедиться в принад-

лежности указанного полинома к классу полиномов Гурвица. Этот процесс [в то же время гарантирующий устойчивость цепи, поскольку он обуславливает также аналитичность функции $t(s)$, определяемой выражением (XI.60), в правой полуплоскости] известен и не накладывает никаких других ограничений на рассматриваемую рациональную функцию, выраженную ф-лой (XI.62). Простое условие (XI.64) является необходимым и достаточным для выполнения данного метода расчета.

Однако прежде чем продолжить рассмотрение описываемого метода синтеза, необходимо убедиться в том, что выражение (XI.62) удовлетворяет дополнительному условию, вытекающему из свойства цепи связи без потерь, а именно, из того, что полином $A(-s^2) = m_1 m_2 - n_1 n_2$ должен быть полным квадратом. Как обычно, если требуется, эту трудность обходят путем включения дополнительных множителей и продолжают синтез дальше.

Построив полином знаменателя $(m_2 + m_1) + (n_2 + n_1)$ функции $\rho(s)$, можно аналогичным образом построить полином числителя $(m_2 - m_1) + (n_2 - n_1)$, воспользовавшись зависимостью

$$D(-s^2) - A(-s^2) = (m_2 - m_1)^2 - (n_2 - n_1)^2. \quad (\text{XI.66})$$

В данном случае рассматриваемый метод не является единственным, так как не требуется выполнять критерия Гурвица. Полином знаменателя может иметь нули и в правой, и в левой полуплоскостях, поэтому в зависимости от распределения нулей удастся найти целый ряд возможных пригодных функций $\rho(s)$. Такая возможность выбора, между прочим, не связана с вопросом о том, является ли результирующая передаточная функция $t(s)$ минимально или неминимально фазовой.

В любом случае благодаря требованию, согласно которому полином числителя функции должен быть четным или нечетным полиномом, ее нули должны одинаково распределяться между правой и левой полуплоскостями.

Следует вместе с тем отметить, что когда осуществляется расчет межкаскадной цепи связи и представляет интерес максимизация произведения коэффициента усиления на ширину полосы прозрачности при заданной паразитной параллельной емкости, то оптимальный результат будет достигнут в том случае, если и нули, и полюсы функции $\rho(s)$ расположены лишь в левой полуплоскости [15]. Указанный круг вопросов, непосредственно не связанных с выполнением процесса синтеза, здесь не рассматривается.

Построив функцию $\rho(s)$, нетрудно выполнить синтез либо путем вычисления функции $Z_1(s)$ по выражению (XI.63) и определения цепи без потерь по методу Дарлингтона, либо непосредственно, учитывая, что согласно выражению (XI.61) по четным и нечетным частям полиномов числителя и знаменателя функции $\rho(s)$ можно сразу найти полиномы m_1 , m_2 , n_1 и n_2 . При этом сумма четных частей даст полином m_2 , а их разность — полином m_1 . Аналогично по нечетным частям находят полиномы n_2 и n_1 . Тогда функции z_{sh} цепи

без потерь определяются из известных выражений Дарлингтона (см. § IX.4, случай А)

$$z_{11} = \frac{m_1}{n_2}; \quad z_{22} = \frac{m_2}{n_2}; \quad z_{12} = \frac{\sqrt{A(-s^2)}}{n_2}. \quad (\text{XI.67})$$

Соответствующую цепь получают, используя методы, описанные в главе VII.

Следует отметить, что приведенный расчет цепи без потерь при наличии резистивных сопротивлений нагрузки на обоих ее входах заставляет фиксировать все три сопротивления z_{sk} . Поэтому он является более жестким, чем расчет цепи без потерь, нагруженной на одно сопротивление нагрузки, создающий возможность произвольного выбора входного сопротивления z_{11} . Синтез цепи без потерь при заданных всех трех сопротивлениях z_{sk} не дает той свободы, которая в большинстве случаев позволяет получить неуравновешенные схемы, не содержащие взаимных индуктивностей. Напротив, в общем случае всегда используются взаимные индуктивности, а иногда даже может потребоваться введение некоторого количества сильно связанных индуктивностей. Только в особых случаях структура цепи без потерь, нагруженной с обоих концов на резистивные сопротивления, приводит к пригодным для практики схемам.

Важным является случай, когда полином числителя выражения (XI.61) вырождается в постоянную. Тогда все нули сопротивления передачи z_{12} и, следовательно, нули четной части функции $Z_1(s)$ лежат в точке $s = \infty$. Рассмотрение метода синтеза входного сопротивления по Мията (см. § X.2) показывает, что функции $Z_1(s)$ соответствует неуравновешенная цепная схема с последовательными индуктивностями и параллельными емкостями, нагруженная на резистивное сопротивление.

Подобная возможность, очевидно, существует в том случае, когда полином числителя выражения (XI.62) вырождается в любой из членов-слагаемых полинома. Тогда четная часть функции $Z_1(s)$ имеет все (или некоторые) нули в точке $s = 0$, а остальные нули в точке $s = \infty$. Цепная схема без потерь также содержит некоторое количество последовательных емкостных или параллельных индуктивных ветвей или только ветви с одним типом элементов.

Пусть при расчете цепи без потерь, нагруженной на одно сопротивление, выбрана в качестве квадрата модуля $|t(j\omega)|^2$ функция, определяемая выражением (XI.18) (см. § XI.1), т. е.

$$|t(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^6}. \quad (\text{XI.68})$$

С учетом выражения (XI.57) имеем

$$|\rho(j\omega)|^2 = \frac{\omega^6}{1 + \omega^6}. \quad (\text{XI.69})$$

Корни уравнения

$$D(-s^2) = 1 - s^6 = 0, \quad (\text{XI.70})$$

расположенные в левой полуплоскости, определяются [согласно ур-нию (XI.19)] выражениями (XI.21). Соответствующий полином Гурвица (XI.22) имеет вид

$$(m_2 + m_1) + (n_2 + n_1) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1. \quad (\text{XI.71})$$

Для нахождения полинома числителя функции $\rho(s)$ вычислим разность [из выражения (XI.69)]

$$(m_2 - m_1)^2 - (n_2 - n_1)^2 = -s^6. \quad (\text{XI.72})$$

Следовательно,

$$(m_2 - m_1) + (n_2 - n_1) = s^3, \quad (\text{XI.73})$$

откуда

$$m_2 = m_1. \quad (\text{XI.74})$$

Поскольку полученное соотношение соответствует случаю А, можно ожидать, что результирующая цепь без потерь будет симметричной. Из выражений (XI.71) и (XI.73) легко находим полиномы m_1 , m_2 , n_1 и n_2 . С другой стороны, имеется возможность образования функции

$$\rho(s) = \frac{s^3}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}. \quad (\text{XI.75})$$

Тогда из выражения (XI.63) находим

$$Z_1(s) = \frac{2s^2 + 2s + 1}{2s^3 + 2s^2 + 2s + 1}. \quad (\text{XI.76})$$

Зная, что это сопротивление реализуется в виде простой цепной схемы, можно выполнить следующие операции:

$$2s^2 + 2s + 1 \left| \frac{s}{2s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \right. \\ \frac{2s^3 + 2s^2 + s}{s + 1} \left| \frac{2s}{2s^2 + 2s + 1} \right. \\ \frac{2s^2 + 2s}{1 | s + 1}. \quad (\text{XI.77})$$

Тогда получится цепь, изображенная на рис. XI.6. Как и предполагалось, такая цепь без потерь является симметричной.

В качестве второго примера рассмотрим квадрат модуля

$$|t(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^8}, \quad (\text{XI.78})$$

которому соответствует функция

$$|\rho(j\omega)|^2 = \frac{\omega^8}{1 + \omega^8}. \quad (\text{XI.79})$$

Для построения полинома знаменателя функции необходимо решить уравнение

$$D(-s^2) = 1 + s^8 = 0, \quad (\text{XI.80})$$

дающее восемь корней из -1 , определяемых выражением

$$s_\nu = e^{\frac{j\nu\pi}{8}} \text{ при } \nu = 1, 3, 5, \dots, 15. \quad (\text{XI.81})$$

Корнями в левой полуплоскости являются корни для $\nu = 5, 7, 9, 11$, дающие полином

$$\begin{aligned} (m_2 + m_1) + (n_2 + n_1) &= (s^2 + 0,7654s + 1)(s^2 + 1,8478s + 1) = \\ &= s^4 + 2,613s^3 + 3,414s^2 + 2,613s + 1. \end{aligned} \quad (\text{XI.82})$$

Для определения полинома числителя функции $\rho(s)$ находим выражение

$$(m_2 - m_1)^2 - (n_2 - n_1)^2 = s^8, \quad (\text{XI.83})$$

из которого непосредственно видно, что

$$m_2 - m_1 = s^4 \text{ и } n_2 - n_1 = 0. \quad (\text{XI.84})$$

Последний результат указывает на то, что на этот раз цепь будет антисимметричной. Используя выражения (XI.82) и (XI.84), получим

$$\rho(s) = \frac{s^4}{s^4 + 2,613s^3 + 3,414s^2 + 2,613s + 1}. \quad (\text{XI.85})$$

Следовательно,

$$Z_1(s) = \frac{2,613s^3 + 3,414s^2 + 2,613s + 1}{2s^4 + 2,613s^3 + 3,414s^2 + 2,613s + 1}. \quad (\text{XI.86})$$

Произведем вычисления, соответствующие разложению этого сопротивления в цепную схему

$$\begin{array}{r} 2,613s^3 + 3,414s^2 + 2,613s + 1 \quad \left| \begin{array}{l} 0,766s \\ 2s^4 + 2,613s^3 + 3,414s^2 + 2,613s + 1 \\ 2s^4 + 2,613s^3 + 2,000s^2 + 0,766s \\ \hline 1,414s^2 + 1,847s + 1 \end{array} \right. \\ \hline 1,414s^2 + 1,847s + 1 \quad \left| \begin{array}{l} 1,847s \\ 2,613s^3 + 3,414s^2 + 2,613s + 1 \\ 2,613s^3 + 3,414s^2 + 1,847s \\ \hline 0,766s + 1 \end{array} \right. \\ \hline 0,766s + 1 \quad \left| \begin{array}{l} 1,847s \\ 1,414s^2 + 1,847s + 1 \\ 1,414s^2 + 1,847s \\ \hline 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} 0,766s \\ 0,766s + 1 \\ 0,766s \\ \hline 1 \end{array} \end{array}. \quad (\text{XI.87})$$

В итоге получается цепь, изображенная на рис. XI.7. Нетрудно заметить, что если ее разделить пополам по линии $a - a$, то одна половина будет иметь обратную ориентацию относительно другой. Следовательно, как и предполагалось, полученная цепь является антисимметричной.

Рассмотренные примеры показывают, что при расчете симметричных и антисимметричных схем можно упростить выкладки путем определения сопротивления со стороны любой половины цепи (по линии $a-a$ на рис. XI.7). Для симметричной схемы сопротивление со стороны указанных новых зажимов одинаково в любом направлении; для антисимметричной схемы сопротивление в одном направлении является величиной, обратной сопротивлению в другом направлении.

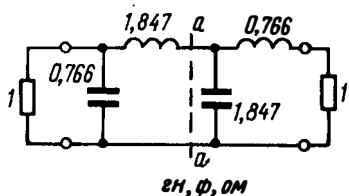


Рис. XI.7

Поскольку сопротивление в точках разделения цепи в любом случае будет вдвое проще, чем сопротивление $Z_1(s)$ полной цепи, вычисления, необходимые при реализации цепи, могут быть существенно облегчены, если найти метод, с помощью которого удастся найти выражение для сопротивления раз-

деленной цепи непосредственно по заданной величине $|t(j\omega)|$. Ниже рассматривается такая возможность.

XI.6. Методы, позволяющие упростить расчет симметричных и антисимметричных цепей

Симметричную цепь чаще всего представляют в виде каскадного встречного соединения двух одинаковых цепей, как показано на рис. XI.8. В приводимом ниже анализе полиномы m_1, m_2, n_1, n_2 характеризуют любую

из этих одинаковых цепей, для которых функция $Z_1(s) = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2}$

является сопротивлением со стороны пары зажимов 1, при условии, что сопротивлением нагрузки служит резистивное сопротивление 1 ом, включенное со стороны зажимов 2.

Сопротивление $Z_2(s)$ (см. рис. XI.8) согласно выражению (IX.165) записывается следующим образом (предполагается случай А):

$$Z_2(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{m_2 + n_1}{m_1 + n_2}. \quad (\text{XI.88})$$

Соответственно сопротивление передачи для каждой из цепей, рассматриваемой в противоположной ориентации, определяется выражением (XI.43) при взаимной замене букв m_1 и m_2 . Обозначим сопротивление передачи такой цепи через $Z_{21}(s)$, указывая этим на то, что оно относится к передаче энергии в направлении $2 \rightarrow 1$. Сопротивление передачи $Z_{12}(s)$ тогда будет соответствовать передаче

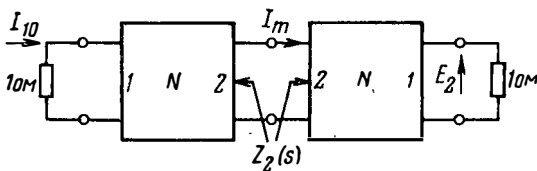


Рис. XI.8

энергии в направлении $1 \rightarrow 2$. Поэтому исходя из рис. XI.8, можно записать

$$Z_{21}(s) = \frac{E_2}{I_m} = \frac{\sqrt{m_1 m_2 - n_1 n_2}}{m_1 + n_2}. \quad (\text{XI.89})$$

Пользуясь теоремой Тевенина, нетрудно найти, что ток I_m определяется выражением

$$I_m = \frac{I_{10} Z_{21}}{2Z_2}. \quad (\text{XI.90})$$

Подставив сюда выражение (XI.89), получим

$$\frac{2E_2}{I_{10}} = \frac{Z_{21}^2}{Z_2} = \frac{m_1 m_2 - n_1 n_2}{(m_2 + n_1)(m_1 + n_2)}. \quad (\text{XI.91})$$

Если обозначить $P(s)$ и $P(-s)$ через P_+ и P_- соответственно и применить аналогичные обозначения для полинома $Q(s)$, то выражение (XI.91) можно переписать так:

$$\frac{2E_2}{I_{10}} = \frac{(P_+ Q_- + P_- Q_+)}{2P_+ Q_+}. \quad (\text{XI.92})$$

Квадрат модуля этого выражения при $s = j\omega$ будет

$$\left. \frac{2E_2}{I_{10}} \right|^2 = \frac{(P_+ Q_- + P_- Q_+)^2}{4P_+ Q_+ P_- Q_-} = \frac{(P_+ Q_- + P_- Q_+)^2}{(P_+ Q_- + P_- Q_+)^2 - (P_+ Q_- - P_- Q_+)^2}, \quad (\text{XI.93})$$

откуда ясен смысл вычислений при $s = j\omega$. Пользуясь далее сокращенными обозначениями

$$\frac{1}{2}(P_+ Q_- + P_- Q_+) = M = m_1 m_2 - n_1 n_2 \quad (\text{XI.94})$$

и

$$\frac{1}{2}(P_+ Q_- - P_- Q_+) = N = m_1 n_1 - m_2 n_2, \quad (\text{XI.95})$$

можно записать

$$\left| \frac{2E_2}{I_{10}} \right|^2 = \frac{M^2}{M^2 - N^2} = \frac{1}{1 - \frac{N^2}{M^2}}, \quad (\text{XI.96})$$

откуда снова ясен смысл вычислений при $s = j\omega$.

Поскольку M и N являются соответственно четным и нечетным полиномами от переменной s , функция $\frac{-N^2}{M^2}$ при $s = j\omega$ представляет собой квадрат нечетной рациональной функции от переменной ω , т. е.

$$\left(\frac{-N^2}{M^2} \right)_{s=j\omega} = \left(\frac{\alpha_1 \omega + \alpha_3 \omega^3 + \dots + \alpha_{2k+1} \omega^{2k+1}}{\beta_0 + \beta_2 \omega^2 + \dots + \beta_{2k} \omega^{2k}} \right)^2. \quad (\text{XI.97})$$

Учитывая полученные выражения, приходим к выводу, что любая заданная функция (являющаяся квадратом передаточной функции) $|t(j\omega)|^2$ реализуема в виде симметричной цепи при условии, что ее возможно представить в виде функции, обратной сумме единицы и квадрата нечетной рациональной функции, определяемой выражением (XI.97). Для этой функции коэффициенты α_i и β_i могут оказаться либо положительными, либо отрицательными, причем любой из них может быть равен нулю. Таким образом, если каждый полином вырождается в единственный член, то получают функцию, подобную выражению (XI.68) для $|t(j\omega)|^2$.

По такой нечетной рациональной функции от переменной ω можно непосредственно найти величины M и N и далее из выражений (XI.94) и (XI.95) — соотношения:

$$M + N = P_+ Q_-; \quad (\text{XI.98})$$

$$M - N = P_- Q_+. \quad (\text{XI.99})$$

Из этих соотношений очевиден метод нахождения полиномов $P(s)$ и $Q(s)$ и, следовательно, сопротивления $Z_2(s)$, определяемого выражением (XI.88). Для этого надо просто отнести нули полинома $M + N$, расположенные в левой полуплоскости, к полиному $P(s)$, а нули, расположенные в правой полуплоскости, — к полиному $Q(-s)$.

Так, для функции, определяемой выражением (XI.68), непосредственно находим, что $M = 1$ и $N = s^3$. Следовательно, полином, определяемый соотношением (XI.98), имеет нули, которые нетрудно найти из уравнения

$$1 + s^3 = 0. \quad (\text{XI.100})$$

Корни его равны

$$s_\nu = e^{\frac{j\nu\pi}{3}} \quad \text{при } \nu = 1, 3, 5. \quad (\text{XI.101})$$

Нули, расположенные в правой полуплоскости, находим при $\nu = 1$ и $\nu = 5$, а нуль, расположенный в левой полуплоскости, — при $\nu = 3$. Полиномы P и Q , очевидно, будут иметь вид:

$$P(s) = s + 1; \quad Q(s) = s^2 + s + 1. \quad (\text{XI.102})$$

Сопротивление [определяемое выражением (XI.88)] в точках разбивания цепи оказывается равным

$$Z_2(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1} = \frac{1}{s + \frac{1}{s+1}}. \quad (\text{XI.103})$$

Ему соответствует цепь, изображенная на рис. XI.9. Нетрудно видеть, что она представляет собой половину цепи, приведенной на рис. XI.6.

Интересно отметить, что все приведенные выше зависимости применимы в равной степени как к случаю А, так и к случаю Б, хотя, начав вывод с выражения (XI.88), мы предположили, что ситуация относится к случаю А. В самом деле, все полученные зависимости [начиная с выражения (XI.88)] будут справедливы при взаимной замене в каждой из них букв m и n . Заметим, что такая же замена полиномов P и Q в выражениях (XI.94) и (XI.95) приводит просто к изменению алгебраического знака при N и, следовательно, взаимно изменяет выражения (XI.98) и (XI.99). Поэтому сопротивление $Z_2(s)$ можно рассматривать и как отношение $\frac{Q}{P}$, и как отношение $\frac{P}{Q}$. Другими словами, если потребуется, цепи, показанные на рис. XI.6 и XI.9, можно менять на обратные. Этот результат, конечно, является известным. Он обычно справедлив независимо от того, симметрична цепь или нет [см. обсуждение данного вопроса в § I.6, в частности, выражения (I.112) — (I.116)].

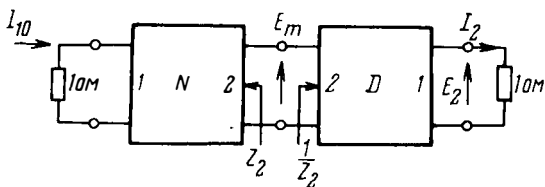
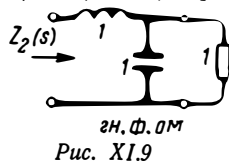


Рис. XI.10

Рассмотрим теперь антисимметричную цепь, приведенную на рис. XI.10. Как видно из рисунка, мы снова имеем два четырехполюсника без потерь, включенные встречно, но один из них в данном случае является дуальным или обратным относительно другого. Таким образом, сопротивлениями в точках разбиения цепи являются $Z_2(s)$ (в левую сторону) и $\frac{1}{Z_2(s)}$ (в правую сторону).

Здесь, как и ранее, применимо выражение (XI.88), но вместо выражения (XI.89) мы теперь имеем

$$Z_{21}(s) = \frac{I_2}{E_m} = \frac{E_2}{E_m} = \frac{\sqrt{m_1 m_2 - n_1 n_2}}{m_1 + n_2}. \quad (\text{XI.104})$$

Это вытекает из того факта, что проводимость передачи дуальной цепи D (отношение выходного тока к входному напряжению) численно равна сопротивлению передачи цепи N (отношение выходного

напряжения к входному току). По теореме Тевенина находим, что напряжение E_m определяется выражением

$$\frac{E_m}{I_{10}} = \frac{Z_{21} \frac{1}{Z_2}}{Z_2 + \frac{1}{Z_2}} = \frac{Z_{21}}{Z_2^2 + 1}. \quad (\text{XI.105})$$

Тогда подстановка выражения (XI.104) дает

$$\frac{2E_2}{I_{10}} = \frac{2Z_{21}^2}{Z_2^2 + 1} = \frac{2(m_1 m_2 - n_1 n_2)}{(m_2 + n_1)^2 + (m_1 + n_2)^2} = \frac{P_+ Q_- + P_- Q_+}{P_+^2 + Q_+^2}. \quad (\text{XI.106})$$

Квадрат модуля этой функции при $s = j\omega$ имеет вид

$$\left| \frac{2E_2}{I_{10}} \right|^2 = \frac{(P_+ Q_- + P_- Q_+)^2}{(P_+^2 + Q_+^2)(P_-^2 + Q_-^2)} = \frac{(P_+ Q_- + P_- Q_+)^2}{(P_+ Q_- + P_- Q_+)^2 + (P_+ P_- - Q_+ Q_-)^2}, \quad (\text{XI.107})$$

откуда ясен смысл вычислений при $s = j\omega$. Используя приведенные выше сокращенные обозначения (XI.94), получим вместо выражения (XI.95)

$$\frac{1}{2}(P_+ P_- - Q_+ Q_-) = W = \frac{1}{2} [(m_2^2 - n_1^2) - (m_1^2 - n_2^2)]. \quad (\text{XI.108})$$

Это выражение (подобно полиному M) является четным полиномом от s . Квадрат модуля выражения (XI.107) можно тогда записать в виде

$$\left| \frac{2E_2}{I_{10}} \right|^2 = \frac{M^2}{M^2 + W^2} = \frac{1}{1 + \frac{W^2}{M^2}}, \quad (\text{XI.109})$$

откуда вновь ясен смысл вычислений при $s = j\omega$.

Из полученных результатов заключаем, что квадрат модуля заданной передаточной функции реализуем в виде антисимметричной цепи, если он представляет собой функцию, обратную функции, равной сумме единицы и квадрата четной рациональной функции [подобно выражению (XI.97), деленному на ω^2]. Используя полиномы W и M , которые могут быть найдены непосредственно по этой четной рациональной функции, можно вместо зависимостей (XI.98) и (XI.99) найти следующие соотношения:

$$2(W + jM) = (P_+ + jQ_+)(P_- + jQ_-); \quad (\text{XI.110})$$

$$2(W - jM) = (P_+ - jQ_+)(P_- - jQ_-). \quad (\text{XI.111})$$

Метод нахождения полиномов $P(s)$ и $Q(s)$ состоит теперь из двух этапов. На первом этапе необходимо построить полином $(P_+ + jQ_+)$, используя нули выражения $(W + jM)$, расположенные

в левой полуплоскости; тогда вещественная и мнимая части полинома будут соответственно $P(s)$ и $Q(s)$.

Отличительной особенностью в данном случае является появление полинома с комплексными коэффициентами, т. е. вида $P(s) + jQ(s)$. Обычно такие полиномы не встречаются в теории цепей, поскольку все функции сопротивлений или проводимостей являются вещественными при вещественных значениях переменной s . Следует напомнить, что прилагательное «вещественная» в выражении «положительная вещественная функция» означает, что функция является вещественной при вещественных значениях s . Прилагательное «положительная» указывает на то, что вещественная часть функции является положительной в правой полуплоскости s . «Положительная функция» обладает последним свойством, но не обязательно является вещественной при вещественных значениях s .

Таким образом, если функция $Z_2 = \frac{P(s)}{Q(s)}$ представляет собой п. в. ф. [каким и должно быть сопротивление, определяемое выражением (XI.88)], то функция

$$Z = Z_2 + j = \frac{P_+ + jQ_+}{Q_+} \quad (\text{XI.112})$$

хотя, очевидно, и положительная, однако не является п. в. ф.

Необходимое и достаточное условия принадлежности функции к классу «положительных» функций требуют, чтобы ее полюсы и нули располагались в левой полуплоскости, а ее вещественная часть была положительной на мнимой оси. Справедливость этого утверждения можно установить, используя аргумент, приведенный в главе I при рассмотрении положительных вещественных функций. Поскольку принадлежность функции Z_2 , определяемой выражением (XI.112), к классу п. в. ф. требует, чтобы функция Z была положительной, нули комплексного полинома $P_+ + jQ_+$ должны лежать в левой полуплоскости. Следовательно, в выражении (XI.110) мнимую ось можно использовать как «сортирующую границу» для разделения полинома $2(W + jM)$ на два полинома $(P_+ + jQ_+)$ и $(P_- + jQ_-)$.

Учитывая свойство комплексных чисел, полином $(P_+ + jQ_+)$ можно далее разбить на полиномы P_+ и Q_+ . Значит, снова можно найти сопротивление $Z_2(s)$ в точках разбиения цепи.

Как и в случае симметричной цепи, взаимная перестановка местами полиномов $P(s)$ и $Q(s)$ просто изменяет алгебраический знак полинома W , который не оказывает влияния на функцию, определяемую выражением (XI.109). Поскольку речь идет о результирующей цепи, изображенной на рис. XI.8, указанное изменение знака сказывается лишь на взаимной замене входа и выхода.

В качестве примера, иллюстрирующего описанный метод, рассмотрим опять функцию, определяемую выражением (XI.78), для

которой $\frac{W^2}{M^2} = s^8$, т. е. $W = s^4$ и $M = 1$. Нули полинома (XI.110) являются корнями уравнения

$$W + jM = s^4 + j = 0 \quad (\text{XI.113})$$

и равны

$$s_\nu = e^{\frac{-j\nu\pi}{8}} \quad \text{при } \nu = 1, 5, 9, 13. \quad (\text{XI.114})$$

Нули, расположенные в левой полуплоскости, получаются при $\nu = 5$ и 9. Они дают полином

$$\begin{aligned} P(s) + jQ(s) &= s^2 + s\sqrt{2}e^{\frac{j\pi}{8}} + e^{\frac{j\pi}{4}} = \\ &= (s^2 + 1,306s + 0,707) + j(0,5414 + 0,707). \end{aligned} \quad (\text{XI.115})$$

Требуемое сопротивление определяется выражением

$$Z_2(s) = \frac{s^2 + 1,306s + 0,707}{0,5414s + 0,707} = 1,847s + \frac{1}{0,766s + 1}. \quad (\text{XI.116})$$

Ему соответствует половина цепи, изображенной на рис. XI.7. Даже из приведенного простого примера видно, что сокращение вычислительной работы имеет существенное значение.

Возвращаясь снова к симметричной цепи, изображенной на рис. XI.8, и к выводу соответствующего сопротивления передачи, определяемого выражением (XI.91), допустим, что правая цепь N (включая резистивное сопротивление нагрузки) характеризуется уровнем сопротивления, умноженным на коэффициент r^2 . Тогда сопротивление передачи $Z_{21}(s)$, определяемое выражением (XI.89), оказывается умноженным на r^2 и выражение (XI.90) для тока I_m примет вид

$$I_m = \frac{r^2 I_{10} Z_{21}}{(1 + r^2) Z_2}. \quad (\text{XI.117})$$

Таким образом, вместо выражения (XI.91) получим

$$\frac{2E_2}{I_{10}} = \frac{2r^2}{1 + r^2} \frac{Z_{21}^2}{Z_2}. \quad (\text{XI.118})$$

С точностью до постоянного множителя $\frac{2r^2}{1 + r^2}$ этот результат совпадает с полученным при изменении уровня сопротивления в правой части цепи, изображенной на рис. XI.8. Следовательно, цепь в данном случае может согласовать любое отношение конечных резистивных сопротивлений источника и нагрузки, причем она будет иметь одну и ту же функцию требуемого общего передаточного коэффициента $\frac{2E_2}{I_{10}}$. Полезность указанного вывода очевидна, учитывая тот факт, что обычно на практике для получения того же эффекта приходится применять трансформатор, включаемый на входе или на выходе.

Важно, однако, отметить, что нельзя избежать дополнительных расходов, связанных со стоимостью трансформатора, без компенсации потерь — в рассмотренном примере, потерь в усилении. Значит, при таком способе согласования сопротивлений источника и нагрузки получающийся в итоге общий постоянный множитель будет меньше, чем при использовании идеального трансформатора связи. Идеальный трансформатор с коэффициентом трансформации по сопротивлению r^2 имеет коэффициент трансформации по напряжению, равный r , поэтому его включение на выходе увеличивает результирующее напряжение на нагрузке (следовательно, и передаточную функцию $\frac{2E_2}{I_{10}}$) в r раз. Отношение этой передаточной функции к передаточной функции, определяемой выражением (XI.118), равно

$$\frac{1+r^2}{2r} = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right). \quad (\text{XI.119})$$

Получившаяся известная функция имеет величину больше единицы при всех значениях r , кроме $r = 1$, когда она становится равной единице. Таким образом, применение идеального трансформатора дает более высокое общее усиление, но во многих случаях его недостаточно, чтобы оправдать стоимость трансформатора. Кроме того, реальный трансформатор не является идеальным, и, следовательно, требуемая передаточная функция будет отличаться от рассмотренной выше.

Подобный вариант нельзя применить к антисимметричным цепям. Поэтому описанное простое устройство, позволяющее получать согласование произвольных уровней сопротивлений источника и нагрузки, можно использовать только в том случае, когда требуемая передаточная функция удовлетворяет упомянутому ранее условию, допускающему ее реализацию в виде симметричной цепи.

XI.7. Способ согласования сопротивлений источника и нагрузки

Метод расчета, изложенный в двух предыдущих параграфах, относится к случаю согласования, когда источником возбуждения является источник напряжения с конечным (отличным от нуля) внутренним резистивным сопротивлением. В соответствии с этим методом должны быть известны все три сопротивления, характеризующие цепь без потерь. Указанное условие существенно ограничивает возможность получения требуемых на практике структур. В данном и последующих параграфах рассматриваются другие методы, с помощью которых можно реализовать нужное согласование источника.

Если снова обратиться к цепям связи без потерь, нагруженным на одно сопротивление (см. § XI.1), то оказывается, что согласование источника напряжения с конечным (отличным от нуля) внутренним сопротивлением связано с управлением входным сопротивлением $Z_1(s)$. Когда это сопротивление постоянно, то, очевидно, несущественно, является ли источник возбуждения источником тока или источником напряжения, а если в качестве него используется источник напряжения, то несущественно, учитывается ли последовательно включенное сопротивление источника или нет. Входной ток в любом случае будет пропорционален напряжению, и, следовательно, в результате всегда получается одинаковая передаточная функция (с точностью до постоянного множителя).

Входное сопротивление не может быть постоянным (кроме тривиальных случаев), так как тогда необходимо, чтобы его вещественная часть была постоянной, а из выражения (XI.3) видно, что она равна квадрату модуля требуемого сопротивления передачи. Однако, можно последовательно с сопротивлением $Z_1(s)$ включить дополняющее сопротивление для того, чтобы результирующее входное сопротивление имело нужное постоянное значение. Действительно, этот прием, используемый в цепи связи без потерь, нагруженной на одно сопротивление, оказывается полезным, хотя он не всегда обеспечивает решение поставленной задачи, ибо для существования дополняющего сопротивления необходимо выполнение ряда условий.

При рассмотрении этого вопроса в § VIII.6 было показано, что такими необходимыми и достаточными условиями для заданного входного сопротивления $Z_1(s)$ цепи без потерь, нагруженной на резистивное сопротивление, является его принадлежность к классу минимально реактивных функций, т. е. функций, не имеющих полюсов на мнимой оси. Методы синтеза по заданным функциям z_{22} и z_{12} , которые мы хотим применить для реализации цепи без потерь, обычно не дают полной гарантии того, что для функции z_{11} условие вычетов будет выполняться во всех полюсах со знаком равенства (см. § VII.3). При этом результирующее входное сопротивление $Z_1(s)$ обычно уже не является минимально реактивной функцией. Когда вид передаточной функции допускает синтез цепи без потерь по функциям z_{22} и z_{12} , который не приводит к входному сопротивлению $Z_1(s)$, имеющему полюсы на мнимой оси, можно применить метод синтеза цепи без потерь, нагруженной с обоих входов, обычно позволяющий получить требуемую структуру.

Однако в этом случае если создадутся выигрыш, то весьма малый, и вместе с тем цепь усложняется.

Важной особенностью описанного метода является то, что при применении дополняющего сопротивления требуется только принадлежность функции $Z_1(s)$ к классу минимально реактивных функций и вовсе не обязательно, чтобы соответствующая проводимость

$Y_1(s) = \frac{1}{Z_1(s)}$ принадлежала к классу функций минимальной реактивной проводимости. Таким образом, если использовать при расчете цепи связи без потерь, нагруженной с одной стороны, метод узловых напряжений, дающий в результате входную проводимость $Y_1(s)$ с полюсами на мнимой оси, то маловероятно, что она будет иметь также нули на этой оси. При этом функция $Z_1(s)$ обычно не имеет полюсов на мнимой оси, и дополняющее сопротивление построить можно. Аналогично при анализе методом контурных токов, хотя функция $Z_1(s)$, по-видимому, имеет полюсы на мнимой оси, маловероятно, что она будет иметь на ней и нули. Тогда функцию $Y_1(s)$ обычно дополняют подключением соответствующей цепи параллельно входу исходной цепи без потерь.

Дополняющее сопротивление или проводимость можно синтезировать любым из методов реализации входных сопротивлений, рассмотренных в главах IX и X. В большинстве случаев, по всей вероятности, окажется целесообразным применить один из методов синтеза цепей, не содержащих трансформаторов (см. главу X). Однако при использовании метода Дарлингтона с учетом выражения (XI.3) становится очевидным, что дополняющая цепь не только имеет входное сопротивление, дополнительное к входному сопротивлению исходной цепи, но и что квадрат модуля ее сопротивления передачи также является дополнительной функцией к квадрату модуля исходной цепи. Таким образом, если дополняющую цепь рассматривать как цепь связи, ее передаточная функция и передаточная функция заданной цепи связи будут взаимно дополняющими в том смысле, что сумма квадратов их модулей оказывается постоянной (равной после нормализации единице). Так, когда одна цепь представляет собой фильтр нижних частот, то другая будет фильтром верхних частот, пропускающим сигналы тех частот, которые фильтр нижних частот запирает, и наоборот. Соединение двух цепей, имеющее постоянное результирующее входное сопротивление, называется *классом фильтров постоянного резистивного сопротивления* (constant-resistance filter group).

В качестве примера рассмотрим дополняющую цепь к цепи, изображенной на рис. XI.2. Квадрат модуля сопротивления передачи исходной цепи, определяемый выражением (XI.18), одновременно является вещественной частью ее входного сопротивления. Вещественная часть входного сопротивления (или квадрат модуля сопротивления передачи) дополняющей цепи при реализации цепи в виде четырехполюсника без потерь, нагруженного на резистивное сопротивление 1 ом , имеет вид

$$\operatorname{Re} [Z_1^c(j\omega)] = |Z_{12}^c(j\omega)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \omega^6} = \frac{\omega^6}{1 + \omega^6}, \quad (\text{XI.120})$$

где индекс c относится к величинам, характеризующим дополняющую цепь [complementary network (*прим. ред.*)]. Соответствующее входное сопротивление $Z_1^c(s)$ можно легко найти, вычтя из единицы

сопротивление $Z_1(s)$, определяемое выражением (XI.23). Тогда получим сопротивление

$$Z_1^c(s) = \frac{\frac{1}{3}s^3 + \frac{4}{3}s^2 + \frac{2}{3}s}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}, \quad (\text{XI.121})$$

которое представляет собой функцию $Z_1(s)$, но с заменой переменной s на переменную $\frac{1}{s}$. Этого и следовало ожидать, учитывая вид вещественной части выражения (XI.120) и замену в функции (XI.18) переменной ω на $\frac{1}{\omega}$.

Можно легко построить цепь из цепи, приведенной на рис. XI.2, заменив индуктивности емкостями с обратными по величине значениями, и наоборот, рассматривая выражение (XI.120) как заданное для передаточной функции. Очевидно, что полюсы соответствующей функции $Z_{12}^c(s)$ будут совпадать с полюсами функции $Z_{12}(s)$, определяемой выражением (XI.25), а полиномом ее числителя, как непосредственно видно, является просто s^3 . Таким образом, имеем

$$Z_{12}^c(s) = \frac{s^3}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}. \quad (\text{XI.122})$$

Поскольку эта функция соответствует случаю Б, то, применив соотношения (XI.13), получим

$$\left. \begin{aligned} z_{12} &= \frac{s^3}{2s^2 + 1} \\ z_{22} &= \frac{s^3 + 2s}{2s^2 + 1} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{XI.123})$$

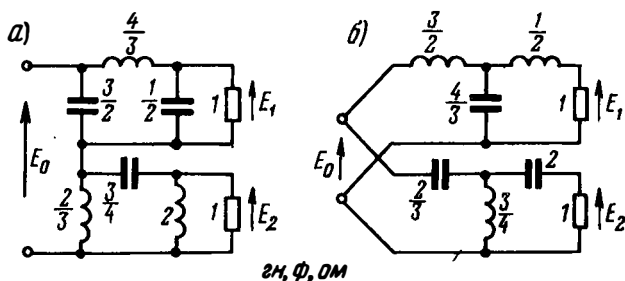
Все нули сопротивления z_{12} лежат в точке $s = 0$. Следовательно, осуществимо разложение функции z_{22} по Кауэру, дающее цепь с параллельными индуктивностями и последовательными емкостями. Разложение указанной функции в непрерывную дробь имеет вид

$$z_{22} = \frac{1}{\frac{1}{2s} + \frac{1}{\frac{4}{3s} + \frac{1}{\frac{1}{3}}}}. \quad (\text{XI.124})$$

Соответствующая цепь дана на рис. XI.11а, где также приведена дополняющая цепь (см. рис. XI.2). О полной дуальности этого случая можно судить по рис. XI.11б. Здесь показана цепь, эквивалентная изображенной на рис. XI.11а, в том смысле, что обе цепи обеспечивают дополнительные функции вида

$$\left| \frac{E_1}{E_0} \right|^2 = \frac{1}{1 + \omega^6}; \quad \left| \frac{E_2}{E_0} \right|^2 = \frac{\omega^6}{1 + \omega^6}, \quad (\text{XI.125})$$

а со стороны своих входов дают чисто резистивное сопротивление 1 ом. Эти цепи представляют собой простые примеры класса фильтров нижних — верхних частот постоянного резистивного сопротивления.



гн, ф, ом

Рис. XI.11

XI.8. Использование скрещенной цепи постоянного резистивного сопротивления

Цепь связи без потерь, очевидно, целесообразно использовать в тех случаях, когда известен только модуль передаточной функции, а вид фазовой характеристики не играет роли. Фазовая характеристика цепи связи без потерь всегда изменяется от некоторого минимального до некоторого максимального значения, ибо для таких случаев передаточная функция должна иметь полностью симметричную диаграмму нулей. Если требуется управлять распределением нулей и модулем передаточной функции, цепь связи без потерь в общем случае неприемлема.

Цепь минимально фазового сдвига, передаточная функция которой не должна иметь нулей в правой полуплоскости, может быть реализована как цепь без потерь только в некоторых особых ситуациях. Например, цепь, изображенная на рис. XI.2, которая характеризуется функцией, определяемой выражением (XI.25), можно рассматривать как цепь с минимальной фазой, поскольку все нули указанной функции лежат на бесконечности. Передаточная функция, имеющая нули только на мнимой оси, реализуется цепью без потерь и может рассматриваться как предельное значение функций минимальной фазы, поскольку влияние случайных потерь, как будет показано в главе XII (§ XII.6), приводит к некоторому сдвигу влево диаграммы полюсов и нулей. Таким образом, физическая цепь, получающаяся в результате данного расчета, имеет все свои нули передачи в левой полуплоскости; значит, все цепи без потерь, изображенные на рис. XI.6, XI.7 и XI.11, могут рас-

смаивриваться как цепи, обладающие минимально фазовым сдвигом¹.

Однако приведенные ситуации представляют собой граничные, не типичные примеры цепей минимально фазового сдвига. В общем случае такие цепи должны иметь потери, поэтому их синтез необходимо осуществлять другими средствами, а именно, по заданной комплексной передаточной функции, а не по ее модулю.

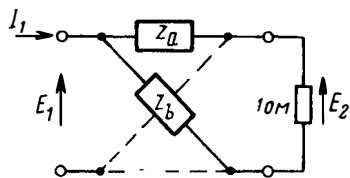


Рис. XI.12

Основой для реализации подобных передаточных функций является скрещенная цепь постоянного резистивного сопротивления, рассмотренная в § VI.3 и изображенная на рис. VI.5 б. Для удобства повторим этот рисунок здесь (см. рис. XI.12) и вновь запишем за-

висимости, соответствующие ф-лам (VI.53), (VI.54) и (VI.55):

$$z_a z_b = 1; \quad (\text{XI.126})$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{E_2}{I_1} = Z_{12} = \frac{1 - z_a}{1 + z_a}; \quad (\text{XI.127})$$

$$z_a = \frac{1 - Z_{12}}{1 + Z_{12}}. \quad (\text{XI.128})$$

Учитывая соотношение (XI.126), характерное для скрещенной цепи, находим, что $\frac{E_2}{I_1} = 1$; входное сопротивление ее оказывается чисто резистивным и равным единице. Это обуславливает применение к таким цепям термина «цепь постоянного сопротивления» и приводит в результате к важному свойству, согласно которому общее сопротивление передачи каскадного соединения скрещенных цепей равно произведению сопротивлений передачи звеньев.

Используя свойство, обратное сформулированному, видим, что сопротивление передачи сложного соединения можно тем или иным способом разложить на множители и реализовать отдельно скрещенные цепи, соответствующие этим множителям. Будучи соединенными каскадно, они удовлетворяют синтезу заданного сопротивления. Хотя аналитически одинаково легко синтезировать как сопротивление передачи сложной цепи, так и отдельную скрещенную цепь, сопротивления ветвей z_a и z_b которой имеют сложную структуру, практически значительно проще построить отдельные, более простые скрещенные цепи. На практике одним из основных

¹ В этой связи следует заметить, что цепная схема без взаимных индуктивностей должна, очевидно, иметь сопротивление передачи, относящееся к классу функций минимальной фазы. Это объясняется тем, что ее нули передачи физически являются такими нулями параллельных сопротивлений или полюсами последовательных сопротивлений, которые должны, конечно, располагаться в левой полуплоскости, так как сопротивления ветвей являются п.в.ф.

преимущество скрещенной цепи постоянного резистивного сопротивления является возможность легко разложить указанным способом сложную скрещенную цепь в каскадное соединение простых цепей.

Прежде чем перейти к подробному рассмотрению реализации передаточных функций в виде скрещенных цепей постоянного резистивного сопротивления, целесообразно с несколько иной точки зрения более тщательно выяснить причины появления у этих цепей особых свойств. Для этого обратимся к известному эквивалентному преобразованию цепей, показанному на рис. XI.13, которое было рассмотрено в § VI.5 (см. рис. VI.106). Скрещенная цепь, приведенная на рис. XI.13 слева, отличается от цепи, изображенной на рис. XI.12, только тем, что на ее входных зажимах включено резистивное сопротивление 1 ом . Результирующее входное сопротивление

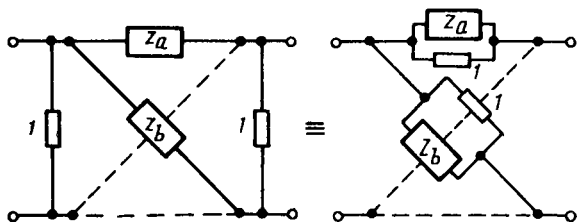


Рис. XI.13

этой цепи оказывается со стороны этих входных зажимов равным $0,5 \text{ ом}$, а полное сопротивление передачи также равным половине ее прежнего значения, как следует из выражения (XI.127).

Обозначив результирующие сопротивления скрещенной цепи, приведенной в правой части рис. XI.13, через z_a^* и z_b^* , найдем связь их с сопротивлениями z_a и z_b исходной цепи:

$$z_a^* = \frac{z_a}{1 + z_a}; \quad z_b^* = \frac{z_b}{1 + z_b}. \quad (\text{XI.129})$$

Если обозначить аналогично входное сопротивление при холостом ходе и сопротивление передачи результирующей скрещенной цепи через z_{11}^* и z_{12}^* , то основные соотношения (VI.44) позволяют записать:

$$z_{11}^* = \frac{1}{2} (z_b^* + z_a^*); \quad (\text{XI.130})$$

$$z_{12}^* = \frac{1}{2} (z_b^* - z_a^*). \quad (\text{XI.131})$$

Первому из этих сопротивлений соответствует цепь, изображенная на рис. XI.14. Нетрудно видеть, что она является простой цепью постоянного резистивного сопротивления. Важно заметить, что сопротивления z_a^* и z_b^* являются дополняющими друг друга. Известно, что необходимым условием, согласно которому сопротив-

ления относятся к классу дополняющих, является требование, чтобы они были минимально реактивными функциями. Известно также, что минимально реактивные сопротивления можно однозначно построить (используя обычные алгебраические методы) по соответствующим им вещественным частям. Поэтому случай, характеризующий соотношениями (XI.130) и (XI.131), можно исследовать, рассмотрев только поведение вещественных частей различных сопротивлений, используемых в заданной цепи.

Как отмечалось при построении сопротивления передачи по заданной вещественной части (см. § VIII.7), определение этого сопротивления через вещественную часть имеет важное преимущество. Оно заключается в том, что здесь на функцию сопротивления передачи не накладываются какие-либо ограничения, касающиеся

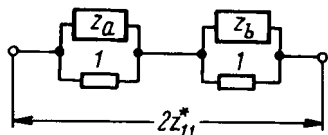


Рис. XI.14

минимально фазового или неминимально фазового характера. Более того, кроме практически несущественного варианта передаточной функции с полюсами на мнимой оси, когда ее вещественная часть имеет импульсы (см. § VIII.2), единственное требование к этой вещественной части передаточной функции (см. § XI.1)

заключается в том, что она должна быть ограниченной на мнимой оси.

Поэтому, используя графики вещественной части на рис. VIII.12, приходим к выводу, что симметричная скрещенная цепь может реализовать любое реализуемое сопротивление передачи, причем если потребуется, возможно, включение любых полюсов функции на мнимой оси и соответствующих импульсов в ее вещественной части.

Теперь, используя выражения (XI.130) и (XI.131) для скрещенной цепи, нагруженной с обоих входов (см. рис. XI.13), нетрудно ответить на вопрос, какая скрещенная цепь соответствует такому представлению. Если скрещенная цепь, которую мы хотим построить, используя данные рис. VIII.12, имеет постоянное входное сопротивление, то вещественные части r_a и r_b сопротивлений z_a и z_b должны складываться с постоянной. Это нетрудно осуществить, поскольку (как отмечалось выше) к каждой вещественной части $r_a(\omega)$ и $r_b(\omega)$ можно добавить некоторую произвольную функцию $r(\omega)$, не изменяя вещественной части сопротивления передачи, зависящей только от разности $(r_b - r_a)$. Следовательно, введя такую нормализацию для r_a и r_b , при которой их максимальные значения одинаковы (но не превышают единицы), можно вычислить функцию

$$r(\omega) = \frac{1}{2} (1 - r_a - r_b), \quad (\text{XI. 132})$$

а затем образовать вещественные части

$$r_a^* = r_a + r; \quad r_b^* = r_b + r. \quad (\text{XI. 133})$$

Поскольку сумма этих вещественных частей равна единице, сумма сопротивлений z_a^* и z_b^* , соответствующих им, также будет равна единице. Тогда согласно выражениям (XI.130) и (XI.131) получающаяся скрещенная цепь будет относиться к классу цепей постоянного резистивного сопротивления, хотя ее сопротивление передачи и остается таким же, как до изменения вещественных

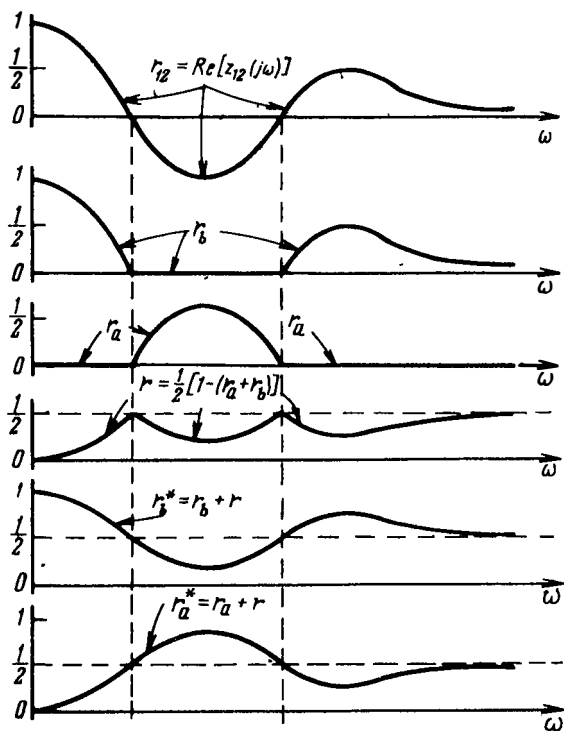


Рис. XI.15

частей сопротивлений ее ветвей [в соответствии с выражением (XI.133)]. Этим результатам соответствуют графические построения, выполненные на рис. XI.15.

Отсюда следует важный вывод, заключающийся в том, что скрещенная цепь постоянного резистивного сопротивления является таким же общим видом цепи, как и всякая другая скрещенная цепь; любое реализуемое сопротивление передачи можно реализовать в виде скрещенной цепи постоянного резистивного сопротивления¹.

¹ Это утверждение не относится к случаю, когда сопротивление передачи имеет полюсы на мнимой оси. Хотя такое сопротивление и реализуется в виде обычной скрещенной цепи, оно оказывается нереализуемым в виде скрещенной цепи постоянного резистивного сопротивления, которая требует, чтобы сопротивление передачи было ограниченной функцией на мнимой оси.

Другое интересное свойство скрещенных цепей можно получить, обратившись к графикам, изображенным на рис. XI.15. Рассмотрим сначала скрещенную цепь, имеющую сопротивления, которым соответствуют графики вещественных частей r_a и r_b . Данная цепь, конечно, не является скрещенной цепью постоянного резистивного сопротивления, поскольку при сложении указанных вещественных частей не получается постоянной величины. Входное сопротивление холостого хода $z_{11} = z_{22}$ такой скрещенной цепи не равно постоянной. Однако дополняющим к этому сопротивлению является сопротивление z , которому соответствует вещественная часть $r =$

$$= \frac{1}{2} (1 - r_a - r_b).$$

Если цепь, реализующую сопротивление z , подключить последовательно к входу и выходу рассматриваемой скрещенной цепи, то результирующая цепь будет обладать свойством скрещенной цепи постоянного резистивного сопротивления. Следовательно, последняя эквивалентна обычной скрещенной цепи с входным сопротивлением, являющимся дополняющим к сопротивлениям на обоих парах зажимов. При этом ясно, что последовательное включение компенсирующих цепей не оказывает никакого влияния на сопротивление передачи цепи. Компенсирующие цепи в скрещенной цепи постоянного резистивного сопротивления не включаются извне, а добавляются к каждому ее сопротивлению. Получается цепь с внутренней компенсацией.

Вернемся теперь к выражениям (XI.127) и (XI.128) и рассмотрим синтез заданной передаточной функции Z_{12} . Ранее было показано (см. §§ I.1 и VI.3), что согласно необходимым и достаточным условиям принадлежности функции z_a к классу п. в. ф. функция Z_{12} должна быть аналитической в правой полуплоскости и ее модуль на мнимой оси не должен превышать единицы. Требование аналитичности сопротивления передачи в правой полуплоскости, очевидно, не является единственным, предъявляемым к скрещенной цепи постоянного резистивного сопротивления. Ограничение верхнего предела модуля ее сопротивления передачи на мнимой оси значением, не превышающим единицы, является просто результатом нормализации уровня сопротивления к 1 ом. Отсюда вновь становится ясным, что условия реализации скрещенной цепи постоянного резистивного сопротивления не являются более жесткими, чем условия реализации сопротивления передачи цепи, соответствующей общему случаю (упомянутый ранее случай, когда функция имеет полюсы на мнимой оси, не принимается во внимание).

При синтезе передаточных функций посредством цепей без потерь, нагруженных на резистивные сопротивления, разумеется, не накладываются ограничения, связанные с поведением модуля заданного сопротивления на мнимой оси. Однако этот метод синтеза (как отмечалось ранее) не позволяет управлять величиной результирующего постоянного множителя. В то же время при синтезе скрещенной цепи постоянного резистивного сопротивления можно

быть уверенным, что постоянный множитель, принятый для заданной функции Z_{12} в начале процесса синтеза, в конце концов, будет получен в результирующей цепи, и поэтому необходимо рассмотреть ограничения, налагаемые на поведение модуля заданной функции. Физически это ограничение эквивалентно требованию, согласно которому средняя мощность, передаваемая в резистивное сопротивление нагрузки 1 ом , не должна превышать средней мощности, расходуемой на кажущемся резистивном сопротивлении 1 ом , измеренном со стороны входных зажимов.

Ограничение, налагаемое на поведение модуля заданного сопротивления передачи на мнимой оси, не представляет трудности, так как при необходимости от него легко избавиться соответствующим выбором постоянного множителя. Таким образом, реализацию сопротивления передачи в виде одной скрещенной цепи постоянного резистивного сопротивления можно осуществить непосредственно, используя выражение (XI.128) и уже известные методы синтеза входных сопротивлений.

Важно отметить, что для получения требуемого результата здесь нет необходимости использовать метод Ботта и Даффина, а достаточно применить, например, метод синтеза, описанный в § IX.3, при котором используется выравнивающее резистивное сопротивление. Следовательно, если из сопротивления нагрузки 1 ом (для цепи, приведенной на рис. XI.12) вычесть резистивное сопротивление $R_0 < 1$ и включить последовательно с входными зажимами такое же резистивное сопротивление R_0 , то в соответствии с хорошо известным свойством (см. рис. VI.10a) указанные операции потребуют замены сопротивлений z_a и z_b соответственно на сопротивления $z_a + R_0$ и $z_b + R_0$. При этом коэффициент передачи по напряжению $\frac{E_2}{E_1}$ исходной цепи необходимо умножить на величину $\frac{1 - R_0}{1 + R_0}$. Возможно также применение метода синтеза Мията

(см. §§ X.2 и X.3), согласно которому все коэффициенты полинома числителя вещественной части на мнимой оси должны быть положительными, однако его целесообразно использовать при достаточном выравнивающем сопротивлении. В данном случае за простоту и легкость синтеза приходится платить усилением в передаточной функции. Когда же эта цена оказывается слишком высокой, или метод не пригоден вследствие ограничения $R_0 < 1$, или когда имеет место и то, и другое, то нужно прибегнуть либо к синтезу по методу Ботта и Даффина, либо найти другие способы упрощения задачи.

Можно попытаться представить рассматриваемую цепь в виде каскадного соединения более простых скрещенных цепей. Если первоначальное сопротивление передачи записать в виде

$$Z_{12} = \frac{H(s-s_1)(s-s_3)\dots(s-s_{2n-1})}{(s-s_2)(s-s_4)\dots(s-s_{2n})}, \quad (\text{XI.134})$$

то его можно рассматривать как произведение функций

$$Z_{12} = Z_{12}^{(1)} Z_{12}^{(2)} \dots Z_{12}^{(k)}, \quad (\text{XI.135})$$

где каждая из них состоит из комбинации множителей числителя и знаменателя, выбранных из выражения (XI.134). При таком выборе, очевидно, должно выполняться требование, согласно которому множители, характеризующие комплексно-сопряженные нули, разделить нельзя и полином числителя любой функции $Z_{12}^{(j)}$ не может иметь степень большую, чем степень полинома знаменателя (в противном случае условия ограниченности функции будут нарушены). Кроме того, возможно окажется необходимым снабдить каждую указанную функцию соответствующим постоянным множителем. Последнее требуется для того, чтобы модуль этой функции на мнимой оси не превышал единицы, поскольку отмеченное условие не обязательно справедливо для каждого из множителей в выражении (XI.135) даже в том случае, если полная функция Z_{12} удовлетворяет данному условию.

С учетом изложенных замечаний можно утверждать, что сопротивление, определяемое выражением (XI.134), всегда представимо в виде произведения сомножителей. Каждый из них соответствует скрещенной цепи постоянного резистивного сопротивления, а каскадное соединение всех таких цепей дает реализацию исходной функции Z_{12} .

Этот процесс открывает много возможностей, причем некоторые из них ведут к более простым и практически более удобным структурам для реализации сопротивлений скрещенных цепей. Кроме того, необходимо отметить, что результирующий множитель будет изменяться в зависимости от того, как осуществляется разбиение общей функции на множители [см. выражение (XI.135)]. Это объясняется тем, что множители, требуемые для отдельных функций $Z_{12}^{(j)}$, изменяются в соответствии с выбором частотных множителей указанных функций.

Число возможных решений, получаемых при разложении данного сопротивления, может быть увеличено дополнением выражения (XI.134) одним множителем (или сопряженной парой их) типа $(s - s_k)$. Такая операция особенно полезна, когда требуется преобразовать результирующие скрещенные цепи в эквивалентные неуравновешенные структуры в соответствии с методами, рассмотренными в § VI.5. Поскольку при указанных преобразованиях сопротивления скрещенной цепи должны удовлетворять определенным требованиям относительно структуры и величин элементов, то степень гибкости на первых этапах синтеза оказывается весьма существенной. Хотя реализация рассмотренной сложной передаточной функции в виде неуравновешенной структуры всегда осуществима, ограничения, налагаемые при этом, практически могут оказаться неприемлемыми. Ниже обсуждаются некоторые вопросы, связанные с указанной проблемой.

Рассмотрим несколько простых функций Z_{12} и определим условия, при которых соответствующие им скрещенные цепи преобразуются в неуравновешенные. В качестве первого примера обратимся к функции

$$Z_{12} = \frac{k_1}{s+a}, \quad (\text{XI.136})$$

для которой

$$z_a = \frac{s+(a-k_1)}{s+(a+k_1)}. \quad (\text{XI.137})$$

Если выполняется неравенство

$$k_1 \leq a, \quad (\text{XI.138})$$

то такая функция реализуется как сопротивление RL цепи. Соответствующие схемы для z_a и z_b показаны на рис. XI.16а. Согласно методам, рассмотренным в § VI.5, эта скрещенная цепь непосредственно преобразуется в неуравновешенную структуру, изображенную на рис. XI.16б. Ограничение (XI.138), налагаемое на постоянный множитель функции Z_{12} , просто соответствует требованию о том, чтобы ее максимальное абсолютное значение на мнимой оси в точке $s=0$ не превышало единицы.

Важно отметить, что скрещенная цепь, приведенная в этом примере, характеризует особый класс скрещенных цепей постоянного резистивного сопротивления, имеющих структуру, изображенную на рис. XI.17а. Сопротивления z_1 и z_2 представляют собой обратные сопротивления, т. е.

$$z_1 z_2 = 1, \quad (\text{XI.139})$$

причем можно осуществить непосредственное преобразование этой скрещенной цепи в эквивалентную Т-образную перекрытую цепь, показанную на рис. XI.17б.

Если последнюю, в свою очередь, перечертить в виде моста Уитстона (рис. XI.17в), то выявляется ее интересная особенность. Благодаря зависимости (XI.139) мостовая цепь оказывается уравновешенной. Следовательно, при включении источника возбуждения в точки $p-r$ по сопротивлению ветви $q-s$ ток протекать не

будет. Резистивное сопротивление моста (или Т-образной перекрытой цепи) является лишним, и без него можно обойтись. При исключении из цепи, изображенной на рис. XI.17в, этого элемента она вырождается в простую цепь постоянного резистивного сопротивления.

Всякий раз, когда сопротивлениям z_a и z_b скрещенной цепи соответствуют структуры, показанные на рис. XI.17а, и выполняется равенство (XI.139), рассматриваемая скрещенная цепь в действительности оказывается эквивалентной значительно более простой цепи постоянного резистивного сопротивления, знакомой нам из элементарной теории цепей. Хотя такую цепь можно построить, используя данную структуру, более целесообразно применение

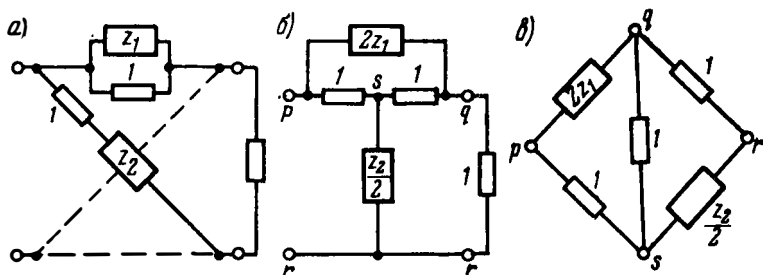


Рис. XI.17

Т-образной перекрытой цепи, так как она менее чувствительна к случайным отклонениям от требуемых условий идеального баланса, определяемых равенством (XI.139).

В качестве второго примера возьмем сопротивление передачи

$$Z_{12} = \frac{k_2(s+a)}{s^2 + b_1s + b_0}, \quad (\text{XI.140})$$

для которого в соответствии с выражением (XI.128) получим следующее сопротивление скрещенной цепи:

$$z_a = \frac{s^2 + (b_1 - k_2)s + (b_0 - ak_2)}{s^2 + (b_1 + k_2)s + (b_0 + ak_2)}. \quad (\text{XI.141})$$

Учитывая конфигурацию цепи, изображенной на рис. XI.17, запишем соответствующее выражение для проводимости

$$y_a = 1 + \frac{2k_2(s+a)}{s^2 + (b_1 - k_2)s + (b_0 - ak_2)}. \quad (\text{XI.142})$$

Если при этом $a > 0$, то согласно условию принадлежности второго члена выражения (XI.142) к классу п. в. ф. необходимо, во-первых, выполнение неравенств

$$k_2 \leq b_1; \quad k_2 \leq \frac{b_0}{a} \quad (\text{XI.143})$$

и, во-вторых, в соответствии с выражением (IX.19) выполнение неравенства

$$b_1 - k_2 \geq a, \text{ или } k_2 \leq b_1 - a. \quad (\text{XI.144})$$

Указанные ограничения требуют, чтобы постоянный множитель функции Z_{12} , определяемой выражением (XI.140), имел меньшее значение, чем нужно для принадлежности функции z_a к классу п. в. ф. Таким образом, мы платим за требуемый вид реализации снижением усиления. Результирующая цепь, соответствующая функции z_a , показана на рис. XI.18. Нетрудно построить и соответствующую Т-образную перекрытую цепь, используя данные рис. XI.17.

Поскольку произведение двух сопротивлений передачи, определяемых выражениями (XI.136) и (XI.140), дает функцию

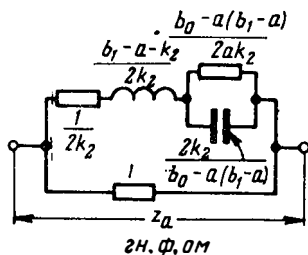


Рис. XI.18

$$Z_{12} = \frac{k}{s^2 + b_1 s + b_0}, \quad (\text{XI.145})$$

приходим к выводу, что сопротивление передачи

$$Z_{12} = \frac{k}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)} \quad (\text{XI.146})$$

всегда реализуемо в виде неуравновешенной цепи постоянного резистивного сопротивления при условии, что в процессе осуществления такой реализации допускается достаточно малое значение множителя k .

Представляет интерес выбор как можно большего значения множителя k в функции (XI.145), временно не учитывая условия (XI.143) и рассматривая лишь неравенства (XI.144) и неравенство (XI.138) для k_1 . Тогда

$$k = k_1 k_2 = ab_1 - a^2, \quad (\text{XI.147})$$

откуда находим

$$k_{\max} = \left(\frac{b_1}{2}\right)^2 \quad (\text{XI.148})$$

и

$$k_1 = k_2 = a = \frac{b_1}{2}. \quad (\text{XI.149})$$

Если теперь рассмотреть неравенства (XI.143), то, очевидно, что первое из них всегда выполняется, а второе — только при условии

$$b_0 \leq \left(\frac{b_1}{2}\right)^2. \quad (\text{XI.150})$$

Последнее неравенство, по-видимому, удовлетворяется в большинстве случаев.

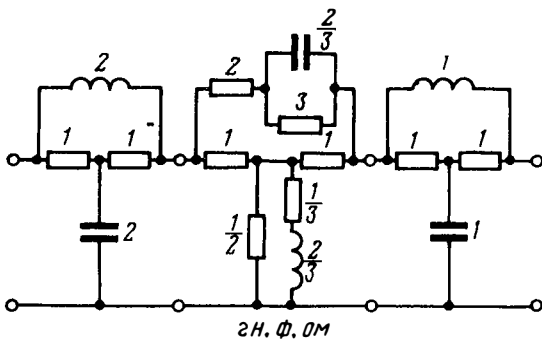
Для иллюстрации полученных результатов обратимся к функции (XI.25), квадрат модуля которой выражается ф-лой (XI.18), и которая имеет реализацию, изображенную на рис. XI.11, дающей также чисто резистивное сопротивление со стороны входа. Сопротивление передачи в этом примере имеет вид

$$Z_{12} = \frac{k_1}{s+a} \frac{k_2(s+a)}{s^2+s+1} \frac{1}{s+1}. \quad (\text{XI.151})$$

Поскольку неравенство (XI.150) выполняется, оптимальные результаты согласно выражению (XI.149) получаются при следующем выборе величин:

$$k_1 = k_2 = a = \frac{1}{2}. \quad (\text{XI.152})$$

Используя цепи, приведенные на рис. XI.16б, XI.18, а также преобразование, показанное на рис. XI.17, получим окончательную реализацию в виде цепи, изображенной на рис. XI.19.



Ррис. XI.19

Сравнив полученную цепь с цепями на рис. XI.12, видим, что в обоих случаях используется одно и то же количество реактивных элементов. Количество резистивных сопротивлений оказывается значительно большим при реализации цепи, соответствующей рис. XI.19, а общий множитель — равным $k = \frac{1}{4}$, тогда как в цепи, соответствующей рис. XI.11, он равен единице.

Однако, прежде чем отдать предпочтение последней цепи, необходимо учесть два обстоятельства:

а) резистивные сопротивления являются более дешевыми элементами по сравнению с реактивными элементами;

б) цепь, приведенная на рис. XI.19, обладает свойством цепи постоянного резистивного сопротивления в обоих направлениях передачи, тогда как цепь, приведенная на рис. XI.11, обладает

таким свойством только в прямом направлении передачи. Это в некоторых случаях может привести к необходимости выбора структуры, изображенной на рис. XI.19, несмотря на ее более низкий коэффициент усиления.

В качестве третьего примера рассмотрим сопротивление передачи в виде отношения квадратных множителей

$$Z_{12} = k \frac{s^2 + 2as + \omega_a^2}{s^2 + 2bs + \omega_b^2}, \quad (\text{XI.153})$$

которое дает сопротивление скрещенной цепи

$$z_a = \frac{(1-k)s^2 + 2(b-ak)s + \omega_b^2 - k\omega_a^2}{(1+k)s^2 + 2(b+ak)s + \omega_b^2 + k\omega_a^2}. \quad (\text{XI.154})$$

Пусть $k = 1$. Тогда сопротивление z_a примет вид сопротивления z , из выражения (IX.16). Условие, согласно которому это сопротивление принадлежит к классу п. в. ф., можно записать так:

$$2(b^2 - a^2) \geq \omega_b^2 - \omega_a^2 \geq 0. \quad (\text{XI.155})$$

Цепь, реализующая сопротивление z_a , показана на рис. XI.20, а ее параметры определяются выражениями:

$$C = \frac{1}{b-a}; \quad (\text{XI.156})$$

$$G = \frac{2(b^2 - a^2) - (\omega_b^2 - \omega_a^2)}{2(b-a)^2}; \quad (\text{XI.157})$$

$$\frac{1}{R} = G + \frac{\omega_b^2 + \omega_a^2}{\omega_b^2 - \omega_a^2}; \quad (\text{XI.158})$$

$$\frac{R}{L} = \frac{\omega_b^2 - \omega_a^2}{2(b-a)}. \quad (\text{XI.159})$$

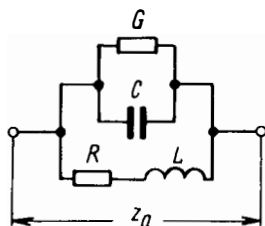


Рис. XI.20

Теперь легко видеть, что преобразование, приведенное на рис. XI.17, снова становится возможным, если $G \geq 1$, что, в свою очередь, приводит к неравенству

$$4a(b-a) \geq \omega_b^2 - \omega_a^2. \quad (\text{XI.160})$$

Поскольку в любом случае b должно быть больше чем a , то ясно, что это последнее условие является более жестким, чем левое неравенство из соотношения (XI.155). Следовательно, при выполнении правого неравенства в выражении (XI.155) и неравенства (XI.160) возможна реализация скрещенной цепи, которая приводит к неуравновешенной Т-образной перекрытой эквивалентной структуре.

Второе неравенство в выражении (XI.155) требует, чтобы полюс заданного сопротивления передачи Z_{12} располагался дальше от начала координат, чем нуль. Неравенство (XI.160) налагает еще большее ограничение, согласно которому полюс, кроме того, должен располагаться на определенном и большем расстоянии от мнимой оси, чем нуль. Если эти требования невыполнимы, то необходимо вернуться к выражению (XI.154) и рассмотреть значения k , меньшие единицы.

Переходя к методу узловых напряжений, получим

$$y_a = 1 + \frac{2k}{1-k} \frac{s^2 + 2as + \omega_a^2}{s^2 + \frac{2(b-ak)}{1-k} s + \frac{\omega_b^2 - k\omega_a^2}{1-k}}. \quad (\text{XI.161})$$

Для того чтобы второй член этого выражения можно было реализовать с помощью простых членов [согласно результатам § IX.3, приводящим к неравенствам (IX.47) и (IX.48)], воспользуемся следующими неравенствами:

$$\omega_b^2 - k\omega_a^2 \geq 0; \quad (\text{XI.162})$$

$$4a(b-ak) \geq |\omega_b^2 - \omega_a^2|. \quad (\text{XI.163})$$

Как видно из выражения (XI.161), здесь снова осуществимо преобразование скрещенной цепи, приведенное на рис. XI.17. Сравнивая неравенства (XI.162) и (XI.163) с неравенствами (XI.155) и (XI.160), полученными для $k = 1$, приходим к выводу, что в данном случае появляется некоторая дополнительная свобода в выборе допустимой диаграммы полюсов и нулей функции Z_{12} . Цена получения такого результата является двойственной: с одной стороны, мы жертвуем усилением, так как $k < 1$; с другой стороны, требуется более сложная цепь, потому что реализация второго члена в выражении (XI.161) требует в два раза большего числа реактивных и резистивных элементов по сравнению с реализацией сопротивления z_a цепи, приведенной на рис. XI.20.

Несмотря на то, что неравенства (XI.162) и (XI.163) при правильном выборе величины k позволяют сместить полюс функции Z_{12} в любом направлении от нуля, последний должен лежать в левой полуплоскости. Однако до тех пор, пока нули этой функции находятся в левой полуплоскости, ее всегда можно синтезировать посредством каскадного соединения Т-образных перекрытых цепей рассмотренного выше типа. Следует заметить, что если указанные неравенства становятся слишком жесткими, то для облегчения ситуации всегда можно ввести пару избыточных множителей.

Для того чтобы допустить расположение нулей рассматриваемой функции в правой полуплоскости и при этом получить неуравновешенную цепь, эквивалентную скрещенной цепи постоянного

резистивного сопротивления, возвратимся к функциям (XI.153) и (XI.154) и положим $k = 1$, $\omega_b = \omega_a = \omega_0$. Тогда получим

$$z_a = \frac{(b-a)s}{s^2 + (b+a)s + \omega_0^2} = \frac{1}{\frac{s}{b-a} + \frac{b+a}{b-a} + \frac{\omega_0^2}{(b-a)s}}. \quad (\text{XI.164})$$

Соответствующие цепи для сопротивлений скрещенной цепи показаны на рис. XI.21а.

Преобразованию этой скрещенной цепи в неуравновешенную соответствует прием, используемый в § VI.5 для преобразования скрещенной RC цепи (см. рис. VI.13а) в двойную T-образную цепь

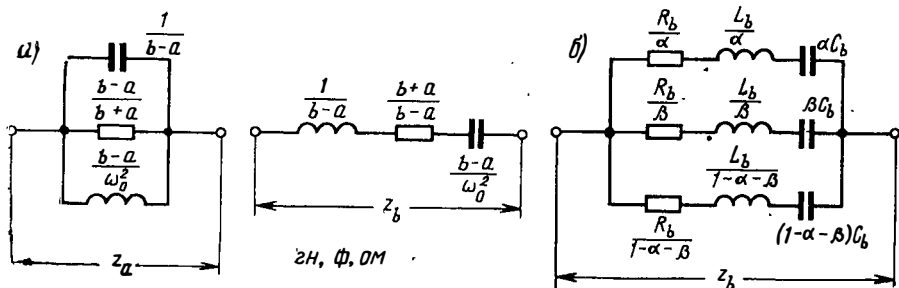


Рис. XI.21

(см. рис. VI.13д). Результирующая неуравновешенная цепь в настоящем примере становится «тройной T-образной» цепью. Если обозначить элементы сопротивлений z_a и z_b через R_a , L_a , C_a и R_b , L_b , C_b , то сопротивление z_b можно представить в виде параллельного соединения трех последовательных ветвей RLC (рис. XI.21б). На этом рисунке α и β — определенным образом выбранные положительные числа, меньшие единицы. Скрещенная цепь, имеющая сопротивления z_a и z_b , реализуемые цепями, изображенными соответственно на рис. XI.21а и XI.21б, рассматривается далее как параллельное соединение трех скрещенных цепей. Они относятся к каждому из трех элементов цепи z_b , соответственно связанных с одним из трех параллельных элементов цепи z_b . Условия, при которых каждую скрещенную цепь можно преобразовать в T-образную цепь, не содержащую трансформаторов, выражаются следующими зависимостями:

$$R_a \leq \frac{R_b}{\alpha}; \quad L_a \leq \frac{L_b}{\beta}; \quad C_a \geq (1 - \alpha - \beta)C_b,$$

или соответственно

$$\alpha \leq \frac{R_b}{R_a}; \quad \beta \leq \frac{L_b}{L_a}; \quad 1 - \alpha - \beta \leq \frac{C_a}{C_b}. \quad (\text{XI.165})$$

Одновременное выполнение этих условий возможно, если

$$\frac{R_b}{R_a} + \frac{L_b}{L_a} + \frac{C_a}{C_b} \geq 1. \quad (\text{XI.166})$$

Последнее неравенство является логическим обобщением выражения (VII.69). Подстановка значений параметров цепи, приведенной на рис. XI.21а, преобразует это условие в неравенство

$$\omega_0^2 + 2ab \geq 0. \quad (\text{XI.167})$$

Ясно, что величина a может быть в данном случае отрицательной, что соответствует расположению нуля функции Z_{12} в правой полуплоскости. Когда a отрицательно, неравенство (XI.167) удобно выразить в виде

$$-\frac{ab}{\omega_0^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (\text{XI.168})$$

Используя графические построения в плоскости s , приведенные на рис. XI.22, можно записать

$$\sin \theta_1 \sin \theta_2 \leq \frac{1}{2}. \quad (\text{XI.169})$$

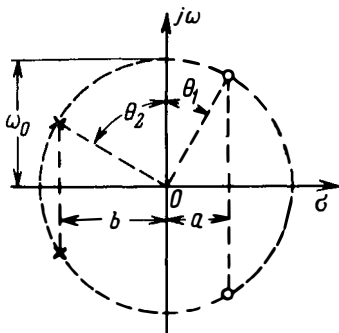


Рис. XI.22

Поскольку b должно быть больше абсолютного значения a (независимо от того, положительно оно или отрицательно), для того чтобы резистивные сопротивления ветвей z_a и z_b (рис. XI.21а) оставались положительными, необходимо связать условие (XI.169) с требованием

$$\theta_1 \leq \theta_2, \text{ или } \sin \theta_1 \leq \sin \theta_2. \quad (\text{XI.170})$$

Таким образом, угол θ_1 должен быть меньше 45° и может равняться этому значению только в предельном случае.

Можно, конечно, получить нули, расположенные ближе к вещественной оси, чем допускает указанное предельное значение, в предположении, что одно из звеньев тройной Т-образной цепи содержит взаимные индуктивности. Тогда условие $L_a \leq \frac{L_b}{\beta}$ из выражения (XI.165) отпадает. Соответствующее преобразование скрещенной цепи совпадает с преобразованием, показанным на рис. VI.11б, если не учитывать изображенную там емкость C_1 . Требуемая взаимная индуктивность отрицательна, а коэффициент связи

$$k = \frac{\beta - \frac{L_b}{L_a}}{\beta + \frac{L_b}{L_a}} = \frac{\beta - \frac{\omega_0^2}{(b-a)^2}}{\beta + \frac{\omega_0^2}{(b-a)^2}}. \quad (\text{XI.171})$$

Два других неравенства из выражений (XI.165) требуют, чтобы

$$1 - \beta - \frac{C_a}{C_b} \leq \alpha \leq \frac{R_b}{R_a}, \text{ или } \beta \geq 1 - \frac{R_b}{R_a} - \frac{C_a}{C_b}. \quad (\text{XI.172})$$

Это дает

$$\beta \geq \frac{-4ab - \omega_0^2}{(b-a)^2}. \quad (\text{XI.173})$$

Наименьшее значение коэффициента связи, определяемого выражением (XI.171), соответствует наименьшему значению β в неравенстве (XI.173). Таким образом, находим

$$k_{\min} = 1 - \frac{\omega_0^2}{-2ab}. \quad (\text{XI.174})$$

Рассматриваемый коэффициент связи имеет наибольшее значение, когда и полюс, и нуль функции Z_{12} расположены на вещественной оси, так как $-a = b = \omega_0$ и $k = \frac{1}{2}$. Даже для этого предельного случая не требуется применения сильной связи¹.

В заключение можно сказать, что скрещенная цепь постоянного резистивного сопротивления дает реализацию любого требуемого сопротивления передачи, имеющего полюсы в левой полуплоскости, а нули — в любом месте плоскости s , включая точку на бесконечности. Сведение скрещенной цепи к эквивалентной неуравновешенной структуре всегда возможно при условии, что допустимы потери усиления, которые дает это преобразование. Взаимные индуктивности, содержащиеся в такой неуравновешенной эквивалентной структуре, можно устранить, если все нули функции, расположенные в правой полуплоскости, находятся на линиях, лежащих от мнимой оси под углом, не превышающим 45° . В тех случаях, когда допустимо применение взаимных индуктивностей, коэффициент связи никогда не должен превышать 50%².

На практике при осуществлении синтеза цепей по заданным передаточным характеристикам могут возникнуть различные дополнительные условия, помимо присущих самим методам реализации. По этой причине целесообразно подробно познакомиться с преимуществами использования различных других принципов и методов реализации и, прежде всего, получить ясное представление о механизме управления передаточными свойствами цепей.

¹ Абсолютное значение a может, конечно, превышать абсолютное значение ω_0 , соответствующее паре нулей в дискретных точках на положительной вещественной оси при геометрическом среднем значении ω_0 . Связь становится сильной только в предельном случае, для которого один из этих нулей лежит в точке $s = 0$, а другой — в точке $s = \infty$.

² Это утверждение вытекает из практического положения, что предельным условием, которое должно удовлетворяться, является условие, согласно которому нули правой полуплоскости должны лежать под углом 90° к мнимой оси. При расчете цепей задержки, когда обычно необходимы нули правой полуплоскости (см. § XIV.9), это положение определенно подтверждается.

XII

ГЛАВА

Методы синтеза передаточных функций (продолжение)

XII.1. Методы, основанные на использовании скрещенных структур

Задача получения скрещенной структуры, обладающей свойством цепи постоянного резистивного сопротивления и возможностью преобразования в эквивалентную неуравновешенную форму, может (при некоторых заданных передаточных характеристиках) настолько ограничивать получаемое в этом случае усиление, что требуемая цепь становится практически неприемлемой. В подобной ситуации, очевидно, целесообразно отказаться от цепи постоянного резистивного сопротивления, а взять за основу скрещенную цепь из-за ее способности реализовать любое достижимое сопротивление передачи. Кроме того, при этом расчет осуществляется достаточно просто и непосредственно, особенно, когда нет никаких возражений против использования уравновешенной структуры. Если же требуется неуравновешенная цепь, то вновь следует изучить возможность преобразования скрещенной структуры в соответствующую эквивалентную форму. Однако здесь возникают некоторые трудности, которые возможно устранить, при условии, что сопротивления скрещенной структуры будут взаимно обратными.

Начав изучение с известной зависимости

$$z_{12} = \frac{1}{2}(z_b - z_a), \quad (\text{XII.1})$$

можно использовать один из двух методов построения сопротивлений z_b и z_a скрещенной структуры по заданной передаточной функции z_{12} . Оба эти метода основаны на очевидном положении, согласно которому функция z_{12} не изменяется, если к сопротивлениям z_b и z_a прибавить одну и ту же величину.

Предположим, что рассматривается разложение на элементарные дроби

$$2z_{12}(s) = \frac{k_1}{s-s_1} - \frac{\bar{k}_1}{s-\bar{s}_1} + \frac{k_2}{s-s_2} + \frac{\bar{k}_2}{s-\bar{s}_2} + \dots, \quad (\text{XII.2})$$

где черта над буквами означает комплексно-сопряженные величины. Согласно выводам, полученным в § IX.1, пара сопряженных членов этого разложения представляет собой п. в. ф. при условии, что вещественная часть соответствующего вычета является положительной и достаточно большой. Пользуясь выражениями (IX.15)

$$k_v = \alpha_v + j\beta_v, \text{ и } s_v = -\sigma_v + j\omega_v, \quad (\text{XII.3})$$

запишем условие (IX.21) в виде

$$\frac{\alpha_v}{|\beta_v|} \geq \frac{\omega_v}{\sigma_v}. \quad (\text{XII.4})$$

Если все вычеты в разложении (XII.2) удовлетворяют данному условию, то функция z_{12} является п. в. ф. При $z_b = 2z_{12}$ $z_a = 0$, и скрещенная цепь вырождается в «цепную» схему с одной параллельной ветвью, представляющей собой сопротивление $\frac{z_b}{2} = z_{12}$.

Такой вырожденный случай вряд ли имеет какое-либо практическое значение.

Если вычет в разложении (XII.2) имеет вещественную часть, которая недостаточно велика для того, чтобы удовлетворить условию (XII.4), то к этой вещественной части можно добавлять соответствующую положительную величину δ_v , до тех пор, пока сумма

$$\alpha'_v = \alpha_v + \delta_v, \quad (\text{XII.5})$$

не будет удовлетворять условию (XII.4) (если желательно, с запасом) и компенсировать добавочную величину вычитанием из функции $2z_{12}$ сопряженных членов

$$\frac{\delta_v}{s - s_v} + \frac{\delta_v}{s - \bar{s}_v}, \quad (\text{XII.6})$$

отнесенных к сопротивлению z_a . Остальную часть разложения [включая члены с модифицированной вещественной частью, определяемой выражением (XII.5)], как и прежде, мы отождествим с сопротивлением z_b . Этот метод, очевидно, применим и тогда, когда вещественная часть α_v отрицательна, и тогда, когда она положительна. Можно, разумеется, ввести упрощение в случае, если отрицательное α_v имеет достаточно большое абсолютное значение, такое, что удовлетворится условие

$$\frac{-\alpha_v}{|\beta_v|} \geq \frac{\omega_v}{\sigma_v}. \quad (\text{XII.7})$$

При этом оказывается возможным соответствующую пару сопряженных членов в разложении (XII.2) сразу отнести к сопротивлению z_a , и нет необходимости производить модификацию его вещественной части.

Таким образом, сопротивления z_a и z_b , построенные по заданной функции z_{12} , будут не только положительными вещественными, но

и (в соответствии с выводами § IX.1) реализуемыми без взаимных индуктивностей, в чем нетрудно убедиться, не производя дальнейших расчетов.

Ввиду того что такой способ построения сопротивлений z_a и z_b , очевидно, не является единственным, число различных скрещенных структур, реализующих заданное сопротивление передачи, не ограничено. Следовательно, в соответствии с выражением (XII.5) к вещественным частям вычетов можно добавить любую дополнительную величину сверх требуемого минимального значения. Таковую же величину, при необходимости, можно добавить и к вещественным частям (для которых такого добавления, вообще говоря, не требуется), и к мнимым частям вычетов. Таким образом, число возможных получаемых решений увеличится. Указанный метод, по видимому, может быть использован в случаях, когда требуется воздействовать на распределение значений элементов полной реализации или по другим причинам, вызванным практическими задачами проектирования.

Рассмотрим несколько примеров использования предложенного метода синтеза. Предположим, что требуется синтезировать передаточную функцию, определяемую ф-лой (XI.25), квадрат модуля которой определяется выражением (XI.18). Ее разложение на элементарные дроби после объединения пар комплексных сопряженных членов имеет вид

$$2z_{12} = \frac{2}{(s+1)(s^2+s+1)} = \frac{2}{s+1} - \frac{2s}{s^2+s+1}. \quad (\text{XII.8})$$

Процесс синтеза здесь проведен в несколько сжатом виде без вычисления значений вычетов, так как сразу видно, что решение можно получить, положив

$$z_b = \frac{2}{s+1} \quad \text{и} \quad z_a = \frac{2s}{s^2+s+1}. \quad (\text{XII.9})$$

Результирующая скрещенная структура и соответствующая ей цепная схема (согласно методам, рассмотренным в § VI.5) показаны на рис. XII.1. С точностью до значения коэффициента уровня сопротивления, равного двум, этот результат совпадает с результатом, полученным методом, описанным в § XI.5 для того же сопротивления передачи (см. схему на рис. XI.6).

Далее рассмотрим передаточную функцию

$$2z_{12} = \frac{1}{(s^2+1,8478s+1)(s^2+0,7645s+1)}, \quad (\text{XII.10})$$

которая согласно методу синтеза, описанному в том же параграфе, приводит к антисимметричной цепи, изображенной на рис. XI.7. Квадрат ее модуля представляет собой функцию, определяемую выражением (XI.78), а расчеты, связанные с получением соответствующего полинома знаменателя, произведены по ф-лам (XI.80) — (XI.82).

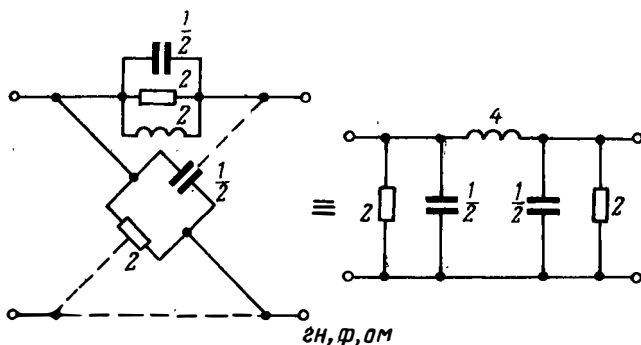
Разложив выражение (XII.10) на элементарные дроби и объединив сопряженные члены, имеем

$$2z_{12} = \frac{0,92387s + 1,7071}{s^2 + 1,8478s + 1} - \frac{0,92387s + 0,7071}{s^2 + 0,7645s + 1}, \quad (\text{XII.11})$$

откуда непосредственно находим:

$$z_b = \frac{0,9239s + 1,707}{s^2 + 1,848s + 1} = \frac{1}{1,082s + \frac{1}{0,9239s + 1,707}}; \quad (\text{XII.12})$$

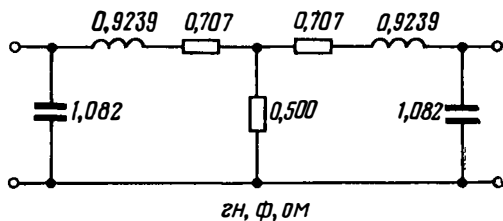
$$z_a = \frac{0,9239s + 0,707}{s^2 + 0,7654s + 1} = \frac{1}{1,082s + \frac{1}{0,9239s + 0,707}}. \quad (\text{XII.13})$$



гн, ф, ом

Рис. XII.1

В результате получим неуравновешенную цепную схему, показанную на рис. XII.2. Несколько необычным в ней является то, что резистивная нагрузка появляется в центре, а не на выходе. По этой причине данная цепь практически менее удобна, чем цепь, приведенная на рис. XI.7. Однако она представляет некоторый теоретический интерес, так как, хотя и является симметричной (как и должно быть при получении цепи из скрещенной структуры), передаточная функция ее совпадает с передаточной функцией антисимметричной цепи, рассмотренной в предыдущей главе.



гн, ф, ом

Рис. XII.2

Полученные в обоих примерах скрещенные структуры можно непосредственно преобразовать в цепные схемы. Однако такой метод синтеза (основанный на использовании разложения на эле-

ментарные дроби заданного сопротивления передачи) не обеспечивает надлежащих возможностей для реализации в виде неуравновешенных цепей. Действительно, в общем случае нельзя ожидать, что сопротивления z_a и z_b обладают свойствами, необходимыми для успешного осуществления цепного разложения. Вместе с тем, рассматриваемый ниже другой метод гарантирует существование неуравновешенной эквивалентной структуры для большого класса передаточных функций, характеристики которых могут быть определены весьма просто.

В соответствии с этим методом процесс синтеза начинается с рассмотрения вещественной части заданной передаточной функции на мнимой оси, которая записывается в виде известного выражения

$$r_{12}(\omega) = \frac{A_0 + A_1\omega^2 + \dots + A_n\omega^{2n}}{B_0 + B_1\omega^2 + \dots + B_n\omega^{2n}} = \frac{A(\omega^2)}{B(\omega^2)}. \quad (\text{XII. 14})$$

Если обозначить через $r_a(\omega)$ и $r_b(\omega)$ вещественные части сопротивлений $z_a(j\omega)$ и $z_b(j\omega)$ соответственно, то с точностью до коэффициента, равного двум (далее он отбрасывается), получим

$$r_{12}(\omega) = r_b(\omega) - r_a(\omega). \quad (\text{XII. 15})$$

Построение сопротивлений z_a и z_b скрещенной цепи осуществляется после того, как рациональная функция, определяемая выражением (XII.14), пред-

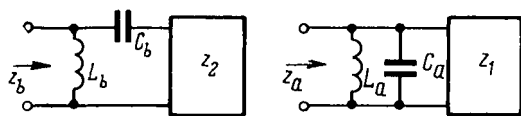


Рис. XII.3

ставлена разностью двух членов, каждый из которых является положительной функцией при всех вещественных значениях ω . Подобное разложение не вызывает затруднений и может быть выполнено бесчисленным множеством способов. Более того, его легко выполнить в таком виде, чтобы получить положительные коэффициенты в числителях функций $r_a(\omega)$ и $r_b(\omega)$, т. е. для случая, когда применим метод синтеза (по Мията) цепей, не содержащих трансформаторов (см. § X.2 и X.3). Простой способ получения этого результата состоит в следующем: полагают, что функции $r_a(\omega)$ и $r_b(\omega)$ имеют одинаковый знаменатель $B(\omega^2)$ и относят положительные члены в числителе функции (XII.14) к $r_b(\omega)$, а отрицательные — к $r_a(\omega)$. Таким образом, сразу удастся получить реализацию скрещенной цепи, не содержащей взаимных индуктивностей.

В этой связи необходимо решить задачу получения структур цепей, реализующих z_a и z_b , которые позволяют осуществить преобразование скрещенной цепи в эквивалентную неуравновешенную структуру. Пара подобных цепей изображена на рис. XII.3. Теперь легко показать, что соответствующее преобразование скрещенной цепи в эквивалентную Т-образную перекрытую цепь, выполненное

с помощью методов, описанных в § VI.5, даст цепь, приведенную на рис. XII.4а. Для того чтобы значения всех элементов этой эквивалентной цепи были положительными, требуется выполнение неравенств:

$$L_b \geq L_a; \quad (\text{XII.16})$$

$$C_a \geq C_b. \quad (\text{XII.17})$$

В процессе преобразования скрещенной цепи в эквивалентную T-образную перекрытую структуру параллельные индуктивности цепей, приведенных на рис. XII.3, по существу, не имеют значения,

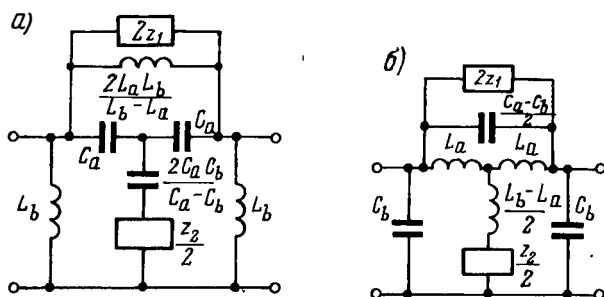


Рис. XII.4

однако их присутствие усложняет рассматриваемый метод. Действительно, оказывается необходимым не только разделить функцию $r_{12}(\omega)$ на части $r_a(\omega)$ и $r_b(\omega)$, причем появляются параллельные индуктивности (наряду с параллельными и последовательными емкостями C_a и C_b), но и принять во внимание дополнительное условие (XII.16). Вместе с тем, если в цепи, реализующей сопротивление z_b , нет параллельной индуктивности, нужно, чтобы это сопротивление (а следовательно, и сопротивление z_{12}) имело полюс в точке $s = 0$, что не только нежелательно, но фактически невозможно, ибо сопротивление z_b должно быть построено по его вещественной части $r_b(\omega)$.

Таким образом, задача теперь состоит из двух этапов. Во-первых, необходимо найти разделение выражения (XII.14) на функции r_a и r_b , при котором получаются цепи, подобные изображенным на рис. XII.3. Во-вторых, условия (XII.16) и (XII.17) должны быть представлены в форме, непосредственно выражающей требуемые свойства заданной функции r_{12} . Решение первого этапа поставленной задачи можно получить, вспомнив обоснование метода синтеза Мията, описанного в §§ X.2 и X.3. Следовательно, если записать

$$r_a(\omega) = \frac{\alpha_1 \omega^2 + \alpha_2 \omega^4 + \dots + \alpha_{n-1} \omega^{2(n-1)}}{B(\omega^2)}; \quad (\text{XII.18})$$

$$r_b(\omega) = \frac{\beta_0 + \beta_1 \omega^2 + \beta_2 \omega^4 + \dots + \beta_n \omega^{2n}}{B(\omega^2)} \quad (\text{XII.19})$$

и разделить последнее выражение на два слагаемых

$$r'_b(\omega) = \frac{\beta_0 + \beta_1 \omega^2}{B(\omega^2)} \text{ и } r''_b(\omega) = \frac{\beta_2 \omega^4 + \dots + \beta_n \omega^{2n}}{B(\omega^2)}, \quad (\text{XII.20})$$

то станет ясно, что сопротивления $z_a(s)$ и $z''_b(s)$, которым соответствуют вещественные части r_a и r''_b , реализуемы в виде цепей, показанных на рис. XII.3. Сопротивление $z'_b(s)$, соответствующее функции $r'_b(\omega)$, представляет собой последовательное сопротивление в поперечной ветви скрещенной цепи, поэтому его можно рассматривать как составляющую z_{b1} (см. рис. VI.9).

Для вещественных частей r_a и r_b мы предполагали, что

$$\beta_0 = A_0 \geq 0 \text{ и } \beta_n = A_n \geq 0. \quad (\text{XII.21})$$

В большинстве практических случаев это соответствует ограничению, согласно которому коэффициенты A_0 и A_n в выражении (XII.14) должны иметь одинаковый алгебраический знак, так как знак всей функции обычно не имеет значения. Остальные коэффициенты $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ выражения (XII.21) также все являются положительными (это условие, очевидно, всегда может быть удовлетворено). Обычно положительные коэффициенты в числителе выражения (XII.14) обозначаются через β_i , а абсолютные значения отрицательных коэффициентов — через α_i . Путем их объединения можно получить бесчисленное количество других последовательностей коэффициентов.

Для того чтобы выяснить сущность неравенств (XII.16) и (XII.17), необходимо выразить значения элементов L_a, L_b, C_a, C_b через величины, характеризующие вещественные части $r_a(\omega)$ и $r''_b(\omega)$. Для этого сначала заметим, что соответствующие сопротивления определяются выражениями:

$$z_a(s) = \frac{a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_{n-1} s^{n-1}}{d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + \dots + s^n}; \quad (\text{XII.22})$$

$$z''_b(s) = \frac{b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n}{d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + \dots + s^n}, \quad (\text{XII.23})$$

где общий полином знаменателя

$$D(s) = d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + \dots + s^n \quad (\text{XII.24})$$

связан со знаменателем выражения (XII.14) и определяется известной формулой

$$B(\omega^2) = [D(s)D(-s)]_{s=j\omega}. \quad (\text{XII.25})$$

Применяя к сопротивлениям (XII.22) и (XII.23) цепное разложение, можно найти, что элементы цепей, приведенных на рис. XII.3, имеют вид:

$$L_a = \frac{a_1}{d_0}; \quad (\text{XII.26})$$

$$C_a = \frac{1}{a_{n-1}}; \quad (\text{XII.27})$$

$$L_b = \frac{b_1}{d_0}; \quad (\text{XII.28})$$

$$C_b = \frac{d_2 b_1 - d_0 b_3}{b_1^2}. \quad (\text{XII.29})$$

Коэффициенты d_i , появляющиеся в этих выражениях, получают непосредственно из знаменателя выражения (XII.14) с использованием зависимости (XII.25). Коэффициенты a_i и b_i определяются следующим образом. Допустим, что основными функциями сопротивлений

$$Z_k(s) = \frac{a_{k0} + a_{k1}s + a_{k2}s^2 + \dots + a_{kn}s^n}{d_0 + d_1s + d_2s^2 + \dots + s^n} \quad (\text{XII.30})$$

при $k = 0, 1, 2, \dots, n$ являются такие, которым соответствуют вещественные части $\frac{\omega^{2k}}{B(\omega^2)}$. Сопротивление $Z_0(s)$ из этого семейства функций наиболее легко найти для любого данного полинома знаменателя $D(s)$ методом, описанным в § XI.2, остальные сопротивления затем можно построить с минимальным объемом вычислительных операций, используя метод Мията, описанный в § VIII.1.

Тогда коэффициенты a_s и b_s в сопротивлениях (XII.22) и (XII.23) вычисляются по формулам:

$$a_s = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k a_{ks}; \quad (\text{XII.31})$$

$$b_s = \sum_{k=2}^n \beta_k a_{ks}. \quad (\text{XII.32})$$

Это основано на том, что сопротивление, соответствующее сумме вещественных частей, равно сумме сопротивлений, соответствующих этим вещественным частям, рассматриваемым отдельно.

Прежде чем объединить указанные результаты с соотношениями (XII.26) — (XII.29) и неравенствами (XII.16) и (XII.17), целесообразно отметить некоторые взаимозависимости, существующие между коэффициентами числителя в сопротивлении (XII.30). Согласно методу Мията построения сопротивления Z_{k+1} по сопротивлению Z_k имеем

$$-s^2 Z_k = -a_{k(n-1)}s + Z_{k+1} \quad \text{при } k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (\text{XII.33})$$

или иначе

$$-s^2 (a_{k(n-1)}s^{n-1} + a_{k1}s) = -a_{k(n-1)}s(s^n + \dots + d_1s + d_0) + (a_{(k+1)n}s^n + \dots + a_{(k+1)1}s). \quad (\text{XII.34})$$

Последнее выражение можно записать в виде

$$a_{k(n-1)}(d_{n-1}s^n + \dots + d_0s) - (a_{k(n-2)}s^n + \dots + a_{k1}s) = \\ = (a_{(k+1)n}s^n + \dots + a_{(k+1)1}s). \quad (\text{XII.35})$$

Приравняв коэффициенты с одинаковыми степенями s , получим соотношение

$$a_{k(n-1)}d_{n-i} - a_{k(n-i-1)} = a_{(k+1)(n-i+1)} \quad (\text{XII.36})$$

для $k = 0, 1, \dots, n-1$ и $i = 1, 2, \dots, n$, где коэффициент a_{kt} при отрицательном целом значении t , очевидно, равен нулю, а коэффициент $a_{(k+1)n}$ равен нулю для всех k , кроме $k = n-1$, так как лишь сопротивление $Z_n(s)$ имеет числитель степени n .

При $i = n$ это соотношение принимает вид

$$a_{k(n-1)} = \frac{a_{(k+1)1}}{d_0}, \quad (\text{XII.37})$$

а при $i = n-2$ имеем

$$a_{k(n-1)}d_2 - a_{k1} = a_{(k+1)3}. \quad (\text{XII.38})$$

Используя соотношение (XII.37) и произведя замену k на $k-1$, получим

$$d_2a_{k1} - d_0a_{k3} = d_0a_{(k-1)1}. \quad (\text{XII.39})$$

Учитывая записанные выражения, а также ф-лы (XII.31) и (XII.32), находим зависимости:

$$a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k a_{k1}; \quad (\text{XII.40})$$

$$b_1 = \sum_{k=2}^n \beta_k a_{k1}; \quad (\text{XII.41})$$

$$a_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k a_{k(n-1)} = \frac{1}{d_0} \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k a_{(k+1)1}; \quad (\text{XII.42})$$

$$d_2b_1 - d_0b_3 = d_0 \sum_{k=2}^n \beta_k a_{(k-1)1}. \quad (\text{XII.43})$$

После их подстановки в выражения (XII.26) — (XII.29) в итоге получим неравенства, соответствующие неравенствам (XII.16) и (XII.17):

$$\sum_{k=2}^n \beta_k a_{k1} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k a_{k1}; \quad (\text{XII.44})$$

$$\left(\sum_{k=2}^n \beta_k a_{k1} \right)^2 \geq \sum_{k=2}^n \alpha_{k-1} a_{k1} \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{k+1} a_{k1}. \quad (\text{XII.45})$$

Для данной передаточной функции или ее вещественной части коэффициенты α_k и β_k находятся легко, а коэффициенты α_{k1} для $k = 1, \dots, n$ также легко вычислить, используя известный полином знаменателя, определяемый выражением (XII.24). Если одновременно удовлетворяются оба неравенства (XII.44) и (XII.45), то можно реализовать эквивалентную неуравновешенную скрещенную структуру, не содержащую взаимных индуктивностей. Если же удовлетворяется только неравенство (XII.45), то эквивалентная неуравновешенная структура все еще реализуема, но индуктивности в П-образной части Т-образной перекрытой цепи, изображенной на рис. XII.4а, необходимо заменить парой взаимно связанных индуктивностей с общим значением индуктивности $\frac{L_b + L_a}{2}$ и взаимной индуктивностью $\frac{L_b - L_a}{2}$. Коэффициент связи

$$k = \left| \frac{L_b - L_a}{L_b + L_a} \right| \quad (\text{XII.46})$$

всегда остается меньше единицы, кроме вырожденного предельного случая, когда $L_b = 0$ [сумма в левой части выражения (XII.44) становится равной нулю]. Однако при таком методе нельзя получить эквивалентную неуравновешенную структуру без выполнения неравенства (XII.45) [соответствующего неравенству (XII.17)].

В том случае, когда указанное неравенство не выполняется, этот процесс можно изменить и рассматривать сопротивление z_b'' как сопротивление z_b цепи, изображенной на рис. XII.3, при условии, что ветви L_b и C_b переставлены местами. При подобной замене сопротивления в поперечной ветви скрещенную структуру (за исключением составляющей z_b' поперечной ветви) можно преобразовать в Т-образную перекрытую цепь, показанную на рис. XII.4б. Условия, обеспечивающие положительность всех значений элементов данной цепи, снова выражаются соотношениями (XII.16) и (XII.17).

Для того чтобы получить этот результат, вещественную часть $r_b(\omega)$, определяемую выражением (XII.19), нужно разделить на два слагаемых

$$r_b'(\omega) = \frac{\beta_{n-1}\omega^{2(n-1)} + \beta_n\omega^{2n}}{B(\omega^2)} \quad \text{и} \quad r_b''(\omega) = \frac{\beta_0 + \dots + \beta_{n-2}\omega^{2(n-2)}}{B(\omega^2)}, \quad (\text{XII.47})$$

в отличие от составляющих, которым соответствуют выражения (XII.20). Вещественная часть $r_a(\omega)$, определяемая выражением (XII.18), а также сопротивление z_a , определяемое выражением (XII.22) и соответствующее указанной вещественной части, сохра-

няют ту же форму. Однако выражение (XII.23) для сопротивления $z_b''(s)$ изменится и примет вид

$$z_b'' = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_{n-1} s^{n-1}}{d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + \dots + s^n}. \quad (\text{XII. 48})$$

Сопротивление $z_b'(s)$, соответствующее составляющей $r_b'(\omega)$, изменится таким же образом, но подробное выражение для него в данном случае не представляет интереса, так как его характер ясен, и оно никак не связано с задачей преобразования скрещенной цепи.

Параметры L_a и C_a определяются, как и прежде, выражениями (XII.26) и (XII.27), но выражения для L_b и C_b изменяются и принимают вид:

$$C_b = \frac{1}{b_{n-1}}; \quad (\text{XII. 49})$$

$$L_b = \frac{b_{n-1}^2}{d_{n-2} b_{n-1} - b_{n-3}}. \quad (\text{XII. 50})$$

Используя соотношение (XII.36) при $i = 2$ и соотношение (XII.37), в котором k заменено на $k + 1$, получим

$$d_{n-2} a_{k(n-1)} - a_{k(n-3)} = \frac{a_{(k+2)1}}{d_0}. \quad (\text{XII. 51})$$

Этот результат вместе с соотношениями (XII.31) и (XII.32), а также с учетом выражения (XII.37) позволяет записать

$$b_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} \beta_k a_{k(n-1)} = \frac{1}{d_0} \sum_{k=0}^{n-2} \beta_k a_{(k+1)1} \quad (\text{XII. 52})$$

и

$$d_{n-2} b_{n-1} - b_{n-3} = \frac{1}{d_0} \sum_{k=0}^{n-2} \beta_k a_{(k+2)1}. \quad (\text{XII. 53})$$

Подставив выражения (XII.40) и (XII.42), (XII.52) и (XII.53) в ф-лы (XII.26), (XII.27), (XII.49), (XII.50), получим следующие неравенства, соответствующие неравенствам (XII.16) и (XII.17):

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} \beta_{k-1} a_{k1} \right)^2 \geq \sum_{k=2}^n \beta_{k-2} a_{k1} \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k a_{k1}; \quad (\text{XII. 54})$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \beta_{k-1} a_{k1} \geq \sum_{k=2}^n \alpha_{k-1} a_{k1}. \quad (\text{XII. 55})$$

Неравенство (XII.55) имеет важное значение, так как при использовании какого-либо другого метода неравенство (XII.54)

[подобно неравенству (XII.44)] необходимо лишь для того, чтобы предотвратить появление взаимных индуктивностей. Если неравенство (XII.54) не выполняется, индуктивности, расположенные в Т-образной части Т-образной перекрытой схемы, изображенной на рис. XII.46, можно, как это делалось ранее, заменить парой взаимно связанных индуктивностей с коэффициентом связи, определяемым выражением (XII.46). Одновременно в данном случае следует добиваться выполнения неравенства (XII.55) с тем, чтобы получить реализуемую неуравновешенную цепь.

Этот вопрос решается, кроме того, использованием теоремы интеграла резистивного сопротивления, рассмотренной в § VIII.3 [см. интегральную зависимость (VIII.69)]. Используя указанную зависимость, можно записать:

$$\frac{1}{C_a} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} r_a(\omega) d\omega; \quad (\text{XII. 56})$$

$$\frac{1}{C_b} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} r_b''(\omega) d\omega. \quad (\text{XII. 57})$$

Тогда неравенство (XII.17) или (XII.55) принимает форму

$$\int_0^{\infty} r_a(\omega) d\omega \leq \int_0^{\infty} r_b''(\omega) d\omega, \quad (\text{XII. 58})$$

которая, между прочим, показывает, что разделение функции $r_b(\omega)$ [см. выражение (XII.19)] на части $r_b'(\omega)$ и $r_b''(\omega)$, определяемые выражениями (XII.47), является наиболее целесообразным. Это подтверждается тем, что включение в функцию $r_b'(\omega)$ членов, содержащих коэффициенты $\beta_{n-2}, \beta_{n-3}, \dots$, вместо ограничения ее лишь минимально необходимыми последними двумя членами функции $r_b(\omega)$, лишает подынтегральное выражение из правой части неравенства (XII.58) некоторой доли очень нужной его площади.

Наиболее интересным моментом в данном неравенстве является указание на зависимость существования неуравновешенной реализации (согласно рассматриваемому методу) от относительных пределов, в которых вещественная часть заданного сопротивления передачи становится отрицательной в интервале частот $0 < \omega < \infty$. Графическое представление функции

$$r_{12}(\omega) - r_b'(\omega) = r_b''(\omega) - r_a(\omega) = \frac{A_0 + \dots + A_{n-2}\omega^{2(n-2)} + A_{n-1}\omega^{2(n-1)}}{B_0 + B_1\omega^2 + \dots + B_n\omega^{2n}} \quad (\text{XII. 59})$$

может (в данной ситуации) быстро навести на мысль о возможном выполнении неравенства (XII.55), а именно, что оно выполняется, когда площадь под этой функцией неотрицательна.

Если заданное сопротивление передачи $z_{12}(s)$ при больших значениях s изменяется подобно функции $\frac{K}{s}$, то согласно теореме интеграла резистивного сопротивления [см., в частности, выражение (VIII.68)] суммарная площадь под кривой ее вещественной части равна $\frac{\pi K}{2}$. Тогда коэффициент A_n в выражении (XII.14) равен нулю, а коэффициент A_{n-1} может быть положительным или отрицательным независимо от знака величины K . При $A_{n-1} < 0$ в выражении (XII.47) можно принять $r'_b = 0$, а при $K > 0$ можно считать, что суммарная площадь под функцией (XII.59) положительна. С другой стороны, если $s \rightarrow \infty$, то $z_{12}(s) \rightarrow \frac{1}{s^2}$ и то $A_n = A_{n-1} = 0$. Снова можно принять $r'_b = 0$, и так как K (коэффициент при члене $\frac{1}{s}$ в асимптотическом выражении для функции z_{12}) теперь равен нулю, то суммарная площадь под функцией (XII.59) также равна нулю. В обоих рассмотренных случаях неравенство (XII.17) или (XII.55) выполняется и соответствующая скрещенная структура обязательно имеет эквивалентную неуравновешенную цепь (возможно с одной парой взаимно связанных индуктивностей, имеющих несильную связь).

Поскольку приведенные соображения не зависят от расположения полюсов и нулей функции $z_{12}(s)$, они относятся к передаточным функциям и с минимальной и с минимальной фазами. Так называемые «функции, пропускающие все частоты», имеющие форму $z_{12}(s) = \frac{P(-s)}{P(s)}$, где $P(s)$ — полином четной степени, можно привести в соответствие с первой группой неравенств, описанных в предыдущем параграфе, если умножить их на $\frac{1}{s+a}$. При надлежащем выборе коэффициента a функция $z_{12}(s)$ практически по-прежнему будет пропускать все частоты, но в то же время обеспечивается возможность ее реализации в виде неуравновешенной схемы. Если полином $P(s)$ имеет нечетную степень, аналогичный результат получают путем выделения пары соответственно выбранных множителей полюсов, расположенных в левой полуплоскости. Пользуясь описанными приемами, часто удается заранее установить, что рассматриваемая форма реализации возможна.

Если возможен вариант такого метода, при котором применимы неравенства (XII.44) и (XII.45) [т. е. выполняется неравенство (XII.45)], то аналогичным способом можно найти условия, позволяющие обойтись без взаимных индуктивностей. Значения индуктивностей L_a и L_b , определяемых выражениями (XII.26) и (XII.28), находятся из поведения сопротивлений $z_a(s)$ и $z_b^*(s)$, определяемых выражениями (XII.22) и (XII.23), при $s \rightarrow 0$.

Таким образом, удается получить требуемые результаты, применяя к функциям $z_a\left(\frac{1}{s}\right)$ и $z_b''\left(\frac{1}{s}\right)$ теорему об интеграле резистивного сопротивления. Заметим, что вещественная часть функции $f\left(\frac{1}{j\omega}\right)$ представляет собой вещественную часть функции $f(j\omega)$ при условии, что ω заменено на $\frac{1}{\omega}$.

Используя выражение (VIII.69), можно записать:

$$L_a = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} r_a\left(\frac{1}{\omega}\right) d\omega; \quad (\text{XII.60})$$

$$L_b = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} r_b''\left(\frac{1}{\omega}\right) d\omega. \quad (\text{XII.61})$$

Если теперь заменить ω на $\frac{1}{\omega}$, приняв во внимание, что $d\left(\frac{1}{\omega}\right) = -\frac{1}{\omega^2} d\omega$, а также учитывая новые пределы интегрирования, то неравенство (XII.44) можно представить в виде

$$\int_0^{\infty} \frac{r_a(\omega)}{\omega^2} d\omega \leq \int_0^{\infty} \frac{r_b''(\omega)}{\omega^2} d\omega. \quad (\text{XII.62})$$

Отсюда видно, что действительно целесообразно поддерживать число членов функции $r_b''(\omega)$ минимальным аналогично выражению (XII.20), так как при этом максимально увеличивается площадь под функцией $\frac{r_b''(\omega)}{\omega^2}$. Наличие весового коэффициента $\frac{1}{\omega^2}$ показывает, кроме того, что отрицательные области в вещественной части $z_{12}(j\omega) - z_b'(j\omega)$, появляющиеся на более высоких частотах, в меньшей степени приводят к нарушению неравенства (XII.44), чем подобные отрицательные области около начала координат ($\omega = 0$).

В качестве иллюстративного примера применения описанного метода синтеза рассмотрим сопротивление передачи с вещественной частью

$$r_{12}(\omega) = \frac{A_0 - A_1\omega^2 + A_2\omega^4 + A_3\omega^6}{1 + \omega^6}, \quad (\text{XII.63})$$

где A_0, \dots, A_3 — положительны.

Выберем

$$r_a(\omega) = \frac{A_1\omega^2}{1 + \omega^6} \quad (\text{XII.64})$$

и для первого варианта метода, когда используется разделение функции $r_b(\omega)$, определяемое выражениями (XII.20), примем

$$r'_b(\omega) = \frac{A_0}{1+\omega^6}; \quad r''_b(\omega) = \frac{A_2\omega^4 + A_3\omega^6}{1+\omega^6}. \quad (\text{XII.65})$$

Общий полином знаменателя имеет вид

$$D(s) = 1 + 2s + 2s^2 + s^3. \quad (\text{XII.66})$$

Ему соответствует семейство основных сопротивлений:

$$Z_0(s) = \frac{1 + \frac{4}{3}s + \frac{2}{3}s^2}{D(s)}; \quad (\text{XII.67})$$

$$Z_1(s) = \frac{\frac{2}{3}s + \frac{1}{3}s^2}{D(s)}; \quad (\text{XII.68})$$

$$Z_2(s) = \frac{\frac{1}{3}s + \frac{2}{3}s^2}{D(s)}; \quad (\text{XII.69})$$

$$Z_3(s) = \frac{\frac{2}{3}s + \frac{4}{3}s^2 + s^3}{D(s)}. \quad (\text{XII.70})$$

Для решения неравенств (XII.44) и (XII.45) найдем, прежде всего,

$$a_{01} = \frac{4}{3}, \quad a_{11} = \frac{2}{3}, \quad a_{21} = \frac{1}{3}, \quad a_{31} = \frac{2}{3}; \quad (\text{XII.71})$$

$$\alpha_1 = A_1, \quad \alpha_2 = 0 \quad (\text{XII.72})$$

и

$$\beta_0 = A_0, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = A_2, \quad \beta_3 = A_3. \quad (\text{XII.73})$$

Отсюда имеем

$$\sum_1^{n-1} \alpha_k a_{k1} = \frac{2A_1}{3}, \quad \sum_2^n \alpha_{k-1} a_{k1} = \frac{A_1}{3}; \quad (\text{XII.74})$$

$$\sum_2^n \beta_k a_{k1} = \frac{1}{3} A_2 + \frac{2}{3} A_3, \quad \sum_1^{n-1} \beta_{k+1} a_{k1} = \frac{2}{3} A_2 + \frac{1}{3} A_3. \quad (\text{XII.75})$$

Неравенства (XII.44) и (XII.45) принимают соответственно вид

$$A_2 + 2A_3 \geq 2A_1 \quad \text{и} \quad (A_2 + 2A_3)^2 \geq A_1(2A_2 + A_3). \quad (\text{XII.76})$$

Во втором варианте, когда производится разделение функции $r_b(\omega)$ согласно выражениям (XII.47), вместо выражений (XII.65) получим

$$r'_b(\omega) = \frac{A_2\omega^4 + A_3\omega^6}{1+\omega^6}, \quad r''_b(\omega) = \frac{A_0}{1+\omega^6}. \quad (\text{XII.77})$$

Все соотношения (XII.67) — (XII.74) используются в неизменном виде, но при решении неравенств (XII.54) и (XII.55) вместо выражений (XII.75) получим

$$\sum_1^{n-1} \beta_{k-1} a_{k1} = \frac{2A_0}{3}, \quad \sum_2^n \beta_{k-2} a_{k1} = \frac{A_0}{3}. \quad (\text{XII.78})$$

Таким образом, оказывается, что неравенства (XII.54) и (XII.55) приводят к одинаковому результату, а именно

$$A_1 \leq 2A_0. \quad (\text{XII.79})$$

Согласно неравенствам (XII.76), относящимся к первому варианту рассматриваемого метода, на коэффициент A_0 не накладывается никаких ограничений; с другой стороны, во втором варианте, которому соответствует неравенство (XII.79), нет никаких ограничений для коэффициентов A_2 и A_3 . Если выбрать $A_3 = 0$, неравенство (XII.79) не нарушается, тогда как неравенства (XII.76), относящиеся к первому варианту, приведут к единственному неравенству

$$A_1 \leq \frac{A_2}{2}. \quad (\text{XII.80})$$

Этот случай соответствует сопротивлению передачи $z_{12}(s)$, которое при больших значениях s вырождается в $\frac{1}{s}$.

При том же условии $A_3 = 0$ предположим, что заданная функция, определяемая выражением (XII.63), содержит отличные от нуля коэффициенты A_1 и A_2 , но $A_0 = 0$. Тогда второй вариант синтеза невозможен.

Пусть неравенство (XII.80) удовлетворяется, если выбрано $A_1 = 1$ и $A_2 = 2$. Имеем

$$r_a = \frac{\omega^2}{1 + \omega^6}, \quad r'_b \equiv 0, \quad r''_b = \frac{2\omega^4}{1 + \omega^6}. \quad (\text{XII.81})$$

По известным основным сопротивлениям, определяемым выражениями (XII.68) и (XII.69), найдем непосредственно

$$z_a = \frac{\frac{2}{3}s + \frac{1}{3}s^2}{1 + 2s + 2s^2 + s^3}, \quad z''_b = z_b = \frac{\frac{2}{3}s + \frac{4}{3}s^2}{1 + 2s + 2s^2 + s^3}. \quad (\text{XII.82})$$

Эти сопротивления плеч скрещенных структур и результирующая неуравновешенная цепь показаны на рис. XII.5а. Соответствующее сопротивление передачи имеет вид

$$2z_{12}(s) = z_b(s) - z_a(s) = \frac{s^2}{1 + 2s + 2s^2 + s^3}. \quad (\text{XII.83})$$

При $A_3 = 0$ вновь предположим, что заданная вещественная часть, определяемая выражением (XII.63), содержит отличные от нуля

коэффициенты A_0 и A_1 , но $A_2 = 0$. Здесь необходимо использовать второй вариант, так как неравенство (XII.80) не может быть выполнено. Принимая $A_0 = 0$, $A_1 = 2$, получим

$$r_a = \frac{2\omega^2}{1 + \omega^6}, \quad r'_b = 0, \quad r''_b = \frac{1}{1 + \omega^6}. \quad (\text{XII.84})$$

Сопротивления плеч скрещенной структуры найдем из выражений

$$z_a = \frac{\frac{4}{3}s + \frac{2}{3}s^2}{1 + 2s + 2s^2 + s^3}, \quad z''_b = z_b = \frac{1 + \frac{4}{3}s + \frac{2}{3}s^2}{1 + 2s + 2s^2 + s^3}. \quad (\text{XII.85})$$

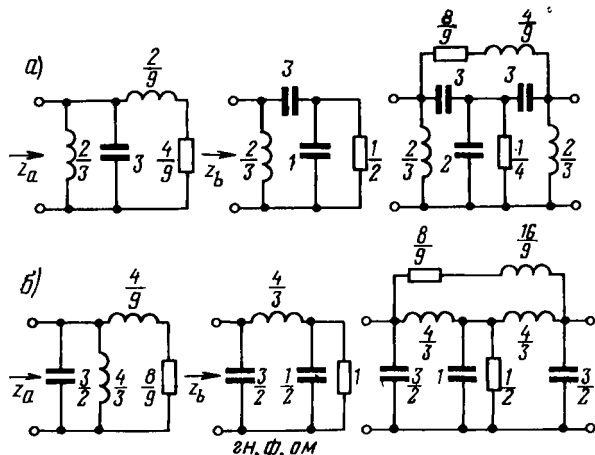


Рис. XII.5

На рис. XII.5б показаны полученные цепи. Соответствующее сопротивление передачи будет

$$2z_{12}(s) = z_b(s) - z_a(s) = \frac{1}{1 + 2s + 2s^2 + s^3}. \quad (\text{XII.86})$$

Оно совпадает (с точностью до коэффициента 2) с функцией (XI.25), реализуемой цепью, изображенной на рис. XI.2.

Более интересным примером является функция

$$2z_{12}(s) = \frac{s^2 + \frac{2}{3}s + 1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 1} \quad (\text{XII.87})$$

с вещественной частью

$$2r_{12}(\omega) = \frac{1 - \omega^2 + \omega^4 - \omega^6}{(1 - \omega^2 + \omega^4)^2}. \quad (\text{XII.88})$$

По полиному знаменателя выражения (XII.87) находим семейство основных сопротивлений:

$$Z_0(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + \frac{5}{2}s + 1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 1}; \quad (\text{XII.89})$$

$$Z_1(s) = \frac{\frac{1}{2}s^3 + s^2 + s}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 1}; \quad (\text{XII.90})$$

$$Z_2(s) = \frac{\frac{1}{2}s^3 + s^2 + \frac{1}{2}s}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 1}; \quad (\text{XII.91})$$

$$Z_3(s) = \frac{s^3 + s^2 + \frac{1}{2}s}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 1}; \quad (\text{XII.92})$$

$$Z_4(s) = \frac{s^4 + \frac{5}{2}s^3 + 2s^2 + s}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 1}. \quad (\text{XII.93})$$

Имеем

$$a_{01} = \frac{5}{2}, \quad a_{11} = 1, \quad a_{21} = \frac{1}{2}, \quad a_{31} = \frac{1}{2}, \quad a_{41} = 1; \quad (\text{XII.94})$$

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = 0, \quad \beta_4 = 0; \quad (\text{XII.95})$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1, \quad (\text{XII.96})$$

откуда

$$\sum_1^3 \beta_{k-1} a_{k1} = \frac{3}{2}, \quad \sum_2^4 \alpha_{k-1} a_{k1} = \frac{3}{2}; \quad (\text{XII.97})$$

$$\sum_2^4 \beta_{k-2} a_{k1} = \frac{3}{2}, \quad \sum_1^3 \alpha_k a_{k1} = \frac{3}{2}. \quad (\text{XII.98})$$

Очевидно, что оба неравенства (XII.54) и (XII.55) выполняются. В то же время неравенства (XII.44) и (XII.45) не выполняются, поэтому ясно, какой из рассмотренных выше вариантов синтеза следует выбрать.

Далее вычислим функции:

$$z_a = Z_1 + Z_3 = \frac{\frac{3}{2}s^3 + 2s^2 + \frac{3}{2}s}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 1}; \quad (\text{XII.99})$$

$$z_b = Z_0 + Z_2 = \frac{\frac{3}{2}s^3 + 3s^2 + 3s + 1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 1} \quad (\text{XII.100})$$

и найдем разложения:

$$z_a = \frac{1}{\frac{2s}{3} + \frac{2}{3s} + \frac{1}{z_1}}; \quad (\text{XII.101})$$

$$z_b = \frac{1}{\frac{2s}{3} + \frac{1}{\frac{3s}{2} + z_2}}, \quad (\text{XII.102})$$

где

$$z_2 = \frac{1}{\frac{4}{9} z_1} = \frac{s^2 + \frac{3}{2}s + 1}{s^2 + \frac{4}{3}s + 1}. \quad (\text{XII.103})$$

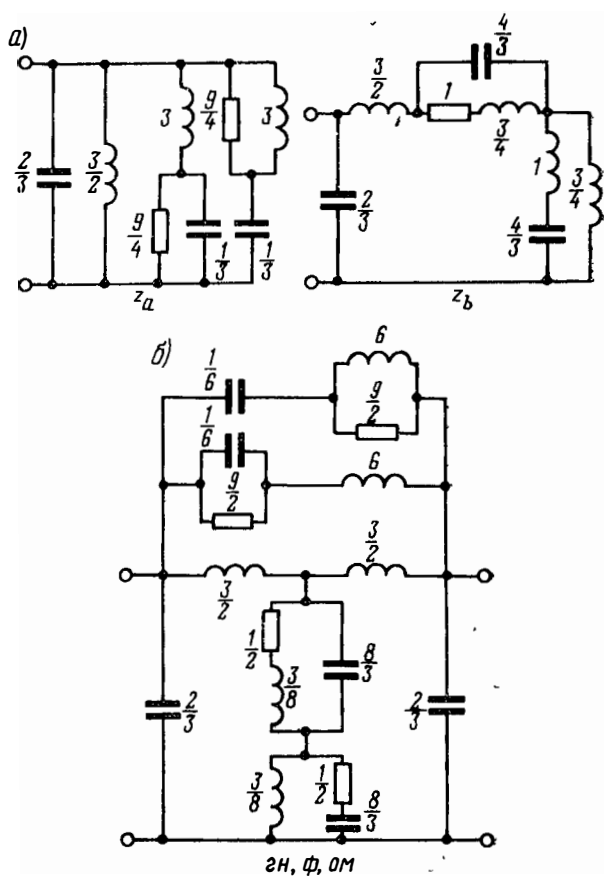


Рис. XII.6

Функция-остаток имеет вещественную часть числителя, равную $1 + \omega^4$, как и следовало ожидать на основе метода Мията. Цепи для сопротивлений z_a и z_b показаны на рис. XII.6а, полученная в результате неуравновешенная цепь, реализующая это сопротивление передачи (XII.87), — на рис. XII.6б.

XII.2. Построение цепи с учетом требований к полюсам и нулям функций

В соответствии с расположением нулей и полюсов заданное сопротивление передачи можно отнести к одной из трех категорий. Для начала все реализуемые передаточные функции делят на два класса в зависимости от того, являются ли они п. в. ф. или нет. Далее, те функции, которые не являются п. в. ф., в свою очередь, разделяют на две группы: в одну входят функции, содержащие нули в правой полуплоскости, в другую — не содержащие. Передаточная функция первой группы, очевидно, не может быть п. в. ф. Передаточная функция второй группы либо может быть п. в. ф., либо нет.

Если заданная передаточная функция является п. в. ф., то для ее реализации не требуется четырехполюсника, ибо она может быть реализована более простым способом — в виде двухполюсника с требуемым входным сопротивлением. Если же передаточная функция не является п. в. ф., ее, очевидно, можно реализовать как последовательное соединение сопротивления, определяемого п. в. ф., и отрицательного резистивного сопротивления. Действительно, в этом случае вещественная часть функции, не являющейся п. в. ф., может при $s = j\omega$ принимать отрицательные значения.

Теоретически любая реализуемая передаточная функция минимально или неминимально фазового типа может быть реализована с помощью одной электронной лампы при использовании простой цепи (рис. XII.7), где R_1 и R_2 — соответствующим образом выбранные резистивные сопротивления, а Z — положительное вещественное сопротивление. Практически такая реализация не имеет большого значения, ибо получаемая передаточная функция очень сильно зависит от настройки и стабильности работы цепи, содержащей электронную лампу, назначение которой — ввести в эту функцию дополнительную отрицательную постоянную с заданным точным значением.

Поскольку пассивные элементы не требуют обслуживания или источников питания и относительно стабильны (если они правильно спроектированы), то для реализации сопротивлений передачи предпочтительно использовать только их. Простейшим способом из-

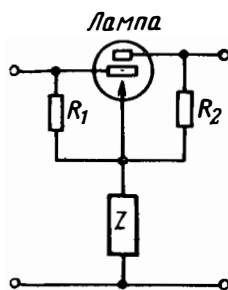


Рис. XII.7

менения алгебраического знака аддитивного члена в выходном напряжении некоторой цепи является включение в нее пары скрещенных проводов, как это имеет место в скрещенной цепи. Другой способ получения того же результата заключается в применении трансформатора с отрицательным коэффициентом передачи по напряжению. Таким образом, логически ясно, почему скрещенная структура имеет столь важное значение в синтезе передаточных функций и почему при ее преобразовании в эквивалентную неуравновешенную схему столь часто используется отрицательная взаимная индуктивная связь.

В том случае, когда требуемое сопротивление передачи не имеет нулей в правой полуплоскости, т. е. когда оно является функцией минимально фазового типа, его реализация всегда возможна в виде простой неуравновешенной цепной схемы. Но если указанное сопротивление представляет собой функцию неминимально фазового типа, то оно уже не может быть реализовано в такой простой форме. Реализация в виде неуравновешенной цепи не обязательно будет содержать взаимные индуктивности, а, например, представлять собой неуравновешенную цепную схему, соединенную каскадно с Т-образной перекрытой, двойной Т-образной или тройной Т-образной цепями различного типа. Ниже этот вопрос рассматривается более подробно.

Заметим прежде всего, что здесь важное значение приобретает опыт использования методов реализации передаточных функций цепей без потерь, рассмотренных в главе VII, и особенно принципов построения цепных схем, описанных в § VII.3. При заданном сопротивлении передачи обычный подход состоит, во-первых, в выборе входного сопротивления, имеющего требуемые полюсы, и, во-вторых, в разложении его в цепную схему таким образом, чтобы последовательные сопротивления или параллельные проводимости некоторых ветвей имели полюсы в требуемых нулях передачи. Возможность управления полюсами разлагаемой функции (для того, чтобы частоты их имели требуемые значения) достигается тем, что лишь при полном исключении полюсов появляются нули передачи. Частичное устранение полюсов используется на этапах сдвига нулей, причем эти нули становятся полюсами разлагаемой функции после ее последующей инверсии.

Для указанного процесса характерно, что нет необходимости обращать внимание на создание соответствующих полюсов требуемой передаточной функции. Являясь собственными частотами результирующей цепи в режиме холостого хода, они одновременно являются полюсами входного сопротивления и, следовательно, создаются автоматически, поскольку разлагаемая функция представляет собой это сопротивление.

Попытки применить аналогичный метод к синтезу сопротивлений передачи цепей с потерями пока еще имели весьма ограниченный успех, хотя были получены некоторые полезные результаты, имеющие узкое применение. При этом возникли две основные труд-

ности, которые отсутствуют в аналогичных случаях для цепи без потерь. Так, если полюс устраняется частично или полностью, то и он, и остаточная функция всегда автоматически реализуемы. Как указывалось в § IX.1, ни устраненный полюс, ни остаточная функция в RLC цепи не дают никакой априорной уверенности в том, что рассматриваемые функции являются п. в. ф. Кроме того, неясно, как следует управлять процессом сдвига нулей в комплексной плоскости, так как на нули не накладываются ограничения, связанные с их перемещением по фиксированному пути, что имеет место в LC цепи, где этот путь представляет собой мнимую ось. Следовательно, нет уверенности в том, что требуемый сдвиг нуля всегда можно произвести при условии, что и устраненный полюс, и остаточная функция являются п. в. ф.

Создание требуемых нулей передачи в процессе разложения входной функции представляет собой чрезвычайно трудный процесс (если не невозможный в общем случае). Мы попытаемся использовать метод, начинающийся с выбора функции, реализация которой дает требуемые нули передачи и легко осуществима, даже если возникает необходимость в некотором предварительном распределении полюсов.

Таким образом, отсюда станет очевидным, можно ли произвести сдвиг полюсов, не оказывая влияния на нули.

Иными словами, предлагаемый метод связан, так сказать, «с переменной ролей» полюсов и нулей. Вместо того чтобы отвлечься от полюсов и сконцентрировать все внимание на методе создания требуемых нулей передачи, синтез начинают либо со структуры цепи, расположение нулей для которой очевидно, либо с функции, имеющей требуемые нули и реализуемой известным способом. Далее находят приемы, позволяющие произвести сдвиг полюсов этой функции в соответствующее положение без нарушения расположения ее нулей.

Зная метод разложения в цепную схему, легко установить, как можно выполнить такую процедуру. Рассмотрим каскадное соединение цепей N_1, N_2, N_3, \dots , изображенное на рис. XII.8а. Каждый из четырехполюсников дает одну группу нулей передачи (один нуль, пару комплексных нулей или четверку нулей), которые в совокупности с нулями сопротивления Z_1 образуют нули сопротивления передачи полной цепи. Если все указанные нули находятся в левой полуплоскости, то цепи N_1, N_2, \dots можно заменить одиночной последовательной или параллельной ветвью, которая дает соответственно параллельный или последовательный резонансы в требуемых нулях передачи. Четырехполюсники необходимы лишь для того, чтобы все нули лежали в правой полуплоскости. Если известны только нули передачи для передаточной функции полной цепи и не накладывается никаких ограничений на расположения полюсов (за исключением, конечно, условия, что они должны лежать в левой полуплоскости), то без труда можно определить структуру, подобную изображенной на рис. XII.8а. При этом цепи

N_1, N_2, \dots могут быть неуравновешенными и, самое большое, содержать пару не сильно связанных индуктивностей.

Теперь с помощью любого из известных способов можно полюсы полученного сопротивления передачи сдвинуть без изменения как расположения нулей, так и общего числа полюсов. Таким образом, если использовать «разрезной вход» в любом из контуров, разделяющих цепи Z_1, N_1, N_2, \dots , и ввести сопротивление, полюсы которого представляют собой полюсы соответствующего сопротивления со стороны рассматриваемого разрезного входа, то согласно

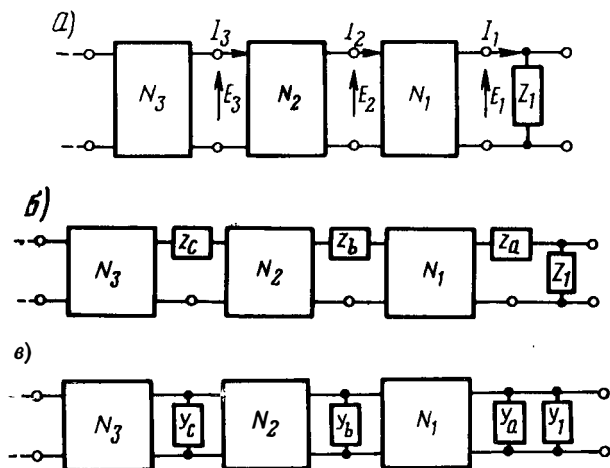


Рис. XII.8

методу разложения в цепную схему (см. § VII.3) общие нули передачи не будут оказывать влияния на процесс синтеза; полюсы сопротивления передачи изменят свое местоположение, а число их останется прежним. На рис. XII.8б показано такое введение сопротивлений z_a, z_b, z_c, \dots в ветви, разделяющие четырехполюсники, изображенные на рис. XII.8а. При этом сопротивление z_a содержит полюсы сопротивления (несколько или все) со стороны разрезного входа, образованного разрезом правой ветви. Аналогично сопротивление z_b содержит лишь полюсы сопротивления со стороны разрезного входа, образованного разрезом центральной ветви. Когда в цепи присутствуют оба сопротивления z_a и z_b , полюсы соответствующего сопротивления со стороны разрезного входа, образованного в центральной ветви, появляются благодаря наличию сопротивления z_a , однако они либо могут, либо не могут оставаться такими же, как и при отсутствии сопротивления z_a . Это положение будет более подробно рассмотрено ниже.

Аналогично, как показано на рис. XII.8в, можно параллельно цепям, изображенным на рис. XII.8а, включить проводимости, не оказывая при этом влияния на нули передачи, если полюсы каждой

проводимости представляют собой лишь полюсы проводимости со стороны прямого входа, возникающего при подключении проводов к паре рассматриваемых зажимов.

Полюсы сопротивления со стороны входа, образованного разрезом в контуре между четырехполюсниками (рис. XII.8а), можно, поскольку сопротивление контура равно сумме двух сопротивлений, разделить на две группы: полюсы сопротивления со стороны правой и левой частей каскадного соединения. Если в центральный контур цепи, приведенной на рис. XII.8а, ввести сопротивление, подобное z_b из рис. XII.8б, которое содержит лишь полюсы сопротивления $\frac{E_2}{I_2}$ со стороны правой части этой цепи, то после введения

z_b входное сопротивление на данном участке полной цепи будет содержать как эти полюсы, так и полюсы, которые входное сопротивление имело вначале. Другими словами, входное сопротивление здесь вследствие введения сопротивления z_b приобретает несколько дополнительных полюсов (а именно, полюсы этого сопротивления), часть из которых (или все) представляют собой собственные частоты разомкнутой части цепи вправо от центрального контура.

Следует отметить, что входное сопротивление со стороны левой пары зажимов полной цепи этих дополнительных полюсов не приобретает, что полностью совпадает с рассмотренным в § VII.3 случаем. Там при цепном разложении функции z_{11} указывалось, что благодаря частичному устранению полюса (с целью сдвига нуля) сопротивление z_{22} результирующей цепи содержит дополнительные полюсы кроме полюсов функций z_{11} и z_{12} . В то же время сопротивление z_{11} , очевидно, не приобретает этих дополнительных полюсов, ибо оно является разлагаемой функцией, а сопротивление z_{12} также не приобретает их, так как не может содержать полюсов, которые не содержатся как в z_{11} , так и в z_{12} . То же условие относится и к цепям с потерями, поскольку по физическим соображениям сопротивление передачи, очевидно, не может содержать собственные частоты, которые не возбуждаются на любой паре зажимов, ибо оно должно подчиняться требованиям теоремы взаимности.

Обратимся к рис. XII.8а и определим сопротивления

$$Z_1 = \frac{E_1}{I_1}; \quad Z_2 = \frac{E_2}{I_2}; \quad Z_3 = \frac{E_3}{I_3}, \dots \quad (\text{XII.104})$$

Затем введем сопротивление z_a (как показано на рис. XII.8б), не имеющее других полюсов, кроме полюсов функции Z_1 . Тогда сопротивления Z_2, Z_3, \dots не приобретают этих или любых других дополнительных полюсов, и нули передачи остаются без изменения. Однако положение полюсов сопротивлений Z_2, Z_3, \dots , а также полюсов полного сопротивления передачи изменяется, причем последние являются нулями сопротивлений контуров подобно сопротивлению правого контура с учетом включения сопротивления z_a . Добавление этого сопротивления сдвигает нули сопротивления пра-

вого контура и, следовательно, сдвигает полюсы полного сопротивления передачи.

Далее, вводя сопротивление z_b , имеющее только полюсы сопротивления Z_2 (для данного сопротивления z_a , ибо введение последнего вызывает сдвиг этих полюсов, хотя и не увеличивает их числа), можно произвести последующий сдвиг полюсов сопротивления передачи без изменения их числа или положения нулей передачи. Аналогично, обращаясь к рис. XII.8в, получим тот же результат путем введения параллельных проводимостей y_a, y_b, \dots , причем обоснование данного метода полностью дуально обоснованию, которое было дано при введении сопротивлений.

Таким образом, посредством описанной методики можно попытаться получить требуемую картину расположения полюсов, имея

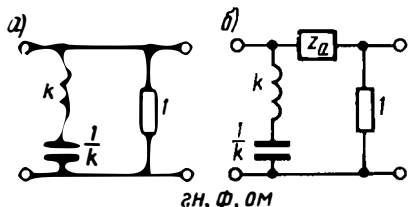


Рис. XII.9

в качестве исходных данных предварительно заданные нули передачи. Выбирая для полюсов функций z_a, z_b, \dots лишь полюсы сопротивлений Z_1, Z_2, \dots соответственно, мы избавляемся от усложнения сопротивлений контуров. Для каждого введенного сопротивления выбираются такие нули, которые, во-первых, оставляют его положительным вещественным и, во-вторых, дают нули резуль-

тирующего сопротивления контура, расположенные настолько близко к полюсам требуемого сопротивления передачи, насколько это совместимо с первым требованием.

Когда имеется много нулей и полюсов, этот процесс при отсутствии соответствующих вычислительных устройств становится несколько утомительным, но простые задачи он позволяет решать достаточно эффективно. В качестве примера рассмотрим случай, при котором необходимо получить передаточную функцию с парой нулей на мнимой оси (эти нули можно нормализовать в точках $\omega = \pm 1$) и парой полюсов, расположенных в заданных точках левой полуплоскости. Цепь должна заканчиваться резистивным сопротивлением нагрузки, равным 1 ом.

Цепь на рис. XII.9а, очевидно, обеспечивает требуемую пару нулей передачи и нагружена на резистивное сопротивление 1 ом. Коэффициент уровня сопротивления k для ветви, представляющей собой последовательный LC контур, остается произвольным. Изменениями величины k можно, используя известный способ, добиться того, что полюсы сопротивления этого простого контура будут располагаться в любой точке на полуокружности в плоскости s , как показано пунктирной линией на рис. XII.10, или в точках на вещественной оси, среднее геометрическое значение которых равно -1 . При этом полюсы не могут лежать ни в каких других точках левой полуплоскости.

Введем в цепь сопротивление z_a , как показано на рис. XII.9б. Поскольку сопротивление контура имеет полюсы в точках $s = 0$ и $s = \infty$, сопротивление z_a может быть индуктивностью, емкостью или последовательным LC контуром. Нули сопротивления контура при наличии индуктивного сопротивления z_a , очевидно, лежат внутри полукруга, границей которого служит пунктирная линия и мнимая ось (см. рис. XII.10), тогда как при емкостном сопротивлении z_a они лежат вне этого полукруга. Выбор значений k и дополнительного сопротивления в виде индуктивности L или емкости C , обеспечивающего расположение указанных нулей (являющихся полюсами передаточной функции) в любых требуемых точках, не вызывает затруднений. Вместе с тем нули передачи остаются в их первоначально выбранных положениях на мнимой оси.

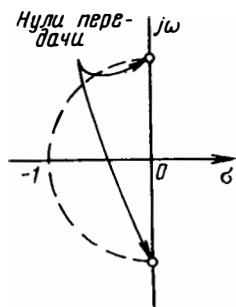


Рис. XII.10

Если желательно, чтобы нули оставались в левой полуплоскости, нужно просто ввести некоторое резистивное сопротивление в параллельную ветвь, создающую последовательный резонанс. Если желательно получить больше, чем одну пару таких нулей, предварительно используют цепь с несколькими параллельными ветвями, создающими последовательные резонансы. С другой стороны, можно использовать полностью дуальную цепь, состоящую из последовательных ветвей, обеспечивающих параллельные резонансы, в которую необходимо ввести параллельные проводимости, как показано на рис. XII.8в.

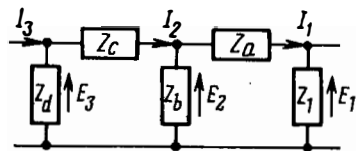


Рис. XII.11

Вместо осуществления сдвига полюсов описанным способом используется иной порядок решения задачи, который упрощает вычисления, хотя резу-

льтирующая цепь при этом может содержать большее количество элементов. Рассмотрим цепную схему, изображенную на рис. XII.11, и допустим, что сопротивления Z_1 , Z_2 и Z_3 определены в соответствии с выражениями (XII.104).

Выберем

$$Z_1 = \frac{p_1(s)}{q_1(s)}; \quad Z_a = \frac{h_1(s)}{q_1(s)}; \quad Z_b = \frac{p_1(s) + h_1(s)}{q_2(s) - q_1(s)}, \quad (\text{XII.105})$$

тогда

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{Z_b}{Z_1 + Z_a + Z_b} = \frac{q_1(s)}{q_2(s)} \quad (\text{XII.106})$$

и

$$\frac{E_1}{I_2} = \frac{E_1}{I_1} \frac{I_1}{I_2} = \frac{p_1(s)}{q_1(s)} \frac{q_1(s)}{q_2(s)} = \frac{p_1(s)}{q_2(s)}. \quad (\text{XII.107})$$

Таким образом, если рассматривать $Z_1(s)$ как некоторое предварительно выбранное сопротивление передачи, то при наличии ветвей Z_a и Z_b его нули остаются без изменения, но имеет место сдвиг его полюсов от нулей $q_1(s)$ к нулям $q_2(s)$.

Полином $h_1(s)$, необходимый для промежуточных преобразований, выпадает из конечного результата и должен быть выбран так, чтобы оба сопротивления Z_a и Z_b стали п. в. ф. для требуемого полинома $q_2(s)$, определяющего новые местоположения полюсов. Фактически должна существовать возможность найти полином $h_1(s)$, при котором $\frac{h_1}{q_1}$ и $\frac{h_1}{q_2 - q_1}$ являются п. в. ф., ибо всегда можно выбрать достаточно большой постоянный множитель полинома h_1 , чтобы сделать функцию $\frac{p_1 + h_1}{q_2 - q_1}$ п. в. ф., если полином $\frac{h_1}{q_2 - q_1}$ в исходный момент был п. в. ф. Полином $h_1(s)$, очевидно, существует, когда новые положения полюсов, определяемые полиномом $q_2(s)$, не слишком далеки от первоначальных, определяемых полиномом $q_1(s)$. Всегда можно добиться того, чтобы полином $q_2 - q_1$ был полиномом Гурвица, «взвешивая» q_2 посредством выбора достаточно большого множителя. Однако такой прием надо использовать как можно реже, так как он приводит к понижению общего усиления.

Пусть

$$Z_2 = \frac{Z_b(Z_1 + Z_a)}{Z_1 + Z_a + Z_b} = \frac{p_1(s) + h_1(s)}{q_2(s)} = \frac{p_2(s)}{q_2(s)}, \quad (\text{XII.108})$$

где p_2 — сокращенное обозначение полинома $p_1 + h_1$. Далее выбираем

$$Z_c = \frac{h_2(s)}{q_2(s)}; \quad Z_d = \frac{p_2(s) + h_2(s)}{q_3(s) - q_2(s)} \quad (\text{XII.109})$$

и получаем

$$\frac{l_2}{l_3} = \frac{Z_d}{Z_2 + Z_c + Z_d} = \frac{q_2(s)}{q_3(s)}. \quad (\text{XII.110})$$

Последующее входное сопротивление имеет вид

$$Z_3 = \frac{Z_d(Z_2 + Z_c)}{Z_2 + Z_c + Z_d} = \frac{p_2(s) + h_2(s)}{q_3(s)} = \frac{p_3(s)}{q_3(s)} \quad (\text{XII.111})$$

и т. д. Столь же просто этот процесс может быть продолжен, в чем и состоит одна из интересных особенностей рассматриваемого метода.

Следует отметить, учитывая предыдущее рассуждение, что требование, согласно которому сопротивление Z_a имеет полюсы Z_1 , а сопротивление Z_b имеет нули $Z_1 + Z_a$, является необходимым и достаточным для сохранения нулей передачи без изменения и гарантией, что сложность результирующего входного сопротивления не возрастает по мере продолжения процесса. Аналогично необходи-

мо, чтобы сопротивление Z_c имело полюсы Z_2 , а сопротивление Z_d — нули $Z_2 + Z_c$.

Полное сопротивление передачи цепи, изображенной на рис. XII.11, можно представить в виде произведения

$$Z_{13} = \frac{E_1}{I_3} = \frac{p_1(s)}{q_3(s)} = \frac{p_1(s)}{q_1(s)} \frac{q_1(s)}{q_2(s)} \frac{q_2(s)}{q_3(s)}. \quad (\text{XII.112})$$

Если $Z_{13}(s)$ является функцией минимально фазового типа, т. е. ее нули ограничены левой полуплоскостью, то она всегда может быть представлена как произведение п. в. ф. Отсюда очевидно, что простая цепная схема, подобная цепи, приведенной на рис. XII.11, может реализовать с точностью до постоянного множителя любую передаточную функцию минимально фазового типа. Справедливо и обратное утверждение: простая цепная схема должна дать сопротивление передачи, которое является функцией минимально фазового типа, ибо сопротивления ее ветвей (нули и полюсы которых определяют нули передачи) являются п. в. ф.

Таким образом, ясно, что любое заданное сопротивление передачи минимально фазового типа всегда реализуется указанным способом. Если же оно не является функцией минимально фазового типа, его синтез можно начать с построения четырехполюсника, имеющего требуемые нули передачи и любую удобную группу полюсов, которые ускоряют реализацию этой цепи в неуравновешенной форме. На данном этапе необходимо так подобрать полюсы, чтобы четырехполюсник имел требуемую реализацию и в то же время выбранные полюсы должны располагаться настолько близко к заданным полюсам, насколько это совместимо с поставленной задачей. Для выполнения описанной операции можно использовать изложенный в предыдущем параграфе метод синтеза. При этом входное сопротивление является четырехполюсником отождествляется с сопротивлением Z_1 на рис. XII.11. Применяется рассмотренный только что метод для сдвига полюсов в заданные положения.

Аналогичные операции необходимо выполнить для реализации минимально фазовой функции, если она имеет в точке $s = \infty$ или где-либо на мнимой оси не простые нули (т. е. нули, порядок которых выше первого). Следующий пример иллюстрирует высказанную здесь мысль. Предположим, что требуется получить сопротивление передачи, имеющее в точке $s = \infty$ нуль второго порядка и полюсы в точках $s = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$. Чтобы показать, насколько произвольно мы можем поступать в начале процесса, выберем в качестве пробной цепи RC цепь, изображенную на рис. XII.12а. Ясно, что она имеет два нуля передачи в точке $s = \infty$ вследствие наличия двух параллельных емкостных ветвей. Возможное входное сопротивление этой цепи имеет вид

$$Z_1(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \frac{s+2}{s^2+4s+3}, \quad (\text{XII.113})$$

где мы умышленно выбираем полюсы так, чтобы они не располагались вблизи требуемых полюсов. Разумеется, поскольку пробной является RC цепь, полюсы ее сопротивления должны лежать на вещественной оси и, следовательно, не могут располагаться очень близко от требуемых полюсов.

Теперь произведем сдвиг полюсов путем отождествления сопротивления Z_1 , определяемого выражением (XII.113), с сопротивле-

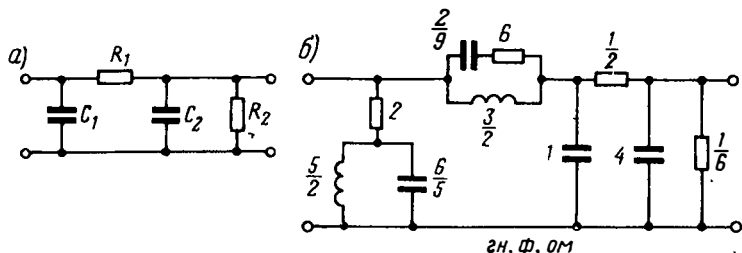


Рис. XII.12

нием Z_1 на рис. XII.11. Предположив, что требуемый сдвиг возможен на одном этапе, запишем

$$q_2(s) = K(s^2 + s + 1), \quad (\text{XII.114})$$

где K — множитель. Если записать вспомогательный полином в виде

$$h_1(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0, \quad (\text{XII.115})$$

то из выражения (XII.105) получим:

$$Z_a = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + 4s + 3}; \quad (\text{XII.116})$$

$$Z_b = \frac{a_2 s^2 + (1 + a_1)s + 2 + a_0}{(K - 1)s^2 + (K - 4)s + K - 3}. \quad (\text{XII.117})$$

Постоянная K должна быть равна, по крайней мере, четырем. Если $K = 4$, то из рассуждения, приведенного в § IX.3, следует, что Z_b имеет простую реализацию при $\frac{a_2}{2 + a_0} = 3$. Очевидно, можно принять $a_0 = 0$, что дает простую форму Z_a . Поскольку в данном случае $a_2 = 6$, то для реализации Z_a необходимо, чтобы $a_1 \geq \frac{9}{2}$.

Выбрав знак равенства, получим:

$$Z_a = \frac{6s^2 + \frac{9}{2}s}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1}{\frac{2}{3s} + \frac{1}{\frac{9}{2s} + 6}}; \quad (\text{XII.118})$$

$$Z_b = \frac{6s^2 + \frac{5}{2}s + 2}{3s^2 + 1} = 2 + \frac{\frac{5}{2}s}{3s^2 + 1}. \quad (\text{XII.119})$$

Полная цепь показана на рис. XII.126; полное сопротивление передачи оказывается равным

$$Z_{12} = \frac{1}{s^2 + s + 1}. \quad (\text{XII.120})$$

Если увеличить уровень полного сопротивления в шесть раз и, таким образом, нормализовать резистивное сопротивление нагрузки к 1 ом, то постоянный множитель должен быть равен $3/4$, что вполне приемлемо. Полная цепь по числу требуемых элементов, безусловно, является малоэкономичной (можно получить тот же результат при общем числе элементов, равном трем, используя метод, описанный в § XI.1). Тем не менее этот пример служит иллюстрацией принципов и гибкости описанных здесь методов синтеза.

В качестве второго примера рассмотрим требуемое сопротивление передачи вида

$$Z_{12}(s) = \left(\frac{s + \frac{1}{2}}{s + 2} \right)^3. \quad (\text{XII.121})$$

Положительное вещественное сопротивление

$$Z_1(s) = \left(\frac{s + \frac{1}{2}}{s + \frac{3}{2}} \right)^3 \quad (\text{XII.122})$$

имеет такие же нули и полюсы, расположенные так близко от полюсов функции $Z_{12}(s)$, как позволяет условие принадлежности функции к классу п. в. ф. Отождествим рассматриваемое сопротивление с сопротивлением Z_1 цепи, изображенной на рис. XII.11. Тогда

$$p_1(s) = s^3 + \frac{3}{2}s^2 + \frac{3}{4}s + \frac{1}{8}; \quad (\text{XII.123})$$

$$q_1(s) = s^3 + \frac{9}{2}s^2 + \frac{27}{4}s + \frac{27}{8}. \quad (\text{XII.124})$$

Снова предположив, что для сдвига полюсов достаточно одного этапа, находим

$$q_2(s) = K(s + 2)^3 = K(s^3 + 6s^2 + 12s + 8), \quad (\text{XII.125})$$

откуда

$$q_2 - q_1 = (K - 1)s^3 + \left(6K - \frac{9}{2}\right)s^2 + \left(12K - \frac{27}{4}\right)s + \left(8K - \frac{27}{8}\right). \quad (\text{XII.126})$$

При $K = 1$ получим выражение

$$q_2 - q_1 = \frac{3}{2}s^2 + \frac{21}{4}s + \frac{37}{8}, \quad (\text{XII.127})$$

которое имеет нули, расположенные очень близко к точке $s = -\frac{3}{2}$, где лежат нули полинома $q_1(s)$. Нетрудно видеть, что можно было принять $h_1 = Rq_1$, поскольку сопротивление $Z_a = \frac{h_1}{q_1}$ в этом случае просто вырождается в постоянную, а полином $\frac{h_1}{q_2 - q_1}$ обязательно является п. в. ф., так как его нули и полюсы расположены близко друг от друга. Путем выбора достаточно большого значения R можно Z_b сделать также п. в. ф. и получить очень простой конечный результат. При $R = 2$ имеем

$$Z_a = 2; \quad Z_b = 2s + \frac{10}{3s + \frac{51s + 74}{8s + 11}}. \quad (\text{XII.128})$$

Учитывая, что реализация положительного вещественного сопротивления $Z_1(s)$, определяемого выражением (XII.122), не вызывает затруднений, а цепи для Z_a и Z_b , определяемых выражениями (XII.128), находятся почти непосредственно, не будем выполнять остальную часть синтеза.

Можно всегда принять $h_1 = Rq_1$ (при котором $Z_a = R$), если частное $\frac{q_2}{q_1}$ является п. в. ф. с отличной от нуля вещественной частью на мнимой оси. Отнеся положительный вещественный множитель к полиному q_2 , из выражения (XII.105) получим функцию $Z_b = \frac{p_1 + Rq_1}{kq_2 - q_1}$, которая в дальнейшем (при достаточно больших значениях k и R) становится п. в. ф. Условие, согласно которому функция $\frac{q_2}{q_1}$ должна быть п. в. ф., в некоторых случаях не является обязательным, но будет достаточным¹.

ХИ.3. Некоторые другие методы

Обращаясь к рис. XII.11 и к ф-лам (XII.104), введем дополнительные проводимости:

$$Y_\alpha = \frac{I_1}{E_2}; \quad Y_\beta = \frac{I_2}{E_3}. \quad (\text{XII.129})$$

Тогда получим

$$Z_1 Y_\alpha Z_2 Y_\beta Z_3 = \frac{E_1}{I_1} \frac{I_1}{E_2} \frac{E_2}{I_2} \frac{I_2}{E_3} \frac{E_3}{I_3} = \frac{E_1}{I_3} = Z_{13}, \quad (\text{XII.130})$$

¹ При решении вопроса об адекватности предварительных значений множителей k и R свойство, отмеченное в главе I в связи с рассмотрением рис. I.9, сокращает здесь вычислительные операции.

откуда непосредственно имеем

$$\left. \begin{aligned} Z_a &= \frac{1}{Y_\alpha} - Z_1 \\ \frac{1}{Z_b} &= \frac{1}{Z_2} - Y_\alpha \\ Z_c &= \frac{1}{Y_\beta} - Z_2 \\ \frac{1}{Z_d} &= \frac{1}{Z_3} - Y_\beta \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII.131})$$

В выражении (XII.130) требуемое сопротивление передачи представлено в виде произведения п. в. ф. При этом, чтобы сделать такое представление возможным, в полиномы числителя и знаменателя функции Z_{13} , если необходимо, включают некоторые добавочные множители¹. Тогда согласно выражениям (XII.131) функции сопротивлений Z_a, Z_b, Z_c, Z_d могут стать положительными вещественными путем введения соответствующих постоянных множителей в положительные вещественные сомножители $Z_1, Y_\alpha, Z_2, \dots$ функции Z_{13} .

Этот метод можно, очевидно, применить также к синтезу коэффициента передачи по напряжению. Так, опуская последний сомножитель в выражении (XII.130), получим²

$$\frac{E_1}{E_3} = Z_1 Y_\alpha Z_2 Y_\beta. \quad (\text{XII.132})$$

Применим этот метод для реализации сопротивления передачи (XII.121), для чего запишем

$$\frac{Z_1}{A_1} = \frac{Y_\alpha}{A_\alpha} = \frac{Z_2}{A_2} = \frac{s + \frac{1}{2}}{s + 2}. \quad (\text{XII.133})$$

Из соотношений (XII.131) находим:

$$Z_a = \frac{1}{A_\alpha} \frac{s + 2}{s + \frac{1}{2}} - A_1 \frac{s + \frac{1}{2}}{s + 2}; \quad (\text{XII.134})$$

$$\frac{1}{Z_b} = \frac{1}{A_2} \frac{s + 2}{s + \frac{1}{2}} - A_\alpha \frac{s + \frac{1}{2}}{s + 2}. \quad (\text{XII.135})$$

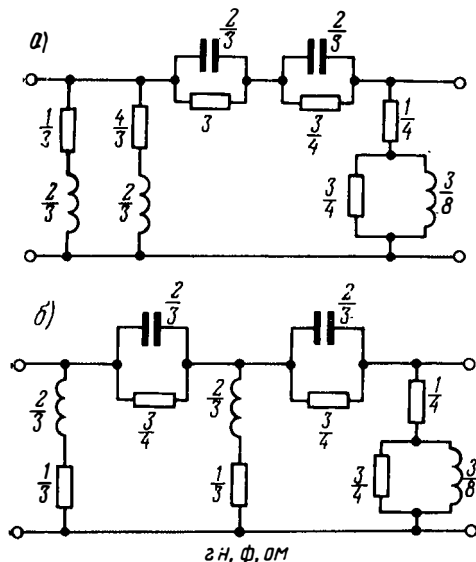
¹ См. приложение 1, задача 17 к главе I.

² Льюис (Lewis P. M.) указывал, что метод, рассмотренный в [29], приводит к тому же результату, хотя и предполагает выполнение более трудоемкого процесса матричного разложения на множители.

Постоянные множители A_α , A_1 , A_2 здесь можно выбрать равными единице, тогда

$$Z_a = \frac{1}{Z_b} = \frac{3\left(s + \frac{5}{4}\right)}{(s+2)\left(s + \frac{1}{2}\right)}. \quad (\text{XII.136})$$

Учитывая полученное выражение, а также выражение (XII.133) для Z_1 , получим цепь, изображенную на рис. XII.13а.



гн, ф, ом
Рис. XII.13

принять $Y_\alpha = \frac{1}{R_1}$ и $Y_\beta = \frac{1}{R_2}$. Тогда ф-лы (XII.131) переписутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} Z_a &= R_1 - Z_1 \\ \frac{1}{Z_b} &= \frac{1}{Z_2} - \frac{1}{R_1} \\ Z_c &= R_2 - Z_2 \\ \frac{1}{Z_d} &= \frac{1}{Z_3} - \frac{1}{R_2} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{XII.137})$$

Соответствующим выбором множителей в функциях Z_2 и Z_3 , очевидно, обеспечивается принадлежность функций Z_b и Z_d к классу п. в. ф.

Для того же рассмотренного выше примера [где требуемое сопротивление передачи определялось выражением (XII.121)] запишем

$$\frac{Z_1}{A_1} = \frac{Z_2}{A_2} = \frac{Z_3}{A_3} = \frac{s + \frac{1}{2}}{s + 2}. \quad (\text{XII.138})$$

Это выражение характеризует сопротивление RL цепи. Следовательно, максимальное значение его вещественной части на мнимой оси появляется в точке $s = \infty$. Нетрудно заметить, что все постоянные множители можно выбрать равными единице, тогда с учетом выражений (XII.137) находим:

$$Z_a = Z_c = 1 - \frac{s + \frac{1}{2}}{s + 2} = \frac{\frac{3}{2}}{s + 2}; \quad (\text{XII.139})$$

$$\frac{1}{Z_a} = \frac{1}{Z_d} = \frac{s + 2}{s + \frac{1}{2}} - 1 = \frac{\frac{3}{2}}{s + \frac{1}{2}}. \quad (\text{XII.140})$$

Получаемая в результате цепь показана на рис. XII.13б. Она содержит то же число элементов, что и цепь, изображенная на рис. XII.13а.

Любой из предложенных в данном параграфе методов можно, разумеется, рассматривать как частный случай более общего метода, описанного в предыдущем параграфе. Предлагаем читателю в качестве упражнения записать соответствующие соотношения для полинома $h_1(s)$, используя выражения $p_1(s)$ и $q_1(s)$ для типичного этапа синтеза.

XII.4. Реализация в виде каскадного соединения усилительных ступеней на пентодах

Представление минимально фазовой передаточной функции в виде произведения п. в. ф. [см. выражение (XII.112) или (XII.130)] прямо подсказывает удобный способ проектирования многокаскадного усилителя, обладающего подобной характеристикой. Пентод, по существу, представляет собой устройство, выходной ток которого пропорционален входному напряжению, следовательно, напряжение на сопротивлении выходной (анодной) цепи пропорционально произведению входного напряжения и этого сопротивления. Другими словами, такое устройство имеет коэффициент передачи по напряжению (или отношение выходного напряжения к входному току, если ко входным зажимам подключено резистивное сопротивление), который с точностью до постоянного множителя равен сопротивлению анодной цепи. Отсюда каскадное соединение

таких ступеней дает полное сопротивление передачи или коэффициент передачи по напряжению, т. е. постоянную, умноженную на произведение соответствующих анодных сопротивлений.

Метод разложения заданного минимально фазового сопротивления передачи на произведение п. в. ф. в общем случае предполагает использование добавочных множителей, как и при синтезе передаточных функций посредством скрещенной цепи постоянного резистивного сопротивления (см. § XI.8).

Описываемый процесс подобен синтезу каскадного соединения скрещенных цепей постоянного резистивного сопротивления в том отношении, что каждая ступень вносит свой вклад в полную передаточную функцию цепи, независимо от ее связи с другими ступенями. При использовании скрещенных цепей именно тот факт, что каждая цепь каскадного соединения представляет собой цепь постоянного резистивного сопротивления, обеспечивает эту независимость поведения компонентной цепи. В каскадном соединении усилительных ступеней на пентодах такой же эффект дает изоляция или «буферное действие», обеспечиваемое электронными лампами.

В тех случаях, когда искомая цепь должна давать усиление, данный метод позволяет получить достаточную гибкость при расчете, причем более дешевым способом, чем при использовании структур постоянного резистивного сопротивления, ибо последние обычно содержат большее количество элементов, необходимых для реализации заданной передаточной функции. Предложенный метод синтеза, при котором в качестве компонентной цепи используется электронная лампа, не следует подвергать той же критике, что и ситуацию, при которой используется цепь, изображенная на рис. XII.7. Действительно, лампы непосредственно обеспечивают разделение входа и выхода и усиление, но ни в коей мере не управляют частотной характеристикой, которая зависит исключительно от пассивных элементов в сопротивлениях анодной цепи.

Если в процессе приведения заданного сопротивления передачи к виду, являющемуся произведением п. в. ф., используются добавочные множители, то каскады, содержащие эти множители, можно рассматривать как каскады сдвига полюсов или сдвига нулей. Например, предположим, что заданное сопротивление передачи имеет вид

$$Z_{12}(s) = \frac{(s+1)^2}{s^2 + 10s + 50}. \quad (\text{XII.141})$$

Представим эту функцию иначе, а именно в виде

$$Z_{12}(s) = \frac{(s+3)^2}{s^2 + 10s + 50} \frac{(s+1)^2}{(s+3)^2}. \quad (\text{XII.142})$$

Тогда оказывается, что каждый ее сомножитель не только является п. в. ф., но и просто реализуется, причем должны быть соблюдены условия (IX.47) и (IX.48). Можно считать, что первый сомножитель произведения (XII.142) сдвигает полюсы из точек

$s = -5 \pm j5$ в точку $s = -3$ либо что второй сомножитель сдвигает нуль из точки $s = -1$ в точку $s = -3$.

Для иллюстрации предложенного метода произведем синтез сопротивления передачи, определяемого выражением (XI.25), при условии, что квадрат его модуля выражен формулой (XI.18) (реализация цепи с таким сопротивлением показана на рис. XI.2). Чтобы произвести синтез, снова необходимо ввести добавочный множитель. Возможная форма сопротивления передачи запишется так:

$$Z_{12}(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1} \frac{1}{s+1} \frac{1}{s+1}; \quad (\text{XII.143})$$

его реализация (с точностью до постоянного множителя) в виде трехкаскадного усилителя на пентодах показана на рис. XII.14.

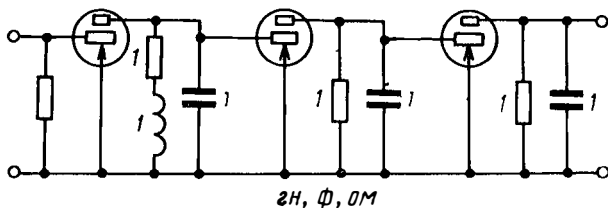


Рис. XII.14

XII.5. Другой метод реализации сопротивлений передачи

Предположим, что заданная минимально фазовая функция имеет вид

$$Z_{12}(s) = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2} = \frac{m_1}{m_2 + n_2} + \frac{n_1}{m_2 + n_2}. \quad (\text{XII.144})$$

Поскольку $m_1 + n_1$ и $m_2 + n_2$ являются полиномами Гурвица, четная и нечетная части m_1 и n_1 имеют простые нули, расположенные на мнимой оси. Следовательно, используя метод синтеза, описанный в XI.1, и процесс разложения, приведенный в § III.7, можно по отдельности реализовать слагаемые выражения (XII.144) с помощью цепных схем без потерь, нагруженных на резистивные сопротивления. В частности, эти слагаемые удобно представить в виде выражений (XI.10) и (XI.11). Таким образом, запишем:

$$Z_{12}^{(1)}(s) = \frac{m_1}{m_2 + n_2} = \frac{z_{12}^{(1)}}{1 + z_{22}^{(1)}}, \quad z_{12}^{(1)} = \frac{m_1}{n_2}, \quad z_{22}^{(1)} = \frac{m_2}{n_2}; \quad (\text{XII.145})$$

$$Z_{12}^{(2)}(s) = \frac{n_1}{m_2 + n_2} = \frac{z_{12}^{(2)}}{1 + z_{22}^{(2)}}, \quad z_{12}^{(2)} = \frac{n_1}{m_2}, \quad z_{22}^{(2)} = \frac{n_2}{m_2}. \quad (\text{XII.146})$$

Ввиду того что нули функций z_{12} расположены на мнимой оси, для отдельной реализации каждого из обоих компонентных сопро-

тивлений передачи можно использовать простой метод разложения функции z_{22} в цепную схему без потерь. При этом параллельные ветви ее будут обеспечивать последовательный резонанс, либо последовательные ветви — параллельный резонанс; и те, и другие создадут нули передачи.

Неуравновешенную цепную схему без потерь, нагруженную на соответствующее резистивное сопротивление, легко таким образом найти для каждой из компонентных функций Z_{12} , определяемых из выражений (XII.145) и (XII.146). Нагрузочные резистивные сопротивления для данных цепей не обязательно одинаковы, так как при помощи их уровней сопротивления можно независимо контролировать множители, входящие в выражения для $Z_{12}^{(1)}$ и $Z_{12}^{(2)}$. Параллельное (back-to-back) соединение этих двух цепных схем, изображен-

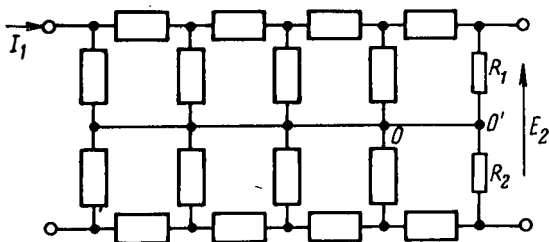


Рис. XII.15

ное на рис. XII.15, дает реализацию первоначального сопротивления передачи, определяемого выражением (XII.144).

Следует отметить, что функции z_{22} в выражениях (XII.145) и (XII.146) являются обратными. Если бы они были одинаковыми, то в цепи, приведенной на рис. XII.15, можно было бы не использовать центральный провод между точками θ — θ' и нагрузить параллельное соединение обеих цепных схем на одно резистивное сопротивление. Однако вследствие того, что их сопротивления z_{22} неодинаковы, такое упрощение невозможно.

Если заданное сопротивление передачи (XII.144) не является минимально фазовым, можно, тем не менее, представить его как сумму соответствующих компонент выражений (XII.145) и (XII.146). Эти составляющие нельзя реализовать в виде цепных схем, однако они реализуются как неуравновешенные четырехполюсники без потерь (возможно, содержащие взаимные индуктивности, как показано в § VII.4), нагруженные на резистивные сопротивления. Их параллельное соединение, аналогичное показанному на рис. XII.15 для цепных схем, дает соответствующую реализацию.

ХII.6. Предварительная коррекция

При практическом применении методов синтеза важно уметь учитывать до некоторой степени влияние паразитных элементов. Эти неустранимые элементы цепи, которые фактически всегда присутствуют в ее физическом воплощении, обычно вызывают нежелательные (хотя часто и допустимые) изменения характеристик.

Вообще, существуют два пути рассмотрения данной задачи. Первый предполагает выбор из системы эквивалентных цепей с различной топологической конфигурацией и различными распределениями значений элементов той, в которой по сравнению с соответствующей физической цепью указанные влияния проявляются в меньшей степени. При другом пути заранее учитывается искажающий эффект паразитных элементов и производится соответствующее компенсирующее изменение функции реализации.

Влияние паразитных элементов в пассивной цепи состоит в некотором изменении диаграммы расположения полюсов и нулей требуемой функции. Если можно заранее определить эти сдвиги, то соответствующей мерой коррекции, очевидно, является предварительный сдвиг полюсов и нулей в противоположном направлении. Этот процесс, называемый «предварительной коррекцией» заданной функции, особенно полезен как средство борьбы с влиянием потерь, вносимых паразитными параметрами индуктивностей и емкостей. В следующих параграфах будут рассмотрены пределы применимости этого метода и порядок выполнения операции компенсации.

Приближенно влияние потерь рассеяния в индуктивности можно представить как присоединение к ней последовательного резистивного сопротивления, а влияние потерь в емкостном элементе — как подключение параллельной активной проводимости. Если в соответствующей схеме последовательно со всеми индуктивностями включены резистивные сопротивления, а параллельно со всеми емкостными элементами — активные проводимости и если значения этих сопротивлений и проводимостей, по крайней мере, также велики, как и при физическом воплощении такой схемы, то, очевидно, нет необходимости в какой-либо компенсации, и даже, если в процессе синтеза влияние паразитных параметров не было учтено заранее, указанный способ автоматически обеспечит нужный результат. Процесс синтеза, при котором предусмотрен учет влияния паразитных параметров, фактически означает, что выполняется предварительная коррекция. Все операции, производимые при этом, как будет видно далее, являются эквивалентными в том смысле, что ни одна из них не может привести к лучшим результатам, чем допускает вид требуемой диаграммы полюсов и нулей. Другими словами, если один метод не позволяет обеспечить достаточную степень компенсации предполагаемых паразитных потерь, то и все другие методы также не дадут такой возможности, причем, безу-

словно, предполагается, что все они обеспечивают оптимальную компенсацию¹.

Как будет показано далее, критерием оценки верхнего предела величины потерь, которые можно скомпенсировать в результате предварительной коррекции, служит близость полюсов соответствующей функции к мнимой оси. Чем дальше расположены полюсы от этой оси, тем больше паразитные потери, которые можно скомпенсировать путем соответствующих изменений в общем процессе синтеза. Если максимальная величина компенсируемых потерь является недостаточной, необходимо найти приемлемую функцию, полюсы которой расположены дальше от мнимой оси. Этот процесс, в который входит и решение задачи аппроксимации, описан ниже в главе XIV, где будет показано, что приемлемая функция с полюсами, удаленными от мнимой оси, имеет большее число полюсов и более низкий коэффициент усиления. Таким образом, за счет дополнительного усложнения схемы и потери усиления теоретически возможно скомпенсировать любую величину паразитных потерь.

Метод предварительной коррекции состоит в том, что для заданной функции сопротивления $Z(s)$ рассматриваются вариации соответствующей цепи, для чего производится замена переменной s на переменную $s + \delta$, где δ — положительная вещественная величина. Результат, получаемый при замене указанной переменной, станет более понятным, если рассматривать заданную функцию как функцию резистивных сопротивлений цепи R_k , ее индуктивных сопротивлений $L_k s$ и ее емкостных проводимостей $C_k s$, которые в совокупности определяют значения $Z(s)$ при различных s . Следовательно, оказывается, что переменная s всегда является множителем по отношению к величине L_k или C_k и, значит, можно записать следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} s &\rightarrow s + \delta \\ L_k s &\rightarrow L_k s + \delta L_k \\ C_k s &\rightarrow C_k s + \delta C_k \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII.147})$$

С физической точки зрения полученные результаты указывают на то, что каждая индуктивность связана с последовательным резистивным сопротивлением, величина которого пропорциональна значению этой индуктивности, а каждая емкость параллельно соединена с активной проводимостью, величина которой пропорцио-

¹ Этому утверждению соответствует несколько частных случаев. Например, в одном из них цепь содержит индуктивности, соединенные последовательно лишь с резистивными сопротивлениями источника и нагрузки, паразитные же потери ничтожно малы. При замене таких чистых индуктивностей индуктивностями с потерями предполагаемое усиление несколько понижается. Подобные устройства имеют, однако, слишком ограниченное применение, чтобы оказывать влияние на методику, касающуюся более общих случаев.

нальна значению этой емкости. Отношения $\frac{R}{L}$ и $\frac{G}{C}$, называемые *коэффициентами рассеяния* (dissipation ratios), имеют одно и то же значение δ .

Соответствующее влияние на критические частоты сопротивления $Z(s)$ можно определить, приняв во внимание, что любая точка $s = s_k$ преобразуется в $s + \delta = s_k$ или $s = s_k - \delta$. Следовательно, все нули и полюсы функции $Z(s)$ смещаются вдоль горизонтальной оси влево на величину δ . Полная диаграмма полюсов и нулей в плоскости s смещается влево на ту же величину δ .

Отсюда можно сделать следующий простой вывод: добавление последовательного резистивного сопротивления ко всем индуктивностям L и параллельной активной проводимости ко всем емкостям C заданной цепи (причем значения всех имеющихся в цепи резистивных сопротивлений, а также геометрия цепи остаются неизменными) приводит к смещению диаграммы полюсов и нулей (функций входного сопротивления, сопротивления и проводимости передачи) влево на величину, равную соответствующей постоянной пропорциональности. Разумеется, справедливо также и обратное утверждение.

Метод предварительной коррекции предполагаемых паразитных потерь также понятен. Если желательно ввести последовательные резистивные сопротивления во все индуктивности L и параллельные активные проводимости во все емкости C при условии, что задан коэффициент рассеяния δ , то предварительно производится синтез для диаграммы полюсов и нулей, смещенной вправо на величину δ . Другими словами, вместо синтеза заданного сопротивления $Z(s)$ сначала выполняют синтез функции $Z(s - \delta)$.

После того как найдены значения резистивных сопротивлений и активных проводимостей (связанные пропорциональной зависимостью с соответствующими индуктивностями L и емкостями C цепи), переходят к требуемой исходной функции сопротивления [от $Z(s - \delta)$ к $Z(s)$].

Необходимым и достаточным условием для выполнения этого процесса коррекции является, очевидно, условие, согласно которому полюсы функции $Z(s - \delta)$ должны располагаться в левой полуплоскости, причем если рассматривается входное сопротивление, то функция $Z(s - \delta)$ должна быть п. в. ф. Если $Z(s)$ является п. в. ф., вещественная часть которой имеет нули на мнимой оси, то функция $Z(s - \delta)$ при любом $\delta > 0$, очевидно, уже не является п. в. ф., даже если ее нули и полюсы находятся в левой полуплоскости. Аналогично положительная вещественная функция $Z(s)$, имеющая нули на мнимой оси, не может оставаться п. в. ф., если производится преобразование $s \rightarrow s - \delta$ при $\delta > 0$, хотя вещественная часть $Z(s)$ на этой оси является положительной с некоторым запасом. Это объясняется тем, что вещественная часть, соответствующая полюсам на мнимой оси, будучи тождественно равной нулю для данной функции (импульсами пренебрегаем), становится отличной от нуля

и отрицательной при замене $s \rightarrow s - \delta$, что вызывает смещение этих полюсов в правую полуплоскость.

При использовании описываемого метода для передаточной функции полюс (или пара полюсов), ближайший к мнимой оси, определяет предел реализации наибольшего допустимого значения δ . Этого можно избежать, применяя метод синтеза, предполагающий разбиение передаточной функции на сомножители, каждый из которых отождествляется с компонентными цепями, соединенными каскадно. В подобном случае расположение полюсов каждого множителя независимо определяет свой верхний предел значения δ . Тогда соответственно различна и максимальная величина допустимых паразитных потерь в каждой цепи. Следовательно, ближайший к мнимой оси полюс заданной функции обуславливает появление элементов с низкими потерями только в какой-то цепи, а не во всей реализации.

Указанный порядок синтеза можно использовать при реализации входной функции лишь тогда, когда она разлагается на аддитивные компоненты, каждая из которых является п. в. ф. и минимально реактивной; их вещественные части на мнимой оси должны быть положительными с некоторым запасом. Если при этих условиях компенсация паразитных потерь невозможна, то единственный выход состоит в пересмотре задачи аппроксимации (при решении которой была получена данная функция сопротивления) с тем, чтобы получить приемлемую аппроксимирующую функцию, дающую при необходимых условиях больший запас.

Хотя такое утверждение является в общем смысле правильным, во многих практических случаях для заданной функции сопротивления удастся «выжать» несколько большую компенсацию потерь (максимально на 2δ), если учесть, что обычно $\frac{G}{C}$ меньше, чем $\frac{R}{L}$.

Кроме того, как будет показано ниже, приближенно оказывается возможным заменить один из этих коэффициентов другим, так как эффективное значение δ , по существу, зависит только от суммы $\frac{R}{2L}$

и $\frac{G}{2C}$.

Таким образом, для данного максимально допустимого значения δ отношение $\frac{R}{L}$ можно увеличить вдвое, если считать, что паразитные потери в емкостных элементах равны нулю.

Для того чтобы получить такой результат, необходимо с самого начала учесть, что входное сопротивление или сопротивление передачи любой RLC цепи можно рассматривать как функцию резистивных сопротивлений R и величин типа $(Ls + \frac{1}{Cs})$ или $(Cs + \frac{1}{Ls})$. Первое выражение появляется там, где имеется только индуктивность или индуктивность, соединенная последовательно с

емкостью; второе соответствует случаю, когда имеется только емкость или емкость, соединенная параллельно с индуктивностью. Функциональная зависимость сопротивления от переменной s и его чувствительность к ее изменениям явно обусловлены не ветвями цепи, содержащими резистивные сопротивления, а ветвями, сопротивления или проводимости которых определяются выражениями первого или второго типа соответственно. Поскольку эти величины являются дуальными, достаточно рассмотреть только одну из них.

Предположим, что индуктивности L цепи заменены последовательными соединениями R и L с одинаковыми коэффициентами рассеяния $\alpha = \frac{R}{L}$, а емкости C — параллельными соединениями C

и G с одинаковыми коэффициентами рассеяния $\beta = \frac{G}{C}$. При этом величина $\left(Ls + \frac{1}{Cs} \right)$ соответственно заменяется на $\left[L(s + \alpha) + \frac{1}{C(s + \beta)} \right]$.

Если $\alpha \neq \beta$, эффект добавления коэффициентов рассеяния, разумеется, нельзя рассматривать как простой сдвиг частот вида $s \rightarrow s + \delta$. Тем не менее возникает вопрос, возможна ли такая приближенная интерпретация, и если да, то каково приближенное значение допущенной ошибки.

Рассматриваемая величина в действительности имеет вид

$$L(s + \alpha) + \frac{1}{C(s + \beta)} = \frac{1}{C(s + \beta)} [LC(s + \alpha)(s + \beta) + 1]. \quad (\text{XII.148})$$

С другой стороны, соответствующая величина, содержащая одинаковые сдвиги, записывается так:

$$L(s + \delta) + \frac{1}{C(s + \delta)} = \frac{1}{C(s + \delta)} [LC(s + \delta)^2 + 1]. \quad (\text{XII.149})$$

Задача состоит в том, чтобы определить, при каком значении δ выражения (XII.148) и (XII.149) почти одинаковы по величине и как можно оценить ошибку. Для решения указанной задачи необходимо, прежде всего, установить, можно ли найти значение δ , при котором выполняется равенство

$$(s + \delta)^2 = (s + \alpha)(s + \beta), \quad (\text{XII.150})$$

или

$$s^2 + 2\delta s + \delta^2 = s^2 + (\alpha + \beta)s + \alpha\beta. \quad (\text{XII.151})$$

Если выразиться точнее, то на поставленный вопрос, очевидно, придется дать отрицательный ответ, ибо приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях s в выражении (XII.151) показывает, что значение δ должно быть одновременно равно арифметическому среднему величин α и β и их геометрическому среднему, что возможно только при $\alpha = \beta$.

Рассмотрим квадратные корни из сомножителей выражения (XII.150) и используем разложения по формуле бинома:

$$\sqrt{s+\alpha} = \sqrt{s} \left(1 + \frac{\alpha}{2s} - \frac{\alpha^2}{8s^2} + \dots \right); \quad (\text{XII.152})$$

$$\sqrt{s+\beta} = \sqrt{s} \left(1 + \frac{\beta}{2s} - \frac{\beta^2}{8s^2} + \dots \right), \quad (\text{XII.153})$$

что соответствует выражению

$$s + \delta = s \left(1 + \frac{\alpha}{2s} - \frac{\alpha^2}{8s^2} + \dots \right) \left(1 + \frac{\beta}{2s} - \frac{\beta^2}{8s^2} + \dots \right). \quad (\text{XII.154})$$

Произведя перемножение и объединив члены с одинаковыми степенями s , получим

$$\delta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{(\alpha - \beta)^2}{8s} + \dots, \quad (\text{XII.155})$$

или

$$\delta \approx \frac{\alpha + \beta}{2} \left(1 - \frac{\alpha - \beta}{4s} \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right). \quad (\text{XII.156})$$

Поскольку максимальное абсолютное значение $\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$ равно единице, можно сделать вывод, что равенство (XII.150) приблизительно удовлетворяется при

$$\delta = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad (\text{XII.157})$$

причем погрешность не превышает величины $\left| \frac{\alpha - \beta}{4s} \right|$. Учитывая, что рассматриваются первые сомножители выражений (XII.148) и (XII.149), их отношение для значения δ , определяемого ф-лой (XII.157), можно представить как

$$\frac{s + \beta}{s + \delta} = \frac{s + \delta - \frac{\alpha - \beta}{2}}{s + \delta} \approx 1 - \frac{\alpha - \beta}{2s}. \quad (\text{XII.158})$$

Отсюда видно, что выражение (XII.148) заменяется выражением (XII.149) при значении δ , определяемом ф-лой (XII.157), во всех случаях, когда допустима приближенная величина погрешности

$$\varepsilon = \left| \frac{\alpha - \beta}{2s} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{R}{L\omega} - \frac{G}{C\omega} \right|. \quad (\text{XII.159})$$

Если предположить, что емкости не имеют потерь и вспомнить, что отношение $\frac{L\omega}{R}$ представляет добротность Q индуктивностей, эту ошибку можно переписать в виде

$$\varepsilon = \frac{1}{2Q}. \quad (\text{XII.160})$$

Во многих практических случаях (в частности, когда рассматриваются характеристики в полосе пропускания) такая ошибка вполне допустима, и чтобы оценить влияние на сопротивление дополнительных одинаковых потерь, вносимых только индуктивностями, достаточно просто произвести замену переменной $s \rightarrow s + \delta$. Соответствующее значение δ в этом случае равно $\frac{R}{2L}$.

Кроме того, указанные результаты часто оказываются полезными при анализе, особенно когда желательно сравнить значения сопротивления $Z(j\omega)$ до и после того, как к индуктивностям или емкостям (либо к тем и другим) добавлены некоторые одинаковые потери. С помощью найденных коэффициентов рассеяния α и β из выражения (XII.157) вычисляется δ . Если $Z(j\omega)$ соответствует сопротивлению до того, как было произведено добавление одинаковых потерь, то $Z(j\omega + \delta)$ соответствует сопротивлению после их добавления. Кроме индуктивностей и емкостей, заданная цепь, разумеется, может содержать любые резистивные сопротивления.

Описанный метод дает возможность вычислить изменение величин сопротивлений, обусловленное увеличением последовательных резистивных сопротивлений и параллельных активных проводимостей, добавленных к индуктивностям L и емкостям C . То обстоятельство, что некоторые из индуктивностей и емкостей могут уже иметь соответственно присоединенные резистивные сопротивления и активные проводимости, не является помехой.

При решении задач анализа данный результат полезен тем, что для вычисления значений сопротивления измененной цепи, полученной после добавления резистивных сопротивлений и активных проводимостей, нет необходимости находить преобразованную функцию сопротивления. В процессе анализа используется та же функция сопротивления, которая характеризует цепь до добавления резистивного сопротивления, соответствующего рассеянию. Однако вместо того, чтобы вычислять эту функцию на мнимой оси (для определения ее значения на различных синусоидальных частотах в установившемся режиме), производится ее расчет в точках, расположенных на линии, параллельной мнимой оси, отстоящей на δ единиц вправо от последней. Первоначальное сопротивление, вычисленное вдоль указанной линии плоскости s , равно (приблизительно) преобразованному сопротивлению, вычисленному для соответствующих частот на мнимой оси. Таким образом, можно вычислить значения преобразованного сопротивления, не имея для него аналитического выражения.

В ряде практических случаев приходится иметь дело с цепями, в которых характер распределения полных потерь является случайным. К такой категории цепей относятся волноводы и участки линий передач, используемых на ультравысоких частотах, а также многие фильтрующие цепи, объемные резонаторы или резонансные контуры и другие подобные устройства. Здесь при рассмотрении какой-либо задачи анализа или синтеза можно добиться некоторого

упрощения за счет предварительного полного пренебрежения диссипативными элементами. Получается цепь более простого вида (двухэлементная), содержащая LC подцепи, которым соответствуют реактивные функции. После решения такой предварительной задачи определяют, используя описанный выше метод, изменения, вызванные добавлением соответствующей величины одинаковых потерь. Результирующее влияние потерь в этом случае оценивается более эффективно, чем тогда, когда потери включаются во все требуемые зависимости в начале синтеза.

При рассмотрении подобных задач для соответствующей недиссипативной функции сопротивления можно воспользоваться разложением Тейлора относительно точек на мнимой оси с тем, чтобы далее рассчитать ее значения, сдвинутые на δ единиц вправо от этой оси. Такой порядок значительно упрощает вычисления.

Если через $z_0(s)$ обозначить сопротивление цепи без потерь или реактивную функцию, а через $z(s)$ — соответствующую диссипативную функцию, то ряд Тейлора примет вид

$$z(j\omega) = z_0(j\omega) + \frac{dz_0}{dj\omega} \delta + \frac{1}{2} \frac{d^2z_0}{dj\omega^2} \delta^2 \dots \quad (\text{XII. 161})$$

Учитывая, что

$$z_0(j\omega) = jx_0(\omega), \quad \frac{dz_0}{dj\omega} = \frac{dx_0}{d\omega}, \quad \frac{d^2z_0}{dj\omega^2} = -j \frac{d^2x_0}{d\omega^2}, \quad (\text{XII. 162})$$

запишем ряд (XII.161) в виде

$$z(j\omega) = jx_0(\omega) + \frac{dx_0}{d\omega} \delta - \frac{j}{2} \frac{d^2x_0}{d\omega^2} \delta^2 + \dots \quad (\text{XII. 163})$$

Приняв

$$z(j\omega) = r(\omega) + jx(\omega), \quad (\text{XII. 164})$$

можно в первом приближении найти, что

$$r(\omega) = \frac{dx_0}{d\omega} \delta; \quad (\text{XII. 165})$$

$$x(\omega) = x_0(\omega). \quad (\text{XII. 166})$$

Эти приближенные зависимости для определения диссипативного сопротивления по соответствующему недиссипативному обычно являются достаточно точными, и нет необходимости учитывать дополнительные члены разложения Тейлора.

Согласно принципу дуальности те же выводы относятся и к проводимостям. Таким образом, если $y_0(j\omega) = jb_0(\omega)$ представляет недиссипативную проводимость (функцию реактивной проводимости), а $g(\omega) + jb(\omega)$ — соответствующую диссипативную функцию, то в первом приближении можно записать:

$$g(\omega) = \frac{db_0}{d\omega} \delta; \quad (\text{XII. 167})$$

$$b(\omega) = b_0(\omega). \quad (\text{XII. 168})$$

Поскольку разложение в ряд Тейлора, определяемое ф-лой (XII.161), сходится равномерно только в пределах круга (относительно некоторой точки на мнимой оси плоскости s), включая окрестность особых точек функции $z_0(s)$, эти результаты неприменимы к реактивным функциям в точках $s = j\omega$, которые лежат ближе, чем на $\delta \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$ к любым полюсам $z_0(s)$. В соответствии с данным ограничением на рис. XII.16 показано предельное значение $s = j\omega$ в предположении, что реактивная функция $z_0(s)$ имеет полюс в точке $s = j\omega_0$.

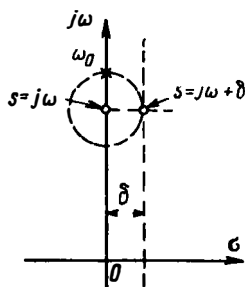


Рис. XII.16

Чтобы избавиться от указанного ограничения, можно описанный метод применить к проводимости $y_0 = \frac{1}{z_0}$, которая имеет нуль там, где функция z_0 имеет полюс. После того как в окрестности этого полюса вычислена соответствующая диссипативная функция $y(s)$, берется величина, обратная ей, с тем, чтобы получить соответствующую диссипативную функцию $z(s)$ в той же окрестности.

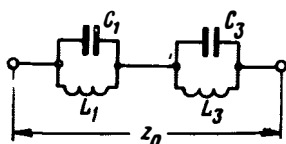


Рис. XII.17

Для иллюстрации описанного метода рассмотрим недиссипативную цепь, изображенную на рис. XII.17. Введем выражения

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad \text{и} \quad \omega_3 = \frac{1}{\sqrt{L_3 C_3}}, \quad (\text{XII.169})$$

которыми обозначим резонансные частоты двух параллельных LC контуров. Реактивная функция z_0 имеет вид

$$z_0 = j\omega \left(\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega_3^2 - \omega^2} \right). \quad (\text{XII.170})$$

Частоты ω_1 и ω_3 являются полюсами функции z_0 . На частоте

$$\omega_2^2 = \frac{1}{C_1 + C_3} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_3} \right) \quad (\text{XII.171})$$

реактивное сопротивление равно нулю. Если для упрощения предположить, что $C_1 = C_3$, то

$$\omega_2^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_3^2}{2}. \quad (\text{XII.172})$$

При решении практических задач цепь, изображенную на рис. XII.17, можно использовать для получения сопротивления, модуль которого равен нулю на частоте ω_2 и бесконечен на двух соседних частотах ω_1 и ω_3 . Чем меньше интервал между ними, тем

быстрее изменяется реактивное сопротивление z_0 в зависимости от частоты в рассматриваемой области. Однако ввиду неизбежного наличия некоторого рассеяния реальное диссипативное сопротивление z имеет конечные значения на частотах ω_1 и ω_3 и отличное от нуля значение на частоте ω_2 . Если рассеяние не является достаточно малым, то нетрудно убедиться, что реальному сопротивлению не соответствуют требуемые критические точки. Фактически модуль диссипативного сопротивления может быть больше на частоте ω_2 , чем на частотах ω_1 и ω_3 , если только коэффициенты рассеяния не являются достаточно малыми.

Допустим, что требуется определить необходимые значения коэффициентов рассеяния, при которых для данного интервала между критическими частотами ω_1 и ω_3 отношение модулей сопротивления на частотах ω_1 и ω_2 или ω_3 и ω_2 равно некоторому заданному значению. Для того чтобы определить модуль диссипативного сопротивления на частотах $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_3$, вычислим

$$\left(\frac{dy_0}{jd\omega}\right)_{\omega=\omega_1} = 2C_1; \quad \left(\frac{dy_0}{jd\omega}\right)_{\omega=\omega_3} = 2C_3, \quad (\text{XII.173})$$

где $y_0 = \frac{1}{z_0}$. Поскольку предполагается, что $C_1 = C_3 = C$, по зависимостям (XII.167) и (XII.168) находим

$$z(j\omega_1) = z(j\omega_3) = \frac{1}{2\delta C}, \quad (\text{XII.174})$$

так как $y_0 = 0$ для частот ω_1 и ω_3 . Используя выражения (XII.170) и (XII.172), получим

$$\left(\frac{dz_0}{jd\omega}\right)_{\omega=\omega_2} = \frac{16\omega_2^2}{C(\omega_3^2 - \omega_1^2)^2}. \quad (\text{XII.175})$$

Примем

$$\omega = \omega_3 - \omega_1 \quad (\text{XII.176})$$

и предположим, что

$$\frac{\omega}{\omega_2} \ll 1. \quad (\text{XII.177})$$

Тогда из выражения (XII.175) получим

$$\left(\frac{dz_0}{jd\omega}\right)_{\omega=\omega_2} \approx \frac{4}{C\omega^2}. \quad (\text{XII.178})$$

Поскольку $z_0(j\omega_2) = jx_0(\omega_2) = 0$, из ф-л (XII.165) и (XII.166) находим

$$z(j\omega_2) = \frac{4\delta}{C\omega^2}. \quad (\text{XII.179})$$

Используя это выражение, а также выражение (XII.174), получим

$$\frac{z(j\omega_{1,3})}{z(j\omega_2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{2\delta}\right)^2. \quad (\text{XII.180})$$

С учетом добротности Q резонансного контура, определяемой выражением

$$Q^{-1} = \frac{R}{L\omega_2} + \frac{G}{C\omega_2} = \frac{2\delta}{\omega^2}, \quad (\text{XII.181})$$

перепишем равенство (XII.180)

$$\frac{z(j\omega_{1,3})}{z(j\omega_2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 Q^2. \quad (\text{XII.182})$$

Пусть требуется, чтобы это отношение было равно, по крайней мере, 100 для задачи, где $\frac{\omega}{\omega_2} = 1\%$. Тогда из ур-ния (XII.182) вытекает требование

$$Q \geq 1414. \quad (\text{XII.183})$$

Между прочим, интересно отметить, что записанное ограничение (ему соответствует рис. XII.16) в этом примере приводит к неравенству

$$\frac{\omega}{2} > \delta, \text{ или } \frac{\omega}{2\delta} > 1. \quad (\text{XII.184})$$

Оно указывает на то, что предложенный метод анализа не пригоден, если отношение сопротивлений, определяемое выражением (XII.180), не превышает 0,5. Любое применение на практике цепи из рассмотренного примера оказывается возможным только в пределах указанного ограничения.



XIII.

ГЛАВА

Синтез передаточных функций RC цепей

XIII.1. Постановка задачи

На практике зачастую возникают ситуации, когда желательно или необходимо устранить из цепей индуктивности. При использовании диапазона очень низких частот и применении обычных методов проектирования получают цепи, индуктивности которых имеют чрезмерно большие величины; их реализация даже при сравнительно малом коэффициенте потерь приводит к громоздким физическим размерам и весам.

Паразитные индуктивные связи также делают такие практические реализации неприемлемыми. Возникает вопрос, можно ли обойтись без индуктивного элемента даже за счет усложнения цепи и потери общего усиления?

Особый интерес к этому вопросу не проявлялся вплоть до середины сороковых годов, пока к аппаратуре, устанавливаемой на самолетах, не стали предъявляться жесткие требования в отношении занимаемой площади и веса. В то время существовало общее мнение, что сами по себе RC цепи не могут обеспечить острой частотной избирательности характеристик, так как в них отсутствуют нормальные резонансные свойства, присущие RLC цепям. Указанные свойства проявляются лишь в том случае, если полюсы соответствующей функции располагаются относительно близко к мнимой оси. С другой стороны, полюсы RC цепей должны лежать на отрицательной вещественной оси плоскости s , а нули передаточной функции такой цепи могут располагаться в любом месте комплексной плоскости (см. §§ II.2 и II.3). Используя цепи с обратной связью, которые инвертируют передаточную функцию вдоль петли обратной связи (обычно называемой β цепью), можно получить полную передаточную функцию с полюсами, расположенными в любом месте левой полуплоскости s , даже если цепь и не будет содержать индуктивностей. Широко используемый «анализатор спектра сигналов» обеспечивает именно таким способом получение эффекта острого резонанса.

Указанный принцип уже в то время был достаточно понятен, и целесообразность его использования для реализации RC цепей с передаточными свойствами более общего характера не вызвала сомнений¹. Однако он считался практически неприемлемым из-за необходимости использования электронных ламп и источников питания, параметры которых оказывают значительное влияние на результирующие частотные характеристики. Подобные цепи, таким образом, оказываются менее стабильными, чем известные пассивные.

Возможность получения при помощи RC цепей (вопреки распространенному тогда мнению) частотных характеристик с любой степенью избирательности первоначально оценивалась путем приводимого ниже метода построения сопротивления передачи цепи, пропускающей низкие частоты. Рассмотрение мы начнем с полинома $Q(s)$, имеющего лишь простые отрицательные вещественные нули, и образуем обычным способом квадрат его модуля на мнимой оси, т. е.

$$B(\omega^2) = Q(j\omega)Q(-j\omega) = B_0 + B_1\omega^2 + B_2\omega^4 + \dots + B_n\omega^{2n}. \quad (\text{XIII.1})$$

Если теперь записать квадрат модуля сопротивления передачи

$$|Z_{12}(j\omega)|^2 = \frac{B_0 + B_1\omega^2 + B_2\omega^4 + \dots + B_k\omega^{2k}}{B_0 + B_1\omega^2 + B_2\omega^4 + \dots + B_n\omega^{2n}}, \quad (\text{XIII.2})$$

где индекс k грубо равен $\frac{n}{2}$, то очевидно, что эта функция становится почти аналогичной характеристике Баттерворта (см. ниже, § XIV.2). В частности, если выбрать пары нулей полинома $Q(s)$ со средним геометрическим $s = -1$, то оказывается, что функция $|Z_{12}(j\omega)|$ (с соответственно выбранным постоянным множителем) равна 0,707 при $\omega = 1$ для любого целого числа n . Эта функция является максимально плоской в точке $\omega = 0$ и при увеличении n аппроксимирует идеальный прямоугольник нижних частот с произвольной точностью почти так же, как функция Баттерворта, используемая в расчетах фильтра нижних частот типа RLC .

По выражению (XIII.2) можно построить функцию $Z_{12}(s)$ с помощью обычного метода, описанного в § VIII.8. Ее реализация в виде RC цепи обеспечивается начальным выбором простых отрицательных вещественных полюсов, при этом постоянный множитель может принимать любые значения. Поскольку уровнем сопротивления цепи можно управлять и учитывая желательность получения плоского усиления, выбор постоянного множителя имеет второстепенное значение. Теоретически, по крайней мере, этот простой прием убеждает нас в том, что исходя из возможности получения требуемых характеристик, RC цепи не следует считать худшими, чем RLC цепи. Подробное обсуждение, приводимое далее в §§ XIV.6 и XIV.9, более убедительно доказывает справедливость

¹ Это вновь было позднее подтверждено Армстронгом и Реза [30].

данного утверждения. В следующих параграфах настоящей главы мы не будем касаться построения соответствующих функций сопротивления или проводимости передачи, а лишь рассмотрим методы их реализации.

XIII.2. Методы синтеза RC цепей при помощи скрещенных структур

Этот метод реализации в общих чертах подобен методу синтеза передаточной функции RLC цепи (см. § XII.1). Функция, характеризующая RC цепь, несколько проще вследствие того, что вычеты соответствующего сопротивления передачи являются вещественными. Как известно, сопротивление передачи холостого хода для симметричной скрещенной цепи с сопротивлениями ветвей z_a и z_b имеет вид

$$z_{12} = \frac{1}{2}(z_b - z_a), \quad (\text{XIII.3})$$

а вычеты входных сопротивлений RC цепей являются вещественными и положительными. Следовательно, определение сопротивлений z_a и z_b по разложению заданной функции $z_{12}(s)$ на элементарные дроби сводится просто к тому, что положительные члены относят к z_b , а отрицательные — к z_a , причем постоянный множитель не играет роли. С помощью методов, описанных в § IV.1, для реализации сопротивлений z_a и z_b получают цепи Фостера, и, таким образом, завершается процесс построения скрещенной цепи.

Поскольку сама по себе скрещенная цепь практически менее желательна, чем эквивалентная ей неуравновешенная, данный метод синтеза, несмотря на простоту, обычно не используется, если только впоследствии нельзя превратить скрещенную цепь в неуравновешенную. Вспомнив зависимости, соответствующие таким эквивалентным преобразованиям (см. рис. VI.9), получим для специальных условий $z_{a2} = \infty$, $z_{b1} = 0$ или $z_{a1} = \infty$, $z_{b2} = 0$ известные цепи, эквивалентные скрещенной. Эти цепи показаны соответственно на рис. XIII.1а и б.

Ввиду того что аппроксимация идеального трансформатора, содержащегося в данной схеме, при помощи реального трансформатора несовместима с задачей устранения индуктивностей, указанные эквивалентные цепи в данном случае нельзя считать удобными, если не найдена лучшая замена идеального трансформатора. Очевидно, для получения коэффициента трансформации $-1:1$ в цепи, изображенной на рис. XIII.1б, целесообразно использовать электронную лампу. Хотя методы синтеза RC цепей основаны на этом принципе [31], особой практической ценности они не представляют, так как частотные характеристики таких цепей в значительной степени зависят от поведения лампы, которое не является в достаточной мере постоянным.

Разумеется, существуют случаи, когда методы преобразования, рассмотренные в § VI.5, можно успешно использовать для получения неуравновешенной эквивалентной цепи. Однако они отнюдь не просты, и если сначала не удастся добиться успеха, то неизвестно, к чему приведут дальнейшие усилия.

Как будет показано, реализация проводимости передачи в виде неуравновешенной цепи всегда осуществима до тех пор,

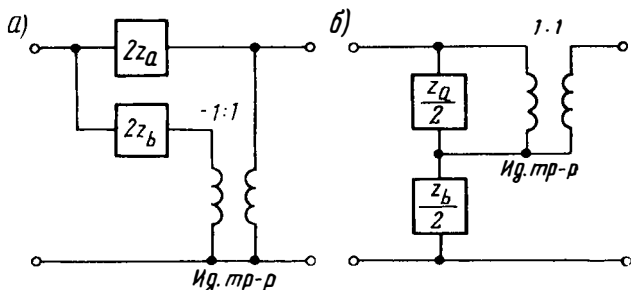


Рис. XIII.1

пока на положительной вещественной оси не появляются нули. Аналогичные цепи можно, по-видимому, получить с помощью скрещенной цепи, хотя, вероятно, предпочтителен другой, более прямой метод, рассматриваемый в следующем параграфе.

XIII.3. Реализация при помощи параллельных цепных схем [27]

На этом методе основан синтез передаточной функции RLC цепи, рассмотренный в § XI.4.

Для цепи, показанной на рис. XIII.2, соответствующую функцию проводимости передачи можно записать в виде

$$Y_{12}(s) = \frac{I_2}{E_1} = \frac{-E_2}{E_1} = \frac{y_{12}}{1 + y_{22}}, \quad (\text{XIII.4})$$

где y_{22} и y_{12} — известные входная проводимость и проводимость передачи четырехполюсника N , находящегося в режиме короткого замыкания.

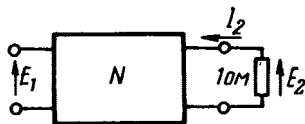


Рис. XIII.2

Рассматриваемая проводимость передачи, выраженная в виде рациональной функции, записывается следующим образом:

$$Y_{12}(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_n s^n}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_n s^n}. \quad (\text{XIII.5})$$

Полином знаменателя $q(s)$ имеет простые нули, расположенные на отрицательной вещественной полуоси. Полином числителя, как будет показано ниже, должен иметь положительные коэффициенты.

Если его нули расположены в левой полуплоскости (т. е. Y_{12} является минимально фазовой передаточной функцией), то это условие автоматически выполняется. Если $p(s)$ имеет несколько нулей в правой полуплоскости, его коэффициенты могут быть, тем не менее, положительными. До тех пор, пока $p(s)$ не имеет нулей на положительной вещественной полуоси, можно получать полином $p(s)$ с положительными коэффициентами, включая в функцию $Y_{12}(s)$ множители $(s + a)$ способом, аналогичным описанному при изложении метода синтеза Мията (см. § X.2 и приложение 1 в конце книги).

Процедура синтеза на данном этапе несколько отличается (хотя она и подобна) от процедуры, используемой в аналогичном случае RLC цепи (см. § XI.1 и XI.4), где учитывается тот факт, что четные и нечетные части полинома знаменателя автоматически имеют простые и чередующиеся на мнимой оси нули. Здесь по аналогии необходимо разбить функцию $q(s)$ на две аддитивные части, имеющие простые и чередующиеся на отрицательной вещественной полуоси нули. Если такое разбиение представить в виде

$$q(s) = q_1(s) + q_2(s), \quad (\text{XIII.6})$$

то дробь (XIII.5) можно записать в форме

$$Y_{12}(s) = \frac{p(s)}{q_1(s) + q_2(s)} = \frac{\frac{p(s)}{q_2(s)}}{1 + \frac{q_1(s)}{q_2(s)}}. \quad (\text{XIII.7})$$

С другой стороны, сравнивая выражение (XIII.7) с выражением (XIII.4), заключаем, что справедливы соотношения

$$y_{12} = \frac{p(s)}{q_2(s)} \quad \text{и} \quad y_{22} = \frac{q_1(s)}{q_2(s)}. \quad (\text{XIII.8})$$

Для того чтобы эти проводимости можно было реализовать RC цепями, необходимо и достаточно, чтобы полиномы $q_1(s)$ и $q_2(s)$ имели простые и чередующиеся на отрицательной вещественной полуоси нули, а критическая частота функции y_{22} , ближайшая к началу координат ($s = 0$), была нулем.

Нетрудно заметить, что всегда можно выполнить разложение (XIII.6) с соблюдением указанных условий. Рассмотрим два полинома $q_1(s)$ и $q_2(s)$, имеющие простые и чередующиеся на отрицательной вещественной полуоси нули. Если эти полиномы разложить на множители

$$q_1(s) = (s + \alpha_1)(s + \alpha_2) \dots (s + \alpha_n); \quad (\text{XIII.9})$$

$$q_2(s) = (s + \beta_1)(s + \beta_2) \dots (s + \beta_n), \quad (\text{XIII.10})$$

то α_k и β_k будут иметь положительные вещественные значения, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_n < \beta_n < \infty. \quad (\text{XIII.11})$$

Из графического представления данных полиномов для отрицательных вещественных значений s очевидно, что нули суммы $q(s)$ расположены между парами нулей, принадлежащих соответственно $q_1(s)$ и $q_2(s)$. Другими словами, если записать

$$q(s) = (s + \sigma_1)(s + \sigma_2) \dots (s + \sigma_n) \quad (\text{XIII.12})$$

с положительными вещественными значениями σ_k , пронумерованными в указанной ниже последовательности

$$0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \dots < \sigma_n < \infty, \quad (\text{XIII.13})$$

то оказывается, что

$$\alpha_k < \sigma_k < \beta_k \text{ при } k = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{XIII.14})$$

Следовательно, если сформировать полином $q_1(s)$, выбирая его нули так, чтобы удовлетворялось неравенство

$$0 < \alpha_1 < \sigma_1 < \alpha_2 < \sigma_2 < \dots < \alpha_n < \sigma_n, \quad (\text{XIII.15})$$

то разность $q(s) - q_1(s)$ автоматически даст полином $q_2(s)$, нули β_k которого удовлетворяют неравенствам (XIII.11) и (XIII.14) при условии, что

$$q(s) > q_1(s) \text{ при } s = 0 \text{ и } s \rightarrow \infty. \quad (\text{XIII.16})$$

Последнее всегда можно получить, умножая в случае необходимости один из этих полиномов на соответствующий постоянный коэффициент.

Таким образом, после того как в соответствии с соотношениями (XIII.8) построены функции y_{12} и y_{22} , реализация проводимости передачи, определяемой выражением (XIII.4) (с точностью до постоянного множителя), обычно имеет различные формы в зависимости от нулей функции $Y_{12}(s)$, определяемых полиномом $p(s)$. Когда все эти нули лежат на отрицательной вещественной полуоси (включая бесконечно удаленную точку), то такая ситуация точно соответствует случаю, возникающему при синтезе четырехполюсника без потерь, нагруженного на резистивное сопротивление, нули передачи которого лежат на мнимой оси или в точке $s = \infty$. Следуя методике, описанной для указанного случая в § VII.3, можно реализовать функцию y_{22} в виде цепной схемы с тем, чтобы создать требуемые нули передачи.

Процесс значительно упрощается, если нули расположены в точке $s = 0$ или $s = \infty$, ибо тогда они создаются соответственно последовательными или параллельными емкостными ветвями. Реализация функции y_{22} при этом представляет собой одну из двух канонических форм Кауэра (см. § IV.2) или соединение таких схем в зависимости от того, располагаются ли все нули в одной точке или распределяются между двумя точками $s = 0$ и $s = \infty$. В том случае, когда несколько нулей расположены в конечных отличных от нуля точках на отрицательной вещественной полуоси, требуются последовательные ветви, состоящие из параллельных RC контуров,

или параллельные ветви, состоящие из последовательных RC контуров. В общем случае необходимо произвести «сдвиг нулей» с частичным выделением полюсов для создания в соответствующих точках нулей передачи.

Если не все нули полинома $p(s)$ расположены на отрицательной вещественной полуоси, то необходимо разложить его на аддитивные части, каждая из которых удовлетворяет указанному условию. Представим это разложение следующим образом:

$$p(s) = p_1(s) + p_2(s) + \dots + p_k(s). \quad (\text{XIII.17})$$

Проводимость передачи y_{12} из соотношений (XIII.8) примет вид

$$y_{12}(s) = y_{12}^{(1)}(s) + y_{12}^{(2)}(s) + \dots + y_{12}^{(k)}(s), \quad (\text{XIII.18})$$

где

$$y_{12}^{(v)}(s) = \frac{p_v(s)}{q_2(s)}. \quad (\text{XIII.19})$$

Далее необходимо реализовать функцию y_{22} цепными схемами, которым соответствуют проводимости передачи $y_{12}^{(v)}$ при $v = 1, 2, \dots, k$, и после умножения их на соответствующие коэффициенты уровня проводимости соединить между собой параллельно, используя тот же метод, который был рассмотрен в § XI.4 для цепных LC схем.

Предположим, что каждое разложение функции y_{22} из соотношений (XIII.8) в цепную схему, выполняемое для создания нулей соответствующей проводимости передачи $y_{12}^{(v)}$, дает такую функцию с множителем, равным требуемому значению, умноженному на K_v . Принимая

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \dots + \frac{1}{K_k} \quad (\text{XIII.20})$$

и умножая уровень проводимости каждой цепной схемы на коэффициент $\frac{K}{K_v}$, получим, очевидно, в результате параллельного соединения таких цепей входную проводимость короткого замыкания, равную y_{22} , и проводимость передачи, равную Ky_{12} . В том случае, когда эта параллельная цепная схема нагружена на резистивное сопротивление 1 ом , она с точностью до множителя K является реализацией требуемой функции $Y_{12}(s)$, определяемой выражением (XIII.4).

Последний вопрос, который необходимо решить, касается способа разложения полинома, определяемого выражением (XIII.17). Простейший способ состоит в том, что каждый член полинома $p(s)$ рассматривают как составляющую $p_v(s)$. Положительность коэффициентов a_v имеет важное значение для успешного применения этого способа. Всегда возможен и другой порядок, позволяющий получить половину из общего числа цепных схем и заключающийся

в том, что одновременно рассматриваются два члена полинома $p(s)$. Тогда составляющие $p(s)$ разложения (XIII.17) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} p_1(s) &= a_0 + a_1s \\ p_2(s) &= (a_2 + a_3s)s^2 \\ p_3(s) &= (a_4 + a_5s)s^4 \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIII.21})$$

Каждая из них имеет один отрицательный вещественный нуль, и все они, кроме полинома $p_1(s)$, имеют дополнительные нули в точке $s = 0$. Указанными способами всегда можно осуществить соответствующее разложение функции y_{22} в цепную схему.

В некоторых случаях полином $p(s)$ удастся разложить на меньшее число аддитивных составляющих и, следовательно, получить реализацию, содержащую соответственно меньшее число цепных схем. Легко представить себе подобные случаи. Например, если сложить два полинома

$$p_1(s) = (s + 1)(s + 2)(s + 3)(s + 4) \quad (\text{XIII.22})$$

и

$$p_2(s) = s + 5, \quad (\text{XIII.23})$$

то в результате получится полином, не имеющий вещественных нулей. Однако его можно разложить на сумму двух полиномов, имеющих только отрицательные вещественные нули. Об общем характере такой задачи нельзя ничего сказать, за исключением того, что не всегда осуществимо разложение на две аддитивные составляющие, даже если не допускается, чтобы полином $p(s)$ имел нули в правой полуплоскости.

Полином

$$p(s) = (s^2 + 1)(s^2 + 2)(s^2 + 3) \dots, \quad (\text{XIII.24})$$

имеющий нули только на мнимой оси, определяет именно такое разложение. Очевидно, что в данном случае включение дополнительных множителей не окажет нужной помощи.

Интересно отметить, что возможно разложение любого полинома на разность двух полиномов, имеющих только отрицательные вещественные нули. Так, если $p(s)$ представляет собой заданный полином, а $p_1(s)$ является полиномом той же степени, что и $p(s)$, и имеет лишь отрицательные вещественные нули, то

$$p_2(s) = p(s) + Kp_1(s). \quad (\text{XIII.25})$$

Последнее выражение справедливо при выборе достаточно большого значения K . Очевидно также, что $p_2(s)$ является полиномом, имеющим только отрицательные вещественные нули, так как его нули приближаются к нулям $p_1(s)$ по мере увеличения K ¹.

¹ Возможен и другой способ: принять $s = \lambda^2$ и обычным путем определить полином Гурвица $p_0(\lambda) = m_0 + n_0$ так, чтобы $p(\lambda^2) = m_0^2 - n_0^2$. Тогда, будучи функциями переменной s , полиномы m_0 и n_0 дадут требуемое разложение функции $p(s)$.

Следовательно, синтез всегда осуществим при использовании двух параллельных цепных схем, если на какой-либо паре зажимов одной из них коэффициент трансформации идеального трансформатора составляет — 1 : 1. Кроме того, можно использовать вместо идеального трансформатора электронную лампу, чтобы получить требуемый знак минус. Такие приемы, однако, не имеют большого практического значения (если они вообще приемлемы) по причинам, о которых было сказано выше.

В качестве примера синтеза посредством параллельных цепных схем рассмотрим проводимость передачи

$$Y_{12}(s) = \frac{s^2 + 1}{2(s+1)(s+2)} = \frac{p(s)}{q(s)}, \quad (\text{XIII. 26})$$

которая имеет нули в точках $\omega = \pm 1$ на мнимой оси.

Разложение полинома знаменателя возможно в предположении, что

$$q_1(s) = \left(s + \frac{1}{2}\right) \left(s + \frac{3}{2}\right) = s^2 + 2s + \frac{3}{4}. \quad (\text{XIII. 27})$$

Произведя вычитание $q_1(s)$ из $q(s)$, получим

$$q_2(s) = s^2 + 4s + \frac{13}{4}. \quad (\text{XIII. 28})$$

Тогда согласно соотношениям (XIII.8) имеем

$$y_{12} = \frac{s^2 + 1}{s^2 + 4s + \frac{13}{4}}; \quad y_{22} = \frac{s^2 + 2s + \frac{3}{4}}{s^2 + 4s + \frac{13}{4}}, \quad (\text{XIII. 29})$$

и разложение y_{12} , определяемое выражением (XIII.18), примет вид

$$y_{12}^{(1)} = \frac{s^2}{q_2}; \quad y_{12}^{(2)} = \frac{1}{q_2}. \quad (\text{XIII. 30})$$

Первое из полученных выражений требует, чтобы цепная реализация функции y_{22} содержала последовательные емкости и параллельные резистивные сопротивления. Соответствующее разложение в непрерывную дробь запишется так:

$$y_{22} = 0,2308 + \frac{1}{\frac{1}{0,3312s} + \frac{1}{0,6414 + \frac{1}{\frac{1}{0,076s} + \frac{1}{0,1277}}}} \quad (\text{XIII. 31})$$

Ему соответствует цепная схема, изображенная на рис. XIII.3а. Исследуя ее асимптотическое поведение при большом значении s , можно заметить, что проводимость передачи равна произведению K_1 на функцию $y_{12}^{(1)}$, определяемую из выражения (XIII.30), причем $K = 0,1277$.

Поскольку все нули функции $y_{12}^{(2)}$ располагаются в точке $s = \infty$, соответствующей цепной схемой будет та, которая имеет последовательные резистивные сопротивления и параллельные емкости. Разложение функции y_{22} в непрерывную дробь имеет вид

$$y_{22} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{s}{2} + \frac{1}{\frac{8}{3} + \frac{1}{\frac{3s}{2} + \frac{1}{\frac{1}{3}}}}}} \quad (\text{XIII.32})$$

Ему соответствует цепная схема, приведенная на рис. XIII.36. Исследуя поведение этой цепи при малом значении s , можно установить, что проводимость передачи равна $K_2 y_{12}^{(2)}$ ($K_2 = \frac{3}{4}$).

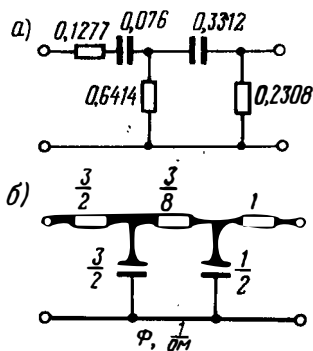


Рис. XIII.3

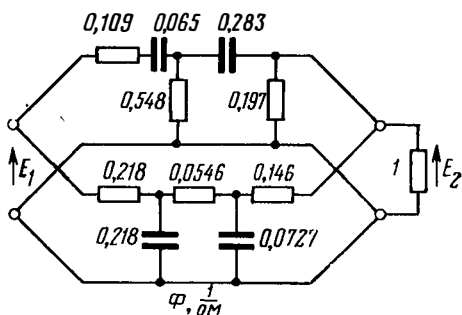


Рис. XIII.4

Из ур-ния (XIII.20) находим $K = 0,1092$. Отсюда уровень проводимости для цепи, показанной на рис. XIII.3а, $\frac{K}{K_1} = 0,855$, а для цепной схемы, приведенной на рис. XIII.36, $\frac{K}{K_2} = 0,1455$. Полученные цепные схемы соединяются параллельно и нагружаются на резистивное сопротивление 1 ом; в результате получается цепь, изображенная на рис. XIII.4. Коэффициент передачи по напряжению $\frac{E_2}{E_1}$ равен заданной функции, определяемой выражением (XIII.26), умноженной на K .

В качестве второго примера рассмотрим проводимость передачи, имеющую нуль третьего порядка в точке $s = -1$. Вместо предположения о том, что существует некоторый полином знаменателя,

допускающий последующее разбиение на два полинома q_1 и q_2 , упростим предложенный метод синтеза, приняв

$$q_1(s) = (s+1)(s+3)(s+5) = s^3 + 9s^2 + 23s + 15; \quad (\text{XIII.33})$$

$$q_2(s) = (s+2)(s+4)(s+6) = s^3 + 12s^2 + 44s + 48, \quad (\text{XIII.34})$$

и составим сумму

$$q(s) = q_1(s) + q_2(s) = 2s^3 + 21s^2 + 67s + 63. \quad (\text{XIII.35})$$

Требуемая передаточная функция имеет вид

$$Y_{12} = \frac{(s+1)^3}{2s^3 + 21s^2 + 67s + 63}, \quad (\text{XIII.36})$$

и из соотношений (XIII.8) находим

$$y_{12} = \frac{(s+1)^3}{s^3 + 12s^2 + 44s + 48}; \quad y'_{22} = \frac{s^3 + 9s^2 + 23s + 15}{s^3 + 12s^2 + 44s + 48}. \quad (\text{XIII.37})$$

Поскольку полином $q_1(s)$ имеет нуль в точке $s = -1$, то функция $\frac{1}{y_{22}}$ имеет там полюс. Выделение его дает один из требуемых нулей передачи. Теперь можно вычислить значение вычета функции $\frac{1}{y_{22}}$ в точке $s = -1$, т. е.

$$k_1 = \left(\frac{s+1}{y_{22}} \right)_{s=-1} = \frac{15}{8}. \quad (\text{XIII.38})$$

После выделения этого полюса получим остаток

$$\begin{aligned} \frac{1}{y_{22}} - \frac{\frac{15}{8}}{s+1} &= \frac{1}{s+1} \left(\frac{s^3 + 12s^2 + 44s + 48}{s^2 + 8s + 15} - \frac{15}{8} \right) = \\ &= \frac{s^2 + \frac{73}{8}s + \frac{159}{8}}{s^2 + 8s + 15} = \frac{1}{y_1}. \end{aligned} \quad (\text{XIII.39})$$

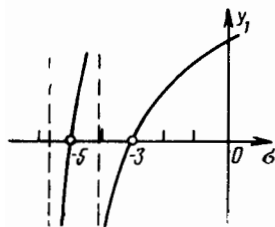


Рис. XIII.5

График зависимости y_1 от вещественных значений s (рис. XIII.5) показывает, что нуль можно сдвинуть в точку $s = -1$ путем вычитания из функции y_1 активной проводимости, величина которой G_1 меньше величины y_1 на нулевой частоте. Следует заметить, что так как эта величина является наименьшим значением $\text{Re}[y_1(j\omega)]$, то указанное вычитание не влияет на принадлежность функции y_1 к классу п. в. ф. RC цепей. Соответствующее значение G_1 определяется из выражения

$$G_1 = y_1(-1) = \frac{1 - 8 + 15}{1 - \frac{73}{8} + \frac{159}{8}} = \frac{32}{47}. \quad (\text{XIII.40})$$

После вычитания этого значения из функции $y_1(s)$, определяемой ф-лой (XIII.39), имеем

$$y_1(s) - \frac{32}{47} = \frac{15(s+1)\left(s + \frac{69}{15}\right)}{47\left(s^2 + \frac{73}{8}s + \frac{159}{8}\right)} = y_2 = \frac{1}{z_2}. \quad (\text{XIII.41})$$

Вычет функции z_2 в точке $s = -1$

$$k_2 = \left(\frac{s+1}{y_2}\right)_{s=-1} = 10,23. \quad (\text{XIII.42})$$

После выделения этого полюса из функции z_2 получим

$$z_2 - \frac{10,23}{s+1} = \frac{47}{15} \frac{s+4,86}{s+4,6} = z_3 = \frac{1}{y_3}. \quad (\text{XIII.43})$$

И снова нуль функции y_3 можно сдвинуть в точку $s = -1$ путем вычитания из нее активной проводимости. Находим значение этой проводимости

$$G_3 = y_3(-1) = 0,2973. \quad (\text{XIII.44})$$

После ее вычитания из функции y_3 имеем

$$y_3(s) - 0,2973 = \frac{s+1}{46,35(s+4,86)} = y_4 = \frac{1}{z_4}. \quad (\text{XIII.45})$$

Наконец, находим

$$z_4 = \frac{179}{s+1} + 46,35. \quad (\text{XIII.46})$$

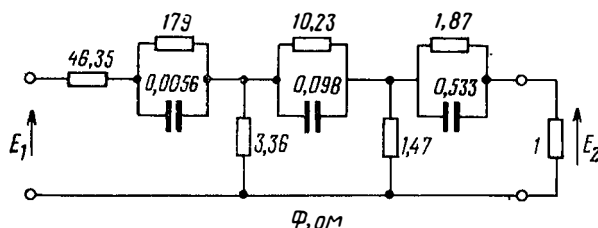


Рис. XIII.6

В результате проделанных расчетов получим цепную схему, изображенную на рис. XIII.6. Отношение $\frac{E_2}{E_1}$ равно функции, определяемой выражением (XIII.36), умноженной на коэффициент 0,082.

ХIII.4. Каскадный синтез RC цепей

За исключением простых случаев получения цепей, подобно описанным в только что приведенных примерах, основной практический недостаток методов синтеза таких RC цепей заключается в трудности их согласования. Эта трудность особенно заметна, когда требуется, чтобы цепь реализовала частотную характеристику, обладающую свойствами, аналогичными поведению фильтра вблизи частоты среза. Поскольку полюсы функции RC цепи не могут создать указанных свойств, основная тяжесть обеспечения надлежащей крутизны характеристики ложится на нули. Если они расположены не точно в требуемых точках, фактическое поведение цепи может значительно отличаться от предполагаемого.

В скрещенной или параллельной цепной схеме нули передачи появляются в результате сокращения значений комплексной функции сопротивления или проводимости, причем все нули в общем случае зависят от выбора значения одного элемента. Если не все нули первоначально оказываются в требуемых положениях, их выравнивание путем последующего изменения значений отдельных элементов практически бесполезно, исключая простейший случай наличия лишь одного или двух нулей.

Как и в случае синтеза передаточных функций RLC цепей, это препятствие можно преодолеть, представив реализацию в форме каскадного соединения четырехполюсников, каждый из которых дает один нуль передачи или пару комплексно-сопряженных нулей. Как будет показано далее, такой каскадный синтез, осуществляемый по методике, рассмотренной для LC цепей в § VII.4 и для задач синтеза по Бруне и Дарлингтону (см. §§ IX.5 и IX.9), возможен в соответственно модифицированной форме также для синтеза передаточных функций RC цепей в случае, если нули последних не лежат в правой полуплоскости [32].

Поскольку речь идет о нулях, расположенных в левой полуплоскости на вещественной полуоси, требуемый результат дает метод разложения в цепные схемы, изложенный в предыдущем параграфе. При этом цепь, приведенная на рис. XIII.6, рассматривается как каскадное соединение трехкомпонентных четырехполюсников (настраиваемых отдельно), каждый из которых дает один нуль передачи в точке $s = -1$. Ниже дан метод¹, который в некотором смысле является логическим обобщением процесса реализации, связанного с парами комплексных нулей передачи.

Как и в случае LC цепей, рассмотренном в § VII.4, типичный этап такого синтеза соответствует схеме, показанной на рис. XIII.7, где Z_1 — заданное входное сопротивление, которое требуется реализовать (подобно функции $\frac{1}{y_{22}}$ из предыдущего параграфа); z_{11} , z_{22} и z_{12} — входные сопротивления и сопротивление передачи ком-

¹ Описываемый здесь метод является модифицированным методом Дашера.

Понентного четырехполюсника, находящегося в режиме холостого хода (так же рассматриваемого, как нулевое звено, так как ясно, что он имеет типичную пару комплексных нулей данного полного сопротивления передачи); Z_2 — остаточная функция, аналогичная по свойствам функции Z_1 . Полную реализацию можно получить, выполнив второй этап синтеза, на котором используется функция Z_2 , и т. д. до тех пор, пока остаточной функцией не будет функция, соответствующая разомкнутой цепи или постоянной.

В рассматриваемой задаче предполагается, что предварительно задана пара сопротивлений (входное и передачи) Z_1 и Z_{12} , имеющих одинаковые отрицательные вещественные полюсы. Реализация функции передачи Z_{12} осуществляется разложением входной функции Z_1 в каскадное соединение компонентных цепей, каждая из которых реализует пару нулей

функции Z_{12} . Когда все ее нули реализованы, разложение можно считать законченным, и на данном этапе остаточная функция вырождается в постоянную. Сопротивление передачи Z_{12} в процессе разложения не играет роли, но позволяет предварительно определить требуемые нули передачи. Порядок рассмотрения этих нулей в процессе разложения функции Z_1 также не имеет существенного значения. Он может оказать лишь некоторое влияние на упрощение результирующей цепи.

Иногда возникают случаи, когда задана лишь функция Z_{12} . Тогда необходимо построить соответствующее входное сопротивление Z_1 , которое является рациональной функцией, имеющей такой же знаменатель, что и функция Z_{12} и простые отрицательные вещественные нули, чередующиеся с полюсами. При этом критическая частота, ближайшая к точке $s = 0$, является полюсом (см. § II.3). Легко построить входное сопротивление, удовлетворяющее этим простым условиям.

Существует большая разница между задачей разложения функции RC цепи и разложением аналогичного входного сопротивления RLC цепи согласно теории Дарлингтона (см. § IX.9). Как было показано там, нули передачи результирующего сопротивления передачи в совокупности представляют собой нули четной части заданного входного сопротивления RLC цепи. На каждом последующем этапе реализуется одна группа их (или нулей передачи). Четная часть функции-остатка на любом этапе содержит те из первоначальных ее нулей, которые еще не созданы или не появились в разложенной части полной цепи.

В аналогичной задаче для RC цепей картина совершенно иная. Нули четной части входного сопротивления не имеют никакой связи с нулями передачи результирующей цепи или ее любого компонента. Если при разложении функции RLC цепи у нас не было иного выбора, кроме как приравнять нули передачи нулям четной части

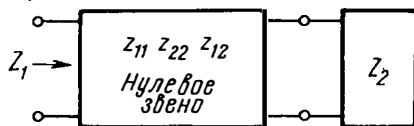


Рис. XIII.7

заданного входного сопротивления, то в этой задаче нули передачи можно выбирать произвольно. Фактически здесь полностью игнорируются нули четной части входного сопротивления, что объясняется наличием потерь у рассматриваемых цепей-компонентов в противоположность цепям без потерь в соответствующем разложении по Дарлингтону.

Теперь предположим, что входное сопротивление имеет вид

$$Z_1(s) = \frac{Ap(s)}{q(s)} + \frac{\rho_0}{s} + \rho_\infty, \quad (\text{XIII.47})$$

где A , ρ_0 , ρ_∞ — постоянные, а

$$p(s) = (s - s_{p_1})(s - s_{p_2}) \dots (s - s_{p_{n-1}}); \quad (\text{XIII.48})$$

$$q(s) = (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) \quad (\text{XIII.49})$$

при

$$s_n < s_{p_{n-1}} < s_{n-1} < \dots < s_1 < s_{p_1} < 0. \quad (\text{XIII.50})$$

Эта форма функции Z_1 на первый взгляд кажется очень специфической, но на самом деле она очень незначительно отличается от простой записи правой части выражения (XIII.5). Член ρ_∞ представляет собой просто минимальное значение вещественной части функции $Z_1(s)$ на мнимой оси, которую всегда можно исключить, получив полином числителя, степень которого на единицу ниже степени полинома знаменателя. Присутствие члена $\frac{\rho_0}{s}$ указывает

на наличие полюса в точке $s = 0$, т. е. на условие, которое всегда (если необходимо) возможно выполнить путем выделения параллельной резистивной ветви в начале процесса. Такая ветвь может оказаться желательной для преобразования входного источника тока в эквивалентный источник напряжения с потерями.

Требуемая пара комплексных нулей передачи определяется полиномом второй степени

$$t(s) = (s - s_0)(s - \bar{s}_0) = (s + \sigma_0)^2 + \omega_0^2 \quad (\text{XIII.51})$$

при

$$s_0 = -\sigma_0 + j\omega_0; \quad \bar{s}_0 = -\sigma_0 - j\omega_0. \quad (\text{XIII.52})$$

Простейшая форма сопротивления передачи нулевого звена имеет вид

$$z_{12} = \frac{Kt(s)}{s(s - s_a)} = K + \frac{k_0}{s} - \frac{k_{12}}{s - s_a}, \quad (\text{XIII.53})$$

так как оно должно иметь, по крайней мере, два полюса, причем если один из них совпадает с точкой $s = 0$, то в точке $s = s_a$ остается лишь один неизвестный полюс, который нужно определить.

Предполагается, что K — положительная вещественная постоянная, а из выражения (XIII.53) можно найти:

$$k_0 = \frac{Kt(0)}{-s_a}; \quad (\text{XIII.54})$$

$$k_{12} = \frac{Kt(s_a)}{-s_a}. \quad (\text{XIII.55})$$

По причинам, зависящим от требуемой физической структуры нулевого звена, предполагается, что его входные сопротивления имеют вид

$$z_{11} = K + \frac{k_0}{s} + \frac{k_{11}}{s-s_a}; \quad (\text{XIII.56})$$

$$z_{22} = K + \frac{k_0}{s} + \frac{k_{22}}{s-s_a} \quad (\text{XIII.57})$$

при условии, что

$$k_{11}k_{22} - k_{12}^2 = 0, \quad (\text{XIII.58})$$

которое должно автоматически выполняться, так как $Z_1(s)$ не содержит полюса в точке $s = s_a$. Этот вывод вытекает из выражения (VII.55) для цепи, приведенной там на рис. VII.8, но при замене R на Z_2 . Таким образом, если Z_1 не содержит полюса в точке s_a , то определитель z цепи должен иметь простой полюс в этой точке и, следовательно, условие вычетов в ней должно выполняться со знаком равенства, как и для случая LC цепи, которому соответствуют предложения (VII.56) и (VII.57).

Аналитическое соотношение между пятью величинами z_{11} , z_{12} , z_{22} , Z_1 и Z_2 (подобно аналогичному случаю LC цепи) запишется в форме

$$(z_{11} - Z_1)(z_{22} + Z_2) = z_{12}^2 = \frac{K^2 t^2(s)}{s^2(s-s_a)^2}. \quad (\text{XIII.59})$$

Используя это соотношение, можно сделать вывод, что отдельные сомножители в его левой части имеют вид:

$$z_{11} - Z_1 = \frac{K^2 t^2 h}{s(s-s_a)q}; \quad (\text{XIII.60})$$

$$z_{22} + Z_2 = \frac{q}{s(s-s_a)h}. \quad (\text{XIII.61})$$

Таким образом, легко заметить, что коэффициент t^2 нельзя отнести к сомножителю $(z_{22} + Z_2)$, поскольку последний является входным сопротивлением RC цепи и, следовательно, не может иметь комплексных нулей. Знаменатель в правой части выражения (XIII.60) непосредственно объясняется с помощью функций z_{11} и Z_1 , а сомножитель h , стоящий в числителе, является полино-

мом степени $(n - 2)$, так как числитель должен иметь ту же степень, что и знаменатель (функции z_{11} и Z_1 при $s = \infty$ вырождаются в отличные от нуля постоянные). Далее, сомножитель, определяемый выражением (XIII.61), выбирается так, чтобы выполнялось соотношение (XIII.59).

Основной задачей в рассматриваемом случае является определение полинома $h(s)$, который можно представить в виде

$$h(s) = H(s - s_{h_1})(s - s_{h_2}) \dots (s - s_{h_{n-2}}). \quad (\text{XIII.62})$$

Если этот полином известен и найден общий, отличный от нуля полюс s_a для функций z_{ih} , то эти сопротивления, характеризующие нулевое звено, а также остаточную функцию $Z_2(s)$, можно извлечь из соответствующих сомножителей, определяемых выражениями (XIII.60) и (XIII.61).

Наиболее легкий способ определения $h(s)$ заключается в разложении рациональной функции $\frac{h}{q}$ на элементарные дроби;

функцию $\frac{h}{q}$ можно получить непосредственно из выражения (XIII.60). Таким образом,

$$\frac{h(s)}{q(s)} = \frac{s(s - s_a)(z_{11} - Z_1)}{K^2 t^2(s)} = \frac{1}{K^2} \sum_{v=1}^n m_v \left(\frac{s_v - s_a}{s - s_v} \right), \quad (\text{XIII.63})$$

где использовано сокращенное обозначение

$$m_v = \frac{-s_v k_v}{t^2(s_v)}. \quad (\text{XIII.64})$$

Здесь k_v — вычет функции $Z_1(s)$ в любом из ее отличных от нуля полюсов, определяемый выражением

$$k_v = A \left[\frac{(s - s_v) p(s)}{q(s)} \right]_{s=s_v} \quad \text{при } v = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{XIII.65})$$

Поскольку полином $h(s)$ имеет степень $(n - 2)$, тогда как полином $q(s)$ имеет степень n , то при большом значении s рациональная функция, определяемая ф-лой (XIII.63), вырождается в функцию $\frac{1}{s^2}$. Чтобы найти асимптотическое поведение функции (XIII.63), запишем

$$\frac{1}{s - s_v} = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{1 - \frac{s_v}{s}} \right) = \frac{1}{s} \left(1 + \frac{s_v}{s} + \frac{s_v^2}{s^2} + \dots \right). \quad (\text{XIII.66})$$

При этом отметим, что искомое асимптотическое поведение требует выполнения равенства

$$\sum_{v=1}^n m_v (s_v - s_a) = 0, \quad (\text{XIII.67})$$

а постоянный множитель в выражении (XIII.62) для полинома $h(s)$ имеет вид

$$H = \frac{1}{K^2} \sum_{v=1}^n m_v s_v (s_v - s_a). \quad (\text{XIII.68})$$

Уравнение (XIII.67) дает отличные от нуля полюсы сопротивлений z_{ih} , поэтому выражение

$$s_a = \frac{\sum m_v s_v}{\sum m_v} \quad (\text{XIII.69})$$

имеет требуемое отрицательное вещественное значение, так как величины s_v являются отрицательными вещественными числами, а величины m_v , определяемые выражением (XIII.64), — положительными. Если рассматривать величины m_v как ряд масс, расположенных в точках s_v на отрицательной вещественной полуоси, то точка s_a будет соответствовать их центру тяжести.

Для того чтобы убедиться в положительности множителя H , определяемого выражением (XIII.68), будем рассматривать величины $m_v(s_v - s_a)$ как ряд сил, являющихся отрицательными влево от точки s_a и положительными вправо от нее (причем их сумма равна нулю). Умножим эти силы на $s_v < 0$, а затем сложим, при этом должно получиться положительное значение H .

Теперь сформулируем необходимые и достаточные условия для получения входных сопротивлений, которым соответствуют предложенные разложения (XIII.56) и (XIII.57). В этой связи отметим, что в точке $s = 0$ достаточно выполнить неравенства

$$(sz_{11})_{s=0} \geq k_1 \text{ и } [s(z_{22} + Z_2)]_{s=0} > k_0, \quad (\text{XIII.70})$$

тогда как в точке $s = \infty$ достаточно выполнить неравенства

$$(z_{11})_{s=\infty} \geq K \text{ и } (z_{22} + Z_2)_{s=\infty} > K. \quad (\text{XIII.71})$$

Действительно, любое увеличение значения в каждом из данных выражений сверх требуемого минимума можно для функции z_{11} свести к выделению последовательной ветви, предшествующей нулевому звену, а для функции z_{22} — рассматривать как часть остаточной функции Z_2 . Фактически остаток должен иметь такую добавочную часть, которая бы обладала теми же свойствами, что и функция Z_1 ; следовательно, знак равенства не входит в условия, относящиеся к функции $(z_{22} + Z_2)$.

Используя выражения (XIII.47), (XIII.54), (XIII.60) и (XIII.61), запишем неравенства (XIII.70) и (XIII.71) в виде

$$\frac{K^2 t^2(0) h(0)}{-s_a q(0)} + \rho_0 \geq \frac{K t(0)}{-s_a}; \quad \frac{q(0)}{-s_a h(0)} > \frac{K t(0)}{-s_a}; \quad (\text{XIII.72})$$

$$K^2 H + \rho_\infty \geq K, \quad \frac{1}{H} > K. \quad (\text{XIII.73})$$

Приняв во внимание, что $t(0) = |s_0|^2$ и используя выражения (XIII.63) и (XIII.68), перепишем эти неравенства соответственно следующим образом:

$$0 < K - |s_0|^2 \sum_{\nu=1}^n \frac{m_\nu}{-s_\nu} (s_\nu - s_a) \leq \frac{-s_a}{|s_0|^2} \rho_0 \quad (\text{XIII.74})$$

и

$$0 < K - \sum_{\nu=1}^n m_\nu s_\nu (s_\nu - s_a) \leq \rho_\infty. \quad (\text{XIII.75})$$

Полученные неравенства имеют вид алгебраических неравенств типа

$$\left. \begin{aligned} 0 < K - a &\leq b \\ 0 < K - c &\leq d \end{aligned} \right\}. \quad (\text{XIII.76})$$

Для того чтобы единственное значение K удовлетворяло последним неравенствам, необходимо и достаточно, чтобы

$$-b < a - c < d. \quad (\text{XIII.77})$$

Из неравенств (XIII.74) и (XIII.75), имея в виду, что $s_\nu < 0$, получим

$$a - c = |s_0| \sum_{\nu=1}^n \left(\left| \frac{s_0}{s_\nu} \right| + \left| \frac{s_\nu}{s_0} \right| \right) m_\nu (s_\nu - s_a). \quad (\text{XIII.78})$$

Если ввести весовую функцию

$$w_\nu = \left| \frac{s_0}{s_\nu} \right| + \left| \frac{s_\nu}{s_0} \right| \quad (\text{XIII.79})$$

и взвешенные массы

$$\hat{m}_\nu = w_\nu m_\nu \quad (\text{XIII.80})$$

с центром тяжести, определяемым выражением

$$\hat{s}_a = \frac{\sum \hat{m}_\nu s_\nu}{\sum \hat{m}_\nu}, \quad (\text{XIII.81})$$

то ур-ние (XIII.78) можно переписать в виде

$$a - c = |s_0| (\hat{s}_a - s_a) \sum \hat{m}_\nu, \quad (\text{XIII.82})$$

а неравенство (XIII.77) — в виде

$$-\left| \frac{s_a}{s_0} \right| \rho_0 < |s_0|^2 (\hat{s}_a - s_a) \sum \hat{m}_\nu < |s_0| \rho_\infty. \quad (\text{XIII.83})$$

Поскольку величина, стоящая в левой части последнего неравенства, отрицательна, а в правой — положительна, очевидно, что центр тяжести \hat{s}_a взвешенных масс может лежать с любой стороны от центра тяжести невзвешенных масс.

Если рассматривать величину s , в ф-ле (XIII.79) для весовой функции как непрерывную переменную, то нетрудно заметить, что характер изменения этой функции аналогичен показанному на рис. XIII.8. Из этого графика следует, что если $|s_0|$ мало по сравнению с $|s_a|$, то $(\hat{s}_a - s_a)$ отрицательно; если же $|s_0|$ велико по сравнению с $|s_a|$, то $(\hat{s}_a - s_a)$ положительно. Абсолютное значение $(\hat{s}_a - s_a)$ не может, однако, превышать величины $|s_n - s_a|$ при малом $|s_0|$ или величины $|s_a - s_1|$ при большом $|s_0|$. При $|s_0| \approx |s_a|$ величина $(\hat{s}_a - s_a)$ должна быть весьма малой, так как весовая функция вызывает лишь незначительный сдвиг центра тяжести масс.

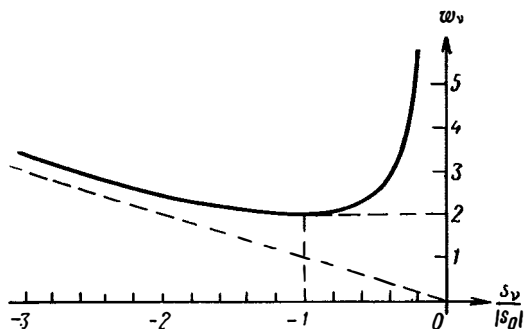


Рис. XIII.8

Рассматривая условия выполнения неравенства (XIII.83), важно отметить зависимость m_v от $|s_0|$, которая вытекает из выражений (XIII.51) и (XIII.64). При больших значениях $|s_0|$ имеем $t^2(s_v) \approx |s_0|^4$, т. е. m_v изменяется обратно пропорционально $|s_0|^4$. Поскольку w_v в соответствии с выражением (XIII.79) изменяется пропорционально $|s_0|$, то при больших значениях $|s_0|$ взвешенные массы \hat{m}_v изменяются обратно пропорционально $|s_0|^3$. Таким образом, величина, стоящая в центре неравенства (XIII.83), изменяется обратно пропорционально $|s_0|$ и, следовательно, становится малой (но остается положительной). Поэтому определяющим является неравенство в правой части анализируемого выражения; так как величина, стоящая в его правой части, пропорциональна $|s_0|$, указанное неравенство легко удовлетворяется.

С другой стороны, при малых значениях $|s_0|$ из выражения (XIII.51) следует, что $t^2(s_v) \approx |s_v|^4$. Теперь w_v изменяется обратно пропорционально $|s_0|$, как и m_v , ибо m_v , по существу, не зависит от $|s_0|$. Величина, стоящая в центре неравенства (XIII.83), становится пропорциональной $|s_0|$, и значение ее снова невелико (но теперь она отрицательна), а определяющим является неравенство левой части рассматриваемого выражения. Величина, стоящая в левой части, изменяется обратно пропорционально $|s_0|$, отсюда очевидно, что это неравенство удовлетворяется и в данном случае.

Наконец, если $|s_0| \approx |s_a|$, так что $(\hat{s}_a - s_a)$ мало по сравнению с $|s_0|$, это неравенство также легко выполнимо.

Интересно отметить, что значения ρ_0 и ρ_∞ на любом этапе синтеза можно увеличить путем частичного выделения полюса проводимости $Y_1(s) = \frac{1}{Z_1(s)}$. Так, если в определенный момент разложение функции $Z_1(s)$ на элементарные дроби представить в виде

$$Z_1(s) = \frac{k_1}{s + \sigma_1} + \frac{k_3}{s + \sigma_3} + \dots + \frac{\rho_0}{s} + \rho_\infty, \quad (\text{XIII.84})$$

то разложение соответствующей проводимости запишется как

$$Y_1(s) = -\frac{k_2}{s + \sigma_2} - \frac{k_4}{s + \sigma_4} - \dots + \frac{1}{\rho_\infty}, \quad (\text{XIII.85})$$

где величины k_i положительны. Поскольку известно, что $Y_1(0) = 0$ [так как $Z_1(s)$ имеет полюс в точке $s = 0$], то

$$\frac{1}{\rho_\infty} = \frac{k_2}{\sigma_2} + \frac{k_4}{\sigma_4} + \dots \quad (\text{XIII.86})$$

Разложение функции $\frac{Y_1(s)}{s}$ на элементарные дроби (где члены с множителем s представляют собой проводимости последовательных RC ветвей) имеет вид

$$\frac{Y_1(s)}{s} = \frac{k_2}{s + \sigma_2} + \frac{k_4}{s + \sigma_4} + \dots \quad (\text{XIII.87})$$

Это выражение не содержит постоянного члена, так как он должен быть равен нулю при $s = \infty$; оно не содержит также и члена, соответствующего полюсу в точке $s = 0$, так как функция $sZ_1(s)$ согласно разложению (XIII.84) при $s = 0$ становится равной ρ_0 . Отсюда выражение (XIII.87) дает

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{k_2}{\sigma_2^2} + \frac{k_4}{\sigma_4^2} + \dots \quad (\text{XIII.88})$$

Из разложений (XIII.86) и (XIII.88) очевидно, что при уменьшении k уменьшаются $\frac{1}{\rho_0}$ и $\frac{1}{\rho_\infty}$ и, таким образом, обеспечивается расширение допустимого диапазона в неравенстве (XIII.83).

Возвращаясь к неравенствам (XIII.74) и (XIII.75), можно заметить, что выполнение первого из них со знаком равенства (что эквивалентно приравниванию вычета z_{11} в точке $s = 0$ величине k_0) устраняет необходимость выделения последовательной емкостной ветви на входе нулевого звена. В том случае, когда оба указанных неравенства записаны в виде выражений (XIII.76), такая возможность существует, если

$$-b < a - c < d - b, \quad (\text{XIII.89})$$

что приводит к следующей обобщенной форме неравенства (XIII.83):

$$-\left|\frac{s_a}{s_0}\right| \rho_0 < |s_0|^2 (\hat{s}_a - s_a) \sum \hat{m}_v < |s_0| \rho_\infty - \left|\frac{s_a}{s_0}\right| \rho_0. \quad (\text{XIII.90})$$

При малых значениях $|s_0|$, когда $(\hat{s}_a - s_a)$ отрицательно, последнее неравенство выполнимо, каким бы ни было неравенство (XIII.83); при больших значениях $|s_0|$, когда величина $\left|\frac{s_a}{s_0}\right| \rho_0$ мала, оно лишь незначительно более жестко, чем (XIII.83). При промежуточных значениях $|s_0|$ для выполнения неравенства (XIII.90) может потребоваться, как было только что указано, частичное выделение полюса функции $Y_1(s)$.

Наконец, необходимо показать, что остаточная функция $Z_2(s)$ является п. в. ф. и принадлежит к классу функций RC цепей. Это требование выполняется для функции $Z_2(s)$, если оно выполняется для функции $(z_{22} + Z_2)$, так как согласно неравенствам (XIII.74) и (XIII.75) вычет последней в полюсе в точке $s = 0$ и его значение для $s = \infty$ больше соответствующих величин для функции z_{22} .

Согласно выражениям (XIII.60) и (XIII.61) можно составить функцию

$$\frac{1}{z_{22} + Z_2} = \frac{s^2(s - s_a)^2(z_{11} - Z_1)}{K^2 f^2(s)}, \quad (\text{XIII.91})$$

которая имеет только отличные от нуля полюсы функции $Z_1(s)$ с вычетами, определяемыми выражением

$$\frac{-s_v^2 (s_v - s_a)^2 k_v}{K^2 f^2(s_v)}. \quad (\text{XIII.92})$$

Поскольку эти вычеты отрицательны, функция (XIII.91) является п. в. ф., а функция $(z_{22} + Z_2)$ также должна быть п. в. ф. и реализовываться в виде RC цепи. Как указывалось выше, согласно неравенствам (XIII.74) и (XIII.75) каждая из функций z_{22} и Z_2 в отдельности является п. в. ф. и принадлежит к классу функций RC цепей. Следовательно, вычеты k_0 и k_{22} функции z_{22} , а также значение K являются положительными; вычет k_{12} , определяемый выражением (XIII.55), положителен и согласно условию вычетов (XIII.58) k_{11} имеет положительное значение.

Таким образом, найдены условия реализуемости нулевого звена и остаточной функции, а неравенство (XIII.83), которое, как мы уже видели, всегда выполнимо, обеспечивает успех при проведении синтеза.

В процессе расчета, после того как найдены полином $h(s)$, его нули, а также значение s_a , выраженное ф-лой (XIII.69), для определения соответствующих функций сопротивлений необходимо разложить функцию $(z_{22} + Z_2)$ на элементарные дроби. Член,

представляющий полюс в точке $s = s_a$, и член $\frac{k_0}{s} + K$ [k_0 определяется из выражения (XIII.54)] относят к функции z_{22} ; все остальные члены составляют функцию $Z_2(s)$ со всеми ее вычетами и могут быть использованы на следующем этапе¹. Функцию z_{12} находят по разложению (XIII.53), а функцию z_{11} , определяемую выражением (XIII.56), находят после того как из ур-ния (XIII.58) вычислен вычет k_{11} .

Теперь мы подошли к реализации нулевого звена по функциям z_{ik} . Хотя этот компонентный четырехполюсник не является симметричным, он может быть получен из симметричной скрещенной цепи методом, описанным в § VI.6. Для удобства выражения (XIII.73), (XIII.74) и (XIII.78), приведенные в указанном параграфе, снова повторяются ниже:

$$z_a = \frac{z_{22} - z_{12}}{a}; \quad (\text{XIII.93})$$

$$z_b = \frac{z_{22}}{a} + z_{12}; \quad (\text{XIII.94})$$

$$a = \frac{z_{22} - z_{12}}{z_{11} - z_{12}}. \quad (\text{XIII.95})$$

После подстановки из ф-л (XIII.53), (XIII.56) и (XIII.57) получим коэффициент уровня сопротивления

$$a = \frac{k_{22} + k_{12}}{k_{11} + k_{12}} = \frac{k_{22}}{k_{12}} = \frac{k_{12}}{k_{11}}. \quad (\text{XIII.96})$$

В последнем соотношении также было использовано условие (XIII.58). Теперь ясно, почему функции z_{ik} были выбраны в форме функций, определяемых выражениями (XIII.53), (XIII.56) и (XIII.57). Это обусловлено тем, что последние являются наиболее общим видом, который могут принимать функции z_{ik} , если значение коэффициента уровня сопротивления должно быть положительным вещественным. Поскольку, как было показано, величины k_{ik} в выражении (XIII.96) являются положительными и вещественными, можно с уверенностью сказать, что коэффициент a также положителен.

После подстановки выражений (XIII.53), (XIII.56), (XIII.57) в ф-лы (XIII.93) и (XIII.94) получим выражения для сопротивлений ветвей скрещенной цепи:

$$z_a = \frac{k_{11} + k_{12}}{s - s_a}; \quad (\text{XIII.97})$$

$$z_b = \left(K + \frac{k_0}{s} \right) \frac{k_{11} + k_{12}}{k_{12}}. \quad (\text{XIII.98})$$

¹ Выбирается такое значение K , при котором удовлетворяются неравенства (XIII.74) и (XIII.75). Это всегда возможно, если выполнено неравенство (XIII.83).

Соответствующая скрещенная цепь была показана в главе VI на рис. VI.13а, а значения ее элементов приведены ниже:

$$R_1 = \frac{k_{11} + k_{12}}{-s_a}, \quad C_1 = \frac{1}{k_{11} + k_{12}}; \quad (\text{XIII.99})$$

$$R_2 = \frac{K(k_{11} + k_{12})}{k_{12}}, \quad C_2 = \frac{k_{12}}{k_0(k_{11} + k_{12})}. \quad (\text{XIII.100})$$

Процесс преобразования этой скрещенной цепи в неуравновешенную описан в § VI.5. Как там указывалось, неравенство (VI.69), приводящее к двойной Т-образной цепи, изображенной на рис. VI.13д, является наиболее мягким. После подстановки значений элементов, определяемых полученными только что ф-лами (XIII.99) и (XIII.100), в указанное неравенство оно принимает вид

$$\frac{k_0 - s_a K}{k_{12}} \geq 1. \quad (\text{XIII.101})$$

Используя ф-лы (XIII.54) и (XIII.55) и приняв во внимание, что $t(0) = |s_0|^2$, получим

$$s_a^2 + |s_0|^2 \geq t(s_a). \quad (\text{XIII.102})$$

Для интерпретации этого результата можно воспользоваться векторным построением в плоскости s (рис. XIII.9), обеспечивающим реализацию нулевого звена (рис. XIII.7) в виде двойной Т-образной цепи. Отсюда видно, что требуемый нуль передачи может лежать только в левой полуплоскости или на мнимой оси.

С учетом значений параметров, определяемых по ф-лам (XIII.99) и (XIII.100), интересно отметить, что условия реализуемости Т-образных перекрытых цепей, приведенных на рис. VI.13б, в, соответственно, имеют вид

$$t(s_a) \leq s_a^2; \quad t(s_a) \leq |s_0|^2. \quad (\text{XIII.103})$$

Смысл каждого из данных неравенств в плоскости s очевиден из рис. XIII.9.

Наконец, требуемое нулевое звено формируется путем разбиения на две секции соответствующей неуравновешенной цепи (двойной Т-образной или Т-образной перекрытой), умножения уровня сопротивления правой секции на коэффициент a , определяемый выражением (XIII.96), и соединения секций.

В заключение отметим, что точно такой же процесс можно осуществить, применив метод узловых напряжений (т. е. перейдя к проводимостям), если заданными входной и передаточной функциями, имеющими одинаковые отрицательные вещественные полюсы, являются $Y_1(s)$ и $Y_{12}(s)$. Все приведенные выше соотношения, начиная с (XIII.47), остаются без изменения, если в них соответ-

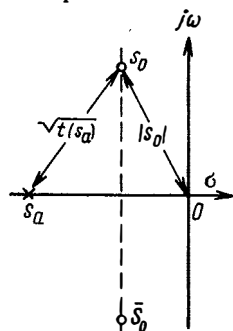


Рис. XIII.9

ственно заменить Z_1 на $\frac{Y_1}{s}$; z_{11}, z_{22} — на $\frac{y_{11}}{s}, \frac{y_{22}}{s}$; z_{12} — на $-\frac{y_{12}}{s}$.

Остаточная функция Z_2 соответственно заменяется на функцию $\frac{Y_2}{s}$, представляющую собой действительный остаток (проводимость).

Использование метода узловых напряжений может оказаться целесообразным в любом из следующих двух случаев: 1. Заданы входная проводимость $Y_{11}(s)$ и проводимость передачи $Y_{12}(s)$ короткозамкнутой общей цепи; требуется найти соответствующий четырехполюсник аналогично тому, как это было выполнено выше при использовании метода контурных токов [т. е. при заданных входном сопротивлении $Z_{11}(s)$ и сопротивлении передачи $Z_{12}(s)$ разомкнутой общей цепи]. 2. Заданы сопротивления $Z_{11}(s)$ и $Z_{12}(s)$; требуется определить соответствующий четырехполюсник, но функция $Z_{11}(s)$ не имеет полюса в точке $s = 0$, а ее асимптотическое значение при $s \rightarrow \infty$ равно нулю [таким образом, члены разложения (XIII.47), содержащие ρ_0 и ρ_∞ , отсутствуют].

Несмотря на то, что во втором случае можно создать полюс в точке $s = 0$ выделением соответствующего параллельного резистивного сопротивления, проще, по-видимому, перейти к функции, обратной $Z_{11}(s)$. Кроме того, удобно использовать метод узловых напряжений так, как будто обратная функция представляет собой входную проводимость короткого замыкания, чем она, конечно, не является. Тем не менее, если разложить эту функцию Y_{11} таким образом, чтобы получилось каскадное соединение четырехполюсников, характеризуемых проводимостями y_{ik} [при условии, что выбраны те же нули передачи, что и для заданного сопротивления передачи $Z_{12}(s)$ общей цепи], то в результате получается разложение, относящееся к заданным функциям $Z_{11}(s)$ и $Z_{12}(s)$, как если бы реализация проводилась на основе метода контурных токов.

Справедливость изложенного утверждения подтверждается тем фактом, что разложение функции $Y_{11} = \frac{1}{Z_{11}}$ по методу узловых напряжений определенно приведет к требуемой функции Z_{11} ; при этом функция z_{12} для любой компонентной цепи имеет такие же нули, как и функция y_{12} той же цепи, ибо $z_{12} = -\frac{y_{12}}{y_{11}y_{22} - y_{12}^2}$, где y_{ik} удовлетворяют условию вычетов со знаком равенства во всех конечных полюсах. Следовательно, разложение $Y_{11} = \frac{1}{Z_{11}}$ по методу узловых напряжений дает, во-первых, требуемое входное сопротивление и, во-вторых, требуемые нули передачи общей цепи. То же самое получается в результате разложения функции $Z_{11}(s)$ при использовании метода контурных токов.

Из сказанного следует, что при необходимости на некотором этапе полного разложения условие (XIII.74) или (XIII.75) может быть выполнено со знаком равенства в левой его части. При этом

получается остаточная функция $Z_2(s)$, у которой отсутствует либо полюс в начале координат, либо постоянный член ρ_∞ . Далее может оказаться, что продолжать процесс обычным способом (по методу контурных токов) нельзя, тогда, приведя остаточную функцию к обратной, продолжают процесс далее, используя метод узловых напряжений. Такая возможность попеременного перехода от метода контурных токов к методу узловых напряжений, и наоборот, в течение всего процесса разложения обеспечивает некоторую гибкость, которая иногда может оказаться полезной.

Синтез нулевого звена на базе метода узловых напряжений полностью совпадает с синтезом на базе метода контурных токов, причем используются соотношения (VI.80) — (VI.86).

Таким образом, для проводимостей ветвей скрещенных цепей имеем:

$$y_a = y_{11} - ay_{12}; \quad (\text{XIII.104})$$

$$y_b = y_{11} + y_{12}, \quad (\text{XIII.105})$$

а для коэффициента уровня сопротивления

$$a = \frac{y_{11} + y_{12}}{y_{22} + y_{12}}. \quad (\text{XIII.106})$$

Используя последнее выражение, получаем ф-лу (XIII.96).

Для проводимостей скрещенных цепей имеем:

$$y_a = (k_0 + Ks) \left(1 + \frac{k_{11}}{k_{12}} \right); \quad (\text{XIII.107})$$

$$y_b = \frac{(k_{11} + k_{12})s}{s - s_a}. \quad (\text{XIII.108})$$

Они вновь приводят к скрещенной цепи, изображенной на рис. VI.13а, но вместо значений элементов, определяемых выражениями (XIII.99) и (XIII.100), получим:

$$R_1 = \frac{k_{12}}{k_0(k_{11} + k_{12})}, \quad C_1 = \frac{K(k_{11} + k_{12})}{k_{12}}; \quad (\text{XIII.109})$$

$$R_2 = \frac{1}{k_{11} + k_{12}}, \quad C_2 = \frac{k_{11} + k_{12}}{-s_a}. \quad (\text{XIII.110})$$

Преобразование в эквивалентную неуравновешенную цепь и условия, при которых оно возможно, совпадают с приведенными выше.

XIII.5. Полезные приемы, используемые при синтезе передаточных функций

В том случае, когда заданная передаточная функция относительно сложна и для ее полной каскадной реализации требуется выполнить несколько последовательных этапов, расчеты значи-

тельно упрощаются, если воспользоваться так называемой теоремой разбиения. Тогда синтез, по существу, сводится к двум задачам, в которых фигурируют вдвое более простые функции. При этом передаточная функция, как было изложено в § IX.8, представляется в виде выражения (IX.172) для каскадного соединения цепей (см. рис. IX.23). Применяя такой прием к паре цепей, изображенных на рис. IX.10 (они не имеют внешних, со стороны входа и выхода, резистивных сопротивлений нагрузки), находим

$$Z_{12} = \frac{E_2}{I_1} = \frac{z_{12}^{(1)} z_{12}^{(2)}}{z_{22}^{(1)} + z_{11}^{(2)}}. \quad (\text{XIII.111})$$

Если принять $Z_{12}(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ при условии, что

$$p(s) = (s - s_{p_1})(s - s_{p_2}) \dots (s - s_{p_{2n}}); \quad (\text{XIII.112})$$

$$q(s) = (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_{2n}), \quad (\text{XIII.113})$$

то, следуя Дашеру, можно ввести обозначения:

$$z_{12}^{(1)} = \frac{(s - s_{p_1})(s - s_{p_2}) \dots (s - s_{p_{2n-1}})}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_{2n-1})}; \quad (\text{XIII.114})$$

$$z_{12}^{(2)} = \frac{(s - s_{p_2})(s - s_{p_4}) \dots (s - s_{p_{2n}})}{(s - s_1)(s - s_3) \dots (s - s_{2n-1})}; \quad (\text{XIII.115})$$

$$z_{22}^{(1)} = z_{11}^{(2)} = \frac{(s - s_2)(s - s_4) \dots (s - s_{2n})}{2(s - s_1)(s - s_3) \dots (s - s_{2n-1})}, \quad (\text{XIII.116})$$

где

$$s_{2n} < s_{2n-1} < \dots < s_2 < s_1 < 0. \quad (\text{XIII.117})$$

Эти выражения получены путем деления числителя и знаменателя функции $Z_{12}(s)$ на $(s - s_1)^2(s - s_3)^2 \dots (s - s_{2n-1})^2$ и последующего сравнения полученного результата с выражением (XIII.111). Если полином $q(s)$ имеет нечетную степень, сопротивления, определяемые выражением (XIII.116), будут при $s = \infty$ равны нулю. Если полином $p(s)$ имеет более низкую степень, чем полином $q(s)$, то можно построить несколько пар сопротивлений передачи, определяемых выражениями (XIII.114) и (XIII.115), с различными относительными степенями полиномов числителя и знаменателя. Нули функции $Z_{12}(s)$ могут быть распределены между функциями $z_{12}^{(1)}$ и $z_{12}^{(2)}$ как угодно, однако при этом не должны быть разделены сопряженные пары.

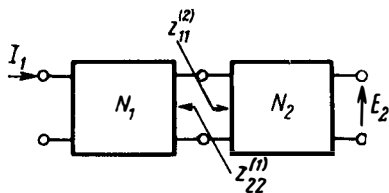


Рис. XIII.10

Тот же способ применим и в случае использования метода узловых напряжений с той разницей, что в качестве общего знаменателя следует выбрать полином $(s - s_2)(s - s_4) \dots (s - s_{2n})$, причем самая низкая критическая частота входных функций $y_{11}^{(2)}$ и $y_{22}^{(1)}$ становится нулем, как и необходимо для функций проводимости RC цепей.

Описанное выше каскадное разложение применяется в отдельности к функциям $z_{22}^{(1)}$ и $z_{11}^{(2)}$ так, чтобы создать нули передачи, требуемые для функций $z_{12}^{(1)}$ и $z_{12}^{(2)}$ соответственно. Тогда соединение результирующих цепей, показанное на рис. XIII.10, дает искомую реализацию (с точностью до постоянного множителя) рассматриваемой функции Z_{12} .

Поскольку входное сопротивление результирующей цепи не контролируется, этот метод синтеза применим лишь в том случае, когда задана только функция $Z_{12}(s)$.

XIII.6. Некоторые примеры каскадного синтеза

Пусть заданы функции

$$Z_{12}(s) = \frac{(s+1)^2 + 4}{(s+1)(s+3)} = \frac{s^2 + 2s + 5}{s^2 + 4s + 3} \quad (\text{XIII.118})$$

и

$$Z_{11}(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)} = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4s + 3}. \quad (\text{XIII.119})$$

Пара комплексных нулей передачи имеет вид

$$s_0 = -1 + j2; \quad \bar{s}_0 = -1 - j2, \quad (\text{XIII.120})$$

а соответствующий полином второй степени

$$t(s) = (s+1)^2 + 4 = s^2 + 2s + 5. \quad (\text{XIII.121})$$

Процесс синтеза начнем с разложения функции на элементарные дроби

$$Z_{11}(s) = \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s+3} + 1. \quad (\text{XIII.122})$$

В выражении (XIII.47) для входного сопротивления, очевидно, $\rho_0 = 0$ и $\rho_\infty = 1$. Поскольку член ρ_0 отсутствует, перейдем к методу узловых напряжений. Однако сначала обратим внимание на то, можно ли в данных условиях успешно провести этап разложения. Прежде чем вычислить m_v по ф-ле (XIII.64), найдем

$$t(-1) = 4; \quad t(-3) = 8, \quad (\text{XIII.123})$$

а затем получим

$$m_1 = \frac{3}{2} = \frac{3}{32}; \quad m_2 = \frac{3 \cdot \frac{1}{2}}{64} = \frac{3}{128}. \quad (\text{XIII.124})$$

Далее находим

$$\sum m_v = \frac{15}{128}; \quad \sum m_v s_v = \frac{-21}{128}. \quad (\text{XIII.125})$$

Из выражения (XIII.69) имеем

$$s_a = -\frac{7}{5}. \quad (\text{XIII.126})$$

Теперь можно вычислить

$$\sum m_v s_v (s_v - s_a) = \frac{3}{40}; \quad \sum \frac{m_v}{-s_v} (s_v - s_a) = \frac{1}{40}, \quad (\text{XIII.127})$$

и при $t(0) = |s_0|^2 = 5$ для неравенств (XIII.74) и (XIII.75) соответственно получим

$$0 < K - \frac{1}{8} \leq 0; \quad 0 < K - \frac{3}{40} \leq 1. \quad (\text{XIII.128})$$

Первое из полученных неравенств не допускает иного выбора, кроме $K = \frac{1}{8}$, второе также выполняется при этом значении K . Следовательно, проведенный этап оказался эффективным.

Теперь из выражения (XIII.63) находим

$$\frac{h(s)}{q(s)} = \frac{64 \cdot 3}{80} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \right) = \frac{24}{5(s+1)(s+3)}, \quad (\text{XIII.129})$$

тогда из ф-лы (XIII.61) получим

$$z_{22} + Z_2 = \frac{5(s+1)(s+3)}{24s \left(s + \frac{7}{5} \right)} = \frac{56}{s} + \frac{\frac{12}{21}}{s + \frac{7}{5}} + \frac{5}{24}. \quad (\text{XIII.130})$$

Из выражений (XIII.54) и (XIII.55) находим

$$k_0 = \frac{25}{56}; \quad k_{12} = \frac{13}{35}. \quad (\text{XIII.131})$$

Приимая во внимание, что [с учетом выражения (XIII.130)] $k_{22} = \frac{2}{21}$, из условия вычетов (XIII.58) получим

$$k_{11} = \frac{507}{350}. \quad (\text{XIII.132})$$

Поскольку условие (XIII.74) [эквивалентное неравенствам (XIII.70)] выполняется со знаком равенства с обеих сторон, находим, что вычет функции z_{11} в точке $s = 0$ равен требуемому значению k_0 . С другой стороны, условие (XIII.75) [эквивалентное (XIII.71)] выполняется со знаком неравенства с обеих сторон. Одно из этих условий объясняет тот факт, что постоянный член в разложении (XIII.130) оказывается больше, чем минимальное требуемое значение $K = \frac{1}{8}$; другое озна-

чает, что величина $z_{11}(\infty)$ также больше, чем указанное минимальное значение. Поэтому из выражений (XIII.60) и (XIII.68) [при условии, что используется первая сумма из соотношений (XIII.127)] находим

$$z_{11(\infty)} = K^* H + 1 = \frac{3}{40} + 1. \quad (\text{XIII.133})$$

Полученная величина больше требуемого минимального значения на

$$\frac{43}{40} - \frac{1}{8} = \frac{38}{40} = \frac{19}{20}. \quad (\text{XIII.134})$$

Последовательное резистивное сопротивление со значением $\frac{19}{20}$ предшествует нулевому звену. Если интерес представляет только реализация сопротивления передачи, определяемого выражением (XIII.118), то эту последовательную ветвь можно опустить.

Таким образом, для нулевого звена получим сопротивления:

$$z_{11} = \frac{1}{8} + \frac{\frac{25}{56}}{s} + \frac{\frac{507}{350}}{s + \frac{7}{5}}; \quad (\text{XIII.135})$$

$$z_{22} = \frac{1}{8} + \frac{\frac{25}{56}}{s} + \frac{\frac{2}{21}}{s + \frac{7}{5}}; \quad (\text{XIII.136})$$

$$z_{12} = \frac{1}{8} + \frac{\frac{25}{56}}{s} - \frac{\frac{13}{35}}{s + \frac{7}{5}}, \quad (\text{XIII.137})$$

а остаточная функция имеет вид

$$Z_2(s) = \frac{1}{12}. \quad (\text{XIII.138})$$

При значениях k_{11} , k_{12} , K , k_0 и s_a , вычисленных по выражениям (XIII.99) и (XIII.100), найдем параметры скрещенной цепи

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{13}{10}, & C_1 &= \frac{50}{91} \\ R_2 &= \frac{49}{80}, & C_2 &= \frac{16}{35} \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIII.139})$$

и значение коэффициента уровня сопротивления, определяемого ф-лой (XIII.95),

$$a = \frac{10'}{39}. \quad (\text{XIII.140})$$

Теперь легко построить результирующую двойную Т-образную цепь, воспользовавшись методом, рассмотренным в § VI.6. Величина ее резистивного сопротивления нагрузки (которое не изменяется при изменении уровня сопротивления в правой секции, разделенной пополам двойной Т-образной цепи) определяется выражением (XIII.138).

В качестве второго примера рассмотрим описанную выше цепь в несколько измененном виде. Сохраним ту же пару комплексных нулей передачи, но увеличим степень полинома знаменателя с двух до трех так, что передаточная функция будет иметь один нуль в точке $s = \infty$. В частности, пусть

$$Z_{12}(s) = \frac{s^2 + 2s + 5}{2s^3 + 11s^2 + 15s + 3}; \quad (\text{XIII.141})$$

$$Z_{11}(s) = \frac{s^3 + 7s^2 + 12s + 3}{2s^3 + 11s^2 + 15s + 3}. \quad (\text{XIII.142})$$

Здесь снова входное сопротивление не имеет полюса в точке $s = 0$. В данном случае избавимся от этого недостатка, выделяя соответствующее параллельное резистивное сопротивление $Z_{11}(0) = 1$ ом. Остаточная функция определяется выражением

$$Z_1(s) = \frac{1}{\frac{1}{Z_{11}} - 1} = \frac{s^3 + 7s^2 + 12s + 3}{s^3 + 4s^2 + 3s}. \quad (\text{XIII.143})$$

Каскадный синтез начинается с разложения этого входного сопротивления на элементарные дроби. Получим

$$Z_1(s) = \frac{1}{s} + \frac{\frac{3}{2}}{s+1} + \frac{1}{s+3} + 1. \quad (\text{XIII.144})$$

Данное разложение эквивалентно разложению (XIII.122) в предыдущем примере, за исключением слагаемого $\frac{1}{s}$. Если допустить существование тех же нулей передачи, которые определяются выражением (XIII.121), то снова применимы соотношения (XIII.123)–(XIII.127), и лишь первое из неравенств (XIII.128) [соответствующее неравенству (XIII.74)] изменится вследствие того, что теперь ρ_0 равно единице, а не нулю. Неравенства (XIII.128) тогда примут вид

$$0 < K - \frac{1}{8} \leq \frac{7}{25} \quad \text{и} \quad 0 < K - \frac{3}{40} \leq 1. \quad (\text{XIII.145})$$

Чтобы избавиться от последовательной емкости на входе, выберем

$$K - \frac{1}{8} = \frac{7}{25} \quad \text{или} \quad K = \frac{81}{200} = 0,405, \quad (\text{XIII.146})$$

что допускается в соответствии со вторым неравенством из (XIII.145).

Поскольку

$$z_{11}(\infty) = K^2 H + 1 = 1,0123, \quad (\text{XIII.147})$$

на входе будет последовательное резистивное сопротивление, величина которого

$$z_{11}(\infty) - K = 1,0123 - 0,405 = 0,6073. \quad (\text{XIII.148})$$

Выражение для $(z_{22} + Z_2)$, пропорциональное K^2 , отличается от выражения (XIII.130) лишь на квадрат коэффициента $\frac{0,405}{1/8}$. Таким образом, для рассматриваемого примера находим

$$z_{22} + Z_2 = \frac{2,187(s+1)(s+3)}{s\left(s + \frac{7}{5}\right)} = 2,187 + \frac{4,686}{s} + \frac{0,9998}{s + \frac{7}{5}}. \quad (\text{XIII.149})$$

Из выражений (XIII.54) и (XIII.55) имеем

$$k_0 = 1,446; \quad k_{12} = 1,203. \quad (\text{XIII.150})$$

При $k_{12} = 0,9998$ условие вычетов (XIII.58) дает

$$k_{11} = 1,447. \quad (\text{XIII.151})$$

Теперь нетрудно найти сопротивления, характеризующие нулевое звено. Остаточная функция имеет вид

$$Z_2(s) = 1,782 + \frac{3,24}{s}. \quad (\text{XIII.152})$$

Поскольку сопротивление передачи, определяемое выражением (XIII.141), дает нуль в точке $s = \infty$, первый член в этой остаточной функции рассматривается как последовательное резистивное сопротивление, а второй — как оконечная параллельная емкость.

Далее рассмотрим пример, для которого требуются два последовательных этапа разложения. Предположим, что заданы сопротивления:

$$Z_{12}(s) = \frac{[(s+1)^2 + 4][(s+1)^2 + 9]}{(s+1)(s+3)(s+5)(s+7)}; \quad (\text{XIII.153})$$

$$Z_{11}(s) = \frac{(s+2)(s+4)(s+6)(s+8)}{(s+1)(s+3)(s+5)(s+7)}. \quad (\text{XIII.154})$$

На первом этапе создадим нули передачи, определяемые выражением

$$t(s) = (s+1)^2 + 4. \quad (\text{XIII.155})$$

Продолжая процесс синтеза на базе метода контурных токов, найдем разложение на элементарные дроби

$$Z_{11}(s) = \frac{115}{48} \frac{1}{s+1} + \frac{15}{16} \frac{1}{s+3} + \frac{9}{16} \frac{1}{s+5} + \frac{15}{48} \frac{1}{s+7} + 1 \quad (\text{XIII.156})$$

и вычислим по ф-ле (XIII.64):

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= 0,1497395; & m_2 &= 0,0439453 \\ m_3 &= 0,00703125; & m_4 &= 0,00136718 \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIII.157})$$

Отсюда

$$\sum m_v = 0,2020832; \quad \sum m_{v,s_v} = 0,3263019 \quad (\text{XIII.158})$$

и, таким образом,

$$s_a = -\frac{0,3263019}{0,2020832} = -1,61469. \quad (\text{XIII.159})$$

Прежде чем оценить условия (XIII.74) и (XIII.75), вычислим

$$\sum \frac{m_v}{-s_v} (s_v - s_a) = 0,0659385; \quad \sum m_{v,s_v} (s_v - s_a) = 0,2611436, \quad (\text{XIII.160})$$

после чего указанные условия можно соответственно представить в виде

$$0 < K - 0,0659 \leq 0; \quad 0 < K - 0,261 \leq 1. \quad (\text{XIII.161})$$

Первое из них является жестким (ибо в выражении (XIII.156) отсутствует член с ρ_0) и требует, чтобы $K = 0,0659$. Это, однако, исключает выполнение второго неравенства. Такой результат следовало ожидать в начале процесса, принимая во внимание относительно малое значение $|s_0|$, при котором член $(\hat{s}_a - s_a)$ в выражении (XIII.83) является, как было показано выше, отрицательным. Создавшееся затруднение может быть устранено переходом к методу узловых напряжений.

Произведем разложение на элементарные дроби

$$\begin{aligned} \frac{Y_{11}(s)}{s} &= \frac{(s+1)(s+3)(s+5)(s+7)}{s(s+2)(s+4)(s+6)(s+8)} = \\ &= \frac{35}{128} \frac{1}{s} + \frac{5}{32} \frac{1}{s+2} + \frac{9}{64} \frac{1}{s+4} + \frac{5}{32} \frac{1}{s+6} + \frac{35}{128} \frac{1}{s+8} \end{aligned} \quad (\text{XIII.162})$$

и вычислим

$$t(-2) = 5; \quad t(-4) = 13; \quad t(-6) = 29; \quad t(-8) = 53, \quad (\text{XIII.163})$$

а из выражения (XIII.64)

$$m_1 = \frac{5}{16 \cdot 25}; \quad m_2 = \frac{9}{16 \cdot 169}; \quad m_3 = \frac{15}{16 \cdot 841}; \quad m_4 = \frac{35}{16 \cdot 2809}. \quad (\text{XIII.164})$$

Далее находим

$$\sum m_v = \frac{1}{16} (0,2 + 0,0532544 + 0,0178359 + 0,0124599) = \frac{0,2835502}{16}; \quad (\text{XIII.165})$$

$$\sum m_v s_v = \frac{-1}{16} (0,4 + 0,2130176 + 0,1070154 + 0,0996795) = \frac{-0,8197125}{16}; \quad (\text{XIII.166})$$

$$s_a = -\frac{0,8197125}{0,2835502} = -2,89089, \quad (\text{XIII.167})$$

откуда

$$\sum \frac{m_v}{-s_v} (s_v - s_a) = \frac{0,057123}{16}; \quad \sum m_v s_v (s_v - s_a) = \frac{0,721899}{16}. \quad (\text{XIII.168})$$

Тогда неравенства (XIII.74) и (XIII.75) принимают вид

$$0 < K - 0,017851 \leq 0,15809; \quad 0 < K - 0,045118 \leq 0, \quad (\text{XIII.169})$$

причем для второго из них необходимо, чтобы

$$K = 0,045118; \quad (\text{XIII.170})$$

первое также выполняется при данном выборе величины K .

Теперь с помощью выражения (XIII.63) непосредственно находим

$$\frac{h(s)}{q(s)} = \frac{22,16(s+4,47)(s+6,80)}{(s+2)(s+4)(s+6)(s+8)}. \quad (\text{XIII.171})$$

Тогда из выражения (XIII.61), модифицированного в соответствии с методом узловых напряжений, получим

$$\begin{aligned} \frac{y_{22} + Y_2}{s} &= \frac{0,04512(s+2)(s+4)(s+6)(s+8)}{(s+2,891)(s+4,47)(s+6,80)} = \\ &= \frac{0,197}{s} + \frac{0,03965}{s+2,891} + \frac{0,0172}{s+4,47} + \frac{0,0094}{s+6,80} + 0,04512. \end{aligned} \quad (\text{XIII.172})$$

Используя выражения (XIII.54), (XIII.55) и (XIII.58), можно найти:

$$k_0 = 0,04512 \frac{5}{2,891} = 0,078; \quad (\text{XIII.173})$$

$$k_{12} = 0,04512 \frac{7,576}{2,891} = 0,118; \quad (\text{XIII.174})$$

$$k_{11} = 0,118 \frac{0,118}{0,03965} = 0,3526. \quad (\text{XIII.175})$$

Выполнение неравенства (XIII.75) при значении K , определяемом выражением (XIII.170), предполагает, что $\left(\frac{y_{11}}{s}\right)_{s=\infty} = K$, но $y_{11}(0)$ будет иметь большее значение, чем k_0 , так как первое из неравенств (XIII.169) [эквивалентное неравенству (XIII.74)] выполняется с запасом. Отсюда находим, что

$$y_{11}(0) = \frac{K^2 t^2(0) h(0)}{-s_a q(0)} + Y_{11}(0) = 0,0308 + 0,2733 = 0,3041. \quad (\text{XIII.176})$$

Таким образом, параллельная активная проводимость, величина которой равна

$$0,3041 - 0,078 = 0,2261 \frac{1}{\text{ом}}, \quad (\text{XIII.177})$$

появляется на входных зажимах нулевого звена. Это звено характеризуется следующими величинами:

$$\frac{y_{11}}{s} = 0,0451 + \frac{0,078}{s} + \frac{0,3526}{s+2,89}; \quad (\text{XIII.178})$$

$$\frac{y_{22}}{s} = 0,0451 + \frac{0,078}{s} + \frac{0,0396}{s+2,89}; \quad (\text{XIII.179})$$

$$\frac{-y_{12}}{s} = 0,0451 + \frac{0,078}{s} - \frac{0,118}{s+2,89}. \quad (\text{XIII.180})$$

Остаточная функция согласно (XIII.172) имеет вид

$$\frac{Y_2(s)}{s} = \frac{0,119}{s} + \frac{0,0172}{s+4,47} + \frac{0,0094}{s+6,80}. \quad (\text{XIII.181})$$

Теперь рассмотрим следующий этап синтеза для нулей передачи, определяемых полиномом

$$t(s) = (s+1)^2 + 9. \quad (\text{XIII.182})$$

Хотя $|s_0|$ здесь несколько больше, будем придерживаться метода узловых напряжений, так как вычеты функции $\frac{Y_2(s)}{s}$ уже известны. Имеем

$$t(-4,47) = 21,041; \quad t(-6,80) = 42,64. \quad (\text{XIII.183})$$

Из выражения (XIII.64) находим

$$m_1 = 0,0001736; \quad m_2 = 0,00003513, \quad (\text{XIII.184})$$

откуда

$$\sum m_v = 0,0002087; \quad \sum m_v s_v = -0,0010149.$$

Следовательно,

$$s_a = -4,8624. \quad (\text{XIII.185})$$

Далее вычислим

$$\sum \frac{m_v}{-s_v} (s_v - s_a) = 0,00000522; \quad \sum m_v s_v (s_v - s_a) = 0,0001586, \quad (\text{XIII.186})$$

и неравенства (XIII.74) и (XIII.75) соответственно получают значения

$$0 < K - 0,0000522 \leq 0,0579; \quad 0 < K - 0,0001586 \leq 0. \quad (\text{XIII.187})$$

Снова второе неравенство приводит к значению

$$K = 0,0001586, \quad (\text{XIII.188})$$

а первое также выполняется.

Из выражения (XIII.63) теперь имеем

$$\frac{h(s)}{q(s)} = \frac{6300}{(s+4,47)(s+6,80)}, \quad (\text{XIII.189})$$

а из выражения (XIII.61) —

$$\begin{aligned} \frac{y_{22} + Y_2}{s} &= \frac{0,0001586 (s + 4,47) (s + 6,80)}{s (s + 4,86)} = \\ &= \frac{0,000992}{s} + \frac{0,0000248}{s + 4,86} + 0,0001586. \end{aligned} \quad (\text{XIII.190})$$

Выражения (XIII.54), (XIII.55) и (XIII.58) дают:

$$k_0 = 0,0001586 \frac{10}{4,862} = 0,000326; \quad (\text{XIII.191})$$

$$k_{12} = 0,0001586 \frac{23,92}{4,862} = 0,000781; \quad (\text{XIII.192})$$

$$k_{11} = 0,000781 \frac{0,000781}{0,0000248} = 0,0246 \quad (\text{XIII.193})$$

и

$$y_{11}(0) = \frac{100}{4,862} \sum \frac{m_v}{-s_v} (s_v - s_a) + \rho_0 = \frac{0,000522}{4,862} + 0,119 = 0,119107. \quad (\text{XIII.194})$$

Отсюда видно, что на входе требуется параллельная ветвь с активной проводимостью

$$y_{11}(0) - k_0 = 0,118781 \frac{1}{\text{ом}}. \quad (\text{XIII.195})$$

Теперь нетрудно найти проводимости нулевого звена, а остатком является активная проводимость

$$Y_3 = 0,000992 - 0,000326 = 0,000666 \frac{1}{\text{ом}}. \quad (\text{XIII.196})$$

Интересно проследить, как данный пример может быть решен с помощью теоремы разбienia, рассмотренной выше, в § XIII.5. По-видимому, в данном случае нельзя рассчитывать на получение реализации, соответствующей заданному сопротивлению (XIII.154). Однако это обычно не имеет практического значения.

После деления числителя и знаменателя выражения (XIII.153) для функции $Z_{12}(s)$ на квадрат коэффициентов $(s + 1)(s + 5)$ выражения (XIII.114), (XIII.115), (XIII.116) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} z_{12}^{(1)} &= \frac{(s+1)^2 + 4}{(s+1)(s+5)}; & z_{12}^{(2)} &= \frac{(s+1)^2 + 9}{(s+1)(s+5)} \\ z_{22}^{(1)} = z_{11}^{(2)} &= \frac{(s+3)(s+7)}{2(s+1)(s+5)} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{XIII.197})$$

Реализация каждой цепи в виде, показанном на рис. XIII.10, уже не требует дальнейших вычислений.



XIV

ГЛАВА

Задача аппроксимации

XIV.1. Предварительные замечания

В настоящей главе рассматриваются различные методы, позволяющие определить соответствующую рациональную функцию для представления входного сопротивления или сопротивления передачи (точнее модуля на мнимой оси, вещественной части или угла функции). При этом требуемые свойства функции могут быть заданы кривой или рядом дискретных значений, либо другим аналитическим или графическим способом. На практике возникают задачи, когда желательно контролировать модуль, вещественную часть или угол функции цепи порознь или совместно. Вопрос о том, в какой степени характеристики входного сопротивления или сопротивления передачи могут контролироваться одновременно, был рассмотрен в главе VIII. Здесь для теоретического обоснования соответствующих положений часто будут использоваться полученные в упомянутой главе результаты.

Решение задачи аппроксимации является первым шагом в любом виде синтеза. Оно позволяет получить представление требуемой характеристики цепи в виде рациональной функции. На втором этапе осуществляется реализация указанной рациональной функции. До сих пор в наших рассуждениях речь шла, главным образом, о методах реализации. Теперь рассмотрим подробнее, каким образом появляется так называемая заданная функция сопротивления.

Существенная особенность этого этапа синтеза состоит в том, что он содержит неточные процессы. В отличие от методов синтеза, при которых точно реализуется заданная функция цепи, аппроксимация, как говорит само название, является неточной уже по своему характеру.

При расчете цепи в качестве исходных данных обычно используют некоторые идеализированные, графически заданные характеристики или известные верхний и нижний пределы их изменения. Аналитически в виде обычного сопротивления или проводимости

эти данные задаются очень редко, и поэтому указанные функции едва ли имеют рациональную форму, удовлетворяющую необходимым условиям физической реализуемости.

Задача аппроксимации связана с построением такой рациональной функции, которая, с одной стороны, удовлетворяла бы соответствующим условиям реализуемости, а с другой — исходным данным, касающимся характеристик требуемой цепи. Именно на этом этапе проектирования ставятся все вопросы относительно допусков и пригодности возможных решений. В дальнейшем, после того как определена соответствующая рациональная функция, нет необходимости снижать предъявляемые требования или пересматривать допуски на характеристики. Исключением являются случаи, когда необходимо учесть влияние неустраняемых паразитных элементов, присутствие которых может значительно повлиять на заданную функцию.

Опытный инженер-проектировщик не будет отдельно рассматривать задачи аппроксимации и реализации. Он умело использует гибкость метода аппроксимации, чтобы получить рациональную функцию, не только удовлетворяющую необходимым условиям реализуемости, но и обладающую некоторыми особыми свойствами. Эти свойства позволят отдать предпочтение тому или иному виду реализации и дадут возможность так построить и отрегулировать проектируемую цепь, чтобы одновременно свести к минимуму паразитные эффекты.

Целесообразность подобного «поглощения» задачей аппроксимации некоторых предполагаемых трудностей последующего процесса реализации указывает на то, что эти оба этапа полной задачи синтеза должны быть тесно связаны между собой для достижения максимальной эффективности при проектировании линейных пассивных цепей с сосредоточенными параметрами. В процессе обсуждения мы не будем стремиться подробно исследовать взаимосвязь, существующую между указанными этапами — аппроксимацией и реализацией; мы рассмотрим лишь некоторые из известных и чаще используемых методов получения рациональных аппроксимирующих функций, соответствующих обычно встречающимся при проектировании функциям. Такое рассмотрение в любом случае является ценным и приводит к решению полной задачи синтеза.

XIV.2. Функции Баттерворта и Чебышева

Обычно встречаются случаи, когда необходимо найти рациональную функцию, в частности отношение двух полиномов от переменной ω^2 , определяемое выражением (XI.6). Эта функция аппроксимирует так называемую нормализованную идеализованную низкочастотную характеристику, изображенную на рис. XIV.1.

Нормализация состоит в выборе единичного значения для уровня сопротивления и угловой частоты среза, а идеализация предпо-

лагают выбор точно прямоугольной формы низкочастотной характеристики, которая постоянна в полосе пропускания $-1 < \omega < 1$ (характеристика должна быть четной функцией) и тождественно равна нулю за ее пределами. Можно использовать соответствующую нормализацию шкал модуля и частоты относительно любого уровня сопротивления и частоты среза. Задавая соответствующие допуски нетрудно определить, с какой точностью следует аппроксимировать идеализированную функцию.

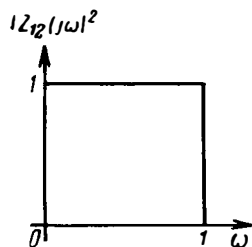


Рис. XIV.1

Простой, но весьма эффективной функцией, позволяющей получить любую точность аппроксимации идеализированной кривой, приведенной на рис. XIV.1, является так называемая функция Баттерворта порядка n

$$|Z_{12}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2n}}. \quad (\text{XIV.1})$$

Действительная кривая модуля сопротивления передачи, получаемая с помощью такой рациональной функции, аппроксимирующей квадрат модуля этого сопротивления, показана на рис. XIV.2

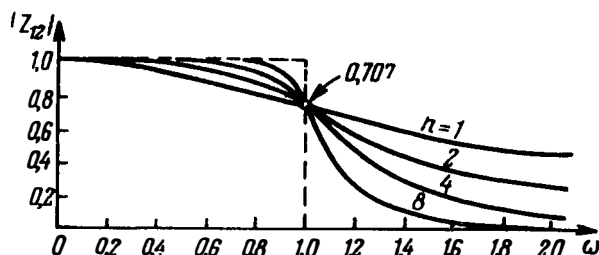


Рис. XIV.2

для различных порядков n . Очевидно, что кривые для всех порядков проходят через точку 0,707 при частоте $\omega = 1$. Подобно простой резонансной кривой (которая в данном случае является функцией Баттерворта первого порядка) все функции в этом семействе проходят через точку половинной мощности на теоретической частоте среза.

Аппроксимация везде монотонна. В окрестности точки $\omega = 0$ имеем

$$1 - |Z_{12}(j\omega)| = \frac{1}{2} \omega^{2n} - \frac{3}{8} \omega^{4n} + \frac{5}{16} \omega^{6n} - \dots + \dots \quad (\text{XIV.2})$$

Как видно отсюда, первые $(2n - 1)$ производные в начале координат равны нулю, что обуславливает весьма плоский вид кривых или почти постоянную их величину на низких частотах. По-

этому характеристики Баттерворта называются «максимально плоскими».

Легко получить комплексное сопротивление передачи $Z_{12}(s)$, соответствующее квадрату модуля на мнимой оси, определяемому выражением (XIV.1.). Используя обозначение в ф-ле (XI.6), запишем

$$B(-s^2) = 1 + (-1)^n s^{2n}. \quad (\text{XIV.3})$$

Нули этого выражения являются корнями уравнения

$$s^{2n} = e^{j\pi(n-1)+j2\pi\nu}, \quad (\text{XIV.4})$$

где ν — целое число. Из ур-ния (XIV.4) легко найти корни

$$s_\nu = e^{\frac{j\pi(2\nu+n-1)}{2n}} \quad \text{при } \nu = 1, 2, \dots, 2n. \quad (\text{XIV.5})$$

Диаграмма расположения полученных корней представляет собой в плоскости s единичную окружность, причем все корни расположены симметрично относительно начала координат. На рис. XIV.3 показаны диаграммы для случаев $n = 3$ и 4.

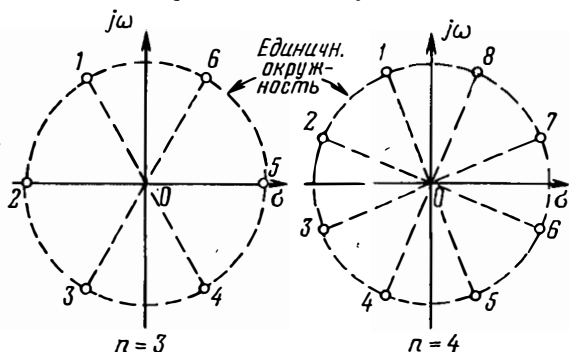


Рис. XIV.3

Полином знаменателя функции $Z_{12}(s)$ содержит нули, расположенные в левой полуплоскости, которым в ф-ле (XIV.5) соответствуют значения $\nu = 1, 2, \dots, n$. Когда n — нечетное, один нуль, расположенный в левой полуплоскости, всегда лежит в точке $s = -1$, а знаменатель содержит множитель $(1 + s)$. Остальные нули знаменателя определяются квадратными множителями, дающими комплексно-сопряженные пары. Поскольку все векторы s_ν имеют единичный модуль, постоянный член полинома знаменателя равен единице. Поэтому комплексное сопротивление передачи, соответствующее единичному квадрату модуля n -го порядка, определяется выражением

$$Z_{12}(s) = \frac{1}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots + a_n s^n}. \quad (\text{XIV.6})$$

Значения коэффициентов полинома знаменателя (XIV.6) и его представление в виде сомножителей даны для нескольких значений n в следующих двух таблицах [33].

n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	1,000							
2	1,414	1,000						
3	2,000	2,000	1,000					
4	2,613	3,414	2,613	1,000				
5	3,236	5,236	5,236	3,236	1,000			
6	3,864	7,464	9,141	7,464	3,864	1,000		
7	4,494	10,103	14,606	14,606	10,103	4,494	1,000	
8	5,126	13,138	21,848	25,691	21,848	13,138	5,126	1,000

(XIV.7)

n	Полином знаменателя
1	$(1 + s)$
2	$(1 + 1,414s + s^2)$
3	$(1 + s)(1 + s + s^2)$
4	$(1 + 0,7653s + s^2)(1 + 1,8477s + s^2)$
5	$(1 + s)(1 + 0,6180s + s^2)(1 + 1,6180s + s^2)$
6	$(1 + 0,5176s + s^2)(1 + 1,4142s + s^2)(1 + 1,9318s + s^2)$
7	$(1 + s)(1 + 0,4449s + s^2)(1 + 1,2465s + s^2)(1 + 1,8022s + s^2)$
8	$(1 + 0,3896s + s^2)(1 + 1,1110s + s^2)(1 + 1,6630s + s^2) \times$ $\times (1 + 1,9622s + s^2)$

(XIV.8)

Дополнительные полиномы для более высоких порядков можно вычислить простым путем. Очевидно, что значения коэффициентов распределены симметрично (подобно биномиальным коэффициентам), что всегда имеет место, если нули полинома лежат в точках единичной окружности (не обязательно на одинаковых расстояниях друг от друга) или в сопряженных с ними точках.

Для получения лучшей аппроксимации идеального прямоугольника, изображенного на рис. XIV.1, полиномом заданной степени функция Баттерворта не является наилучшей, ибо она обеспечивает такую оптимальную аппроксимацию лишь в точке $\omega = 0$, но не позволяет получить равномерную аппроксимацию в интервале $0 < \omega < 1$. Наиболее эффективный результат достигается, если удастся найти рациональную функцию, которая аппроксимирует постоянное значение, равное единице, в указанном интервале не монотонно, а волнообразно.

В поисках кривой подобного типа рассмотрим сначала более подробно функцию Баттерворта, определяемую выражением

(XIV.1). Изобразив член ω^{2n} в знаменателе на отдельном графике, замечаем, что он аппроксимирует нуль в интервале $0 < \omega < 1$ и бесконечно удаленную точку вне этого интервала.

Действительно, если вместо выражения (XIV.1) записать

$$|Z_{12}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + F^2(\omega)} \quad (\text{XIV.9})$$

и заметить, что функция $F^2(\omega)$, по существу, равна нулю в интервале $0 < \omega < 1$ и бесконечности (точнее, величине, значительно большей единицы) при $\omega > 1$, то функция, определяемая выражением (XIV.9), будет иметь форму, весьма близкую к прямоугольнику, показанному на рис. XIV.1. Таким образом, с ростом целого числа n член ω^{2n} все больше приближается к выполнению данного требования, причем это происходит монотонно, и оптимальное решение получается для точек $\omega = 0$ и $\omega = \infty$.

Нам нужен полином от ω , который с равными колебаниями аппроксимирует нуль в интервале $0 < \omega < 1$ (вернее, в интервале $-1 < \omega < 1$, так как аппроксимируемая характеристика является четной функцией) и быстро принимает большие значения вне его.

Указанными свойствами обладает полином Чебышева, который (как функция любой вещественной переменной x) определяется выражением

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x), \quad (\text{XIV.10})$$

имеющим скорее вид трансцендентной функции, а не полинома. Однако легко установить, что это конечный полином от x , если принять

$$\arccos x = \varphi, \quad \text{или} \quad x = \cos \varphi \quad (\text{XIV.11})$$

и вспомнить, что $\cos n\varphi$ (который совпадает с функцией $T_n(x)$ с точностью до множителя $\frac{1}{2^{n-1}}$) можно выразить как сумму членов, содержащих степени косинуса от $\cos \varphi$ до $\cos^n \varphi$ (нечетные при n нечетном и четные при n четном). Так,

$$\left. \begin{aligned} \cos 2\varphi &= -1 + 2\cos^2 \varphi \\ \cos 3\varphi &= -3\cos \varphi + 4\cos^3 \varphi \\ \cos 4\varphi &= 1 - 8\cos^2 \varphi + 8\cos^4 \varphi \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIV.12})$$

После подстановки x вместо $\cos \varphi$ выражения (XIV.12) становятся полиномами от x .

Одновременно с этим очевидно, что рассматриваемый полином колеблется с одинаковой амплитудой в интервале $-1 < x < 1$, где аргумент φ согласно выражению (XIV.11) является вещественным, так как, по существу, он равен $\cos n\varphi$ с амплитудой $\frac{1}{2^{n-1}}$. Если

построить график в линейном масштабе для x , то можно видеть, что колебания, хотя и имеют одинаковую амплитуду, отличаются периодом, поскольку масштаб φ нелинейный. В нашей задаче это обстоятельство, разумеется, не играет роли.

Так как в приводимом ниже анализе используется полином с единичной амплитудой колебаний, то вместо стандартной формы полинома Чебышева перейдем к его модифицированной форме

$$V_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad (\text{XIV.13})$$

который отличается от исходной лишь множителем $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Для получения полиномов любого порядка, а также для их вычисления при данных значениях аргумента x можно найти другое представление полинома Чебышева, воспользовавшись выражением (XIV.11):

$$\sqrt{1-x^2} = \sin \varphi \quad \text{и} \quad x + j\sqrt{1-x^2} = e^{j\varphi}, \quad (\text{XIV.14})$$

откуда

$$e^{\pm jn\varphi} = (x \pm j\sqrt{1-x^2})^n. \quad (\text{XIV.15})$$

Требуемый полином, определяемый выражением (XIV.13), тогда можно представить в виде

$$V_n(x) = \cos n\varphi = \frac{(x + j\sqrt{1-x^2})^n + (x + j\sqrt{1-x^2})^{-n}}{2}, \quad (\text{XIV.16})$$

или

$$V_n(x) = \cos n\varphi = \frac{(x + j\sqrt{1-x^2})^n + (x - j\sqrt{1-x^2})^n}{2}, \quad (\text{XIV.17})$$

что вытекает из соотношения (XIV.15).

Вместо ф-л (XIV.11) и (XIV.14) запишем

$$x = \operatorname{ch} \psi, \quad \sqrt{x^2-1} = \operatorname{sh} \psi, \quad (\text{XIV.18})$$

а вместо (XIV.15) —

$$e^{-\psi} = x \pm \sqrt{x^2-1}. \quad (\text{XIV.19})$$

Теперь полином Чебышева можно представить в виде

$$V_n(x) = \operatorname{ch} n\psi = \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x \pm \sqrt{x^2-1})^{\mp n}}{2}, \quad (\text{XIV.20})$$

очевидно, эквивалентном выражению (XIV.16) или (XIV.17), но более удобном для его вычисления при $x > 1$.

Выражения (XIV.17) и (XIV.20) удобны, кроме того, для построения полиномов любого порядка. Действительно, полином $V_n(x)$ определяется либо вещественной частью слагаемого $(x + j\sqrt{1-x^2})^n$, либо рациональной частью слагаемого $(x + \sqrt{x^2-1})^n$, что равно сумме первого, третьего, пятого, ...

членов в биномиальном разложении этих двух выражений. Таким путем легко найти

$$\left. \begin{aligned} V_1(x) &= x \\ V_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ V_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ V_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ V_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\ V_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIV.21})$$

Существует следующая рекуррентная формула, которую можно использовать для вычисления дополнительных полиномов по приведенным выше:

$$V_{n+1} - 2xV_n + V_{n-1} = 0. \quad (\text{XIV.22})$$

Полиномы нечетного порядка оказываются нечетными, а полиномы четного порядка — четными.

С точностью до аддитивной постоянной и соответствующего множителя квадрат полинома Чебышева, очевидно, равен полиному второго порядка. В частности, нетрудно заметить, что

$$V_n^2(x) = \frac{V_{2n} + 1}{2}. \quad (\text{XIV.23})$$

Например, квадрат функции $V_3(x)$ из выражения (XIV.21) дает $16x^6 - 24x^4 + 9x^2$, что равно $\frac{V_6 + 1}{2}$.

Для того чтобы вычислить и изобразить графически данный полином, рассмотрим отдельно интервалы $-1 < x < 1$ и $|x| > 1$. В первом из них требуется лишь найти те значения x , при которых полином равен ± 1 или 0. Значениями φ , при которых $\cos n\varphi$ также равен ± 1 или 0, являются $\varphi = \frac{\nu\pi}{2n}$, где ν — целое. Затем с помощью выражения (XIV.11) можно получить соответствующие значения x :

$$x = \cos \frac{\nu\pi}{2n} \quad \text{при } \nu = 0, 1, 2, \dots, 2n. \quad (\text{XIV.24})$$

Во втором интервале, $|x| > 1$, для расчета значений $V_n(x)$ наиболее целесообразно использовать ф-лу (XIV.20). При этом достаточно вычислить одно значение функции при x , близком к единице, и дополнительные ее значения при больших x . В качестве x , близкого к единице, удобно выбрать $\frac{5}{4}$, так как из выражения (XIV.20) следует, что

$$V_n\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{2^n + 2^{-n}}{2} \approx 2^{n-1}. \quad (\text{XIV.25})$$

Кроме того, отсюда же имеем

$$V_n(x) \approx 2^{n-1} x^n \quad \text{при } x \gg 1. \quad (\text{XIV.26})$$

Полученное выражение является просто старшим членом полинома.

На рис. XIV.4 представлены графики полиномов $V_3(x)$ и $V_4(x)$, вычисленных указанным способом. У полиномов более высокого порядка графики имеют такой же общий характер, но обладают большей колебательностью в интервале $-1 < x < 1$ и большей скоростью нарастания абсолютных значений вне его. Частота колебаний относительно низка около точки $x = 0$ и возрастает по мере того, как x стремится к точкам ± 1 . Это видно по значениям x

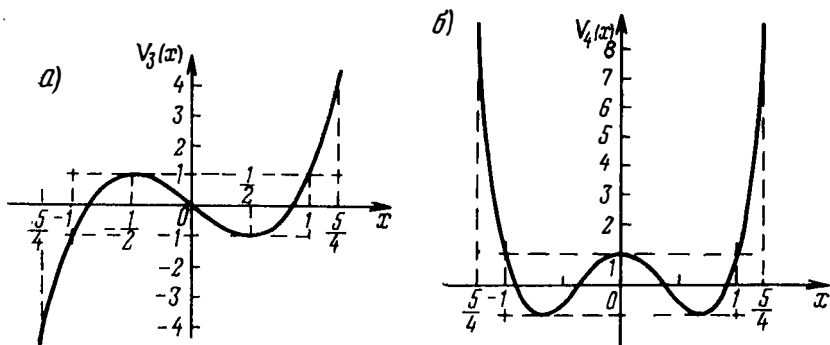


Рис. XIV.4

из выражений (XIV.24), при которых функция $V_n(x)$ проходит через точки ± 1 и 0.

Возвращаясь теперь к выражению (XIV.9), заметим, что функция $F^2(\omega)$ остается положительной. Простейший способ выполнения этого условия — возвести в квадрат полином $V_n(x)$, что значительно проще (но полностью эквивалентно), чем добавлять соответствующие постоянные к полиномам четного порядка. Переменную x можно отождествить с ω , и если умножить функцию $V_n(x)$ на величину $\varepsilon < 1$, то погрешность, с которой результирующая функция $F^2(\omega)$ аппроксимирует нуль в интервале $-1 < \omega < 1$, легко контролируется. Следовательно,

$$F^2(\omega) = \varepsilon^2 V_n^2(\omega). \quad (\text{XIV.27})$$

Квадрат модуля сопротивления передачи [см. выражение (XIV.9)] имеет вид

$$|Z_{12}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_n^2(\omega)}. \quad (\text{XIV.28})$$

На рис. XIV.5 дан график функции $Z_{12}(j\omega)$ при $\varepsilon^2 = \frac{1}{5}$ и $n = 4$. Можно заметить, что спад ее за частотой среза является значи-

тельно более крутым, чем у функции Баттерворта четвертого порядка, изображенной на рис. XIV.2, которая приводит к той же степени сложности сопротивления передачи. В этом отношении применение данной функции Чебышева фактически позволяет получить тот же результат, что и применение функции Баттерворта восьмого порядка.

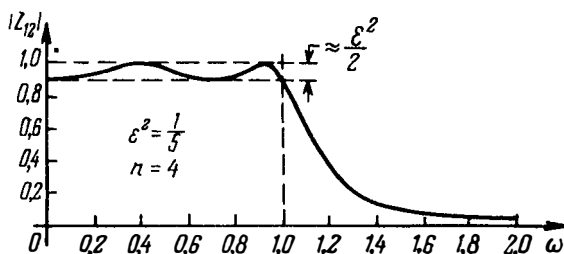


Рис. XIV.5

Амплитуда пульсаций в полосе пропускания при малом ϵ имеет величину

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} \approx \frac{\epsilon^2}{2}, \quad (\text{XIV.29})$$

в то время как за частотой среза, где $\epsilon^2 V_n^2(\omega) \gg 1$, имеем

$$|Z_{12}(j\omega)| \approx \frac{1}{\epsilon V_n(\omega)}. \quad (\text{XIV.30})$$

При выборе малого значения ϵ получаются меньшие пульсации в полосе пропускания, но поведение функции за частотой среза ухудшается, и при $\epsilon = 0$ функция (XIV.28) не проявляет уже способности аппроксимировать идеальный прямоугольник. Однако для средних значений пульсации в полосе пропускания, допустимых на практике, эта способность функции (XIV.28) лучше, чем у функции Баттерворта того же порядка. Используя два параметра ϵ и n , легко выполнить заданные требования, касающиеся погрешности аппроксимации в полосе пропускания и крутизны характеристики за частотой среза.

Для получения соответствующего комплексного сопротивления передачи $Z_{12}(s)$ необходимо определить расположенные в левой полуплоскости корни уравнения

$$B(-s^2) = 1 + \epsilon^2 V_n^2 = 0. \quad (\text{XIV.31})$$

Здесь предполагается, что в полиноме $V_n^2(\omega)$ переменная ω^2 заменена на $-s^2$. Эти корни можно представить в замкнутой форме следующим образом. После подстановки соотношения $V_n = \cos n\varphi$

в выражение (XIV.31) нужно учесть соответствующие комплексные значения φ , приняв $\varphi = \varphi_1 + j\varphi_2$. Тогда

$$\varepsilon V_n = \pm j = \varepsilon \cos n(\varphi_1 + j\varphi_2) = \varepsilon \cos n\varphi_1 \operatorname{ch} n\varphi_2 - j\varepsilon \sin n\varphi_1 \operatorname{sh} n\varphi_2. \quad (\text{XIV.32})$$

Приравняв вещественную и мнимую части, получим:

$$\cos n\varphi_1 \operatorname{ch} n\varphi_2 = 0; \quad (\text{XIV.33})$$

$$\sin n\varphi_1 \operatorname{sh} n\varphi_2 = \pm \frac{1}{\varepsilon}, \quad (\text{XIV.34})$$

откуда определяем φ_1 и φ_2 .

Поскольку $\operatorname{ch} \varphi_2$ не равен нулю при любых вещественных значениях φ_2 , уравнение (XIV.33) может выполняться лишь при выборе таких значений φ_1 , при которых $\cos n\varphi_1 = 0$. Эти значения φ_1 можно представить в виде

$$\varphi_1 = \frac{\nu\pi}{2n} \quad \text{при } \nu = 1, 3, 5, \dots, 4n-1. \quad (\text{XIV.35})$$

Из выражения (XIV.34)

$$\operatorname{sh} n\varphi_2 = \pm \frac{1}{\varepsilon}; \quad \operatorname{ch} n\varphi_2 = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1}. \quad (\text{XIV.36})$$

Отсюда

$$e^{n\varphi_2} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \pm \frac{1}{\varepsilon}. \quad (\text{XIV.37})$$

Поскольку знаки « \pm » просто дают обратные значения показательной функции, можно записать

$$e^{\varphi_2} = \left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (\text{XIV.38})$$

Тогда получим

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{ch} \varphi_2 \\ \operatorname{sh} \varphi_2 \end{array} \right\} = \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{n}} \pm \left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-\frac{1}{n}}}{2}, \quad (\text{XIV.39})$$

где знаки « \pm » соответственно дают гиперболические функции косинуса и синуса.

Теперь для комплексных значений s имеем

$$s_\nu = j \cos(\varphi_1 + j\varphi_2) = \sin \varphi_1 \operatorname{sh} \varphi_2 + j \cos \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_2, \quad (\text{XIV.40})$$

где значения φ_1 определяются соотношениями (XIV.35), а $\operatorname{sh} \varphi_2$ и $\operatorname{ch} \varphi_2$ — выражениями (XIV.39). Нас интересуют лишь корни вы-

ражения (XIV.31) в левой полуплоскости. Поэтому если записать

$$s_v = \sigma_v + j\omega_v, \quad (\text{XIV.41})$$

то

$$\left. \begin{aligned} \sigma_v &= -\sin \frac{v\pi}{2n} \operatorname{sh} \varphi_2 \\ \omega_v &= \cos \frac{v\pi}{2n} \operatorname{ch} \varphi_2 \end{aligned} \right\} \text{при } v = 1, 3, 5, \dots, 2n-1. \quad (\text{XIV.42})$$

Эти корни лежат на эллипсе, вычерченном в плоскости s , как следует из соотношений (XIV.42), если принять во внимание, что

$$\frac{\sigma_v^2}{\operatorname{sh}^2 \varphi_2} + \frac{\omega_v^2}{\operatorname{ch}^2 \varphi_2} = 1. \quad (\text{XIV.43})$$

Очевидно, что $\operatorname{sh} \varphi_2$ и $\operatorname{ch} \varphi_2$ являются полуосями эллипса. На рис. XIV.6 такой эллипс построен для $n = 6$ и отношения длин

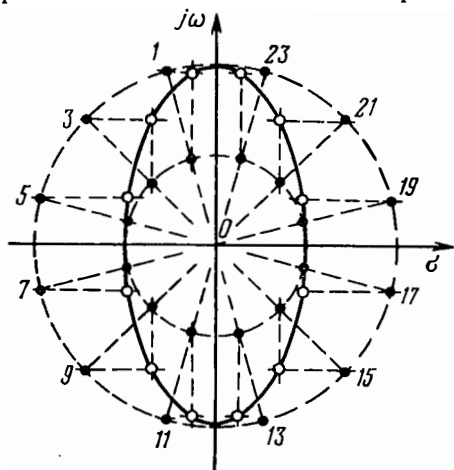


Рис. XIV.6

функции Баттерворта, изображенной на рис. XIV.3. Для значений ϵ , равных приблизительно $\frac{1}{3}$ или меньше, выражение (XIV.38) можно аппроксимировать с помощью зависимости

$$e^{\varphi_2} \approx \left(\frac{2}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (\text{XIV.44})$$

Тогда средний радиус двух окружностей на рис. XIV.6 можно представить в виде

$$r_0 \approx \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (\text{XIV.45})$$

а отношение меньшей полуоси эллипса к его большей полуоси —

$$\rho \approx \frac{\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{n}} - 1}{\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{n}} + 1}. \quad (\text{XIV.46})$$

При достаточно малых значениях ε и средних значениях n очевидно, что средний радиус может быть больше единицы, а отношение ρ почти равно единице. Тогда указанное геометрическое место точек по форме почти совпадает с окружностью, а по размерам будет больше единичной окружности. С другой стороны, при относительно малых значениях ε и больших значениях n средний радиус стремится к значению $\frac{1}{2}$, а отношение ρ становится малым.

Тогда все полюсы рассматриваемой передаточной функции располагаются внутри единичного круга и лежат вблизи мнимой оси.

Используя простую модификацию функции (XIV.28), получаем аппроксимацию прямоугольника, имеющую характер равноволновой функции за частотой среза, а не в полосе пропускания. Эта функция имеет вид

$$|Z_{12}(j\omega)|^2 = \frac{\varepsilon^2 V_n^2 \left(\frac{1}{\omega}\right)}{1 + \varepsilon^2 V_n^2 \left(\frac{1}{\omega}\right)}. \quad (\text{XIV.47})$$

Не производя замены переменной ω на $\frac{1}{\omega}$ в аргументе функции $V_n(\omega)$, появляющейся в этом выражении, можно заметить, что рассматриваемая функция является дополнительной к функции, определяемой выражением (XIV.28), так как их сумма, очевидно, равна единице. Дополнительная функция, обладающая свойством пропускать высокие частоты, обеспечивает равноволновую аппроксимацию нуля в своей полосе задерживания $-1 < \omega < 1$ и монотонную аппроксимацию единицы в полосе пропускания $|\omega| > 1$. При замене ω на $\frac{1}{\omega}$, очевидно, происходит взаимная замена областей задерживания и пропускания и появляется функция (XIV.47), которая монотонно аппроксимирует единицу и равноволново нуль в интервалах $-1 < \omega < 1$ и $|\omega| > 1$ соответственно.

На рис. XIV.7 показан график модуля функции $Z_{12}(j\omega)$, определяемой выражением (XIV.47), при тех же значениях ε и n , которые использовались для построения кривой, изображенной на рис. XIV.5. Важно отметить, что амплитуда пульсаций теперь равна ε , а не $\frac{\varepsilon^2}{2}$. Для того чтобы получить такую же пульсацию в

полосе задерживания для функции (XIV.47), какую дает функция (XIV.28) в полосе пропускания, требуется значительно меньшая величина ϵ .

Если при расчете цепей связи без потерь, нагруженных с обеих сторон на резистивные сопротивления (см. § XI.5), используются функции Баттерворта или Чебышева, целесообразно иметь в виду, что результирующие цепи всегда будут либо симметричными, либо антисимметричными. Как было показано в § XI.6, эти специальные формы цепей появляются в том случае, когда предполагаемая функция квадрата модуля имеет вид выражения (XIV.9), где $F^2(\omega)$ является квадратом нечетной или четной рациональной функции соответственно. Таким образом, очевидно, что функции Баттерворта и Чебышева нечетного порядка дают симметричные цепи, а функции четного порядка — антисимметричные.

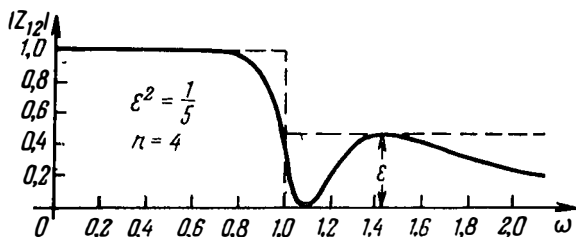


Рис. XIV.7

Соответствующие цепи без потерь, нагруженные с одной или с обеих сторон, являются неуравновешенными цепными схемами с последовательными индуктивностями и параллельными емкостями, причем общее число элементов равно порядку n аппроксимирующей функции. Применение функций Баттерворта и Чебышева приводит к одной и той же структуре цепной схемы; разница между ними заключается лишь в распределении значений элементов.

XIV.3. Асимптотические свойства функций Баттерворта и Чебышева

Целесообразно исследовать и сравнить асимптотические свойства функций Баттерворта и Чебышева, определяемых выражениями (XIV.1) и (XIV.28) соответственно, используя логарифмические шкалы для зависимой и независимой переменных. При $\omega \rightarrow \infty$ свойства функции $|Z_{12}(j\omega)|$, определяемой выражением (XIV.1), аналогичны свойствам функции $\frac{1}{\omega^n}$. Последнюю можно представить в виде потерь (в децибелах)

$$\alpha_{[\text{дБ}]} = 20 \log \omega^n, \quad (\text{XIV.48})$$

где символ «log» обозначает логарифм с основанием 10. Для независимой переменной обычно используется логарифмический масштаб с основанием 2, т. е.

$$\omega = 2^u. \quad (\text{XIV.49})$$

Здесь $u = 0$ соответствует частоте среза $\omega = 1$, а точки $u = 1, 2, \dots$ обозначают *октавы*, расположенные выше этой частоты среза.

После подстановки выражения (XIV.49) в ф-лу (XIV.48) асимптотические свойства функции Баттерворта можно оценить следующим образом:

$$\alpha_{[\text{дб}]} = 20 \log 2^{nu} = 20nu \log 2 \approx 6nu. \quad (\text{XIV.50})$$

Эта функция, как показано на рис. XIV.8а, имеет линейную асимптоту с наклоном $6n$ дб/окт.

На том же основании затухание ниже частоты среза имеет постоянную и равную нулю асимптоту. Таким образом, приближенное представление функции полных потерь, изображенной на рис. XIV.8а сплошной линией, состоит из горизонтальной оси для отрицательных значений u (октавы ниже частоты среза) и прямой линии с наклоном 6 дб/окт для положительных значений u , причем точка излома характеристики появляется на частоте среза $u = 0$.

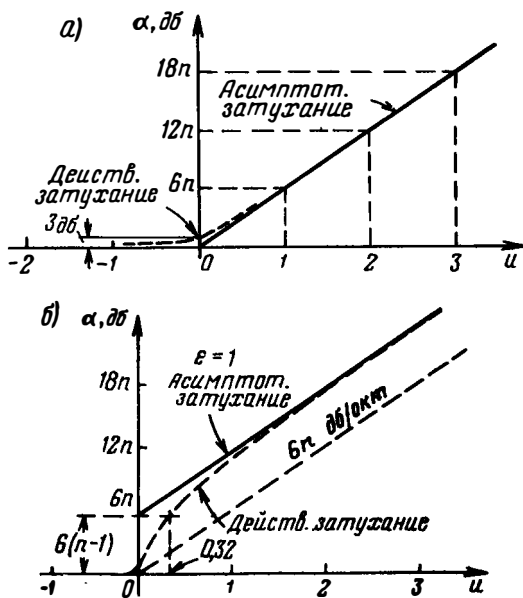


Рис. XIV.8

Это линейно-ломаное представление, по существу, отличается от кривой реальных потерь, построенной в таких же логарифмических масштабах по обеим осям, лишь вблизи точки излома, где реальные потери составляют 3 дб (независимо от порядка n), а не равны нулю. Функция реальных потерь в указанной окрестности имеет вид пунктирной кривой, показанной на том же рисунке, где линейно-ломаная аппроксимация (сплошная кривая) сглажена путем введения на частоте среза затухания 3 дб.

Аналогичное представление возможно и для функции Чебышева, определяемой выражением (XIV.28). При этом надо использовать выражения (XIV.26) и (XIV.30), с помощью которых асимптотические свойства данной функции получаются при больших значениях

ω. Таким образом, соответствующие асимптотические потери в децибелах определяются выражением

$$\alpha_{[\partial\delta]} = 20 \log (2^{n-1} \varepsilon \omega^n). \quad (\text{XIV.51})$$

Далее снова произведем изменение переменной по формуле (XIV.49), тогда

$$\alpha_{[\partial\delta]} = 20 \log 2^{nu} + 20 \log 2^{n-1} + 20 \log \varepsilon \quad (\text{XIV.52})$$

или приближенно

$$\alpha_{[\partial\delta]} \approx 6nu + 6(n-1) + 20 \log \varepsilon. \quad (\text{XIV.53})$$

Выражение (XIV.53) отличается от выражения (XIV.50) для функции Баттерворта лишь добавлением второго и третьего членов, которые являются постоянными. Поскольку $\varepsilon \leq 1$, третий член в ф-ле (XIV.53) равен нулю или представляет собой отрицательную величину; при этом второй член будет сокращаться, ибо он всегда положителен. В связи с тем что максимальные потери в полосе пропускания для функции Чебышева можно представить в виде $20 \log \sqrt{1 + \varepsilon^2} \partial\delta$, очевидно, что при $\varepsilon = 1$ пульсация составляет 3 дб. Такая весьма большая величина пульсаций в полосе пропускания допустима во многих практических случаях и появляется, как видно из выражения (XIV.53), вследствие увеличения асимптотических потерь. Для функции Чебышева достаточно высокого порядка n второй член выражения (XIV.53) компенсирует влияние третьего даже при умеренных значениях ε , несколько меньших единицы. Учитывая эти соображения, относящиеся к широкому классу практических задач, можно для асимптотических потерь записать приближенное соотношение

$$\alpha_{[\partial\delta]} \approx 6nu + 6(n-1). \quad (\text{XIV.54})$$

Графически оно представлено на рис. XIV.8б, на котором для сравнения пунктирной линией показана асимптота $6n \text{ дб/окт}$ функции Баттерворта. Превышение в $6(n-1) \text{ дб}$ функции Чебышева над функцией Баттерворта имеет важное значение в ряде практических случаев.

XIV.4. Преобразования частоты

После соответствующих преобразований независимой переменной рациональные аппроксимирующие функции, полученные для идеальной низкочастотной характеристики, изображенной на рис. XIV.1, можно использовать применительно к аналогичным высокочастотным, полосовым, заграждающим и другим более общим характеристикам фильтра. Как уже было показано, если в нормализованной низкочастотной аппроксимирующей функции заменить ω на $\frac{1}{\omega}$, то масштаб частот инвертируется относительно частоты

среза $\omega = 1$ и исходная функция будет соответствовать функции, аппроксимирующей идеальную характеристику фильтра верхних частот. Такой же простой способ преобразования пригоден для любого требуемого класса фильтров.

Поскольку этот процесс основан на использовании лишь независимой переменной, он не оказывает влияния на допуски, в пределах которых соответствующая функция аппроксимирует данную идеальную характеристику. Таким образом, любая амплитуда пульсаций низкочастотной аппроксимирующей функции остается неизменной, когда эта функция преобразуется посредством соответствующего изменения независимой переменной в какую-либо другую функцию¹.

Более того, подобное изменение переменной осуществимо таким образом, что его влияние на данную низкочастотную аппроксимирующую функцию (ей соответствует так называемая *цепь-прототип нижних частот*) можно выразить непосредственно через модификации в ее структуре и значениях элементов, которые указанное влияние обуславливает. Это позволяет полностью устранить необходимость образования соответствующей полосовой или другой сложной аппроксимирующей функции и применения метода реализации, требующего значительно более громоздких расчетов.

Предположим, что комплексная частота для функции нижних частот обозначена через $\lambda = \bar{\sigma} + j\bar{\omega}$, а для преобразованной функции — через $s = \sigma + j\omega$. Необходимо найти соотношение между λ и s , которое преобразует данную низкочастотную функцию $\bar{Z}(\lambda)$ в аппроксимирующую функцию $Z(s)$, соответствующую любому интересующему нас классу фильтров. Это соотношение, как оказывается, имеет простой вид

$$\lambda = z(s), \quad (\text{XIV.55})$$

где $z(s)$ — реактивная функция. Нетрудно понять, почему эта простая и хорошо известная функция удовлетворяет всем указанным выше требованиям.

Две точки в плоскости λ , а именно нуль и бесконечность, представляют особый интерес. Точка $\lambda = 0$ соответствует средней частоте полосы пропускания низкочастотной функции, а окрестность точки $\lambda = \infty$ — тому поведению низкочастотной аппроксимирующей функции, которое характеризуется ее асимптотическими свойствами. Функция $\lambda = z(s)$ необходима для того, чтобы эти два значения λ соответствовали некоторым заданным точкам на мнимой оси плоскости s .

¹ Несмотря на то что выраженная здесь точка зрения подтвердилась во многих практических применениях, встречаются случаи, когда изменение аппроксимирующей функции по оси абсцисс, обусловленное преобразованием независимой переменной, вызывает возражения. При таких условиях приходится решать задачу аппроксимации для требуемого частного класса фильтров [34].

Таким образом, преобразование низкочастотной характеристики в высокочастотную с помощью переменной $\lambda = \frac{1}{s}$ приводит к взаимной замене начала координат и бесконечно удаленной точки. При этом точка $\lambda = 0$ преобразуется в точку $s = \infty$, а $\lambda = \infty$ — в $s = 0$. Центр полосы пропускания аппроксимирующей функции оказывается в точке $s = \infty$, ее асимптотическое свойство определяется при $s = 0$. Низкочастотная характеристика превращается в высокочастотную.

Если требуется преобразовать низкочастотную характеристику в полосовую, то, следовательно, необходимо, чтобы функция $z(s)$ имела нуль при конечном, отличном от нуля значении s и полюсы (точки, где $\lambda = \infty$) — в точках $s = 0$ и $s = \infty$. Реактивная функция, характеризующая последовательный LC контур, обладает именно такими свойствами. В частности, известная функция

$$\lambda = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s} \quad (\text{XIV.56})$$

преобразует точку $\lambda = 0$ в две точки на мнимой оси $s = \pm j\omega_0$ и точку $\lambda = \infty$ — в точки $s = 0$ и $s = \infty$. Поэтому выражение (XIV.56) дает преобразование низкочастотной характеристики в полосовую.

Преобразование низкочастотной характеристики в характеристику заграждающую, очевидно, можно осуществить, используя выражение, обратное выражению (XIV.56), а именно

$$\lambda = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad (\text{XIV.57})$$

в результате которого точка $\lambda = 0$ преобразуется в $s = 0$ и $s = \infty$, а точка $\lambda = \infty$ — в $s = \pm j\omega_0$.

Преобразование низкочастотной характеристики в низкочастотно-полосовую характеристику (low-and-bandpass) осуществляется с помощью реактивной функции

$$\lambda = \frac{s(s^2 + \omega_0^2)}{(s^2 + \omega_\infty^2)}, \quad (\text{XIV.58})$$

при этом точка $\lambda = 0$ преобразуется в три точки $s = 0$ и $s = \pm j\omega_0$, а точка $\lambda = \infty$ — также в три точки $s = \infty$ и $s = \pm j\omega_\infty$. Таким образом, можно легко выразить преобразование низкочастотной аппроксимирующей характеристики в характеристику любого требуемого класса фильтров.

Все эти преобразования обладают общим свойством, заключающимся в том, что модификации цепи, которым они соответствуют, непосредственно очевидны, поскольку мы уже знакомы с синтезом реактивных функций. Нетрудно заметить, что преобразование низкочастотной характеристики в полосовую, определяемое выра-

жением (XIV.56), превращает индуктивность с реактивным сопротивлением $L\lambda$ в последовательный LC контур, определяемый реактивной функцией (XIV.56) с уровнем сопротивления, умноженным на L . Оно, кроме того, превращает емкость с реактивной проводимостью $C\lambda$ в параллельный LC контур, определяемый функцией реактивной проводимости (XIV.56), с уровнем проводимости, умноженным на C . Другими словами, каждая индуктивность низкочастотной цепи-прототипа со значением L , $гн$, соединяется последовательно с емкостью $\frac{1}{L\omega_0^2} \phi$, а емкость низкочастотной цепи-прототипа со значением $C \phi$ соединяется параллельно с индуктивностью $\frac{1}{C\omega_0^2} гн$.

Аналогично преобразование низкочастотной характеристики в характеристику загоражающую, определяемое выражением (XIV.57), можно рассматривать непосредственно через модификации низкочастотной цепи-прототипа. Поскольку преобразующая функция в данном случае обратна функции (XIV.56), все операции, по существу, сохраняются прежними, как и для случая преобразования низкочастотной характеристики в полосовую, за исключением того, что здесь необходимо поменять местами L и C . В частности, индуктивность L низкочастотной цепи становится емкостью $\frac{1}{L} \phi$, подключенной параллельно с индуктивностью $\frac{L}{\omega_0^2} гн$, а емкостью C низкочастотной цепи становится индуктивностью $\frac{1}{C} гн$, соединенной последовательно с емкостью $\frac{C}{\omega_0^2} \phi$.

Более сложные преобразования [например, (XIV.58) и другие], тем не менее, легко объяснить, используя требуемые модификации цепи. При этом соответствующие функции следует рассматривать просто как функции реактивного сопротивления или реактивной проводимости, уровни сопротивления или проводимости которых нужно умножить на значения индуктивности L и емкости C низкочастотного прототипа.

В заключение необходимо установить, каковы наиболее важные свойства этих преобразований и что происходит на частотах среза. Если выразить преобразование низкочастотной характеристики в полосовую, определяемое выражением (XIV.56), в значениях переменной на мнимой оси, то оно будет иметь вид

$$\bar{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}. \quad (\text{XIV.59})$$

График указанного преобразования дан на рис. XIV.9. Частота среза низкочастотной функции обозначена через ω_c , а частоты сре-

за, соответствующие полосовой характеристике, — через ω_1 и ω_2 . Эти частоты можно выразить через $\bar{\omega}_c$ и ω_0 , используя корни уравнения

$$\omega^2 - \bar{\omega}_c \omega - \omega_0^2 = 0, \quad (\text{XIV.60})$$

которое получается, если положить в выражении (XIV.59) $\bar{\omega} = \bar{\omega}_c$. Обратившись вновь к рис. XIV.9, замечаем, что корнями уравнения (XIV.60) являются $-\omega_1$ и ω_2 . Известно, что сумма их равна коэффициенту линейного члена с обратным знаком, а произведение — постоянному члену. Отсюда

$$\omega_2 - \omega_1 = \omega = \bar{\omega}_c; \quad (\text{XIV.61})$$

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2, \quad (\text{XIV.62})$$

где ω — ширина полосы пропускания.

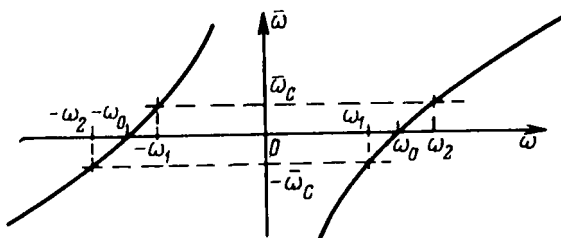


Рис. XIV.9

Выражение (XIV.61) показывает, что преобразование (XIV.56) или (XIV.69) обладает свойством инвариантности ширины полосы пропускания фильтра. Из выражения (XIV.62) вытекает, что арифметически симметричная низкочастотная характеристика фильтра (которая является четной функцией от $\bar{\omega}$) преобразуется в полосовую характеристику, имеющую геометрическую симметрию относительно средней частоты ω_0 , поскольку любые две частоты, геометрическое среднее которых равно ω_0 , соответствуют паре значений $\bar{\omega}$ типа $\pm \bar{\omega}_c$.

При использовании подобного преобразования в каком-либо конкретном примере необходимо прежде всего так изменить масштаб частоты низкочастотной цепи-прототипа, чтобы получить частоту среза $\bar{\omega}_c$, равную ширине требуемой полосы пропускания. Затем, подбирая предварительно заданные значения ω_1 и ω_2 , соответствующие данной ширине полосы [ф-ла (XIV.61)], вычислить из выражения (XIV.62) величину ω_0^2 . На этом операция преобразования заканчивается.

В более сложном преобразовании низкочастотной характеристики в низкочастотно-полосовую, определяемом выражением (XIV.58), которое на мнимой оси имеет вид

$$\bar{\omega} = \frac{\omega (\omega^2 - \omega_0^2)}{\omega^2 - \omega_\infty^2}, \quad (\text{XIV.63})$$

частоту среза преобразованной низкочастотной характеристики можно обозначить через ω_1 , а частоты среза преобразованной полосовой характеристики — через $\omega_2 < \omega_3$. Из графика, подобного представленному на рис. XIV.9, очевидно, что величины ω_1 , ω_3 и $-\omega_2$ являются корнями уравнения

$$\omega^3 - \bar{\omega}_c \omega^2 - \omega_0^2 \omega + \bar{\omega}_c \omega_\infty^2 = 0. \quad (\text{XIV.64})$$

Используя связь между коэффициентами и корнями уравнений, можно записать:

$$\omega_3 - \omega_2 + \omega_1 = \bar{\omega}_c; \quad (\text{XIV.65})$$

$$\omega_1 \omega_2 - \omega_1 \omega_3 + \omega_2 \omega_3 = \omega_0^2; \quad (\text{XIV.66})$$

$$\omega_1 \omega_2 \omega_3 = \bar{\omega}_c \omega_\infty^2. \quad (\text{XIV.67})$$

Первое из этих выражений снова указывает на свойство инвариантности полной ширины полосы, в общем случае справедливое для такого рода преобразований [16, 35]. Метод определения того или иного требуемого преобразования предполагает нормализацию масштаба частотной оси низкочастотной цепи-прототипа относительно значения $\bar{\omega}_c$, равного к о м б и н и р о в а н н о й ш и р и н е полосы нужной преобразованной характеристики фильтра. Далее, подбирая значения частот среза ω_1 , ω_2 и ω_3 , удовлетворяющие этой ширине полосы [см. выражение (XIV.65)], получают из выражений (XIV.66) и (XIV.67) соответствующие значения параметров ω_0^2 и ω_∞^2 . В результате осуществляется необходимое преобразование, определяемое выражением (XIV.58).

XIV.5. Равноволновые характеристики в полосе пропускания и в полосе задерживания

Полином Чебышева позволяет получить низкочастотную аппроксимирующую функцию равных пульсаций (равноволновую) в полосе пропускания или в полосе задерживания. Однако, применяя лишь один такой полином, нельзя добиться равноволнового поведения в обоих интервалах аппроксимации. В отличие от монотонных характеристик, характеристика равных пульсаций лишь в одном из указанных интервалов приводит к значительному улучшению возможности общей аппроксимации рациональной функцией заданной сложности. Поэтому интуитивно чувствуется, что воз-

можно дальнейшее улучшение аппроксимации, если обеспечить такое поведение функции во всем интервале частот. Соответствующие способы достижения такого результата рассматриваются в следующих параграфах данной главы. Математические основы одного из них были впервые сформулированы Кауэром [36] и подробно изложены в работах [20, 37].

Функцию $F(\omega)$ в выражении (XIV.9) удобно представить в виде

$$F(\omega) = \frac{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2n-1}^2 - \omega^2)}{(1 - \omega_1^2 \omega^2)(1 - \omega_3^2 \omega^2) \dots (1 - \omega_{2n-1}^2 \omega^2)} \quad (\text{XIV.68})$$

либо в виде

$$F(\omega) = \frac{\omega(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_4^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2n}^2 - \omega^2)}{(1 - \omega_2^2 \omega^2)(1 - \omega_4^2 \omega^2) \dots (1 - \omega_{2n}^2 \omega^2)}. \quad (\text{XIV.69})$$

Первая функция является четной, а вторая нечетной. Каждая из них имеет нули на оси ω в интервале $0 < \omega < 1$ и полюсы в интервале $1 < \omega < \infty$, причем нули и полюсы соответственно расположены в сопряженных точках на этой оси. Для обеих функций справедливо соотношение

$$F\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{F(\omega)}, \quad (\text{XIV.70})$$

согласно которому их значения в сопряженных точках на оси ω являются взаимно сопряженными. Такую функцию можно рассматривать как функцию, колеблющуюся относительно нуля в интервале $0 < \omega < 1$ и относительно бесконечно удаленной точки в интервале $1 < \omega < \infty$. Если нули в точках $\omega_1, \omega_3, \dots$ или в точках $\omega_2, \omega_4, \dots$ расположены таким образом, что функция обладает характеристикой равных пульсаций в первом из указанных интервалов, то она автоматически обладает такой же характеристикой и во втором. При этом подразумевается, что во втором интервале равны все ее минимальные значения. После подстановки в выражение (XIV.9) такая функция¹, очевидно, дает сопротивление $Z_{12}(s)$, модуль которого обладает требуемым свойством аппроксимирующей равноволновой функции и в полосе пропускания, и в полосе задерживания.

На рис. XIV.10 дан график, показывающий общий характер изменения четной функции, определяемой выражением (XIV.68), для случая $n = 2$. Критические частоты ω_1 и ω_3 являются нулями полосы пропускания, а частоты $\frac{1}{\omega_1}$ и $\frac{1}{\omega_3}$ — полюсами полосы задерживания. Частоты p_0, p_2, p_4 являются точками максимального отклонения в полосе пропускания, а обратные им значения — минимумами функции в полосе задерживания. Другими словами,

¹ Впервые она была предложена Е. Нортоном [37].

частоты $\frac{1}{p_0}, \frac{1}{p_2}$ представляют точки максимального отклонения функции от бесконечности. Максимальное отклонение от нуля в полосе пропускания обозначено через ε и означает погрешность, с которой эта функция аппроксимирует нуль в указанном интервале. Минимумы функции в полосе задерживания имеют общее значение $\frac{1}{\varepsilon}$. Наименьшая частота максимального отклонения в полосе пропускания $p_0 = 0$, а наибольшая $p_{2n} = p_4$.

Нечетная функция, определяемая выражением (XIV.69), отличается от четной лишь тем, что точка $\omega = 0$ является нулем, а не

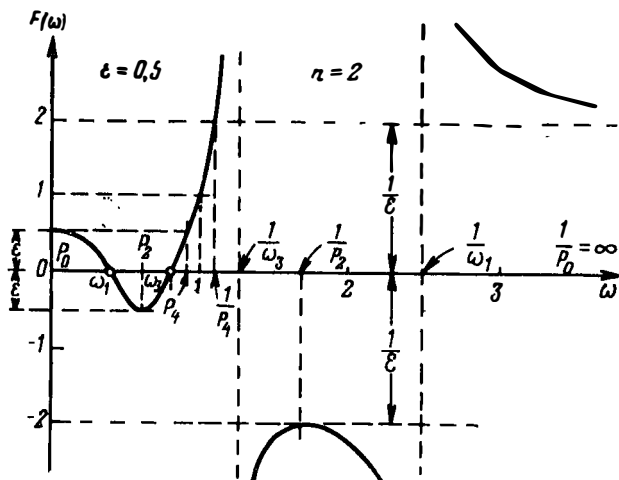


Рис. XIV.10

точкой максимального отклонения. Остальные свойства этой функции совпадают со свойствами функции, изображенной на рис. XIV.10.

Несмотря на то, что точка $\omega = 1$ является номинальной границей между полосой пропускания и полосой задерживания, можно заметить, что интервал $p_{2n} < \omega < \frac{1}{p_{2n}}$ является переходным, не относящимся ни к полосе пропускания, ни к полосе задерживания. Ниже его аппроксимирующая функция не превышает своей погрешности ε , а выше его обратная функция не выходит из пределов этой погрешности. Указанные интервалы и являются действительными полосами задерживания и пропускания. Вообще говоря, переходный интервал сужается при выборе функции более высокого порядка n , но он не может стать нулем для конечной цепи.

Теперь остается найти способ, позволяющий определить нули полосы пропускания ω , при которых функция $F(\omega)$ является равноволновой в интервале $0 < \omega < 1$. Для функций низкого по-

рядка с этой целью удобно воспользоваться методом последовательных приближений. Можно найти и точный аналитический метод, если применить преобразование независимой переменной ω , при котором функция становится периодической, т. е. использовать подстановку, аналогичную $\omega = \cos \varphi$, в результате которой полином $V_n(\omega)$ преобразуется в периодическую функцию $\cos n \varphi$. Ясно, что некоторая периодическая функция (подобная синусоиде) с амплитудой, равной p_{2n} (эффективная частота среза), даст требуемый результат.

Эта функция, как сейчас будет показано, представляет собой эллиптическую функцию Якоби $\operatorname{sn} u$, где u обозначает новую независимую переменную. По форме такая эллиптическая синусоидальная функция не отличается от тригонометрической синусоидальной, но существенная разница состоит в том, что первая является более плоской в своей верхней части. Степень ее растяжения и уплощения (в отличие от обычной синусоиды) зависит от параметра k , называемого *модулем* эллиптической функции, который может принимать значения между 0 и 1. При $k = 0$ эллиптическая синусоидальная функция тождественна тригонометрической синусоидальной. При малых значениях аргумента функция $\operatorname{sn} u$ почти точно совпадает (а при $u = 0$ точно совпадает) с тригонометрической синусоидальной функцией независимо от значения модуля k , но вблизи максимумов и минимумов с увеличением k она все больше удлиняется и, наконец, при $k = 1$ становится бесконечно длинной (ее период бесконечен).

В общем случае можно оценить, насколько в рассматриваемой задаче необходима такая способность функции sn изменять форму. Обратимся к рис. XIV.10. Если просто требуется пара значений ω_1 и ω_3 , для которых функция $F(\omega)$ является равноволновой в интервале $0 < \omega < p_4$, то существует бесконечное число возможных решений. Если, однако, в этом интервале произвольно выбрать значение ω_3 и поставить условие, чтобы при $\omega_1 < \omega_3$ исследуемая функция являлась равноволновой, то окажется, что существует только одно возможное решение. Аналогично в случае, когда функция соответствует большему значению n , можно, зафиксировав точку ω_{2n-1} (нуль, ближайший к точке $\omega = p_2$), однозначно зафиксировать положения всех других точек ω , обуславливающих равноволновый характер функции $F(\omega)$.

Если наибольший нуль ω_{2n-1} выбран ближе к точке p_{2n} , все пульсации равноволновой функции $F(\omega)$ при данном n сдвигаются к верхнему краю полосы пропускания. В такой ситуации измененная переменная $\omega = p_{2n} \operatorname{sn} u$, необходимая для того, чтобы сделать функцию периодической функцией от u , должна, очевидно, быть более плоской в верхней части, чем это требовалось бы при более равномерных пульсациях функции $F(\omega)$.

Эллиптическую синусоидальную функцию $\operatorname{sn} u$ можно выразить через тригонометрическую синусоидальную следующим образом:

$$\operatorname{sn} u = \sin \varphi, \quad (\text{XIV.71})$$

где соотношение между переменными u и φ определяется эллиптическим интегралом первого рода

$$u(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}. \quad (\text{XIV.72})$$

Зависимость u от φ , определяемая этим интегралом, станет более понятной, если рассмотреть производную

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (\text{XIV.73})$$

Очевидно, при $k = 0$ переменные u и φ можно отождествить, и тогда из ур-ния (XIV.71) следует, что эллиптический и тригонометрический синусы совпадают. Для отличного от нуля значения k в интервале $0 < k < 1$ производная (XIV.73), тем не менее, равна единице при $\varphi = 0$. Это указывает на то, что оба указанных синуса в любом случае весьма подобны при малых значениях их аргументов. С увеличением φ до значения $\frac{\pi}{2}$ производная (XIV.73) возрастает, достигая значения $1/\sqrt{1 - k^2}$ в точке $\varphi = \frac{\pi}{2}$, после чего она вновь уменьшается до единицы при $\varphi = \pi$; затем этот цикл повторяется. Учитывая сказанное выше, легко заметить, что график зависимости u от φ имеет вид, показанный на рис. XIV.11 (для $k = 0,9$).

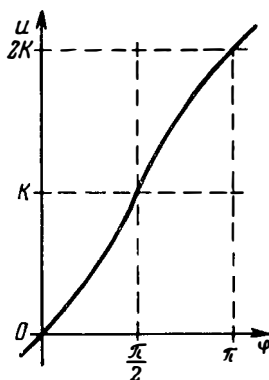


Рис. XIV.11

Величина K , совпадающая со значением u при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, называется *полным эллиптическим интегралом первого рода*. Он, очевидно, равен одной четверти периода функции sn , так как значению $4K$ соответствует угол $\varphi = 2\pi$. Наклон функции $u(\varphi)$ в точке $\varphi = \frac{\pi}{2}$ стремится к бесконечности при $k \rightarrow 1$. Отсюда для $k = 1$ величина K бесконечна, поэтому эллиптический синус имеет бесконечный период.

Значения sn и u для данных значений u находят либо по таблицам функции sn для различных значений модуля k (который обычно заменяется параметром α , связанным с k соотношением $k = \sin \alpha$), либо пользуясь таблицами эллиптического интеграла (XIV.72). Во втором случае сначала определяют φ при данном значении u и модуля k , а затем с помощью тригонометрического соотношения (XIV.71) вычисляют $\text{sn } u^1$.

¹ Для определения значений эллиптической функции Якоби можно воспользоваться таблицами Янке и Эмде [38]. Таблица, в которой эта функция выражена непосредственно через параметр $m = k^2$, приведена в работе [39].

Соответствие между функцией sn и изменением переменной, в результате которого функция $F(\omega)$ становится периодической, можно найти, используя следующее тождество [40]:

$$\operatorname{sn}(u + u_v) \operatorname{sn}(u - u_v) = \frac{\operatorname{sh}^2 u - \operatorname{sn}^2 u_v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 u_v}. \quad (\text{XIV.74})$$

Действительно, если принять $p_{2n} = \sqrt{k}$ так что изменение переменной будет

$$\omega = \sqrt{k} \sin \varphi = \sqrt{k} \operatorname{sn} u; \quad (\text{XIV.75})$$

$$\omega_v = \sqrt{k} \sin \varphi_v = \sqrt{k} \operatorname{sn} u_v, \quad (\text{XIV.76})$$

то можно заметить, что типичная пара множителей в выражении (XIV.68) принимает вид

$$\frac{(\omega^2 - \omega_v^2)}{(1 - \omega_v^2 \omega^2)} = \frac{k (\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u_v)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 u_v)} = k \operatorname{sn}(u + u_v) \operatorname{sn}(u - u_v). \quad (\text{XIV.77})$$

Таким образом, полное выражение для функции $F^2(\omega)$, являющейся квадратом выражения (XIV.68), преобразуется в функцию

$$G^2(u) = \prod_{\substack{\nu=1, 3, \dots, 4n-1 \\ \nu=-1, -3, \dots, -(4n-1)}} k \operatorname{sn}(u + u_\nu), \quad (\text{XIV.78})$$

где $u_{-\nu} = -u_\nu$, так что отрицательные целые значения ν в этом произведении определяют наличие множителей вида $\operatorname{sn}(u - u_\nu)$.

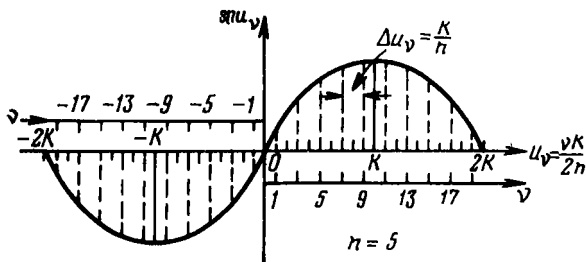


Рис. XIV.12

Если теперь выбрать значения u_ν , как показано на рис. XIV.12 (где предполагается, что $n = 5$), то очевидно, что общее количество множителей в произведении (XIV.78) образует циклическую группу. Она не изменяется, если каждое значение u заменяется его последующим значением, так как второе просто меняется местами с первым, а группа множителей в целом остается неизменной. Аналогично если u заменено на $u + \Delta u_\nu$, причем $\Delta u_\nu = u_{\nu+1} - u_\nu$, то группа множителей снова остается неизменной, за исключением перестановки порядка цикличности, ибо добавление величины Δu_ν

к u или u_v , в аргументе $(u + u_v)$ несущественно. Таким образом, установлена периодичность функции $G^2(u)$, определяемой выражением (XIV.78), и Δu_v является ее периодом.

Нетрудно убедиться, что произведение (XIV.78) содержит все множители функции $F^2(\omega)$; для этого необходимо отметить (см. рис. XIV.12), что возведение в квадрат указанных множителей приводит к двойному появлению каждого из них: один раз для точек от $v = \pm 1$ до $\pm(2n - 1)$ и второй для точек от $v = \pm(2n + 1)$ до $\pm(4n - 1)$. Если учесть, что квадрат функции, изображенной на рис. XIV.10 (при $n = 2$), дает два периода в интервале $0 < \omega < p_4$, то в общем случае очевидно, что интервал $0 < \omega < p_{2n} = \sqrt{k}$ содержит n периодов. Следовательно, функция $G^2(u)$ имеет n периодов в соответствующем интервале $0 < u < K$. Тогда каждый период оказывается равным

$$\Delta u_v = \frac{K}{n} = u_{v+1} - u_v, \quad (\text{XIV.79})$$

причем (см. рис. XIV.12)

$$u_v = \frac{vK}{2n} \quad \text{при } v = \pm 1, \pm 3, \dots \quad (\text{XIV.80})$$

Согласно выражению (XIV.76) можно записать дискретные значения

$$\omega_v = \sqrt{k} \operatorname{sn} \frac{vK}{2n} \quad \text{при } v = 1, 3, 5, \dots, 2n - 1. \quad (\text{XIV.81})$$

Значения p_v , соответствующие точкам максимального отклонения, очевидно, появляются при значениях u , расположенных в середине значений u_v , определяемых выражением (XIV.80). Отсюда имеем

$$p_v = \sqrt{k} \operatorname{sn} \frac{vK}{2n} \quad \text{при } v = 0, 2, 4, \dots, 2n. \quad (\text{XIV.82})$$

Первая из этих величин $p_0 = 0$, а последняя $p_{2n} = \sqrt{k}$, так как $\operatorname{sn} K = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Погрешность ε , как видно из рис. XIV.10, равна $F(0)$, поэтому согласно выражению (XIV.68) ее можно представить в виде

$$\varepsilon = (\omega_1 \omega_3 \dots \omega_{2n-1})^2. \quad (\text{XIV.83})$$

Определение нулей $\omega_2, \omega_4, \dots, \omega_{2n}$ нечетной функции (XIV.69) производится аналогичным способом. Здесь функция $F^2(\omega)$ имеет $(n + \frac{1}{2})$ периодов в интервале $0 < \omega_1 < \sqrt{k}$; следовательно, функция $G^2(u)$ имеет $n + \frac{1}{2}$ периодов в интервале $0 < u < K$. Отсюда один период функции $G^2(u)$

$$\Delta u_v = \frac{2K}{2n + 1}, \quad (\text{XIV.84})$$

а соответствующие значения u_v , можно найти из соотношений

$$u_v = \frac{\nu K}{2n+1} \quad \text{при } \nu = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \quad (\text{XIV.85})$$

Дискретные значения ω_v имеют вид

$$\omega_v = \sqrt{k} \operatorname{sn} \left(\frac{\nu K}{2n} + 1 \right) \quad \text{при } \nu = 2, 4, \dots, 2n, \quad (\text{XIV.86})$$

а частотами максимального отклонения являются

$$p_\nu = \sqrt{k} \operatorname{sn} \left(\frac{\nu K}{2n} + 1 \right) \quad \text{при } \nu = 1, 3, \dots, 2n+1, \quad (\text{XIV.87})$$

причем последней из них снова оказывается частота $p_{2n+1} = \sqrt{k}$.

В данном случае, чтобы найти выражение для погрешности ε [поскольку $F(0) = 0$, это не столь очевидно, как для функции (XIV.68)], прежде всего следует иметь в виду, что полином числителя функции $F^2(\omega)$ от переменной ω^2 имеет теперь степень, на единицу превышающую степень полинома знаменателя, и что коэффициент при члене с наивысшей степенью в числителе равен единице. Следовательно, полином числителя $(\varepsilon^2 - F^2)$ имеет следующий вид:

$$(p_1^2 - \omega^2)^2 (p_3^2 - \omega^2)^2 \dots (p_{2n-1}^2 - \omega^2)^2 (p_{2n+1}^2 - \omega^2), \quad (\text{XIV.88})$$

так как нули $(\varepsilon^2 - F^2)$ являются точками ε^2 функции F^2 и все они, кроме наибольшего, имеют второй порядок. Значению функции $(\varepsilon^2 - F^2)$ на нулевой частоте (которая имеет тот же знаменатель, что и функция F^2) соответствует значение ε^2 . Таким образом, находим

$$\varepsilon = (p_1 p_3 \dots p_{2n-1})^2 \sqrt{k}, \quad (\text{XIV.89})$$

причем коэффициент \sqrt{k} , как указывалось выше, равен p_{2n+1} .

При использовании этих результатов необходимо прежде всего выбрать значение $\sqrt{k} < 1$, которое равно эффективной частоте среза в полосе пропускания. Чем ближе выбранное значение к единице, тем больше будет ε при данном n или тем большее значение n должно соответствовать данному ε . Иногда, чтобы сделать обоснованный выбор, может потребоваться несколько пробных решений.

При использовании функции $F^2(\omega)$, определяемой выражением (XIV.9), достигается большая степень гибкости в расчете, если ввести дополнительный числовой коэффициент h в выражение

$$|Z_{12}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + h^2 F^2(\omega)}. \quad (\text{XIV.90})$$

Этот коэффициент играет ту же роль, что и ε из выражения (XIV.28), содержащего полином Чебышева, и не требует пояснений.

XIV.6. Использование методов Фурье

Ряд Фурье включает в себя процесс аппроксимации, с которым знакома большая часть инженеров. Поэтому задачу нахождения рациональной функции, аппроксимирующей некоторую кривую, заданную графически, можно свести к обычной операции, если преобразовать ее в эквивалентную задачу в анализе Фурье. Вместе с тем создается возможность разработки метода аппроксимации более общего характера, так как методы Фурье применимы к функциям произвольной формы, тогда как рассмотренные до сих пор специфические методы имеют очень ограниченное применение.

Главным соотношением в процессе получения требуемого результата является полином Чебышева, определяемый выражением (XIV.13), ибо он позволяет связать конечные полиномы с тригонометрическими функциями. Однако этого полинома недостаточно для использования методов аппроксимации конечными тригонометрическими полиномами, так как здесь необходимо, чтобы заданная функция была периодической, в то время как функции, которые мы намерены использовать, большей частью являются аperiodическими. Эта трудность, как будет показано, устраняется путем выбора соответствующего преобразования независимой переменной.

Если в уравнении

$$V_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad (\text{XIV.91})$$

сделать обычную подстановку

$$x = \cos \varphi \quad (\text{XIV.92})$$

и получить полином Чебышева в форме

$$V_n(x) = \cos n\varphi, \quad (\text{XIV.93})$$

то станет ясно, что тригонометрический полином

$$f(\varphi) = c_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + \dots + a_n \cos n\varphi \quad (\text{XIV.94})$$

эквивалентен обычному полиному от x вида

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n. \quad (\text{XIV.95})$$

Полином (XIV.94) можно привести к полиному (XIV.95) и наоборот. Другими словами, можно вычислить коэффициенты b_0, \dots, b_n полинома (XIV.95), используя подстановку (XIV.93) в выражение (XIV.94) (т. е. подставив в каждый член, содержащий $\cos v\varphi$, полином от x) и группируя коэффициенты с одинаковыми степенями x . С другой стороны, можно вычислить коэффициенты a_0, \dots, a_n путем подстановки в выражение (XIV.95) $\cos \varphi$ вместо x и замены степени $\cos \varphi$ на косинусы кратных углов, а затем группируя коэффициенты при $\cos v\varphi$ ($v = 0, 1, \dots, n$).

Таким образом, полином Чебышева является средством однозначного перехода от степенного полинома к конечному тригонометрическому и наоборот, причем соотношение (XIV.92) связывает

переменные в указанных полиномах. Степень n полинома от x становится наибольшим целым множителем переменной φ тригонометрического полинома, и, следовательно, оба полинома всегда имеют одинаковое число членов.

Теперь можно найти соотношение между переменной x и частотой ω , которое имеет вид

$$x = \frac{1 - \omega^2}{1 + \omega^2}; \quad \omega^2 = \frac{1 - x}{1 + x}. \quad (\text{XIV.96})$$

Отсюда, используя подстановку (XIV.92), получаем следующую формулу для связи величин ω и φ :

$$\omega = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}; \quad \varphi = 2 \operatorname{arctg} \omega. \quad (\text{XIV.97})$$

Как было показано в § VIII.5 [см. выражения (VIII.114) и (VIII.115)], это преобразование эквивалентно преобразованию

$$\frac{1 - j\omega}{1 + j\omega} = \frac{1 - s}{1 + s} = e^{-j\varphi} = w, \quad (\text{XIV.98})$$

которое отображает правую половину плоскости s на внутреннюю часть единичного круга в плоскости w (см. рис. VIII.9), причем граница круга соответствует мнимой оси плоскости s . Один обход вдоль единичной окружности в направлении по часовой стрелке, начиная от точки $w = \pm 1$, эквивалентен повороту мнимой оси от точек $s = 0$ и $s = j$ и далее через точку $s = \infty$ вдоль отрицательной полуоси вновь в точку $s = 0$. Тем временем переменная φ изменяется от 0 до 2π . Подобное отображение позволяет осуществить переход от аperiодической функции (от переменной ω) к периодической функции (от переменной φ).

Рисунок VIII.10, где дано непосредственное сравнение некоторых основных точек на осях ω и φ , проливает дополнительный свет на это преобразование независимой переменной. Нетрудно заметить, что начала координат $\omega = 0$ и $\varphi = 0$ совпадают, точкам $\omega = \pm 1$ соответствуют $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, а точкам $\omega = \pm \infty$ — $\varphi = \pm \pi$.

В начале аппроксимации функцию от ω , заданную графически (которую желательно представить как отношение полиномов от ω^2), необходимо снова перечертить в виде функции от φ . Этот этап называется преобразованием данной функции из области ω в область φ . Он осуществляется непосредственно — необходимо просто перенести координаты точек шкалы ω в координаты соответствующих точек шкалы φ , вычисляя указанные значения ω и φ по ф-лам (XIV.97). Значения ординат для обоих масштабов одинаковы, однако точки, при которых появляются эти ординаты, оказываются различными для обоих масштабов. Функция изменяется лишь в горизонтальном или продольном направлении (вдоль оси независимой переменной), т. е. как бы растягивается или сжимается. Характер поведения вдоль оси ординат не изменяется, как это всегда

имеет место при изменении независимой переменной (подобно нормализации частоты или преобразованию низкочастотной характеристики в полосовую и т. д.).

Далее, в области φ заданную функцию необходимо аппроксимировать, используя ряд косинусов, например ряд (XIV.94), имеющий конечное число членов. Функция должна быть, безусловно, четной относительно точки $\varphi = 0$. Это следует также из того обстоятельства, что результирующая аппроксимирующая функция [согласно преобразованиям (XIV.92) и (XIV.96)] изменяется в зависимости от ω^2 подобно модулю или вещественной части сопротивления. Если же данная функция от ω является нечетной подобно тангенсу фазового угла (см. § VIII.9 и VIII.10), ее можно в самом начале процесса разделить на ω с тем, чтобы получить четную функцию, а в результирующей рациональной аппроксимирующей функции вновь учесть коэффициент ω . Таким образом, описываемый метод можно применять как к нечетным, так и к четным функциям, несмотря на то, что сам по себе процесс аппроксимации ограничивается четными функциями.

При определении тригонометрического полинома (XIV.94) необходимо использовать такое число членов n , какое позволяет удовлетворить заданным требованиям к погрешности. При этом можно воспользоваться многими приемами, разработанными для анализа Фурье и связанных с ним задач. Когда найдена приемлемая тригонометрическая аппроксимация, полином Чебышева используют для перехода к полиномиальной форме (XIV.95), как объяснялось выше, и, наконец, с помощью соотношения (XIV.96) получают следующую рациональную функцию от ω^2 :

$$F(\omega^2) = \frac{A_0 + A_1\omega^2 + A_2\omega^4 + \dots + A_n\omega^{2n}}{(1 + \omega^2)^n}. \quad (\text{XIV.99})$$

Эта функция аппроксимирует исходную функцию от ω с теми же допусками относительно ординат, которые были получены в тригонометрической аппроксимации в области φ .

Несмотря на отсутствие каких-либо принципиальных возражений против использования той формы полинома знаменателя, которую обеспечивает описанный метод для рациональной аппроксимирующей функции (XIV.99), существуют две основные причины, требующие снятия с него ограничений, накладываемых такой формой. Во-первых, если заданная функция (XIV.99) является вещественной частью или модулем, она дает комплексную функцию с полюсом n -го порядка в точке $s = -1$. Эта функция непригодна, если искомая функция должна соответствовать RC цепи. Во-вторых, интуитивно чувствуется, что ограничения, налагаемые на полюсы функции в этом весьма специфическом случае, серьезно сужают ее аппроксимационные возможности на мнимой оси для любой заданной степени полинома.

Можно более просто оценить влияние знаменателя выражения (XIV.99), если предположить, что он имеет общую форму $B_0 +$

$+ B_1\omega^2 + B_2\omega^4 + \dots + B_n\omega^{2n}$; тогда создается возможность улучшения аппроксимации рациональной функции $F(\omega^2)$ за счет появления n дополнительных произвольных постоянных. Выбрав априори в соответствии с описанным методом знаменатель вида $(1 + \omega^2)^n$, мы уже в самом начале, по-видимому, наполовину сокращаем возможности аппроксимации рассматриваемой функции. При этом либо необходимо знать, что дает такая жертва в смысле компенсации ее преимуществами (с тем, чтобы извлечь какую-либо выгоду), либо следует так изменить процедуру, чтобы предотвратить указанную трудность. Ниже рассматривается каждая из этих идей.

- Чтобы предотвратить появление функции (XIV.99), предположим, что задан график функции $G(\varphi)$, имеющей вид

$$G(\varphi) = \frac{G_1(\varphi)}{G_2(\varphi)}. \quad (\text{XIV.100})$$

Такой специфический способ определения функций $G_1(\varphi)$ и $G_2(\varphi)$, который, как предполагается, осуществляется графически, повышает гибкость и аппроксимационные возможности описываемого метода. Обе функции можно теперь аппроксимировать тригонометрическими полиномами $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ соответственно и преобразовывать их описанным выше методом в функции $F_1(\omega^2)$ и $F_2(\omega^2)$, имеющие вид

$$F_1(\omega^2) = \frac{A_0 + A_1\omega^2 + \dots + A_n\omega^{2n}}{(1 + \omega^2)^n}; \quad (\text{XIV.101})$$

$$F_2(\omega^2) = \frac{B_0 + B_1\omega^2 + \dots + B_n\omega^{2n}}{(1 + \omega^2)^n}. \quad (\text{XIV.102})$$

Отношение этих функций дает рациональную аппроксимирующую функцию

$$F(\omega^2) = \frac{F_1(\omega^2)}{F_2(\omega^2)} = \frac{A_0 + A_1\omega^2 + \dots + A_n\omega^{2n}}{B_0 + B_1\omega^2 + \dots + B_n\omega^{2n}}, \quad (\text{XIV.103})$$

представляющую требуемое решение.

Преимущество такой модификации в данном случае полностью обусловлено возможностями, заложенными в выражении (XIV.100). Прежде всего, оказывается, что существует неограниченное число пар функций G_1 и G_2 и, следовательно, указанный метод приобретает значительную гибкость. Кроме того, любые характеристики функции $G(\varphi)$, усложняющие ее аппроксимацию (например, внезапные скачки большой величины), могут быть распределены между функциями G_1 и G_2 , так, чтобы уменьшить нагрузку на каждую. Если, скажем, функция $G(\varphi)$ является характеристикой фильтра нижних частот, амплитуда которой должна уменьшиться от 1 на частоте среза до допустимого значения $\frac{1}{100}$, функция G_1 может из-

менить свое значение в этой точке от 1 до $\frac{1}{10}$, тогда как функция

G_2 изменится от 1 до 10. Таким образом, отношение 100:1, соответствующее функции G , достигается лишь при отношении 10:1 отдельно в функциях G_1 и G_2 .

Для эффективного использования преимущества представления (XIV.100) требуются опыт, некоторая изобретательность и немного эксперимента. Однако должно быть логически ясно, что при этом значительно возрастает аппроксимирующая способность заданной сложной функции. Более важным является то, что результат показывает возможность решения задачи аппроксимации при наличии известных ограничений, касающихся положения полюсов рассматриваемой функции цепи, как, например, в случае сопротивлений RC цепей, полюсы которых должны лежать на отрицательной вещественной полуоси.

При заданных фиксированных положениях полюсов в начале процесса необходимо зафиксировать функцию $F_2(\omega^2)$ из выражения (XIV.102), и следовательно, зафиксировать в области φ функцию $f_2(\varphi)$, которая при таком подходе к задаче отождествляется с функцией $G_2(\varphi)$. Посредством требуемой функции $G(\varphi)$ можно получить график функции $G_1(\varphi)$, определяемой выражением (XIV.100). Последняя аппроксимируется полиномом $f_1(\varphi)$ и преобразуется в функцию $F_1(\omega^2)$, как указывалось выше. Поскольку степень полинома $f_1(\varphi)$ не может превышать степени полинома $f_2(\varphi)$, с которого начинается расчет, нельзя свободно выбирать столько членов полинома, сколько может понадобиться для получения нужной аппроксимации функции $G_1(\varphi)$, если не изменить числа полюсов, выбранных для функции $F_2(\omega^2)$. Хотя данное обстоятельство создает некоторое неудобство при использовании изложенного метода, предварительное размещение полюсов функции возможно, и, несмотря на такое весьма жесткое ограничение, требуемую характеристику можно аппроксимировать с произвольной точностью.

Этот результат относится к методу предварительной коррекции заданной функции сопротивления с учетом эффекта паразитных потерь, рассмотренного в § XII.6. Там было установлено, что близость полюсов к мнимой оси накладывает ограничение на указанный метод. Возможность выбора расстояний, на которые полюсы могут отстоять влево от мнимой оси, полностью снимает это ограничение и позволяет производить предварительную коррекцию при любых нормальных условиях, если желательно пересмотреть задачу аппроксимации. Более того, может возникнуть необходимость принять реализацию, содержащую увеличенное число элементов, соответствующее увеличению числа необходимых полюсов из-за ограничения, накладываемого на их положение.

Следовательно, мы приходим к важному выводу о том, что для соблюдения уточненных требований при расчете фильтров и других цепей не всегда требуются индуктивные элементы с очень низкими паразитными потерями (или весьма высокими значениями доброт-

ности Q). Поскольку резистивное сопротивление может рассматриваться как вырожденная форма индуктивного элемента с нулевой добротностью и поскольку даже в этом худшем случае (RC цепь) можно, тем не менее, аппроксимировать требуемую характеристику с произвольной степенью точности, то же самое, наверняка, остается в силе применительно к индуктивным элементам с отличными от нуля, но малыми добротностями. Разумеется, должно появиться стремление скомпенсировать паразитные потери усилением (посредством электронных ламп или транзисторов), и, кроме того, нужно быть готовым заплатить за возможность применения произвольной индуктивности с низкой добротностью введением в цепь большего общего количества элементов.

В этом методе возможен и другой произвольный выбор, который следует рационально использовать. Уже указывалось, что частоты $\omega = \pm 1$ соответствуют точкам $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$. На положительной полу-

оси φ точка $\frac{\pi}{2}$ находится посередине между двумя крайними точками оси. На положительной полуоси ω точка $\omega = 1$ располагается на единичном расстоянии от левого конца оси и бесконечно далеко от ее правого конца. В самом начале процесса необходимо так нормализовать шкалу ω , чтобы существенные изменения рассматриваемой функции происходили вблизи точки $\omega = 1$ и чтобы они отсутствовали при значениях ω , значительно больших единицы, так как эта часть шкалы ω соответствует сильно сжатой шкале φ . Любому умеренному изменению данной функции при значениях ω , больших единицы, соответствуют весьма резкие изменения функции в области φ .

Использование описанного метода для расчета характеристик идеального фильтра нижних частот в предположении, что частота среза находится в точке $\omega = 1$ (см. рис. XIV.1), дает равномерную прямоугольную волну (плюс постоянная) в области φ и, следовательно, обеспечивает наиболее выгодный выбор. В области ω функция с геометрической симметрией относительно точки $\omega = 1$ после перехода в область φ имеет арифметическую симметрию относительно точки $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Если построить график функции в зависимости от логарифмической переменной u , определяемой выражением (XIV.49), причем $\omega = 1$ соответствует $u = 0$, то четная функция от u становится четной функцией от φ относительно точки $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Идеальная полосовая характеристика удачно нормализуется и дает такой тип симметрии. Иногда может оказаться необходимым произвести несколько нормализаций данной шкалы частот, прежде чем удастся получить в области φ функцию, которая наиболее пригодна для тригонометрической аппроксимации.

XIV.7. Аппроксимация полубесконечными отрезками [33]

На основе выводов § XIV.3, касающихся асимптотических свойств функции Баттерворта, удалось разработать крайне простой и эффективный метод получения рациональной аппроксимирующей функции в форме выражения (XIV.103) по заданному графику модуля требуемого сопротивления при помощи логарифмических шкал, изображенных на рис. XIV.8а. Если применить тот же метод к функции Баттерворта порядка n со срезом на частоте $\omega = \omega_v$

$$B_v^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_v}\right)^{2n}}} \quad (\text{XIV.104})$$

и по аналогии с выражением (XIV.49) записать

$$\omega_v = 2^{u_v}, \quad (\text{XIV.105})$$

то соответствующая функция потерь согласно обобщенной формуле (XIV.50) принимает вид

$$\alpha_v^{(n)} \approx \begin{cases} 6n(u - u_v) & \text{при } u > u_v; \\ 0 & \text{при } u < u_v. \end{cases} \quad (\text{XIV.106})$$

Произвольную функцию потерь $\alpha(u)$, очевидно, можно аппроксимировать суммой компонент $\alpha_v^{(n)}$ при соответственно выбранных значениях u_v и n . Это объясняется тем, что любая аппроксимация данной функции ломаной линией, состоящей из отрезков прямой с положительным или отрицательным наклоном (равным целому числу, кратному 6 *дб/окт*), эквивалентна сумме функций вида (XIV.106), причем отрезок с отрицательным наклоном соответствует величине, обратной выражению (XIV.104). Поскольку сумма функций, подобных (XIV.106), появляется при переходе к логарифму произведения членов вида (XIV.104), или обратных им величин, очевидно, что, используя такую аппроксимацию ломаной линией, легко получить квадрат модуля требуемого сопротивления

$$|Z_{12}(j\omega)|^2 = \frac{\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^{2p}\right] \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2r}\right] \dots}{\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^{2q}\right] \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_d}\right)^{2t}\right] \dots}, \quad (\text{XIV.107})$$

где $\omega_a, \omega_b, \dots$ соответствуют точкам u_a, u_b, \dots излома функции [см. выражение (XIV.105)], а целые числа p, q, r, \dots являются соответствующими разностями и наклонов 6 *дб/окт* в смежных у каждой точки излома отрезках.

В качестве примера рассмотрим кривую потерь, изображенную на рис. XIV.13. Аппроксимация ломаной линией, показанная пунктиром, имеет изломы в точках $u_1 = 1; u_2 = 2; u_3 = 3,15; u_4 = 4,20$ и $u_5 = 5,10$; при этом для соответствующих коэффициентов Баттер-

ворта частоты среза $\omega_1 = 2$; $\omega_2 = 4$; $\omega_3 = 8,83$; $\omega_4 = 18,3$; $\omega_5 = 34,2$. Первый отрезок аппроксимирующей ломаной линии имеет наклон — 12 дб/окт. Поэтому в выражении (XIV.107) этот отрезок дает множитель знаменателя типа $1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^4$. В точке излома $u_2 = 2$ наклон ломаной линии возрастает на 12 дб/окт, чем объясняется появление в том же выражении множителя числителя $1 + \left(\frac{\omega}{4}\right)^4$. В точке $u_3 = 3,15$ наклон скачком увеличивается на 18 дб/окт, что приводит к появлению другого множителя числителя, равного

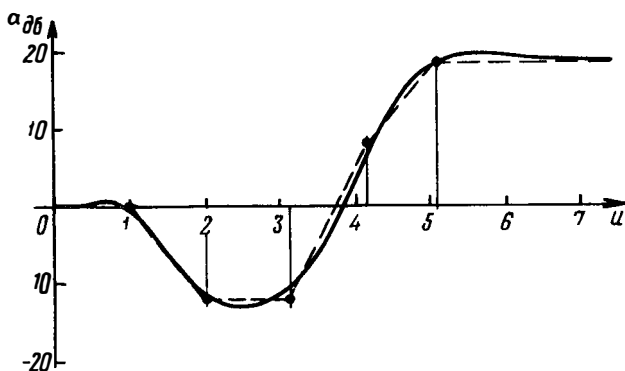


Рис. XIV.13

$1 + \left(\frac{\omega}{8,83}\right)^6$. При $u_4 = 4,20$ наклон уменьшается от 18 дб/окт до 12 дб/окт. Множитель знаменателя $1 + \left(\frac{\omega}{18,3}\right)^2$ соответствует этому изменению наклона на 6 дб/окт. Наконец, при $u = 5,10$ наклон равен нулю и появляется множитель знаменателя $1 + \left(\frac{\omega}{34,2}\right)^4$. Полное выражение для рациональной функции, аппроксимирующей квадрат модуля заданного сопротивления, принимает вид

$$|Z_{12}(j\omega)|^2 = \frac{\left[1 + \left(\frac{\omega}{4}\right)^4\right] \left[1 + \left(\frac{\omega}{8,83}\right)^6\right]}{\left[1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^4\right] \left[1 + \left(\frac{\omega}{18,3}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\omega}{34,2}\right)^4\right]} \quad (\text{XIV.108})$$

Действительная аппроксимация, соответствующая данной аппроксимирующей функции, будет более плавной, чем ломаная линия, вследствие того, что в точках излома появляются скругления порядка 3 дб (см. § XIV.3 и рис. XIV.8а).

Тот факт, что наклоны отрезков ломаной линии должны быть кратными 6 дб/окт, накладывает ограничение на метод графической аппроксимации, который, однако, становится практически неудоб-

ным лишь в некоторых крайних случаях. Например, если данная кривая имеет почти постоянный наклон на значительном интервале и если этот наклон приблизительно равен среднему между двумя целыми значениями, кратными 6 дб/окт , то необходимо последовательно чередовать наклоны, равные ближайшим наибольшему и наименьшему кратным 6 дб . Тогда ломаная линия колеблется относительно требуемого среднего наклона. Выбирая соответствующие расстояния между точками излома, можно достичь требуемой точности аппроксимации.

Этот метод лучше грубого простого метода, который использовался для определения коэффициентов рациональной функции (XIV.107). Там, хотя и берется то же количество точек на кривой, не предусматривается какого-либо контроля поведения результирующей аппроксимирующей функции в интервалах между выбранными точками. Рассмотренный же только что метод, проиллюстрированный на рис. XIV.13, позволяет осуществить такой контроль. Более того, комплексную функцию можно при этом легко получить по квадрату модуля, определяемого выражением (XIV.108), так как каждый коэффициент Баттерворта легко дает соответствующие нули или полюсы, расположенные в левой полуплоскости.

XIV.8. Использование теории потенциальной аналогии

Из теории функций комплексной переменной известно, что вещественную и мнимую части такой функции можно рассматривать как двумерные потенциальные функции, ибо они удовлетворяют уравнению Лапласа в любой области аналитичности. Кроме того, особые точки комплексной функции можно рассматривать как линии электрического тока, нормальные к любой точке комплексной плоскости, или как источники (линии распределения электрических зарядов), которые вызывают появление потенциалов, представляющих собой вещественную или мнимую часть функции [2].

Эта аналогия с теорией потенциалов¹⁾ вносит ясность в различные математические соотношения, относящиеся к теории функций, ибо она позволяет выразить свойства исследуемого объекта при помощи конкретных физических примеров. Такое представление особенно полезно в данном случае. Оно создает наглядную физическую картину не всегда ясного математического процесса и, таким образом, дает возможность интуитивно обосновать нахождение решения. Кроме того, благодаря существованию подобных аналогий удастся построить физические устройства (называемые аналоговыми вычислительными машинами), которые помогают решать задачу аппроксимации методом последовательных приближений.

¹ См. также [57] (прим. ред.).

Применительно к рациональным функциям теория потенциальных аналогий использует один из двух различных подходов. Согласно одному из них стремятся получить представление для вещественной и мнимой частей самой функции или для ее логарифма [2]¹.

При представлении вещественной части самой функции оказывается, что простые полюсы можно рассматривать как физические диполи, а вычеты комплексной функции в этих полюсах — как моменты диполей, причем их углы совпадают с углами соответствующих комплексных вычетов. Вещественная часть функции в любой точке комплексной плоскости s равна суммарному потенциалу в

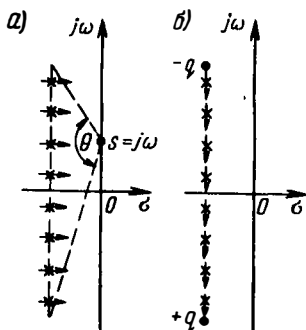


Рис. XIV.14

данной точке вследствие того, что диполи с соответствующими моментами расположены в различных полюсах. Мнимая часть функции равна суммарному потенциалу с учетом того, что каждый момент диполя поворачивается по часовой стрелке на 90° . Полюс порядка n физически представляется как $2n$ полюсов, причем можно логически обобщить такое представление диполя на симметричное расположение n пар противоположно заряженных линий.

В качестве интересного примера, иллюстрирующего, как такая физическая аналогия позволяет быстрее понять некото-

рые подчас довольно сложные соотношения, рассмотрим расположение полюсов, показанное на рис. XIV.14а, где дан ряд полюсов, расположенных на равных расстояниях вдоль линии, параллельной мнимой оси. При этом все вычеты — положительные, вещественные и равны друг другу, что показано горизонтальными стрелками, которые можно рассматривать и как моменты диполей.

Приемлемой аппроксимацией совокупности таких диполей можно считать равномерный двойной слой, потенциал которого в некоторой точке, например в точке $s = j\omega$, определяется углом θ , стягивающим этот слой. Когда точка s пересекает мнимую ось, очевидно, что угол θ большой; он становится почти постоянным при приближении s к прямой, на которой расположены полюсы. Угол быстро уменьшается и оказывается почти равным нулю при значениях $s = j\omega$, меньших или больших крайних значений распределения полюсов. Для столбика полюсов с малыми интервалами между ними, расположенного очень близко от мнимой оси, вещественная часть функции почти точно аппроксимирует идеальную характеристику фильтра нижних частот, изображенную на рис. XIV.1. Если рациональная функция является входным сопро-

¹ Предполагается, что читатель достаточно знаком с этим материалом. См. также [57] (прим. ред.).

тивлением цепи без потерь, нагруженной на резистивное сопротивление, то с учетом выводов § XI.1 очевидно, что модуль сопротивления передачи будет иметь такую характеристику фильтра нижних частот.

Когда представляет интерес мнимая часть рассматриваемого входного сопротивления как функция $s = j\omega$, то поступают следующим образом. Все диполи поворачивают по часовой стрелке на 90° , и тогда получится столбик диполей, изображенный на рис. XIV.14б; он просто эквивалентен одному отрицательному заряду $-q$ и одному положительному заряду $+q$ на концах. Потенциал вдоль мнимой оси, создаваемый этой парой противоположных зарядов, легко определяется непосредственно или вычисляется.

Если предположить, что двойной слой расположен бесконечно близко к мнимой оси, то очевидно, что вещественная и мнимая части вырождаются в идеализированные предельные формы, показанные на рис. VIII.5 (они были вычислены при помощи преобразования Гильберта). Рассматриваемая теория потенциальных аналогий позволяет быстро и просто заметить появление этих предельных форм. Кроме того, перемещая двойной слой в левую полуплоскость, можно легко получить множество неидеализированных приближенных низкочастотных характеристик, которые физически реализуемы. При этом возможную диаграмму расположения полюсов или рациональную функцию, дающую такую реализацию, можно определить непосредственно.

Из теории равномерного двойного слоя также следует, что его вид не играет роли; имеет значение лишь расположение конечных точек слоя. Отсюда столбец диполей, изображенный на рис. XIV.14а, не обязательно должен быть линейным. Полюсы (если они достаточно близко расположены друг к другу) могут быть распределены вдоль любой кривой, имеющей те же конечные точки, причем стрелки обозначают вычеты, которые остаются нормальными к этой кривой. Независимо от того, используются указанные результаты на практике или нет, они, однако, удобны тем, что позволяют оценить свойства цепи.

Потери (в неперах) и отставание по фазе (в радианах), соответствующие сопротивлению передачи, определяются вещественной и мнимой частями следующего выражения:

$$\ln \frac{1}{Z_{12}(s)} = \ln \frac{(s-s_2)(s-s_4)\dots(s-s_{2n})}{(s-s_1)(s-s_3)\dots(s-s_{2n-1})} = \alpha + j\beta \quad (\text{XIV.109})$$

для $s = j\omega$. Здесь $s_1, s_3, \dots, s_{2n-1}$ являются нулями, а s_2, s_4, \dots, s_{2n} — полюсами сопротивления передачи. Вещественная часть дает

$$\alpha = \ln \frac{1}{|s-s_1|} + \ln \frac{1}{|s-s_3|} + \dots + \ln \frac{1}{|s-s_{2n-1}|} - \\ - \ln \frac{1}{|s-s_2|} - \ln \frac{1}{|s-s_4|} - \dots - \ln \frac{1}{|s-s_{2n}|}. \quad (\text{XIV.110})$$

С точностью до постоянного множителя (который в данном случае не имеет значения) каждый член этого выражения представляет собой потенциал в переменной точке s , обусловленный равномерной линией заряда или распределением тока, нормального к плоскости s в точке s_i . Если плоскость s представляет собой полупроводящую пластину, можно моделировать эти члены игольчатыми зондами, касающимися ее в точках s_i ; при этом необходимо подавать определенную величину тока на каждый зонд в нулях s_1, \dots, s_{2n-1} и снимать ту же величину в каждом полюсе s_2, \dots, s_{2n} . Если число конечных нулей меньше числа полюсов, то несколько нулей (количество которых равно разности между числом полюсов и нулей) появляется в точке $s = \infty$. В этом случае разностный ток следует подать на пластину в некоторой удаленной точке или группе точек.

Потенциал, измеренный в любой точке полупроводящей пластины (относительно удобной удаленной точки) при помощи подвижного зонда, пропорционален функции α . Таким образом, с точностью до постоянного множителя удается физическими средствами определить затухание как функцию s для любого данного распределения полюсов и нулей [41, 42, 43].

Тот же физический метод можно использовать для представления диполей, рассмотренного выше. Два установленных близко друг к другу зонда, через один из которых ток вводится, а через другой выводится, имитируют диполь и соответствуют каждому из полюсов рациональной функции. Сила тока пропорциональна величине вычета, а угол диполя равен углу вычета. При таком расположении рациональная функция определяется своими полюсами и вычетами, а при обратном — полюсами и нулями.

В дипольном аналоге подвижный зонд получает потенциал, пропорциональный вещественной части рациональной функции (или мнимой части, если все диполи повернуты по часовой стрелке на 90°). В аналоге, эквивалентном некоторой диаграмме полюсов и нулей, подвижный зонд получает потенциал, пропорциональный логарифму модуля функции или обратной ей величине в зависимости от того, подают ли ток к пластине зонды полюсов или зонды нулей. Последнее обстоятельство фактически не имеет существенного значения, так как оно оказывает влияние лишь на алгебраический знак потенциала.

Фазовый угол или мнимую часть логарифма рациональной функции не столь легко определить посредством аналога диаграммы полюсов и нулей. Это определение основано на уравнении Коши — Римана

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{d\alpha}{d\sigma}, \quad (\text{XIV.111})$$

откуда

$$\beta = \int_0^{\omega} \frac{d\alpha}{d\sigma} d\omega. \quad (\text{XIV.112})$$

Здесь $\frac{d\alpha}{d\sigma}$ представляет собой градиент потенциала в направлении, нормальном к мнимой оси. Для любой точки на мнимой оси он пропорционален плотности тока, нормального к этой оси в данной точке. Следовательно, согласно выражению (XIV.112) фаза β для любой точки $s = j\omega$ будет пропорциональна полному току, пересекающему мнимую ось между точками $s = 0$ и $s = j\omega$.

Поскольку измерить этот ток физически невозможно в любом аналоговом устройстве, использующем полупроводящую пластину, согласно ур-нию (XIV.111) измеряется наклон функции (задержка или величина, обратная групповой скорости) с помощью пары зондов на мнимой оси, позволяющих измерить там градиент потенциала. Таким образом, применяя дополнительное интегрирующее устройство, определяют фазу β , хотя этот способ и нельзя признать удовлетворительным.

В рассматриваемом случае нас не столько интересуют сами аналоговые устройства, сколько физическая интерпретация их теоретической базы. Например, физически сразу же очевидно, что диаграмма нулей или полюсов, симметричная относительно мнимой оси, не создает на ней тока, ибо при этом симметрично расположенные зонды подают к пластине и отводят от нее равные по величине токи. Отсюда сразу видно, что такая диаграмма не создает сдвига фазы, а влияет лишь на вид функции потерь. Если при этом удалить все зонды в одной полуплоскости, функция потерь остается без изменения (за исключением коэффициента $\frac{1}{2}$), но происходит сдвиг фазы.

Аналогично, когда полюсы находятся по одну сторону от мнимой оси, а нули располагаются симметрично, мнимая ось является геометрическим местом эквипотенциальных точек, и функция потерь оказывается постоянной. В действительности же имеет место ток, пересекающий мнимую ось, и, следовательно, при такой диаграмме происходит лишь сдвиг фазы. Если теперь удалить все зонды по одну сторону от мнимой оси, пересекающий ее ток уменьшится наполовину, но его распределение вдоль этой оси не меняется. Следовательно, такая диаграмма полюсов и нулей, соответствующая функции, «пропускающей все частоты», дает ту же фазовую функцию (за исключением коэффициента $\frac{1}{2}$), как и диаграмма, где устранены все критические частоты в одной полуплоскости. Однако мнимая ось не остается геометрическим местом эквипотенциальных точек и, следовательно, соответствующая функция потерь не остается постоянной.

Разумеется, можно получить те же результаты без помощи физической картины, создаваемой на основе представлений теории потенциалов, но последние имеют значительно более глубокий смысл и очевидны непосредственно. Наконец, целесообразно использовать некоторые известные экспериментальные данные, кото-

ры дает теория потенциалов для того, чтобы выработать нужные принципы и точки зрения. Например, известный эксперимент Фарадея для бака со льдом позволил установить основной принцип, используемый при решении задачи аппроксимации для фильтрующих цепей. Согласно этому эксперименту потенциал внутри проводящего сосуда является постоянным; тогда можно сказать, что потенциал внутри замкнутой (или практически замкнутой) эквипотенциальной поверхности является постоянным, ибо проводящий сосуд просто рассматривается как удобный эквивалент почти замкнутой эквипотенциальной поверхности.

Обратимся к рис. XIV.15а, где предполагается, что цилиндрическая поверхность, нормальная к плоскости s , создает указанное геометрическое место эквипотенциальных точек. Цилиндр считается выполненным так, что полный заряд Q на единицу длины равномерно распределяется по поверхности и создает потенциал снаружи, который можно вычислить, представив заряд Q в виде распределения линий, нормальных к плоскости s в точке $s = 0$. Если предположить, что заряд Q отрицателен, и рассматривать потенциал вдоль оси $s = j\omega$ как функцию потерь α , то

$$\alpha = -K \ln \frac{1}{\omega} = K \ln \omega \text{ при } \omega > 1, \quad (\text{XIV.113})$$

где K — соответствующий постоянный множитель. При $|\omega| < 1$ согласно данным эксперимента Фарадея для бака со льдом потенциал остается постоянным с тем значением, которое он имеет при $\omega = 1$, когда переменная точка входит в цилиндр. График такой функции потерь показан на рис. XIV.15б, где масштабный коэффициент для α пропорционален заряду Q . Здесь потенциал в $\frac{1}{n}$ раз отличается от функции затухания фильтра нижних частот, обладающей предельной характеристикой Баттерворта бесконечного порядка.

Если теперь представить, что цилиндр заменен параллельными проводами, расположенными на равном расстоянии по окружности, причем каждый провод несет одинаковую часть общего заряда Q , то при малом расстоянии между проводами потенциальная функция лишь незначительно изменится по форме. Общий заряд Q вместо равномерного распределения по окружности разделяется на конечное число равных частей; расположенных в равноудаленных друг от друга точках. Этот процесс называют «квантованием», причем под «квантами» подразумеваются равные части заряда, которые несут одиночные линии или провода.

Применительно к электрической цепи процесс квантования эквивалентен переходу от цепи с распределенными параметрами, характеризующей трансцендентными функциями сопротивлений, к цепи с сосредоточенными параметрами, характеризующей рациональными функциями сопротивлений. Полюсы последней теперь можно отождествить (согласно потенциальному аналогу, рассмотренному выше) с линиями, несущими сосредоточенные заряды. Произведя

указанную операцию и затем отбросив полюсы, расположенные в правой полуплоскости (при этом, как указывалось выше, потенциал или функция потерь α просто умножается на $\frac{1}{2}$), получим картину, изображенную на рис. XIV.15б, которой соответствует функция потерь, приведенная на рис. XIV.15в.

Этот результат совпадает с результатом, который дает функция Баттерворта. Таким образом, функцию Баттерворта можно отождествить с потенциалом квантованного бака Фарадея со льдом!

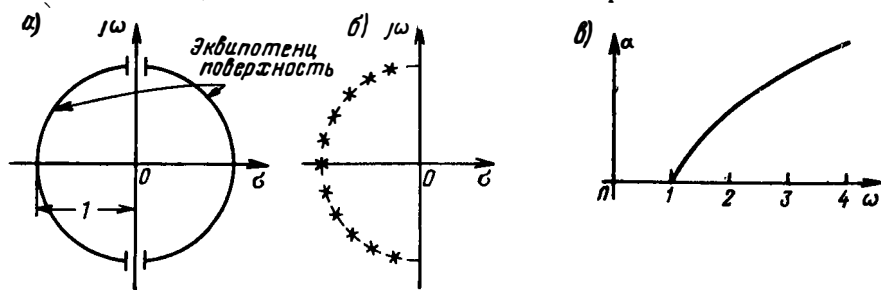


Рис. XIV.15

В данной связи необходимо обратить особое внимание на то, что одинаковый интервал между полюсами, расположенными на окружности, обусловлен круглой формой первоначальной цилиндрической поверхности, изображенной на рис. XIV.15а. Если бы она имела любую другую форму, общий заряд Q не распределялся бы равномерно по окружности. Поскольку каждый член выражения (XIV.110) должен обязательно иметь одинаковый множитель, аналогия между полюсами (или соответственно нулями) и линиями, несущими заряд, предполагает, что все эти линии несут равные заряды. Отсюда единственный способ, при помощи которого можно осуществить неравномерное распределение заряда по окружности в процессе квантования, заключается в том, чтобы сделать плотность полюсов, расположенных на окружности (величину, обратную расстоянию), пропорциональной плотности заряда на ней.

Таким образом, видно, что «бак со льдом», показанный на рис. XIV.15а, может иметь любую форму, отличную от круглого цилиндра, при условии, что для этой формы определено соответствующее распределение плотности заряда и произведено квантование. Следовательно, не только функция Баттерворта может дать функцию потерь баттервортовского типа, хотя аналитически она является простейшей. Нахождение распределения заряда на цилиндрической поверхности произвольной формы является граничной задачей, решить которую значительно сложнее. Фактически любая граничная задача (даже рассматриваемая здесь двумерная), которую нельзя решить непосредственно, представляет серьезные трудности.

Что касается вычислений, то использование теории потенциалов не облегчает решения нашей задачи, исключая случаи, когда оно определяется непосредственно. Иными словами, здесь одна громоздкая вычислительная задача заменяется столь же громоздкой другой. Если предполагается, что эквипотенциальные цилиндрические поверхности имеют поперечные сечения в плоскости s в виде многоугольников (или же могут быть аппроксимированы такими многоугольниками), то всегда можно осуществить решение задачи для граничного значения, используя формулу Шварца — Кристоффеля [2]¹. Однако нет уверенности в том, что в этих условиях теория потенциалов может помочь при решении задачи аппроксимации.

Прежде всего, теория потенциалов дает основу для интуитивного обоснования и мысленного представления. Кроме того, она позволяет получить несколько специфических решений для отдельных классических граничных задач, для которых уже имеются решения в довольно обширной литературе, посвященной теории потенциалов и конформного отображения. Примером такого рода может служить известное конформное преобразование

$$\omega = s \pm \sqrt{s^2 + 1}, \text{ или } s = \frac{1}{2} \left(\omega - \frac{1}{\omega} \right), \quad (\text{XIV.114})$$

дважды отображающее плоскость s на плоскость ω (один раз на внутреннюю часть ее единичного круга и затем на внешнюю часть последнего). Сама единичная окружность дважды пересекает мнимую ось в интервале $-1 < \omega < 1$.

Концентрические окружности и радиальные линии в плоскости ω становятся соответственно эллипсами и гиперболами в плоскости s . Если принять

$$\omega = r e^{i\beta}, \quad (\text{XIV.115})$$

то семейство софокусных и ортогональных эллипсов и гипербол в плоскости s дает постоянные значения r и β соответственно, как показано на рис. XIV.16. Плоскость s представляет собой двухлистную поверхность Римана; точки $s = \pm j$ являются точками ветвей, а интервал между ними на мнимой оси можно рассматривать как обрыв ветви.

Если взять круглый цилиндр, дающий при $r = 1$ в плоскости ω эквипотенциальную поверхность, то соответствующая поверхность в плоскости s становится листом, нормальное пересечение которого с этой плоскостью совпадает с обрывом ветви. Суммарный заряд Q на круглом цилиндре плоскости ω распределяется равномерно по периферии окружности, как видно из карты полей, где линии потока $\beta = \text{const}$ и имеют равномерный интервал. На соответствующей эквипотенциальной поверхности в плоскости s суммарный заряд Q распределяется неравномерно, причем плотность его при любом

¹ См. также [52] (прим. ред.).

значении ω пропорциональна плотности линий потока $\beta = \text{const}$ в любой точке.

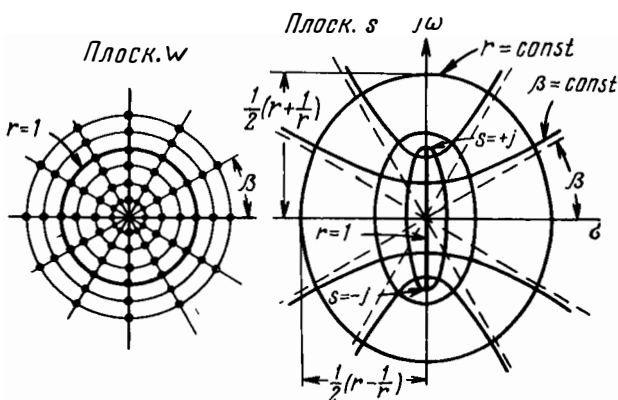


Рис. XIV.16

Изменение потенциала вдоль мнимой оси плоскости s определяется исходя, прежде всего, из следующего соотношения для отрицательного заряда на цилиндре плоскости w :

$$\alpha = -K \ln \frac{1}{r} = K \ln r, \quad (\text{XIV.116})$$

или

$$r = e^{\frac{\alpha}{K}}. \quad (\text{XIV.117})$$

Из выражений (XIV.114) и (XIV.115) имеем

$$s = \text{sh} \left(\frac{\alpha}{K} + j\beta \right), \quad (\text{XIV.118})$$

откуда

$$\sigma + j\omega = \text{sh} \frac{\alpha}{K} \cos \beta + j \text{ch} \frac{\alpha}{K} \sin \beta. \quad (\text{XIV.119})$$

Следовательно,

$$\sigma = \text{sh} \frac{\alpha}{K} \cos \beta; \quad (\text{XIV.120})$$

$$\omega = \text{ch} \frac{\alpha}{K} \sin \beta. \quad (\text{XIV.121})$$

При $\sigma = 0$ ($s = j\omega$) получаем либо

$$\alpha = 0; \quad \beta = \arcsin \omega \quad \text{при} \quad -1 < \omega < 1, \quad (\text{XIV.122})$$

либо

$$\beta = \pm \frac{\pi}{2}; \quad \alpha = K \operatorname{ar} \operatorname{ch} \omega \quad \text{при} \quad |\omega| > 1. \quad (\text{XIV.123})$$

Последние два соотношения относятся соответственно к полосе пропускания и полосе задерживания. Их характеристики представлены на рис. XIV.17 и могут рассматриваться как предельные характеристики, соответствующие чебышевской функции при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $n \rightarrow \infty$. Такие характеристики, однако, нельзя получить в цепи с сосредоточенными параметрами, так как при этом требуется непрерывное распределение полюсов с изменяющейся плотностью β в интервале $-1 < \omega < 1$ на мнимой оси. Сопротивление цепи с сосредоточенными параметрами не может иметь особых точек подобного рода, а может иметь лишь полюсы, которые не должны лежать на мнимой оси, если сопротивление следует ограничить при $s = j\omega$.

Возможна, разумеется, аппроксимация этих характеристик для цепи с сосредоточенными параметрами путем размещения полюсов вдоль некоторого другого эквипотенциального контура, например

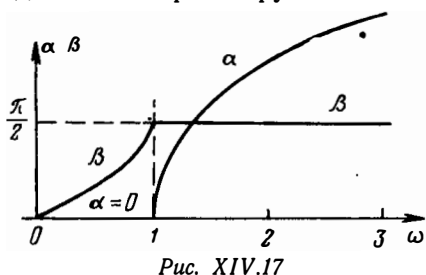


Рис. XIV.17

на эллиптическом контуре в левой полуплоскости. Такой контур в плоскости s соответствует (при $r \geq 1$) окружности в плоскости ω . Поскольку распределение заряда по последней равномерное, квантование в данном случае осуществляется просто. Например, выбирается окружность с радиусом $r > 1$, на которой располагаются полюсы с равным интервалом.

При окружности радиусом $r = 1$, соответствующей полосе пропускания $-1 < \omega < 1$, постоянный потенциал отсутствует. Нетрудно заметить, что потенциал, а следовательно, и функция потерь имеют в полосе пропускания равноволновый характер. Такой же результат был получен в § XIV.2 с помощью полинома Чебышева. Оказывается, что рациональная функция, аппроксимирующая трансцендентные функции потерь и фазы (см. рис. XIV.17), представляет собой не что иное, как функцию Чебышева, полученную ранее совершенно иным способом.

Располагая с равным интервалом $2n$ полюсов на окружности радиусом $r = e^\delta$ в плоскости ω , можно получить полюсы в плоскости s в точках, которые находятся из выражений (XIV.117), (XIV.120) и (XIV.121), приняв $\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{\nu\pi}{2n}$ при ν , равном нечетному целому числу. Таким образом, полюсы, расположенные в левой полуплоскости в точках $s_\nu = \sigma_\nu + j\omega_\nu$, определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\nu &= \text{sh } \delta \cos \frac{(n + \nu)\pi}{2n} \\ \omega_\nu &= \text{ch } \delta \sin \frac{(n + \nu)\pi}{2n} \end{aligned} \right\} \text{при } \nu = 1, 3, \dots, 2n - 1. \quad (\text{XIV.124})$$

Эти выражения полностью эквивалентны выражениям (XIV.42). В них недостает лишь связи между величиной δ и соответствующей амплитудой пульсаций. Последнюю сейчас вычислять не будем, ибо здесь она не представляет интереса (мы определим ее в следующем параграфе в связи с анализом задачи другого типа). Более важно обратить внимание на выводы, вытекающие из полученных результатов.

При сравнении трансцендентных форм функций Баттерворта и Чебышева (см. рис. XIV.15в и XIV.17) можно заметить, что обе функции должны иметь в полосе пропускания постоянные потери, равные нулю. При этом в случае функции Баттерворта фаза остается произвольной, в то время как для трансцендентной функции Чебышева существует дополнительное ограничение, требующее, чтобы в полосе задерживания фаза была постоянной. Как указывалось выше, единственное условие, которому соответствует $\alpha = 0$ в полосе пропускания, может быть удовлетворено бесконечным числом способов. Если добавляется ограничение на фазу, при котором $\beta = \text{const}$ в полосе задерживания, то существует лишь одно решение, а именно такое, какое дает конформное представление на рис. XIV.16, приводящее к характеристикам, изображенным на рис. XIV.17.

Наконец, следует отметить, что исследование равноволновых характеристик в полосе пропускания на основе теории потенциалов позволяет получить большее число возможных рациональных аппроксимирующих функций, чем использование полинома Чебышева. Так, можно изменять метод квантования, размещая полюсы не на одном, а на нескольких эквипотенциальных контурах, или, например, использовать двойной ряд полюсов, либо полюсы порядка выше первого. Указанный способ дает почти те же результаты, но полюсы при этом располагаются дальше влево от мнимой оси, что (как было показано в § XII.6) обеспечивает компенсацию больших паразитных потерь.

XIV.9. Линейная фазовая аппроксимация

При расчете цепей задержки необходимо найти сопротивление передачи, фазовый угол которого приблизительно является линейной функцией частоты ω в интервале от $\omega = 0$ до заданного верхнего предела, определяемого типом сигнала, подлежащего передаче цепью с минимальным искажением. Цепи такого типа разделяются на две категории в зависимости от того, пропускают ли они все частоты или нет. Для сопротивления передачи цепи, пропускающей все частоты,

$$Z_{12}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2} \quad (\text{XIV.125})$$

справедливо соотношение $P(s) = Q(-s)$ и, таким образом, $|Z_{12}(j\omega)| \equiv 1$.

Искажение сигнала в ней зависит исключительно от характера фазовой функции. В следующем параграфе будет показано, что можно модифицировать функцию цепи, пропускающей все частоты, для получения множества различных амплитудных характеристик без изменения соответствующей фазы. Таким путем можно в значительной степени контролировать переходную характеристику цепи с тем, чтобы удовлетворить предъявленным требованиям.

Скрещенная цепь постоянного резистивного сопротивления автоматически представляет собой цепь, пропускающую все частоты, ибо при $z_a = jx_a$ имеем (для $s = j\omega$)

$$Z_{12} = \frac{1 - z_a}{1 + z_a} = \frac{1 - jx_a}{1 + jx_a} = e^{-j\beta}. \quad (\text{XIV.126})$$

Связь между фазой β и реактивной функцией x_a имеет вид

$$x_a = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \text{ или } \beta = 2 \operatorname{arctg} x_a. \quad (\text{XIV.127})$$

Поскольку реактивная функция должна быть непрерывно возрастающей функцией ω [см. выражение (II.9)], очевидно, что фазовая характеристика цепи, пропускающей все частоты, также обладает этим свойством. Конечно, более наглядно в этом можно убедиться с помощью диаграммы полюсов и нулей функции такой цепи. Фактически ясно, что монотонно возрастающая фазовая функция (называемая *отставанием по фазе*) должна соответствовать любой передаточной функции, не имеющей нулей в конечной левой полуплоскости.

Можно получить более точное условие для фазовой характеристики цепи, пропускающей все частоты, если использовать производную функции (XIV.127)

$$\frac{dx_a}{d\omega} = \frac{1}{2\cos^2 \frac{\beta}{2}} \frac{d\beta}{d\omega}. \quad (\text{XIV.128})$$

При выводе последней формулы учитывалось следующее свойство [см. выражение (II.22)] реактивных функций;

$$\frac{dx_a}{d\omega} > \frac{x_a}{\omega}. \quad (\text{XIV.129})$$

Поэтому

$$\frac{d\beta}{d\omega} > \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \frac{\beta}{\omega}, \quad (\text{XIV.130})$$

что следует рассматривать как дополнение к условию $\frac{d\beta}{d\omega} > 0$; более сильным в любом случае является преобладающее условие. При малых значениях β (когда отношение $\frac{\sin \beta}{\beta}$ почти равно единице) фазовая функция должна, очевидно, удовлетворять условию столь

же строгому, как и неравенство (XIV.129), относящееся к реактивной функции. Для больших β (когда отношение $\frac{\sin \beta}{\beta}$ практически равно нулю) наклон фазовой характеристики может иметь любое положительное, но малое значение.

Когда на требуемое изменение фазы не накладываются указанные ограничения, то сопротивление передачи не может быть функцией цепи, пропускающей все частоты. Любую произвольно выбранную фазовую функцию можно рассматривать как сумму двух составляющих, одна из которых соответствует амплитуде минимально фазовой функции, а другая является фазовой функцией цепи, пропускающей все частоты. В каждом конкретном случае упомянутые выше условия для функции такой цепи позволяют отделить составляющую (если она есть), соответствующую амплитудной функции минимально фазовой цепи.

При расчете цепи с заданным сдвигом фазы иногда целесообразно воспользоваться методом, при котором контролируется наклон фазы (задержка), а не сама фаза. Для того чтобы пояснить этот метод, начнем с известного разбienia сопротивления, определяемого выражением (XIV.125), на четную и нечетную части

$$Z_{12}(s) = \frac{P(s)Q(-s)}{Q(s)Q(-s)} = \frac{M+N}{m_2^2 - n_2^2}, \quad (\text{XIV.131})$$

при условии, что

$$M = \frac{1}{2} [P(s)Q(-s) + P(-s)Q(s)]; \quad (\text{XIV.132})$$

$$N = \frac{1}{2} [P(s)Q(-s) - P(-s)Q(s)]. \quad (\text{XIV.133})$$

Тогда фазовый угол функции $Z_{12}(j\omega)$ определяется из выражения

$$-j \operatorname{tg} \beta = \left(\frac{N}{M} \right)_{s=j\omega}, \quad \text{или} \quad -\beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{N}{jM} \right)_{s=j\omega}. \quad (\text{XIV.134})$$

Производная от этого выражения имеет вид

$$-\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{M^2}{M^2 - N^2} \frac{d}{ds} \left(\frac{N}{M} \right) = \frac{MN' - NM'}{M^2 - N^2}, \quad (\text{XIV.135})$$

где штрих обозначает дифференцирование по s . Теперь очевиден вывод результирующего выражения при $s = j\omega$. Нетрудно убедиться, что полученное только что выражение является четной частью рациональной функции $\frac{M' + N'}{M + N}$. Отсюда ясно, что наклон фазовой характеристики цепи можно представить в виде

$$\frac{d\beta}{d\omega} = -\operatorname{Ev} \left(\frac{M' + N'}{M + N} \right) = +\operatorname{Ev} \left[\frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} \right], \quad (\text{XIV.136})$$

где

$$\varphi(s) = P(-s)Q(s). \quad (\text{XIV.137})$$

Вывод соответствующего выражения при $s = j\omega$ и в этом случае очевиден.

Возможный метод синтеза цепи задержки заключается в построении полинома $\varphi(s)$, удовлетворяющего требованиям относительно функции $\frac{d\beta}{d\omega}$, определяемой зависимостью (XIV.136). Из выражения (XIV.137) находят полиномы $P(s)$ и $Q(s)$, используя при этом метод, описанный в § VIII.10.

Если цепь должна пропускать все частоты, то $P(-s) = Q(s)$, и из выражения (XIV.137) получаем

$$\varphi(s) = Q^2(s); \quad \varphi'(s) = 2Q(s)Q'(s). \quad (\text{XIV.138})$$

Тогда согласно ф-ле (XIV.136)

$$\frac{d\beta}{d\omega} = 2Ev \left[\frac{Q'(s)}{Q(s)} \right]. \quad (\text{XIV.139})$$

С другой стороны, если все нули сопротивления передачи лежат в бесконечно удаленной точке, то $P(s) = 1$ и $\varphi(s) = Q(s)$, откуда

$$\frac{d\beta}{d\omega} = Ev \left[\frac{Q'(s)}{Q(s)} \right]. \quad (\text{XIV.140})$$

Последнее выражение совпадает с выражением (XIV.139), характеризующим цепь, пропускающую все частоты (с точностью до коэффициента 2). Разумеется, этот результат можно было предугадать на основании рассуждений, приведенных в предыдущем параграфе.

Сопротивление передачи линейной фазосдвигающей цепи имеет такой угол отставания β , при котором функция $\frac{d\beta}{d\omega}$ аппроксимирует тот же идеальный прямоугольник, что и модуль этого сопротивления (см. рис. XIV.1) при расчете фильтра нижних частот. По аналогии с решением указанной задачи посредством функции Баттерворта можно попытаться найти решение, соответствующее случаю, когда $\frac{d\beta}{d\omega}$ максимально плоско аппроксимирует идеальный прямоугольник. Однако вследствие специфичной формы рациональной функции (XIV.136) получить такое решение не просто. Для лучшего понимания задачи рассмотрим несколько частных примеров.

Пусть функция $\varphi(s)$ представляет собой полином второй степени

$$\varphi(s) = 1 + a_1s + a_2s^2. \quad (\text{XIV.141})$$

Имеем

$$\varphi'(s) = a_1 + 2a_2s, \quad (\text{XIV.142})$$

и при $s = j\omega$

$$Ev \left[\frac{\varphi'(j\omega)}{\varphi(j\omega)} \right] = \frac{a_1 + a_1a_2\omega^2}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega^2 + a_2^2\omega^4}. \quad (\text{XIV.143})$$

Результирующая функция будет максимально плоской, если коэффициенты полинома числителя пропорциональны соответствующим коэффициентам полинома знаменателя. Это условие можно представить в виде

$$a_2 = a_1^2 - 2a_2, \text{ или } a_2 = \frac{a_1^2}{3}. \quad (\text{XIV.144})$$

Тогда наклон фазы имеет вид

$$\frac{d\beta}{d\omega} = a_1 \frac{1 + \frac{a_1^2 \omega^2}{3}}{1 + \frac{a_1^2 \omega^2}{3} + \frac{a_1^4 \omega^4}{9}}. \quad (\text{XIV.145})$$

Диапазон значений ω , в котором эта функция аппроксимирует постоянное значение a_1 с заданным допуском, очевидно, уменьшается с увеличением a_1 . Можно получить большую задержку в узкой полосе или малую задержку в широкой полосе. Можно получить и то, и другое, воспользовавшись каскадным соединением одинаковых скрещенных цепей постоянного резистивного сопротивления, реализующим сопротивление передачи, определяемое выражением (XIV.145). Действительно, выбор значения a_1 может быть таким, чтобы обеспечить требуемую ширину полосы, а общая задержка, получаемая при каскадном соединении n звеньев, равна na_1 .

Возьмем теперь полином $\varphi(s)$ более высокой степени, например,

$$\varphi(s) = 1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3, \quad (\text{XIV.146})$$

для которого

$$\varphi'(s) = a_1 + 2a_2 s + 3a_3 s^2. \quad (\text{XIV.147})$$

При $s = j\omega$ имеем

$$\text{Ev} \left[\frac{\varphi'(j\omega)}{\varphi(j\omega)} \right] = \frac{a_1 + (a_1 a_2 - 3a_3) \omega^2 + a_2 a_3 \omega^4}{1 + (a_1^2 - 2a_2) \omega^2 + (a_2^2 - 2a_1 a_3) \omega^4 + a_3^2 \omega^6}. \quad (\text{XIV.148})$$

Случаю максимально плоской кривой соответствуют соотношения

$$a_1 a_2 - 3a_3 = a_1 (a_1^2 - 2a_2); \quad a_2 a_3 = a_1 (a_2^2 - 2a_1 a_3), \quad (\text{XIV.149})$$

откуда

$$a_2 = \frac{2a_1^2}{5}; \quad a_3 = \frac{a_1^3}{15}. \quad (\text{XIV.150})$$

Искомый наклон фазы в этом случае имеет вид

$$\frac{d\beta}{d\omega} = a_1 \frac{1 + \frac{a_1^2 \omega^2}{5} + \frac{2a_1^4 \omega^4}{75}}{1 + \frac{a_1^2 \omega^2}{5} + \frac{2a_1^4 \omega^4}{75} + \frac{a_1^6 \omega^6}{225}}. \quad (\text{XIV.151})$$

Снова требуемый допуск и ширина полосы определяются величиной a_1 , равной результирующей задержке.

Описанный метод очень прост при использовании, хотя требуется производить много расчетов, когда полином $\varphi(s)$ имеет более высокую степень.

Существует другой подход к решению этой задачи, который дает приблизительно те же результаты, причем без сложных расчетов. Он основан на том, что если функция $\varphi(s)$ аппроксимирует e^s , то $\varphi'(s) \approx \varphi(s)$; и из выражения (XIV.136) получаем, что в интервале аппроксимации $\frac{d\beta}{d\omega} \approx 1$. В более узком смысле, считая, что следующая часть разложения Маклорена для функции e^s представляет собой полином

$$\varphi(s) = 1 + s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} + \dots + \frac{s^n}{n!}, \quad (\text{XIV.152})$$

получаем

$$\varphi'(s) = 1 + s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} + \dots + \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (\text{XIV.153})$$

Рациональная функция $\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}$ имеет седловую точку порядка $n - 1$ при $s = 0$; функция $1 - \frac{\varphi'}{\varphi}$ имеет нуль порядка n в этой точке, если первые $(n - 1)$ производные функции $\frac{\varphi'}{\varphi}$ равны там нулю. Четная часть функции $\frac{\varphi'}{\varphi}$ запишется в виде

$$\text{Ev} \left[\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} \right] = \frac{1 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s^4 + \dots + \alpha_{n-1} s^{2(n-1)}}{1 + \beta_1 s^2 + \beta_2 s^4 + \dots + \beta_n s^{2n}}; \quad (\text{XIV.154})$$

она имеет седловую точку порядка n (соответственно $n - 1$) в точке $s = 0$ при n нечетном (соответственно четном). Отсюда

$$\alpha_k = \beta_k \text{ при } k = \begin{cases} 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ 1, 2, \dots, \frac{n-2}{2} & \text{при } n \text{ четном,} \end{cases} \quad (\text{XIV.155})$$

что далеко не удовлетворяет максимально плоской характеристике, хотя и соответствует характеристике, близкой к плоской.

Дополнительный интерес представляет тот факт, что полином $\varphi(s)$, определяемый ф-лой (XIV.152), при $n > 4$ не является полиномом Гурвица. В этом случае его нули, расположенные в правой

полуплоскости, необходимо в соответствии с выражением (XIV.137) отнести к полиному $P(-s)$. Следовательно, не остается иного выбора, кроме как принять, что сопротивление передачи, определяемое выражением (XIV.125), имеет и нули, и полюсы, расположенные в левой полуплоскости. Пока полином $\varphi(s)$ является полиномом Гурвица, нет никакого ограничения при построении сопротивления передачи с конечными нулями (в правой полуплоскости) или без них; но любые нули полинома $\varphi(s)$, расположенные в этой полуплоскости, должны стать нулями функции $Z_{12}(s)$, расположенными в левой полуплоскости.

Несмотря на то, что приведенные рассуждения не дают требуемого решения, они показывают, однако, каким способом можно получить следующие требуемые результаты. Поскольку полином $\varphi(s)$, определяемый выражением (XIV.136), является полиномом вида $(M - N)$, очевидно, что условие, согласно которому полином $\varphi(s)$ аппроксимирует функцию e^s [см. выражение (XIV.134)], эквивалентно условию, что рациональная функция $\frac{-N}{M} = \text{th } j\beta$ аппроксимирует функцию $\text{th } s$. Так как последняя имеет простые полюсы с положительными вещественными вычетами (они расположены лишь на мнимой оси плоскости s), то искомая аппроксимирующая функция $\frac{-N}{M}$ является реактивной функцией, реализуемой в виде сопротивления LC цепи.

Получение максимально плоской фазы β связано с аппроксимацией функции $\text{th } s$ реактивной функцией $\frac{-N}{M}$ в точке $s = 0$. Как вытекает из опыта синтеза таких функций, над заданной функцией $\text{th } s$ необходимо произвести те же операции, что и над любой реактивной функцией в процессе ее разложения в цепную схему.

При одном способе из заданной функции (или из обратной ей величины) и из получающихся при разложении обратных остаточных функций выделяются полюсы в точке $s = 0$.

При другом способе над функцией $\text{th } s$ необходимо произвести те же операции, что и над реактивной функцией в процессе канонического разложения по Кауэру, которое приводит к цепной схеме с последовательными емкостями C и параллельными индуктивностями L . Другими словами, следует представить функцию $\text{th } s$ непрерывной дробью от переменной $\frac{1}{s}$. Такое разложение нетрудно найти, если использовать разложения Маклорена в числителе и знаменателе функции:

$$\text{th } s = \frac{\text{sh } s}{\text{ch } s} = \frac{s + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \frac{s^7}{7!} + \dots}{1 + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + \frac{s^6}{6!} + \dots} \quad (\text{XIV.156})$$

Известный процесс деления и инверсии дает

$$\text{th } s = \frac{1}{\frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{3}{s} + \frac{1}{\frac{5}{s} + \frac{1}{\frac{7}{s} + \dots}}}} \quad (\text{XIV.157})$$

На первом этапе этого процесса из функции $\text{cth } s$ выделяется полюс $\frac{1}{s}$ и получается остаток $\text{cth } s - \frac{1}{s}$, равный нулю в точке $s = 0$. Величина, обратная остатку, имеет полюс $\frac{3}{s}$ в точке $s = 0$, который выделяется на втором этапе и т. д. Нетрудно заметить, что в таком разложении используется лишь точка $s = 0$.

Если закончить процесс разложения на n -м этапе, то получится рациональная аппроксимирующая функция, которую можно отождествить с функцией $\frac{-N}{M}$, дающей полином $\varphi(s) = M - N$ степени n . Следует отметить, однако, что полиномы $-N$ и M не являются соответствующими конечными частями разложений Маклорена в выражении (XIV.156). Это следует из того факта, что полином $\varphi(s)$, образованный по разложению (XIV.157), всегда является полиномом Гурвица (так как все коэффициенты этого разложения положительны). Более того, разложение Маклорена для функции $\text{th } s$ вида

$$\text{th } s = s - \frac{s^3}{3} + \frac{2s^5}{15} - \frac{17s^7}{315} + \dots \quad (\text{XIV.158})$$

получено точно для n членов при помощи аппроксимирующей функции $\varphi(s)$, образованной из n членов разложения (XIV.157), тогда как аппроксимирующая функция, образованная из выражения (XIV.156) при помощи членов s^n , дает разложение Маклорена, которое совпадает с выражением (XIV.158) в грубом приближении только для половины членов. Этого следовало ожидать, если принять во внимание выражения (XIV.152) — (XIV.155).

Пользуясь алгебраическими свойствами непрерывных дробей¹, получаем рекуррентную формулу для построения полиномов $\varphi_n(s)$, соответствующих n членам выражения (XIV.157),

$$\varphi_n = (2n-1)\varphi_{n-1} + s^2\varphi_{n-2}, \quad (\text{XIV.159})$$

откуда

$$\varphi_0 = 1; \quad \varphi_1 = 1 + s. \quad (\text{XIV.160})$$

Из выражения (XIV.159) можно найти и полиномы более высокой степени.

¹ См. [59, 60] (прим. ред.).

Далее полином $\varphi_n(s)$ можно представить в виде [44]¹

$$\varphi_n(s) = \sum_{r=0}^n a_r s^r, \quad (\text{XIV.161})$$

где

$$a_r = \binom{2n-r}{r} [1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-2r-1)]. \quad (\text{XVI.162})$$

Первый множитель является известным биномиальным коэффициентом

$$\binom{k}{t} = \frac{k(k-1) \dots (k-t+1)}{t!}, \quad (\text{XIV.163})$$

который равен единице при $t = 0$ или $k = t$.

Имеется практически более удобный метод построения сопротивления передачи с приблизительно линейной фазой, заключающийся в рассмотрении диаграммы полюсов в плоскости s , подобной диаграмме, изображенной на рис. XIV.18, где общее число полюсов пока неизвестно. Если в правую полуплоскость добавить симметрично расположенную решетку с нулями, то полный сдвиг фазы просто удваивается. Поэтому в описываемом методе нет необходимости отдельно рассматривать цепь, пропускающую все частоты.

Полный фазовый угол для такой симметричной диаграммы полюсов, очевидно, можно представить в виде

$$\beta = \sum_v \arctg \frac{\omega - \omega_v}{\sigma}, \quad (\text{XIV.164})$$

где суммирование распространяется на все полюсы. Наклон фазы имеет вид

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \sum_v \frac{\sigma}{\sigma^2 + (\omega - \omega_v)^2}. \quad (\text{XIV.165})$$

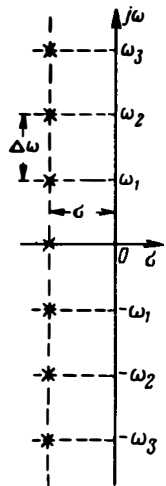


Рис. XIV.18

Если считать, что диаграмма полюсов бесконечна, то наклон фазы, определяемый выражением (XIV.165), соответствует равноволновой характеристике. Для конечной диаграммы эта функция окажется близкой к характеристике равных пульсаций, за исключением участков вблизи концов решетки. Результирующая амплитуда пульсаций для бесконечной решетки будет весьма близка к центральной части конечной решетки.

Максимальное значение функции $\frac{d\beta}{d\omega}$, очевидно, появляется при любом $\omega = \omega_v$, а минимальное — при любом ω посередине между

¹ В этой работе показано, что функции $\varphi_n(s)$ являются так называемыми бесселевыми.

двумя последующими значениями ω_v . Эти два крайних значения появляются, например, при $\omega = 0$ и $\omega = \frac{\Delta\omega}{2}$ соответственно. Если в выражении (XIV.165) принять

$$\omega - \omega_v = \frac{v\Delta\omega}{2}, \quad (\text{XIV.166})$$

то можно найти

$$\left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)_{\max} = \frac{2}{\Delta\omega} \sum_{v=0, -2, -4, \dots}^{2, 4, \dots} \frac{\frac{2\sigma}{\Delta\omega}}{\left(\frac{2\sigma}{\Delta\omega}\right)^2 + v^2} = \frac{\pi}{\Delta\omega} \operatorname{cth} \frac{\pi\sigma}{\Delta\omega} \quad (\text{XIV.167})$$

и

$$\left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)_{\min} = \frac{2}{\Delta\omega} \sum_{v=-1, -3, \dots}^{1, 3, \dots} \frac{\frac{2\sigma}{\Delta\omega}}{\left(\frac{2\sigma}{\Delta\omega}\right)^2 + v^2} = \frac{\pi}{\Delta\omega} \operatorname{th} \frac{\pi\sigma}{\Delta\omega}, \quad (\text{XIV.168})$$

где с точностью до коэффициента $\frac{\pi}{2}$ бесконечные суммы можно рассматривать как разложения на элементарные дроби гиперболических котангенсной и тангенсной функций соответственно.

Таким образом, коэффициент пульсаций

$$\frac{\left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)_{\max} - \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)_{\min}}{\left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)_{\max} + \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)_{\min}} = \rho_p = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{2\pi\sigma}{\Delta\omega}} \approx 2e^{-\frac{2\pi\sigma}{\Delta\omega}}, \quad (\text{XIV.169})$$

в то время как арифметическое среднее значений, получаемых из выражений (XIV.167) и (XIV.168), дает средний наклон

$$t_d = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)_{\text{cp}} = \frac{\pi}{\Delta\omega} \operatorname{cth} \frac{2\pi\sigma}{\Delta\omega} \approx \frac{\pi}{\Delta\omega}, \quad (\text{XIV.170})$$

который равен задержке, создаваемой цепью. Тот факт, что средний наклон, по существу, не зависит от σ , вытекает из предположения о бесконечной решетке полюсов. Для конечного числа полюсов такой вывод почти справедлив до тех пор, пока σ невелико по сравнению с полной шириной полосы (это условие практически всегда выполняется).

Для выбранного среднего наклона, определяемого при данном $\Delta\omega$, коэффициент пульсаций контролируется величиной σ . В этой связи может показаться, что имеется якобы возможность уменьшить пульсации до любой требуемой величины без каких-либо затрат, так как σ можно увеличивать в умеренных пределах насколько необходимо. Ошибочность такой точки зрения состоит в том, что она не учитывает влияния σ на поведение фазы около

краев полосы частот, соответствующей конечной решетке полюсов. Как показывает приводимый ниже анализ, средний наклон остается почти постоянным в большей части частотного диапазона, соответствующего диаграмме полюсов, но уменьшается по мере того, как ω приближается к его границам и равен половине своего нормального значения на них. «Граничная зона», в которой происходит это важное изменение наклона фазы, с увеличением отношения $\frac{\sigma}{\Delta\omega}$ охватывает все большую часть ширины полосы.

Вычисление функции $\frac{d\beta}{d\omega}$, необходимое для оценки свойств этой граничной зоны, упрощается, если предположить существование непрерывного распределения полюсов, расположенного на линии, параллельной оси ω . На рис. XIV.19 представлено такое непрерывное распределение полюсов для расчета изменения наклона фазы в «конечных зонах» в окрестности точек $\omega = \pm\omega_c$. Тогда сумма (XIV.165) заменяется интегралом

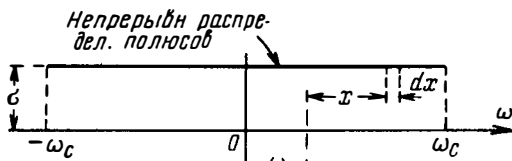


Рис. XIV.19

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{\sigma}{\Delta\omega} \int_{-(\omega_c+\omega)}^{\omega_c-\omega} \frac{dx}{\sigma^2+x^2} = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{-(\omega_c+\omega)}^{\omega_c-\omega} \frac{d\left(\frac{x}{\sigma}\right)}{1+\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}. \quad (\text{XIV.171})$$

Здесь ω параметр, а x или $\frac{x}{\sigma}$ — переменная интегрирования. Таким образом, получаем

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{\Delta\omega} \left(\text{arc tg } \frac{\omega_c+\omega}{\sigma} + \text{arc tg } \frac{\omega_c-\omega}{\sigma} \right). \quad (\text{XIV.172})$$

Если полное число дискретных полюсов обозначить через $2n$, то можно записать

$$\omega_c = n\Delta\omega; \quad \omega = \nu\Delta\omega, \quad (\text{XIV.173})$$

и, следовательно,

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{\Delta\omega} \left[\text{arc tg}(n+\nu) \frac{\Delta\omega}{\sigma} - \text{arc tg}(n-\nu) \frac{\Delta\omega}{\sigma} \right]. \quad (\text{XIV.174})$$

В центре полосы ($\omega = 0$ или $\nu = 0$) наклон, по существу, равен $\frac{\pi}{\Delta\omega}$, что согласуется с выражением (XIV.170). На границах полосы ($\omega = \omega_0$ или $\nu = n$) он равен половине своего значения.

Поскольку значение $\frac{\Delta\omega}{\sigma}$ [в соответствии с коэффициентом пуль-

саций, определяемым выражением (XIV.169)] в большинстве случаев лежит в пределах между 1 и 2, из выражения (XIV.174) вытекает, что область главных изменений функции $\frac{d\beta}{d\omega}$ содержит лишь последние два или три полюса решетки. Поэтому можно получить удовлетворительные результаты, расширив диаграмму полюсов за пределы требуемых границ полосы.

Более строгое требование удовлетворяется при введении одного или нескольких дополнительных полюсов, расположенных у конца решетки, что соответствует добавлению к сумме (XIV.165) соответственно выбранных дополнительных членов. Этот процесс легче выполнить, построив график функции (XIV.174) в граничной зоне, а затем, добавляя члены вида (XIV.165) со значениями σ и ω , выбранными по методу последовательных приближений. Поскольку одного или двух дополнительных членов обычно бывает достаточно, усилия, затрачиваемые на расчеты, не столь велики, и не требуется выполнять какую-либо трудоемкую аналитическую процедуру.

Если необходимо получить зависимость β от ω , то это легко осуществить путем интегрирования выражения (XIV.172). Тогда

$$\beta(\omega) = \frac{1}{\Delta\omega} \int_0^{\omega} \arctg \frac{\omega_c + \omega}{\sigma} d\omega + \frac{1}{\Delta\omega} \int_0^{\omega} \arctg \frac{\omega_c - \omega}{\sigma} d\omega, \quad (\text{XIV.175})$$

или

$$\beta(\omega) = \frac{\omega_c + \omega}{\Delta\omega} \arctg \frac{\omega_c + \omega}{\sigma} - \frac{\omega_c - \omega}{\Delta\omega} \arctg \frac{\omega_c - \omega}{\sigma} - \frac{\sigma}{2\Delta\omega} \ln \left[1 + \left(\frac{\omega_c + \omega}{\sigma} \right)^2 \right] + \frac{\sigma}{2\Delta\omega} \ln \left[1 + \left(\frac{\omega_c - \omega}{\sigma} \right)^2 \right]. \quad (\text{XIV.176})$$

На границе полосы $\omega = \omega_c$ значение β определяется выражением

$$\beta(\omega_c) = \frac{2\omega_c}{\Delta\omega} \arctg \frac{2\omega_c}{\sigma} - \frac{\sigma}{2\Delta\omega} \ln \left(1 + \frac{4\omega_c^2}{\sigma^2} \right). \quad (\text{XIV.177})$$

Поскольку отношение $\frac{\omega_c}{\sigma}$ велико, можно, используя выражение (XIV.173), записать приближенное равенство

$$\beta(\omega_c) \approx n\pi - \frac{\sigma}{\Delta\omega} \ln \frac{2n\Delta\omega}{\sigma}. \quad (\text{XIV.178})$$

Если фаза имеет такой же постоянный наклон, как и в выражении (XIV.170) для всей полосы, то ее значение в точке $\omega = \omega_c$ будет равно $n\pi$. Следовательно, величина, при которой фаза падает ниже линейного изменения на границе полосы, определяется выражением

$$n\pi - \beta(\omega_c) \approx \frac{\sigma}{\Delta\omega} \ln \frac{2n\Delta\omega}{\sigma}, \quad (\text{XIV.179})$$

которое дает лишь малую часть величины *пл*. В действительности, значение, определяемое выражением (XIV.179), стремится к нулю с увеличением *n*.

Если в диаграмму полюсов, изображенную на рис. XIV.18, добавляется симметричная линейная решетка нулей, расположенных в правой полуплоскости, то, как указывалось выше, фаза удваивается. В этом случае амплитуда, соответствующая подобной характеристике, является постоянной, ибо передаточная функция принадлежит к классу функций цепей, пропускающих все частоты.

Если же в указанную диаграмму полюсов не добавляется такая решетка, то амплитуда передаточной функции изменяется, причем это изменение для бесконечной решетки, очевидно, является постоянным, исключая равноволновое изменение. Соответствующий коэффициент пульсаций вычисляется следующим образом.

Функция квадрата модуля для диаграммы полюсов, изображенной на рис. XIV.18, имеет вид

$$f(\omega) = \frac{K}{\prod_v [\sigma^2 + (\omega - \omega_v)^2]}, \quad (\text{XIV.180})$$

где знак произведения распространяется на все полюсы решетки. Предположим предварительно, что она содержит полное число полюсов, равное $2n + 1$, причем один из них соответствует точке $\omega = 0$, а $2n$ других полюса расположены в положительной и отрицательной ветвях (по n в каждой из ветвей). Тогда коэффициент пульсаций при бесконечной решетке получается для предельного случая $n \rightarrow \infty$.

Учитывая этот предельный процесс, можно сказать, что максимальное значение функции $f(\omega)$ имеет место в точке $\omega = 0$, а минимальное — в точке $\omega = \frac{\omega_1}{2}$. Используя вновь выражения (XIV.166) и (XIV.180), запишем

$$f_{\max} = \frac{K}{\sigma^2 \prod_{v=2,4,\dots}^{2n} \left(\frac{v\Delta\omega}{2}\right)^4 \prod_{v=2,4,\dots}^{2n} \left[1 + \frac{\left(\frac{2\sigma}{\Delta\omega}\right)^2}{v^2}\right]^2}; \quad (\text{XIV.181})$$

$$f_{\min} = \frac{K}{\left[\sigma^2 + (2n+1)^2 \frac{\Delta\omega^2}{4}\right] \prod_{v=1,3,\dots}^{2n-1} \left(\frac{v\Delta\omega}{2}\right)^4 \prod_{v=1,3,\dots}^{2n-1} \left[1 + \frac{\left(\frac{2\sigma}{\Delta\omega}\right)^2}{v^2}\right]^2}. \quad (\text{XIV.182})$$

Используя далее разложение гиперболической котангенсной функции в бесконечное произведение, найдем при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{\frac{f_{\max}}{f_{\min}}} = m \frac{\pi}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi\sigma}{\Delta\omega}, \quad (\text{XIV.183})$$

где коэффициент m является при $n \rightarrow \infty$ пределом выражения

$$m = \frac{(2n+1) \prod_{\nu=1,3,\dots}^{2n-1} \nu^2}{\prod_{\nu=2,4,\dots}^{2n} \nu^2}. \quad (\text{XIV.184})$$

Можно показать, что этот коэффициент стремится к пределу $\frac{2}{\pi}$, если принять во внимание, что для любого конечного n , как бы велико оно ни было, имеет место соотношение

$$m = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 8} \cdot \frac{9 \cdot 11}{10 \cdot 10} \dots \quad (\text{XIV.185})$$

Следовательно, модуль отношения, характеризующего бесконечную решетку полюсов, имеет вид

$$\sqrt{\frac{f_{\max}}{f_{\min}}} = \operatorname{cth} \frac{\pi\sigma}{\Delta\omega}, \quad (\text{XIV.186})$$

а коэффициент пульсации

$$\frac{\sqrt{\frac{f_{\max}}{f_{\min}} - 1}}{\sqrt{\frac{f_{\max}}{f_{\min}} + 1}} = \rho_m = e^{-\frac{2\pi\sigma}{\Delta\omega}}, \quad (\text{XIV.187})$$

который равен как раз половине значения коэффициента пульсации для наклона фазы, определяемого выражением (XIV.169).

Сам по себе этот результат не имеет особого значения, так как среднее значение модуля в полном частотном диапазоне, соответствующем конечной решетке полюсов, далеко не постоянно. Однако, используя непрерывное распределение полюсов, приведенное на рис. XIV.19, можно вычислить логарифм функции (XIV.180) с помощью интеграла и найти потери на границах полосы, нормализованные относительно потерь в точке $\omega = 0$:

$$\alpha(\omega_c) \approx \frac{4\omega_c}{\Delta\omega} \ln 2 - \frac{\pi\sigma}{\Delta\omega}, \text{ неп.} \quad (\text{XIV.188})$$

Потери оказываются настолько значительными, что едва ли можно считать этот диапазон «полосой пропускания». Вместе с тем, если в решетку полюсов, изображенную на рис. XIV.18, дополнительно включают аналогичное распределение нулей, расположенных в правой полуплоскости (с тем же интервалом $\Delta\omega$, но при ином

значении σ), то модуль передаточной функции, хотя и не равный тождественно единице, по существу, оказывается постоянным и близким к единице в указанной полосе пропускания. Такая ситуация может возникнуть при выполнении расчета функции цепи, пропускающей все частоты, но без предварительной коррекции паразитных потерь (см. § XII.6). При этом результирующие полюсы располагаются дальше влево от мнимой оси, чем нули вправо от нее.

Проведенный выше анализ позволяет сразу сделать вывод о том, что если расстояние до полюса равно σ_1 , а расстояние до нуля равно σ_2 , то получается следующее отношение максимальной амплитуды к минимальной:

$$\sqrt{\frac{f_{\max}}{f_{\min}}} = \frac{\operatorname{cth} \frac{\pi\sigma_1}{\Delta\omega}}{\operatorname{cth} \frac{\pi\sigma_2}{\Delta\omega}}. \quad (\text{XIV.189})$$

Для той же ситуации, согласно выражениям (XIV.167) и (XIV.168), можно записать:

$$\left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)_{\max} = \frac{\pi}{\Delta\omega} \left(\operatorname{cth} \frac{\pi\sigma_1}{\Delta\omega} + \operatorname{cth} \frac{\pi\sigma_2}{\Delta\omega}\right); \quad (\text{XIV.190})$$

$$\left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)_{\min} = \frac{\pi}{\Delta\omega} \left(\operatorname{th} \frac{\pi\sigma_1}{\Delta\omega} + \operatorname{th} \frac{\pi\sigma_2}{\Delta\omega}\right), \quad (\text{XIV.191})$$

откуда

$$\frac{\left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)_{\max}}{\left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)_{\min}} = \operatorname{cth} \frac{\pi\sigma_1}{\Delta\omega} \operatorname{cth} \frac{\pi\sigma_2}{\Delta\omega}. \quad (\text{XIV.192})$$

Из этого выражения легко вычисляется коэффициент пульсаций.

XIV.10. Вариант равноволновой аппроксимирующей функции

Если мы интересуемся рациональной функцией, имеющей вид равноволновой характеристики, то ее не надо далеко искать. Известная цепь (рис. XIV.20), содержащая резистивное сопротивление 1 ом , соединенное параллельно с реактивным сопротивлением jx , дает сопротивление $Z(j\omega)$, модуль или вещественная часть которого колеблется между нулем и единицей, если ω изменяется от 0 до ∞ . Нули $Z(j\omega)$ появляются там, где реактивное сопротивление jx имеет нули, а «единицы», — где оно имеет полюсы. Используя наши знания о реактивных функциях и их синтезе, можно сразу построить функцию $Z(s)$, модуль или вещественная часть которой на мнимой оси имеет нули и «единицы» в заданных точках.

Если $p(s) = m + n$ является полиномом Гурвица, то соответствующее сопротивление запишется в виде

$$Z(s) = \frac{m}{m+n}, \quad (\text{XIV.193})$$

когда требуется, чтобы точке $\omega = 0$ соответствовала «единица». Если в качестве числителя выбран полином n , а не m , то точка $\omega = 0$ соответствует нулю.

Из выражения (XIV.193) следует, что

$$\operatorname{Re}[Z(j\omega)] = |Z(j\omega)|^2 = \left(\frac{m^2}{m^2 - n^2} \right)_{s=j\omega} = \left(\frac{1}{1 - \frac{n^2}{m^2}} \right)_{s=j\omega}. \quad (\text{XIV.194})$$

Поскольку отношение четной и нечетной частей полинома Гурвица является реактивной функцией, можно записать:

$$jx = \left(\frac{m}{n} \right)_{s=j\omega}; \quad (\text{XIV.195})$$

$$Z(j\omega) = \frac{jx}{1 + jx}, \quad (\text{XIV.196})$$

откуда

$$\operatorname{Re}[Z(j\omega)] = |Z(j\omega)|^2 = \frac{x^2}{1 + x^2}. \quad (\text{XIV.197})$$

Полученная функция, безусловно, является равноволновой на всей мнимой оси, тогда как обычная задача аппроксимации требует, чтобы равные пульсации были лишь в конечном интервале на этой оси.

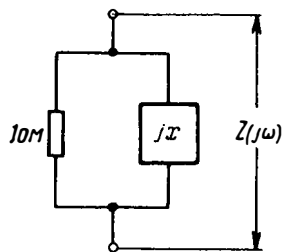


Рис. XIV.20

Последнее требование легко выполнить путем соответствующего преобразования независимой переменной, которая отображает всю мнимую ось в комплексной плоскости для данной переменной на требуемые участки мнимой оси в плоскости новой переменной. Как будет показано ниже, такое преобразование нетрудно осуществить.

Чтобы избежать ошибок в выкладках, обозначим через $\lambda = \sigma + j\bar{\omega}$ первоначальную независимую переменную, а через $s = \sigma + j\omega$ новую переменную. Рациональную функцию, являющуюся равноволновой на всей мнимой оси, представим в виде

$$f(\lambda^2) = \frac{\frac{1}{4} [p(\lambda) + p(-\lambda)]^2}{p(\lambda)p(-\lambda)} = \frac{m^2}{m^2 - n^2}, \quad (\text{XIV.198})$$

где функция

$$p(\lambda) = m + n \quad (\text{XIV.199})$$

представляет собой произвольный полином Гурвица. Поскольку в данном случае рассматривается функция от λ^2 , а для новой переменной будет рассматриваться функция от s^2 , можно упростить преобразование переменной, выразив ее через $\lambda^2 = t(s^2)$, а не через λ и s .

В связи с этим следует прежде всего отметить, что мнимая ось плоскости λ или плоскости s эквивалентна отрицательной вещественной оси соответственно плоскости λ^2 или плоскости s^2 . Тогда если желательно нанести всю мнимую ось плоскости λ на часть мнимой оси плоскости s , то необходимо просто наложить плоскость λ^2 на плоскость s^2 так, чтобы их вещественные оси совпали. При этом, однако, оставшаяся часть отрицательной вещественной оси плоскости s^2 не должна накладываться на отрицательную вещественную ось плоскости λ^2 . Лишь тот интервал отрицательной вещественной оси плоскости s^2 , который совпадает с отрицательной вещественной осью плоскости λ^2 , станет в соответствующей плоскости s интервалом мнимой оси, для которого преобразованная рациональная функция является равноволновой.

В начале рассуждений, касающихся построения преобразования $\lambda^2 = t(s^2)$, не было необходимости обращать особое внимание на то, где на мнимой оси плоскости s функция является равноволновой. Действительно, этот вопрос всегда можно выяснить путем последующего преобразования, аналогичного преобразованию, описанному в § XIV.4. Так, на рис. XIV.21 показана суперпозиция плоскостей λ^2 и s^2 , в результате которой вся мнимая ось плоскости λ наносится на ту часть мнимой оси плоскости s , которая соответствует $s^2 < -1$, т. е. $|\omega| > 1$. Точки O_1 и O_2 являются началом координат плоскостей λ^2 и s^2 соответственно.

Преобразование, соответствующее этому отображению, имеет вид

$$\lambda^2 = s^2 + 1. \quad (\text{XIV.200})$$

Если желательно наложить мнимую ось плоскости λ на участок $-1 < \omega < 1$ мнимой оси плоскости s , то необходимо в выражении (XIV.200) лишь изменить s на $\frac{1}{s}$. Тогда соответствующая переменная для рациональной функции, определяемой выражением (XIV.198), выразится как

$$\lambda^2 = \frac{s^2 + 1}{s^2}. \quad (\text{XIV.201})$$

Важное значение в данном случае имеет тот факт, что требуемое преобразование является рациональным, так что функция от

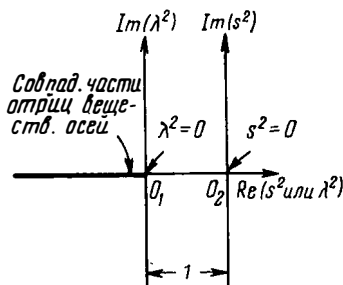


Рис. XIV.21

s^2 , определяемая выражением (XIV.198), остается рациональной и тогда, когда она представлена в виде функции от s^2 . Преобразования вида (XIV.200) или (XIV.201) относительно переменных λ или s являются, конечно, иррациональными и, следовательно, многозначными как для λ , так и для s . К счастью, функции, рассматриваемые в задачах аппроксимации, являются почти исключительно функциями квадрата частотной переменной.

Функция (XIV.198) имеет нули второго порядка на отрицательной вещественной оси плоскости λ^2 и полюсы, расположенные симметрично относительно ее вещественной оси. Связанные с преобразованием (XIV.201) эти критические частоты имеют точно такое же расположение в плоскости $\frac{1}{s^2}$, в связи с чем преобразованная по ф-лам (XIV.200) или (XIV.201) функция $F(s^2)$ имеет вид

$$F(s^2) = \frac{P(s^2)}{Q(s)Q(-s)}. \quad (\text{XIV.202})$$

В частности, при использовании выражения (XIV.200) функция $f(\lambda^2)$, определяемая выражением (XIV.198), преобразуется в функцию $F(s^2)$, причем

$$\frac{1}{4} [p(\lambda) + p(-\lambda)]^2 \rightarrow P(s^2); \quad (\text{XIV.203})$$

$$p(\lambda)p(-\lambda) \rightarrow Q(s)Q(-s). \quad (\text{XIV.204})$$

Однако не следует считать, что полином $p(\lambda)$ превращается непосредственно в полином $Q(s)$, ибо преобразование (XIV.200) может однозначно превращать только функцию от λ^2 в функцию от s^2 , а $p(\lambda)$ и $Q(s)$ не являются полиномами от этих аргументов. Тем не менее, полином $p(\lambda)$, который полностью определяет функцию $f(\lambda^2)$ [см. выражение (XIV.198)], однозначно определяет и полином $Q(s)$, если задано, что он должен быть полиномом Гурвица. В этом случае полином $Q(s)$ строят, используя расположенные в левой полуплоскости нули функции от s^2 , создаваемой произведением $Q(s)Q(-s)$. Указанное произведение появляется в результате подстановки ф-лы (XIV.200) в функцию от λ^2 , определяемую произведением $p(\lambda)p(-\lambda)$.

Переход от полинома Гурвица $p(\lambda)$ к полиному Гурвица $Q(s)$ или, наоборот, посредством преобразования, подобного (XIV.200), примененного к произведению $p(\lambda)p(-\lambda)$ или $Q(s)Q(-s)$, облегчается, когда известны нули полинома $p(\lambda)$ или $Q(s)$. Таким образом, если $\lambda_v = \bar{\sigma}_v \pm j\bar{\omega}_v$ являются нулями полинома $p(\lambda)$, то произведение $p(\lambda)p(-\lambda)$ состоит из множителей, представляющих собой полиномы четвертой степени вида

$$\lambda^4 - 2(\bar{\sigma}_v^2 - \bar{\omega}_v^2)\lambda^2 + (\bar{\sigma}_v^2 + \bar{\omega}_v^2)^2. \quad (\text{XIV.205})$$

Аналогично, если нули полинома $Q(s)$ обозначить через $s_v = \sigma_v \pm j\omega_v$, то произведение $Q(s)Q(-s)$ будет состоять из мно-

жителей, представляющих собой полиномы четвертой степени вида

$$s^4 - 2(\sigma_v^2 - \omega_v^2) s^2 + (\sigma_v^2 + \omega_v^2)^2. \quad (\text{XIV.206})$$

С учетом выражения (XIV.200) полином четвертой степени, определяемый выражением (XIV.205), преобразуется в полином четвертой степени от s^2 , который отождествляется с полиномом (XIV.206), и, таким образом, мы находим решение для σ_v и ω_v через $\bar{\sigma}_v$ и $\bar{\omega}_v$, или наоборот. По этим значениям s , далее можно построить полином $Q(s)$ и в случае необходимости произвести подстановку (XIV.201) вместо (XIV.200), а затем просто заменить s на $\frac{1}{s}$. На этом последнем этапе для получения полинома $Q(s)$, соответствующего данному случаю, может быть применено любое другое преобразование из описанных в § XIV.4.

Отождествляя полиномы, определяемые выражениями (XIV.205) и (XIV.206), и используя ф-лу (XIV.200), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_v^2 - \omega_v^2 &= \bar{\sigma}_v^2 - \bar{\omega}_v^2 - 1 \\ \sigma_v^2 + \omega_v^2 &= \sqrt{(\bar{\sigma}_v^2 - \bar{\omega}_v^2 - 1)^2 + 4\bar{\sigma}_v^2 \bar{\omega}_v^2} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{XIV.207})$$

Решение для σ_v и ω_v по заданным значениям $\bar{\sigma}_v$ и $\bar{\omega}_v$ получить просто. В алгебраических знаках не может быть никаких сомнений, ибо известно, что требуемый полином $Q(s)$ является полиномом Гурвица.

Построение полинома $Q(s)$ с помощью описанного процесса невозможно, когда функция $Q(s)Q(-s)$, получаемая из произведения $p(\lambda)p(-\lambda)$, имеет на мнимой оси нули нечетной кратности, так как тогда невозможно разделить их поровну между полиномами $Q(s)$ и $Q(-s)$. Подобное положение возникает, когда произведение $p(\lambda)p(-\lambda)$ имеет нули нечетной кратности на вещественной оси плоскости λ^2 в интервале $\lambda^2 < 1$. Хотя требование отдельного существования полинома $p(\lambda)$, казалось бы, предотвращает возможность того, чтобы функция $p(\lambda)p(-\lambda)$ имела нули нечетной кратности на мнимой оси плоскости λ (соответствующей отрицательной вещественной оси плоскости λ^2), этот полином, однако, может иметь такие нули в интервале $0 < \lambda^2 < 1$. В этом случае $p(\lambda)$ имеет нули нечетной кратности на вещественной оси плоскости λ в интервале $-1 < \lambda < 1$.

Разумеется, в подобных ситуациях все еще можно построить полином $Q(s)Q(-s)$ и, следовательно, найти требуемую аппроксимирующую функцию, но полином $Q(s)$ не будет существовать отдельно. Это обстоятельство приобретает важное значение в некоторых практических случаях и тогда необходимо учитывать ограничение, накладываемое на нули полинома $p(\lambda)$.

При переходе к обратной задаче от заданного полинома $Q(s)$, требуемого при построении полинома $p(\lambda)$, подобное ограничение не накладывается, ибо никакая часть положительной вещественной

оси плоскости s^2 не перекрывает отрицательную вещественную ось плоскости λ^2 (см. рис. XIV.21). При этом использование ф-л (XIV.200), (XIV.205) и (XIV.206) дает:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_v^2 - \bar{\omega}_v^2 &= \sigma_v^2 - \omega_v^2 + 1 \\ \bar{\sigma}_v^2 + \bar{\omega}_v^2 &= \sqrt{(\sigma_v^2 - \omega_v^2 + 1)^2 + 4\sigma_v^2\omega_v^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIV.208})$$

Когда нужно произвести подстановку выражения (XIV.201), а не (XIV.200), то соответствующие значения s , должны отождествляться с нулями полинома $Q\left(\frac{1}{s}\right)$, которые представляют собой величины, обратные нулям полинома $Q(s)$.

В плоскости s функция $F(s^2)$ имеет диаграмму полюсов и нулей, симметричную относительно вещественной и мнимой осей (так

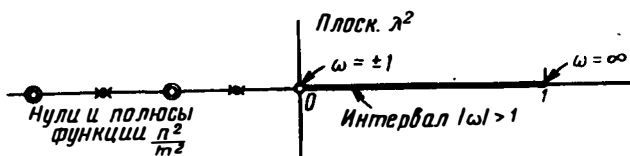


Рис. XIV.22

называемая «квadrантная» симметрия); то же можно сказать и о диаграмме полюсов и нулей функции $f(\lambda^2)$ в плоскости λ . При использовании выражения (XIV.201) функция $F(-\omega^2)$ является равноволновой в интервале $-1 < \omega < 1$. В точках $\omega = \pm 1$, соответствующих $\lambda = 0$, функция $F(-\omega^2)$ всегда равна $+1$, что наглядно подтверждается выражением (XIV.198), если принять $n = 0$ при $\lambda = 0$. В интервале $1 < |\omega| < \infty$, соответствующем $0 < \lambda^2 < 1$, свойства этой функции можно оценить, обратив внимание на то (рис. XIV.22), что квадрат реактивной функции $\frac{n^2}{m^2}$ в большинстве

случаев монотонно возрастает (начиная от нуля в точке $\omega = \pm 1$) в указанном интервале. Следовательно, функция $f(\lambda^2)$, которая принимает те же значения, что и функция $F(-\omega^2)$, также монотонно возрастает и проходит через значение ∞ при $\frac{n^2}{m^2} > 1$. Таким

образом, точное поведение функции $F(-\omega^2)$ в данном интервале зависит от полинома $p(\lambda)p(-\lambda)$ или соответствующего ему полинома $Q(s)Q(-s)$ в плоскости s . Заметим, что все полюсы и нули функции $\frac{n^2}{m^2}$ являются корнями второго порядка, за исключением нуля в точке $\lambda^2 = 0$, который является простым корнем.

Если функция $\frac{n^2}{m^2}$ принимает значение, равное единице, при некоторой положительной величине $\lambda^2 < 1$, то полином $p(\lambda)p(-\lambda)$ имеет простой нуль в том же интервале и, таким образом, возни-

кает отмеченный выше случай, когда полином $Q(s)$ не существует отдельно. Когда же процесс начинается с полинома $Q(s)$, то очевидно, что величина $\frac{n^2}{m^2}$ не может быть больше единицы в интервале $0 < \lambda^2 < 1$, за исключением некоторых дискретных точек.

Интересное применение изложенные результаты находят, если требуется построить сопротивление передачи фильтра нижних частот, который должен иметь равноволновую характеристику модуля и линейную или произвольную фазовую характеристику в полосе пропускания.

Чтобы получить требуемую фазовую характеристику, начнем с построения функции цепи, пропускающей все частоты,

$$Z_{12}(s) = \frac{Q(-s)}{Q(s)}. \quad (\text{XIV.209})$$

Для определенного таким образом полинома $Q(s)$ построим полином $p(\lambda)$ описанным выше методом и по его четной части из выражения (XIV.203) найдем полином $P(s^2)$, а затем $F(s^2)$, определяемый выражением (XIV.202). Далее образуем функцию

$$W(s^2) = K[1 - \varepsilon F(s^2)] = \frac{KT(s^2)}{Q(s)Q(-s)}, \quad (\text{XIV.210})$$

выбирая значения ε и K , которые дают функцию $W(-\omega^2)$ с нужным поведением (пока речь идет о требуемой частотной характеристике фильтра). Следует отметить, что функция $F(-\omega^2)$ остается ограниченной в интервале $|\omega| > 1$, так как полином $Q(s)$ в этом случае не имеет нулей на мнимой оси. Таким образом, можно выбрать значение ε , при котором $\varepsilon F(-\omega^2) \leq 1$. Значение K не является критическим, это просто произвольный множитель.

Поскольку диаграмма полюсов и нулей функции $W(s^2)$ полностью симметрична относительно вещественной и мнимой осей плоскости s , угол функции $W(-\omega^2)$ тождественно равен нулю. Поэтому функция

$$Z_{12}^*(s) = W(s^2)Z_{12}(s) = \frac{KT(s^2)}{Q^2(s)} \quad (\text{XIV.211})$$

имеет ту же фазу на мнимой оси, что и функция $Z_{12}(s)$, а ее модуль равен модулю функции $W(-\omega^2)$. Значит, данная функция является требуемой аппроксимирующей функцией.

Другому интересному случаю применения описанного метода соответствует разбиение симметричной диаграммы нулей функции

$$T(s^2) = t(s)t(-s), \quad (\text{XIV.212})$$

где $t(s)$ и $t(-s)$ имеют соответственно нули в левой и правой полуплоскостях. Далее можно выделить часть функции $W(s^2)$, соответствующую левой полуплоскости [см. выражение (XIV.210)], в виде минимально фазовой передаточной функции

$$H(s) = \frac{Kt(s)}{Q(s)}, \quad (\text{XIV.213})$$

квадрат модуля которой на мнимой оси равен модулю функции $W(-\omega^2)$.

Поскольку полином $Q(s)$ выбирается произвольно, здесь используется другой (отличный от изложенного в § XIV.6) метод построения функции, аппроксимирующей соответствующую требуемую расчетную характеристику фильтра с предварительно выбранными местоположениями полюсов. Этот метод находит важное применение при решении задачи аппроксимации, возникающей в процессе расчета RC цепей, полюсы функций которых расположены на отрицательной вещественной оси.

Если для построения функции $H(s)$, которая должна иметь при заданных полюсах, определяемых функцией $Q(s)$, требуемый модуль на мнимой оси, используется метод, описанный в § XIV.6, то очевидно, что очень большое количество амплитудно-частотных функций можно связать с заданной фазовой характеристикой. Эти результаты дополняют выводы, сделанные в § VIII.11, относительно того, в какой мере можно независимо контролировать частотную и фазовую характеристики.

Описываемый в настоящем параграфе процесс можно также использовать, как еще один метод построения модуля сопротивления, имеющего вид функции равных пульсаций в полосе задерживания и в полосе пропускания. В решении этой задачи, данным в § XIV.5, используются свойства эллиптических функций Якоби. Предлагаемый метод [45] приводит к тем же результатам, но более прямым путем и при расчетах нет необходимости использовать таблицы эллиптических функций.

Рассмотрим функцию $F(\omega)$, определяемую выражением (XIV.68), график которой показан на рис. XIV.10 для $n = 2$. Нули и полюсы ее расположены только на мнимой оси плоскости комплексной частоты. Нули ограничены полосой пропускания ($-1 < \omega < 1$), а полюсы — полосой задерживания ($|\omega| > 1$). Местоположения нулей обратны местоположениям полюсов. Что касается квадрата модуля сопротивления, определяемого выражением (XIV.9), то можно сказать, что функция, имеющая эту особую форму, будет в полосе задерживания (как показано в § XIV.5) автоматически иметь вид равноволновой функции, если расположение нулей в полосе пропускания будет таким, чтобы получить равноволновую функцию $F(\omega)$. Другими словами, задача построения низкочастотной рациональной аппроксимирующей функции, являющейся равноволновой как в полосе пропускания, так и в полосе задерживания, в соответствии с выражением (XIV.9) сводится к определению критических частот функции $F(\omega)$, определяемой выражением (XIV.68) или (XIV.69) и обладающей свойством функции равных пульсаций только в полосе пропускания.

Описанный в настоящем параграфе метод позволяет построить функцию, подобную функции $F(\omega)$, являющуюся равноволновой в полосе пропускания при любой заданной совокупности полюсов. Поставив условие, что полюсы должны лежать на мнимой оси в

точках, обратных точкам результирующих положений нулей, мы тем самым ставим условие, чтобы функция $F(\omega)$ имела требуемую форму.

Использование данного метода связано с некоторыми трудностями при проведении расчетов, ибо нельзя вычислить местоположение нулей, не определив совокупности полюсов, и, с другой стороны, нельзя требовать, чтобы полюсы располагались в точках, обратных местоположениям нулей, до тех пор, пока не определены нули. Можно, конечно, записать аналитические соотношения, выражающие отмеченное условие, и попробовать найти решение для неизвестных параметров, но такой процесс приводит к системе существенно нелинейных уравнений, непосредственно решить которые практически невозможно. Более целесообразно начать с некоторых местоположений полюсов, вычислить нули указанным методом, а затем определить ряд обратных местоположений полюсов. Повторение процесса вычислений не вызывает затруднений, и для требуемого решения он быстро сходится.

Ниже при подробном обсуждении этой операции будет рассмотрена задача применительно к высокочастотной (а не низкочастотной) характеристике, ибо подстановка ф-лы (XIV.200) несколько проще, чем ф-лы (XIV.201). Кроме того, в случае необходимости всегда можно перейти к соответствующей низкочастотной функции. Далее важно подчеркнуть, что описываемый процесс дает функцию, для которой границами области равных пульсаций являются точки $\omega = \pm 1$. В то же время функции, определяемые выражениями (XIV.68) и (XIV.69), нормализованы по частоте так, что границами области равных пульсаций являются точки $\omega = \pm \sqrt{k}$ (причем для высокочастотных функций, получаемых путем замены ω на $\frac{1}{\omega}$, эти точки соответствуют $\omega = \pm \frac{1}{\sqrt{k}}$). Прежде чем сравнивать данные результаты с результатами, полученными методом, описанным в § XIV.5, необходимо изменить масштаб частоты.

Для фильтра высоких частот интервал $-1 < \omega < 1$ является полосой задерживания. Предполагается, что полюсы $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ для функции, подобной (XIV.68), при замене ω на $\frac{1}{\omega}$ находятся в указанном интервале. Это полюсы $s_v = j\omega_v$, для которых нужно вычислить соответствующие критические частоты λ_v в плоскости λ , используя выражения (XIV.208). Ввиду того, что $\sigma_v = 0$, из этих выражений следует, что $\bar{\omega}_v = 0$ и

$$\bar{\sigma}_v = \pm \sqrt{1 - \omega_v^2}. \quad (\text{XIV.214})$$

Двумя точками в левой полуплоскости λ , соответствующими $s_v = \pm j\omega_v$, являются точки $\lambda_v = -\bar{\sigma}_v \pm j\bar{\omega}_v$, но ввиду того, что $\bar{\omega}_v = 0$, они совпадают и дают квадратный член $(\lambda + \bar{\sigma}_v)^2$. Тогда

полином Гурвица $p(\lambda)$ можно представить как

$$p(\lambda) = (\lambda + \bar{\sigma}_1)^2(\lambda + \bar{\sigma}_3)^2 + \dots + (\lambda + \bar{\sigma}_{2n-1})^2, \quad (\text{XIV.215})$$

где значения $\bar{\sigma}$, вычисляются по заданным или предполагаемым значениям $\omega_1, \omega_3, \dots, \omega_{2n-1}$ из выражения (XIV.214).

Нули равноволновой функции в плоскости λ^2 [см. выражение (XIV.202) или (XIV.203)] являются нулями четной части полинома $p(\lambda)$. Ее легко вычислить из выражения (XIV.215), а соответствующие нули в плоскости s^2 или s затем также без труда вычисляются подстановкой ф-лы (XIV.200). Таким образом, создана база для интересующего нас итеративного процесса.

Следует отметить, что этот метод позволяет получить четную функцию, подобную (XIV.68), так как точка $s = \infty$ (соответствующая точке $\lambda = \infty$) дает функцию $f(\lambda^2) = +1$ в выражении (XIV.198) [ибо четная часть (XIV.215) всегда имеет степень на единицу выше, чем степень нечетной части], поэтому при $\omega = \infty$ получается $F(-\omega^2) = +1$. Другими словами, значение равноволновой функции в «середине полосы» является точкой максимального отклонения от нуля. Для рассматриваемой высокочастотной функции точкой, соответствующей «середине полосы», является $\omega = \infty$, а для низкочастотной функции, определяемой выражением (XIV.68), $-\omega = 0$.

Для того чтобы получить нечетную функцию, подобную (XIV.69), необходимо взять один из предполагаемых полюсов на мнимой оси плоскости s в точке $\omega = 0$ и остальные в точках $\omega_2, \omega_4, \dots, \omega_{2n}$. Для полюса в точке $\omega = 0$ согласно выражению (XIV.214) получим $\bar{\sigma} = \pm 1$, поэтому полином Гурвица $p(\lambda)$ содержит простой множитель $\lambda + 1$.

В частности, вместо выражения (XIV.215) имеем

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + \bar{\sigma}_2)^2(\lambda + \bar{\sigma}_4)^2 \dots (\lambda + \bar{\sigma}_{2n})^2, \quad (\text{XIV.216})$$

где $\bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_4, \dots, \bar{\sigma}_{2n}$ снова вычислены по заданным или предполагаемым значениям $\omega_2, \omega_4, \dots, \omega_{2n}$ согласно выражению (XIV.214).

Снова образуем четную часть $p(\lambda)$, найдем ее нули в плоскости λ^2 и преобразуем их в нули в плоскости s^2 , используя ф-лу (XIV.200); таким образом, вычислены нули в плоскости s . Обратные величины дадут уточненные местоположения полюсов. Однако они не являются обратными величинами по отношению к единице, так как она разделяет границу области равных пульсаций (как указывалось выше) и не соответствуют единице в масштабе частоты для функций (XIV.68) и (XIV.69) или рис. XIV.10. Здесь необходимо использовать величину, обратную по отношению к постоянной k , которая должна играть ту же роль, что и в случае, рассмотренном в § XIV.5.

Рассмотрим несколько примеров, лучше всего иллюстрирующих предложенный метод. Предположим, что процесс начинается с построения нечетной функции [эквивалент высокочастотной характе-

ристики (XIV.69) при $n = 1$]. В плоскости s один полюс располагается в точке $\omega = 0$, а два — в точках $s = \pm j\omega_2$ при $0 < \omega_2 < 1$. Из выражения (XIV.214) находим

$$\bar{\sigma}_2 = \sqrt{1 - \omega_2^2}. \quad (\text{XIV.217})$$

Согласно (XIV.216) имеем

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + \bar{\sigma}_2)^2 = \lambda^3 + (1 + 2\bar{\sigma}_2)\lambda^2 + (2\bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_2^2)\lambda + \bar{\sigma}_2^2. \quad (\text{XIV.218})$$

Четная часть

$$m(\lambda) = (1 + 2\bar{\sigma}_2)\lambda^2 + \bar{\sigma}_2^2 \quad (\text{XIV.219})$$

имеет нуль

$$\lambda_2^2 = \frac{-\bar{\sigma}_2^2}{1 + 2\bar{\sigma}_2}. \quad (\text{XIV.220})$$

Предположим, что $\omega_2 = 0,8$. Из выражения (XIV.217) вычислим $\bar{\sigma}_2 = 0,6$, а из выражения (XIV.220) — $\lambda_2^2 = -\frac{0,36}{2,2} = -0,1635$.

Соответствующие нули в плоскости s получаем путем подстановки ф-лы (XIV.200). Тогда $s_2^2 = \lambda_2^2 - 1 = -1,1635 = -u_v^2$, где нули обозначены через u_v , чтобы не перепутать их с полюсами ω_v . Теперь введем обратное соотношение между нулями и полюсами плоскости s ¹

$$u_v = \frac{k}{\omega_v}, \text{ или } u_v^2 = \frac{k^2}{\omega_v^2}. \quad (\text{XIV.221})$$

В нашем примере это соотношение имеет вид

$$1,1635 = \frac{k^2}{0,64}, \quad (\text{XIV.222})$$

откуда

$$k^2 = 0,745. \quad (\text{XIV.223})$$

Приведенный пример слишком прост для итерации. Для каждого предполагаемого значения ω_2 мы находим соответствующую величину k , являющуюся угловой частотой, ниже которой значение рассматриваемой равноволновой функции много больше гарантированного эквимиимального значения. Функция, получаемая в

¹ Для масштаба частоты функций, определяемых выражениями (XIV.68) и (XIV.69), следовало бы принять $u_v^* \omega_v^* = 1$. Используемый масштаб связан с указанным масштабом выражением $u = u' \sqrt{k}$ или $\omega = \omega' \sqrt{k}$. Отсюда $u_v \omega_v = u_v^* \omega_v^* k = k$.

этом примере (при условии выбора соответствующего множителя для нормализации амплитуды к единице при $\omega = \sqrt{k}$), имеет вид

$$F(\omega) = \frac{(u_2^2 - \omega^2)}{\sqrt{k}\omega \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)} = \frac{1,076(1,1635 - \omega^2)}{\omega(1 - 1,563\omega^2)}. \quad (\text{XIV.224})$$

Если сжать масштаб частоты путем замены ω на $\omega\sqrt{k}$, то он становится сравнимым с масштабом, использованным в функциях (XIV.68) и (XIV.69). Тогда функция

$$F(\omega) = \frac{(1,345 - \omega^2)}{\omega(1 - 1,345\omega^2)} \quad (\text{XIV.225})$$

после замены ω на $\frac{1}{\omega}$ (что эквивалентно обратной функции) превращается в низкочастотную.

Далее рассмотрим четную функцию для $n = 2$. Выберем $k = 0,75$ и в качестве первого предположения примем

$$\omega_1 = 0,5; \quad \omega_3 = 0,707. \quad (\text{XIV.226})$$

Значения $\bar{\sigma}$, вычисленные из выражения (XIV.214), будут равны

$$\bar{\sigma}_1 = 0,866; \quad \bar{\sigma}_3 = 0,707. \quad (\text{XIV.227})$$

Тогда соответствующие квадратные множители полинома $p(\lambda)$ принимают вид

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 0,866)^2 &= \lambda^2 + 1,732\lambda + 0,75 \\ (\lambda + 0,707)^2 &= \lambda^2 + 1,414\lambda + 0,50 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{XIV.228})$$

Четная часть произведения таких множителей определяется полиномом

$$m(\lambda) = \lambda^4 + 3,70\lambda^2 + 0,375. \quad (\text{XIV.229})$$

Его нули равны

$$\lambda_1^2 = -3,60; \quad \lambda_3^2 = -0,10, \quad (\text{XIV.230})$$

откуда

$$s_1^2 = -4,60 = -u_1^2; \quad s_3^2 = -1,10 = -u_3^2; \quad (\text{XIV.231})$$

$$u_1 = 2,15; \quad u_3 = 1,05. \quad (\text{XIV.232})$$

По выражению (XIV.221) теперь можно найти уточненные положения полюсов:

$$\omega_1 = \frac{0,75}{2,15} = 0,349; \quad \omega_3 = \frac{0,75}{1,05} = 0,715. \quad (\text{XIV.233})$$

При первой итерации производим последовательные вычисления:

$$\bar{\sigma}_1 = 0,937; \quad \bar{\sigma}_3 = 0,700; \quad (\text{XIV.234})$$

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 0,937)^2 &= \lambda^2 + 1,874\lambda + 0,877 \\ (\lambda + 0,700)^2 &= \lambda^2 + 1,40\lambda + 0,49 \end{aligned} \right\}; \quad (\text{XIV.235})$$

$$m(\lambda) = \lambda^4 + 3,987\lambda^2 + 0,43 = 0; \quad (\text{XIV.236})$$

$$\lambda_1^2 = -3,878; \quad \lambda_3^2 = -0,108; \quad (\text{XIV.237})$$

$$s_1^2 = -4,878 = -u_1^2; \quad s_3^2 = -1,108 = -u_3^2; \quad (\text{XIV.238})$$

$$u_1 = 2,21; \quad u_3 = 1,051 \quad (\text{XIV.239})$$

и, наконец,

$$\omega_1 = \frac{0,75}{2,21} = 0,340; \quad \omega_3 = \frac{0,75}{1,051} = 0,713. \quad (\text{XIV.240})$$

Очевидно, что процесс сходится хорошо.

Нормализация по амплитуде и частоте для приведения результата к обычной форме (XIV.68) производится указанным выше способом. Таким образом, можно рассчитать и построить любую из функций (XIV.68) или (XIV.69) простым методом без помощи таблиц эллиптических функций.



Синтез во временной области

XV.1. Предварительные замечания

При синтезе во временной области (иногда называемом также *синтезом по переходным характеристикам*) требуется найти цепь, переходная характеристика которой, определяется через известные входную и выходную временные функции. Основная особенность этой задачи состоит в том, что входной и выходной сигналы представляют собой временные функции, а не функции частоты, как это было почти во всех предыдущих случаях.

Учитывая, что методы преобразования Фурье или Лапласа позволяют преобразовывать заданные входную и выходную временные функции в эквивалентные функции комплексной частоты s , первоначально может показаться, что, по существу, нет ничего нового в подобной постановке общей задачи синтеза. Если заданные функции преобразованы (графически или аналитически) в частотную область, то рассмотренные в предыдущих главах методы должны дать способ нахождения решения.

Эти методы действительно позволяют найти решение. Однако при рассмотрении соответствующей задачи аппроксимации (когда осуществляется построение приемлемой рациональной аппроксимирующей функции для требуемой частотной функции) нельзя учесть допуски в частотной области, так как в конечном счете нас интересует качество аппроксимации во временной области, для которой первоначально заданы требования. Здесь приходится одновременно рассматривать как временную, так и частотную области и взаимосвязь погрешностей в этих двух областях.

Таким образом, синтез во временной области приводит к необходимости исследования ряда дополнительных вопросов, связанных с задачей аппроксимации. Как только найдена рациональная аппроксимирующая функция, уже не остается никакой разницы между синтезом во временной или частотной области. Иными словами, оба метода различаются лишь некоторыми моментами, и, следовательно, синтез во временной области сводится, по существу, к рас-

пространению полученных в главе XIV выводов на задачи, относящиеся к этой области.

Можно, конечно, найти методы построения цепей с требуемыми формами переходной характеристики, совершенно не прибегая к преобразованиям Лапласа или к рассмотрению задачи в частотной области. Хорошее знание свойств переходных характеристик цепей, состоящих из комбинаций простых элементов, позволяет непосредственно решить ряд такого рода задач, особенно, если требуемые допуски не являются жесткими. При этом можно использовать интуитивные соображения, эксперимент и получить удовлетворительные результаты, воспользовавшись методом последовательных приближений. Однако там, где мы ищем решения с тщательно отрегулированными допусками, указанный прямой подход во временной области пока неосуществим, несмотря на то, что уже найдены пути решения задачи аппроксимации (получение рациональных аппроксимирующих функций), в которых управление погрешностью производится только во временной области (см. ниже, § XV.6 и XV.7) ¹.

Как отмечалось в главе XIV, задача аппроксимации связана в основном с двумя вопросами. Во-первых, нужно получить требуемые функции, а, во-вторых,— удовлетворить условиям физической реализуемости результирующей рациональной аппроксимирующей функции. Последнее вносит в проблему синтеза во временной области дополнительную трудность, так как ранее условия реализуемости относились к функциям частоты, тогда как в данном случае они должны быть применимы непосредственно к указанным временным функциям. Другими словами, необходимо в самом начале определить, существует ли соответствующая рациональная аппроксимирующая функция.

Вопрос о существовании такой функции недостаточно четко разработан, поскольку ответ на него зависит до некоторой степени от погрешностей, допустимых при решении рассматриваемой задачи аппроксимации. Если допускается произвольное отклонение от первоначально заданных входной и выходной временных функций, то всегда существуют аппроксимирующая функция, удовлетворяющая этим требованиям, и условия реализуемости. Поэтому, хотя практически неразумно требовать очень четкой формулировки критерия осуществимости, нет необходимости пояснять зависимость между природой и порядком величин погрешностей, с одной стороны, и условиями реализуемости, с другой. Если понятны свойства

¹ Другой способ, который также устраняет необходимость учета связи погрешностей в частотной и временной областях, дан А. Папулисом [46]. Он использует преобразование независимой переменной с предварительным выбором полюсов; однако это приводит к тому, что характер аппроксимации, связь между допусками и сложность результирующей рациональной аппроксимирующей функции трудно оценить.

Синтез во временной области рассматривается также в работах [58], [61—68] (прим. ред.).

функции во временной области, от которых зависит реализуемость, то можно справиться с этой дополнительной трудностью, вносимой в проблему аппроксимации при синтезе в данной области.

Когда заданная входная функция представляет собой импульс или ступенчатый сигнал, появляющийся при $t = 0$, а выходной сигнал является ограниченной функцией времени, имеющей конечную длительность, и равной нулю до момента $t = 0$, то всегда существует реализуемая аппроксимирующая функция в частотной области (в виде передаточной функции). Когда же входная функция времени также ограничена, равна нулю до момента времени $t = 0$ и имеет конечную длительность, но произвольную форму, то реализуемая аппроксимирующая функция в частотной области не всегда может существовать. Это объясняется тем, что отношение лапласовых изображений выходного сигнала к входному (или приемлемых аппроксимирующих функций, соответствующих указанным функциям времени) может иметь полюсы в правой полуплоскости. Фактически, такие полюсы появляются всякий раз, когда изображение входной функции времени имеет расположенные в правой полуплоскости нули, не содержащиеся в изображении выходной функции времени.

Рассмотрим простые, применимые непосредственно к известным функциям времени численные методы, которые позволят нам с самого начала решить поставленную задачу. По-видимому, в общем случае любой вид выходного сигнала можно получить из любого вида входного сигнала (в разумных пределах), если допустить достаточную задержку в выходной функции времени. Применительно к обычной задаче синтеза во временной области мы, естественно, должны исследовать возможность того, являются ли изображения Лапласа для упомянутых входных и выходных функций времени рациональными. При этом для решения задачи аппроксимации не существенно, возникает отмеченная выше трудность, связанная с расположением полюсов в правой полуплоскости, или нет. Лишь функции времени, изображения которых рациональны, содержат суммы экспоненциальных функций вида $Ae^{s_v t}$, однако, вряд ли любые заданные функции времени могут быть представлены в такой форме. Если бы существовал способ, посредством которого произвольные функции времени можно было систематически аппроксимировать с любой требуемой точностью и определенным образом суммируя экспоненциальные функции, то наша задача была бы решена. К сожалению, разложение Фурье дает такое решение только для периодических функций времени¹.

¹ Теоретически можно, конечно, построить ряд ортогональных нормальных функций в виде линейной комбинации экспоненциальных функций, а затем применить хорошо известные методы для выполнения требуемой аппроксимации. Однако на практике они оказываются непригодными и ввиду необходимости большого количества вычислений, и из-за того, что величина s_v должна быть известна заранее.

В большинстве случаев для функций времени, заданных аналитически или графически, изображения, а также их отношение (требуемая передаточная функция в частотной области) оказываются трансцендентными функциями комплексной частоты. Например, если выходная функция времени аналогична по форме входной функции времени (с точностью до относительной задержки порядка 1 сек), то передаточная функция будет просто функцией вида e^{-s} . Для синтеза такой результат непригоден, если только нельзя построить рациональную аппроксимирующую функцию для этой трансцендентной функции с тем, чтобы качество аппроксимации можно было оценить во временной области. Из опыта известно, что кажущаяся хорошей аппроксимация в частотной области может оказаться совершенно неприемлемой во временной области.

Если по какой-либо причине аппроксимация все же предварительно осуществляется в частотной области, возникают два основных вопроса: 1) в какой области плоскости s и каким образом можно осуществить аппроксимацию комплексной трансцендентной функции? 2) как погрешности, возникающие при аппроксимации в частотной области, можно преобразовать во временную область для получения возможности достаточно простого управления ими в этой последней?

Разумный ответ на оба вопроса определяется достаточными условиями для вещественной части входной или передаточной функций на мнимой оси в зависимости от сложности и однозначности нахождения не только этой комплексной функции, но также ее оригинала во временной области (как показано в главе VIII). Таким образом, вещественную часть требуемой трансцендентной функции на мнимой оси можно аппроксимировать посредством отношения конечных полиномов от ω^2 с гарантией, что соответствующую комплексную функцию (имеющую полюсы только в левой полуплоскости) всегда можно однозначно построить. Более того, поскольку оригинал (временная функция) однозначно и линейно связан с вещественной частью комплексной частотной функции на мнимой оси, связь между погрешностями в обеих областях определяется непосредственно. Это объясняется тем, что аддитивные члены вещественной части на мнимой оси раздельно преобразуются в аддитивные члены временной функции, причем не требуется определять, является ли соответствующая функция минимально фазовой или неминимально фазовой.

Поскольку оригинал комплексной передаточной функции представляет собой импульсную характеристику цепи, задача синтеза во временной области легче всего решается, когда заданные параметры требуют определенной выходной функции времени на произвольное возбуждение. Если входная функция времени имеет произвольную форму, сначала определяют импульсную характеристику по двум — входной и выходной — функциям времени, а затем рассматривают более простую задачу, для которой импульсная характеристика определяется непосредственно.

При таком подходе необходимы дополнительные методы определения импульсной характеристики для произвольных заданных входной и выходной функций (включая критерий осуществимости), а чтобы упростить синтез этой импульсной характеристики, нужно разработать методы вычислений, ускоряющие переход от временной области к частотной (и наоборот) с тем, чтобы можно было эффективно контролировать погрешность. Эти вопросы изложены в следующих параграфах.

XV.2. Численные методы, упрощающие связь между временной и частотной областями

Запишем известные интегралы Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega; \quad (\text{XV.1})$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (\text{XV.2})$$

в которых $F(j\omega)$ можно рассматривать как обычную функцию (входную или передаточную) при подстановке $s = j\omega$, а $f(t)$ — как соответствующую единичную импульсную характеристику исследуемой цепи¹.

Если разбить функцию $f(t)$ на сумму четной и нечетной частей

$$f(t) = f_{\text{ч}}(t) + f_{\text{н}}(t) \quad (\text{XV.3})$$

и представить комплексную функцию $F(j\omega)$ в виде

$$F(j\omega) = F_1(\omega) + jF_2(\omega), \quad (\text{XV.4})$$

то оказывается, что

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{ч}}(t) \cos \omega t dt; \quad F_2(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{н}}(t) \sin \omega t dt. \quad (\text{XV.5})$$

Из этого выражения замечаем, что вещественная и мнимая части функции $F(j\omega)$ являются соответственно четной и нечетной функциями от ω .

Подставим выражение (XV.4) в интеграл (XV.1) и разобьем последний на два интеграла, тогда оригиналы, соответствующие преобразованиям (XV.5), будут иметь вид

$$f_{\text{ч}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) \cos \omega t d\omega; \quad f_{\text{н}}(t) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (\text{XV.6})$$

¹ Т. е. реакцию цепи при воздействии в виде единичного импульса (прим. ред.).

Здесь, так же как и в соотношениях (XV.5), пределы интегрирования можно распространить только на положительные значения независимой переменной, а результат необходимо умножить на два, так как подынтегральные выражения являются четными функциями.

Если предположить, что временная функция равна нулю при $t < 0$, то оказывается, что $f_{\text{ч}}(t)$ и $f_{\text{н}}(t)$ при этом сокращаются и, следовательно, при $t > 0$ они должны быть равны друг другу. Значит, функция $f(t)$ при $t > 0$ равна либо удвоенной функции $f_{\text{ч}}(t)$, либо удвоенной функции $f_{\text{н}}(t)$. Из соотношений (XV.6) получим

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_1(\omega) \cos \omega t \, d\omega = \frac{-2}{\pi} \int_0^{\infty} F_2(\omega) \sin \omega t \, d\omega. \quad (\text{XV.7})$$

Поскольку импульсная характеристика пассивной цепи должна быть равна нулю до возбуждения (предполагается, что оно прикладывается при $t = 0$), то достаточно одной вещественной или мнимой части функции $F(j\omega)$, чтобы характеризовать эту импульсную реакцию (другие аспекты данного вопроса уже рассматривались ранее, в главе VIII).

Оба интеграла выражения (XV.7) получены из соотношений (XV.5) при условии, что удвоенная функция $f_{\text{ч}}(t)$ или удвоенная функция $f_{\text{н}}(t)$ равна $f(t)$ при $t > 0$. Таким образом, получаем

$$F_1(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt; \quad F_2(\omega) = - \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt. \quad (\text{XV.8})$$

Если вместо интегралов (XV.1) и (XV.2) использовать интегралы (XV.7) и (XV.8), то функцию, которая однозначно характеризует функцию $f(t)$ в частотной области, можно выразить либо через $F_1(\omega)$, либо через $F_2(\omega)$. Подобно $f(t)$, она также является вещественной функцией вещественной переменной, и нет необходимости при рассмотрении связи допусков во временной и частотной областях вводить комплексную функцию частоты. Требованиям, предъявляемым к функции $f(t)$, можно удовлетворить с помощью рациональной функции в частотной области $F_1(\omega)$ вместо комплексной функции $F(j\omega)$ ¹. Такую рациональную функцию легко построить, используя, например, методы, рассмотренные в главе VIII.

Особый интерес в данном случае представляет наличие бесконечно коротких импульсов в вещественной части функции $F_1(\omega)$. Как отмечалось в § VIII.2, импульсы связаны с расположенными на мнимой оси полюсами комплексной функции $F(j\omega)$, причем величина каждого импульса в π раз больше вычета этой функции в соответствующем полюсе [см. выражения (VIII.57) — (VIII.61)].

¹ Можно также использовать мнимую часть функции $F_2(\omega)$. Выбор определяется свойствами функции $f(t)$.

Метод преобразования заданной вещественной части функции $F_1(\omega)$ в соответствующую ей функцию $f(t)$ или наоборот основан на такой аппроксимации, при которой аппроксимирующая функция, или ее первая производная, либо производные более высоких порядков состоят из последовательности бесконечно коротких импульсов (следующих друг за другом на регулярных или нерегулярных интервалах). Если, например, данная функция аппроксимируется прямоугольниками или импульсами конечной длительности, а каждый из них — бесконечно коротким импульсом, величина которого равна площади соответствующего импульса, то бесконечно короткие импульсы рассматриваются как «выборки» (элементы) функции, а их последовательность представляет собой заданную функцию в так называемой квантованной форме.

Такая форма представления является приближенной не только потому, что последовательность прямоугольных импульсов дает ступенчатую аппроксимацию заданной функции, но и потому, что при замене каждого импульса бесконечно коротким импульсом появляется дополнительный источник погрешности. Последняя аппроксимация вносит зависящую от времени ошибку при вычислении функции $f(t)$ [см. первый интеграл выражения (XV.7)] или частотнозависимую ошибку при вычислении $F_1(\omega)$ [см. первый интеграл выражения (XV.8)], так как $\cos \omega t$ в действительности изменяется по всей конечной длительности элемента, тогда как замена последнего бесконечно коротким импульсом исключает возможность подобного изменения.

Указанная погрешность полностью уничтожается при дифференцировании ступенчатой аппроксимации заданной функции, поскольку этот процесс преобразует ее в последовательность бесконечно коротких импульсов без дополнительных погрешностей. Влияние дифференцирования на соответствующую функцию $f(t)$ или $F_1(\omega)$ (в зависимости от обстоятельств) сводится, по существу, к умножению соответственно на t или ω (в этом случае алгебраический знак не играет роли и его можно не учитывать). Единственная остающаяся погрешность обусловлена ступенчатым характером аппроксимирующей функции. Уменьшение этой погрешности требует увеличения общего числа членов в аппроксимации.

Следует отметить, что можно получить более полезный результат, применяя кусочно-линейную или линейно-ломаную аппроксимацию заданной функции. При этом необходимы два последовательных дифференцирования с тем, чтобы свести аппроксимирующую функцию к сумме бесконечно коротких импульсов, общее число которых равно числу точек излома кусочно-линейной аппроксимации. При некоторой заданной погрешности число точек излома оказывается значительно меньше числа членов, получающихся при ступенчатой аппроксимации.

Логически возможно дальнейшее уменьшение числа членов для заданной погрешности или уменьшение ее для заданного числа членов, если воспользоваться кусочно-параболической аппроксима-

цией данной функции, соответствующей кусочно-линейной аппроксимации первой производной этой функции. Однако, тогда может потребоваться большее число точек излома, чем при кусочно-линейной аппроксимации, так что такой метод не обязательно приведет к дальнейшему уменьшению числа членов, хотя он, конечно, уменьшает результирующую погрешность. К детальному рассмотрению упомянутого круга вопросов мы вернемся позже, а сейчас найдем интеграл Фурье для случая указанной выше последовательности бесконечно коротких импульсов.

Заметим прежде всего, что в изложенных приближенных методах интегрирования мы всегда рассматриваем функцию $F_1(\omega)$ в конечном частотном интервале, который можно определить как нормализованный интервал $0 < \omega < 1$. При этом особое внимание следует уделить влиянию ограничения асимптоты, необходимого для получения такого представления, и способу, с помощью которого можно, тем не менее, учитывать зависимость между поведением функций $F(j\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$ и $f(t)$ при $t \rightarrow 0$.

При аналогичном переходе от $f(t)$ к $F_1(\omega)$ функция времени также считается отличной от нуля только в конечном интервале, что обеспечивается соответствующей компенсацией, позволяющей пренебречь ее подлинным асимптотическим поведением.

Если учесть, что функция $F_1(\omega)$ четная, причем ее производные нечетного порядка являются нечетными, а производные четного порядка — четными, то кусочно-линейная аппроксимация $(\nu - 2)$ -й производной в n точках излома даст для производной порядка ν следующее импульсное представление:

$$F_1^{(\nu)}(\omega) = \sum_{k=1}^n a_k [u_0(\omega - \omega_k) + (-1)^\nu u_0(\omega + \omega_k)]. \quad (\text{XV.9})$$

Используя выводы, касающиеся связи выражений (VIII.59) и (VIII.60), и заметив также, что $\frac{d}{ds} = \frac{d}{jd\omega}$, видим, что комплексную функцию $F(s)$ с вещественной частью, определяемой выражением (XV.9), можно записать так:

$$F^{(\nu)}(s) = \frac{1}{\pi(j)^\nu} \sum_{k=1}^n a_k \left[\frac{1}{s - j\omega_k} + (-1)^\nu \frac{1}{s + j\omega_k} \right], \quad (\text{XV.10})$$

где индекс ν обозначает ν -ю производную по s . Коэффициенты a_k в выражениях (XV.9) и (XV.10) определяют изменения крутизны линейно-ломаной аппроксимации в точках излома, т. е. на частотах $\omega = \omega_k$.

Поскольку ν -кратное дифференцирование функции $F(s)$ соответствует умножению $f(t)$ на $(-t)^\nu$, а функцию времени, получающуюся из функции, стоящей в квадратных скобках выражения (XV.10), можно найти непосредственно, то очевидно, что функция

времени, соответствующая требуемой вещественной части функции $F_1(\omega)$, определяется как

$$f(t) = \frac{2(-1)^{\frac{\nu}{2}}}{\pi t^\nu} \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos \omega_k t \text{ для четного } \nu; \quad (\text{XV.11})$$

$$f(t) = \frac{2(-1)^{\frac{\nu+1}{2}}}{\pi t^\nu} \sum_{k=1}^n \alpha_k \sin \omega_k t \text{ для нечетного } \nu. \quad (\text{XV.12})$$

В качестве примера, иллюстрирующего использование этих зависимостей, рассмотрим трапецидальную вещественную часть функции, график которой изображен в верхней части рис. XV.1. В нижней части этого рисунка построены графики первой и второй производных, причем последняя имеет вид функции, содержащей бесконечно короткие импульсы, т. е.

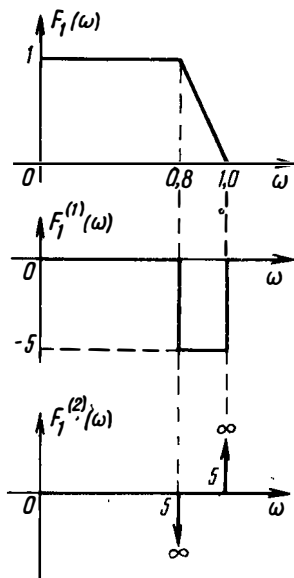


Рис. XV.1

$$F_1^{(2)}(\omega) = -5u_0(\omega - 0,8) + 5u_0(\omega - 1). \quad (\text{XV.13})$$

Подстановка ее в выражение (XV.11) дает соответствующую функцию времени

$$f(t) = \frac{10}{\pi t^2} (\cos 0,8t - \cos t), \quad (\text{XV.14})$$

имеющую начальное значение $f(0) = \frac{9}{5\pi}$, как и должно быть, поскольку это значение с учетом первого из интегралов выражения (XV.7) равно полной площади под кривой вещественной части функции, умноженной на $\frac{2}{\pi}$.

В данном случае функция времени не изменяется скачкообразно при $t = 0$, как можно было бы ожидать по первому впечатлению от выражения (XV.14). Надлежащее поведение функции $f(t)$ в точке $t = 0$ объясняется условием, которому автоматически удовлетворяют коэффициенты α_k в результате подразумеваемого асимптотического поведения функции $F(s)$. Учитывая, что функция $F_1(\omega)$, график которой показан на рис. XV.1, является неотрицательной, угол функции $F(s)$ по абсолютному значению не превышает $\frac{\pi}{2}$. Это означает, что при большом s функция $F(s)$ ведет себя подобно

$\frac{1}{s}$, а $f(t)$ — подобно ступенчатой функции в точке $t = 0$. Далее мы остановимся на этом более подробно.

Аналогично можно получить функцию $f(t)$ по мнимой части функции $F_2(\omega)$. Поскольку последняя является нечетной, а ее производные нечетного порядка представляют собой четные функции, импульсное представление ее ν -й производной [аналогичное представлению (XV.9) для вещественной части] будет

$$F_2^{(\nu)}(\omega) = \sum_{k=1}^n b_k [u_0(\omega - \omega_k) - (-1)^\nu u_0(\omega + \omega_k)]. \quad (\text{XV.15})$$

Тогда вместо выражения (XV.10) имеем

$$F^{(\nu)}(s) = \pi \frac{1}{(j)^{(\nu-1)}} \sum_{k=1}^n b_k \left[\frac{1}{s - j\omega_k} - (-1)^\nu \frac{1}{s + j\omega_k} \right], \quad (\text{XV.16})$$

а для функции времени находим

$$f(t) = \frac{2(-1)^{\frac{\nu+1}{2}}}{\pi t^\nu} \sum_{k=1}^n b_k \cos \omega_k t \quad \text{для нечетного } \nu; \quad (\text{XV.17})$$

$$f(t) = \frac{2(-1)^{\frac{\nu+2}{2}}}{\pi t^\nu} \sum_{k=1}^n b_k \sin \omega_k t \quad \text{для четного } \nu. \quad (\text{XV.18})$$

Найдем средства, позволяющие управлять поведением функции $f(t)$ в точке $t = 0$, соответствующим заданному асимптотическому поведению функции $F(s)$, для чего запишем модифицированную форму выражения (XV.1)

$$(-t)^\nu f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^{(\nu)}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (\text{XV.19})$$

Это выражение получается посредством дифференцирования выражения (XV.2) под знаком интеграла. Если теперь записать разложение Маклорена

$$(-t)^\nu f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_\mu t^\mu + \dots, \quad (\text{XV.20})$$

то коэффициенты разложения определяются из выражения

$$c_\mu = \frac{1}{2\pi \mu!} \int_{-\infty}^{\infty} (j\omega)^\mu F^{(\nu)}(j\omega) d\omega. \quad (\text{XV.21})$$

Заметим, что

$$F^{(\nu)}(j\omega) = \frac{1}{(j)^\nu} [F_1^{(\nu)}(\omega) + jF_2^{(\nu)}(\omega)], \quad (\text{XV.22})$$

потому что индекс (ν) при функции $F(j\omega)$ означает дифференцирование по $j\omega$, тогда как при $F_1(\omega)$ или $F_2(\omega)$ он означает дифференцирование по ω . С учетом ф-л (XV.9) и (XV.15) из выражения (XV.21) находим:

$$c_\mu = \frac{(-1)^\nu (j)^\nu + \mu}{\pi \mu!} \sum_{k=1}^n a_k \omega_k^\mu \text{ для четного } (\nu + \mu); \quad (\text{XV.23})$$

$$c_\mu = \frac{(-1)^\nu (j)^\nu + \mu + 1}{\pi \mu!} \sum_{k=1}^n b_k \omega_k^\mu \text{ для нечетного } (\nu + \mu). \quad (\text{XV.24})$$

Если асимптотическое поведение функции $F(s)$ при $s \rightarrow \infty$ описывается выражением

$$F(s) \rightarrow \frac{1}{s^q}, \quad (\text{XV.25})$$

то соответствующая функция времени должна при $t \rightarrow 0$ вести себя подобно функции

$$f(t) \rightarrow t^{q-1}. \quad (\text{XV.26})$$

Поэтому разложение Маклорена (XV.20) примет вид

$$c_\mu = 0 \text{ при } \mu = 0, 1, 2, \dots, q + \nu - 2. \quad (\text{XV.27})$$

Таким образом, выражения (XV.23) и (XV.24) дают условия:

$$\sum_{k=1}^n a_k \omega_k^\mu = 0 \begin{cases} \text{при } \mu = 0, 2, 4, \dots \leq q + \nu - 2, \text{ когда } \nu - \text{четное;} \\ \text{при } \mu = 1, 3, 5, \dots \leq q + \nu - 2, \text{ когда } \nu - \text{нечетное} \end{cases}; \quad (\text{XV.28})$$

$$\sum_{k=1}^n b_k \omega_k^\mu = 0 \begin{cases} \text{при } \mu = 0, 2, 4, \dots \leq q + \nu - 2, \text{ когда } \nu - \text{нечетное} \\ \text{при } \mu = 1, 3, 5, \dots \leq q + \nu - 2, \text{ когда } \nu - \text{четное} \end{cases}. \quad (\text{XV.29})$$

В приведенном выше примере $\nu = 2$ и $q = 1$. Из условий (XV.28), которые применимы только при $\mu = 0$, можно найти, что соответствующее поведение функции $f(t)$ при $t = 0$ обеспечивается, если сумма величин a_k равна нулю. Как непосредственно видно из рис. XV.1, это требование удовлетворяется.

Для того чтобы оценить, кроме того, что означают упомянутые условия, рассмотрим r -кратный интеграл выражения (XV.9)

$$F_1^{(\nu-r)}(\omega) = \sum_{k=1}^n a_k [u_{-r}(\omega - \omega_k) + (-1)^\nu u_{-r}(\omega + \omega_k)], \quad (\text{XV.30})$$

где $u_{-r}(x)$ — сингулярная функция порядка $(-r)$, определяемая выражением

$$u_{-r}(x) = \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} \text{ при } x > 0. \quad (\text{XV.31})$$

Эта функция равна нулю при $x < 0$. Из выражений (XV.30) и (XV.31) при $\omega = 0$ имеем

$$F_1^{(\nu-r)}(0) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k \omega_k^{r-1}}{(r-1)!} (-1)^\nu, \quad (\text{XV.32})$$

или, если положить $r - 1 = \mu$, то можно записать

$$\sum_{k=1}^n a_k \omega_k^\mu = (-1)^\nu \mu! F_1^{(\nu-\mu-1)}(0). \quad (\text{XV.33})$$

Поскольку производные функции $F_1(\omega)$ нечетного порядка равны нулю при $\omega = 0$, то снова получим условие (XV.28). Однако в данном случае нам ничего не известно как о верхнем пределе изменения величин μ , к которым указанные условия применимы, так и о зависимости этого верхнего предела от асимптотического поведения функции $F(s)$. С другой стороны, выражение (XV.33) показывает, что выполнение условий (XV.28) для значений μ вплоть до равных целому числу $\nu - 2$ включительно не имеет ничего общего с асимптотическими условиями¹, а зависит только от требований, согласно которым производные нечетного порядка функции $F_1(\omega)$ должны принимать нулевые значения в точке $\omega = 0$. К дополнительным условиям для значений μ выше $\nu - 2$ относятся те, с помощью которых объясняется данное асимптотическое поведение части функции $F(s)$.

В этой связи необходимо заметить, что $f(t)$, определенная по вещественной части функции $F_1(\omega)$, является четной функцией и, следовательно, может вести себя при $t \rightarrow 0$ только как степенная функция некоторой четной степени t . Асимптотическое поведение функции $F(s)$ согласно выражению (XV.25) будет в этом случае соответствовать только функциям, содержащей нечетные целые значения q . Если при четном целом q функция $f(t)$ должна вести себя при $t \rightarrow 0$ подобно степенной функции нечетной степени t , то для нахождения функции времени необходимо использовать мнимую часть функции, т. е. $F_2(\omega)$.

В действительности рассматриваемые вопросы не являются столь важными, если только не предъявляется условие, согласно которому поведение функции $f(t)$ при $t \rightarrow 0$ должно быть совершенно точно известным. Поскольку в любом методе приближенного интегрирования так или иначе допускается определенная погрешность, точное знание поведения функции в точке $t = 0$ в большинстве случаев не настолько обязательно, чтобы нельзя было для нахождения $f(t)$ свободно выбирать функцию $F_1(\omega)$ или $F_2(\omega)$,

¹ Разумеется, косвенно это имеет место, так как надлежащее поведение функции $f(t)$ при $t \rightarrow 0$ может и не получиться, если у функции $F_1(\omega)$ будет дрейф погрешности (drift error).

так как любая из них полностью определяется функцией времени во всех точках, кроме точки $t = 0$.

Из выражения (XV.33) при $\nu - \mu - 1 = 0$ получаем уравнение

$$\sum_{k=1}^n a_k \omega_k^{\nu-1} = (-1)^\nu (\nu-1)! F_1(0), \quad (\text{XV.34})$$

которое должно удовлетворяться при определенных значениях a_k для того, чтобы обеспечить нулевую погрешность при аппроксимации функции $F_1(\omega)$ в точке $\omega = 0$. Для трапециевидальной функции, изображенной на рис. XV.1, эта зависимость также выполняется автоматически.

Зависимости (XV.28) и (XV.29) обычно рассматриваются как условия моментов. Они эквивалентны соответствующим интегральным зависимостям, рассматриваемым в теории преобразования Фурье или Лапласа под тем же названием.

В качестве примера процесса, удовлетворяющего определенному требуемому асимптотическому поведению, допустим, что $F(s) \rightarrow \frac{1}{s^2}$ при $s \rightarrow \infty$, и попробуем построить соответствующую вещественную часть $F_1(\omega)$ и соответствующую функцию времени. Допустим, что третья производная функции $F_1(\omega)$ представляет собой сумму бесконечно коротких импульсов или что функция $F_1(\omega)$ аппроксимируется сопрягающимися параболическими дугами второй степени. Тогда согласно условиям (XV.28) имеем $\nu = 3$ и $q = 3$, поэтому указанные условия применимы при $\mu = 1; 3$.

Если нормализовать функцию $F_1(\omega)$ таким образом, что $F_1(0) = 1$, то условия (XV.28) вместе с зависимостью (XV.34) дают

$$\sum_{k=1}^n a_k \omega_k = 0; \quad (\text{XV.35})$$

$$\sum_{k=1}^n a_k \omega_k^2 = -2; \quad (\text{XV.36})$$

$$\sum_{k=1}^n a_k \omega_k^3 = 0. \quad (\text{XV.37})$$

Следовательно, в простейшей аппроксимации достаточно использовать три дуги, при этом величины a_k должны удовлетворять системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_1 \omega_1 + a_2 \omega_2 + a_3 \omega_3 &= 0 \\ a_1 \omega_1^2 + a_2 \omega_2^2 + a_3 \omega_3^2 &= -2 \\ a_1 \omega_1^3 + a_2 \omega_2^3 + a_3 \omega_3^3 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{XV.38})$$

Нормализация частотного масштаба равнозначна выбору точки излома $\omega_3 = 1$. Функцию $F_1(\omega)$, соответствующую этому случаю,

можно теперь построить сразу после того, как выбраны точки излома ω_1 и ω_2 . Пусть $\omega_1 = \frac{1}{3}$ и $\omega_2 = \frac{2}{3}$. Тогда из системы (XV.38) получим

$$a_1 = 45; \quad a_2 = -36; \quad a_3 = 9. \quad (\text{XV.39})$$

График результирующей вещественной части $F_1(\omega)$ показан в верхней части рис. XV.2, а графики ее первой, второй и третьей производных — на этом же рисунке ниже. Соответствующая функция времени согласно выражению (XV.12) будет

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2}{\pi t^3} \left(45 \sin \frac{t}{3} - 36 \sin \frac{2t}{3} + 9 \sin t \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{t^2}{27} - \frac{t^4}{729} + \dots \right). \end{aligned} \quad (\text{XV.40})$$

Отсюда видно, что в точке $t = 0$ получено надлежащее поведение функции.

В тех случаях, когда функция $F_1(\omega)$ задана графически и требуется применить кусочно-линейную аппроксимацию ее первой производной или производных более высоких порядков [это эквивалентно аппроксимации самой функции $F_1(\omega)$ параболическими дугами второй или более высокой степени], возникает задача построения этих производных с достаточной степенью точности. Их, очевидно, нельзя построить обычным образом, рассматривая величину производной в любой точке как наклон в ней данной функции, нельзя также использовать численные методы, основанные на таблицах конечных разностей. Если строить таким способом вторую или третью производную, а затем нарушить процесс повторным графическим интегрированием, то погрешности производных вызовут чрезмерный «дрейф» общей погрешности в процессе интегрирования, в результате чего к первоначальной функции возвратиться не удастся.

В этой связи существенно заметить, что выполнение условий моментов (XV.28) для значений μ до $\nu - 2$ включительно (как отмечалось выше) гарантирует, что производные нечетного порядка функции $F_1(\omega)$ проходят через нулевые значения в точке $\omega = 0$. Следовательно, указанные производные [вместе с условием (XV.33)] гарантируют, что не будет дрейфа погрешности в результате после-

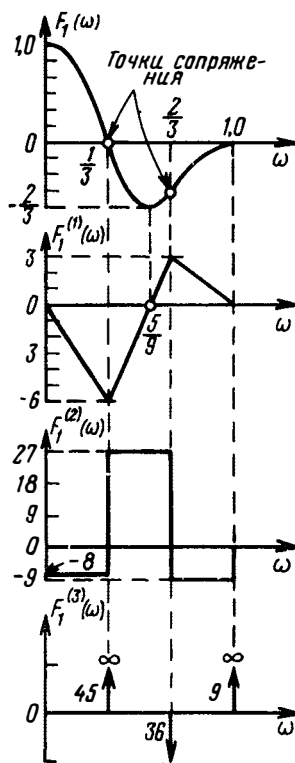


Рис. XV.2

довательных интегрирований, которые в таких случаях следует распространить на весь нормализованный частотный интервал $-1 < \omega < 1$.

Условия, гарантирующие сдвиг нуля в точке $\omega = 0$, автоматически обеспечивают и сдвиг нуля по всему интервалу. Таким образом, ясно, что ряд значений a_k , используемых при линейноломаной аппроксимации «неточной», более высокой производной (т. е. той, последующее интегрирование которой вызывает недопустимую величину дрейфа), окажется непригодным для выполнения условий (XV.28) и (XV.33).

Подобное положение можно устранить, воспользовавшись методом графического построения, при котором определяются последовательные ординаты функции, представляющей собой производную так, чтобы накопленная под этой функцией площадь от точки $\omega = -1$ до любого данного значения ω была равна ординате данной функции в той же точке или, чтобы приращение площади под функцией-производной при данном $\Delta\omega$ было равно приращению ординаты функции для того же $\Delta\omega$.

При таком подходе можно построить функции-производные, последовательное интегрирование которых снова приводит к данной функции с требуемой точностью.

Когда кусочно-линейная аппроксимация применяется к первой производной, используется прямой метод аппроксимации функции непосредственно с помощью параболических дуг и, следовательно, позволяющий уменьшить объем рабочих операций. Геометрические приемы, которые оказываются здесь полезными, можно оценить, обратившись к рис. XV.2. Если на кривой функции $F_1(\omega)$ соединить максимумы и минимумы прямыми линиями, то последние пересекут эту кривую в тех точках, где параболические дуги являются сопрягающимися, а разность ординат [например, $F_1(0) - F_1\left(\frac{5}{9}\right)$] определяется площадью треугольника функции $F_1^{(1)}(\omega)$, взятой со знаком минус. Высота треугольника фиксируется необходимой разностью ординат и расположением его вершины у требуемой точки сопряжения.

Теперь можно рассмотреть более подробно вопрос об оценке погрешности и ее зависимости от общего числа импульсов, необходимых для представления функции $F_1^{(1)}(\omega)$. Основой для этого рассмотрения служит нормализация соответствующего частотного интервала, как показано на рис. XV.1 и XV.2. Теперь становится ясным метод, при котором учитывается соответствующее асимптотическое поведение функции $F(s)$, несмотря на ограничение асимптоты, обеспечивающее указанную нормализацию частоты. Таким образом, можно установить соотношение между следующими тремя факторами: точностью, с которой аппроксимируется функция $F_1(\omega)$; порядком ν -й производной, для которой аппроксимация определяется суммой импульсов, и числом этих импульсов

(равным числу членов, необходимых для представления соответствующей функции времени).

Пусть $(\nu - 2)$ -я производная функции $F_1(\omega)$ аппроксимируется ломаной линией так, что погрешность (разница между ломаной линией и действительной кривой) изменяет знак трижды внутри каждого линейного интервала, появляющегося при переходе этой линии через каждую точку излома. Внутри интервала $0 < \omega < 1$ имеет место $3(n - 1)$ изменений знака, если n равно общему числу точек излома кусочно-линейной аппроксимации. Следовательно, существует $\frac{3(n-1)}{2}$ периодов колебаний погрешности в интервале $0 < \omega < 1$.

Пусть $\frac{3(n-1)}{2} = \frac{\tau}{2\pi}$ и предположим, что изменение погрешности можно грубо рассматривать как синусоиду с амплитудой ε . Тогда получим погрешность

$$\left. \begin{aligned} \text{для } F_1^{(\nu-2)}(\omega) &\approx \varepsilon \sin \omega\tau \\ \text{для } F_1^{(\nu-3)}(\omega) &\approx -\frac{\varepsilon}{\tau} \cos \omega\tau \\ \text{для } F_1^{(\nu-4)}(\omega) &\approx -\frac{\varepsilon}{\tau^2} \sin \omega\tau \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{XV.41})$$

Приближенная максимальная погрешность аппроксимации самой функции $F_1(\omega)$ приобретает значение

$$\frac{\varepsilon}{\tau^{\nu-2}} \approx \frac{\varepsilon}{[3\pi(n-1)]^{\nu-2}}. \quad (\text{XV.42})$$

Хотя этот вывод является несколько неточным, он, тем не менее, полезен при вычислении погрешности аппроксимации для данных значений n и ν . Например, если первая производная функции $F_1(\omega)$ аппроксимирована кусочно-линейной функцией, в которой используются четыре точки излома, а максимальная погрешность составляет 10%, тогда из выражения (XV.42) при $\nu = 3$, $n = 4$ и $\varepsilon = 0,1$ получим, что $F_1(\omega)$ аппроксимируется параболическими дугами с максимальной погрешностью менее 0,5%, причем соответствующая функция времени определяется четырьмя членами.

По существу, те же методы можно использовать для нахождения вещественной и мнимой частей функции $F(j\omega)$ по заданной функции времени. Таким образом, если ν -я производная функции $f(t)$ при $t > 0$ представляет собой сумму импульсов, то сама функция $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^n a_k u_{-\nu}(t-t_k). \quad (\text{XV.43})$$

Изображением функции $u_{\nu}(t)$ является $s^{-\nu}$, а задержка функции времени на t_k сек соответствует умножению на $e^{-j\omega t_k}$ в частотной области. Нетрудно поэтому увидеть, что изображение функции, определяемой выражением (XV.43), выразится как

$$F(j\omega) = \sum_{k=1}^n a_k \frac{e^{-j\omega t_k}}{(j\omega)^\nu}, \quad (\text{XV.44})$$

а ее вещественная и мнимая части соответственно:

$$F_1(\omega) = \frac{(-1)^{\frac{\nu}{2}}}{\omega^\nu} \sum_{k=1}^n a_k \cos \omega t_k \text{ для четного } \nu; \quad (\text{XV.45})$$

$$F_1(\omega) = \frac{(-1)^{\frac{\nu+1}{2}}}{\omega^\nu} \sum_{k=1}^n a_k \sin \omega t_k \text{ для нечетного } \nu \quad (\text{XV.46})$$

и

$$F_2(\omega) = \frac{(-i)^{\frac{\nu+2}{2}}}{\omega^\nu} \sum_{k=1}^n a_k \sin \omega t_k \text{ для четного } \nu; \quad (\text{XV.47})$$

$$F_2(\omega) = \frac{(-1)^{\frac{\nu+1}{2}}}{\omega^\nu} \sum_{k=1}^n a_k \cos \omega t_k \text{ для нечетного } \nu. \quad (\text{XV.48})$$

XV.3. Определение импульсной характеристики

Когда требуется найти цепь, преобразующую заданную входную функцию времени в определенную выходную функцию времени, необходимо сначала найти требуемую импульсную характеристику цепи, а затем построить рациональную функцию от s , оригинал которой является допустимой аппроксимацией этой импульсной характеристики. Условия устойчивости, очевидно, требуют, чтобы соответствующая импульсная характеристика была ограниченной функцией конечной длительности или если длительность не конечна, то функция должна асимптотически стремиться к нулю. Нашей первой задачей является нахождение методов, позволяющих проверить, удовлетворяют ли указанные входная и выходная функции времени этим условиям устойчивости, так как в противном случае решения задачи не существует.

Обозначим входную и выходную функции времени соответственно через $a(t)$ и $b(t)$, а импульсную характеристику через $c(t)$. Они связаны между собой посредством известного интеграла свертки

$$b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi)c(t-\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} c(t-\xi)c(\xi)d\xi. \quad (\text{XV.49})$$

Если одну из функций $a(t)$ или $c(t)$ заменить ее производной, то функцию $b(t)$ также необходимо заменить ее производной; если одна из функций $a(t)$ или $c(t)$ дифференцируется, а другая интегрируется, то функция $b(t)$ остается без изменения. Поскольку такие операции можно в случае необходимости повторять, появляется возможность осуществлять непосредственное построение функции $b(t)$, если функция $a(t)$, или $c(t)$, либо обе они совместно заданы в виде последовательности бесконечно коротких импульсов.

Из предыдущего параграфа видно, что некоторая более высокая производная функции может с достаточно хорошей точностью рассматриваться как последовательность бесконечно коротких импульсов. Поэтому вычисление интеграла свертки численными методами всегда удастся с точностью, степень которой определяется ограничениями, обусловленными соответствующим графическим методом¹.

Несмотря на то, что в приведенном примере мы сталкиваемся с вычислением $c(t)$ по заданным функциям $a(t)$ и $b(t)$, а не с вычислением $b(t)$ по заданным функциям $a(t)$ и $c(t)$, возникающие здесь идеи могут оказаться полезными в некоторых случаях.

Пусть требуется определить форму импульса, который получится в результате свертки прямоугольника, изображенного в верхней части рис. XV.3, с треугольником, приведенным на этом рисунке ниже. Используя выражение для первого из двух интегралов (XV.49), получим график, показанный в самом низу рис. XV.3, где функция $c(t - \xi)$ построена для определенного значения параметра t , а соответствующая величина выходной функции $b(t)$ представляет собой площадь (заштрихованный участок) под соответствующим произведением ac в функции от ξ .

Метод вычисления функции $b(t)$ для различных значений t ясен, но, если пользоваться указанным прямым приемом, процесс выполнения этих вычислений и получения кривой $b(t)$ требует определенных усилий. В то же время, используя преимущества методов, изложенных выше, можно существенно упростить задачу.

Построение с помощью одного из них приводится на рис. XV.4. В верхней части рисунка построена функция $\frac{da}{dt}$, состоящая

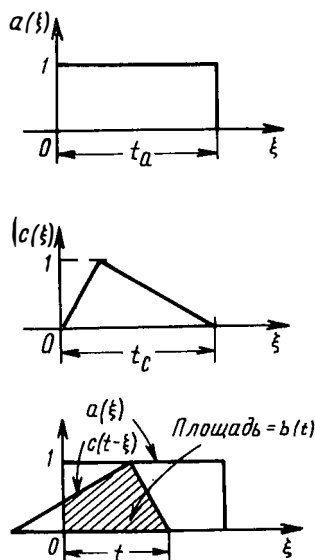


Рис. XV.3

¹ Работа с функциями типа единичных импульсов подробно рассмотрена в книге [69] (прим. ред.).

просто из пары единичных импульсов противоположного знака. Если известно, что свертка или «развертка» («scanning») любой функции при помощи единичного импульса точно воспроизводит ее, то ясно, что развертка треугольника $c(\xi)$ при помощи пары импульсов, определяемых функцией $\frac{da}{dt}$, дает два треугольника (положительный и отрицательный), показанных в центре рис. XV.4.

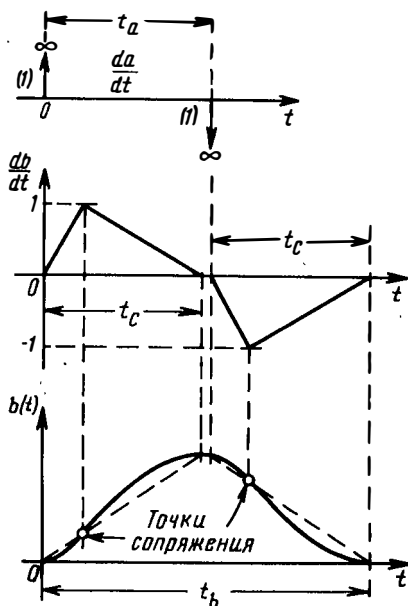


Рис. XV.4

Поскольку эта функция представляет собой производную требуемой функции $b(t)$, то для получения решения нашей задачи необходимо лишь проинтегрировать ее (см. нижнюю часть рисунка). Результирующая функция состоит из ряда сопрягающихся параболических дуг, соединенных в центре плоским участком довольно малой протяженности. Эти дуги нетрудно построить, если известны расположение каждой вершины, точки сопряжения и значения в них крутизны.

Из приведенного примера ясно, что длительность t_b результирующего выходного сигнала равна сумме длительностей t_a и t_c входной и импульсной функций, соответственно, т. е.

$$t_b = t_a + t_c. \quad (\text{XV.50})$$

Здесь, конечно, предполагается, что все три функции $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ имеют конечную длительность. Применительно к физическим цепям известно, что, хотя входную функцию можно выбрать так, чтобы она имела конечную длительность, импульсная характеристика и выходные функции теоретически бесконечны. Тем не менее для любых устойчивых систем функции в достаточно коротком конечном интервале становятся, по существу, равными нулю, так что метод ограничения асимптот, рассмотренный в предыдущем параграфе, можно использовать для получения конечных интервалов t_a , t_b и t_c всех трех функций. В этих условиях должна всегда выполняться зависимость (XV.50).

В процессе нахождения функции $c(t)$, когда заданы $a(t)$ и $b(t)$, мы видим, что, хотя две последние функции предполагаются ограниченными и имеющими конечную длительность, функция $c(t)$ может не обладать ни тем, ни другим свойством. Если она оказывается неограниченной, то искомая цепь будет неустойчивой и решения для рассматриваемой задачи синтеза в переходной области

не существует. С другой стороны, если $c(t)$ ограничена, асимптотически стремится к нулю, но имеет бесконечную длительность, то, ограничивая ее в какой-то конечной точке, можно, по существу, прийти к случаю, когда все три интервала t_a , t_b и t_c конечны. Однако теперь оказывается, что уравнение (XV.50) не выполняется потому, что интервал t_c может быть значительно больше, чем интервал t_a или t_b .

Последний вывод оказывается ошибочным, как мы убедимся из последующего анализа, который показывает, что процесс ограничения функции $c(t)$ в некоторой точке вызывает появление отличных от нуля значений функции $b(t)$. Этот добавочный, отличный от нуля интервал функции $b(t)$ является слишком большим для того, чтобы удовлетворялось уравнение (XV.50). Рассмотрим эти вопросы подробнее.

Для того чтобы максимально использовать упрощения, обеспечиваемые методами представления в виде последовательностей бесконечно коротких импульсов, рассмотрим видоизмененную форму интеграла свертки (XV.49), в котором функции $a(t)$ и $c(t)$ заменены на последовательности бесконечно коротких импульсов, представляющие ν -ю производную соответствующих аппроксимаций этих функций (см. предыдущий параграф). Поскольку очевидно, что свертка двух таких импульсов величиной a_h и c_h дает бесконечно короткий импульс величиной $b_h = a_h c_h$ (так как любая функция, развертываемая при помощи импульса величиной A , A -кратна этой величине), свертка двух последовательностей бесконечно коротких импульсов дает последовательность бесконечно коротких импульсов. Если эти две последовательности импульсов представляют собой соответственно ν -ю и μ -ю производные функций, аппроксимирующих функции $a(t)$ и $c(t)$, то результирующая последовательность бесконечно коротких импульсов представляет собой $(\nu + \mu)$ -ю производную аппроксимирующей функции для функции $b(t)$.

Для дальнейшего максимального упрощения сделаем следующие два допущения: 1) используем ступенчатые аппроксимации для функций $a(t)$ и $c(t)$ так, чтобы их первые производные стали последовательностями бесконечно коротких импульсов и 2) выберем одинаковое приращение времени Δt между ступеньками с тем, чтобы все соответствующие последовательности импульсов стали одинаковыми и отстояли один от другого на одно и то же расстояние. Принятые допущения не влияют на последующий анализ и на справедливость выводов, полученных на его основе, но в то же время обеспечивают большую ясность и простоту рассмотрения.

Таким образом, свертывание последовательностей бесконечно коротких импульсов, характеризующихся функциями $\frac{da}{dt}$ и $\frac{dc}{dt}$, дает результирующую последовательность, которую необходимо рассматривать как функцию, представляющую собой вторую производную требуемой функции $b(t)$. Поэтому последнюю можно ап-

проксимировать ломаной линией с одинаковыми промежутками Δt между точками излома. Эти аппроксимации для функций $a(t)$, $c(t)$ и $b(t)$ изображены на рис. XV.5.

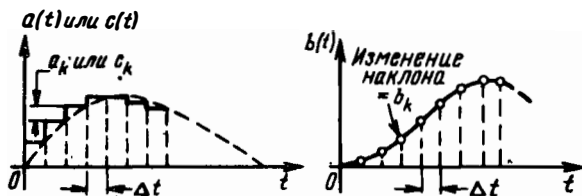


Рис. XV.5

Обозначим штрихом дифференцирование, тогда функции, соответствующие интегралу свертки (XV.49), будут иметь следующий вид:

$$a'(t) = \sum_{k=0}^{n_a} a_k u_0(t - k\Delta t); \quad (\text{XV.51})$$

$$c'(t) = \sum_{k=0}^{n_c} c_k u_0(t - k\Delta t); \quad (\text{XV.52})$$

$$b''(t) = \sum_{k=0}^{n_b} b_k u_0(t - k\Delta t), \quad (\text{XV.53})$$

где целые числа n_a , n_b , n_c удовлетворяют зависимостям

$$t_a = n_a \Delta t; \quad t_b = n_b \Delta t; \quad t_c = n_c \Delta t, \quad (\text{XV.54})$$

а уравнение (XV.50) требует, чтобы

$$n_b = n_a + n_c. \quad (\text{XV.55})$$

Основное преимущество такого представления в виде последовательности импульсов определяется тем, что интеграл свертки

$$b''(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a'(\xi) c'(t - \xi) d\xi \quad (\text{XV.56})$$

не равен нулю только при t , равном целому числу, кратному Δt (включая нуль), так как подынтегральное выражение тождественно равно нулю всюду, кроме тех случаев, когда импульсы функций $a'(\xi)$ и $c'(t - \xi)$ совмещаются. Учитывая обратную ориентацию функции $c'(t - \xi)$ относительно функции $c'(\xi)$ (см. рис. XV.3) увидим, что при $t = 0$ только первые импульсы в двух последовательностях $a'(\xi)$ и $c'(\xi)$ совпадают, давая в результате $b_0 = a_0 c_0$. При $t = \Delta t$ первый импульс из последовательности $c'(\xi)$ совпадает со вторым импульсом из $a'(\xi)$, а второй из последовательности $c'(\xi)$ —

с первым из $a'(\xi)$, что дает в результате $b_1 = a_1c_0 + a_0c_1$, и т. д. Таким образом, получаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= a_0c_0 \\ b_1 &= a_1c_0 + a_0c_1 \\ b_2 &= a_2c_0 + a_1c_1 + a_0c_2 \\ b_3 &= a_3c_0 + a_2c_1 + a_1c_2 + a_0c_3 \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{XV.57})$$

Совершенно очевидно, что эту систему можно решить как относительно величин c_k при известных a_k и b_k , так и относительно b_k при известных a_k и c_k . Следовательно, задача определения импульсной характеристики при известных входной и выходной функциях времени формально, по крайней мере, сводится к простому алгебраическому процессу решения системы ур-ний (XV.57).

В этой связи важно отметить, что в любом частном случае, если число импульсов в последовательностях $a'(t)$ и $c'(t)$ конечно, то число импульсов последовательности $b''(t)$ также конечно, и, таким образом, вновь получается система ур-ний (XV.57). Для иллюстрации рассмотрим простой пример, когда $n_a = 2$, $n_c = 4$ и $n_b = 6$. Имеем

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= a_0c_0 \\ b_1 &= a_1c_0 + a_0c_1 \\ b_2 &= a_2c_0 + a_1c_1 + a_0c_2 \\ b_3 &= a_2c_1 + a_1c_2 + a_0c_3 \\ b_4 &= a_2c_2 + a_1c_3 + a_0c_4 \\ b_5 &= a_2c_3 + a_1c_4 \\ b_6 &= a_2c_4 \end{aligned} \right\} \quad (\text{XV.58})$$

Здесь представляют интерес несколько моментов. Во-первых, нетрудно видеть, что эта система уравнений разрешима относительно величин c_k с одинаковой легкостью независимо от того, начинается процесс решения сверху или снизу. Во-вторых, когда известны все величины a_k и b_k , то порядок решения задачи является строго определенным. Если решение искать, начиная с первого уравнения системы, то все величины c_k определяются после того, как рассмотрено уравнение для b_4 , причем в случае несовместимости двух последних уравнений, несовместимой окажется и вся система ур-ний (XV.58). Аналогично если решение искать, начиная с последнего уравнения, то все величины c_k будут вычислены после рассмотрения уравнения для b_2 , при этом необходимо, чтобы первые два уравнения удовлетворяли полученным результатам.

Такие результаты можно было предвидеть с самого начала из выражения (XV.50) или из эквивалентного ему выражения (XV.55),

которое показывает, что когда функция $a(t)$ определена во всем интервале t_a , то функция $b(t)$ определяется независимо только в интервале $t_b - t_a = t_c$. Тогда во всей остальной части интервала она должна принимать значения, соответствующие заданным выше условиям, которые априори включают условия относительно конечной длительности функции $c(t)$.

Прежде чем рассматривать вопрос более детально, необходимо учесть требования устойчивости. В этой связи отметим, что все три функции $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ принимают нулевые значения в начале и в конце интервала. Поскольку рассматриваются последовательности бесконечно коротких импульсов, определяемые выражениями (XV.51) и (XV.52), то это обстоятельство приводит к условиям:

$$\sum_{k=0}^{n_a} a_k = 0; \quad (\text{XV.59})$$

$$\sum_{k=0}^{n_c} c_k = 0. \quad (\text{XV.60})$$

Применительно к последовательности бесконечно коротких импульсов, определяемой выражением (XV.53), ясно, что если площадь под функцией $b(t)$ отлична от нуля (обычный случай), то изображение $b''(t)$ имеет нуль двойного порядка в точке $s = 0$ и, следовательно, площадь под функцией $tb''(t)$, а также площадь под самой функцией $b''(t)$ должны равняться нулю. В результате получаем два условия¹:

$$\sum_{k=0}^{n_b} b_k = 0 \text{ и } \sum_{k=0}^{n_b} kb_k = 0. \quad (\text{XV.61})$$

При выполнении условий (XV.59) и (XV.60) для величин a_k и c_k не нужно дополнительно рассматривать условия (XV.61) для величин b_k , поскольку процесс свертки в этом случае автоматически дает их значения, удовлетворяющие условиям (XV.61). Условие (XV.59) также будет выполняться, поскольку заданная входная функция $a(t)$ должна принимать нулевые значения на обоих концах интервала. При этом, однако, условие (XV.60) для искомой импульсной характеристики ни выполняется автоматически, ни определяется исходными данными. Для выполнения его необходимо добавить еще одно уравнение к системе уравнений (XV.58), используемой для определения величин c_k ; таким образом, одна величина b_k из общего числа независимо определенных величин отбрасывается.

¹ Если площадь под функцией $b(t)$ равна нулю, то должно быть учтено дополнительное условие моментов, включающее суммирование величин k^2b_k . Поэтому условия (XV.61) являются минимальными.

Поскольку общее число величин c_k составляет $n_c + 1$, то число их, определяемое только системой (XV.58), составляет n_c и поэтому также равно числу независимо определяемых величин b_k , если предполагается, что известны все значения $n_a + 1$ величин a_k . Ясно, что в этом случае числа $n_b - n_c + 1$ величин b_k останутся неизвестными, т. е. будет неизвестной часть выходной функции, имеющей длительность такую же, как функция $a(t)$.

Рассмотрим несколько характерных примеров, иллюстрирующих важность полученных результатов. Допустим, что искомые

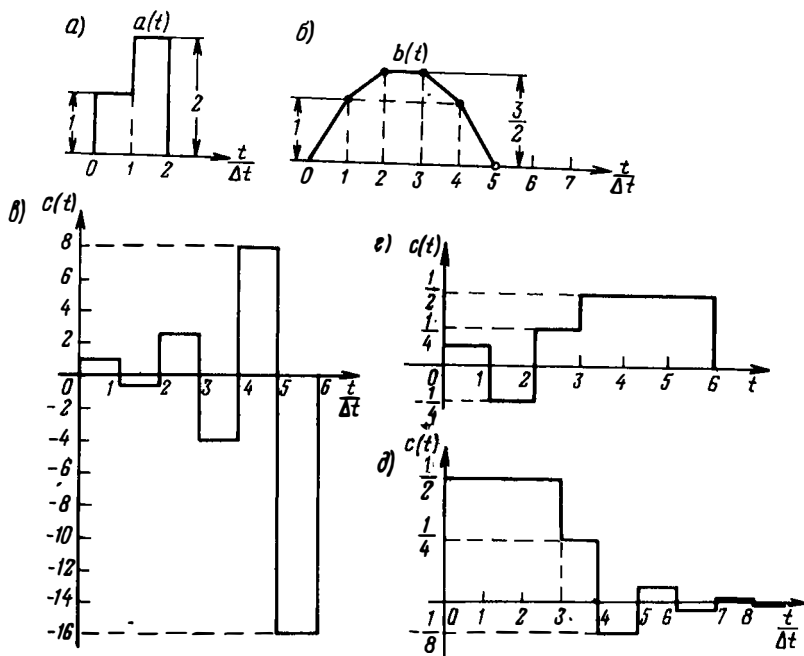


Рис. XV.6

входная и выходная функции имеют вид, изображенный на рис. XV.6а и XV.6б соответственно. Поскольку известно, что нельзя полностью определить выходной сигнал, предположим, что не заданная часть функции длительностью $2\Delta t$ существует за точкой $t = 6\Delta t$ и что в процессе вычислений необходимо определить, как выглядит эта часть.

Приведенные данные позволяют записать следующие импульсные значения:

$$a_k = 1, 1, -2 \quad \text{при } k = 0, 1, 2; \quad (\text{XV.62})$$

$$b_k = 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \quad \text{при } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5. \quad (\text{XV.63})$$

Дополнительные величины b_k для $k = 6, 7, 8$ остаются не определенными. Их вместе с величинами c_0, c_1, \dots, c_6 нужно найти из условия (XV.60) и соответствующих уравнений, подобных системе (XV.58). Для рассматриваемого случая имеем

$$\left. \begin{aligned} 1 &= c_0 \\ -\frac{1}{2} &= c_0 + c_1 \\ -\frac{1}{2} &= -2c_0 + c_1 + c_2 \\ -\frac{1}{2} &= -2c_1 + c_2 + c_3 \\ -\frac{1}{2} &= -2c_2 + c_3 + c_4 \\ 1 &= -2c_3 + c_4 + c_5 \\ b_6 &= -2c_4 + c_5 + c_6 \\ b_7 &= -2c_5 + c_6 \\ b_8 &= -2c_6 \end{aligned} \right\} \quad (\text{XV.64})$$

Из этой системы и из условия (XV.60) получаем

$$c_k = 1, -\frac{3}{2}, 3, -\frac{13}{2}, 12, -24, 16 \quad \text{при } k=0, \dots, 6 \quad (\text{XV.65})$$

и

$$b_k = -32, 64, -32 \quad \text{при } k=6, 7, 8. \quad (\text{XV.66})$$

Три последних величины указывают на то, что неизвестная часть выходной функции состоит из отрицательного треугольного всплеска высотой в 32 единицы. По сравнению с искомой частью функции $b(t)$, показанной на рис. XV.66, всплеск почти прекращает рост остальной части выходной функции. Это можно рассматривать как условие того, что импульсная характеристика, приведенная на рис. XV.6в, остается ограниченной и имеет конечную длительность.

Обратимся теперь к неизвестной части выходной функции $b(t)$, которая располагается на переднем конце импульса. В этом случае величины b_k из выражения (XV.63) можно рассматривать как относящиеся соответственно к значениям $k = 3, 4, 5, 6, 7, 8$, а величины b_0, b_1, b_2 и c_k — как неизвестные. Изменение системы уравнений (XV.64) заключается только в том, что численные значения, стоящие слева, сдвигаются вниз на три строки, и, таким образом, величины b_6, b_7, b_8 смещаются вниз, а наверху остается место для ве-

личин b_0, b_1, b_2 . Вместе с условием (XV.60) указанные модифицированные уравнения дают

$$c_k = \frac{1}{16}, -\frac{3}{16}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, 0, 0 - \frac{1}{2} \text{ при } k=0, \dots, 6 \quad (\text{XV.67})$$

и

$$b_k = \frac{1}{16}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16} \text{ при } k=0, 1, 2. \quad (\text{XV.68})$$

Импульсу $b(t)$ на рис. XV.6б предшествует весьма малый треугольный всплеск высотой $\frac{1}{16}$. Импульсная характеристика, устанавливающая зависимость между выходным сигналом и входной функцией $a(t)$, показана на рис. XV.6г. Совершенно очевидно, что данный случай не является столь критичным, как предыдущий, в котором появлению возможной неустойчивости препятствует только допущение чрезмерно большого квазиимпульса в оконечной части выходной функции. В противоположность этому здесь характер изменения импульсной характеристики является очень вялым (mild) и не требуется никакого заметного отклонения от требуемой формы выходного импульса. Таким образом, начинает подтверждаться справедливость сделанного ранее утверждения о том, что в разумных пределах можно получить любую пару входной и выходной временных функций, если мы захотим дождаться появления части выходного сигнала.

Причина, согласно которой пара (входная и выходная) функций, изображенных на рис. XV.6, по существу, приводит к неустойчивости, заключается в том, что изображение функции $a(t)$ имеет нули в правой полуплоскости, не содержащиеся в изображении функции $b(t)$, если только ее форма не изменена как в вышеприведенных примерах. Очевидно, когда изображение выбранной входной функции не имеет нулей в правой полуплоскости, то можно получить любую требуемую выходную функцию времени с устойчивой импульсной характеристикой. Рассмотрим это положение подробнее.

Обозначим изображения функций $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ через $A(s)$, $B(s)$ и $C(s)$ соответственно, тогда эквивалентные выражения для частотной области, подобные выражениям (XV.51), (XV.52) и (XV.53), очевидно, будут иметь вид:

$$sA(s) = a_0 + a_1 e^{-\Delta ts} + a_2 e^{-2\Delta ts} + \dots + a_{n_a} e^{-n_a \Delta ts}; \quad (\text{XV.69})$$

$$sC(s) = c_0 + c_1 e^{-\Delta ts} + c_2 e^{-2\Delta ts} + \dots + c_{n_c} e^{-n_c \Delta ts}; \quad (\text{XV.70})$$

$$s^2 B(s) = b_0 + b_1 e^{-\Delta ts} + b_2 e^{-2\Delta ts} + \dots + b_{n_b} e^{-n_b \Delta ts}. \quad (\text{XV.71})$$

Введя сокращенное обозначение

$$p = e^{-\Delta ts}, \quad (\text{XV.72})$$

можно эти функции частотной области свести к полиномам от переменной p вида:

$$A^*(p) = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_{n_a} p^{n_a}; \quad (\text{XV.73})$$

$$C^*(p) = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \dots + c_{n_c} p^{n_c}; \quad (\text{XV.74})$$

$$B^*(p) = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_{n_b} p^{n_b}. \quad (\text{XV.75})$$

Поскольку замена переменной, согласно выражению (XV.72), отображает правую половину плоскости s на внутреннюю часть единичного круга в плоскости p , то можно сказать, что изображение $A(s)$ входной временной функции $a(t)$ не имеет нулей в правой полуплоскости, когда полином $A^*(p)$ не имеет нуля с абсолютным значением, меньшим единицы. Если произвести дополнительную замену переменной посредством хорошо известного преобразования

$$p = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{1-p}{1+p}, \quad (\text{XV.76})$$

то левая половина плоскости s отображается на левую половину плоскости λ . Полином $A^*(p)$ принимает вид

$$A^*(p) = \frac{P_a(\lambda)}{(1+\lambda)^{n_a}}, \quad (\text{XV.77})$$

где

$$P_a(\lambda) = a_0(1+\lambda)^{n_a} + a_1(1+\lambda)^{n_a-1} + (1-\lambda) + \dots + a_{n_a}(1-\lambda)^{n_a}. \quad (\text{XV.78})$$

Таким образом, можно прийти к выводу, что изображение $A(s)$ для функции $a(t)$ не имеет нулей в правой полуплоскости, если полином $P_a(\lambda)$ является полиномом Гурвица. Поскольку $P_a(\lambda)$ нетрудно получить при помощи соответствующих величин a_k , характеризующих функцию $a(t)$, можно непосредственно определить, приведет ли эта временная функция к изображению, имеющему нули в правой полуплоскости.

Для функции $a(t)$, изображенной на рис. XV.6а и имеющей величины a_k согласно выражениям (XV.62), находим полином

$$P_a(\lambda) = 2\lambda(3-\lambda), \quad (\text{XV.79})$$

который, разумеется, не является полиномом Гурвица. В данном случае начало координат плоскости λ соответствует началу координат плоскости s . Именно поэтому полином $P_a(\lambda)$, соответствующий полиному $sA(s)$, определяемому выражением (XV.69), содер-

жит множитель λ . Наличие такого множителя не влияет в данном случае на условия устойчивости.

Если функция $a(t)$, подобно функции $b(t)$, приведенной на рис. XV.6б, задана в виде линейно-ломаной аппроксимации, то выражение (XV.69) соответствует полиному $s^2A(s)$, а полином $P_a(\lambda)$ содержит множитель λ^2 . В общем, когда v -я производная функции $a(t)$ представляет собой сумму импульсов, полином $P_a(\lambda)$ содержит λ^v в виде множителя. К остальной части полинома $P_a(\lambda)$ в любом случае применяется обычная проверка по методу Гурвица.

В связи с изложенным важно оценить, какое влияние на полином $P_a(\lambda)$ окажет поворот функции времени $a(t)$, т. е. замена $a(t)$ на $a(n_a \Delta t - t)$. Поскольку при этом последовательность величин a_0, a_1, \dots, a_{n_a} заменяется соответственно на последовательность величин $a_{n_a}, a_{n_a-1}, \dots, a_0$, то из выражения (XV.73) следует, что полином $A^*(p)$ необходимо заменить на полином $p^{n_a} A^*\left(\frac{1}{p}\right)$ и, следовательно, с учетом выражений (XV.76) и (XV.77) полином $P_a(\lambda)$ заменить на полином $P_a(-\lambda)$. Таким образом, если данный импульс $a(t)$ имеет изображение $A(s)$ с нулями только в правой полуплоскости, то у изображения перевернутого импульса нет нулей в данной полуплоскости. Резюмируя этот результат, можно сказать, что изображение симметричного импульса имеет распределение нулей, симметричное относительно вещественной и мнимой осей плоскости s [полином $P_a(\lambda)$ содержит только четные или только нечетные степени λ].

В качестве примера рассмотрим выходную функцию $b(t)$, изображенную на рис. XV.6б, и входную функцию $a(t)$ на рис. XV.6а, но перевернутую так, что величины из выражения (XV.62) оказываются замененными на

$$a_k = 2, -1, -1 \quad \text{при } k = 0, 1, 2. \quad (\text{XV.80})$$

Величины b_k остаются такими же, как и в выражении (XV.63). Тогда из соотношений (XV.73) и (XV.75) получим:

$$A^*(p) = 2 - p - p^2; \quad (\text{XV.81})$$

$$B^*(p) = 1 - \frac{1}{2} p - \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{2} p^3 - \frac{1}{2} p^4 + p^5. \quad (\text{XV.82})$$

Поскольку для частотной области

$$C^*(p) = \frac{B^*(p)}{A^*(p)}, \quad (\text{XV.83})$$

то можно найти величины c_k , определяющие соответствующую импульсную характеристику, используя приводимый ниже простой процесс деления:

$$\begin{array}{r}
\frac{1}{2} + 0\rho + 0\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^3 - \frac{3}{8}\rho^4 + \frac{3}{16}\rho^5 - \frac{3}{32}\rho^6 \\
\hline
2 - \rho - \rho^2 \left[1 - \frac{1}{2}\rho - \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{2}\rho^3 - \frac{1}{2}\rho^4 + \rho^5 \right. \\
\left. 1 - \frac{1}{2}\rho - \frac{1}{2}\rho^3 \right. \\
\hline
-\frac{1}{2}\rho^3 - \frac{1}{2}\rho^4 + \rho^5 \\
-\frac{1}{2}\rho^3 + \frac{1}{4}\rho^4 + \frac{1}{4}\rho^5 \\
\hline
-\frac{3}{4}\rho^4 + \frac{3}{4}\rho^5 \\
-\frac{3}{4}\rho^4 + \frac{3}{8}\rho^5 + \frac{3}{8}\rho^6 \\
\hline
\frac{3}{8}\rho^5 - \frac{3}{8}\rho^6 \\
\frac{3}{8}\rho^5 - \frac{3}{16}\rho^6 - \frac{3}{16}\rho^7 \\
\hline
-\frac{3}{16}\rho^6 + \frac{3}{16}\rho^7
\end{array} \quad (\text{XV.84})$$

Результирующая импульсная характеристика теоретически бесконечна по длительности и имеет последовательность величин c_k вида

$$c_k = \frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, -\frac{3}{32}, \frac{3}{64}, -\frac{3}{128}, \dots \quad (\text{XV.85})$$

Соответствующая временная функция приведена на рис. XV.6д.

Как отмечалось выше, в таких случаях появляется возможность сделать заключение о том, что основная зависимость (XV.50) нарушается, так как оба интервала t_a и t_b по предположению конечны, тогда как интервал t_c бесконечен. Однако вывод о том, что интервал t_b состоит только из пяти подынтервалов Δt , показанных на рис. XV.6б, не является правильным. Совершенно очевидно, что функция $b(t)$ остается равной нулю после точки $t = 5\Delta t$ только благодаря тому, что функция $c(t)$ отлична от нуля. Указанные нулевые значения функции $b(t)$ следует, строго говоря, рассматривать как законную часть этой функции, так как если функция $c(t)$ обрывается в какой-то конечной точке, то функция $b(t)$ снова окажется не равной нулю. Последнее справедливо для числа интервалов Δt за пределами выбранной точки отсечки функции $c(t)$, которое равно длительности функции $a(t)$. При этом снова выполняется условие (XV.50).

Рассмотрев, каким образом функция $c(t)$, изображенная на рис. XV.6д, приближается к нулю с увеличением t , можно считать,

что отсечение ее после точки $t = 9\Delta t$ или $t = 10\Delta t$ вызовет появление пренебрежимо малых значений функции $b(t)$ за указанной точкой. Вполне понятно, что во всех практических случаях такое повторное появление выходных величин можно не учитывать.

Нетрудно видеть, что импульсную характеристику, необходимую для определения зависимости между парой известных входной и выходной функций времени, представляется возможным всегда вычислить непосредственно и что устойчивость ее нетрудно предсказать из исходных данных для временной области. Поэтому достаточно рассмотреть только построение соответствующей рациональной функции для известной функции времени, которая должна быть единичной импульсной характеристикой требуемой цепи.

XV.4. Общие соображения о синтезе импульсной характеристики

Задача заключается в том, чтобы построить удовлетворяющую соответствующим условиям реализуемости рациональную функцию, оригинал которой представляет собой допустимую аппроксимацию требуемой импульсной характеристики $f(t)$. Более точно, если $F(s)$ является изображением функции $f(t)$ и если это изображение не является реализуемой рациональной функцией (обычный случай), то необходимо построить рациональную аппроксимирующую функцию $F^*(s)$ так, чтобы оригинал $f^*(t)$ удовлетворительно аппроксимировал функцию $f(t)$.

Учитывая соображения, высказанные в предыдущих параграфах, решение указанной задачи, по-видимому, лучше всего осуществлять путем нахождения рациональной аппроксимирующей функции либо для вещественной, либо для мнимой части функции $F(j\omega)$, поскольку связь погрешностей в частотной области с результирующими погрешностями во временной области можно легко найти с помощью непосредственных числовых расчетов. Для удобства эти погрешности разделены на две категории: 1) погрешности, обусловленные отсечкой требуемой функции $F_1(\omega)$ или $F_2(\omega)$ за некоторой конечной частотой ω_c , и 2) погрешности, возникающие из-за несовершенства метода аппроксимации вещественной или мнимой части внутри конечного интервала $0 < \omega < \omega_c$.

Первые из них, которые обычно рассматривают как погрешности, вызванные «отсечкой» («truncation»), легко выражаются аналитически, учитывая, что (в соответствии с хорошо известной теорией преобразования) умножение функции $F(j\omega)$ на некоторую функцию отсечки $H(j\omega)$ сводится к свертыванию функций $f(t)$ и $h(t)$ [где $h(t)$ — оригинал функции $H(j\omega)$]. Если, например, $H(j\omega)$ является вещественной и имеет трапецеидальную форму (рис. XV.7), то можно найти функцию

$$h(t) = \frac{\omega_m}{\pi} \frac{\sin \Delta t}{\Delta t} \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t}, \quad (\text{XV.86})$$

которая при $\Delta = 0$ становится равной

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t}, \quad (\text{XV.87})$$

а при $\Delta = \omega_m = \frac{\omega_c}{2}$ определяется выражением

$$h(t) = \frac{\omega_c}{2\pi} \left(\frac{\sin \frac{\omega_c t}{2}}{\frac{\omega_c t}{2}} \right)^2, \quad (\text{XV.88})$$

причем для промежуточных значений Δ функция принимает значения, находящиеся между этими двумя крайними точками.

Таким образом, если функция $f(t)$ не является непрерывной, то отбрасывание членов с помощью прямоугольной функции отсечки

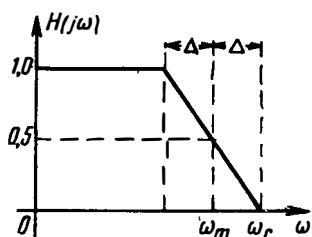


Рис. XV.7

[сводящееся к свертыванию с функцией, определяемой выражением (XV.87)] приводит к известному явлению Гиббса. Отбрасывание членов с помощью треугольной функции отсечки [сводящееся к свертыванию с функцией, определяемой выражением (XV.88)] дает ультраконсервативное поведение суммы Цезаро [2]. В этом случае нетрудно определить величину Δ , дающую надлежащую величину пульсаций. Если же функция $f(t)$ не имеет разрывов, то отбрасывание членов с помощью прямоугольной (наипростейшей) функции отсечки не дает заметных искажений лишь при условии, что частота отсечки ω_c выбрана достаточно большой.

В любом случае, характер и величина искажений во временной области, обусловленных ограничением функции в частотной области, легко оценить, после чего определяется соответствующая функция отсечки (как будет детально показано в следующем параграфе).

Погрешности во временной области, относящиеся к отмеченной выше второй группе погрешностей и возникающие в результате несовершенной аппроксимации внутри интервала $0 < \omega < \omega_c$, могут быть либо пренебрежимо малыми, либо в сомнительных случаях вычислены методами, рассмотренными в § XV.2.

На практике контроль погрешностей ухудшается при стремлении достичь удовлетворительных результатов с помощью рациональной функции, имеющей как можно меньшее число полюсов. Если результирующее число полюсов не играет роли, то погрешностью нетрудно управлять, но фактически никогда не бывает такого простого случая. При всякой возможности стремятся наилучшим образом использовать преимущества аппроксимации, обеспечиваемые рациональной аппроксимирующей функцией заданной сложности.

Однако основная задача состоит в нахождении хорошего способа аппроксимации заданной функции $F_1(\omega)$ или $F_2(\omega)$ в конечном частотном интервале посредством рациональной функции. Как ни странно, математически по крайней мере, до сих пор не получено удовлетворительного решения этой задачи. Поэтому обычно пытаются найти всякого рода искусственные методы, которые в достаточной степени пригодны для частных случаев, но для применения в более общих случаях требуют известного опыта при их выборе и использовании. Так, если функция $F_1(\omega)$ имеет все нули (или большую часть из них) на вещественной оси частот, то можно построить полином числителя по этим известным нулям, а затем определить полином знаменателя таким образом, чтобы рациональная аппроксимирующая функция совпадала в выбранных точках с кривой требуемой функции $F_1(\omega)$. Как известно, успех подобного метода зависит от выбора указанных точек, причем для этого не существует никаких рекомендаций, кроме предусмотренных методом последовательных приближений.

Вместо того чтобы попытаться выбрать соответствующий ряд точек, можно разложить функцию $\frac{1}{F_1(\omega)}$ на элементарные дроби, так как ее полюсами являются нули функции $F_1(\omega)$, а ее вычеты определяются наклонами этой функции в данных точках. Такой прием, однако, не только противоречит полученным результатам, но и приводит к значительному объему вычислений при управлении асимптотическим поведением результирующей аппроксимирующей функции, а следовательно, поведением функции $f^*(t)$ в точке $t = 0$ или в ее окрестности.

Используя методы, описанные в § XV.2, построим функцию

$$\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} F_1(u) du \quad (\text{XV.89})$$

и аппроксимируем ее в интервале $0 < \omega < \omega_c$ с помощью ступенчатой кривой, тогда производная дает для функции $F_1^*(\omega)$ представление в виде последовательности бесконечно коротких импульсов. Интерпретация каждого импульса этой вещественной части как полюса функции $F^*(s)$ позволяет построить рациональную аппроксимирующую функцию. Однако, предполагая одинаковым приращение $\Delta\omega$ между импульсами или между полюсами, из теории Фурье получим, что соответствующая функция $f^*(t)$ является периодической с периодом $\tau = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$. Следовательно, требуемую аperiodичность функции $f^*(t)$ можно получить только если принять, что полюсы располагаются бесконечно близко друг к другу на мнимой оси, что практически недопустимо.

Попытка использовать данный метод, применяя предсказание требуемой функции $f(t)$ посредством ее умножения на e^{at} и последующего умножения периодической функции $f^*(t)$ на e^{-at} так, что-

бы затухали, по существу, все периоды функции, кроме первого, — приводит к неэкономичным результатам.

Намного более удовлетворительное решение получается, если учесть, что графический метод, описанный в § XV.2 для перехода от функции $F_1(\omega)$ или $F_2(\omega)$ к функции $f(t)$ [см. выражения (XV.11) и (XV.12) или (XV.17) и (XV.18)], дает временную функцию в виде суммы затухающих синусоид, хотя множителем затухания является $\frac{1}{t^v}$, а не e^{-at} . Когда рассматривается функция $f(t)$, не равная нулю только в том интервале, в котором можно считать с точностью до постоянного множителя, что указанные два члена затухания равны друг другу, то изображение функции $f(t)$, для которой множитель $\frac{1}{t^v}$ заменяется на e^{-at} , и будет требуемой рациональной аппроксимирующей функцией.

Эти аппроксимации можно исключить путем предвысказания требуемой функции $f(t)$ за счет умножения ее на $t^{-v}e^{at}$ до того, как вычислять ее изображение $F(s)$, имеющее вещественную часть $F_1(\omega)$. Временная функция, полученная по указанной вещественной части методом, рассмотренным в § XV.2, будучи умноженной на $t^v e^{-at}$, представляет собой требуемую аппроксимирующую функцию во временной области, имеющую рациональное изображение.

Если функция $f(t)$ не имеет нуля, по крайней мере v -го порядка, в точке $t = 0$, то использование предвысказывающего множителя $t^{-v}e^{at}$ дает функцию времени, которая больше не ограничена в точке $t = 0$. В тех случаях, когда появляется такая трудность, ее можно преодолеть путем вычитания из функции $f(t)$ выражения

$$A_1 e^{-a_1 t} + A_2 e^{-a_2 t} + \dots + A_k e^{-a_k t}. \quad (\text{XV.90})$$

Оно выбирается таким образом, что первые v членов разложения Маклорена совпадают с соответствующими членами аналогичного разложения функции $f(t)$. Изображение этого выражения является рациональным, а функция-остаток удовлетворяет указанному необходимому условию (т. е. имеет в точке $t = 0$ нули, по крайней мере, v -го порядка).

XV.5. Синтез импульсной характеристики с помощью метода «стандартных элементов»

Из предыдущего рассмотрения видно, что в данное время отсутствуют прямые методы решения задачи синтеза во временной области и что необходимо применять соответствующие приемы, основанные на опыте. Лишь в результате дополнительного анализа можно выбрать достаточно простой и вместе с тем универсальный по своему принципу подход, который будет иметь и еще одно преимущество, заключающееся в возможности свести его числовые результаты в таблицы и графики. Этот табулированный материал

затем весьма удобно использовать как «стандартные элементы» («standard parts»), по которым с минимальными усилиями удается найти решение любой задачи.

Основа для такого подхода обеспечивается методом численного анализа, описанного в § XV.2, где данная функция представлена в виде ν -кратного интеграла последовательности бесконечно коротких импульсов. При этом задержанный импульс рассматривается как элемент для построения произвольных функций. Если имеются рациональные аппроксимирующие функции для изображений соответствующего ряда задержанных бесконечно коротких импульсов (или приемлемые их копии), то с помощью их линейных комбинаций можно построить рациональные аппроксимирующие функции для произвольных функций.

Приемлемой копией задержанного бесконечно короткого импульса является, очевидно, задержанный импульс конечной длительности. В нормализованном виде необходимо рассмотреть только охватывающую импульс единичную площадь, сосредоточенную в точке $t = 1$. Степень имитации обратно пропорциональна длительности импульса, которая должна быть определена в соответствии с его выбранной формой. Табулирование рациональных аппроксимирующих функций для различных длительностей импульсов обеспечивает запас стандартных элементов, необходимых для решения поставленной задачи.

Расположение и число полюсов при этом определяется заданными погрешностями аппроксимации и величиной задержки, требуемой для самого отдаленного члена в последовательности бесконечно коротких импульсов, с помощью которой представлена ν -я производная данной импульсной характеристики.

Как показано ниже, заданные погрешности аппроксимации определяют длительность импульса, которая предположительно может быть одинаковой для любых имитированных импульсов в последовательности. Тогда эта длительность, поделенная на задержку самого отдаленного импульса, равна длительности, приходящейся на единичную задержку, характеризующую исходную рациональную функцию при табулировании стандартных элементов. Нормализуя соответствующим образом модуль и частоту, можно заметить, что эта функция дает конечный квазиимпульс в последовательности, причем рациональные аппроксимирующие функции для всех других членов последовательности образуются из него. Таким образом если указанный наиболее отдаленный импульс (приходящийся на единицу площади) обозначить через $p(t)$, а его изображение — через $P(s)$, то получим:

$$p(t) = \sum k_i e^{s_i t}; \quad (\text{XV.91})$$

$$P(s) = \sum \frac{k_i}{s - s_i}. \quad (\text{XV.92})$$

Отсюда видим, что более ранний импульс $p(t + \tau)$ имеет изображение, определяемое выражением (XV.92), в котором вычеты k_i умножены соответственно на множители $e^{s_i \tau}$.

Важным моментом здесь является то, что изображения для всех импульсов имеют одинаковые полюсы, а значит, число полюсов результирующей рациональной аппроксимирующей функции (как отмечалось выше) определяется величиной задержки, необходимой для наиболее отдаленного импульса, и погрешностью, с которой он воспроизводится. Можно сказать, что получение наиболее отдаленного имитированного импульса дается ценой использования полюсов, необходимых для его реализации; все другие импульсы, независимо от их числа, ничего не добавляют к общим «затратам». Их наличие влияет только на величину вычетов результирующей рациональной аппроксимирующей функции.

Важно отметить, что длительность всех импульсов, создаваемых данным методом, одинакова, чего не было бы, если бы расположения импульсов регулировались с помощью нормализации (scaling). При этом отношение длительности к задержке остается постоянным (более ранние импульсы будут соответственно более узкими). Заметим, что нормализация как средство получения из одиночного импульса рациональных аппроксимирующих функций для всех импульсов не приводит к равномерному распределению погрешности в полной аппроксимации и дает значительно более низкую экономию результирующего числа требуемых полюсов.

Остается определить рациональное изображение имитированного импульса, имеющего единичную задержку, и показать, как следует проводить процесс расчета с тем, чтобы удовлетворить заданной погрешности во временной области при аппроксимации требуемой импульсной характеристики.

Изображением единичного импульса, находящегося в точке $t = 1$, является e^{-s} , а его вещественная часть на мнимой оси представляет собой $\cos \omega$. Если ограничить эту функцию, отбросив часть ее, начиная с частоты ω_c , и оставив неизменной остальную ее часть, то (поскольку обратное преобразование Фурье для $\cos \omega$ представляет собой пару половинных по размеру импульсов в точках $t = \pm 1$) результирующая импульсная характеристика (равная удвоенному значению результирующего обратного преобразования Фурье для $t > 0$) становится равной $h(t - 1) + h(t + 1)$, причем $h(t)$ определяется выражением (XV.87). Для любой частоты отсечки ω_c этот результат совпадает, по существу, с функцией, определяемой выражением (XV.87), задержанной на 1 сек.

Несмотря на то, что указанная, хорошо известная, функция имеет значительные пульсации в предшествующей области, она обеспечивает экономичный выбор, так как дает сравнительно малую длительность импульса и наименьшее количество полюсов для данной ширины полосы или частоты среза ω_c . Как будет видно далее, амплитуда пульсации становится пренебрежимо малой после двух

или более последующих интегрирований. Следовательно, квазиимпульсная функция (XV.87) оказывается пригодной, если она используется для аппроксимации второй или более высокой производной рассматриваемой функции времени, поскольку последующие интегрирования настолько подавляют пульсации, что с ними можно уже не считаться.

Следует заметить, что интегрирование как средство подавления пульсаций увеличивает трудоемкость расчета. Так как мы идем от кусочно-линейной аппроксимации к аппроксимации, в которой используются параболические дуги второго и более высокого порядков, то расстояние между импульсами (в общем случае) уменьшается; при этом требуются более узкие квазиимпульсы и увеличенная ширина полосы, а значит, и большее количество полюсов. Если в качестве основного квазиимпульса берется функция, определяемая выражением (XV.87), и интегрирование применяется как средство снижения ее пульсаций до пренебрежимо малых значений, то в большинстве случаев получается лучший результат с меньшей затратой труда, чем в более трудоемкой (хотя и обеспечивающей меньшие пульсации) аппроксимации импульсной функции при методе, использующем меньшее число последующих интегрирований.

Можно сделать заключение о том, что ограничение вещественной части $\cos \omega$, ведущее к известной функции (XV.87) в качестве основного имитированного импульса, дает такой же жесткий контроль погрешности (в зависимости от требований к полюсам как к части результирующей рациональной аппроксимирующей функции), что и получаемый при некотором имитированном импульсе с меньшими пульсациями за счет соответствующим образом модифицированной формы «усеченной» функции. Выбор функции (XV.87) обеспечивает максимальную гибкость в управлении допуском, так как он не устанавливает с самого начала произвольной верхней границы подавления пульсаций. Иными словами, при использовании этой функции можно получить сколь угодно высокую степень подавления пульсаций в окончательной синтезированной функции.

Более четкое освещение затронутых вопросов можно дать, проведя аналитическое сравнение истинного импульса с его имитацией с помощью функции (XV.87). Разность между этими двумя функциями удобно представить в виде функции погрешности

$$\varepsilon_0(t) = \frac{\omega c}{\pi} \frac{\sin \omega c t}{\omega c t} - u_0(t), \quad (\text{XV.93})$$

которая после интегрирования принимает вид

$$\varepsilon_{-1}(t) = \int_{-\infty}^t \varepsilon_0(\xi) d\xi = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\omega c t) - u_{-1}(t), \quad (\text{XV.94})$$

где $u_{-1}(t)$ — единичная ступенчатая функция, а $\text{Si} x$ — интегральный синус. Несмотря на то, что интеграл этой функции не табулирован,

можно вычислить и построить второй последующий интеграл от $\varepsilon_0(t)$, определяемый выражением

$$\varepsilon_{-2}(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau} \varepsilon_0(\xi) d\xi d\tau. \quad (\text{XV.95})$$

Графики результирующих функций (XV.94) и (XV.95) изображены на рис. XV.8.

На рис. XV.8а показан график погрешности в окрестности единичной ступеньки (известное явление Гиббса), а на рис. XV.8б —

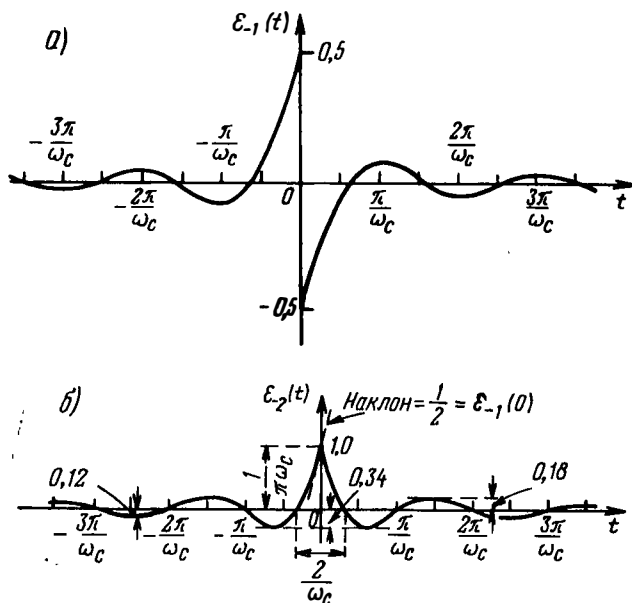


Рис. XV.8

график погрешности, с которой аппроксимируется единичная функция крутизны (gamp function). За исключением очень небольших пульсаций, основная погрешность здесь определяется всплеском в точке разрыва непрерывности, величина размаха которого равна $\frac{1}{\pi\omega_c}$.

Нетрудно получить это значение, заметив, что изображение функции $\varepsilon_0(t)$, определяемое выражением (XV.93), представляет собой функцию $H(j\omega) - 1$, где $H(j\omega)$ совпадает с функцией, график которой приведен на рис. XV.7 для $\Delta = 0$. Изображение функции $\varepsilon_{-2}(t)$ получается делением на $(j\omega)^2$ и, следовательно, имеет вид

$$\varepsilon_{-2}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-H(j\omega)}{\omega^2} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_c}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2} = \frac{1}{\pi\omega_c}. \quad (\text{XV.96})$$

Определим «длительность» импульса (XV.87) с помощью величины

$$\delta = \frac{\pi}{\omega_c}, \quad (\text{XV.97})$$

которая представляет собой ширину прямоугольного импульса той же высоты и одинаковой (единичной) площади. Используя длительность этого импульса, находим из выражения (XV.96)

$$\varepsilon_{-2}(0) = \frac{\delta}{\pi^2}. \quad (\text{XV.98})$$

Полученная величина равна примерно одной десятой от δ . В любой точке разрыва, в которой имеет место единичное изменение крутизны, результирующая погрешность сводится, по существу, к введению всплеска, размах которого определяется выражением (XV.96) или (XV.98). При отличном от единицы изменении крутизны величина всплеска изменяется пропорционально. Следовательно, при заданном максимально допустимом его размере сразу же определяется необходимая длительность импульса δ или частота среза ω_c .

Совершенно очевидно, что добавочное интегрирование сводит функцию погрешности к значительно меньшей величине, которой во многих практических случаях можно полностью пренебречь. Таким образом, когда данная импульсная характеристика аппроксимируется параболическими дугами, длительность импульса δ больше не зависит от требований к пульсациям и определяется условием, согласно которому она должна быть, по крайней мере, такой же малой, как самое близкое расстояние между бесконечно короткими импульсами ν -й производной. Рациональным изображением требуемого имитированного импульса является такое, вещественная часть которого аппроксимирует $\cos \omega$ или мнимая часть которого аппроксимирует $-\sin \omega$ в интервале $-\omega_c < \omega < \omega_c$. Метод выбора ω_c известен, за незначительным исключением, связанным с необходимостью имитации асимптотического поведения части указанного изображения, когда рассматриваемая функция времени начинается с нулевого значения в точке $t = 0$.

В качестве основы для построения рационального изображения исследуемого имитированного импульса используем метод, предложенный в предыдущем параграфе. Согласно этому методу сначала производится построение функции $f(t)$ по соответствующей функции $F_1(\omega)$ или $F_2(\omega)$ при помощи приемов, рассмотренных в § XV.2, а затем величина $\frac{1}{t^\nu}$ заменяется на $e^{-\alpha t}$. Последний этап сводится к умножению $f(t)$ на член $t^\nu e^{\alpha t}$, представляющий сам по себе функцию, подобную импульсной функции с максимумом в точке $t = \frac{\nu}{\alpha}$. Если принять $\alpha = \nu$ и умножить эту функцию на e^ν , то она будет иметь максимальное значение, равное единице, в точке

$t = 1$ для всех целых значений ν , т. е. будет выглядеть следующим образом:

$$g(t) = [t e^{-(t-1)}]^\nu. \quad (\text{XV.99})$$

График функции для $\nu = 2$ и $\nu = 3$ представлен на рис. XV.9. Умножение на нее рассматриваемого имитированного импульса дает, очевидно, полезный эффект, поскольку при этом уменьшаются пульсации на прешествующем участке, не оказывая существенно влияния на форму импульса.

В связи с вопросом о том, должны ли мы применять для функций $\cos \omega$ или $-\sin \omega$ линейно-ломаную аппроксимацию или аппроксимацию параболическими дугами, следует отметить, что первая в большинстве случаев адекватна второй, но дает небольшую

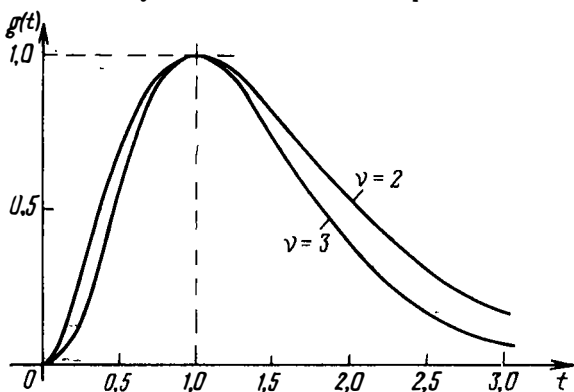


Рис. XV.9

экономии. Поскольку более удобно, чтобы соответствующая функция времени начиналась с нулевого значения в точке $t = 0$, то нетрудно увидеть, что при этом условии полная площадь под линейно-ломаной аппроксимацией равняется нулю. Иными словами, частота среза ω_c должна быть равна целому числу, кратному π . Если функция $\cos \omega$ аппроксимируется указанным образом, то ломаная линия не заканчивается нулевым значением в точке $\omega = \omega_c$, а значит, вторая производная содержит в данной точке два значения (дублет). Поскольку дублет приводит к полюсу двойного порядка, то общая экономия не будет настолько существенной, как для случая, когда рассматривается линейно-ломаная аппроксимация функции $-\sin \omega$, заканчивающаяся нулевым значением в точке $\omega = \omega_c$. Такая аппроксимация изображена в верхней части рис. XV.10 для $\omega_c = 2\pi$; в средней и нижней частях этого рисунка показаны графики соответственно первой и второй производных. Амплитуда приведенной треугольной аппроксимации выбирается так, что площади под половинами периодов оказываются такими же, как и для аппроксимируемой синусоиды, хотя данное условие в действительности

не столь важно. Далее необходимо ввести соответствующие постоянные множители с тем, чтобы свести полную площадь под результирующей функцией времени до нормализованной величины.

Используя импульсные величины, изображенные в нижней части рис. XV.10, можно по ф-ле (XV.18) записать выражение для соответствующей функции времени

$$f(t) = \frac{32}{\pi^3 t^2} \left(\sin \frac{\pi t}{2} - \sin \frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi t}{2} \right). \quad (\text{XV.100})$$

На рис. XV.11 сплошной кривой показан график этой функции (с нормализованной амплитудой), а пунктиром — ее модификация, являющаяся результатом умножения функции $f(t)$ на функцию $g(t)$, определяемую выражением (XV.99) при $\nu = 2$ (см. рис. XV.9). Амплитуды результирующих пульсаций меньше, чем амплитуды пульсаций для функции, определяемой выражением (XV.87) и построенной на рис. XV.12, тогда как форма основного горба почти такая же¹. При $\omega_c = 2\pi$ выражение (XV.97) дает $\delta = \frac{1}{2}$. Эта величина очень близка к действительной длительности в точках $\frac{2}{\pi}$, как было определено для функции (XV.87). Можно прийти к заключению, что даже для такой чрезвычайно малой величины ω_c , критерии допусков, основанные на этой функции, вполне применимы.

Модифицированная функция времени, к которой применима пунктирная кривая [за исключением основного горба, почти не поддающемуся влиянию умножения на функцию (XV.99)], определяется выражением

$$f(t) = \frac{32e^{-2(t-1)}}{\pi^3} \left(\sin \frac{\pi t}{2} - \sin \frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi t}{2} \right). \quad (\text{XV.101})$$

Соответствующее рациональное изображение имеет вид

$$F(s) = 11,98 \left(\frac{1}{s^2 + 4s + 6,47} - \frac{3}{s^2 + 4s + 26,21} + \frac{2}{s^2 + 4s + 43,48} \right). \quad (\text{XV.102})$$

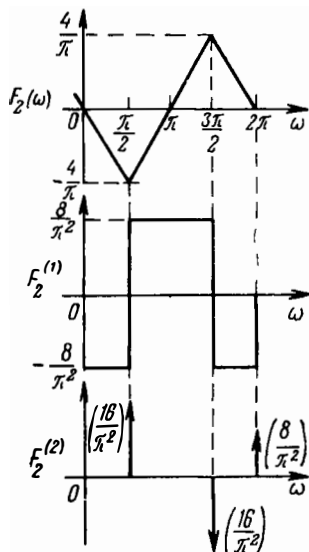


Рис. XV.10

¹ Квазиимпульсная функция, приведенная на рис. XV.12 и определяемая выражением (XV.87), получается в результате сильного ограничения спектра импульса в точке $\omega = \omega_c$ (произвольный выбор начала отсчета оси времени).

Его значение для нулевой частоты равно полной площади под импульсной функцией (XV.101)

$$F(0) = 1,03 = \int_0^{\infty} f(t) dt. \quad (\text{XV.103})$$

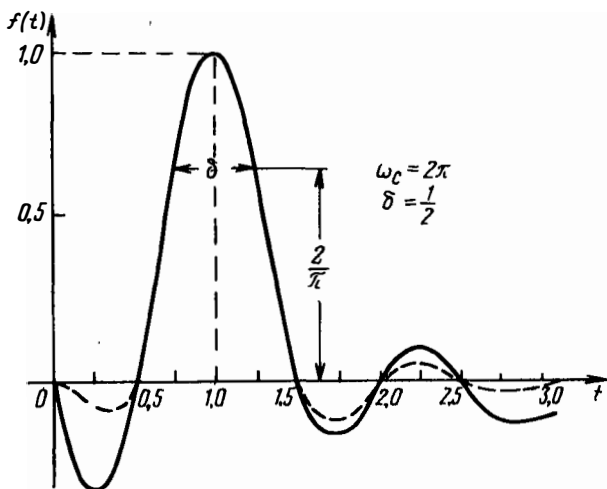


Рис. XV.11

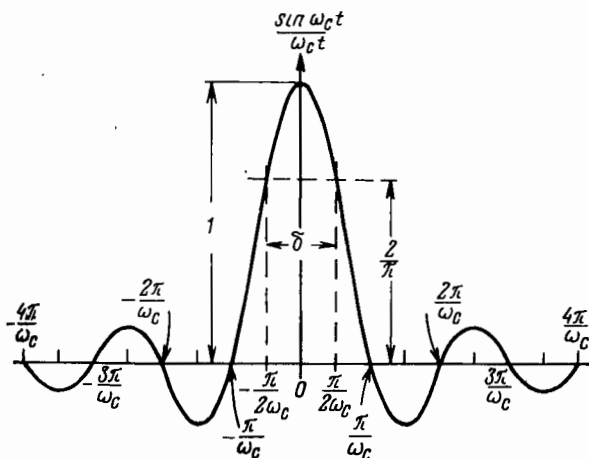


Рис. XV.12

Умножение функции $F(s)$, определяемой выражением (XV.102), на обратную ей величину обеспечивает такую нормализацию импульса (XV.101), которой соответствует единичная площадь.

Рассмотрим далее тот же метод для $\omega_c = 4\pi$. График, соответствующий линейно-ломаной аппроксимации для функции $-\sin \omega$, показан на рис. XV.13а; результирующая функция времени, согласно выражению (XV.18), имеет вид

$$f(t) = \frac{32}{\pi^3 t^2} \left(\sin \frac{\pi t}{2} - \sin \frac{3\pi t}{2} + \sin \frac{5\pi t}{2} - \sin \frac{7\pi t}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{8\pi t}{2} \right). \quad (\text{XV.104})$$

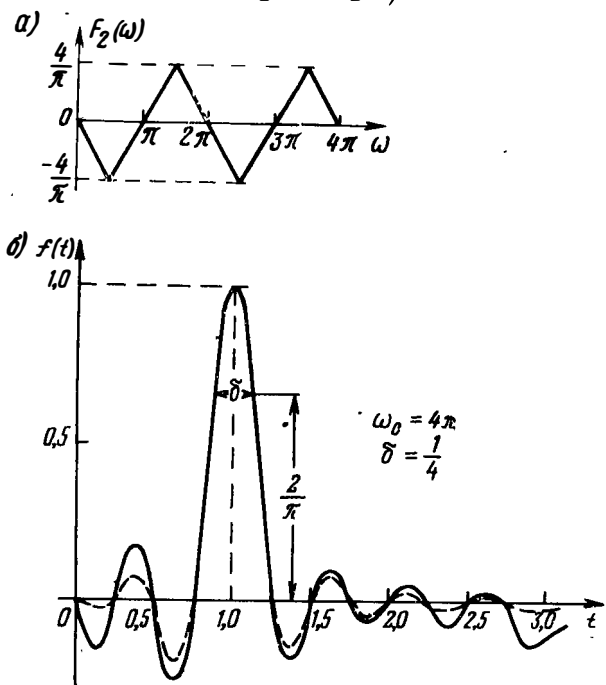


Рис. XV.13

График этой функции показан сплошной кривой на рис. XV.13б, а эффект умножения на функцию $g(t)$, определяемую выражением (XV.99) для $\nu = 2$, — пунктирной кривой. Нетрудно заметить, что результирующие амплитуды пульсаций все еще меньше, чем амплитуды пульсаций для импульса-прототипа, определяемого выражением (XV.87) и показанного на рис. XV.12, так что снова применим упомянутый критерий погрешности.

После указанной операции умножения функции (XV.104) ее изображение принимает вид

$$F(s) = 11,98 \left(\frac{1}{s^2 + 4s + 6,47} - \frac{3}{s^2 + 4s + 26,2} + \frac{5}{s^2 + 4s + 65,7} - \frac{7}{s^2 + 4s + 124,9} + \frac{4}{s^2 + 4s + 161,9} \right). \quad (\text{XV.105})$$

Полная площадь под результирующим импульсом в данном случае будет

$$F(0) = 1,016. \quad (\text{XV.106})$$

Образование рациональных изображений, соответствующих большим значениям частоты среза ω_c и меньшим значениям длительности δ , осуществляется непосредственно. При этом число пар полюсов определяется зависимостью

$$n = \frac{1}{\delta} + 1 = \frac{\omega_c}{\pi} + 1; \quad (\text{XV.107})$$

следовательно, для любого необходимого значения δ нетрудно получить число полюсов результирующей функции.

Интересно сравнить полученные результаты с результатами, найденными при аппроксимации параболическими дугами. Здесь оказывается целесообразным использование вещественной части требуемого изображения, а именно функции $\cos \omega$.

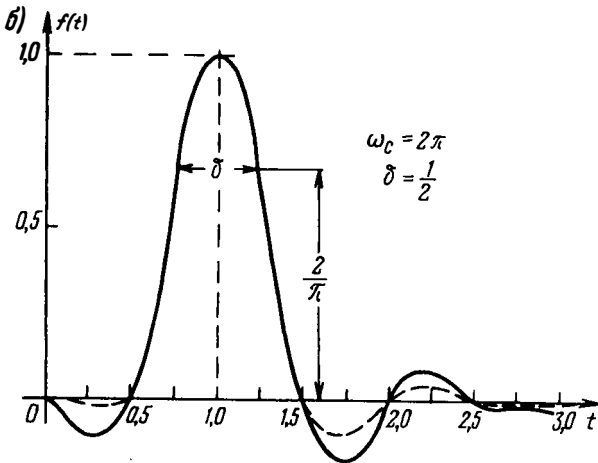
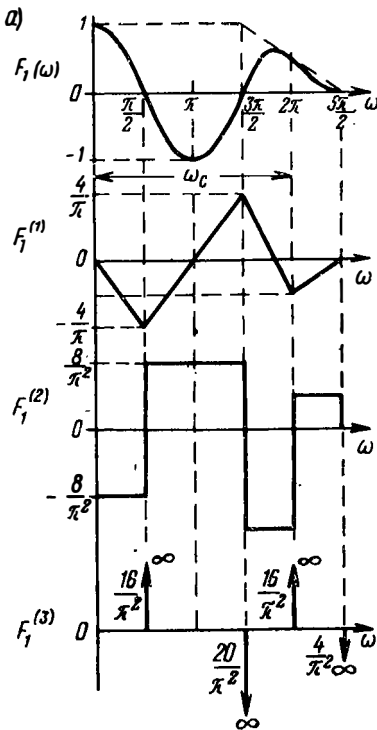


Рис. XV.14

Соответствующие графики, аналогичные изображенным на рис. XV.10, приведены на рис. XV.14а для случая, когда использует-

ся метод аппроксимации параболическими дугами. Первая производная $F_1^{(1)}(\omega)$ определяется теперь пунктирной линией, аналогичной той, которая приводилась при аппроксимации функции $F_2(\omega)$ на рис. XV.10. Однако, если желательно, чтобы подная площадь под аппроксимирующей кривой при аппроксимации с помощью параболических дуг была равна нулю (для того чтобы получить при $t = 0$ $f(t) = 0$), пунктирная линия должна заканчиваться не так, как в предыдущем случае.

Указанное требование всегда можно выполнить, изменив линейно-ломаную аппроксимацию функции $F_1^{(1)}(\omega)$ внутри последнего π -интервала, как показано на рис. XV.14а. Такой прием гарантирует, что условия моментов (XV.28) выполняются при $\mu = 1,3$ [как и очевидно, поскольку $\nu = 3$, и имитируется асимптотическое поведение, состоящее в том, что при $s \rightarrow \infty$ должно быть $F(s) \rightarrow \frac{1}{s^2}$]. Влияние подобного вида конечной части аппроксимации состоит в небольшом отклонении от резкого отсечения, а соответствующее значение ω_c определяется не так четко. Ясно, что выбор в качестве частоты ω_c среднего значения последнего π -интервала (см. рис. XV.14а) точно дает основную длительность результирующего импульса (согласно рис. XV.12), равную $\frac{2\pi}{\omega_c}$.

Используя импульсные величины из нижней части рис. XV.14а, можно по выражению (XV.12) записать соответствующую функцию

$$f(t) = \frac{32}{\pi^3 t^3} \left(\sin \frac{\pi t}{2} - \frac{5}{4} \sin \frac{3\pi t}{2} + \sin \frac{4\pi t}{2} - \frac{1}{4} \sin \frac{5\pi t}{2} \right). \quad (\text{XV.108})$$

Ее нормализованный график дан сплошной кривой на рис. XV.14б; пунктирная кривая на этом рисунке показывает основные модификации, являющиеся результатом умножения на функцию $g(t)$, определяемую выражением (XV.99) и рис. XV.9 при $\nu = 3$. Модифицированная функция времени с изображением в виде рациональной функции запишется так:

$$f(t) = \frac{32e^{-3(t-1)}}{\pi^3} \left(\sin \frac{\pi t}{2} - \frac{5}{4} \sin \frac{3\pi t}{2} + \sin \frac{4\pi t}{2} - \frac{1}{4} \sin \frac{5\pi t}{2} \right). \quad (\text{XV.109})$$

Сравнивая кривые, показанные на рис. XV.11 и XV.14б, можно оценить разницу между линейно-ломаной аппроксимацией и аппроксимацией параболическими дугами. Последняя дает значительно меньшую предшествующую пульсацию и значительно меньшую величину δ для той же частоты ω_c . Следовательно, число требуемых пар полюсов при аппроксимации параболическими дугами определяется выражением

$$n = \frac{1}{\delta} + 2 = \frac{\omega_c}{\pi} + 2, \quad (\text{XV.110})$$

что на единицу превышает число пар полюсов, необходимых при линейно-ломаной аппроксимации [см. выражение (XV.107)]. Если необходимая величина δ невелика, то эта разница несущественна и более консервативный аспект метода аппроксимации параболическими дугами оправдывает небольшое увеличение числа полюсов.

Графики, аналогичные изображенным на рис. XV.14а, относящиеся к аппроксимации параболическими дугами при $\omega_c = 3\pi$, показаны на рис. XV.15, а соответствующая функция времени согласно выражению (XV.12) имеет вид

$$f(t) = \frac{32}{\pi^3 t^3} \left(\sin \frac{\pi t}{2} - \sin \frac{3\pi t}{2} + \frac{5}{4} \sin \frac{5\pi t}{2} - \sin \frac{6\pi t}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{7\pi t}{2} \right). \quad (\text{XV.111})$$

Умножив ее на функцию $g(t)$, определяемую выражением (XV.99) для $\nu = 3$, получим модифицированную функцию времени, имеющую

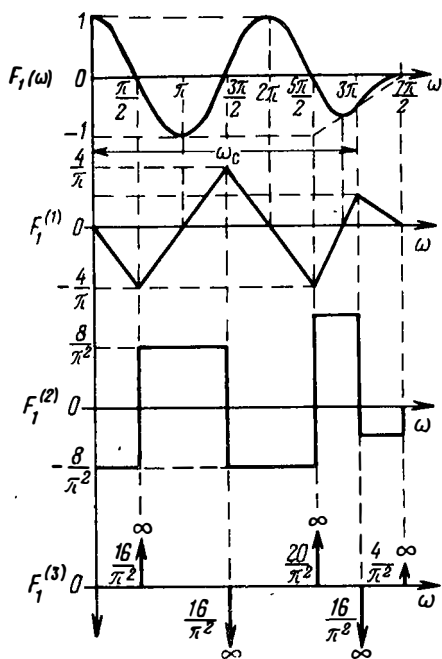


Рис. XV.15

рациональное изображение и уменьшенные пульсации в предшествующей области и после окончания импульса.

При таком подходе нетрудно построить дополнительные временные функции и их рациональные изображения для любого выбранного значения δ или ω_c . Каждый результирующий импульс имитирует график прототипа, изображенного на рис. XV.12, достаточно хорошо в том смысле, что амплитуда пульсаций и действительные погрешности оказываются, по крайней мере, малыми — не больше ожидаемых.

Теперь рассмотрим подробно то построение рациональных изображений для прототипных квазиимпульсов (исходные элементы в методе синтеза с помощью последовательности бесконечно коротких импульсов), которое играет весьма важную роль. В нашем рассмотрении функций погрешности $\varepsilon_0(t)$, $\varepsilon_{-1}(t)$, $\varepsilon_{-2}(t)$, определяемых выражениями (XV.93), (XV.94) и (XV.95) (графики двух последних даны на рис. XV.8), мы имеем дело с до некоторой степени случайной ситуацией в том смысле, что функции $\varepsilon_0(t)$ и в сем ее последующим интегралам (в пределах

от $-\infty$ до ∞) соответствует нулевая площадь. В этом нетрудно убедиться, если вспомнить, что изображение функции, поделенное на любую конечную степень $(j\omega)$, равно нулю при $\omega = 0$. Именно данное свойство в результате приводит к тому, что функция каждого последующего интеграла колеблется относительно нулевой оси со все уменьшающимися амплитудами. Если бы для одной из этих функций полная площадь под ней не равнялась нулю, то ее интеграл имел бы отличную от нуля асимптоту; следующий интеграл асимптотически стремился бы к линейному наклону; следующий за ним — к параболическому наклону и т. д. Другими словами, последующие функции погрешности все больше и больше уклонялись бы от нулевой оси, и эта «погрешность уклонения» («drift error») полностью перекрыла бы погрешность колебаний, которой мы только до сих пор и занимались.

Ясно, что рассмотренный выше метод предсказания и управления погрешностью оказывается непригодным, когда импульсные функции, с помощью которых мы заменяем отдельные импульсы в последовательности бесконечно коротких импульсов (предназначенной для представления v -й производной требуемой переходной характеристики), не могут быть проинтегрированы v раз без отклонений в соответствующих осциллирующих функциях погрешности. Импульсные функции, рациональные изображения которых находят описанным выше способом, не удовлетворяют указанному требованию, но посредством соответствующих небольших изменений (они будут изложены ниже) можно этого добиться.

Допустим, что функция $f(t)$ является типичным имитированным импульсом, возникающим в точке $t = \tau$, а $F(s)$ — его рациональное изображение, построенное изложенным выше методом. Далее допустим, что функция $F(s)$ имеет вид

$$F(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ms^m}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^n}, \quad (\text{XV.112})$$

где $n > m$. Если желательно проинтегрировать функцию $f(t)$ v раз без изменения погрешности, то полная площадь под функцией погрешности $f(t) - u_0(t - \tau)$ после v последующих интегрирований должна быть равна нулю. Это условие выполняется, когда функция $F(s) - e^{-s\tau}$ (изображение указанной погрешности) имеет в точке $s = 0$ нуль, по меньшей мере $(v + 1)$ -го порядка, или если во всяком случае первые $(v + 1)$ -е коэффициенты в разложении Маклорена для данного изображения равны нулю. Поскольку

$$F(s) - e^{-s\tau} = \frac{p(s) - q(s)e^{-s\tau}}{q(s)} \quad (\text{XV.113})$$

и

$$q(s)e^{-s\tau} = b_0 + (b_1 - \tau b_0)s + \left(b_2 - \tau b_1 + \frac{\tau^2}{2} b_0 \right) s^2 + \\ + \left(b_3 - \tau b_2 + \frac{\tau^2}{2} b_1 - \frac{\tau^3}{6} b_0 \right) s^3 + \dots, \quad (\text{XV.114})$$

то необходимые и достаточные условия, обеспечивающие нулевое изменение погрешности, принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= b_0 \\ a_1 &= b_1 - \tau b_0 \\ a_2 &= b_2 - \tau b_1 + \frac{\tau^2}{2} b_0 \\ a_3 &= b_3 - \tau b_2 + \frac{\tau^2}{2} b_1 - \frac{\tau^3}{6} b_0 \\ &\dots \\ a_\nu &= b_\nu - \tau b_{\nu-1} + \frac{\tau^2}{2} b_{\nu-2} - \dots + (-1)^\nu \frac{\tau^\nu}{\nu!} b_0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{XV.115})$$

Первое уравнение этой системы эквивалентно требованию $F(0) = 1$ и, следовательно, равнозначно нормализации площади под импульсом $f(t)$ к единице. Если требуемая переходная функция аппроксимируется ломаной линией так, что $\nu = 2$, то должны выполняться два дополнительных уравнения из системы (XV.115); если используется аппроксимация параболическими дугами, — то три дополнительных уравнения.

При построении описанной выше функции $F(s)$ вещественные либо мнимые части функций $F(j\omega)$ и $e^{-j\omega\tau}$ были примерно равны друг другу в диапазоне частот от $\omega = 0$ до некоторой частоты, кратной π . Следовательно, можно ожидать, что функция $F(s)$ вблизи точки $s = 0$ окажется почти подобной функции $e^{-s\tau}$ так, что условия (XV.115) будут хотя и не точно, но почти удовлетворяться в любом приемлемом случае.

Например, функция (XV.105), найденная из линейно-ломаной аппроксимации функции $-\sin \omega$ (см. рис. XV.13а) после деления на величину, определяемую выражением (XV.106), дает $F_0 = 1$; $F'(0) = -0,985$; $F''(0) = 0,810$ вместо точных значений 1; -1 ; 1 соответственно. Для аппроксимации параболическими дугами эти результаты являются значительно более близкими.

Следовательно, можно заключить, что необходимо лишь незначительно изменить величины коэффициентов a_0, \dots, a_ν для точного удовлетворения соответствующих условий (XV.115). Такая «настройка сдвига» («drift adjustment») изображений квазиимпульсных функций, оказывающая лишь некоторое влияние на поведение функции в области низких частот, оставляет неизменной форму импульса, за исключением некоторых изменений пульсаций в предшествующей области и после окончания импульса.

В любом сомнительном случае нетрудно оценить эффект сдвига. Допустим, что $\nu = 2$, а необходимые изменения коэффициентов a_1 и a_2 обозначены через α_1 и α_2 . Тогда функция

$$D(s) = \frac{\alpha_1 s + \alpha_2 s^2}{q(s)} \quad (\text{XV.116})$$

является изображением изменения функции $f(t)$, обусловленного сдвигом. Поскольку известны полюсы этого изображения, нетрудно грубо оценить величины его вычетов и сравнить их с известными вычетами функции $F(s)$.

Теперь можно полностью описать процесс синтеза требуемой импульсной характеристики. Допустим, что он начинается с линейно-ломаной аппроксимации указанной заданной временной функции, причем ее вторая производная представлена в виде последовательности бесконечно коротких импульсов. Удобно нормализовать шкалу времени так, чтобы последний импульс оказался в точке $t = 1$. Далее находят допуск аппроксимации через наибольший допустимый размах всплеска в точках разрыва. Затем осуществляется нормирование, т. е. деление размаха всплеска на величину наибольшего импульса в последовательности. В результате получается величина $\varepsilon_{-2}(0)$, а из выражений (XV.96) или (XV.98) вычисляется соответствующая частота отсечки ω_c или длительность импульса δ .

С помощью описанных выше методов построим теперь изображение $F(s)$ в виде рациональной функции для квазиимпульса с длительностью δ . Здесь более целесообразно использовать аппроксимацию параболическими дугами, а по ней получить изображения импульсов (имеющие такие же полюсы), возникающих на месте каждого бесконечно короткого импульса в последовательности. Для этого воспользуемся приемами, примененными при рассмотрении выражений (XV.91) и (XV.92). После того как каждое из указанных изображений приводится к такому виду, когда погрешность сдвига равна нулю, а затем умножается на положительный или отрицательный множитель согласно значениям соответствующих компонентов последовательности импульсов, их сумма, поделенная на s^2 , дает требуемую функцию.

Последовательность бесконечно коротких импульсов удовлетворяет условиям моментов, гарантирующим, что ее двойное интегрирование снова дает исходную заданную временную функцию без погрешности сдвига. Кроме того, каждый квазиимпульс также «настроен» так, что погрешность сдвига равна нулю. Отсюда следует, что сумма изображений, построенная описанным выше способом, должна содержать множитель s^2 , который сокращается в результате деления на s^2 , как только что было замечено. Тогда результирующая функция имеет в точке $s = 0$ конечное, отличное от нуля значение, равное полной площади под указанной импульсной характеристикой.

За исключением некоторых особых случаев, линейно-ломаная аппроксимация заданной временной функции (импульсной характеристики) может быть выполнена различными способами в соответствии с количеством и распределением выбранных точек излома. Поскольку такого рода аппроксимация улучшается по мере увеличения числа точек излома и так как общее число требуемых полюсов для данной длительности импульса δ не зависит от числа точек излома, представляется, что существует какое-то оптимальное

расстояние между последними. Указанное положение обуславливается в основном двумя моментами: 1) с уменьшением расстояния между точками излома результирующие величины импульсов в последовательности бесконечно коротких импульсов, представляющей вторую производную, также уменьшаются; кроме того, уменьшаются множители амплитуд для функций погрешности $\varepsilon_{-2}(t)$ (см.

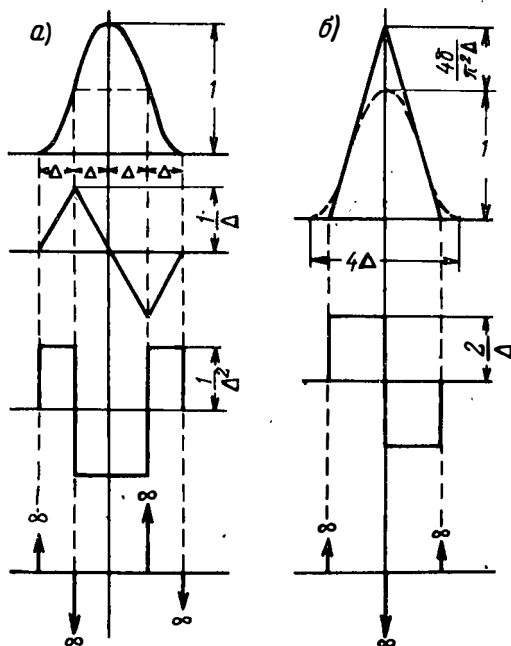


Рис. XV.16

рис. XV.86), сосредоточенные в этих точках; 2) уменьшенное расстояние между такими функциями погрешности вызывает их перекрытие, причем в итоге может оказаться, что амплитуды пульсаций станут суммироваться. Хотя и нельзя определить точно суть компромисса между приведенными двумя противоречивыми утверждениями, в рассматриваемом случае этого можно с успехом достигнуть без большого затруднения. Аналогично возможно и обоснование того, какую следует использовать аппроксимацию: линейно-ломаную или параболическими дугами. В этой связи, прежде всего, следует заметить, что представление третьей и более высоких производных в виде последовательности бесконечно коротких импульсов приводит к функциям погрешности $\varepsilon_{-3}(t)$, $\varepsilon_{-4}(t)$, ..., полученным в результате последовательного интегрирования функций, изображенной на рис. XV.86. Нетрудно видеть, что максимальные значения амплитуд пульсаций этих функций в точках соответствующих им импульсов (или вблизи них) имеют величины $\frac{1}{2\pi\omega_c^2} = \frac{\delta^2}{2\pi^3}$; $\frac{1}{3\pi\omega_c^3} = \frac{\delta}{3\pi^4}$...

Они очень малы, поэтому нет нужды применять методику, рассмотренную применительно к рис. XV.16.

На рис. XV.16а мы аппроксимируем требуемый импульс параболическими дугами, а на рис. XV.16б — ломаной линией. Результирующие пульсации погрешности для первой аппроксимации имеют порядок $\frac{1}{\Delta^2} \frac{\delta^2}{2\pi^3}$, тогда как для второй они определяются величи-

ной $\frac{2}{\Delta} \frac{\delta}{\pi^2}$ и принимают, по существу, форму всплесков в точках излома. Поскольку Δ выбирается примерно такой же малой, как и δ , это сводит к нулю преимущества метода аппроксимации с помощью параболических дуг. Как показывает пунктирная кривая на рис. XV.16б, окончательный результат при использовании линейноломаной аппроксимации, по существу, таков же. Бывают, конечно, положения, когда аппроксимация параболическими дугами дает преимущества. Например, ей следует отдать предпочтение при построении изображений для квазиимпульсов (функции, служащие исходными элементами для дальнейших построений), так как она очень незначительно увеличивает сложность, но существенно уменьшает пульсации, прежде всего, как упоминалось ранее, в области, предшествующей импульсу.

XV.6. Синтез импульсной характеристики методом Фурье

Этот метод синтеза состоит в следующем. Если требуемая импульсная характеристика является периодической переходной функцией, которая может быть представлена с любой требуемой точно-

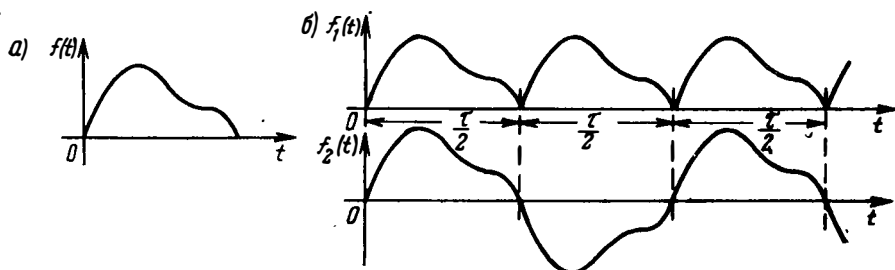


Рис. XV.17

стью аппроксимации при помощи конечного тригонометрического полинома, то соответствующее рациональное изображение получается сразу. Здесь не требуется оценки связи погрешности во временной и частотной областях, так как задача аппроксимации связана исключительно с временной областью. Единственно, что необходимо — это некоторая искусность для выражения переходной функции времени через ее же периодическое повторение. Порядок решения указанной задачи излагается ниже.

Пусть требуемая функция $f(t)$ представляет собой импульс, график которого изображен на рис. XV.17а. Рассмотрим две периодические последовательности этой функции, графики которых показаны на рис. XV.17б. Нетрудно заметить, что соответствующие им изображения $h_1(s)$ и $h_2(s)$ можно легко построить, используя ряды Фурье для функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Если возможно синтезировать пару двухполюсников N_1 и N_2 , имеющих входные проводи-

мости $h_1(s)$ и $h_2(s)$ ¹, то ясно, что их реакциями на приложенный единичный импульс напряжения будут токи, определяемые временными функциями $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответственно. Иными словами, если к двухполюснику N_1 приложить возбуждение в виде функции тока $f_1(t)$ или к двухполюснику N_2 — в виде функции тока $f_2(t)$, то реакцией в каждом из этих случаев будет единичный импульс напряжения.

Допустим, что

$$f(t) = f_1(t) - f_1\left(t - \frac{\tau}{2}\right); \quad (\text{XV.117})$$

$$f(t) = f_2(t) + f_2\left(t - \frac{\tau}{2}\right). \quad (\text{XV.118})$$

Тогда можно прийти к заключению, что если к двухполюснику N_1 приложить токовое возбуждение $f(t)$, то реакцией будет еди-

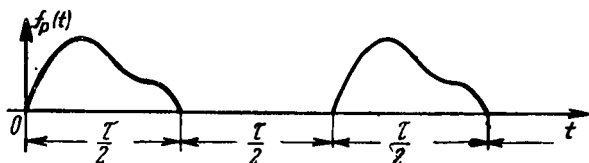


Рис. XV.18

ничный импульс напряжения в точке $t = 0$, за которым следует отрицательный единичный импульс в точке $t = \frac{\tau}{2}$. Если же то же возбуждение приложить к двухполюснику N_2 , то за реакцией — единичным импульсом напряжения в точке $t = 0$ — последует другой импульс в точке $t = \frac{\tau}{2}$. Поэтому ток $f(t)$, приложенный к двухполюсникам N_1 и N_2 , соединенным последовательно, создает просто импульс напряжения в точке $t = 0$, или последний создает возбуждение $f(t)$, что и является требуемым результатом. Остается представить сказанное математически.

Начнем с рассмотрения периодической функции $f_p(t)$, состоящей из последовательности функций $f(t)$, взятых на интервале, равном половине периода. На рис. XV.18 показано периодическое повторение импульса, изображенного на рис. XV.17а. Четные и нечетные члены разложения в ряд Фурье этой функции (за исключением множителя 2) представляют собой соответственно функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, приведенные на рис. XV.17б.

¹ Обычно оказывается, что указанные функции не являются положительными вещественными и, следовательно, переализуемы с помощью пассивных элементов. Однако в данном случае это несущественно, поскольку данное положение приводится просто, как средство оценки механизма, способствующего получению требуемого результата.

Запишем ряд Фурье

$$f_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega t} \quad (\text{XV.119})$$

и предположим, что он тождественно равен нулю при $t < 0$. Изображение этого ряда имеет вид

$$h_p(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{s - jk\omega} = \frac{p(s)}{q(s)}. \quad (\text{XV.120})$$

Изображения $h_1(s)$ и $h_2(s)$ нетрудно построить, используя изображение $h_p(s)$.

Тогда

$$h_1(s) = h_p(s) \left(1 + e^{-\frac{sT}{2}} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k (1 + e^{-jk\pi})}{s - jk\omega}; \quad (\text{XV.121})$$

$$h_2(s) = h_p(s) \left(1 - e^{-\frac{sT}{2}} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k (1 - e^{-jk\pi})}{s - jk\omega}. \quad (\text{XV.122})$$

Если учесть, что член $(1 + e^{-jk\pi})$ равен двум для k четного и нулю для k нечетного, а член $(1 - e^{-jk\pi})$ равен двум для k нечетного и нулю для k четного, то

$$h_1(s) = 2 \sum_{k=0, \pm(2, 4, \dots)}^{\infty} \frac{a_k}{s - jk\omega} = \frac{p_1(s)}{q_1(s)}; \quad (\text{XV.123})$$

$$h_2(s) = 2 \sum_{k=\pm(1, 3, \dots)}^{\infty} \frac{a_k}{s - jk\omega} = \frac{p_2(s)}{q_2(s)}. \quad (\text{XV.124})$$

Таким образом, видим, что функция $h_1(s)$ равна удвоенной сумме членов четного порядка из выражения (XV.120), а функция $h_2(s)$ равна удвоенной сумме членов нечетного порядка из того же выражения.

Если суммы в выражениях для $h_p(s)$, $h_1(s)$ и $h_2(s)$ имеют бесконечное число членов, то указанные изображения, разумеется не являются рациональными, а полиномы $p(s)$, $q(s)$, $p_1(s)$, $p_2(s)$ и $q_2(s)$ — конечными. Поскольку в дальнейшем предполагается замена данных выражений их частичными суммами, то уместно даже на этом этапе считать полиномы конечными. Очевидно, они имеют вещественные коэффициенты даже в том случае, если коэффициенты Фурье a_k (которые представляют собой вычеты функций h в их полюсах на мнимой оси) являются комплексными.

Предположим, что цепи N_1 и N_2 имеют функции входных проводимостей $h_1(s)$ и $h_2(s)$, тогда единичный импульс напряжения

$u_0(t)$, приложенный к цепи N_1 , создает ток $f_1(t)$, а импульс, приложенный к цепи N_2 , — ток $f_2(t)$. Если теперь поменять ролями возбуждение и реакцию и считать, что ток $f_1(t)$, приложенный к цепи N_1 , или ток $f_2(t)$, приложенный к цепи N_2 , создает напряжение $u_0(t)$, то функции входных сопротивлений для этих цепей будут обратными рассмотренным функциям, т. е. запишутся как $\frac{1}{h_1(s)}$ и $\frac{1}{h_2(s)}$. Следовательно, с учетом выражений (XV.117) и (XV.118) можно сказать, что ток $f(t)$, приложенный к цепи N_1 , имеющей сопротивление $\frac{1}{h_1(s)}$, создает напряжение

$$u_0(t) - u_0\left(t - \frac{\tau}{2}\right), \quad (\text{XV.125})$$

а ток $f(t)$, приложенный к цепи N_2 , имеющей сопротивление $\frac{1}{h_2(s)}$, создает напряжение

$$u_0(t) + u_0\left(t - \frac{\tau}{2}\right). \quad (\text{XV.126})$$

Поэтому ток $f(t)$, приложенный к цепям N_1 и N_2 , включенным последовательно и имеющим результирующее сопротивление $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}$, создает напряжение $2u_0(t)$; или если снова поменять ролями возбуждение и реакцию и рассматривать последовательное соединение цепей N_1 и N_2 , имеющее результирующую проводимость

$$h(s) = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}} = \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}, \quad (\text{XV.127})$$

то реакция (ток) такого соединения на приложенный единичный импульс напряжения оказывается равной $\frac{1}{2} f(t)$. Это нетрудно проверить подстановкой выражений (XV.121) и (XV.122) в выражение (XV.127), в результате которой получится

$$h(s) = \frac{1}{2} h_p(s) (1 - e^{-s\tau}) = \frac{p_1 p_2}{p_1 q_2 + p_2 q_1} = \frac{p_1(s) p_2(s)}{2p(s)}. \quad (\text{XV.128})$$

Поскольку эквивалент данного выражения во временной области имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2} [f_p(t) - f_p(t - \tau)], \quad (\text{XV.129})$$

то видим, что приведенное утверждение справедливо.

Пренебрегая величинами второго порядка малости, нетрудно показать, что при замене написанных выше бесконечных рядов их

частичными суммами результирующая переходная характеристика будет такой же хорошей аппроксимацией функции $f(t)$, какой является частичная сумма ряда Фурье (или ее модификация), определяемая выражением (XV.119), для функции $f_p(t)$ в любом из ее периодов. Таким образом, обозначив любую функцию, аппроксимирующую соответствующую точную функцию, звездочкой, можно записать:

$$f_p^*(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{jk\omega t}; \quad (\text{XV.130})$$

$$h_p^*(s) = \sum_{k=-n}^n \frac{a_k}{s - jk\omega}; \quad (\text{XV.131})$$

$$h_p^*(s) \left(e^{-\frac{sT}{2}} \right)^* = \sum_{k=-n}^n \frac{a_k e^{-jk\pi}}{s - jk\omega}, \quad (\text{XV.132})$$

где h — ограниченное целое число.

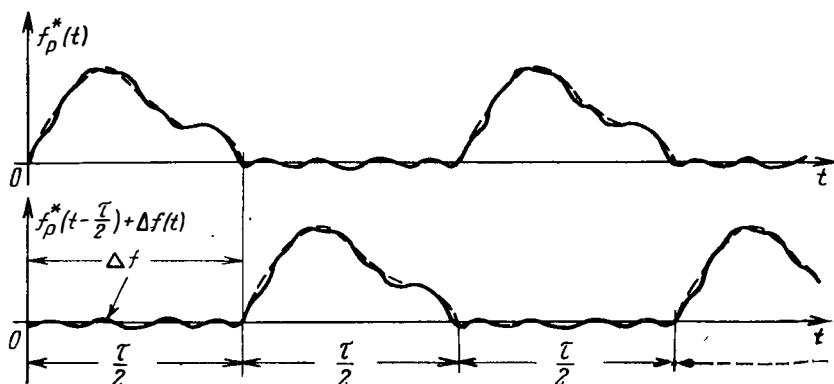


Рис. XV.19

На рис. XV.19 показано, как может выглядеть аппроксимация функции $f_p(t)$, определяемая частичной суммой (XV.130), и соответственно, каким будет обратное изображение частотной функции (XV.132). Заметим, что эту временную функцию можно рассматривать как неполную функцию $f_p^*(t)$, задержанную на половину периода. Таким образом, последняя отличается от функции, изображенной в нижней половине рис. XV.19, тем, что она точно равна нулю по всему первому полупериоду. Напротив, неполная функция имеет здесь те же отличные от нуля пульсации, как в любом из соответствующих последующих полупериодов. Заметим, однако, что неполная и полная функции абсолютно одинаковы всюду, за исключением первого полупериода, где они отличаются на оста-

точную пульсацию, обозначенную на рис. XV.19 через $\Delta f(t)$. Следовательно, полная разность $\Delta f(t)$ между неполной и полной задержанными функциями $f_p^*(t)$ не равна нулю только в интервале $0 < t < \frac{\tau}{2}$.

В частотной области этот результат можно представить, записав

$$h_p^*(s) \left(e^{-\frac{s\tau}{2}} \right)^* = h_p^*(s) e^{-\frac{s\tau}{2}} + \Delta h(s) \quad (\text{XV.133})$$

и рассматривая $\Delta h(s)$ как частотную функцию, обратное изображение которой представляет собой $\Delta f(t)$. Теперь, используя выражение (XV.133), получим

$$\left(e^{-\frac{s\tau}{2}} \right)^* = e^{-\frac{s\tau}{2}} + \frac{\Delta h}{h_p^*}. \quad (\text{XV.134})$$

После возведения в квадрат и отбрасывания члена, содержащего $(\Delta h)^2$, имеем

$$(e^{-s\tau})^* = e^{-s\tau} + \frac{2\Delta h}{h_p^*} e^{-\frac{s\tau}{2}}. \quad (\text{XV.135})$$

Теперь приближенная зависимость, соответствующая выражению (XV.128), примет вид

$$h^*(s) = \frac{1}{2} h_p^*(s) [1 - (e^{-s\tau})^*] = \frac{1}{2} h_p^*(s) (1 - e^{-s\tau}) - \Delta h e^{-\frac{s\tau}{2}}, \quad (\text{XV.136})$$

а соответствующая зависимость во временной области —

$$f^*(t) = \frac{1}{2} [f_p^*(t) - f_p^*(t - \tau)] - \Delta f \left(t - \frac{\tau}{2} \right). \quad (\text{XV.137})$$

Первый член последнего выражения равен половине функции $f_p^*(t)$ в интервале $0 < t < \tau$ и нулю вне его; второй член представляет собой функцию $f_p^*(t)$ в интервале $\frac{\tau}{2} < t < \tau$, взятую с противоположным знаком. Полная функция (с точностью до множителя $1/2$) равна $f_p^*(t)$ в интервале $0 < t < \frac{\tau}{2}$, равна $-f_p^*(t)$ в интервале $\frac{\tau}{2} < t < \tau$ и нулю вне указанных интервалов.

Члены второго порядка, которыми мы пренебрегли, несколько изменяют форму функции $f^*(t)$ в интервале $0 < t < \tau$, а затем приводят к погрешности в области асимптотического убывания функции.

Существенно отметить, что тригонометрический полином $f_p(t)$, взятый за основу при анализе, не должен быть частичной суммой ряда Фурье, но может быть любой его модификацией, что более

соответствует свойствам аппроксимации, требуемым для данной задачи. Например, если рассматривается импульс прямоугольной формы, то применение частичной суммы ряда Фурье приведет к нежелательным эффектам, обусловленным явлением Гиббса, а это нетрудно устранить подобной модификацией в коэффициентах соответствующего тригонометрического полинома.

Прямоугольный импульс особенно интересен, поскольку реализация цепи становится весьма простой, если допустить, что возбуждение представляет собой единичное ступенчатое напряжение. Таким образом, когда функция $f(t)$ на рис. XV.17а является прямоугольным импульсом единичной высоты, то функция $f_1(t)$ на рис. XV.17б является единичной ступенчатой, а $f_2(t)$ — прямоугольной волной единичной высоты (которая, конечно, не существует до момента $t = 0$). Изображение $h_1(s) = \frac{1}{s}$, и поскольку величины a_k ряда (XV.124) являются отрицательными вещественными (прямоугольная волна представлена суммой синусоидальных функций), получим

$$h_2(s) = \sum_{k=1,3,\dots}^n \frac{4k\omega |a_k|}{s^2 + k^2\omega^2}. \quad (\text{XV.138})$$

Соответствующими проводимостями цепей N_1 и N_2 являются теперь $sh_1(s)$ и $sh_2(s)$ соответственно (потому, что будучи умноженными на $\frac{1}{s}$, они дают реакции).

Следовательно, цепь N_1 представляет собой просто резистивное сопротивление, равное 1 ом, а цепь N_2 определяется последовательными LC контурами, включенными параллельно, или любым эквивалентом этой формы Фостера, которую можно непосредственно получить из выражения (XV.138), используя методы, рассмотренные в главе III.

Результирующая цепь показана на рис. XV.20. Ток i (или напряжение на резистивном сопротивлении 1 ом) представляет собой аппроксимацию требуемого прямоугольного импульса при условии, что e — единичное ступенчатое напряжение. Эту цепь можно, разумеется, преобразовать в другие формы, некоторые из которых предпочтительнее по различным практическим причинам.

Когда функции $h_1(s)$ и $h_2(s)$ или их модификации (функции, умноженные на s) отдельно не реализуются в виде входных проводимостей, то соответствующую цепь построить не столь просто. Однако результирующая функция $h(s)$, определяемая выражением (XV.128), всегда реализуется в виде сопротивления или проводимости передачи, если ее полюсы лежат в левой полуплоскости. Поскольку эта функция представляет собой устойчивую импульсную характеристику, то следует ожидать, что ее аналитичность в правой полуплоскости будет обеспечена автоматически. Таким образом, можно предположить, что полином $p(s)$ в числителе $h_p(s)$ выраже-

ния (XV.120) или в знаменателе выражения (XV.128) будет полиномом Гурвица независимо от формы импульса.

Весьма неожиданным оказалось, что данное предположение не выполняется. В действительности функция $p(s)$ в общем случае всегда имеет некоторое количество нулей в правой полуплоскости (за исключением некоторых особых случаев), и поэтому нет простой связи между рассмотренным явлением и формой импульса. Фактически здесь нет никакого противоречия, поскольку предыдущий анализ гарантирует реакцию конечной длительности только в пределе, когда соответствующие ряды Фурье бесконечны. Однако в любом предельном случае мы вправе предположить, что члены

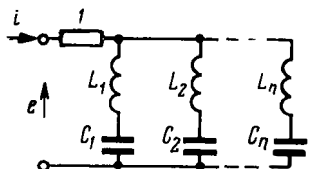


Рис. XV.20

для полюсов, расположенных в правой полуплоскости (если они существуют), имеют сравнительно небольшие вычеты, так что их влияние на результирующую функцию в интервале $0 < t < \tau$ мало. Многочисленные примеры показывают, что подобная интерпретация является правильной и что в любом случае, когда функция $h(s)$ [см. выражение (XV.128)]

имеет полюсы в правой полуплоскости, соответствующие члены разложения на элементарные дроби просто отбрасываются. Остальные члены дают требуемое решение. Погрешность аппроксимации получается того же порядка, как и при первоначальном представлении заданной формы импульса тригонометрическим полиномом.

Пример, иллюстрирующий описанный метод синтеза, приведен на рис. XV.21, где пунктирная кривая показывает требуемый импульс треугольной формы, а сплошная кривая соответствует оригиналу, полученному при использовании рациональной аппроксимирующей функции с шестью полюсами. В правой части рисунка изображена диаграмма полюсов и нулей указанной аппроксимирующей функции. В данном случае полюсы в правой полуплоскости отсутствуют, поэтому нет необходимости отбрасывать какие-либо полюсы. На рис. XV.22 дается сравнение действительной погрешности с погрешностью, предсказываемой из первоначальной аппроксимации тригонометрическим полиномом.

Более точная аппроксимация для того же треугольного импульса показана на рис. XV.23.

Она получена с учетом большего числа членов ряда Фурье при представлении импульса в виде периодической последовательности. Сплошная кривая относится к действительной характеристике, вычисленной по рациональной функции (ей соответствует диаграмма полюсов и нулей, изображенная справа).

Рассмотрение нашего примера началось с аппроксимации при помощи двенадцати полюсов, но их количество в дальнейшем сократилось до десяти после того, как была отброшена пара членов разложения функции $h(s)$ на элементарные дроби, соответствующие

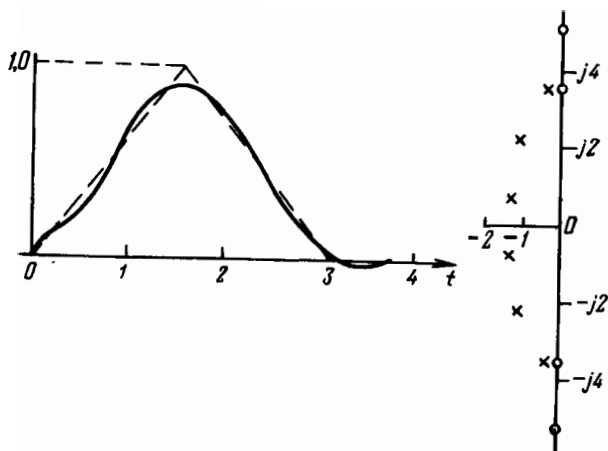


Рис. XV.21

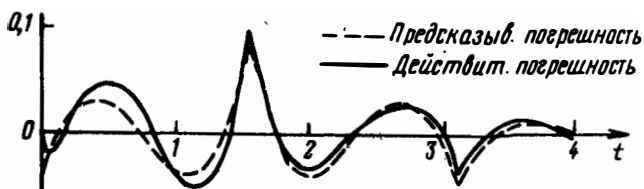


Рис. XV.22

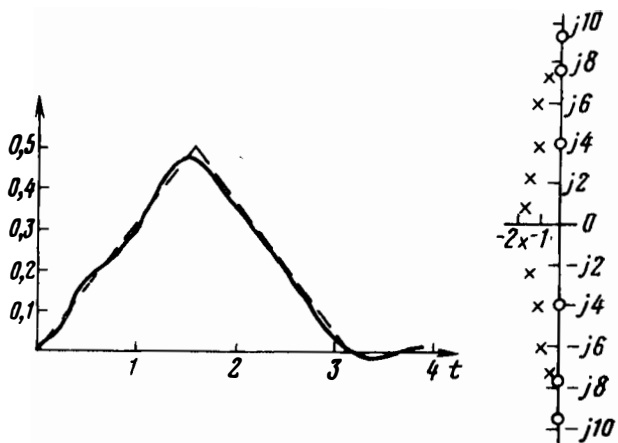


Рис. XV.23

щая полюсам в правой полуплоскости. Результирующая временная функция определяется выражением:

$$f(t) = 0,600 e^{-1,112t} \cos(3,97t + 2,496) + 0,303 e^{-0,981t} \cos(5,91t + 3,01) + 21,78 e^{-1,799t} \cos(0,745t + 4,55) + 7,35 e^{-1,602t} \cos(2,259t + 0,959) + 0,0204 e^{-0,381t} \cos(7,42t + 5,13). \quad (\text{XV.139})$$

XV.7. Интерпретация метода Фурье

Предположим, что рассматривается ток $i(t)$, протекающий через последовательно включенные цепи N_1 и N_2 , как показано на рис. XV.24, и пусть он представляет собой периодическую функцию

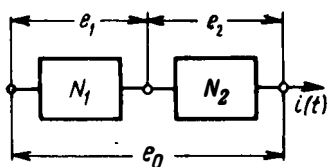


Рис. XV.24

$f_2(t)$, график которой изображен на рис. XV.176. Цепи N_1 и N_2 составлены таким образом, что напряжения $e_1(t)$ и $e_2(t)$, создаваемые общим током, можно представить в виде функций, изображенных на рис. XV.25. Заметим, что $e_1(t)$ является производной единичной прямоугольной волны при $t > 0$, а $e_2(t)$ — производной единичной ступеньки. Следовательно, можно сказать, что периодический ток

$i(t)$ подобно функции $f_2(t)$, показанной на рис. XV.176, является реакцией цепи N_1 на дифференцированную прямоугольную волну напряжения и реакцией цепи N_2 на дифференцированную ступеньку или единичный импульс напряжения. Последовательное соединение цепей N_1 и N_2 имеет такую же реакцию по току на приложенное напряжение $e_0 = e_1 + e_2$ (см. рис. XV.25).

Поскольку предполагается, что периодическая функция тока является нечетной функцией (ее ряд Фурье определяется только членами нечетного порядка), напряжение возбуждения $e_0(t) + e_0\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$ создает ток, имеющий форму одиночного импульса, подобного функции $f(t)$, приведенной на рис. XV.17а. Ввиду того что это напряжение возбуждения представляет собой просто импульсную функцию (величина которой равна двум), то снова получаем требуемый результат.

Напряжение $e_1(t) + e_1\left(t_2 - \frac{\tau}{2}\right)$, приложенное только к цепи N_1 , очевидно, также создает ток, имеющий форму одиночного импульса, подобного указанной выше функции $f(t)$. Это напряжение определяется комбинацией единичного импульса в точке $t = 0$ и отрицательного единичного импульса в точке $t = \frac{\tau}{2}$. Бесконечная сумма таких напряжений в регулярных интервалах $\frac{\tau}{2}$ сек прибавляется

к одному единичному импульсу в точке $t = 0$ и создает бесконечную сумму импульсов $f(t)$ в тех же регулярных интервалах. В результате получаем периодическую функцию $f_1(t)$, изображенную на рис. XV.176. Следовательно, можно сказать, что единичная импульсная характеристика цепи N_1 является периодической функцией тока, подобной этой функции $f_1(t)$.

Таким образом, цепи N_1 и N_2 имеют характеристики, аналогичные описанным в предыдущем параграфе и, значит, полученные здесь результаты полностью соответствуют полученным ранее. Может показаться, что в данном случае нет никакого выигрыша, однако это не так, ибо другие физические интерпретации рассматриваемого метода иллюстрируют наиболее полезное свойство найденного решения, которое до сих пор не было очевидным.

Пусть функция $w(t)$ обозначает единичную прямоугольную волну со следующим преобразованием Фурье:

$$w(t) = \sum_{k=\pm(1,3,\dots)}^{\infty} \alpha_k e^{jk\omega t} = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \beta_k \sin k\omega t, \quad (\text{XV.140})$$

где $\beta_k = 2j\alpha_k$, так как $\alpha_{-k} = -\alpha_k$. Изображение функции $w(t)$ при $t > 0$ дается выражением

$$W(s) = \sum_{k=\pm(1,3,\dots)}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s - jk\omega} = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{k\omega\beta_k}{s^2 + k^2\omega^2}, \quad (\text{XV.141})$$

а изображение напряжения $e_1(t)$ (см. рис. XV.25) имеет вид

$$E_1(s) = sW(s) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{s k \omega \beta_k}{s^2 + k^2 \omega^2} = \frac{g_1(s)}{q_2(s)}. \quad (\text{XV.142})$$

Здесь, так же как и в выражениях (XV.123) и (XV.124), не учитывается замена бесконечной суммы конечным числом членов, так что функции $g_1(s)$ и $q_2(s)$ можно рассматривать как конечные полиномы.

Заметим, что полюсы функции $E_1(s)$ совпадают с полюсами функции $h_2(s)$, определяемой выражением (XV.124). Кроме того, учитывая, что величины β_k являются положительными вещественными, функция $E_1(s)$ имеет форму реализуемой реактивной функ-

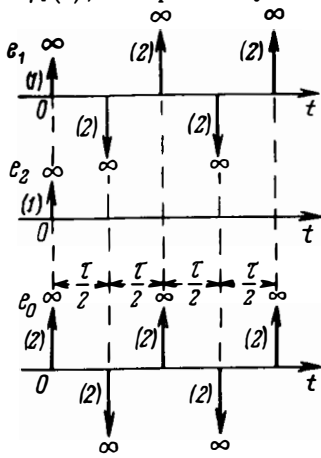


Рис. XV.25

ции (функция ψ из §§ I.4 и III.4). Полиномы $g_1(s)$ и $q_2(s)$ являются соответственно нечетным и четным и имеют простые нули, чередующиеся на мнимой оси.

Изображение тока $i(t)$, имеющего форму функции $f_2(t)$, приведенной на рис. XV.17б, очевидно, аналогично функции $h_2(s)$, определяемой выражением (XV.124), и, следовательно, если обозначить его для данного случая как $I(s)$, то получим

$$I(s) = h_2(s) = \frac{p_2(s)}{q_2(s)}. \quad (\text{XV.143})$$

Таким образом, проводимость цепи N_1 определяется выражением

$$y_1(s) = \frac{I(s)}{E_1(s)} = \frac{p_2(s)}{g_1(s)}, \quad (\text{XV.144})$$

а проводимость цепи N_2 — выражением

$$y_2(s) = h_2(s) = \frac{p_2(s)}{q_2(s)}. \quad (\text{XV.145})$$

Следовательно, проводимость последовательного соединения определяется выражением

$$Y(s) = \frac{1}{\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}} = \frac{p_2(s)}{q_2(s) + g_1(s)}, \quad (\text{XV.146})$$

которое отличается от выражения (XV.128). В любом случае, когда соответствующие бесконечные ряды заменяются конечным числом членов, решения, представленные выражениями (XV.128) и (XV.146), дают заметно отличающиеся, хотя и не принципиально различные результаты. Как будет видно из дальнейшего, их различие становится все менее существенным по мере рассмотрения все большего количества членов бесконечного ряда. При бесконечном их увеличении они совпадают тождественно. Следовательно, можно сказать, что выражение (XV.146) для требуемой системной функции и выражение (XV.128) асимптотически эквивалентны.

Для того чтобы подтвердить справедливость данного положения, необходимо лишь показать, что проводимость $y_1(s)$ цепи N_1 становится идентичной функции $h_1(s)$, поскольку тождество функций $y_2(s)$ и $h_2(s)$ уже очевидно из выражения (XV.145). Обращаясь к выражениям (XV.143) и (XV.144), надо убедиться, что

$$y_1(s) = \frac{h_2(s)}{E_1(s)} \rightarrow h_1(s) \quad \text{или} \quad E_1(s) \rightarrow \frac{h_2(s)}{h_1(s)}, \quad (\text{XV.147})$$

когда число членов соответствующих тригонометрических разложений становится бесконечным. Что касается временной функции

$e_1(t)$, изображенной на рис. XV.25, то ее точное изображение можно записать следующим образом:

$$E_1(s) = 1 - 2e^{-\frac{\sigma\tau}{2}} + 2e^{-\sigma\tau} - 2e^{-\frac{3\sigma\tau}{2}} + \dots = \frac{2}{1 + e^{-\frac{\sigma\tau}{2}}} - 1 = \frac{1 - e^{-\frac{\sigma\tau}{2}}}{1 + e^{-\frac{\sigma\tau}{2}}}. \quad (\text{XV.148})$$

Если функцию $h(s)$ рассматривать как точное изображение одиночного импульса $f(t)$, график которого приведен на рис. XV.17а, то соответствующие изображения функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ (см. рис. XV.17б) определяются выражениями:

$$h_1(s) = h(s) \left(1 + e^{-\frac{\sigma\tau}{2}} + e^{-\sigma\tau} + e^{-\frac{3\sigma\tau}{2}} + \dots \right) = \frac{h(s)}{1 - e^{-\frac{\sigma\tau}{2}}}; \quad (\text{XV.149})$$

$$h_2(s) = h(s) \left(1 - e^{-\frac{\sigma\tau}{2}} + e^{-\sigma\tau} - e^{-\frac{3\sigma\tau}{2}} + \dots \right) = \frac{h(s)}{1 + e^{-\frac{\sigma\tau}{2}}}. \quad (\text{XV.150})$$

Из этих выражений следует зависимость (XV.147).

Отсюда становится очевидным, что изображение $h_1(s)$ чётно повторяющейся функции $f_1(t)$ асимптотически имеет те же нули, что и изображение $h_2(s)$ нечётно повторяющейся функции $f_2(t)$, причем эти нули являются нулями изображения $h(s)$ результирующего импульса $f(t)$. Тогда зависимость

$$y_1(s) = \frac{p_2(s)}{g_1(s)} \rightarrow \frac{p_1(s)}{q_1(s)} = h_1(s) \quad \text{или} \quad g_1(s) \rightarrow q_1(s) \frac{p_2(s)}{p_1(s)} \quad (\text{XV.151})$$

показывает, что нули изображения $E_1(s)$ прямоугольной волны совпадают с полюсами изображения $h_1(s)$ чётно повторяющейся функции $f_1(t)$. Следовательно, нули $E_1(s)$ согласно выражению (XV.148) определяются уравнением

$$1 - e^{-\frac{\sigma\tau}{2}} = 0, \quad (\text{XV.152})$$

откуда, учитывая, что $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$, находим величины

$$s_k = jk\omega \quad \text{при} \quad k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \quad (\text{XV.153})$$

Выражение (XV.123) показывает, что они как раз являются полюсами функции $h_1(s)$. Учитывая, что полиномы $p_1(s)$ и $p_2(s)$ асимптотически совпадают, как это имеет место у нечётных полиномов $q_1(s)$ и $g_1(s)$, выражения (XV.128) и (XV.146) оказываются эквивалентными в указанном смысле.

Поскольку выражение (XV.142) соответствует реализуемому сопротивлению LC цепи, знаменатель выражения (XV.146) пред-

ставляет собой полином Гурвица и гарантируется реализуемость функции $Y(s)$ в виде передаточной функции.

Интересно, кроме того, отметить, что этот полином Гурвица полностью определяется изображением $E_1(s)$ дифференцированной единичной прямоугольной волны. Он не зависит от заданной формы импульса, для которого производится синтез. Следовательно, семейство таких полиномов можно построить для различных целых чисел n (конечное число членов в соответствующих тригонометрических разложениях) и снова использовать в каждой новой задаче синтеза. Лишь полином числителя $p_2(s)$ зависит от требуемой заданной формы импульса.

Важно также отметить, что изображение $E_1(s)$ можно получить из любой тригонометрической аппроксимации прямоугольной волны, а не только из той, которая определяется частичной суммой ряда Фурье, если аппроксимирующие свойства последней не удовлетворяют каким-либо требованиям. Таким образом, ясно, что полюсы результирующей функции (XV.146), хотя и зависят только от этой тригонометрической аппроксимации, но не определяются ею однозначно.

При любом конечном числе членов тригонометрических разложений результаты, представленные выражениями (XV.128) и (XV.146), конечно, нетождественны. Первое из них содержит некоторую избыточность, как очевидно из того факта, что оно может дать некоторые полюсы в правой полуплоскости при сравнительно малых вычетах. Некоторые полюсы в левой полуплоскости также могут оказаться избыточными, например пара полюсов, обуславливающих последний член в ф-ле (XV.139) для треугольного импульса, график которого изображен на рис. XV.23. Такие полюсы почти сокращаются соседними нулями. В этой связи более удобным является выражение (XV.146), поскольку оно дает все полюсы только в левой полуплоскости и ни одного, который оказался бы несущественным.

В рассматриваемом случае необходимо еще вычислить погрешность аппроксимации во временной области. Ниже мы увидим, что в отношении порядка модуля погрешность является такой же, как и в предыдущем случае, хотя иногда она оказывается и несколько большей. В первом приближении можно придерживаться простого правила, согласно которому результирующая погрешность имеет тот же порядок (с точностью до множителя, равного двум), как и при соответствующей тригонометрической аппроксимации, которую для данного метода необходимо осуществить только при нечетно повторяющейся функции $f_2(t)$, изображенной на рис. XV.17б.

Применительно к рис. XV.24 предположим, что импульсная характеристика цепи N_2 является некоторой грубой аппроксимацией этой требуемой функции $f_2(t)$, аналогичной аппроксимирующим кривым, приведенным на рис. XV.19. Тогда очевидно, что погрешность, допускаемая при представлении периодической функции $f_2(t)$, является результатом замены бесконечного ряда суммой $k=n$

его членов. Если цепь N_1 составлена таким образом, что ток, протекающий через нее, создает неискаженную последовательность бесконечно коротких импульсов, подобную функции $e_1(t)$, изображенной на рис. XV.25 (производная неискаженной прямоугольной волны), то общая погрешность будет пульсирующей. Однако из-за того, что ряд (XV.142) для функции $E_1(s)$ также заканчивается после n членов, функция $e_1(t)$ представляет собой последовательность искаженных импульсов. Это вносит дополнительное приращение погрешности, которое можно определить следующим образом.

Вычислим сначала вызывающее ее возбуждение. Оно представляет собой разность между действительным напряжением $e_0(t) + e_0\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$ и требуемым его значением. Таким образом, если

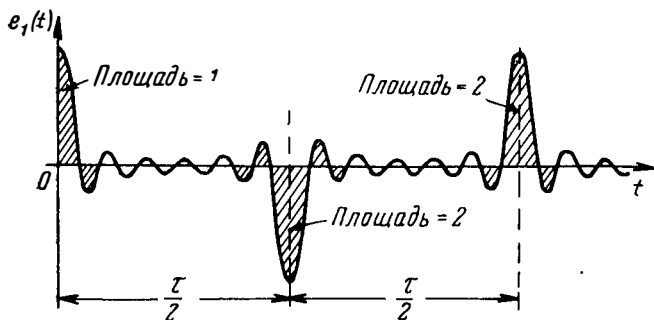


Рис. XV.26

напряжение $e_1(t)$ представляет собой неискаженную последовательность импульсов (см. рис. XV.25), то, как описано выше, импульс с величиной 2 возникает в точке $t = 0$. Следует выяснить, что произойдет, когда напряжение $e_1(t)$ будет представлять собой последовательность искаженных импульсов. Для этого, во-первых, изобразим график такого искаженного варианта данной функции, полученной путем аппроксимации бесконечной суммы (XV.142) рациональной функцией (рис. XV.26). Точность графика будет, разумеется, зависеть от типа используемого аппроксимирующего полинома, но это несущественная деталь, которая в данный момент не имеет значения. Более важно оценить тот факт, что первый квазиимпульс последовательности подобен всем другим импульсам, за исключением того, что его величина относительно вертикальной центральной линии вдвое меньше.

Если к этой искаженной модификации функции $e_1(t)$ добавить единственный импульс $e_2(t)$ с тем, чтобы сформировать соответствующий искаженный вариант функции $e_0(t)$, затем прибавить ту же функцию, задержанную на величину $\frac{\tau}{2}$, и вычесть результат из единичного импульса со значением 2 в точке $t = 0$, то получится

погрешность напряжения, изображенная на рис. XV.27. Существенным является тот факт, что она тождественно равна нулю при $t > \frac{\tau}{2}$.

Результирующая погрешность требуемого импульса тока больше той, которая получается при тригонометрической аппроксимации функции $f_2(t)$, приведенной на рис. XV.176, на величину приращения реакции, вызванного данной погрешностью напряжения. Исключая члены второго порядка малости, эту реакцию можно найти путем свертывания функции погрешности (см. рис. XV.27) с функцией, имеющей требуемую форму импульса. Но эта погрешность является именно такой, какая имеет место при тригонометрической аппроксимации функции $f_2(t)$, получаемой посредством ее свертки с функцией погрешности, определяемой разностью между полным квазиимпульсом с площадью, равной двум, и расположенным в центре неискаженным импульсом с площадью, также равной двум. Следовательно, в предельном случае можно ожидать, что эта погрешность удваивается вследствие указанных возмущений. Другими словами, результирующая погрешность (с точностью до постоянного множителя, равного двум) определяется той, которая получается при тригонометрической аппроксимации нечетно повторяющейся импульсной функции $f_2(t)$.

Возвращаясь теперь к проводимости $Y(s)$, определяемой выражением (XV.146), отметим, что, если желательно создать требуемый импульс тока $i(t)$ в цепи, показанной на рис. XV.24, при условии, что приложено напряжение $e_0(t)$, которое представляет собой ступеньку, а не импульс, необходимо лишь построить проводимость $sY(s)$. Тогда напряжение $e_1(t)$, появляющееся на зажимах цепи N_1 , представляет собой прямоугольный импульс единичной высоты и длительностью $\frac{\tau}{2}$ (погрешностью пренебрегаем) независимо от формы импульса тока $i(t)$. Следовательно, если требуется спроектировать цепь, преобразующую ступеньку напряжения в прямоугольный импульс напряжения, можно выбрать любую форму импульса тока, которая делает реализацию цепей N_1 и N_2 наиболее легкой.

Применительно к реализации функции (XV.146) — ее на данном этапе можно рассматривать либо как сопротивление, либо как проводимость — полезно отметить, что когда импульс заданной формы является симметричным относительно вертикальной центральной линии, то тригонометрическая аппроксимация функции $f_2(t)$, изображенной на рис. XV.176, содержит только синусоидаль-

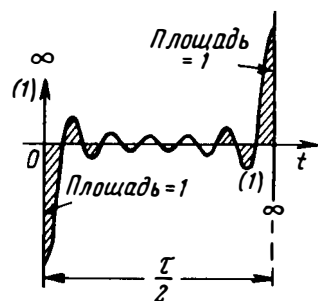


Рис. XV.27

ные члены, а полином $p_2(s)$ становится четным. С другой стороны, если импульс несимметричен относительно вертикальной центральной линии, то он аппроксимируется косинусными членами, а полином $p_2(s)$ является нечетным. В любом из этих особых случаев возможна реализация результирующей передаточной функции (XV.146) (см. § XI.1) в виде четырехполюсника без потерь, нагруженного на резистивное сопротивление. Соответствующая цепь без потерь принимает форму неуравновешенной цепной схемы только в том случае, когда нули полинома $p_2(s)$ являются простыми и расположенными на мнимой оси. Вместе с тем реализация в виде неуравновешенной цепи (содержащей, конечно, элементы, связанные взаимной индуктивностью) осуществления всегда согласно методике, описанной в § VII.4.

В общем случае, когда импульс содержит симметричную и несимметричную (относительно вертикальной центральной линии) компоненты, полином $p_2(s)$ имеет соответственно четную и нечетную компоненты. Из различных способов, с помощью которых можно реализовать соответствующую передаточную функцию (см. главы XI и XII), способ, описанный в § XII.5, особенно интересен. Он дает ясную физическую интерпретацию механизма, обуславливающего окончание переходного процесса после того, как из периодической функции $f_2(t)$ формируется одиночный импульс.

Рассмотрим в качестве примера схему, показанную на рис. XV.28. В ней резистивное сопротивление R имеет величину, равную характеристическому сопротивлению линии передачи (предполагается, что эта линия не имеет потерь). При замыкании переключателя S прямоугольное напряжение со значением $\frac{E}{2}$ передается в линию и отражается без изменения знака с разомкнутого конца. Когда отраженная волна достигает передающего конца линии, дальнейшего отражения не происходит и переходная характеристика системы сразу же исчезает. Напряжение, возникающее на резистивном сопротивлении R под действием приложенного ступенчатого напряжения возбуждения, имеет форму прямоугольного импульса высотой $\frac{E}{2}$ и длительностью, равной времени прохождения электромагнитной волны в обоих направлениях. Если линию заменить цепью с сосредоточенными параметрами, входное сопротивление которой имитирует входное сопротивление линии, находящейся в режиме холостого хода, то получится цепь, формирующая прямоугольные импульсы. Одна из возможных форм реализации такой цепи была ранее изображена на рис. XV.20.

Если длина линии составляет l м, а скорость распространения электромагнитных волн в линии без потерь обозначена через v , то

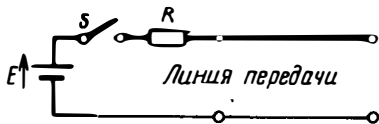


Рис. XV.28

длительность импульса $\frac{\tau}{2} = \frac{2l}{v}$. Тогда входное сопротивление линии (при условии, что ее характеристическое сопротивление нормализовано относительно 1 ом) равно $\text{cth} \frac{s\tau}{4}$ и представляет собой величину, обратную выражению (XV.148) для функции $\frac{E_1}{s}$. Эта величина согласно выражению (XV.142) равна $\frac{q_2(s)}{g_1(s)}$, т. е. отношению четной и нечетной частей знаменателя функции $Y(s)$, определяемой выражением (XV.146).

Если $p_2(s)$ — четный полином и реализуется передаточная функция (XV.146) (рассматриваемая как сопротивление) в форме цепи без потерь, нагруженной на сопротивление 1 ом (см. § XI.1), то эта цепь со стороны пары зажимов 2 имитирует линию передачи, находящуюся в режиме холостого хода. Возбуждаемая с этого конца нагруженная цепь аппроксимирует случай, изображенный на рис. XV.28, и, следовательно, переходный процесс заканчивается по причине, изложенным выше¹.

Напряжение на резистивном сопротивлении нагрузки представляет собой прямоугольный импульс, а импульс, появляющийся на противоположном конце цепи без потерь (пара зажимов 1), имеет форму требуемого импульса, поскольку эта цепь не имитирует линию передачи (речь идет о ее сопротивлении передачи), находящуюся в режиме холостого хода. Используя теорему взаимности, можно возбудить цепь со стороны пары зажимов 1, тогда требуемый импульс будет напряжением на резистивном сопротивлении нагрузки.

Если $p_2(s)$ является нечетным полиномом (требуемый импульс несимметричен относительно вертикальной центральной линии), то z_{22} для цепи без потерь равно $\frac{g_1(s)}{q_2(s)}$, т. е. величине, обратной по отношению к величине, получаемой, когда $p_2(s)$ — четный полином. При уровне сопротивления, равном 1 ом , эта функция имитирует входное сопротивление линии передачи, находящейся в режиме короткого замыкания. Соответствующий пример, аналогичный изображенному на рис. XV.28, снова приводит к прекращению переходного процесса после того, как волна пройдет по линии в обоих направлениях, хотя продолжает существовать установившийся ток, равный $\frac{E}{R}$. Напряжение на входных зажимах линии (а не на сопротивлении R) в данном случае имеет форму прямоугольного импульса. Если цепь без потерь с сосредоточенными параметрами синтезируется таким образом, чтобы соответствующее сопротивление передачи имело нули полинома $p_2(s)$, то напряжение, возни-

¹ Возможность такой трактовки была подсказана автору Д. М. Льюисом.

кающее на паре зажимов 1, снова имеет форму требуемого импульса.

И, наконец, когда полином $p_2(s)$ имеет четную и нечетную компоненты, реализация передаточной функции в соответствии с методом, описанным в § XII.5, приводит в результате к цепи, изображенной на рис. XV.29.

Цепь N_1 имеет сопротивление $z_{22}^{(1)} = \frac{q_2(s)}{g_1(s)}$, а цепь

N_2 — сопротивление $z_{22}^{(2)} = \frac{g_1(s)}{q_2(s)}$. Первая из них

обладает свойствами сопротивления передачи, формирующего симметричную компоненту требуемого импульса, а вторая формирует несимметричную компоненту. Конечную длительность общей переходной характеристики можно объяснить теми же явлениями, которые характеризуют поведение простой системы, приведенной на рис. XV.28.

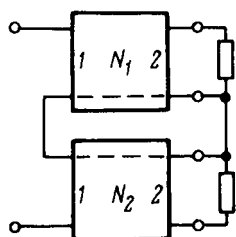


Рис. XV.29

XV.8. Синтез цепей задержки

Как упоминалось в § XIV.9, расчет цепи задержки (называемой часто линией задержки, поскольку она имитирует линию передачи конечной длины) обычно осуществляется посредством построения рациональной передаточной функции, имеющей примерно линейную фазовую характеристику в частотном интервале $0 < \omega < \omega_c$. Величина ω_c выбирается при этом достаточно большой для того, чтобы нормализовать частотный спектр сигнала применительно к условиям передачи, в которых используется рассматриваемая цепь. Обычно не уделяют особого внимания модулю передаточной функции, за исключением условия, согласно которому он должен быть постоянным в большей части соответствующего частотного интервала. Если при синтезе выбирается функция, пропускающая все частоты, указанное требование выполняется автоматически и, таким образом, сохраняются основные черты адекватной системы задержки.

В некоторых случаях, в частности, когда представляет интерес контроль некоторых характеристик формы сигнала, такой подход может привести к нежелательным результатам. Ранее в этой главе уже было показано, что удобная проверка переходной характеристики цепи осуществляется при помощи детального рассмотрения воздействия единичного импульса. Следовательно, можно более успешно изучать адекватные свойства цепи задержки в отношении сохранения требуемых характеристик формы сигнала, определив, насколько хорошо она воспроизводит задержанный импульс. Если представить себе цепь, имеющую линейную фазу с наклоном t_0 , постоянную амплитуду в интервале $-\omega_c < \omega < \omega_c$, и, по существу,

равную нулю вне указанного интервала, то импульсная характеристика такой цепи имеет вид

$$f_1(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_c} \cos \omega t_0 \cos \omega t d\omega = \frac{\omega_c}{\pi} \left[\frac{\sin \omega_c(t-t_0)}{\omega_c(t-t_0)} + \frac{\sin \omega_c(t+t_0)}{\omega_c(t+t_0)} \right] \quad (\text{XV.154})$$

при $t > 0$. При больших значениях ω_c эта функция фактически определяется первым членом выражения, заключенного в квадратные скобки, и, следовательно, (за исключением задержки t_0) имеет известную форму квазиимпульса, показанного на рис. XV.12.

Если передаточная функция имеет такую же фазу (с нулевым наклоном при $|\omega| > \omega_c$), но ее амплитудная характеристика соответствует цепи, пропускающей все частоты, то к импульсной характеристике, определяемой выражением (XV.154), необходимо добавить функцию

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \frac{2}{\pi} \int_{\omega_c}^{\infty} \cos \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\infty} \cos \omega t d\omega - \int_0^{\omega_c} \cos \omega t d\omega \right) = \\ &= u_0(t) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_c} \cos \omega t d\omega = u_0(t) - \frac{2\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} \quad \text{при } t > 0. \quad (\text{XV.155}) \end{aligned}$$

Эта компонента импульсной характеристики цепи задержки, пропускающей все частоты, весьма нежелательна. Прежде всего, она имеет незадержанный импульс, при котором цепь возбуждается. Кроме того, она содержит член, который при больших значениях ω_c состоит из высокочастотных колебаний чрезвычайно большой амплитуды, возникающих в окрестности точки $t = 0$.

Насколько сильным будет искажение сигнала, обусловленное импульсной характеристикой в виде суммы функций (XV.154) и (XV.155), зависит, конечно, от детальных свойств его формы. Пусть, например, сигнал очень плоский, так что его можно аппроксимировать параболическими дугами довольно высокой степени и, следовательно, выразить как трех-, четырех- или более кратное интегрирование последовательности бесконечно коротких импульсов. Тогда характер пульсаций квазиимпульса (XV.154) не приведет к появлению значительных результирующих пульсаций, и даже второй член функции, определяемой выражением (XV.155), окажется несущественным. Первый член этого выражения дает незадержанный входной сигнал в выходном сигнале и поэтому он непригоден независимо от его формы.

С другой стороны, когда сигнал имеет точки разрыва, то даже функция (XV.154) вносит нежелательные пульсации, а функция (XV.155) вызывает настолько большие искажения, что практически совсем уничтожает требуемый сигнал. Важно отметить, что рассматриваемая функция является общей функцией соответствующей

щей системы. Иногда сама цепь задержки как таковая включается каскадно с другими цепями. Подобное соединение позволяет получить такую полосовую характеристику всей системы, при которой обеспечивается допустимая функция, пропускающая все частоты только для компоненты задержки.

Во многих практических приложениях цепь задержки рассматривается в виде идентичных цепей, соединенных каскадно так, что можно получить переменную величину задержки, используя отвод в соответствующей точке каскадного соединения. При этом переходная характеристика или искажение формы сигнала не может не зависеть от величины задержки, если каждый элемент каскадного соединения не обеспечивает линейную фазовую характеристику и идеальную полосовую амплитудно-частотную характеристику в данном частотном интервале. По экономическим соображениям требуется, чтобы каждый элемент был относительно простым. Поэтому фазовая характеристика будет линейной, а амплитудно-частотная характеристика — идеально полосовой только в первом приближении. В результате такая система задержки имеет переходную характеристику, изменяющуюся в широких пределах в функции величины задержки, даже если требуемая максимальная задержка невелика.

Точный контроль переходной характеристики цепи задержки (с допустимым числом элементов общей цепи) возможен только когда требуемая величина задержки является фиксированной. Процесс расчета здесь точно такой же, как и при построении рациональной аппроксимирующей функции для изображения заданной импульсной характеристики в соответствии с изложенным в предыдущих параграфах настоящей главы.

Особенно интересным в данной связи представляется метод Фурье, рассмотренный в § XV.7. При этом методе периодическая функция (см. рис. XV.18), по существу, преобразуется в непериодическую (см. рис. XV.17a) посредством задержки первой функции на период и вычитанием ее из незадержанной функции. Отсюда приходим к выводу, что процесс синтеза в переходном режиме любой требуемой формы импульса получается так же быстро, как и процесс создания достаточно хорошей задержки, причем последний можно считать законченным, если найдено приемлемое решение задачи синтеза в переходном режиме. Читателю предоставляется возможность самому подумать о практическом применении сформулированной задачи.

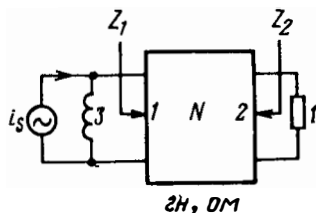


ЗАДАЧИ

Задачи к главе I

◆ 1. Пусть i_s представляет собой единичный импульс, а напряжение на входе цепи равно $e(t) = e^{-t} \sin(10t - 30^\circ) + 2e^{-2t} \cos(6t + 60^\circ) - \frac{1}{2}e^{-5t}$.

Определить сопротивления $Z_1(s)$ и $Z_2(s)$ цепи, изображенной на рисунке, при $s = -1 - j10$ и $s = -2 + j6$.



◆ 2. На рисунке представлена линейная пассивная двусторонняя цепь с конечным числом сосредоточенных элементов. Цепь имеет две пары зажимов 1 и 2. Она не может самовозбудиться, иными словами, все собственные частоты цепи в режимах холостого хода и короткого замыкания создаются лишь при подключении источников к обоим парам зажимов.

Если $i_1(t)$ — единичная функция, а $i_2 \equiv 0$, то

$$e_1(t) = 1 + A e^{-t} \sin(t + \varphi) \quad \text{при } t > 0.$$

Если $i_2(t)$ — единичный импульс и $e_1 \equiv 0$, то

$$e_2(t) = B e^{-t} \cos(2t + \psi) \quad \text{при } t > 0.$$

а) Определить входное сопротивление $Z_1(s)$ со стороны входа 1 (при условии, что зажимы 2 разомкнуты) в виде рациональной функции комплексной частоты s .

б) Найти значения A и φ приведенного выше выражения для e_1 .

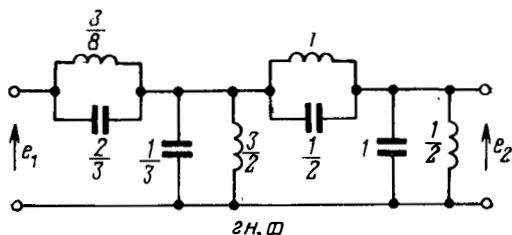
◆ 3. Для цепи, изображенной на рисунке:

а) Найти $e_2(t)$ при $t > 0$, если $e_1(t)$ — единичный импульс.

б) Определить, что получится (для предыдущего пункта), если величины всех

L и $\frac{1}{C}$ умножить на 100.

в) Определить, что получится, если величины всех L и C умножить на $\frac{1}{100}$.

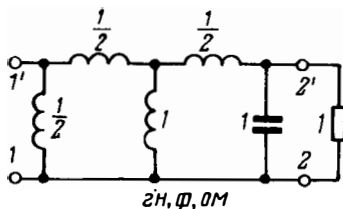


2H, Ф

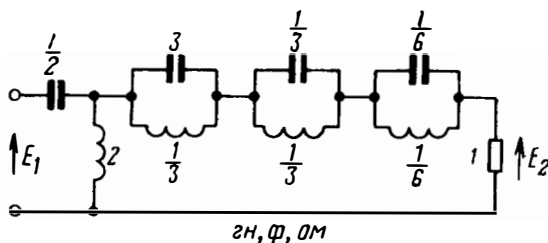
◆ 4. Без написания уравнений цепи, изображенной на рисунке:

а) Определить в функции от s сопротивления z_{11} и z_{22} на указанных входах при нагрузке на резистивное сопротивление 1 ом .

б) Какова будет величина z_{22} при $s = -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{3}$, если резистивное сопротивление 1 ом удалить?



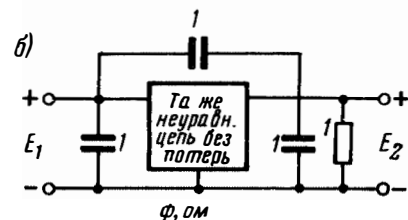
◆ 5. Для цепи, изображенной на рисунке, найти величину $\frac{E_2}{E_1}$ при $\omega = 1 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$.



◆ 6. Чтобы вычислить передаточную функцию

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{s-1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

цепи a , изображенной на рисунке, необходимо затратить несколько часов. При этом обнаруживается, что необходимо найти передаточную функцию цепи b . Можно ли это проделать с помощью нескольких простых преобразований?



◆ 7. Определить, какие из следующих полиномов принадлежат к классу полиномов Гурвица, включая в этот класс любые полиномы, имеющие простые нули на мнимой оси:

а) $s^5 + 8s^4 + 26s^3 + 52s^2 + 53s + 20$.

б) $s^5 + 6s^4 + 12s^3 + 14s^2 - 13s - 20$.

в) $4s^4 + 4s^3 + 29s^2 + 14s + 85$.

г) $5s^5 + 4s^4 + 3s^3 + 2s^2 + s + 1$.

д) $s^6 - 5s^5 + 4s^4 - 3s^3 + 2s^2 + s - 1$.

е) $s^8 + 1$.

◆ 8. Пусть

$$P_1(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0.$$

$$P_2(s) = s^{2n} + a_{n-1}s^{2(n-1)} + \dots + a_1s^2 + a_0.$$

Определить, если:

а) P_1 — полином Гурвица, то может ли полином P_2 принадлежать к классу полиномов Гурвица.

б) P_2 — полином Гурвица, то может ли полином P_1 принадлежать к классу полиномов Гурвица.

в) P_1 не является полиномом Гурвица, то может ли полином P_2 принадлежать к классу полиномов Гурвица.

г) P_2 не является полиномом Гурвица, то может ли полином P_1 принадлежать к классу полиномов Гурвица.

◆ 9. На рисунке показано расположение нулей полинома $P(s)$ восьмого порядка. Требуется:

а) Представить данный полином как разность двух других полиномов

$$P(s) = p(s) - q(s),$$

где полиномы $p(s)$ и $q(s)$ имеют только нули четного порядка, расположенные на мнимой оси.

б) Найти $p(s)$ и $q(s)$ и определить расположение их нулей.

◆ 10. Определить, какие из перечисленных ниже рациональных функций являются п. в. ф.:

а) $\frac{s^2 + s + 1}{s^2 + s + 2}$ б) $\frac{s^2 + s + 1}{s^2 + s + 4}$ в) $\frac{s^2 + s + 1}{s^2 + s + 9}$ г) $\frac{5s^2 + s + 1}{s^2 + 4s + 2}$
 д) $\frac{s^3 + s^2 + 2s + 1}{s^2 + s + 1}$ е) $\frac{s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 3s + 1}{s^4 + 7s^3 + 6s^2 + 4s + 1}$ ж) $\frac{s^3 + 3s^2 + 4s + 12}{s^3 + 4s^2 + 9s + 10}$

◆ 11. Определить, реализуема ли в качестве входной проводимости пассивной цепи каждая из приведенных ниже функций:

а) $\frac{s^3 + 5s}{s^4 + 8s^2 + 12}$ б) $\frac{(s+1)(s+3)(s+4)}{s(s+2)}$
 в) $\frac{(s+1)(s^2+2s+3)(s+4)}{(s+2)(s+3)(s+5)}$ г) $\frac{2(s+2)^2}{s^2+4}$

◆ 12. Определить, какие из перечисленных ниже функций $Z(s)$ являются п. в. ф.:

а) $\frac{s^2 + 2s + 2}{s^2 + 2s + 1}$ б) $\frac{(s+2)^2}{(s+4)^2}$ в) $\frac{s(s^2+3)(s^2+5)}{(s^2+1)(s^2+4)}$
 г) $\frac{s(s+3)(s+5)}{(s+1)(s+4)}$ д) $\frac{(s^2+2)^2}{(s^2+4)^2}$ е) $\frac{2s^2+4s+3}{s^3+2s^2+2s+1}$

◆ 13. Дана рациональная функция $Z(s)$, не имеющая полюсов в правой полуплоскости или на мнимой оси, причем на нули этой функции такое ограничение не наложено.

Показать, что при условии соответствующего выбора положительного вещественного постоянного числа K функция $Z + K$, тем не менее, может иметь все свои нули в левой полуплоскости.

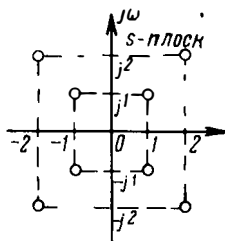
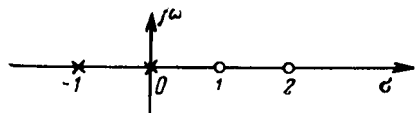
◆ 14. Дана п. в. ф. вида

$$Z(s) = \frac{s(s^2+3)}{Q(s)},$$

у которой полином знаменателя $Q(s)$ имеет все отрицательные вещественные нули, отличные от нуля.

Требуется найти простейший возможный полином $Q(s)$.

◆ 15. Следящая система имеет передаточную функцию в разомкнутом состоянии $KG(s)$, в которой положительная вещественная постоянная K является коэффициентом усиления. Картина расположения полюсов и нулей для $G(s)$ показана на рисунке. Поведение следящей системы при замкнутой петле обратной связи имеет вид



$$H(s) = \frac{KG}{1 + KG}$$

Показать, будет ли эта функция устойчивой при всех значениях коэффициента усиления K .

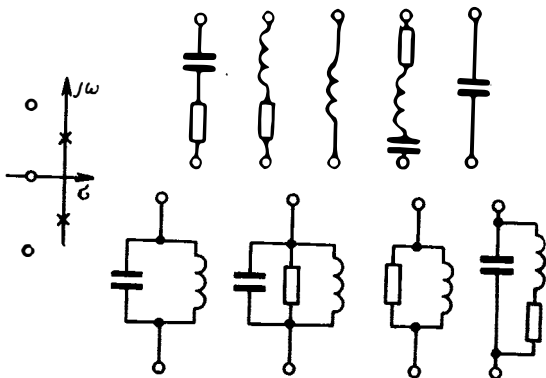
◆ 16. Заданная рациональная функция (вещественная при вещественном s) имеет конечное число простых нулей и полюсов, чередующихся вдоль линии, параллельной мнимой оси и расположенной слева от нее.

Определить, является ли указанная функция п. в. ф.

◆ 17. а) Является ли произведение двух п. в. ф. обязательно п. в. ф.?

б) Доказать, что частное от деления любой пары полиномов Гурвица может состоять из произведения нескольких п. в. ф.

в) Может ли функция $Z(s)$ с показанным на рисунке расположением полюсов и нулей состоять из произведения сопротивлений любых из приведенных цепей? Если да, то из каких?



◆ 18. Рациональная функция имеет простые полюсы в точках $s = -1$; $s = -2$; $s = -1 + j2$; $s = -1 - j2$ с вычетами, соответственно равными $k = 1$; $k = 2$; $k = 1 + j1$; $k = 1 - j1$. При $s = \infty$ функция равна единице.

Построить эту функцию в виде частного от деления двух полиномов. Является ли она п. в. ф.?

◆ 19. Показать, что если п. в. ф. $Z(s) = R(\sigma, \omega) + jX(\sigma, \omega)$ имеет нуль на вещественной частоте ($s = j\omega$), то у функции $R(0, \omega)$ этот нуль будет, по меньшей мере, двойным, тогда как у функции $X(0, \omega)$ он всегда простой.

◆ 20. Задана функция

$$Z_1(s) = \frac{s^3 + \frac{4}{3}s^2 + \frac{2}{3}s}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

а) Необходимо найти такое сопротивление $Z_2(s)$, при котором выполняется условие $Z_1 + Z_2 = \frac{1}{2}$. Является ли полученная функция $Z_2(s)$ п. в. ф.?

б) Если дано условие $Z_1 + Z_2 = R$, то каково будет наименьшее значение R (вещественное положительное постоянное), при котором $Z_2(s)$ является п. в. ф.?

◆ 21. При синтезе удобно разбивать любую п. в. ф. сопротивления вида

$$Z = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2}$$

(m и n — соответствующие четные и нечетные части) на сумму двух сопротивлений

$$Z = Z_1 + Z_2 = \frac{m_1}{m_2 + n_2} + \frac{n_1}{m_2 + n_2},$$

где Z_1 и Z_2 являются п. в. ф. Каково условие для сопротивления Z , при котором это возможно? (Целесообразно воспользоваться результатом задачи 5).

◆ 22. а) Допустим, что $Z(s)$ является п. в. ф. от s , а $W(s)$ — п. в. ф. от Z . Является ли W п. в. ф. от s ?

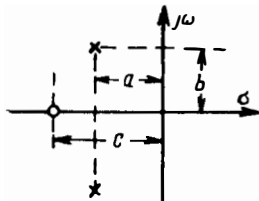
б) $Z(s)$ является функцией с вещественными коэффициентами, которая аналитична в правой полуплоскости и на мнимой оси. Предположим, что минимум ее вещественной части на мнимой оси равен $-N$. Является ли функция $Z + N$ п. в. ф.?

◆ 23. а) Показать, что замена s на $s + \alpha$ в выражении для сопротивления, т. е. образование функции $Z(s + \alpha)$, тождественна замене каждой индуктивности в цепи последовательным соединением индуктивности и резистивного сопротивления, а каждой емкости — параллельным соединением емкости с резистором, причем постоянная времени $\left(\frac{L}{R} \text{ или } \frac{1}{RC}\right)$ составляет в каждом случае $\frac{1}{\alpha}$.

б) Зная, что вещественная часть любого физически реализуемого сопротивления должна быть положительной на мнимой оси, использовать результаты пункта а) для доказательства, что вещественная часть также должна быть положительной во всей правой полуплоскости.

◆ 24. Функция входного сопротивления имеет показанное на рисунке расположение полюсов и нулей.

Каковы будут ограничения на величины a , b и c , при которых это сопротивление является п. в. ф.?

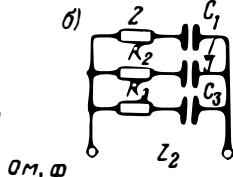
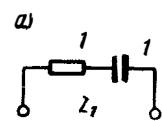


Задачи к главе II

◆ 25. Какие из следующих функций являются реализуемыми функциями сопротивлений? Из реализуемых функций какие синтезируются как двухэлементные цепи RL , RC , LC ?

а) $\frac{(s^2 + 2)(s^2 + 4)}{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}$. б) $\frac{(s + 2)(s + 4)}{(s + 1)(s + 3)}$. в) $\frac{(s + 3)}{(s + 1)(s + 2)}$.
 г) $\frac{s(s + 5)}{(s + 3)}$. д) $\frac{s^3 + 4s}{(s^2 + 3)(s^2 + 5)}$. е) $\frac{s^2 + 1}{(s + 10)\left(s + \frac{1}{10}\right)}$.

◆ 26. Определить условие для некоторых постоянных величин a , b и c , при которых функция $\frac{s + a}{(s + b)(s + c)}$ является положительной вещественной при любых положительных вещественных значениях этих постоянных. Какое из условий для них должно иметь силу, если функция представляет собой сопротивление или проводимость RL или RC цепи?



должно иметь силу, если функция представляет собой сопротивление или проводимость RL или RC цепи?

◆ 27. В цепи, показанной на рисунке, $Z_1 = Z_2$. Каковы значения R_2 , R_3 , C_1 , C_3 ? Могут ли быть значения двух данных параметров в цепи, изображенной на рис. б, совершенно произвольными?

◆ 28. Сопротивление передачи RC цепи в режиме холостого хода должно быть функцией

$$z_{12} = \frac{h(s^2 + 4)}{(s + 1)(s + 4)}$$

Какая пара z_{11} и z_{22} из следующих функций может быть связана с указанной функцией z_{12} и каково наибольшее допустимое значение постоянного множителя h ?

$$\text{а) } z_{11} = \frac{s+2}{(s+1)(s+4)} \quad \text{б) } z_{11} = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$

$$\text{в) } z_{22} = \frac{s+3}{(s+1)(s+4)} \quad \text{г) } z_{22} = \frac{(s+0,5)(s+2)}{(s+1)(s+4)}$$

◆ 29. Ниже дана группа сопротивлений четырехполюсника:

$$z_{11}(s) = \frac{s^2 + 6s + 6}{s^2 + 3s + 2}; \quad z_{22}(s) = \frac{s^2 + 7s + 4}{s^2 + s}; \quad z_{12}(s) = \frac{s}{s+1}$$

Реализуются ли эти сопротивления как RL , RC или LC цепи?

◆ 30. Пусть любые два сопротивления RC , RL или LC цепи обозначены буквами z и Z с соответствующими индексами.

Установить: должна, может или не может быть каждая из следующих функций положительной вещественной?

$$\text{а) } \frac{z_{RC}}{Z_{RC}} \quad \text{б) } \frac{z_{RC}}{Z_{RL}} \quad \text{в) } z_{RC}Z_{RL} \quad \text{г) } 1 - Z_{RC} \quad \text{д) } Z_{LC} - z_{LC} \quad \text{е) } z_{RC} - Z_{LC}$$

Обосновать каждый ответ.

◆ 31. Являются ли следующие утверждения правильными или ошибочными? Почему?

а) Мнимая часть сопротивления RL цепи является положительной на всей положительной половине мнимой оси и отрицательной — на отрицательной половине.

б) Вычет сопротивления RL цепи является отрицательным в любом конечном полюсе, но в полюсе при $s = \infty$ он должен быть положительным.

в) Вычет в полюсе проводимости RLC цепи, когда полюс не расположен на мнимой оси, может иметь любое комплексное значение.

г) Если знаменатель рациональной функции $F(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ имеет все нули в левой полуплоскости, исключая мнимую ось, и если его вещественная часть на этой оси является неотрицательной, то функция $p(s)$ должна быть полиномом Гурвица.

д) Функция, дополнительная к положительной вещественной функции, также должна быть всегда положительной вещественной; тогда справедлива зависимость $Z_1 + Z_2 = 1$.

е) Положительная вещественная функция должна иметь простые полюсы на мнимой оси плоскости s , но она может иметь там нули некоторой кратности.

ж) Рациональная функция, имеющая полюсы и (или) нули некоторой кратности в левой s -полуплоскости, тем не менее, может быть положительной вещественной.

з) Рациональная функция, имеющая положительный множитель и только простые нули и полюсы, чередующиеся на отрицательной вещественной оси, всегда положительная вещественная и реализуется как RL или RC цепь.

◆ 32. Определить, является ли каждое из следующих утверждений правильным или ошибочным и обосновать ответы.

а) Достаточными условиями для того, чтобы рациональная функция была реализуемой как входное сопротивление пассивной цепи, являются: функция не имеет полюсов в правой полуплоскости и вещественная часть этой функции является неотрицательной во всех точках на мнимой оси.

б) Вещественная часть функции, представляющей проводимость цепи без потерь (LC), может не быть положительной в любой точке в левой полуплоскости.

в) Производная положительной вещественной функции никогда не может быть равна нулю в нулях этой функции.

г) Сумма двух функций может быть положительной вещественной, если даже ни одна из этих функций не является положительной вещественной.

д) Если каждая из двух функций является реализуемой как сопротивление RL цепи, сумма этих двух функций также является реализуемой как сопротивление RL цепи.

е) Произведение двух полиномов Гурвица — обязательно полином Гурвица.

◆ 33. Два сопротивления считаются дополнительными (относительно R), если они удовлетворяют зависимости

$$Z_a + Z_b = R.$$

а) Каково наименьшее значение R , при котором сопротивление

$$Z = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)(s+5)}$$

имеет дополнительное сопротивление?

б) Показать, что сопротивление LC цепи (или любое сопротивление, имеющее полюсы на мнимой оси) не может иметь дополнительного сопротивления.

◆ 34. Для цепи, приведенной на рисунке, произвести следующие операции:

а) Синтезировать проводимость, равную данной проводимости, с исключением положительной активной проводимости

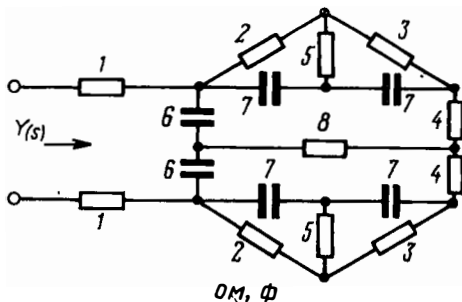
$$Y'(s) = Y(s) - G_1.$$

При каких значениях G_1 это возможно?

б) Синтезировать проводимость

$$Y''(s) = G_2 - Y(s).$$

При каких значениях G_2 это возможно?



Задачи к главе III

◆ 35. Какая из следующих функций представляет реактивное сопротивление физической цепи?

а) $Z_{11} = \frac{5s^2 + 20}{s^4 + 10s^2 + 9}$ б) $Z_{11} = \frac{s^4 + 13s^2 + 36}{s^3 + 6,25s}$

в) $Z_{11} = \frac{4s^3 + 3s}{4s^2 + 1}$ г) $Z_{11} = \frac{s^3 + 4s}{s^4 + 2s^2 + 1}$

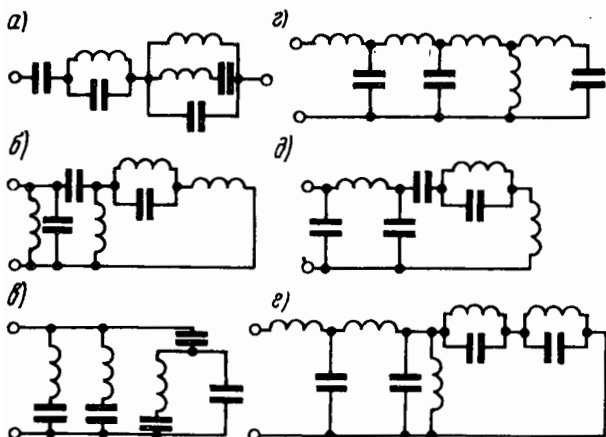
Для реализуемых функций произвести разложение на элементарные дроби и определить соответствующую цепь. Изобразить три основные эквивалентные цепи в каждом случае.

◆ 36. Из следующих рациональных функций сопротивления выбрать положительные вещественные. Для тех из них, которые реализуемы LC цепями, найти реализации в одной из нескольких возможных эквивалентных форм цепей.

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{s^2 + 2s + 2}{s^3 + 4s} & \text{б) } & \frac{s^3 + 4s}{s^2 + 1} & \text{в) } & \frac{s^4 + 20s^2 + 64}{s^5 + 10s^3 + 9s} \\ \text{г) } & \frac{s^5 + 20s^3 + 64s}{s^4 + 10s^2 + 9} & \text{д) } & \frac{s^3 + 3s^2 + 7s + 5}{s^2 + 2s + 2} \end{aligned}$$

◆ 37. Определить, какие из изображенных на рисунке цепей являются потенциально эквивалентными и потенциально обратными?

Указать какие-либо непужные элементы.



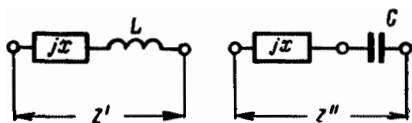
◆ 38. Найти значения элементов цепи, изображенной на рисунке, при которых сопротивление со стороны входа 1—1 имеет полюсы в точках $\omega = 1, 3, 5$ при условии, что зажимы 2—2 разомкнуты, и полюсы в точках $\omega = 2, 4$ при условии, что зажимы 2—2 замкнуты. Емкость C со стороны входа 2—2 равна 1 ф .

◆ 39. Даны функции

$$\begin{aligned} z_a &= \frac{33(s^9 + 26s^7 + 231s^5 + 806s^3 + 880s)}{14(s^2 + 1)(s^2 + 4)(s^2 + 7)(s^2 + 10)}; \\ z_b &= \frac{s^7 + 21s^5 + 126s^3 + 216s}{s^6 + 15s^4 + 54s^2 + 40}. \end{aligned}$$

Установить, является ли функция $(z_a - z_b)$ реализуемой. Если да, то найти цепь.

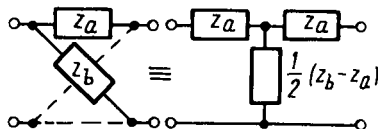
◆ 40. С помощью приведенного рисунка качественно определить относительное местоположение полюсов и нулей функций jx , z' и z'' .



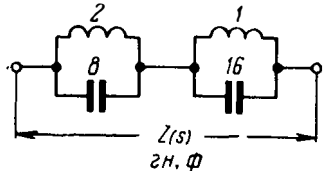
- ◆ 41. Условия эквивалентности между симметричной скрещенной цепью и симметричной T-образной цепью показаны на рисунке. Сопротивления скрещенной цепи

$$z_a = \frac{2s^2 + 4}{s^3 + 4s} \quad \text{и} \quad z_b = \frac{4s^4 + 11s^2 + 4}{s^5 + 5s^3 + 4s}.$$

Установить, существует ли эквивалентная T-образная цепь. Если да, то определить структуру и значение элементов ее ветвей.



- ◆ 42. Для изображенной на рисунке цепи определить структуру и значения параметров эквивалентных (по Фостеру и по Кауэру) цепей.



- ◆ 43. Реактивная функция имеет полюсы в точках $\omega = 0, \omega = 2, \omega = 4$. На этих частотах соответствующая реактивная проводимость имеет наклон, равный единице. Определить местоположения ее нулей и четыре канонические цепи, которые ее реализуют.

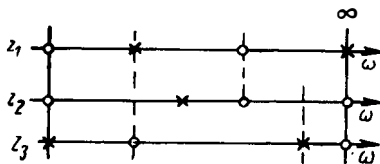
- ◆ 44. Реактивная (без потерь) цепь, соединенная параллельно с сопротивлением 1 ом , должна иметь сопротивление, модуль которого изменяется от $0,707$ до $1,0$ в частотных диапазонах $0,98 < \omega < 1,02$ и $2,99 < \omega < 3,01$. В некоторых случаях модуль может иметь еще меньшую величину. Найти соответствующую этой функции цепь.

- ◆ 45. Две реактивные функции $Z_1(s)$ и $Z_2(s)$ имеют нули только в точках $s = 0; \pm j2; \pm j4$. На этих частотах $\frac{dZ_1}{ds} = 1, 2, 3$ и $\frac{dZ_2}{ds} = 1, 4, 3$ соответственно. Если

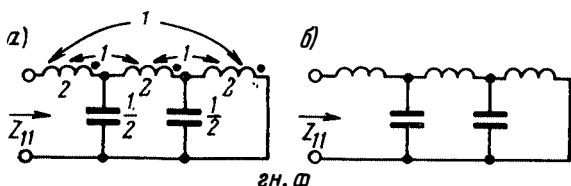
$Y_1 = \frac{1}{Z_1}$ и $Y_2 = \frac{1}{Z_2}$ — соответствующие функции реактивной проводимости, то установить, можно ли реализовать функцию $Y = Y_1 - Y_2$. Если да, то найти нужную цепь.

- ◆ 46. $Z(s)$ — реактивная функция, для которой найдено $\frac{d^n}{ds^n} [Z(s) + 1]$. Это выражение вычислено при $s = 1$ и равно нулю при $n = 0, 1, 2$ и 3 . Определить реактивную функцию $\frac{m(s)}{n(s)}$ самой низкой степени, обладающую указанным выше свойством, и синтезировать ее в обеих формах Кауэра.

- ◆ 47. Частотные диаграммы сопротивлений z_1, z_2 и z_3 показаны на рисунке. Определить частотную диаграмму сопротивления, полученного в результате последовательного и параллельного соединения этих цепей. Каково минимальное число элементов, посредством которого могут быть реализованы каждая из частных цепей и цепи, полученные в первом и втором случаях? Начертить четыре основные формы цепей, полученных в обоих случаях.



- ◆ 48. В показанной на рисунке цепи a взаимные индуктивности положительны для указанных на катушках знаков полярности. Определить значения параметров эквивалентной цепи b , в которой нет взаимных индуктивностей.



гн. Ф

◆ 49. Функция входного сопротивления имеет простые полюсы в точках $s = -1 \pm j1$ и $s = -1 \pm j2$. Все вычеты в этих полюсах равны двум, и функция равна нулю при $s = \infty$.

Найти соответствующую цепь. Показать, что функция должна быть положительной вещественной, пока все вычеты являются положительными вещественными независимо от их значений.

◆ 50. Исследовать возможность расположения на мнимой оси полюсов следующих положительных вещественных входных функций сопротивления. Если полюсы находятся на этой оси, вычислить вычеты и выделить их методом Фостера; затем инвертировать остаток и снова проверить, расположены ли полюсы на мнимой оси. Произвести полный синтез, продолжая этот процесс.

$$a) \frac{s^7 + 4s^6 + 8s^5 + 17s^4 + 13s^3 + 19s^2 + 5s + 4}{s^7 + 2s^6 + 6s^5 + 7s^4 + 11s^3 + 7s^2 + 6s + 2}$$

$$b) \frac{s^8 + 3s^7 + 8s^6 + 10s^5 + 17s^4 + 10s^3 + 12s^2 + 3s + 2}{2s^7 + 6s^6 + 13s^5 + 12s^4 + 17s^3 + 5s^2 + 4s}$$

◆ 51. а) Синтезировать сопротивление

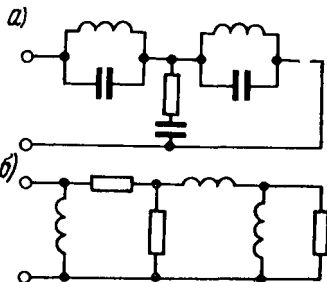
$$Z = \frac{2s^5 + 5s^3 + 2s}{(s^2 + 1)(s^4 + 3s^2 + 1)}$$

в форме, показанной на рис. а.

б) Синтезировать сопротивление

$$Z = \frac{s(2s^2 + 7s + 2)}{s^3 + 6s^2 + 9s + 2}$$

в форме, показанной на рис. б.



Задачи к главе IV

◆ 52. Определить, какие из перечисленных функций являются п. в. ф. Найти по одной цепи из тех, которые реализуются в виде двухэлементных цепей:

$$a) \frac{s(s+1)(s+4)}{(s+2)(s+3)} \quad б) \frac{(s+1)(s+2)}{s(s+3)(s+4)} \quad в) \frac{(s^2+1)(s^2+3)}{s^2(s^2+2)(s^2+4)}$$

$$г) \frac{(s^2+1)(s^2+3)}{s(s^2+2)(s^2+4)} \quad д) \frac{(s^2+1)(s^2+2)}{s(s^2+3)(s^2+4)} \quad е) \frac{(s+1)(s+3)}{(s+2)(s+4)}$$

◆ 53. Найти, какие из следующих функций сопротивлений реализуемы. Построить соответствующие цепи:

$$a) \frac{s^4 + 5s^2 + 4}{s^3 + 9s} \quad б) \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 3s} \quad в) \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 4s + 4}$$

$$г) \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^5 + 20s^3 + 64s} \quad д) \frac{s^2 + 4s + 3}{s^2 + 6s^2 + 8s}$$

Обратить внимание на то, что эти функции могут описывать как любую из цепей с двумя типами элементов, так и цепь общего вида с элементами R , L и C .

◆ 54. Пусть заданная цепь возбуждается на входе напряжением $e(t)$, равным единичному перепаду $u_{-1}(t)$, а результирующий ток на входе можно представить в виде

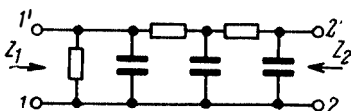
$$i(t) = 6e^{-t} - 15e^{-2t} + 10e^{-3t}$$

Найти входное сопротивление $Z(s)$ в виде отношения полиномов и синтезировать цепь

Если та же цепь возбуждается перепадом тока, то каково результирующее напряжение?

◆ 55. В RC цепи, изображенной на рисунке, полюсы сопротивления Z_1 при разомкнутых зажимах цепи 2—2' находятся в точках $s = -1; -3; -5$. Полюсы Z_1 при короткозамкнутых зажимах 2—2' располагаются в точках $s = -2; -4$. Параллельное резистивное сопротивление, включенное со стороны

входных зажимов 1—1', равно $\frac{2}{5}$ ом.



Найти аналитические выражения для обоих входных сопротивлений Z_1 и Z_2 и определить все другие элементы цепи.

◆ 56. Каждая из приведенных ниже функций является реализуемой функцией сопротивления. Для тех функций, которые реализуются в виде двухэлементных цепей, найти все четыре канонические формы. В случае функций, которые не реализуются в виде цепей с двумя типами элементов, при реализации цепи следует воспользоваться простыми методами, описанными в главах III и IV:

а) $\frac{(s^2 + 2)(s^2 + 4)}{s(s^2 + 3)}$. б) $\frac{(s + 2)(s + 3)}{s + 5}$. в) $\frac{s^5 + 10s^3 + 5s}{(s + 1)^5}$.
 г) $\frac{(s + 1)(s + 4)}{s(s + 3)}$. д) $\frac{s^4 + 2s^3 + 7s^2 + 3s + 5}{(s + 1)(s^2 + 1)}$. е) $\frac{(s + 1)(s + 4)}{s + 3}$.

◆ 57. Сопротивление $Z(s)$ с двумя типами элементов имеет полюсы в точках $s = -1; -2; -3$. Если к входным зажимам цепи параллельно подключается сопротивление 5000 ом, полюсы смещаются в точки $-1,002; -2,002; -3,002$; $Z(\infty) = 0$. Введя соответствующие аппроксимации:

- Составить сопротивление $Z(s)$.
- Найти нули указанного сопротивления.
- Синтезировать цепь.

◆ 58. Заданная входная функция $Z(s)$ имеет простые полюсы в точках $s = -1; -2; -3; -4; -5$. Вычеты в этих полюсах соответственно равны 1; -2 ; 3; -4 ; 5. При $s \rightarrow \infty$ $Z(s) \rightarrow 2$.

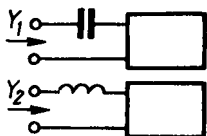
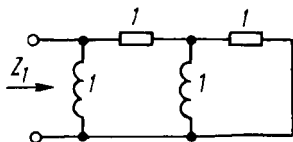
- Найти разложение на элементарные дроби для функции $Z(s)$.
- Найти реализацию цепи.

◆ 59. Заданное сопротивление имеет полюсы в точках $s = -1$ и $s = -1 \pm j1$. Вычеты в этих полюсах — вещественные положительные и равные.

Если $Z(\infty) = 0$:

- Найти местоположение нулей.
- Найти общее значение вычетов.
- Показать, что это сопротивление должно быть п. в. ф.
- Найти реализацию цепи.

◆ 60. Найти наибольший множитель K , при котором сопротивление $Z_2 = 1 - KZ_1$ является реализуемым, и определить лестничную цепь для Z_2 (см. рисунок слева). Объединить эту цепь с соответствующей ей модификацией, чтобы получить цепь, имеющую на входе постоянное резистивное сопротивление, равное 1 ом.

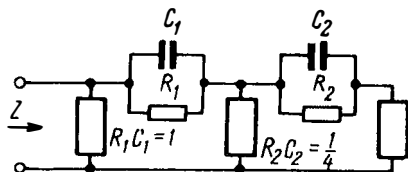


◆ 61. На рисунке справа показаны две цепи, входные проводимости которых являются дополнительными друг относительно друга, т. е. $Y_1 + Y_2 = 1$. Y_1 — проводимость RC цепи, имеющая полюсы в точках $s = -1; -2; -3$. Ее вычеты имеют одинаковое значение.

Составить обе проводимости и синтезировать цепь для проводимости Y_2 .

◆ 62. Найти цепь, структура которой показана на рисунке. Входное сопротивление цепи имеет вид

$$Z = \frac{s^2 + 13s + 32}{3s^2 + 27s + 44}.$$



◆ 63. а) Показать, что рациональная функция, имеющая все простые полюсы на отрицательной вещественной оси (на бесконечности полюсов нет), всегда может быть реализована как сопротивление передачи RC или RL скрещенной цепи (т. е. всегда можно получить RC и RL скрещенные цепи).

б) Синтезировать RC и RL скрещенные цепи, каждая из которых имеет сопротивление передачи вида

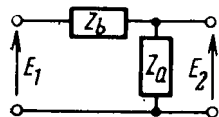
$$Z_{12} = \frac{s^2 - 1}{(s + 2)(s + 3)}.$$

в) Показать, что любая рациональная функция, которая является отношением четного полинома к нечетному или нечетного полинома к четному, имеющая все простые полюсы на мнимой оси, всегда может быть реализована как сопротивление передачи LC скрещенной цепи. Синтезировать LC скрещенную цепь, имеющую сопротивление передачи $\frac{s^2 - 1}{s(s^2 + 1)}$.

◆ 64. Возможный способ синтеза коэффициента передачи $\frac{E_2}{E_1}$ показан на рисунке.

Если $Z_a + Z_b = R$, то $\frac{E_2}{E_1} = KZ_a$.

а) Какие ограничения необходимо положить на заданный коэффициент передачи $\frac{E_2}{E_1}$, при которых этот способ применим?



б) Синтезировать функцию

$$\frac{E_2}{E_1} = K \frac{(s + 3)(s + 7)}{(s + 1)(s + 5)}.$$

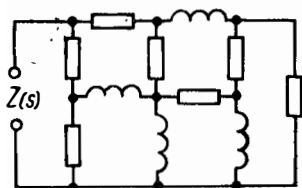
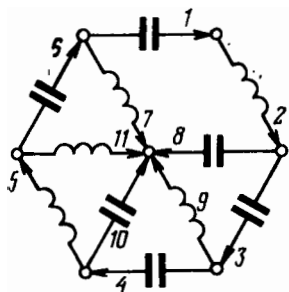
в) Каково наибольшее возможное значение K при использовании этого метода синтеза?

г) Используя полученное значение K , синтезировать заданную функцию $\frac{E_2}{E_1}$ с помощью этого метода. Синтезировать функцию Z_a в виде лестничной цепи с последовательными резистивными сопротивлениями, а функцию Z_b — в виде лестничной цепи с параллельными сопротивлениями.

Задачи к главе V

◆ 65. а) Построить каноническую цепь, потенциально эквивалентную цепи, имеющей прямой вход, образованный со стороны концов ветви 9 (см. верхний слева рисунок на стр. 689).

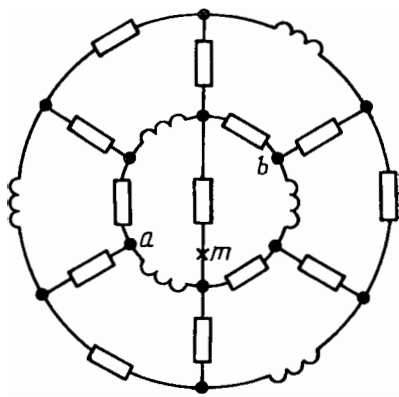
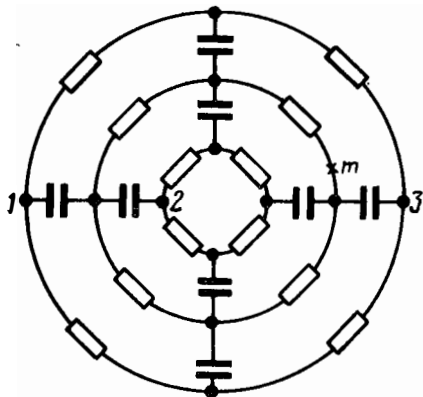
б) Выбрать последовательность токов индуктивных ветвей и напряжений на емкостных ветвях, исходные значения которых образуют независимый ряд начальных условий, полностью характеризующих переходный режим данной цепи при холостом ходе.



◆ 66. а) Определить диаграмму полюсов и нулей сопротивления $Z(s)$ и изобразить четыре канонические схемы, потенциально эквивалентные схеме, приведенной на верхнем рисунке справа.

б) Повторить задачу а) при замене индуктивностей емкостями.

◆ 67. Из рассмотрения RC цепи, изображенной на нижнем рисунке слева, найти канонические формы (только по одной в каждом случае) для потенциально эквивалентных цепей, когда входами данной цепи являются: узлы 1 и 2; узлы 1 и 3; разрез в точке m .



◆ 68. а) Найти цепи, которые имели бы входные сопротивления, обратные входным сопротивлениям, используемым в задаче 67.

б) Указать для каждого сопротивления метод, дающий требуемый результат при минимальных затратах времени на вычисление.

в) Дать конфигурацию соответствующей цепи в каждом случае.

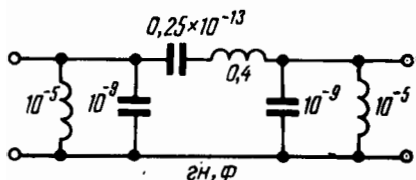
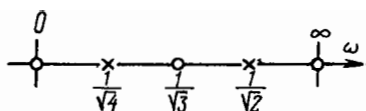
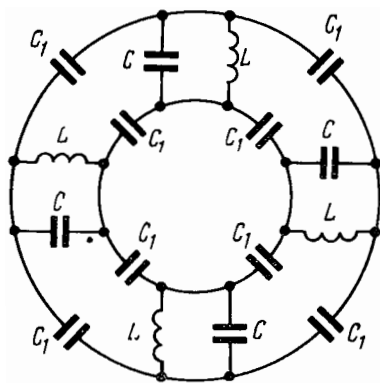
◆ 69. а) Определить число динамически независимых контурных токов или напряжений пар узлов, необходимых для описания цепи, изображенной на правом рисунке.

б) Построить частотные диаграммы для входных сопротивлений, соответствующих: разрезу в точке m ; паре узлов $a - b$.

в) Найти для каждого случая формы Кауэра при последовательном включении индуктивностей и параллельном включении сопротивлений.

◆ 70. а) Построить цепь, дуальную цепи, изображенной на рисунке к задаче 69. б) Указать точки этой дуальной цепи, соответствующие заданным в предыдущей задаче входам, используя, если необходимо, идеальные трансформаторы.

- ◆ 71. В цепи, показанной на рисунке слева, принято, что $L = C = 1$; $C = 0,01$.
 Определить численные значения всех конечных, отличных от нуля собственных частот цепи.



- ◆ 72. Реактивная функция $z(s)$ имеет частотную диаграмму, показанную на рисунке справа, и $\left(\frac{dz}{ds}\right)_{s=0} = 1$.

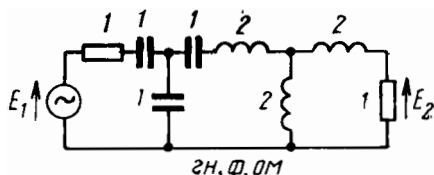
- а) Найти аналитическое выражение для $z(s)$.
 б) Найти форму Кауэра, получаемую при удалении полюсов только в точке $s = 0$.
 в) С помощью преобразований уровня сопротивления изменить эту цепь так, чтобы все индуктивности стали одинаковыми (при сохранении исходной величины входного сопротивления).

- ◆ 73. В схеме полосового фильтра, показанной на рисунке:

- а) Провести преобразование уровня внутреннего сопротивления так, чтобы все три индуктивности стали равными 10^{-5} гн;
 б) Найти структуру и значения элементов окончательной цепи.

При решении задачи достаточно использовать методы аппроксимации, позволяющие получить точность расчетов порядка нескольких процентов.

- ◆ 74. С помощью преобразования уровня сопротивления преобразовать цепь, изображенную на рисунке,



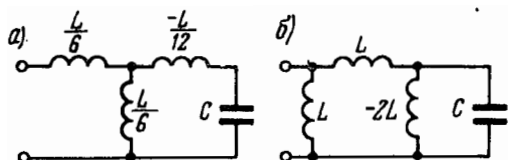
в цепь, которая имеет коэффициент передачи по напряжению

$$\frac{E_2'}{E_2} = K - \frac{E_2}{E_1}.$$

При этом величина K должна быть максимальной при неизменном значении сопротивления, подключенного со стороны источника.

◆ 75. а) Посредством метода матричных преобразований показать, что изображенные на рисунке цепи реализуемы при помощи положительных элементов (но без взаимных индуктивностей).

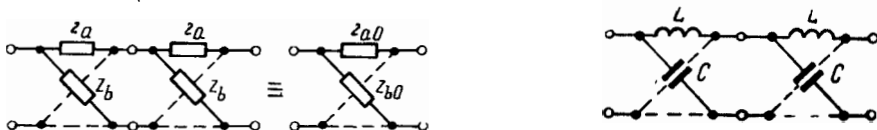
б) Определить эквивалентные формы цепей.



Задачи к главе VI

◆ 76. Два одинаковых симметричных скрещенных четырехполюсника, соединенных каскадно, можно рассматривать как эквивалентный симметричный скрещенный четырехполюсник, изображенный на рисунке слева.

Найти схемы ветвей с результирующими сопротивлениями z_{a0} и z_{b0} , используя сопротивления ветвей z_a и z_b соединяемых четырехполюсников.



◆ 77. а) Для каскадного соединения двух одинаковых скрещенных четырехполюсников, показанного на рисунке справа, найти эквивалентный неуравновешенный четырехполюсник, не содержащий идеальных трансформаторов, или отрицательных элементов, или же взаимных индуктивностей.

б) Определить аналитическое выражение для сопротивления передачи $Z_{12}(s)$ всего четырехполюсника, если последний нагружен на резистивное сопротивление 1 о.м. Предполагается, что $L = C = 1$.

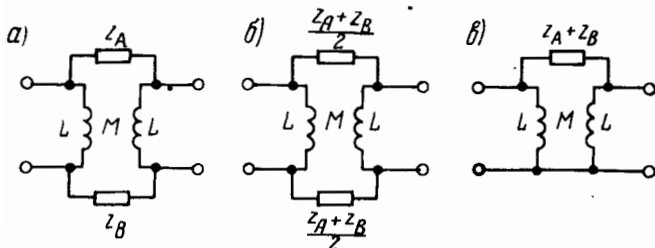
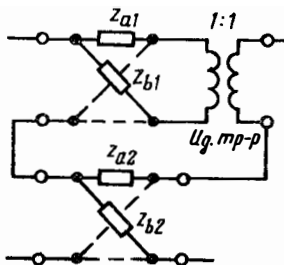
◆ 78. Дан составной четырехполюсник в виде последовательного соединения скрещенных четырехполюсников (см. рисунок).

а) Найти схемы сопротивлений z_{a0} и z_{b0} скрещенного четырехполюсника, эквивалентного данному составному.

б) Выразить сопротивления z_{a0} и z_{b0} через сопротивления z_{a1} , z_{a2} , z_{b1} и z_{b2} .

◆ 79. а) Определить, являются ли изображенные на нижнем рисунке четырехполюсники эквивалентными.

б) Найти для каждого из них эквивалентный скрещенный четырехполюсник.



◆ 80. а) Показать, в каком случае (если это вообще возможно) скрещенный четырехполюсник постоянного сопротивления будет двухэлементной цепью.

б) Дать объяснение этому.

в) Какое практическое использование может иметь полученный результат?

◆ 81. Сопротивление передачи четырехполюсника имеет нули в точках $s = 1 + j1$ и полюсы в точках $s = -1 \pm j1$. Постоянный множитель $a = 1$.

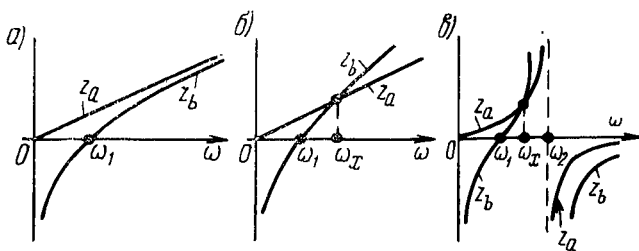
а) Найти реактивный (без потерь) скрещенный четырехполюсник постоянного сопротивления, нагруженный на резистивное сопротивление 1 Ом и имеющий указанную передаточную функцию.

б) Преобразовать этот скрещенный четырехполюсник в неуравновешенный.

◆ 82. На рисунках *а*, *б* и *в* показаны по две реактивных функции, описывающие реактивные сопротивления ветвей симметричных скрещенных четырехполюсников.

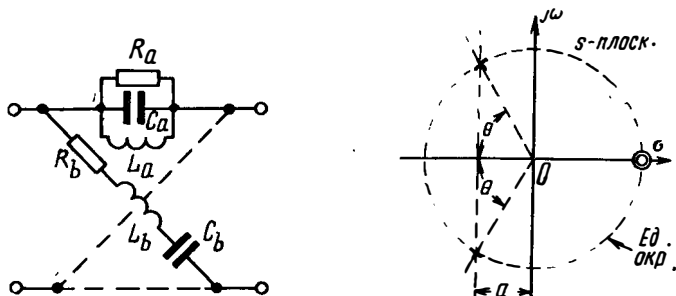
а) Преобразовать эти скрещенные четырехполюсники в неуравновешенные Т-образный, П-образный, Т-образный перекрестный или цепной четырехполюсники.

б) В каждом случае найти принципиальную схему (расположения индуктивностей и емкостей) простого неуравновешенного потенциально эквивалентного четырехполюсника. На рисунке *а* кривые обеих реактивных функций приближаются друг к другу на очень больших частотах.



◆ 83. а) Показать, что при $\frac{R_b}{R_a} + \frac{L_b}{L_a} + \frac{C_a}{C_b} \geq 1$ скрещенный четырехполюсник, изображенный на рисунке слева, можно преобразовать в эквивалентный неуравновешенный четырехполюсник, не содержащий взаимных индуктивностей.

б) Описать метод преобразования, позволяющий получить схему и величины элементов преобразованного четырехполюсника.



◆ 84. Дан скрещенный *RC* четырехполюсник, изображенный на рис. VI.13а.

Требуется определить ограничения, налагаемые на диаграмму полюсов и нулей сопротивления передачи в режиме холостого хода, при условии, что указанный четырехполюсник должен быть преобразован в эквивалентный неуравновешенный.

◆ 85. На рисунке справа изображена диаграмма полюсов и нулей в плоскости *s* сопротивления передачи $Z_{12}(s)$, заданного в виде частного от деления двух полиномов второй степени.

а) Реализовать скрещенный четырехполюсник постоянного сопротивления, имеющий указанное сопротивление $Z_{12}(s)$.

б) Преобразовать этот четырехполюсник в эквивалентный неуравновешенный, не содержащий взаимных индуктивностей.

◆ 86. Сопротивления симметричного скрещенного четырехполюсника имеют вид

$$1) z_a = s; \quad z_b = \frac{s^2 + 1}{s}.$$

а) Найти характеристическое сопротивление z_0 и постоянную передачи θ для этого скрещенного четырехполюсника в функции от $s = j\omega$.

б) Определяя функцию затухания α из выражения $\theta = \alpha + j\beta$, показать, что рассматриваемый скрещенный четырехполюсник представляет собой фильтр нижних частот, для чего графически изобразить функции z_0 и α в зависимости от ω .

в) Рассмотреть другой случай, когда сопротивления z_a и z_b имеют вид

$$2) z_a = ms; \quad z_b = \frac{s^2 + 1}{ms},$$

где m — положительное число.

г) Выбрав $m = 0,6$, снова найти сопротивление z_0 и затухание α и изобразить их в виде функций частоты ω .

д) Соединить каскадно скрещенные четырехполюсники, имеющие сопротивления, определяемые условиями 1) и 2) соответственно, и изобразить z_0 и α составного четырехполюсника в виде функций частоты ω .

Задачи к главе VII

◆ 87. Даны входное сопротивление и сопротивление передачи четырехполюсника без потерь

$$z_{22} = \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 4)}; \quad z_{12} = \frac{1}{s(s^2 + 4)}.$$

а) Определить соответствующее минимально реактивное входное сопротивление (т. е. не имеющее полюсов на мнимой оси), если четырехполюсник нагружен на резистивное сопротивление 1 Ом .

б) Выполнить синтез схемы.

◆ 88. Дано сопротивление передачи холостого хода цепи без потерь

$$z_{12} = \frac{s^5 + 5s^3 + 7s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}.$$

а) Определить соответствующую симметричную скрещенную цепь, имеющую минимально реактивное входное сопротивление, когда эта цепь нагружена на резистивную нагрузку, и преобразовать ее в неуравновешенную.

б) Определить значение всех элементов скрещенной и неуравновешенной схем.

◆ 89. Четырехполюсник без потерь имеет входное сопротивление z_{11} в режиме холостого хода с полюсами в точках $\omega = 1; 3$ и нулями в точках $\omega = 0; 2; \infty$. Сопротивление передачи z_{12} имеет один нуль в точке $\omega = 0$ и остальные в точке $\omega = \infty$. Синтезировать схему.

◆ 90. При заданных входных сопротивлениях и сопротивлении передачи четырехполюсника без потерь

$$z_{11} = \frac{2s(s^2 + 5)}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}; \quad z_{22} = \frac{s(s^2 + 4)}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}; \quad z_{12} = \frac{s}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}.$$

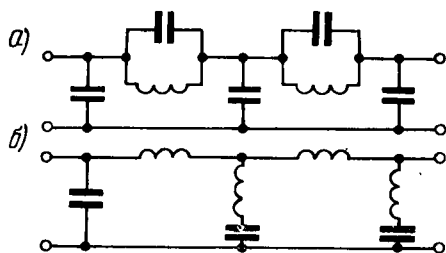
а) Показать, что четырехполюсник реализуем.

б) Определить, имеет ли входное сопротивление $Z_1(s)$ дополнительную цепь, если четырехполюсник нагружен на сопротивление 1 Ом .

в) Синтезировать цепь.

◆ 91. Даны сопротивления

$$z_{11} = \frac{16s^4 + 9s^2 + 1}{26s^5 + 21s^3 + 3s}; \quad z_{12} = \frac{(4s^2 + 1)(s^2 + 1)}{26s^5 + 21s^3 + 3s}.$$

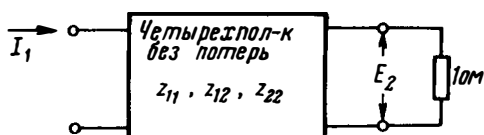
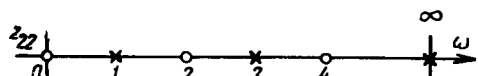


а) Синтезировать эти сопротивления в виде схем а и б, изображенных на рисунке.

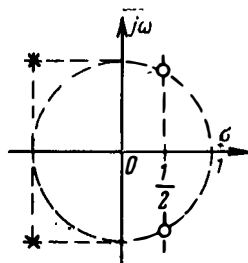
б) Для схемы а получить нули сопротивления z_{12} в виде последовательности $s^2 = -1; s^2 = -\frac{1}{4}; s = \infty$.

в) Для схемы б применить последовательность $s = \infty; s^2 = -1; s^2 = -\frac{1}{4}$.

г) Установить для каждой схемы, выполняется ли условие вычетов со знаком равенства в некоторых или во всех полюсах.



$$\frac{E_2}{I_1} = Z_{12} = \frac{z_{12}}{1 + z_{22}}$$



◆ 92. Четырехполюсник без потерь имеет входное сопротивление z_{22} с показанной на левом рисунке частотной диаграммой. При нагрузке четырехполюсника на резистивное сопротивление 1 Ом сопротивление передачи $Z_{12}(s)$ имеет нуль третьего порядка в точке $s = 0$ и остальные нули в точке $s = \infty$.

а) Образовать сопротивление $Z_{12}(s)$ с точностью до постоянного множителя.

б) Определить сопротивления z_{11}, z_{22}, z_{12} , характеризующие цепь без потерь, и найти ее реализацию для случая, когда входное сопротивление $Z_1(s)$ не имеет полюсов на мнимой оси. Постоянный множитель реактанса z_{22} считать равным единице.

◆ 93. а) Синтезировать четырехполюсник без потерь, для которого

$$z_{12} = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{2s}{s^2 + 2} + \frac{5}{s}.$$

б) Найти сопротивления z_{11} и z_{22} в таком виде, чтобы четырехполюсник не имел идеальных трансформаторов и чтобы условие вычетов выполнялось в каждом полюсе со знаком равенства.

в) Найти сопротивление z_{22} в таком виде, чтобы сопротивление $Z_{12} = \frac{z_{12}}{1 + z_{22}}$

(см. рисунок) было равно $\frac{1}{4}$ при $\omega = 1$, $\frac{1}{2}$ при $\omega = \sqrt{2}$ и $\frac{1}{3}$ при $\omega = 0$.

г) Для этого случая выбрать сопротивление z_{11} так, чтобы в схеме не было идеальных трансформаторов.

◆ 94. На рисунке вверху справа показана картина расположения полюсов и нулей сопротивления передачи $Z_{12}(s)$. Постоянный множитель этого сопротивления определяется из условия $Z_{12} \rightarrow 1$ при $s \rightarrow \infty$.

а) Реализовать эту передаточную функцию с помощью симметричной скрещенной схемы без потерь, нагруженной на резистивное сопротивление 1 ом .

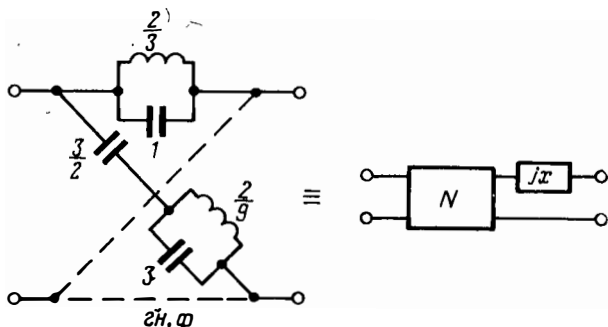
б) Преобразовать скрещенную схему в эквивалентную неуравновешенную структуру без взаимных индуктивностей.

◆ 95. Определить две простые цепные схемы без потерь, сопротивления передачи которых при нагрузке на 1 ом будут равны соответственно

$$Z_{12} = \frac{1}{(s+1)^4}; \quad Z_{12} = \frac{s^4}{(s+1)^4}.$$

◆ 96. а) Преобразовать симметричную скрещенную схему, изображенную на рисунке, в несимметричную (и неуравновешенную) компактную цепную схему с добавочной последовательной реактивностью со стороны выхода.

б) Найти структуру и величины элементов схемы и добавочной реактивности.



◆ 97. На рисунке показана симметричная скрещенная схема без потерь, нагруженная на резистивное сопротивление 1 ом . Нетрудно видеть, что входное сопротивление этой схемы не является минимально реактивным.

а) Найти схему, имеющую такую же передаточную функцию $\frac{E_2}{I}$ (за исключением постоянного множителя) и минимально реактивное входное сопротивление.

б) Придать этой схеме возможно простейший вид.

◆ 98. Используя метод каскадного синтеза, найти неуравновешенный четырех-

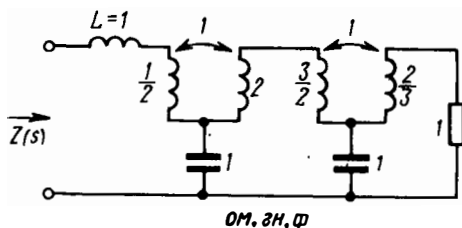
полюсник без потерь, реализующий входное сопротивление и сопротивление передачи вида

$$z_{11} = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}{s(s^2 + 2)(s^2 + 4)}; \quad z_{12} = \frac{(s^2 + s + 1)(s^2 - s + 1)}{s(s^2 + 2)(s^2 + 4)}.$$

◆ 99. а) Найти эквивалентную структуру для схемы, показанной на рисунке (см. стр. 693), в которой коэффициенты связи трансформатора одинаковы и имеют наименьшее возможное значение.

б) Каков наименьший коэффициент связи?

в) Можно ли полностью исключить необходимость взаимной индукции, если индуктивность L сделать достаточно большой?



- ◆ 100. Сопротивление передачи цепи без потерь, нагруженной на резистивное сопротивление 1 Ом , имеет два нуля на мнимой оси и три полюса (см. рисунок). Сопротивление $Z_{12}(0) = 1$.

а) Написать выражение для сопротивления $Z_{12}(s)$ и получить выражения для сопротивлений z_{12} и z_{22} цепи без потерь.

б) Реализовать по сопротивлению z_{22} цепную схему таким образом, чтобы изменение положения нулей сопротивления z_{12} позволяло получить в то же время минимальное реактивное входное сопротивление.

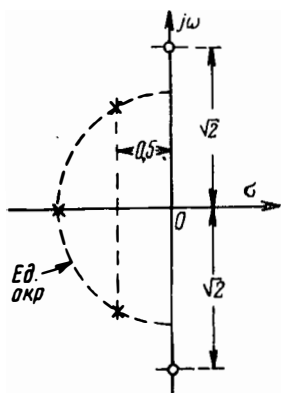
- ◆ 101. Сопротивление передачи симметричного четырехполюсника без потерь, нагруженного на сопротивление 1 Ом , имеет вид

$$z_{12}(s) = \frac{m-n}{m+n}.$$

Кроме того известно, что $m+n = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$.

а) Найти выражение для сопротивлений z_{11} , z_{22} , z_{12} цепи без потерь.

б) Синтезировать эту цепь.



Задачи к главе VIII

- ◆ 102. Дана функция

$$\operatorname{Re}[Z(j\omega)] = \frac{5\omega^8 - 40\omega^6 + 150\omega^4 - 100\omega^2 + 500}{(4\omega^4 + 16)^2}.$$

Используя теорему Штурма, определить, является ли эта функция положительной при всех значениях ω и если да, то найти $Z(s)$.

- ◆ 103. Цепь без потерь нагружена на сопротивление 1 Ом и имеет сопротивление передачи, квадрат модуля которого равен

$$|Z_{12}|^2 = \frac{\omega^4 + \omega^2}{\omega^6 + 1} \leq 1 \text{ для всех } \omega.$$

Найти функции z_{11} , z_{22} , z_{12} этой цепи при условии, что ее входное сопротивление является минимально реактивной функцией.

- ◆ 104. Дана функция

$$f(\omega^2) = \frac{1 + \omega^2}{1 + \omega^2 + \omega^4}.$$

а) Функция $f(\omega^2)$ представляет собой вещественную часть сопротивления $Z(s)$ (входной или передаточной функции). Найти $Z(s)$.

б) Функция $f(\omega^2)$ представляет собой квадрат модуля сопротивления $Z(s)$. Найти это сопротивление. Будет ли оно п. в. ф.?

◆ 105. Какое из следующих утверждений является правильным?

а) Если входное сопротивление цепи без потерь, нагруженной на сопротивление 1 ом , является минимально реактивным, то функция $(z_{11}z_{22} - z_{12}^2)$ имеет только простые полюсы.

б) Если сопротивление передачи цепи имеет нули только в левой полуплоскости s , то цепь принадлежит к классу цепей минимально фазового сдвига.

в) Если цепь принадлежит к классу цепей минимально фазового сдвига, то ее входное сопротивление минимально реактивно.

г) Рациональная функция от переменной ω^2 с вещественными коэффициентами, принимающая при всех вещественных ω положительные значения, может представлять собой квадрат модуля передаточной функции в том случае, если полиномы ее числителя и знаменателя имеют одинаковые степени.

д) Если вещественная часть сопротивления передачи положительна при всех вещественных частотах, то цепь принадлежит к классу цепей минимально фазового сдвига.

е) Справедливо утверждение, обратное утверждению, сформулированному в предыдущем пункте.

ж) Необходимым и достаточным условием для реализуемости в виде сопротивления передачи рациональной функции от переменной s , имеющей вещественные коэффициенты, является условие, согласно которому полюсы этой функции должны располагаться в левой полуплоскости.

з) Для того чтобы быть реализуемым, входное сопротивление должно иметь простые нули и полюсы, расположенные в левой полуплоскости.

и) Нули и полюсы передаточной функции RC цепи должны быть простыми и должны чередоваться на отрицательной вещественной оси плоскости s .

◆ 106. На рисунке показано расположение в плоскости s полюсов и нулей функции

$$f(s) = \frac{A(-s^2)}{B(-s^2)},$$

имеющей шесть полюсов и два нуля. Пусть при

$$s \rightarrow \infty \quad f(s) \rightarrow \frac{4}{s^4}$$

и

$$\frac{A(\omega^2)}{B(\omega^2)} = \operatorname{Re}[Z(j\omega)].$$

а) Построить сопротивление $Z(s)$ и синтезировать его в виде четырехполюсника без потерь, нагруженного на резистивное сопротивление.

б) Построить для рассматриваемого случая сопротивление передачи $Z_{12}(s)$. Синтезировать его путем разложения z_{22} в цепную схему с тем, чтобы управлять нулями z_{12} . Синтезировать цепь, отвечающую требованиям предыдущего пункта.

в) Последовательно со входом желательно подключить дополняющую цепь с тем, чтобы получить постоянное входное резистивное сопротивление. Как это сделать, если требуется, чтобы усиление (или постоянный множитель) результирующей передаточной функции было максимальным?

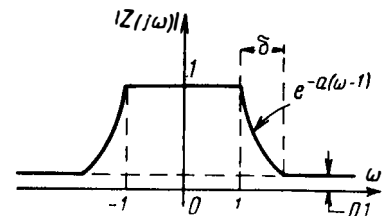
◆ 107. Не пользуясь таблицами или каким-либо формальным процессом интегрирования, вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega^n d\omega}{1 + \omega^6} \quad \text{при } n = 0, 2, 4.$$

◆ 108. Входное сопротивление имеет при $-\omega_1 < \omega < \omega_1$ вещественную часть $R(\omega) = 1$ и равно нулю на других участках частотного диапазона.

Вычислить соответствующую параллельную емкость, которая преобладает при асимптотическом поведении этого сопротивления. В вычислениях использовать выражение (VIII.82) для мнимой части и показать, что результат соответствует теореме об интеграле сопротивления.

◆ 109. Входное сопротивление должно иметь модуль, который точно аппроксимирует характеристику, изображенную на рисунке. Найти наименьшее значение δ , при котором сопротивление остается положительным вещественным.



◆ 110. Четырехполюсник должен иметь сопротивление передачи $Z_{12}(s)$ с углом запаздывания, определяемым выражением

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\omega(4 - \omega^2)}{(1 - \omega^2)}.$$

а) Построить все функции $Z_{12}(s)$, соответствующие этой цепи, и определить, являются ли они минимально фазовыми функциями.

б) Определить модуль на мнимой оси для каждой из функций.

◆ 111. Дана функция

$$|Z_{12}(j\omega)|^2 = \frac{(4 + \omega^2)^4}{(1 + \omega^2)^4}.$$

а) Построить все сопротивления передачи, имеющие такой квадрат модуля.

б) Найти диаграмму расположения полюсов и нулей для каждого из этих сопротивлений и указать, является ли оно минимально фазовым.

◆ 112. Дана передаточная функция минимальной фазы. При каких условиях можно изменить частотную характеристику ее модуля на мнимой оси, не изменяя фазы?

Задачи к главе IX

◆ 113. Для каждой из следующих функций сопротивления построить в плоскости s соответствующую диаграмму полюсов и нулей.

а) Определить, какие из них можно реализовать как входные функции, используя разложение на элементарные дроби (по аналогии с методом Фостера, использованным для реактивных сопротивлений).

б) Найти цепи, соответствующие реализациям этих сопротивлений:

$$1) \frac{s+1}{s^2+2s+2} \quad 2) \frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s^2+2s+5)} \quad 3) \frac{s+3}{s^2+2s+2}$$

$$4) \frac{(s+2)^2}{(s+1)(s^2+2s+2)} \quad 5) \frac{(s+2)^2}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

◆ 114. Реализовать следующие RLC функции сопротивлений:

$$1) Z(s) = \frac{s^3 + s^2 + 2s + 1}{s^2 + s + 1} \quad 2) Z(s) = \frac{s^4 + s^3 + 3s^2 + 2s + 1}{s^3 + s^2 + 2s + 1}$$

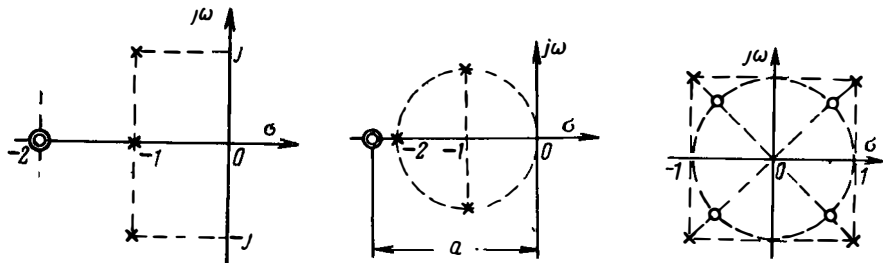
◆ 115. Если следующее входное сопротивление реализуемо:

$$Z(s) = \frac{2s^4 + 5s^3 + 7s^2 + 5s + 2}{2s^3 + 3s^2 + 2s + 1},$$

то найти соответствующую ему цепь

◆ 116. Входное сопротивление имеет в плоскости s три простых полюса и один нуль третьего порядка, как показано на левом рисунке. Известно, что $Z(0) = 4$.

Построить сопротивление, и если оно положительно и вещественно, реализовать его возможным простейшим способом.



◆ 117. Входное сопротивление $Z(s)$ RLC цепи имеет три полюса и нуль второго порядка, как показано на среднем рисунке.

а) Найти наименьшее и наибольшее значения величины a , при которых функцию $Z(s)$ можно реализовать по ее разложению на элементарные дроби.

б) Определить соответствующие цепи.

◆ 118. На рисунке справа дана диаграмма полюсов и нулей четной части входного сопротивления $Z(s)$.

а) Построить это сопротивление, используя метод синтеза по Бруне.

б) Выполнить синтез простейшим способом и получить реализацию, не содержащую взаимных индуктивностей.

◆ 119. Известно, что вещественная часть входного сопротивления четырехполюсника без потерь, нагруженного на резистивное сопротивление 1 Ом , имеет вид

$$\operatorname{Re} [Z_1(j\omega)] = |Z_{12}(j\omega)|^2 = \frac{\omega^2}{\omega^4 - \omega^2 + 1}.$$

а) Если требуется синтезировать по методу Бруне минимально реактивное входное сопротивление $Z_1(s)$, можно ли по виду его вещественной части сказать, какова должна быть структура цепи?

б) Найти $Z_1(s)$ и проверить свои выводы путем синтеза соответствующей цепи.

◆ 120. Заданное входное сопротивление имеет вид

$$Z(s) = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + b_3s^3 + b_4s^4}.$$

Вещественная часть этого сопротивления $\operatorname{Re}[Z(j\omega)]$ имеет два минимума, причем оба равны нулю. Один из них соответствует частоте $\omega = 1$, а другой — частоте $\omega = 2$. При $\omega = 0$ вещественная часть равна единице, асимптотическое значение при $\omega \rightarrow \infty$ также равно единице.

Произвести синтез цепи по методу Бруне, если известно, что

$$Z(j1) = j(1 - \sqrt{2}); \quad Z(j2) = j2(10 - 7\sqrt{2}); \quad \left(\frac{dZ}{ds} \right)_{s=j} = 1 + \sqrt{2}.$$

◆ 121. В следующих трех примерах проверить, принадлежат ли заданные функции к классу п. в. ф.?

а) Рассмотреть возможные случаи реализации этих функций: методом Бруне; методом разложения на элементарные дроби и добавлением соответствующей величины резистивного сопротивления с тем, чтобы избежать применения взаимных индуктивностей.

В тех случаях, когда реализация невозможна:

б) Добавить такое резистивное сопротивление, которое делает функции положительными вещественными, а затем реализовать их по методу Бруне.

в) Добавить такое резистивное сопротивление, которое позволит реализовать указанные функции по методу разложения на элементарные дроби при помощи цепей, не содержащих взаимных индуктивностей.

$$1) Z(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + s + 4}.$$

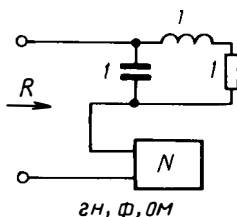
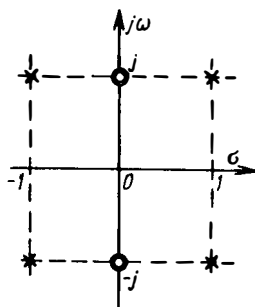
$$2) Z(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + s + 9}.$$

$$3) Z(s) = \frac{5s^2 + s + 1}{s^2 + 4s + 2}.$$

◆ 122. На левом рисунке в плоскости s показано расположение полюсов и нулей функции

$$f(s) = \frac{A(-s^2)}{B(-s^2)},$$

имеющей четыре полюса и два нуля второго порядка на мнимой оси.



а) Построить сопротивление $Z(s)$, если $f(s) \rightarrow 4$ при $s \rightarrow \infty$ и

$$\frac{A(\omega^2)}{B(\omega^2)} = \operatorname{Re} [Z(j\omega)].$$

б) Реализовать это сопротивление по методу Бруне и по методу Дарлингтона. Сравнить результаты.

в) Для цепи без потерь, нагруженной на резистивное сопротивление 1 ом, определить, не производя расчетов, сопротивление передачи $Z_{12}(s) = \frac{E_2}{I_1}$ в виде отношения полиномов.

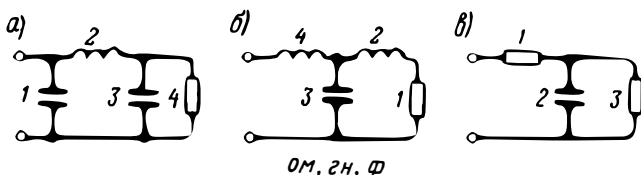
◆ 123. Реализовать методом Дарлингтона следующие функции:

$$1) Z(s) = \frac{s^3 + 6s^2 + 3s + 2}{s^2 + s + 1}; \quad 2) Z(s) = \frac{s^4 + s^3 + 3s^2 + 2s + 1}{s^3 + s^2 + 2s + 1}.$$

Для второго случая использовать симметричную скрещенную схему и сравнить результат с результатом, полученным в задаче 114.

◆ 124. Найти цепь N для соединения, изображенного на рисунке сверху справа, при условии, что результирующее сопротивление двух цепей, соединенных последовательно, должно быть равно чисто резистивному сопротивлению R , имеющему минимальное значение.

◆ 125. Для цепей $a, б, в$ (см. рисунок на стр. 701) найти дополнительные цепи, которые, будучи соединенными последовательно или параллельно, дают цепь постоянного резистивного сопротивления.



Задачи к главе X

- ◆ 126. Образовать на мнимой оси вещественные части сопротивлений для задачи 114, показав с помощью метода Мията, что найденные ранее реализации могут быть предсказаны непосредственно.
- ◆ 127. Синтезировать сопротивления 1) и 2) задачи 121, пункт в), используя метод Ботта и Даффина.
- ◆ 128. Добавив достаточное резистивное сопротивление к сопротивлениям 2) и 3) задачи 121, п. в), привести последние к классу п. в. ф. и синтезировать их, используя метод Ботта и Даффина.
- ◆ 129. Синтезировать сопротивления задачи 127, используя метод Мията, и (если потребуется) произвести включение дополнительных множителей.
- ◆ 130. Синтезировать следующее сопротивление, используя обобщенный метод Мията:

$$Z(s) = \frac{5s^4 + 2,674s^3 + 50,7s^2 + 8,94s + 80,67}{5s^4 + 20s^3 + 86s^2 + 80s + 96}.$$

Задачи к главе XI

- ◆ 131. Дана функция

$$Z_1(s) = \frac{s^3 + s^2 + 2s + 1}{s^4 + s^3 + 3s^2 + 2s + 1},$$

представляющая собой входное сопротивление четырехполюсника без потерь, нагруженного на сопротивление 1 ом. Найти соответствующее сопротивление передачи

$$Z_{12}(s) = \frac{E_2}{I_1}.$$

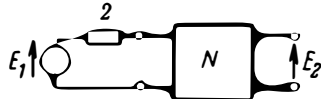
- ◆ 132. Построить цепные схемы без потерь, имеющие при нагрузке на сопротивления 1 ом сопротивления передачи

$$Z_{12} = \frac{1}{(s+1)^4} \quad \text{и} \quad Z_{12} = \frac{s^4}{(s+1)^4}.$$

- ◆ 133. Цепь без потерь возбуждается от источника напряжения с внутренним резистивным сопротивлением 2 ом (см. рисунок).

Синтезировать цепь N так, чтобы коэффициенту передачи по напряжению соответствовал при

$$s = j\omega \text{ квадрат модуля } \left| \frac{E_2}{E_1} \right|^2 = \frac{(1 + \omega^2)^2}{4 + \omega^4}.$$



- ◆ 134. Четырехполюсник без потерь имеет сопротивление передачи $z_{12} =$

$$\frac{3}{s(s^2 + 2)(s^2 + 4)}.$$

Если этот четырехполюсник нагрузить на резистивное со-

противление 1 Ом, то сопротивление передачи $Z_{12}(s)$ будет обладать следующими свойствами:

$$Z_{12}(0) = 1; \quad Z_{12}(j\sqrt{2}) = -3; \quad Z_{12}(j2) = 1.$$

Найти функцию $Z_{12}(s)$ в виде отношения полиномов и синтезировать цепь в простой и практически удобной форме.

◆ 135. Известно, что функция $z_{12} = \frac{1}{s^3 + 3s}$ является сопротивлением передачи холостого хода симметричного четырехполюсника без потерь, который, будучи нагруженным на резистивное сопротивление 1 Ом, имеет минимально реактивное входное сопротивление $Z_1(s)$.

Найти это сопротивление и синтезировать цепь.

◆ 136. Сопротивление передачи четырехполюсника без потерь, нагруженного на сопротивление 1 Ом, определяется выражением

$$Z_{12}(s) = \frac{g(s)}{4s^3 + 3s^2 + 4s + 2},$$

где $g(s)$ — четный полином. Входное сопротивление искомой цепи должно быть минимально реактивным, а сама цепь без потерь должна быть симметричной и неуравновешенной относительно трех различных зажимов.

Построить цепь и определить функцию входного сопротивления.

◆ 137. Приведенные ниже три сопротивления передачи:

$$1) \quad Z_{12} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

$$2) \quad Z_{12} = \frac{s + 2}{2s^3 + 3s^2 + 3s + 2}.$$

$$3) \quad Z_{12} = \frac{s^2 + s + 1}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)}$$

необходимо реализовать по модулю, используя недиссипативные цепи, нагруженные на резистивное сопротивление 1 Ом.

а) Найти, в каком случае результирующая цепь будет цепью с минимальной фазой.

б) Для найденных цепей, реализующих указанные передаточные функции (а не только их модули), определить:

— какие из этих цепей относятся к классу цепей минимально фазового сдвига;

— какие из функций можно реализовать недиссипативными цепями, нагруженными на резистивное сопротивление 1 Ом.

◆ 138. Цепь связи без потерь, нагруженная с обеих сторон на резистивные сопротивления 1 Ом, должна иметь передаточную функцию $t(s)$, квадрат модуля которой равен

$$|t(j\omega)|^2 = \frac{\omega^4 - \omega^2 + 1}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1}.$$

а) Возможна ли реализация в виде простой неуровновешенной цепной схемы, не содержащей взаимных индуктивностей? Ответ обосновать.

б) Возможна ли реализация в виде симметричной цепи? Ответ обосновать.

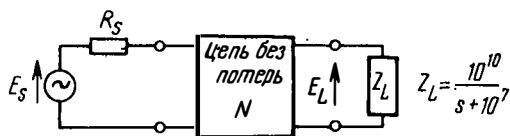
в) Является ли передаточная функция $t(s)$ функцией минимально фазового типа? Ответ обосновать.

г) Синтезировать любую цепь, реализующую указанный квадрат модуля $|t(j\omega)|^2$.

◆ 139. На рисунке (стр. 700) изображена цепь связи без потерь, которую необходимо рассчитать таким образом, чтобы функция

$$\left| \frac{E_L}{E_s} \right| = \frac{K}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^6}}$$

соответствовала наибольшим возможным значениям K и ω_c .



- ◆ 140. Для показанной на рисунке цепи квадрат модуля коэффициента передачи по напряжению должен быть равен

$$\left| \frac{E_2}{E_{10}} \right|_{s=j\omega}^2 = \frac{K\omega^8}{1 + \omega^8}.$$

Выбрать соответствующее значение K и реализовать цепь в виде цепной схемы, не содержащей трансформаторов.



- ◆ 141. Дана функция $Z_{12} = \frac{(s-1)^2}{s^2 + s + 1}$.

а) Представить эту функцию в виде произведения двух множителей, один из которых является функцией минимальной фазы, а другой имеет при $s = j\omega$ постоянный модуль.

б) Реализовать указанную функцию с помощью двух скрещенных цепей постоянного резистивного сопротивления, соединенных каскадно и нагруженных на сопротивление 1 Ом .

◆ 142. Заданное сопротивление $Z_{12}(s)$ реализуется симметричной скрещенной цепью без потерь, нагруженной на сопротивление 1 Ом . Сопротивления скрещенной цепи имеют полюсы на частотах $s = 0$; $s = \pm j2$; $s = \pm j4$, а все вычеты сопротивления Z_{22} в этих полюсах равны единице.

Найти скрещенную цепь при условии, что

$$Z_{12}(0) = 1; \quad Z_{12}(\pm j2) = -1; \quad Z_{12}(\pm j4) = 1.$$

- ◆ 143. Используя цепь без потерь, нагруженную с обеих сторон:

а) Провести расчет (по методу, описанному в § XI.5) функции Баттерворта

$$|t(j\omega)|^2 = \frac{K^2}{1 + \omega^{2n}} \quad \text{при } K < 1.$$

б) На входе применить нормализацию $R_1 = 1$ и показать, что в этом случае соответствующее сопротивление нагрузки определяется выражением $R_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - K^2}}{1 + \sqrt{1 - K^2}}$, а также, что параллельная емкость, смежная с источником, определяется выражением $C_1 = \frac{2}{a \left[1 - (1 - K^2)^{\frac{1}{2n}} \right]}$, где $a = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$ является сум-

мой расстояний от полюсов до мнимой оси.

◆ 144. Используя теорию Дарлингтона, рассмотренную в § IX.8, показать, что для функции Баттерворта нечетного порядка параллельная емкость, смежная с нагруз-

кой (см. предыдущую задачу), имеет величину $C_2 = \frac{2}{aR_2 \left[1 + (1 - K^2)^{\frac{1}{2n}} \right]}$.

Задачи к главе XII

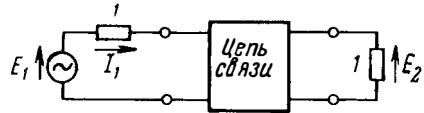
◆ 145. Для цепи, изображенной на рисунке, заданы функции

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{A}{s^2 + 2s + 2} \quad \text{и} \quad \frac{E_2}{I_1} = \frac{B}{s^2 + 2s + 2},$$

где A и B — постоянные.

а) Найти симметричную скрещенную цепь, реализующую требуемую передаточную функцию с максимальными значениями A и B .

б) Пользуясь методом синтеза, который должен принципиально отличаться от метода, применяемого в предыдущем случае, найти другую пассивную цепь связи, которая отвечает заданным там требованиям. Если трансформаторы использовать нельзя, то каково максимальное значение B , которое можно получить?



◆ 146. Передаточной функции скрещенной цепи постоянного резистивного сопротивления, нагруженной с обоих входов на сопротивления 1 ом , соответствует квадрат модуля

$$|t|^2 = \frac{1}{1 + \omega^4}.$$

а) Найти скрещенную цепь. Является ли она минимально фазовой?

б) Реализовать, если возможно, эту передаточную функцию посредством симметричной скрещенной цепи без потерь, нагруженной с обоих входов на резистивные сопротивления 1 ом .

в) Синтезировать эту передаточную функцию в виде простого каскадного соединения усилителей на пентодах. Постоянный множитель не имеет значения, но потери необходимо включить в каждую индуктивность и емкость, причем должно выполняться условие

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} = \text{const.}$$

◆ 147. Обобщая результаты предыдущей задачи, показать, что баттервортовский или чебышевский фильтр произвольного порядка (см. § XIV.2) всегда можно реализовать в таком виде.

◆ 148. Дано сопротивление передачи, квадрат модуля которого при $s = j\omega$ имеет вид

$$|Z_{12}(j\omega)|^2 = \left[\frac{(s^2 + s + 1)^2 (s^2 - s + 1)^2}{(s^2 + 2s + 2)^2 (s^2 - 2s + 2)^2} \right]_{s=j\omega}.$$

а) В плоскости s начертить все возможные конфигурации полюсов и нулей этого сопротивления передачи.

б) С точностью до постоянного множителя указать, какие из функций $Z_{12}(s)$, полученных в предыдущем пункте, можно реализовать в виде:

1) четырехполюсника без потерь, нагруженного с одной стороны на резистивное сопротивление;

2) скрещенной цепи постоянного резистивного сопротивления;

3) четырехполюсника без потерь, нагруженного со стороны обоих входов на резистивные сопротивления;

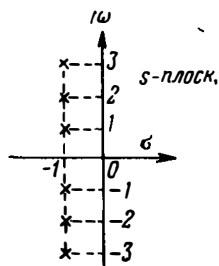
4) каскадного соединения усилителей на пентодах, содержащего межкаскадные двухполюсники.

◆ 149. Симметричный четырехполюсник должен иметь сопротивление передачи холостого хода

$$z_{12} = \frac{s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)(s^2 + 9)}.$$

а) Найти цепь.

б) Изменить эту цепь так, чтобы получить распределение полюсов, изображенное на рисунке, а числитель функции z_{12} стал равным $s + 1$.



в) Является ли эта цепь цепью минимально фазового сдвига?

◆ 150. Используя теорему об интеграле резистивного сопротивления (см. § VIII.3) и замену независимой переменной s на $\frac{1}{s}$, показать, что:

а) Индуктивность, включенная параллельно входному сопротивлению, определяется выражением $L =$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R(\omega)}{\omega^2} d\omega;$$

б) Индуктивность и емкость, включенные последовательно с входной проводимостью, определяются соответственно выражениями

$$\frac{1}{L} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega \quad \text{и} \quad C = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{G(\omega)}{\omega^2} d\omega,$$

где $G(\omega)$ — вещественная часть этой проводимости на мнимой оси.

Задачи к главе XIII

◆ 151. а) Найти ограничения, налагаемые на полиномы $p(s)$ и $q(s)$, при которых проводимость передачи цепи, находящейся в режиме короткого замыкания,

$$y_{12}(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$$

потенциально представляет функцию y_{12} RC цепи.

б) Дать полный процесс синтеза RC четырехполюсника по заданным разложениям на элементарные дроби функций y_{11} , y_{12} и y_{22} , аналогичный методу, изложенному в § VII.1.

в) Указать условия, при которых идеальные трансформаторы не требуются. Построить результирующую цепь. Какие ограничения накладываются в этом случае на общее выражение для y_{12} ?

◆ 152. а) Найти RL четырехполюсник с сопротивлениями

$$z_{11} = \frac{s}{s+1} + \frac{2s}{s+2} + 3s;$$

$$z_{12} = \frac{s}{s+1} - \frac{s}{s+2} + 6s;$$

$$z_{22} = \frac{s}{s+1} + \frac{s}{2(s+2)} + 15s.$$

б) Используя ту же функцию z_{12} , что и в предыдущем пункте, и положив, что здесь функция $z_{11} = z_{22}$ в K раз больше, найти наименьшее значение K , которое позволяет реализовать эту цепь в виде симметричной скрещенной цепи.

◆ 153. Синтезировать RC скрещенную цепь, имеющую сопротивление передачи

$$z_{12} = \frac{s^2 + 1}{(s+1)(s+3)}.$$

◆ 154. Синтезировать RC цепь в форме параллельного соединения неуравновешенных цепных схем, нагруженного на обоих концах на резистивные сопротивления. Сопротивление передачи цепи такое же, как и в задаче 153.

◆ 155. Используя метод каскадного синтеза, реализовать сопротивление передачи из задачи 153 при условии, что входная функция имеет вид

$$z_{11} = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)}$$

◆ 156. Используя параллельное соединение цепных схем, реализовать сопротивление передачи

$$z_{12} = \frac{(s^2 + s + 1)^2}{(s+1)(s+3)(s+5)(s+7)}$$

◆ 157. Используя входное сопротивление

$$z_{11} = \frac{(s+2)(s+4)(s+6)(s+8)}{(s+1)(s+3)(s+5)(s+7)}$$

и сопротивление передачи из задачи 156, провести каскадный синтез с помощью теоремы разбienia, рассмотренной в § XIII.5.

Задачи к главе XIV

◆ 158. Реализовать фильтр нижних частот с нормализованной частотой среза 1 рад/сек , причем индуктивности имеют коэффициент потерь $\frac{R}{L} = 0,1$, а емкости и сопротивления — идеальные. Фильтр должен иметь чебышевскую характеристику, описываемую выражением

$$|Z_{12}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}V_3^2(\omega)}$$

Уровень сопротивления должен составлять 1 ом .

Найти цепь, которая приблизительно удовлетворяет этим требованиям.

◆ 159. а) Рассчитать цепной фильтр нижних частот, имеющий сопротивление передачи

$$|Z_{12}|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_n^2(\omega)}$$

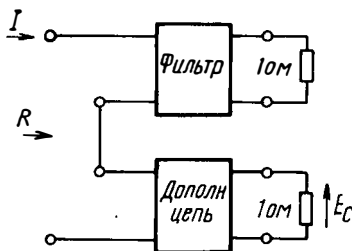
при $\varepsilon = 1$ и $n = 4$.

б) Найти дополняющую цепь, которая, будучи соединенной с рассчитываемым фильтром (см. рисунок), обеспечивает постоянное входное сопротивление.

в) Построить график $\left| \frac{E_c}{I} \right|$ при $s = j\omega$.

◆ 160. а) Используя выражение (XIV.127) и разложение тангенсной функции в бесконечные произведения

$$\operatorname{tg} x = x \frac{\left(1 - \frac{x^2}{x_2^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{x_4^2}\right) \dots}{\left(1 - \frac{x^2}{x_1^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{x_3^2}\right) \dots}$$



при $x_h = \frac{\pi}{2}$, показать, что скрещенную цепь постоянного резистивного сопротивления с линейным сдвигом фазы можно рассчитать, приняв, что реактивное сопротивление x_a представляет собой часть этого разложения, ограниченную n множителями.

б) Выбрав $\beta = 2\omega$ и $n = 4$, построить график отношения $\frac{x_a}{\operatorname{tg} \omega}$ для интервала $0 < \omega < \frac{5\pi}{2}$ и оценить полученный результат с точки зрения качества, достигаемого с помощью этого метода.

◆ 161. а) Модифицировать расчет в предыдущей задаче, вводя в выражение для x_a дополнительный множитель $1 - \frac{x^2}{x_5^2}$ при x_5 в пределах от $\frac{5\pi}{2}$ до $\frac{6\pi}{2}$.

б) Построить график отношения $\frac{x_a}{\operatorname{tg} \omega}$ для нескольких значений x_5 и показать, что результаты, полученные в задаче 160, могут быть значительно улучшены с помощью этого метода.

◆ 162. а) Найти рациональную функцию для $\frac{d\beta}{d\omega}$ согласно выражению (XIV.136), соответствующую максимально плоской фазовой функции при условии, что полином $\varphi(s)$ является полиномом четвертой степени от s .

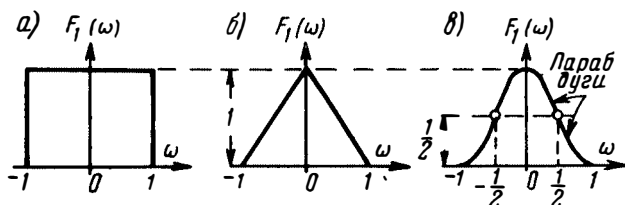
б) Построить график наклона фазы (при нормализованной шкале ω) в интервале $0 < \omega < 1$ и продолжить график до точек $\omega = 2$ или 3.

в) Образовать соответствующую передаточную функцию $Z_{12}(s)$, характеризующую: 1) цепь, пропускающую все частоты; 2) цепь, для которой все нули передачи расположены в точке $s = \infty$. Для 2-го случая построить график функции $|Z_{12}(j\omega)|$ в интервале $0 < \omega < 2$.

◆ 163. Используя результаты, полученные в § XIV.10, показать, что можно найти простое преобразование низкочастотной характеристики в полосовую, применимое к RC цепям и позволяющее непосредственно (на основании решения соответствующей задачи аппроксимации низкочастотной характеристики) рассчитать полосовую характеристику. Накладываются ли при этом процессе какие-либо ограничения на местоположения полюсов?

Задачи к главе XV

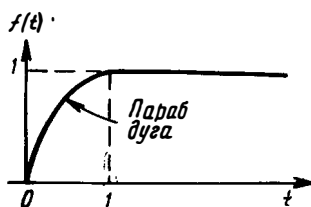
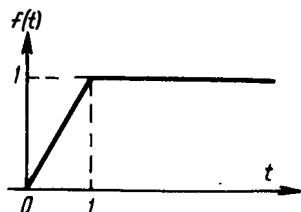
◆ 164. Для заданных вещественных частей преобразований Фурье, изображенных на рисунке, вычислить и построить соответствующие временные функции.



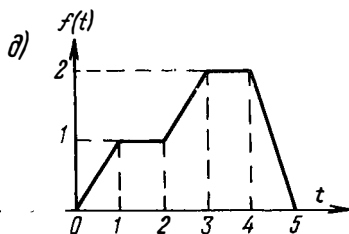
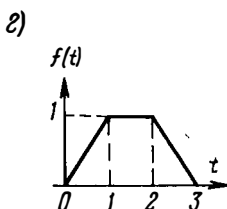
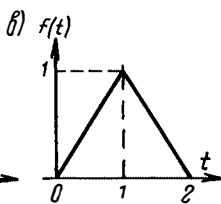
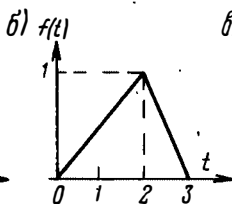
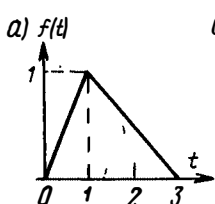
◆ 165. Рассмотреть кривые предыдущей задачи как временные функции $f(t)$ от переменной t . Вычислить и построить соответствующие преобразования Фурье.

◆ 166. Используя метод элементарных функций и некоторые квазимпульсы, для которых рациональные аппроксимирующие функции были найдены в главе XV, определить сопротивление передачи цепи, единичная ступенчатая реакция которой представляет собой аппроксимацию временной функции $f(t)$, показанной на рисун-

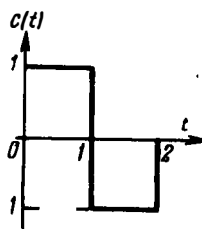
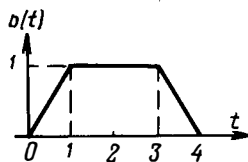
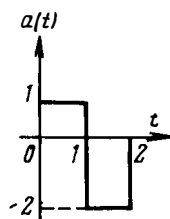
ке слева. Графические построения выполнить аккуратно с тем, чтобы можно было видеть полученные погрешности.



- ◆ 167. Решить задачу 166 для функции времени, изображенной на рисунке справа.
- ◆ 168. Решить задачу 166 методом Фурье.
- ◆ 169. Решить задачу 167 методом Фурье.
- ◆ 170. а) Найти рациональную функцию, обратное преобразование которой аппроксимирует временную функцию, равную $f(t) = 1 - \cos 4\pi t$ в интервале $0 < t < 1$ и нулю вне указанного интервала.
- б) Описать метод решения, использующий элементарные функции для каждой из трех следующих аппроксимаций требуемой функции $f(t)$:
 - 1) с помощью прямоугольных функций;
 - 2) с помощью треугольных функций;
 - 3) параболическими дугами.
- ◆ 171. Описать в общих чертах применение метода Фурье для решения задачи 170 (для одного из указанных там случаев), применительно к оценке погрешности. Сравнить также число полюсов результирующей рациональной функции.
- ◆ 172. Определить, может ли любая из функций времени, показанных на рис. а — д, иметь изображение с нулями, расположенными в правой полуплоскости.



- ◆ 173. Определить и построить для входной и выходной временных функций $a(t)$ и $b(t)$, приведенных на рисунке (стр. 706), соответствующую импульсную характеристику и указать, является ли искомая цепь устойчивой или неустойчивой. Если цепь неустойчива, то вычислить:
 - 1) область, предшествующую функции $b(t)$, примерно такой длительности, которая обеспечивает стабилизацию импульсной характеристики;
 - 2) задний фронт соответствующей длительности для стабилизации импульсной характеристики.



◆ 174. Заданная цепь имеет импульсную характеристику $c(t)$, график которой показан на рисунке. Найти входную функцию $a(t)$, при которой получается выходная функция $b(t)$ из задачи 173.

◆ 175. а) С помощью метода Фурье, рассмотренного в § XV.7, найти рациональную аппроксимирующую функцию, которая обеспечит форму импульса, определяемую выражением $f(t) = 1 + \cos \pi t$ при $-1 < t < 1$ с погрешностью около 3%.

б) Рассматривая эту аппроксимирующую функцию как сопротивление цепи, находящейся в режиме холостого хода, найти ее реализацию в виде цепи без потерь, нагруженной со стороны входа на резистивное сопротивление 1 Ом , и синтезировать данную цепь, используя метод, описанный в § VII.1 (в качестве иллюстраций использовать рис. VIII.5 и VIII.8 из этого параграфа).



**О ВКЛЮЧЕНИИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ,
ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТЬ
ВСЕХ КОЭФФИЦИЕНТОВ**

Если коэффициенты a_k полинома неотрицательны, то представляет интерес определить, может ли полином

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n \quad (1)$$

иметь нули в правой полуплоскости z , и если да, то насколько близко эти нули могут располагаться к положительной вещественной оси.

Для исследования этого вопроса, допустим, что такой нуль находится на единичной окружности. Тогда

$$z = e^{j\theta}, \quad (2)$$

поскольку любой нуль можно привести к требуемому виду при помощи соответствующей нормализации модуля.

Теперь задача формулируется так: может ли уравнение

$$a_0 + a_1 e^{j\theta} + a_2 e^{j2\theta} + \dots + a_n e^{jn\theta} = 0 \quad (3)$$

удовлетворяться при $0 \leq |\theta| < \frac{\pi}{2}$?

Вследствие того что коэффициенты a_k положительны, приведенное уравнение, очевидно, не может выполняться при $\theta = 0$. Если же требуется, чтобы оно удовлетворялось при наименьших возможных значениях θ , то необходимо, чтобы

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0. \quad (4)$$

Это вытекает из того обстоятельства, что при $n\theta = \pi$ от членов a_0 и $a_n e^{jn\theta}$ можно избавиться, выбрав $a_0 = a_n$, тогда как уничтожение любых промежуточных членов потребовало бы выбора большего значения θ (если, например, выбрать любые другие симметрично расположенные векторы, то $n\theta$ будет равно 2π или очень близко к этому значению).

Отсюда видно, что полином n -й степени, имеющий нуль, расположенный ближе всех других нулей к положительной вещественной оси, просто представляет полином вида $(1 + z^n)$, причем нули его равномерно расположены на единичной окружности.

Допустим, что имеется множитель $z^2 - \frac{3}{2}z + 1$. Тогда соответствующий процесс деления можно записать так:

$$\begin{array}{r}
 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{3}{8} \\
 1 - \frac{3}{2} + 1 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & + 0 \\ & + c_4 & & + c_5 \end{array} \right. \\
 \hline
 1 - \frac{3}{2} + 1 \\
 \hline
 \frac{3}{2} - 1 \\
 \frac{3}{2} - \frac{9}{4} + \frac{3}{2} \\
 \hline
 \frac{5}{4} - \frac{3}{2} \\
 \frac{4}{4} - \frac{2}{2} \\
 \frac{5}{4} - \frac{15}{8} + \frac{5}{4} \\
 \hline
 \frac{3}{8} - \frac{5}{4} \\
 \frac{8}{8} - \frac{4}{4} \\
 \frac{3}{8} - \frac{9}{16} + \frac{3}{18} \\
 \hline
 -\frac{11}{16} - \frac{3}{8}
 \end{array} \quad (12)$$

За счет выбора коэффициентов c_4 и c_5 полинома $C(z)$ равными $\frac{11}{16}$ и $\frac{3}{8}$ соответственно процесс деления заканчивается и соответствующий преобразованный полином приобретает вид

$$z^3 + \frac{3}{2}z^2 + \frac{5}{4}z + \frac{3}{8}. \quad (13)$$

Результирующий полином имеет три члена, отличных от нуля, и выглядит следующим образом:

$$z^5 + \frac{11}{16}z + \frac{3}{8}. \quad (14)$$

Операция деления, определяемая выражением (12), заканчивается, как только оба остаточных члена становятся отрицательными. Второй из них будет отрицательным на каждом этапе, но первый не станет отрицательным до тех пор, пока мы не приступим к четвертому этапу. Сравнив этот результат с результатом, полученным методом Пуанкаре [см. выражения (7) и (8)], видим, что полиномам (13) и (14) соответствуют точно такие же выражения.

В методах Пуанкаре и Льюиса в качестве дополнительного множителя используется только один квадратный член, поэтому процесс деления можно применить и для более общих случаев и иногда получить с небольшими усилиями более простой результат.

Рассмотрим, например, случай, которому соответствует следующая операция деления:

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 \left| \begin{array}{r} 1 + 2 + 1 \\ 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + c_5 + c_6 \\ 1 - 2 + 3 - 4 + 5 \\ \hline 2 - 3 + 4 - 5 \\ 2 - 4 + 6 - 8 + 10 \\ \hline 1 - 2 + 3 - 10 \\ 1 - 2 + 3 - 4 + 5 \\ \hline -6 - 5 \end{array} \right. \quad (15)$$

Заданным является полином

$$z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 4z + 5. \quad (16)$$

Находим преобразованный полином

$$z^2 + 2z + 1 \quad (17)$$

и результирующий полином

$$z^6 + 6z + 5. \quad (18)$$

Вернемся снова к заданному полиному

$$(z^2 - z + 1) \left(z^2 - \frac{3}{2}z + 1 \right) = z^4 - \frac{5}{2}z^3 + \frac{7}{2}z^2 - \frac{5}{2}z + 1. \quad (19)$$

Можно, разумеется, рассматривать множители отдельно. Для первого множителя легко находим, что соответствующий ему преобразованный полином равен $(z + 1)$; для второго множителя оказывается пригодным полином, определяемый выражением (13).

Результирующий полином, найденный согласно описанному методу, имеет восьмую степень и шесть членов, отличных от нуля. Однако если рассматривать выражение (19) в целом, то придем к такой операции деления:

$$1 - \frac{5}{2} + \frac{7}{2} - \frac{5}{2} + 1 \left| \begin{array}{r} 1 + \frac{5}{2} + \frac{11}{4} + \frac{5}{8} \\ 1 + 0 + 0 + 0 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 \\ \hline 1 - \frac{5}{2} + \frac{7}{2} - \frac{5}{2} + 1 \\ \hline \frac{5}{2} - \frac{7}{2} + \frac{5}{2} - 1 \\ \hline \frac{5}{2} - \frac{25}{4} + \frac{35}{4} - \frac{25}{4} + \frac{5}{2} \\ \hline \frac{11}{4} - \frac{25}{4} + \frac{21}{4} - \frac{5}{2} \\ \hline \frac{11}{4} - \frac{55}{8} + \frac{77}{8} - \frac{55}{8} + \frac{11}{4} \\ \hline \frac{5}{8} - \frac{35}{8} + \frac{35}{8} - \frac{11}{4} \\ \hline \frac{5}{8} - \frac{25}{16} + \frac{35}{16} - \frac{25}{16} + \frac{5}{8} \\ \hline -\frac{10}{16} + \frac{35}{16} - \frac{19}{16} - \frac{5}{8} \end{array} \right. \quad (20)$$

Нетрудно заметить, что здесь требуется отрицательное значение коэффициента c_5 , что неприемлемо. Эта трудность возникает потому, что слишком большое количество коэффициентов полинома $C(z)$ было произвольно выбрано равным нулю.

Если считать коэффициент c_3 неизвестным и обозначить частное в выражении

(20) $\left(\text{член } \frac{5}{8} \right)$ через b_3 , то последний этап деления даст

$$\left. \begin{aligned} & \frac{5}{8} - \frac{35}{8} + \frac{35}{8} - \frac{11}{4} \\ & \left(1 - \frac{5}{2} + \frac{7}{2} - \frac{5}{2} + 1 \right) b_3 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Завершение процесса означает, что

$$\left. \begin{aligned} c_3 &= b_3 - \frac{5}{8} \geq 0 \\ c_4 &= -\frac{5}{2} b_3 + \frac{35}{8} \geq 0 \\ c_5 &= \frac{7}{2} b_3 - \frac{35}{8} \geq 0 \\ c_6 &= -\frac{5}{2} b_3 + \frac{11}{4} \geq 0 \\ c_7 &= b_3 \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Нетрудно заметить, что при одном значении b_3 одновременное выполнение всех перечисленных неравенств невозможно. Таким образом, приходим к выводу, что преобразованный полином должен иметь, по меньшей мере, четвертую степень [как это и будет, если множители выражения (19) рассматривать отдельно].

В результате дополнительной операции в процессе деления выражение (21) изменяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{5}{8} - \frac{35}{8} + \frac{35}{8} - \frac{11}{4} \\ & \left(1 - \frac{5}{2} + \frac{7}{2} - \frac{5}{2} + 1 \right) b_3 \\ & \left(1 - \frac{5}{2} + \frac{7}{2} - \frac{5}{2} + 1 \right) b_4 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

а неравенства (22) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} c_3 &= b_3 - \frac{5}{8} \geq 0 \\ c_4 &= b_4 - \frac{5}{2} b_3 + \frac{35}{8} \geq 0 \\ c_5 &= -\frac{5}{2} b_4 + \frac{7}{2} b_3 - \frac{35}{8} \geq 0 \\ c_6 &= \frac{7}{2} b_4 - \frac{5}{2} b_3 + \frac{11}{4} \geq 0 \\ c_7 &= -\frac{5}{2} b_4 + b_3 \geq 0 \\ c_8 &= b_4 \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Здесь возможно множество решений, и среди них решение, которое получается в результате отдельного рассмотрения множителей выражения (19). Оно дает $b_3 = \frac{13}{8}$; $b_4 = \frac{3}{8}$ и, следовательно, преобразованный полином оказывается равным

$$z^4 + \frac{5}{2}z^3 + \frac{11}{4}z^2 + \frac{13}{8}z + \frac{3}{8}. \quad (25)$$

Полученный в этом случае результат имеет коэффициенты

$$1 + 0 + 0 + 1 + \frac{11}{16} + \frac{3}{8} + 0 + \frac{11}{16} + \frac{3}{8}, \quad (26)$$

которые удовлетворяют неравенствам (24).

Для решения, для которых дополнительный коэффициент результирующего полинома становится равным нулю, находятся непосредственно. Так, неравенства (24) могут выполняться, если принять $c_5 = c_6 = 0$, что дает преобразованный и результирующий полиномы с коэффициентами

$$1 + \frac{5}{2} + \frac{11}{4} + \frac{45}{32} + \frac{7}{32}; \quad (27)$$

$$1 + 0 + 0 + \frac{25}{32} + \frac{69}{64} + 0 + 0 + \frac{55}{64} + \frac{7}{32}. \quad (28)$$

Аналогично при $c_5 = c_7 = 0$ решение неравенства (24) приводит к полиномам с коэффициентами

$$1 + \frac{5}{2} + \frac{11}{4} + \frac{7}{4} + \frac{7}{10}; \quad (29)$$

$$1 + 0 + 0 + \frac{9}{8} + \frac{7}{10} + 0 + \frac{33}{40} + 0 + \frac{7}{10}. \quad (30)$$

Эквивалентное решение можно получить с меньшими усилиями, если предварительно умножить исходный полином, определяемый выражением (19), на множитель $(z + 1)$. Тогда получим

$$z^5 - \frac{3}{2}z^4 + z^3 + z^2 - \frac{3}{2}z + 1. \quad (31)$$

Эта операция в любом случае должна привести к полезным результатам, в чем легко убедиться из следующего деления:

$$1 - \frac{3}{2} + 1 + 1 - \frac{3}{2} + 1 \left| \begin{array}{l} 1 + 0 + 0 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8 \\ 1 - \frac{3}{2} + 1 + 1 - \frac{3}{2} + 1 \\ \hline \frac{3}{2} - 1 - 1 + \frac{3}{2} - 1 \\ \frac{3}{2} - \frac{9}{4} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{9}{4} + \frac{3}{2} \\ \hline \frac{5}{4} - \frac{5}{2} + 0 + \frac{5}{4} - \frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} - \frac{15}{18} + \frac{5}{4} + \frac{5}{4} - \frac{15}{8} + \frac{5}{4} \\ \hline - \frac{5}{8} - \frac{5}{4} + 0 + \frac{3}{8} - \frac{5}{4} \\ \hline \left(1 - \frac{3}{2} + 1 + 1 - \frac{3}{2} + 1 \right) b_3. \end{array} \right. \quad (32)$$

Завершение деления на данном этапе требует, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\left. \begin{aligned} c_3 &= b_3 + \frac{5}{8} \geq 0 \\ c_4 &= -\frac{3}{2} b_3 + \frac{5}{4} \geq 0 \\ c_5 &= b_3 \geq 0 \\ c_6 &= b_3 - \frac{3}{8} \geq 0 \\ c_7 &= -\frac{3}{2} b_3 + \frac{5}{4} \geq 0 \\ c_8 &= b_3 \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Нетрудно заметить, что эти неравенства могут выполняться для единственного значения коэффициента b_3 . Фактически, если выбрать $b_3 = \frac{5}{6}$, то получим $c_4 = c_7 = 0$, и соответствующий преобразованный полином будет иметь вид

$$z^3 + \frac{3}{2} z^2 + \frac{5}{4} z + \frac{5}{6}. \quad (34)$$

Результирующий полином, как и в выражениях (28) и (30), имеет восьмую степень и содержит пять членов, отличных от нуля.

Следовательно, рассмотренный процесс включения дополнительных множителей более удобен, чем процесс, приводящий к выражению (26), полученному при отдельном рассмотрении квадратичных членов выражения (19). Более того, когда исходный полином задан не в виде произведения сомножителей, то этот метод (отдельное рассмотрение множителей) требует большего объема вычислений.

Если в рассматриваемом примере для выполнения неравенств (33) выбрать $b_3 = \frac{3}{8}$, то преобразованный полином будет таким же, как и полином, определяемый выражением (13). К этому же результату можно прийти в начале процесса, так как делитель выражения (32) представляет собой делитель, дважды используемый в выражении (12). Описанная процедура разложения (ее иногда можно с успехом использовать) приводит к результирующему полиному, имеющему ту же степень (восьмую), но не с пятью, а с шестью членами, отличными от нуля.

Дополнительное полезное свойство данного метода заключается в том, что получаемые в результате преобразованные полиномы всегда имеют неотрицательные коэффициенты. Они могут быть даже полиномами Гурвица, как, например, полиномы, определяемые выражениями (13), (17), (25), (27), (29) и (34). При применении метода Мията нет необходимости использовать это дополнительное свойство. Однако при синтезе передаточной функции, когда может потребоваться включение дополнительных множителей (см. § XI.4 и § XIII.3), необходимо, кроме того, чтобы преобразованный полином был полиномом Гурвица. Так, в соответствующей задаче для RC цепи преобразованный полином должен иметь только простые отрицательные вещественные нули. Определение требуемого полинома в этом случае является, разумеется, более трудной задачей, причем для ее решения пока еще нет подходящих математических методов, хотя идеи, возникающие из вышеприведенных рассуждений, по-видимому, могут оказаться полезными.

Укажем, что в данном случае может представлять интерес другая интерпретация задачи. Допустим, что коэффициенты полиномов рассматриваются как равномерно расположенные на временной шкале отсчеты (импульсы) соответствующих временных функций. В частности, пусть коэффициенты a_1, a_2, a_3, \dots полинома

$A(z)$ будут последовательными значениями серии импульсов, заданных во временной области. Пусть далее временная функция, представленная в виде таких отсчетов, является входным сигналом, приложенным к некоторой цепи. Временные функции, представленные в виде последовательностей импульсов, определяемых коэффициентами полиномов $B(z)$ и $C(z)$, рассматриваются соответственно как импульсная и выходная характеристики цепи. Очевидно, что такая интерпретация возможна, поскольку алгебраическая зависимость, выражающая коэффициенты полинома $C(z)$ через коэффициенты полиномов $A(z)$ и $B(z)$, представляет собой именно тот результат, который можно получить для отсчетов выходной временной функции, если выразить ее в виде свертки входной и импульсной функций.

Входная временная функция имеет как отрицательные, так и положительные отсчеты. Первый и последний из них, а также алгебраическая сумма всех отсчетов должны быть положительными и не равными нулю, так как заданный полином $A(z)$ не может иметь положительных вещественных нулей¹.

Выходная функция, представляющая собой суперпозицию равномерно расположенных точных копий отсчетов входных функций, умноженных на соответствующие постоянные множители (которые характеризуют отсчеты импульсной характеристики), может не иметь отрицательных отсчетов. Задача заключается в том, чтобы определить отсчеты импульсной характеристики, удовлетворяющей этому требованию, несмотря на то, что в некоторых случаях выходная функция может иметь весьма большое число отличных от нуля отсчетов.

Поскольку свертывание является взаимным процессом, то выходную функцию также можно рассматривать как суперпозицию равномерно расположенных на некоторых интервалах и умноженных на соответствующие постоянные множители отсчетов требуемой импульсной характеристики; при этом постоянные множители характеризуют отсчеты (некоторые из них отрицательны) данной входной функции.

Когда входная функция содержит малое количество отрицательных отсчетов и, кроме того, их значения не слишком велики, то нетрудно себе представить, как может быть построена соответствующая импульсная характеристика. Аналогично если среди большого числа положительных отсчетов содержится некоторое количество отрицательных, то разложение входной функции на сумму компонент, каждая из которых имеет некоторое число отрицательных отсчетов, может облегчить получение требуемого результата.

¹ Нетрудно убедиться в справедливости этого утверждения, если рассматривать полином $A(z)$ в виде произведения множителей [см. выражения (5) и (6)]. Поскольку включение дополнительных множителей будет успешным только до тех пор, пока угол θ любого множителя вида $(z^2 - 2z \cos \theta + 1)$ отличен от нуля, то для каждого множителя сумма коэффициентов (значение множителя при $z = 1$) положительна. Следовательно, сумма коэффициентов результирующего полинома $A(z)$ также должна быть положительной.



ЛИТЕРАТУРА

1. E. A. Guillemin. Introductory Circuit Theory. John Wiley and Sons, New York, 1953.
2. E. A. Guillemin. The Mathematics of Circuit Analysis. John Wiley and Sons, New York, 1949.
3. E. J. Routh. Dynamics of a System of Rigid Bodies. The Macmillan Co., London, 1877.
4. M. Bocher. Introduction to Higher Algebra. The Macmillan Co., New York, 1927 (рус. пер. М. Бохер. Введение в высшую алгебру. ГТТИ, 1933.).
5. L. E. Dickson. First Course in the Theory of Equations. John Wiley and Sons, New York, 1921.
6. R. M. Foster. A Reactance Theorem. BSTJ, v. 3, 1924.
7. W. Cauер. Die Verwirklichung von Wechselstromwiderständen vorgeschriebener Frequenzabhängigkeit. Arch. Elektrotech., b. 17, 1927.
8. W. Cauер. Vierpole. Elek. Nachr. Tech., b. 6, N 7, 1929.
9. N. Howitt. Group Theory and the Electric Circuit. Phys. Rev., v. 37, No 12, 1931.
10. A. C. Bartlett. Phil. Mag., v. 4, nov. 1927.
11. O. Brune. Note on Bartlett's Bisection Theorem. Phil. Mag., v. 14, ser. 7, nov. 1932.
12. W. Cauер. Ein Reaktanztheorem. Sitzber. preuss. Akad. Wiss. Physik. math. Kl., b. 30, 1931.
13. C. M. Gewertz. Network Synthesis. Williams and Wilkins, Baltimore, 1933.
14. F. Miyata. A New System of Two—Terminal Synthesis. J. Inst. Elec. Engrs. (Japan), v. 35, may 1952.
15. H. W. Bode. Network Analysis and Feedback Amplifier Design. D. van Nostrand Co., New York, 1945 (рус. пер. Г. Боде. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. ГИИЛ, 1948).
16. R. Feldtkeller. Zur Frequenzabhängigkeit der Reaktanzen. Elek. Nachr. Tech., b. 13, No 12, 1936.
17. Y. W. Lee. Synthesis of Electric Networks by Means of Fourier Transforms of Laguerre's Functions. J. Math. and Phys., v. 11, 1932.
18. Computational Techniques Which Simplify the Correlation between Steady—State and Transient Response of Filters and Other Networks. Proc. Nat. Electronics Conf., v. 9, feb. 1954.
19. O. Brune. Synthesis of a Finite Two Terminal Network Whose Driving—Point Impedance is a Prescribed Function of Frequency. J. Math. and Phys., v. 10, No 3, oct. 1931.
20. S. Darlington. Synthesis of Reactance 4 Poles. J. Math. and Phys., v. 18, sept. 1939.

21. R. Bott and R. J. Duffin. Impedance Synthesis without use of Transformers. *J. Appl. Phys.*, v. 20, No 8, aug. 1949.
22. F. M. Reza. *J. Appl. Phys.*, v. 25, No 6, june 1954.
23. F. Miyata. A New System of Two—Terminal Synthesis. *J. Inst. Elect. Engrs. (Japan)*, v. 35, may 1952.
24. Transactions of the Symposium on Modern Network Synthesis. Polytechnic Institute of Brooklyn, 1956.
25. J. H. Poincare. *Comptes Rendus*, v. 97, 1883.
26. W. Cauer. Ausgangsseitig leerlaufende Filter. *Elek. Nachr. Tech.*, b. 16, No 6, 1949.
27. E. A. Guillemin. Synthesis of RC Networks. *J. Math. and Phys.*, v. 28, No 1, apr. 1949.
28. J. G. Truxal. Automatic Feedback Control Systems Synthesis. McGraw—Hill Book Co., New York, 1955 (рус. пер. Д. Траксел. Синтез систем автоматического регулирования. Изд-во «Машгиз», 1959).
29. R. H. Pantell. Minimum—Phase Transfer Function Synthesis. *IRE Trans.*, v. CT—2, No 2, june 1955.
30. D. B. Armstrong and F. M. Reza. Synthesis of Transfer Functions by Active RC Networks. *IRE PGCT Trans.*, v. CT—1, No 2. June 1954.
31. M. V. Mathews and W. W. Seifert. Transfer—Function Synthesis with Computer Amplifiers and Passive Networks. Proc. Western Joint Computer Conference, mar. 1955.
32. B. J. Dasher. *IRE PGCT Trans.*, v. CT—1, dec. 1952.
33. R. F. Baum. A Contribution to the Approximation Problem. *Proc. IRE*, v. 36, No 7, July 1948.
34. D. L. Trautman. The Application of Conformal Mapping to the Synthesis of Band—pass Networks. Proc. Symposium on Modern Network Synthesis. Apr. 1952.
35. H. Salinger. Note on the Frequency Behavior of Reactances. *Proc. IRE*, v. 26, No 1, jan. 1938.
36. W. Cauer. *Siebschaltungen*. V.D.I Verlag G. M. B. H., Berlin, 1931.
37. E. L. Norton. Constant Resistance Networks with Applications to Filter Groups. *BSTJ*, v. 15, apr. 1937.
38. Janke Emde. *Tafeln höherer funktionen*. Stuttgart, 1930, (рус. пер. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш. Специальные функции. Изд-во «Наука», 1968).
39. L. M. Milne—Thomson. *Jacobian Elliptic Function Tables*. Dover Publications. New York, 1950.
40. H. Hancock. *Lectures on the Theory of Elliptic Functions*. John Wiley and Sons, New York, 1910.
41. A. R. Boothroyd, E. C. Cherry, R. Makar. An Electrolytic Tank for the Measurement of Steady—State Response, Transient Response, and Allied Properties of Networks. Proc. Inst. Elec. Engrs. (London) Pt. 1, v. 96, may 1949.
42. S. Darlington. The Potential Analogue of Network Synthesis. *BSTJ*, v. 30, apr. 1951.
43. R. E. Scott. Network Synthesis by the Use of Potential Analogs. *Proc. IRE*, v. 40, aug. 1952.
44. L. Storch. An Application of Modern Network Synthesis to the Design of Constant—Time—Delay Networks with Low—Q Elements. 1954 IRE Convention Record, pt. 2, Circuit Theory.
45. B. J. Bennett. A Note on Filter Synthesis. *IRE PGCT Trans.*, v. CT—1, No 3, sept. 1954.
46. A. Papoulis. Network Response in Terms of Behavior at Imaginary Frequencies. Trans. of the Symposium on Modern Network Synthesis Polytechnic Institute of Brooklyn, 1956.
47. E. A. Guillemin. What is Network Synthesis? *IRE Trans.*, v. PGST—1, dec. 1952.
48. E. A. Guillemin. Proc. Nat. Elect. Conf., v. 9, feb. 1954.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ РЕДАКТОРОМ ПЕРЕВОДА

49. Б. В. Булгаков. Колебания. ГТТИ, 1954.
50. Г. И. Атабеков. Теория линейных электрических цепей. Изд-во «Советское радио», 1960.
51. И. С. Гоноровский. Основы радиотехники. Связьиздат, 1962.
52. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. Изд-во «Наука», 1965.
53. И. С. Гоноровский. Радиотехнические цепи и сигналы. т. 1, Изд-во «Советское радио», 1966.
54. М. М. Айзинов. Радиотехнические цепи и сигналы. Изд-во «Транспорт», 1966.
55. Л. Я. Окунев. Высшая алгебра. Изд-во «Просвещение»; 1966.
56. Н. В. Ефимов. Квадратичные формы и матрицы. Изд-во «Наука», 1964.
57. С. Сешу, Н. Балабанян. Анализ линейных цепей. Госэнергоиздат, 1963.
58. М. М. Айзинов. Анализ и синтез линейных радиотехнических цепей в переходном режиме. Изд-во «Энергия», 1968.
59. А. Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. ГИТТЛ, 1956.
60. А. Я. Хинчин. Цепные дроби. ГИТТЛ, 1949.
61. Л. А. Меерович. О синтезе цепей по заданной временной характеристике. «Радиотехника», 1948, № 5.
62. Л. А. Меерович, Л. Г. Зеличенко. Импульсная техника. Изд-во «Советское радио», 1953.
63. Я. С. Ицхоки. Импульсная техника. Изд-во «Советское радио», 1949.
64. Я. С. Ицхоки. Импульсные устройства. Изд-во «Советское радио», 1952.
65. М. М. Айзинов. О синтезе цепи по заданной форме сигнала. «Радиотехника», 1951, № 2.
66. М. М. Айзинов. Переходные процессы в элементах радиоустройств. Изд-во «Морской транспорт», 1955.
67. П. Н. Матханов. К расчету цепей для формирования прямоугольных импульсов. «Радиотехника», 1957, № 7.
68. Н. С. Кочанов. Метод интерполирования функций экспоненциальными полиномами и его применение к задачам синтеза электрических цепей по временным характеристикам. «Радиотехника», 1960, № 8.
69. А. С. Розенфельд и Б. И. Яхинсон. Переходные процессы и обобщенные функции. Изд-во «Наука», 1966.
70. Э. В. Зелях. Основы общей теории линейных электрических схем. Изд-во АН СССР, 1951.
71. В. А. Тафт. Основы методики расчета линейных электрических цепей по заданным их частотным характеристикам. Изд. АН СССР, 1954.
72. А. Ф. Белецкий. Основы теории линейных электрических цепей. Изд-во «Связь», 1967.
73. А. А. Ланнэ. Оптимальный синтез линейных электрических цепей. Изд-во «Связь», 1969.



ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора перевода	5
Из предисловия автора	7
Глава I. Свойства входных сопротивлений и сопротивлений передачи	11
I.1. Физические соображения	11
I.2. Аналитические основы изучения свойств функций сопротивления или проводимости	15
I.3. Свойства положительных вещественных функций	20
I.4. Методы определения принадлежности функции к классу п. в. ф.	25
I.5. Некоторые дополнительные свойства положительной вещественной функции	47
I.6. Некоторые замечания, относящиеся к сопротивлениям передачи	48
Глава II. Входные и передаточные функции двухэлементных цепей	53
II.1. Функции LC цепей	53
II.2. Функции RL цепей	61
II.3. Функции RC цепей	66
Глава III. Синтез входных сопротивлений LC цепей	70
III.1. Общие замечания о синтезе	70
III.2. Синтез реактивных функций и функций реактивной проводимости посредством их разложений на элементарные дроби	73
III.3. Свойства канонических реализаций цепей	79
III.4. Другие канонические реализации цепей	82
III.5. Численные примеры	90
III.6. Эквивалентные и обратные цепи	93
III.7. Преобразование относительно нормальной системы координат	94
Глава IV. Синтез входных сопротивлений RC и RL цепей	98
IV.1. Реализация RC цепей по Фостеру	98
IV.2. Другие канонические формы реализации сопротивлений RC цепей	106
IV.3. Более общие, «смешанные» методы синтеза RC цепей	113
IV.4. Примеры синтеза входных функций RC цепей	114
IV.5. Способ синтеза RL цепей, аналогичный способу синтеза RC цепей	119
IV.6. Эквивалентные, обратные и дополнительные цепи	122
Глава V. Исследование эквивалентных и обратных цепей	126
V.1. Эквивалентные цепи, полученные при помощи линейного преобразования переменных	126
V.2. Метод определения потенциально эквивалентных цепей	141
V.3. Некоторые замечания, относящиеся к обратным цепям	154
Глава VI. Свойства четырехполосников	158
VI.1. Параметры четырехполосников	158
VI.2. Соединения четырехполосников	164
VI.3. Симметричные скрещенные четырехполосники	167
VI.4. Теорема бисекции цепи (теорема Бартлетта)	170
VI.5. Преобразование скрещенных четырехполосников в эквивалентные неуравновешенные	174
VI.6. Преобразование симметричных скрещенных четырехполосников в несимметричные	181

Глава VII. Синтез четырехполюсников без потерь	185
VII.1. Обобщение теоремы Фостера	185
VII.2. Использование скрещенных цепей при синтезе	195
VII.3. Синтез одного входного сопротивления каскадным (цепным) соединением	198
VII.4. Синтез каскадных включенных четырехполюсников	215
Глава VIII. Достаточные условия для вещественной части функции	240
VIII.1. Определение сопротивления по его вещественной части	240
VIII.2. Импульсы вещественной части	253
VIII.3. Построение произвольной вещественной части по импульсам	256
VIII.4. Использование преобразования Гильберта	259
VIII.5. Другой аналитический метод	271
VIII.6. Дополняющие сопротивления	275
VIII.7. Построение сопротивления передачи по его вещественной части	276
VIII.8. Построение сопротивления по его модулю	278
VIII.9. Построение входного сопротивления по его углу	279
VIII.10. Построение сопротивления передачи по его углу	284
VIII.11. Границы независимости модуля и угла передаточной функции	286
Глава IX. Синтез входных сопротивлений <i>RLC</i> цепей	288
IX.1. Предварительные замечания	288
IX.2. Ограничения метода разложения на элементарные дроби	291
IX.3. Обобщение метода реализации с помощью разложения на элементарные дроби	298
IX.4. Метод синтеза по Бруне	303
IX.5. Второй метод синтеза по Бруне	316
IX.6. Синтез входного сопротивления по Дарлингтону	319
IX.7. Иллюстративные примеры	323
IX.8. Дальнейшее рассмотрение метода Дарлингтона	328
IX.9. Использование метода Дарлингтона в каскадном синтезе	334
IX.10. Метод синтеза, приводящий к цепям без взаимных индуктивностей	341
Глава X. Синтез входных сопротивлений цепей, не содержащих трансформаторов	343
X.1. Метод Ботта и Даффина	343
X.2. Метод Мията	351
X.3. Модификации метода Мията	364
X.4. Обобщение метода Мията	369
X.5. Метод, приводящий к результатам Ботта и Даффина	389
X.6. Использование принципа дуальности в методе Мията и других методах	395
Глава XI. Обычные методы синтеза передаточных функций	396
XI.1. Синтез сопротивления передачи цепи без потерь, нагруженной на резистивное сопротивление	396
XI.2. Связь полученных результатов с методами построения сопротивления по его вещественной части	404
XI.3. Практическое использование цепи без потерь, нагруженной на резистивное сопротивление	406
XI.4. Другой способ синтеза цепей без потерь	407
XI.5. Цепи связи без потерь, нагруженные с обоих входов	411
XI.6. Методы, позволяющие упростить расчет симметричных и антисимметричных цепей	420
XI.7. Способ согласования сопротивлений источника и нагрузки	427
XI.8. Использование скрещенной цепи постоянного резистивного сопротивления	431
Глава XII. Методы синтеза передаточных функций (продолжение)	448
XII.1. Методы, основанные на использовании скрещенных структур	448

XII.2. Построение цепи с учетом требований к полюсам и нулям функций	467
XII.3. Некоторые другие методы	478
XII.4. Реализация в виде каскадного соединения усилительных ступеней на пентодах	481
XII.5. Другой метод реализации сопротивлений передачи	483
XII.6. Предварительная коррекция	485
Глава XIII. Синтез передаточных функций RC цепей	496
XIII.1. Постановка задачи	496
XIII.2. Методы синтеза RC цепей при помощи скрещенных структур	498
XIII.3. Реализация при помощи параллельных цепных схем	499
XIII.4. Каскадный синтез RC цепей	508
XIII.5. Полезные приемы, используемые при синтезе передаточных функций	521
XIII.6. Некоторые примеры каскадного синтеза	523
Глава XIV. Задача аппроксимации	531
XIV.1. Предварительные замечания	531
XIV.2. Функции Баттерворта и Чебышева	532
XIV.3. Асимптотические свойства функций Баттерворта и Чебышева	544
XIV.4. Преобразования частоты	546
XIV.5. Равноволновые характеристики в полосе пропускания и в полосе задерживания	551
XIV.6. Использование методов Фурье	559
XIV.7. Аппроксимация полубесконечными отрезками	565
XIV.8. Использование теории потенциальной аналогии	567
XIV.9. Линейная фазовая аппроксимация	577
XIV.10. Вариант равноволновой аппроксимирующей функции	591
Глава XV. Синтез во временной области	604
XV.1. Предварительные замечания	604
XV.2. Численные методы, упрощающие связь между временной и частотной областями	608
XV.3. Определение импульсной характеристики	620
XV.4. Общие соображения о синтезе импульсной характеристики	633
XV.5. Синтез импульсной характеристики с помощью метода «стандартных элементов»	636
XV.6. Синтез импульсной характеристики методом Фурье	653
XV.7. Интерпретация метода Фурье	662
XV.8. Синтез цепей задержки	671
Приложения	674
Приложение 1. Задачи	674
Приложение 2. О включении дополнительных множителей, обеспечивающих положительность всех коэффициентов	707
Литература	715

Э. А. Гиллемин

СИНТЕЗ ПАССИВНЫХ ЦЕПЕЙ (перевод с англ.)

Отв. ред. *М. М. Айзинов*

Редактор *М. М. Каль*

Техн. редактор *Г. И. Шефер*

Корректор *Л. Н. Лещева*

Сдано в набор 29/1 1970 г. Подписано в печ. 18/VI 1970 г.
 Форм. бум. 60 × 90^{1/16} 45,0 печ. л. Тираж 7000 экз. 45,0 усл.-п. л.
 44,21 уч.-изд. л. Цена 3 руб. 25 коп. Зак. изд. 13262 Зак. 49
 Издательство «Связь», Москва-центр, Чистопрудный бульвар, 2

SELECTED SERIES