

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

А. Д. КОВАЛЕНКО

ОСНОВЫ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования УССР в качестве учебного пособия для студентов механико-математических факультетов университетов.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«НАУКОВА ДУМКА»
КИЕВ — 1970

В книге кратко излагается теория термоупругости; описываются основные положения и методы термоупругости, необходимые для исследования тепловых напряжений в элементах конструкций при стационарных и нестационарных температурных полях. Приводятся решения ряда задач о тепловых напряжениях в дисках, пластинах, оболочках и телах вращения в квазистатической постановке. Рассматриваются динамические задачи термоупругости, а также связанные задачи термоупругости, учитывающие термоупругие эффекты в процессах деформирования.

Предназначена для студентов механико-математических факультетов университетов, а также для инженерно-технических и научных работников, занимающихся исследованиями в области механики твердых деформируемых тел.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу книги положен специальный курс термоупругости, читавшийся автором в течение последних лет студентам механико-математического факультета Киевского государственного университета им. Т. Г. Шевченко.

Книга посвящена теории термоупругости, основанной на термодинамике необратимых процессов. В ней излагаются основные положения и методы теории термоупругости, включающей теплопроводность, тепловые напряжения, вызванные градиентами температуры, динамические эффекты при резко нестационарных процессах нагрева и термомеханические эффекты, обусловленные процессом деформирования.

Содержание книги отвечает следующему плану: сначала рассматриваются термодинамические основы термоупругости и дается постановка задачи термоупругости для самого общего случая, когда приращение температуры не является малой величиной по сравнению с начальной температурой, а нестационарные процессы деформирования сопровождаются существенными динамическими эффектами и взаимодействием между полями деформации и температуры; затем приводятся основные уравнения квазистатической задачи термоупругости и сообщаются основные сведения по теории стационарной и нестационарной теплопроводности, необходимые для исследования температурных полей и соответствующих им тепловых напряжений в квазистатической и динамической постановках; далее разбираются основные классы квазистатических задач термоупругости (плоская задача термоупругости, задача термоупругости круглых пластин и оболочек вращения, осесимметричная пространственная задача термоупругости); в последних двух главах рассматриваются динамические и связанные задачи термоупругости.

Примеры, приведенные в книге, содержат анализ распределения тепловых напряжений в упругих телах и термомеханических эффектов в зависимости от характера тепловых воздействий.

В книге использованы результаты исследований автора и его сотрудников в области квазистатических и динамических задач термоупругости и теории теплопроводности.

Автор выражает благодарность своим ученикам кандидатам техн. наук В. Т. Гринченко, Л. А. Ильину, Н. А. Лобковой и кандидатам физ.-мат. наук И. Ф. Вовкодаву, В. Г. Карнаухову, И. А. Мотовиловцу, А. Ф. Улитко, оказавшим ему помощь при написании книги.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время теория термоупругости получила существенное развитие в связи с важными проблемами, возникающими при разработке новых конструкций паровых и газовых турбин, реактивных и ракетных двигателей, высокоскоростных самолетов, ядерных реакторов и др. Элементы этих конструкций работают в условиях неравномерного нестационарного нагрева, при котором изменяются физико-механические свойства материалов и возникают градиенты температуры, сопровождающиеся неодинаковым тепловым расширением частей элементов.

Неравномерное тепловое расширение в общем случае не может происходить свободно в сплошном теле; оно вызывает тепловые (термические, температурные) напряжения. Знание величины и характера действия тепловых напряжений необходимо для всестороннего анализа прочности конструкции.

Тепловые напряжения сами по себе и в сочетании с механическими напряжениями от внешних сил могут вызвать появление трещин и разрушение конструкции из материала с повышенной хрупкостью. Некоторые материалы при быстром возникновении напряжений, обусловленном действием резко нестационарного температурного поля, становятся хрупкими и не выдерживают теплового удара. Повторное действие тепловых напряжений приводит к термоусталостному разрушению элементов конструкции. Действие тепловых напряжений может вызвать значительную пластическую деформацию, ведущую к полному или прогрессирующему разрушению конструкции, термовыпучивание тонкостенной конструкции и т. п.

Исследования по термоупругости сначала стимулировались задачами о термоупругих напряжениях в элементах конструкций. Они проводились на основе теории, разработанной Дюамелем (1838) и Нейманом (1841), которые исходили из следующего предположения: полная деформация является суммой упругой деформации, связанной с напряжениями обычными соотношениями, и чисто теплового расширения, соответствующего известному из классической теории теплопроводности температурному полю.

С принципиальной точки зрения теория Дюамеля — Неймана для нестационарных тепловых и механических воздействий оказалась ограниченной: она не позволяет строго описать движение упругого

тела, связанное с его тепловым состоянием. При определенных условиях нестационарный нагрев сопровождается динамическими эффектами в конструкции.

В общем случае изменение температуры тела происходит не только вследствие подвода тепла от внешних источников, но и в результате самого процесса деформирования. При деформировании тела от механических или тепловых воздействий, протекающих с большой скоростью, возникает так называемый эффект связанности, обусловленный взаимодействием полей деформации и температуры. Он проявляется в образовании и движении тепловых потоков внутри тела, возникновении связанных упругих и тепловых волн, термоупругом рассеянии энергии и т. п.

Последовательное рассмотрение процессов упругого деформирования и теплопроводности в их взаимосвязи возможно только на основе термодинамических соображений. Томсон (1855) впервые применил основные законы термодинамики для изучения свойств упругого тела. Ряд исследователей [Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц (1953) и др.] с помощью методов классической термодинамики получили связанные уравнения термоупругости. Однако в рамках классической термодинамики строгий анализ справедлив лишь для изотермического и адиабатического обратимых процессов деформирования. Реальный процесс деформирования, неразрывно связанный с необратимым процессом теплопроводности, является в общем случае также необратимым. Термодинамика необратимых процессов, разработанная в последние годы, позволила более строго поставить задачу о необратимом процессе деформирования и дать единую трактовку механических и тепловых процессов, нашедшую отражение в работах Био (1956), Чедвика (1960), Боли и Уэйнера (1960) и др. В связи с этим более четко определилась теория термоупругости, обобщающая классическую теорию упругости и теорию теплопроводности. Она охватывает следующие явления: перенос тепла теплопроводностью в теле при стационарном и нестационарном теплообмене между ним и внешней средой; термоупругие напряжения, вызванные градиентами температуры; динамические эффекты при резко нестационарных процессах нагрева и, в частности, термоупругие колебания тонкостенных конструкций при тепловом ударе; термомеханические эффекты, обусловленные взаимодействием полей деформации и температуры.

Основное положение термодинамики необратимых процессов, вытекающее из предположения о локальном термодинамическом равновесии, заключается в том, что первый и второй законы классической термодинамики справедливы и для локально равновесных макроскопических частей системы. Для математического выражения второго закона термодинамики в случае твердых деформируемых тел, состояние которых определяется большим числом независимых переменных, удобной является формулировка, разработанная Н. Н. Шиллером (1897—1901), Каратеодори (1909) и Т. А. Афа-

насьевой-Эренфест (1925—1928). В этой формулировке устанавливается общий эмпирический принцип о невозможности определенных процессов — принцип адиабатической недостижимости. Принципы локального термодинамического равновесия и адиабатической недостижимости позволили использовать разработанный Гиббсом (1875—1878) метод термодинамических функций для вывода соотношений между напряжениями и деформациями, выражений для свободной энергии, внутренней энергии, энтропии и связанного уравнения теплопроводности.

В теории термоупругости обычно накладывается ограничение на величину термического возмущения: приращение температуры предполагается малым по сравнению с начальной абсолютной температурой. Снятие этого ограничения не нарушает предположения о малости деформаций, но приводит к появлению нелинейных членов в связанных уравнениях термоупругости. Возможно построение единой теории термоупругости без указанного ограничения в рамках предположения о малости деформаций, учитывающей зависимость упругих и термических коэффициентов от температуры. В общем случае она является нелинейной теорией связанной термоупругости и в качестве частных случаев охватывает как линейную теорию связанной термоупругости при малом термическом возмущении, так и теорию несвязанной термоупругости при большом термическом возмущении, использующую линейные уравнения движения и нелинейное уравнение теплопроводности.

В последнее время приобретает значение развитие теории конечных термоупругих деформаций. Термодинамические основы нелинейной теории упругости при конечных деформациях, учитывающей тепловые и другие физико-химические эффекты, разработаны Л. И. Седовым (1962). В нашей книге рассматривается теория термоупругости при малых деформациях.

Задача термоупругости в квазистатической постановке, когда не учитываются инерционные члены в уравнениях движения и связывающий член в уравнении теплопроводности, имеет наибольшее практическое значение; при обычных условиях теплообмена динамические эффекты, обусловленные нестационарным нагревом, и тепловые потоки, образующиеся вследствие деформации, настолько невелики, что соответствующие им члены в уравнениях могут быть отброшены, и система уравнений распадается на обычное уравнение нестационарной теплопроводности и уравнения, описывающие задачу о термоупругих напряжениях при заданном температурном поле.

Представление общего решения квазистатической задачи термоупругости в форме, удобной для практического применения, предложил П. Ф. Папкович (1932—1937). В этой форме решение однородного уравнения для вектора перемещения содержит произвольные вектор и скаляр, а частное решение неоднородного уравнения, соответствующего заданному температурному полю, определяется

через скалярную функцию, получившую название термоупругого потенциала перемещений, которая удовлетворяет уравнению Пуассона.

Первым этапом решения квазистатической задачи термоупругости является определение соответствующего температурного поля методами теории теплопроводности, систематическое изложение которых можно найти в монографиях А. В. Лыкова, Карслоу и Егера и др.

В разработке методов решения отдельных квазистатических задач термоупругости достигнут значительный прогресс. Результаты этих исследований изложены в монографиях А. Н. Динника, Н. Н. Лебедева, В. М. Майзеля, Мелана и Паркуса, Паркуса, Боли и Уэйнера и др. Решения более сложных квазистатических задач термоупругости, учитывающих действие источников тепла, разрывные граничные тепловые воздействия и т. п., содержатся в монографиях Новацкого.

Важными для практики квазистатическими задачами термоупругости являются плоская задача термоупругости, термоупругость круглых пластин и оболочек вращения и осесимметричная задача термоупругости.

Постановка плоской задачи термоупругости имеет особенности по сравнению с плоской задачей изотермической теории упругости, связанные с характером температурного поля. Плоское деформированное состояние вызывается двумерным (плоским) температурным полем. Плоское напряженное состояние в рамках пространственной теории упругости может существовать при пространственном температурном поле, удовлетворяющем определенному условию. При произвольном плоском температурном поле в тонкой пластине возникает напряженное состояние, мало отличающееся от плоского напряженного состояния.

Формулировка плоской задачи термоупругости в напряжениях должна учитывать условия однозначности перемещений; в связи с этим случай стационарного температурного поля для многосвязных плоских или цилиндрических тел требует специального рассмотрения. Н. И. Мухелишвили (1916), используя теорию функций комплексного переменного, выяснил связь многозначности перемещений с тепловыми напряжениями и установил аналогию между плоской задачей термоупругости для многосвязных тел при стационарном температурном поле и соответствующей плоской задачей изотермической теории упругости с дислокациями. Комплексное представление позволяет также более сжато и четко сформулировать условия отсутствия тепловых напряжений в многосвязном теле при стационарном температурном поле.

Теория термоупругости тонких пластин и оболочек, как и соответствующая изотермическая теория, основана на гипотезе о неизменяемости нормального элемента и на предположении о двумерном напряженном состоянии, аналогичном плоскому напряженному

состоянию. При резко нестационарном пространственном температурном поле закон изменения чисто тепловой деформации по толщине тонкой пластины или оболочки существенно отличается от линейного, поэтому гипотеза о неизменяемости нормального элемента в общем случае не соответствует линейному закону изменения тепловых напряжений по толщине. Применение обобщенных чисто тепловых деформаций позволяет свести задачу термоупругости для тонкостенной конструкции при объемном температурном поле к двумерной задаче изотермической теории пластин и оболочек.

На основе современного состояния теории круглых пластин малого прогиба можно изучить особенности термоупругого деформирования пластин, обусловленного пространственным температурным полем, влияние теплового растяжения пластины на ее тепловой изгиб, исследовать тепловые напряжения в пластинах переменной толщины, в неоднородных пластинах при изменении упругих свойств материала по радиусу и толщине и др.

При разработке теории тепловых напряжений в тонких оболочках используются результаты изотермической теории оболочек, содержащиеся в известных монографиях А. Л. Гольденвейзера, А. И. Лурье, В. В. Новожилова и др. Для оболочек вращения с постоянной кривизной меридиана (цилиндрической, конической, сферической, торообразной) при осесимметричном температурном поле решения получаются в элементарных и специальных функциях, удобных для анализа тепловых напряжений при разных граничных условиях.

Осесимметричная задача разработана наиболее полно по сравнению с другими задачами пространственной термоупругости. Характерные математические трудности, связанные с решением этой задачи, можно установить при исследовании тепловых напряжений в толстостенной сферической оболочке и в коротком сплошном цилиндре. Задача о тепловых напряжениях в толстостенной сферической оболочке является типичной задачей, решаемой с помощью классических методов разложения переменных и представления величин, входящих в граничные условия, в виде рядов по полной ортогональной системе функций. Задача о тепловых напряжениях в коротком цилиндре вводит читателя в круг идей, реализуемых при исследовании тела вращения, для которого невозможно представить граничные значения искомых величин в рядах по полной ортогональной системе функций на всей его поверхности. Применяются в основном два метода решения такой задачи: метод однородных решений, разработанный А. И. Лурье (1947) и В. К. Прокоповым, и метод суперпозиции решений для более простых граничных задач, истоки которого содержатся в работах Ляме (1861) и Матье (1890). Использование второго метода в нашей книге позволило изучить термоупругое напряженное состояние тела вращения конечных размеров во всей его области, включая и особые точки.

В связи с анализом работы конструкций, подвергающихся импульсивным тепловым воздействиям, проведены исследования ряда динамических задач термоупругости. Задача о тепловом ударе на поверхности полупространства явилась первой динамической задачей термоупругости, исследованной методами операционного исчисления В. И. Даниловской (1950), которая выяснила особенности распространения динамических тепловых напряжений, характерных для рассматриваемого типа задач (тепловой удар на поверхности цилиндра, сферы и др.). Эта задача получила обобщение в двух направлениях: Стернберг и Чакраворти (1959) исследовали динамический эффект, когда изменение температуры поверхности полупространства происходит не скачкообразно, а с конечной скоростью; Муки и Брейер (1962), Дилон (1965) и др. рассмотрели влияние на тепловой удар эффекта связанности полей деформации и температуры.

Теоретическими исследованиями Боли и Барбера (1957), Крауса (1966) и др. установлена возможность возбуждения колебаний тонкостенных элементов конструкций (балок, пластин, оболочек) посредством импульсивных тепловых воздействий. В настоящей книге методы исследования таких задач рассматриваются при изучении осесимметричных колебаний круглой пластины, возбужденных тепловым ударом на ее поверхности.

В последние десять лет на основе термодинамики необратимых процессов начали интенсивно развиваться исследования динамических задач термоупругости с учетом связанности полей деформации и температуры: Дересевич (1957), Чедвик и Снеддон (1958), Чедвик (1960), Новацкий (1966) разработали теорию плоских гармонических термоупругих волн, Новацкий (1959—1965) исследовал задачи о термоупругих сферических и цилиндрических волнах, Локкет (1958), Чедвик и Уиндл (1964) изучили распространение термоупругих волн Релея, Я. С. Подстригач (1960) и Новацкий (1962) развили общие представления о решении связанных задач термоупругости, Я. С. Подстригач и Р. Н. Швец (1964) изучили влияние теплопроводности и теплоотдачи на распространение волн напряжений в пластинах и оболочках и т. п.

При исследовании динамических задач термоупругости учет связанности полей деформации и температуры дает возможность выявить новые качественные особенности протекания процесса деформирования. Анализ сравнительно простого решения одномерной задачи о распространении плоских гармонических термоупругих волн в неограниченном теле позволяет правильно понять основные черты термоупругих явлений при разных частотах волн и параметрах связанности материала. В качестве основных граничных связанных задач термоупругости следует отметить двумерные задачи о распространении плоских термоупругих волн вдоль поверхности полупространства и продольных термоупругих волн в длинном цилиндре.

Построение решений связанных задач термоупругости для тел конечных размеров вызывает значительные математические трудности. Большой интерес поэтому представляют вариационные принципы связанной термоупругости, и в частности вариационный принцип Био, позволяющие развить приближенные методы решения связанных задач динамической теории упругости и нестационарной теплопроводности.

Актуальной является разработка теории нелинейной связанной термоупругости при больших деформациях и больших термических возмущениях.

**ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ТЕРМОУПРУГОСТИ****§ 1.1. Общие замечания и обозначения**

В теории термоупругости рассматривается равновесие упругого твердого тела как термодинамической системы, взаимодействие которой с окружающей средой проявляется лишь в механической работе внешних сил и в теплообмене.

Тело, как и в классической теории упругости, считается идеально упругим, начально однородным, изотропным и испытывающим малые перемещения относительно некоторого исходного состояния.

В термоупругости используются понятия и положения классической теории упругости, связанные с описанием деформаций и напряжений. В сжатом виде они излагаются в § 1.2.

Термодинамическая система характеризуется конечным числом независимых переменных — макроскопических величин, называемых термодинамическими параметрами. Одним из независимых макроскопических параметров термодинамической системы, отличающим ее от механической, является температура как мера интенсивности теплового движения. Температура тела может изменяться вследствие теплообмена с окружающей средой и действия источников тепла и в результате самого процесса деформирования. Связь деформации с температурой устанавливается с помощью термодинамики.

Непосредственное применение законов классической термодинамики для изучения процесса деформирования тела возможно только для обратимых процессов.

Реальный процесс термоупругого деформирования тела, строго говоря, необратимый; его необратимость обуславливается градиентом температуры. Созданная в последние годы макроскопическая теория необратимых процессов позволяет более точно поставить задачу о необратимом процессе деформирования.

Поскольку термодинамика необратимых процессов является обобщением классической термодинамики, то сначала, в § 1.3, рассматриваются основные понятия и положения термодинамики обратимых процессов, а затем, в § 1.4, — основные положения термодинамики необратимых процессов в связи с термоупругим деформированием тела. Далее, в § 1.5 и § 1.6, на основе термодинамических соображений выводятся соотношения между напряжениями и дефор-

мациями. Здесь же в рамках термодинамики линейных необратимых процессов дается вывод уравнения теплопроводности с членом, зависящим от деформации. Эти уравнения вместе с уравнениями движения, соотношениями между деформациями и перемещениями, известными из классической теории упругости, а также начальными и граничными условиями образуют замкнутую систему уравнений, описывающую задачу термоупругости, в которой поля деформации и температуры связаны между собой. Постановка задачи термоупругости рассматривается в § 1.7. В зависимости от характера механических и тепловых воздействий и условий теплообмена в постановку задачи термоупругости вносятся упрощающие предположения. Постановка частных задач термоупругости приводится в § 1.8.

В первых двух главах для упрощения записи применяются индексное обозначение и правило суммирования по повторяющимся индексам. Координаты x, y, z в декартовой системе координат обозначаются через x_1, x_2, x_3 или в более компактной форме через x_i ($i = 1, 2, 3$). Вектор \vec{a} с компонентами a_1, a_2, a_3 обозначается через a_i . В этом смысле вектор перемещения u_i означает вектор с компонентами u_1, u_2, u_3 .

Напряженное и деформированное состояния термоупругого тела определяются соответственно тензорами второго ранга σ_{ij} и ϵ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$); символы $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}$ означают величины с девятью компонентами. Индексы обозначаются малыми латинскими буквами. Повторяющийся индекс называется свободным, а не повторяющийся в одночленном выражении — связанным. Для индексов принимаем следующие соглашения.

1. Повторяющийся индекс означает суммирование от 1 до 3. Таким образом, скалярное произведение двух векторов \vec{a} и \vec{b} можно представить в упрощенном виде

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i, \quad (1.1.1)$$

линейный инвариант тензора напряжения σ_{ij} записать в виде

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii} \quad (1.1.2)$$

и т. п.

Применение для повторяющихся индексов специальной буквы не требуется; для удобства ее можно заменить любой малой латинской буквой.

2. Свободные индексы пробегают значения от 1 до 3. Например, символ σ_{ij} означает любой из девяти компонентов

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{Bmatrix}. \quad (1.1.3)$$

Обозначим через e_{ijk} антисимметричный тензор третьего ранга, компоненты которого в декартовых координатах имеют следующие

значения: 0, когда любые два индекса равны; +1, если ijk — четная перестановка чисел 1, 2, 3, и -1, если ijk — нечетная перестановка этих чисел. Следовательно,

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1, \quad e_{132} = e_{213} = e_{321} = -1. \quad (1.1.4)$$

Если образовать произведение двух таких тензоров $e_{ijk}e_{lmn}$, а затем свернуть результат произведения по индексам k и n (приравнять их), то получим тензор четвертого ранга $e_{ijk}e_{lmk}$, компоненты которого имеют следующие значения: 0 при $i = j$ или $l = m$; +1, когда ij и lm — одни и те же перестановки одних и тех же двух чисел ($i = l$ и $j = m$, но $i \neq j$); -1, когда ij и lm представляют собой противоположные перестановки одних и тех же двух чисел ($i = m$ и $j = l$, но $i \neq j$). Этот результат записывается в виде

$$e_{ijk}e_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}, \quad (1.1.5)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, имеющий следующие значения:

$$\delta_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1. \quad (1.1.6)$$

С помощью тензора e_{ijk} можно записать компоненты вектора

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b},$$

где косой крест обозначает векторное произведение, в виде

$$c_i = e_{ijk}a_jb_k, \quad (1.1.7)$$

или в развернутом обозначении $c_1 = a_2b_3 - a_3b_2$, $c_2 = a_3b_1 - a_1b_3$, $c_3 = a_1b_2 - a_2b_1$.

Дифференцирование по координате обозначается запятой на уровне индексов, после которой следует индексное обозначение этой координаты. Например,

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, 3); \quad (1.1.8)$$

$$e_{ij,kl} = \frac{\partial^2 e_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3). \quad (1.1.9)$$

Частные производные по времени обозначаются точками сверху. Например,

$$\ddot{u}_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.1.10)$$

Начиная с третьей главы индексное обозначение и правило суммирования по повторяющимся индексам почти не применяются. Все формулы пишутся в развернутом виде.

Координаты x_1, x_2, x_3 обозначаются соответственно через x, y, z ; эти же буквы применяются в качестве индексов для компонентов тензоров напряжения и деформации и вектора перемещения. Например, вместо $\sigma_{11}, \dots, \sigma_{12}, \dots, \epsilon_{11}, \dots, \epsilon_{12}, \dots$ пишут соответственно σ_x, \dots

..., σ_{xy} , ..., ε_x , ..., ε_{xy} , ..., а вместо u_1, u_2, u_3 — соответственно u_x, u_y, u_z .

Обозначения с аналогичными индексами применяются для компонентов тензоров напряжения и деформации и вектора перемещения в криволинейных координатах. Другие обозначения приводятся по ходу изложения.

§ 1.2. Деформации. Уравнения равновесия (движения). Работа деформации.

В настоящем параграфе рассмотрим в сжатой форме основные положения механики сплошной среды [18, 31, 47, 56, 57], которые устанавливаются в классической теории упругости и используются в термоупругости. Предполагаем, что перемещения и их производные — малые величины.

Дифференцируя вектор перемещения u_i по координате x_j , получаем тензор второго ранга $u_{i,j}$, который можно представить в виде суммы симметричного ε_{ij} и антисимметричного ω_{ij} тензоров

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}. \quad (1.2.1)$$

Симметричный тензор

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.2.2)$$

называется тензором деформации.

Антисимметричный тензор

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (1.2.3)$$

при обозначениях

$$\omega_1 = \omega_{32} = -\omega_{23}, \quad \omega_2 = \omega_{13} = -\omega_{31}, \quad \omega_3 = \omega_{21} = -\omega_{12}$$

имеет таблицу компонентов

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.2.4)$$

т. е. определяется тремя величинами ω_k ($k = 1, 2, 3$), являющимися компонентами аксиального вектора $\vec{\omega}$. Вектор $\vec{\omega}$ называется вектором поворота; его компонент ω_k равен углу поворота бесконечно малого элемента объема тела вокруг оси x_k .

Применяя тензор e_{ijk} (см. § 1.1), можно установить следующую зависимость между вектором поворота ω_k и антисимметричным тензором ω_{ij} :

$$\omega_k = \frac{1}{2} e_{kji} \omega_{ij}. \quad (1.2.5)$$

Умножая обе части уравнения (1.2.5) на e_{rsk} и используя тождество (1.1.5), получаем зависимость

$$\omega_{sr} = e_{rsk}\omega_k. \quad (1.2.6)$$

Рассмотрим ограниченную поверхностью Ω некоторый объем V упругого тела. Этот объем находится под действием внешних объемных и поверхностных сил.

На элемент объема dV действует объемная сила $\vec{F}dV$, где \vec{F} — объемная сила, отнесенная к единице объема. Пусть положение элемента поверхности $d\Omega$ в некоторой точке задается единичным вектором \vec{n} внешней нормали к поверхности Ω . На элемент поверхности $d\Omega$ действует поверхностная сила $\vec{f}d\Omega$, где \vec{f} — поверхностная сила, отнесенная к единице площади поверхности, или напряжение.

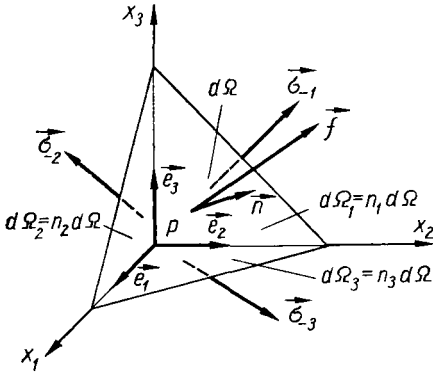


Рис. 1.

Выделим в точке P элемент объема в форме бесконечно малого тетраэдра, три грани которого расположены в координатных плоскостях, а четвертая грань площадью $d\Omega$ имеет внешнюю нормаль \vec{n} (рис. 1).

Условие равновесия всех сил, действующих на тетраэдр, дает уравнение (рис. 1)

$$\vec{f} + \vec{\sigma}_{-j}n_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3),$$

которое в соответствии с равенством $\vec{\sigma}_{-j} = -\vec{\sigma}_j$ имеет вид

$$\vec{f} = \vec{\sigma}_j n_j \quad (j = 1, 2, 3), \quad (1.2.7)$$

где $\vec{\sigma}_j$ — векторы напряжений на площадках, внешние нормали которых совпадают с положительными направлениями координатных осей x_j ; $\vec{\sigma}_{-j}$ — векторы напряжений на площадках, внешние нормали которых противоположны положительным направлениям координатных осей; n_j — компоненты единичного вектора \vec{n} , равные косинусам углов между вектором \vec{n} и осями x_j .

При рассмотрении равновесия тетраэдра объемные силы не учитываются, так как они являются величинами более высокого порядка малости.

Пусть разложения векторов напряжений \vec{f} и $\vec{\sigma}_j$ по единичным векторам \vec{e}_i координатных осей x_i определяются выражениями

$$\vec{f} = \vec{e}_i f_i, \quad \vec{\sigma}_j = \vec{e}_i \sigma_{ij}, \quad (1.2.8)$$

где f_i — компоненты вектора напряжения на элементе поверхности, внешняя нормаль которого задана единичным вектором \vec{n} ; σ_{ij} — компоненты тензора напряжения.

Принимая во внимание выражение (1.2.8), векторное равенство (1.2.7) можно представить тремя скалярными

$$f_i = \sigma_{ij}n_j \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1.2.9)$$

Рассмотрим условия равновесия произвольного объема V тела, ограниченного поверхностью Ω .

Приравнявая нулю главный вектор и главный момент (относительно какой-либо точки) внешних объемных и поверхностных сил, получаем следующие уравнения:

$$\int_V F_i dV + \int_{\Omega} f_i d\Omega = 0; \quad (1.2.10)$$

$$\int_V e_{ijk}x_j F_k dV + \int_{\Omega} e_{ijk}x_j f_k d\Omega = 0, \quad (1.2.11)$$

где x_j — радиус-вектор точки приложения силы.

Поверхностные интегралы, входящие в уравнения (1.2.10) и (1.2.11), преобразуем в объемные. Это преобразование выполняем с помощью формулы Остроградского — Гаусса, которую здесь и в дальнейшем применяем в виде

$$\int_{\Omega} A_i n_i d\Omega = \int_V A_{i,i} dV. \quad (1.2.12)$$

Левая часть формулы (1.2.12) является потоком вектора \vec{A} через замкнутую поверхность Ω , а правая — интегралом от дивергенции вектора \vec{A} , распространенным на объем V , заключенный внутри этой поверхности.

Заменяя f_i его выражением (1.2.9) и применяя формулу (1.2.12), находим

$$\int_{\Omega} f_i d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}n_j d\Omega = \int_V \sigma_{ij,j} dV; \quad (1.2.13)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e_{ijk}x_j f_k d\Omega &= \int_{\Omega} e_{ijk}x_j \sigma_{kl}n_l d\Omega = \int_V (e_{ijk}x_j \sigma_{kl})_{,l} dV = \\ &= \int_V e_{ijk} \sigma_{kl} dV + \int_V e_{ijk}x_j \sigma_{kl,l} dV = 0. \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

При выводе равенства (1.2.14) учитываем, что $x_{j,l} = \delta_{jl}$ и $\delta_{jl}\sigma_{kl} = \sigma_{kj}$, где δ_{jl} — символ Кронекера.

Подставляя выражения (1.2.13) и (1.2.14) для поверхностных интегралов соответственно в уравнения (1.2.10) и (1.2.11), находим

$$\int_V (\sigma_{ij,i} + F_i) dV = 0; \quad (1.2.15)$$

$$\int_V e_{ijk} [\sigma_{kj} + x_j (\sigma_{kl,l} + F_k)] dV = 0. \quad (1.2.16)$$

В силу произвольности объема V из уравнения (1.2.15) получаем следующих три уравнения равновесия:

$$\sigma_{ij,i} + F_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.2.17)$$

а из уравнений (1.2.16) и (1.2.17) имеем

$$\sigma_{kj} = \sigma_{jk}. \quad (1.2.18)$$

Таким образом, тензор напряжения является симметричным тензором.

На основании (1.2.18) второе выражение (1.2.8) можно представить также в виде

$$\vec{\sigma}_i = \vec{e}_j \sigma_{ij}. \quad (1.2.19)$$

В системе декартовых координат тензор напряжения определяется таблицей (1.1.3) своих компонентов. Диагональные элементы этой таблицы являются нормальными напряжениями, а недиагональные — касательными на площадках, перпендикулярных к координатным осям (рис. 2).

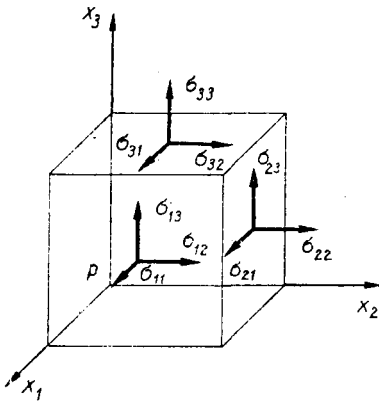


Рис. 2.

В случае движения точек тела в соответствии с принципом Даламбера можно из уравнений равновесия (1.2.17) получить, присоединяя к объемным силам F_i силы инерции — $\rho \ddot{u}_i$, где ρ — плотность, уравнения движения:

$$\sigma_{ij,i} + F_i = \rho \ddot{u}_i. \quad (1.2.20)$$

В заключение рассмотрим работу внешних объемных и поверхностных сил, которую надо затратить для сообщения телу перемещений du_i :

$$dL = \int_V F_i du_i dV + \int_{\Omega} f_i du_i d\Omega. \quad (1.2.21)$$

Учитывая выражение (1.2.9) и преобразуя поверхностный интеграл по формуле (1.2.12) в объемный, получаем

$$dL = \int_V [(\sigma_{ij,i} + F_i) du_i + \sigma_{ij} du_{i,j}] dV. \quad (1.2.22)$$

Принимая во внимание уравнения равновесия (1.2.17) и тождество (1.2.1), находим

$$dL = \int_V dW dV = \int_V \sigma_{ij} d(\epsilon_{ij} + \omega_{ij}) dV = \int_V \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dV. \quad (1.2.23)$$

Здесь $\sigma_{ij} d\omega_{ij} = 0$, так как σ_{ij} — симметричный, а ω_{ij} — антисимметричный тензор.

Величина

$$dW = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (1.2.24)$$

является приращением удельной работы деформации.

Из выражения (1.2.23) следует, что приращение работы внешних сил равно приращению работы деформации. Величина

$$dW^* = \epsilon_{ij} d\sigma_{ij} \quad (1.2.25)$$

есть приращение удельной дополнительной работы деформации. Таким образом, получаем выражение для удельной работы деформации

$$W + W^* = \sigma_{ij} \epsilon_{ij}, \quad (1.2.26)$$

вычисленной в предположении, что в течение всего процесса деформирования компоненты тензора напряжения сохраняются постоянными и равными своим окончательным значениям. Если точки тела находятся в движении, то, рассматривая скорость работы внешних сил (кроме сил инерции)

$$\dot{L} = \int_V F_i \dot{u}_i dV + \int_{\Omega} f_i \dot{u}_i d\Omega \quad (1.2.27)$$

и выполняя аналогичные преобразования с учетом уравнения движения (1.2.20), находим

$$\dot{L} = \int_V [(\sigma_{ij,j} + F_i) \dot{u}_i + \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j}] dV = \rho \int_V \ddot{u}_i \dot{u}_i dV + \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV,$$

или

$$\dot{L} - \dot{K} = \int_V \dot{W} dV, \quad (1.2.28)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}; \\ \dot{K} &= \frac{\rho}{2} \int_V \dot{u}_i \dot{u}_i dV. \end{aligned} \quad (1.2.29)$$

Из уравнения (1.2.28) следует, что разность между работой \dot{L} , совершаемой в единицу времени приложенными к телу внешними силами, и скоростью возрастания его кинетической энергии равна

мо от различия или равенства их внешних параметров (свойство транзитивности термодинамического равновесия). Из этого следует, что состояние термодинамического равновесия системы определяется не только ее внешними параметрами, но и еще одной величиной, характеризующей состояние внутреннего движения системы. Эта величина, имеющая одно и то же значение для всех систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, называется температурой. Положение о существовании температуры как особой функции состояния равновесной системы называется нулевым законом термодинамики.

При термодинамическом равновесии все внутренние параметры системы являются функциями внешних параметров и температуры, и, таким образом, равновесное состояние системы определяется внешними параметрами и еще одной величиной — температурой или одним из внутренних параметров.

Если макроскопические свойства системы изменяются со временем, то в такой системе происходит процесс, называемый равновесным, или квазистатическим, когда изменения всех параметров системы происходят физически бесконечно медленно, так что система в каждый момент времени находится в состоянии термодинамического равновесия. Под физически бесконечно медленным изменением какого-либо параметра понимается такое его изменение со временем, когда скорость изменения значительно меньше средней скорости перехода системы в равновесное состояние.

Равновесный процесс является обратимым, т. е. таким, который может пройти в обратном направлении через те же состояния, что и при прямом процессе, не вызвав в окружающей среде никаких изменений.

Процесс, сопровождающийся существенным нарушением равновесного состояния, называется нестатическим, или неравновесным. Характерной особенностью такого процесса является его необратимость, т. е. невозможность возвращения системы в первоначальное состояние без того, чтобы в окружающей среде не произошли какие-либо изменения. В качестве примера необратимого процесса можно указать на процесс теплопередачи при конечной разности температур.

Полная энергия системы состоит из внешней — кинетической энергии K , связанной с движением системы как целого или ее макроскопических частей, и внутренней энергии U , являющейся энергией всех видов движения и взаимодействия микрочастиц системы.

Для находящейся в равновесии системы полная энергия совпадает с внутренней, которая является функцией состояния и в равновесном процессе зависит от внешних параметров и температуры.

Взаимодействие термодинамической системы с окружающей средой заключается в обмене энергии между системой и окружающей средой посредством работы и путем передачи тепла.

Работа есть способ передачи энергии, связанный с изменением внешних параметров системы. Количество энергии, полученное системой таким образом, называется также работой и обозначается через L .

Процесс передачи энергии без изменения ее внешних параметров называется теплообменом, а количество энергии, переданное при этом системе, — количеством тепла, которое обозначается через Q .

Ни работа, ни тепло не являются функциями состояния системы, их учитывают только тогда, когда совершается процесс, при котором происходит изменение состояния системы. Если состояние системы изменяется только за счет изменения внешних параметров, а обмен энергией с окружающей средой в форме тепла не происходит, то система называется адиабатически изолированной, или адиабатической. В адиабатической системе работа не зависит от пути перехода от одного состояния системы в другое, а зависит только от начального и конечного состояний системы: при адиабатическом процессе работа совершается лишь за счет изменения энергии системы.

В общем случае адиабатически неизоллированной системы изменение энергии происходит не только за счет макроскопической работы, но также и посредством теплообмена.

На основании закона сохранения энергии первый закон термодинамики, определяющий превращение энергии при механических и тепловых процессах (как обратимых, так и необратимых), для элементарного процесса имеет вид

$$dL + dQ = dK + dU, \quad (1.3.1)$$

т. е. работа, совершенная внешними силами над системой, и количество тепла, переданное системе, расходуется на увеличение кинетической энергии макроскопического движения системы и ее внутренней энергии.

В термодинамике доказано, что в случае обратимого процесса выражение для элемента теплоты можно представить в пфаффовской форме:

$$dQ = X_i dx_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.3.2)$$

где x_i — независимые параметры, определяющие состояние системы, а X_i — функции этих параметров.

Второй закон термодинамики, являющийся обобщением данных опыта, формулируется так: невозможно осуществить вечный двигатель второго рода, т. е. создать машину, которая производила бы работу только за счет подвода тепла от одного или разных тел (без отдачи тепла другим телам). В иной формулировке второго закона термодинамики устанавливается более общий эмпирический принцип о невозможности определенных процессов, позволяющий проще описать математически второй закон термодинамики. Впервые такую формулировку второго закона термодинамики дал в 1898 г. профессор Киевского университета Н. Н. Шиллер [65, 66]. Он привел вывод интегрирующего множителя для dQ , в основном

совпадающий с выводом немецкого математика Каратеодори, который в 1909 г. развил эту формулировку второго закона термодинамики, связав ее с теорией пфаффовых форм [73]. Эта формулировка известна под названием принципа адиабатической недостижимости Каратеодори.

Принцип адиабатической недостижимости вытекает из положения о невозможности создания вечного двигателя второго рода. Действительно, если система переходит из начального состояния 1 в состояние 2, получая при неизменяемости теплообмена ($dQ > 0$) некоторое положительное количество тепла Q , а затем возвращается адиабатически из состояния 2 в первоначальное состояние 1, то в результате такого кругового процесса будет полностью превращено в работу тепло Q , взятое от одних тел без отдачи другим. Так как такой процесс невозможен, то состояние 1 адиабатически недостижимо из состояния 2.

Т. А. Афанасьева-Эренфест, анализируя работу [73] Каратеодори, впервые показала в своих работах [1, 81], что второй закон термодинамики состоит из двух независимых утверждений, из которых первое относится к обратимым, а второе — к нестатическим (необратимым) процессам, и четко установила различие между понятием об адиабатической недостижимости определенного состояния из другого состояния с помощью обратимого процесса и понятием о необратимости термодинамического процесса.

В настоящее время формулировка принципа адиабатической недостижимости состоит из следующих двух частей (см. [2, 40, 72] и др.):

1) в окрестности каждого состояния термодинамической системы существуют такие состояния, которые недостижимы из него адиабатическим обратимым процессом;

2) в окрестности каждого состояния термодинамической системы существуют такие состояния, которые недостижимы из него любым адиабатическим необратимым процессом.

Из первой части формулировки принципа адиабатической недостижимости вытекает существование новой однозначной функции состояния — энтропии S . Действительно, если система адиабатическая, а процесс обратимый, то пфаффова форма (1.3.2) переходит в уравнение Пфаффа

$$dQ = X_i dx_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.3.3)$$

в котором параметры x_i удобно рассматривать как координаты точки n -мерного пространства.

Из теории уравнений Пфаффа с n переменными известна следующая теорема [40]: если уравнение Пфаффа (1.3.3) интегрируемо (т. е. существует интегрирующий множитель выражения dQ), то, перемещаясь из данной точки $P(x_i)$ по кривым, являющимся решениями дифференциального уравнения (1.3.3.), нельзя достичь каждой точки в окрестности точки $P(x_i)$.

Каратеодори доказал [73], что справедлива и обратная теорема: если в окрестности данного состояния, характеризуемого параметрами x_i , существуют состояния с параметрами x_i , которые недостижимы из него с помощью уравнения (1.3.3.), то это уравнение интегрируемо. Наличие же недостижимых точек в случае адиабатического обратимого процесса, описываемого уравнением (1.3.3), установлено на основании обобщения опытных данных.

На основании факта интегрируемости уравнения (1.3.3.) в термодинамике затем доказывается существование полного дифференциала

$$dS = \frac{dQ}{T}, \quad (1.3.4)$$

где S — энтропия; T — абсолютная температура.

Из второй части формулировки принципа адиабатической недостижимости вытекает положение о неуклонном возрастании энтропии в случае адиабатического необратимого процесса; при переходе системы из одного состояния в другое адиабатическим необратимым путем

$$dS > 0. \quad (1.3.5)$$

§ 1.4. Основные положения термодинамики необратимых процессов в связи с термоупругим деформированием твердого тела

При механических и тепловых воздействиях в упругом теле возникают поля перемещений u_i , деформаций ϵ_{ij} и напряжений σ_{ij} , а также температурное поле T . Под механическими понимаются воздействия на тело внешних сил (объемных и поверхностных), а под тепловыми — процессы теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой и выделения или поглощения тепла источниками внутри тела.

Величины u_i , ϵ_{ij} , σ_{ij} и T в общем случае являются функциями координат x_i и времени t . Так как тепло распространяется в твердом теле посредством теплопроводности, то для изучения процесса термоупругого деформирования даже идеально упругого тела должна быть привлечена термодинамика необратимых процессов.

Основные идеи термодинамики необратимых процессов заключаются в понятиях локального равновесия и медленных процессов [2, 16].

Значения термодинамических параметров определяются для внешне выделенной макроскопически малой части тела, которую можно рассматривать в состоянии локального равновесия. Такое обобщение классической термодинамики основано на предположении о том, что равновесное состояние устанавливается прежде всего в макроскопически малых частях системы, когда она в целом еще не находится в равновесии.

Термодинамическая теория необратимого процесса термоупругого деформирования изотропного тела базируется на трех основных положениях.

Первое положение состоит в том, что изменение энтропии за определенный промежуток времени определяется выражением

$$dS = d_e S + d_i S = \frac{dQ}{T} + d_i S, \quad (1.4.1)$$

где $d_e S$ и dQ — соответственно энтропия и тепло, сообщенное системе из окружающей среды; $d_i S$ — энтропия, которая возникает в результате необратимого процесса и является всегда положительной величиной.

Второе положение основано на предположении о локальном термодинамическом равновесии и сводится к тому, что мгновенные значения термодинамических функций (§ 1.5) являются однозначными функциями термодинамических параметров. Из этого вытекает, что основные уравнения классической термодинамики (1.3.1) и (1.3.4) справедливы и для локально равновесных макроскопических частей системы. В термодинамике необратимых процессов [16] исследованы количественные пределы справедливости такого положения. Результаты расчета для газов по термодинамической теории, в которой используются уравнения (1.3.1) и (1.3.4), совпадают с результатами расчета по кинетической теории газов, учитывающей молекулярную природу необратимых процессов. Это позволяет сделать вывод о том, что и в других случаях рассматриваемая термодинамическая теория дает удовлетворительные результаты для широкой области применения.

Вводя в рассмотрение плотность теплового потока (количество тепла, проходящее за единицу времени и отнесенное к единице площади поверхности), представляемого вектором \vec{q} с компонентами q_i , и связывая его со скоростью подводимого удельного тепла \dot{Q}

$$-q_{i,i} = \dot{Q} - \omega_0, \quad (1.4.2)$$

а также заменяя на основании (1.2.28) величину $\dot{L} - \dot{K}$, отнесенную к единице объема тела, скоростью удельной работы деформации

$$\dot{W} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (1.4.3)$$

первый и второй законы термодинамики для изотропного упругого тела можно записать в виде

$$-q_{i,i} + \omega_0 = T \dot{S} = \dot{U} - \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (1.4.4)$$

где S и U — объемные плотности энтропии и внутренней энергии; ω_0 — удельная мощность (количество тепла, производимого за единицу времени в единице объема) источников тепла.

Третье положение является феноменологическим законом, описывающим необратимый процесс теплопроводности,— законом Фурье о пропорциональности вектора теплового потока градиенту температуры

$$q_i = -\lambda_q T_{,i}, \quad (1.4.5)$$

где λ_q — коэффициент теплопроводности. Этот закон установлен в предположении, что скорость распространения тепла бесконечно велика. Уравнение теплопроводности, учитывающее конечность скорости распространения тепла, имеет вид [39]

$$q_i = -\lambda_q T_{,i} - \tau \dot{q}_i, \quad (1.4.6)$$

где τ — время релаксации теплового потока. Для металлов величина τ весьма мала и составляет, например, для алюминия $\tau = 10^{-11}$ сек [39].

На основании уравнений (1.4.4) и (1.4.5) основное положение термодинамики необратимых процессов об образовании энтропии как положительной величины описывается следующим выражением:

$$\dot{S} = -\frac{q_{i,i}}{T} + \frac{w_0}{T} = \dot{S}_e + \dot{S}_i, \quad (1.4.7)$$

где \dot{S}_e — приращение энтропии в единицу времени, обусловленное подводом тепла из окружающей среды и внутренних источников тепла,

$$\dot{S}_e = -\left(\frac{q_i}{T}\right)_{,i} + \frac{w_0}{T}; \quad (1.4.8)$$

\dot{S}_i — локальное образование энтропии в единицу времени в результате необратимого процесса теплопроводности,

$$\dot{S}_i = -\frac{1}{T^2} q_i T_{,i} = \frac{1}{T^2} \cdot \frac{q_i q_i}{\lambda_q} > 0. \quad (1.4.9)$$

§ 1.5. Термодинамические функции.

Уравнения состояния. Уравнение теплопроводности

При исследовании термодинамики деформирования кроме плотности внутренней энергии U и плотности энтропии S вводятся следующие термодинамические функции: плотность свободной энергии

$$F = U - TS \quad (1.5.1)$$

и плотность термодинамического потенциала Гиббса

$$G = F - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (1.5.2)$$

Величины U , F , G — функции состояния, приращения их при изменении состояния упругого тела — полные дифференциалы. Эти функции называются термодинамическими потенциалами.

Исходя из выражения

$$d\dot{U} = TdS + \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}, \quad (1.5.3)$$

с помощью уравнений (1.5.1) и (1.5.2) находим

$$dF = -SdT + \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}; \quad (1.5.4)$$

$$dG = -SdT - \varepsilon_{ij}d\sigma_{ij}. \quad (1.5.5)$$

Так как dU , dF и dG — полные дифференциалы, то

$$\frac{\partial U}{\partial S} = T, \quad \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}; \quad (1.5.6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial T} = -S, \quad \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}; \quad (1.5.7)$$

$$\frac{\partial G}{\partial T} = -S, \quad \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} = -\varepsilon_{ij}. \quad (1.5.8)$$

Напомним физический смысл введенных термодинамических потенциалов. Как видно из уравнений (1.5.3) и (1.5.4), при изотермическом процессе ($dT = 0$) элементарная работа деформации $\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}$ совершается за счет возрастания свободной энергии подобно тому, как при адиабатическом процессе ($dS = 0$) эта работа происходит за счет возрастания внутренней энергии.

Из уравнения (1.5.5) следует, что возрастание дополнительной работы деформации $\varepsilon_{ij}d\sigma_{ij}$ (1.2.25) при $dT = 0$ соответствует убыли термодинамического потенциала Гиббса.

Каждый термодинамический потенциал является функцией 7 из 14 термодинамических параметров σ_{ij} , ε_{ij} , T , S ($i, j = 1, 2, 3$): $U = U(\varepsilon_{ij}, S)$, $F = F(\varepsilon_{ij}, T)$, $G = G(\sigma_{ij}, T)$. Остальные параметры находятся с помощью частных производных (1.5.6) — (1.5.8). Если известен хотя бы один термодинамический потенциал, можно определить остальные.

Для установления соотношений между напряжениями и деформациями необходимо составить выражение для плотности свободной энергии F как функции компонентов тензора деформации ε_{ij} и температуры T .

Пусть тело в исходном недеформированном состоянии имеет температуру $T_0 = \text{const}$. Предполагаем, что приращение температуры $T - T_0$ является таким, при котором чисто тепловое расширение $\int_{T_0}^T \alpha_* dT$ (α_* — истинный коэффициент линейного теплового расширения) имеет величину одного порядка малости по сравнению с ε_{ij} . Это предположение не противоречит основным положениям линейной теории упругости о малости деформаций и позволяет отказаться от ограничения $\frac{T - T_0}{T_0} \ll 1$, которое обычно принимается при изложении термодинамических основ термоупругости [5, 68, 91]. Вместе с тем оно требует учета механической и термической неоднородности,

обусловленной влиянием повышенной температуры. В связи с указанным разлагаем функцию F в ряд Тейлора только по степеням ϵ_{ij} с коэффициентами, зависящими от T .

В качестве независимых термодинамических параметров вместо компонентов тензора деформации целесообразно ввести первые два его инварианта: $I_1 = \epsilon_{kk}$, $I_2 = \epsilon_{ij}\epsilon_{ij}$.

Таким образом, ограничиваясь в разложении F членами не выше второго порядка малости, получаем

$$F(I_1, I_2, T) = F(0, 0, T) + \frac{\partial F(0, 0, T)}{\partial I_1} I_1 + \frac{\partial F(0, 0, T)}{\partial I_2} I_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(0, 0, T)}{\partial I_1^2} I_1^2. \quad (1.5.9)$$

Применяя формулы (1.5.7), находим

$$S(I_1, I_2, T) = -\frac{\partial F(0, 0, T)}{\partial T} - \frac{\partial^2 F(0, 0, T)}{\partial T \partial I_1} I_1 - \frac{\partial^2 F(0, 0, T)}{\partial T \partial I_2} I_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F(0, 0, T)}{\partial T \partial I_1^2} I_1^2; \quad (1.5.10)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F(0, 0, T)}{\partial I_1} \delta_{ij} + 2 \frac{\partial F(0, 0, T)}{\partial I_2} \epsilon_{ij} + \frac{\partial^2 F(0, 0, T)}{\partial^2 I_1^2} \epsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad (1.5.11)$$

при этом принимаем во внимание, что $\frac{\partial}{\partial \epsilon_{ij}} = \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial I_1} = 2\epsilon_{ij} \frac{\partial}{\partial I_2}$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

Определяем функцию $F(0, 0, T)$ через удельную объемную теплоемкость при отсутствии деформации $c_{\epsilon=0}$. Определяя эту величину по известной из термодинамики формуле и учитывая выражение (1.5.10), находим

$$c_{\epsilon=0} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\epsilon=0} = -T \frac{\partial^2 F(0, 0, T)}{\partial T^2},$$

или

$$F(0, 0, T) = - \int_{T_0}^T dT \int_{T_0}^T \frac{c_{\epsilon=0}}{T} dT; \quad (1.5.12)$$

при этом принимаем во внимание следующие условия:

$$S = 0 \text{ и } F = 0 \text{ при } \epsilon_{ij} = 0 \text{ и } T = T_0. \quad (1.5.13)$$

Вводя далее обозначения

$$\frac{\partial^2 F(0, 0, T)}{\partial I_1^2} = \lambda, \quad \frac{\partial F(0, 0, T)}{\partial I_2} = \mu \quad (1.5.14)$$

и полагая в соотношениях (1.5.11) $i = j = k$, определяем при $\delta_{kk} = 3$

$$\epsilon_{kk} = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \left[\sigma_{kk} - 3 \frac{\partial F(0, 0, T)}{\partial I_1} \right]. \quad (1.5.15)$$

При $\sigma_{kk} = 0$ выражение (1.5.15), очевидно, представляет собой относительное изменение единицы объема при свободном тепловом расширении. Следовательно,
$$3 \int_{T_0}^T \alpha_* dT = - \frac{3}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial F(0, 0, T)}{\partial I_1},$$
 где α_* — истинный коэффициент линейного теплового расширения. Отсюда

$$\frac{\partial F(0, 0, T)}{\partial I_1} = -(3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0), \quad (1.5.16)$$

где α_T — средний коэффициент линейного теплового расширения в интервале температуры (T_0, T) , определяемый выражением

$$\alpha_T = \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T \alpha_* dT. \quad (1.5.17)$$

Подставляя величины (1.5.12), (1.5.14) и (1.5.16) в выражения (1.5.9), (1.5.10) и соотношения (1.5.11), (1.5.15), получаем

$$F = \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{kk}^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0) \varepsilon_{kk} - \int_{T_0}^T dT \int_{T_0}^T \frac{c_{\varepsilon=0}}{T} dT; \quad (1.5.18)$$

$$S = -\frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial T} \varepsilon_{kk}^2 - \frac{\partial \mu}{\partial T} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial T} [(3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0)] \varepsilon_{kk} + \int_{T_0}^T \frac{c_{\varepsilon=0}}{T} dT; \quad (1.5.19)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + [\lambda \varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0)] \delta_{ij}, \quad (1.5.20)$$

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\sigma_{kk}}{3K} + 3\alpha_T (T - T_0). \quad (1.5.21)$$

Здесь

$$K = \lambda + \frac{2}{3} \mu, \quad (1.5.22)$$

где λ и μ — коэффициенты Ляме при изотермической деформации, а K — изотермический модуль объемного расширения.

Внося выражение (1.5.21) для ε_{kk} в соотношения (1.5.20) и определяя ε_{ij} , находим соотношение между деформациями и напряжениями в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1 + \nu) \sigma_{ij}}{E} - \nu \frac{\sigma_{kk}}{E} \delta_{ij} + \alpha_T (T - T_0) \delta_{ij}, \quad (1.5.23)$$

где изотермические модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν связаны с изотермическими коэффициентами Ляме следующими зависимостями:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (1.5.24)$$

Из соотношений (1.5.23) видно, что тензор полной деформации ε_{ij} в каждой точке упругого тела складывается из двух частей:

1) тензора деформации

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij}], \quad (1.5.25)$$

возникающей от действия как внешних сил, так и напряжений, которые необходимо приложить для обеспечения сплошности тела при его неравномерном нагреве; компоненты этого тензора связаны с компонентами тензора напряжения обычными соотношениями, вытекающими из обобщенного закона Гука;

2) шарового тензора деформации

$$\varepsilon''_{ij} = \alpha_T (T - T_0) \delta_{ij}, \quad (1.5.26)$$

являющейся чисто тепловым расширением упругого тела при повышении его температуры на $T - T_0$; эта деформация для термически изотропного тела одинакова во всех направлениях.

Принимая во внимание выражение (1.5.18) и соотношения (1.5.21) и (1.5.23), по формуле (1.5.2) находим плотность термодинамического потенциала Гиббса

$$G = -\frac{1+\nu}{2E} \sigma_{ij} \sigma_{ij} + \frac{\nu}{2E} \sigma_{kk}^2 - \alpha_T (T - T_0) \sigma_{kk} - \\ - \frac{3E}{2(1-2\nu)} \alpha_T^2 (T - T_0)^2 - \int_{T_0}^T dT \int_{T_0}^T \frac{c_{\varepsilon=0}}{T} dT, \quad (1.5.27)$$

а затем с помощью первой формулы (1.5.8) устанавливаем связь между удельной объемной теплоемкостью при отсутствии напряжений $c_{\sigma=0}$ и удельной объемной теплоемкостью при отсутствии деформаций $c_{\varepsilon=0}$:

$$c_{\sigma=0} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\sigma=0} = -T \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_{\sigma=0} = \\ = \frac{3}{2} T \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left[\frac{E}{1-2\nu} \alpha_T^2 (T - T_0)^2 \right] + c_{\varepsilon=0}. \quad (1.5.28)$$

Для твердого тела величину $c_{\sigma=0}$ опытным путем более удобно определять, чем $c_{\varepsilon=0}$.

Применяя формулы (1.5.1), (1.5.18) и (1.5.19), находим плотность внутренней энергии

$$U = \frac{1}{2} \left(\lambda - T \frac{\partial \lambda}{\partial T} \right) \varepsilon_{kk}^2 + \left(\mu - T \frac{\partial \mu}{\partial T} \right) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - \\ - \left\{ (3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0) - T \frac{\partial}{\partial T} [(3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0)] \right\} \varepsilon_{kk} + \\ + c_T (T - T_0), \quad (1.5.29)$$

где c_T — средняя удельная теплоемкость при отсутствии деформаций в интервале температуры (T_0, T) ,

$$c_T = \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T c_{\varepsilon=0} dT. \quad (1.5.30)$$

Зная плотность энтропии S и подставляя в уравнение (1.4.4) вместо плотности теплового потока q_i его выражение (1.4.5), находим обобщенное уравнение теплопроводности

$$(\lambda_q T_{,i})_{,i} + \omega_0 = T \dot{S}, \quad (1.5.31)$$

где S определяется выражением (1.5.19).

§ 1.6. Случай малого термического возмущения. Адиабатическая деформация

При малом термическом возмущении, когда $\frac{T - T_0}{T_0} \ll 1$, упругие коэффициенты λ , μ , термические коэффициенты α_T , λ_q и удельные теплоемкости $c_{\sigma=0}$ и $c_{\varepsilon=0}$ можно считать не зависящими от температуры; вместо этих теплоемкостей можно рассматривать удельную теплоемкость соответственно при постоянном тензоре напряжения c_σ и при постоянном тензоре деформации c_ε . В этом случае на основании формулы (1.5.28)

$$c_\sigma - c_\varepsilon = \frac{3E\alpha_T^2 T}{1 - 2\nu} = 3(3\lambda + 2\mu)\alpha_T^2 T, \quad (1.6.1)$$

а выражения (1.5.19) и (1.5.29) и уравнение (1.5.31) принимают вид

$$S = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \varepsilon_{kk} + c_\varepsilon \ln \frac{T}{T_0}; \quad (1.6.2)$$

$$U = \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{kk}^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + (3\lambda + 2\mu)\alpha_T T_0 \varepsilon_{kk} + c_\varepsilon (T - T_0); \quad (1.6.3)$$

$$\lambda_q T_{,ii} + \omega_0 = c_\varepsilon \dot{T} + (3\lambda + 2\mu)\alpha_T T_0 \dot{\varepsilon}_{kk}. \quad (1.6.4)$$

Здесь линейризуем второй член в правой части уравнения (1.6.4), полагая $T \approx T_0$.

Учитывая равенство (1.6.1) при $T = T_0$, уравнение теплопроводности (1.6.4) можно представить в виде

$$\lambda_q T_{,ii} + \omega_0 = c_\varepsilon \dot{T} + \frac{c_\sigma - c_\varepsilon}{3\alpha_T} \dot{\varepsilon}_{kk}. \quad (1.6.5)$$

В отличие от классического уравнения теплопроводности уравнение (1.6.4) или (1.6.5) содержит член, учитывающий эффект объемного расширения. Впервые такое уравнение получено Дюамелем [80], но без строгого термодинамического обоснования.

Совместно явления теплопроводности и упругости в более общей постановке рассмотрел известный русский физик Н. А. Умов [64]. Вывод связанного уравнения теплопроводности методами термодинамики содержится также в работах [5, 31, 68].

Рассмотрим адиабатическую деформацию, при которой плотность энтропии S сохраняется постоянной. Приравнявая в равенстве (1.6.2) плотность энтропии S постоянной, которая на основании условия (1.5.13) равна нулю, определяем

$$T = T_0 \exp \left[- \frac{(3\lambda + 2\mu) \alpha_T \varepsilon_{kk}}{c_\varepsilon} \right],$$

или

$$T - T_0 = \left\{ - \frac{(3\lambda + 2\mu) \alpha_T \varepsilon_{kk}}{c_\varepsilon} + \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha_T^2 \varepsilon_{kk}^2}{2c_\varepsilon^2} - \dots \right\} T_0. \quad (1.6.6)$$

Подставляя выражение (1.6.6) в соотношения (1.5.20) и (1.6.3), с точностью до величин второго порядка малости находим в случае адиабатической деформации соотношения между напряжениями и деформациями

$$\sigma_{ij} = \lambda_S \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (1.6.7)$$

и плотность внутренней энергии

$$U = \frac{\lambda_S}{2} \varepsilon_{kk}^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (1.6.8)$$

где λ_S — адиабатический коэффициент Ляме, связанный с изотермическим коэффициентом Ляме λ по формуле

$$\lambda_S = \lambda + \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha_T^2 T_0}{c_\varepsilon}. \quad (1.6.9)$$

Заметим, что второй коэффициент Ляме μ при адиабатической деформации не изменяется.

§ 1.7. Постановка задачи термоупругости

В общем случае постановка задачи термоупругости заключается в следующем.

Необходимо при заданных механических и тепловых воздействиях определить 16 функций координат x_k и времени t : шесть компонентов тензора напряжения σ_{ij} , шесть компонентов тензора деформации ε_{ij} , три компонента вектора перемещения u_i и температуру T , удовлетворяющих: трем уравнениям движения (1.2.20); шести соотношениям между напряжениями и деформациями (1.5.20) или (1.5.23); шести соотношениям между деформациями и перемещениями (1.2.2); уравнению теплопроводности (1.5.31), при определенных начальных и граничных условиях.

Начальные условия обычно задаются в виде распределений компонентов вектора перемещения u_i , их скоростей \dot{u}_i и температуры T во всей области V упругого тела:

$$u_i = g_i(x_k), \dot{u}_i = h_i(x_k), T = f(x_k) \text{ при } t = 0. \quad (1.7.1)$$

Здесь и дальше обозначения $g_i(x_k)$, $h_i(x_k)$, $f(x_k)$ означают функции всех координат x_k ($k = 1, 2, 3$) в рассматриваемой области.

Граничные условия на поверхности Ω упругого тела, ограничивающей его объем V , складываются из механических и тепловых условий.

Механические граничные условия задаются либо в перемещениях

$$u_i = g_i(x_k, t) \text{ при } t > 0, \quad (1.7.2)$$

либо в напряжениях

$$\sigma_{ij}n_j = f_i(x_k, t) \text{ при } t > 0, \quad (1.7.3)$$

где f_i — компоненты вектора поверхностной силы; n_j — компоненты единичного вектора внешней нормали к поверхности Ω .

В качестве теплового граничного условия применяется одно из граничных условий теории теплопроводности (глава третья). Механические и тепловые граничные условия могут быть также смешанными. На одной части поверхности механические граничные условия могут быть заданы в перемещениях (1.7.2), а на другой — в напряжениях (1.7.3). Тепловое граничное условие на одной части поверхности тела задается, например, температурой (3.2.7), а на другой — законом конвективного теплообмена с окружающей средой (3.2.11).

Система уравнений (1.2.20), (1.5.20) или (1.5.23), (1.2.2) и (1.5.31) при указанных начальных граничных условиях описывает связанную нелинейную задачу термоупругости.

При $\frac{T - T_0}{T_0} \ll 1$ значения упругих и термических коэффициентов и удельных теплоемкостей предполагаются постоянными, вместо уравнения (1.5.31) применяется уравнение теплопроводности (1.6.4), и связанная задача термоупругости становится линейной.

В работе [98] доказывается, что для области V , свободной от объемных сил и источников тепла, решение системы уравнений (1.2.20), (1.5.20), (1.2.2), (1.6.4) при начальных и граничных условиях, заданных через перемещения и температуру, является единственным. Это доказательство можно обобщить и на другие механические и тепловые воздействия и граничные условия.

Составим для этой задачи уравнения движения в перемещениях. Выражая в уравнениях (1.2.20) напряжения через деформации по формуле (1.5.20) и учитывая, что члены, содержащие ε_{kk} и T , сохраняются только при $i = j$, получаем

$$2\mu\varepsilon_{ij,j} + \lambda\varepsilon_{kk,i} + F_i - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0),i - \rho\ddot{u}_i = 0. \quad (1.7.4)$$

В этом уравнении деформации заменяем перемещениями по формуле (1.2.2). Заменяя j немой индексом k и учитывая, что $u_{k,ik} = u_{k,ki}$, находим

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} + F_i - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0)_{,i} - \rho \ddot{u}_i = 0. \quad (1.7.5)$$

Три уравнения (1.7.5) совместно с четвертым уравнением (1.6.4) при определенных начальных и граничных условиях описывают изменение в пространстве и во времени поля деформации и температурного поля. Представим эти уравнения в векторной форме:

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \vec{F} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \text{grad} (T - T_0) - \rho \ddot{\vec{u}} = 0, \quad (1.7.6)$$

$$\nabla^2 T + \frac{w_0}{\lambda_q} - \frac{1}{a} \dot{T} - \frac{(3\lambda + 2\mu) \alpha_T T_0}{\lambda_q} \text{div } \dot{\vec{u}} = 0, \quad (1.7.7)$$

где $a = \frac{\lambda_q}{c_\varepsilon}$ — коэффициент температуропроводности.

§ 1.8. Классификация задач термоупругости

Термоупругая деформация тела, возникающая от нестационарных механических и тепловых воздействий, сопровождается обратным эффектом — изменением его температурного поля.

Задача термоупругости, в которой учитывается указанный эффект, называется связанной динамической задачей термоупругости, или связанной задачей термоупругости. Постановка связанной задачи термоупругости рассмотрена в § 1.7. Система уравнений, описывающая эту задачу, содержит уравнение теплопроводности (1.5.31), которое в общем случае является нелинейным.

При $\frac{T - T_0}{T_0} \ll 1$ уравнение теплопроводности линеаризуется и линейная связанная задача термоупругости сводится к решению системы уравнений (1.7.6) и (1.7.7).

Деформация упругого тела от механических и тепловых воздействий вызывает малое изменение его температуры $T - T_0$, а поэтому учет эффекта связанности при обычных условиях теплообмена имеет значение не столько для задач о тепловых напряжениях, сколько для задач о термоупругом рассеянии энергии.

В задачах, в которых термическое возмущение упругого тела вызывается одной только деформацией от нестационарных механических воздействий, процесс деформирования обычно предполагается адиабатическим. При такой деформации приращение температуры $T - T_0$ на основании уравнения (1.6.6) определяется выражением

$$T - T_0 = - \frac{(3\lambda + 2\mu) \alpha_T T_0}{c_\varepsilon} \text{div } \vec{u}. \quad (1.8.1)$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.7.6), получаем уравнение динамической задачи теории упругости в перемещениях

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda_S + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \vec{F} - \rho \ddot{u} = 0, \quad (1.8.2)$$

где λ_S — адиабатический коэффициент Ляме, определяемый выражением (1.6.9).

Если механические воздействия отсутствуют, а тепловые воздействия медленно изменяются во времени, то в уравнении (1.7.6) можно пренебречь инерционным членом $-\rho \ddot{u}$.

Применяя при $\vec{F} = 0$ и $-\rho \ddot{u} = 0$ оператор div к обеим частям этого уравнения и учитывая, что $\text{div grad} = \nabla^2$, после интегрирования получаем

$$\text{div } \vec{u} = \frac{(3\lambda + 2\mu) \alpha_T}{\lambda + 2\mu} (T - T_0) + \varphi(x_k), \quad (1.8.3)$$

где $\varphi(x_k)$ — гармоническая функция координат x_k .

Подставляя выражение (1.8.3) в уравнение (1.7.7), находим уравнение теплопроводности в виде

$$\nabla^2 T + \frac{w_0}{\lambda_q} - \frac{1}{a} (1 + \varepsilon) \dot{T} = 0, \quad (1.8.4)$$

где

$$\varepsilon = \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha_T^2 T_0}{(\lambda + 2\mu) c_e}. \quad (1.8.5)$$

Задача термоупругости, описываемая уравнением (1.8.2) без инерционного члена $-\rho \ddot{u}$ и уравнением (1.8.4), называется связанной квазистатической задачей термоупругости.

В случае адиабатического процесса деформирования определяем решение уравнения (1.8.2) для вектора перемещения \vec{u} независимо от уравнения теплопроводности, а в случае медленного изменения тепловых воздействий находим решение уравнения теплопроводности (1.8.4) независимо от уравнения для вектора перемещения.

При резко нестационарных тепловых воздействиях в уравнении (1.7.6) при $\vec{F} = 0$ сохраняется член $-\rho \ddot{u}$, но при $\varepsilon \ll 1$ в уравнении (1.7.7) не учитывается член механической связи $-\frac{(3\lambda + 2\mu) \alpha_T T_0}{\lambda_q} \text{div } \dot{u}$.

Задача термоупругости, описываемая двумя уравнениями:

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \text{grad} (T - T_0) - \rho \ddot{u} = 0, \quad (1.8.6)$$

$$\nabla^2 T + \frac{w_0}{\lambda_q} - \frac{1}{a} \dot{T} = 0, \quad (1.8.7)$$

называется несвязанной динамической задачей термоупругости, или просто динамической задачей термоупругости.

При существенном приращении температуры $T - T_0$ коэффициенты λ , μ , α_T в соотношениях (1.5.20) являются функциями T , а следовательно, и функциями координат x_k и времени t . Помня об этом и выполняя преобразования, аналогичные проведенным в § 1.7, находим для такой задачи следующие уравнения движения в перемещениях:

$$\begin{aligned} & \mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} + \mu_{,k}(u_{i,k} + u_{k,i}) + \lambda_{,i} u_{k,k} - \\ & - [(3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0)]_{,i} - \rho \ddot{u}_i = 0. \end{aligned} \quad (1.8.8)$$

Вместо этих трех скалярных уравнений можно записать одно векторное в виде

$$\begin{aligned} & \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + 2 \text{grad } \mu \cdot \Pi_\varepsilon + \text{grad } \lambda \text{ div } \vec{u} - \\ & - \text{grad} [(3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0)] - \rho \ddot{\vec{u}} = 0, \end{aligned} \quad (1.8.9)$$

где $\text{grad } \mu \cdot \Pi_\varepsilon$ — скалярное произведение тензора деформации Π_ε на вектор $\text{grad } \mu$ [28].

Если учесть зависимость λ_q от температуры, то уравнение теплопроводности становится нелинейным.

Задача термоупругости, в которой не учитываются член $-\frac{(3\lambda + 2\mu) \alpha_T T_0}{\lambda_q} \text{div } \vec{u}$ в уравнении (1.7.7) и член $-\rho \ddot{\vec{u}}$ в уравнении (1.7.6), называется несвязанной квазистатической задачей термоупругости, или квазистатической задачей термоупругости.

При стационарном температурном поле задача термоупругости является статической.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ СТАТИЧЕСКОЙ И КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ

§ 2.1. Постановка задачи

В этой главе рассматриваются основные уравнения, необходимые для изучения термоупругого напряженного состояния в случаях статической и квазистатической задач термоупругости.

Напомним, что под квазистатической задачей термоупругости понимается такая задача, в которой не учитываются эффект связанности температурного поля и поля деформаций, а также силы инерции, обусловленные нестационарным температурным полем. Статическая задача термоупругости отличается от квазистатической только тем, что в первом случае температурное поле является стационарным, а во втором — нестационарным. Так как в квазистатической задаче термоупругости тепловые напряжения в упругом теле в рассматриваемый момент времени определяются при известном температурном поле, то время t играет роль параметра.

Первый этап решения статической и квазистатической задач термоупругости заключается в определении температурного поля T . Он сводится к решению уравнения (1.8.7) при определенных тепловых начальном и граничных условиях (глава третья). После этого определяется термоупругое напряженное состояние.

Задача заключается в определении 15 функций σ_{ij} , ε_{ij} , u_i , удовлетворяющих трем уравнениям равновесия (1.2.17), шести соотношениям между напряжениями и деформациями (1.5.20) или (1.5.23) и шести соотношениям между деформациями и перемещениями (1.2.2) при граничных условиях в перемещениях или в напряжениях.

При решении задач термоупругости в качестве основных неизвестных удобно принимать компоненты вектора перемещения u_i или компоненты тензора напряжения σ_{ij} . В соответствии с этим различают, как и в изотермической теории упругости, постановку задачи термоупругости в перемещениях, при которой раньше всех других неизвестных находятся неизвестные u_i , и постановку задачи термоупругости в напряжениях, когда решение задачи начинается с определения неизвестных σ_{ij} . Во всех случаях, если это особо не оговаривается, упругие и термические коэффициенты предполагаются постоянными.

Представление общего решения задачи термоупругости дается в § 2.2 в предложенной П. Ф. Папковичем [51] форме, которая наиболее удобна, так как содержит функции, удовлетворяющие сравнительно простым дифференциальным уравнениям, и имеет функциональный произвол, который можно эффективно использовать при удовлетворении граничных условий.

Постановка задачи термоупругости в напряжениях (§ 2.3) предусматривает кроме случая односвязной также и случай многосвязной области; при этом устанавливаются условия однозначности для перемещений и углов поворота.

Определение тепловых напряжений и перемещений в теле посредством интегрированием соответствующих дифференциальных уравнений при произвольных граничных условиях является сложной задачей. Поэтому большой интерес представляют вариационные принципы термоупругости (§ 2.4), с помощью которых могут быть разработаны приближенные методы решения задач термоупругости, аналогичные известным вариационным методам решения задач изотермической теории упругости [34]: методы, основанные на обобщенном на случай задачи термоупругости вариационном уравнении Лагранжа и выражениях, аппроксимирующих возможные перемещения, и методы, основанные на обобщенном на случай задачи термоупругости принципе минимума энергии деформации и выражениях, аппроксимирующих возможные напряжения.

Один из методов решения задачи термоупругости — метод В. М. Майзеля [41], основанный на обобщении теоремы о взаимности работ, рассматривается в § 2.5.

В конце этой главы (§ 2.6) приводятся уравнения задач термоупругости в цилиндрических и сферических координатах. Составленные уравнения равновесия в перемещениях в цилиндрических координатах учитывают механическую и термическую неоднородности.

§ 2.2. Представление общего решения задачи термоупругости в перемещениях

Для постановки задачи термоупругости в перемещениях используется уравнение (1.7.6). Отбрасывая в нем инерционный член $-\rho \ddot{u}_i$, получаем основное уравнение рассматриваемой задачи:

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \vec{F} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \text{grad}(T - T_0) = 0. \quad (2.2.1)$$

В этом уравнении функция $T - T_0$ предполагается известной из решения соответствующей задачи теплопроводности.

Граничные условия могут быть заданы в перемещениях

$$u_i = g_i(x_k) \quad (2.2.2)$$

или в напряжениях

$$\sigma_{ij}n_j = f_i(x_k). \quad (2.2.3)$$

Условия (2.2.3) в напряжениях с помощью соотношений (1.5.20) и (1.2.2) можно представить также в перемещениях:

$$\{\mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + [\lambda u_{k,k} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0)]\delta_{ij}\}n_j = f_i(x_l). \quad (2.2.4)$$

Общее решение уравнения (2.2.1) имеет вид

$$\vec{u} = \vec{u}^* + \vec{u}^{(F)} + \vec{u}^{(T)}, \quad (2.2.5)$$

где \vec{u}^* — общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (2.2.1); $\vec{u}^{(F)}$ — частное решение неоднородного уравнения (2.2.1) при $T = T_0$; $\vec{u}^{(T)}$ — частное решение его при $\vec{F} = 0$.

Общее решение однородного уравнения \vec{u}^* найдено П. Ф. Папковичем [49—51] в следующем виде:

$$\vec{u}^* = 4(1 - \nu)\vec{B} - \text{grad}(\vec{B} \cdot \vec{r} + B_0), \quad (2.2.6)$$

где r — радиус-вектор; \vec{B} и B_0 — гармонические вектор и скаляр, т. е.

$$\nabla^2 \vec{B} = 0, \quad \nabla^2 B_0 = 0. \quad (2.2.7)$$

Заметим, что без ограничения общности гармонический скаляр B_0 в решении (2.2.6) может быть опущен; однако наличие его в ряде случаев упрощает решение задачи.

Если объемные силы имеют потенциал П:

$$\vec{F} = \text{grad } \Pi, \quad (2.2.8)$$

то частное решение $\vec{u}^{(F)}$ находится в теории упругости [38, 51] в виде

$$\vec{u}^{(F)} = \text{grad } \Phi^{(F)}, \quad (2.2.9)$$

где скалярная функция $\Phi^{(F)}$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \Phi^{(F)} = -\frac{\Pi}{\lambda + 2\mu}. \quad (2.2.10)$$

Сравнение (2.2.8) с температурным членом уравнения (2.2.1) позволяет найти частное решение $\vec{u}^{(T)}$ в таком же виде:

$$\vec{u}^{(T)} = \text{grad } \Phi, \quad (2.2.11)$$

где скалярная функция Φ является решением уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \Phi = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha_T (T - T_0) = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T (T - T_0). \quad (2.2.12)$$

Это частное решение получено одновременно П. Ф. Папковичем [50] и Гудьером [82]. Функция Φ носит название термоупругого потенциала перемещений.

В работах Мелана и Паркуса [42], Новацкого [46] и др. определение термоупругого потенциала перемещений Φ является основным этапом решения задач термоупругости. В этих работах принят следующий метод решения отдельных статических и квазистатических задач термоупругости.

Сначала при известном температурном поле находится частное решение уравнения (2.2.12) для термоупругого потенциала перемещений, первые производные которого по координатам определяют соответствующие частные решения для перемещений. Далее вычисляются отвечающие частным решениям для перемещений тепловые напряжения, которые, вообще говоря, не удовлетворяют заданным условиям на поверхности тела. Затем на это решение накладывается решение соответствующей краевой задачи теории упругости, содержащее необходимое число постоянных интегрирования для удовлетворения граничных условий.

Рассмотренные постановка и представление решения задачи термоупругости в перемещениях справедливы как для односвязных, так и для многосвязных тел; при этом перемещения должны быть однозначными функциями, имеющими непрерывные производные до второго порядка включительно.

В заключение отметим аналогию квазистатической задачи термоупругости и изотермической теории упругости с объемными и поверхностными силами.

Сравнивая уравнения (2.2.1) и (2.2.4) с соответствующими уравнениями изотермической теории упругости ($T = T_0$), можно сделать вывод, что постановка задачи термоупругости в перемещениях сводится к постановке задачи изотермической теории упругости, если рассматривать в качестве вектора объемной силы \vec{F} величину $-(3\lambda + 2\mu) \alpha_T \text{grad}(T - T_0)$, а к заданным внешним поверхностным силам f_i добавить поверхностные силы $(3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0) n_i$.

Указанная аналогия используется при исследовании ряда задач о термоупругих напряжениях в книге С. П. Тимошенко [60] и др.

§ 2.3. Постановка задачи термоупругости в напряжениях

При решении задач термоупругости, в которых граничные условия заданы в напряжениях (2.2.3), удобно пользоваться системой уравнений в напряжениях. Они получаются, если из уравнений (1.2.17) и соотношений (1.5.20) и (1.2.2) исключить деформации и перемещения, выбрав в качестве неизвестных шесть компонентов тензора напряжения σ_{ij} .

Рассмотрим сначала постановку задачи термоупругости в напряжениях для односвязного тела.

Уравнения равновесия (1.2.17) и граничные условия (2.2.3) уже представлены в напряжениях. Деформации при заданном температурном поле определяются через напряжения с помощью соотношений (1.5.23). Для полной формулировки задачи термоупругости в напряжениях необходимо из соотношений (1.2.2) по известным компонентам тензора деформации ϵ_{ij} определить компоненты вектора перемещения u_i . Эти соотношения образуют систему шести неоднородных уравнений в частных производных относительно трех неизвестных функций u_i ; их свободные члены ϵ_{ij} являются однозначными функциями координат x_k , имеющими непрерывные производные до второго порядка.

Для того чтобы можно было определить перемещения u_i , необходимо деформации ϵ_{ij} подчинить некоторым дополнительным условиям. Рассмотрим эти условия.

Равенства (1.2.1) на основании (1.2.6) могут быть представлены в виде

$$u_{i,j} = \epsilon_{ij} + e_{ijk}\omega_k. \quad (2.3.1)$$

Функцию u_i можно определить по трем ее частным производным $u_{i,j}$ только в том случае, если выполняются следующие условия интегрируемости уравнения (2.3.1):

$$e_{pmj}(\epsilon_{ij} + e_{ijk}\omega_k)_{,m} = e_{pmj}\epsilon_{ij,m} + e_{pmj}e_{ijk}\omega_{k,m} = 0. \quad (2.3.2)$$

Используя тождество (1.1.5), второй член правой части равенства (2.3.2) преобразуем к виду

$$e_{pmj}e_{ijk}\omega_{k,m} = (\delta_{pi}\delta_{mk} - \delta_{pk}\delta_{mi})\omega_{k,m} = \delta_{pi}\omega_{k,k} - \omega_{p,i}. \quad (2.3.3)$$

Подставляя выражение (2.3.3) в условия (2.3.2) и учитывая, что дивергенция вектора поворота $\omega_{k,k}$ равна нулю, находим

$$\omega_{p,i} = e_{pmj}\epsilon_{ij,m}. \quad (2.3.4)$$

Задача сводится к отысканию компонента вектора поворота ω_p по трем его заданным производным $\omega_{p,i}$. Используя теперь условия интегрируемости уравнения (2.3.4), получаем

$$e_{qni}e_{pmj}\epsilon_{ij,mn} = 0. \quad (2.3.5)$$

Формула (2.3.5) содержит два свободных индекса p и q и симметрична относительно этих индексов; следовательно, она определяет шесть уравнений, которые называются уравнениями совместности деформаций.

Полагая $p = 3, q = 3$ и $p = 2, q = 3$, получаем из шести уравнений совместности деформаций два типичных уравнения:

$$\epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} = 2\epsilon_{12,12}; \quad (2.3.6)$$

$$\epsilon_{11,23} + \epsilon_{23,11} = \epsilon_{12,13} + \epsilon_{13,12}. \quad (2.3.7)$$

Остальные четыре уравнения получают циклической перестановкой индексов.

При выполнении условий (2.3.5) величины

$$\begin{aligned} du_i &= u_{i,j} dx_j, \\ d\omega_k &= \omega_{k,l} dx_l \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

являются полными дифференциалами.

Используя выражения (2.3.1), (2.3.4) соответственно для производных $u_{i,j}$, $\omega_{k,l}$ и интегрируя равенства (2.3.8), определяем компоненты векторов перемещения u_i и поворота ω_k в точке P :

$$u_i = u_i^0 + \int_{P_0}^P \varepsilon_{ij} d\xi_j + \int_{P_0}^P e_{jik} \omega_k d\xi_j; \quad (2.3.9)$$

$$\omega_k = \omega_k^0 + \int_{P_0}^P e_{kmn} \varepsilon_{ln,m} d\xi_l, \quad (2.3.10)$$

где интегралы берутся по любому пути между фиксированной точкой $P_0 (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ и точкой $P (x_1, x_2, x_3)$ в рассматриваемой области V ; ξ_1, ξ_2, ξ_3 — координаты текущей точки на пути интегрирования, а постоянные интегрирования u_i^0 и ω_k^0 — компоненты векторов перемещения и поворота в точке P_0 .

Интегрируя по частям второй интеграл в правой части уравнения (2.3.9)

$$\begin{aligned} \int_{P_0}^P e_{jik} \omega_k d\xi_j &= - \int_{P_0}^P e_{jik} \omega_k d(x_j - \xi_j) = - e_{jik} (x_j^0 - x_j) \omega_k^0 + \\ &+ \int_{P_0}^P e_{jik} (x_j - \xi_j) d\omega_k \end{aligned}$$

и принимая во внимание второе уравнение (2.3.8) и равенство (2.3.4), представляем уравнение (2.3.9) в виде

$$u_i = u_i^0 - e_{jik} (x_j^0 - x_j) \omega_k^0 + \int_{P_0}^P [\varepsilon_{il} + e_{jik} e_{kmn} (x_j - \xi_j) \varepsilon_{ln,m}] d\xi_l. \quad (2.3.11)$$

Для односвязной области интегралы (2.3.10) и (2.3.11) не зависят от пути интегрирования и, следовательно, представляют собой однозначные функции; при этом перемещения должны иметь непрерывные производные до третьего порядка включительно.

При отсутствии деформации, т. е. при $\varepsilon_{ij} = 0$, формула (2.3.11) определяет малые перемещения тела в точке P относительно точки P_0 как твердого целого:

$$u_i = u_i^0 - e_{jik} (x_j^0 - x_j) \omega_k^0. \quad (2.3.12)$$

Составим уравнения совместности деформаций в напряжениях. Переписываем формулу (2.3.5) в виде

$$\varepsilon_{ij,mn} - \varepsilon_{im,jn} - \varepsilon_{nj,mi} + \varepsilon_{nm,ji} = 0. \quad (2.3.13)$$

Полагая $m = n$, получаем

$$\varepsilon_{ij,nn} - \varepsilon_{in,jn} - \varepsilon_{nj,ni} + \varepsilon_{nn,ji} = 0. \quad (2.3.14)$$

Выражая в уравнении (2.3.14) деформации через напряжения по формуле (1.5.23) и заменяя затем величины $\sigma_{in,jn}$ и $\sigma_{nj,ni}$ на основании уравнения (1.2.17) величинами $-F_{i,j}$ и $-F_{j,i}$, находим

$$(1 + \nu) \sigma_{ij,nn} - \nu \sigma_{kk,nn} \delta_{ij} + \sigma_{nn,ij} + (1 + \nu) (F_{i,j} + F_{j,i}) + E\alpha_T [(T - T_0)_{,nn} \delta_{ij} + (T - T_0)_{,ij}] = 0. \quad (2.3.15)$$

При $i = j$ из уравнения (2.3.15) получаем соотношение

$$(1 - \nu) \sigma_{kk,nn} + (1 + \nu) F_{i,i} + 2E\alpha_T (T - T_0)_{,nn} = 0. \quad (2.3.16)$$

При выводе этого соотношения полагаем $\sigma_{ii,nn} = \sigma_{nn,ii} = \sigma_{kk,nn}$, $(T - T_0)_{,ii} = (T - T_0)_{,nn}$. Подставляя выражение для $\sigma_{kk,nn}$, определяемое из соотношения (2.3.16), в уравнение (2.3.15), находим уравнения совместности деформаций в напряжениях:

$$(1 + \nu) \sigma_{ij,nn} + \sigma_{nn,ij} + \frac{\nu(1 + \nu)}{1 - \nu} F_{n,n} \delta_{ij} + (1 + \nu) (F_{i,j} + F_{j,i}) + E\alpha_T \left[\frac{1 + \nu}{1 - \nu} (T - T_0)_{,nn} \delta_{ij} + (T - T_0)_{,ij} \right] = 0. \quad (2.3.17)$$

Полагая $i = j = 1$ и $i = 1, j = 2$, получаем типичные уравнения:

$$(1 + \nu) \sigma_{11,nn} + \sigma_{nn,11} + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} [(2 - \nu) F_{1,1} + \nu(F_{2,2} + F_{3,3})] + E\alpha_T \left[\frac{1 + \nu}{1 - \nu} (T - T_0)_{,nn} + (T - T_0)_{,11} \right] = 0; \quad (2.3.18)$$

$$(1 + \nu) \sigma_{12,nn} + \sigma_{nn,12} + (1 + \nu) (F_{1,2} + F_{2,1}) + E\alpha_T (T - T_0)_{,12} = 0. \quad (2.3.19)$$

Остальные четыре уравнения получаются посредством циклической перестановки индексов.

Итак, в постановке задачи в напряжениях решение сводится к нахождению шести функций σ_{ij} , удовлетворяющих трем уравнениям равновесия (1.2.17), шести уравнениям совместности деформаций в напряжениях (2.3.17) и трем граничным условиям (2.2.3). Зная напряжения, с помощью соотношений (1.5.23) определяем деформации, а затем из уравнения (2.3.11) — перемещения.

Если рассматриваемая область многосвязна, то функции u_i и ω_k , определяемые уравнениями (2.3.11) и (2.3.10), могут оказаться многозначными.

Дополнительные условия однозначности для функций u_i и ω_k устанавливаются на основании свойств функции, определяемой по ее полному дифференциалу в многосвязной области [45].

Рассмотрим $(N + 1)$ -связную область, которую мысленно посредством N разрезов (внутренних поверхностей) можно превратить в односвязную (рис. 3).

Для однозначности функций u_i и ω_k необходимо и достаточно, чтобы наряду с условиями (2.3.17) выполнялись условия равенства нулю интегралов в уравнениях (2.3.11) и (2.3.10), взятых по каждому замкнутому контуру L_K ($K = 1, \dots, N$), охватывающему только одну K -ю полость.

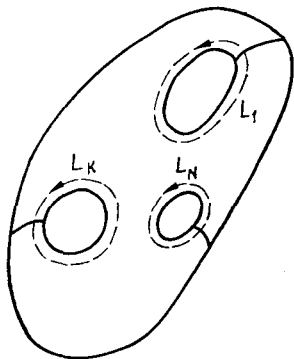


Рис. 3.

Учитывая, что в уравнении (2.3.11) величина $x_j \int_{L_k} e_{jik} e_{kmn} \epsilon_{ln,m} d\xi_l$ равна нулю

на основании условий однозначности функции ω_k , указанные условия однозначности функций u_i и ω_k можно представить в виде

$$\int_{L_k} (\epsilon_{il} - e_{jik} e_{kmn} \xi_j \epsilon_{ln,m}) d\xi_l = 0 \quad (K = 1, \dots, N); \quad (2.3.20)$$

$$\int_{L_k} e_{kmn} \epsilon_{ln,m} d\xi_l = 0 \quad (K = 1, \dots, N). \quad (2.3.21)$$

Эти условия с помощью соотношений (1.5.23) записываются в напряжениях следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{1+\nu}{E} \int_{L_k} (\sigma_{il} - e_{jik} e_{kmn} \xi_j \sigma_{ln,m}) d\xi_l - \\ & - \frac{\nu}{E} \int_{L_k} (\sigma_{pp} \delta_{il} - e_{jik} e_{kml} \xi_j \sigma_{pp,m}) d\xi_l + \\ & + \alpha_T \int_{L_k} [(T - T_0) \delta_{il} - e_{jik} e_{kml} \xi_j (T - T_0),m] d\xi_l = 0 \quad (2.3.22) \\ & (K = 1, \dots, N); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1+\nu}{E} \int_{L_k} e_{kmn} \sigma_{ln,m} d\xi_l - \frac{\nu}{E} \int_{L_k} e_{kml} \sigma_{pp,m} d\xi_l + \\ & + \alpha_T \int_{L_k} e_{kml} (T - T_0),m d\xi_l = 0 \quad (K = 1, \dots, N). \quad (2.3.23) \end{aligned}$$

На основании полученных результатов можно сделать важный вывод, что в одно- или многосвязном теле, свободном от поверхностных и объемных сил, температурное поле, заданное в декартовой системе координат линейной функцией

$$T - T_0 = T_{00} + T_n x_n, \quad (2.3.24)$$

где T_{00} и T_n ($n = 1, 2, 3$) — постоянные, не вызывает тепловых напряжений. Действительно, при $f_i = 0$, $F_i = 0$ и температурном поле (2.3.24) решение $\sigma_{ij} \equiv 0$ удовлетворяет уравнениям равновесия (1.2.17), граничным условиям (2.2.3) и уравнениям совместности деформаций.

В случае многосвязного тела удовлетворяются также условия однозначности (2.3.22) и (2.3.23); при подстановке решения $\sigma_{ij} \equiv 0$ и выражения (2.3.24) и использовании тождества (1.1.5) эти условия переходят в следующие:

$$T_{00} \int_{L_k} d\xi_i + \int_{L_k} T_n \xi_n d\xi_i - \int_{L_k} T_m \xi_m d\xi_i + \int_{L_k} T_i \xi_i d\xi_l = 0,$$

$$\int_{L_k} e_{kmi} T_m d\xi_l = 0,$$

т. е. превращаются в тождества.

§ 2.4. Вариационные принципы термоупругости

Во многих случаях для определения тепловых напряжений эффективно применение вариационных методов. Рассмотрим в связи с этим вариационные принципы термоупругости [83], соответствующие вариационным принципам изотермической теории упругости, предполагая, что тело находится под действием поверхностных f_i и объемных F_i сил при температурном поле $T = T_0$.

Обобщение вариационного уравнения Лагранжа на случай задачи термоупругости. Сообщим телу возможные перемещения δu_i , допускаемые связями и удовлетворяющие геометрическим граничным условиям вида (2.2.2).

При заданных перемещениях удовлетворяются только уравнения совместности деформаций (2.3.5); уравнения равновесия (1.2.17) для напряжений, соответствующих возможным перемещениям, не удовлетворяются. На основании уравнений равновесия для действительно существующих в теле напряжений σ_{ij} справедливо равенство

$$\int_V (\sigma_{ij,i} + F_i) \delta u_i dV = 0, \quad (2.4.1)$$

где интегрирование распространяется по всему объему тела V .

Применяя формулу Остроградского — Гаусса (1.2.12), получаем

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} n_j \delta u_i d\Omega + \int_V F_i \delta u_i dV - \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = 0, \quad (2.4.2)$$

где Ω — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V .

Учитывая вторую формулу (1.5.7) и условия на поверхности (1.2.9), а также принимая во внимание, что при возможных перемещениях температурное поле предполагается неизменным, находим

$$\delta \int_V F dV - \int_V F_i \delta u_i dV - \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega = 0, \quad (2.4.3)$$

где F — плотность свободной энергии, определяемая выражением (1.5.18).

Уравнение (2.4.3) обобщает известное начало возможных перемещений Лагранжа для случая упругого равновесия [34]; приращение плотности энергии деформации

$$\delta W = \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} \quad (2.4.4)$$

заменяется приращением плотности свободной энергии δF .

Обобщение вариационной формулы Кастильяно на случай задачи термоупругости. Подвергнем напряженное состояние рассматриваемого тела такой произвольной вариации, при которой новые компоненты тензора напряжения $\sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij}$ удовлетворяли бы уравнениям равновесия (1.2.17), т. е.

$$\delta \sigma_{i,j} = 0. \quad (2.4.5)$$

При такой вариации напряженного состояния тела должны быть удовлетворены граничные условия (2.2.3). Для удовлетворения этих граничных условий необходимо вариации внешних поверхностных сил δf_i подчинить условию

$$\delta f_i = \delta \sigma_{ij} n_j. \quad (2.4.6)$$

Напряженному состоянию, действительно существующему в теле, соответствуют деформации ϵ_{ij} , определяемые по второй формуле (1.5.8), в которой плотность термодинамического потенциала Гиббса G выражается формулой (1.5.27).

На основании формулы (1.5.8) можно записать следующее равенство:

$$\int_V \left(\epsilon_{ij} + \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \right) \delta \sigma_{ij} dV = 0. \quad (2.4.7)$$

В этом равенстве с помощью соотношений (1.2.2) выражаем компоненты тензора деформации ϵ_{ij} через компоненты вектора перемещения u_i , а затем применяем формулу Остроградского — Гаусса (1.2.12). Замечая при этом, что индексы i и j расположены симметрично, находим

$$\int_{\Omega} u_i \delta \sigma_{ij} n_j d\Omega - \int_{\Omega} u_i \delta \sigma_{ij,i} dV + \int_V \delta G dV = 0. \quad (2.4.8)$$

На основании равенств (2.4.5) и (2.4.6) окончательно получаем

$$\delta \int_V G dV + \int_{\Omega} u_i \delta f_i = 0, \quad (2.4.9)$$

где поверхностный интеграл распространяется на всю поверхность тела Ω . Второй интеграл в уравнении (2.4.9) — работа, произведенная приращениями внешних поверхностных сил δf_i на действительно существующих перемещениях u_i . Это уравнение обобщает известную вариационную формулу Кастильяно [34]; приращение плотности энергии деформации

$$\delta W = \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} \quad (2.4.10)$$

заменяется приращением плотности термодинамического потенциала Гиббса δG , взятой со знаком «минус».

Если при вариации напряженного состояния выполняется условие о неизменяемости внешних поверхностных сил ($\delta f_i = 0$), то

$$\delta \int_V G dV = 0. \quad (2.4.11)$$

Эта формула обобщает известный принцип минимума энергии деформации.

§ 2.5. Обобщение теоремы о взаимности работ на задачу термоупругости

Рассмотрим два напряженных состояния упругого тела, из которых первое характеризуется напряжениями σ_{ij} , деформациями ϵ_{ij} и перемещениями u_i , возникающими под действием внешних сил F_i и f_i и температурного поля T , а второе — напряжениями σ'_{ij} , деформациями ϵ'_{ij} и перемещениями u'_i , возникающими под действием внешних сил F'_i , f'_i и температурного поля T' .

Работа внешних сил первого состояния на перемещениях второго состояния определяется формулой

$$L_{12} = \int_V F_i u'_i dV + \int_{\Omega} f_i u'_i d\Omega. \quad (2.5.1)$$

Заменяя поверхностные силы f_i их выражениями (1.2.9) через напряжения σ_{ij} , преобразуя поверхностный интеграл по формуле Остроградского — Гаусса в объемный и учитывая уравнения равновесия (1.2.17), находим

$$\begin{aligned} L_{12} &= \int_V F_i u'_i dV + \int_V (\sigma_{ij} u'_{i,j})_j dV = \\ &= \int_V (\sigma_{ij,j} + F_i) u'_i dV + \int_V \sigma_{ij} u'_{i,j} dV = \int_V \sigma_{ij} \epsilon'_{ij} dV. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Аналогичным образом можно получить выражение для работы сил второго состояния на перемещениях первого состояния:

$$L_{21} = \int_V F'_i u_i dV + \int_{\Omega} f'_i u_i d\Omega = \int_V \sigma'_{ij} \epsilon_{ij} dV. \quad (2.5.3)$$

Выражая в равенствах (2.5.2.) и (2.5.3) с помощью соотношений (1.5.20) и (1.5.23) напряжения через деформации или, наоборот, деформации через напряжения и сравнивая L_{12} с L_{21} , приходим к следующей формуле:

$$\begin{aligned} L_{12} - L_{21} &= (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \int_V [(T' - T_0) \varepsilon_{kk} - (T - T_0) \varepsilon'_{kk}] dV = \\ &= \alpha_T \int_V [(T' - T_0) \sigma_{kk} - (T - T_0) \sigma'_{kk}] dV. \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Полученная формула обобщает известную теорему о взаимности работ на случай статической и квазистатической задач термоупругости. Это обобщение принадлежит В. М. Майзелю [41].

Воспользуемся теперь формулой (2.5.4) для определения перемещений, возникающих в определенной точке тела при неравномерном нагреве. Для этого предположим, что $F_i = 0$, $f_i = 0$, $T' = T_0$, а система внешних сил F_i и f_i сводится к сосредоточенной единичной силе, приложенной в точке x_m и направленной параллельно оси x_i . Тогда $L_{12} = 0$ и $L_{21} = u_i$.

Пусть при действии такой единичной силы возникают напряжения $\sigma_{ij}^*(x_m, \xi_m)$ и деформации $\varepsilon_{ij}^*(x_m, \xi_m)$ в точке ξ_m области V упругого тела.

В этом случае из формулы (2.5.4) следует формула В. М. Майзеля для перемещения u_i в точке x_m , обусловленного температурным полем T :

$$\begin{aligned} u_i(x_m) &= (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \int_V (T - T_0) \varepsilon_{kk}^*(x_m, \xi_m) dV = \\ &= \alpha_T \int_V (T - T_0) \sigma_{kk}^*(x_m, \xi_m) dV, \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

где $\sigma_{kk}^*(x_m, \xi_m)$ и $\varepsilon_{kk}^*(x_m, \xi_m)$ — суммы диагональных компонентов (первые инварианты) тензора напряжения σ_{ij}^* и тензора деформации ε_{ij}^* .

Формулы (2.5.5) допускают обобщение, когда модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν или коэффициенты Ляме λ и μ зависят от температуры и, следовательно, являются заданными функциями координат; в этом случае они имеют вид

$$\begin{aligned} u_i(x_m) &= \int_V (3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0) \varepsilon_{kk}^*(x_m, \xi_m) dV = \\ &= \int_V \alpha_T (T - T_0) \sigma_{kk}^*(x_m, \xi_m) dV. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Здесь под $\sigma_{kk}^*(x_m, \xi_m)$ и $\varepsilon_{kk}^*(x_m, \xi_m)$ следует понимать суммы диагональных компонентов тензора напряжения σ_{ij}^* и тензора деформа-

ции ε_{ij}^* , соответствующих действию единичной силы на упругое тело, для которого упругие коэффициенты (E , ν или λ , μ) изменяются в зависимости от координат по тому же закону, что и при наличии температурного поля T .

Таким образом, метод решения задачи термоупругости, основанный на теореме взаимности работ, заключается в том, что определение тепловых напряжений, деформаций и перемещений сводится к задаче изотермической теории упругости о напряженном состоянии упругого тела под действием единичной сосредоточенной силы.

При осесимметричной деформации задача термоупругости сводится к задаче о напряженном состоянии равномерно нагретого тела, находящегося под действием сосредоточенных сил, равномерно распределенных вдоль окружности. Применение этого метода рассматривается в § 4.6.

§ 2.6. Уравнения термоупругости в цилиндрических и сферических координатах

Основные уравнения статической и квазистатической задач термоупругости рассматривались выше в декартовых координатах. Однако эти задачи для тел вращения, ограниченных цилиндрическими и сферическими поверхностями, удобно рассматривать в цилиндрических и сферических координатах. Рассмотрим основные уравнения задач термоупругости в этих координатах. Все формулы приведем в развернутом виде, не применяя индексного обозначения и правила суммирования по повторяющимся индексам.

Цилиндрические координаты.

В цилиндрических координатах положение точки P определяется тремя координатами: r , θ , z (рис. 4). Координатными поверхностями являются цилиндры $r = \text{const}$, полуплоскости $\theta = \text{const}$ и плоскости $z = \text{const}$. Декартовы координаты связаны с цилиндрическими соотношениями $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$, $x_3 = z$.

Введем в рассмотрение трехгранник единичных взаимно ортогональных векторов, образующих правую систему: \vec{e}_r — вектор радиуса, \vec{e}_θ — вектор касательной к окружности, \vec{e}_z — вектор обра-

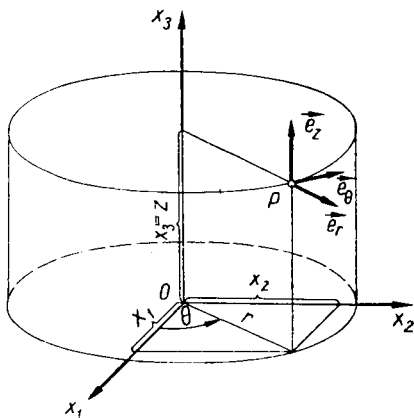


Рис. 4.

зующей. Каждый из единичных векторов направлен в сторону возрастания соответствующей координаты (рис. 4).

Из векторного анализа известно, что основные векторные операции в цилиндрических координатах можно выразить так:

$$\text{grad } \psi = \vec{e}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad (2.6.1)$$

$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (ra_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}; \quad (2.6.2)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} = & \vec{e}_r \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) + \vec{e}_\theta \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) + \\ & + \vec{e}_z \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (ra_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right]; \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (2.6.4)$$

В цилиндрических координатах соотношения между компонентами тензора деформации $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z, \epsilon_{r\theta} = \epsilon_{\theta r}, \epsilon_{rz} = \epsilon_{zr}, \epsilon_{z\theta} = \epsilon_{\theta z}$ и компонентами вектора перемещения u_r, u_θ, u_z имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right); \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \epsilon_{r\theta} = \epsilon_{\theta r} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right]; \\ \epsilon_{rz} = \epsilon_{zr} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right); \\ \epsilon_{z\theta} = \epsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.6.5)$$

Уравнения равновесия принимают такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_r - \sigma_\theta \right) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + F_r &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2\sigma_{r\theta} \right) + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + F_\theta &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \sigma_{rz} \right) + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.6.6)$$

где $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r}, \sigma_{rz} = \sigma_{zr}, \sigma_{z\theta} = \sigma_{\theta z}$ — компоненты тензора напряжения (рис. 5); F_r, F_θ, F_z — компоненты вектора объемной силы \vec{F} .

Соотношения между компонентами тензора напряжения и компонентами тензора деформации на основании (1.5.20) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2\mu\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0); \\ \sigma_\theta &= 2\mu\varepsilon_\theta + \lambda\varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0); \\ \sigma_z &= 2\mu\varepsilon_z + \lambda\varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0); \\ \sigma_{r\theta} &= 2\mu\varepsilon_{r\theta}, \quad \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{z\theta} = 2\mu\varepsilon_{z\theta}, \end{aligned} \right\} \quad (2.6.7)$$

где $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}$.

В соотношениях (2.6.7) коэффициенты Ляме λ и μ и коэффициент линейного теплового расширения α_T являются в общем случае функциями координат.

Подставляя выражение для напряжений (2.6.7) в уравнения равновесия (2.6.6) и принимая во внимание соотношения (2.6.5), находим

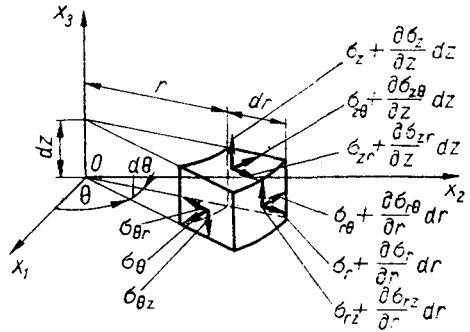


Рис. 5.

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 u_r + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial r} - \mu \frac{u_r}{r^2} - \frac{2\mu}{r^2} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial r} + \\ + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \\ + \varepsilon_{kk} \frac{\partial \lambda}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} [(3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0)] + F_r = 0; \quad (2.6.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 u_\theta + \frac{\lambda + \mu}{r} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial \theta} - \mu \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2\mu}{r^2} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \\ + \frac{\partial \mu}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \\ + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + \frac{\varepsilon_{kk}}{r} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} - \\ - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} [(3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0)] + F_\theta = 0; \quad (2.6.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \\ + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z} + \varepsilon_{kk} \frac{\partial \lambda}{\partial z} - \\ - \frac{\partial}{\partial z} [(3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0)] + F_z = 0. \quad (2.6.10) \end{aligned}$$

Сферические координаты. В сферических координатах положение точки P определяется тремя координатами: r , φ , θ (рис. 6).

Координатными поверхностями в сферической системе координат являются сферы $r = \text{const}$, круговые конусы $\varphi = \text{const}$ и полу-плоскости $\theta = \text{const}$.

Декартовы координаты связаны со сферическими соотношениями

$$x_1 = r \cos \theta \sin \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \varphi.$$

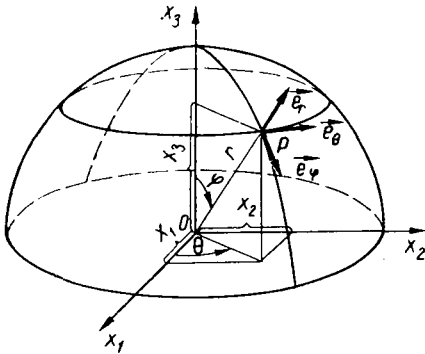


Рис. 6.

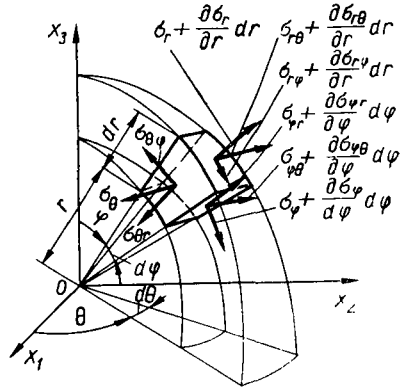


Рис. 7.

Вводя трехгранник единичных взаимно ортогональных векторов $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$ (рис. 6), основные векторные операции в сферических координатах представляем в виде

$$\text{grad } \psi = \vec{e}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r \sin \varphi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad (2.6.11)$$

$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \cdot \frac{\partial (\sin \varphi a_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \cdot \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta}; \quad (2.6.12)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} = & \vec{e}_r \frac{1}{r \sin \varphi} \left[\frac{\partial (a_\theta \sin \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial \theta} \right] + \\ & + \vec{e}_\varphi \left[\frac{1}{r \sin \varphi} \cdot \frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} \right] + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right]; \quad (2.6.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi = & \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) + \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}. \quad (2.6.14) \end{aligned}$$

Обозначая в сферических координатах компоненты тензора напряжения через $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_\theta, \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r}, \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r}, \sigma_{\varphi\theta} = \sigma_{\theta\varphi}$ (рис. 7), компоненты тензора деформации через $\epsilon_r, \epsilon_\varphi, \epsilon_\theta, \epsilon_{r\varphi} = \epsilon_{\varphi r}, \epsilon_{r\theta} = \epsilon_{\theta r}, \epsilon_{\varphi\theta} = \epsilon_{\theta\varphi}$ и компоненты вектора перемещения через u_r, u_φ, u_θ , приводим следующие зависимости:

соотношения между компонентами тензора деформации и компонентами вектора перемещения

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right); \\
 \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\varphi \operatorname{ctg} \varphi + u_r \right); \\
 \varepsilon_{r\varphi} &= \varepsilon_{\varphi r} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi \right) \right]; \\
 \varepsilon_{r\theta} &= \varepsilon_{\theta r} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \right]; \\
 \varepsilon_{\theta\varphi} &= \varepsilon_{\varphi\theta} = \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \cdot \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - u_\theta \operatorname{ctg} \varphi \right);
 \end{aligned} \right\} (2.6.15)$$

уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned}
 &\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \cdot \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \\
 &+ \frac{2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \varphi}{r} + F_r = 0; \\
 &\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \cdot \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \\
 &+ \frac{(\sigma_\varphi - \sigma_\theta) \operatorname{ctg} \varphi + 3\sigma_{r\varphi}}{r} + F_\varphi = 0; \\
 &\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{3\sigma_{r\theta} + 2\sigma_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \varphi}{r} + \\
 &+ F_\theta = 0,
 \end{aligned} \right\} (2.6.16)$$

где F_r, F_φ, F_θ — компоненты вектора объемной силы \vec{F} .

**ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ
И ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ****§ 3.1. Основные способы теплообмена
и методы решения задач теплопроводности**

Температурное поле и поле деформации в твердом теле в общем случае взаимосвязаны. Однако при обычной теплопередаче, происходящей в неравномерно нагретом твердом теле за счет теплового воздействия как окружающей среды, так и внутренних источников тепла, влиянием деформаций тела на распределение в нем температуры можно пренебречь. Это позволяет изучать температурное поле в твердом теле, соответствующее определенным условиям теплопередачи, независимо от деформированного состояния тела.

В твердом теле перенос тепла осуществляется одной только теплопроводностью, имеющей молекулярно-атомный характер. Теплопередача на поверхности тела может происходить тремя способами: теплопроводностью, конвекцией и излучением.

Конвективный перенос тепла осуществляется движением среды (жидкости или газа), омывающей поверхность тела. Конвективный теплообмен возникает в условиях совместного протекания процессов конвективного переноса тепла и переноса тепла теплопроводностью. Перенос тепла излучением происходит между удаленными друг от друга телами посредством электромагнитных волн.

Уравнение теплопроводности, начальное и граничные условия рассматриваются в § 3.2.

Для решения уравнений теплопроводности применяют методы разделения переменных, интегральные преобразования, численные методы и др., которые изложены в монографиях, посвященных теории теплопроводности [20, 39, и др.]. Исследование уравнений теплопроводности содержится в курсах математической физики [62 и др.].

В настоящей главе рассматриваются задачи теплопроводности, имеющие наибольшее практическое значение. В § 3.3. выводятся уравнения, описывающие задачу о нестационарной теплопроводности тонкой пластины, при этом трехмерная задача теплопроводности с помощью аппроксимации температуры по толщине пластины степенным законом сводится к нескольким двумерным задачам. На основе уравнений § 3.3 исследуются частные задачи стационарной и нестационарной теплопроводности для дисков, пластин и цилиндров.

Решения стационарных задач теплопроводности об осесимметричных температурных полях диска и круглой пластины с центральным отверстием и о неосесимметричном плоском температурном поле длинного полого цилиндра приводятся в § 3.4 и 3.5. Полученные решения для диска и круглой пластины учитывают конвективный теплообмен между их боковыми поверхностями и окружающей средой.

В § 3.6 излагаются основные положения и свойства интегрального преобразования Лапласа, которое применяется в качестве основного метода решения нестационарных задач теплопроводности.

Для изучения динамических эффектов, возникающих в упругих телах при резко нестационарных тепловых воздействиях (глава восьмая), в § 3.7 рассматриваются решения одномерных задач о нестационарных температурных полях в полупространстве при внезапном повышении температуры окружающей среды и в неограниченной пластине при внезапном подводе теплового потока к ее поверхности. В этом же параграфе приводится решение задачи о нестационарном температурном поле в неограниченной пластине при разных условиях конвективного теплообмена между ее поверхностями и окружающей средой.

В § 3.8 даются решения задач о нестационарных плоских осесимметричных температурных полях в тонком сплошном диске и длинном сплошном цилиндре при температуре среды, изменяющейся во времени, а также приводится пример расчета распределения температуры в цилиндре при нестационарном конвективном теплообмене.

Нестационарная задача теплопроводности для длинного полого цилиндра, наружная и внутренняя поверхности которого омываются средой с разными, но не изменяющимися во времени температурами, исследуется в § 3.9.

В § 3.10 приводится решение задачи о нестационарном осесимметричном поле полого цилиндра конечной длины, основанное на решениях задач о нестационарной теплопроводности длинного цилиндра (§ 3.9) и неограниченной пластины (§ 3.7). Наконец, в § 3.11 рассматривается задача о нестационарном плоском осесимметричном температурном поле в длинном цилиндре, вызванном линейным источником тепла, расположенным на его оси. Во всех рассмотренных задачах теплопроводности теплофизические характеристики считаются постоянными величинами.

§ 3.2. Уравнение теплопроводности.

Начальное и граничные условия

Уравнение теплопроводности, необходимое для исследования температурных полей, можно получить из уравнения (1.5.31), отбрасывая в нем члены, зависящие от деформаций. Приведем независимый вывод этого уравнения. Количество тепла, полученное единицей объема тела в единицу времени, равно с $\frac{\partial T}{\partial t}$ (с — удельная

объемная теплоемкость тела). Это количество тепла следует приравнять теплу — $\text{div } \vec{q}$ (\vec{q} — вектор плотности теплового потока), которое подводится к единице объема тела в единицу времени посредством теплопроводности. При наличии в теле источников тепла, выделяющих в единице объема в единицу времени количество тепла w_0 , уравнение теплопроводности имеет вид — $\text{div } \vec{q} + w_0 = c \frac{\partial T}{\partial t}$. Учитывая, что на основании формулы (1.4.5)

$$\vec{q} = -\lambda_q \text{grad } T, \quad (3.2.1)$$

уравнение теплопроводности записываем в виде

$$\text{div} (\lambda_q \text{grad } T) + w_0 = c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3.2.2)$$

где λ_q — коэффициент теплопроводности. Так как величины c и λ_q зависят от температуры, а следовательно, от координат, то уравнение (3.2.2), вообще говоря, является нелинейным. В задачах теплопроводности, рассматриваемых в настоящей книге, эти величины считаются постоянными. Тогда уравнение теплопроводности принимает вид

$$\nabla^2 T + \frac{w_0}{\lambda_q} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3.2.3)$$

где $a = \frac{\lambda_q}{c}$ — коэффициент температуропроводности, характеризующий теплоинерционные свойства тел.

Если в теле отсутствуют источники тепла, уравнение теплопроводности переходит в уравнение

$$\nabla^2 T = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3.2.4)$$

Уравнения (3.2.3) и (3.2.4) описывают нестационарные температурные поля. Стационарному температурному полю отвечает уравнение Лапласа

$$\nabla^2 T = 0. \quad (3.2.5)$$

Для однозначности решения уравнения теплопроводности необходимо его дополнить начальным и граничными условиями.

В качестве начального условия задается распределение температуры тела в начальный момент времени ($t = 0$). Это распределение обычно принимается равномерным:

$$T(x_k, 0) = T_0 = \text{const}. \quad (3.2.6)$$

Граничные условия связаны со сложным теплообменом на поверхности тела, где могут иметь место все три способа теплопередачи одновременно.

В теории теплопроводности в качестве основных граничных условий могут быть заданы:

1. Распределение температуры по поверхности тела:

$$T(x_k, t) = f(x_k, t), \quad (3.2.7)$$

где x_k — точка на поверхности тела; $f(x_k, t)$ — заданная функция.

2. Плотность теплового потока через поверхность тела:

$$q(x_k, t) = -\lambda_q \frac{\partial T(x_k, t)}{\partial n}, \quad (3.2.8)$$

где n — внешняя нормаль к поверхности тела в точке x_k .

При теплообмене излучением между поверхностями, имеющими температуры T_1 и T_2 , плотность теплового потока через первую поверхность определяется по формуле

$$q = \sigma_0 \varepsilon_{12} (T_1^4 - T_2^4), \quad (3.2.9)$$

где σ_0 — постоянная Стефана — Больцмана, $\sigma_0 = 5,67 \times 10^{-8} \text{ вт/м}^2 \cdot \text{град}^4$, ε_{12} — постоянный коэффициент, зависящий от характеристик излучения и поглощения поверхностей и от относительного их расположения. Значение ε_{12} в зависимости от состояния и расположения поверхностей можно найти в специальной литературе по тепловому излучению.

В частном случае, когда отсутствует тепловой поток через поверхность (для тела с идеально изолированной поверхностью)

$$\frac{\partial T(x_k, t)}{\partial n} = 0. \quad (3.2.10)$$

3. Температура окружающей среды ϑ и закон конвективного теплообмена между поверхностью тела и средой:

$$-\lambda_q \frac{\partial T(x_k, t)}{\partial n} = \alpha [T(x_k, t) - \vartheta], \quad (3.2.11)$$

где α — коэффициент теплоотдачи, который зависит от термических и физических характеристик поверхности тела и окружающей среды.

Различают теплообмен при свободной конвекции, возникающей при естественном перемещении частиц жидкости вследствие неравномерной ее плотности, обусловленной неравномерным нагревом, и при вынужденной конвекции в результате движения жидкости от механических воздействий (нагнетание жидкости насосом, движение высокоскоростного потока воздуха относительно самолета и др.). Теплообмен при вынужденной конвекции происходит более интенсивно, чем при свободной.

Для конвективного теплообмена важно состояние так называемого пограничного слоя, т. е. области потока, прилегающей к поверхности обтекаемого тела, в пределах которой скорость потока резко изменяется от скорости свободного потока до скорости на поверхности тела. В тонком пограничном слое вблизи поверхности учитываются эффекты вязкости и теплопроводности жидкости.

Течение жидкости в пограничном слое может быть ламинарное, когда ее частицы перемещаются слоями, и турбулентное, при котором эти частицы совершают пульсационные движения, приводящие к интенсивному перемешиванию слоев жидкости. Турбулентное течение возникает в результате потери устойчивости ламинарного течения. Условие перехода ламинарного течения в турбулентное определяется некоторым критическим числом Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\rho v l}{\eta}, \quad (3.2.12)$$

где ρ — плотность жидкости или газа; v — скорость потока; l — характерный размер обтекаемого тела; η — коэффициент динамической вязкости жидкости или газа.

Число Рейнольдса является критерием подобия течения вязкой жидкости. Теплообмен при ламинарном течении осуществляется в основном теплопроводностью, а при турбулентном течении — главным образом за счет переноса тепла пульсационными макроскопическими движениями жидкости.

Коэффициент теплоотдачи α при турбулентном течении может быть во много раз больше, чем при ламинарном. Из указанного ясно, что коэффициент α изменяется в очень широких пределах и его следует выбирать в зависимости от условий конвективного теплообмена.

При исследовании процессов конвективного теплообмена используется теория подобия физических процессов, которую разработал для тепловых процессов М. В. Кирпичев [21]. В этой теории важную роль играют инварианты безразмерных критериальных отношений характерных величин, называемых критериями подобия. Применение критериев подобия позволяет обобщить результаты отдельных опытов, а также сократить число переменных в аналитических решениях.

Для определения коэффициента теплоотдачи используются следующие основные критерии теплового подобия:

критерий Нуссельта

$$\text{Nu} = \frac{\alpha l}{\lambda_{\text{ж}}}, \quad (3.2.13)$$

критерий Прандтля

$$\text{Pr} = \frac{\eta c_p}{\lambda_{\text{ж}}}, \quad (3.2.14)$$

где α — коэффициент теплоотдачи; $\lambda_{\text{ж}}$ — коэффициент теплопроводности жидкости или газа; c_p — удельная массовая теплоемкость жидкости или газа при постоянном давлении.

Результаты теоретических и экспериментальных исследований часто представляются в виде следующей зависимости между критериями теплового подобия:

$$\text{Nu} = C \text{Re}^m \text{Pr}^n, \quad (3.2.15)$$

где C , m , n — постоянные, имеющие определенные значения для разных условий теплообмена. Так, согласно данным работы [8], для локальной теплоотдачи при продольном обтекании пластины несжимаемым ламинарным потоком $C = 0,33$, $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$, а при обтекании пластины турбулентным потоком вплоть до $Re = 10^7$ $C = 0,029$, $m = 0,8$, $n = \frac{1}{3}$.

Другие формулы для определения коэффициента теплоотдачи α при разных условиях течения жидкости или газа можно найти в специальной литературе по теплопередаче ([67] и др.).

При течении с большой скоростью вследствие перехода кинетической энергии потока в тепловую существенно повышается температура в пограничном слое. В таком случае в уравнении (3.2.11) вместо температуры свободного потока ϑ следует рассматривать так называемую адиабатическую температуру стенки ϑ_a , под которой понимается температура на поверхности, когда отсутствует теплопередача в тело. Эта температура определяется по формуле

$$\vartheta_a = \vartheta + r \frac{v^2}{2c_p}, \quad (3.2.16)$$

где ϑ и v — соответственно температура и скорость свободного потока газа; r — коэффициент восстановления, показывающий, какая часть кинетической энергии свободного потока переходит в его теплосодержание на поверхности.

Коэффициент восстановления в зависимости от состояния пограничного слоя определяется критерием Прандтля, который для воздуха в широком интервале температуры почти не изменяется. Например, $Pr = 0,72 \div 0,65$ при $T = 250 \div 1300^\circ \text{K}$. На основании теоретических исследований установлено, что при ламинарном пограничном слое на плоской пластине $r = Pr^{\frac{1}{2}}$, а при турбулентном $r = Pr^{\frac{1}{3}}$.

§ 3.3. Уравнения нестационарной теплопроводности пластин

Расположим срединную поверхность тонкой пластины в плоскости xOy декартовой системы координат. Обозначим толщину пластины через h . Рассмотрим пластину при нестационарном конвективном теплообмене на ее контуре L и на поверхностях $z = \pm \frac{h}{2}$ (рис. 8).

Определение нестационарного температурного поля такой пластины при постоянных теплофизических характеристиках сводится к решению уравнения (3.2.4), которое в декартовых координатах принимает вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3.3.1)$$

Решение уравнения (3.3.1) должно удовлетворять следующим начальному и граничным условиям:

$$T = T_0 \quad \text{при } t = 0; \quad (3.3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial n} + \frac{\alpha_L}{\lambda_q} (T - \vartheta_L) &= 0 \text{ на контуре } L; \\ \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\alpha_3}{\lambda_q} (T - \vartheta_3) &= 0 \text{ при } z = \frac{h}{2}; \\ \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\alpha_4}{\lambda_q} (T - \vartheta_4) &= 0 \text{ при } z = -\frac{h}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3.3)$$

В уравнениях (3.3.1) — (3.3.3) введены следующие обозначения: T — температура пластины; T_0 — начальная температура пластины; ϑ_L , ϑ_3 и ϑ_4 — температура среды соответственно на контуре пластины L , на поверхностях $z = \frac{h}{2}$ и $z = -\frac{h}{2}$; α_L , α_3 и α_4 — коэффициенты теплоотдачи соответственно на контуре пластины L , на поверхностях $z = \frac{h}{2}$ и $z = -\frac{h}{2}$; λ_q и a — коэффициенты тепло- и температуропроводности материала пластины; n — внешняя нормаль к контуру пластины.

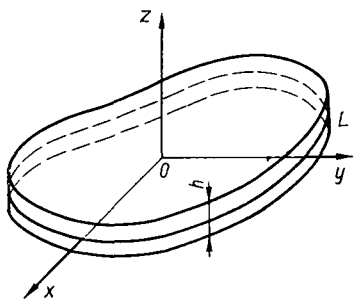


Рис. 8.

При составлении третьего граничного условия (3.3.3) учиты-

ваем, что направление внешней нормали к поверхности $z = -\frac{h}{2}$ противоположно положительному направлению оси z . Ищем приближенное решение этой задачи. Аппроксимируя распределение температуры T по толщине пластины степенным законом

$$T = \sum_{i=0}^m T^{(i)}(x, y, t) z^i, \quad (3.3.4)$$

сводим рассматриваемую задачу к двумерной.

Для составления уравнений, которым удовлетворяют функции $T^{(i)}$, умножаем уравнение (3.3.1) на z^p ($p = 0, 1, \dots, m$) и интегрируем его по z от $-\frac{h}{2}$ до $\frac{h}{2}$, принимая во внимание тождество

$$z^p \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(z^p \frac{\partial T}{\partial z} - p z^{p-1} T \right) + p(p-1) z^{p-2} T$$

и граничные условия (3.3.3). В результате получаем следующее уравнение:

$$\nabla^2 \Theta_p - \frac{h^{p-1}}{2^p} \left\{ 2p \left[T \left(\frac{h}{2} \right) + (-1)^p T \left(-\frac{h}{2} \right) \right] + \gamma_3 \left[T \left(\frac{h}{2} \right) - \vartheta_3 \right] + \right.$$

$$+ (-1)^p \gamma_4 \left[T \left(-\frac{h}{2} \right) - \vartheta_4 \right] \} + p(p-1) \Theta_{p-2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial \Theta_p}{\partial t} \quad (3.3.5)$$

$$(p = 0, 1, \dots, m),$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$\Theta_p = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^p T dz; \quad \gamma_3 = \frac{\alpha_3 h}{\lambda_q}; \quad \gamma_4 = \frac{\alpha_4 h}{\lambda_q}.$$

Выполняя аналогичные операции с условием (3.3.2) и первым из условий (3.3.3), находим следующие начальное и граничное условия для функции Θ_p :

$$\Theta_p = \Theta_{0p} \text{ при } t = 0; \quad (3.3.6)$$

$$\frac{\partial \Theta_p}{\partial n} + \frac{\alpha_L}{\lambda_q} (\Theta_p - \theta_p) = 0 \text{ на контуре } L,$$

где

$$\Theta_{0p} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^p T_0 dz, \quad \theta_p = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^p \vartheta_L dz.$$

Придавая в уравнении (3.3.5) и условиях (3.3.6) величине p разные значения, можно составить системы уравнений, описывающие нестационарную теплопроводность пластины при разных степенных законах изменения температуры по толщине пластины. Приведем эти уравнения и соответствующие начальное и граничное условия в случае, когда величины T_0 и ϑ_L не зависят от z .

Предполагая температуру постоянной по толщине пластины

$$T = T^{(0)} \quad (3.3.7)$$

и полагая $p = 0$, получаем уравнение теплопроводности

$$\nabla^2 T^{(0)} - \frac{2\gamma}{h^2} (T^{(0)} - \vartheta) = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T^{(0)}}{\partial t}, \quad (3.3.8)$$

где

$$\gamma = \frac{(\alpha_3 + \alpha_4) h}{2\lambda_q}, \quad \vartheta = \frac{\alpha_3 \vartheta_3 + \alpha_4 \vartheta_4}{\alpha_3 + \alpha_4}$$

при условиях

$$T^{(0)} = T_0 \text{ при } t = 0; \quad (3.3.9)$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial n} + \frac{\alpha_L}{\lambda_q} (T^{(0)} - \vartheta_L) = 0 \text{ на контуре } L.$$

Предполагая линейный закон изменения температуры по толщине пластины

$$T = T^{(0)} + T^{(1)}z, \quad (3.3.10)$$

отвечающий значениям $p = 0$ и $p = 1$, находим систему двух уравнений теплопроводности:

$$\begin{aligned} \nabla^2 T^{(0)} - \frac{2\gamma}{h^2} (T^{(0)} - \vartheta) - \frac{\gamma_3 - \gamma_4}{2h} T^{(1)} &= \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T^{(0)}}{\partial t}; \\ \nabla^2 T^{(1)} - \frac{6(\gamma_3 - \gamma_4)}{h^3} T^{(0)} - \frac{6(2 + \gamma)}{h^2} (T^{(1)} - \mu) &= \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T^{(1)}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

где

$$\mu = \frac{\gamma_3 \vartheta_3 - \gamma_4 \vartheta_4}{(2 + \gamma)h},$$

при условиях

$$T^{(0)} = T_0, \quad T^{(1)} = 0 \quad \text{при } t = 0; \quad (3.3.12)$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial n} + \frac{\alpha_L}{\lambda_q} (T^{(0)} - \vartheta_L) = 0, \quad \frac{\partial T^{(1)}}{\partial n} + \frac{\alpha_L}{\lambda_q} T^{(1)} = 0 \quad \text{на контуре } L.$$

Предполагая квадратичный закон изменения температуры по толщине пластины

$$T = T^{(0)} + T^{(1)}z + T^{(2)}z^2, \quad (3.3.13)$$

соответствующий значениям $p = 0$, $p = 1$ и $p = 2$, находим после некоторых преобразований систему трех уравнений теплопроводности:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 T^{(0)} + \frac{3\gamma}{h^2} (T^{(0)} - \vartheta) + \frac{3(\gamma_3 - \gamma_4)}{4h} T^{(1)} + \frac{3\gamma + 20}{4} T^{(2)} &= \\ = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T^{(0)}}{\partial t}; \\ \nabla^2 T^{(1)} - \frac{6(2 + \gamma)}{h^2} (T^{(1)} - \mu) - \frac{6(\gamma_3 - \gamma_4)}{h^3} \left(T^{(0)} + \frac{h^2 T^{(2)}}{4} \right) &= \\ = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T^{(1)}}{\partial t}; \\ \nabla^2 T^{(2)} - \frac{60\gamma}{h^4} (T^{(0)} - \vartheta) - \frac{15(\gamma_3 - \gamma_4)}{h^3} T^{(1)} - \\ - \frac{15(4 + \gamma)}{h^2} T^{(2)} &= \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T^{(2)}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (3.3.14)$$

при начальных и граничных условиях

$$T^{(0)} = T_0, \quad T^{(1)} = T^{(2)} = 0 \quad \text{при } t = 0;$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial n} + \frac{\alpha_L}{\lambda_q} (T^{(0)} - \vartheta_L) = 0, \quad \frac{\partial T^{(1)}}{\partial n} + \frac{\alpha_L T^{(1)}}{\lambda_q} = 0, \quad (3.3.15)$$

$$\frac{\partial T^{(2)}}{\partial n} + \frac{\alpha_L T^{(2)}}{\lambda_q} = 0 \text{ на контуре } L.$$

При одинаковых коэффициентах теплоотдачи $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha$, а следовательно, и одинаковых параметрах $\gamma_3 = \gamma_4 = \gamma$ уравнения (3.3.11) и (3.3.14) приобретают соответственно вид

$$\nabla^2 T^{(0)} - \frac{2\gamma}{h^2} (T^{(0)} - \vartheta) = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T^{(0)}}{\partial t}; \quad (3.3.16)$$

$$\nabla^2 T^{(1)} - \frac{6(2+\gamma)}{h^2} (T^{(1)} - \mu) = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T^{(1)}}{\partial t};$$

$$\nabla^2 T^{(0)} + \frac{3\gamma}{h^2} (T^{(0)} - \vartheta) + \frac{3\gamma + 20}{4} T^{(2)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T^{(0)}}{\partial t};$$

$$\nabla^2 T^{(1)} - \frac{6(2+\gamma)}{h^2} (T^{(1)} - \mu) = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T^{(1)}}{\partial t}; \quad (3.3.17)$$

$$\nabla^2 T^{(2)} - \frac{60\gamma}{h^4} (T^{(0)} - \vartheta) - \frac{15(4+\gamma)}{h^2} T^{(2)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T^{(2)}}{\partial t}.$$

§ 3.4. Стационарное осесимметричное температурное поле диска, цилиндра и круглой пластины

Определим стационарное плоское температурное поле диска постоянной толщины h с центральным отверстием. Обозначим радиус наружного контура диска через r_2 , а радиус его внутреннего контура (центрального отверстия) через r_1 (рис. 9). Предполагаем, что между поверхностями диска $z = \pm \frac{h}{2}$ и окружающей средой происходит одинаковый конвективный теплообмен.

Переходя к полярным координатам и учитывая симметрию температурного поля, уравнение теплопроводности и граничные условия рассматриваемой задачи на основании уравнения (3.3.8) и второго из условий (3.3.9) получаем в виде

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT}{dr} - \frac{2\gamma}{h^2} (T - \vartheta) = 0; \quad (3.4.1)$$

$$\frac{dT}{dr} - \frac{\alpha_1}{\lambda_q} (T - \vartheta_1) = 0 \text{ при } r = r_1; \quad (3.4.2)$$

$$\frac{dT}{dr} + \frac{\alpha_2}{\lambda_q} (T - \vartheta_2) = 0 \text{ при } r = r_2,$$

где $T = T^{(0)}$; $\gamma = \frac{\alpha h}{\lambda_q}$; ϑ и α — температура среды и коэффициент теплоотдачи на поверхностях диска $z = \pm \frac{h}{2}$; ϑ_1 и α_1 — температура среды и коэффициент теплоотдачи на контуре центрального отверстия диска ($r = r_1$); ϑ_2 и α_2 — температура среды и коэффициент теплоотдачи на наружном контуре диска ($r = r_2$).

При составлении первого из граничных условий (3.4.2) учитываем, что положительное направление r на контуре центрального отверстия противоположно направлению внешней нормали.

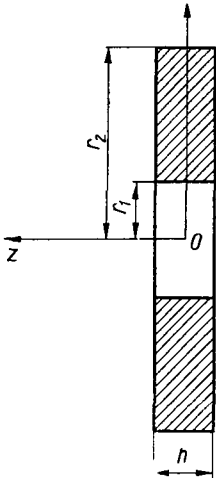


Рис. 9.

Вводя вместо r относительную координату $\rho = \frac{r}{r_2}$, переписываем уравнение (3.4.1) и условия (3.4.2) в виде

$$\frac{d^2 T}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dT}{d\rho} - \delta^2 (T - \vartheta) = 0; \quad (3.4.3)$$

$$\frac{dT}{d\rho} - \gamma_1 (T - \vartheta_1) = 0 \text{ при } \rho = \rho_1; \quad (3.4.4)$$

$$\frac{dT}{d\rho} + \gamma_2 (T - \vartheta_2) = 0 \text{ при } \rho = 1,$$

где

$$\delta^2 = \frac{2\gamma r_2^2}{h^2}; \quad \gamma_1 = \frac{\alpha_1 r_2}{\lambda_q};$$

$$\gamma_2 = \frac{\alpha_2 r_2}{\lambda_q}; \quad \rho_1 = \frac{r_1}{r_2}.$$

Решением уравнения (3.4.3) является выражение

$$T = \vartheta + C_1 I_0(\delta \rho) + C_2 K_0(\delta \rho), \quad (3.4.5)$$

где $I_0(x)$ и $K_0(x)$ — бесселевы функции чисто мнимого аргумента нулевого порядка первого и второго рода.

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяем из условий (3.4.4), учитывая известные из теории бесселевых функций формулы

$$\frac{d}{dx} I_0(x) = I_1(x), \quad \frac{d}{dx} K_0(x) = -K_1(x), \quad (3.4.6)$$

где $I_1(x)$, $K_1(x)$ — бесселевы функции чисто мнимого аргумента первого порядка соответственно первого и второго рода. Находим

$$C_1 = \frac{1}{\Delta} [\gamma_1 (\vartheta_1 - \vartheta) v_1(\delta) + \gamma_2 (\vartheta_2 - \vartheta) v_2(\delta \rho_1)]; \quad (3.4.7)$$

$$C_2 = \frac{1}{\Delta} [\gamma_1 (\vartheta_1 - \vartheta) u_1(\delta) + \gamma_2 (\vartheta_2 - \vartheta) u_2(\delta \rho_1)],$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 u_1(\delta) &= I_1(\delta) + \frac{\gamma_2}{\delta} I_0(\delta); \\
 u_2(\delta\rho_1) &= I_1(\delta\rho_1) - \frac{\gamma_1}{\delta} I_0(\delta\rho_1); \\
 v_1(\delta) &= K_1(\delta) - \frac{\gamma_2}{\delta} K_0(\delta); \\
 v_2(\delta\rho_1) &= K_1(\delta\rho_1) + \frac{\gamma_1}{\delta} K_0(\delta\rho_1); \\
 \Delta &= u_2(\delta\rho_1) [\gamma_2 K_0(\delta) - \delta K_1(\delta)] + v_2(\delta\rho_1) [\gamma_2 I_0(\delta) + \delta I_1(\delta)].
 \end{aligned} \right\} \quad (3.4.8)$$

При $\gamma_1 = \gamma_2 = \infty$ условия (3.4.4) следующие:

$$\begin{aligned}
 T &= \vartheta_1 \text{ при } \rho = \rho_1; \\
 T &= \vartheta_2 \text{ при } \rho = 1.
 \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Уравнение (3.4.3) и условия (3.4.9) описывают задачу об осесимметричном температурном поле диска, когда на внутреннем ($\rho = \rho_1$) и наружном ($\rho = 1$) его контурах заданы соответственно температуры ϑ_1 и ϑ_2 при конвективном теплообмене на поверхностях диска $z = \pm \frac{h}{2}$. Решение этой задачи получаем из решения (3.4.5), устремляя γ_1 и γ_2 к бесконечности; при этом постоянные интегрирования (3.4.7) принимают значения

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{-(\vartheta_1 - \vartheta) K_0(\delta) + (\vartheta_2 - \vartheta) K_0(\delta\rho_1)}{I_0(\delta) K_0(\delta\rho_1) - I_0(\delta\rho_1) K_0(\delta)}; \\
 C_2 &= \frac{(\vartheta_1 - \vartheta) I_0(\delta) - (\vartheta_2 - \vartheta) I_0(\delta\rho_1)}{I_0(\delta) K_0(\delta\rho_1) - I_0(\delta\rho_1) K_0(\delta)}.
 \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Полагая в уравнении (3.4.3) $\delta = 0$, т. е. предполагая отсутствие теплообмена на поверхностях диска $z = \pm \frac{h}{2}$, получаем уравнение теплопроводности, которое при граничных условиях (3.4.4) или (3.4.9) описывает задачу об осесимметричном температурном поле длинного цилиндра при заданном конвективном теплообмене между внутренней ($\rho = \rho_1$) и наружной ($\rho = 1$) его цилиндрическими поверхностями и окружающей средой или при заданных температурах на этих поверхностях. В том и другом случаях температурное поле определяется выражением

$$T = C_1 + C_2 \ln \rho; \quad (3.4.11)$$

при этом в случае граничных условий (3.4.4)

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{1}{\Delta} [\gamma_2 \vartheta_2 + \gamma_1 \rho_1 (\vartheta_1 - \gamma_2 \vartheta_2 \ln \rho_1)]; \\
 C_2 &= \frac{1}{\Delta} [\gamma_1 \gamma_2 \rho_1 (\vartheta_2 - \vartheta_1)],
 \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

где

$$\Delta = \gamma_2 + \gamma_1 \rho_1 (1 - \gamma_2 \ln \rho_1),$$

а при граничных условиях (3.4.9)

$$C_1 = \vartheta_2; \quad C_2 = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\ln \rho_1}. \quad (3.4.13)$$

Определим стационарное температурное поле в круглой пластине постоянной толщины с центральным отверстием, когда температура среды равна ϑ_3 при $z = \frac{h}{2}$ и ϑ_4 при $z = -\frac{h}{2}$. Пусть между поверхностями пластины $z = \pm \frac{h}{2}$ и окружающей средой происходит конвективный теплообмен при одинаковых коэффициентах теплоотдачи α , а температура по толщине пластины изменяется по линейному закону (3.3.10) (рис. 10). Для решения этой задачи используем систему уравнений (3.3.11) при граничных условиях (3.3.12). В рассматриваемом случае они принимают вид

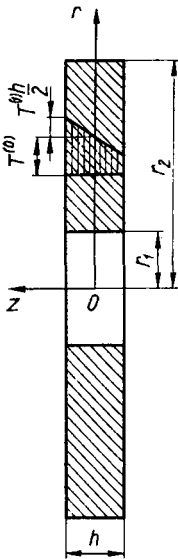


Рис. 10.

$$\frac{d^2 T^{(0)}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dT^{(0)}}{d\rho} - \delta^2 (T^{(0)} - \vartheta) = 0; \quad (3.4.14)$$

$$\frac{d^2 T^{(1)}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dT^{(1)}}{d\rho} - \delta_1^2 (T^{(1)} - \mu) = 0; \quad (3.4.15)$$

$$\frac{dT^{(0)}}{d\rho} - \gamma_1 (T^{(0)} - \vartheta_1) = 0 \text{ при } \rho = \rho_1; \quad (3.4.16)$$

$$\frac{dT^{(0)}}{d\rho} + \gamma_2 (T^{(0)} - \vartheta_2) = 0 \text{ при } \rho = 1;$$

$$\frac{dT^{(1)}}{d\rho} - \gamma_1 T^{(1)} = 0 \text{ при } \rho = \rho_1; \quad (3.4.17)$$

$$\frac{dT^{(1)}}{d\rho} + \gamma_2 T^{(1)} = 0 \text{ при } \rho = 1,$$

где

$$\vartheta = \frac{\vartheta_3 + \vartheta_4}{2}; \quad \mu = \frac{\gamma (\vartheta_3 - \vartheta_4)}{(2 + \gamma) h}; \quad \delta^2 = \frac{2\gamma r_2^2}{h^2}; \quad \delta_1^2 = \frac{6(2 + \gamma) r_2^2}{h^2};$$

$$\gamma = \frac{\alpha h}{\lambda_q}; \quad \gamma_1 = \frac{\alpha_1 r_2}{\lambda_q}; \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_2 r_2}{\lambda_q}.$$

Решение уравнения (3.4.14) при граничных условиях (3.4.16) определяется выражением (3.4.5). Заменяя в этом выражении δ на δ_1 , ϑ на μ и полагая $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$, получаем решение уравнения (3.4.15) при граничных условиях (3.4.17).

Таким образом, для искомого температурного поля находим следующее решение:

$$T = \vartheta + C_1 I_0(\delta\rho) + C_2 K_0(\delta\rho) + z [\mu + C'_1 I_0(\delta_1\rho) + C'_2 K_0(\delta_1\rho)]. \quad (3.4.18)$$

В этом решении постоянные интегрирования C_1 и C_2 имеют значения (3.4.7), а постоянные C'_1 и C'_2 — такие значения:

$$\begin{aligned} C'_1 &= -\frac{\mu}{\Delta_1} [\gamma_1 v_1(\delta_1) + \gamma_2 v_2(\delta_1\rho_1)]; \\ C'_2 &= -\frac{\mu}{\Delta_1} [\gamma_1 u_1(\delta_1) + \gamma_2 u_2(\delta_1\rho_1)], \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

где величины $u_1(\delta_1)$, $u_2(\delta_1\rho_1)$, $v_1(\delta_1)$, $v_2(\delta_1\rho_1)$, Δ_1 определяются выражениями (3.4.8) после замены в них δ на δ_1 .

§ 3.5. Стационарное неосесимметричное плоское температурное поле длинного цилиндра

Определим стационарное плоское температурное поле длинного полого цилиндра, когда температуры среды ϑ_1 и ϑ_2 соответственно на внутренней ($\rho = \rho_1$) и наружной ($\rho = 1$) цилиндрических поверхностях являются функциями угла θ (рис. 4). Эта задача сводится к решению уравнения (3.2.5), которое в цилиндрических координатах принимает вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0. \quad (3.5.1)$$

Решение уравнения (3.5.1) должно удовлетворять граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \rho} - \gamma_1 (T - \vartheta_1) &= 0 \text{ при } \rho = \rho_1; \\ \frac{\partial T}{\partial \rho} + \gamma_2 (T - \vartheta_2) &= 0 \text{ при } \rho = 1, \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1 r_2}{\lambda_q}; \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_2 r_2}{\lambda_q}.$$

Температуры ϑ_1 и ϑ_2 являются периодическими функциями θ с периодом 2π , а поэтому их можно представить в виде рядов Фурье:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_1^{(k)} \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_1^{(k)'} \sin k\theta; \\ \vartheta_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_2^{(k)} \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_2^{(k)'} \sin k\theta. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Коэффициенты в разложениях (3.5.3) определяются по формулам

$$\vartheta_n^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vartheta_n d\theta, \quad (3.5.4)$$

$$\vartheta_n^{(k)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \vartheta_n \cos k\theta d\theta, \quad \vartheta_n^{(k)'} = \int_0^{2\pi} \vartheta_n \sin k\theta d\theta$$

$$(n = 1, 2; \quad k = 1, 2, \dots).$$

На основании разложений (3.5.3) выбираем решение уравнения (3.5.1) в виде

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} T^{(k)} \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} T^{(k)'} \sin k\theta, \quad (3.5.5)$$

где $T^{(k)}$ и $T^{(k)'}$ — функции координаты ρ .

Подставляя решение (3.5.5) в уравнение (3.5.1) и в граничные условия (3.5.2), находим для функции $T^{(k)}$ ($k = 0, 1, \dots$) уравнение

$$\frac{d^2 T^{(k)}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dT^{(k)}}{d\rho} - \frac{k^2}{\rho^2} T^{(k)} = 0 \quad (3.5.6)$$

при граничных условиях

$$\frac{dT^{(k)}}{d\rho} - \gamma_1 (T^{(k)} - \vartheta_1^{(k)}) = 0 \quad \text{при } \rho = \rho_1;$$

$$\frac{dT^{(k)}}{d\rho} + \gamma_2 (T^{(k)} - \vartheta_2^{(k)}) = 0 \quad \text{при } \rho = 1. \quad (3.5.7)$$

Решение уравнения (3.5.6) при граничных условиях (3.5.7), когда $k = 0$, определяется выражением (3.4.11) с постоянными интегрирования (3.4.12), а при $k \geq 1$ оно имеет вид

$$T^{(k)} = C_1^{(k)} \rho^k + C_2^{(k)} \rho^{-k}, \quad (3.5.8)$$

где

$$C_1^{(k)} = \frac{1}{\Delta} [\rho_1 \gamma_1 (k - \gamma_2) \vartheta_1^{(k)} + \rho_1^{-k} \gamma_2 (k + \rho_1 \gamma_1) \vartheta_2^{(k)}];$$

$$C_2^{(k)} = \frac{1}{\Delta} [\rho_1 \gamma_1 (k + \gamma_2) \vartheta_1^{(k)} + \rho_1^k \gamma_2 (k - \rho_1 \gamma_1) \vartheta_2^{(k)}]; \quad (3.5.9)$$

$$\Delta = \rho_1^{-k} (k + \rho_1 \gamma_1) (k + \gamma_2) - \rho_1^k (k - \rho_1 \gamma_1) (k - \gamma_2).$$

Идентичное решение можно получить для функции $T^{(k)'}$ ($k = 1, 2, \dots$). Искомое решение (3.5.5) имеет вид

$$T = C_1 + C_2 \ln \rho + \sum_{k=1}^{\infty} (C_1^{(k)} \rho^k + C_2^{(k)} \rho^{-k}) \cos k\theta +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (C_1^{(k)'} \rho^k + C_2^{(k)'} \rho^{-k}) \sin k\theta. \quad (3.5.10)$$

В этом решении постоянные C_1, C_2 определяются выражениями (3.4.12), в которых $\vartheta_1 = \vartheta_1^{(0)}$ и $\vartheta_2 = \vartheta_2^{(0)}$, а постоянные $C_1^{(k)'}$, $C_2^{(k)'}$ — выражениями (3.5.9), в которых $\vartheta_1^{(k)}$, $\vartheta_2^{(k)}$ заменяются величинами соответственно $\vartheta_1^{(k)'}$, $\vartheta_2^{(k)'}$.

§ 3.6. Преобразование Лапласа

Для решения ряда нестационарных задач теплопроводности эффективно применение операционного исчисления и связанного с ним метода интегрального преобразования Лапласа.

Основы операционного исчисления разработал профессор Киевского университета М. Е. Ващенко-Захарченко, который в монографии [6], вышедшей в 1862 г., дал систематическое изложение операционного исчисления и вывел основные соотношения для решения дифференциальных уравнений операционным методом. В 1890 г. Хевисайд успешно применил операционное исчисление в электротехнических расчетах [30]. Операционный метод Ващенко-Захарченко — Хевисайда получил строгое математическое обоснование значительно позже. Выяснилась равнозначность этого метода методу интегрального преобразования Лапласа.

Ниже изложены без доказательства основные положения и свойства преобразования Лапласа, используемые в дальнейшем при решении ряда нестационарных задач теплопроводности и динамических задач термоупругости. Доказательство приведенных формул можно найти в работе [30].

Метод интегрального преобразования Лапласа заключается в следующем.

1. Дифференциальное уравнение относительно функции $f(t)$ действительной переменной t умножается на экспоненциальную функцию e^{-pt} , где p — комплексная переменная, и полученное выражение интегрируется по t в пределах от 0 до ∞ . При интегрировании по частям используются начальные условия задачи для определения внеинтегральных слагаемых. При этом вводится преобразованная функция

$$f^*(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (3.6.1)$$

которая называется изображением. Символ $L[f(t)]$ обозначает преобразование Лапласа функции $f(t)$.

2. Находится решение полученного дифференциального уравнения относительно изображения $f^*(p)$.

3. Выполняется переход от изображения $f^*(p)$ к начальной функции — оригиналу $f(t)$ по формуле обращения

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} f^*(p) dp, \quad (3.6.2)$$

где интеграл берется вдоль прямой $\operatorname{Re} p = a$ и понимается как предел интеграла вдоль отрезка $(a - ib, a + ib)$ при $b \rightarrow \infty$. На $f(t)$ накладываются определенные условия, обеспечивающие существование изображения. Для рассматриваемых в данной работе задач достаточно ограничиться классом кусочно-непрерывных функций $f(t)$ вещественной переменной t , определенных при $t > 0$ и принятых равными нулю при $t < 0$.

Функция $f(t)$ должна возрасть не быстрее некоторой экспоненциальной функции, т. е. предполагается существование таких постоянных $M > 0$, $s_0 \geq 0$, при которых для всех значений t имеем $|f(t)| < Me^{s_0 t}$, где s_0 — показатель роста $f(t)$. При этих условиях функция $f^*(p)$, определяемая интегралом (3.6.1), является регулярной функцией от p в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$. На путь интегрирования в формуле обращения (3.6.2) накладывается также некоторое ограничение: величина a должна быть достаточно велика и больше s_0 , чтобы все особые точки функции $f^*(p)$ лежали слева от линии интегрирования.

Применение метода интегрального преобразования Лапласа к решению задач теплопроводности подробно освещается в монографии А. В. Лыкова [39]. Там же содержится таблица изображений наиболее часто встречающихся функций. В более сложных задачах переход от изображения к оригиналу выполняется по формуле (3.6.2), в которой комплексный интеграл вычисляется с помощью теоремы о вычетах из теории функций комплексного переменного.

Приведем основные свойства преобразования Лапласа.

Свойство линейности. Для любых постоянных α и β

$$L[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha L[f(t)] + \beta L[g(t)] = \alpha f^*(p) + \beta g^*(p). \quad (3.6.3)$$

Теорема подобия. Для любой постоянной $\alpha > 0$

$$L[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} f^*\left(\frac{p}{\alpha}\right). \quad (3.6.4)$$

Дифференцирование оригинала. Если $f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$ является оригиналом, то

$$L[f'(t)] = pf^*(p) - f(0). \quad (3.6.5)$$

В частности, если $f(0) = 0$, то $L[f'(t)] = pf^*(p)$, т. е. дифференцирование оригинала соответствует умножению изображения на p .

Дифференцирование изображения сводится к умножению оригинала на $-t$, т. е.

$$\frac{df^*(p)}{dp} = L[-tf(t)]. \quad (3.6.6)$$

Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p :

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{f^*(p)}{p}. \quad (3.6.7)$$

Интегрирование изображения в пределах от p до ∞ соответствует делению оригинала на t :

$$L \left[\frac{f(t)}{t} \right] = \int_p^{\infty} f^*(p) dp. \quad (3.6.8)$$

Теорема запаздывания. Введение оригинала $f(t - t_0)$, описывающего процесс с запаздыванием на время t_0 , равносильно умножению изображения на e^{-pt_0} :

$$L [f(t - t_0)] = e^{-pt_0} f^*(p). \quad (3.6.9)$$

Теорема смещения. Смещение изображения на p_0 равносильно умножению оригинала на $e^{p_0 t}$:

$$L [e^{p_0 t} f(t)] = f^*(p - p_0). \quad (3.6.10)$$

Теорема произведения. Произведение двух изображений $f^*(p)$ и $g^*(p)$ тождественно свертке их оригиналов:

$$\{f^*(p) g^*(p)\} = L \left[\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right]. \quad (3.6.11)$$

Сверткой функций $f(t)$ и $g(t)$ называется интеграл в правой части формулы (3.6.11). Эта теорема известна как теорема о свертке. Следствием теоремы произведения является так называемый интеграл Дюамеля

$$\begin{aligned} pf^*(p) g^*(p) &= L \left[f(0) g(t) + \int_0^t f'(\tau) g(t - \tau) d\tau \right] = \\ &= L \left[f(0) g(t) + \int_0^t g(\tau) f'(t - \tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (3.6.12)$$

Теоремы разложения. Если изображение $f^*(t)$ есть отношение двух полиномов

$$f^*(p) = \frac{A(p)}{B(p)}, \quad (3.6.13)$$

причем степень полинома $A(p)$ меньше степени полинома $B(p)$, то оригиналом является функция

$$f(t) = \sum_{n=1}^m \frac{1}{(k_n - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_n} \frac{d^{k_n - 1}}{dp^{k_n - 1}} \{f^*(p) (p - p_n)^{k_n} e^{pt}\}, \quad (3.6.14)$$

где p_n — корни полинома $B(p)$; k_n — кратность корней. Сумма берется по всем корням.

В частности, если все корни полинома $B(p)$ простые, то формула (3.6.14) принимает вид

$$f(t) = \sum_{n=1}^m \frac{A(p_n)}{B'(p_n)} e^{p_n t}, \quad (3.6.15)$$

где

$$B'(p_n) = \left[\frac{dB(p)}{dp} \right]_{p=p_n}.$$

Формулы (3.6.14) и (3.6.15) выведены М. Е. Ващенко-Захарченко [6].

Теорема разложения может быть обобщена на случай, когда изображение (3.6.13) является отношением двух целых трансцендентных функций $A(p)$ и $B(p)$, имеющих в качестве особых точек только полюсы (корни трансцендентного уравнения $B(p) = 0$); при этом $m \rightarrow \infty$.

Существуют необходимые условия, при которых применима обобщенная теорема разложения [39]; для рассматриваемых в данной работе задач эти условия выполняются.

§ 3.7. Нестационарное температурное поле полупространства и неограниченной пластины

Рассмотрим сначала нестационарное температурное поле полупространства, занимающего область $x \geq 0$, при тепловом ударе на его поверхности $x = 0$.

Пусть начальная температура полупространства, а также среды, омывающей его поверхность $x = 0$, равна T_0 . В момент времени $t = 0$ полупространство подвергается внезапному тепловому воздействию среды, температура которой мгновенно повышается до значения ϑ . Между поверхностью полупространства $x = 0$ и средой в дальнейшем происходит конвективный теплообмен.

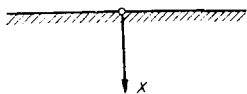


Рис. 11.

Нестационарное одномерное температурное поле полупространства $T(x, t)$ в соответствии с уравнением (3.2.4) и условиями (3.2.6) и (3.2.11) описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.7.1)$$

при начальном условии

$$T = T_0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (3.7.2)$$

и граничном условии

$$\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\alpha}{\lambda_q} (T - \vartheta) = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (3.7.3)$$

где α — коэффициент теплоотдачи на поверхности $x = 0$; λ_q и a — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности материала полупространства.

При составлении граничного условия (3.7.3) учитывается, что направление внешней нормали к поверхности $x = 0$ противоположно положительному направлению оси x (рис. 11).

Для решения рассматриваемой задачи используем метод интегрального преобразования Лапласа.

Применяя преобразование Лапласа (3.6.1) к уравнению (3.7.1) и условию (3.7.3) и используя при вычислении интеграла (интегрированием по частям) $\int_0^{\infty} \frac{\partial T}{\partial t} e^{-pt} dt = -T_0 + pT^*$ начальное

условие (3.7.2), решение уравнения (3.7.1) в частных производных сводим к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 T^*}{dx^2} - \frac{\rho}{a} \left(T^* - \frac{1}{\rho} T_0 \right) = 0 \quad (3.7.4)$$

при условии

$$\frac{dT^*}{dx} - \frac{\alpha}{\lambda_q} \left(T^* - \frac{\vartheta}{\rho} \right) = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad (3.7.5)$$

где

$$T^* = \int_0^{\infty} T e^{-pt} dt.$$

Решение уравнения (3.7.4) известно:

$$T^* = \frac{T_0}{\rho} + C_1 e^{\sqrt{\frac{\rho}{a}} x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\rho}{a}} x}. \quad (3.7.6)$$

Температура с увеличением x не должна возрастать. Для удовлетворения этого условия следует положить $C_1 = 0$.

Определяя C_2 из условия (3.7.5), получаем следующее выражение для изображения температуры полупространства:

$$T^* = \frac{T_0}{\rho} + \frac{\gamma(\vartheta - T_0)}{\rho\left(\gamma + \sqrt{\frac{\rho}{a}}\right)} e^{-\sqrt{\frac{\rho}{a}} x}, \quad (3.7.7)$$

где $\gamma = \frac{\alpha}{\lambda_q}$.

Используя для нахождения оригинала таблицу изображений, приведенную в работе [39], находим искомое решение:

$$T = T_0 + (\vartheta - T_0) \left[\operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} - \exp(\gamma x + \gamma^2 at) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + \gamma\sqrt{at} \right) \right], \quad (3.7.8)$$

где $\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x$; $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$ — интеграл вероятности Гаусса, а символ \exp означает экспоненциальную функцию.

При $\gamma = \frac{\alpha}{\lambda_q} \rightarrow \infty$ температура T поверхности $x = 0$, как это видно из условия (3.7.3), мгновенно принимает значение температуры окружающей среды ϑ . В этом случае решение (3.7.8) имеет вид

$$T = T_0 + (\vartheta - T_0) \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}}. \quad (3.7.9)$$

Методом интегрального преобразования Лапласа находится решение аналогичной задачи о нестационарном одномерном температурном поле неограниченной пластины толщины h при тепловом ударе на ее поверхности $z = \frac{h}{2}$ (рис. 12), обусловленном внезапным подводом теплового потока плотностью $q' = -q$, где q — плотность теплового потока в направлении внешней нормали к поверхности. Поверхность пластины $z = -\frac{h}{2}$ предполагаем идеально теплоизолированной.

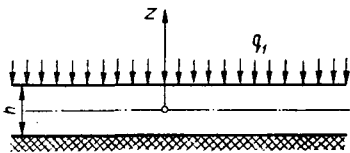


Рис. 12.

При указанных условиях теплообмена искомое температурное поле описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (3.7.10)$$

при начальном условии $T = T_0$ при $\tau = 0$ и граничных условиях [см. (3.2.8) и (3.2.10)]

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_q}{h} \cdot \frac{\partial T}{\partial \zeta} &= q' = -q \quad \text{при } \zeta = \frac{1}{2}; \\ \frac{\partial T}{\partial \zeta} &= 0 \quad \text{при } \zeta = -\frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (3.7.11)$$

где $\zeta = \frac{z}{h}$; $\tau = \frac{at}{h^2}$.

Постановка этой задачи отличается от ранее рассмотренной только граничными условиями; нахождение изображения сводится к решению уравнения

$$\frac{d^2 T^*}{d\zeta^2} - p \left(T^* - \frac{1}{p} T_0 \right) = 0, \quad (3.7.12)$$

по форме совпадающего с уравнением (3.7.4), при условиях

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_q}{h} \cdot \frac{\partial T^*}{\partial \zeta} &= \frac{q'}{p} \quad \text{при } \zeta = \frac{1}{2}, \\ \frac{\partial T^*}{\partial \zeta} &= 0 \quad \text{при } \zeta = -\frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (3.7.13)$$

где

$$T^* = \int_0^{\infty} T e^{-\rho \tau} d\tau.$$

Поскольку координата ζ , в отличие от координаты x в уравнении (3.7.4), изменяется в конечных пределах, то записываем решение уравнения (3.7.12) в гиперболических функциях в виде

$$T^* = \frac{T_0}{\rho} + C_1 \operatorname{ch} \sqrt{\rho} \zeta + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{\rho} \zeta. \quad (3.7.14)$$

Определяя постоянные интегрирования C_1 и C_2 из условий (3.7.13) и подставляя их значения в решение (3.7.14), получаем следующее изображение температуры пластины:

$$T^* = \frac{T_0}{\rho} + \frac{A(\rho)}{B(\rho)}, \quad (3.7.15)$$

где

$$\begin{aligned} A(\rho) &= \frac{q'h}{\lambda_q} \operatorname{ch} \sqrt{\rho} \left(\zeta + \frac{1}{2} \right); \\ B(\rho) &= \rho^2 \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}. \end{aligned} \quad (3.7.16)$$

Корнями уравнения $B(\rho) = 0$ являются двукратный корень $\rho_1 = 0$ и корни $\rho_{n+1} = -n^2 \pi^2$ ($n = 1, 2, \dots$) уравнения $\frac{\operatorname{sh} \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = \frac{\sin i \sqrt{\rho}}{i \sqrt{\rho}} = 0$.

Определяя оригинал функции в случае двукратного корня ρ_1 по формуле (3.6.14) при $n = m = 1$ и $k_1 = 2$ и используя для простых корней формулу (3.6.15), находим

$$\begin{aligned} T = T_0 + \frac{q'h}{\lambda_q} & \left\{ \frac{1}{1!} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{d}{d\rho} \left[\frac{\sqrt{\rho} \operatorname{ch} \sqrt{\rho} \left(\zeta + \frac{1}{2} \right)}{\operatorname{sh} \sqrt{\rho}} e^{\rho \tau} \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\rho_{n+1}} \left(\zeta + \frac{1}{2} \right)}{\left[\frac{d}{d\rho} (\rho \sqrt{\rho} \operatorname{sh} \sqrt{\rho}) \right]_{\rho=\rho_{n+1}}} e^{\rho_{n+1} \tau} \right\}. \end{aligned}$$

Применяя для раскрытия неопределенностей правило Лопиталья, выполняем следующее преобразование первого слагаемого в фигурных скобках:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{d}{d\rho} \left[\frac{\sqrt{\rho} \operatorname{ch} \sqrt{\rho} \left(\zeta + \frac{1}{2} \right)}{\operatorname{sh} \sqrt{\rho}} e^{\rho \tau} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \tau + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\left(\zeta + \frac{1}{2}\right) \operatorname{sh} V\bar{p} \left(\zeta + \frac{1}{2}\right)}{2 \operatorname{sh} V\bar{p}} + \\
&+ \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} V\bar{p} \left(\zeta + \frac{1}{2}\right) (\operatorname{sh} V\bar{p} - V\bar{p} \operatorname{ch} V\bar{p})}{2 V\bar{p} \operatorname{sh}^2 V\bar{p}} = \\
&= \tau + \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Подставляя это выражение и учитывая, что

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d}{dp} (p V\bar{p} \operatorname{sh} V\bar{p}) \right]_{p=p_{n+1}} &= \left(\frac{3}{2} V\bar{p} \operatorname{sh} V\bar{p} + \frac{1}{2} p \operatorname{ch} V\bar{p} \right)_{p=p_{n+1}} = \\
&= (-1)^{n+1} \frac{n^2 \pi^2}{2},
\end{aligned}$$

$$\operatorname{ch} V \overline{p_{n+1}} \left(\zeta + \frac{1}{2} \right) = \cos \frac{n\pi}{2} (2\zeta + 1),$$

получаем выражение для искомого температурного поля:

$$\begin{aligned}
T = T_0 + \frac{q'h}{\lambda q} \left\{ \tau + \frac{12\zeta^2 + 12\zeta - 1}{24} - \right. \\
\left. - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[\frac{n\pi}{2} (2\zeta + 1) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\}, \quad (3.7.17)
\end{aligned}$$

где $\tau = \frac{at}{h^2}$.

Рассмотрим случай нестационарного конвективного теплообмена между поверхностями $z = \pm \frac{h}{2} \left(\zeta = \pm \frac{1}{2} \right)$ неограниченной пластины и окружающей средой, соответствующий начальному условию $T = T_0$ при $\tau = 0$ и граничным условиям

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \zeta} + \gamma_3 (T - \vartheta_3) &= 0 \quad \text{при } \zeta = \frac{1}{2}, \\
\frac{\partial T}{\partial \zeta} - \gamma_4 (T - \vartheta_4) &= 0 \quad \text{при } \zeta = -\frac{1}{2},
\end{aligned} \quad (3.7.18)$$

где $\gamma_3 = \frac{\alpha_3 h}{\lambda q}$; $\gamma_4 = \frac{\alpha_4 h}{\lambda q}$; ϑ_3 и α_3 — температура среды и коэффициент теплоотдачи на поверхности $z = \frac{h}{2} \left(\zeta = \frac{1}{2} \right)$; ϑ_4 и α_4 — температура среды и коэффициент теплоотдачи на поверхности $z = -\frac{h}{2} \left(\zeta = -\frac{1}{2} \right)$.

Выполняя аналогичные преобразования, находим следующие выражения для функций $A(p)$ и $B(p)$ в решении для изображения (3.7.15):

$$A(p) = \gamma_3 (\vartheta_3 - T_0) \left[\operatorname{ch} V\bar{p} \left(\frac{1}{2} + \zeta \right) + \frac{\gamma_4}{V\bar{p}} \operatorname{sh} V\bar{p} \left(\frac{1}{2} + \zeta \right) \right] + \\ + \gamma_4 (\vartheta_4 - T_0) \left[\operatorname{ch} V\bar{p} \left(\frac{1}{2} - \zeta \right) + \frac{\gamma_3}{V\bar{p}} \operatorname{sh} V\bar{p} \left(\frac{1}{2} - \zeta \right) \right]; \quad (3.7.19)$$

$$B(p) = p \left[(p + \gamma_3 \gamma_4) \frac{\operatorname{sh} V\bar{p}}{V\bar{p}} + (\gamma_3 + \gamma_4) \operatorname{ch} V\bar{p} \right].$$

Корнями уравнения $B(p) = 0$ являются $p_1 = 0$ и корни $p_{n+1} = -\mu_n^2$ ($n = 1, 2, \dots$) уравнения $(p + \gamma_3 \gamma_4) \frac{\operatorname{sh} V\bar{p}}{V\bar{p}} + (\gamma_3 + \gamma_4) \operatorname{ch} V\bar{p} = 0$, где $\mu_n = i \sqrt{p_{n+1}}$ ($n = 1, 2, \dots$) — корни уравнения

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\gamma_3 + \gamma_4}{\mu^2 - \gamma_3 \gamma_4} \mu. \quad (3.7.20)$$

Применяя формулу (3.6.15) и проводя соответствующие вычисления, получаем выражение для температуры пластины:

$$T = T_0 + \frac{A(0)}{B'(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(-\mu_n^2)}{B'(-\mu_n^2)} e^{-\mu_n^2 \tau}, \quad (3.7.21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A(0) &= \gamma_3 (\vartheta_3 - T_0) \left[1 + \gamma_4 \left(\frac{1}{2} + \zeta \right) \right] + \gamma_4 (\vartheta_4 - T_0) \times \\ &\quad \times \left[1 + \gamma_3 \left(\frac{1}{2} - \zeta \right) \right]; \\ A(-\mu_n^2) &= \gamma_3 (\vartheta_3 - T_0) \left[\cos \mu_n \left(\frac{1}{2} + \zeta \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma_4}{\mu_n} \sin \mu_n \left(\frac{1}{2} + \zeta \right) \right] + \gamma_4 (\vartheta_4 - T_0) \left[\cos \mu_n \left(\frac{1}{2} - \zeta \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma_3}{\mu_n} \sin \mu_n \left(\frac{1}{2} - \zeta \right) \right]; \end{aligned} \right\} \quad (3.7.22)$$

$$B'(0) = \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_3 \gamma_4;$$

$$B'(-\mu_n^2) = -\frac{1}{2\mu_n} \{ (1 + \gamma_3 + \gamma_4) \mu_n^2 + \gamma_3 \gamma_4 \} \sin \mu_n + \\ + (\mu_n^2 - \gamma_3 \gamma_4) \mu_n \cos \mu_n;$$

μ_n — корни уравнения (3.7.20).

При одинаковых температурах среды $\vartheta_3 = \vartheta_4 = \vartheta$ выражение (3.7.21) принимает вид

$$T = \vartheta - 2(\vartheta - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(\zeta)}{B_n} e^{-\mu_n^2 \tau}, \quad (3.7.23)$$

где

$$A_n(\xi) = \gamma_3 \left[\mu_n \cos \mu_n \left(\frac{1}{2} + \xi \right) + \gamma_4 \sin \mu_n \left(\frac{1}{2} + \xi \right) \right] + \gamma_4 \left[\mu_n \cos \mu_n \left(\frac{1}{2} - \xi \right) + \gamma_3 \sin \mu_n \left(\frac{1}{2} - \xi \right) \right]; \quad (3.7.24)$$

$$B_n = [(1 + \gamma_3 + \gamma_4) \mu_n^2 + \gamma_3 \gamma_4] \sin \mu_n + \mu_n (\mu_n^2 - \gamma_3 \gamma_4) \cos \mu_n. \quad (3.7.25)$$

Пример. Исследуем распределение температуры по толщине неограниченной стальной пластины при нестационарном конвективном теплообмене между

Таблица 1

n	μ_n	C_n
1	0,4328	1,0312
2	3,2039	-0,0381
3	6,3148	0,0100
4	9,4459	-0,0045
5	12,5823	0,0025
6	15,7207	-0,0016

ее поверхностью $z = \frac{h}{2}$ и окружающей средой (газовым потоком) и при идеально теплоизолированной поверхности $z = -\frac{h}{2}$.

Полагая в уравнении (3.7.20) и в выражении (3.7.23) — (3.7.25) $\gamma_4 = 0$ и $\gamma_3 = \gamma$, получаем следующее решение для рассматриваемой задачи:

$$T = \vartheta - (\vartheta - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \left[\mu_n \left(\xi + \frac{1}{2} \right) \right] e^{-\mu_n^2 \tau}, \quad (3.7.26)$$

где

$$C_n = \frac{2\gamma}{[\gamma(1 + \gamma) + \mu^2] \cos \mu_n}; \quad (3.7.27)$$

μ_n — корни уравнения

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\gamma}{\mu}. \quad (3.7.28)$$

Пусть начальная температура пластины $T_0 = 293^\circ \text{K}$, температура газового потока $\vartheta = 1273^\circ \text{K}$, коэффициент температуропроводности $a =$

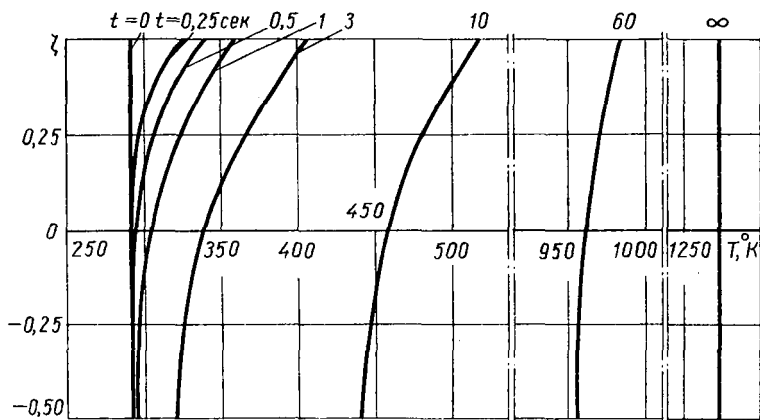


Рис. 13.

$= 0,66 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{сек}$, критерий теплового подобия, соответствующий толщине пластины $h = 0,008 \text{ м}$, коэффициенту теплоотдачи $\alpha = 800 \text{ вт}/\text{м}^2 \cdot \text{град}$ и коэффициенту теплопроводности $\lambda_q = 32 \text{ вт}/\text{м} \cdot \text{град}$, $Bi = \gamma = \frac{\alpha h}{\lambda_q} = 0,2$.

В табл. 1 приведены значения первых шести корней уравнения (3.7.28) μ_n при $Bi = 0,2$ и соответствующие значения коэффициентов C_n [39]. С помощью этой таблицы и таблиц тригонометрических и экспоненциальных функций находим распределение температуры по толщине пластины для разных моментов времени. Результаты расчета представлены кривыми на рис. 13.

§ 3.8. Нестационарное плоское осесимметричное температурное поле диска и длинного цилиндра

Определим нестационарное плоское температурное поле сплошного диска толщины h и радиуса r_2 при конвективном теплообмене между его поверхностью и окружающей средой. Конвективный теплообмен на поверхностях $z = \pm \frac{h}{2}$ предполагается одинаковым.

Применяя записанное в полярных координатах уравнение (3.3.8) и вводя относительную координату $\rho = \frac{r}{r_2}$ и безразмерное время $\tau = \frac{at}{r_2^2}$, получаем для рассматриваемой задачи уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial T}{\partial \rho} - \delta^2 (T - \vartheta) = \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (3.8.1)$$

при условиях

$$T = T_0 \quad \text{при} \quad \tau = 0 \quad (3.8.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} + \gamma_2 (T - \vartheta_2) = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1,$$

где

$$\delta^2 = \frac{2\gamma r_2^2}{h^2}, \quad \gamma = \frac{\alpha h}{\lambda_q}, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_2 r_2}{\lambda_q}.$$

Здесь введены следующие обозначения: ϑ и α — температура среды и коэффициент теплоотдачи на поверхностях диска $z = \pm \frac{h}{2}$; ϑ_2 и α_2 — температура среды и коэффициент теплоотдачи на контуре диска $r = r_2$ ($\rho = 1$).

Пусть температура ϑ_2 среды, омывающей наружный контур диска, изменяется во времени по экспоненциальному закону

$$\vartheta_2 = \vartheta_0 (1 + k_1 e^{-k_1 \tau}), \quad (3.8.3)$$

где ϑ_0 , k и k_1 — постоянные.

Применяя преобразование Лапласа (3.6.1) к уравнению (3.8.1) и второму условию (3.8.2), получаем дифференциальное уравнение

для изображения температуры диска

$$\frac{d^2 T^*}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dT^*}{d\rho} - \varepsilon^2 \left(T^* - \frac{\Theta}{\rho \varepsilon^2} \right) = 0 \quad (3.8.4)$$

при условии

$$\frac{dT^*}{d\rho} + \gamma_2 \left(T^* - \frac{\vartheta_0}{\rho} - \frac{\vartheta_0 k_1}{\rho + k} \right) = 0 \quad \text{при } \rho = 1, \quad (3.8.5)$$

где

$$T^* = \int_0^{\infty} T e^{-\rho \tau} d\tau, \quad \Theta = \delta^2 \vartheta + \rho T_0, \quad \varepsilon^2 = \delta^2 + \rho.$$

Уравнение (3.8.4) по форме совпадает с уравнением (3.4.3). По аналогии с решением последнего находим решение уравнения (3.8.4) в виде

$$T^* = \frac{\Theta}{\rho \varepsilon^2} + C_1 I_0(\varepsilon \rho) + C_2 K_0(\varepsilon \rho). \quad (3.8.6)$$

Полагая постоянную интегрирования C_2 равной нулю из условия конечности температуры диска в его центре и определяя постоянную интегрирования C_1 из условия (3.8.5), получаем следующее выражение для изображения температуры диска:

$$T^* = \frac{A(\rho)}{B(\rho)}, \quad (3.8.7)$$

где

$$\begin{aligned} A(\rho) &= \Theta(\rho + k) \{ \gamma_2 I_0(\varepsilon) + \varepsilon I_1(\varepsilon) \} + \gamma_2 \{ \varepsilon^2 \vartheta_0 [(p + k) + k_1 p] - \\ &\quad - (p + k) \Theta \} I_0(\varepsilon \rho); \\ B(\rho) &= \rho(\rho + k) \varepsilon^2 \{ \gamma_2 I_0(\varepsilon) + \varepsilon I_1(\varepsilon) \}. \end{aligned} \quad (3.8.8)$$

Корнями уравнения $B(\rho) = 0$ являются $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = -k$, $\rho_3 = -\delta^2$, $\rho_{n+3} = -(\delta^2 + \beta_n^2)$ ($n = 1, 2, \dots$), где $\beta_n = i\varepsilon$ — корни уравнения

$$\gamma_2 J_0(\varepsilon) + \varepsilon I_1(\varepsilon) = \gamma_2 J_0(\beta) - \beta_1 J(\beta) = 0, \quad (3.8.9)$$

$J_0(\beta)$, $J_1(\beta)$ — бесселевы функции первого рода соответственно нулевого и первого порядков.

Учитывая значения этих корней и выполняя переход от изображения (3.8.7) к оригиналу с помощью формулы (3.6.15), после вычислений получаем выражение для температуры диска

$$\begin{aligned} T &= \vartheta + \frac{\gamma_2(\vartheta_0 - \vartheta) I_0(\delta \rho)}{\gamma_2 I_0(\delta) + \delta I_1(\delta)} + \frac{\gamma_2 \vartheta_0 k_1 I_0(s \rho) e^{-k \tau}}{\gamma_2 I_0(s) + s I_1(s)} - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} A_n B_n J_0(\beta_n \rho) e^{-(\delta^2 + \beta_n^2) \tau}, \end{aligned} \quad (3.8.10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{2\gamma_2}{(\gamma_2^2 + \beta_n^2) J_0(\beta_n)} ; \\ B_n &= \frac{\beta_n^2 \vartheta_0 + \delta^2 \vartheta}{\beta_n^2 + \delta^2} - T_0 + \frac{\beta_n^2 \vartheta_0 k_1}{\beta_n^2 + \delta^2 - k} ; \\ s &= \sqrt{\delta^2 - k} . \end{aligned} \right\} \quad (3.8.11)$$

В случае мгновенного воздействия среды на наружный контур диска его температурное поле получаем из решения (3.8.10), полагая в нем $\vartheta_0 = \vartheta_2$ и $k_1 = 0$:

$$T = \vartheta + \frac{\gamma_2 (\vartheta_2 - \vartheta) I_0(\delta \rho)}{\gamma_2 J_0(\delta) + \delta I_1(\delta)} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n B_n J_0(\beta_n \rho) e^{-(\delta^2 + \beta_n^2) \tau} , \quad (3.8.12)$$

где

$$B_n = \frac{\beta_n^2 \vartheta_2 + \delta^2 \vartheta}{\beta_n^2 + \delta^2} - T_0 . \quad (3.8.13)$$

Полагая в выражении (3.8.10) $\delta = 0$, находим нестационарное температурное поле длинного сплошного цилиндра:

$$\begin{aligned} T &= \vartheta_0 + \frac{\gamma_2 k_1 \vartheta_0 J_0(\sqrt{k} \rho) e^{-k \tau}}{\gamma_2 J_0(\sqrt{k}) - \sqrt{k} J_1(\sqrt{k})} - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \left(\vartheta_0 - T_0 + \frac{k_1 \vartheta_0 \beta_n^2}{\beta_n^2 - k} \right) A_n J_0(\beta_n \rho) e^{-\beta_n^2 \tau} , \end{aligned} \quad (3.8.14)$$

где коэффициенты A_n определяются выражением (3.8.11).

Пример. Исследуем распределение температуры в длинном сплошном цилиндре при конвективном теплообмене между его поверхностью и окружающей

Таблица 2

n	β_n	A_n
1	2,2509	1,5853
2	5,1773	-1,0091
3	8,1422	0,7519
4	11,1367	-0,5901
5	14,1576	0,4760
6	17,2008	-0,3913

Таблица 3

ρ	$T, \text{ }^\circ\text{K}$			
	$t = 180 \text{ сек}$	$t = 300 \text{ сек}$	$t = 420 \text{ сек}$	$t = 540 \text{ сек}$
0	324	342	383	436
0,2	327	352	398	452
0,4	339	387	445	500
0,6	383	463	528	579
0,8	499	591	645	679
1,0	709	759	778	788

средой. Пусть начальная температура цилиндра $T_0 = 323^\circ \text{K}$; температура среды ϑ_2 изменяется в зависимости от времени по закону (3.8.3) при $\vartheta_0 = 823^\circ \text{K}$, $k_1 = -0,5473$, $k = 53,6$, коэффициент температуропроводности $a = 0,557 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{сек}$, критерий теплового подобия $Bi = \gamma_2 = \frac{\alpha r_2}{\lambda_0} = 15$, $r_2 = 0,141 \text{ м}$.

В расчете применяем решение (3.8.14). Входящий в него ряд быстро сходится: достаточно принять во внимание шесть членов ряда, чтобы получить результат с точностью до трех-четырех значащих цифр. Значения первых шести корней β_n трансцендентного уравнения (3.8.9), отвечающие $Bi = 15$, и соответствующие значения коэффициентов A_n приведены в табл. 2 [39].

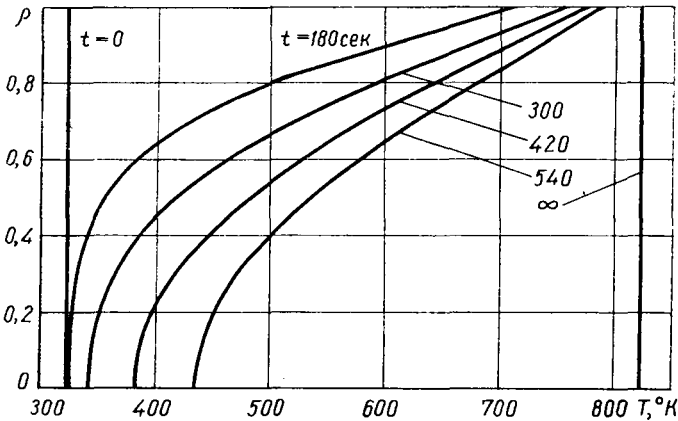


Рис. 14.

Используя данные табл. 2 и таблицы бесселевых и экспоненциальных функций, а также асимптотические формулы для бесселевых функций при больших значениях аргумента, вычисляем по формуле (3.8.14) значения температуры цилиндра T ($^{\circ}K$) в моменты времени $t = 180; 300; 420; 540$ сек на радиусах $\rho = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0$. Результаты расчета приведены в табл. 3 и представлены кривыми на рис. 14.

§ 3.9. Нестационарное плоское осесимметричное температурное поле длинного полого цилиндра

Пусть между цилиндрическими поверхностями длинного полого цилиндра и окружающей средой происходит нестационарный конвективный теплообмен. Температура среды и коэффициент теплоотдачи на внутренней цилиндрической поверхности ($r = r_1$) равны ϑ_1 и α_1 , а на наружной цилиндрической поверхности ($r = r_2$) — ϑ_2 и α_2 . Температуры ϑ_1 и ϑ_2 предполагаются постоянными. Нестационарное плоское осесимметричное температурное поле такого цилиндра описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial T}{\partial \rho} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (3.9.1)$$

при условиях

$$\left. \begin{aligned} T &= T_0 \quad \text{при} \quad \tau = 0; \\ \frac{\partial T}{\partial \rho} - \gamma_1 (T - \vartheta_1) &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = \rho_1; \\ \frac{\partial T}{\partial \rho} + \gamma_2 (T - \vartheta_2) &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1, \end{aligned} \right\} \quad (3.9.2)$$

где

$$\tau = \frac{at}{r_2^2}; \quad \gamma_1 = \frac{\alpha_1 r_2}{\lambda_q}; \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_2 r_2}{\lambda_q}.$$

Применяя к уравнению (3.9.1) и условиям (3.9.2) преобразование Лапласа (3.6.1), получаем уравнение

$$\frac{d^2 T^*}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dT^*}{d\rho} + \beta^2 \left(T^* - \frac{T_0}{\rho} \right) = 0 \quad (3.9.3)$$

при условиях

$$\begin{aligned} \frac{dT^*}{d\rho} - \gamma_1 \left(T^* - \frac{\vartheta_1}{\rho} \right) &= 0 \quad \text{при } \rho = \rho_1; \\ \frac{dT^*}{d\rho} + \gamma_2 \left(T^* - \frac{\vartheta_2}{\rho} \right) &= 0 \quad \text{при } \rho = 1, \end{aligned} \quad (3.9.4)$$

где

$$T^* = \int_0^{\infty} T e^{-\rho\tau} d\tau, \quad \beta = i\sqrt{\rho}.$$

Решением уравнения (3.9.3) является функция

$$T^* = \frac{T_0}{\rho} + C_1 J_0(\beta\rho) + C_2 Y_0(\beta\rho), \quad (3.9.5)$$

где $J_0(x)$ и $Y_0(x)$ — бesselевы функции нулевого порядка первого и второго рода.

Определяя постоянные интегрирования C_1 и C_2 из условий (3.9.4) и принимая во внимание известные из теории бesselевых функций формулы

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x), \quad \frac{dY_0(x)}{dx} = -Y_1(x), \quad (3.9.6)$$

где $J_1(x)$ и $Y_1(x)$ — бesselевы функции первого порядка соответственно первого и второго рода, находим изображение температуры цилиндра в виде (3.7.15), где

$$A(\rho) = \gamma_2(\vartheta_2 - T_0) u_0(\beta\rho) + \gamma_1(\vartheta_1 - T_0) v_0(\beta\rho), \quad (3.9.7)$$

$$B(\rho) = \rho [\gamma_2 u_0(\beta) - \beta u_1(\beta)]. \quad (3.9.8)$$

Функции $u_m(x)$ и $v_m(x)$ ($m = 0, 1$) имеют вид

$$\begin{aligned} u_m(x) = & \left[Y_1(\beta\rho_1) + \frac{\gamma_1}{\beta} Y_0(\beta\rho_1) \right] J_m(x) - \left[J_1(\beta\rho_1) + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma_1}{\beta} J_0(\beta\rho_1) \right] Y_m(x); \end{aligned} \quad (3.9.9)$$

$$\begin{aligned} v_m(x) = & \left[Y_1(\beta) - \frac{\gamma_2}{\beta} Y_0(\beta) \right] J_m(x) - \\ & - \left[J_1(\beta) - \frac{\gamma_2}{\beta} J_0(\beta) \right] Y_m(x) \quad (m = 0, 1). \end{aligned} \quad (3.9.10)$$

Переход от изображения к оригиналу выполняем с помощью формулы (3.6.15).

Корнями уравнения $B(p) = 0$ являются $p_1 = 0$ и $p_{n+1} = -\beta_n^2$ ($n = 1, 2, \dots$), где β_n — корни уравнения

$$\frac{\beta u_1(\beta)}{u_0(\beta)} = \gamma_2. \quad (3.9.11)$$

На основании формулы (3.6.15) и изображения (3.7.15), в котором функции $A(p)$, $B(p)$ имеют выражения (3.9.7) и (3.9.8), искомая температура может быть представлена так:

$$T = T_0 + \frac{A(0)}{B'(0)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(-\beta_n^2)}{\beta_n \left[\frac{d}{d\beta} [\gamma_2 u_0(\beta) - \beta u_1(\beta)] \right]_{\beta=\beta_n}} e^{-\beta_n^2 \tau}. \quad (3.9.12)$$

В этом выражении

$$\begin{aligned} \frac{A(0)}{B'(0)} &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\gamma_2 (\vartheta_2 - T_0) u_0(\beta\rho) + \gamma_1 (\vartheta_1 - T_0) v_0(\beta\rho)}{\gamma_2 u_0(\beta) - \beta u_1(\beta)} = \\ &= \vartheta_2 + (\vartheta_1 - \vartheta_2) \frac{\gamma_1 \rho_1 (1 - \gamma_2 \ln \rho)}{\gamma_2 + \gamma_1 \rho_1 (1 - \gamma_2 \ln \rho_1)} - T_0. \end{aligned} \quad (3.9.13)$$

Используя формулы (3.9.6) и

$$\frac{dJ_1(x)}{dx} = J_0(x) - \frac{J_1(x)}{x}, \quad \frac{dY_1(x)}{dx} = Y_0(x) - \frac{Y_1(x)}{x}, \quad (3.9.14)$$

вычисляем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} [\gamma_2 u_0(\beta) - \beta u_1(\beta)] &= -\beta u_0(\beta) - \gamma_2 u_1(\beta) + \\ &+ \beta \left(\rho_1 - \frac{\gamma_1}{\beta^2} \right) v_0(\beta\rho_1) - (1 + \rho_1 \gamma_1) v_1(\beta\rho_1). \end{aligned} \quad (3.9.15)$$

Для дальнейшего преобразования выражения (3.9.12) рассмотрим некоторые свойства функций (3.9.9) и (3.9.10).

Непосредственной подстановкой легко убедиться в справедливости тождества

$$u_1(\beta\rho_1) = -\frac{\gamma_1}{\beta} u_0(\beta\rho_1). \quad (3.9.16)$$

Из уравнения (3.9.11) вытекает

$$\begin{aligned} &\left[Y_1(\beta\rho_1) + \frac{\gamma_1}{\beta} Y_0(\beta\rho_1) \right] \left[J_1(\beta) - \frac{\gamma_2}{\beta} J_0(\beta) \right] - \\ &- \left[J_1(\beta\rho_1) + \frac{\gamma_1}{\beta} J_0(\beta\rho_1) \right] \left[Y_1(\beta) - \frac{\gamma_2}{\beta} Y_0(\beta) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.9.17)$$

На основании известной из теории бесселевых функций зависимости

$$J_1(x) Y_0(x) - J_0(x) Y_1(x) = \frac{2}{\pi x} \quad (3.9.18)$$

можно получить

$$u_0(\beta \rho_1) = Y_1(\beta \rho_1) J_0(\beta \rho_1) - J_1(\beta \rho_1) Y_0(\beta \rho_1) = -\frac{2}{\pi \beta \rho_1},$$

откуда согласно уравнению (3.9.17)

$$u_0(\beta) = -\frac{J_1(\beta \rho_1) + \frac{\gamma_1}{\beta} J_0(\beta \rho_1)}{J_1(\beta) - \frac{\gamma_2}{\beta} J_0(\beta)} \frac{2}{\pi \beta}$$

или

$$\frac{\rho_1 u_0(\beta \rho_1)}{u_0(\beta)} = \frac{J_1(\beta) - \frac{\gamma_2}{\beta} J_0(\beta)}{J_1(\beta \rho_1) + \frac{\gamma_1}{\beta} J_0(\beta \rho_1)}. \quad (3.9.19)$$

Используя выражение (3.9.10) при $x = \beta \rho$ и уравнения (3.9.17) и (3.9.19), определяем

$$v_m(\beta \rho) = \frac{\rho_1 u_0(\beta \rho_1)}{u_0(\beta)} u_m(\beta \rho) \quad (m = 0, 1). \quad (3.9.20)$$

Далее проводим следующие преобразования. В равенствах (3.9.7) и (3.9.15) функции $v_0(\beta \rho)$, $v_0(\beta \rho_1)$ и $v_1(\beta \rho_1)$ заменяем на основании формулы (3.9.20) соответственно функциями

$$\frac{\rho_1 u_0(\beta \rho_1)}{u_0(\beta)} u_0(\beta \rho), \quad \frac{\rho_1 u_0^2(\beta \rho_1)}{u_0(\beta)}, \quad \frac{\rho_1 u_0(\beta \rho_1)}{u_0(\beta)} u_1(\beta \rho_1).$$

Затем в равенстве (3.9.15) функции $u_1(\beta)$ и $u_1(\beta \rho_1)$ заменяем согласно уравнениям (3.9.11) и (3.9.16) соответственно функциями $\frac{\gamma_2}{\beta} u_0(\beta)$ и $-\frac{\gamma_1}{\beta} u_0(\beta \rho_1)$. Подставляя после этого функции (3.9.7), (3.9.13) и (3.9.15) в выражение (3.9.12), получаем температурное поле цилиндра в окончательном виде:

$$T = \vartheta_2 + (\vartheta_1 - \vartheta_2) \frac{\gamma_1 \rho_1 (1 - \gamma_2 \ln \rho)}{\gamma_2 + \gamma_1 \rho_1 (1 - \gamma_2 \ln \rho_1)} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_0(\beta_n \rho) e^{-\beta_n^2 \tau}, \quad (3.9.21)$$

где

$$C_n = \frac{\gamma_2 (\vartheta_2 - T_0) u_0(\beta_n) + \rho_1 \gamma_1 (\vartheta_1 - T_0) u_0(\beta_n \rho_1)}{(\gamma_2^2 + \beta_n^2) u_0^2(\beta_n) - \rho_1^2 (\gamma_1^2 + \beta_n^2) u_0^2(\beta_n \rho_1)}. \quad (3.9.22)$$

При одинаковых температурах среды $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$ имеем

$$T = \vartheta - 2(\vartheta - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} D_n u_0(\beta_n \rho) e^{-\beta_n^2 \tau}, \quad (3.9.23)$$

где

$$D_n = \frac{\gamma_2 u_0(\beta_n) + \rho_1 \gamma_1 u_0(\beta_n \rho_1)}{(\gamma_2^2 + \beta_n^2) u_0^2(\beta_n) - \rho_1^2 (\gamma_1^2 + \beta_n^2) u_0^2(\beta_n \rho_1)}. \quad (3.9.24)$$

Полагая $\gamma_1 = 0$ и $\rho_1 = 0$, получаем температурное поле сплошного цилиндра

$$T = \vartheta - 2(\vartheta - T_0) \gamma_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_n \rho) e^{-\beta_n^2 \tau}}{(\gamma_2^2 + \beta_n^2) J_0(\beta_n)}, \quad (3.9.25)$$

где β_n — корни уравнения

$$\frac{\beta J_1(\beta)}{J_0(\beta)} = \gamma_2. \quad (3.9.26)$$

Этот же результат получается при подстановке в выражение (3.8.14) $\vartheta_0 = \vartheta$, $k_1 = 0$.

§ 3.10. Нестационарное осесимметричное температурное поле цилиндра конечной длины

Рассмотрим осесимметричное температурное поле полого цилиндра длины l (рис. 15), между поверхностью которого и окружающей средой происходит нестационарный конвективный теплообмен.

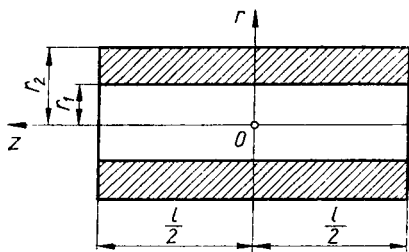


Рис. 15.

Предполагаем, что температура среды равна $\vartheta = \text{const}$. Эта задача описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.10.1)$$

при начальном условии

$$T = T_0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (3.10.2)$$

и граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\alpha_1}{\lambda_q} (T - \vartheta) &= 0 \quad \text{при} \quad r = r_1; \\ \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\alpha_2}{\lambda_q} (T - \vartheta) &= 0 \quad \text{при} \quad r = r_2; \\ \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\alpha_3}{\lambda_q} (T - \vartheta) &= 0 \quad \text{при} \quad z = \frac{l}{2}; \\ \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\alpha_4}{\lambda_q} (T - \vartheta) &= 0 \quad \text{при} \quad z = -\frac{l}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.10.3)$$

где α_1 и α_2 — коэффициенты теплоотдачи на цилиндрических поверхностях соответственно $r = r_1$ и $r = r_2$; α_3 и α_4 — коэффициенты теплоотдачи на поверхностях $z = \pm \frac{l}{2}$; λ_q и a — коэффициенты соответственно теплопроводности и температуропроводности материала цилиндра.

Решение уравнения (3.10.1) при начальном условии (3.10.2) и граничных условиях (3.10.3) выбираем в виде

$$T = \vartheta - \frac{1}{\vartheta - T_0} (\vartheta - T_I) (\vartheta - T_{II}), \quad (3.10.4)$$

где

$$T_I = T_I(r, t); \quad T_{II} = T_{II}(z, t).$$

Подставляя выражение (3.10.4) в уравнение (3.10.1) и в условия (3.10.2) и (3.10.3), получаем

$$\left(\frac{\partial^2 T_I}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_I}{\partial r} - \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T_I}{\partial t} \right) (\vartheta - T_{II}) + \left(\frac{\partial^2 T_{II}}{\partial z^2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T_{II}}{\partial t} \right) (\vartheta - T_I) = 0; \quad (3.10.5)$$

$$T = \vartheta - \frac{1}{\vartheta - T_0} (\vartheta - T_I) (\vartheta - T_{II}) = T_0 \quad \text{при} \quad t = 0; \quad (3.10.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial T_I}{\partial r} - \frac{\alpha_1}{\lambda_q} (T_I - \vartheta) \right] (\vartheta - T_{II}) &= 0 \quad \text{при} \quad r = r_1; \\ \left[\frac{\partial T_I}{\partial r} + \frac{\alpha_2}{\lambda_q} (T_I - \vartheta) \right] (\vartheta - T_{II}) &= 0 \quad \text{при} \quad r = r_2; \\ \left[\frac{\partial T_{II}}{\partial z} + \frac{\alpha_3}{\lambda_q} (T_{II} - \vartheta) \right] (\vartheta - T_I) &= 0 \quad \text{при} \quad z = \frac{l}{2}; \\ \left[\frac{\partial T_{II}}{\partial z} - \frac{\alpha_4}{\lambda_q} (T_{II} - \vartheta) \right] (\vartheta - T_I) &= 0 \quad \text{при} \quad z = -\frac{l}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.10.7)$$

Уравнения (3.10.5) — (3.10.7) удовлетворяются, если T_I является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 T_I}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_I}{\partial r} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T_I}{\partial t} \quad (3.10.8)$$

при начальном условии

$$T_I = T_0 \quad \text{при} \quad t = 0$$

и граничных условиях

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_I}{\partial r} - \frac{\alpha_1}{\lambda_q} (T_I - \vartheta) &= 0 \quad \text{при} \quad r = r_1; \\ \frac{\partial T_I}{\partial r} + \frac{\alpha_2}{\lambda_q} (T_I - \vartheta) &= 0 \quad \text{при} \quad r = r_2, \end{aligned} \quad (3.10.9)$$

а T_{II} — решением уравнения

$$\frac{\partial^2 T_{II}}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T_{II}}{\partial t} \quad (3.10.10)$$

при начальном условии

$$T_{II} = T_0 \quad \text{при} \quad t = 0$$

и граничных условиях

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{II}}{\partial z} + \frac{\alpha_3}{\lambda_q} (T_{II} - \vartheta) &= 0 \quad \text{при} \quad z = \frac{l}{2}, \\ \frac{\partial T_{II}}{\partial z} - \frac{\alpha_4}{\lambda_q} (T_{II} - \vartheta) &= 0 \quad \text{при} \quad z = -\frac{l}{2}. \end{aligned} \quad (3.10.11)$$

Из формул (3.10.8) — (3.10.11) видно, что функция T_I является решением задачи о нестационарной теплопроводности длинного цилиндра (3.9.23), а функция T_{II} — решением задачи о нестационарной теплопроводности неограниченной пластины (3.7.23). Подставляя выражения для функций T_I , T_{II} в решение (3.10.4) и выполняя необходимые преобразования, получаем температурное поле цилиндра конечной длины при нестационарном конвективном теплообмене между его поверхностями и окружающей средой:

$$T = \vartheta - 4(\vartheta - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} D_n \mu_n (\beta_n \rho) e^{-\beta_n^2 \tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(\zeta)}{B_n} e^{-\mu_n^2 \tau_1}, \quad (3.10.12)$$

где

$$\rho = \frac{r}{r_2}, \quad \tau = \frac{at}{r_2^2}, \quad \tau_1 = \frac{at}{l^2}, \quad \zeta = \frac{z}{l},$$

β_n и μ_n — корни уравнений (3.9.11) и (3.7.20); значения $A_n(\zeta)$, B_n и D_n определяются соответственно выражениями (3.7.24), (3.7.25) и (3.9.24).

Нестационарная теплопроводность полого цилиндра конечной длины в более общем случае рассмотрена в работе [43].

§ 3.11. Нестационарное плоское осесимметричное температурное поле длинного цилиндра под воздействием линейного источника тепла, расположенного на оси цилиндра

Рассмотрим полый длинный цилиндр, внутренняя полость которого наполнена тепловыделяющей средой (рис. 16). В этой среде равномерно распределены объемные источники тепла постоянной удельной мощности ω_0 . Пусть коэффициент теплопроводности тепловыделяющей среды настолько велик, что градиентом температуры для нее можно пренебречь. Между наружной поверхностью цилиндра и окружающей средой происходит нестационарный конвективный теплообмен.

Температурное поле такого цилиндра описывается уравнением (3.9.1) при условиях

$$\left. \begin{aligned} T &= T_0 \quad \text{при} \quad \tau = 0; \\ \frac{\partial T}{\partial \rho} &= \frac{qr_2}{\lambda_q} \quad \text{при} \quad \rho = \rho_1; \\ \frac{\partial T}{\partial \rho} + \gamma_2(T - \vartheta_2) &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1, \end{aligned} \right\} \quad (3.11.1)$$

где q — плотность теплового потока на поверхности цилиндра $r = r_1$ ($\rho = \rho_1$); обозначения остальных величин те же, что и в § 3.9.

При составлении второго условия (3.11.1) принимаем во внимание, что положительное направление теплового потока q , совпадающее с направлением внешней нормали к поверхности $r = r_1$, противоположно направлению оси r .

Не учитывая тепла, затрачиваемого на нагрев тепловыделяющей среды, можно записать следующее равенство:

$$-2\pi r_1 q = \pi r_1^2 \omega_0 = \omega,$$

где ω — мощность линейного источника тепла, представляющая собой количество тепла, поступающего через поверхность $r = r_1$ цилиндра единичной длины в единицу времени.

Отсюда
$$q = -\frac{r_1 \omega_0}{2} = -\frac{\omega}{2\pi r_1}. \quad (3.11.2)$$

Применяя к уравнениям (3.9.1) и (3.11.1) преобразование Лапласа (3.6.1) и учитывая равенство (3.11.2), получаем для изображения температуры цилиндра уравнение (3.9.3) при условиях

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT^*}{d\rho} &= -\frac{\omega}{2\pi\lambda_q\rho\rho_1} \quad \text{при} \quad \rho = \rho_1, \\ \frac{dT^*}{d\rho} + \gamma_2\left(T^* - \frac{\vartheta_2}{\rho}\right) &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1, \end{aligned} \right\} \quad (3.11.3)$$

где

$$T^* = \int_0^{\infty} T e^{-\rho\tau} d\tau, \quad \beta = i\sqrt{p}.$$

Изображение температуры цилиндра находим аналогично изображению, полученному в § 3.9, в виде выражения (3.7.15), где

$$\left. \begin{aligned} A(\rho) &= \left[\gamma_2(\vartheta_2 - T_0) u_0(\beta\rho) + \frac{\omega}{2\pi\lambda_q\rho_1} v_0(\beta\rho) \right] \left(-\frac{\pi\beta\rho_1}{2} \right); \\ B(\rho) &= \rho [\gamma_2 u_0(\beta) - \beta u_1(\rho)] \left(-\frac{\pi\beta\rho_1}{2} \right); \end{aligned} \right\} \quad (3.11.4)$$

$$u_m(x) = Y_1(\beta\rho_1) J_m(x) - J_1(\beta\rho_1) Y_m(x) \quad (m = 0, 1); \quad (3.11.5)$$

$$v_0(\beta\rho) = \left[Y_1(\beta) - \frac{\gamma_2}{\beta} Y_0(\beta) \right] J_0(\beta\rho) - \left[J_1(\beta) - \frac{\gamma_2}{\beta} J_0(\beta) \right] Y_0(\beta\rho).$$

Для удобства дальнейших преобразований в выражения функций $A(\rho)$ и $B(\rho)$ вводим множитель $-\frac{\pi\beta\rho_1}{2}$.

Чтобы определить температуру цилиндра с источником тепла на оси, устремляем ρ_1 к нулю, полагая $\omega = \text{const}$. Тогда выражения (3.11.4) принимают вид

$$A(\rho) = \gamma_2(\vartheta_2 - T_0) J_0(\beta\rho) - \frac{\omega\beta}{4\lambda_q} v_0(\beta\rho); \quad (3.11.6)$$

$$B(\rho) = \rho [\gamma_2 J_0(\beta) - \beta J_1(\beta)].$$

Уравнение $B(\rho) = 0$ имеет корни $\rho_1 = 0$ и $\rho_{n+1} = -\beta_n^2$ ($n = 1, 2, \dots$), где β_n удовлетворяет уравнению

$$\frac{\beta J_1(\beta)}{J_0(\beta)} = \gamma_2. \quad (3.11.7)$$

Решение для оригинала температуры цилиндра определяется выражением (3.9.12), где

$$\frac{A(0)}{B'(0)} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\gamma_2(\vartheta_2 - T_0) J_0(\beta\rho) - \frac{\omega\beta}{4\lambda_q} v_0(\beta\rho)}{\gamma_2 J_0(\beta) - \beta J_1(\beta)} =$$

$$= \vartheta_2 - T_0 + \frac{\omega}{2\pi\lambda_q} \left(\frac{1}{\gamma_2} - \ln \rho \right); \quad (3.11.8)$$

$$A(-\beta_n^2) = \gamma_2(\vartheta_2 - T_0) J_0(\beta_n\rho) - \frac{\omega\beta_n}{4\lambda_q} v_0(\beta_n\rho), \quad (3.11.9)$$

$$v_0(\beta_n\rho) = \left[Y_1(\beta_n) - \frac{\gamma_2}{\beta_n} Y_0(\beta_n) \right] J_0(\beta_n\rho) =$$

$$= [J_0(\beta_n) Y_1(\beta_n) - J_1(\beta_n) Y_0(\beta_n)] \frac{J_0(\beta_n\rho)}{J_0(\beta_n)} = -\frac{2}{\pi\beta_n} \cdot \frac{J_0(\beta_n\rho)}{J_0(\beta_n)}, \quad (3.11.10)$$

$$\beta_n \frac{d}{d\beta} [\gamma_2 J_0(\beta) - \beta J_1(\beta)]_{\beta=\beta_n} = -\beta_n [\gamma_2 J_1(\beta_n) + \beta_n J_0(\beta_n)] =$$

$$= -(\gamma_2^2 + \beta_n^2) J_0(\beta_n). \quad (3.11.11)$$

При составлении выражений (3.11.10) и (3.11.11) используем уравнения (3.9.18) и (3.11.7).

Подставляя функции (3.11.8) — (3.11.11) в выражение (3.9.12), получаем решение для нестационарного температурного поля цилиндра с линейным источником тепла на оси мощности ω в окончательном виде:

$$T = \vartheta_2 + \frac{\omega}{2\pi\lambda_q} \left(\frac{1}{\gamma_2} - \ln \rho \right) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\beta_n\rho) e^{-\beta_n^2 \tau}, \quad (3.11.12)$$

где

$$A_n = \frac{\gamma_2}{(\gamma_2^2 + \beta_n^2) J_0(\beta_n)} \left[2(\vartheta_2 - T_0) + \frac{w}{\pi \lambda_q \gamma_2 J_0(\beta_n)} \right]. \quad (3.11.13)$$

Заменяя на основании уравнения (3.11.7) $\gamma_2 J_0(\beta_n)$ величиной $\beta_n J_1(\beta_n)$ и устремляя γ_2 к бесконечности, находим решение этой задачи для случая, когда вместо конвективного теплообмена на наружной поверхности цилиндра задана температура ϑ :

$$T = \vartheta_2 - \frac{w}{2\pi \lambda_q} \ln \rho - \sum_{n=1}^{\infty} \left[2(\vartheta_2 - T_0) + \frac{w}{\pi \lambda_q \beta_n J_1(\beta_n)} \right] \frac{J_0(\beta_n \rho)}{\beta_n J_1(\beta_n)} e^{-\beta_n^2 \tau}. \quad (3.11.14)$$

Полагая в решении (3.11.12) $w = 0$, получаем температурное поле сплошного цилиндра без источников тепла (3.9.25).

**ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА
ТЕРМОУПРУГОСТИ**

§ 4.1. Особенности плоской задачи термоупругости

В настоящей главе рассматриваются в квазистатической постановке две типичные плоские задачи термоупругости: о плоской деформации и о плоском напряженном состоянии. Плоская деформация возникает в длинном цилиндрическом или призматическом теле (рис. 17), а плоское напряженное состояние приближенно реализуется в тонкой пластине (рис. 18). Математические формулировки этих двух задач сходны. Они обсуждаются в § 4.2.

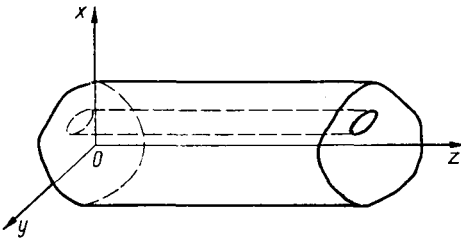


Рис. 17.

С точки зрения пространственной теории термоупругости задача о плоской деформации существенно отличается от задачи о плоском напряженном состоянии. Решение задачи о плоской деформации точно удовлетворяет

уравнениям пространственной теории термоупругости почти для всего призматического тела. Оно приближенное только вблизи торцевых поверхностей длинного призматического тела, на которых условия для нормального напряжения удовлетворяются в смысле принципа Сен-Венана.

Решение задачи о плоском напряженном состоянии при произвольном двумерном температурном поле дает лишь хорошее приближение к действительному напряженному состоянию весьма тонкой пластины, свободной на поверхностях от внешних сил.

Если на температурное поле наложить определенное ограничение, то и для задачи о плоском напряженном состоянии можно получить решение в рамках пространственной теории термоупругости [5]. Важным частным случаем такого рода задач является задача о тепловых напряжениях в пластине при изменении температуры только по толщине (§ 4.3).

Постановка плоской задачи термоупругости в напряжениях для многосвязного тела, условия однозначности перемещений и дислока-

ционная аналогия рассматриваются в § 4.4. Полученные условия однозначности обобщают известные условия однозначности перемещений в плоской задаче изотермической теории упругости, введенные впервые Мичеллом [88], на случай плоской задачи термоупругости. Из условий однозначности вытекают три условия для стационарного температурного поля, обеспечивающие отсутствие в многосвязном теле тепловых напряжений.

Дислокационная аналогия, установленная Н. И. Мухелишвили еще в 1916 г. [44], позволяет плоскую задачу термоупругости для многосвязного тела при стационарном температурном поле свести к плоской задаче изотермической теории упругости с дислокациями.

Для исследования плоских задач термоупругости может быть эффективно применена теория функций комплексного переменного. Метод решения плоских задач теории упругости, основанный на теории функций комплексного переменного, подробно разработан Н. И. Мухелишвили [45]. Обобщение этого метода на случай плоской задачи термоупругости принадлежит Н. Н. Лебедеву [32]. Здесь ограничимся рассмотрением применения теории функций комплексного переменного в плоской задаче термоупругости при стационарном температурном поле, при этом выведем в комплексном виде одно условие для плоского стационарного температурного поля, не вызывающего напряжений в многосвязном теле, и приведем более строгую формулировку дислокационной аналогии (§ 4.5).

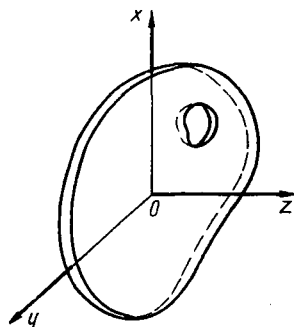


Рис. 18.

Простейшими плоскими задачами термоупругости, имеющими большое практическое значение, являются задачи о тепловых напряжениях в цилиндре и диске при плоском осесимметричном температурном поле. Исследованию данных задач посвящена обширная литература. Наиболее ранними работами в этой области являются работы Лоренца [87] и А. Н. Динника [17]. Современное состояние исследований тепловых напряжений в цилиндрах и дисках изложено в книге [5]. Решения задач, пригодные как для стационарного, так и для нестационарного температурных полей, находятся в § 4.6 непосредственным интегрированием разрешающего уравнения второго порядка относительно радиального напряжения, а также по методу В. М. Майзеля (§ 2.5).

Применение полученных решений иллюстрируется примерами определения тепловых напряжений в длинном сплошном цилиндре при конвективном теплообмене между его поверхностью и средой и воздействию линейного источника тепла, расположенного на оси цилиндра.

Рассмотренная в § 4.7 и 4.8 задача о тепловых напряжениях в длинном полом цилиндра (или в круглом диске с центральным отверстием), обусловленных плоским неосесимметричным стационарным температурным полем, стала предметом исследований многих авторов. Впервые решение этой задачи с помощью метода, основанного на исследовании вспомогательной задачи о дислокациях цилиндра и на применении теории функций комплексного переменного, получил Н. И. Мухелишвили [44, 45] (§ 4.8). Позже метод, использующий теорию функций комплексного переменного, был применен для исследования указанной задачи Гейтвудом [8]. Решение аналогичной задачи дано Меланом и Паркусом без использования функций комплексного переменного; в их методе применяется комбинация термоупругого потенциала перемещений и функции напряжений [42]. Приведенный в § 4.7 метод решения заимствован из книги [5]. Решение упомянутых выше задач выполнено в предположении, что упругие характеристики и коэффициент линейного теплового расширения материала постоянны.

В § 4.10 исследована задача о тепловых напряжениях в длинном цилиндре с учетом механической и термической его неоднородностей, вызванных плоским осесимметричным температурным полем. Этому исследованию предшествует изложение основных свойств гипергеометрических функций (§ 4.9), применяемых как в § 4.10, так и при исследовании задач о тепловых напряжениях в круглых пластинах переменной толщины и сферической оболочке (главы пятая и шестая).

§ 4.2. Плоская деформация и плоское напряженное состояние

При плоском (двумерном) температурном поле $T(x, y, t)$ в длинном цилиндрическом теле (одно- или многосвязном) с продольной осью Oz (рис. 17) возникает плоская деформация, для которой характерны перемещения

$$u_x = u_x(x, y), \quad u_y = u_y(x, y), \quad u_z = 0. \quad (4.2.1)$$

При перемещениях (4.2.1) из соотношений (1.2.2) следует

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0. \quad (4.2.2)$$

Подставляя деформации (4.2.2) в соотношения между напряжениями и деформациями (1.5.23), получаем

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) - \alpha_T E(T - T_0), \quad (4.2.3)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0.$$

Зная величину σ_z , находим для остальных соотношений между деформациями и напряжениями следующие выражения:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E_1} (\sigma_x - \nu_1 \sigma_y) + \alpha_{T1} (T - T_0); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_1} (\sigma_y - \nu_1 \sigma_x) + \alpha_{T1} (T - T_0); \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1 + \nu_1}{E_1} \sigma_{xy},\end{aligned}\tag{4.2.4}$$

где
$$E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1 - \nu}, \quad \alpha_{T1} = \alpha_T (1 + \nu).\tag{4.2.5}$$

Плоское напряженное состояние при плоском температурном поле $T(x, y, t)$ имеет место в тонкой пластине, срединная поверхность которой расположена в плоскости xOy , а поверхности $z = \pm \frac{h}{2}$ свободны от внешних сил (см. рис. 18). Без существенной погрешности можно считать, что в такой пластине каждая плоскость, параллельная плоскости xOy , свободна от напряжений, т. е.

$$\sigma_z = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0,\tag{4.2.6}$$

а напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ распределены равномерно по толщине пластины.

Деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}$ определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \alpha_T (T - T_0); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) + \alpha_T (T - T_0); \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{xy};\end{aligned}\right\}\tag{4.2.7}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) + \alpha_T (T - T_0).\tag{4.2.8}$$

Общая постановка плоской задачи термоупругости в декартовых координатах заключается в определении восьми функций ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}, u_x, u_y$), удовлетворяющих двум уравнениям равновесия при отсутствии объемных сил

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0,\end{aligned}\tag{4.2.9}$$

трем соотношениям между деформациями и напряжениями (4.2.4) (для плоской деформации) или (4.2.7) (для плоского напряженного состояния) и трем соотношениям между деформациями и перемещениями:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right).\tag{4.2.10}$$

Граничные условия на контуре удовлетворяются либо в перемещениях

$$u_x = g_1(x, y), \quad u_y = g_2(x, y) \quad (4.2.11)$$

либо в напряжениях

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \sigma_{xy} n_y &= f_x(x, y); \\ \sigma_{xy} n_x + \sigma_y n_y &= f_y(x, y), \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

где f_x, f_y — компоненты вектора контурных усилий; n_x, n_y — компоненты единичного вектора внешней нормали к контуру.

После решения основной задачи в случае плоской деформации определяется напряжение σ_z по формуле (4.2.3), а в случае плоского напряженного состояния — деформация ϵ_z по формуле (4.2.8).

Если граничные условия плоской задачи термоупругости заданы в перемещениях, то целесообразно ее решать в перемещениях.

Полагая в уравнении (2.2.1) $u_3 = u_z = 0$, $\vec{F} = 0$ и учитывая, что все производные по z равны нулю, для задачи термоупругости о плоской деформации получаем следующие два уравнения в перемещениях:

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 u_x + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \frac{\partial (T - T_0)}{\partial x} &= 0; \\ \mu \nabla^2 u_y + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \frac{\partial (T - T_0)}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Для получения соответствующих уравнений в случае плоского напряженного состояния можно использовать идентичность формы соотношений (4.2.4) и (4.2.7). Из равенств (4.2.5) определяем

$$E = E_1 \frac{1 + 2\nu_1}{(1 + \nu_1)^2}; \quad \nu = \frac{\nu_1}{1 + \nu_1}; \quad \alpha_T = \alpha_{T1} \frac{1 + \nu_1}{1 + 2\nu_1}. \quad (4.2.14)$$

Этим величинам соответствуют

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \frac{E_1 \nu_1}{1 - \nu_1^2}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \\ &= \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)}, \quad (3\lambda + 2\mu) \alpha_T = \frac{\alpha_{T1} E_1}{1 - \nu_1}. \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Подставляя (4.2.15) в уравнения (4.2.13) и заменяя величины E_1, ν_1, α_{T1} величинами E, ν, α_T , получаем уравнения равновесия в перемещениях для плоского напряженного состояния.

Частное решение системы уравнений (4.2.13) в соответствии с решением (2.2.11) имеет вид

$$u_x^{(T)} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad u_y^{(T)} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (4.2.16)$$

где на основании (2.2.12) термоупругий потенциал перемещений для плоской деформации удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T (T - T_0). \quad (4.2.17)$$

Подставляя в это уравнение ν и α_T из равенств (4.2.14) и заменяя затем ν_1 и α_{T1} на ν и α_T , находим соответствующее уравнение для плоского напряженного состояния

$$\nabla^2 \Phi = (1 + \nu) \alpha_T (T - T_0). \quad (4.2.18)$$

К частному решению (4.2.16) системы уравнений (4.2.13) необходимо присоединить общее решение соответствующей однородной системы уравнений, позволяющее удовлетворить граничные условия (4.2.11).

Перейдем к формулировке плоской задачи термоупругости в напряжениях. Рассмотрим сначала односвязное тело.

Для двумерной задачи шесть уравнений совместности деформаций (2.3.5) переходят в одно уравнение

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (4.2.19)$$

Заменяя в этом уравнении по формулам (4.2.4) деформации напряжениями и принимая во внимание уравнения равновесия (4.2.9), получаем для плоской деформации следующее уравнение совместности деформаций в напряжениях:

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) + E_1 \alpha_{T1} \nabla^2 (T - T_0) = 0, \quad (4.2.20)$$

где E_1 и α_{T1} выражаются формулами (4.2.5).

Введем функцию напряжений F по формулам

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (4.2.21)$$

При этом уравнения равновесия (4.2.9) удовлетворяются тождественно.

Подставляя выражения (4.2.21) в уравнение (4.2.20), находим, что при плоской деформации функция напряжений F должна удовлетворять уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 F + E_1 \alpha_{T1} \nabla^2 (T - T_0) = 0, \quad (4.2.22)$$

где

$$\nabla^2 \nabla^2 F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}. \quad (4.2.23)$$

Заменяя в этом уравнении величины E_1 , α_{T1} величинами E , α_T , получаем соответствующее уравнение для случая плоского напряженного состояния:

$$\nabla^2 \nabla^2 F + E \alpha_T \nabla^2 (T - T_0) = 0. \quad (4.2.24)$$

Общее решение уравнения (4.2.22) или (4.2.24) имеет вид

$$F = F^* + F^{(T)}, \quad (4.2.25)$$

где F^* — общее решение бигармонического уравнения

$$\nabla^2 \nabla^2 F^* = 0. \quad (4.2.26)$$

Функция $F^{(T)}$ при плоской деформации — частное решение уравнения

$$\nabla^2 F^{(T)} + \frac{E}{1-\nu} \alpha_T (T - T_0) = 0, \quad (4.2.27)$$

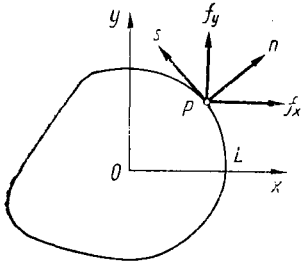


Рис. 19.

а при плоском напряженном состоянии — частное решение уравнения

$$\nabla^2 F^{(T)} + E \alpha_T (T - T_0) = 0. \quad (4.2.28)$$

Сформулируем граничные условия для функции напряжений в системе ортогональных криволинейных координат s, n .

Пусть на контуре L удовлетворяются граничные условия (4.2.12) (рис. 19). Выражая напряжения через

функцию напряжений по формулам (4.2.21) и учитывая, что

$$\begin{aligned} n_x &= \cos(n, x) = \cos(s, y) = \frac{dx}{dn} = \frac{dy}{ds}; \\ n_y &= \cos(n, y) = -\cos(s, x) = \frac{dy}{dn} = -\frac{dx}{ds}, \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

переписываем условия (4.2.12) в виде

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right); \\ f_y &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{ds} = -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

Интегрируя равенства (4.2.30), получаем

$$\frac{\partial F}{\partial x} = - \int_0^s f_y ds + \alpha, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \int_0^s f_x ds + \beta, \quad (4.2.31)$$

где α и β — постоянные; начало отсчета координаты s берется в некоторой фиксированной точке.

Зная частные производные от функции напряжений в двух взаимно перпендикулярных направлениях, находим на контуре L функцию напряжений и ее нормальную производную

$$F = \int_0^s \left[-\frac{dx}{ds} \int_0^s f_y ds + \frac{dy}{ds} \int_0^s f_x ds \right] ds + \alpha x + \beta y + \gamma =$$

$$= -x \int_0^s f_y ds + y \int_0^s f_x ds + \int_0^s (f_y x - f_x y) ds + \alpha x + \beta y + \gamma; \quad (4.2.32)$$

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{dx}{dn} \left(- \int_0^s f_y ds + \alpha \right) + \frac{dy}{dn} \left(\int_0^s f_x ds + \beta \right). \quad (4.2.33)$$

В случае односвязного тела добавление линейной функции к функции напряжений F не влияет на распределение напряжений, поэтому постоянные α , β , γ можно принять равными нулю.

Когда отсутствуют контурные силы ($f_x = f_y = 0$), граничные условия для функции напряжений F в случае односвязного тела будут следующие:

$$F = \frac{\partial F}{\partial n} = 0 \text{ на контуре } L. \quad (4.2.34)$$

Таким образом, решение плоской задачи термоупругости в напряжениях для односвязного тела сводится к нахождению общего решения (4.2.25) для функции напряжений F , т. е. к нахождению общего решения F^* бигармонического уравнения (4.2.26) и частного решения $F^{(T)}$ уравнения Пуассона (4.2.27) или (4.2.28) при граничных условиях (4.2.32) и (4.2.33) или (4.2.34).

Зная частное решение $F^{(T)}$, плоскую задачу термоупругости можно свести к плоской задаче изотермической теории упругости, для решения которой разработаны эффективные методы, опирающиеся на теорию функций комплексного переменного [45].

При стационарном плоском температурном поле без источников тепла, удовлетворяющем уравнению

$$\nabla^2 T(x, y) = 0, \quad (4.2.35)$$

плоская задача термоупругости для односвязного тела, свободного от контурных усилий, на основании уравнения (4.2.22) или (4.2.24) описывается уравнением

$$\nabla^2 \nabla^2 F = 0 \quad (4.2.36)$$

при граничных условиях (4.2.34). В этом случае задача становится полностью однородной. Ее единственное решение $F \equiv 0$, т. е. напряжения σ_x , σ_y , σ_{xy} равны нулю.

В случае плоской деформации единственный компонент тензора напряжения, отличный от нуля, на основании формулы (4.2.3) равен

$$\sigma_z = -\alpha_T E (T - T_0). \quad (4.2.37)$$

В многосвязном теле при стационарном плоском температурном поле напряжения в плоскости xOy , вообще говоря, не равны нулю, что обусловлено многозначностью решений для перемещений в многосвязной области (§ 4.4, § 4.5).

Приведем основные соотношения и уравнения плоской задачи термоупругости в полярных координатах r , θ :

соотношения между деформациями и перемещениями

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right); \quad (4.2.38)$$

уравнение совместности деформаций

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} = \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial r \partial \theta}; \quad (4.2.39)$$

уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_r - \sigma_\theta \right) &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2\sigma_{r\theta} \right) &= 0; \end{aligned} \quad (4.2.40)$$

соотношения между деформациями и напряжениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E_1} (\sigma_r - \nu_1 \sigma_\theta) + \alpha_{T1} (T - T_0), \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E_1} (\sigma_\theta - \nu_1 \sigma_r) + \alpha_{T1} (T - T_0), \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1 + \nu_1}{E_1} \sigma_{r\theta}; \end{aligned} \quad (4.2.41)$$

соотношения между напряжениями и функцией напряжений

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} \right); \quad (4.2.42)$$

оператор Лапласа

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (4.2.43)$$

В случае осесимметричной плоской задачи термоупругости соотношения (4.2.38) переходят в следующие:

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad (4.2.44)$$

а уравнение (4.2.39) в результате интегрирования принимает вид

$$\varepsilon_r = \frac{d\varepsilon_{r\theta}}{dr}. \quad (4.2.45)$$

Подставляя в это уравнение соотношения (4.2.44), убеждаемся в том, что возникающая при интегрировании постоянная равна нулю.

Из двух уравнений равновесия (4.2.40) получается только одно:

$$\sigma_\theta = \frac{d\sigma_r}{dr}. \quad (4.2.46)$$

Составим уравнение для σ_r , предполагая, что модуль упругости E и коэффициент линейного теплового расширения при фиксированном времени зависят от координаты r , а коэффициент Пуассона ν — постоянная величина.

Подставляя в уравнение (4.2.45) вместо деформаций их выражения через напряжения по первым двум из соотношений (4.2.41) и используя уравнение (4.2.46), находим

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + r \left(3 - \frac{r}{E_1} \cdot \frac{dE_1}{dr} \right) \frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{(1 - \nu_1) r}{E_1} \cdot \frac{dE_1}{dr} \sigma_r + r E_1 \frac{d\alpha_{T1}(T - T_0)}{dr} = 0. \quad (4.2.47)$$

Если значения E_1 и α_{T1} — постоянные, то это уравнение получает вид

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d\sigma_r r^2}{dr} + \alpha_{T1} E_1 (T - T_0) \right] = 0. \quad (4.2.48)$$

Аналогичным образом составляем уравнение для u_r .

Подставляя в уравнение (4.2.46) вместо напряжений их выражения через деформации, полученные из первых двух соотношений (4.2.41), и применяя уравнение (4.2.45) и соотношения (4.2.44), при $E_1, \nu_1, \alpha_{T1} = \text{const}$ находим

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{du_r r}{dr} - (1 + \nu_1) \alpha_{T1} (T - T_0) \right] = 0. \quad (4.2.49)$$

В уравнениях (4.2.47) — (4.2.49) величины E_1, ν_1, α_{T1} при плоской деформации имеют значения (4.2.5), а при плоском напряженном состоянии они равны соответственно E, ν, α_T .

§ 4.3. Пространственное температурное поле, вызывающее плоское напряженное состояние. Тепловые напряжения в пластине при изменении температуры только по толщине

Рассмотрим односвязное тело в виде пластины, ограниченной двумя плоскостями $z = \pm \frac{h}{2}$ (h — толщина пластины) и цилиндрической поверхностью с замкнутой направляющей (рис. 20). Пусть такая пластина подвергается действию пространственного температурного поля $T(x, y, z, t)$. При определенном условии для температурного поля в пластине возникает плоское напряженное состояние, определяемое условиями (4.2.6).

Уравнения равновесия (1.2.17) при отсутствии объемных сил переходят в уравнения (4.2.9), которые удовлетворяются, если напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ выражены через функцию напряжений $F \equiv F(x, y, z)$ по формулам (4.2.21).

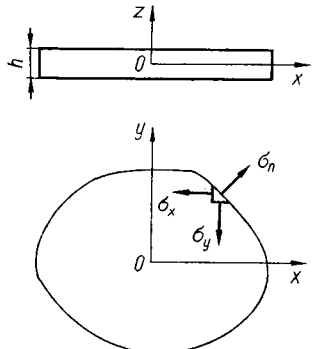


Рис. 20.

Уравнения совместности деформаций в напряжениях (2.3.17) принимают вид

$$(1 + \nu) \nabla^2 \left[\sigma_x + \frac{\alpha_T E}{1 - \nu} (T - T_0) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\Theta + \alpha_T E (T - T_0)] = 0; \quad (4.3.1)$$

$$(1 + \nu) \nabla^2 \left[\sigma_y + \frac{\alpha_T E}{1 - \nu} (T - T_0) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\Theta + \alpha_T E (T - T_0)] = 0; \quad (4.3.2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} [\Theta + \alpha_T E (T - T_0)] + \frac{\alpha_T E (1 + \nu)}{1 - \nu} \nabla^2 (T - T_0) = 0; \quad (4.3.3)$$

$$(1 + \nu) \nabla^2 \sigma_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [\Theta + \alpha_T E (T - T_0)] = 0; \quad (4.3.4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} [\Theta + \alpha_T E (T - T_0)] = 0; \quad (4.3.5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} [\Theta + \alpha_T E (T - T_0)] = 0, \quad (4.3.6)$$

где

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Из уравнений (4.3.5) и (4.3.6) видно, что величина $\frac{\partial}{\partial z} [\Theta + \alpha_T E (T - T_0)]$ не зависит от координат x и y , так что $\frac{\partial}{\partial z} [\Theta + \alpha_T E (T - T_0)] = f_1(z, t)$, где время t рассматривается как параметр.

Подставляя $f_1(z, t)$ в уравнение (4.3.3), находим условие для температурного поля

$$\nabla^2 (T - T_0) = f_2(z, t), \quad (4.3.7)$$

при котором существует точное решение уравнений пространственной теории термоупругости при ограничениях для напряжений (4.2.6), соответствующих плоскому напряженному состоянию. Исследование такой задачи приводится в книге [5]. Здесь рассмотрим частный случай этой задачи: определение тепловых напряжений в пластине при изменении температуры только по толщине, т. е. при

$$T = T(z, t). \quad (4.3.8)$$

При этом температурном поле в пластине возникают следующие напряжения:

$$\sigma_x = \sigma_y = f(z), \quad \sigma_z = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{xy} = 0. \quad (4.3.9)$$

Путем подстановки легко убедиться в том, что при напряжениях (4.3.9) уравнения равновесия (4.2.9) удовлетворяются тождественно.

Уравнения совместности деформаций (4.3.4) — (4.3.6) удовлетворяются также тождественно, а уравнения совместности деформаций (4.3.1) — (4.3.3) удовлетворяются при

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[f(z) + \frac{\alpha_T E}{1-\nu} (T - T_0) \right] = 0. \quad (4.3.10)$$

Отсюда

$$\sigma_x = \sigma_y = f(z) = -\frac{\alpha_T E}{1-\nu} (T - T_0) + C_1 + C_2 z. \quad (4.3.11)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий, которые удовлетворяются в смысле принципа Сен-Венана: равнодействующее усилие и равнодействующий момент на контуре пластины полагаются равными нулю, т. е.

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_n dz = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_n z dz = 0, \quad (4.3.12)$$

где σ_n — напряжение, нормальное к контуру.

Учитывая, что $\sigma_n = \sigma_x = \sigma_y$, и определяя из условий (4.3.12) постоянные C_1 и C_2 , получаем следующее выражение для напряжений:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{E}{1-\nu} [\varepsilon_T + \varkappa_T z - \alpha_T (T - T_0)], \quad (4.3.13)$$

где

$$\varepsilon_T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_T (T - T_0) dz, \quad \varkappa_T = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_T (T - T_0) z dz. \quad (4.3.14)$$

Заметим, что при линейном распределении температуры $T - T_0$ по толщине пластины тепловые напряжения в ней равны нулю.

Пример. Определим тепловые напряжения в пластине при условиях теплообмена, рассмотренных в примере § 3.7.

Температурное поле пластины определяется выражением (3.7.26). Подставляя его в формулу (4.3.13) и принимая во внимание равенство $\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} = \frac{\gamma \cos \mu_n}{\mu_n^2}$, вытекающее из уравнения (3.7.28), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \frac{E \alpha_T (\vartheta - T_0)}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left\{ \cos \left[\mu_n \left(\zeta + \frac{1}{2} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\mu_n^2} [12\zeta^2 - (\gamma + 6\gamma\zeta + 12\zeta) \cos \mu_n] \right\} e^{-\mu_n^2 \tau}, \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

где $\zeta = \frac{z}{h}$, $\tau = \frac{at}{h^2}$, а постоянные C_n имеют значения (3.7.27).

По формуле (4.3.15) находим распределение тепловых напряжений σ_x по толщине пластины в разные моменты времени при значениях величин Φ , T_0 , γ , μ_n , C_n , a , h , указанных в примере § 3.7. Распределение этих напряжений с точностью до постоянного множителя $\frac{\alpha_T E}{1-\nu}$ представлено кривыми на рисунке 21.

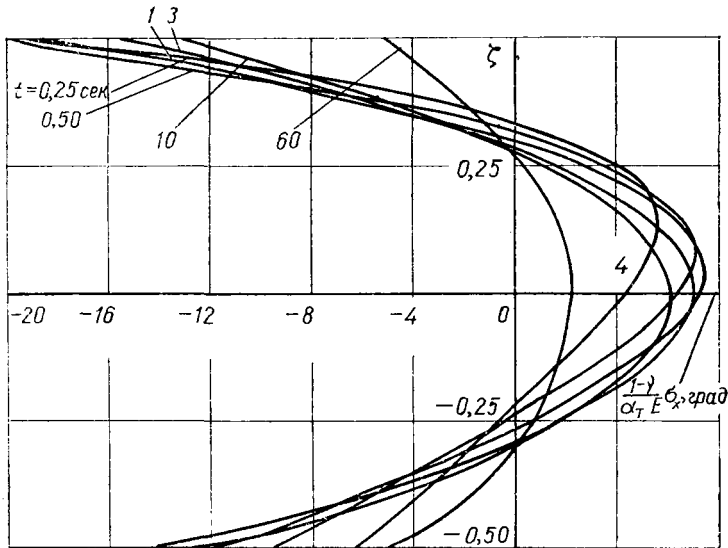


Рис. 21.

Из рассмотрения кривых на рисунках 13 и 21 видно, что наибольшие тепловые напряжения $\sigma_x = \sigma_y$ возникают в пластине в первую секунду, когда при относительно низком уровне температуры температурный градиент достигает наибольшей величины.

§ 4.4. Постановка плоской задачи термоупругости в напряжениях для многосвязного тела

Рассмотрим плоскую деформацию $N + 1$ — связного тела при плоском температурном поле. Результаты, полученные в этом параграфе, будут пригодны и в случае плоского напряженного состояния, если величины E_1 , ν_1 , α_{T1} заменить величинами E , ν , α_T (§ 4.2).

Пусть поперечное сечение тела ограничено несколькими замкнутыми контурами, из которых наружный контур L охватывает все остальные контуры L_K ($K = 1, 2, \dots, N$) (рис. 22).

В случае многосвязного тела угол поворота ω_z , определенный по формуле (4.4.1), и перемещения u_x и u_y могут быть неоднозначными. Поэтому постановка плоской задачи термоупругости в напряжениях, рассмотренная в § 4.2 для односвязной области, в случае многосвязной области должна быть дополнена тремя условиями однозначности: одним для угла поворота ω_z и двумя для переме-

щений u_x и u_y . Указанные условия можно было бы получить как частный случай условий однозначности для пространственной задачи термоупругости (§ 2.3). Однако для лучшего уяснения рассматриваемого вопроса здесь приводится независимый вывод этих условий в системе криволинейных ортогональных координат s, n .

Начнем с вывода условия однозначности для угла поворота

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \quad (4.4.1)$$

Так как деформации — однозначные функции, то на основании формулы ||

$$\omega_z = \varepsilon_{xy} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \varepsilon_{xy}, \quad (4.4.2)$$

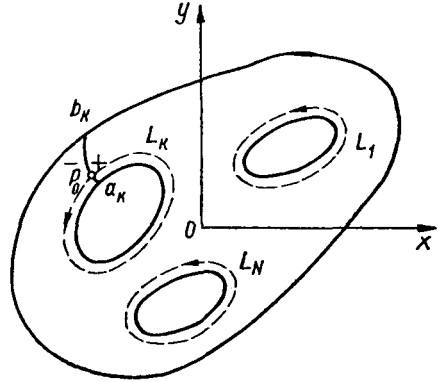


Рис. 22.

вытекающей из соотношения (4.4.1) и третьего соотношения (4.2.10), условие однозначности для угла поворота ω_z сводится к условию однозначности для производной $\frac{\partial u_x}{\partial y}$ или $\frac{\partial u_y}{\partial x}$. Условие однозначности для производной $\frac{\partial u_x}{\partial y}$ можно записать в следующем виде:

$$\int_{L_K} d \frac{\partial u_x}{\partial y} = \int_{L_K} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dy \right] = 0 \quad (4.4.3)$$

$(K = 1, \dots, N),$

где интегрирование выполняется по каждому замкнутому контуру L_K , охватывающему только K -е отверстие.

Вводя в подынтегральное выражение деформации по формулам (4.2.10) и выражая их через функцию напряжений с помощью формул (4.2.4) и (4.2.21), получаем

$$\begin{aligned} \int_{L_K} d \frac{\partial u_x}{\partial y} &= \int_{L_K} \left[\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} dx + \left(2 \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} \right) dy \right] = \\ &= -\frac{1}{E_1} \int_{L_K} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 F dy - \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 F dx + (1 + \nu_1) \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dy \right) + E_1 \alpha_{T1} \left[\frac{\partial (T - T_0)}{\partial x} dy - \frac{\partial (T - T_0)}{\partial y} dx \right] \right\} = 0. \end{aligned}$$

Принимая во внимание равенства (рис. 19)

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dn} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{dx}{ds}; \quad (4.4.4) \\ &- \frac{1 + \nu_1}{E_1} \int_{L_K} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dy \right) = \\ &= - \frac{1 + \nu_1}{E_1} \int_{L_K} d \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \end{aligned}$$

находим условие однозначности для угла поворота в виде

$$\begin{aligned} \int_{L_K} d\omega_z = \Delta\omega_z &= - \int_{L_K} d \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{E_1} \int_{L_K} \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 F ds + \\ &+ \alpha_{T1} \int_{L_K} \frac{\partial (T - T_0)}{\partial n} ds = 0, \quad (K = 1, 2, \dots, N), \quad (4.4.5) \end{aligned}$$

где $\Delta\omega_z$ — приращение угла поворота ω_z при обходе замкнутого контура L_K .

Условие однозначности для перемещения u_x записываем в виде

$$\int_{L_K} du_x = \int_{L_K} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy \right) = 0. \quad (4.4.6)$$

Интегрируя по частям (приращение некоторой величины ξ при обходе контура L_K символически обозначим через $[\xi]_{P_0}^{P_0}$), получаем

$$\int_{L_K} du_x = \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} x \right]_{P_0}^{P_0} + \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} y \right]_{P_0}^{P_0} - \int_{L_K} \left[x d \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + y d \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] = 0. \quad (4.4.7)$$

Вводя деформации, находим

$$\begin{aligned} \int_{L_K} du_x &= -y\Delta\omega_z - \int_{L_K} \left[x \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} dy \right) + \right. \\ &+ \left. y \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} dy \right) \right] = -y\Delta\omega_z - \int_{L_K} \left\{ \left(x \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} + y \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} \right) dx + \right. \\ &+ \left. \left[x \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} + y \left(2 \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} \right) \right] dy \right\} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\left[\frac{\partial u_x}{\partial y} y \right]_{P_0}^{P_0} = -y\Delta\omega_z.$$

Выражая деформации через функцию напряжений и принимая во внимание равенства (4.4.4), находим

$$\begin{aligned}
 \int_{L_K} du_x &= -y\Delta\omega_z - \frac{1}{E_1} \int_{L_K} \left[x \left(\frac{\partial \nabla^2 F}{\partial x} dx + \frac{\partial \nabla^2 F}{\partial y} dy \right) - \right. \\
 &- y \left(\frac{\partial \nabla^2 F}{\partial x} dy - \frac{\partial \nabla^2 F}{\partial y} dx \right) \left. + \frac{1+\nu_1}{E_1} \int_{L_K} \left\{ x \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) dx + \right. \right. \right. \\
 &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) dy \left. \right] + y \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) dy \right] \left. \right\} - \\
 &- \alpha_{T1} \int_{L_K} \left\{ x \left[\frac{\partial (T - T_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial (T - T_0)}{\partial y} dy \right] - \right. \\
 &- y \left[\frac{\partial (T - T_0)}{\partial x} dy - \frac{\partial (T - T_0)}{\partial y} dx \right] \left. \right\} = \\
 &= -y\Delta\omega_z - \frac{1}{E_1} \int_{L_K} \left(x \frac{\partial \nabla^2 F}{\partial s} - y \frac{\partial \nabla^2 F}{\partial n} \right) ds + \frac{1+\nu_1}{E_1} \int_{L_K} \left[xd \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) + \right. \\
 &+ yd \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) \left. \right] - \alpha_{T1} \int_{L_K} \left[x \frac{\partial (T - T_0)}{\partial s} - y \frac{\partial (T - T_0)}{\partial n} \right] ds = 0.
 \end{aligned}$$

Наконец, принимая во внимание граничное условие (4.2.31) для $\frac{\partial F}{\partial x}$ и преобразуя интеграл

$$\begin{aligned}
 \frac{1+\nu_1}{E_1} \int_{L_K} \left[xd \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) + yd \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) \right] &= \frac{1+\nu_1}{E_1} \left\{ \left[x \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right]_{P_0}^{\bullet} + \right. \\
 &+ \left. \left[y \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right]_{P_0}^{\bullet} - \int_{L_K} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dy \right) \right\} = \\
 &= -\frac{1+\nu_1}{E_1} \int_{L_K} d \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{1+\nu_1}{E_1} \int_{L_K} f_y ds,
 \end{aligned}$$

получаем условие однозначности для перемещения u_x в окончательном виде:

$$\begin{aligned}
 \int_{L_K} du_x &= -y\Delta\omega_z - \frac{1}{E_1} \int_{L_K} \left(x \frac{\partial}{\partial s} - y \frac{\partial}{\partial n} \right) \nabla^2 F ds + \frac{1+\nu_1}{E_1} \int_{L_K} f_y^{(K)} ds - \\
 &- \alpha_{T1} \int_{L_K} \left(x \frac{\partial}{\partial s} - y \frac{\partial}{\partial n} \right) (T - T_0) ds = 0 \quad (K = 1, 2, \dots, N). \quad (4.4.8)
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом составляем третье условие однозначности для перемещения u_y :

$$\int_{L_K} du_y = \left[\frac{\partial u_y}{\partial x} x \right]_{P_0}^{\bullet} + \left[\frac{\partial u_y}{\partial y} y \right]_{P_0}^{\bullet} - \int_{L_K} \left[xd \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + yd \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= x\Delta\omega_z - \frac{1}{E_1} \int_{L_K} \left(y \frac{\partial}{\partial s} + x \frac{\partial}{\partial n} \right) \nabla^2 F ds - \frac{1+\nu_1}{E_1} \int_{L_K} f_x^{(K)} ds - \\
 &- \alpha_{T1} \int_{L_K} \left(y \frac{\partial}{\partial s} + x \frac{\partial}{\partial n} \right) (T - T_0) ds = 0 \quad (K = 1, 2, \dots, N), \quad (4.4.9)
 \end{aligned}$$

где

$$\left[\frac{\partial u_y}{\partial x} x \right]_{P_0}^{P_0} = x\Delta\omega_z.$$

В условиях (4.4.8) и (4.4.9) $f_x^{(K)}$, $f_y^{(K)}$ — компоненты вектора контурных усилий на внутреннем контуре L_K ($K = 1, 2, \dots, N$) (рис. 22).

Таким образом, постановку плоской задачи термоупругости в напряжениях можно сформулировать следующим образом. Необходимо определить функцию напряжений $F(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (4.2.22) (при плоской деформации) или уравнению (4.2.24) (в случае плоского напряженного состояния), граничным условиям (4.2.32) (4.2.33) на наружном контуре L и соответствующим граничным условиям на каждом внутреннем контуре L_K (рис. 22), условиям (4.4.5), (4.4.8), (4.4.9) (при плоской деформации) или таким же условиям однозначности, но содержащим вместо величин E_1, ν_1, α_{T1} соответственно величины E, ν, α_T (в случае плоского напряженного состояния).

В граничные условия для наружного контура входят постоянные α, β, γ , а для внутренних контуров — постоянные $\alpha_K, \beta_K, \gamma_K$ ($K = 1, 2, \dots, N$). Как указано в § 4.2, постоянные α, β, γ можно положить равными нулю. Для определения остальных постоянных используют условия однозначности.

В случае стационарного температурного поля и $f_x^{(K)} = f_y^{(K)} = 0$ напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ отсутствуют при выполнении следующих условий, вытекающих из (4.4.5), (4.4.8), (4.4.9):

$$\alpha_{T1} \int_{L_K} \frac{\partial (T - T_0)}{\partial n} ds = 0, \quad (4.4.10)$$

$$-\alpha_{T1} \int_{L_K} \left(x \frac{\partial}{\partial s} - y \frac{\partial}{\partial n} \right) (T - T_0) ds = 0, \quad (4.4.11)$$

$$\begin{aligned}
 &-\alpha_{T1} \int_{L_K} \left(y \frac{\partial}{\partial s} + x \frac{\partial}{\partial n} \right) (T - T_0) ds = 0 \quad (4.4.12) \\
 &(K = 1, 2, \dots, N).
 \end{aligned}$$

Можно дать физическое толкование неоднозначности перемещений (углового ω_z и линейных u_x, u_y) в многосвязном теле. Эта неоднозначность связана с дислокационными напряжениями, т. е. с напряжениями, которые возникают в многосвязном теле не от действия внешних сил, а за счет образования особого рода деформаций,

называемых дислокациями. Образовать такую деформацию (дислокацию) можно, например, посредством соединения двух краев, получившихся в результате разреза тела по линии $a_K b_K$ (рис. 22) и удаления из него или добавления весьма узкой полосы. При этом края должны быть расположены так, чтобы для их соединения с помощью внешних воздействий надо было осуществить малое жесткое смещение одного края относительно другого. После соединения краев и удаления внешних воздействий тело останется в напряженном состоянии, и по линии $a_K b_K$ будет иметь место разрыв перемещений.

Из формул (4.4.5), (4.4.8) и (4.4.9) следует, что в результате дислокации при обходе замкнутого контура L_K угол поворота ω_z и перемещения u_x, u_y получают следующие приращения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\omega_z &= \frac{1}{E_1} \int_{L_K} \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 F ds; \\ \Delta u_x + y\Delta\omega_z &= -\frac{1}{E_1} \int_{L_K} \left(x \frac{\partial}{\partial s} - y \frac{\partial}{\partial n} \right) \nabla^2 F ds; \\ \Delta u_y - x\Delta\omega_z &= -\frac{1}{E_1} \int_{L_K} \left(y \frac{\partial}{\partial s} + x \frac{\partial}{\partial n} \right) \nabla^2 F ds. \end{aligned} \right\} (4.4.13)$$

Существует аналогия между плоской задачей термоупругости для многосвязного тела при стационарном температурном поле без источников тепла и плоской задачей изотермической теории упругости с дислокациями, которую будем называть дислокационной аналогией.

При наличии дислокаций и отсутствии контурных сил ($f_x^{(K)} = f_y^{(K)} = 0$) решение плоской задачи изотермической теории упругости сводится к нахождению функции напряжений, удовлетворяющей уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 F = 0, \quad (4.4.14)$$

граничным условиям

$$F = \frac{\partial F}{\partial n} = 0 \text{ на контуре } L; \quad (4.4.15)$$

$$\left. \begin{aligned} F &= \alpha_K x + \beta_K y + \gamma_K; \\ \frac{\partial F}{\partial n} &= \alpha_K \frac{\partial x}{\partial n} + \beta_K \frac{\partial y}{\partial n} \end{aligned} \right\} \text{ на контуре } L_K \quad (K = 1, 2, \dots, N) \quad (4.4.16)$$

и условиям (4.4.13).

Плоская задача термоупругости при стационарном температурном поле без источников тепла описывается тем же уравнением (4.4.14) при тех же граничных условиях (4.4.15) и (4.4.16) и

условиях однозначности перемещений (4.4.5), (4.4.8) и (4.4.9), которые имеют вид

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{1}{E_1} \int_{L_K} \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 F ds = -\alpha_{T1} \int_{L_K} \frac{\partial (T - T_0)}{\partial n} ds; \\
 & -\frac{1}{E_1} \int_{L_K} \left(x \frac{\partial}{\partial s} - y \frac{\partial}{\partial n} \right) \nabla^2 F ds = \\
 & = \alpha_{T1} \int_{L_K} \left(x \frac{\partial}{\partial s} - y \frac{\partial}{\partial n} \right) (T - T_0) ds; \\
 & -\frac{1}{E_1} \int_{L_K} \left(y \frac{\partial}{\partial s} + x \frac{\partial}{\partial n} \right) \nabla^2 F = \\
 & = \alpha_{T1} \int_{L_K} \left(y \frac{\partial}{\partial s} + x \frac{\partial}{\partial n} \right) (T - T_0) ds.
 \end{aligned} \right\} (4.4.17)$$

Сопоставляя условия (4.4.13) и (4.4.17), получаем

$$\left. \begin{aligned}
 & -\alpha_{T1} \int_{L_K} \frac{\partial (T - T_0)}{\partial n} ds = \Delta \omega_z; \\
 & \alpha_{T1} \int_{L_K} \left(x \frac{\partial}{\partial s} - y \frac{\partial}{\partial n} \right) (T - T_0) ds = \Delta u_x + y \Delta \omega_z; \\
 & \alpha_{T1} \int_{L_K} \left(y \frac{\partial}{\partial s} + x \frac{\partial}{\partial n} \right) (T - T_0) ds = \\
 & = \Delta u_y - x \Delta \omega_z \quad (K = 1, 2, \dots, N).
 \end{aligned} \right\} (4.4.18)$$

Эти равенства определяют дислокацию, которая характеризуется для каждого внутреннего контура величинами $\Delta \omega_z$, Δu_x , Δu_y и вызывает такое же распределение напряжений в плоской задаче изотермической теории упругости для многосвязного тела, как и стационарное температурное поле в соответствующей плоской задаче термоупругости.

§ 4.5. Применение теории функций комплексного переменного в плоской задаче термоупругости при стационарном температурном поле. Дислокационная аналогия

При плоском стационарном температурном поле, удовлетворяющем уравнению (4.2.35), функция напряжений F становится бигармонической. Следуя Н. И. Мухелишвили [45], рассмотрим комплексное представление бигармонической функции F . Обозначая гармо-

ническую функцию $\nabla^2 F$ через P : $\nabla^2 F = P$ и вводя гармоническую функцию Q , сопряженную с P , т. е. удовлетворяющую условиям Коши — Римана $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$, на основании теории функций комплексного переменного заключаем, что

$$f(z) = P + iQ,$$

а следовательно, и

$$\varphi(z) = p + iq = \frac{1}{4} \int f(z) dz \quad (4.5.1)$$

являются аналитическими функциями комплексного переменного $z = x + iy$ в области, занимаемой телом, а p и q — сопряженными гармоническими функциями.

Дифференцируя функцию (4.5.1) и учитывая, что величина производной $\frac{d\varphi(z)}{dz}$ не зависит от способа приращения z ($dz = dx$ или $dz = idy$), находим

$$\varphi'(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} - i \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{4}(P + iQ). \quad (4.5.2)$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{4}P, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{1}{4}Q. \quad (4.5.3)$$

На основании равенств (4.5.3) и уравнений $\nabla^2 p = \nabla^2 q = 0$ легко установить, что

$$\nabla^2 F - 2 \frac{\partial p}{\partial x} - 2 \frac{\partial q}{\partial y} = \nabla^2 (F - xp - yq) = 0.$$

Таким образом, функция $p_1 = F - xp - yq$ является гармонической.

Обозначая функцию комплексного переменного, действительной частью которой является p_1 , через $\chi(z)$, составляем для функции напряжений формулу

$$F = xp + yq + p_1 = \operatorname{Re} [\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)], \quad (4.5.4)$$

где символ Re означает действительную часть выражения, заключенного в скобки, а $\bar{z} = x - iy$. Эту формулу можно представить в виде

$$2F = \bar{z}\varphi(z) + \overline{z\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}, \quad (4.5.5)$$

где $\overline{z\varphi(z)}$, $\overline{\chi(z)}$ — функции, комплексно сопряженные с $\varphi(z)$, $\chi(z)$.

Введем в рассмотрение аналитические функции комплексного переменного

$$f^{(T)}(z) = T - T_0 + iQ^{(T)} \quad (4.5.6)$$

и

$$\varphi^{(T)}(z) = p^{(T)} + iq^{(T)} = \int f^{(T)}(z) dz, \quad (4.5.7)$$

где $Q^{(T)}$ — гармоническая функция, сопряженная с $T - T_0$, а $p^{(T)}$, $q^{(T)}$ — гармонические функции, для которых имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\partial p^{(T)}}{\partial x} = \frac{\partial q^{(T)}}{\partial y} = T - T_0, \quad \frac{\partial p^{(T)}}{\partial y} = -\frac{\partial q^{(T)}}{\partial x} = -Q^{(T)}. \quad (4.5.8)$$

Переходя к комплексному представлению напряжений, в качестве новых независимых переменных вместо x и y рассмотрим величины $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$.

Учитывая, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = i,$$

имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right); \\ \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} &= 2 \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}; \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}; \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) = \\ &= 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (4.5.9)$$

С помощью этих равенств и соотношений (4.2.21) находим следующие комплексные представления напряжений:

$$\sigma_x + \sigma_y = \nabla^2 F = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}]; \quad (4.5.10)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) F = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)]. \quad (4.5.11)$$

Подставляя в первые два соотношения (4.2.4) выражения для деформаций через перемещения (4.2.10) и выражения для напряжений через функцию напряжений (4.2.21) и используя равенства (4.5.3) и (4.5.8), получаем

$$\begin{aligned} E_1 \frac{\partial u_x}{\partial x} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \nu_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) F + E_1 \alpha_{T1} (T - T_0) = \\ &= -(1 + \nu_1) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial p}{\partial x} + E_1 \alpha_{T1} \frac{\partial p^{(T)}}{\partial x}, \\ E_1 \frac{\partial u_y}{\partial y} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \nu_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F + E_1 \alpha_{T1} (T - T_0) = \\ &= -(1 + \nu_1) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial q}{\partial y} + E_1 \alpha_{T1} \frac{\partial q^{(T)}}{\partial y}. \end{aligned}$$

После интегрирования находим

$$E_1 u_x = -(1 + \nu_1) \frac{\partial F}{\partial x} + 4p + E_1 \alpha_{T1} p^{(T)} + f_1(y); \quad (4.5.12)$$

$$E_1 u_y = -(1 + \nu_1) \frac{\partial F}{\partial y} + 4q + E_1 \alpha_{T1} q^{(T)} + f_2(x).$$

Для определения функций $f_1(y)$ и $f_2(x)$ подставляем перемещения (4.5.12) в третье соотношение (4.2.4):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = - \frac{1 + \nu_1}{E_1} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Используя при подстановке равенства (4.5.3) и (4.5.8), находим, что функции $f_1(y)$ и $f_2(x)$ выражают перемещения тела как целого, поэтому в дальнейшем их не принимаем во внимание. Наконец, умножая второе соотношение (4.5.12) на i и складывая с первым, а затем используя третье равенство (4.5.9), представление (4.5.5) и выражения (4.5.1), (4.5.7), получаем комплексное представление перемещений:

$$\frac{E_1}{1 + \nu_1} (u_x + i u_y) = \frac{3 - \nu_1}{1 + \nu_1} \varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\chi'(z)} + \frac{E_1 \alpha_{T1}}{1 + \nu_1} \int f^{(T)}(z) dz. \quad (4.5.13)$$

Граничные условия в перемещениях (4.2.11) или в напряжениях (4.2.12) при использовании выражений (4.2.30) могут быть представлены в комплексном виде:

$$\frac{E_1}{1 + \nu_1} (g_1 + i g_2) = \frac{3 - \nu_1}{1 + \nu_1} \varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\chi'(z)} + \frac{E_1 \alpha_{T1}}{1 + \nu_1} \int f^{(T)}(z) dz; \quad (4.5.14)$$

$$f_x + i f_y = -i \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right) = -i \frac{\partial}{\partial s} [\varphi(z) + \overline{z\varphi'(z)} + \overline{\chi'(z)}]. \quad (4.5.15)$$

Как видно из представлений (4.5.10), (4.5.11) и (4.5.13), решение плоской задачи термоупругости при стационарном температурном поле сводится к отысканию двух функций $\varphi(z)$ и $\chi'(z)$ комплексного переменного z , которые должны удовлетворять граничным условиям (4.5.14) или (4.5.15) на каждом контуре.

Поскольку напряжения — однозначные и непрерывные функции, то в случае односвязной области из формул (4.5.10) и (4.5.11) следует, что функции $\varphi'(z)$ и $\chi''(z)$ тоже должны быть однозначными и непрерывными. Однозначными будут также перемещения, представляемые формулой (4.5.13), так как для односвязной области однозначность и непрерывность функций $\varphi'(z)$, $\chi''(z)$ и $f^{(T)}(z)$ обеспечивает однозначность входящих в формулу (4.5.13) функций $\varphi(z)$, $\chi'(z)$ и $\int f^{(T)}(z) dz$. Для односвязной области плоская задача

термоупругости при стационарном температурном поле без источников тепла не отличается от соответствующей плоской задачи изотермической теории упругости.

Таким образом, приходим к важному утверждению, высказанному на основании более элементарных соображений в § 4.2, что в односвязном теле, свободном от контурных усилий и подверженном действию стационарного температурного поля без источников тепла, отсутствуют напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$.

В случае многосвязного тела действительные части функций $\varphi'(z)$ и $f^{(T)}(z)$ и функция $\chi''(z)$ сохраняются однозначными в силу однозначности напряжений и температурного поля, но мнимые части функций $\varphi'(z)$ и $f^{(T)}(z)$ и функции $\varphi(z), \chi'(z), \int f^{(T)}(z) dz$ могут стать многозначными за счет конечных приращений при обходе внутренних контуров. Если отсутствуют напряжения, условие однозначности перемещений (4.5.13) соответствует условию

$$\int_{L_K} f^{(T)}(z) dz = 0. \quad (4.5.16)$$

Это условие эквивалентно условиям (4.4.10) — (4.4.12) для стационарного плоского температурного поля, не вызывающего напряжений в многосвязном теле. Действительно, умножая условия (4.4.10), (4.4.11.), (4.4.12) соответственно на $iz, 1, i$ и складывая их, получаем

$$i\alpha_{T1}z \int_{L_K} \frac{\partial(T - T_0)}{\partial n} ds - \alpha_{T1} \int_{L_K} z \left(\frac{\partial}{\partial s} + i \frac{\partial}{\partial n} \right) (T - T_0) ds = 0. \quad \text{Это}$$

выражение с помощью условий Коши — Римана в системе ортогональных координат s, n $\frac{\partial(T - T_0)}{\partial s} = -\frac{\partial Q^{(T)}}{\partial n}, \frac{\partial(T - T_0)}{\partial n} = \frac{\partial Q^{(T)}}{\partial s}$ преобразуем к виду

$$iz \int_{L_K} dQ^{(T)} - \int_{L_K} z df^{(T)}(z) = 0,$$

отсюда

$$iz [Q^{(T)}]_{P_0}^P - z [T - T_0 + iQ^{(T)}]_{P_0}^P + \int_{L_K} f^{(T)}(z) dz = 0,$$

т. е. имеет место условие (4.5.16).

Выясним характер многозначности функций, входящих в выражение (4.5.13). При однократном обходе внутреннего контура L_K (рис. 22) функции $\varphi'(z)$ и $\overline{\varphi'(z)}$ получают приращения

$$[\varphi'(z)]_{P_0}^P = 2\pi A_K i, \quad [\overline{\varphi'(z)}]_{P_0}^P = -2\pi A_K i, \quad (4.5.17)$$

где A_K — действительная постоянная, а коэффициент 2π введен для удобства записи. Это приращение совпадает с соответствующим

приращением функции $A_K \ln(z - z_K)$, где z_K — произвольно выбранная точка внутри контура L_K . Следовательно, функцию $\varphi'(z)$ можно представить выражением

$$\varphi'(z) = \sum_{K=1}^N A_K \ln(z - z_K) + \Phi(z),$$

где $\Phi(z)$ — однозначная функция в области, занимаемой телом. Интегрируя это выражение, получаем

$$\varphi(z) = \sum_{K=1}^N A_K [(z - z_K) \ln(z - z_K) - (z - z_K)] + \\ + \int_{z_0}^z \Phi(z) dz + \text{const} = z \sum_{K=1}^N A_K \ln(z - z_K) + \sum_{K=1}^N \gamma'_K \ln(z - z_K) \text{ плюс}$$

однозначная функция, где z_0 — произвольная точка рассматриваемой области; γ'_K — комплексная постоянная.

Таким образом, при однократном обходе контура L_K (рис. 22) функция $\varphi(z)$ получает приращение

$$[\varphi(z)]_{P_0}^{P_0} = 2\pi i (z A_K + \gamma'_K). \quad (4.5.18)$$

Аналогично предыдущему можно записать

$$[\chi'(z)]_{P_0}^{P_0} = 2\pi \gamma'_K i, \quad [\overline{\chi'(z)}]_{P_0}^{P_0} = -2\pi \overline{\gamma'_K} i, \quad (4.5.19) \\ [f^{(T)}(z)]_{P_0}^{P_0} = 2\pi A_K^{(T)} i, \quad [\int f^{(T)}(z) dz]_{P_0}^{P_0} = 2\pi i (z A_K^{(T)} + \gamma_K^{(T)}),$$

где $A_K^{(T)}$ — действительная постоянная; $\gamma_K, \gamma_K^{(T)}$ — комплексные постоянные.

Рассматривая приращение $u_x + i u_y$ [см. формулу (4.5.13)] при обходе контура L_K и принимая во внимание выражения (4.5.17) — (4.5.19), находим

$$\Delta u_x + i \Delta u_y = \frac{2(1 + \nu_1) \pi i}{E_1} \left[\frac{4}{1 + \nu_1} A_K z + \frac{3 - \nu_1}{1 + \nu_1} \gamma'_K + \overline{\gamma'_K} \right] + \\ + 2\pi \alpha_T i (A_K^{(T)} z + \gamma_K^{(T)}), \quad (4.5.20)$$

где $\Delta u_x = u_x^+ - u_x^-$; $\Delta u_y = u_y^+ - u_y^-$; u_x^+, u_y^+ и u_x^-, u_y^- — перемещения в точке края (+) и в точке края (—), которые совмещаются в точке P_0 (рис. 22).

Предположим, что контур L_K свободен от внешних усилий, т. е. $f_x^{(K)} = f_y^{(K)} = 0$. В этом случае из равенств (4.2.31) следует: $\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} = \alpha_K + i \beta_K$. При обходе замкнутого контура L_K приращение этой величины в связи с формулой (4.5.5) будет

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right]_{P_0}^{P_0} = 2 \left[\frac{\partial F}{\partial z} \right]_{P_0}^{P_0} = [\varphi(z) + \overline{z(\varphi')z} + \overline{\chi'(z)}]_{P_0}^{P_0} = 0.$$

Подставляя приращения функций $\varphi(z)$, $\overline{\varphi'(z)}$, $\overline{\chi'(z)}$, получаем условие

$$\gamma'_K = \overline{\gamma_K}. \quad (4.5.21)$$

При этом условии формула (4.5.20) имеет вид

$$\Delta u_x + i\Delta u_y = \frac{8\pi i}{E_1} (A_K z + \gamma'_K) + 2\pi\alpha_{T1} i (A_K^{(T)} z + \gamma_K^{(T)}). \quad (4.5.22)$$

Полагая

$$\gamma'_K = \alpha'_K + i\beta'_K, \quad \gamma_K^{(T)} = \alpha_K^{(T)} + i\beta_K^{(T)} \quad (4.5.23)$$

(α'_K , β'_K , $\alpha_K^{(T)}$, $\beta_K^{(T)}$ — действительные постоянные) и разделяя выражение (4.5.22) на действительную и мнимую части, находим:

условия при $A_K^{(T)} = \gamma_K^{(T)} = 0$

$$\Delta u_x = -y\varepsilon_K + \xi_K, \quad \Delta u_y = x\varepsilon_K + \eta_K, \quad (4.5.24)$$

где

$$\varepsilon_K = \frac{8\pi A_K}{E_1}, \quad \xi_K = -\frac{8\pi\beta'_K}{E_1}, \quad \eta_K = \frac{8\pi\alpha'_K}{E_1}; \quad (4.5.25)$$

условия при $\Delta u_x = \Delta u_y = 0$

$$\varepsilon_K = -\varepsilon_K^{(T)}, \quad \xi_K = -\xi_K^{(T)}, \quad \eta_K = -\eta_K^{(T)}, \quad (4.5.26)$$

где

$$\varepsilon_K^{(T)} = 2\pi\alpha_{T1} A_K^{(T)}, \quad \xi_K^{(T)} = -2\pi\alpha_{T1}\beta_K^{(T)}, \quad \eta_K^{(T)} = 2\pi\alpha_{T1}\alpha_K^{(T)}. \quad (4.5.27)$$

Условия (4.5.24) соответствуют малому перемещению тела и при $\varepsilon_K = \Delta\omega_z$ эквивалентны условиям (4.4.13) для плоской задачи изотермической теории упругости с дислокациями.

Дислокация для каждого разреза по линии $a_K b_K$ (см. рис. 22) осуществляется поворотом одного края этого разреза относительно другого на угол ε_K и поступательным его перемещением с компонентами ξ_K , η_K .

Условия (4.5.26) эквивалентны условиям однозначности (4.4.17) перемещений в плоской задаче термоупругости при стационарном температурном поле без источников тепла. Из сопоставления условий (4.5.24) и (4.5.26) вытекает упомянутая в § 4.4 дислокационная аналогия: плоская задача термоупругости для многосвязного тела при стационарном температурном поле сводится к плоской задаче изотермической теории упругости с дислокациями, характеризующимися для каждого внутреннего контура L_K величинами (4.5.25).

§ 4.6. Тепловые напряжения в цилиндре и диске при плоском осесимметричном температурном поле

Рассмотрим длинный полый цилиндр, поперечное сечение которого представляет круговое кольцо с радиусами наружной и внутренней окружностей соответственно r_2 и r_1 . В таком цилиндре при плоском осесимметричном температурном поле $T(r, t)$ возникает плоская осесимметричная деформация. Температурное поле $T(r, t)$ предпо-

лагается известным из решения соответствующей задачи теплопроводности.

Вводя относительный радиус $\rho = \frac{r}{r_2}$, дважды интегрируя уравнение (4.2.48) и применяя уравнение (4.2.46), находим

$$\sigma_r = C_1 + \frac{C_2}{\rho^2} - \frac{\alpha_{T_1} E_1}{\rho^2} \int_{\rho_1}^{\rho} (T - T_0) \rho d\rho; \quad (4.6.1)$$

$$\sigma_{\theta} = C_1 - \frac{C_2}{\rho^2} - \alpha_{T_1} E_1 (T - T_0) + \frac{\alpha_{T_1} E_1}{\rho^2} \int_{\rho_1}^{\rho} (T - T_0) \rho d\rho.$$

Если контурные усилия отсутствуют, постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из условий $\sigma_r = 0$ при $\rho = \rho_1$ и $\rho = 1$. После определения постоянных интегрирования и подстановки их значений в выражения (4.6.1) получаем

$$\sigma_r = \frac{\alpha_{T_1} E_1}{\rho^2} \left[\frac{\rho^2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \int_{\rho_1}^1 (T - T_0) \rho d\rho - \int_{\rho_1}^{\rho} (T - T_0) \rho d\rho \right]; \quad (4.6.2)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\alpha_{T_1} E_1}{\rho^2} \left[\frac{\rho^2 + \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \int_{\rho_1}^1 (T - T_0) \rho d\rho + \int_{\rho_1}^{\rho} (T - T_0) \rho d\rho - (T - T_0) \rho^2 \right].$$

Зная напряжения σ_r и σ_{θ} , с помощью вторых соотношений (4.2.41) и (4.2.44) вычисляем радиальное перемещение

$$u_r = \frac{\alpha_{T_1} r_2}{\rho} \left[(1 + \nu_1) \int_{\rho_1}^{\rho} (T - T_0) \rho d\rho + \frac{(1 - \nu_1) \rho^2 + (1 + \nu_1) \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \int_{\rho_1}^1 (T - T_0) \rho d\rho \right]. \quad (4.6.3)$$

Полагая в решениях (4.6.2) и (4.6.3) $\rho_1 = 0$, получаем соответствующие решения для сплошного цилиндра. Возникающие в этих решениях при $\rho = 0$ неопределенности раскрываются по правилу Лопиталя следующим образом:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^2} \int_0^{\rho} (T - T_0) \rho d\rho = \frac{1}{2} (T - T_0)_{\rho=0}; \quad (4.6.4)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \int_0^{\rho} (T - T_0) \rho d\rho = 0,$$

при этом температура в центре диска предполагается конечной.

В решениях (4.6.2) и (4.6.3) величины E_1 , ν_1 , α_{T1} имеют значения (4.2.5). Если в этих решениях E_1 , ν_1 , α_{T1} заменить величинами E , ν , α_T , то получим выражения для тепловых напряжений σ_r , σ_θ и радиального перемещения u_r в тонком круглом диске при его плоском напряженном состоянии, обусловленном плоским температурным полем $T(r, t)$.

Тепловое напряжение σ_z в полom цилиндре определяем по формуле (4.2.3):

$$\sigma_z = \frac{2\alpha_T E \nu}{(1-\nu)(1-\rho_1^2)} \int_{\rho_1}^1 (T - T_0) \rho d\rho - \frac{\alpha_T E}{1-\nu} (T - T_0). \quad (4.6.5)$$

Это напряжение возникает в цилиндре в том случае, если его торцевые поверхности закреплены от осевого перемещения ($u_z = 0$). Когда торцевые поверхности цилиндра свободны от напряжений, следует на напряжение (4.6.5) наложить равномерное напряжение $E\varepsilon_z$ ($\varepsilon_z = \text{const}$), при этом деформация ε_z подбирается так, чтобы равнодействующая напряжений, действующих на торцевой поверхности цилиндра, обращалась в нуль:

$$\varepsilon_z = \frac{2\alpha_T}{1-\rho_1^2} \int_{\rho_1}^1 (T - T_0) \rho d\rho.$$

Тогда получаем решение, у которого граничные условия для σ_z на торцевых поверхностях цилиндра удовлетворяются в смысле принципа Сен-Венана:

$$\begin{aligned} \sigma'_z = E\varepsilon_z + \sigma_z &= \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \left[\frac{2}{1-\rho_1^2} \int_{\rho_1}^1 (T - T_0) \rho d\rho - (T - T_0) \right] = \\ &= \sigma_r + \sigma_\theta. \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

Если исключить перемещение цилиндра как твердого тела, то для цилиндра, у которого на торцевых поверхностях равнодействующая напряжений равна нулю, можно получить следующую величину осевого перемещения:

$$u_z = \frac{2\alpha_T z}{1-\rho_1^2} \int_{\rho_1}^1 (T - T_0) \rho d\rho. \quad (4.6.7)$$

Рассмотрим решение задачи о тепловых напряжениях в цилиндре при плоском осесимметричном температурном поле по методу В. М. Майзеля (§ 2.5). В этом случае формула (2.5.5) нуждается в модификации. Полагая, что внешние силы F'_i и f'_i (§ 2.5) сводятся к радиальным силам единичной интенсивности, равномерно распределенным по окружности радиуса r , вместо (2.5.5) получаем следую-

щее выражение для радиального перемещения на радиусе r :

$$u_r(r) = \frac{\alpha_T E}{(1-2\nu)r} \left[\int_{r_1}^r (T - T_0) \varepsilon_{kkI}^* \xi d\xi + \int_r^{r_2} (T - T_0) \varepsilon_{kkII}^* \xi d\xi \right], \quad (4.6.8)$$

где ε_{kk}^* — объемная деформация, возникающая на радиусе ξ под действием единичной радиальной нагрузки на радиусе r . В подынтегральном выражении в качестве переменной рассматриваем текущий радиус ξ , считая r фиксированным радиусом, и отмечаем индексами I и II величины, относящиеся к областям соответственно $r_1 \leq \xi < r$ и $r < \xi \leq r_2$.

Используя выражение для радиального перемещения, получаемое в результате интегрирования однородного уравнения, соответствующего (4.2.49), вводим $u_{rI}^* = C_1 \xi + C_2 \frac{1}{\xi} (r_1 \leq \xi < r)$;

$$u_{rII}^* = C_1' \xi + C_2' \frac{1}{\xi} \quad (r < \xi \leq r_2).$$

С помощью соотношений (4.2.44) и (4.2.41) определяем

$$\varepsilon_{kkI}^* = \varepsilon_{rI}^* + \varepsilon_{\theta I}^* = 2C_1; \quad \sigma_{rI}^* = \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left[(1 + \nu_1) C_1 - (1 - \nu_1) \frac{C_2}{\xi^2} \right].$$

После замены C_1, C_2 постоянными C_1', C_2' получаем величины $\varepsilon_{kkII}^*, \sigma_{rII}^*$. Постоянные интегрирования C_1, C_2, C_1', C_2' находим из следующих граничных условий и условий сопряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{rI}^* &= 0 \text{ при } \xi = r_1; & \sigma_{rII}^* &= 0 \text{ при } \xi = r_2; \\ u_{rI}^* &= u_{rII}^*, & \sigma_{rI}^* &= \sigma_{rII}^* + 1 \text{ при } \xi = r. \end{aligned}$$

Определив постоянные интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kkI}^* &= 2C_1 = \frac{(1 - \nu_1) [(1 - \nu_1) r^2 + (1 + \nu_1) r_2^2]}{(r_2^2 - r_1^2) E_1}; \\ \varepsilon_{kkII}^* &= 2C_1' = \frac{(1 - \nu_1) [(1 - \nu_1) r^2 + (1 + \nu_1) r_1^2]}{(r_2^2 - r_1^2) E_1}. \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

Подставляя выражения (4.6.9) в формулу (4.6.8) и выполняя интегрирование в соответствующих пределах, находим

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\alpha_T E (1 - \nu_1)}{(1 - 2\nu) E_1 r} \left[(1 + \nu_1) \int_{r_1}^r (T - T_0) \xi d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 - \nu_1) r^2 + (1 + \nu_1) r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \int_r^{r_2} (T - T_0) \xi d\xi \right]. \end{aligned} \quad (4.6.10)$$

Эта формула после подстановки $\frac{\alpha_T E}{1-2\nu} = \frac{\alpha_{T_1} E_1}{1-\nu_1}$, вытекающей из равенства (4.2.14), переходит в формулу (4.6.3). В рассматриваемом случае непосредственное интегрирование разрешающего уравнения скорее приводит к конечному результату, чем метод В. М. Майзеля, основанный на обобщении теоремы о взаимности работ (§ 2.5).

Пример 1. Определим тепловые напряжения в длинном сплошном цилиндре, между поверхностью которого и окружающей средой происходит нестационарный осесимметричный конвективный теплообмен.

Температурное поле такого цилиндра при изменении температуры среды во времени по закону (3.8.3) определяется выражением (3.8.14).

Полагая в формулах (4.6.2) $\rho_1 = 0$ и заменяя в них E_1 величиной $\frac{E}{1-\nu^2}$ и α_{T_1} величиной $\alpha_T(1+\nu)$, получаем для длинного сплошного цилиндра

$$\sigma_r = \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \left[\int_0^1 (T - T_0) \rho d\rho - \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho (T - T_0) \rho d\rho \right], \quad (4.6.11)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \left[\int_0^1 (T - T_0) \rho d\rho + \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho (T - T_0) \rho d\rho - (T - T_0) \right].$$

Подставляя выражение (3.8.14) в формулы (4.6.11), используя при интегрировании формулу

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x) + C \quad (4.6.12)$$

и учитывая при подстановке пределов, что $J_0(0) = 0$, находим следующие формулы для тепловых напряжений в длинном сплошном цилиндре при нестационарном температурном поле (3.8.14):

$$\sigma_r = \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \left\{ \frac{\gamma_2 k_1 \vartheta_0 e^{-k\tau}}{\gamma_2 J_0(\sqrt{k}) - \sqrt{k} J_1(\sqrt{k})} \left[\frac{J_1(\sqrt{k})}{\sqrt{k}} - \frac{J_1(\sqrt{k}\rho)}{\sqrt{k}\rho} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\vartheta_0 - T_0 + \frac{k_1 \vartheta_0 \beta_n^2}{\beta_n^2 - k} \right) A_n \left[\frac{J_1(\beta_n)}{\beta_n} - \frac{J_1(\beta_n \rho)}{\beta_n \rho} \right] e^{-\beta_n^2 \tau} \right\}; \quad (4.6.13)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \left\{ \frac{\gamma_2 k_1 \vartheta_0 e^{-k\tau}}{\gamma_2 J_0(\sqrt{k}) - \sqrt{k} J_1(\sqrt{k})} \left[\frac{J_1(\sqrt{k})}{\sqrt{k}} + \frac{J_1(\sqrt{k}\rho)}{\sqrt{k}\rho} - J_0(\sqrt{k}\rho) \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\vartheta_0 - T_0 + \frac{k_1 \vartheta_0 \beta_n^2}{\beta_n^2 - k} \right) A_n \left[\frac{J_1(\beta_n)}{\beta_n} - \frac{J_1(\beta_n \rho)}{\beta_n \rho} - J_0(\beta_n \rho) \right] e^{-\beta_n^2 \tau} \right\}.$$

По формулам (4.6.13) вычисляем распределение тепловых напряжений σ_r и σ_θ по радиусу цилиндра в моменты времени $t = 180; 300; 420; 540$ сек при значениях величин $\vartheta_0, T_0, k, k_1, \gamma_2, \beta_n, A_n, a, r_2$, указанных в примере § 3.8. Распределение этих напряжений, приведенных с точностью до постоянного множителя $\frac{\alpha_T E}{1-\nu}$, представлено кривыми на рис. 23 (σ_r — сплошные линии, σ_θ — штриховые).

Пример 2. Определим тепловые напряжения в длинном цилиндре под воздействием линейного источника тепла на оси мощности ω .

Нестационарное температурное поле такого цилиндра, между поверхностью которого и средой с постоянной температурой происходит конвективный тепло-

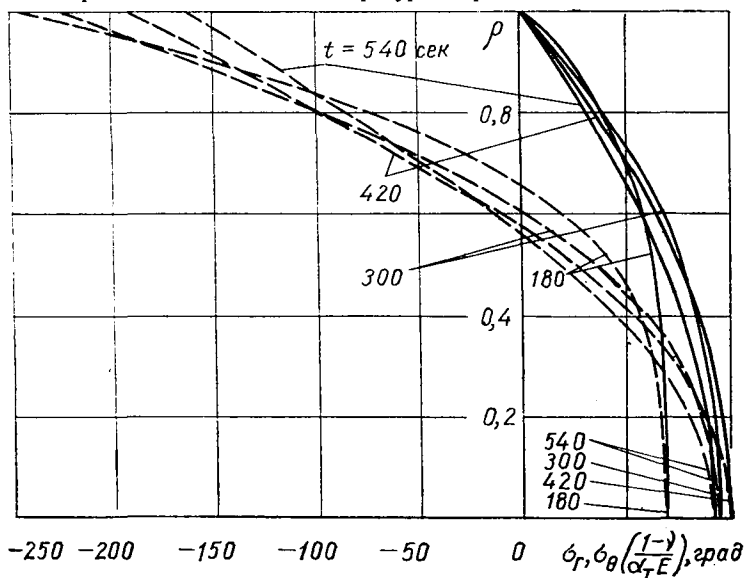


Рис. 23.

обмен, определяется выражением (3.11.12). После подстановки этого выражения в формулы (4.6.11) получаем следующие выражения для искомого x напряжений:

$$\sigma_r = \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \left\{ \frac{w}{4\pi\lambda q} \ln \rho - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\beta_n} \left[J_1(\beta_n) - \frac{1}{\rho} J_1(\beta_n \rho) \right] e^{-\beta_n^2 \tau} \right\};$$

и

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \left\{ \frac{w}{4\pi\lambda q} (1 + \ln \rho) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\beta_n} \left[J_1(\beta_n) + \frac{1}{\rho} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times J_1(\beta_n \rho) - \beta_n J_0(\beta_n \rho) \right] e^{-\beta_n^2 \tau} \right\},$$

где постоянная A_n имеет значение (3.11.13).

§ 4.7. Тепловые напряжения в полом цилиндре и диске с центральным отверстием при плоском стационарном неосесимметричном температурном поле

Рассмотрим решение задачи о тепловых напряжениях в длинном полом цилиндре под действием плоского стационарного неосесимметричного температурного поля $T(\rho, \theta)$. Наружная ($\rho=1$) и внутренняя ($\rho = \rho_1$) цилиндрические поверхности свободны от поверх-

ностных сил. Решение этой задачи приводим в напряжениях. Используя при этом результаты § 4.4, учитываем, что в рассматриваемом случае $x = r_2 \rho \cos \theta$, $y = r_2 \rho \sin \theta$, $ds = r_2 \rho d\theta$, $dn = r_2 d\rho$.

В соответствии с выражением (3.5.5) для температурного поля выбираем решение для функции напряжений в виде

$$F(\rho, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(\rho) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} F'_k(\rho) \sin k\theta. \quad (4.7.1)$$

Искомая функция напряжений должна удовлетворять: дифференциальному уравнению

$$\nabla_1^2 \nabla_1^2 F = 0; \quad (4.7.2)$$

граничным условиям

$$F = \frac{\partial F}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = 1; \quad (4.7.3)$$

$$\left. \begin{aligned} F &= \alpha_1 \rho \cos \theta + \beta_1 \rho \sin \theta + \gamma_1 \\ \frac{\partial F}{\partial \rho} &= \alpha_1 \cos \theta + \beta_1 \sin \theta \end{aligned} \right\} \text{ при } \rho = \rho_1;$$

условиям однозначности перемещений

$$\int_0^{2\pi} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} [\nabla_1^2 F + \alpha_{T1} E_1 r_2^2 (T - T_0)] d\theta = 0 \text{ при } \rho = \rho_1, \quad (4.7.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \rho \left(\rho \sin \theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) [\nabla_1^2 F + \alpha_{T1} E_1 r_2^2 (T - T_0)] d\theta &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \rho \left(\rho \cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) [\nabla_1^2 F + \alpha_{T1} E_1 r_2^2 (T - T_0)] d\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.7.5)$$

при $\rho = \rho_1$,

где

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \\ &+ \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

Подставляя выражения (4.7.1) и (3.5.5) в уравнение (4.7.2) и условия (4.7.3) — (4.7.5), получаем:

дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{k^2}{\rho^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{k^2}{\rho^2} \right) F_k = 0 \quad (4.7.7)$$

($k = 0, 1, \dots$);

граничные условия

$$F_k = \frac{dF_k}{d\rho} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots) \text{ при } \rho = 1, \quad (4.7.8)$$

$$\left. \begin{aligned} F_0 = \gamma_1, \quad F_1 = \alpha_1 \rho, \quad F_k = 0 \quad (k \geq 2) \\ \frac{dF_0}{d\rho} = 0, \quad \frac{dF_1}{d\rho} = \alpha, \quad \frac{dF_k}{d\rho} = 0 \quad (k \geq 2) \end{aligned} \right\} \text{ при } \rho = \rho_1; \quad (4.7.9)$$

условия однозначности

$$\frac{d}{d\rho} \left[\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} \right) F_0 + \alpha_{T1} E_1 r_2^2 (T^{(0)} - T_0) \right] = 0, \quad (4.7.10)$$

$$\left(\frac{d}{d\rho} - \frac{1}{\rho} \right) \left[\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) F_1 + \alpha_{T1} E_1 r_2^2 T^{(1)} \right] = 0$$

при $\rho = \rho_1$. (4.7.11)

При составлении условий однозначности перемещений используются свойства ортогональности тригонометрических функций. Аналогичные уравнения и условия можно найти и для функций $F'_K(\rho)$ ($k = 1, 2, \dots$). Заметим, что условия однозначности имеют место только при $k = 0$ и $k = 1$. При $k \geq 2$ эти условия удовлетворяются автоматически. В связи с нулевыми граничными условиями (4.7.9) при $k \geq 2$ заключаем, что $F_K = F'_K = 0$ ($k \geq 2$). Отсюда можно сделать вывод, что тепловые напряжения вызываются температурным полем вида

$$T(\rho, \theta) = T^{(0)}(\rho) + T^{(1)}(\rho) \cos \theta + T^{(1)'}(\rho) \sin \theta, \quad (4.7.12)$$

где на основании полученных в § 3.5 результатов

$$T^{(0)}(\rho) = T_{01} + T_{02} \ln \rho; \quad (4.7.13)$$

$$T^{(1)}(\rho) = T_{11} \rho^{-1} + T_{12} \rho, \quad T^{(1)'}(\rho) = T'_{11} \rho^{-1} + T'_{12} \rho. \quad (4.7.14)$$

Здесь T_{01}, \dots, T'_{12} — постоянные, определяемые из граничных условий соответствующей задачи теплопроводности.

Осесимметричному температурному полю (4.7.13) соответствуют тепловые напряжения $\sigma_r^{(0)}, \sigma_\theta^{(0)}$, которые на основании соотношений (4.2.42) выражаются через функцию напряжений $F_0(\rho)$ следующим образом:

$$\sigma_r^{(0)} = \frac{1}{r_2^2} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dF_0}{d\rho}, \quad \sigma_\theta^{(0)} = \frac{1}{r_2^2} \cdot \frac{d^2 F_0}{d\rho^2}. \quad (4.7.15)$$

Функция $F_0(\rho)$ является решением уравнения (4.7.7) при $k = 0$:

$$F_0(\rho) = C_{01} + C_{02} \ln \rho + C_{03} \rho^2 + C_{04} \rho^2 \ln \rho. \quad (4.7.16)$$

Для определения пяти постоянных $C_{01}, C_{02}, C_{03}, C_{04}$ и γ_1 имеем пять уравнений: два граничных условия (4.7.8), два из граничных условий (4.7.9) и одно условие однозначности (4.7.10). Так как

постоянные C_{01} и γ_1 не влияют на величину напряжений, их значений не приводим. Определяя постоянные

$$C_{02} = \frac{\alpha_{T1} E_1 T_{02} r_2^2}{2(1 - \rho_1^2)} \rho_1^2 \ln \rho_1, \quad C_{03} = \frac{\alpha_{T1} E_1 T_{02} r_2^2}{8(1 - \rho_1^2)} (1 - \rho_1^2 - 2\rho_1^2 \ln \rho_1),$$

$$C_{04} = - \frac{\alpha_{T1} E_1 T_{02} r_2^2}{4}$$

и подставляя их значения в выражение (4.7.16), на основании (4.7.15) находим

$$\sigma_r^{(0)} = \frac{\alpha_{T1} E_1 T_{02}}{2} \left[\left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^2 \frac{1 - \rho^2}{1 - \rho_1^2} \ln \rho_1 - \ln \rho \right],$$

$$\sigma_\theta^{(0)} = - \frac{\alpha_{T1} E_1 T_{02}}{2} \left[\left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^2 \frac{1 + \rho^2}{1 - \rho_1^2} \ln \rho_1 + \ln \rho + 1 \right]. \quad (4.7.17)$$

Температурному полю $T^{(1)}(\rho) \cos \theta + T^{(1)'}(\rho) \sin \theta$ соответствуют тепловые напряжения $\sigma_r^{(1)}$, $\sigma_\theta^{(1)}$, $\sigma_{r\theta}^{(1)}$, выражаемые через функции $F_1(\rho)$ и $F_1'(\rho)$ по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= \frac{1}{r_2^2} \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) (F_1 \cos \theta + F_1' \sin \theta); \\ \sigma_\theta^{(1)} &= \frac{1}{r_2^2} \cdot \frac{d^2}{d\rho^2} (F_1 \cos \theta + F_1' \sin \theta); \\ \sigma_{r\theta}^{(1)} &= \frac{1}{r_2^2} \cdot \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} (F_1 \sin \theta - F_1' \cos \theta) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.7.18)$$

Функция $F_1(\rho)$ есть решение уравнения (4.7.7) при $k = 1$:

$$F_1(\rho) = C_{11}\rho + C_{12}\rho^{-1} + C_{13}\rho^3 + C_{14}\rho \ln \rho. \quad (4.7.19)$$

Заменяя постоянные C_{1n} постоянными C_{1n}' ($n = 1, 2, 3, 4$), получаем соответствующее выражение для $F_1'(\rho)$.

Для определения постоянных интегрирования, относящихся к функции $F_1(\rho)$, составляем систему пяти уравнений относительно пяти постоянных C_{11} , C_{12} , C_{13} , C_{14} и α_1 , используя два граничных условия (4.7.8), два граничных условия (4.7.9) и условие однозначности (4.7.11):

$$\begin{aligned} C_{11} + C_{12} + C_{13} &= 0; \\ C_{11} - C_{12} + 3C_{13} + C_{14} &= 0; \\ C_{11}\rho_1 + C_{12}\rho_1^{-1} + C_{13}\rho_1^3 + C_{14}\rho_1 \ln \rho_1 &= \alpha_1 \rho_1; \\ C_{11} - C_{12}\rho_1^{-2} + 3C_{13}\rho_1^2 + C_{14}(\ln \rho_1 + 1) &= \alpha_1; \\ C_{14} &= - \frac{\alpha_{T1} E_1 T_{11} r_2^2}{2}. \end{aligned}$$

Так как постоянные C_{11} и α_1 не входят в выражения для напряжений, из этой системы кроме C_{14} определяем только

$$C_{12} = -\frac{\alpha_{T1} E_1 T_{11} r_2^2 \rho_1^2}{4(1 + \rho_1^2)}, \quad C_{13} = \frac{\alpha_{T1} E_1 T_{11} r_2^2}{4(1 + \rho_1^2)}. \quad (4.7.20)$$

Заменяя T_{11} величиной T'_{11} , получаем значения постоянных C'_{12} , C'_{13} , C'_{14} . Подставляя значения постоянных C_{1n} и C'_{1n} ($n = 2, 3, 4$) в выражения (4.7.18), получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= \frac{\alpha_{T1} E_1 \rho}{2(1 + \rho_1^2)} \left(1 - \frac{\rho_1^2}{\rho^2}\right) \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) (T_{11} \cos \theta + T'_{11} \sin \theta); \\ \sigma_\theta^{(1)} &= \frac{\alpha_{T1} E_1 \rho}{2(1 + \rho_1^2)} \left(3 - \frac{1 + \rho_1^2}{\rho^2} - \frac{\rho_1^2}{\rho^4}\right) (T_{11} \cos \theta + T'_{11} \sin \theta); \\ \sigma_{r,\theta}^{(1)} &= \frac{\alpha_{T1} E_1 \rho}{2(1 + \rho_1^2)} \left(1 - \frac{\rho_1^2}{\rho^2}\right) \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) (T_{11} \sin \theta - T'_{11} \cos \theta). \end{aligned} \right\} \quad (4.7.21)$$

Заменяя в формулах (4.7.17) и (4.7.21) E_1 , α_{T1} величинами E , α_T , получаем формулы для тепловых напряжений в тонком круглом диске, находящемся в плоском напряженном состоянии под действием плоского стационарного температурного поля (4.7.12).

Приведенный здесь способ решения осесимметричной плоской задачи термоупругости, основанный на применении уравнения четвертого порядка (4.7.7) для функции напряжений, имеет лишь методическое значение; тепловые напряжения $\sigma_r^{(0)}$ и $\sigma_\theta^{(0)}$ могут быть непосредственно получены из формул (4.6.2) при постановке в них $T = T^{(0)} = T_{01} + T_{02} \ln r$. Эти формулы вытекают также из решения осесимметричной плоской задачи термоупругости в напряжениях без привлечения условий однозначности, что объясняется понижением порядка уравнения совместности деформаций (4.2.39) в осесимметричном случае ($k=0$) (см. уравнение (4.2.45)); при подстановке $\sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{dF}{dr}$ в уравнение (4.2.48) получаем для функции напряжений F уравнение третьего порядка, совпадающее с условием однозначности (4.7.10). Аналогичное положение, связанное с понижением порядка уравнения совместности деформаций, имеет место и при $k = 1$ (см. § 5.3).

§ 4.8. Решение задачи о тепловых напряжениях в полом цилиндре с помощью дислокационной аналогии

Для решения задачи § 4.7 с помощью дислокационной аналогии, изложенной на основе теории функций комплексного переменного в § 4.5, рассмотрим плоскую задачу изотермической теории упругости для двусвязной области, ограниченной концентрическими

окружностями радиусов r_2 и r_1 , с дислокацией, которая характеризуется величинами ε , ξ , η ($K = 1$).

Приведем известные в плоской теории упругости соотношения между напряжениями в полярных r , θ и декартовых x , y координатах:

$$\begin{aligned}\sigma_r + \sigma_\theta &= \sigma_x + \sigma_y; \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\sigma_{r\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy})e^{2i\theta}.\end{aligned}\quad (4.8.1)$$

Вычитая из первого соотношения второе и применяя формулы (4.5.10) и (4.5.11), получаем

$$\sigma_r - i\sigma_{r\theta} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - [\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)]e^{2i\theta}, \quad (4.8.2)$$

где

$$z = re^{i\theta}, \quad \bar{z} = re^{-i\theta}.$$

Если отсутствуют контурные усилия, граничные условия принимают вид

$$\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - [\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)]e^{2i\theta} = 0 \text{ при } r = r_1 \text{ и } r = r_2. \quad (4.8.3)$$

Так как любую однозначную функцию можно разложить в ряд Лорана, то на основании результатов § 4.5 функции $\varphi'(z)$ и $\chi''(z)$ для рассматриваемой двусвязной области представим выражениями

$$\varphi'(z) = A \ln z + \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad \chi''(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n z^n. \quad (4.8.4)$$

На основании равенств (4.5.18) и (4.5.19) и первого равенства (4.5.25) имеем

$$a_{-1} = \gamma', \quad b_{-1} = \gamma'' (\gamma' = \alpha' + i\beta'), \quad (4.8.5)$$

$$A = \frac{E_1 \varepsilon}{8\pi}. \quad (4.8.6)$$

Принимая во внимание выражения (4.8.4), граничные условия (4.8.3) переписываем в виде

$$\begin{aligned}2A \ln r - A + \sum_{-\infty}^{\infty} (1-n) a_n r^n e^{in\theta} + \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{a}_n r^n e^{-in\theta} - \\ - \sum_{-\infty}^{\infty} b_{n-2} r^{n-2} e^{in\theta} = 0 \text{ при } r = r_1 \text{ и } r = r_2.\end{aligned}\quad (4.8.7)$$

Для определения коэффициентов разложения необходимо приравнять нулю множители при одинаковых $e^{in\theta}$. Исследование полученной при этом системы уравнений показывает, что отличны от нуля только коэффициенты, содержащиеся в индексах $n = 0$, $n = 1$, $n = -1$, т. е. a_0 , b_{-2} ; a_1 , b_{-1} ; a_{-1} , b_{-3} .

Приравнивая нулю члены, не зависящие от θ ($n = 0$), и учитывая, что $a_0 = \bar{a}_0$ (функция $\varphi'(z)$ определяется с точностью до чисто мни-

мого слагаемого, не влияющего на распределение напряжений), находим

$$a_0 = A \left(\frac{1}{2} - \frac{r_2^2 \ln r_2 - r_1^2 \ln r_1}{r_2^2 - r_1^2} \right), \quad b_{-2} = -\frac{2Ar_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (4.8.8)$$

Приравнявая нулю множители при $e^{i\theta}$ ($n = 1$), получаем

$$\bar{a}_{-1} = b_{-1} \quad \text{или} \quad a_{-1} = \bar{b}_{-1}. \quad (4.8.9)$$

Заметим, что на основании выражения (4.8.5) эти равенства, как и следовало ожидать, эквивалентны условию (4.5.21).

После приравнивания нулю множителей при $e^{-i\theta}$ ($n = -1$) получаем систему уравнений

$$2a_{-1} \frac{1}{r_1} + \bar{a}_1 r_1 - b_{-3} \frac{1}{r_1^3} = 0; \quad 2a_{-1} \frac{1}{r_2} + \bar{a}_1 r_2 - b_{-3} \frac{1}{r_2^3} = 0,$$

из которой определяем

$$\bar{a}_1 = -\frac{2}{r_1^2 + r_2^2} a_{-1} \quad \text{или} \quad a_1 = -\frac{2}{r_1^2 + r_2^2} \bar{a}_{-1}, \quad (4.8.10)$$

$$b_{-3} = \frac{2r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} a_{-1}.$$

С помощью равенств (4.5.25) и (4.8.5) коэффициенты (4.8.9) и (4.8.10) выражаем через характеристики дислокации ξ , η :

$$a_{-1} = \bar{b}_{-1} = \frac{E_1}{8\pi} (\eta - i\xi); \quad a_1 = -\frac{E_1}{4\pi} \cdot \frac{\eta + i\xi}{r_1^2 + r_2^2};$$

$$b_{-3} = \frac{E_1}{4\pi} (\eta - i\xi) \frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2}. \quad (4.8.11)$$

Итак, функции $\varphi'(z)$ и $\chi''(z)$ определяются выражениями

$$\varphi'(z) = A \ln z + a_0 + a_1 z + \frac{a_{-1}}{z}, \quad (4.8.12)$$

$$\chi''(z) = \frac{b_{-1}}{z} + \frac{b_{-2}}{z^2} + \frac{b_{-3}}{z^3}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (4.8.2) и разделяя ее на действительную и мнимую части, определим напряжения σ_r и $\sigma_{r\theta}$, а затем из формулы

$$\sigma_r + \sigma_{\theta} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}], \quad z = re^{i\theta} \quad (4.8.13)$$

напряжение σ_{θ} .

Ниже приводим формулы для определения напряжений, возникающих при двух характерных дислокациях:

1) при дислокации с характеристиками $\varepsilon \neq 0$, $\xi = \eta = 0$, соответствующей вырезу из кольца радиального клина с раствором ε

и повороту одного края относительно другого на угол ε (рис. 24)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{E_1 \varepsilon}{4\pi} \left(\frac{r_1^2}{r^2} \cdot \frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_1}{r_2} - \ln \frac{r}{r_2} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{E_1 \varepsilon}{4\pi} \left(\frac{r_1^2}{r^2} \cdot \frac{r_2^2 + r^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_1}{r_2} + \ln \frac{r}{r_2} + 1 \right); \\ \sigma_{r\theta} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (4.8.14)$$

2) при дислокации с характеристиками $\varepsilon = 0$, $\xi = 0$, $\eta \neq 0$, соответствующей разрезу кольца по оси Oy и жесткому поступатель-

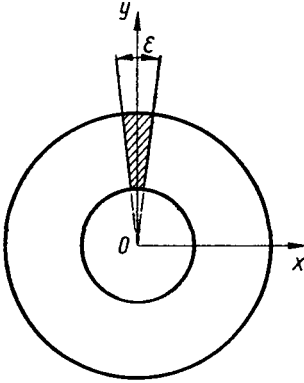


Рис. 24.

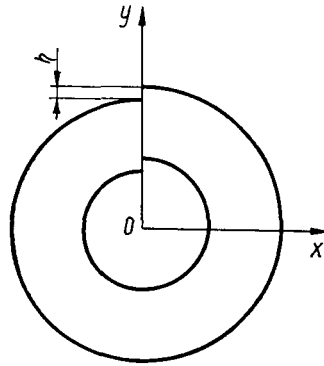


Рис. 25.

ному перемещению одного края относительно другого в направлении оси Oy на величину η (рис. 25)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{E_1 \eta r}{4\pi (r_1^2 + r_2^2)} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) \cos \theta; \\ \sigma_\theta &= -\frac{E_1 \eta r}{4\pi (r_1^2 + r_2^2)} \left(3 - \frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^4} \right) \cos \theta; \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{E_1 \eta r}{4\pi (r_1^2 + r_2^2)} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (4.8.15)$$

Формулы для напряжений, соответствующих дислокации с характеристиками $\varepsilon = 0$, $\xi \neq 0$, $\eta = 0$, можно получить из формулы (4.8.15) заменяя в них η величиной ξ и θ величиной $\theta + \frac{\pi}{2}$.

Из выражений (4.8.14) и (4.8.15) с помощью дислокационной аналогии получаем искомое решение для плоской задачи термоупругости.

Как видно из равенств (4.5.19), многозначность функции $\int f^{(T)}(z) dz$ возникает за счет членов $A^{(T)} \ln z$ и $\frac{\gamma^{(T)}}{z}$ ($\gamma^{(T)} = \alpha^{(T)} +$

$+ i\beta^{(T)}$ в выражении для функции $f^{(T)}(z)$ или членов $A^{(T)} \ln r$, $\frac{\alpha^{(T)}}{r} \cos \theta$ и $\frac{\beta^{(T)}}{r} \sin \theta$ в выражении для стационарного температурного поля.

Расставляя выражение (4.7.12), устанавливаем следующие равенства:

$$A^{(T)} = T_{02}; \quad \alpha^{(T)} = T_{11}r_2; \quad \beta^{(T)} = T_{11}'r_2. \quad (4.8.16)$$

При определении первого из этих равенств вводим в выражении (4.7.13) вместо T_{01} новую постоянную $T_{01} + T_{02} \ln r_2$.

Тепловые напряжения на основании равенств (4.5.26), (4.5.27) и (4.8.16) определяются по формулам (4.8.14), (4.8.15) и соответствующим формулам, содержащим ξ , при $\epsilon = -2\pi\alpha_{T1}T_{02}$, $\eta = -2\pi\alpha_{T1}r_2 T_{11}$, $\xi = 2\pi\alpha_{T1}r_2 T_{11}'$. Полученные таким методом тепловые напряжения совпадают с тепловыми напряжениями (4.7.17) и (4.7.21).

§ 4.9. Некоторые свойства гипергеометрических функций

Ниже приводятся без доказательства те свойства гипергеометрических функций, которые используются в настоящей книге. Основы теории гипергеометрических функций содержатся в работе [33] и в литературе, указанной в работе [24].

Гипергеометрическое уравнение имеет вид

$$z(1-z) \frac{d^2W}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{dW}{dz} - abW = 0, \quad (4.9.1)$$

где z — комплексная переменная; a, b, c — постоянные (в общем случае комплексные), называемые параметрами гипергеометрического уравнения. Это уравнение с тремя особыми регулярными точками: $z = 0, z = 1, z = \infty$. В окрестности точки $z = 0$ частные решения уравнения (4.9.1) при $c \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ имеют выражения

$$W^{(1)} = F(a, b; c; z); \quad (4.9.2)$$

$$W^{(2)} = z^{1-c} F(a+1-c, b+1-c; 2-c; z). \quad (4.9.3)$$

Гипергеометрическая функция вида $F(a, b; c; z)$ определяется рядом

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \cdot \frac{z^n}{n!}, \quad (4.9.4)$$

где $[a]_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$, $[a]_0 = 1$. Этот ряд сходится при $|z| < 1$, а также при $z = 1$, если $\text{Re}(c - a - b) > 0$.

Если $c = 1 + m$ ($m = 0, 1, \dots$) и $a, b \neq 1, 2, \dots, m$, то частное решение (4.9.3) или тождественно решению (4.9.2) (при $c = 1$) или

теряет смысл (при $c = 2, 3, \dots$). В этом случае второе частное решение определяется гипергеометрической функцией второго рода

$$\begin{aligned} W^{(2)} = & \Phi(a, b; c; z) = \ln z F(a, b; c; z) + \\ & + \sum_{n=1}^{c-1} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{[a-n]_n [b-n]_n} z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{z^n}{n!} \times \\ & \times \sum_{s=1}^n \left(\frac{1}{a+s-1} + \frac{1}{b+s-1} - \frac{1}{c+s-1} - \frac{1}{s} \right). \end{aligned} \quad (4.9.5)$$

В качестве второго частного решения целесообразно ввести функцию

$$\begin{aligned} W^{(2)} = & \Psi(a, b; c; z) = \Phi(a, b; c; z) + \\ & + [\psi(a) + \psi(b) - \psi(c) - \psi(1)] F(a, b; c; z), \end{aligned} \quad (4.9.6)$$

где $\psi(a)$ — логарифмическая производная от гамма-функции, равная $\frac{d \ln \Gamma(a)}{da}$.

Функциональные соотношения для $\Psi(a, b; c; z)$ имеют более простой вид, чем для $\Phi(a, b; c; z)$. Выражение (4.9.5) для функции $\Phi(a, b; c; z)$ теряет смысл, когда один из параметров a, b равен одному из чисел $1, 2, \dots, c-1$, а выражение (4.9.6) для функции $\Psi(a, b; c; z)$ теряет смысл, когда кроме того параметра a или b равен нулю или целому отрицательному числу. В этих случаях частные решения уравнения (4.9.1) — рациональные функции.

Два частных решения уравнения (4.9.1) в окрестности точки $z = 1$, когда $a + b + 1 - c \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, имеют вид:

$$W^{(1)} = F(a, b; a + b + 1 - c; 1 - z); \quad (4.9.7)$$

$$W^{(2)} = (1 - z)^{c-a-b} F(c - b, c - a; c - a - b + 1; 1 - z). \quad (4.9.8)$$

Если $a + b + 1 - c = 1 + m$ ($m = 0, 1, \dots$) и $a, b \neq 1, 2, \dots, m$, то второе частное решение определяется функцией

$$W^{(2)} = \Psi(a, b; a + b + 1 - c; 1 - z). \quad (4.9.9)$$

Ниже приводятся некоторые функциональные соотношения для $F(a, b; c; z)$:

формула дифференцирования

$$\frac{d}{dz} F(a, b; c; z) = \frac{ab}{c} F(a + 1, b + 1; c + 1; z); \quad (4.9.10)$$

формула преобразования

$$F(a, b; c; z) = (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b; c; z); \quad (4.9.11)$$

рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) = & (1 - z) F(a + 1, b + 1; c; z) + \\ & + \frac{c - a - b - 1}{c} z F(a + 1, b + 1; c + 1; z); \end{aligned} \quad (4.9.12)$$

$$F(a, b; c; z) = \frac{(c-a)(c-b)}{c(c-a-b)} F(a, b; c+1; z) - \frac{ab(1-z)}{c(c-a-b)} F(a+1, b+1; c+1; z); \quad (4.9.13)$$

$$F(a, b; c; z) = \frac{c-(2c-a-b+1)z}{c(1-z)} F(a, b; c+1; z) + \frac{(c-a+1)(c-b+1)}{c(c+1)(1-z)} zF(a, b; c+2; z). \quad (4.9.14)$$

Формула дифференцирования и рекуррентные формулы для $\Psi(a, b; c; z)$ совпадают с соответствующими функциональными соотношениями для $F(a, b; c; z)$. Формула преобразования для $\Psi(a, b; c; z)$ совпадает с формулой преобразования (4.9.11) для $F(a, b; c; z)$ при $a+b=0, \pm 1, \dots$

Неоднородное гипергеометрическое уравнение

$$z(1-z)\frac{d^2W}{dz^2} + [c-(a+b+1)z]\frac{dW}{dz} - abW + Az^{\lambda-1} = 0, \quad (4.9.15)$$

где A и λ — постоянные, имеет частное решение

$$W^{(0)} = -\frac{Az^\lambda}{\lambda(c+\lambda-1)} {}_3F_2(a+\lambda, b+\lambda, 1; c+\lambda, 1+\lambda; z), \quad (4.9.16)$$

где функция вида ${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; z)$ определяется рядом

$${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\alpha_1]_n [\alpha_2]_n [\alpha_3]_n}{[\beta_1]_n [\beta_2]_n} \cdot \frac{z^n}{n!}. \quad (4.9.17)$$

При $\lambda = 1, 2, \dots$ частное решение уравнения (4.9.15) имеет выражение

$$W^{(0)} = \frac{A(\lambda-1)! [c]_{\lambda-1}}{[a]_\lambda [b]_\lambda} \sum_{n=0}^{\lambda-1} \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \cdot \frac{z^n}{n!}. \quad (4.9.18)$$

Формула дифференцирования гипергеометрической функции (4.9.17) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} {}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; z) = \\ & = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\beta_1 \beta_2} {}_3F_2(\alpha_1+1, \alpha_2+1, \alpha_3+1; \beta_1+1, \beta_2+1; z). \end{aligned} \quad (4.9.19)$$

§ 4.10. Тепловые напряжения в цилиндре при переменных модуле упругости и коэффициенте линейного теплового расширения

Рассмотрим тепловые напряжения в длинном полом цилиндре при плоском осесимметричном температурном поле, оказывающем заметное влияние на модуль упругости и коэффициент линейного теплового расширения.

Изменение по радиусу модуля упругости E и чисто тепловой деформации $\alpha_T (T - T_0)$ аппроксимируем законами

$$E = E_0(1 - x), \quad x = k_E \rho^\alpha; \quad (4.10.1)$$

$$\alpha_T (T - T_0) = \sum_{j=0}^m a_j \rho^j, \quad (4.10.2)$$

где ρ — относительный радиус, $\rho = \frac{r}{r_2}$ (r_2 — радиус наружной цилиндрической поверхности); E_0, k_E, α, a_j — постоянные.

Исходное уравнение рассматриваемой задачи имеет вид (4.2.47). Выражая в нем E_1, ν_1 и α_{T1} по формулам (4.2.5) соответственно через E, ν и α_T и вводя относительный радиус, получаем

$$\rho^2 \frac{d^2 \sigma_r}{d\rho^2} + \rho \left(3 - \frac{\rho}{E} \cdot \frac{dE}{d\rho} \right) \frac{d\sigma_r}{d\rho} - \frac{(1-2\nu)\rho}{(1-\nu)E} \cdot \frac{dE}{d\rho} \sigma_r + \frac{E}{1-\nu} \rho \frac{d\alpha_T (T - T_0)}{d\rho} = 0. \quad (4.10.3)$$

Переходя к новой независимой переменной x и подставляя выражения (4.10.1) и (4.10.2), преобразуем уравнение (4.10.3) к виду

$$x(1-x) \frac{d^2 \sigma_r}{dx^2} + [c - (a + b + 1)x] \frac{d\sigma_r}{dx} - ab\sigma_r + (1-x)^2 \sum_{j=0}^m A_j x^{\lambda_j - 1} = 0, \quad (4.10.4)$$

где

$$a, b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} \pm \delta; \quad \delta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(1-\nu)(\alpha^2 + 4) - 4\nu\alpha}{\alpha^2(1-\nu)}}; \quad (4.10.5)$$

$$c = 1 + \frac{2}{\alpha}; \quad A_j = \frac{E_0 j a_j}{\alpha^2 (1-\nu) k_E^{\lambda_j}}; \quad \lambda_j = \frac{j}{\alpha}.$$

Общее решение уравнения (4.10.4) находим в виде

$$\sigma_r = \sigma_r^* + \sigma_r^{(T)}, \quad (4.10.6)$$

где σ_r^* — общее решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (4.10.4); $\sigma_r^{(T)}$ — частное решение неоднородного уравнения (4.10.4).

Однородное уравнение является гипергеометрическим, общее решение которого в окрестности особой точки $x = 0$ при $c \neq 0, 1, 2, \dots$ на основании выражений (4.9.2) и (4.9.3) имеет вид

$$\sigma_r^* = C_1 F(a, b; c; x) + C_2 x^{1-c} F(a+1-c, b+1-c; 2-c; x), \quad (4.10.7)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения (4.10.4) преобразуем его с помощью подстановки

$$\sigma_r = (1-x)^{c-a-b} \sigma \quad (c-a-b=2) \quad (4.10.8)$$

к виду

$$x(1-x) \frac{d^2 \sigma}{dx^2} + [c - (a' + b' + 1)x] \frac{d\sigma}{dx} - a'b'\sigma + \sum_{j=0}^m A_j x^{\lambda_j - 1} = 0, \quad (4.10.9)$$

где $a' = c - a$, $b' = c - b$.

Используя формулу (4.9.16) и учитывая подстановку (4.10.8), получаем частное решение уравнения (4.10.4)

$$\sigma_r^{(T)} = -(1-x)^2 \sum_{j=0}^m \frac{A_j x^{\lambda_j}}{\lambda_j (c + \lambda_j - 1)} {}_2F_2(a' + \lambda_j, b' + \lambda_j, 1; c + \lambda_j, 1 + \lambda_j; x). \quad (4.10.10)$$

Подставляя решение (4.10.6) в уравнение равновесия (4.2.46) и используя формулы дифференцирования гипергеометрических функций (4.9.10) и (4.9.19), находим

$$\sigma_\theta = \sigma_\theta^* + \sigma_\theta^{(T)}, \quad (4.10.11)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^* = & \sigma_r^* + \alpha x \frac{d\sigma^*}{dx} = \sigma_r^* + C_1 \frac{\alpha ab}{c} x F(a+1, b+1; c+1; x) + \\ & + C_2 \alpha x^{1-c} (1-c) F(a+1-c, b+1-c; 2-c; x) + \\ & + \left[\frac{(a+1-c)(b+1-c)x}{2-c} F(a+2-c, b+2-c; 3-c; x) \right]; \end{aligned} \quad (4.10.12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(T)} = & \sigma_r^{(T)} + \alpha x \frac{d\sigma_r^{(T)}}{dx} = \\ = & \sigma_r^{(T)} - \alpha x (1-x) \sum_{j=0}^m \frac{A_j x^{\lambda_j - 1}}{\lambda_j (c + \lambda_j - 1)} \left\{ [\lambda_j - (\lambda_j + 2)x] \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times x {}_3F_2(a' + \lambda_j), b' + \lambda_j, 1; c + \lambda_j, 1 + \lambda_j; x) + \\ & + \frac{(a' + \lambda_j)(b' + \lambda_j)x(1-x)}{(c + \lambda_j)(1 + \lambda_j)} {}_3F_2(a' + \lambda_j + 1, b' + \lambda_j + 1, 2; \\ & c + \lambda_j + 1, 2 + \lambda_j; x) \}. \end{aligned} \quad (4.10.13)$$

Пр и м е р. Определим в фиксированный момент времени $t = 420$ сек тепловые напряжения в длинном сплошном цилиндре из хромоникельвольфрамованадиевой стали, между поверхностью которого и окружающей средой происходит нестационарный осесимметричный конвективный теплообмен. Расчет температурного поля цилиндра приводится в § 3.8.

Т а б л и ц а 4

ρ	$T, ^\circ\text{K}$	$\frac{E}{E_0}$	$\alpha_T \cdot 10^6, 1/\text{град}$	$\alpha_T(T - 323^\circ\text{K}) \times 10^3$
0	383	1	11,9	0,712
0,2	398	0,995	12,0	0,902
0,4	445	0,976	12,3	1,499
0,6	528	0,939	12,7	2,598
0,8	645	0,871	13,2	4,235
1,0	778	0,692	13,6	6,189

В табл. 4 на основании справочных данных [4] указаны значения отношения $\frac{E}{E_0}$, где E и E_0 — модули упругости соответственно на радиусе ρ и на оси цилиндра ($\rho = 0$). В этой же таблице приведены средние значения коэффициента линейного теплового расширения α_T в интервале ($323^\circ\text{K}, T$) и чисто тепловые удлинения $\alpha_T(T - 323^\circ\text{K})$.

Изменение отношения $\frac{E}{E_0}$ по радиусу цилиндра (рис. 26, штриховая линия) аппроксимируем законом (4.10.1), выбирая $\alpha = 3$, $k_E = 0,308$ (сплошная линия). Аппроксимацию изменения $\alpha_T(T - 323^\circ\text{K}) \cdot 10^3$ по радиусу цилиндра (рис. 26) выполняем по закону (4.10.2), подбирая следующие значения коэффициентов: $a_0 = 0,000712$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0,0045652$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0,0024565$, $a_5 = 0$, $a_6 = -0,0015448$, $m = 6$. При указанных значениях постоянных α , k_E , a_m и $\nu = 0,3$ величины (4.10.5) имеют значения $a = 0,30051$, $b = -0,63384$, $c = 1,66667$, $A_0 = A_1 = A_3 = A_5 = 0$, $A_2 = 0,0031778 E_0$, $A_4 = 0,0074985 E_0$, $A_6 = -0,015509 E_0$, $\lambda_2 = 0,66667$, $\lambda_4 = 1,3333$, $\lambda_6 = 2$.

Поскольку цилиндр сплошной и свободен от поверхностных сил, в решениях (4.10.7) и (4.10.12) постоянную C_2 следует положить равной нулю, а постоянную C_1 определить из условия $\sigma_r = 0$ при $\rho = 1$.

Суммируя гипергеометрические ряды, входящие в решения (4.10.6) и (4.10.11), вычисляем на разных радиусах тепловые напряжения σ_r и σ_θ . В табл. 5 приведены результаты вычисления этих напряжений с точностью до постоянного множителя $\frac{E_0}{10^3}$, а также соответствующих напряжений при постоянных модуле упругости E , коэффициенте Пуассона $\nu = 0,3$ и коэффициенте теплового расширения

$\alpha_T = \frac{1}{2} [\alpha_T(0) + \alpha_T(1)] = 12,75 \cdot 10^{-6} 1/\text{град}$, вычисленных по данным для величин $\sigma_r \frac{1-\nu}{\alpha_T E}$ и $\sigma_\theta \frac{1-\nu}{\alpha_T E}$ при $t = 420$ сек в примере 1 § 4.6 (см. рис. 23).

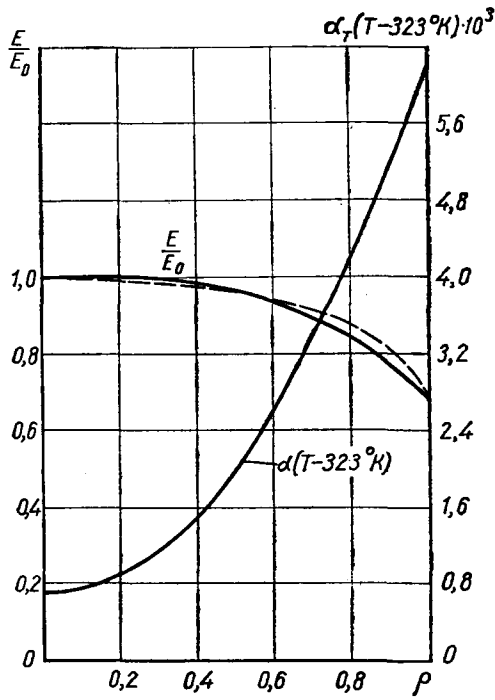


Рис. 26.

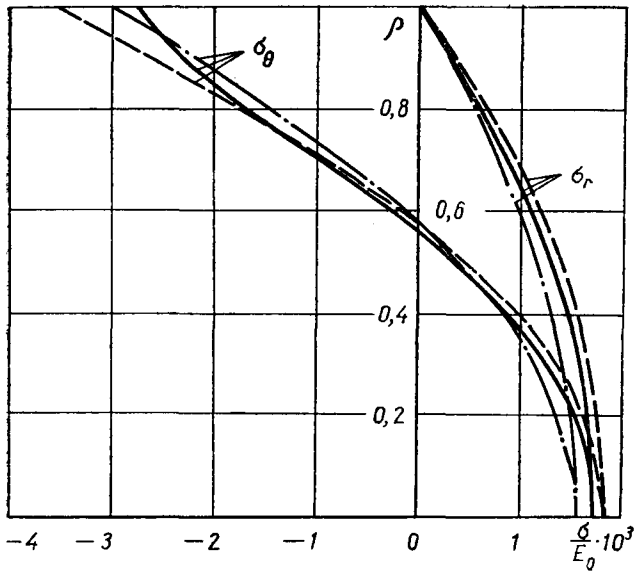


Рис. 27.

Распределение напряжений σ_r и σ_θ по радиусу цилиндра иллюстрируется также рис. 27 для трех случаев: 1) $E \equiv E(r)$, $\alpha_T = \alpha_T(r)$ (сплошные линии); 2) $E = E(0) = E_0$, $\alpha_T = 12,75 \cdot 10^{-6}$ 1/град (штриховые линии); 3) $E = \frac{1}{2} [E(0) + E(1)] = 0,846 E_0$, $\alpha_T = 12,75 \cdot 10^{-6}$ 1/град (штрих-пунктирные

Т а б л и ц а 5

ρ	Напряжения при $E = E(r)$ и $\alpha_T = \alpha_T(r)$		Напряжения при $E = \text{const}$ и $\alpha_T = 12,75 \cdot 10^{-6}$ 1/град	
	$\frac{\sigma_r \cdot 10^3}{E_0}$	$\frac{\sigma_\theta \cdot 10^3}{E_0}$	$\frac{\sigma_r \cdot 10^3}{E}$	$\frac{\sigma_\theta \cdot 10^3}{E}$
0	1,726	1,726	1,835	1,835
0,2	1,669	1,551	1,766	1,633
0,4	1,447	0,8676	1,556	0,9869
0,6	1,080	-0,2624	1,190	-0,1643
0,8	0,5714	-1,680	0,6605	-1,755
1,0	0	-2,776	0	-3,524

линии). Во втором случае напряжения $(\sigma_r)_{\rho=0} = (\sigma_\theta)_{\rho=0}$ на 6% больше, сжимающее тепловое напряжение $(\sigma_\theta)_{\rho=1}$ на 26% больше, а в третьем случае $(\sigma_r)_{\rho=0} = (\sigma_\theta)_{\rho=0}$ на 10% меньше, $(\sigma_\theta)_{\rho=1}$ на 7% больше, чем в первом. Приближенный расчет, основанный на упомянутых данных для величин $\sigma_r \frac{1-\nu}{\alpha_T E}$ и $\sigma_\theta \frac{1-\nu}{\alpha_T E}$, но при значениях E и α_T на каждом радиусе, взятых из табл. 4, наиболее приближается к напряжениям, полученным при $E \equiv E(r)$ и $\alpha_T \equiv \alpha_T(r)$: расхождение не превышает 7%.

Термоупругость круглых пластин

§ 5.1. Основные предположения и задачи

В настоящей главе рассматриваются в квазистатической постановке растяжение и изгиб тонких круглых пластин, обусловленные пространственным температурным полем $T(r, \theta, z, t)$, где r, θ — полярные координаты в срединной плоскости пластины; z — координата вдоль нормали к срединной плоскости пластины; t — время, которое играет роль параметра. Эти задачи излагаются в рамках теории изгиба тонких круглых пластин малого прогиба [22], основанной на гипотезе о неизменяемости нормального элемента и на предположении о том, что нормальными напряжениями на площадках, параллельных срединной плоскости пластины, можно пренебречь по сравнению с другими напряжениями. Согласно гипотезе о неизменяемости нормального элемента прямолинейные волокна пластины, до деформации нормальные к срединной плоскости, при деформации поворачиваются, оставаясь прямолинейными и нормальными к деформированной срединной поверхности, и не изменяют своей длины.

Система уравнений, описывающая рассматриваемую задачу, выводится в § 5.2 в общем случае для круглой пластины переменной толщины с учетом влияния растяжения на изгиб. Материал пластины однородный. Предполагается, что пластина обладает пологим профилем, симметричным относительно срединной плоскости и относительно оси, перпендикулярной к срединной плоскости и проходящей через центр пластины.

Влияние растяжения на изгиб учитывается при значительных усилиях в срединной плоскости пластины, возникающих при неравномерном ее нагреве с большими температурными градиентами по радиусу; при этом вследствие малого прогиба усилия в срединной плоскости определяются независимо от изгиба.

В § 5.3 излагается теория тепловых напряжений в круглой пластине постоянной толщины при осесимметричном, антисимметричном и циклически-симметричном температурных полях. В случае осесимметричного температурного поля устанавливается аналогия между задачей о плоском термоупругом напряженном состоянии пластины и задачей о тепловом ее изгибе. В качестве примера рассматривается задача о тепловых напряжениях в круглой

сплошной пластине при стационарном осесимметричном температурном поле, изменяющемся по линейному закону вдоль ее толщины, без учета влияния растяжения на изгиб. На основе точного решения проведено исследование влияния осесимметричного теплового растяжения на осесимметричный тепловой изгиб в круглой сплошной пластине.

Задача о тепловых напряжениях в круглой пластине линейно-переменной толщины при осесимметричном температурном поле исследована в § 5.4. Приведен пример расчета тепловых напряжений в стальном диске газовой турбины при нестационарном осесимметричном температурном поле, известном из эксперимента.

Неравномерный нагрев с большими перепадами температуры вызывает изменение упругих характеристик материала пластины от температуры. В связи с этим в § 5.5 рассматривается термоупругость неоднородных круглых пластин при осесимметричном температурном поле как в самой общей постановке, когда учитывается влияние растяжения на изгиб и изменение упругих свойств материала пластины по ее радиусу и толщине, так и в частных случаях, когда влияние растяжения на изгиб несущественно, а упругие свойства материала изменяются только по толщине пластины или по ее радиусу.

§ 5.2. Основные уравнения термоупругости пластин переменной толщины

Обозначим радиальное и окружное перемещения и прогиб срединной плоскости пластины через u_r , u_θ и u_z , а относительные удлинения ее в радиальном и окружном направлениях и сдвиг — через

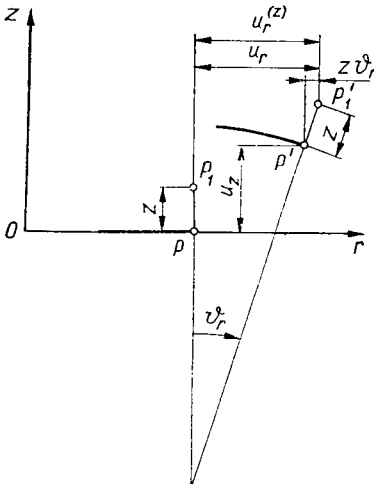


Рис. 28.

ϵ_r , ϵ_θ и $\gamma_{r\theta}$. Соотношения между деформациями ϵ_r , ϵ_θ , $\gamma_{r\theta}$ и перемещениями u_r , u_θ срединной поверхности совпадают с соответствующими соотношениями плоской задачи термоупругости в полярных координатах (4.2.38):

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \epsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \\ \gamma_{r\theta} &= 2\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \\ &+ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}. \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

В соответствии с гипотезой о неизменяемости нормального элемента перемещения $u_r^{(z)}$, $u_\theta^{(z)}$, $u_z^{(z)}$ в точке P_1 на расстоянии z от

срединной плоскости выражаются через перемещения соответствующей (лежащей на той же нормали) точки P срединной поверхности по формулам

$$u_r^{(z)} = u_r + z\vartheta_r; \quad u_\theta^{(z)} = u_\theta + z\vartheta_\theta; \quad u_z^{(z)} = u_z, \quad (5.2.2)$$

где

$$\vartheta_r = -\frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad \vartheta_\theta = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta}. \quad (5.2.3)$$

Величина ϑ_r представляет собой малый угол поворота нормали в плоскости zOr (рис. 28), а ϑ_θ — угол поворота нормали вокруг оси r .

Заменяя в выражениях (5.2.1) u_r , u_θ величинами $u_r^{(z)}$, $u_\theta^{(z)}$ и принимая во внимание соотношения (5.2.3), находим относительные удлинения $\epsilon_r^{(z)}$, $\epsilon_\theta^{(z)}$ и сдвиг $\gamma_{r\theta}^{(z)}$ в точке на расстоянии z от срединной поверхности

$$\epsilon_r^{(z)} = \epsilon_r + z\kappa_r, \quad \epsilon_\theta^{(z)} = \epsilon_\theta + z\kappa_\theta, \quad \gamma_{r\theta}^{(z)} = \gamma_{r\theta} + 2z\kappa_{r\theta}, \quad (5.2.4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \kappa_r &= \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}; \\ \kappa_\theta &= \frac{1}{r} \left(\vartheta_r + \frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}; \\ \kappa_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vartheta_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial r} - \frac{\vartheta_\theta}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.2.5)$$

Величины κ_r и κ_θ — кривизны срединной поверхности в радиальном и окружном направлениях, а $\kappa_{r\theta}$ — ее кручение.

На элемент пластины толщиной h , выделенный двумя радиальными и двумя цилиндрическими сечениями, действуют нормальные напряжения σ_r , σ_θ и касательные напряжения $\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r}$, σ_{rz} , $\sigma_{\theta z}$ (рис. 29).

Введем вместо напряжений статически эквивалентные им усилия и моменты:

$$\left. \begin{aligned} N_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz, & N_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz, & N_{r\theta} &= N_{\theta r} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{r\theta} dz; \\ Q_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rz} dz, & Q_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta z} dz; \\ M_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz, & M_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z dz, & M_{r\theta} &= M_{\theta r} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{r\theta} z dz. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.6)$$

Здесь N_r , $N_{r\theta}$ и Q_r — соответственно нормальное, сдвигающее и поперечное усилия, действующие в цилиндрическом сечении; N_θ , $N_{\theta r} = N_{r\theta}$ и Q_θ — соответственно нормальное, сдвигающее и попе-

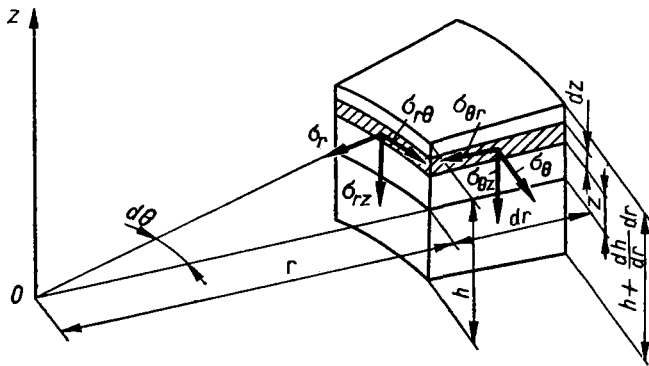


Рис. 29.

речное усилия, действующие в радиальном сечении; M_r и $M_{r\theta}$ — изгибающий и крутящий моменты, действующие в цилиндрическом сечении; M_θ и $M_{\theta r} = M_{r\theta}$ — изгибающий и крутящий моменты, дей-

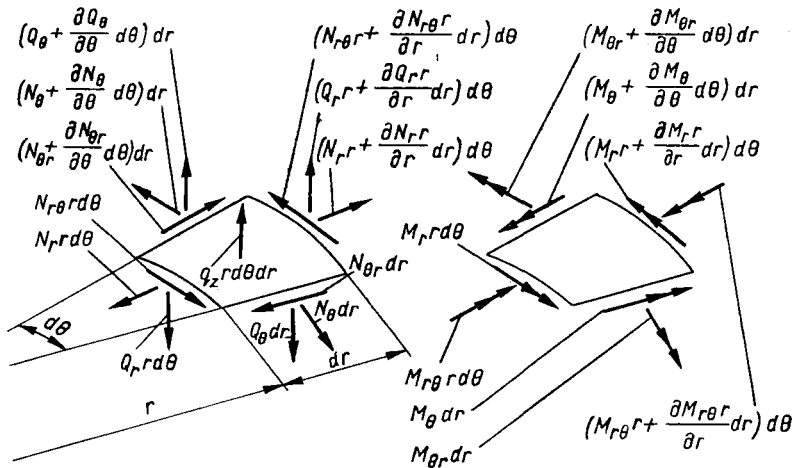


Рис. 30.

ствующие в радиальном сечении. Внутренние усилия и моменты отнесены к единице длины соответствующей координатной линии (окружности или радиуса) срединной поверхности.

Обозначим внешнюю распределенную поперечную нагрузку, приходящуюся на единицу площади срединной плоскости, через q_z .

Положительные направления внутренних усилий и моментов и внешней нагрузки указаны на рис. 30.

Введение внутренних усилий и моментов позволяет задачу о равновесии пространственного элемента пластины свести к задаче о равновесии соответствующего элемента ее срединной плоскости.

Рассматривая условия равновесия деформированного элемента срединной плоскости, составляем уравнения равновесия пластины:

$$\frac{\partial N_{r,r}}{\partial r} + \frac{\partial N_{r\theta}}{\partial \theta} - N_{\theta} = 0; \quad (5.2.7)$$

$$\frac{\partial N_{r\theta,r}}{\partial r} + \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + N_{r\theta} = 0; \quad (5.2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{r,r}}{\partial r} + \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (N_{r,r} \vartheta_r) - \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{\theta} \vartheta_{\theta}) - \\ - \frac{\partial}{\partial r} (N_{r\theta,r} \vartheta_{\theta}) - \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{r\theta} \vartheta_r) + q_z r = 0; \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

$$\frac{\partial M_{r,r}}{\partial r} + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} - M_{\theta} - Q_{r,r} = 0; \quad (5.2.10)$$

$$\frac{\partial M_{r\theta,r}}{\partial r} + \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} + M_{r\theta} - Q_{\theta,r} = 0. \quad (5.2.11)$$

При этом учитываем проекции усилий N_r , N_{θ} , $N_{r\theta}$, $N_{\theta r}$ на ось z . Так, при деформации элемента срединной поверхности усилия $N_r r d\theta$ и $(N_{r,r} + \frac{\partial N_r}{\partial r} dr) d\theta$, приложенные к сторонам элемента $r = \text{const}$ и $r + dr = \text{const}$, поворачиваются соответственно на углы ϑ_r и $\vartheta_r + \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} dr$ и дают равнодействующую проекций на ось z — $\frac{\partial N_r \vartheta_r}{\partial r} dr d\theta$ (рис. 31).

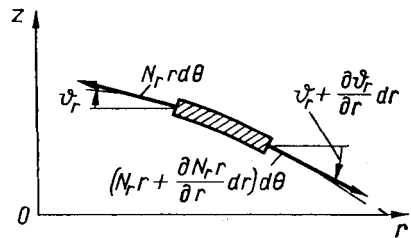


Рис. 31.

Деформации (5.2.4) состоят из упругих деформаций, обусловленных напряжениями, и чисто тепловой деформации.

В некоторой точке пластины чисто тепловая деформация, возникающая при увеличении температуры на величину $T - T_0$, равна чисто тепловому относительному удлинению $\alpha_T (T - T_0)$, где α_T — средний коэффициент линейного теплового расширения в интервале температуры (T_0, T) .

Применяя для упругих деформаций известные соотношения, вытекающие из закона Гука для двумерного напряженного состояния, и учитывая чисто тепловое относительное удлинение, имеем следующие соотношения между деформациями $\varepsilon_r^{(z)}$, $\varepsilon_{\theta}^{(z)}$, $\gamma_{r\theta}^{(z)}$ на

расстоянии z от срединной поверхности и соответствующими напряжениями:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r^{(z)} &= \frac{\sigma_r - \nu\sigma_\theta}{E} + \alpha_T(T - T_0); \\ \varepsilon_\theta^{(z)} &= \frac{\sigma_\theta - \nu\sigma_r}{E} + \alpha_T(T - T_0); \\ \gamma_{r\theta}^{(z)} &= \frac{2(1 + \nu)}{E} \sigma_{r\theta}, \end{aligned} \right\} \quad (5.2.12)$$

где E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона.

Умножаем равенства (5.2.12) на dz , а затем на zdz и интегрируем в пределах от $z = -\frac{h}{2}$ до $z = \frac{h}{2}$. Используя выражения (5.2.4) и (5.2.6), находим

$$\varepsilon_r = \frac{N_r - \nu N_\theta}{Eh} + \varepsilon_T; \quad \varepsilon_\theta = \frac{N_\theta - \nu N_r}{Eh} + \varepsilon_T; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{2(1 + \nu)}{Eh} N_{r\theta}; \quad (5.2.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_r &= \frac{12(M_r - \nu M_\theta)}{Eh^3} + \kappa_T; & \kappa_\theta &= \frac{12(M_\theta - \nu M_r)}{Eh^3} + \kappa_T; \\ \kappa_{r\theta} &= \frac{12(1 + \nu)}{Eh^3} M_{r\theta}, \end{aligned} \right\} \quad (5.2.14)$$

где величины ε_T и κ_T можно рассматривать как обобщенные чисто тепловые деформации:

$$\varepsilon_T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_T(T - T_0) dz; \quad \kappa_T = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_T(T - T_0) z dz. \quad (5.2.15)$$

Определяя из выражений (5.2.13) и (5.2.14) усилия и моменты, получаем следующие соотношения между усилиями, моментами и деформациями:

$$\left. \begin{aligned} N_r &= D_N [\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta - (1 + \nu)\varepsilon_T]; \\ N_\theta &= D_N [\nu\varepsilon_r + \varepsilon_\theta - (1 + \nu)\varepsilon_T]; \\ N_{r\theta} &= N_{\theta r} = \frac{1 - \nu}{2} D_N \gamma_{r\theta}; \end{aligned} \right\} \quad (5.2.16)$$

$$\left. \begin{aligned} M_r &= D_M [\kappa_r + \nu\kappa_\theta - (1 + \nu)\kappa_T]; \\ M_\theta &= D_M [\nu\kappa_r + \kappa_\theta - (1 + \nu)\kappa_T]; \\ M_{r\theta} &= M_{\theta r} = (1 - \nu)D_M \kappa_{r\theta}, \end{aligned} \right\} \quad (5.2.17)$$

где $D_N = \frac{Eh}{1-\nu^2}$ — цилиндрическая жесткость растяжения пластины, $D_M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость изгиба пластины.

Усилия N_r , N_θ , $N_{r\theta}$, возникающие при растяжении пластины, находятся независимо от ее изгиба. Для определения этих усилий удобно ввести функцию напряжений (точнее, усилий) F . Уравнения равновесия (5.2.7), (5.2.8) тождественно удовлетворяются при выражениях для усилий

$$\begin{aligned} N_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \quad N_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \\ N_{r\theta} &= N_{\theta r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

идентичных соотношениям между напряжениями и функцией напряжений (4.2.42) в плоской задаче теории упругости.

Уравнение для F составляется на основе условия совместности деформаций в плоской задаче теории упругости в полярных координатах |

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \epsilon_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \epsilon_\theta r}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \epsilon_r}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \gamma_{r\theta} r}{\partial r \partial \theta}. \quad (5.2.19)$$

Выражая в уравнении (5.2.19) деформации через усилия по формулам (5.2.13) и заменяя усилия выражениями (5.2.18), получаем следующее уравнение для F :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 F + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{Eh} \right) \left(2 \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} + \frac{2-\nu}{r} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \right. \\ &- \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{3}{r^3} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \left. \right) + \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{Eh} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \right. \\ &\left. - \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\nu}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) + \nabla^2 \epsilon_T = 0, \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Для составления второго разрешающего уравнения рассматриваемой задачи используются уравнения (5.2.9) — (5.2.11). Исключая из них усилия Q_r и Q_θ , получаем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 M_{r,r}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 M_{r,\theta} r}{\partial r \partial \theta} - \\ &- \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (N_{r,r} \vartheta_r) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (N_\theta \vartheta_\theta) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (N_{r\theta} r \vartheta_\theta) - \\ &- \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{r\theta} \vartheta_r) + q_z = 0. \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

Выражая моменты и углы поворота нормали через u_z по формулам (5.2.17), (5.2.3) и (5.2.5), а усилия через F по формулам (5.2.18), находим второе разрешающее уравнение

$$\begin{aligned}
 D_M \nabla^2 \nabla^2 u_z + \frac{dD_M}{dr} \left(2 \frac{\partial^3 u_z}{\partial r^3} + \frac{2+\nu}{r} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial^3 u_z}{\partial r \partial \theta^2} - \right. \\
 \left. - \frac{3}{r^3} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right) + \frac{d^2 D_M}{dr^2} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right) - \\
 - \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right) + \\
 + 2 \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \right] \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) - q_z + \\
 + (1 + \nu) \nabla^2 (\kappa_T D_M) = 0. \tag{5.2.22}
 \end{aligned}$$

Зная величины F и u_z , можно определить все усилия и моменты. Усилия в плоскости пластины находятся по формулам (5.2.18), моменты — по формулам (5.2.17) и (5.2.5), а поперечные усилия определяются из уравнений (5.2.10) и (5.2.11).

Из соотношений (5.2.12) — (5.2.14) и выражений (5.2.4) получаем следующие формулы для напряжений:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{N_r}{h} + \frac{12M_{rz}}{h^3} + \frac{E}{1-\nu} [\varepsilon_T + z\kappa_T - \alpha_T (T - T_0)]; \\
 \sigma_\theta &= \frac{N_\theta}{h} + \frac{12M_{\theta z}}{h^3} + \frac{E}{1-\nu} [\varepsilon_T + z\kappa_T - \alpha_T (T - T_0)]; \\
 \sigma_{r\theta} &= \frac{N_{r\theta}}{h} + \frac{12M_{r\theta z}}{h^3}.
 \end{aligned} \right\} \tag{5.2.23}$$

Рассмотрим граничные условия задачи. Для функции F они будут такими же, как и для функции напряжений в плоской задаче теории упругости. В качестве граничных условий для u_z на контуре $r = \text{const}$ могут быть заданы два из следующих факторов: прогиб u_z , угол поворота нормали ϑ_r , изгибающий момент M_r , приведенное поперечное усилие $Q_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta}$. Угол ϑ_r выражается через u_z по формуле (5.2.3), моменты M_r , $M_{r\theta}$ определяются по формулам (5.2.17) и (5.2.5), а усилие Q_r — из уравнения (5.2.10).

Граничные условия могут быть следующими:

1. Контур свободно оперт или шарнирно закреплен:

$$u_z = 0, \quad M_r = 0. \tag{5.2.24}$$

2. Контур жестко заделан или скользяще защемлен:

$$u_z = 0, \quad \vartheta_r = 0. \tag{5.2.25}$$

* Здесь крутящий момент $M_{r\theta}$ в соответствии с известным в теории пластин преобразованием [61] заменяется статически эквивалентным усилием $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta}$.

3. Контур подвержен действию изгибающего момента M и поперечной силы Q :

$$M_r = M, \quad Q_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} = Q. \quad (5.2.26)$$

При одновременном действии на контуре радиальной силы N и поперечной Q второе условие (5.2.26) принимает вид

$$Q_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} = Q + N\vartheta_r. \quad (5.2.27)$$

Здесь учитывается, что сила N имеет составляющую $N\vartheta_r$ в направлении нормали к деформированной срединной плоскости пластины.

§ 5.3. Тепловые напряжения в пластине постоянной толщины

Для пластины постоянной толщины разрешающие уравнения (5.2.20) и (5.2.22) имеют вид

$$\nabla_1^2 [\nabla_1^2 F + Ehr_2^2 \varepsilon_T] = 0; \quad (5.3.1)$$

$$D_M \nabla_1^2 \nabla_1^2 u_z - \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right) + 2 \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \right] \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) - q_z r_2^4 + (1 + \nu) D_M r_2^2 \nabla_1^2 \varkappa_T = 0, \quad (5.3.2)$$

где $\rho = \frac{r}{r_2}$ — относительный радиус пластины (r_2 — радиус наружного контура пластины); $\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$.

Если температурное поле не вызывает значительных усилий в срединной плоскости пластины, то в уравнении (5.3.2) можно не учитывать влияния растяжения пластины на ее изгиб. Тогда это уравнение принимает вид

$$\nabla_1^2 \nabla_1^2 u_z - \frac{q_z r_2^2}{D_M} + (1 + \nu) r_2^2 \nabla_1^2 \varkappa_T = 0 \quad (5.3.3)$$

и рассматриваемая задача распадается на две независимые: о плоском напряженном состоянии пластины и об ее изгибе.

Температурное поле пластины представим в виде ряда Фурье

$$T(\rho, \theta, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} T^{(k)}(\rho, \zeta) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} T^{(k)'}(\rho, \zeta) \sin k\theta, \quad (5.3.4)$$

где $\zeta = \frac{z}{h}$.

Входящие в разрешающие уравнения (5.3.1) — (5.3.3) величины ε_T , \varkappa_T представляются аналогичными рядами

$$\varepsilon_T(\rho, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k(\rho) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon'_k(\rho) \sin k\theta; \quad (5.3.5)$$

$$\varkappa_T(\rho, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \varkappa_k(\rho) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \varkappa'_k(\rho) \sin k\theta, \quad (5.3.6)$$

где
$$\varepsilon_k(\rho) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \alpha_T T^{(k)}(\rho, \zeta) d\zeta, \quad \varkappa_k(\rho) = \frac{12}{h} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \alpha_T T^{(k)}(\rho, \zeta) \zeta d\zeta.$$

Заменяя $T^{(k)}$ величиной $T^{(k)'}$, получаем соответствующие выражения для $\varepsilon'_k(\rho)$ и $\varkappa'_k(\rho)$.

Согласно выражению (5.3.5) решение уравнения (5.3.1) ищем в виде (4.7.1). Подстановка выражения (4.7.1) в уравнение (5.3.1) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} - \frac{k^2}{\rho^2} \right) \left[\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} - \frac{k^2}{\rho^2} \right) F_k + Ehr_2^2 e_k \right] = 0. \quad (5.3.7)$$

Решение однородного уравнения

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} - \frac{k^2}{\rho^2} \right)^2 F_k^* = 0 \quad (5.3.8)$$

при $k=0$ и $k=1$ определяется соответственно выражениями (4.7.16) и (4.7.19), а при $k=2, 3, \dots$ имеет вид

$$F_k^* = C_{1k}\rho^k + C_{2k}\rho^{-k} + C_{3k}\rho^{k+2} + C_{4k}\rho^{-k+2}. \quad (5.3.9)$$

К общему решению однородного уравнения (5.3.8) добавляется частное решение неоднородного уравнения (5.3.7). В качестве этого решения можно взять частное решение уравнения второго порядка

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} - \frac{k^2}{\rho^2} \right) F_k^{(e)} + Ehr_2^2 e_k = 0. \quad (5.3.10)$$

Аналогичные решения находятся для функций F_k' .

Постоянные интегрирования C_{nk} ($n=1, 2, 3, 4; k=0, 1, 2, \dots$) и C'_{nk} ($n=1, 2, 3, 4; k=1, 2, \dots$), входящие в выражение для функции напряжений, определяются из граничных условий на наружном и внутреннем контурах и условий однозначности на внутреннем контуре (§ 4.7).

Если не учитывать влияния растяжения пластины на ее изгиб, то прогиб u_z , удовлетворяющий уравнению (5.3.3), при $q_z=0$ на-

ходится так же, как и функция F . Представив u_z в виде ряда

$$u_z(\rho, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\rho) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(\rho) \sin k\theta, \quad (5.3.11)$$

получаем уравнение вида (5.3.7), в котором величины F_k и $Eh\epsilon_k$ следует заменить соответственно на u_k и $(1 + \nu)\kappa_k$. Когда влияние растяжения учитывается, прогиб u_z определяется из уравнения (5.3.2) после нахождения функции F .

Рассмотрим более подробно термоупругое напряженное состояние пластины при осесимметричном ($k = 0$) и антисимметричном ($k = 1$) температурных полях; порядок разрешающих уравнений в этих случаях можно понизить на две единицы.

При осесимметричном температурном поле перемещение u_θ , угол поворота ϑ_θ , деформации $\gamma_{r\theta}$, $\kappa_{r\theta}$, усилия $N_{r\theta}$, Q_θ и крутящий момент $M_{r\theta}$ равны нулю, соотношения между деформациями и перемещениями (5.2.1) и (5.2.5) имеют вид

$$\epsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad \kappa_r = \frac{r d\vartheta_r}{dr}, \quad \kappa_\theta = \frac{\vartheta_r}{r}, \quad (5.3.12)$$

где

$$\vartheta_r = -\frac{du_z}{dr}, \quad (5.3.13)$$

а уравнения равновесия (5.2.7) — (5.2.11) при $q_z = 0$ принимают вид

$$\frac{dN_r r}{dr} - N_\theta = 0; \quad (5.3.14)$$

$$Q_r r - N_r r \vartheta_r - C = 0; \quad (5.3.15)$$

$$\frac{dM_r r}{dr} - M_\theta - Q_r r = 0, \quad (5.3.16)$$

где C — постоянная интегрирования, которая равна с точностью до постоянного множителя равнодействующей несамоуравновешенных (поперечных) контурных усилий.

Уравнения совместности деформаций следующие:

$$\epsilon_r = \frac{d\epsilon_\theta r}{dr}, \quad \kappa_r = \frac{d\kappa_\theta r}{dr}. \quad (5.3.17)$$

Выражая в первом из этих уравнений деформации через усилия по формулам (5.2.13) и исключая усилие N_θ с помощью уравнения (5.3.14), получаем первое разрешающее уравнение:

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dN_r \rho^2}{dr} + Eh\epsilon_r \right) = 0. \quad (5.3.18)$$

Это уравнение можно получить также непосредственно из уравнения (4.2.48), если заменить α_{T1} и E_1 соответственно на α_T и E и ввести

вместо величин σ_r и $\alpha_T (T - T_0)$ соответственно величины N_r и ε_T с помощью первых формул (5.2.6) и (5.2.15).

Выражая в уравнении (5.3.16) изгибающие моменты через деформации по формулам (5.2.17) и исключая Q_r и $\varkappa_r, \varkappa_\theta$ с помощью уравнения (5.3.15) и соотношений (5.3.12), находим второе разрешающее уравнение:

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\vartheta_r \rho}{d\rho} \right) - \frac{N_r r_2^2 \vartheta_r}{D_M} - \frac{C r_2}{\rho D_M} - (1 + \nu) r_2 \frac{d\kappa_T}{d\rho} = 0. \quad (5.3.19)$$

Если не учитывать влияния растяжения пластины на ее изгиб, то рассматриваемая задача распадается на две независимые задачи: об осесимметричном плоском напряженном состоянии пластины, вызванном чисто тепловой деформацией ε_T , и об осесимметричном тепловом изгибе пластины, обусловленном чисто тепловой деформацией \varkappa_T . Первая задача описывается уравнением (5.3.18). Разрешающее уравнение второй задачи относительно ϑ_r , получаем из уравнения (5.3.19), отбрасывая член $-\frac{N_r r_2^2}{D_M} \vartheta_r$. Заменяя во втором уравнении (5.3.17) деформации моментами по формулам (5.2.14) и исключая затем M_θ с помощью уравнения (5.3.16), в котором при игнорировании влияния растяжения на изгиб $Q_r r = C$, находим следующее разрешающее уравнение второй задачи относительно M_r :

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dM_r \rho^2}{d\rho} + \frac{E h^3}{12} \varkappa_T \right) - \frac{1 + \nu}{\rho} C = 0. \quad (5.3.20)$$

Если отсутствуют поперечные усилия ($C = 0$), между первой и второй задачами существует полная аналогия: величинам $N_r, N_\theta, u_r, E h, \varepsilon_T$ первой задачи соответствуют величины $M_r, M_\theta, \vartheta_r, \frac{E h^3}{12}, \varkappa_T$ второй.

Подобное упрощение исходных уравнений имеет место и при антисимметричном температурном поле. Полагая в этом случае

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \varepsilon_{r1} \cos \theta; & \varepsilon_\theta &= \varepsilon_{\theta1} \cos \theta; & \varepsilon_{r\theta} &= \varepsilon_{r\theta1} \sin \theta; & \varepsilon_T &= \varepsilon_{T1} \cos \theta; \\ N_r &= N_{r1} \cos \theta; & N_\theta &= N_{\theta1} \cos \theta; & N_{r\theta} &= N_{r\theta1} \sin \theta, \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

где $\varepsilon_{r1}, \dots, N_{r\theta1}$ — функции r , подставляя величины (5.3.21) в уравнения равновесия (5.2.7), (5.2.8) и в уравнение совместности деформаций (5.2.19), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dN_{r1} r}{dr} + N_{r\theta1} - N_{\theta1} &= 0; \\ \frac{dN_{r\theta1} r}{dr} - N_{\theta1} + N_{r\theta1} &= 0 \end{aligned} \quad (5.3.22)$$

и

$$-\frac{1}{r^2} \varepsilon_{r1} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2 \varepsilon_{\theta1} r}{dr^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{d\varepsilon_{r1}}{dr} = \frac{2}{r^2} \cdot \frac{d\varepsilon_{r\theta1} r}{dr}. \quad (5.3.23)$$

Система уравнений (5.3.22) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} r(N_{r1} - N_{r\theta1}) + C_N &= 0; \\ N_{\theta1} &= N_{r1} + \frac{dN_{r1}r}{dr} + \frac{C_N}{r}, \end{aligned} \quad (5.3.24)$$

где C_N — постоянная интегрирования, с точностью до постоянного множителя равная равнодействующей несомоуравновешенных контурных усилий в срединной плоскости.

Порядок уравнения (5.3.23) также можно понизить. Учитывая тождества

$$\frac{1}{r^2} \varepsilon_{r1} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\varepsilon_{r1}}{dr} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d\varepsilon_{r1}r}{dr}; \quad \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2\varepsilon_{\theta1}r}{dr^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varepsilon_{\theta1}}{dr} \right)$$

и выполняя интегрирование, получаем вместо (5.3.23) следующее уравнение:

$$\varepsilon_{r1} + 2\varepsilon_{r\theta1} - r \frac{d\varepsilon_{\theta1}}{dr} = 0. \quad (5.3.25)$$

Возникающая при интегрировании постоянная равна нулю. В этом легко убедиться, подставляя в уравнение (5.3.25) соотношения

$$\varepsilon_{r1} = \frac{du_{r1}}{dr}; \quad \varepsilon_{\theta1} = \frac{u_{r1} + u_{\theta1}}{r}; \quad 2\varepsilon_{r\theta1} = -\frac{u_{r1} + u_{\theta1}}{r} + \frac{du_{\theta1}}{dr},$$

вытекающие при $u_r = u_{r1} \cos \theta$, $u_\theta = u_{\theta1} \sin \theta$ из соотношений (5.2.1).

Выражая в уравнении (5.3.25) амплитудные значения деформаций через амплитудные значения усилий по формулам $\varepsilon_{r1} = \frac{N_{r1} - \nu N_{\theta1}}{Eh} + \varepsilon_1$; $\varepsilon_{\theta1} = \frac{N_{\theta1} - \nu N_{r1}}{Eh} + \varepsilon_1$; $\varepsilon_{r\theta1} = \frac{1 + \nu}{Eh} N_{r\theta1}$ и исключая в нем $N_{r\theta1}$ и $N_{\theta1}$ с помощью уравнений (5.3.24), получаем в случае антисимметричного теплового растяжения разрешающее уравнение

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho^3} \cdot \frac{dN_{r1}\rho^3}{d\rho} \right) - \frac{3 + \nu}{r_2\rho^3} C_N - \frac{Eh}{\rho^2} \left(\varepsilon_1 - \rho \frac{d\varepsilon_1}{d\rho} \right) = 0. \quad (5.3.26)$$

Разрешающее уравнение для антисимметричного теплового изгиба выводим следующим образом. Вводим амплитудные значения деформаций \varkappa_{r1} , $\varkappa_{\theta1}$, $\varkappa_{r\theta1}$, \varkappa_1 , поперечных усилий Q_{r1} , $Q_{\theta1}$, изгибающих и крутящего моментов M_{r1} , $M_{\theta1}$, $M_{r\theta1}$ по формулам

$$\begin{aligned} \varkappa_r &= \varkappa_{r1} \cos \theta, \quad \varkappa_\theta = \varkappa_{\theta1} \cos \theta, \quad \varkappa_{r\theta} = \varkappa_{r\theta1} \sin \theta, \quad \varkappa_T = \varkappa_1 \cos \theta; \\ Q_r &= Q_{r1} \cos \theta, \quad Q_\theta = Q_{\theta1} \sin \theta; \\ M_r &= M_{r1} \cos \theta, \quad M_\theta = M_{\theta1} \cos \theta, \quad M_{r\theta} = M_{r\theta1} \sin \theta. \end{aligned} \quad (5.3.27)$$

Для этих амплитудных значений из уравнения (5.2.9), взятого при $q_z = 0$ и без учета влияния растяжения на изгиб, и из уравнений

(5.2.10), (5.2.11) получаем уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_{r1}r}{dr} + Q_{\theta 1} &= 0; \\ \frac{dM_{r1}r}{dr} + M_{r\theta 1} - M_{\theta 1} - Q_{r1}r &= 0; \\ \frac{dM_{r\theta 1}r}{dr} - M_{\theta 1} + M_{r\theta 1} - Q_{\theta 1}r &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.28)$$

По аналогии с (5.3.25) составляем уравнение совместности деформаций

$$\varkappa_{r1} + 2\varkappa_{r\theta 1} - r \frac{d\varkappa_{\theta 1}}{dr} = 0 \quad (5.3.29)$$

и устанавливаем второе уравнение совместности деформаций

$$\varkappa_{\theta 1} + \varkappa_{r\theta 1} = 0, \quad (5.3.30)$$

в справедливости которого легко убедиться при подстановке соотношений

$$\varkappa_{\theta 1} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{du_{z1}}{dr} + \frac{1}{r^2} u_{z1}, \quad \varkappa_{r\theta 1} = \frac{d}{dr} \left(\frac{u_z}{r} \right),$$

вытекающих при $u_z = u_{z1} \cos \theta$ из соотношений (5.2.5).

Порядок системы уравнений (5.3.28) можно понизить и преобразовать ее к виду

$$\begin{aligned} r(M_{r1} - M_{r\theta 1} - Q_{r1}r) + C_M &= 0; \\ r \frac{dM_{r1}}{dr} + 2M_{r\theta 1} - M_{\theta 1} - \frac{C_M}{r} &= 0, \end{aligned} \quad (5.3.31)$$

где C_M — постоянная интегрирования, равная с точностью до постоянного множителя равнодействующему моменту несамоуравновешенных контурных усилий и моментов.

Подставляя, наконец, во второе уравнение (5.3.31) выражения

$$M_{r1} = D_M [\varkappa_{r1} + \nu \varkappa_{\theta 1} - (1 + \nu) \varkappa_1];$$

$$M_{\theta 1} = D_M [\nu \varkappa_{r1} + \varkappa_{\theta 1} - (1 + \nu) \varkappa_1];$$

$$M_{r\theta 1} = (1 - \nu) D_M \varkappa_{r\theta 1}$$

и исключая затем \varkappa_{r1} и $\varkappa_{r\theta 1}$ с помощью уравнений (5.3.29) и (5.3.30), получаем искомое разрешающее уравнение

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho^3} \cdot \frac{d\varkappa_{\theta 1} \rho^3}{d\rho} \right) - \frac{C_M}{r_2 D_M \rho^3} + \frac{1 + \nu}{\rho^2} \left(\varkappa_1 - \rho \frac{d\varkappa_1}{d\rho} \right) = 0. \quad (5.3.32)$$

Решения уравнений (5.3.18), (5.3.20), (5.3.26) и (5.3.32) при известных чисто тепловых деформациях находятся без затруднений. Зная эти решения, определяем все остальные усилия, моменты и деформации.

Пример 1. Рассмотрим тепловые напряжения в круглой сплошной пластине постоянной толщины, обусловленные стационарным осесимметричным температурным полем

$$[T(r, z) = T^{(0)}(r) + zT^{(1)}(r)]. \quad (5.3.33)$$

Между наружным контуром пластины $r = r_2$, ее поверхностями $z = \pm \frac{h}{2}$ и окружающей средой происходит стационарный конвективный теплообмен, при этом температура среды, омывающей поверхность пластины $z = \frac{h}{2}$, существенно отличается от температуры среды, омывающей поверхность $z = -\frac{h}{2}$.

При таких условиях теплообмена температурное поле изменяется как вдоль радиуса, так и по толщине пластины, вызывая кроме растяжения тепловой изгиб пластины.

Решение соответствующей задачи теплопроводности определяется выражением (3.4.18). Полагая в этом выражении постоянные C_2 и C_2' равными нулю (пластина сплошная), получаем для функций $T_r^{(0)}$ и $T_r^{(1)}$ следующие выражения:

$$\begin{aligned} T^{(0)}(r) &= \vartheta + C_1 I_0(\delta r); \\ T^{(1)}(r) &= \mu + C_1' I_0(\delta_1 r). \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{\vartheta_3 + \vartheta_4}{2}, \quad \mu = \frac{\gamma(\vartheta_3 - \vartheta_4)}{(2 + \gamma)h}, \\ \delta^2 &= \frac{2\gamma I_2^2}{h^2}, \quad \delta_1^2 = \frac{6(2 + \gamma)r_2^2}{h^2}, \quad \gamma = \frac{\alpha h}{\lambda q}, \quad \rho = \frac{r}{r_2}, \end{aligned}$$

где ϑ_3 и ϑ_4 — температуры среды, омывающей поверхность пластины $z = \frac{h}{2}$ и $z = -\frac{h}{2}$; α — коэффициент теплоотдачи на поверхностях пластины $z = \pm \frac{h}{2}$; λq — коэффициент теплопроводности материала пластины; ρ — относительный радиус пластины.

Значения постоянных C_1 и C_1' определяем по первым равенствам (3.4.7) и (3.4.19); из-за отсутствия в пластине центрального отверстия в этих равенствах следует положить $\rho_1 = 0$ и $\gamma_1 = 0$.

Подставляя выражение (5.3.33) в (5.2.15), находим

$$\varepsilon_T = \alpha_T [\vartheta - T_0 + C_1 I_0(\delta r)], \quad (5.3.35)$$

$$\kappa_T = \alpha_T [\mu + C_1' I_0(\delta_1 r)]. \quad (5.3.36)$$

Предполагаем, что на контуре $\rho = 1$ отсутствуют радиальная и поперечная силы и изгибающий момент. Тогда граничные условия принимают вид

$$N_r = 0, \quad Q_r = 0, \quad M_r = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1. \quad (5.3.37)$$

Если не принимать во внимание влияния растяжения пластины на ее изгиб, то рассматриваемая задача будет состоять из двух независимых задач, из которых первая описывается уравнением (5.3.18) при первом граничном условии (5.3.37), а вторая — уравнением (5.3.20) при остальных граничных условиях (5.3.37). Постоянная C_3 , входящая в уравнение (5.3.20), из-за отсутствия поперечной нагрузки равна нулю. Между этими задачами имеет место аналогия как в основных

уравнениях, так и в граничных условиях и в выражениях для чисто тепловых деформаций. Поэтому достаточно рассмотреть решение первой задачи.

Решение уравнения (5.3.18) для N_r в случае сплошной пластины (вторая постоянная интегрирования равна нулю) и соответствующее решение для N_θ имеют выражения

$$N_r = C_0 - \frac{Eh}{\rho^2} \int_0^{\rho} \varepsilon_T \rho d\rho; \quad (5.3.38)$$

$$N_\theta = \frac{dN_r \rho}{d\rho} = C_0 + \frac{Eh}{\rho^2} \int_0^{\rho} \varepsilon_T \rho d\rho - Eh\varepsilon_T.$$

Определяя постоянную интегрирования C_0 из граничного условия (5.3.37) для N_r и подставляя выражение (5.3.35) для ε_T , получаем после интегрирования следующие усилия:

$$N_r = \frac{\alpha_T E h C_1}{\delta} \left[I_1(\delta) - \frac{1}{\rho} I_1(\delta \rho) \right]; \quad (5.3.39)$$

$$N_\theta = \frac{\alpha_T E h C_1}{\delta} \left[I_1(\delta) + \frac{1}{\rho} I_1(\delta \rho) - \delta I_0(\delta \rho) \right].$$

При интегрировании используем формулу

$$\int_0^x x I_0(x) dx = x I_1(x). \quad (5.3.40)$$

Заменяя в формулах (5.3.39) N_r , N_θ , Eh , C_1 , δ соответственно величинами M_r , M_θ , $\frac{Eh^3}{12}$, C_1' , δ_1 , получаем решения для изгибающих моментов

$$M_r = \frac{\alpha_T E h^3 C_1'}{12 \delta_1} \left[I_1(\delta_1) - \frac{1}{\rho} I_1(\delta_1 \rho) \right]; \quad (5.3.41)$$

$$M_\theta = \frac{\alpha_T E h^3 C_1'}{12 \delta_1} \left[I_1(\delta_1) + \frac{1}{\rho} I_1(\delta_1 \rho) - \delta_1 I_0(\delta_1 \rho) \right].$$

Соответствующие этим усилиям и изгибающим моментам тепловые напряжения определяются по формулам (5.2.23). В рассматриваемом случае линейного закона изменения температуры по толщине пластины температурные члены в формулах (5.2.23) сокращаются, и эти формулы принимают вид

$$\sigma_r = \frac{N_r}{h} + \frac{12 M_r z}{h^3}, \quad \sigma_\theta = \frac{N_\theta}{h} + \frac{12 M_\theta z}{h^3}. \quad (5.3.42)$$

Пример 2. Для оценки влияния теплового растяжения на тепловой изгиб в круглой пластине рассмотрим простейшую задачу об осесимметричном термоупругом напряженном состоянии сплошной круглой пластины радиуса r_2 под действием осесимметричного нагрева, при котором чисто тепловые относительные удлинения на поверхностях $z = \frac{h}{2}$ и $z = -\frac{h}{2}$ изменяются вдоль радиуса по законам

$$[\alpha_T (T - T_0)]_{z=\frac{h}{2}} = \varepsilon_0' + \varepsilon_2' \rho^2; \quad (5.3.43)$$

$$[\alpha_T (T - T_0)]_{z=-\frac{h}{2}} = \varepsilon_0'' + \varepsilon_2'' \rho^2.$$

где $\rho = \frac{r}{r_2}$ — относительный радиус пластины; $\varepsilon'_0, \varepsilon''_0, \varepsilon'_2, \varepsilon''_2$ — постоянные коэффициенты.

Если принять, что относительное удлинение $\alpha_T (T - T_0)$ изменяется линейно по толщине пластины, то на основании выражений (5.2.15) усилия в ней будут обуславливаться относительным удлинением

$$\varepsilon_T = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 \rho^2, \quad (5.3.44)$$

где
$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon'_0 + \varepsilon''_0}{2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon'_2 + \varepsilon''_2}{2},$$

а изгибающие моменты — кривизной

$$\varkappa_T = \frac{1}{h} (\mu_0 + \mu_2 \rho^2), \quad (5.3.45)$$

где

$$\mu_0 = \varepsilon'_0 - \varepsilon''_0; \quad \mu_2 = \varepsilon'_2 - \varepsilon''_2.$$

При чисто тепловых деформациях (5.3.44) и (5.3.45) и $C = 0$ уравнения (5.3.18) и (5.3.19) принимают вид

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dN_r \rho^3}{d\rho} + 2Eh\varepsilon_2 \rho \right) = 0; \quad (5.3.46)$$

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\vartheta_r \rho}{d\rho} \right) - \frac{12(1-\nu^2)r_2^2}{Eh^3} N_r \vartheta_r - \frac{2(1+\nu)r_2 \mu_2}{h} \rho = 0. \quad (5.3.47)$$

Решение уравнения (5.3.46) для сплошной пластины, свободной от радиальной силы на контуре, имеет вид

$$N_r = \frac{Eh\varepsilon_2}{4} (1 - \rho^2). \quad (5.3.48)$$

Подставляя решение (5.3.48) в уравнение (5.3.47), представляем его в виде

$$\rho^2 \frac{d^2 \vartheta_r}{d\rho^2} + \rho \frac{d\vartheta_r}{d\rho} - [1 + a(1 - \rho^2)\rho^2] \vartheta_r - A\rho^3 = 0, \quad (5.3.49)$$

где

$$a = 3(1 - \nu^2) \varepsilon_2 \frac{r_2^2}{h^2}; \quad A = \frac{2(1 + \nu)r_2 \mu_2}{h}.$$

Общее решение уравнения (5.3.49) записываем в виде

$$\vartheta_r = C_1 \vartheta_r^{(1)} + C_2 \vartheta_r^{(2)} + \vartheta_r^{(\varkappa)}, \quad (5.3.50)$$

где $\vartheta_r^{(1)}, \vartheta_r^{(2)}$ — частные решения однородного уравнения, соответствующего уравнению (5.3.49); $\vartheta_r^{(\varkappa)}$ — частное решение неоднородного уравнения (5.3.49).

На основании теории дифференциальных уравнений, имеющих одну регулярную особую точку, частные решения $\vartheta_r^{(1)}$ и $\vartheta_r^{(\varkappa)}$ можно получить в виде

сходящихся степенных рядов

$$\begin{aligned}\vartheta_r^{(1)} &= \rho \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \rho^{2n} \right); \\ \vartheta_r^{(2)} &= \frac{A}{8} \rho^3 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \rho^{2n} \right),\end{aligned}\quad (5.3.51)$$

коэффициенты которых находятся из рекуррентных формул

$$\begin{aligned}a_{2n} &= \frac{a}{4n(n+1)} (a_{2n-2} - a_{2n-4}); \quad a_0 = 1, \quad a_{-2} = 0; \\ b_{2n} &= \frac{a}{4(n+1)(n+2)} (b_{2n-2} - b_{2n-4}); \quad b_0 = 1; \quad b_{-2} = 0.\end{aligned}\quad (5.3.52)$$

Частное решение $\vartheta_r^{(2)}$ содержит член с логарифмом, а поэтому на основании условия $\vartheta_r = 0$ при $\rho = 0$ полагаем в решении (5.3.50) постоянную C_3 равной нулю.

Зная решение (5.3.50), находим

$$\begin{aligned}M_r &= D_M \left[\frac{1}{r_2} \left(\frac{d\vartheta_r}{d\rho} + \frac{\nu}{\rho} \vartheta_r \right) - (1 + \nu) \chi_T \right] = \\ &= D_M \left\{ \frac{C_1}{r_2} \left[1 + \nu + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} (2n + 1 + \nu) \rho^{2n} \right] + \right. \\ &\left. + \frac{A\rho^3}{8r_2} \left[3 + \nu + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} (2n + 3 + \nu) \rho^{2n} \right] - \frac{1 + \nu}{h} (\mu_0 + \mu_2 \rho^2) \right\};\end{aligned}\quad (5.3.53)$$

$$\begin{aligned}u_z &= -r_2 \int \vartheta_r d\rho + C_3 = -\frac{r_2}{2} \left[C_1 \rho^2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n}}{n+1} \rho^{2n} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{A}{8} \rho^4 \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{n+2} \rho^{2n} \right) \right] + C_3.\end{aligned}\quad (5.3.54)$$

Постоянные C_1 и C_3 определяются из условий

$$M_r = 0 \text{ при } \rho = 1; \quad u_z = 0 \text{ при } \rho = 0. \quad (5.3.55)$$

Безразмерный параметр a характеризует влияние растяжения на изгиб пластины. При $a = 0$, т. е. если отсутствует растяжение пластины от неравномерного нагрева,

$$(M_r)_{\rho=0} = \frac{1 - \nu^2}{4} \cdot \frac{D_M}{h} \mu_2, \quad (u_z)_{\rho=1} = - \left(\mu_0 + \frac{3 - \nu}{8} \mu_2 \right) \frac{r_2^2}{2h}.$$

При $a = 1$

$$(M_r)_{\rho=0} = (-0,172\mu_0 + 0,178\mu_2) \frac{D_M}{h},$$

$$(u_z)_{\rho=1} = -(0,910\mu_0 + 0,309\mu_2) \frac{r_2^2}{2h}.$$

Заметим, что при $\frac{r_2}{h} = 10$, $\alpha_T = 13 \cdot 10^{-6} 1/\text{град}$ и $\nu = 0,3$ значению $a = 1$ соответствует разность $T_{**} - T_* = 282 \text{ град}$ между средней температурой на контуре пластины $T_{**} = \frac{1}{2} \left[(T - T_0)_{z=\frac{h}{2}} + (T - T_0)_{z=-\frac{h}{2}} \right]_{\rho=1}$ и средней температурой в центре пластины $T_* = \frac{1}{2} \left[(T - T_0)_{z=\frac{h}{2}} + (T - T_0)_{z=-\frac{h}{2}} \right]_{\rho=0}$.

§ 5.4. Тепловые напряжения в пластине линейно-переменной толщины при осесимметричном температурном поле

В случае осесимметричного температурного поля вместо первого разрешающего уравнения (5.2.20) четвертого порядка можно получить разрешающее уравнение второго порядка.

Заменяя в уравнении совместности деформаций (5.3.17) деформации усилиями по формулам (5.2.13) и исключая N_θ с помощью уравнения (5.3.14), находим первое разрешающее уравнение относительно N_r :

$$r^2 \frac{d^2 N_r}{dr^2} + r \left(3 - \frac{r}{D_N} \cdot \frac{dD_N}{dr} \right) \frac{dN_r}{dr} - (1 - \nu) \frac{r}{D_N} \cdot \frac{dD_N}{dr} N_r + (1 - \nu)^2 D_{Nr} \frac{de_T}{dr} = 0, \quad (5.4.1)$$

где $D_N = \frac{Eh}{1 - \nu^2}$.

Второе разрешающее уравнение (5.2.22) при осесимметричном температурном поле и осесимметричной поперечной нагрузке принимает вид [22]

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left\{ r \left[D_M \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du_z}{dr} \right) + \frac{dD_M}{dr} \left(\frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{du_z}{dr} \right) - N_r \frac{du_z}{dr} \right] - q_z + (1 + \nu) \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} (\alpha_T D_M) \right] \right\} = 0, \quad (5.4.2)$$

где

$$N_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{dF}{dr}; \quad D_M = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

Если поперечная нагрузка q_z является заданной величиной и не зависит от прогиба, то уравнение четвертого порядка (5.4.2) можно

представить в виде уравнения второго порядка относительно $\vartheta_r = -\frac{du_z}{dr}$;

$$r^2 \frac{d^2 \vartheta_r}{dr^2} + r \left(1 + \frac{r}{D_M} \cdot \frac{dD_M}{dr} \right) \frac{d\vartheta_r}{dr} + \left(\frac{\nu r}{D_M} \cdot \frac{dD_M}{dr} - \frac{N_r r^2}{D_M} - 1 \right) \vartheta_r + \frac{r}{D_M} \left(\int q_2 r dr - C \right) - \frac{(1+\nu)r^2}{D_M} \cdot \frac{d}{dr} (\kappa_T D_M) = 0. \quad (5.4.3)$$

Здесь в соответствии с уравнениями (5.2.9)

$$\int q_2 r dr - C = -Q_r r + N_r r \vartheta_r. \quad (5.4.4)$$

Рассмотрим тепловые напряжения в пластине линейно-переменной толщины

$$h = h_0(1-x), \quad x = \frac{r}{r_0}, \quad (5.4.5)$$

где h_0, r_0 — постоянные; $0 \leq x < 1$ (рис. 32).

Подставляя в уравнения (5.4.1) и (5.4.3) выражение (5.4.5) для толщины пластины и вводя независимую переменную $x = \frac{r}{r_0}$ и функцию y по формуле

$$\vartheta_r = \frac{x}{(1-x)^2} y, \quad (5.4.6)$$

получаем при $q_2 = 0$ следующие уравнения:

$$x(1-x) \frac{d^2 N_r}{dx^2} + [c - (a+b+1)x] \times \\ \times \frac{dN_r}{dx} - abN_r + Eh_0(1-x)^2 \frac{d\epsilon_T}{dx} = 0, \quad (5.4.7)$$

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + [c' - (a'+b'+1)x] \frac{dy}{dx} - a'b'y - \frac{r_0^2}{D_0} \cdot \frac{x}{(1-x)^2} \times \\ \times N_r y - \frac{r_0}{D_0} \cdot \frac{C}{x} - (1+\nu)r_0 \frac{d}{dx} [\kappa_T(1-x)^3] = 0, \quad (5.4.8)$$

где

$$a, b = \frac{1}{2} \pm \delta; \quad \delta = \frac{1}{2} \sqrt{5-4\nu}; \quad c = 3; \quad a', b' = \frac{1}{2} \pm \delta'; \\ \delta' = \frac{1}{2} \sqrt{13-12\nu}; \quad c' = 3; \quad D_0 = \frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (5.4.9)$$

Общие решения для усилий N_r, N_θ , угла поворота нормали ϑ_r и изгибающих моментов M_r, M_θ имеют вид

$$N_r = C_1 N_r^{(1)} + C_2 N_r^{(2)} + N_r^{(e)}; \quad (5.4.10)$$

$$N_{\theta} = C_1 N_{\theta}^{(1)} + C_2 N_{\theta}^{(2)} + N_{\theta}^{(\varepsilon)}; \quad (5.4.11)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_r &= \frac{x}{(1-x)^2} (C_1' y^{(1)} + C_2' y^{(2)} + y^{(C)} + y^{(\kappa)}) = \\ &= C_1' \vartheta_r^{(1)} + C_2' \vartheta_r^{(2)} + \vartheta_r^{(C)} + \vartheta_r^{(\kappa)}; \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

$$M_r = C_1' M_r^{(1)} + C_2' M_r^{(2)} + M_r^{(C)} + M_r^{(\kappa)}; \quad (5.4.13)$$

$$M_{\theta} = C_1' M_{\theta}^{(1)} + C_2' M_{\theta}^{(2)} + M_{\theta}^{(C)} + M_{\theta}^{(\kappa)}. \quad (5.4.14)$$

Здесь $N_r^{(1)}$, $N_r^{(2)}$ — частные решения однородного уравнения, соответствующего уравнению (5.4.7); $N_r^{(\varepsilon)}$ — частное решение неоднородного уравнения (5.4.7); $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ — частные решения однородного уравнения, соответствующего уравнению (5.4.8); $y^{(C)}$ — частное решение неоднородного уравнения (5.4.8) при $\kappa_T = 0$; $y^{(\kappa)}$ — частное решение неоднородного уравнения (5.4.8) при $C = 0$.

Остальные частные решения на основании уравнения (5.2.7) и соотношений (5.2.17) и (5.2.5) определяются по формулам

$$N_{\theta}^{(p)} = \frac{dN_r^{(p)}x}{dx} \quad (p = 1, 2, \varepsilon); \quad (5.4.15)$$

$$M_r^{(p)} = \frac{D_M}{r_0} \left(\frac{d\vartheta_r^{(p)}}{dx} + \frac{\nu}{x} \vartheta_r^{(p)} \right); \quad (5.4.16)$$

$$M_{\theta}^{(p)} = \frac{D_M}{r_0} \left(\nu \frac{d\vartheta_r^{(p)}}{dx} + \frac{\vartheta_r^{(p)}}{x} \right) \quad (p = 1, 2, C);$$

$$\begin{aligned} M_r^{(\kappa)} &= D_M \left[\frac{1}{r_0} \left(\frac{d\vartheta_r^{(\kappa)}}{dx} + \frac{\nu}{x} \vartheta_r^{(\kappa)} \right) - (1 + \nu) \kappa_T \right]; \\ M_{\theta}^{(\kappa)} &= D_M \left[\frac{1}{r_0} \left(\nu \frac{d\vartheta_r^{(\kappa)}}{dx} + \frac{\vartheta_r^{(\kappa)}}{x} \right) - (1 + \nu) \kappa_T \right], \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

где в соответствии с выражением (5.4.6)

$$\vartheta_r^{(p)} = \frac{x}{(1-x)^2} y^{(p)} \quad (p = 1, 2, C, \kappa). \quad (5.4.18)$$

Постоянные интегрирования C_1 , C_2 и C_1' , C_2' определяются из граничных условий на внутреннем и наружном контурах пластины. Исследуем решения рассматриваемой задачи, когда влияние растяжения на изгиб незначительное, т. е. когда в уравнении (5.4.8)

отсутствует член $-\frac{r_0^2}{D_0} \cdot \frac{x}{(1-x)^2} N_r y$.

В этом случае оба однородных уравнения, соответствующие уравнениям (5.4.7) и (5.4.8), гипергеометрические и их первые частные решения в окрестности точки $x = 0$ определяются в гипергеометрических функциях вида (4.9.4).

Принимая во внимание значения параметров (5.4.9), получаем

$$N_r^{(1)} = F\left(\frac{1}{2} + \delta; \quad \frac{1}{2} - \delta; \quad 3; \quad x\right); \quad (5.4.19)$$

$$y^{(1)} = F\left(\frac{1}{2} + \delta'; \quad \frac{1}{2} - \delta'; \quad 3; \quad x\right). \quad (5.4.20)$$

Используя формулы (5.4.15), (5.4.18), (5.4.16), а также функциональные соотношения (4.9.10), (4.9.11), (4.9.13), находим для первых частных решений остальных однородных уравнений следующие выражения:

$$\begin{aligned} N_\theta^{(1)} &= N_r^{(1)} - \frac{1-\nu}{3} x F\left(\frac{3}{2} + \delta, \frac{3}{2} - \delta; \quad 4; \quad x\right) = \\ &= \frac{1-3x}{1-x} N_r^{(1)} + \frac{5+\nu}{3} \cdot \frac{x}{1-x} F\left(\frac{1}{2} + \delta, \frac{1}{2} - \delta; \quad 4; \quad x\right); \end{aligned} \quad (5.4.21)$$

$$\begin{aligned} \vartheta^{(1)} &= \frac{x}{(1-x)^2} F\left(\frac{1}{2} + \delta', \frac{1}{2} - \delta'; \quad 3; \quad x\right) = \\ &= x F\left(\frac{5}{2} + \delta', \frac{5}{2} - \delta'; \quad 3; \quad x\right); \end{aligned} \quad (5.4.22)$$

$$\begin{aligned} M_r^{(1)} &= \frac{D_0(1+\nu)}{r_0} \left[(1-x) F\left(\frac{1}{2} + \delta', \quad \frac{1}{2} - \delta'; \quad 3; \quad x\right) + \right. \\ &\quad \left. + x F\left(\frac{1}{2} + \delta', \quad \frac{1}{2} - \delta'; \quad 4; \quad x\right) \right]; \end{aligned} \quad (5.4.23)$$

$$\begin{aligned} M_\theta^{(1)} &= \frac{D_0(1+\nu)}{r_0} \left[(1-x) F\left(\frac{1}{2} + \delta', \quad \frac{1}{2} - \delta'; \quad 3; \quad x\right) + \right. \\ &\quad \left. + \nu x F\left(\frac{1}{2} + \delta', \quad \frac{1}{2} - \delta'; \quad 4; \quad x\right) \right], \end{aligned}$$

где

$$\delta = \frac{1}{2} \sqrt{5 - 4\nu}, \quad \delta' = \frac{1}{2} \sqrt{13 - 12\nu}; \quad D_0 = \frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Поскольку параметры s и s' гипергеометрических уравнений равны целым положительным числам, то вторые частные решения однородных уравнений в окрестности точки $x = 0$ определяются в гипергеометрических функциях второго рода вида (4.9.6).

Функциональные соотношения для функции $\Psi(a, b; c; x)$ полностью совпадают с соответствующими функциональными соотношениями для функции $F(a, b; c; x)$; поэтому выражения для частных решений $N_r^{(2)}$, $N_\theta^{(2)}$, $\vartheta_r^{(2)}$, $M_r^{(2)}$, $M_\theta^{(2)}$ получаются из выражений (5.4.19) — (5.4.23) заменой в них функций $F(a, b; c; x)$ и $F(a', b'; c'; x)$ функциями $\Psi(a, b; c; x)$ и $\Psi(a', b'; c'; x)$.

При $\nu = \frac{1}{3}$ частные решения $\vartheta_r^{(n)}$, $M_r^{(n)}$, $M_\theta^{(n)}$ ($n = 1, 2$) определяются в элементарных функциях [22].

Переходя к частным решениям неоднородных уравнений, прежде всего приведем частное решение

$$y^{(c)} = - \frac{1}{(a'-1)(b'-1)x} \left[1 - \frac{1}{(a'-2)(b'-2)x} \right] \frac{Cr_0}{D_0}, \quad (5.4.24)$$

удовлетворяющее уравнению (5.4.8) при $c' = 3$, $N_r = 0$, $\kappa_T = 0$. Это решение, как видно из уравнения (5.4.4), имеет место только при наличии поперечной силы.

Для нахождения частных решений неоднородных уравнений, учитывающих тепловые воздействия, необходимо составить выражения для величин ε_T и κ_T , входящих в свободные члены уравнений (5.4.7) и (5.4.8).

Изменение чисто теплового относительного удлинения, определяемого температурным полем, полученным из опыта или из решения соответствующей задачи теплопроводности, можно сравнительно точно аппроксимировать выражением

$$\alpha_T(T - T_0) = \varepsilon_T^0 + (\varepsilon_T' - \varepsilon_T'') \frac{z}{h} + 2(\varepsilon_T' + \varepsilon_T'' - 2\varepsilon_T^0) \frac{z^2}{h^2}, \quad (5.4.25)$$

где ε_T' , ε_T^0 , ε_T'' — распределения чисто тепловых относительных удлинений соответственно на поверхностях $z = \frac{h}{2}$, $z = 0$ и $z = -\frac{h}{2}$, задаваемые в виде полиномов

$$\varepsilon_T' = \sum_{j=0}^m \varepsilon_j' x^j, \quad \varepsilon_T^0 = \sum_{j=0}^m \varepsilon_j^0 x^j, \quad \varepsilon_T'' = \sum_{j=0}^m \varepsilon_j'' x^j \quad (5.4.26)$$

(ε_j' , ε_j^0 , ε_j'' — постоянные).

Подставляя выражение (5.4.25) в (5.2.15), получаем следующие выражения для величин ε_T и κ_T :

$$\varepsilon_T = \sum_{j=0}^m \varepsilon_j x^j, \quad \kappa_T = \frac{1}{h_0(1-x)} \sum_{j=0}^m \mu_j x^j, \quad (5.4.27)$$

где

$$\varepsilon_j = \varepsilon_j^0 + \frac{\varepsilon_j' + \varepsilon_j'' - 2\varepsilon_j^0}{6}, \quad \mu_j = \varepsilon_j' - \varepsilon_j''. \quad (5.4.28)$$

Если теперь эти выражения внести в свободные члены уравнений (5.4.7) и (5.4.8), выполнить в уравнении (5.4.7) замену функции по формуле

$$N_r = (1-x)^{c-a-b} N \quad (c-a-b=2) \quad (5.4.29)$$

и положить в уравнении (5.4.8) $N_r = 0$ и $C = 0$, то вместо (5.4.7) и (5.4.8) получим следующие уравнения:

$$x(1-x) \frac{d^2 N}{dx^2} + \{c - [(c-a) + (c-b) + 1]x\} \frac{dN}{dx} - (c-a)(c-b)N + \sum_{j=0}^m A_j x^{j-1} = 0; \quad (5.4.30)$$

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + [c' - (a' + b' + 1)x] \frac{dy}{dx} - a'b'y + \sum_{j=0}^m (A_{j1}x^{j-1} + A_{j2}x^j + A_{j3}x^{j-1}) = 0, \quad (5.4.31)$$

где

$$A_j = j\varepsilon_j E h_0; \quad (5.4.32)$$

$$A_{j1} = -(1 + \nu) j \mu_j \frac{r_0}{h_0};$$

$$A_{j2} = 2(1 + \nu)(j + 1) \mu_j \frac{r_0}{h_0}; \quad (5.4.33)$$

$$A_{j3} = -(1 + \nu)(j + 2) \mu_j \frac{r_0}{h_0}.$$

Уравнения (5.4.30) и (5.4.31) по форме совпадают с уравнением (4.9.15). Их частные решения при свободном члене вида Ax^{j-1} определяются выражениями вида (4.9.18). Учитывая (5.4.29) и (5.4.6), имеем

$$N_r^{(e)} = (1-x)^2 \sum_{j=0}^m A_j \frac{(j-1)! [c]_{j-1}}{[c-a]_j [c-b]_j} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{[c-a]_n [c-b]_n}{n! [c]_n} x^n, \quad (5.4.34)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_r^{(x)} = & \frac{x}{(1-x)^2} \sum_{j=0}^m \left\{ A_{j1} \frac{(j-1)! [c']_{j-1}}{[a']_j [b']_j} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{[a']_n [b']_n}{n! [c']_n} x^n + \right. \\ & + A_{j2} \frac{j! [c']_j}{[a']_{j+1} [b']_{j+1}} \sum_{n=0}^j \frac{[a']_n [b']_n}{n! [c']_n} x^n + \\ & \left. + A_{j3} \frac{(j+1)! [c']_{j+1}}{[a']_{j+2} [b']_{j+2}} \sum_{n=0}^{j+1} \frac{[a']_n [b']_n}{n! [c']_n} x^n \right\}. \quad (5.4.35) \end{aligned}$$

Дальнейшие вычисления целесообразно проводить для конкретного закона изменения ε_T и κ_T (см. пример).

Если усилие N_r , действующее в срединной плоскости пластины, велико, то необходимо в уравнении (5.4.8) сохранить член $-\frac{r_0^2}{D_0} \cdot \frac{x}{(1-x)^2} N_r y$.

Поскольку решение для N_r определяется в гипергеометрических функциях, то точное интегрирование уравнения (5.4.8) затруднительно.

Для приближенной оценки влияния растяжения на изгиб в уравнении (5.4.8) можно усреднить в рассматриваемом интервале изменения переменной x коэффициент при y , содержащий N_r , т. е. представить его в виде

$$\alpha_1 = -\frac{r_0^2}{D_0} \cdot \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x}{(1-x)^2} N_r dx. \quad (5.4.36)$$

После этого уравнение (5.4.8) принимает вид

$$x(1-x) \frac{d^2y}{dx^2} + [c' - (a_1 + b_1 + 1)x] \frac{dy}{dx} - a_1 b_1 y - \frac{r_0}{D_0} \cdot \frac{C}{x} - (1+\nu) r_0 \frac{d}{dx} [\alpha_T (1-x)^3] = 0, \quad (5.4.37)$$

где

$$a_1, b_1 = \frac{1}{2} \pm \delta_1; \quad \delta_1 = \frac{1}{2} \sqrt{13 - 12\nu - 4\alpha_1}. \quad (5.4.38)$$

Так как уравнение (5.4.37) по форме совпадает с уравнением (5.4.8), взятым при $N_r = 0$, то, заменяя в ранее найденных решениях a' , b' , δ' на a_1 , b_1 , δ_1 , получаем решение для рассматриваемого случая.

Пример. Сплошной диск газовой турбины, выполненный из стали ЭИ-437Б в форме круглой пластины линейно-переменной толщины с размерами $h_0 = 10$ см, $r_0 = 50$ см, $h_2 = 5$ см, $r_2 = 25$ см (рис. 33), подвергается неравномерному нагреву в условиях нестационарного теплообмена (например, при пуске турбины).

Необходимо найти распределение тепловых напряжений в диске в момент времени, который соответствует температурному полю на рис. 33. Значения температуры в отдельных точках диска, измеренные хромель-алюмелевыми термопарами, приведены в табл. 6.

Пользуясь справочными данными, вычисляем средние значения коэффициентов линейного теплового расширения α_T в интервале (293° К, T) (под температурой T_0 понимается комнатная температура 293° К), а также значения чисто тепловых удлинений $\alpha_T \times (T - 293^\circ$ К) в тех точках, для которых известны экспериментальные значения температуры диска (табл. 6).

Распределение чисто тепловых удлинений на поверхностях $z = \frac{h}{2}$,

$z = 0$ и $z = -\frac{h}{2}$ аппроксимируем в соответствии с (5.4.26) полиномами

$$\left. \begin{aligned} [\alpha_T (T - T_0)]_{z=\frac{h}{2}} &= \varepsilon'_T = \varepsilon'_0 + \varepsilon'_1 x + \varepsilon'_2 x^2; \\ [\alpha_T (T - T_0)]_{z=0} &= \varepsilon_T^0 = \varepsilon_0^0 + \varepsilon_1^0 x + \varepsilon_2^0 x^2; \\ [\alpha_T (T - T_0)]_{z=-\frac{h}{2}} &= \varepsilon''_T = \varepsilon''_0 + \varepsilon''_1 x + \varepsilon''_2 x^2, \end{aligned} \right\} \quad (5.4.39)$$

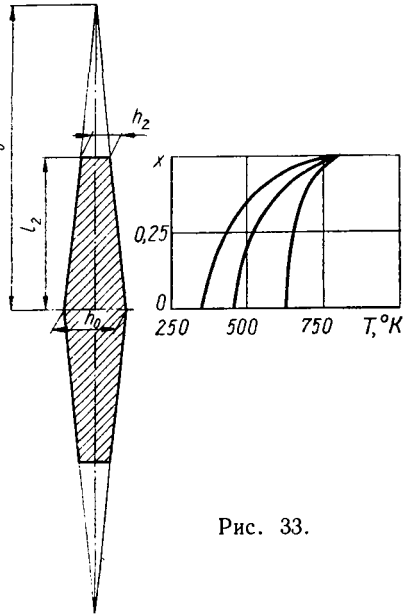


Рис. 33.

где на основании данных табл. 6

$$\begin{aligned} \varepsilon_0' &= 0,004785, & \varepsilon_1' &= -0,002874, & \varepsilon_2' &= 0,01843; \\ \varepsilon_0^0 &= 0,002096, & \varepsilon_1^0 &= -0,001992, & \varepsilon_2^0 &= 0,02742; \\ \varepsilon_0'' &= 0,0006875, & \varepsilon_1'' &= -0,006105, & \varepsilon_2'' &= 0,04128. \end{aligned}$$

Таблица 6

x	T, °K			$\alpha_T \cdot 10^4, 1/\text{град}$			$\alpha_T (T - 293^\circ \text{K}) \cdot 10^4$		
	$z = \frac{h}{2}$	$z = 0$	$z = -\frac{h}{2}$	$z = \frac{h}{2}$	$z = 0$	$z = -\frac{h}{2}$	$z = \frac{h}{2}$	$z = 0$	$z = -\frac{h}{2}$
0	623	453	348	14,5	13,1	12,5	47,85	20,96	6,875
0,25	648	533	428	14,7	13,8	12,9	52,19	33,12	17,42
0,50	803	803	803	15,6	15,6	15,6	79,56	79,56	79,56

Подставляя выражения (5.4.39) в формулы (5.4.27) и (5.4.28), определяем

$$\varepsilon_T = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 x^2, \quad \varkappa_T = \frac{1}{h_0(1-x)} (\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2), \quad (5.4.40)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 0,00230942, & \varepsilon_1 &= -0,00282450, & \varepsilon_2 &= 0,0282354; \\ \mu_0 &= 0,0040975, & \mu_1 &= 0,003231, & \mu_2 &= -0,022852. \end{aligned}$$

Полагая в формулах (5.4.34) и (5.4.35) $j = 0, 1, 2$ и учитывая, что в соответствии с выражениями (5.4.32) и (5.4.33) коэффициенты A_0 и A_{01} равны нулю, представляем частные решения $N_r^{(e)}$ и $\vartheta_r^{(*)}$ следующими выражениями:

$$N_r^{(e)} = (1-x)^2 (B_0 + B_1 x); \quad (5.4.41)$$

$$\vartheta_r^{(*)} = \frac{x}{(1-x)^2} (B_0' + B_1' x + B_2' x^2 + B_3' x^3), \quad (5.4.42)$$

где

$$B_0 = \frac{A_1}{(c-a)(c-b)} + \frac{A_2 c}{[c-a]_2 [c-b]_2}; \quad (5.4.43)$$

$$B_1 = \frac{A_2}{(c-a+1)(c-b+1)};$$

$$\left. \begin{aligned} B_0' &= \frac{A_{11} + A_{02}}{a'b'} + \frac{(A_{21} + A_{12} + A_{03}) 1! c'}{[a']_2 [b']_2} + \frac{(A_{22} + A_{13}) 2! [c']_2}{[a']_3 [b']_3} + \\ &\quad + \frac{A_{23} 3! [c']_3}{[a']_4 [b']_4}; \\ B_1' &= \frac{A_{21} + A_{12} + A_{03}}{(a'+1)(b'+1)} + \frac{(A_{22} + A_{13}) 2 (c'+1)}{[a'+1]_2 [b'+1]_2} + \\ &\quad + \frac{A_{23} [2]_2 [c'+1]_2}{[a'+1]_3 [b'+1]_3}; \end{aligned} \right\} \quad (5.4.44)$$

$$B_2' = \frac{A_{22} + A_{13}}{(a' + 2)(b' + 2)} + \frac{A_{23}3(c' + 2)}{[a' + 2]_2 [b' + 2]_2};$$

$$B_3' = \frac{A_{33}}{(a' + 3)(b' + 3)},$$

$$[a]_n = a(a + 1) \dots (a + n - 1).$$

Здесь коэффициенты A_j ($j = 1, 2$) имеют значения (5.4.32), а коэффициенты A_{02} , A_{03} , A_{j1} , A_{j2} , A_{j3} ($j = 1, 2$) — значения (5.4.33).

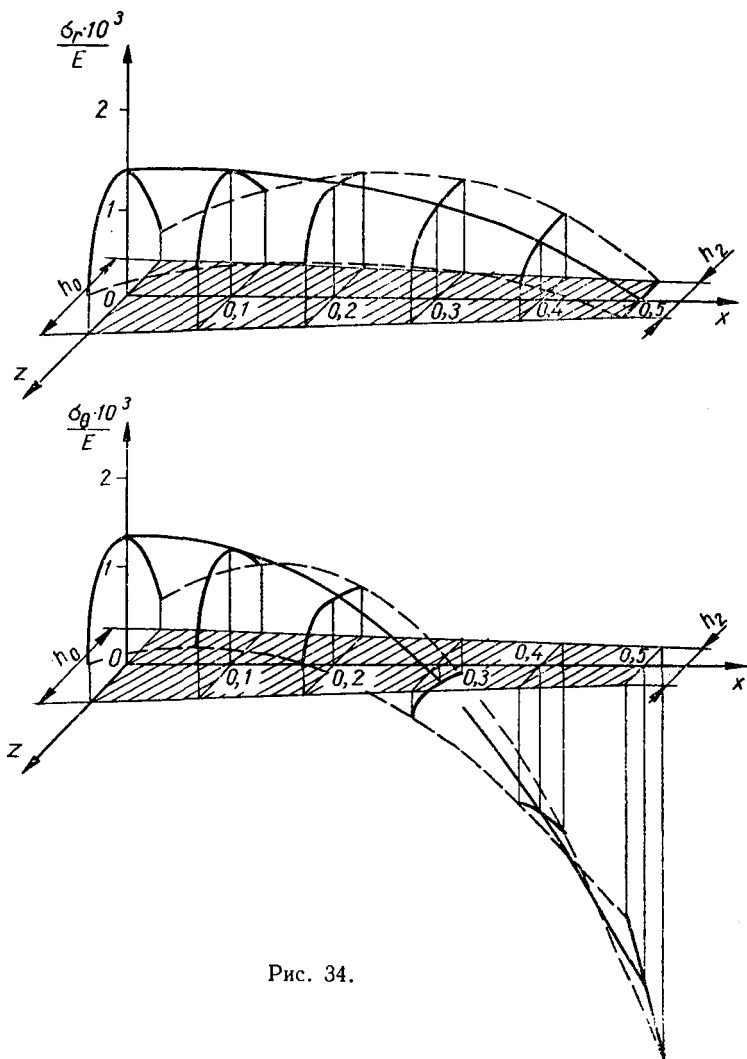


Рис. 34.

Используя формулы (5.4.15) и (5.4.17), вычисляем по известным частным решениям $N_r^{(e)}$ и $\vartheta_r^{(*)}$ частные решения $N_\theta^{(e)}$ и $M_r^{(*)}$, $M_\theta^{(*)}$.

x	$N_r^{(1)}$	$N_\theta^{(1)}$	$\frac{N_r^{(e)} \cdot 10^3}{Eh_0}$	$\frac{N_\theta^{(e)} \cdot 10^3}{Eh_0}$	$\epsilon_T \cdot 10^3$	$\frac{N_r \cdot 10^3}{Eh_0}$	$\frac{N_\theta \cdot 10^3}{Eh_0}$
0	1	1	2,2958	2,2958	2,3094	0,921	0,921
0,1	0,976273	0,952139	2,2644	2,1660	2,3093	0,922	0,857
0,2	0,951698	0,901630	2,1090	1,6942	2,8739	0,800	0,454
0,3	0,926164	0,847995	1,8596	1,0003	4,0033	0,586	-0,166
0,4	0,899534	0,790595	1,5461	0,20426	5,6973	0,309	-0,883
0,5	0,871627	0,728531	1,1986	-0,57395	7,9560	0	-1,576

В общих решениях (5.4.10), (5.4.11), (5.4.13), (5.4.14) частные решения $N_r^{(1)}$, $N_\theta^{(1)}$, $M_r^{(1)}$, $M_\theta^{(1)}$ вычисляются по формулам (5.4.19), (5.4.21), (5.4.23), постоянные C_2 и C_2' равны нулю (диск сплошной), частные решения $M_r^{(C)}$, $M_\theta^{(C)}$ исключаются из-за отсутствия поперечных сил ($C = 0$), а постоянные C_1 и C_1' определяются из условий $N_r = 0$, $M_r = 0$ при $x = x_2 = 0,5$.

Таблица 8

x	$\frac{\sigma_r \cdot 10^3}{E}$			$\frac{\sigma_\theta \cdot 10^3}{E}$		
	$z = \frac{h}{2}$	$z = 0$	$z = -\frac{h}{2}$	$z = \frac{h}{2}$	$z = 0$	$z = -\frac{h}{2}$
	0	0,336	1,226	0,285	0,336	1,226
0,1	0,555	1,222	0,704	0,414	1,149	0,699
0,2	0,635	1,114	0,912	0,188	0,681	0,494
0,3	0,577	0,890	0,888	-0,343	-0,184	-0,340
0,4	0,368	0,531	0,605	-1,173	-1,456	-1,828
0,5	0	0	0	-2,296	-3,152	-4,008

Результаты вычисления частных решений $N_r^{(1)}$, $N_\theta^{(1)}$, $M_r^{(1)} \frac{r_0}{Eh_0^3}$,

$M_\theta^{(1)} \frac{r_0}{Eh_0^3}$, $\frac{N_r^{(e)}}{Eh_0}$, $\frac{N_\theta^{(e)}}{Eh_0}$, $\frac{M_r^{(x)}}{Eh_0^2}$, $\frac{M_\theta^{(x)}}{Eh_0^2}$, усилий N_r и N_θ с точностью до

постоянного множителя $Eh_0 \cdot 10^{-3}$ и изгибающих моментов M_r , M_θ с точностью до постоянного множителя $Eh_0^2 \cdot 10^{-3}$ при $\nu = 0,3$ для $x = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$ указаны в табл. 7.

Распределение по радиусу и толщине диска, тепловых напряжений σ_r , σ_θ вычисленных с точностью до постоянного множителя $E \cdot 10^{-3}$ по формулам (5.2.23), показано в табл. 8 и на рис. 34.

Таблица 7

$M_r^{(1)} \frac{r_0}{Eh_0^3}$	$M_\theta^{(1)} \frac{r_0}{Eh_0^3}$	$\frac{M_r^{(x)} \cdot 10^3}{Eh_0^2}$	$\frac{M_\theta^{(x)} \cdot 10^3}{Eh_0^2}$	$\kappa_T \cdot 10^3$ (1/см)	$\frac{M_r \cdot 10^3}{Eh_0^2}$	$\frac{M_\theta \cdot 10^3}{Eh_0^2}$
0,119048	0,119048	72,970	72,970	0,40975	0,0045	0,0045
0,110933	0,103037	67,982	63,133	0,46579	-0,0101	-0,0192
0,103255	0,0883344	63,271	54,125	0,47870	-0,0148	-0,0163
0,0960122	0,0749370	58,834	45,929	0,43002	-0,0127	0
0,0892043	0,0628401	54,667	38,535	0,28893	-0,00710	0,0197
0,0828297	0,0520386	50,767	31,931	0	0	0,0357

§ 5.5. Термоупругость неоднородных пластин при осесимметричном температурном поле

Соотношения между деформациями и перемещениями (5.3.12), уравнения равновесия (5.3.14) — (5.3.16), соотношения между усилиями и функцией напряжений (5.2.18), а также уравнение совместности деформаций (5.3.17) одни и те же для однородных и для неоднородных пластин. Соотношения же упругости для неоднородных пластин принципиально отличны, что, естественно, влияет на разрешающие уравнения.

Для получения соотношений между усилиями, моментами и деформациями разрешим уравнения (5.2.12) относительно напряжений. Учитывая осевую симметрию задачи, имеем

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_r^{(z)} + \nu \varepsilon_\theta^{(z)} - (1+\nu) \alpha_T (T - T_0)]; \quad (5.5.1)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_\theta^{(z)} + \nu \varepsilon_r^{(z)} - (1+\nu) \alpha_T (T - T_0)], \quad \sigma_{r\theta} = 0.$$

Умножая соотношения (5.5.1) на dz , а затем на zdz , интегрируя в пределах от $z = -\frac{h}{2}$ до $z = \frac{h}{2}$ и используя выражения (5.2.4) и (5.2.6), получаем следующие соотношения между усилиями, моментами и деформациями:

$$N_r = D_N \varepsilon_r + D_{N\nu} \varepsilon_\theta + D_{N\kappa_r} + D_{N\kappa_\theta} - N_T; \quad (5.5.2)$$

$$N_\theta = D_{N\nu} \varepsilon_r + D_N \varepsilon_\theta + D_{N\kappa_r} + D_{N\kappa_\theta} - N_T;$$

$$M_r = D_\varepsilon \varepsilon_r + D_{\nu\varepsilon_\theta} + D_{M\kappa_r} + D_{M\nu\kappa_\theta} - M_T; \quad (5.5.3)$$

$$M_\theta = D_{\nu\varepsilon_r} + D_\varepsilon \varepsilon_\theta + D_{M\nu\kappa_r} + D_{M\kappa_\theta} - M_T,$$

где

$$D_N = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} dz; \quad D_{N\nu} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E\nu}{1-\nu^2} dz;$$

$$D = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ez}{1-\nu^2} dz; \quad D_\nu = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E\nu z}{1-\nu^2} dz; \quad (5.5.4)$$

$$D_M = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ez^2}{1-\nu^2} dz; \quad D_{M\nu} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E\nu z^2}{1-\nu^2} dz;$$

$$N_T = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu} \alpha_T (T - T_0) dz; \quad M_T = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu} \alpha_T (T - T_0) z dz. \quad (5.5.5)$$

Эти соотношения отличаются от таковых для однородных пластин (5.2.16), (5.2.17) тем, что и усилия и моменты зависят как от деформаций растяжения — сжатия, так и от деформаций изгиба, т. е. отличаются членами, содержащими D и D_ν . Разрешим соотношения (5.5.2) и (5.5.3) относительно деформаций растяжения — сжатия и моментов:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= a_{11}N_\theta + a_{12}N_r - a_{13}\kappa_r - a_{14}\kappa_\theta + (a_{11} + a_{12})N_T; \\ \varepsilon_r &= a_{12}N_\theta + a_{11}N_r - a_{14}\kappa_r - a_{13}\kappa_\theta + (a_{11} + a_{12})N_T; \\ M_r &= a_{13}N_\theta + a_{14}N_r - a_{33}\kappa_r - a_{34}\kappa_\theta + (a_{13} + a_{14})N_T - M_T; \\ M_\theta &= a_{14}N_\theta + a_{13}N_r - a_{34}\kappa_r - a_{33}\kappa_\theta + (a_{13} + a_{14})N_T - M_T, \end{aligned} \right\} (5.5.6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= kD_N; \quad a_{12} = -kD_{N\nu}; \\ a_{13} &= k(D_N D_\nu - D_{N\nu} D); \quad a_{14} = k(D_N D - D_{N\nu} D_\nu); \\ a_{33} &= Da_{14} + D_\nu a_{13} - D_M; \quad a_{34} = Da_{13} + D_\nu a_{14} - D_{M\nu}; \\ k &= \frac{1}{D_N^2 - D_{N\nu}^2}. \end{aligned} \right\} (5.5.7)$$

Подставляя выражения (5.5.6) в первое уравнение совместности деформаций (5.3.17) и уравнение равновесия

$$\frac{dM_r r}{dr} - M_\theta - N_r r \vartheta_r = 0, \quad (5.5.8)$$

вытекающее из уравнения (5.3.16) и уравнения (5.3.15) при $C = 0$, и используя формулы (5.3.12), (5.3.13) и (5.2.18) при $\frac{\partial(\quad)}{\partial\theta} = 0$, находим систему разрешающих уравнений задачи:

$$\begin{aligned} & a_{11} r^3 \frac{d^3 F}{dr^3} + r^2 \left(r \frac{da_{11}}{dr} + a_{11} \right) \frac{d^2 F}{dr^2} + r \left(r \frac{da_{12}}{dr} - a_{11} \right) \frac{dF}{dr} + \\ & + a_{13} r^3 \frac{d^3 u_z}{dr^3} + r^2 \left(r \frac{da_{13}}{dr} + a_{13} \right) \frac{d^2 u_z}{dr^2} + r \left(r \frac{da_{14}}{dr} - a_{13} \right) \frac{du_z}{dr} + \\ & + r^3 \frac{d}{dr} (a_{11} + a_{12}) N_T = 0; \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

$$\begin{aligned}
& a_{13}r^3 \frac{d^3F}{dr^3} + r^2 \left(r \frac{da_{13}}{dr} + a_{13} \right) \frac{d^2F}{dr^2} + r \left(r \frac{da_{14}}{dr} - a_{13} \right) \frac{dF}{dr} + \\
& + a_{33}r^3 \frac{d^3u_z}{dr^3} + r^2 \left(r \frac{da_{33}}{dr} + a_{33} \right) \frac{d^2u_z}{dr^2} + r \left(r \frac{da_{34}}{dr} - a_{33} \right) \frac{du_z}{dr} + \\
& + r^2 \frac{dF}{dr} \cdot \frac{du_z}{dr} + r^3 \frac{d}{dr} [(a_{13} + a_{14})N_T - M_T] = 0. \quad (5.5.10)
\end{aligned}$$

Функции F и u_z , принятые в качестве разрешающих, не зависят от положения исходной поверхности (от которой отсчитывается координата z). Поэтому, как показано в работе [36], разрешающие уравнения также инвариантны по отношению к положению этой поверхности. Следовательно, упростить уравнения (5.5.9) и (5.5.10) за счет выбора исходной поверхности невозможно.

Для неоднородных пластин в общем случае задача не распадается на две самостоятельные (о плоском напряженном состоянии и об изгибе пластины) независимо от того, учитывается или не учитывается влияние растяжения на изгиб. Функции F и u_z совместно входят и в граничные условия. В качестве граничных условий на контуре $r = \text{const}$ могут быть заданы три величины:

$$N_r \text{ или } u_r(\varepsilon_0); M_r \text{ или } \vartheta_r; Q_r \text{ или } u_z, \quad (5.5.11)$$

которые выражаются через F и u_z с помощью формул (5.2.18), (5.5.6), (5.3.12), (5.3.13), (5.3.15), (5.3.16).

Формулы для определения тепловых напряжений на основании (5.5.1), (5.2.4), (5.5.6) имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} [(a_{11} + \nu a_{12}) N_r + (a_{12} + \nu a_{11}) N_\theta - (a_{14} + \nu a_{13} - z) \kappa_r - \\
- (a_{13} + \nu a_{14} - \nu z) \kappa_\theta] + \frac{E}{1-\nu} [(a_{11} + a_{12}) N_T - \alpha_T (T - T_0)]; \quad (5.5.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} [(a_{12} + \nu a_{11}) N_r + (a_{11} + \nu a_{12}) N_\theta - (a_{13} + \nu a_{14} - \nu z) \kappa_r - \\
- (a_{14} + \nu a_{13} - z) \kappa_\theta] + \frac{E}{1-\nu} [(a_{11} + a_{12}) N_T - \alpha_T (T - T_0)].
\end{aligned}$$

Если коэффициент Пуассона постоянный, то

$$a_{12} = -\nu a_{11}, \quad a_{13} = 0, \quad a_{34} = \nu a_{33} \quad (5.5.13)$$

и разрешающие уравнения несколько упрощаются:

$$\begin{aligned}
a_{11}r^3 \frac{d^3F}{dr^3} + r^2 \left(r \frac{da_{11}}{dr} + a_{11} \right) \frac{d^2F}{dr^2} - r \left(r\nu \frac{da_{11}}{dr} + a_{11} \right) \frac{dF}{dr} + \\
+ r^3 \frac{da_{14}}{dr} \cdot \frac{du_z}{dr} + r^3 \frac{d}{dr} (a_{11} + a_{12}) N_T = 0, \quad (5.5.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{33}r^3 \frac{d^3u_z}{dr^3} + r^2 \left(r \frac{da_{33}}{dr} + a_{33} \right) \frac{d^2u_z}{dr^2} + r \left(r\nu \frac{da_{33}}{dr} - a_{33} \right) \frac{du_z}{dr} + \\
+ r^2 \frac{da_{14}}{dr} \cdot \frac{dF}{dr} + r^2 \frac{dF}{dr} \frac{du_z}{dr} + r^3 \frac{d}{dr} [(a_{13} + a_{14}) N_T - M_T] = 0.
\end{aligned}$$

Функции F и u_z остаются в этих уравнениях связанными. Их можно разделить лишь в соотношениях между усилиями, моментами и деформациями, выбрав исходную поверхность из условия

$$D' = 0. \quad (5.5.15)$$

Штрих в формуле (5.5.15) указывает на то, что величина D в формулах (5.5.4) вычисляется не относительно срединной плоскости пластины, а относительно исходной плоскости, находящейся на расстоянии z_0 от срединной.

Подставляя в выражение для D вместо z величину $z - z_0$, в соответствии с условием (5.5.15) находим

$$z_0 = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E z dz}{\int_{-h/2}^{h/2} E dz}. \quad (5.5.16)$$

Поскольку при $\nu = \text{const}$ величина $D_\nu = \nu D$, то соотношения между усилиями, моментами и деформациями будут иметь ту же форму, что и для однородных пластин.

Рассмотрим теперь пластину, температурное поле которой $T(z)$ изменяется только по толщине. Тогда

$$E = E(z), \quad \nu = \nu(z). \quad (5.5.17)$$

В этом случае, хотя функции F и u_z в соотношениях (5.5.2) и (5.5.3) не разделяются, в разрешающих уравнениях (если не учитывать влияния растяжения на изгиб) они разделяются.

Уравнения (5.5.9), (5.5.10) в рассматриваемом случае превращаются в следующие:

$$\begin{aligned} a_{11} r \frac{d}{dr} \nabla^2 F + a_{13} r \frac{d}{dr} \nabla^2 u_z &= 0; \\ a_{13} r \frac{d}{dr} \nabla^2 F + a_{33} r \frac{d}{dr} \nabla^2 u_z + \frac{dF}{dr} \cdot \frac{du_z}{dr} &= 0. \end{aligned} \quad (5.5.18)$$

Разрешая эти уравнения относительно $\frac{d}{dr} \nabla^2 F$ и $\frac{d}{dr} \nabla^2 u_z$ и учитывая выражения (5.5.7), получаем

$$\begin{aligned} r \frac{d}{dr} \nabla^2 F - \frac{D_{N\nu} D - D_N D_\nu}{D_N D_M - D^2} \cdot \frac{dF}{dr} \cdot \frac{du_z}{dr} &= 0; \\ r \frac{d}{dr} \nabla^2 u_z - \frac{D_N}{D_N D_M - D^2} \cdot \frac{dF}{dr} \cdot \frac{du_z}{dr} &= 0, \end{aligned} \quad (5.5.19)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}.$$

Если не учитывать влияния растяжения на изгиб, то каждое из этих уравнений включает только одну разрешающую функцию: F или u_z . В этом случае интегрирование однородных уравнений

$$\frac{d}{dr} \nabla^2 F = 0, \quad \frac{d}{dr} \nabla^2 u_z = 0 \quad (5.5.20)$$

дает выражения

$$F = C_0 + C_1 \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 + C_2 \ln \frac{r}{r_2}; \quad (5.5.21)$$

$$u_z = C_0' + C_1' \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 + C_2' \ln \frac{r}{r_2},$$

где r_2 — радиус наружного контура пластины.

Для сплошной пластины на основании условий $N_r \neq \infty$, $\vartheta_r = 0$ при $r = 0$ постоянные C_2 и C_2' равны нулю. Постоянная C_0 не оказывает влияния на напряженное состояние пластины.

Если температура пластины изменяется по радиусу и не изменяется по толщине или изменяется симметрично относительно срединной плоскости, так что

$$T = T(r) \text{ или } T = T(r, z) = T(r, -z), \quad (5.5.22)$$

то величины D , D_v , а следовательно, и a_{13} , a_{14} обращаются в нуль и уравнения (5.5.9) и (5.5.10) приобретают вид, подобный (в смысле связанности функций F и u_z) тому, какой имеют разрешающие уравнения для однородных пластин:

$$a_{11} r^3 \frac{d^3 F}{dr^3} + r^2 \left(r \frac{da_{11}}{dr} + a_{11} \right) \frac{d^2 F}{dr^2} +$$

$$+ r \left(r \frac{da_{12}}{dr} - a_{11} \right) \frac{dF}{dr} + r^3 \frac{d}{dr} (a_{11} + a_{12}) N_T = 0; \quad (5.5.23)$$

$$a_{33} r^3 \frac{d^3 u_z}{dr^3} + r^2 \left(r \frac{da_{33}}{dr} + a_{33} \right) \frac{d^2 u_z}{dr^2} + r \left(r \frac{da_{34}}{dr} - a_{33} \right) \frac{du_z}{dr} +$$

$$+ r^2 \frac{dF}{dr} \cdot \frac{du_z}{dr} + r \frac{d}{dr} [(a_{13} + a_{14}) N_T - M_T] = 0.$$

Здесь так же, как и для однородных пластин, функция F находится независимо от u_z , а если не учитывать влияния растяжения на изгиб, то и u_z находится независимо от F .

Решения задачи при изменении температуры согласно (5.5.22) для многих законов изменения жесткости пластины по радиусу можно найти в работе [22]. Они получены сведением разрешающих уравнений к гипергеометрическим и интегрированием последних в гипергеометрических функциях.

**ТЕРМОУПРУГОСТЬ ОБОЛОЧЕК
ВРАЩЕНИЯ****§ 6.1. Вводные замечания**

В данной главе рассматривается в квазистатической постановке термоупругое напряженное состояние тонкой оболочки постоянной толщины, срединная поверхность которой является поверхностью вращения. Внешние силы, действующие на оболочку, и температурное поле ее предполагаются симметричными относительно оси оболочки.

Применяется теория тонких оболочек, основанная на гипотезах о неизменяемости нормального элемента и о малости нормальных напряжений на площадках, параллельных срединной поверхности. На основании этих гипотез задача о деформации оболочки сводится к задаче о деформации ее срединной поверхности.

При исследовании деформации срединной поверхности оболочки используются некоторые формулы теории поверхностей вращения, известные из дифференциальной геометрии. Вывод этих формул дается в § 6.2. Соотношения между деформациями и перемещениями и уравнения равновесия рассматриваются в § 6.3 и 6.4; они совпадают с соответствующими соотношениями и уравнениями изотермической теории оболочек [48, 37, 11]. Соотношения между усилиями, моментами и деформациями, учитывающие температурные члены, приводятся в § 6.5.

В качестве наиболее простой задачи термоупругости оболочек в § 6.6 рассматривается задача о тепловых напряжениях в цилиндрической оболочке; разрешающее уравнение этой задачи является дифференциальным уравнением четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Далее выводятся разрешающие уравнения для других форм оболочек с постоянной кривизной меридиана (конической, сферической, торообразной). Для каждой из них в § 6.7 составляется разрешающее уравнение в виде дифференциального уравнения второго порядка относительно комплексной функции, при этом используются известные в теории оболочек статико-геометрическая аналогия и комплексное преобразование уравнений. Анализ форм решений и граничных условий для этих оболочек излагается в § 6.8.

Исследование тепловых напряжений в конической и сферической оболочках (§ 6.9 и 6.10) выполняется на основе решений в специ-

альных функций: для конической оболочки в бesselевых функциях, а для сферической в гипергеометрических. В § 6.6, 6.9 и 6.10 приводятся примеры, выясняющие влияние геометрических параметров, законов изменения чисто тепловых деформаций и граничных условий на распределение в оболочках тепловых напряжений.

§ 6.2. Некоторые понятия и формулы теории поверхностей вращения

Поверхность вращения образуется при вращении плоской кривой, называемой меридианом, вокруг оси, лежащей в плоскости кривой. Линии пересечения поверхности с плоскостями, перпендикулярными к оси вращения, называются параллелями. Меридианы $\theta = \text{const}$ и параллели $s = \text{const}$ являются линиями главной кривиз-

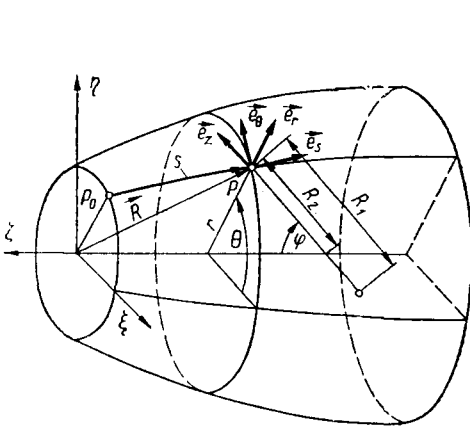


Рис. 35.

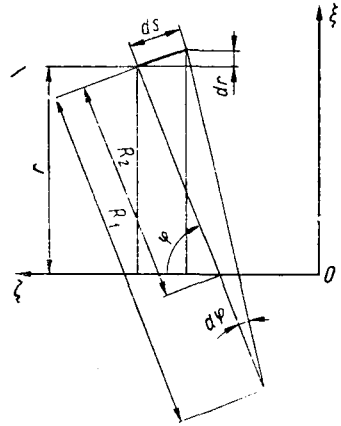


Рис. 36.

ны поверхности вращения, где θ — угол между плоскостями рассматриваемого и начального меридианов; s — длина меридиана, отсчитываемая от некоторой начальной точки P_0 (рис. 35).

Обозначим через R_1 и R_2 главные радиусы кривизны поверхности вращения в точке P . Первый главный радиус кривизны R_1 является радиусом кривизны меридиана, второй R_2 равен длине отрезка нормали к поверхности, заключенного между этой поверхностью и осью вращения (рис. 35 и 36):

$$R_2 = \frac{r}{\sin \varphi}, \quad (6.2.1)$$

где r — радиус параллели; φ — угол между нормалью к поверхности и осью вращения.

Положение какой-либо точки P поверхности вращения определяется координатами s, θ или радиусом-вектором \vec{R} (рис. 35).

Введем в рассмотрение так называемый сопровождающий точку P трехгранник единичных взаимно ортогональных векторов $\vec{e}_s, \vec{e}_\theta, \vec{e}_2$, образующих правую систему. Пусть \vec{e}_s является единичным вектором касательной к меридиану, направленным в сторону возрастания, \vec{e}_θ — единичным вектором касательной к параллели, направленным в сторону возрастания угла θ , и \vec{e}_2 — единичным вектором внешней нормали к поверхности. Между векторами $\vec{e}_s, \vec{e}_\theta$ и \vec{e}_2 имеют место соотношения

$$\vec{e}_s = \vec{e}_\theta \times \vec{e}_2; \quad \vec{e}_\theta = \vec{e}_2 \times \vec{e}_s; \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_s \times \vec{e}_\theta. \quad (6.2.2)$$

Учитывая, что первая производная радиуса-вектора по длине дуги равна единичному вектору касательной, получаем

$$\vec{e}_s = \frac{\partial \vec{R}}{\partial s}, \quad \vec{e}_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial \theta}. \quad (6.2.3)$$

Ниже мы будем пользоваться формулами для производных единичных векторов по длине дуг линий главных кривизн. Из дифференциальной геометрии известно, что первая производная единичного вектора по длине дуги есть вектор, имеющий модуль, равный кривизне кривой, и направленный по главной нормали этой кривой в сторону ее вогнутости.

Предполагаем, что меридиан обращен вогнутостью к оси оболочки. Тогда, учитывая, что главная нормаль плоской кривой лежит в ее плоскости, находим

$$\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial s} = -\frac{1}{R_1} \vec{e}_2, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r, \quad (6.2.4)$$

где \vec{e}_r — единичный вектор, направленный по радиусу параллельного круга (рис. 35). Вектор \vec{e}_r можно разложить на две составляющие по направлениям векторов \vec{e}_s и \vec{e}_2 и представить в виде

$$\vec{e}_r = \cos \varphi \vec{e}_s + \sin \varphi \vec{e}_2.$$

Подставляя выражение для \vec{e}_r во вторую формулу (6.2.4), имеем

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\cos \varphi \vec{e}_s - \sin \varphi \vec{e}_2. \quad (6.2.5)$$

При движении вершины трехгранника по меридиану вектор \vec{e}_θ не изменяет своего направления. Следовательно,

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial s} = 0. \quad (6.2.6)$$

Дифференцируем третье векторное произведение (6.2.2) по координате s :

$$\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial s} = \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial s} \times \vec{e}_\theta + \vec{e}_s \times \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial s}.$$

Используя первую формулу (6.2.4) и равенство (6.2.6) и учитывая, что от перестановки множителей векторное произведение меняет знак, переписываем последнее выражение в виде

$$\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial s} = \frac{1}{R_1} \vec{e}_\theta \times \vec{e}_z = \frac{1}{R_1} \vec{e}_s. \quad (6.2.7)$$

Дифференцируя первое векторное произведение (6.2.2) по координате θ и используя формулу (6.2.5), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial \theta} &= \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} \times \vec{e}_z + \vec{e}_\theta \times \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta} = \\ &= -\cos \varphi \vec{e}_s \times \vec{e}_z - \sin \varphi \vec{e}_z \times \vec{e}_z + \vec{e}_\theta \times \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что векторы \vec{e}_θ и $\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta}$ параллельны, и учитывая свойства векторных произведений, находим

$$\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial \theta} = \cos \varphi \vec{e}_\theta. \quad (6.2.8)$$

Аналогичным образом определяем

$$\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta} = \sin \varphi \vec{e}_\theta. \quad (6.2.9)$$

Полная таблица производных единичных векторов принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial s} &= -\frac{1}{R_1} \vec{e}_z, & \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial \theta} &= \cos \varphi \vec{e}_\theta; \\ \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial s} &= 0, & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} &= -\cos \varphi \vec{e}_s - \sin \varphi \vec{e}_z; \\ \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial s} &= \frac{1}{R_1} \vec{e}_s, & \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta} &= \sin \varphi \vec{e}_\theta. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.10)$$

Выведем дифференциальное соотношение между радиусами кривизны R_1 и R_2 . Из рис. 36 видно, что $\frac{dr}{ds} = \cos \varphi$. Подставляя в это равенство $ds = R_1 d\varphi$ и $r = R_2 \sin \varphi$, получаем известное условие Кодацци — Гаусса для поверхности вращения:

$$\frac{dR_2 \sin \varphi}{d\varphi} = R_1 \cos \varphi. \quad (6.2.11)$$

§ 6.3. Деформации оболочки

Температурное поле оболочки предполагается двумерным и в общем случае нестационарным: $T \equiv T(s, z, t)$, где s — меридиональная координата; z — координата, отсчитываемая от срединной поверхности в сторону ее внешней нормали; t — время. Так как задача термоупругости оболочки здесь рассматривается в квазистатической постановке, то время t играет роль параметра.

При осесимметричных внешних силах и температурном поле срединная поверхность оболочки при деформации остается поверхностью вращения; точки поверхности перемещаются в своей меридиональной плоскости; их перемещения одинаковы во всех меридиональных плоскостях.

Положение точки P до деформации определяется радиусом-вектором \vec{R} (рис. 35), а после деформации — радиусом-вектором

$$\vec{R}' = \vec{R} + \vec{u} = \vec{R} + u_s \vec{e}_s + u_z \vec{e}_z, \quad (6.3.1)$$

где \vec{u} — вектор перемещения; u_s и u_z — проекции вектора перемещения \vec{u} на направления единичных векторов \vec{e}_s и \vec{e}_z .

Единичные векторы касательных к меридиану и параллели деформированной срединной поверхности определяются выражениями вида (6.2.3):

$$\vec{e}'_s = \frac{\partial \vec{R}'}{\partial s'}, \quad \vec{e}'_\theta = \frac{1}{r'} \cdot \frac{\partial \vec{R}'}{\partial \theta}, \quad (6.3.2)$$

где ds' и $r'd\theta$ — элементы дуг соответственно меридиана и параллели деформированной срединной поверхности. Эти элементы можно представить выражениями

$$ds' = ds(1 + \varepsilon_s); \quad r'd\theta = rd\theta(1 + \varepsilon_\theta), \quad (6.3.3)$$

где ε_s и ε_θ — относительные удлинения срединной поверхности в направлениях меридиана и параллели.

Подставляя выражение (6.3.1) в (6.3.2) и учитывая (6.3.3), получаем

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon_s) \vec{e}'_s &= \frac{\partial \vec{R}'}{\partial s'} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial s} + u_s \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial s} + u_z \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial s} + \frac{du_s}{ds} \vec{e}_s + \frac{du_z}{ds} \vec{e}_z, \\ (1 + \varepsilon_\theta) \vec{e}'_\theta &= \frac{1}{r'} \cdot \frac{\partial \vec{R}'}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \theta} + u_s \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

При написании этих равенств на основании осесимметричной деформации срединной поверхности полагаем $\frac{\partial u_s}{\partial \theta} = \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = 0$ и заменяем частные производные от перемещений u_s и u_z по координате s обыкновенными. Подставляя в равенства (6.3.4) выражения для

производных единичных векторов (6.2.10) и применяя формулы (6.2.3), получаем

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon_s) \vec{e}'_s &= \left(1 + \frac{du_s}{ds} + \frac{u_z}{R_1}\right) \vec{e}_s + \left(-\frac{u_s}{R_1} + \frac{du_z}{ds}\right) \vec{e}_z, \\ (1 + \varepsilon_\theta) \vec{e}'_\theta &= \left(1 + \frac{u_s}{r} \cos \varphi + \frac{u_z}{r} \sin \varphi\right) \vec{e}_\theta. \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

Из равенств (6.3.5) с точностью до величин второго порядка малости следует

$$\varepsilon_s = \frac{du_s}{ds} + \frac{u_z}{R_1}; \quad (6.3.6)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} (u_s \cos \varphi + u_z \sin \varphi) \quad (6.3.7)$$

и

$$\begin{aligned} \vec{e}'_s &= \vec{e}_s + \left(-\frac{u_s}{R_1} + \frac{du_z}{ds}\right) \vec{e}_z; \\ \vec{e}'_\theta &= \vec{e}_\theta. \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

Линейный элемент, имеющий до деформации направление \vec{e}_z , после деформации получает направление единичного вектора внешней нормали к деформированной срединной поверхности \vec{e}'_z . Вектор \vec{e}'_z может быть найден как векторное произведение векторов \vec{e}'_s и \vec{e}'_θ . Используя при вычислении векторного произведения выражения (6.3.8) и соотношения (6.2.2), находим

$$\vec{e}'_z = \vec{e}'_s \times \vec{e}'_\theta = \vec{e}_s \times \vec{e}_\theta + \left(-\frac{u_s}{R_1} + \frac{du_z}{ds}\right) \vec{e}_z \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_z + \vartheta_s \vec{e}_s, \quad (6.3.9)$$

где

$$\vartheta_s = \frac{u_s}{R_1} - \frac{du_z}{ds}. \quad (6.3.10)$$

Как видно из формулы (6.3.9), величина ϑ_s является проекцией единичного вектора нормали к деформированной срединной поверхности \vec{e}'_z на направление \vec{e}_s и равна малому углу поворота нормали к срединной поверхности вокруг оси, имеющей направление \vec{e}_θ .

Положение любой точки тела оболочки P_1 определяется координатами s, θ, z , где координата z , равная отрезку $\overline{PP_1}$, отсчитывается от срединной поверхности в направлении \vec{e}_z . Поверхность $z = \text{const}$ представляет собой поверхность вращения, равноотстоящую от срединной поверхности (так называемую эквидистантную поверхность). Главные радиусы кривизны этой поверхности равны $R_1 + z$ и $R_2 + z$.

Зная угол поворота нормали к срединной поверхности (6.3.10), находим в соответствии с гипотезой о неизменяемости нормального элемента следующие зависимости между перемещениями $u_s^{(z)}$, $u_z^{(z)}$ в точке P_1 на расстоянии z от срединной поверхности и перемещениями u_s , u_z в соответствующей точке P срединной поверхности (рис. 37):

$$u_s^{(z)} = u_s + z\vartheta_s, \quad u_z^{(z)} = u_z. \quad (6.3.11)$$

Заменяя в формулах (6.3.6) и (6.3.7) u_s , ds , R_1 , r соответственно величинами $u_s^{(z)}$, $ds \left(1 + \frac{z}{R_1}\right)$, $R_1 + z$, $r \left(1 + \frac{z}{R_2}\right)$ и вводя в эти формулы выражение (6.3.11) для $u_s^{(z)}$, получаем относительные удлинения $\varepsilon_s^{(z)}$ и $\varepsilon_\theta^{(z)}$ в точке на расстоянии z от срединной поверхности

$$\varepsilon_s^{(z)} = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} (\varepsilon_s + z\kappa_s); \quad (6.3.12)$$

$$\varepsilon_\theta^{(z)} = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} (\varepsilon_\theta + z\kappa_\theta),$$

где

$$\kappa_s = \frac{d\vartheta_s}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{u_s}{R_1} \right) - \frac{d^2 u_z}{ds^2}; \quad (6.3.13)$$

$$\kappa_\theta = \frac{1}{r} \vartheta_s \cos \varphi =$$

$$= \frac{1}{r} \left(\frac{u_s}{R_1} - \frac{du_z}{ds} \right) \cos \varphi. \quad (6.3.14)$$

Пренебрегая в формулах (6.3.12) членами порядка $\frac{z}{R_1}$ и $\frac{z}{R_2}$ по

сравнению с единицей, получаем выражения для деформаций в более простом виде:

$$\varepsilon_s^{(z)} = \varepsilon_s + z\kappa_s, \quad \varepsilon_\theta^{(z)} = \varepsilon_\theta + z\kappa_\theta. \quad (6.3.15)$$

С точностью до исходных допущений теории оболочек величины κ_s и κ_θ выражают изменения кривизны срединной поверхности соответственно в меридиональном сечении и в другом главном нормальном сечении, проходящем через единичные векторы \vec{e}_θ и \vec{e}_z .

Таким образом, осесимметричная деформация срединной поверхности характеризуется четырьмя параметрами: относительными удлинениями ε_s и ε_θ в направлениях меридиана и параллели и изменениями кривизны κ_s и κ_θ в направлениях меридиана и параллели.

Для осесимметрично деформированной срединной поверхности существуют два уравнения совместности деформаций, которые являются частным случаем уравнений совместности деформаций общей

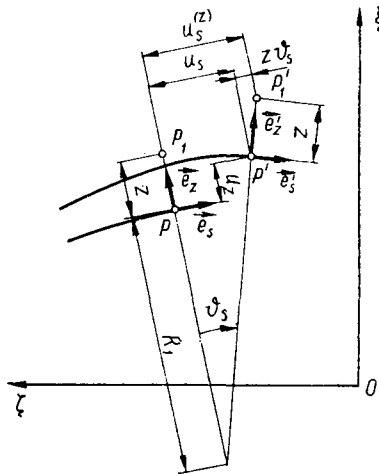


Рис. 37.

теории оболочек [11]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (r\kappa_\theta) - \cos \varphi \kappa_s - \frac{1}{R_1} \left(\frac{d\varepsilon_\theta r}{ds} - \cos \varphi \varepsilon_s \right) &= 0; \\ (R_1 \kappa_s + R_2 \kappa_\theta) \sin \varphi + R_1 \frac{d}{ds} \left(\frac{d\varepsilon_\theta r}{ds} - \cos \varphi \varepsilon_s \right) &= 0. \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

Уравнения (6.3.16) удовлетворяются тождественно при замене деформаций срединной поверхности их выражениями в перемещениях по формулам (6.3.6), (6.3.7), (6.3.13), (6.3.14).

§ 6.4. Уравнения равновесия оболочки

Выделим из оболочки элемент двумя меридиональными плоскостями, расположенными под углами θ и $\theta + d\theta$ к плоскости начального меридиана, и двумя коническими поверхностями, нормальными к срединной поверхности и пересекающимися с ней по параллелям на расстояниях s и $s + ds$ от начальной параллели. Элементу оболочки соответствует элемент срединной поверхности, ограниченный меридианами $\theta = \text{const}$ и $\theta + d\theta = \text{const}$ и параллелями $s = \text{const}$ и $s + ds = \text{const}$.

Пусть σ_s , σ_θ — нормальные напряжения, действующие на площадках, ограничивающих элемент оболочки; σ_{sz} — касательное напряжение, действующее на площадке конической поверхности параллельно единичному вектору \vec{e}_z (рис. 38).

В теории оболочек, как и в теории пластин, вместо напряжений вводятся статически эквивалентные им внутренние усилия и моменты по формулам

$$\begin{aligned} N_s &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_s \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz, & N_\theta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) dz, \\ Q_s &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{sz} \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz; \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

$$M_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_s \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) z dz; \quad M_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) z dz.$$

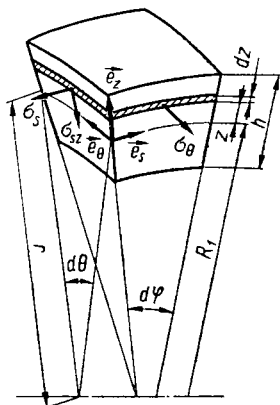


Рис. 38.

Здесь N_s , Q_s , M_s — соответственно нормальное усилие, поперечное усилие, изгибающий момент, приходящиеся на единицу длины параллели; N_θ , M_θ — нормальное усилие, изгибающий момент, приходящиеся на единицу длины меридиана. Малые члены $\frac{z}{R_1}$ и $\frac{z}{R_2}$ в подынтегральных выражениях формулы (6.4.1) в дальнейшем опускаются.

Обозначим внешнюю силу, приходящуюся на единицу площади срединной поверхности, через \vec{q} , а ее составляющие по направлениям единичных векторов \vec{e}_s и \vec{e}_z — соответственно через q_s и q_z .

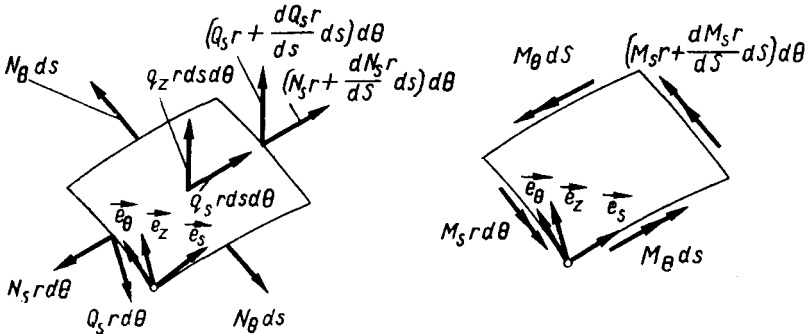


Рис. 39.

Положительные направления внутренних усилий и моментов и внешних сил указаны на рис. 39. Введенные таким образом внутренние усилия и моменты и внешние силы позволяют вместо равновесия пространственного элемента оболочки рассмотреть равновесие соответствующего элемента ее срединной поверхности.

На сторону элемента $s = \text{const}$ действует усилие $-(N_s \vec{e}_s + Q_s \vec{e}_z) r d\theta$, а на сторону $s + ds = \text{const}$ — усилие

$$\left[\left(N_s r + \frac{dN_s r}{ds} \right) \left(\vec{e}_s + \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial s} ds \right) + \left(Q_s r + \frac{dQ_s r}{ds} \right) \left(\vec{e}_z + \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial s} ds \right) \right] d\theta.$$

С точностью до величин второго порядка малости равнодействующая этих двух усилий равна $\left(\frac{dN_s r}{ds} \vec{e}_s + \frac{dQ_s r}{ds} \vec{e}_z + N_s r \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial s} + Q_s r \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial s} \right) ds d\theta$. Таким же образом находим равнодействующую усилий, действующих на стороны элемента $\theta = \text{const}$ и $\theta + d\theta = \text{const}$, $N_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} ds d\theta$; равнодействующую изгибающих моментов, действующих на стороны элемента $s = \text{const}$ и $s + ds = \text{const}$,

$\left(\frac{dM_{sr}}{ds} \vec{e}_\theta + M_{sr} \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial s} \right) dsd\theta$ и равнодействующую моментов, действующих на стороны элемента $\theta = \text{const}$ и $\theta + d\theta = \text{const}$, $-M_\theta \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial \theta} dsd\theta$.

Пренебрегая величинами высшего порядка малости, определяем также момент усилий относительно оси \vec{e}_θ : $-Q_{sr} \vec{e}_\theta dsd\theta$.

Учитываем внешнюю поверхностную нагрузку

$$(q_s \vec{e}_s + q_z \vec{e}_z) r dsd\theta.$$

Условия равенства нулю главного вектора и главного момента всех сил, действующих на элемент срединной поверхности, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dN_{sr}}{ds} \vec{e}_s + \frac{dQ_{sr}}{ds} \vec{e}_z + N_{sr} \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial s} + Q_{sr} \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial s} + \\ + N_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} + (q_s \vec{e}_s + q_z \vec{e}_z) r = 0; \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

$$\frac{dM_{sr}}{ds} \vec{e}_\theta + M_{sr} \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial s} - M_\theta \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial \theta} - Q_{sr} \vec{e}_\theta = 0.$$

Используя формулы (6.2.10) для производных единичных векторов и приравнявая затем нулю коэффициенты при \vec{e}_s , \vec{e}_θ , \vec{e}_z , получаем из двух векторных уравнений (6.4.2) три скалярных уравнения равновесия оболочки:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_{sr}}{ds} - N_\theta \cos \varphi + \frac{Q_{sr}}{R_1} + q_s r &= 0; \\ \frac{dM_{sr}}{ds} - M_\theta \cos \varphi - Q_{sr} r &= 0; \\ \frac{dQ_{sr}}{ds} - N_\theta \sin \varphi - \frac{N_{sr}}{R_1} + q_z r &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.4.3)$$

§ 6.5. Соотношения между усилиями, моментами и деформациями

Соотношения между деформациями оболочки (6.3.15) и напряжениями аналогичны соотношениям (5.2.12) для пластины:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s^{(z)} &= \frac{\sigma_s - \nu \sigma_\theta}{E} + \alpha_T (T - T_0); \\ \varepsilon_\theta^{(z)} &= \frac{\sigma_\theta - \nu \sigma_s}{E} + \alpha_T (T - T_0). \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

Выполняя преобразования, аналогичные соответствующим преобразованиям для пластины, и применяя формулы (6.4.1) без малых членов $\frac{z}{R_1}$ и $\frac{z}{R_2}$, получаем

$$\varepsilon_s = \frac{N_s - \nu N_\theta}{Eh} + \varepsilon_T, \quad \varepsilon_\theta = \frac{N_\theta - \nu N_s}{Eh} + \varepsilon_T; \quad (6.5.2)$$

$$\varkappa_s = \frac{12(M_s - \nu M_\theta)}{Eh^3} + \varkappa_T, \quad \varkappa_\theta = \frac{12(M_\theta - \nu M_s)}{Eh^3} + \varkappa_T \quad (6.5.3)$$

и

$$N_s = D_N [\varepsilon_s + \nu \varepsilon_\theta - (1 + \nu) \varepsilon_T]; \quad (6.5.4)$$

$$N_\theta = D_N [\nu \varepsilon_s + \varepsilon_\theta - (1 + \nu) \varepsilon_T];$$

$$M_s = D_M [\varkappa_s + \nu \varkappa_\theta - (1 + \nu) \varkappa_T]; \quad (6.5.5)$$

$$M_\theta = D_M [\nu \varkappa_s + \varkappa_\theta - (1 + \nu) \varkappa_T],$$

где величины ε_T , \varkappa_T определяются выражениями (5.2.15);

$$D_N = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad D_M = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

Заменяя в первых двух формулах (5.2.23) индекс r на s , получаем соответствующие формулы для напряжений в оболочке:

$$\sigma_s = \frac{N_s}{h} + \frac{12M_s z}{h^3} + \frac{E}{1 - \nu} [\varepsilon_T + z \varkappa_T - \alpha_T (T - T_0)]; \quad (6.5.6)$$

$$\sigma_\theta = \frac{N_\theta}{h} + \frac{12M_\theta z}{h^3} + \frac{E}{1 - \nu} [\varepsilon_T + z \varkappa_T - \alpha_T (T - T_0)].$$

При линейном изменении температуры $T - T_0$ по толщине оболочки и постоянном значении α_T имеет место равенство

$$\varepsilon_T + z \varkappa_T = \alpha_T (T - T_0),$$

на основании которого формулы (6.5.6) принимают вид

$$\sigma_s = \frac{N_s}{h} + \frac{12M_s z}{h^3}; \quad \sigma_\theta = \frac{N_\theta}{h} + \frac{12M_\theta z}{h^3}. \quad (6.5.7)$$

§ 6.6. Тепловые напряжения в цилиндрической оболочке

В случае цилиндрической оболочки

$$\frac{1}{R_1} = 0, \quad r = r_0 = \text{const}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad (6.6.1)$$

выражения для деформаций (6.3.6), (6.3.7), (6.3.13), (6.3.14) и угла поворота (6.3.10) принимают вид

$$\varepsilon_s = \frac{du_s}{ds}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_z}{r_0}; \quad \varkappa_s = -\frac{d^2 u_z}{ds^2}; \quad \varkappa_\theta = 0; \quad \vartheta_s = -\frac{du_z}{ds}, \quad (6.6.2)$$

а уравнения равновесия (6.4.3) при $q_s = 0$ переходят в следующие:

$$N_s + \frac{C}{r_0} = 0, \quad \frac{dM_s}{ds} - Q_s = 0, \quad \frac{dQ_s}{ds} - \frac{N_\theta}{r_0} + q_z = 0, \quad (6.6.3)$$

где C — постоянная интегрирования, которая выражается через равнодействующую осевую силу P (рис. 40) по формуле

$$C = -\frac{P}{2\pi}. \quad (6.6.4)$$

Исключая из второго и третьего уравнений (6.6.3) Q_s , получаем

$$\frac{d^2 M_s}{ds^2} - \frac{N_\theta}{r_0} + q_z = 0. \quad (6.6.5)$$

Подставляя во второе соотношение (6.5.2) величины

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_z}{r_0} \text{ и } N_s = -\frac{C}{r_0}, \text{ получаем}$$

$$N_\theta = Eh \left(\frac{u_z}{r_0} - \varepsilon_T \right) - \frac{\nu C}{r_0}. \quad (6.6.6)$$

Соотношения (6.5.5) при $\kappa_s = -\frac{d^2 u_z}{ds^2}$ и $\kappa_\theta = 0$ принимают вид

$$M_s = -D_M \left[\frac{d^2 u_z}{ds^2} + (1 + \nu) \kappa_T \right], \quad (6.6.7)$$

$$M_\theta = -D_M \left[\nu \frac{d^2 u_z}{ds^2} + (1 + \nu) \kappa_T \right].$$

Подставляя в уравнение (6.6.5) выражения для усилия N_θ и изгибающего момента M_s , находим разрешающее уравнение для цилиндрической оболочки:

$$\frac{d^4 u_z}{ds^4} + 4\beta^4 u_z - \frac{1}{D_M} \left(q_z + \frac{\nu C}{r_0^2} \right) - 4\beta^4 r_0 \varepsilon_T + (1 + \nu) \frac{d^2 \kappa_T}{ds^2} = 0, \quad (6.6.8)$$

$$\beta^4 = \frac{3(1 - \nu^2)}{r_0^2 h^2}. \quad (6.6.9)$$

Общее решение этого уравнения имеет выражение

$$u_z = e^{\beta s} (C_1 \cos \beta s + C_2 \sin \beta s) + e^{-\beta s} (C_3 \cos \beta s + C_4 \sin \beta s) + u_z^{(q)} + u_z^{(C)} + u_z^{(e)} + u_z^{(\kappa)}, \quad (6.6.10)$$

или

$$u_z = C_1 \sin \beta s \operatorname{sh} \beta s + C_2 \sin \beta s \operatorname{ch} \beta s + C_3 \cos \beta s \operatorname{sh} \beta s + C_4 \cos \beta s \operatorname{ch} \beta s + u_z^{(q)} + u_z^{(C)} + u_z^{(e)} + u_z^{(\kappa)}, \quad (6.6.11)$$

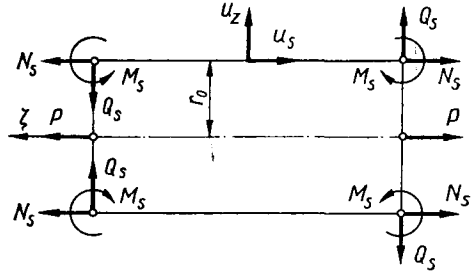


Рис. 40.

где $u_z^{(q)}$, $u_z^{(C)}$, $u_z^{(\varepsilon)}$, $u_z^{(\kappa)}$ — частные решения неоднородного уравнения (6.6.8) при свободном члене, содержащем величины соответственно q_z , C , ε_T , κ_T ; C_1, \dots, C_4 — постоянные интегрирования, определяемые из условий на ограничивающих оболочках контурах.

Частные решения для случаев равномерной нагрузки интенсивностью q_z и осевой силы $P = -2\pi C$ соответственно будут

$$u_z^{(q)} = \frac{q_z r_0^2}{Eh}; \quad u_z^{(C)} = \frac{\nu C}{Eh}. \quad (6.6.12)$$

Для определения частных решений в случае неравномерного нагрева аппроксимируем изменения чисто тепловых деформаций вдоль образующей срединной поверхности полиномами

$$\varepsilon_T = \sum_{j=0}^m \varepsilon_j s^j, \quad \kappa_T = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^m \mu_j s^j \quad (\varepsilon_j, \mu_j = \text{const}) \quad (6.6.13)$$

или тригонометрическими суммами

$$\varepsilon_T = \sum_{j=0}^m \varepsilon_j \cos j \frac{2\pi s}{l} + \sum_{j=1}^m \varepsilon'_j \sin j \frac{2\pi s}{l}; \quad (6.6.14)$$

$$\kappa_T = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^m \mu_j \cos j \frac{2\pi s}{l} + \frac{1}{h} \sum_{j=1}^m \mu'_j \sin j \frac{2\pi s}{l} \quad (\varepsilon_j, \varepsilon'_j, \mu_j, \mu'_j = \text{const}),$$

где l — длина оболочки.

Выбирая в случае тепловых деформаций (6.6.13) или (6.6.14) частные решения в виде выражений

$$u_z^{(\varepsilon)} = \sum_{j=0}^m a_j s^j; \quad u_z^{(\kappa)} = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^m b_j s^j \quad (6.6.15)$$

или

$$u_z^{(\varepsilon)} = \sum_{j=0}^m a_j \cos j \frac{2\pi s}{l} + \sum_{j=1}^m a'_j \sin j \frac{2\pi s}{l}; \quad (6.6.16)$$

$$u_z^{(\kappa)} = \sum_{j=0}^m b_j \cos j \frac{2\pi s}{l} + \sum_{j=1}^m b'_j \sin j \frac{2\pi s}{l}$$

и внося их в уравнение (6.6.8), взятое при $q_z = 0$, $C = 0$, получаем алгебраические уравнения для определения коэффициентов a_j , a'_j , b_j , b'_j .

Зная решение для u_z , определяем соответствующие решения для θ_s , N_θ , M_s , M_θ , Q_s .

Подставляя в первое соотношение (6.5.2) $\varepsilon_s = \frac{du_s}{ds}$, $N_s = -\frac{C}{r_0}$ и N_θ , определяемое выражением (6.6.6), и выполняя интегрирование, находим

$$u_s = \int \left[-\frac{\nu u_z}{r_0} - \frac{(1-\nu^2)C}{Ehr_0} + (1+\nu)\varepsilon_T \right] ds - C_5. \quad (6.6.17)$$

Постоянная C_5 представляет собой осевое перемещение оболочки в целом как жесткого тела в направлении оси ζ (рис. 40).

Наличие в решениях для усилий, моментов и перемещений шести постоянных интегрирования: C, C_1, \dots, C_4, C_5 позволяет удовлетворить любые граничные условия на краях оболочки. Постоянная C определяется по формуле (6.6.4), C_1, \dots, C_4 — из системы четырех уравнений, выражающих условия загрузки или закрепления краев оболочки, а постоянная C_5 находится из условия, фиксирующего начало отсчета осевого перемещения. Если оболочка статически неопределима относительно осевой силы, то задается дополнительное условие для перемещения. Более подробный анализ граничных условий для осесимметрично деформированной оболочки дан в § 6.8.

Рассмотрим две характерные задачи о тепловых напряжениях и перемещениях в цилиндрической оболочке.

Задача 1. Длинная цилиндрическая оболочка со свободным краем $s = 0$ подвергается действию температурного поля

$$T - T_0 = \sum_{j=0}^3 T^{(j)}(z) s^j, \quad (6.6.18)$$

где $T^{(j)}(z)$ — в общем случае нечетные функции. Такое температурное поле вызывает чисто тепловые деформации

$$\epsilon_T = \sum_{j=0}^3 \epsilon_j s^j; \quad \kappa_T = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^3 \mu_j s^j, \quad (6.6.19)$$

где

$$\epsilon_j = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha_T T^{(j)}(z) dz; \quad \mu_j = \frac{12}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha_T T^{(j)}(z) z dz. \quad (6.6.20)$$

При этих чисто тепловых деформациях частные решения (6.6.15) имеют выражения

$$u_z^{(e)} = r_0 \sum_{j=0}^3 \epsilon_j s^j; \quad u_z^{(x)} = -\frac{1+\nu}{2\beta^4 h} (\mu_2 + 3\mu_3 s). \quad (6.6.21)$$

В случае длинной оболочки целесообразно использовать общее решение для u_z в форме (6.6.10); так как краевой эффект быстро уменьшается с увеличением s , в этом решении следует положить $C_1 = C_2 = 0$. Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае отсутствуют распределенное давление и осевая сила ($q_z = 0, C = 0$), получаем

$$u_z = e^{-\beta s} (C_3 \cos \beta s + C_4 \sin \beta s) + r_0 \sum_{j=0}^3 \epsilon_j s^j - \frac{1+\nu}{2\beta^4 h} (\mu_2 + 3\mu_3 s). \quad (6.6.22)$$

Далее вычисляем

$$\vartheta_s = -\frac{du_z}{ds} = \beta e^{-\beta s} [C_3 (\sin \beta s + \cos \beta s) + C_4 (\sin \beta s - \cos \beta s)] - r_0 \sum_{j=0}^3 j \epsilon_j s^{j-1} + \frac{3(1+\nu)\mu_3}{2\beta^4 h}; \quad (6.6.23)$$

$$M_s = -D_M \left[\frac{d^2 u_z}{ds^2} + (1+\nu)\kappa_T \right] = -D_M [2\beta^2 e^{-\beta s} (C_3 \sin \beta s - C_4 \cos \beta s) + 2r_0(\epsilon_2 + 3\epsilon_3 s) + (1+\nu) \frac{1}{h} \sum_{j=0}^3 \mu_j s^j]; \quad (6.6.24)$$

$$Q_s = \frac{dM_s}{ds} = -D_M \left\{ 2\beta^3 e^{-\beta s} [C_3 (\cos \beta s - \sin \beta s) + C_4 (\cos \beta s + \sin \beta s)] + 6r_0 \epsilon_3 + (1+\nu) \frac{1}{h} \sum_{j=0}^3 j \mu_j s^{j-1} \right\}. \quad (6.6.25)$$

Удовлетворяя условиям на свободном крае

$$M_s = 0, \quad Q_s = 0 \quad \text{при } s = 0, \quad (6.6.26)$$

определяем

$$C_3 = -\frac{r_0}{\beta^3} \left(\epsilon_2 + \frac{3\epsilon_3}{\beta} \right) - \frac{1+\nu}{2\beta^2 h} \left(\mu_0 + \frac{\mu_1}{\beta} \right), \\ C_4 = \frac{r_0 \epsilon_2}{\beta^2} + \frac{(1+\nu)\mu_0}{2\beta^2 h}.$$

Подставляя значения постоянных C_3 и C_4 в формулы (6.6.22) и (6.6.23), находим

$$(u_z)_{s=0} = r_0 \left(\epsilon_0 - \frac{\epsilon_2}{\beta^2} - \frac{3\epsilon_3}{\beta^3} \right) - \frac{1+\nu}{2\beta^2 h} \left(\mu_0 + \frac{\mu_1}{\beta} + \frac{\mu_2}{\beta^2} \right); \quad (6.6.27)$$

$$(\vartheta_s)_{s=0} = -r_0 \left(\epsilon_1 + \frac{2\epsilon_2}{\beta} + \frac{3\epsilon_3}{\beta^2} \right) - \frac{1+\nu}{2\beta h} \left(2\mu_0 + \frac{\mu_1}{\beta} - \frac{3\mu_3}{\beta^3} \right).$$

Применяя формулу (6.6.6) и вторую формулу (6.6.7), определяем

$$(N_\theta)_{s=0} = -\frac{Eh}{\beta^2} \left[\epsilon_2 + \frac{3\epsilon_3}{\beta} + \frac{1+\nu}{2r_0 h} \left(\mu_0 + \frac{\mu_1}{\beta} + \frac{\mu_2}{\beta^2} \right) \right]; \quad (6.6.28)$$

$$(M_\theta)_{s=0} = -\frac{D_M (1-\nu^2) \mu_0}{h}. \quad (6.6.29)$$

Чтобы определить напряжения σ_θ , необходимо знать распределение температуры по толщине оболочки. Пусть при $s = 0$ изменение температуры по толщине оболочки определяется законом

$$(T - T_0)_{s=0} = T^{(0)}(z) = T_{00} + T_{01}z + T_{02}z^2 \quad (T_{00}, T_{01}, T_{02} = \text{const}). \quad (6.6.30)$$

Этому распределению при постоянном значении α_T соответствуют

$$(\epsilon_T)_{s=0} = \epsilon_0 = \alpha_T \left(T_{00} + \frac{T_{02} h^2}{12} \right); \quad (\kappa_T)_{s=0} = \frac{\mu_0}{h} = \alpha_T T_{01}.$$

Подставляя выражения для N_θ , M_θ , ϵ_T , κ_T и $T - T_0$ во вторую формулу (6.5.6), находим

$$(\sigma_\theta)_{s=0} = -E \left[\frac{1}{\beta^2} \left(\epsilon_2 + \frac{3\epsilon_3}{\beta} \right) + \frac{1+\nu}{2\beta^2 r_0 h} \left(\mu_0 + \frac{\mu_1}{\beta} + \frac{\mu_2}{\beta^2} \right) + \frac{\mu_0 z}{h} + \frac{T_{02} \alpha_T}{1-\nu} \left(z^2 - \frac{h^2}{12} \right) \right]. \quad (6.6.31)$$

В частном случае, когда температура изменяется только вдоль толщины оболочки по линейному закону

$$T - T_0 = T_{00} + T_{01} z, \quad (6.6.32)$$

где

$$T_{00} = \frac{1}{2} \left[(T - T_0)_{z=\frac{h}{2}} + (T - T_0)_{z=-\frac{h}{2}} \right];$$

$$T_{01} = \frac{\Delta T}{h}, \quad \Delta T = (T - T_0)_{z=\frac{h}{2}} - (T - T_0)_{z=-\frac{h}{2}},$$

в формуле (6.6.31) отличным от нуля остается только коэффициент $\frac{\mu_0}{h} = \alpha_T \frac{\Delta T}{h}$. Максимальное тепловое напряжение

$$(\sigma_\theta)_{s=0, z=\frac{h}{2}} = -\frac{E \alpha_T \Delta T}{2} \left[1 + \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{\sqrt{3}(1-\nu)} \right]. \quad (6.6.33)$$

При $\Delta T > 0$ это напряжение сжимающее.

Задача 2. В короткой цилиндрической оболочке с жестко заделанными краями происходит равномерное приращение температуры $T - T_0$, которому соответствуют чисто тепловые деформации

$$\epsilon_T = \epsilon_0 = \alpha_T (T - T_0), \quad \kappa_T = 0. \quad (6.6.34)$$

В этом случае удобно применить решение для u_z в форме (6.6.11). Если поместить начало координат в среднем поперечном сечении цилиндрической оболочки, то при одинаковых граничных условиях на краях $s = \pm \frac{l}{2}$ (l — длина оболочки) решение для u_z должно быть четной функцией, поэтому $C_2 = C_3 = 0$. Тогда, принимая во внимание выражения для частных решений $u_z^{(C)} = \frac{\nu C}{Eh}$; $u_z^{(e)} = r_0 \alpha_T (T - T_0)$, получаем

$$u_z = C_1 \sin \beta s \operatorname{sh} \beta s + C_4 \cos \beta s \operatorname{ch} \beta s + \frac{\nu C}{Eh} + r_0 \alpha_T (T - T_0). \quad (6.6.35)$$

Затем находим

$$\vartheta_s = -\frac{du_z}{ds} = -\beta [C_1 (\cos \beta s \operatorname{sh} \beta s + \sin \beta s \operatorname{ch} \beta s) - C_4 (\sin \beta s \operatorname{ch} \beta s - \cos \beta s \operatorname{sh} \beta s)], \quad (6.6.36)$$

$$M_s = -D_M \frac{d^2 u_z}{ds^2} = -2D_M \beta^2 (C_1 \cos \beta s \operatorname{ch} \beta s - C_4 \sin \beta s \operatorname{sh} \beta s) \quad (6.6.37)$$

и, применяя формулу (6.6.17), определяем

$$u_s = \frac{\nu}{2r_0\beta} [C_1 (\cos \beta s \operatorname{sh} \beta s - \sin \beta s \operatorname{ch} \beta s) - C_4 (\cos \beta s \operatorname{sh} \beta s + \sin \beta s \operatorname{ch} \beta s)] - \frac{C}{r_0 E h} s + \alpha_T (T - T_0) s - C_5. \quad (6.6.38)$$

Постоянная C_5 согласно условию симметрии

$$u_s = 0 \text{ при } s = 0 \quad (6.6.39)$$

равна нулю

Для определения постоянных C , C_1 и C_4 используем следующие условия жесткого закрепления краев оболочки:

$$u_s = 0, \quad u_z = 0, \quad \vartheta_s = 0 \text{ при } s_j = \pm \frac{l}{2}. \quad (6.6.40)$$

Удовлетворяя этим условиям, находим значения постоянных интегрирования:

$$C = \frac{E h r_0 \alpha_T (T - T_0)}{\nu} \left[\frac{(1 + \nu) \alpha (\sin 2\alpha + \operatorname{sh} 2\alpha)}{\alpha (\sin 2\alpha + \operatorname{sh} 2\alpha) + \nu^2 (\cos 2\alpha - \operatorname{ch} 2\alpha)} - 1 \right];$$

$$C_1 = -\frac{2(1 + \nu) \alpha \alpha_T (T - T_0) r_0 (\sin \alpha \operatorname{ch} \alpha - \cos \alpha \operatorname{sh} \alpha)}{\alpha (\sin 2\alpha + \operatorname{sh} 2\alpha) + \nu^2 (\cos 2\alpha - \operatorname{ch} 2\alpha)};$$

$$C_4 = -\frac{2(1 + \nu) \alpha \alpha_T (T - T_0) r_0 (\cos \alpha \operatorname{sh} \alpha + \sin \alpha \operatorname{ch} \alpha)}{\alpha (\sin 2\alpha + \operatorname{sh} 2\alpha) + \nu^2 (\cos 2\alpha - \operatorname{ch} 2\alpha)},$$

где $\alpha = \frac{\beta l}{2}$.

Сжимающее усилие $N_s = -\frac{C}{r_0}$ должно быть меньше усилия, вызывающего потерю устойчивости оболочки.

Тепловые напряжения в определенных поперечных сечениях оболочки определяются по формулам (6.5.7), в которых N_θ и M_s выражаются формулами (6.6.6) и (6.6.37), а $M_\theta = \nu M_s$.

Задача, связанная с сопряжением цилиндрических оболочек, рассматривается на конкретном примере.

Пример. Стальная трубка в месте соединения с трубной доской подвергается неравномерному нагреву. Средний радиус и толщина трубки составляют $r_0 = 1,75$ см и $h = 0,3$ см. Температура трубки, измеренная термопарами, изменяется вдоль ее оси в соответствии с графиком на рис. 41, а; по толщине трубки температура существенно не изменяется. Требуется определить наибольшие тепловые напряжения в трубке без учета ее связи с трубной доской.

Рассматриваем трубку как цилиндрическую оболочку, состоящую из двух участков (рис. 41, б). Приращение температуры первого участка длиной $s_1 = 3,5$ см аппроксимируем линейным законом $(T - T_0)^I = T_1 s$, а приращение температуры второго участка предполагаем постоянным: $(T - T_0)^{II} = 0$.

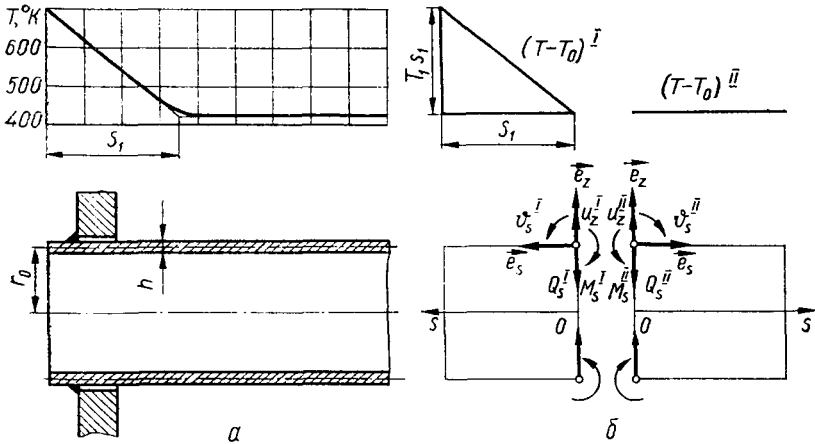


Рис. 41.

В рассматриваемом случае $T_0 = 418^\circ \text{K}$, $T_1 = 80$ град/см. При $\nu = 0,3$ и заданных размерах трубки

$$\beta = \left[\frac{3(1-\nu^2)}{r_0^2 h^2} \right]^{\frac{1}{4}} = 1,774 \frac{1}{\text{см}} \quad \text{и} \quad e^{-\beta s_1} = 0,002011.$$

Так как величина $e^{-\beta s_1}$ мала по сравнению с единицей, то первый участок, как и второй, можно рассматривать как полубесконечную оболочку.

Располагая начало координат в месте сопряжения первого и второго участков и направляя ось s для первого участка противоположно направлению оси s для второго участка, рассмотрим на сопрягаемом контуре каждого участка перемещение u_z , угол поворота ϑ_s , изгибающий момент M_s и поперечное усилие Q_s при указанном положении единичных векторов \vec{e}_s и \vec{e}_z , придерживаясь ранее принятого правила для положительных направлений этих величин (рис. 37 и рис. 39). Указанные величины определяются выражениями (6.6.22)–(6.6.25), в которых для второго участка все коэффициенты e_j и μ_j ($j = 0, 1, 2, 3$) равны нулю, а для первого участка отличен от нуля только один из этих коэффициентов $e_1 = \alpha_T T_1$.

Условия сопряжения двух участков следующие:

$$u_z^I = u_z^{II}, \quad \vartheta_s^I = -\vartheta_s^{II}, \quad M_s^I = M_s^{II}, \quad Q_s^I = -Q_s^{II} \quad \text{при} \quad s = 0. \quad (6.6.41)$$

Согласно первому и третьему условиям $C_3^I = C_3^{II} = C_3$; $C_4^I = C_4^{II} = C_4$. Из второго и четвертого условий определяем $C_3 = -C_4 = \frac{\alpha_T T_1 r_0}{4\beta}$. Тогда находим

$$(N_\theta)_{s=0} = \frac{\alpha_T T_1 E h}{4\beta}; \quad (M_s)_{s=0} = -\frac{\alpha_T T_1 \beta r_0 E h^3}{24(1-\nu^2)}; \quad (M_\theta)_{s=0} = \nu (M_s)_{s=0}. \quad (6.6.42)$$

Соответствующие им наибольшие тепловые напряжения будут

$$\begin{aligned}
 (\sigma_s)_{s=0, z=\pm \frac{h}{2}} &= \pm \frac{6M_s}{h^2} = \mp \frac{\alpha_T T_1 \beta r_0 E h}{4(1-\nu^2)}; \\
 (\sigma_\theta)_{s=0, z=-\frac{h}{2}} &= \frac{1}{h} (N_\theta)_{s=0} - \frac{6}{h^2} (M_\theta)_{s=0}.
 \end{aligned}
 \tag{6.6.43}$$

При ранее указанных значениях величин r_0, h, β, T_1, ν , коэффициенте линейного теплового расширения $\alpha_T = 13,5 \cdot 10^{-6}$ 1/град и модуле упругости $E = 2 \times 10^6$ дан/см² из этих формул определяем

$$\begin{aligned}
 (\sigma_s)_{s=0, z=\pm \frac{h}{2}} &= \mp 552 \text{ дан/см}^2, \\
 (\sigma_\theta)_{s=0, z=-\frac{h}{2}} &= 304 \text{ дан/см}^2 + 166 \text{ дан/см}^2 = 470 \text{ дан/см}^2.
 \end{aligned}$$

§ 6.7. Разрешающие уравнения

Рассмотрим разрешающие уравнения для конической, сферической и торообразной оболочек, имеющих постоянную кривизну меридиана ($R_1 = \text{const}$).

Исключая усилие N_θ из первого и третьего уравнений равновесия (6.4.3), взятых при $q_s = q_z = 0$, получаем $\frac{d}{ds} (N_s r \sin \varphi) -$

$-\frac{d}{ds} (Q_s r \cos \varphi) = 0$. После интегрирования находим

$$Q_s = N_s \operatorname{tg} \varphi + \frac{C}{r \cos \varphi}, \tag{6.7.1}$$

где C — постоянная интегрирования. Подставляя выражение (6.7.1) в первое и второе уравнения (6.4.3), имеем следующие уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} \left(N_s \frac{r}{\cos \varphi} \right) - N_\theta + \\
 + \frac{C}{R_1 \cos^2 \varphi} = 0;
 \end{aligned}
 \tag{6.7.2}$$

Рис. 42.

$$\frac{dM_s r}{ds} - M_\theta \cos \varphi - N_s r \operatorname{tg} \varphi - \frac{C}{\cos \varphi} = 0.$$

Постоянную C выражаем через равнодействующую осевую силу P (рис. 42):

$$P = 2\pi r (N_s \sin \varphi - Q_s \cos \varphi). \tag{6.7.3}$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (6.7.1), находим значение (6.6.4) постоянной C .

Порядок системы уравнений совместности деформаций (6.3.16) может быть понижен. На основании соотношений (6.3.13) и (6.3.14), $(R_1\kappa_s + R_2\kappa_\theta) \sin \varphi = R_1 \frac{d\vartheta_s \sin \varphi}{ds} = R_1 \frac{d}{ds} (\kappa_\theta r \operatorname{tg} \varphi)$. Подставляя это выражение во второе уравнение (6.3.16), после интегрирования получаем

$$\kappa_\theta r \operatorname{tg} \varphi + \frac{d\epsilon_\theta r}{ds} - \cos \varphi \epsilon_s + C' = 0. \quad (6.7.4)$$

Постоянная интегрирования C' равна нулю. В этом можно убедиться, выражая в равенстве (6.7.4) деформации через перемещения.

Учитывая равенство (6.7.4) при $C' = 0$, уравнения совместности деформаций (6.3.16) представляем в таком виде:

$$\frac{d}{ds} \left(\kappa_\theta \frac{r}{\cos \varphi} \right) - \kappa_s = 0; \quad (6.7.5)$$

$$\frac{d\epsilon_\theta r}{ds} - \epsilon_s \cos \varphi + \kappa_\theta r \operatorname{tg} \varphi = 0.$$

Рассматривая уравнения (6.7.2) и (6.7.5), обнаруживаем известную статико-геометрическую аналогию: величины $N_s, N_\theta, M_s, M_\theta$ в уравнениях (6.7.2) соответствуют величинам $\kappa_\theta, \kappa_s, -\epsilon_\theta, -\epsilon_s$ в уравнениях (6.7.5). Аналогию можно распространить и на соотношения (6.5.2) и (6.5.5): величины $\nu, -\frac{1}{Eh}, \epsilon_T$ в соотношениях (6.5.2) соответствуют величинам $-\nu, D_M, (1 + \nu)D_M\kappa_T$ в соотношениях (6.5.5).

В качестве основных неизвестных, относительно которых будем составлять разрешающие уравнения, выбираем N_s и κ_θ .

Заменяя во втором уравнении (6.7.5) деформации ϵ_s и ϵ_θ усилиями по формулам (6.5.2) и исключая затем усилие N_θ с помощью первого уравнения (6.7.2), получаем первое разрешающее уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N_s}{ds^2} + \left(\frac{3 \cos \varphi}{r} + \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{R_1} \right) \frac{dN_s}{ds} + \frac{1}{R_1} \left(\frac{2 \sin \varphi}{r} + \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{R_1} \right) N_s + \\ + \frac{\nu \sin \varphi}{R_1 r} N_s + \frac{Eh \sin \varphi}{r} \kappa_\theta + \frac{C}{R_1 r} \left(\frac{1 + \nu}{r} + \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{R_1 \cos \varphi} \right) + \\ + \frac{Eh \cos \varphi}{r} \frac{d\epsilon_T}{ds} = 0. \end{aligned} \quad (6.7.6)$$

Заменяя во втором уравнении (6.7.2) моменты M_s и M_θ их выражениями в деформациях (6.5.5) и исключая деформацию κ_s с помощью первого уравнения (6.7.5), имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \kappa_\theta}{ds^2} + \left(\frac{3 \cos \varphi}{r} + \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{R_1} \right) \frac{d\kappa_\theta}{ds} + \frac{1}{R_1} \left(\frac{2 \sin \varphi}{r} + \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{R_1} \right) \kappa_\theta - \\ - \frac{\nu \sin \varphi}{R_1 r} \kappa_\theta - \frac{\sin \varphi}{r D_M} N_s - \frac{C}{r^2 D_M} - \frac{(1 + \nu) \cos \varphi}{r} \cdot \frac{d\kappa_T}{ds} = 0. \end{aligned} \quad (6.7.7)$$

Заметим, что при $C = 0$ уравнение (6.7.7) на основании статико-геометрической аналогии можно получить непосредственно из

уравнения (6.7.6). Уравнения (6.7.6) и (6.7.7) можно преобразовать к одному комплексному уравнению второго порядка. В качестве разрешающей функции выбираем

$$\tilde{N}_s = N_s + k_0 \varkappa_0, \quad (6.7.8)$$

где k_0 — комплексная постоянная.

Умножая уравнение (6.7.7) на k_0 и складывая его с уравнением (6.7.6), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{N}_s}{ds^2} + \left(\frac{3 \cos \varphi}{r} + \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{R_1} \right) \frac{d \tilde{N}_s}{ds} + \frac{1}{R_1} \left(\frac{2 \sin \varphi}{r} + \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{R_1} \right) \tilde{N}_s + \\ + \frac{\sin \varphi}{r} \left[\left(\frac{\nu}{R_1} - \frac{k_0}{D_M} \right) N_s + \left(Eh - \frac{\nu k_0}{R_1} \right) \varkappa_0 \right] + \\ + \frac{C}{r} \left[\frac{1}{R_1} \left(\frac{1 + \nu}{r} + \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{R_1 \cos \varphi} \right) - \frac{k_0}{r D_M} \right] + \\ + \frac{\cos \varphi}{r} \cdot \frac{d}{ds} [Eh \varepsilon_T - (1 + \nu) k_0 \varkappa_T] = 0. \end{aligned} \quad (6.7.9)$$

Для того чтобы это уравнение содержало одну разрешающую функцию \tilde{N}_s , необходимо положить $Eh - \frac{\nu k_0}{R_1} = \left(\frac{\nu}{R_1} - \frac{k_0}{D_M} \right) k_0$. Отсюда

$$k_0 = \frac{D_M}{R_1} (\nu \pm i\mu), \quad \mu = \sqrt{\frac{c_0^2 R_1^2}{h^2} - \nu^2}, \quad c_0^2 = 12(1 - \nu^2). \quad (6.7.10)$$

Подставляя значение k_0 в уравнение (6.7.9), получаем разрешающее уравнение оболочки вращения с постоянной кривизной меридиана:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{N}_s}{ds^2} + \left(\frac{3 \cos \varphi}{r} + \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{R_1} \right) \frac{d \tilde{N}_s}{ds} + \frac{1}{R_1} \left[\frac{(2 \mp i\mu) \sin \varphi}{r} + \right. \\ \left. + \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{R_1} \right] \tilde{N}_s + \frac{C}{r} \left[\frac{1}{R_1} \left(\frac{1 + \nu}{r} + \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{R_1 \cos \varphi} \right) - \frac{k_0}{r D_M} \right] + \\ + \frac{\cos \varphi}{r} \cdot \frac{d}{ds} [Eh \varepsilon_T - (1 + \nu) k_0 \varkappa_T] = 0. \end{aligned} \quad (6.7.11)$$

Рассмотрим частные случаи этого уравнения, при этом для определенности берем верхний знак перед i .

Коническая оболочка. Полагая $R_1 \rightarrow \infty$, $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha = \text{const}$, $r = s \sin \alpha$, где α — угол между осью вращения и меридианом средней поверхности оболочки; s — длина меридиана от вершины оболочки (рис. 43, а), из уравнения (6.7.11) получаем

$$\begin{aligned} s^2 \frac{d^2 \tilde{N}_s}{ds^2} + 3s \frac{d \tilde{N}_s}{ds} - \frac{ic_0 \operatorname{ctg} \alpha}{h} s \tilde{N}_s - i \frac{c_0}{h \sin^2 \alpha} C + \\ + Ehs \frac{d}{ds} \left[\varepsilon_T - i(1 + \nu) \frac{h}{c_0} \varkappa_T \right] = 0, \end{aligned} \quad (6.7.12)$$

при этом

$$k_0 = i \frac{Eh^2}{c_0}. \quad (6.7.13)$$

Сферическая оболочка. При $R_1 = R_2 = r_0 = \text{const}$, $r = r_0 \sin \varphi$, $ds = r_0 d\varphi$ (рис. 43, б) уравнение (6.7.11) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \tilde{N}_s}{d\varphi^2} + (3 \operatorname{ctg} \varphi + 2 \operatorname{tg} \varphi) \frac{d\tilde{N}_s}{d\varphi} + (3 - i\mu + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi) \tilde{N}_s + \\ & + \frac{C}{r_0} \left(\frac{2}{\cos^2 \varphi} + \frac{1 - i\mu}{\sin^2 \varphi} \right) + \operatorname{ctg} \varphi \frac{d}{d\varphi} [Eh\varepsilon_T - (1 + \nu) k_0 \varkappa_T] = 0, \end{aligned} \quad (6.7.14)$$

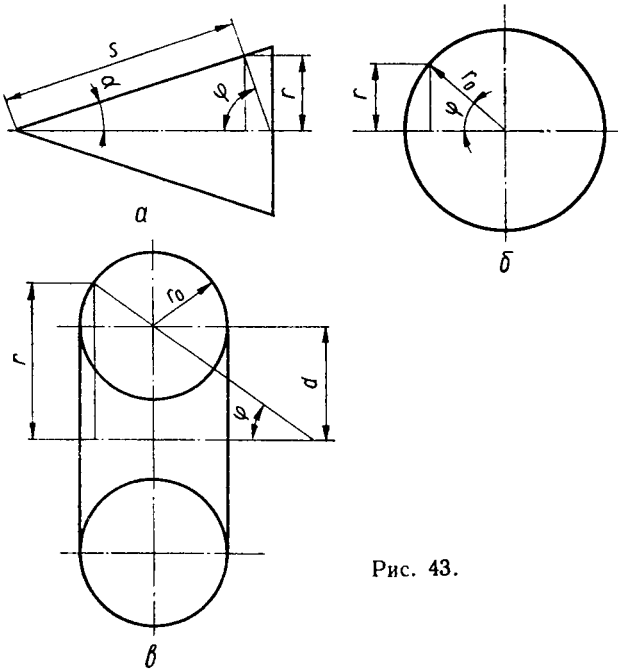


Рис. 43.

где

$$k_0 = \frac{D_M}{r_0} (\nu + i\mu), \quad \mu = \sqrt{\frac{c_0^2 r_0^2}{h^2} - \nu^2} \approx \frac{c_0 r_0}{h}. \quad (6.7.15)$$

Торообразная оболочка. Обозначим через d расстояние между центром меридиональной окружности торообразной оболочки и ее осью вращения (рис. 43, в). Полагая $R_1 = r_0 = \text{const}$, $r = r_0 (\delta + \sin \varphi)$, $\delta = \frac{d}{r_0}$, $ds = r_0 d\varphi$, вместо уравнения (6.7.11) получаем

$$\frac{d^2 \tilde{N}_s}{d\varphi^2} + \left(\frac{3 \cos \varphi}{\delta + \sin \varphi} + 2 \operatorname{tg} \varphi \right) \frac{d\tilde{N}_s}{d\varphi} +$$

$$+ \left[\frac{(2 - i\mu) \sin \varphi}{\delta + \sin \varphi} + 1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi \right] \tilde{N}_s + \frac{C}{r_0 (\delta + \sin \varphi)} \left(\frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} + \frac{1 - i\mu}{\delta + \sin \varphi} \right) + \frac{\cos \varphi}{\delta + \sin \varphi} \cdot \frac{d}{d\varphi} [Eh\varepsilon_T - (1 + \nu) k_0 \varkappa_T] = 0, \quad (6.7.16)$$

где величины k_0 и μ имеют значения (6.7.15). При $\delta = 0$ уравнение (6.7.16) переходит в (6.7.14).

§ 6.8. Форма решений и граничные условия

Общее решение уравнения (6.7.11) можно представить в такой форме:

$$\tilde{N}_s = \tilde{C}_1 \tilde{N}_s^{(1)} + \tilde{C}_2 \tilde{N}_s^{(2)} + \tilde{N}_s^{(C)} + \tilde{N}_s^{(e)} + \tilde{N}_s^{(\varkappa)}. \quad (6.8.1)$$

Этому решению соответствуют следующие решения для N_s и \varkappa_θ :

$$N_s = \sum_{n=1}^4 C_n N_s^{(n)} + N_s^{(C)} + N_s^{(e)} + N_s^{(\varkappa)}; \quad (6.8.2)$$

$$\varkappa_\theta = \sum_{n=1}^4 C_n \varkappa_\theta^{(n)} + \varkappa_\theta^{(C)} + \varkappa_\theta^{(e)} + \varkappa_\theta^{(\varkappa)}.$$

Здесь $N_s^{(n)}$ и $\varkappa_\theta^{(n)}$ ($n = 1, 2, 3, 4$) — частные решения однородного уравнения, соответствующего уравнению (6.7.11). Так как это однородное уравнение не содержит членов, учитывающих действие осевой силы и неравномерного нагрева, то его частные решения соответствуют такому напряженному состоянию оболочки, которое вызывается в ней действием самоуравновешенных контурных нагрузок: изгибающих моментов M_s и радиальных усилий $N_r = N_s \cos \varphi + Q_s \sin \varphi$. Такое напряженное состояние принято называть краевым эффектом. С помощью четырех линейно независимых решений краевого эффекта при соответствующем выборе постоянных интегрирования можно осуществить любую комбинацию краевых самоуравновешенных нагрузок M_s и N_r на двух ограничивающих оболочку контурах.

Входящие в решения (6.8.2) величины $N_s^{(C)}$, $N_s^{(e)}$, $N_s^{(\varkappa)}$ и $\varkappa_\theta^{(C)}$, $\varkappa_\theta^{(e)}$, $\varkappa_\theta^{(\varkappa)}$ представляют собой частные решения уравнения (6.7.11), соответствующие свободным членам, содержащим величины C , ε_T , \varkappa_T . Эти частные решения отвечают таким видам напряженного состояния оболочки, которые обусловлены действием соответственно осевой силы $P = -2\pi C$ и неравномерного нагрева, вызывающего чисто тепловые деформации ε_T и \varkappa_T .

Зная N_s и \varkappa_θ , из первого уравнения равновесия (6.7.2) и первого уравнения совместности деформаций (6.7.5), можно определить N_θ и \varkappa_s , а из соотношений (6.5.2) и (6.5.5) — ε_s , ε_θ и M_s , M_θ .

Поперечное усилие Q_s определяется по формуле (6.7.1). Перемещение u_z можно найти из дифференциального уравнения

$$\frac{du_z}{ds} + \frac{\operatorname{tg} \varphi}{R_1} u_z + \frac{r}{\cos \varphi} \left(\kappa_\theta - \frac{\varepsilon_\theta}{R_1} \right) = 0, \quad (6.8.3)$$

полученного из уравнений (6.3.7) и (6.3.14) после исключения u_s . Из уравнения (6.3.7) получаем формулу для перемещения u_s :

$$u_s = \frac{1}{\cos \varphi} (r\varepsilon_\theta - u_z \sin \varphi). \quad (6.8.4)$$

Поскольку для определения перемещений u_z и u_s надо интегрировать дифференциальное уравнение (6.8.3) первого порядка, то форма их общих решений будет отличаться от формы решений (6.8.2) дополнительным частным решением

$$\begin{aligned} u_z &= \sum_{n=1}^4 C_n u_z^{(n)} + u_z^{(C)} + u_z^{(e)} + \\ &\quad + u_z^{(\kappa)} + C_5 u_z^{(5)}; \\ u_s &= \sum_{n=1}^4 C_n u_s^{(n)} + u_s^{(C)} + u_s^{(e)} + \\ &\quad + u_s^{(\kappa)} + C_5 u_s^{(5)}, \end{aligned} \quad (6.8.5)$$

где $u_z^{(5)}$ и $u_s^{(5)}$ — решения однородной системы двух уравнений, соответствующей системе уравнений (6.8.3) и (6.8.4):

$$u_z^{(5)} = \cos \varphi, \quad u_s^{(5)} = -\sin \varphi. \quad (6.8.6)$$

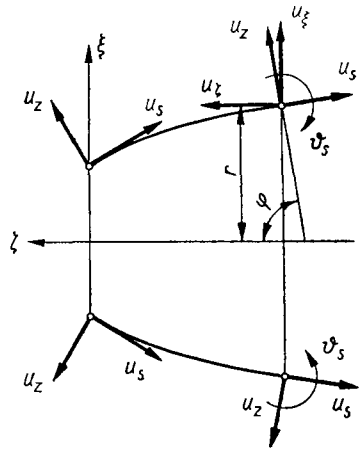


Рис. 44.

На основании этих решений ясен механический смысл постоянной C_5 : она представляет собой осевое смещение оболочки в целом как жесткого тела в направлении оси ζ (рис. 44).

С помощью пяти постоянных интегрирования C и C_n ($n = 1, 2, 3, 4$) в решениях для усилий, моментов и деформаций и, кроме того, шестой постоянной C_5 в решениях для перемещений можно удовлетворить любые граничные условия на контурах, ограничивающих оболочку.

Граничные условия представляют собой условия загрузки или закрепления краев оболочки. Они формулируются при составлении расчетной схемы рассматриваемой конкретной задачи. Задаются граничные условия в виде силовых или кинематических факторов. Силовые факторы характеризуют загрузку краев оболочки, а кинематические — их закрепление или перемещение. В общем случае граничные условия могут быть заданы в виде

следующих трех силовых и четырех кинематических факторов (рис. 42 и 44):

Силовые факторы

Кинематические факторы

1. Меридиональный изгибающий момент M_s .

1. Угол поворота

2. Радиальное усилие

$$\vartheta_s = \frac{u_s}{R_1} - \frac{du_z}{ds} = \frac{r}{\cos \varphi} \kappa_\theta.$$

$$N_r = N_s \cos \varphi + Q_s \sin \varphi.$$

2. Радиальное перемещение

3. Осевая сила

$$u_\xi = u_s \cos \varphi + u_z \sin \varphi = r \varepsilon_\theta.$$

$$P = 2\pi r (N_s \sin \varphi - Q_s \cos \varphi).$$

3. Взаимное осевое смещение контуров оболочки

$$\Delta u_\zeta = u_{\zeta 2} - u_{\zeta 1} = (u_z \cos \varphi - u_s \sin \varphi)_2 - (u_z \cos \varphi - u_s \sin \varphi)_1.$$

4. Осевое перемещение на одном из контуров

$$u_\zeta = u_z \cos \varphi - u_s \sin \varphi.$$

На каждом граничном контуре могут быть заданы независимо первые два из указанных силовых или кинематических факторов. Если из условия равновесия оболочки в целом можно определить осевую силу P , то задается третий силовой фактор. Если же закрепление оболочки не позволяет определить осевую силу P из условий статики, т. е. оболочка статически неопределима относительно этой силы, то задается третий кинематический фактор. Четвертый кинематический фактор фиксирует начало отсчета осевых перемещений оболочки. Он может быть задан лишь на одном из контуров. Таким образом, всего может быть задано шесть граничных условий, из которых можно определить входящие в общее решение шесть постоянных интегрирования. Если оболочка статически определима относительно осевой силы P , то постоянные интегрирования определяем в такой последовательности:

1) находим силу P и постоянную C ;

2) на основании заданных первых двух силовых или кинематических факторов (по два на каждом краю оболочки) составляем систему четырех уравнений, из которых находим постоянные интегрирования C_n ($n = 1, 2, 3, 4$), входящие в частные решения краевого эффекта;

3) для контура с известным осевым перемещением (четвертый кинематический фактор) записываем одно уравнение, из которого определяем постоянную интегрирования C_5 .

§ 6.9. Тепловые напряжения в конической оболочке

Рассмотрим тепловые напряжения в конической оболочке при осесимметричном температурном поле, вызывающем чисто тепловые деформации:

$$\varepsilon_T = \varepsilon_j s^j, \quad \kappa_T = \frac{\mu_j}{h} s^j (\varepsilon_j, \mu_j = \text{const}; j = 0, 1, 2, \dots). \quad (6.9.1)$$

Задача сводится к решению уравнения (6.7.12). Это уравнение при чисто тепловых деформациях (6.9.1) и новой переменной

$$z = i \frac{c_0 \operatorname{ctg} \alpha}{h} s \quad (6.9.2)$$

принимает вид

$$z^2 \frac{d^2 \tilde{N}_s}{dz^2} + 3z \frac{d\tilde{N}_s}{dz} - z\tilde{N}_s + B + (B_j^{(e)} + B_j^{(*)}) z^j = 0, \quad (6.9.3)$$

где

$$\tilde{N}_s = N_s + \frac{iEh^2}{c_0} \kappa_0; \quad (6.9.4)$$

$$B = -i \frac{c_0}{h \sin^2 \alpha} C; \quad (6.9.5)$$

$$B_j^{(e)} = \frac{jEh}{a_0^j} \epsilon_j, \quad B_j^{(*)} = -\frac{i(1+\nu)jEh}{c_0 a_0^j} \mu_j, \quad a_0 = i \frac{c_0 \operatorname{ctg} \alpha}{h}. \quad (6.9.6)$$

Посредством замены функции и независимой переменной по формулам

$$\tilde{N} = z\tilde{N}_3; \quad y = 2\sqrt{z} \quad (6.9.7)$$

однородное уравнение, соответствующее уравнению (6.9.3), можно преобразовать к уравнению Бесселя мнимого аргумента

$$y^2 \frac{d^2 \tilde{N}}{dy^2} + y \frac{d\tilde{N}}{dy} - (4 + y^2) \tilde{N} = 0. \quad (6.9.8)$$

Принимая во внимание общее решение этого уравнения

$$\tilde{N} = \tilde{A}_1 I_2(y) + \tilde{A}_2 K_2(y) \quad (6.9.9)$$

и формулы (6.9.7), находим следующее общее решение однородного уравнения*:

$$\tilde{N}_s^* = \tilde{A}_1 \frac{1}{z} I_2(2\sqrt{z}) + \tilde{A}_2 \frac{1}{z} K_2(2\sqrt{z}), \quad (6.9.10)$$

где $I_2(2\sqrt{z})$, $K_2(2\sqrt{z})$ — бесселевы функции чисто мнимого аргумента второго порядка первого и второго рода; \tilde{A}_1 , \tilde{A}_2 — комплексные интегрирования.

Заменяя $2\sqrt{z}$ на $x\sqrt{i}$, где

$$x = 2\sqrt{\frac{c_0 \operatorname{ctg} \alpha}{h}} s, \quad (6.9.11)$$

* Здесь звездочкой отмечается общее решение однородного уравнения в отличие от общего решения соответствующего неоднородного уравнения.

и переходя от бесселевых функций второго порядка к бесселевым функциям нулевого порядка по формулам

$$\begin{aligned} I_2(x\sqrt{i}) &= I_0(x\sqrt{i}) + \frac{2i}{x} \cdot \frac{dI_0(x\sqrt{i})}{dx}; \\ K_2(x\sqrt{i}) &= K_0(x\sqrt{i}) + \frac{2i}{x} \cdot \frac{dK_0(x\sqrt{i})}{dx}, \end{aligned} \quad (6.9.12)$$

решение (6.9.10) представляем в виде

$$\tilde{N}_s^* = \tilde{C}_1 \tilde{N}_s^{(1)} + \tilde{C}_2 \tilde{N}_s^{(2)}, \quad (6.9.13)$$

где

$$\tilde{N}_s^{(1)} = \frac{1}{x^2} \left[I_0(x\sqrt{i}) + \frac{2i}{x} \cdot \frac{dI_0(x\sqrt{i})}{dx} \right]; \quad (6.9.14)$$

$$\tilde{N}_s^{(2)} = \frac{1}{x^2} \left[K_0(x\sqrt{i}) + \frac{2i}{x} \cdot \frac{dK_0(x\sqrt{i})}{dx} \right],$$

$$\tilde{C}_1 = -4i\tilde{A}_1, \quad \tilde{C}_2 = -4i\tilde{A}_2. \quad (6.9.15)$$

Частное решение неоднородного уравнения (6.9.3), соответствующее свободному члену B и нагрузке оболочки осевой силой $P = -2\pi C$, выражается так:

$$\tilde{N}_s^{(C)} = B \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} \right). \quad (6.9.16)$$

При свободном члене $B_j^{(e)} z^j$ частное решение этого уравнения, относящееся к чисто тепловой деформации ε_T , на основании формулы (4.9.18) имеет вид

$$\tilde{N}_s^{(e)} = B_j^{(e)} (j-1)! [3]_{j-1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{1}{n! [3]_n} z^n. \quad (6.9.17)$$

Заменяя в выражении (6.9.17) $B_j^{(e)}$ величиной $B_j^{(\kappa)}$, получаем частное решение $\tilde{N}_s^{(\kappa)}$, отвечающее чисто тепловой деформации \varkappa_T .

Для построения решений в форме (6.8.2) необходимо \tilde{N}_s^* , $\tilde{N}_s^{(C)}$, $\tilde{N}_s^{(e)}$, $\tilde{N}_s^{(\kappa)}$ разделить на действительные и мнимые части. Выполняя это для \tilde{N}_s^* , используем соотношения

$$I_0(x\sqrt{i}) = \operatorname{ber} x + i \operatorname{bei} x; \quad K_0(x\sqrt{i}) = \operatorname{ker} x + i \operatorname{kei} x, \quad (6.9.18)$$

где $\operatorname{ber} x$, $\operatorname{bei} x$, $\operatorname{ker} x$, $\operatorname{kei} x$ — функции Томсона, и вводим вместо комплексных постоянных интегрирования \tilde{C}_1 , \tilde{C}_2 действительные постоянные C_n ($n = 1, 2, 3, 4$) с помощью выражений *

$$\tilde{C}_1 = 4(C_1 + iC_2), \quad \tilde{C}_2 = \frac{8i}{\pi}(C_3 + iC_4). \quad (6.9.19)$$

* Комплексные выражения (6.9.19) выбраны так, чтобы можно было получить известные решения для усилий, моментов и перемещений, приведенные в работах [37, 61].

Получаем следующие четыре частных решения однородного уравнения, входящие в решения (6.8.2) для N_s и κ_θ :

$$\left. \begin{aligned} N_s^{(1)} &= \frac{Eh^2}{c_0} \kappa_\theta^{(2)} = \frac{4}{x^2} \left(\text{ber } x - \frac{2}{x} \cdot \frac{d \text{ber } x}{dx} \right); \\ N_s^{(2)} &= -\frac{Eh^2}{c_0} \kappa_\theta^{(1)} = \frac{4}{x^2} \left(-\text{bei } x - \frac{2}{x} \cdot \frac{d \text{ber } x}{dx} \right); \\ N_s^{(3)} &= \frac{Eh^2}{c_0} \kappa_\theta^{(4)} = \frac{8}{\pi x^2} \left(-\text{kei } x - \frac{2}{x} \cdot \frac{d \text{ker } x}{dx} \right); \\ N_s^{(4)} &= -\frac{Eh^2}{c_0} \kappa_\theta^{(3)} = \frac{8}{\pi x^2} \left(-\text{ker } x + \frac{2}{x} \cdot \frac{d \text{kei } x}{dx} \right). \end{aligned} \right\} (6.9.20)$$

Ход дальнейших вычислений излагается в § 6.8. В рассматриваемом случае формулы для N_θ , κ_s и u_z получают вид

$$N_\theta = N_s + s \frac{dN_s}{ds} = N_s + \frac{x}{2} \cdot \frac{dN_s}{dx}; \quad (6.9.21)$$

$$\kappa_s = \kappa_\theta + s \frac{d\kappa_\theta}{ds} = \kappa_\theta + \frac{x}{2} \cdot \frac{d\kappa_\theta}{dx}; \quad (6.9.22)$$

$$u_z = -\int \kappa_\theta s ds + \text{const} = -\frac{h^2 \text{tg}^2 \alpha}{8c_0^2} \int \kappa_\theta x^3 dx + \text{const}. \quad (6.9.23)$$

При определении частных решений однородных уравнений используем соотношения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \text{ber } x}{dx^2} &= -\text{bei } x - \frac{1}{x} \cdot \frac{d \text{ber } x}{dx}, & \frac{d^2 \text{bei } x}{dx^2} &= \text{ber } x - \frac{1}{x} \cdot \frac{d \text{bei } x}{dx}; \\ \frac{d^2 \text{ker } x}{dx^2} &= -\text{kei } x - \frac{1}{x} \cdot \frac{d \text{ker } x}{dx}, & \frac{d^2 \text{kei } x}{dx^2} &= \text{ker } x - \frac{1}{x} \cdot \frac{d \text{kei } x}{dx}; \end{aligned} \quad (6.9.24)$$

$$\begin{aligned} \int x \text{ber } x dx &= x \frac{d \text{ber } x}{dx} + \text{const}, & \int x \text{bei } x dx &= -x \frac{d \text{ber } x}{dx} + \text{const}; \\ \int x \text{ker } x dx &= x \frac{d \text{kei } x}{dx} + \text{const}, & \int x \text{kei } x dx &= -x \frac{d \text{ker } x}{dx} + \text{const}. \end{aligned} \quad (6.9.25)$$

Ниже приводим искомые частные решения.

1. Частные решения однородных уравнений:

$$N_s^{(1)} = \frac{4}{x^2} \left(\psi_1 + \frac{2}{x} \psi_2' \right), \quad N_s^{(2)} = \frac{4}{x^2} \left(\psi_2 - \frac{2}{x} \psi_1' \right); \quad (6.9.26)$$

$$\begin{aligned} N_s^{(3)} &= \frac{4}{x^2} \left(\psi_3 + \frac{2}{x} \psi_4' \right), & N_s^{(4)} &= \frac{4}{x^2} \left(\psi_4 - \frac{2}{x} \psi_3' \right); \\ N_\theta^{(1)} &= \frac{2}{x} \psi_1' - N_s^{(1)}, & N_\theta^{(2)} &= \frac{2}{x} \psi_2' - N_s^{(2)}; \\ N_\theta^{(3)} &= \frac{2}{x} \psi_3' - N_s^{(3)}, & N_\theta^{(4)} &= \frac{2}{x} \psi_4' - N_s^{(4)}; \end{aligned} \quad (6.9.27)$$

$$M_s^{(1)} = -\frac{h}{c_0}(\nu N_s^{(2)} + N_\theta^{(2)}); M_s^{(2)} = \frac{h}{c_0}(\nu N_s^{(1)} + N_\theta^{(1)});$$

$$M_s^{(3)} = -\frac{h}{c_0}(\nu N_s^{(4)} + N_\theta^{(4)}), M_s^{(4)} = \frac{h}{c_0}(\nu N_s^{(3)} + N_\theta^{(3)}); \quad (6.9.28)$$

$$M_\theta^{(1)} = -\frac{h}{c_0}(N_s^{(2)} + \nu N_\theta^{(2)}), M_\theta^{(2)} = \frac{h}{c_0}(N_s^{(1)} + \nu N_\theta^{(1)});$$

$$M_\theta^{(3)} = -\frac{h}{c_0}(N_s^{(4)} + \nu N_\theta^{(4)}), M_\theta^{(4)} = \frac{h}{c_0}(N_s^{(3)} + \nu N_\theta^{(3)}); \quad (6.9.29)$$

$$u_z^{(1)} = \frac{\text{tg}^2 \alpha}{Ec_0} \left(\frac{x}{2} \psi_1' - \psi_1 \right), u_z^{(2)} = \frac{\text{tg}^2 \alpha}{Ec_0} \left(\frac{x}{2} \psi_2' - \psi_2 \right);$$

$$u_z^{(3)} = \frac{\text{tg}^2 \alpha}{Ec_0} \left(\frac{x}{2} \psi_3' - \psi_3 \right), u_z^{(4)} = \frac{\text{tg}^2 \alpha}{Ec_0} \left(\frac{x}{2} \psi_4' - \psi_4 \right), \quad (6.9.30)$$

где

$$\psi_1 = \text{ber } x, \psi_2 = -\text{bei } x, \psi_3 = -\frac{2}{\pi} \text{kei } x, \psi_4 = -\frac{2}{\pi} \text{ker } x,$$

$$\psi_n' = \frac{d\psi_n}{dx} \quad (n = 1, 2, 3, 4). \quad (6.9.31)$$

2. Частные решения неоднородных уравнений, соответствующие осевой силе $P = -2\pi C$:

$$N_s^{(C)} = -\frac{4c_0}{h \sin^2 \alpha} \cdot \frac{C}{x^2}, N_\theta^{(C)} = 0, M_s^{(C)} = -M_\theta^{(C)} = \frac{16(1-\nu)}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{C}{x^4};$$

$$u_z^{(C)} = \frac{2C}{Eh \cos^2 \alpha} \ln x. \quad (6.9.32)$$

3. Частные решения неоднородных уравнений, соответствующие чисто тепловым деформациям:

$$\varepsilon_T = \varepsilon_j s^j, \kappa_T = \frac{1}{h} \mu_j s^j \quad (j = 0, 1, 2);$$

при $j = 0$

$$N_s^{(e)} = N_\theta^{(e)} = 0, M_s^{(e)} = M_\theta^{(e)} = 0, u_z^{(e)} = 0; \quad (6.9.33)$$

$$N_s^{(x)} = N_\theta^{(x)} = 0, M_s^{(x)} = M_\theta^{(x)} = -\frac{D_M(1+\nu)\mu_0}{h}, u_z^{(x)} = 0; \quad (6.9.34)$$

при $j = 1$

$$N_s^{(e)} = N_\theta^{(e)} = 0, \quad (6.9.35)$$

$$M_s^{(e)} = M_\theta^{(e)} = -D_M(1+\nu)\varepsilon_1 \text{tg } \alpha, u_z^{(e)} = \frac{h^2 \varepsilon_1 \text{tg}^3 \alpha}{32c_0^2} x^4;$$

$$N_s^{(x)} = N_\theta^{(x)} = -\frac{D_M(1+\nu)\mu_1 \text{tg } \alpha}{h}; \quad (6.9.36)$$

$$M_s^{(x)} = M_\theta^{(x)} = -\frac{D_M(1+\nu)\mu_1 \text{tg } \alpha}{4c_0} x^2, u_z^{(x)} = 0;$$

при $j = 2$

$$N_s^{(e)} = N_\theta^{(e)} = -6D_M \varepsilon_2 \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad M_s^{(e)} = -\frac{D_M h (2 + \nu) \varepsilon_2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2c_0} x^2; \\ M_\theta^{(e)} = -\frac{D_M h (1 + 2\nu) \varepsilon_2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2c_0} x^2, \quad u_z^{(e)} = \frac{h^3 \varepsilon_2 \operatorname{tg}^4 \alpha}{96c_0^3} x^6; \quad (6.9.37)$$

$$N_s^{(x)} = \frac{1}{2} N_\theta^{(x)} = -\frac{D_M (1 + \nu) \mu_2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2c_0} x^2; \\ M_s^{(x)} = M_\theta^{(x)} = \frac{6D_M h (1 + \nu) \mu_2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{c_0^2} \left(1 + \nu - \frac{1}{96} x^4\right); \\ u_z^{(x)} = -\frac{3h^3 (1 + \nu) \mu_2 \operatorname{tg}^4 \alpha}{16c_0^4} x^4. \quad (6.9.38)$$

Все частные решения — функции одной переменной $x = \sqrt{\frac{c_0 \operatorname{ctg} \alpha}{h}} s$, где $c_0 = \sqrt{12(1 - \nu^2)}$.

При расчете конических оболочек применяются таблицы частных решений. В работе [25] приводятся шестизначные таблицы (стр. 61—63, табл. 1—3) частных решений $N_s^{(n)}$, $N_\theta^{(n)}$, $u_z^{(n)}$ $E \operatorname{ctg}^2 \alpha$ ($n = 1, 2, 3, 4$) для интервала аргумента $0,2 \leq x \leq 10$ с шагом 0,2, вычисленных при коэффициенте Пуассона $\nu = 0,3$.

Пример 1. Определим тепловые напряжения в конической оболочке, находящейся в температурном поле

$$T - T_0 = T_{00} + T_2 s^2 \quad (T_{00}, T_2 = \operatorname{const}). \quad (6.9.39)$$

Это температурное поле вызывает чисто тепловые деформации

$$\varepsilon_T = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 s^2; \quad \kappa_T = 0, \quad (6.9.40)$$

где

$$\varepsilon_0 = \alpha_T T_{00}; \quad \varepsilon_2 = \alpha_T T_2.$$

Коническую оболочку рассмотрим при значениях геометрического параметра $\kappa = \frac{s_2}{h} \operatorname{ctg} \alpha = 1; 2; 5$ (рис. 45), соответствующих при $\frac{s_2}{h} = 10$ углам $\alpha = 0,4682 \pi \operatorname{rad}; 0,4372 \pi \operatorname{rad}; 0,3524 \pi \operatorname{rad}$. Пусть внутреннему контуру оболочки соответствует длина меридиана $s_1 = 0,2 s_2$.

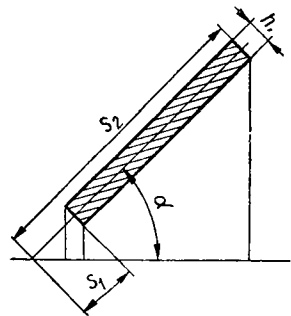


Рис. 45.

При чисто тепловых деформациях (6.9.40) и отсутствии осевой силы из частных решений (6.9.32) — (6.9.38) отличными от нуля будут только решения (6.9.37). В соответствии с решениями (6.8.2) и (6.8.5) общие решения для усилий N_s , N_θ , изгибающих моментов M_s , M_θ и перемещения

скорости работы деформации $\int_V \dot{W} dV$. Этот же результат можно получить, относя силы инерции $-\rho \ddot{u}_i$ к внешним объемным силам и вычисляя скорость работы внешних сил по формуле

$$\dot{L}_+ = \int_V (F_i - \rho \ddot{u}_i) \dot{u}_i dV + \int_\Omega f_i \dot{u}_i d\Omega = \int_V \dot{W} dV, \quad (1.2.30)$$

при этом

$$\dot{L}_+ = \dot{L} - \dot{K}. \quad (1.2.31)$$

§ 1.3. Основные понятия и положения классической термодинамики

Вспомним некоторые основные понятия и положения термодинамики [2, 35].

Всякое материальное тело, состоящее из большого числа частиц и взаимодействующее с окружающей средой, называется термодинамической системой. Термодинамическая система характеризуется рядом макроскопических величин, называемых термодинамическими параметрами.

Параметры системы разделяются на внешние, характеризующие внешние условия, в которых она находится, и внутренние, зависящие от движения и взаимодействия входящих в нее частиц. Внешние параметры являются функциями координат внешних тел, внутренние определяются положением и движением частиц системы и значениями внешних параметров. В этом смысле компоненты тензора деформации упругого тела следует считать внешними параметрами. К внутренним параметрам относятся плотность, внутренняя энергия и др.

Совокупность независимых термодинамических параметров определяет состояние системы. Другие параметры, определяемые полностью ее состоянием в рассматриваемый момент, являются функциями состояния.

Термодинамическая система, предоставленная самой себе при неизменных внешних условиях, приходит в состояние равновесия, характеризуемое постоянством всех параметров и отсутствием макроскопических движений. Такое состояние системы называется состоянием термодинамического равновесия. С понятием о термодинамическом равновесии связано понятие о температуре.

Две равновесные системы, приведенные в тепловой контакт, вообще не будут находиться в термодинамическом равновесии, но через некоторое время в результате обмена энергией они снова приходят в состояние термодинамического равновесия. Опыт показывает, что две системы, в каждой из которых при тепловом контакте с третьей термодинамическое равновесие не нарушается, будут в состоянии термодинамического равновесия и между собой независи-

u_z в рассматриваемом случае имеют вид:

$$N_s = \sum_{n=1}^4 C_n N_s^{(n)} + N_s^{(e)}, \quad N_\theta = \sum_{n=1}^4 C_n N_\theta^{(n)} + N_\theta^{(e)}; \quad (6.9.41)$$

$$M_s = \sum_{n=1}^4 C_n M_s^{(n)} + M_s^{(e)}, \quad M_\theta = \sum_{n=1}^4 C_n M_\theta^{(n)} + M_\theta^{(e)};$$

$$u_z = \sum_{n=1}^4 C_n u_z^{(n)} + u_z^{(e)} + C_5 \sin \alpha, \quad (6.9.42)$$

где частные решения $N_s^{(n)}, N_\theta^{(n)}, M_s^{(n)}, M_\theta^{(n)}, u_z^{(n)}$ ($n = 1, 2, 3, 4$) определяются выражениями (6.9.26) — (6.9.30), а частные решения $N_s^{(e)}, N_\theta^{(e)}, M_s^{(e)}, M_\theta^{(e)}, u_z^{(e)}$ на основании формул (6.9.37) — выражениями

$$N_s^{(e)} = N_\theta^{(e)} = -6D_M \varepsilon_2 \operatorname{tg}^2 \alpha = -\frac{6\varepsilon_2 s_2^2 E h}{c_0^2 \kappa^2}; \quad (6.9.43)$$

$$M_s^{(e)} = -\frac{D_M h (2 + \nu) \varepsilon_2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2c_0} x^2 = -\frac{(2 + \nu) \varepsilon_2 s_2^2 E h^2}{2c_0^3 \kappa^2} x^2;$$

$$M_\theta^{(e)} = -\frac{D_M h (1 + 2\nu) \varepsilon_2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2c_0} x^2 = -\frac{(1 + 2\nu) \varepsilon_2 s_2^2 E h^2}{2c_0^3 \kappa^2} x^2; \quad (6.9.44)$$

$$u_z^{(e)} = \frac{h^3 \varepsilon_2 \operatorname{tg}^4 \alpha}{96c_0^3} x^6 = \frac{\varepsilon_2 s_2^4}{96c_0^3 \kappa^4 h} x^6, \quad (6.9.45)$$

где

$$\kappa = \frac{s_2}{h} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Постоянные C_n ($n = 1, 2, 3, 4$) определяются из условий

$$N_s = 0, \quad M_s = 0 \quad \text{при } s = s_1 \quad \text{и } s = s_2, \quad (6.9.46)$$

а постоянная C_5 — из условия (§ 6.8)

$$u_z = u_z \sin \alpha - u_s \cos \alpha = 0 \quad \text{при } s = s_1. \quad (6.9.47)$$

В условии (6.9.47) перемещение u_s на основании формулы (6.8.4) определяется выражением

$$u_s = s \left(\frac{N_\theta - \nu N_s}{E h} + \varepsilon_T \right) - \operatorname{ctg} \alpha u_z = \left[\frac{x^2 s_2^2}{4c_0 \kappa^2 h} \left(\frac{N_\theta - \nu N_s}{E h} + \varepsilon_2 s^2 \right) - u_z \right] \operatorname{ctg} \alpha. \quad (6.9.48)$$

При выводе этого выражения полагаем $\varepsilon_0 = 0$, что равносильно переходу в температурном поле (6.9.39) от начальной температуры T_0 к новой начальной температуре $T'_0 = T_0 + T_{00}$.

Определив усилия и моменты, вычисляем по формулам (6.5.7) тепловые напряжения. Эти формулы для напряжений на наружной и внутренней поверхностях оболочки $\left(z = \pm \frac{h}{2} \right)$ принимают вид

$$(\sigma_s)_{z=\pm \frac{h}{2}} = \frac{N_s}{h} \pm \frac{6M_s}{h^2}, \quad (\sigma_\theta)_{z=\pm \frac{h}{2}} = \frac{N_\theta}{h} \pm \frac{6M_\theta}{h^2}. \quad (6.9.49)$$

Детали расчета рассмотрим для конической оболочки с параметром $\kappa = 1$. Переменная x на внутреннем ($s = s_1 = 0,2s_2$) и наружном ($s = s_2$) контурах оболочки на основании формулы (6.9.11) имеет при $\kappa = 1$ следующие значения: $x_1 = 2\sqrt{0,2c_0}$ и $x_2 = 2\sqrt{c_0}$. Для возможности применения таблиц частных решений, приведенных в работе [25], значения переменной x округляем до ближайших ее табличных значений: $x_1 = 1,6$ и $x_2 = 3,6$. По указанным таблицам находим значения частных решений $N_s^{(n)}, N_\theta^{(n)}, u_z^{(n)} E \operatorname{ctg}^2 \alpha$ ($n = 1, 2, 3, 4$) для контурных значений $x_1 = 1,6, x_2 = 3,6$ и промежуточных $x = 2; 2,4; 2,8; 3,2$, а значения частных решений $M_s^{(n)} \frac{c_0}{h}, M_\theta^{(n)} \frac{c_0}{h}$ и $N_s^{(e)} (\varepsilon_2 s_2^2 E h)^{-1}, N_\theta^{(e)} (\varepsilon_2 s_2^2 E h)^{-1}, M_s^{(e)} c_0 (\varepsilon_2 s_2^2 E h^2)^{-1}, M_\theta^{(e)} c_0 (\varepsilon_2 s_2^2 E h^2)^{-1}, u_z^{(e)} h (\varepsilon_2 s_2^4)^{-1}$ вычисляем для тех же значений x по формулам (6.9.28), (6.9.29) и (6.9.43) — (6.9.45), полагая коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$ (табл. 9—13). Используя первую и последнюю строки табл. 9

Таблица 9

x	$\frac{s}{s_2}$	$N_s^{(1)}$	$N_s^{(2)}$	$N_s^{(3)}$	$N_s^{(4)}$	$N_s^{(e)} (\varepsilon_2 s_2^2 E h)^{-1}$
1,6	0,20	-0,106303	-0,491476	0,605742	0,323383	-0,549451
2,0	0,30	-0,165279	-0,479225	0,196716	0,166458	-0,549451
2,4	0,44	-0,235863	-0,457044	0,0667573	0,0895076	-0,549451
2,8	0,59	-0,316257	-0,420820	0,0208340	0,0490201	-0,549451
3,2	0,77	-0,403546	-0,365940	0,00419203	0,0268808	-0,549451
3,6	1,00	-0,493348	-0,287636	-0,00144011	0,0145518	-0,549451

и 11, на основании условий (6.9.46) составляем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 & -0,106303C_1 - 0,491476C_2 + 0,605742 C_3 + 0,323383 C_4 - 0,549451\varepsilon_2 s_2^2 E h = 0; \\
 & 0,621892C_1 - 0,243769C_2 + 0,0313121 C_3 - 0,647555 C_4 - 0,269596\varepsilon_2 s_2^2 E h = 0; \\
 & -0,493348C_1 - 0,287636C_2 - 0,00144011C_3 + 0,0145518C_4 - 0,549451\varepsilon_2 s_2^2 E h = 0; \\
 & -0,0381992C_1 - 1,04257 C_2 + 0,0220022 C_3 - 0,0147445C_4 - 1,36483 \varepsilon_2 s_2^2 E h = 0.
 \end{aligned}$$

Решая эту систему, находим

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -0,368322 \varepsilon_2 s_2^2 E h; \\
 C_2 &= -1,292691 \varepsilon_2 s_2^2 E h; \\
 C_3 &= -0,0537098 \varepsilon_2 s_2^2 E h; \\
 C_4 &= -0,286024 \varepsilon_2 s_2^2 E h.
 \end{aligned}$$

Зная постоянные интегрирования C_n ($n = 1, 2, 3, 4$) и значения частных решений (табл. 9—12), по формулам (6.9.41) вычисляем усилия $N_s (\varepsilon_2 s_2^2 E h)^{-1}, N_\theta (\varepsilon_2 s_2^2 E h)^{-1}$ и моменты $M_s (\varepsilon_2 s_2^2 E h^2)^{-1}, M_\theta (\varepsilon_2 s_2^2 E h^2)^{-1}$, а затем по формулам (6.9.49) — соответствующие тепловые напряжения (σ_s) $z = \pm \frac{h}{2} (\varepsilon_2 s_2^2 E)^{-1}, (\sigma_\theta)$ $z = \pm \frac{h}{2} (\varepsilon_2 s_2^2 E)^{-1}$ (табл. 14). Используя первые строки табл. 9, 10, 13 и значе-

Таблица 10

x	$\frac{s}{s_2}$	$N_{\theta}^{(1)}$	$N_{\theta}^{(2)}$	$N_{\theta}^{(3)}$	$N_{\theta}^{(4)}$	$N_{\theta}^{(e)} (\varepsilon_2 s_2^2 E h)^{-1}$
1,6	0,20	-0,211878	-0,474449	-0,829278	-0,128327	-0,549451
2,0	0,30	-0,327788	-0,437789	-0,336650	-0,0985937	-0,549451
2,4	0,44	-0,463473	-0,371647	-0,152757	-0,0737448	-0,549451
2,8	0,59	-0,611786	-0,264155	-0,0721614	-0,0537488	-0,549451
3,2	0,77	-0,761216	-0,102762	-0,0335463	-0,0381650	-0,549451
3,6	1,00	-0,894570	0,124490	-0,0143125	-0,0263677	-0,549451

Таблица 11

x	$\frac{s}{s_2}$	$M_s^{(1)} \frac{c_0}{h}$	$M_s^{(2)} \frac{c_0}{h}$	$M_s^{(3)} \frac{c_0}{h}$	$M_s^{(4)} \frac{c_0}{h}$	$M_s^{(e)} c_0 (\varepsilon_2 s_2^2 E h^2)^{-1}$
1,6	0,20	0,621892	-0,243769	0,0313121	-0,647555	-0,269596
2,0	0,30	0,581556	-0,377372	0,0486563	-0,277635	-0,421244
2,4	0,44	0,508760	-0,534232	0,0468925	-0,132730	-0,606591
2,8	0,59	0,390401	-0,706663	0,0390428	-0,0659112	-0,825638
3,2	0,77	0,212544	-0,882280	0,0301008	-0,0322887	-1,07838
3,6	1,00	-0,0381992	-1,04257	0,0220022	-0,0147445	-1,36483

Таблица 12

x	$\frac{s}{s_2}$	$M_{\theta}^{(1)} \frac{c_0}{h}$	$M_{\theta}^{(2)} \frac{c_0}{h}$	$M_{\theta}^{(3)} \frac{c_0}{h}$	$M_{\theta}^{(4)} \frac{c_0}{h}$	$M_{\theta}^{(e)} c_0 (\varepsilon_2 s_2^2 E h^2)^{-1}$
1,6	0,20	0,633811	-0,169866	-0,284885	0,356959	-0,187546
2,0	0,30	0,610562	-0,263615	-0,136880	0,0957210	-0,293040
2,4	0,44	0,568538	-0,374905	-0,0673842	0,0209302	-0,421978
2,8	0,59	0,500066	-0,499793	-0,0328955	-0,00081442	-0,574359
3,2	0,77	0,396769	-0,631911	-0,0154313	-0,00587186	-0,750183
3,6	1,00	0,250289	-0,761719	-0,00664149	-0,00573386	-0,949451

Таблица 13

x	$\frac{s}{s_2}$	$u_z^{(1)} E \operatorname{ctg}^2 \alpha$	$u_z^{(2)} E \operatorname{ctg}^2 \alpha$	$u_z^{(3)} E \operatorname{ctg}^2 \alpha$	$u_z^{(4)} E \operatorname{ctg}^2 \alpha$	$u_z^{(e)} h (\varepsilon_2 s_2^4)^{-1}$
1,6	0,20	-0,333337	0,00439810	-0,101582	0,0427917	0,00484300
2,0	0,30	-0,376694	0,0167279	-0,0813384	0,0125100	0,0184746
2,4	0,44	-0,452738	0,0496786	-0,0617962	-0,00611062	0,0551648
2,8	0,59	-0,570149	0,124162	-0,0442316	-0,0163473	0,139105
3,2	0,77	-0,731545	0,272865	-0,0294028	-0,0206831	0,309952
3,6	1,00	-0,926468	0,542063	-0,0176086	-0,0210858	0,628362

ния постоянных интегрирования C_n ($n = 1, 2, 3, 4$), по формулам (6.9.42) и (6.9.48) вычисляем перемещения

$$(u_2)_{s=s_1} = 0,115149 \frac{\varepsilon_2 s_2^4}{h} + C_5 \sin \alpha;$$

$$(u_s)_{s=s_1} = -0,0064184 \frac{\varepsilon_2 s_2^4}{h} - C_5 \cos \alpha.$$

Для дальнейшего расчета необходимо кроме параметра χ выбрать определенное отношение $\frac{s_2}{h}$. Полагая $\frac{s_2}{h} = 10$, что соответствует при $\chi = 1$ $\sin \alpha = 0,995037$ и $\cos \alpha = 0,0995037$, и удовлетворяя условию (6.9.47), определяем $C_5 =$

$$= -0,11520 \frac{\varepsilon_2 s_2^4}{h}.$$

Вычисленные при этом

значении постоянной C_5 перемещения $u_2 h (\varepsilon_2 s_2^4)^{-1}$ приведены в табл. 14. Аналогичным образом проводится расчет для конических оболочек с параметрами $\chi = 2$ и $\chi = 5$. Результаты расчета представлены на рис. 46 в виде кривых распределения тепловых меридиональных $\sigma_s \times (\varepsilon_2 s_2^2 E)^{-1}$ и окружных $\sigma_\theta (\varepsilon_2 s_2^2 E)^{-1}$ напряжений и перемещений $u_2 h (\varepsilon_2 s_2^4)^{-1}$. Распределение меридиональных напряжений показано штриховыми, а окружных напряжений и перемещений — сплошными линиями. На левой стороне рисунка представлены кривые распределения напряжений при $z = \frac{h}{2}$, а на правой — при $z = -\frac{h}{2}$.

На этом же рисунке приводятся кривые распределения тепловых меридиональных и окружных напряжений для предельного случая конической оболочки — круглой пластины, у которой $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\chi = 0$.

Из рис. 46 видно, что при изменении температуры конической оболочки только вдоль меридиана по закону (6.9.39) растяжение ее в отличие от растяжения соответствующей круглой пластины сопровождается изгибом. Наибольший эффект изгиба проявляется для пологих конических оболочек в интервале изменения χ от нуля до единицы. В этом интервале тепловые меридиональные и окружные напряжения в центральной части оболочки на поверхности $z = \frac{h}{2}$ изменяют знак и становятся вместо растягивающих сжима-

Таблица 14

χ	$\frac{s}{s_2}$	$\Gamma \left(\chi \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{c}} s_2^* z \right) s_N$	$\Gamma \left(\chi \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{c}} s_2^* z \right) \theta_N$	$\Gamma \left(\chi \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{c}} s_2^* z \right) s_W$	$\Gamma \left(\chi \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{c}} s_2^* z \right) \theta_W$	$\sigma_s (\varepsilon_2 s_2^2 E)^{-1}$		$\sigma_\theta (\varepsilon_2 s_2^2 E)^{-1}$		$\Gamma \left(\frac{\varepsilon_2 s_2^4}{h} \right) u_2 h$
						$z = \frac{h}{2}$	$z = -\frac{h}{2}$	$z = \frac{h}{2}$	$z = -\frac{h}{2}$	
1,6	0,20	0	0,22315	0	-0,087215	0	0	-0,3001	0,7464	0,00052
2,0	0,30	0,072738	0,18349	-0,021432	-0,059669	-0,05585	0,2013	-0,1745	0,5415	0,02176
2,4	0,44	0,099052	0,13098	-0,020558	-0,045124	-0,02430	0,2224	-0,1398	0,4017	0,04814
2,8	0,59	0,095884	0,036603	-0,011856	-0,033429	0,02475	0,1670	-0,1640	0,2372	0,08102
3,2	0,77	0,064318	-0,12352	-0,002583	-0,023285	0,04882	0,07982	-0,2632	0,01619	0,11953
3,6	1,00	0	-0,37258	0	-0,016636	0	0	-0,4724	-0,2728	0,16123

ющими, значительно увеличиваясь на поверхности $z = -\frac{h}{2}$. Так, на краю центрального отверстия ($s = s_1 = 0,2s_2$) при $\kappa = 0$ (круглая пластина) $(\sigma_\theta)_{s=s_1, z = \pm \frac{h}{2}} = 0,48e_2s_2^2E$, а при $\kappa = 1$ имеем $(\sigma_\theta)_{s=s_1, z = \frac{h}{2}} = -0,30e_2s_2^2E$ и $(\sigma_\theta)_{s=s_1, z = -\frac{h}{2}} = 0,75e_2s_2^2E$. При дальнейшем увеличении значения κ растягивающее окружное напряжение на краю отверстия уменьшается, а сжимающее сначала увеличивается, достигая при $\kappa = 2$ значения $(\sigma_\theta)_{s=s_1, z = \frac{h}{2}} = -0,60e_2s_2^2E$,

а затем уменьшается. Вообще, при $\kappa > 2$ тепловые напряжения как в центральной, так и в периферийной части оболочки уменьшаются.

При температуре, возрастающей к наружному контуру ($e_2 > 0$), возникает перемещение u_z в направлении внешней нормали к срединной поверхности оболочки. С увеличением значения κ оно сначала возрастает, достигая наибольшей величины при $\kappa = 2$, а затем опять уменьшается.

Пример 2. Пусть коническая оболочка с относительными геометрическими размерами и граничными условиями, указанными в примере 1, подвергается действию температурного поля

$$T - T_0 = T_{00} + T_{01}z \quad (T_{00}, T_{01} = \text{const}). \quad (6.9.50)$$

В такой оболочке возникают чисто тепловые деформации

$$\epsilon_T = \epsilon_0; \quad \kappa_T = \frac{\mu_0}{h}, \quad (6.9.51)$$

где $\epsilon_0 = \alpha_T T_{00}$; $\mu_0 = \alpha_T T_{01}h$.

Для расчета тепловых напряжений σ_s и σ_θ и перемещения u_z применяем решения (6.9.41) и (6.9.42), в которых частные решения $N_s^{(e)}$, $N_\theta^{(e)}$, $M_s^{(e)}$, $M_\theta^{(e)}$, $u_z^{(e)}$ заменяем на основании (6.9.34) соответствующими частными решениями $N_s^{(\kappa)} = N_\theta^{(\kappa)} = 0$, $M_s^{(\kappa)} = M_\theta^{(\kappa)} = -\frac{(1+\nu)\mu_0 E h^2}{c_0^2} u_z^{(\kappa)} = 0$. Расчет проводим для конической оболочки с параметрами $\kappa = 1; 2; 5$ в такой же последовательности, как и в примере 1.

При вычислении перемещений u_z и u_s и удовлетворении граничного условия (6.9.47) принимаем $\epsilon_0 = 0$ и $\frac{s_2}{h} = 10$ и полагаем $u_z \frac{\text{ctg}^2 \alpha}{\mu_0 h} = u_z \frac{\kappa^2 h}{\mu_0 s_2^2}$. Результаты расчета приводятся на рис. 47 в виде кривых распределения тепловых меридиональных напряжений $\sigma_s (\mu_0 E)^{-1}$ (штриховые линии) и окружных напряжений $\sigma_\theta (\mu_0 E)^{-1}$ и перемещений $u_z h (\mu_0 s_2^2)^{-1}$ (сплошные линии).

Распределение напряжений для поверхности оболочки $z = \frac{h}{2}$ указано на левой

стороне рисунка и для $z = -\frac{h}{2}$ — на правой.

В круглой пластине ($\kappa = 0$) при чисто тепловых деформациях (6.9.51), как известно, тепловые напряжения не возникают, а прогиб равен

$$u_z = -\frac{1}{2} (\rho^2 - \rho_1^2) \frac{\mu_0 s_2^2}{h},$$

где

$$\rho = \frac{s}{s_2}, \quad \rho_1 = \frac{s_1}{s_2}.$$

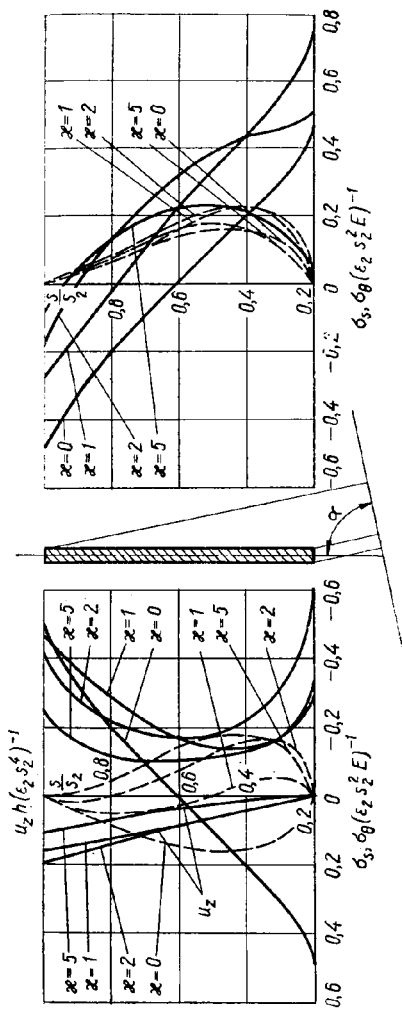


Рис. 46

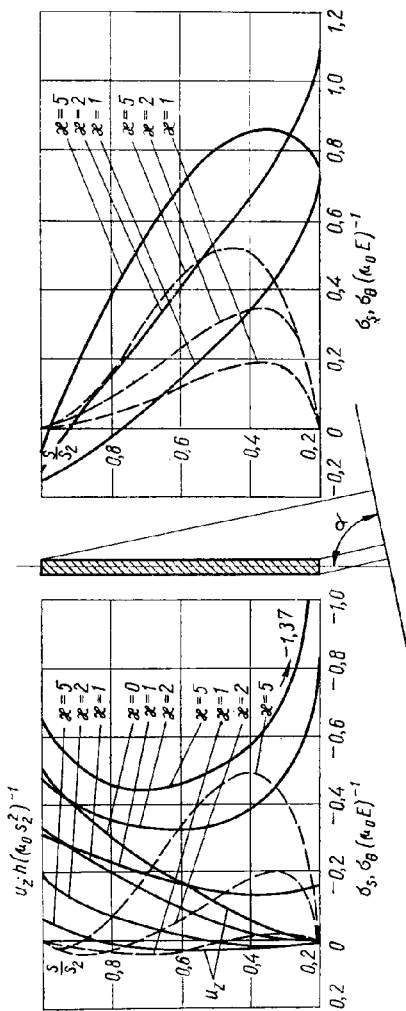


Рис. 47.

Из рис. 47 видно, что в конической оболочке в отличие от круглой пластины возникают тепловые напряжения, возрастающие по мере увеличения параметра κ . Тепловые окружные напряжения на поверхности оболочки $z = \frac{h}{2}$ являются сжимающими, а на поверхности $z = -\frac{h}{2}$ — в основном растягивающими. Следует отметить существенное увеличение окружных напряжений на краю центрального отверстия. Здесь при $\kappa = 5$ окружное напряжение достигает значения $(\sigma_\theta)_{s=s_1, z=\frac{h}{2}} = -1,37\mu_0 E$, а при $\kappa = 2$ — значения $(\sigma_\theta)_{s=s_1, z=-\frac{h}{2}} = 1,08\mu_0 E$.

Перемещение $u_z h (\mu_0 s_0^2)^{-1}$ с увеличением параметра κ уменьшается и при $\kappa = 5$ становится пренебрежимо малым.

§ 6.10. Тепловые напряжения в сферической оболочке

Пусть в сферической оболочке под действием осесимметричного температурного поля возникают чисто тепловые деформации, которые можно аппроксимировать тригонометрическими суммами, состоящими из членов вида *

$$\varepsilon_T = \varepsilon_k \cos k\varphi; \quad \varkappa_T = \frac{\mu_k}{h} \cos k\varphi \quad (\varepsilon_k, \mu_k = \text{const}; \quad k = 0, 1, 2, \dots), \quad (6.10.1)$$

где φ — угол между радиусом и осью вращения (см. рис. 43, б).

Для определения тепловых напряжений в оболочке необходимо найти решение уравнения (6.7.14) в форме (6.8.1). Это уравнение при чисто тепловых деформациях (6.10.1) и новой переменной

$$x = \cos \varphi \quad (6.10.2)$$

принимает вид

$$(1-x^2) \frac{d^2 \tilde{N}_s}{dx^2} - \frac{2(1+x^2)}{x} \cdot \frac{d\tilde{N}_s}{dx} + \left(\frac{2}{x^2} + 1 - i\mu \right) \tilde{N}_s + \frac{C}{r_0} \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1-i\mu}{1-x^2} \right) - x \frac{d}{dx} [(a_k + b_k) \cos k\varphi] = 0, \quad (6.10.3)$$

где

$$\tilde{N}_s = N_s + \frac{D_M}{r_0} (v + i\mu) \varkappa_\theta; \quad (6.10.4)$$

$$a_k = E h \varepsilon_k; \quad b_k = -(1+v)(v+i\mu) \frac{D_M}{r_0} \cdot \frac{\mu_k}{h}. \quad (6.10.5)$$

* Это равносильно разложению функции $T - T_0$ вдоль меридиана в ряд Фурье по косинусам в промежутке $(0, \pi)$. Так как функция обычно задается в промежутке (φ_1, φ_2) , то для такого разложения необходимо ее достроить в промежутках $(0, \varphi_1)$ и (φ_2, π) , где φ_1 и φ_2 — значения угла φ соответственно для внутреннего и наружного контуров оболочки.

Выполняя подстановки

$$\tilde{N}_s = x\tilde{N}; \quad \xi = \frac{1-x}{2}, \quad (6.10.6)$$

получаем однородное уравнение, соответствующее уравнению (6.10.3), в виде

$$\xi(1-\xi) \frac{d^2 \tilde{N}}{d\xi^2} + [c - (a+b+1)\xi] \frac{d\tilde{N}}{d\xi} - ab\tilde{N} = 0, \quad (6.10.7)$$

где

$$a, b = \frac{3}{2} \pm \delta; \quad \delta = \frac{1}{2} \sqrt{5 - 4i\mu}; \quad c = 2. \quad (6.10.8)$$

Это уравнение является гипергеометрическим. В качестве первого его частного решения выбираем частное решение в окрестности особой точки $\xi = 0$, а в качестве второго — частное решение в окрестности особой точки $\xi = 1$. В соответствии с теорией гипергеометрических функций эти частные решения следующие (§ 4.9):

$$\begin{aligned} \tilde{N}^{(1)} &= F(a, b; c; \xi); \\ \tilde{N}^{(2)} &= F(a, b; a+b+1-c; 1-\xi), \end{aligned} \quad (6.10.9)$$

где $F(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция, определяемая рядом (4.9.4).

Учитывая подстановки (6.10.6) и значения параметров (6.10.8), находим следующие частные решения однородного уравнения, соответствующего уравнению (6.10.3):

$$\begin{aligned} \tilde{N}_s^{(1)} &= \cos \varphi F\left(\frac{3}{2} + \delta, \frac{3}{2} - \delta; 2; \xi\right), \\ \tilde{N}_s^{(2)} &= \cos \varphi F\left(\frac{3}{2} + \delta, \frac{3}{2} - \delta; 2; 1 - \xi\right). \end{aligned} \quad (6.10.10)$$

Используя формулу (4.9.11) и выделяя таким образом особенности в решениях (6.10.10), получаем их окончательные выражения:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_s^{(1)} &= \frac{1-2\xi}{1-\xi} F\left(\frac{1}{2} + \delta, \frac{1}{2} - \delta; 2; \xi\right); \\ \tilde{N}_s^{(2)} &= \frac{1-2\xi}{\xi} F\left(\frac{1}{2} + \delta, \frac{1}{2} - \delta; 2; 1 - \xi\right). \end{aligned} \quad (6.10.11)$$

Частное решение $\tilde{N}_s^{(1)}$ имеет особенность в точке $\xi = 1$, а частное решение $\tilde{N}_s^{(2)}$ — в точке $\xi = 0$. Для расчета замкнутой сферической оболочки с вершиной в точке $\xi = 0$ или в точке $\xi = 1$ следует пользоваться частными решениями соответственно $\tilde{N}_s^{(1)}$ или $\tilde{N}_s^{(2)}$.

Частное решение $\tilde{N}_s^{(C)}$ неоднородного уравнения (6.10.3), как легко проверить подстановкой, имеет выражение

$$\tilde{N}_s^{(C)} = - \frac{C}{r_0(1-x^2)}. \quad (6.10.12)$$

Переходя к определению частных решений $\tilde{N}_s^{(e)}$ и $\tilde{N}_s^{(\kappa)}$, величины $a_k \cos k\varphi$ и $b_k \cos k\varphi$ в уравнении (6.10.3) с помощью формулы для косинусов кратных углов и подстановки $\cos \varphi = 1 - 2\xi$ представим следующими выражениями:

$$a_k \cos k\varphi = \sum_{m=0}^k a_{km} \xi^m; \quad b_k \cos k\varphi = \sum_{m=0}^k b_{km} \xi^m. \quad (6.10.13)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (6.10.3) и заменяя в нем функцию и аргумент по формулам (6.10.6), получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \xi(1-\xi) \frac{d^2 \tilde{N}}{d\xi^2} + [c - (a+b+1)\xi] \frac{d\tilde{N}}{d\xi} - ab\tilde{N} + \\ + \sum_{m=1}^k (B_m^{(e)} + B_m^{(\kappa)}) \xi^{m-1} = 0, \end{aligned} \quad (6.10.14)$$

где

$$B_m^{(e)} = \frac{ma_{km}}{2}; \quad B_m^{(\kappa)} = \frac{mb_{km}}{2}. \quad (6.10.15)$$

Частное решение этого уравнения при свободном члене вида $B_m \xi^{m-1}$ по форме совпадает с решением (4.9.18).

Принимая во внимание выражение для этого решения и подстановку (6.10.6), находим частное решение уравнения (6.10.14), соответствующее чисто тепловой деформации e_T :

$$\tilde{N}_s^{(e)} = (1-2\xi) \sum_{m=1}^k B_m^{(e)} \frac{(m-1)! [c]_{m-1}}{[a]_m [b]_m} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{[a]_n [b]_n}{n! [c]_n} \xi^n. \quad (6.10.16)$$

Заменяя в этом решении $B_m^{(e)}$ на $B_m^{(\kappa)}$, получаем частное решение $\tilde{N}_s^{(\kappa)}$, соответствующее чисто тепловой деформации κ_T .

Переходим к определению частных решений в вещественных функциях.

Для определения частных решений однородных уравнений полагаем

$$\tilde{C}_1 = C_1 + iC_2, \quad \tilde{C}_2 = C_3 + iC_4; \quad (6.10.17)$$

$$F\left(\frac{1}{2} + \delta, \frac{1}{2} - \delta; c; \xi\right) = \varphi_c(\xi) + i\psi_c(\xi) \quad (c = 2, 3), \quad (6.10.18)$$

где C_n ($n = 1, 2, 3, 4$) — действительные постоянные; $\varphi_c(\xi)$, $\psi_c(\xi)$ ($c = 2, 3$) — вещественные функции. Функции $\varphi_c(\xi)$, $\psi_c(\xi)$ определяются бесконечными рядами

$$\varphi_c(\xi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{nc} \xi^n, \quad \psi_c(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{nc} \xi^n, \quad (6.10.19)$$

коэффициенты которых находятся с помощью рекуррентных формул

$$a_{nc} = \frac{n(n-1)-1}{n(n+c-1)} a_{(n-1)c} - \frac{\mu}{n(n+c-1)} b_{(n-1)c}; \quad (6.10.20)$$

$$b_{nc} = \frac{n(n-1)-1}{n(n+c-1)} b_{(n-1)c} + \frac{\mu}{n(n+c-1)} a_{(n-1)c}$$

$$(n = 1, 2, \dots; c = 2, 3; a_{0c} = 1, b_{0c} = 0).$$

Принимая во внимание выражения (6.10.11), (6.10.17), (6.10.18) и разделяя

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 \tilde{N}_s^{(1)} &= C_1 N_s^{(1)} + C_2 N_s^{(2)} + \frac{D_M}{r_0} (\nu + i\mu) (C_1 \kappa_\theta^{(1)} + C_2 \kappa_\theta^{(2)}) = \\ &= \frac{1-2\xi}{1-\xi} (C_1 + iC_2) [\varphi_2(\xi) + i\psi_2(\xi)] \end{aligned}$$

на действительную и мнимую части, находим

$$N_s^{(1)} = \frac{1-2\xi}{1-\xi} \left[\varphi_2(\xi) - \frac{\nu}{\mu} \psi_2(\xi) \right],$$

$$N_s^{(2)} = -\frac{1-2\xi}{1-\xi} \left[\psi_2(\xi) + \frac{\nu}{\mu} \varphi_2(\xi) \right];$$

$$\kappa_\theta^{(1)} = \frac{1-2\xi}{1-\xi} \psi_2(\xi) \frac{r_0}{\mu D_M}; \quad \kappa_\theta^{(2)} = \frac{1-2\xi}{1-\xi} \varphi_2(\xi) \frac{r_0}{\mu D_M}.$$

Аналогичным образом находим частные решения $N_s^{(3)}$, $N_s^{(4)}$ и $\kappa_\theta^{(3)}$, $\kappa_\theta^{(4)}$. Из решения (6.10.12) получаем

$$N_s^{(c)} = -\frac{C}{r_0 \sin^2 \varphi}, \quad \kappa_\theta^{(c)} = 0.$$

При определенном значении k легко определяются также решения, соответствующие чисто тепловым деформациям (6.10.1). Полагая, например, $k = 1$, на основании выражения (6.10.16) получаем

$$\tilde{N}_s^{(e)} = -\cos \varphi \frac{1-i\mu}{1+\mu^2} E h \varepsilon_1,$$

$$\tilde{N}_s^{(\kappa)} = \cos \varphi \frac{(1+\nu)(\nu+i\mu)(1-i\mu)}{1+\mu^2} \cdot \frac{D_M}{r_0} \cdot \frac{\mu_1}{h}$$

и

$$N_s^{(e)} = -\cos \varphi \frac{1+\nu}{1+\mu^2} E h \varepsilon_1, \quad \kappa_\theta^{(e)} = \cos \varphi \frac{c_0^2}{1+\mu^2} \cdot \frac{r_0}{h^2} \varepsilon_1;$$

$$N_s^{(\kappa)} = \cos \varphi \frac{(1+\nu)(\nu^2+\mu^2)}{1+\mu^2} \cdot \frac{D_M}{r_0} \cdot \frac{\mu_1}{h}, \quad \kappa_\theta^{(\kappa)} = \cos \varphi \frac{1-\nu^2}{1+\mu^2} \cdot \frac{\mu_1}{h}.$$

Частные решения для N_θ и κ_s определяем по формулам

$$N_\theta = \frac{d(N_s \operatorname{tg} \varphi)}{d\varphi} + \frac{C}{r_0 \cos^2 \varphi} = N_s + \sin \varphi \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{N_s}{\cos \varphi} \right) + \frac{C}{r_0 \cos^2 \varphi}; \quad (6.10.21)$$

$$\kappa_s = \frac{d}{d\varphi} (\kappa_\theta \operatorname{tg} \varphi) = \kappa_\theta + \sin \varphi \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\kappa_\theta}{\cos \varphi} \right), \quad (6.10.22)$$

вытекающим в случае сферической оболочки ($ds = r_0 d\varphi$, $R_1 = r_0$, $r = r_0 \sin \varphi$) из первых уравнений систем (6.7.2) и (6.7.5), а частные решения для M_s и M_θ находим по формулам (6.5.5).

При определении частных решений однородных уравнений $N_\theta^{(n)}$, $\kappa_s^{(n)}$, ($n = 1, 2, 3, 4$) используем соотношения

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \frac{\varphi_2(\xi)}{1-\xi} &= \frac{1}{2(1-\xi)^2} [\varphi_3(\xi) - \mu \psi_3(\xi)], \\ \frac{d}{d\xi} \frac{\psi_2(\xi)}{1-\xi} &= \frac{1}{2(1-\xi)^2} [\psi_3(\xi) + \mu \varphi_3(\xi)], \end{aligned} \quad (6.10.23)$$

в которых функции $\varphi_c(\xi)$, $\psi_c(\xi)$ ($c = 2, 3$) имеют выражения (6.10.19). Эти соотношения выводим следующим образом.

В результате дифференцирования гипергеометрической функции $F\left(\frac{3}{2} + \delta, \frac{3}{2} - \delta; 2; \xi\right)$ получаем равенство $\frac{d}{d\xi} F\left(\frac{3}{2} + \delta, \frac{3}{2} - \delta; 2; \xi\right) = \frac{1+i\mu}{2} F\left(\frac{5}{2} + \delta, \frac{5}{2} - \delta; 3; \xi\right)$. Преобразуя обе части этого равенства по формуле (4.9.11), составляем соотношение

$\frac{d}{d\xi} \frac{F\left(\frac{1}{2} + \delta, \frac{1}{2} - \delta; 2; \xi\right)}{1-\xi} = \frac{1+i\mu}{2} \cdot \frac{1}{(1-\xi)^2} F\left(\frac{1}{2} + \delta, \frac{1}{2} - \delta; 3; \xi\right)$. Разделяя полученное соотношение на действительную и мнимую части и принимая во внимание выражение (6.10.18), получаем соотношения (6.10.23).

Рассмотрим в качестве примера определение частных решений $N_\theta^{(1)}$ и $\kappa_s^{(1)}$. Используя формулы (6.10.21), (6.10.22) и соотношения (6.10.23), находим

$$\begin{aligned} N_\theta^{(1)} &= N_s^{(1)} + \sin \varphi \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{N_s^{(1)}}{\cos \varphi} \right) = N_s^{(1)} + \frac{\sin^2 \varphi}{2} \cdot \frac{d}{d\xi} \left(\frac{N_s^{(1)}}{\cos \varphi} \right) = \\ &= N_s^{(1)} + 2\xi(1-\xi) \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\varphi_2(\xi)}{1-\xi} - \frac{\nu}{\mu} \cdot \frac{\psi_2(\xi)}{1-\xi} \right] = \\ &= N_s^{(1)} + \frac{\xi}{1-\xi} \left[(1-\nu) \varphi_3(\xi) - \left(\mu + \frac{\nu}{\mu} \right) \psi_3(\xi) \right]; \\ \kappa_s^{(1)} &= \kappa_\theta^{(1)} + \frac{\sin^2 \varphi}{2} \cdot \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\kappa_\theta^{(1)}}{\cos \varphi} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \kappa_{\theta}^{(1)} + 2\xi(1-\xi) \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\psi_2(\xi)}{1-\xi} \right] \frac{r_0}{\mu D_M} = \\
&= \kappa_{\theta}^{(1)} + \frac{\xi}{1-\xi} [\psi_3(\xi) + \mu\varphi_3(\xi)] \frac{r_0}{\mu D_M}.
\end{aligned}$$

Переходим к выводу формул для перемещений. В случае сферической оболочки уравнение (6.8.3) с помощью второго уравнения (6.7.5) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{u_z}{\cos \varphi} \right) &= - \frac{r_0^2 \operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} \left(\kappa_{\theta} - \frac{\varepsilon_{\theta}}{r_0} \right) = \\
&= \frac{r_0}{\cos \varphi} \left[\frac{d\varepsilon_{\theta}}{d\varphi} - (\varepsilon_s - \varepsilon_{\theta}) \operatorname{ctg} \varphi + \varepsilon_{\theta} \operatorname{tg} \varphi \right].
\end{aligned}$$

Заменяя деформации усилиями по формулам (6.5.2), получаем

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{u_z}{\cos \varphi} \right) &= \frac{r_0}{\cos \varphi} \left\{ \frac{1}{Eh} \left[\frac{d(N_{\theta} - \nu N_s)}{d\varphi} - (1 + \nu)(N_s - N_{\theta}) \operatorname{ctg} \varphi + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (N_{\theta} - \nu N_s) \operatorname{tg} \varphi \right] + \frac{d\varepsilon_T}{d\varphi} + \varepsilon_T \operatorname{tg} \varphi \right\}.
\end{aligned}$$

Подставляя в соответствии с формулой (6.10.21) вместо $(1 + \nu) \times N_{\theta} \operatorname{ctg} \varphi$ величину $(1 + \nu) \left(\frac{N_s}{\sin \varphi \cos \varphi} + \frac{dN_s}{d\varphi} + \frac{C}{r_0 \sin \varphi \cos \varphi} \right)$ и учитывая тождество $\frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left(1 + \cos \varphi \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) + \operatorname{tg} \varphi \left(1 + \cos \varphi \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)$, находим

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{u_z}{\cos \varphi} \right) &= \frac{r_0}{Eh} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{N_s + N_{\theta}}{\cos \varphi} \right) + \\
&+ \frac{(1 + \nu)C}{Eh} \cdot \frac{d}{d\varphi} \frac{1 + \cos \varphi \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi} + r_0 \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\varepsilon_T}{\cos \varphi} \right)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
u_z &= \frac{r_0}{Eh} (N_s + N_{\theta}) + \\
&+ \frac{(1 + \nu)C}{Eh} \left(1 + \cos \varphi \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) + r_0 \varepsilon_T + C_5 \cos \varphi. \quad (6.10.24)
\end{aligned}$$

Зная величину u_z , по формуле (6.8.4) находим перемещение u_s :

$$u_s = - \frac{(1 + \nu) r_0 \operatorname{tg} \varphi}{Eh} \left[N_s + \frac{C}{r_0} \left(1 + \cos \varphi \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right] - C_5 \sin \varphi. \quad (6.10.25)$$

Ниже приводим необходимые для определения тепловых напряжений и перемещений частные решения, которые входят в общие решения вида (6.8.2) и (6.8.5):

1. Частные решения однородных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} N_s^{(1)} &= \frac{1-2\xi}{1-\xi} \left[\varphi_2(\xi) - \frac{\nu}{\mu} \psi_2(\xi) \right]; \\ N_s^{(2)} &= -\frac{1-2\xi}{1-\xi} \left[\psi_2(\xi) + \frac{\nu}{\mu} \varphi_2(\xi) \right]; \\ N_s^{(3)} &= \frac{1-2\xi}{\xi} \left[\varphi_2(1-\xi) - \frac{\nu}{\mu} \psi_2(1-\xi) \right]; \\ N_s^{(4)} &= -\frac{1-2\xi}{\xi} \left[\psi_2(1-\xi) + \frac{\nu}{\mu} \varphi_2(1-\xi) \right]; \end{aligned} \right\} (6.10.26)$$

$$\left. \begin{aligned} N_\theta^{(1)} &= N_s^{(1)} + \frac{\xi}{1-\xi} \left[(1-\nu) \varphi_3(\xi) - \left(\mu + \frac{\nu}{\mu} \right) \psi_3(\xi) \right]; \\ N_\theta^{(2)} &= N_s^{(2)} - \frac{\xi}{1-\xi} \left[(1-\nu) \psi_3(\xi) + \left(\mu + \frac{\nu}{\mu} \right) \varphi_3(\xi) \right]; \\ N_\theta^{(3)} &= N_s^{(3)} - \\ &- \frac{1-\xi}{\xi} \left[(1-\nu) \varphi_3(1-\xi) - \left(\mu + \frac{\nu}{\mu} \right) \psi_3(1-\xi) \right]; \\ N_\theta^{(4)} &= N_s^{(4)} + \\ &+ \frac{1-\xi}{\xi} \left[(1-\nu) \psi_3(1-\xi) + \left(\mu + \frac{\nu}{\mu} \right) \varphi_3(1-\xi) \right]; \end{aligned} \right\} (6.10.27)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_s^{(1)} &= \kappa_\theta^{(1)} + \frac{\xi}{1-\xi} [\psi_3(\xi) + \mu\varphi_3(\xi)] \frac{r_0}{\mu D_M}; \\ \kappa_s^{(2)} &= \kappa_\theta^{(2)} + \frac{\xi}{1-\xi} [\varphi_3(\xi) - \mu\psi_3(\xi)] \frac{r_0}{\mu D_M}; \\ \kappa_s^{(3)} &= \kappa_\theta^{(3)} - \frac{1-\xi}{\xi} [\psi_3(1-\xi) + \mu\varphi_3(1-\xi)] \frac{r_0}{\mu D_M}; \\ \kappa_s^{(4)} &= \kappa_\theta^{(4)} - \frac{1-\xi}{\xi} [\varphi_3(1-\xi) - \mu\psi_3(1-\xi)] \frac{r_0}{\mu D_M}; \end{aligned} \right\} (6.10.28)$$

$$\begin{aligned} \kappa_\theta^{(1)} &= \frac{1-2\xi}{1-\xi} \psi_2(\xi) \frac{r_0}{\mu D_M}, \quad \kappa_\theta^{(2)} = \frac{1-2\xi}{1-\xi} \varphi_2(\xi) \frac{r_0}{\mu D_M}; \\ \kappa_\theta^{(3)} &= \frac{1-2\xi}{\xi} \psi_2(1-\xi) \frac{r_0}{\mu D_M}, \quad \kappa_\theta^{(4)} = \frac{1-2\xi}{\xi} \varphi_2(1-\xi) \frac{r_0}{\mu D_M}; \end{aligned} \quad (6.10.29)$$

$$M_s^{(n)} = D_M(\kappa_s^{(n)} + \nu\kappa_\theta^{(n)}) \quad (n = 1, 2, 3, 4); \quad (6.10.30)$$

$$M_\theta^{(n)} = D_M(\nu\kappa_s^{(n)} + \kappa_\theta^{(n)}) \quad (n = 1, 2, 3, 4); \quad (6.10.31)$$

$$u_z^{(n)} = (N_s^{(n)} + N_\theta^{(n)}) \frac{r_0}{Eh} \quad (n = 1, 2, 3, 4); \quad (6.10.32)$$

$$u_s^{(n)} = -2(1+\nu) \frac{\sqrt{\xi(1-\xi)}}{1-2\xi} N_s^{(n)} \frac{r_0}{Eh} \quad (n = 1, 2, 3, 4). \quad (6.10.33)$$

2. Частные решения неоднородных уравнений, соответствующие осевой силе $P = -2\pi C$:

$$N_s^{(C)} = -N_\theta^{(C)} = -\frac{C}{r_0 \sin^2 \varphi}, \quad \kappa_s^{(C)} = \kappa_\theta^{(C)} = 0, \quad M_s^{(C)} = M_\theta^{(C)} = 0;$$

$$u_z^{(C)} = (1 + \nu) \left(1 + \cos \varphi \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \frac{C}{Eh},$$

$$u_s^{(C)} = (1 + \nu) \left(\operatorname{ctg} \varphi - \sin \varphi \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \frac{C}{Eh}. \quad (6.10.34)$$

3. Частные решения неоднородных уравнений, соответствующие чисто тепловым деформациям (6.10.1 :
при $k = 0$

$$N_s^{(e)} = N_\theta^{(e)} = 0, \quad \kappa_s^{(e)} = \kappa_\theta^{(e)} = 0, \quad M_s^{(e)} = M_\theta^{(e)} = 0,$$

$$u_z^{(e)} = r_0 \varepsilon_0, \quad u_s^{(e)} = 0; \quad (6.10.35)$$

$$N_s^{(x)} = N_\theta^{(x)} = 0, \quad \kappa_s^{(x)} = \kappa_\theta^{(x)} = 0,$$

$$M_s^{(x)} = M_\theta^{(x)} = -(1 + \nu) \frac{D_M \mu_0}{h}, \quad u_z^{(x)} = u_s^{(x)} = 0; \quad (6.10.36)$$

при $k = 1$

$$N_s^{(e)} = N_\theta^{(e)} = -\frac{1 + \nu}{1 + \mu^2} Eh \varepsilon_1 \cos \varphi,$$

$$\kappa_s^{(e)} = \kappa_\theta^{(e)} = \frac{c_0^2}{1 + \mu^2} \cdot \frac{r_0}{h^2} \varepsilon_1 \cos \varphi;$$

$$M_s^{(e)} = M_\theta^{(e)} = \frac{1 + \nu}{1 + \mu^2} Ehr_0 \varepsilon_1 \cos \varphi;$$

$$u_z^{(e)} = \frac{-1 - 2\nu + \mu^2}{1 + \mu^2} r_0 \varepsilon_1 \cos \varphi, \quad u_s^{(e)} = \frac{(1 + \nu)^2}{1 + \mu^2} r_0 \varepsilon_1 \sin \varphi; \quad (6.10.37)$$

$$N_s^{(x)} = N_\theta^{(x)} = \frac{(1 + \nu)(\nu^2 + \mu^2)}{1 + \mu^2} \cdot \frac{D_M}{r_0} \cdot \frac{\mu_1}{h} \cos \varphi,$$

$$\kappa_s^{(x)} = \kappa_\theta^{(x)} = \frac{1 - \nu^2}{1 + \mu^2} \cdot \frac{\mu_1}{h} \cos \varphi;$$

$$M_s^{(x)} = M_\theta^{(x)} = -\frac{(1 + \nu)(\nu^2 + \mu^2)}{1 + \mu^2} \cdot \frac{D_M \mu_1}{h} \cos \varphi; \quad (6.10.38)$$

$$u_z^{(x)} = \frac{2(1 + \nu)(\nu^2 + \mu^2)}{1 + \mu^2} \cdot \frac{h \mu_1}{c_0^2} \cos \varphi,$$

$$u_s^{(x)} = -\frac{(1 + \nu)^2(\nu^2 + \mu^2)}{1 + \mu^2} \cdot \frac{h \mu_1}{c_0^2} \sin \varphi.$$

П р и м е р. Рассмотрим тепловые напряжения в шаровом корпусе, выполненном в виде сферической оболочки (рис. 48), при температурном поле

$$T - T_0 = T_{00} + T_1 \cos \varphi \quad (T_{00}, T_1 = \text{const}). \quad (6.10.39)$$

При этом температурном поле возникают чисто тепловые деформации

$$\varepsilon_T = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos \varphi, \quad \varkappa_T = 0, \quad (6.10.40)$$

где $\varepsilon_0 = \alpha_T T_{00}$, $\varepsilon_1 = \alpha_T T_1$.

Сферическая оболочка замкнута в вершине $\varphi = 0$, а при $\varphi = \frac{\pi}{3}$ соединена с жестким кольцом (фланцем). Для такой оболочки отношение $\frac{r_0}{h} = 7$, что при

$$\nu = 0,3 \text{ соответствует параметру } \mu = \sqrt{\frac{c_0^2 r_0^2}{h^2} - \nu^2} = 23,13.$$

Поскольку в вершине оболочки $\varphi = 0$ частные решения с верхними индексами 3 и 4 имеют особенности, то в общих решениях вида (6.8.2) постоянные интегрирования C_3 и C_4 следует положить равными нулю.

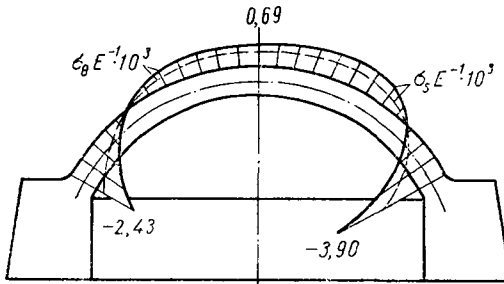


Рис. 48.

При чисто тепловых деформациях (6.10.40) и отсутствии осевой силы из частных решений неоднородных уравнений необходимо принять во внимание только частные решения (6.10.35) и (6.10.37).

Таким образом, усилия N_s , N_θ , изменение кривизны \varkappa_θ , изгибающие моменты M_s , M_θ и перемещения u_z , u_s выражаются так:

$$N_s = C_1 N_s^{(1)} + C_2 N_s^{(2)} - \frac{1 + \nu}{1 + \mu^2} E h \varepsilon_1 \cos \varphi, \quad (6.10.41)$$

$$N_\theta = C_1 N_\theta^{(1)} + C_2 N_\theta^{(2)} - \frac{1 + \nu}{1 + \mu^2} E h \varepsilon_1 \cos \varphi;$$

$$\varkappa_\theta = C_1 \varkappa_\theta^{(1)} + C_2 \varkappa_\theta^{(2)} + \frac{c_0^2}{1 + \mu^2} \cdot \frac{r_0}{h^2} \varepsilon_1 \cos \varphi; \quad (6.10.42)$$

$$M_s = C_1 M_s^{(1)} + C_2 M_s^{(2)} + \frac{1 + \nu}{1 + \mu^2} E h r_0 \varepsilon_1 \cos \varphi, \quad (6.10.43)$$

$$M_\theta = C_1 M_\theta^{(1)} + C_2 M_\theta^{(2)} + \frac{1 + \nu}{1 + \mu^2} E h r_0 \varepsilon_1 \cos \varphi;$$

$$u_z = C_1 u_z^{(1)} + C_2 u_z^{(2)} + r_0 \varepsilon_0 + \frac{-1 - 2\nu + \mu^2}{1 + \mu^2} r_0 \varepsilon_1 \cos \varphi + C_5 \cos \varphi, \quad (6.10.44)$$

$$u_s = C_1 u_s^{(1)} + C_2 u_s^{(2)} + \frac{(1 + \nu)^2}{1 + \mu^2} r_0 \varepsilon_1 \sin \varphi - C_5 \sin \varphi,$$

где частные решения $N_s^{(1)}$, ..., $u_s^{(2)}$ определяются по формулам (6.10.26) — (6.10.33).

Полагая, что кольцо весьма жесткое по сравнению с оболочкой, и пренебрегая упругими поворотом и радиальным перемещением кольца, постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяем из следующих условий (§ 6.8):

$$\vartheta_s = r_0 \operatorname{tg} \varphi \kappa_\theta = 0, \quad u_\xi = u_s \cos \varphi + u_z \sin \varphi = \Delta \quad \text{при } \varphi = \frac{\pi}{3}. \quad (6.10.45)$$

В табл. 15 приводятся значения частных решений $N_s^{(1)}$, $N_s^{(2)}$, $N_\theta^{(1)}$, $N_\theta^{(2)}$ и $M_s^{(1)} \frac{1}{r_0}$, $M_s^{(2)} \frac{1}{r_0}$, $M_\theta^{(1)} \frac{1}{r_0}$, $M_\theta^{(2)} \frac{1}{r_0}$, вычисленные при $\nu = 0,3$, $\mu = 23,13 \left(\frac{r_0}{h} = 7 \right)$ для $\varphi = 0$; $\frac{\pi}{18}$; $\frac{\pi}{9}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{2\pi}{9}$; $\frac{5\pi}{18}$; $\frac{\pi}{3}$. Заметим, что при суммировании рядов $\varphi_2(\xi)$, $\varphi_3(\xi)$, $\varphi_4(\xi)$, $\varphi_5(\xi)$, входящих в частные решения, в самом неблагоприятном случае ($\varphi = \frac{\pi}{3}$) приходится принимать во внимание 13 членов, чтобы получить результат с точностью до шести значащих цифр.

Вычисляя с помощью формул (6.10.42), (6.10.44)

$$\left(\vartheta_s \right)_{\varphi=\frac{\pi}{3}} = r_0 (\operatorname{tg} \varphi \kappa_\theta)_{\varphi=\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}, \quad (u_s)_{\varphi=\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}, \quad (u_z)_{\varphi=\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}$$

и удовлетворяя граничным условиям (6.10.45), составляем при $\frac{r_0}{h} = 7$ следующие два уравнения: $2,9235 C_1 - 3,8245 C_2 + 0,071307 E h \varepsilon_1 = 0$; $-66,986 C_1 + 15,248 C_2 + 6,0622 E h \varepsilon_0 + 3,0259 E h \varepsilon_1 = E \Delta$. Отсюда

$$C_1 = 0,10956 E h \varepsilon_0 + 0,059827 E h \varepsilon_1 - 0,018073 E \Delta;$$

$$C_2 = 0,083753 E h \varepsilon_0 + 0,064378 E h \varepsilon_1 - 0,013816 E \Delta.$$

Для дальнейшего расчета полагаем: $T_{00} = 200 \text{ град}$, $T_1 = 140 \text{ град}$, $\alpha_T = 14 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град}$, $\varepsilon_0 = T_{00} \alpha_T = 0,0028$, $\varepsilon_1 = T_1 \alpha_T = 0,00196$.

Величину Δ приближенно можно оценить по формуле $\Delta = (T - T_0)_k \alpha_T r_k$, где $(T - T_0)_k$ — среднее приращение температуры кольца; $r_k = r_0 \sin \frac{\pi}{3}$ — радиус параллели оболочки в месте сопряжения с кольцом. При $(T - T_0)_k = 180 \text{ град}$, $r_0 = 980 \text{ мм}$, $h = 140 \text{ мм}$ имеем $\frac{\Delta}{h} = 0,0153$. Тогда $C_1 = 0,00014794 E h$, $C_2 = 0,00014963 E h$.

Используя значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 и частных решений (см. табл. 15), по формулам (6.10.41) и (6.10.43), взятым при $\frac{r_0}{h} = 7$, вычисляем усилия $N_s (Eh)^{-1}$, $N_\theta (Eh)^{-1}$, моменты $M_s (Eh^2)^{-1}$, $M_\theta (Eh^2)^{-1}$, а затем по формулам (6.9.49) — соответствующие тепловые напряжения $(\sigma_s)_{z=\pm \frac{h}{2}} E^{-1} \cdot 10^3$

$$(\sigma_s)_{z=\pm \frac{h}{2}} E^{-1} \cdot 10^3 \quad \text{для } \varphi = 0; \quad \frac{\pi}{18}; \quad \frac{\pi}{9}; \quad \frac{\pi}{6}; \quad \frac{2\pi}{9}; \quad \frac{5\pi}{18}; \quad \frac{\pi}{3} \quad (\text{табл. 16}).$$

На рис. 48 представлены кривые распределения тепловых напряжений, $(\sigma_s)_{z=\frac{h}{2}} E^{-1} \cdot 10^3$ и $(\sigma_\theta)_{z=\frac{h}{2}} E^{-1} \cdot 10^3$ при $(T - T_0)_k = 180 \text{ град}$ (сплошные линии) и при $(T - T_0)_k = 230 \text{ град}$ (штриховые линии).

Таблица 15

φ	$N_s^{(1)}$	$N_s^{(2)}$	$N_\theta^{(1)}$	$N_\theta^{(2)}$	$M_s^{(1)} \frac{1}{r_0}$	$M_s^{(2)} \frac{1}{r_0}$	$M_\theta^{(1)} \frac{1}{r_0}$	$M_\theta^{(2)} \frac{1}{r_0}$
0	1	-0,0129703	1	-0,0129703	0	0,0562045	0	0,0562045
$\frac{\pi}{18}$	0,984882	-0,0999273	0,979848	-0,276705	0,0125420	0,0552997	0,00719091	0,0553827
$\frac{\pi}{9}$	0,910179	-0,347403	0,764690	-1,05001	0,0493120	0,0455056	0,0279949	0,0496322
$\frac{\pi}{6}$	0,698696	-0,702991	-0,0974874	-2,18372	0,103449	0,00618923	0,0583314	0,0296997
$\frac{2\pi}{9}$	0,263911	-1,04716	-2,25935	-3,11745	0,149560	-0,0923188	0,0859250	-0,0167800
$\frac{5\pi}{18}$	-0,412336	-1,17857	-6,21361	-2,47291	0,125733	-0,272357	0,0842912	-0,0973256
$\frac{\pi}{3}$	-1,16572	-0,869617	-11,4004	2,25433	-0,0795822	-0,509081	0,0109294	-0,198254

Таблица 16

φ	$N_s(Eh)^{-1}$	$N_\theta(Eh)^{-1}$	$M_s(EH^2)^{-1}$	$M_\theta(EH^2)^{-1}$	$\sigma_s E^{-1} \cdot 10^8$		$\sigma_\theta E^{-1} \cdot 10^8$	
					$z = \frac{h}{2}$	$z = -\frac{h}{2}$	$z = \frac{h}{2}$	$z = -\frac{h}{2}$
0	0,0001412	0,0001412	0,9215 · 10 ⁻⁴	0,9215 · 10 ⁻⁴	0,6941	-0,4116	0,6941	-0,4116
$\frac{\pi}{18}$	0,0001261	0,9887 · 10 ⁻⁴	0,0001037	0,9823 · 10 ⁻⁴	0,7482	-0,4960	0,6882	-0,4905
$\frac{\pi}{9}$	0,7820 · 10 ⁻⁴	-0,4846 · 10 ⁻⁴	0,0001300	0,0001122	0,8582	-0,7818	0,6250	-0,7219
$\frac{\pi}{6}$	-0,5943 · 10 ⁻⁵	-0,0003453	0,0001424	0,0001203	0,8486	-0,8605	0,3767	-1,067
$\frac{2\pi}{9}$	-0,0001213	-0,0008044	0,8367 · 10 ⁻⁴	0,9690 · 10 ⁻⁴	0,3808	-0,6233	-0,2230	-1,386
$\frac{5\pi}{18}$	-0,0002404	-0,001292	-0,0001337	0,6738 · 10 ⁻⁵	-1,042	0,5617	-1,252	-1,333
$\frac{\pi}{3}$	-0,0003054	-0,001352	-0,0005990	-0,0001797	-3,899	3,289	-2,430	-0,2734

Из данных табл. 16 и кривых на рис. 48 видно, что тепловые напряжения растягивающие на наружной поверхности шарового корпуса $z = \frac{h}{2}$ в интервале изменения φ от 0 до $\frac{2\pi}{9}$ и от 0 до $-\frac{2\pi}{9}$. С улучшением тепловой изоляции массивного кольца тепловые напряжения в корпусе существенно уменьшаются. Так, при увеличении $(T - T_0)_k$ от 180 до 230 град значения $(\sigma_s)_{z=\frac{h}{2}, \varphi=0}$ и $(\sigma_s)_{z=\frac{h}{2}, \varphi=\frac{\pi}{3}}$ уменьшаются соответственно в 1,45 и 1,73 раза.

**ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА
ТЕРМОУПРУГОСТИ**

§ 7.1. Основные уравнения

В этой главе рассматриваются тепловые напряжения в телах вращения, обусловленные осесимметричным температурным полем.

В телах вращения осесимметричному температурному полю соответствует осесимметричное напряженное состояние, которое в цилиндре или сфере удобно изучать в цилиндрических или сферических координатах (см. рис. 4 и 6).

Если ось вращения совпадает с осью z , то вследствие симметрии термоупругой деформации относительно оси z все компоненты тензора напряжения не зависят от угла θ .

Осесимметричная задача термоупругости здесь рассматривается в квазистатической постановке при постоянных упругих коэффициентах. Для исследования этой задачи используется представление общего решения в форме П. Ф. Папковича (§ 2.2):

$$\vec{u} = \vec{u}^{(T)} + \vec{u}^* = \text{grad } \Phi + 4(1 - \nu) \vec{B} - \text{grad}(\vec{B} \cdot \vec{r} + B_0), \quad (7.1.1)$$

в котором скалярная функция Φ и гармонические вектор \vec{B} и скаляр B_0 , определяемые уравнениями (2.2.12) и (2.2.7), являются функциями только двух координат. Компоненты вектора \vec{B} в декартовой системе координат удовлетворяют уравнениям Лапласа, в системе криволинейных координат не удовлетворяют. Скалярные уравнения для компонентов вектора \vec{B} находим на основании известного из векторного анализа [28] тождества

$$\nabla^2 \vec{B} = \text{grad div } \vec{B} - \text{rot rot } \vec{B} = 0. \quad (7.1.2)$$

Ниже приводим формулы, необходимые для исследования осесимметричной задачи термоупругости в цилиндрических и сферических координатах.

Цилиндрические координаты. При осевой симметрии компонент u_θ вектора перемещения, компоненты $\varepsilon_{r\theta}$ и $\varepsilon_{\theta z}$ тензора деформации и компоненты $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{\theta z}$ тензора напряжения обращаются в нуль (§ 2.6). Компоненты u_r и u_z определяются выражениями

$$u_r = u_r^{(T)} + u_r^*; \quad u_z = u_z^{(T)} + u_z^*, \quad (7.1.3)$$

где

$$u_r^{(T)} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad u_z^{(T)} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad (7.1.4)$$

$$u_r = 4(1 - \nu) B_r - \frac{\partial}{\partial r} (r B_r + z B_z + B_0); \quad (7.1.5)$$

$$u_z^* = 4(1 - \nu) B_z - \frac{\partial}{\partial z} (r B_r + z B_z + B_0).$$

Уравнение Пуассона (2.2.12) для скалярной функции Φ в рассматриваемом случае принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T (T - T_0). \quad (7.1.6)$$

Функции B_r и B_z в решении (7.1.5) являются компонентами вектора \vec{B} в направлениях единичных векторов \vec{e}_r и \vec{e}_z (см. рис. 4).

Выполняя в уравнении (7.1.2) векторные операции по формулам (2.6.1) — (2.6.3) и учитывая, что все производные по θ обращаются в нуль, получаем для B_r и B_z следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{B_r}{r^2} + \frac{\partial^2 B_r}{\partial z^2} = 0; \quad (7.1.7)$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = 0. \quad (7.1.8)$$

Заметим, что уравнение (7.1.7), которому удовлетворяет B_r , не является уравнением Лапласа. Уравнение Лапласа (2.2.7) для B_0 в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 B_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial B_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2} = 0. \quad (7.1.9)$$

Используя соотношения (2.6.5) и (2.6.7) и принимая во внимание уравнение (7.1.6), находим следующие выражения для деформаций и напряжений:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^{(T)} + \varepsilon_r^*; \quad (7.1.10)$$

$$\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{rz}^{(T)} + \varepsilon_{rz}^*;$$

$$\sigma_r = \sigma_r^{(T)} + \sigma_r^*;$$

$$\sigma_{rz} = \sigma_{rz}^{(T)} + \sigma_{rz}^*, \quad (7.1.11)$$

где

$$\varepsilon_r^{(T)} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \varepsilon_\theta^{(T)} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \varepsilon_z^{(T)} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad \varepsilon_{rz}^{(T)} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}; \quad (7.1.12)$$

$$\varepsilon_r^* = \frac{\partial u_r^*}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta^* = \frac{1}{r} \cdot u_r^*, \quad \varepsilon_z^* = \frac{\partial u_z^*}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r^*}{\partial z} + \frac{\partial u_z^*}{\partial r} \right); \quad (7.1.13)$$

$$\sigma_r^{(T)} = 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \nabla^2 \Phi \right), \quad \sigma_\theta^{(T)} = 2\mu \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \nabla^2 \Phi \right); \quad (7.1.14)$$

$$\sigma_z^{(T)} = 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \nabla^2 \Phi \right), \quad \sigma_{rz}^{(T)} = 2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z};$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2};$$

$$\sigma_r^* = 2\mu \left(\varepsilon_r^* + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^* \right), \quad \sigma_\theta^* = 2\mu \left(\varepsilon_\theta^* + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^* \right); \quad (7.1.15)$$

$$\sigma_z^* = 2\mu \left(\varepsilon_z^* + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^* \right), \quad \sigma_{rz}^* = 2\mu \varepsilon_{rz}^*;$$

$$\varepsilon_{kk}^* = \varepsilon_r^* + \varepsilon_\theta^* + \varepsilon_z^*.$$

Сферические координаты. При осесимметричном напряженном состоянии компонент u_θ вектора перемещения, компоненты $\varepsilon_{r\theta}$ и $\varepsilon_{\theta\varphi}$ тензора деформации и компоненты $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{\theta\varphi}$ тензора напряжения равны нулю (§ 2.6).

Компоненты u_r и u_φ вектора перемещения имеют выражения

$$u_r = u_r^{(T)} + u_r^*; \quad u_\varphi = u_\varphi^{(T)} + u_\varphi^*, \quad (7.1.16)$$

где

$$u_r^{(T)} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad u_\varphi^{(T)} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}; \quad (7.1.17)$$

$$u_r^* = 4(1-\nu)B_r - \frac{\partial}{\partial r}(rB_r + B_\theta);$$

$$u_\varphi^* = 4(1-\nu)B_\varphi - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}(rB_r + B_\theta). \quad (7.1.18)$$

Здесь B_r и B_φ — компоненты вектора \vec{B} в направлениях единичных векторов \vec{e}_r и \vec{e}_φ (см. рис. 6). Используя формулу (2.6.14), для определения термоупругого потенциала Φ получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T (T - T_0). \quad (7.1.19)$$

При составлении уравнений для B_r и B_φ используем векторное уравнение (7.1.2). Выполняя в нем векторные операции по формулам (2.6.11) — (2.6.13), получаем следующие уравнения:

$$\frac{\partial e_B}{\partial r} - \frac{1}{r \sin \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi \omega_B) = 0;$$

$$\frac{\partial e_B}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial r} (r \omega_B) = 0, \quad (7.1.20)$$

где

$$e_B = \operatorname{div} \vec{B} = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) + \frac{1}{\sin \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi B_\varphi) \right]; \quad (7.1.21)$$

$$\omega_B = \operatorname{rot}_\theta \vec{B} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r B_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right].$$

Уравнения (7.1.20) для функций e_B и ω_B связанные. С помощью несложных преобразований решение системы (7.1.20) можно свести к решению двух независимых уравнений относительно e_B и ω_B .

Применяя операцию div к уравнению (7.1.2) и учитывая, что $\operatorname{div} \operatorname{grad} () = \nabla^2 ()$, $\operatorname{div} \operatorname{rot} () = 0$, находим, что e_B является гармонической функцией, удовлетворяющей на основании (2.6.14) уравнению

$$\nabla^2 e_B = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial e_B}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial e_B}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (7.1.22)$$

Операция rot , примененная к (7.1.2), приводит к следующему уравнению для функции ω_B :

$$r \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \omega_B) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{\sin \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi \omega_B) \right] = 0. \quad (7.1.23)$$

При нахождении уравнения (7.1.23) операцию $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot}$ выполняем с помощью формул (2.6.13), учитывая, что $\operatorname{rot} \operatorname{grad} () = 0$.

Найдя решения уравнений (7.1.22) и (7.1.23) и исключив лишний произвол в них с помощью зависимостей (7.1.20), для определения B_r и B_φ получаем систему двух уравнений первого порядка (7.1.21).

Уравнение для гармонической функции B_0 , входящей в решение (7.1.18), имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial B_0}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial B_0}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (7.1.24)$$

Деформации и напряжения определяются по формулам

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^{(T)} + \varepsilon_r^*;$$

$$\dots \dots \dots \quad (7.1.25)$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{r\varphi}^{(T)} + \varepsilon_{r\varphi}^*;$$

$$\sigma_r = \sigma_r^{(T)} + \sigma_r^*;$$

$$\dots \dots \dots \quad (7.1.26)$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi}^{(T)} + \sigma_{r\varphi}^*,$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r^{(T)} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \varepsilon_\varphi^{(T)} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right); \\ \varepsilon_\theta^{(T)} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \operatorname{ctg} \varphi \right); \\ \varepsilon_{r\varphi}^{(T)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \right]; \end{aligned} \right\} (7.1.27)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r^* &= \frac{\partial u_r^*}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi^* = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi^*}{\partial \varphi} + u_r^* \right); \\ \varepsilon_\theta^* &= \frac{1}{r} (u_r^* + u_\varphi^* \operatorname{ctg} \varphi); \\ \varepsilon_{r\varphi}^* &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r^*}{\partial \varphi} - u_\varphi^* \right) + \frac{\partial u_\varphi^*}{\partial r} \right]; \end{aligned} \right\} (7.1.28)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(T)} &= 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \nabla^2 \Phi \right); \\ \sigma_\varphi^{(T)} &= 2\mu \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} - \nabla^2 \Phi \right); \\ \sigma_\theta^{(T)} &= 2\mu \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \operatorname{ctg} \varphi - \nabla^2 \Phi \right); \\ \sigma_{r\varphi}^{(T)} &= \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \right]; \\ \nabla^2 \Phi &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}; \end{aligned} \right\} (7.1.29)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^* &= 2\mu \left(\varepsilon_r^* + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^* \right); \\ \sigma_\varphi^* &= 2\mu \left(\varepsilon_\varphi^* + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^* \right); \\ \sigma_\theta^* &= 2\mu \left(\varepsilon_\theta^* + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^* \right); \\ \sigma_{r\varphi}^* &= 2\mu \varepsilon_{r\varphi}^*; \\ \varepsilon_{kk}^* &= \varepsilon_r^* + \varepsilon_\varphi^* + \varepsilon_\theta^*. \end{aligned} \right\} (7.1.30)$$

§ 7.2. Тепловые напряжения в цилиндре конечной длины

Решение краевых задач термоупругости для областей конечных размеров связано с большими трудностями. Задача о тепловых напряжениях в сплошном цилиндре конечной длины является одной из характерных задач, выясняющей указанные трудности и способы их преодоления.

Рассмотрим метод определения тепловых напряжений в сплошном круговом цилиндре конечной длины $2l$ и радиуса r_2 , подвергающемся действию осесимметричного температурного поля $T(r, z) - T_0$, симметричного относительно плоскости $z = 0$ (рис. 49). Полагаем, что температурное поле известно из решения соответствующей задачи теплопроводности (глава третья).

Переходя к относительным координатам $\rho = \frac{r}{r_2}$, $\zeta = \frac{z}{r_2}$ и разлагая температурное поле $T(\rho, \zeta) - T_0$ в направлении оси r по бесселевым функциям и в направлении оси z по тригонометрическим функциям, в фиксированный момент времени представляем его в виде выражения

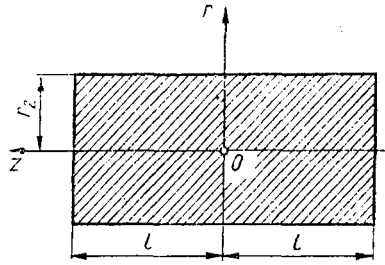


Рис. 49.

$$T(\rho, \zeta) - T_0 = \sum_{j,n=0}^{\infty} a_{jn} J_0(\lambda_j \rho) \cos k_n \zeta, \quad (7.2.1)$$

где T_0 — температура, соответствующая недеформированному состоянию цилиндра; λ_j ($j = 1, 2, \dots$) — корни уравнения $J_1(\lambda) = 0$,

$\lambda_0 = 0$; $k_n = \frac{\pi n}{\zeta_0}$, $\zeta_0 = \frac{l}{r_2}$; штрих указывает на то, что величины

j и n одновременно не принимают нулевого значения (отсутствует член, содержащий a_{00}).

Используя ортогональность входящих в выражение (7.2.1) функций, для коэффициентов двойного ряда a_{jn} находим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} a_{0n} &= \frac{4}{\zeta_0} \int_0^{\zeta_0} \int_0^1 [T(\rho, \zeta) - T_0] \cos k_n \zeta \rho d\rho d\zeta, \\ & \quad n = 1, 2, \dots; \\ a_{j0} &= \frac{2}{\zeta_0 J_0^2(\lambda_j)} \int_0^{\zeta_0} \int_0^1 [T(\rho, \zeta) - T_0] J_0(\lambda_j \rho) \rho d\rho d\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (7.2.2)$$

$$j = 1, 2, \dots;$$

$$a_{jn} = \frac{4}{\xi_0 J_0^2(\lambda_j)} \int_0^{\xi_0} \int_0^1 [T(\rho, \xi) - T_0] J_0(\lambda_j \rho) \cos k_n \xi \rho d\rho d\xi, \quad j, n = 1, 2, \dots$$

Зная температурное поле (7.2.1), находим частное решение уравнения (7.1.6) для термоупругого потенциала:

$$\Phi = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T r_2^2 \sum_{j,n=0}^{\infty} \frac{a_{jn}}{k_n^2 + \lambda_j^2} J_0(\lambda_j \rho) \cos k_n \xi. \quad (7.2.3)$$

Выражения для соответствующих термоупругому потенциалу (7.2.3) перемещений и напряжений, вычисленных по формулам (7.1.4). и (7.1.14), имеют вид

$$\begin{aligned} u_r^{(T)} &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T r_2 \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j0}}{\lambda_j} J_1(\lambda_j \rho) + \sum_{n,j=1}^{\infty} \frac{a_{jn} \lambda_j}{k_n^2 + \lambda_j^2} J_1(\lambda_j \rho) \cos k_n \xi \right]; \\ u_z^{(T)} &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T r_2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{0n}}{k_n} \sin k_n \xi + \sum_{n,j=1}^{\infty} \frac{a_{jn} k_n}{k_n^2 + \lambda_j^2} J_0(\lambda_j \rho) \sin k_n \xi \right]; \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r^{(T)}}{2\mu} &= -\frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} \cos k_n \xi + \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j0}}{\lambda_j} J_1(\lambda_j \rho) + \right. \\ &+ \left. \sum_{n,j=1}^{\infty} \frac{a_{jn}}{k_n^2 + \lambda_j^2} \left[k_n^2 J_0(\lambda_j \rho) + \frac{\lambda_j}{\rho} J_1(\lambda_j \rho) \right] \cos k_n \xi \right\}; \\ \frac{\sigma_\theta^{(T)}}{2\mu} &= -\frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} \cos k_n \xi - \right. \\ &- \sum_{j=1}^{\infty} a_{j0} \left[\frac{1}{\lambda_j \rho} J_1(\lambda_j \rho) - J_0(\lambda_j \rho) \right] - \\ &- \left. \sum_{j,n=1}^{\infty} a_{jn} \left[\frac{\lambda_j}{k_n^2 + \lambda_j^2} \cdot \frac{1}{\rho} J_1(\lambda_j \rho) - J_0(\lambda_j \rho) \right] \cos k_n \xi \right\}; \\ \frac{\sigma_z^{(T)}}{2\mu} &= -\frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \left[\sum_{j=1}^{\infty} a_{j0} J_0(\lambda_j \rho) + \right. \\ &+ \left. \sum_{j,n=1}^{\infty} a_{jn} \frac{\lambda_j^2}{k_n^2 + \lambda_j^2} J_0(\lambda_j \rho) \cos k_n \xi \right]; \\ \frac{\sigma_{rz}^{(T)}}{2\mu} &= -\frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \sum_{j,n=1}^{\infty} a_{jn} \frac{\lambda_j k_n}{\lambda_j^2 + k_n^2} J_1(\lambda_j \rho) \sin k_n \xi. \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

Полученные выражения для напряжений (7.2.5) удовлетворяют уравнениям равновесия и совместности деформаций, но не удовлетворяют заданным граничным условиям. Граничные условия могут быть удовлетворены с помощью общего решения однородных уравнений рассматриваемой задачи. Переходим к построению этих решений.

В силу симметрии температурного поля относительно плоскости $\zeta = 0$ общее решение (7.1.5), очевидно, должно удовлетворять условиям

$$u_r^*(-\zeta) = u_r^*(\zeta), \quad u_z^*(-\zeta) = -u_z^*(\zeta). \quad (7.2.6)$$

Для удовлетворения граничных условий как на торце, так и на боковой поверхности цилиндра полагаем, что решение (7.1.5) состоит из двух частей:

$$u_r^* = u_r^I + u_r^{II}; \quad u_z^* = u_z^I + u_z^{II}. \quad (7.2.7)$$

Первая часть решения строится так, чтобы с ее помощью можно было удовлетворить произвольные граничные условия на поверхности цилиндра $\rho = 1$; напряжения, соответствующие этой части решения, должны иметь вид рядов по полной на интервале $-\zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_0$ системе ортогональных функций. В связи с этим для функций B_r и B_0 , входящих в решение (7.1.5), выбираем следующие выражения, при которых удовлетворяются условия (7.2.6):

$$B_r = r_2 g_0(\rho) + r_2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\rho) \cos k_n \zeta; \quad (7.2.8)$$

$$B_0 = r_2^2 h_0(\rho) + r_2^2 \sum_{n=1}^{\infty} h_n(\rho) \cos k_n \zeta.$$

При этом удобно положить

$$B_z = 0. \quad (7.2.9)$$

Подставляя выражения (7.2.8) в уравнения (7.1.7) и (7.1.9), получаем следующие уравнения, по которым можно определить величины $g_0(\rho)$, $h_0(\rho)$, $g_n(\rho)$, $h_n(\rho)$:

$$\frac{d^2 g_0(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d r_0(\rho)}{d\rho} - \frac{g_0(\rho)}{\rho^2} = 0, \quad (7.2.10)$$

$$\frac{d^2 h_0(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d h_0(\rho)}{d\rho} = 0;$$

$$\frac{d^2 g_n(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d g_n(\rho)}{d\rho} - \left(\frac{1}{\rho^2} + k_n^2 \right) g_n(\rho) = 0; \quad (7.2.11)$$

$$\frac{d^2 h_n(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d h_n(\rho)}{d\rho} - k_n^2 h_n(\rho) = 0.$$

Общие решения этих уравнений имеют вид

$$g_0(\rho) = \alpha_0 \rho + \alpha_0' \frac{1}{\rho}, \quad h_0(\rho) = \beta_0 + \beta_0' \ln \rho;$$

$$g_n(\rho) = \alpha_n I_1(k_n \rho) + \alpha'_n K_1(k_n \rho), \quad (7.2.12)$$

$$h_n(\rho) = \beta_n I_0(k_n \rho) + \beta'_n K_0(k_n \rho) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где $\alpha_0, \dots, \beta'_n$ — произвольные постоянные.

Поскольку цилиндр сплошной, то следует положить

$$\alpha'_0 = 0, \beta'_0 = 0, \alpha'_n = 0, \beta'_n = 0. \quad (7.2.13)$$

Учитывая (7.2.13) и применяя формулы (7.2.8) и (7.1.5), находим

$$u_r^I = 2(1 - 2\nu)\alpha_0 \rho r_2 + r_2 \sum_{n=1}^{\infty} \{ \alpha_n [4(1 - \nu)I_1(k_n \rho) - \\ - k_n \rho I_0(k_n \rho)] - \beta_n k_n I_1(k_n \rho) \} \cos k_n \zeta; \quad (7.2.14)$$

$$u_z^I = r_2 \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n k_n I_1(k_n \rho) + \beta_n k_n I_0(k_n \rho)] \sin k_n \zeta.$$

Следует отметить, что первая часть решения u_r^I и u_z^I представляет собой общее решение краевой задачи теории упругости для длинного сплошного цилиндра, периодически нагруженного на поверхности $\rho = 1$ [38].

При построении второй части решения u_r^{II} и u_z^{II} удобно принять

$$B_r = 0. \quad (7.2.15)$$

На основании соображений, аналогичных изложенным при построении первой части решения, представляем гармонические функции B_z и B_0 в виде

$$B_z = r_2 p_0(\zeta) + r_2 \sum_{j=1}^{\infty} p_j(\zeta) J_0(\lambda_j \rho); \quad (7.2.16)$$

$$B_0 = r_2^2 q_0(\zeta) + r_2^2 \sum_{j=1}^{\infty} q_j(\zeta) J_0(\lambda_j \rho),$$

где λ_j — корни уравнения $J_1(\lambda) = 0$.

Подставляя выражения (7.2.16) в уравнения (7.1.8) и (7.1.9), для определения $p_0(\zeta)$, $q_0(\zeta)$, $p_j(\zeta)$, $q_j(\zeta)$ получаем уравнения

$$\frac{d^2 p_0(\zeta)}{d\zeta^2} = 0, \quad \frac{d^2 q_0(\zeta)}{d\zeta^2} = 0; \quad (7.2.17)$$

$$\frac{d^2 p_j(\zeta)}{d\zeta^2} - \lambda_j^2 p_j(\zeta) = 0, \quad \frac{d^2 q_j(\zeta)}{d\zeta^2} - \lambda_j^2 q_j(\zeta) = 0. \quad (7.2.18)$$

Учитывая условия (7.2.6), решение уравнений (7.2.17) и (7.2.18) выбираем в виде

$$p_0(\zeta) = \gamma_0 \zeta, \quad q_0(\zeta) = \delta_0; \\ p_j(\zeta) = \gamma_j \operatorname{sh} \lambda_j \zeta, \quad q_j(\zeta) = \delta_j \operatorname{ch} \lambda_j \zeta \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (7.2.19)$$

где $\gamma_0, \dots, \delta_j$ — произвольные постоянные.

Найденные выражения для функций B_2 и B_0 позволяют вторую часть решения u_r^{II} и u_z^{II} представить в виде

$$u_r^{\text{II}} = r_2 \sum_{j=1}^{\infty} (\gamma_j \lambda_j \zeta \operatorname{sh} \lambda_j \zeta + \delta_j \lambda_j \operatorname{ch} \lambda_j \zeta) J_1(\lambda_j \rho);$$

$$u_z^{\text{II}} = 2(1-2\nu) \gamma_0 \zeta r_2^2 + r_2^2 \sum_{j=1}^{\infty} \{ \gamma_j [(3-4\nu) \operatorname{sh} \lambda_j \zeta - \lambda_j \zeta \operatorname{ch} \lambda_j \zeta] - \\ - \delta_j \lambda_j \operatorname{sh} \lambda_j \zeta \} J_0(\lambda_j \rho). \quad (7.2.20)$$

Выражения для перемещений (7.2.20) являются общим решением краевой задачи теории упругости, позволяющим удовлетворить произвольным граничным условиям в перемещениях или напряжениях на поверхностях «периодически» деформированного упругого слоя [63].

Подставляя выражения (7.2.14) и (7.2.20) в равенства (7.2.7), получаем общее решение однородных уравнений для перемещений:

$$u_r^* = 2(1-2\nu) \alpha_0 \rho r_2 + r_2 \sum_{n=1}^{\infty} \{ \alpha_n [4(1-\nu) I_1(k_n \rho) - k_n \rho I_0(k_n \rho)] - \\ - \beta_n k_n I_1(k_n \rho) \} \cos k_n \zeta + r_2 \sum_{j=1}^{\infty} (\gamma_j \lambda_j \zeta \operatorname{sh} \lambda_j \zeta + \delta_j \lambda_j \operatorname{ch} \lambda_j \zeta) J_1(\lambda_j \rho); \quad (7.2.21)$$

$$u_z^* = 2(1-2\nu) \gamma_0 \zeta r_2 + r_2 \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n k_n \rho I_1(k_n \rho) + \beta_n k_n I_0(k_n \rho)] \sin k_n \zeta + \\ + r_2 \sum_{j=1}^{\infty} \{ \gamma_j [(3-4\nu) \operatorname{sh} \lambda_j \zeta - \lambda_j \zeta \operatorname{ch} \lambda_j \zeta] - \delta_j \lambda_j \operatorname{sh} \lambda_j \zeta \} J_0(\lambda_j \rho).$$

Соответствующие напряжения, вычисленные по формулам (7.1.13) и (7.1.15), имеют вид

$$\frac{\sigma_r^*}{2\mu} = 2\alpha_0 + 2\nu\gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \alpha_n \left[-4(1-\nu) \frac{1}{\rho} I_1(k_n \rho) - \right. \right. \\ \left. \left. - k_n^2 \rho I_1(k_n \rho) + (3-2\nu) k_n I_0(k_n \rho) \right] + \beta_n k_n \left[\frac{1}{\rho} I_1(k_n \rho) - \right. \right. \\ \left. \left. - k_n I_0(k_n \rho) \right] \right\} \cos k_n \zeta - \sum_{j=1}^{\infty} (\gamma_j \lambda_j \zeta \operatorname{sh} \lambda_j \zeta + \\ + \delta_j \lambda_j \operatorname{ch} \lambda_j \zeta) \frac{J_1(\lambda_j \rho)}{\rho} + \sum_{j=1}^{\infty} [\gamma_j (\lambda_j^2 \zeta \operatorname{sh} \lambda_j \zeta + 2\nu \lambda_j \operatorname{ch} \lambda_j \zeta) + \\ + \delta_j \lambda_j^2 \operatorname{ch} \lambda_j \zeta] J_0(\lambda_j \rho);$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{\theta}^*}{2\mu} &= 2\alpha_0 + 2\nu\gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \alpha_n \left[4(1-\nu) \frac{1}{\rho} I_1(k_n\rho) - \right. \right. \\
&- (1-2\nu) k_n I_0(k_n\rho) \left. \right] - \beta_n k_n \frac{1}{\rho} I_1(k_n\rho) \left. \right\} \cos k_n \zeta + \\
&+ \sum_{j=1}^{\infty} (\gamma_j \lambda_j \zeta \operatorname{sh} \lambda_j \zeta + \delta_j \lambda_j \operatorname{ch} \lambda_j \zeta) \frac{J_1(\lambda_j \rho)}{\rho} + \\
&+ 2\nu \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \lambda_j \operatorname{ch} \lambda_j \zeta J_0(\lambda_j \rho); \\
\frac{\sigma_z^*}{2\mu} &= 2(1-\nu)\gamma_0 + 4\nu\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ \alpha_n [k_n^2 \rho I_1(k_n\rho) + \\
&+ 2\nu k_n I_0(k_n\rho)] + \beta_n k_n^2 I_0(k_n\rho) \} \cos k_n \zeta + \\
&+ \sum_{j=1}^{\infty} \{ \gamma_j [2(1-\nu) \lambda_j \operatorname{ch} \lambda_j \zeta - \lambda_j^2 \zeta \operatorname{sh} \lambda_j \zeta] - \\
&- \delta_j \lambda_j^2 \operatorname{ch} \lambda_j \zeta \} J_0(\lambda_j \rho); \\
\frac{\sigma_{rz}^*}{2\mu} &= \sum_{n=1}^{\infty} \{ \alpha_n k_n [-2(1-\nu) I_1(k_n\rho) + k_n \rho I_0(k_n\rho)] + \\
&+ \beta_n k_n^2 I_1(k_n\rho) \} \sin k_n \zeta + \sum_{j=1}^{\infty} \{ \gamma_j \lambda_j [\lambda_j \zeta \operatorname{ch} \lambda_j \zeta - \\
&- (1-2\nu) \operatorname{sh} \lambda_j \zeta] + \delta_j \lambda_j^2 \operatorname{sh} \lambda_j \zeta \} J_1(\lambda_j \rho).
\end{aligned} \tag{7.2.22}$$

Для цилиндра, у которого поверхности $\rho = 1$ и $\zeta = \pm \zeta_0$ свободны от напряжений, граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_r^* + \sigma_r^{(T)} &= 0, \quad \sigma_{rz}^* + \sigma_{rz}^{(T)} = 0 \quad \text{при } \rho = 1; \\
\sigma_z^* + \sigma_z^{(T)} &= 0, \quad \sigma_{rz}^* + \sigma_{rz}^{(T)} = 0 \quad \text{при } \zeta = \pm \zeta_0.
\end{aligned} \tag{7.2.23}$$

Подставляя решения однородных уравнений (7.2.22) и частные решения (7.2.5) для напряжений в граничные условия (7.2.23), для определения постоянных α_0 , γ_0 , α_n , β_n , γ_j , δ_j получаем следующую систему функциональных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\mu} (\sigma_r^* + \sigma_r^{(T)})_{\rho=1} &= 2\alpha_0 + 2\nu\gamma_0 + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \{ \alpha_n [-4(1-\nu) I_1(k_n) - k_n^2 I_1(k_n) + \\
&+ (3-2\nu) k_n I_0(k_n)] + \beta_n k_n [I_1(k_n) - k_n I_0(k_n)] \} \cos k_n \zeta +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{\infty} \{ \gamma_j [\lambda_j^2 \xi \operatorname{sh} \lambda_j \xi + 2\nu \lambda_j \operatorname{ch} \lambda_j \xi] + \\
& + \delta_j \lambda_j^2 \operatorname{ch} \lambda_j \xi \} J_0(\lambda_j) - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} \cos k_n \xi + \right. \\
& \left. + \sum_{n,j=1}^{\infty} a_{jn} \frac{k_n^2}{k_n^2 + \lambda_j^2} J_0(\lambda_j) \cos k_n \xi \right] = 0; \\
& \frac{1}{2\mu} (\sigma_z^* + \sigma_z^{(T)})_{\xi=\pm\xi_0} = 2(1-\nu) \gamma_0 + 4\nu \alpha_0 +
\end{aligned} \tag{7.2.24}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \{ \alpha_n [k_n^2 I_1(k_n \rho) + 2\nu k_n I_0(k_n \rho)] + \\
& + \beta_n k_n^2 I_0(k_n \rho) \} + \sum_{j=1}^{\infty} \{ \gamma_j [2(1-\nu) \lambda_j \operatorname{ch} \lambda_j \xi_0 - \\
& - \lambda_j^2 \xi_0 \operatorname{sh} \lambda_j \xi_0] - \delta_j \lambda_j^2 \operatorname{ch} \lambda_j \xi_0 \} J_0(\lambda_j \rho) - \\
& - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \left[\sum_{j=1}^{\infty} a_{j0} J_0(\lambda_j \rho) + \right. \\
& \left. + \sum_{j,n=1}^{\infty} (-1)^n a_{jn} \frac{\lambda_j^2}{k_n^2 + \lambda_j^2} J_0(\lambda_j \rho) \right] = 0; \\
& \frac{1}{2\mu} (\sigma_{rz}^* + \sigma_{rz}^{(T)})_{\rho=1} = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \alpha_n k_n [-2(1-\nu) I_1(k_n) + \\
& + k_n I_0(k_n)] + \beta_n k_n^2 I_1(k_n) \} \sin k_n \xi = 0;
\end{aligned} \tag{7.2.25}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\mu} (\sigma_{rz}^* + \sigma_{rz}^{(T)})_{\xi=\pm\xi_0} = \pm \sum_{j=1}^{\infty} \{ \gamma_j \lambda_j [\lambda_j \xi_0 \operatorname{ch} \lambda_j \xi_0 - \\
& - (1-2\nu) \operatorname{sh} \lambda_j \xi_0] + \delta_j \lambda_j^2 \operatorname{sh} \lambda_j \xi_0 \} J_1(\lambda_j \rho) = 0.
\end{aligned}$$

Из граничных условий для касательных напряжений (7.2.25) получаем следующую зависимость между искомыми постоянными:

$$\begin{aligned}
\beta_n k_n^2 &= -\alpha_n k_n \left[k_n \frac{I_0(k_n)}{I_1(k_n)} - 2(1-\nu) \right], \\
\delta_j \lambda_j^2 &= -\gamma_j \lambda_j [\lambda_j \xi_0 \operatorname{cth} \lambda_j \xi_0 - (1-2\nu)].
\end{aligned} \tag{7.2.26}$$

Используя известные разложения

$$\operatorname{ch} \lambda_j \xi = \frac{\operatorname{sh} \lambda_j \xi_0}{\lambda_j \xi_0} + \frac{2\lambda_j \operatorname{sh} \lambda_j \xi_0}{\xi_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos k_n \xi}{k_n^2 + \lambda_j^2}; \tag{7.2.27}$$

$$\lambda_j \zeta \operatorname{sh} \lambda_j \zeta = \operatorname{ch} \lambda_j \zeta_0 - \frac{\operatorname{sh} \lambda_j \zeta_0}{\lambda_j \zeta_0} + \left(\frac{2\lambda_j \operatorname{sh} \lambda_j \zeta_0}{\zeta_0} + \right. \\ \left. + 2\lambda_j^2 \operatorname{ch} \lambda_j \zeta_0 \right) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos k_n \zeta}{k_n^2 + \lambda_j^2} - \frac{4\lambda_j^3 \operatorname{sh} \lambda_j \zeta_0}{\zeta_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos k_n \zeta}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2}$$

и зависимости (7.2.26), вместо первого функционального уравнения в системе (7.2.24) получаем эквивалентные ему в интервале $-\zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_0$ алгебраические уравнения

$$2\alpha_0 + 2\nu\gamma_0 = 0; \quad (7.2.28)$$

$$\alpha_n \left[k_n^2 \frac{I_0^2(k_n)}{I_1(k_n)} - k_n^2 I_1(k_n) - 2(1-\nu) I_1(k_n) \right] + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n \gamma_j J_0(\lambda_j) \frac{4k_n^2 \lambda_j^2 \operatorname{sh} \lambda_j \zeta_0}{\zeta_0 (k_n^2 + \lambda_j^2)^2} = \\ = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \left[a_{0n} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{jn} \frac{k_n^2}{k_n^2 + \lambda_j^2} J_0(\lambda_j) \right]. \quad (7.2.29)$$

Аналогично с помощью разложений

$$I_0(k_n \rho) = 2 \frac{I_1(k_n)}{k_n} + 2k_n I_1(k_n) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{(k_n^2 + \lambda_j^2) J_0(\lambda_j)}; \\ k_n \rho I_1(k_n \rho) = 2I_0(k_n) - 4 \frac{I_1(k_n)}{k_n} + 2k_n^2 I_0(k_n) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{(k_n^2 + \lambda_j^2) J_0(\lambda_j)} - \\ - 4k_n^3 I_1(k_n) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2 J_0(\lambda_j)} \quad (7.2.30)$$

вместо второго функционального уравнения в системе (7.2.24) получаем эквивалентные ему на интервале $0 \leq \rho \leq 1$ алгебраические уравнения

$$2(1-\nu)\gamma_0 + 4\nu\alpha_0 = 0; \quad (7.2.31)$$

$$\gamma_j \lambda_j \left(\operatorname{ch} \lambda_j \zeta_0 + \frac{\operatorname{sh} \lambda_j \zeta_0}{\operatorname{sh} \lambda_j \zeta_0} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n \frac{4k_n^2 \lambda_j^2 I_1(k_n)}{J_0(\lambda_j) (k_n^2 + \lambda_j^2)^2} = \\ = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \left[a_{j0} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_{jn} \frac{\lambda_j^2}{k_n^2 + \lambda_j^2} \right]. \quad (7.2.32)$$

Система двух уравнений (7.2.28) и (7.2.31) для определения α_0 и γ_0 соответствует элементарным решениям задачи о равновесии цилиндра конечной длины [38]. В связи с отсутствием несамобалансированной нагрузки на поверхности цилиндра получаем $\alpha_0 = \gamma_0 = 0$.

Исследуем парную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (7.2.29) и (7.2.32) относительно неизвестных постоянных α_n и γ_j . Вводя новые неизвестные по формулам

$$\begin{aligned} 4(-1)^n \alpha_n k_n^2 I_1(k_n) &= X_n; \\ 4J_0(\lambda_j) \gamma_j \lambda_j^2 \frac{\text{sh } \lambda_j \zeta_0}{\zeta_0} &= -Y_j, \end{aligned} \quad (7.2.33)$$

вместо системы уравнений (7.2.29) и (7.2.32) получаем более удобную для исследования систему

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \frac{k_n^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} + \frac{C_n}{t_n}; \\ Y_j &= \frac{1}{s_j} \sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{\lambda_j^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} + \frac{D_j}{s_j}, \end{aligned} \quad (7.2.34)$$

где

$$\left. \begin{aligned} t_n &= \frac{1}{4} \left[\frac{I_0^2(k_n)}{I_1^2(k_n)} - 1 - \frac{2(1-\nu)}{k_n^2} \right]; \\ s_j &= \frac{\zeta_0}{4\lambda_j} \left[\text{cth } \lambda_j \zeta_0 + \frac{\lambda_j \zeta_0}{\text{sh}^2 \lambda_j \zeta_0} \right]; \\ C_n &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T (-1)^n \left[a_{0n} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{jn} \frac{k_n^2}{k_n^2 + \lambda_j^2} J_0(\lambda_j) \right]; \\ D_j &= -\frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T J_0(\lambda_j) \left[a_{j0} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_{jn} \frac{\lambda_j^2}{k_n^2 + \lambda_j^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.35)$$

Рассмотрим сумму коэффициентов каждой строки в бесконечной системе (7.2.34). Исходя из свойств равномерной сходимости рядов (7.2.27) и (7.2.30), получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_j} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} &= 1 - \varphi_j; \\ \frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_n^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} &= 1 - \psi_n, \end{aligned} \quad (7.2.36)$$

где

$$\varphi_j = \frac{1}{2\lambda_j^2 s_j}, \quad \psi_n = \frac{1+\nu}{2k_n^2 t_n}. \quad (7.2.37)$$

При получении равенств (7.2.36) легко установить, что

$$s_j > 0, \quad t_n > 0 \quad (7.2.38)$$

и

$$0 \leq \varphi_j < 1, \quad 0 \leq \psi_n < 1 \quad (j, n = 1, 2, \dots).$$

Эти неравенства указывают на то, что система (7.2.34) регулярная [19] и имеет положительные коэффициенты. Условие существования ограниченного решения регулярных бесконечных систем налагает определенные ограничения на их свободные члены; они должны иметь такой же порядок убывания на бесконечности, как и функции φ_j и ψ_n . Для системы (7.2.34) это требование выполняется, если справедливы оценки

$$C_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right); \quad D_j = O\left(\frac{1}{\lambda_j^2}\right), \quad (7.2.39)$$

что эквивалентно условию непрерывности функций, определяющих тепловые деформации.

Заметим, что существование и единственность решения системы (7.2.34) устанавливается довольно просто. Известна сходимость алгоритма Шварца в задачах теории упругости [59], применение которого к рассматриваемой задаче о тепловых напряжениях в цилиндре эквивалентно отысканию главного решения системы (7.2.34).

Регулярность системы (7.2.34), свободные члены которой удовлетворяют условиям (7.2.39), позволяет использовать для нахождения ее главного решения метод редукции. Однако в своей обычной формулировке [19] этот метод недостаточно эффективен.

Как будет показано ниже (§ 7.3), при вычислении напряжений σ_θ , σ_z в центре торца цилиндра необходимо суммировать ряд типа $\sum_n a_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, в котором $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0 \neq 0$. Чтобы получить сумму такого ряда с точностью до 1%, надо вычислить 10 000 значений коэффициентов a_n , а для этого необходимо решить систему (7.2.34) с несколькими десятками тысяч неизвестных X_n и Y_j .

Если известна величина a_0 , т. е. известны асимптотические значения неизвестных X_n и Y_j в системе (7.2.34), то трудности, возникающие при суммировании указанного типа рядов, могут быть преодолены с помощью известных приемов улучшения их сходимости [19]. В связи с этим важное значение имеют результаты работы [29] по изучению асимптотических свойств неизвестных в системах типа (7.2.34).

Проводя исследования системы (7.2.34) по методике, изложенной в работе [29], можно доказать, что для нее справедлив так называемый закон асимптотических выражений:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{j \rightarrow \infty} Y_j = A_0. \quad (7.2.40)$$

Установленный характер асимптотического поведения неизвестных в системе (7.2.34) позволяет реализовать два способа существенного улучшения метода редукции.

Первый способ позволяет ввести и дать оценку значений выражений

$$V_n = \frac{\frac{C_n}{t_n} + \frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^M Y_j \frac{k_n^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2}}{\psi_n + \frac{1}{t_n} \sum_{n=1}^M \frac{k_n^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2}} \quad (n = N + 1, N + 2, \dots);$$

$$(7.2.41)$$

$$W_j = \frac{\frac{D_j}{s_j} + \frac{1}{s_j} \sum_{n=1}^N X_n \frac{\lambda_j^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2}}{\varphi_j + \frac{1}{s_j} \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_j^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2}} \quad (j = M + 1, M + 2, \dots),$$

называемых лимитантами.

В работе [29] установлено, что значения неизвестных X_n ($n > N$) и Y_j ($j > M$) в системе (7.2.34) заключаются между наименьшим b и наибольшим B значениями выражений (7.2.41) и с ростом M и N разность $B - b$ стремится к нулю.

Таким образом, решая конечную систему, образованную из системы (7.2.34), можно получить все неизвестные X_n и Y_j с заданной точностью, т. е. найти точное решение системы. Применение этого способа иллюстрируется примером (§ 7.3).

Второй способ улучшения метода редукции на основе асимптотического равенства (7.2.40) заключается в следующем.

Полагая при достаточно больших значениях N и M

$$X_{N+1} = X_{N+2} = \dots; \quad Y_{M+1} = Y_{M+2} = \dots, \quad (7.2.42)$$

конечную систему $N + M + 2$ уравнений, отвечающую системе (7.2.34), представляем в виде

$$X_n = \frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^M Y_j \frac{k_n^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} + Y_{M+1} \left[1 - \psi_n - \frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^M \frac{k_n^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} \right] +$$

$$+ \frac{C_n}{t_n} \quad (n = 1, 2, \dots, N + 1); \quad (7.2.43)$$

$$Y_j = \frac{1}{s_j} \sum_{n=1}^N X_n \frac{\lambda_j^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} + X_{N+1} \left[1 - \varphi_j - \frac{1}{s_j} \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_j^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} \right] +$$

$$+ \frac{D_j}{s_j} \quad (j = 1, 2, \dots, M + 1).$$

Такую систему удобно решать методом последовательных приближений, который описан в работе [13]. Другие методы (основанные на использовании принципа Сен-Венана, методы однородных решений и т. д.) решения задачи термоупругости для цилиндра конечной длины рассмотрены в работах [52, 96 и др.].

§ 7.3. Расчет тепловых напряжений в сплошном цилиндре конечной длины

Рассмотрим с помощью метода, изложенного в § 7.2, напряженное состояние сплошного кругового цилиндра конечной длины, вызванное температурным полем

$$T(\rho, \zeta) - T_0 = T_{00} + T_2 \rho^2, \quad (7.3.1)$$

где T_{00} , T_2 — постоянные. Предполагаем, что цилиндр свободен от внешней нагрузки.

Подставляя выражение (7.3.1) для температурного поля в соотношения (7.2.2), определяем значение коэффициентов разложения (7.2.1):

$$a_{0n} = 0, \quad a_{j0} = \frac{4T_2}{\lambda_j^2 J_0(\lambda_j)}, \quad a_{jn} = 0. \quad (7.3.2)$$

При определении коэффициента a_{j0} учитываем, что на основании уравнения $J_1(\lambda_j) = 0$

$$\int_0^1 \rho J_0(\lambda_j \rho) d\rho = 0. \quad (7.3.3)$$

Граничные условия на поверхности цилиндра приводят к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (7.2.34), которая для рассматриваемого случая принимает вид

$$\begin{aligned} t_n X_n &= \sum_{i=1}^{\infty} Y_i \frac{k_n^2}{(k_n^2 + \lambda_i^2)^2}; \\ s_j Y_j &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{\lambda_j^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T T_2 \frac{4}{\lambda_j^2}. \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

Решение этой системы находится с помощью метода, основанного на оценке границ лимитант (§ 7. 2).

Исследование проведено для кубообразного цилиндра ($\zeta_0 = 1$) при $\nu = \frac{1}{3}$.

Если при решении конечной системы, образованной из системы (7.3.4), принять во внимание лишь девять первых неизвестных, то все неизвестные определяются с точностью до 2,5%. Значения неизвестных с точностью до множителя $K_1 = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T T_2$ приводятся в табл. 17. В этой таблице знаками — и + отмечены значения неизвестных, приведенных соответственно с недостатком и избытком; величины $\Delta\%$ — относительные погрешности определения неизвестных, если в качестве расчетных приняты средние арифметические нижних и верхних значений неизвестных. Последняя строка указывает границы для всех неизвестных, номер которых больше девяти.

Перед вычислением напряжений необходимо исследовать ряды, входящие в выражения (7.2.22). Здесь ограничимся рассмотрением рядов в выражении для напряжения σ_z , поскольку особенности этих рядов характерны и для других нормальных напряжений.

Таблица 17

n, j	X_n^-/K_1	X_n^+/K_1	$\Delta, \%$	Y_j^-/K_1	Y_j^+/K_1	$\Delta, \%$
1	0,26407	0,26461	0,1	1,20495	1,20589	0,04
2	0,60268	0,60458	0,2	0,88477	0,88707	0,1
3	0,70770	0,71103	0,2	0,80087	0,80463	0,2
4	0,74337	0,74814	0,3	0,77112	0,77635	0,3
5	0,75696	0,76320	0,4	0,75866	0,76535	0,5
6	0,76226	0,76996	0,5	0,75284	0,76078	0,5
7	0,76409	0,77319	0,6	0,74995	0,75950	0,6
8	0,76437	0,77482	0,7	0,74843	0,75931	0,7
9	0,76392	0,77566	0,8	0,74758	0,75974	0,8
>9	0,74389	0,77908	2,5	0,74389	0,77908	2,5

Рассматривая формулу (7.2.22) для σ_z при $\zeta = \zeta_0$, выражая в нем с помощью соотношений (7.2.26) и (7.2.33) постоянные $\alpha_n, \beta_n, \gamma_j, \delta_{j*}$ через X_n, Y_j и опуская элементарное решение, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} (\sigma_z)_{\zeta=\zeta_0} = & \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} X_n \left[\rho \frac{I_1(k_n \rho)}{I_1(k_n)} - \frac{I_0(k_n)}{I_1(k_n)} \cdot \frac{I_0(k_n \rho)}{I_1(k_n)} + \right. \\ & \left. + \frac{2}{k_n} \cdot \frac{I_0(k_n \rho)}{I_1(k_n)} \right] - \frac{\zeta_0}{4} \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \frac{1}{\lambda_j J_0(\lambda_j)} \left[\operatorname{cth} \lambda_j \zeta_0 + \frac{\lambda_j \zeta_0}{\operatorname{sh}^2 \lambda_j \zeta_0} \right] J_0(\lambda_j \rho). \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

Принимая во внимание асимптотические выражения для бесселевых и гиперболических функций, заключаем, что в выражении (7.3.5) первый ряд (суммирование по n) сходится как ряд $\sum_n e^{-k_n(1-\rho)}$ для всех значений $\rho < 1$, а второй ряд (суммирование по j) сходится при $\rho = 0$ так же медленно, как и ряд $\sum_j \frac{(-1)^j}{V_j}$. Каждый из этих рядов расходится при $\rho = 1$, однако их сумма имеет конечное значение.

Действительно, оставляя в выражении (7.3.5) лишь главные части, т. е. заменяя входящие в него функции их асимптотическими выражениями, можем записать

$$\frac{1}{2\mu} \lim_{\rho \rightarrow 1} (\tilde{\sigma}_z)_{\zeta=\zeta_0} = \frac{A_0}{4} \lim_{\rho \rightarrow 1} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} [k_n(\rho - 1) + 1] \frac{1}{V_\rho} e^{-k_n(1-\rho)} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\zeta_0}{\pi} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{4} (\rho - 1)}{\sqrt{\rho}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j \cos j\pi\rho}{j} \Bigg\} = \\
& = \frac{A_0}{4} \lim_{\rho \rightarrow 1} \left\{ \frac{\rho - 1}{\sqrt{\rho}} \cdot \frac{e^{-\frac{\pi}{\zeta_0} (1-\rho)}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\zeta_0} (1-\rho)}} + \right. \\
& \left. + \frac{\zeta_0}{\pi \sqrt{\rho}} \left[\cos \frac{\pi}{4} (\rho - 1) \ln \left(2 \cos \frac{\pi\rho}{2} \right) - \ln \left(1 - e^{-\frac{\pi}{\zeta_0} (1-\rho)} \right) \right] \right\} = \\
& = \frac{A_0 \zeta_0}{4\pi} [\ln \zeta_0 - 1]. \tag{7.3.6}
\end{aligned}$$

Следует отметить, что значение главной части выражения для σ_z^* на ребре цилиндра не изменяется при подходе к ребру, когда $\rho \rightarrow 1$ и $\zeta \rightarrow \zeta_0$, т. е. $\lim_{\rho \rightarrow 1} (\sigma_z^*)_{\zeta=\zeta_0} = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} (\sigma_z^*)_{\rho=1}$.

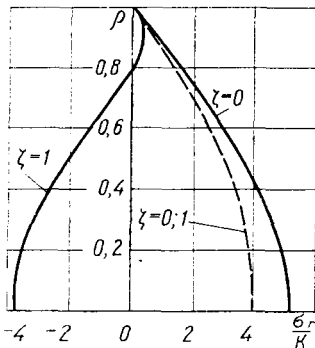


Рис. 50.

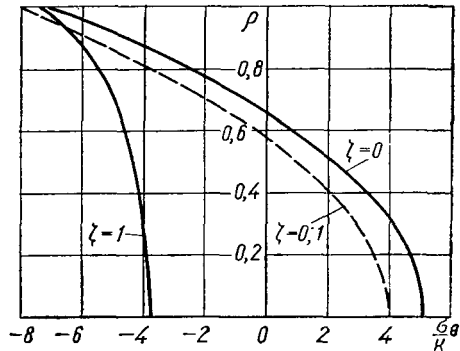


Рис. 51.

Зная с определенной степенью точности значение постоянной в соотношении (7.2.40) и используя известные методы улучшения сходимости рядов [19], вычисляем напряжения по формулам (7.2.22), (7.2.5) и (7.1.11). Результаты вычисления напряжений σ_r , σ_θ , σ_z , σ_{rz} с точностью до постоянного множителя $K = \frac{\mu(1+\nu)\alpha_T T_2}{8(1-\nu)}$ приведены в табл. 18—21.

На рис. 50—52 представлено распределение напряжений σ_r , σ_θ , σ_z вдоль радиуса цилиндра в сечениях $\zeta = 0$ и $\zeta = 1$ при точном удовлетворении граничных условий (сплошные линии) и при удовлетворении граничных условий для σ_z на торцах ($\zeta = \pm 1$) в смысле принципа Сен-Венана (штриховые линии).

Таблица 18

ξ	σ_r/K										
	$p=0$	$p=0.1$	$p=0.2$	$p=0.3$	$p=0.4$	$p=0.5$	$p=0.6$	$p=0.7$	$p=0.8$	$p=0.9$	$p=1.0$
0	5,162	5,094	4,893	4,563	4,114	3,560	2,920	2,215	1,474	0,726	+0,002
0.1	5,140	5,073	4,873	4,545	4,100	3,550	2,912	2,210	1,470	0,723	-0,002
0.2	5,066	5,001	4,806	4,488	4,053	3,514	2,887	2,194	1,460	0,718	+0,002
0.3	4,920	4,858	4,674	4,372	3,957	3,441	2,836	2,161	1,441	0,707	+0,003
0.4	4,663	4,607	4,441	4,161	3,786	3,307	2,741	2,101	1,408	0,694	+0,001
0.5	4,242	4,195	4,055	3,822	3,496	3,079	2,576	1,996	1,353	0,672	+0,002
0.6	3,582	3,548	3,447	3,275	3,029	2,706	2,302	1,819	1,261	0,643	+0,002
0.7	2,583	2,568	2,520	2,436	2,306	2,119	1,865	1,531	1,110	0,595	-0,001
0.8	1,122	1,131	1,156	1,190	1,219	1,228	1,191	1,080	0,967	0,522	+0,003
0.9	-0,956	-0,916	-0,800	-0,612	-0,370	-0,093	0,183	0,407	0,509	0,409	-0,009
1,0	-3,776	-3,758	-3,526	-3,162	-2,646	-2,022	-1,303	-0,569	0,086	0,419	0

Таблица 19

ξ	σ_{θ}/K										
	$p=0$	$p=0.1$	$p=0.2$	$p=0.3$	$p=0.4$	$p=0.5$	$p=0.6$	$p=0.7$	$p=0.8$	$p=0.9$	$p=1.0$
0	5,162	5,044	4,687	4,091	3,254	2,172	0,842	-0,741	-2,580	-4,679	-7,038
0.1	5,140	5,022	4,668	4,075	3,243	2,165	0,841	-0,734	-2,566	-4,659	-7,016
0.2	5,066	4,950	4,602	4,019	3,201	2,141	0,836	-0,719	-2,529	-4,601	-6,936
0.3	4,920	4,808	4,470	3,905	3,110	2,081	0,810	-0,709	-2,481	-4,514	-6,816
0.4	4,663	4,556	4,234	3,697	2,939	1,953	0,734	-0,727	-2,439	-4,412	-6,654
0.5	4,242	4,142	3,844	3,344	2,635	1,714	0,567	-0,813	-2,439	-4,321	-6,479
0.6	3,582	3,493	3,225	2,773	2,133	1,296	0,249	-1,021	-2,525	-4,282	-6,308
0.7	2,583	2,508	2,278	1,891	1,339	0,612	-0,303	-1,424	-2,769	-4,355	-6,203
0.8	1,122	1,062	0,881	-0,375	0,136	0,449	-1,196	-2,125	-3,261	-4,628	-6,234
0.9	-0,956	-0,997	-1,120	-1,328	-1,630	-2,036	-2,565	-3,245	-4,114	-5,125	-6,560
1,0	-3,776	-3,852	-3,904	-4,006	-4,142	-4,337	-4,594	-4,954	-5,453	-6,202	-7,338

Таблица 20

ζ	σ_z/K										
	$\rho = 0$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,2$	$\rho = 0,3$	$\rho = 0,4$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,6$	$\rho = 0,7$	$\rho = 0,8$	$\rho = 0,9$	$\rho = 1,0$
0	5,012	4,943	4,728	4,353	3,787	2,992	1,916	0,498	-1,332	-3,651	-6,532
0,1	4,927	4,859	4,646	4,353	3,728	2,949	1,892	0,498	-1,306	-3,596	-6,457
0,2	4,674	4,610	4,415	4,072	3,553	2,819	1,821	0,495	-1,230	-3,437	-6,211
0,3	4,260	4,204	4,032	3,727	3,263	2,604	1,698	0,486	-1,107	-3,170	-5,807
0,4	3,701	3,655	3,511	3,256	2,866	2,304	1,524	0,466	-0,945	-2,801	-5,218
0,5	3,022	2,987	2,876	2,679	2,373	1,926	1,298	0,428	-0,753	-2,338	-4,454
0,6	2,262	2,238	2,162	2,024	1,808	1,486	1,027	0,365	-0,548	-1,799	-3,508
0,7	1,482	1,467	1,423	1,341	1,210	1,010	0,712	0,276	-0,350	-1,222	-2,426
0,8	0,765	0,758	0,738	0,700	0,640	0,544	0,396	0,168	-0,178	-0,671	-1,284
0,9	0,226	0,223	0,218	0,205	0,191	0,165	0,127	0,060	-0,049	-0,222	-0,326
1,0	0,074	0,004	0,009	-0,002	0,004	-0,002	0,003	-0,002	0,003	-0,005	0,200

Таблица 21

ζ	σ_z/K										
	$\rho = 0$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,2$	$\rho = 0,3$	$\rho = 0,4$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,6$	$\rho = 0,7$	$\rho = 0,8$	$\rho = 0,9$	$\rho = 1,0$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0	0,084	0,164	0,233	0,288	0,323	0,330	0,305	0,243	0,141	0
0,2	0	0,167	0,323	0,461	0,570	0,639	0,656	0,609	0,488	0,286	0
0,3	0	0,243	0,472	0,675	0,837	0,941	0,971	0,907	0,733	0,432	0
0,4	0	0,310	0,604	0,865	1,073	1,215	1,261	1,189	0,970	0,580	0
0,5	0	0,361	0,705	1,013	1,264	1,440	1,505	1,431	1,183	0,719	0
0,6	0	0,388	0,760	1,097	1,379	1,578	1,665	1,601	1,343	0,834	0
0,7	0	0,381	0,747	1,004	1,371	1,583	1,686	1,643	1,399	0,888	0
0,8	0	0,324	0,637	0,930	1,187	1,386	1,496	1,479	1,278	0,827	0
0,9	0	0,202	0,400	0,587	0,757	0,896	0,987	0,994	0,876	0,560	0
1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

В сечении $\zeta = 1$ напряжения σ_r , σ_θ , σ_z , полученные при интегральном удовлетворении граничного условия для σ_z , существенно отличаются от соответствующих напряжений по точному решению как по величине, так и по знаку.

По приближенному решению распределение напряжений σ_r , σ_θ , σ_z в сечении $\zeta = 1$ совпадает с соответствующим распределением напряжений в длинном цилиндре, тогда как по точному решению

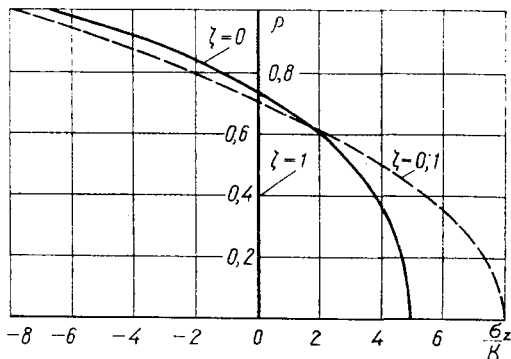


Рис. 52.

напряжению σ_θ в этом сечении всюду сжимающее и достигает максимального значения $\sigma_\theta = -7,338K$ на радиусе $\rho = 1$; напряжение σ_r при $\rho < 0,8$ также сжимающее, а $\sigma_z = 0$.

В сечении $\zeta = 0$ распределение напряжений σ_r , σ_θ , σ_z по приближенному решению носит такой же характер, как и по точному решению; при этом по точному решению на радиусе $\rho = 0$ растягивающие напряжения σ_r , $\sigma_\theta = \sigma_r$ больше на 20%, а растягивающее напряжение σ_z меньше на 38%, в то время как на радиусе $\rho = 1$ сжимающие напряжения σ_θ и σ_z соответственно меньше на 15 и 20%.

§ 7.4. Тепловые напряжения в полой сфере

Исследуем термоупругое напряженное состояние полый сферы под действием осесимметричного температурного поля $T(r, \varphi)$. Предполагаем, что сфера свободно деформируется, при этом внутренняя ($r = r_1$) и наружная ($r = r_2$) поверхности ее свободны от внешней нагрузки (рис. 53).

Определим сначала частное решение уравнения (7.1.19) для термоупругого потенциала перемещений Φ .

Однородное уравнение, соответствующее уравнению (7.1.19), является уравнением Лапласа в сферических координатах; его решение, как известно, находится методом разделения переменных в виде суммы слагаемых $\text{const } r^n P_n(\cos \varphi)$, где n — це-

лое число (положительное или отрицательное); $P_n(\cos \varphi)$ — полином Лежандра n -го порядка; $P_n(\cos \varphi)$ — решение уравнения [10]:

$$\frac{d^2 P_n(\cos \varphi)}{d\varphi^2} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi} + n(n+1)P_n(\cos \varphi) = 0. \quad (7.4.1)$$

Для целочисленных значений n полиномы Лежандра образуют полную ортогональную систему функций в интервале $0 \leq \varphi \leq \pi$, так что

$$\int_0^\pi P_n(\cos \varphi) P_m(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ \frac{2}{2n+1} & \text{при } n = m. \end{cases} \quad (7.4.2)$$

Из теории специальных функций [10, 33] известно, что разложение функций в ряд по полиномам Лежандра обладает теми же свойствами, что и разложение функций в ряд Фурье.

Чтобы построить частное решение уравнения (7.1.19), представим температурное поле $T(r, \varphi)$ — T_0 в виде ряда по полиномам Лежандра:

$$T(r, \varphi) - T_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r) P_n(\cos \varphi). \quad (7.4.3)$$

Коэффициенты разложения находятся по формуле

$$a_n(r) = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi [T(r, \varphi) - T_0] \times \\ \times P_n(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi. \quad (7.4.4)$$

Частное решение уравнения (7.1.19) ищем в виде ряда

$$\Phi(r; \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(r) P_n(\cos \varphi). \quad (7.4.5)$$

Подставляя выражения (7.4.3) и (7.4.5) в уравнение (7.1.19) и используя уравнение (7.4.1), получаем уравнение для определения неизвестных функций $b_n(r)$:

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{db_n(r)}{dr} \right] - n(n+1)b_n(r) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T r^2 a_n(r). \quad (7.4.6)$$

Поскольку общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (7.4.6), имеет вид $C_1 r^n + C_2 r^{-n-1}$ (C_1, C_2 — постоянные интегрирования), то частное решение неоднородного уравнения (7.4.6), найденное методом вариации произвольных постоянных, можно представить выражением

$$b_n(r) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\alpha_T}{2n+1} [r^n \int r^{1-n} a_n(r) dr - r^{-n-1} \int r^{n+2} a_n(r) dr]. \quad (7.4.7)$$

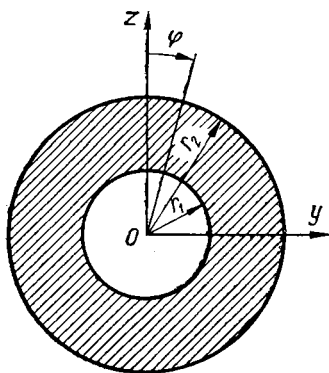


Рис. 53.

В случае стационарного теплообмена без источников тепла выражение для температурного поля, являющееся решением уравнения Лапласа в сферических координатах, имеет вид

$$T(r, \varphi) - T_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n r^n + \beta_n r^{-n-1}) P_n(\cos \varphi), \quad (7.4.8)$$

где коэффициенты α_n и β_n предполагаются известными; они определяются в каждом конкретном случае на основании заданных условий теплообмена.

Частное решение (7.4.7) для $b_n(r)$ в этом случае приобретает вид

$$b_n(r) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \left[\frac{\alpha_n}{2(2n+3)} r^{n+2} - \frac{\beta_n}{2(2n-1)} r^{-n+1} \right]. \quad (7.4.9)$$

Зная частное решение (7.4.5) для термоупругого потенциала перемещений $\Phi(r, \varphi)$, по формулам (7.1.27) и (7.1.29) определяем соответствующие частные решения для компонентов тензора деформации и тензора напряжения; при этом используем уравнение (7.4.1).

Ниже приводим результаты вычислений для компонентов тензора напряжения:

в случае температурного поля (7.4.3)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_r^{(T)}}{2\mu} &= -\frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left[2 \frac{db_n(r)}{dr} - \frac{n(n+1)b_n(r)}{r} \right] P_n(\cos \varphi); \\ \frac{\sigma_\varphi^{(T)}}{2\mu} &= -\frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[r \frac{db_n(r)}{dr} \right] P_n(\cos \varphi) + \right. \\ &+ \left. b_n(r) \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi} \operatorname{ctg} \varphi \right\}; \\ \frac{\sigma_\theta^{(T)}}{2\mu} &= -\frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[r \frac{db_n(r)}{dr} \right] P_n(\cos \varphi) - \right. \\ &- \left. n(n+1)b_n(r) P_n(\cos \varphi) - b_n(r) \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi} \operatorname{ctg} \varphi \right\}; \\ \frac{\sigma_{r\varphi}^{(T)}}{2\mu} &= \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{db_n(r)}{dr} - \frac{b_n(r)}{r} \right] \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi}; \end{aligned} \right\} \quad (7.4.10)$$

в случае стационарного температурного поля (7.4.8)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_r^{(T)}}{2\mu} &= \frac{(1+\nu)\alpha_T}{2(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2-n-4}{2n+3} \alpha_n r^n - \right. \\ &- \left. \frac{n^2+3n-2}{2n-1} \beta_n r^{-n-1} \right) P_n(\cos \varphi); \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{\varphi}^{(T)}}{2\mu} &= -\frac{(1+\nu)\alpha_T}{2(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{(n+2)^2}{2n+3} \alpha_n r^n - \right. \right. \\
&- \left. \left. \frac{(n-1)^2}{2n-1} \beta_n r^{-n-1} \right) P_n(\cos \varphi) + \right. \\
&+ \left. \left(\frac{\alpha_n r^n}{2n+3} - \frac{\beta_n r^{-n-1}}{2n-1} \right) \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi} \operatorname{ctg} \varphi \right]; \\
\frac{\sigma_{\theta}^{(T)}}{2\mu} &= -\frac{(1+\nu)\alpha_T}{2(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{3n+4}{2n+3} \alpha_n r^n + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{3n-1}{2n-1} \beta_n r^{-n-1} \right) P_n(\cos \varphi) - \right. \\
&- \left. \left(\frac{\alpha_n r^n}{2n+3} - \frac{\beta_n r^{-n-1}}{2n-1} \right) \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi} \operatorname{ctg} \varphi \right]; \\
\frac{\sigma_{r\varphi}^{(T)}}{2\mu} &= \\
&= \frac{(1+\nu)\alpha_T}{2(1-\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3} \alpha_n r^n + \frac{n}{2n-1} \beta_n r^{-n-1} \right) \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi}.
\end{aligned} \tag{7.4.11}$$

Для сплошной сферы в выражениях (7.4.11) следует положить $\beta_n = 0$, а для пространства со сферической полостью $\alpha_n = 0$.

Переходим к построению решений u_r^* и u_{θ}^* однородного уравнения, соответствующего уравнению (2.2.1). Для этого сначала найдем функции e_B и ω_B , входящие в систему уравнений (7.1.21) относительно функций B_r и B_{φ} . Функции e_B и ω_B — решения уравнений (7.1.22) и (7.1.23). Методом разделения переменных решение уравнения (7.1.22) представляется в виде суммы слагаемых

$$e_{Bn} = C_n r^n P_n(\cos \varphi), \tag{7.4.12}$$

а решение уравнения (7.1.23) — в виде суммы слагаемых

$$\omega_{Bn} = D_n r^n \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi}. \tag{7.4.13}$$

Постоянные C_n и D_n не могут быть независимыми, так как функции e_{Bn} и ω_{Bn} связаны уравнениями (7.1.20). Подставляя выражения для e_{Bn} и ω_{Bn} в эти уравнения, находим

$$C_n = -(n+1)D_n. \tag{7.4.14}$$

Заменяя в уравнениях (7.1.21) функции e_{Bn} и ω_{Bn} их выражениями (7.4.12) и (7.4.13) и принимая во внимание равенство (7.4.14), для определения функций B_{rn} и $B_{\varphi n}$ получаем следующую систему

уравнений:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_{rn}) + \frac{1}{\sin \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi B_{\varphi n}) = -(n+1) D_n r^{n+1} P_n(\cos \varphi),$$

$$\frac{\partial (r B_{\varphi n})}{\partial r} - \frac{\partial B_{rn}}{\partial \varphi} = D_n r^{n+1} \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi}. \quad (7.4.15)$$

Частное решение этой системы уравнений представляется в виде

$$B_{rn} = -(n+1) a_n r^{n+1} P_n(\cos \varphi), \quad B_{\varphi n} = a_n r^{n+1} \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi}, \quad (7.4.16)$$

где введена новая постоянная интегрирования $a_n = \frac{D_n}{2n+3}$.

Вследствие функционального произвола, существующего в решении (7.1.18), общее решение системы уравнений (7.4.15) не используется; соответствующая часть решения может быть охвачена функцией B_0 . Эту функцию представляем в виде суммы слагаемых

$$B_{0n} = -b_n r^n P_n(\cos \varphi). \quad (7.4.17)$$

Подставляя выражения (7.4.16) и (7.4.17) для функций B_r , B_φ и B_0 в формулы (7.1.18) и суммируя по целочисленным значениям n от $-\infty$ до ∞ , с учетом рекуррентного соотношения для полиномов Лежандра $P_n(\cos \varphi) = P_{-(n+1)}(\cos \varphi)$ получаем

$$u_r^* = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n-2+4\nu) a_n r^{n+1} + n b_n r^{n-1} +$$

$$+ n(n+3-4\nu) c_n r^{-n} - (n+1) d_n r^{-n-2}] P_n(\cos \varphi);$$

$$u_\varphi^* = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+5-4\nu) a_n r^{n+1} + b_n r^{n-1} +$$

$$+ (4-n-4\nu) c_n r^{-n} + d_n r^{-n-2}] \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi}. \quad (7.4.18)$$

Здесь введены постоянные $c_n = a_{-(n+1)}$, $d_n = b_{-(n+1)}$. Применяя далее формулы (7.1.28) и (7.1.30), вычисляем напряжения

$$\frac{\sigma_r^*}{2\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n^2-n-2-2\nu) a_n r^n +$$

$$+ n(n-1) b_n r^{n-2} - n(n^2+3n-2\nu) c_n r^{-n-1} +$$

$$+ (n+1)(n+2) d_n r^{-n-3}] P_n(\cos \varphi);$$

$$\frac{\sigma_\varphi^*}{2\mu} = - \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n^2+4n+2+2\nu) a_n r^n + n^2 b_n r^{n-2} -$$

$$- n(n^2-2n-1+2\nu) c_n r^{-n-1} +$$

$$+ (n+1)^2 d_n r^{-n-3}] P_n(\cos \varphi) + [(n+5-4\nu) a_n r^n +$$

$$\begin{aligned}
& + b_n r^{n-2} + (4 - n - 4\nu) c_n r^{-n-1} + d_n r^{-n-3} \Big] \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi} \operatorname{ctg} \varphi; \\
\frac{\sigma_{\theta}^*}{2\mu} = & \sum_{n=0}^{\infty} \{ [(n+1)(n-2-2\nu-4n\nu) a_n r^n + n b_n r^{n-2} + \\
& + n(n+3-4n\nu-2\nu) c_n r^{-n-1} - \\
& - (n+1) d_n r^{-n-3}] P_n(\cos \varphi) + [(n+5-4\nu) a_n r^n + \\
& + b_n r^{n-2} + (4-n-4\nu) c_n r^{-n-1} + \\
& + d_n r^{-n-3}] \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi} \operatorname{ctg} \varphi \}; \\
\frac{\sigma_{r\varphi}^*}{2\mu} = & \sum_{n=1}^{\infty} \{ (n^2 + 2n - 1 + 2\nu) a_n r^n + (n-1) b_n r^{n-2} + \\
& + (n^2 - 2 + 2\nu) c_n r^{-n-1} - (n+2) d_n r^{-n-3} \} \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi}.
\end{aligned} \tag{7.4.19}$$

Для определения постоянных интегрирования a_n , b_n , c_n , d_n используем условия отсутствия напряжений на внутренней ($r = r_1$) и наружной ($r = r_2$) поверхностях сферы:

$$\begin{aligned}
\sigma_r^* + \sigma_r^{(T)} &= 0 \text{ при } r = r_1, r = r_2; \\
\sigma_{r\varphi}^* + \sigma_{r\varphi}^{(T)} &= 0 \text{ при } r = r_1, r = r_2.
\end{aligned} \tag{7.4.20}$$

Остановимся отдельно на случаях $n = 0$, $n = 1$ и $n \geq 2$. Для $n = 0$ $\frac{dP_0}{d\varphi} = 0$ и согласно (7.4.10) и (7.4.19) $\sigma_{r\varphi} = 0$; остальные напряжения — функции только радиуса r , при этом $\sigma_{\varphi} = \sigma_{\theta}$.

Из четырех постоянных интегрирования остаются только две: a_0 и d_0 . Для их определения получаем систему двух алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
2(1 + \nu) a_0 - 2d_0 r_1^{-3} &= -\frac{2}{r_1} \cdot \frac{db_0(r_1)}{dr}; \\
2(1 + \nu) a_0 - 2d_0 r_2^{-3} &= -\frac{2}{r_2} \cdot \frac{db_0(r_2)}{dr},
\end{aligned} \tag{7.4.21}$$

откуда

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{(1 + \nu)(r_1^3 - r_2^3)} \left[r_2^2 \frac{db_0(r_2)}{dr} - r_1^2 \frac{db_0(r_1)}{dr} \right]; \\
d_0 &= \frac{1}{r_1^3 - r_2^3} r_1^2 r_2^2 \left[r_1 \frac{db_0(r_2)}{dr} - r_2 \frac{db_0(r_1)}{dr} \right].
\end{aligned} \tag{7.4.22}$$

Определяя в случае стационарного температурного поля по формуле (7.4.9)

$$b_0(r) = \frac{(1 + \nu) \alpha_T}{2(1 - \nu)} \left(\frac{\alpha_0}{3} r^2 + \beta_0 r \right),$$

получаем напряжения

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -4\mu \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{db_0(r)}{dr} + (1+\nu)a_0 - \frac{1}{r^3} d_0 \right], \\ \sigma_\varphi = \sigma_\theta &= -2\mu \left[\frac{d^2b_0(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{db_0(r)}{dr} + 2(1+\nu)a_0 + \frac{d_0}{r^3} \right].\end{aligned}\quad (7.4.23)$$

Рассмотрим решение для сплошной сферы при температурном поле $T(r)$, обладающем центральной симметрией. На основании формул (7.4.6) и (7.4.10) находим

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(T)} &= -2\mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \frac{2}{r^3} \int_0^r r^2 [T(r) - T_0] dr = \\ &= -\frac{4\mu}{3} \cdot \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T T_*(r);\end{aligned}\quad (7.4.24)$$

$$\sigma_\varphi^{(T)} = \sigma_\theta^{(T)} = \frac{2\mu}{3} \cdot \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \{T_*(r) - 3[T(r) - T_0]\},$$

где $T_*(r)$ — среднее приращение температуры сферы радиуса

$$r, \quad T_*(r) = \frac{3}{r^3} \int_0^r r^2 [T(r) - T_0] dr.$$

Для удовлетворения условию отсутствия напряжений на поверхности сферы $r = r_2$ к решению (7.4.24) добавляем равномерное напряженное состояние

$$\sigma_r^* = \sigma_\varphi^* = \sigma_\theta^* = \frac{4\mu}{3} \cdot \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T T_*(r_2).\quad (7.4.25)$$

В результате получаем известное решение термоупругой задачи для сплошной сферы в случае центральной симметрии при отсутствии напряжений на ее поверхности [52]:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{4\mu}{3} \cdot \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T [T_*(r_2) - T_*(r)]; \\ \sigma_\varphi = \sigma_\theta &= \frac{2\mu}{3} \cdot \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \{2T_*(r_2) + T_*(r) - 3[T(r) - T_0]\}.\end{aligned}\quad (7.4.26)$$

В случае $n = 1$ коэффициенты при постоянной b_1 в выражениях (7.4.19) обращаются в нуль и для определения оставшихся трех постоянных a_1, c_1, d_1 имеем систему четырех алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}-4(1+\nu)r_1a_1 - \frac{2(2-\nu)}{r_1^2}c_1 + \frac{6}{r_1^4}d_1 &= \\ = \frac{2}{r_1} \left[\frac{db_1(r_1)}{dr} - \frac{b_1(r_1)}{r_1} \right] &= \sigma_1;\end{aligned}\quad \left| \right.$$

$$\begin{aligned}
 & 2(1+\nu)r_1a_1 - \frac{1-2\nu}{r_1^2}c_1 - \frac{3}{r_1^4}d_1 = \\
 & = \frac{1}{r_1} \left[\frac{b_1(r_1)}{r_1} - \frac{db_1(r_1)}{dr} \right] = \tau_1; \\
 & -4(1+\nu)r_2a_1 - \frac{2(2-\nu)}{r_2^2}c_1 + \frac{6}{r_2^4}d_1 = \\
 & = \frac{2}{r_2} \left[\frac{db_1(r_2)}{dr} - \frac{b_1(r_2)}{r_2} \right] = \sigma_2; \\
 & 2(1+\nu)r_2a_1 - \frac{1-2\nu}{r_2^2}c_1 - \frac{3}{r_2^4}d_1 = \\
 & = \frac{1}{r_2} \left[\frac{b_1(r_2)}{r_2} - \frac{db_1(r_2)}{dr} \right] = \tau_2.
 \end{aligned} \tag{7.4.27}$$

Для существования решения системы уравнений (7.4.27) необходимо, чтобы определитель четвертого порядка, составленный из ее коэффициентов и правых частей, был равен нулю. В рассматриваемом случае этот определитель

$$\Delta = \frac{36(r_2^5 - r_1^5)}{r_1^6 r_2^6} (1 - \nu^2) [r_1^2(\sigma_1 + 2\tau_1) - r_2^2(\sigma_2 + 2\tau_2)] \tag{7.4.28}$$

и, как следует из выражений для правых частей (7.4.27), обращается в нуль.

Заметим, что существование решения системы уравнений (7.4.27) становится очевидным, если положить $c_1 = 0$; система четырех уравнений (7.4.27) при этом превращается в систему двух уравнений относительно постоянных a_1 и d_1 .

Решение системы уравнений (7.4.27) записывается в виде

$$\begin{aligned}
 c_1 = 0, \quad a_1 &= \frac{\left[r_2 \frac{db_1(r_2)}{dr} - b_1(r_2) \right] r_2^2 - \left[r_1 \frac{db_1(r_1)}{dr} - b_1(r_1) \right] r_1^2}{2(1+\nu)(r_1^5 - r_2^5)}; \\
 d_1 &= \frac{r_1^4 r_2^4}{3(r_1^5 - r_2^5)} \left\{ \frac{r_1}{r_2} \left[\frac{db_1(r_2)}{dr} - \frac{b_1(r_2)}{r_2} \right] - \frac{r_2}{r_1} \left[\frac{db_1(r_1)}{dr} - \frac{b_1(r_1)}{r_1} \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{7.4.29}$$

Можно показать, что определитель системы четырех алгебраических уравнений для каждого $n \geq 2$ отличен от нуля.

Таким образом, задача термоупругости для осесимметрично деформированной сферы может считаться решенной. Эта задача рассматривалась также в работах [38, 95, 97].

§ 7.5. Тепловые напряжения, возникающие при аэродинамическом нагреве полой сферы в сверхзвуковом потоке

Задача о тепловых напряжениях, возникающих при аэродинамическом нагреве полой сферы в сверхзвуковом потоке, рассматривается в качестве примера использования общего решения осесимметричной задачи термоупругости для полой сферы (§ 7.4).

Согласно результатам работы [97] тепловые напряжения в полусферической носовой части летательного аппарата достигают наибольшего значения при установившемся состоянии аэродинамического нагрева.

При нулевом угле атаки плотность теплового потока (притока тепла) $q' = -q$ (положительное направление вектора плотности теплового потока \vec{q} в формуле (1.4.5) совпадает с направлением внешней нормали к поверхности) на наружной поверхности ($r = r_2$) приближенно определяется равенством

$$q'(\varphi) = q_0 [\gamma P_0(\cos \varphi) + (1 - \gamma) P_2(\cos \varphi)] \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right), \quad (7.5.1)$$

где q_0 — плотность теплового потока в точке $\varphi = 0$; γ — параметр, определяемый числом Маха; $P_n(\cos \varphi)$ — полином Лежандра n -го порядка.

Для упрощения задачи полусферическую носовую часть дополняем до замкнутой сферической оболочки, а выражение (7.5.1) для плотности теплового потока распространяем на наружную поверхность ($r = r_2$) дополнительной полусферы $\left(\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi\right)$. Полагаем, что температура T_0 на внутренней поверхности сферы ($r = r_1$, $0 \leq \varphi \leq \pi$) — постоянная величина. Эти предположения не вызывают существенных погрешностей при определении распределения тепловых напряжений в носовой части сферической оболочки и позволяют использовать сравнительно простое решение осесимметричной задачи термоупругости для замкнутой полой сферы. Стационарное осесимметричное температурное поле в сферической оболочке определяется выражением (7.4.8). Коэффициенты α_n и β_n , входящие в это выражение, находятся в соответствии с (3.2.8) из граничных условий теплообмена:

$$\begin{aligned} T(r, \varphi) - T_0 &= 0 \quad \text{при } r = r_1; \\ \lambda_q \frac{\partial T(r, \varphi)}{\partial r} &= q'(\varphi) \quad \text{при } r = r_2. \end{aligned} \quad (7.5.2)$$

Удовлетворяя граничным условиям (7.5.2), находим для коэффициентов α_n и β_n , отличных от нуля, следующие значения:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\gamma q_0 r_2^2}{\lambda_q r_1}, \quad \beta_0 = -\frac{\gamma q_0 r_2^2}{\lambda_q}; \\ \alpha_2 &= \frac{(1-\gamma) q_0 r_2^4}{\lambda_q (3r_1^5 + 2r_2^5)}, \quad \beta_2 = -\frac{(1-\gamma) q_0 r_1^5 r_2^4}{\lambda_q (3r_1^5 + 2r_2^5)}. \end{aligned} \quad (7.5.3)$$

Частные решения (7.4.11) для компонентов тензора напряжения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_r^{(T)}}{K} &= \alpha_{0*} + 2\beta_{0*} \rho^{-1} - 2(\alpha_{2*} \rho^2 - 4\beta_{2*} \rho^{-3}) P_2(\cos \varphi); \\ \frac{\sigma_\varphi^{(T)}}{K} &= \alpha_{0*} + \beta_{0*} \rho^{-1} - (16\alpha_{2*} \rho^2 + \beta_{2*} \rho^{-3}) P_2(\cos \varphi) - \\ &- (\alpha_{2*} \rho^2 + \beta_{2*} \rho^{-3}) \frac{dP_2(\cos \varphi)}{d\varphi} \operatorname{ctg} \varphi; \\ \frac{\sigma_\theta^{(T)}}{K} &= \alpha_{0*} + \beta_{0*} \rho^{-1} - 5(2\alpha_{2*} \rho^2 - \beta_{2*} \rho^{-3}) P_2(\cos \varphi) + \\ &+ (\alpha_{2*} \rho^2 + \beta_{2*} \rho^{-3}) \frac{dP_2(\cos \varphi)}{d\varphi} \operatorname{ctg} \varphi; \\ \frac{\sigma_{r\varphi}^{(T)}}{K} &= (3\alpha_{2*} \rho^2 - 2\beta_{2*} \rho^{-3}) \frac{dP_2(\cos \varphi)}{d\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (7.5.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} K &= \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \frac{r_2 q_0}{\lambda_q}; \quad \rho = \frac{r}{r_2}; \\ \alpha_{0*} &= -\frac{4}{3} \gamma \lambda^{-1}; \quad \beta_{0*} = \gamma; \quad \alpha_{2*} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1-\gamma}{3\lambda^5 + 2}; \\ \beta_{2*} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{(1-\gamma) \lambda^5}{3\lambda^5 + 2}, \end{aligned} \quad (7.5.5)$$

где $\lambda = \frac{r_1}{r_2}$.

Предполагая, что на внутренней ($r = r_1$) и наружной ($r = r_2$) поверхностях сферы напряжения отсутствуют, и удерживая в связи с этим в общем решении (7.4.19) только члены с $n = 0$ и $n = 2$, определяем следующие компоненты тензора напряжения для однородной задачи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_r^*}{K} &= -2(1+\nu) a_0 + 2d_0 \rho^{-3} + (-6\nu a_2 \rho^2 + 2b_2 - \\ &- 4(5-\nu) c_2 \rho^{-3} + 12d_2 \rho^{-5}) P_2(\cos \varphi); \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{\varphi}^*}{K} &= -2(1+\nu)a_0 - d_0\rho^{-3} - [6(7+\nu)a_2\rho^2 + 4b_2 + \\
&+ 2(1-2\nu)c_2\rho^{-3} + 9d_2\rho^{-5}]P_2(\cos\varphi) - [(7-4\nu)a_2\rho^2 + \\
&+ b_2 + 2(1-2\nu)\rho^{-3} + d_2\rho^{-5}]\frac{dP_2(\cos\varphi)}{d\varphi}\operatorname{ctg}\varphi; \\
\frac{\sigma_{\theta}^*}{K} &= -2(1+\nu)a_0 - d_0\rho^{-3} - [30\nu a_2\rho^2 - 2b_2 - 10(1- \\
&- 2\nu)c_2\rho^{-3} + 3d_2\rho^{-5}]P_2(\cos\varphi) + [(7-4\nu)a_2\rho^2 + b_2 + \\
&+ 2(1-2\nu)c_2\rho^{-3} + d_2\rho^{-5}]\frac{dP_2(\cos\varphi)}{d\varphi}\operatorname{ctg}\varphi; \\
\frac{\sigma_{r\varphi}^*}{K} &= [(7+2\nu)a_2\rho^2 + b_2 + 2(1+\nu)c_2\rho^{-3} - \\
&- 4d_2\rho^{-5}]\frac{dP_2(\cos\varphi)}{d\varphi}.
\end{aligned}
\tag{7.5.6}$$

Постоянные интегрирования $a_0, d_0, a_2, b_2, c_2, d_2$, входящие в выражения (7.5.6), на основании граничных условий (7.4.20) определяются из следующих систем алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
-2(1+\nu)a_0 + 2d_0 &= -(\alpha_0 + 2\beta_0); \\
-2(1+\nu)a_0 + 2d_0\lambda^{-3} &= -(\alpha_0 + 2\beta_0\lambda^{-1});
\end{aligned}
\tag{7.5.7}$$

$$\begin{aligned}
-6\nu a_2 + 2b_2 - 4(5-\nu)c_2 + 12d_2 &= 2(\alpha_2 - 4\beta_2); \\
-6\nu a_2\lambda^2 + 2b_2 - 4(5-\nu)c_2\lambda^{-3} + 12d_2\lambda^{-5} &= \\
= 2(\alpha_2\lambda^2 - 4\beta_2\lambda^{-3}); \\
(7+2\nu)a_2 + b_2 + 2(1+\nu)c_2 - 4d_2 &= -(3\alpha_2 - 2\beta_2); \\
(7+2\nu)a_2\lambda^2 + b_2 + 2(1+\nu)c_2\lambda^{-3} - 4d_2\lambda^{-5} &= \\
= -(3\alpha_2\lambda^2 - 2\beta_2\lambda^{-3}).
\end{aligned}
\tag{7.5.8}$$

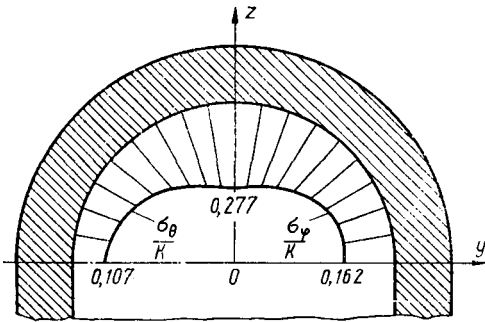
Численные расчеты тепловых напряжений $\sigma_r = \sigma_r^{(T)} + \sigma_r^*$, $\sigma_{\varphi} = \sigma_{\varphi}^{(T)} + \sigma_{\varphi}^*$, $\sigma_{\theta} = \sigma_{\theta}^{(T)} + \sigma_{\theta}^*$ выполнены для трех значений отношения $\lambda = \frac{r_1}{r_2} = 0,5; 0,75; 0,90$, при этом во всех случаях значение параметра γ принято равным 0,46, что соответствует числу Маха $M = 3$ [97].

Анализ термоупругого напряженного состояния полой сферы показал, что при всех значениях λ напряжения σ_{φ} и σ_{θ} на внутренней поверхности ($r = r_1$) растягивающие, а на наружной ($r = r_2$) — сжимающие и по абсолютной величине меньше, чем на внутренней поверхности.

Таблица 22

φ	$\lambda = 0,5$		$\lambda = 0,75$		$\lambda = 0,90$	
	σ_φ/K	σ_θ/K	σ_φ/K	σ_θ/K	σ_φ/K	σ_θ/K
0	0,679	0,679	0,277	0,277	0,108	0,108
$\pi/6$	0,687	0,655	0,249	0,235	0,089	0,087
$\pi/3$	0,702	0,607	0,191	0,150	0,051	0,045
$\pi/2$	0,709	0,583	0,162	0,107	0,032	0,024

Распределения напряжений σ_φ , σ_θ на внутренней поверхности сферы ($r = r_1$) в сечениях $\varphi = 0$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$ при $\lambda = 0,5$; $0,75$; $0,90$ приведены в табл. 22. Согласно данным этой таблицы,



для сравнительно тонких сферических оболочек ($\lambda = 0,9$) и сферических оболочек средней толщины ($\lambda = 0,75$) напряжения σ_φ и σ_θ достигают максимального значения на оси вращения ($\varphi = 0$). Для толстых сферических оболочек ($\lambda = 0,5$) наибольшее значение напряжения σ_φ в сечении $\varphi = \frac{\pi}{2}$; здесь напряжение $\sigma_\varphi = 0,709K$ превышает

наибольшее напряжение $\sigma_\theta = 0,679K$ на оси вращения.

Таблица 23

ρ	$\varphi = 0$			$\varphi = \frac{\pi}{6}$			$\varphi = \frac{\pi}{2}$		
	σ_r/K	σ_φ/K	σ_θ/K	σ_r/K	σ_φ/K	σ_θ/K	σ_r/K	σ_φ/K	σ_θ/K
0,5	0	0,679	0,679	0	0,687	0,655	0	0,709	0,583
0,5833	0,133	0,335	0,335	0,130	0,342	0,325	0,123	0,364	0,293
0,6667	0,157	0,116	0,116	0,154	0,122	0,115	0,143	0,141	0,113
0,7500	0,136	-0,035	-0,035	0,133	-0,030	-0,029	0,122	-0,015	-0,008
0,8333	0,096	-0,145	-0,145	0,093	-0,142	-0,132	0,084	-0,132	-0,091
0,9167	0,049	-0,229	-0,229	0,047	-0,228	-0,209	0,042	-0,225	-0,150
1,0	0	-0,295	-0,295	0	-0,296	-0,269	0	-0,302	-0,192

На рис. 54 представлены графики распределения напряжений σ_θ (слева от оси вращения) и σ_φ (справа от оси вращения) на внутренней поверхности сферы для $\lambda = 0,75$. Данные о распределении напряжений σ_r , σ_φ , σ_θ по толщине сферической оболочки в сечениях $\varphi = 0$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$ при $\lambda = 0,5$ приведены в табл. 23.

**ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА
ТЕРМОУПРУГОСТИ**

§ 8.1. Представления общего решения

Если условия нестационарного теплообмена таковы, что скорость изменения температуры во времени весьма велика, то при исследовании тепловых напряжений в элементах конструкций следует учитывать динамические эффекты, обусловленные движением частиц твердого тела при быстром тепловом расширении, т. е. рассматривать динамическую задачу термоупругости.

В настоящей главе динамическая задача термоупругости рассматривается без учета взаимодействия полей деформации и температуры, т. е. предполагается (в соответствии с классификацией задач термоупругости § 1.8) несвязанной. Такая динамическая задача при упругих λ , μ и термическом α_T коэффициентах, зависящих от температуры, сводится к решению уравнения (1.8.9) при определенных начальных и граничных условиях, которые задаются либо в перемещениях, либо в напряжениях; температурное поле T предполагается известным из решения соответствующей нестационарной задачи теплопроводности (глава третья). При постоянных упругих и термическом коэффициентах уравнение (1.8.9) переходит в (1.8.6) Представление общего решения этого уравнения известно.

Вектор перемещения \vec{u} может быть разложен на потенциальную и соленоидальную части и представлен в виде

$$\vec{u} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{A}, \quad (8.1.1)$$

где Φ — скалярный потенциал; \vec{A} — векторный потенциал.

После подстановки выражения (8.1.1) в уравнение (1.8.6) получаем для функций Φ и \vec{A} следующие уравнения:

$$\square_1^2 \Phi = \frac{(3\lambda + 2\mu) \alpha_T}{\lambda + 2\mu} (T - T_0) = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T (T - T_0); \quad (8.1.2)$$

$$\square_2^2 \vec{A} = 0, \quad (8.1.3)$$

где

$$\square_n^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c_n^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (n = 1, 2); \quad (8.1.4)$$

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (8.1.5)$$

Здесь c_1 — скорость распространения упругой безвихревой волны (волны расширения); c_2 — скорость распространения упругой волны искажения (поворотов), вызывающей изменение формы без изменения объема упругого тела.

С помощью известных из динамической теории упругости представлений общего решения однородного уравнения, соответствующего уравнению (1.8.6) [94], общее решение неоднородного уравнения (1.8.6) можно представить также в следующих двух видах:

$$\vec{u} = \text{grad } \Phi + \frac{\rho}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}_2}{\partial t^2} - \text{grad div } (\vec{A}_1 + \vec{A}_2); \quad (8.1.6)$$

$$\vec{u} = \text{grad } \Phi + 4(1 - \nu) \vec{B} - \text{grad } (\vec{B} \cdot \vec{r} + B_0), \quad (8.1.7)$$

где функция Φ удовлетворяет уравнению (8.1.2), а функции \vec{A}_1 , \vec{A}_2 и \vec{B} , B_0 удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\square_1^2 \vec{A}_1 = 0, \quad \square_2^2 \vec{A}_2 = 0; \quad (8.1.8)$$

$$\square_2^2 \vec{B} = 0, \quad \square_1^2 B_0 + \vec{r} \cdot \square_1^2 \vec{B} = 0. \quad (8.1.9)$$

Когда \vec{B} и B_0 не зависят от t , представление (8.1.7) идентично сумме представлений (2.2.6) и (2.2.11). Таким образом, представление (8.1.7) является обобщением соответствующего представления решения квазистатической задачи термоупругости на случай динамической задачи термоупругости.

Представление (8.1.6) можно преобразовать к виду (8.1.1). Действительно, внося в представление (8.1.6) и в уравнение (8.1.2) выражение

$$\Phi = \Phi' + \text{div } \vec{A}_1 \quad (8.1.10)$$

и применяя затем формулу

$$\text{grad div } \vec{A}_2 = \nabla^2 \vec{A}_2 + \text{rot rot } \vec{A}_2 \quad (8.1.11)$$

и уравнения (8.1.8), находим, что при подстановках

$$\Phi' = \Phi, \quad \text{rot } \vec{A}_2 = -\vec{A} \quad (8.1.12)$$

представление (8.1.6) переходит в представление (8.1.1).

Как видно из приведенных представлений общего решения векторного уравнения движения (1.8.6), динамическая задача термоупругости сводится к волновым уравнениям; при их решении применяется преобразование Лапласа.

В настоящей главе ограничимся рассмотрением простейших динамических задач термоупругости, соответствующих одномерным задачам нестационарного теплообмена, — задач о тепловом ударе на поверхности полупространства (§ 8.2) и на поверхности круглой

пластины при идеально изолированном контуре (§ 8.3). Решения для нестационарных температурных полей этих двух задач приводятся в § 3.7.

Первая задача является характерной задачей о тепловом ударе на поверхности полуограниченного массива, в котором процесс распространения тепловых напряжений не чисто диффузионный, а связан с распространением упругих волн. Вторая задача относится к классу задач о поперечных колебаниях пластин, возбужденных импульсными тепловыми воздействиями. Она сводится к решению дифференциального уравнения, описывающего вынужденные осесимметричные колебания круглой пластины. Исследования этих задач показывают, что существенные динамические эффекты в телах могут возникнуть лишь при мгновенном изменении их граничных тепловых условий.

Реальный быстро протекающий теплообмен сопровождается изменением граничных тепловых условий тел в течение малого, но всегда конечного интервала времени.

В § 8.4 рассматривается динамическое поведение полупространства и круглой пластины, когда тепловые воздействия на них изменяются не мгновенно, а в течение конечного интервала времени.

§ 8.2. Тепловые напряжения в упругом полупространстве при тепловом ударе на его поверхности

Задача о тепловом ударе на поверхности полупространства — одна из первых динамических задач термоупругости, подвергшихся подробному исследованию. Впервые эта задача рассмотрена В. И. Данилювской [14, 15].

Пусть температура среды, омывающей поверхность полупространства $x = 0$ (см. рис. 11), внезапно (в момент времени $t = 0$) изменяется от T_0 до ϑ . При $t > 0$ между поверхностью полупространства и средой происходит конвективный теплообмен.

Нестационарное температурное поле в полупространстве при указанных условиях теплообмена описывается выражением (3.7.8).

Определим соответствующие динамические тепловые напряжения, предполагая отсутствие поверхностных сил. Для этого рассмотрим решение однородной динамической задачи термоупругости в напряжениях, которое здесь более удобно. В этой задаче перемещения u_y и u_z и все производные по координатам y и z равны нулю, а следовательно, $\epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$.

Из соотношений (1.5.20) имеем

$$\epsilon_x = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{(1 - \nu)E} \sigma_x + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T (T - T_0); \quad (8.2.1)$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_x - \frac{1}{1 - \nu} \alpha_T E (T - T_0), \quad (8.2.2)$$

а из первого уравнения движения (1.2.20) получаем

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0. \quad (8.2.3)$$

Дифференцируя обе части уравнения (8.2.3) по x и подставляя вместо производной $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ деформацию ϵ_x , определяемую выражением (8.2.1), находим уравнение движения

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c_1^2} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial t^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \rho \alpha_T \frac{\partial^2 (T - T_0)}{\partial t^2}, \quad (8.2.4)$$

где c_1 — скорость распространения упругой волны расширения,

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}. \quad (8.2.5)$$

К уравнению (8.2.4) присоединяем следующие начальные и граничные условия:

$$\sigma_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0, \quad (8.2.6)$$

$$\sigma_x = 0 \quad \text{при } x = 0. \quad (8.2.7)$$

Применяя к уравнению (8.2.4) и граничному условию (8.2.7) преобразование Лапласа (§ 3.6), приходим к уравнению

$$\frac{d^2 \sigma_x^*}{dx^2} - \frac{p^2}{c_1^2} \sigma_x^* = \frac{1+\nu}{1-\nu} \rho \alpha_T p^2 \left(T^* - \frac{1}{p} T_0 \right) \quad (8.2.8)$$

при граничном условии

$$\sigma_x^* = 0 \quad \text{при } x = 0. \quad (8.2.9)$$

Подставляя в уравнение (8.2.8) изображение (3.7.7) для температуры, получаем

$$\frac{d^2 \sigma_x^*}{dx^2} - \frac{p^2}{c_1^2} \sigma_x^* = \frac{(1+\nu) \rho \alpha_T \gamma (\vartheta - T_0) p}{(1-\nu) \left(\gamma + \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} e^{-x} \sqrt{\frac{p}{a}}. \quad (8.2.10)$$

Решение уравнения (8.2.10) при условии (8.2.9) с учетом ограниченности функции σ_x^* при $x \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\sigma_x^* = \frac{E \alpha_T (\vartheta - T_0)}{(1-2\nu) \left(p - \frac{c_1^2}{a} \right) \left(1 + \sqrt{\frac{p}{a \gamma^2}} \right)} \left(e^{-\frac{x p}{c_1}} - e^{-x} \sqrt{\frac{p}{a}} \right). \quad (8.2.11)$$

Для облегчения перехода к оригиналу приводим это выражение к виду

$$\sigma_x^* = \frac{E \alpha_T (\vartheta - T_0)}{1-2\nu} \gamma a^{3/2} \left[\frac{1}{2c_1(c_1 + a\gamma)} \cdot \frac{1}{\sqrt{p} - \frac{c_1}{\sqrt{a}}} + \frac{1}{2c_1(c_1 - a\gamma)} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\sqrt{p} + \frac{c_1}{\sqrt{a}}} + \frac{1}{a^2 \gamma^2 - c_1^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{p} + \gamma \sqrt{a}} \right] \left(e^{-\frac{x p}{c_1}} - e^{-x} \sqrt{\frac{p}{a}} \right). \quad (8.2.12)$$

Используя теорему запаздывания (3.6.9) и таблицу изображений, приведенную в работе [39], находим

$$\sigma_x = \sigma'_x + \begin{cases} 0 & \text{при } t < \frac{x}{c_1}; \\ \sigma_x^- & \text{при } t > \frac{x}{c_1}. \end{cases} \quad (8.2.13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sigma'_x = & -K \left\{ \frac{1}{2 \left(1 + \frac{c_1}{a\gamma}\right)} \exp \left[\frac{c_1^2}{a} \left(t - \frac{x}{c_1} \right) \right] \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} - c_1 \sqrt{\frac{t}{a}} \right) + \right. \\ & + \frac{1}{2 \left(1 - \frac{c_1}{a\gamma}\right)} \exp \left[\frac{c_1^2}{a} \left(t + \frac{x}{c_1} \right) \right] \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + c_1 \sqrt{\frac{t}{a}} \right) - \\ & \left. - \frac{1}{1 - \frac{c_1^2}{a^2\gamma^2}} \exp(\gamma x + \gamma^2 at) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + \gamma \sqrt{at} \right) \right\}; \quad (8.2.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^- = & K \frac{1}{1 - \frac{c_1^2}{a^2\gamma^2}} \left\{ \exp \left[\frac{c_1^2}{a} \left(t - \frac{x}{c_1} \right) \right] \left[1 - \frac{c_1}{a\gamma} \operatorname{erf} \sqrt{\frac{c_1^2}{a} \left(t - \frac{x}{c_1} \right)} \right] - \right. \\ & \left. - \exp \left[a\gamma^2 \left(t - \frac{x}{c_1} \right) \right] \operatorname{erfc} \left[\gamma \sqrt{a \left(t - \frac{x}{c_1} \right)} \right] \right\}, \end{aligned}$$

где $K = \frac{E\alpha_T(\Phi - T_0)}{1 - 2\nu}$.

После введения безразмерных величин $\xi = \frac{xc_1}{a}$, $\tau = \frac{tc_1^2}{a}$, $\beta = \frac{c_1}{a\gamma}$ выражения (8.2.14) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma'_x = & -K \left\{ \frac{1}{2(1+\beta)} \exp(\tau - \xi) \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \frac{\xi}{\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) + \right. \\ & + \frac{1}{2(1-\beta)} \exp(\tau + \xi) \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \frac{\xi}{\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) - \\ & \left. - \frac{1}{1-\beta^2} \exp \left[\frac{1}{\beta} \left(\xi + \frac{\tau}{\beta} \right) \right] \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \frac{\xi}{\sqrt{\tau}} + \frac{\sqrt{\tau}}{\beta} \right) \right\}; \quad (8.2.15) \\ \sigma_x^- = & K \frac{1}{1-\beta^2} \left\{ \exp(\tau - \xi) (1 - \beta \operatorname{erf} \sqrt{\tau - \xi}) - \right. \\ & \left. - \exp \frac{1}{\beta^2} (\tau - \xi) \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{\beta} \sqrt{\tau - \xi} \right) \right\}. \end{aligned}$$

В случае мгновенного повышения температуры поверхности полупространства от T_0 до ϑ , соответствующего $\gamma = \frac{\alpha}{\lambda_q} \rightarrow \infty$ и $\beta = 0$, решение (8.2.13) получает следующее выражение:

$$\frac{\sigma_x}{K} = e^{\tau - \xi} \left[H(\tau - \xi) - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \frac{\xi}{\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) \right] - \frac{1}{2} e^{\tau + \xi} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \frac{\xi}{\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right), \quad (8.2.16)$$

где $H(t)$ — единичная функция Хевисайда, определяемая условием

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (8.2.17)$$

Для функций $\operatorname{erf} x$ и $\operatorname{erfc} x$, входящих в формулы (8.2.14) — (8.2.16), известны следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{erf} x &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx; \\ \operatorname{erf} 0 &= 0; \quad \operatorname{erf} \infty = 1; \quad \operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf} x; \\ \operatorname{erfc} x &= 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-x^2} dx; \\ \frac{d}{dx} \operatorname{erf} x &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.2.18)$$

Зная σ_x , определяем напряжения σ_y , σ_z по формулам (8.2.2.).

Если в уравнении (8.2.3) пренебречь силами инерции, т. е. положить $\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0$, то на основании граничного условия (8.2.7) и формул (8.2.2) получаем решение рассматриваемой задачи в квазистатической постановке

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = \sigma_z = - \frac{E \alpha_T (T - T_0)}{1 - \nu}, \quad (8.2.19)$$

где величина T определяется выражением (3.7.8) или (3.7.9).

Из рассмотрения формул (8.2.2) и (8.2.19) можно сделать заключение, что динамическое решение (8.2.13) совпадает с квазистатическим в тех случаях, когда $\sigma_x = 0$, а именно: в начальный момент времени $t = 0$ для всей области полупространства $x \geq 0$ и при $t > 0$ на поверхности полупространства $x = 0$.

Динамический эффект в сечении $x > 0$, учитываемый решением (8.2.13), проявляется при $t < \frac{x}{c_1}$ и $t > \frac{x}{c_1}$ по-разному, так как в момент времени $t = \frac{x}{c_1}$ упругая волна расширения, движущаяся от поверхности $x = 0$ внутрь полупространства, достигает сечения

$x > 0$. В этот момент значение безразмерного времени τ равняется значению безразмерной координаты ξ .

В. И. Даниловская исследовала изменение динамического напряжения σ_x в фиксированном сечении $\xi = 1$. На рис. 55 приводится изменение напряжения σ_x в этом сечении в зависимости от безразмерного времени τ при различных значениях параметра β , характеризующего условия теплообмена на поверхности $x = 0$.

В результате действия сил инерции в сечении $\xi = 1$ при $\tau < 1$

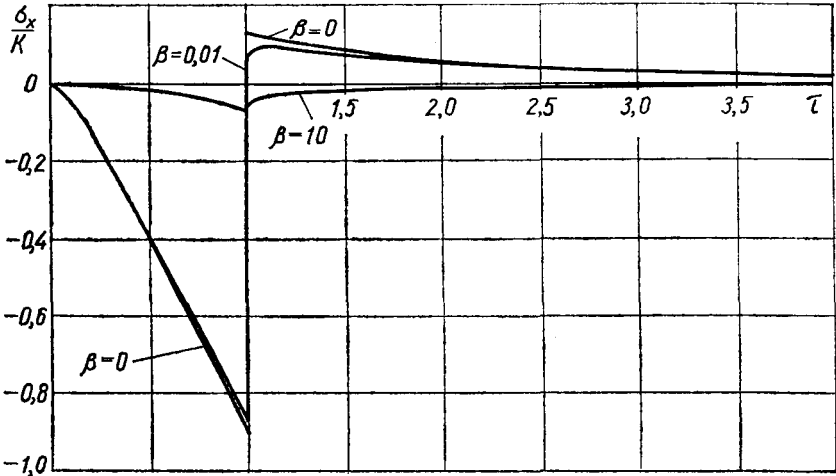


Рис. 55.

возникает сжимающее напряжение σ_x . Так, в случае мгновенного повышения температуры поверхности полупространства, когда $\beta = 0$ ($\alpha \rightarrow \infty$), сжимающее напряжение в сечении $\xi = 1$ возрастает от нуля при $\tau = 0$ до значения $-0,89K$ при $\tau = 1$.

В момент времени $\tau = 1$ ($t = \frac{x}{c_1}$) под действием упругой волны расширения происходит скачкообразное изменение напряжения σ_x на величину K . После прохождения волны расширения напряжение σ_x становится растягивающим и быстро уменьшается до нуля, приближаясь к квазистатическому.

Разрывная кривая для σ_x в случае $\beta = 0$ предельная, к ней равномерно стремятся все кривые σ_x при малых значениях параметра $\beta \ll 1$. Например, при $\beta = 0,01$ напряжение σ_x возрастает от нуля до значения $-0,87K$, переходит при $\tau = 1$ в область положительных значений, после чего быстро убывает до нуля. При больших значениях β изменение напряжения σ_x носит иной характер: при $\beta = 10$ напряжение, оставаясь сжимающим, достигает наибольшего значения ($-0,06K$) и начинает убывать до нуля.

Кривые напряжения σ_x при $\beta = 0,01$ и $\beta = 10$ — непрерывные функции τ , однако производные от них в точке $\tau = 1$ терпят разрыв; при подходе к точке $\tau = 1$ справа касательные к кривым σ_x приближаются к вертикали $\tau = 1$.

§ 8.3. Осесимметричные колебания круглой пластины, возбужденные тепловым ударом

Пусть к поверхности $z = \frac{h}{2}$ свободно опертой круглой пластины радиуса r_2 внезапно подводится тепловой поток $q' = -q$ (рис. 56), где q — плотность теплового потока в направлении внешней нормали к срединной поверхности [см. формулу (3.2.8)]. Поверхность пластины $z = -\frac{h}{2}$ и ее контур $r = r_2$ предполагаются идеально теплоизолированными. Начальная температура пластины равна T_0 .

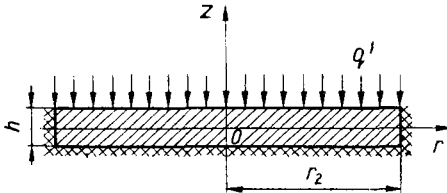


Рис. 56.

При таких условиях теплообмена нестационарное температурное поле определяется выражением (3.7.17).

Применяя уравнение термоупругого изгиба круглой пластины (5.3.3), полагая в нем для случая осесимметричного температурного поля $\frac{\partial u_z}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial \kappa_T}{\partial \theta} = 0$ и заменяя в соответствии с принципом Даламбера интенсивность поперечных сил q_z силами инерции $-\rho_0 h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$, получаем уравнение движения пластины

$$\nabla_1^2 \nabla_1^2 u_z + \kappa^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial \tau^2} + r_2^2 (1 + \nu) \nabla_1^2 \kappa_T = 0, \quad (8.3.1)$$

где

$$\kappa^2 = \rho_0 \frac{r_2^4 a^2}{D_M h^3}, \quad D_M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \quad (8.3.2)$$

$$\kappa_T = \frac{12}{h} \int_{-1/2}^{1/2} \alpha_T \zeta (T - T_0) d\zeta; \quad (8.3.3)$$

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right),$$

ρ и ζ — относительные координаты, $\rho = \frac{r}{r_2}$; $\zeta = \frac{z}{h}$; τ — безразмерное время, $\tau = \frac{at}{h^2}$; ρ_0 — плотность материала (обозначение ρ введено в отличие от обозначения ρ для относительного радиуса).

В качестве начальных условий задачи выбираем следующие:

$$u_z = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial \tau} = 0 \quad \text{при } \tau = 0. \quad (8.3.4)$$

Учитывая условия (5.2.24), выражение для изгибающего момента M , в соотношениях (5.2.17) и соотношения между деформациями и перемещением u_z (5.2.5), взятые для осесимметричного случая, представляем граничные условия для рассматриваемой задачи в виде

$$u_z = 0, \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial \rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \rho} + r_2^2(1 + \nu) \chi_T = 0 \quad \text{при } \rho = 1. \quad (8.3.5)$$

Чисто тепловая деформация χ_T во втором условии (8.3.5) определяется выражением

$$\chi_T = \frac{q' \alpha_T}{2\lambda_q} \left(1 - \frac{96}{\pi^4} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right), \quad (8.3.6)$$

которое получается подстановкой выражения для температурного поля (3.7.17) в (8.3.3).

Вводя безразмерное перемещение

$$\eta_z = \frac{\lambda_q}{q' \alpha_T r_2^2 (1 + \nu)} u_z, \quad (8.3.7)$$

безразмерную чисто тепловую деформацию

$$\chi_T = \frac{\lambda_q}{q' \alpha_T} \chi_T \quad (8.3.8)$$

и учитывая, что $\nabla_1^2 \chi_T = 0$, задачу сводим к решению уравнения

$$\nabla_1^2 \nabla_1^2 \eta_z + \chi_T^2 \frac{\partial^2 \eta_z}{\partial \tau^2} = 0 \quad (8.3.9)$$

при начальных и граничных условиях

$$\eta_z = 0, \quad \frac{\partial \eta_z}{\partial \tau} = 0 \quad \text{при } \tau = 0; \quad (8.3.10)$$

$$\eta_z = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta_z}{\partial \rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \cdot \frac{\partial \eta_z}{\partial \rho} + \chi_T = 0 \quad \text{при } \rho = 1. \quad (8.3.11)$$

Решение уравнения (8.3.9) ищем в виде суммы безразмерных квазистатического прогиба $\eta_z^{(s)}$ и дополнительного прогиба $\eta_z^{(d)}$, обусловленного силами инерции (динамической части прогиба):

$$\eta_z = \eta_z^{(s)} + \eta_z^{(d)}. \quad (8.3.12)$$

Величина $\eta_z^{(s)}$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla_1^2 \nabla_1^2 \eta_z^{(s)} = 0 \quad (8.3.13)$$

при граничных условиях

$$\eta_z^{(s)} = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta_z^{(s)}}{\partial \rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \cdot \frac{\partial \eta_z^{(s)}}{\partial \rho} + \chi_T = 0 \quad \text{при } \rho = 1. \quad (8.3.14)$$

Для сплошной пластины квазистатической прогиб имеет выражение

$$\eta_z^{(s)} = \frac{\chi_T}{2(1+\nu)}(1-\rho^2). \quad (8.3.15)$$

Подставляя решение (8.3.12) в уравнение (8.3.9) и в условия (8.3.10), (8.3.11) и учитывая уравнение (8.3.13), условия (8.3.14) и решение (8.3.15), для определения $\eta_z^{(d)}$ находим дифференциальное уравнение

$$\nabla_1^2 \nabla_1^2 \eta_z^{(d)} + \kappa^2 \frac{\partial^2 \eta_z^{(d)}}{\partial \tau^2} = -\frac{(1-\rho^2)\kappa^2}{2(1+\nu)} \cdot \frac{\partial^2 \chi_T}{\partial \tau^2} \quad (8.3.16)$$

при начальных и граничных условиях

$$\eta_z^{(d)} = 0, \quad \frac{d\eta_z^{(d)}}{d\tau} = -\frac{1-\rho^2}{2(1+\nu)} \cdot \frac{\partial \chi_T}{\partial \tau} \quad \text{при } \tau = 0, \quad (8.3.17)$$

$$\eta_z^{(d)} = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta_z^{(d)}}{\partial \rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \cdot \frac{d\eta_z^{(d)}}{d\rho} = 0 \quad \text{при } \rho = 1. \quad (8.3.18)$$

Для нахождения $\eta_z^{(d)}$ применим два метода: разложение искомой функции в ряд по собственным функциям [99] и преобразование Лапласа.

Определение $\eta_z^{(d)}$ по методу, использующему разложение в ряд по собственным функциям. Выбирая решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (8.3.16), в виде

$$\eta_z^{(d)} = \eta(\rho) e^{i\omega\tau}, \quad (8.3.19)$$

приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(\nabla_1^2 \nabla_1^2 - \alpha^4) \eta(\rho) = 0 \quad (8.3.20)$$

при условиях

$$\eta(\rho) = 0, \quad \frac{d^2 \eta(\rho)}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \cdot \frac{d\eta(\rho)}{d\rho} = 0 \quad \text{при } \rho = 1, \quad (8.3.21)$$

где

$$\alpha^4 = \omega^2 \kappa^2.$$

Поскольку каждое решение одного из двух уравнений $(\nabla_1^2 \pm \alpha^2) \times \eta(\rho) = 0$ является решением уравнения (8.3.20), общее решение можно записать в виде

$$\eta(\rho) = C_1 J_0(\alpha\rho) + C_2 Y_0(\alpha\rho) + C_3 I_0(\alpha\rho) + C_4 K_0(\alpha\rho), \quad (8.3.22)$$

где $J_0(x)$, $Y_0(x)$, $I_0(x)$, $K_0(x)$ — бесселевы функции действительного и чисто мнимого аргумента нулевого порядка первого и второго рода.

При $\rho = 0$ прогиб пластины должен быть конечным, поэтому в решении (8.3.22) постоянные интегрирования C_2 и C_4 следует положить равными нулю. Постоянные интегрирования C_1 и C_3

определяем из условий (8.3.21), при этом дифференцирование бесселевых функций выполняем по формулам (3.4.6), (3.9.6), (3.9.14), учитывая, что формула (3.9.14) справедлива и для функции $I_1(x)$.

В результате находим собственную функцию

$$\eta_m(\rho) = I_0(\alpha_m) J_0(\alpha_m \rho) - J_0(\alpha_m) I_0(\alpha_m \rho), \quad (8.3.23)$$

для которой собственные значения α_m — корни трансцендентного уравнения

$$\frac{J_1(\alpha)}{J_0(\alpha)} + \frac{I_1(\alpha)}{I_0(\alpha)} = \frac{2\alpha}{1-\nu}. \quad (8.3.24)$$

В уравнении (8.3.24) $J_1(x)$, $I_1(x)$ — бесселевы функции действительного и чисто мнимого аргумента первого порядка.

Значения первых десяти корней α_m при $\nu = 0,3$ указаны в табл. 24. С ростом числа m корни α_m уравнения (8.3.24) асимптотически приближаются к корням уравнения $J_0(\alpha) = 0$ и уже при $m = 5$ различие между ними составляет не более 0,25% [9].

Т а б л и ц а 24

m	α_m	m	α_m
1	2,2215	6	18,051
2	5,4516	7	21,194
3	8,6114	8	24,338
4	11,761	9	27,481
5	14,907	10	30,623

Рассмотрим свойство ортогональности собственных функций. Пусть η_m и η_n — две собственные функции вида (8.3.23), соответствующие собственным значениям α_m и α_n . Так как каждая из этих

функций является решением уравнения (8.3.20), то $\nabla_1^2 \nabla_1^2 \eta_m = \alpha_m^4 \eta_m$, $\nabla_1^2 \nabla_1^2 \eta_n = \alpha_n^4 \eta_n$. Умножая первое из этих уравнений на $\rho \eta_n d\rho$ и второе на $\rho \eta_m d\rho$, вычитая из первого второе и интегрируя по ρ от нуля до единицы, получаем

$$\begin{aligned} (\alpha_m^4 - \alpha_n^4) \int_0^1 \rho \eta_m \eta_n d\rho &= \left\{ \eta_n \rho \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\eta_m}{d\rho} \right) \right] \right\}_0^1 - \\ &- \left\{ \eta_m \rho \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\eta_n}{d\rho} \right) \right] \right\}_0^1 - \left[\frac{d\eta_n}{d\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\eta_m}{d\rho} \right) \right]_0^1 + \\ &+ \left[\frac{d\eta_m}{d\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\eta_n}{d\rho} \right) \right]_0^1 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (\alpha_m^4 - \alpha_n^4) \int_0^1 \rho \eta_m \eta_n d\rho &= \left[\eta_n \left(\rho \frac{d^3 \eta_m}{d\rho^3} + \frac{d^2 \eta_m}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\eta_m}{d\rho} \right) \right]_0^1 - \\ &- \left[\eta_m \left(\rho \frac{d^3 \eta_n}{d\rho^3} + \frac{d^2 \eta_n}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\eta_n}{d\rho} \right) \right]_0^1 - \left(\rho \frac{d\eta_n}{d\rho} \cdot \frac{d^2 \eta_m}{d\rho^2} \right)_0^1 + \\ &+ \left(\rho \frac{d\eta_m}{d\rho} \cdot \frac{d^2 \eta_n}{d\rho^2} \right)_0^1. \quad (8.3.25) \end{aligned}$$

В силу граничных условий (8.3.21) члены этого выражения при $\rho = 1$ равны нулю либо взаимно уничтожаются. Они обращаются в нуль и для нижнего предела, так как для сплошной осесимметрично деформированной круглой пластины

$$(\Phi_r)_{\rho=0} = 0, (Q_r)_{\rho=0} = 0$$

и, таким образом,

$$\left(\frac{d\eta}{d\rho}\right)_{\rho=0} = 0, \left(\frac{d^3\eta}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d^2\eta}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{d\eta}{d\rho}\right)_{\rho=0} = 0.$$

Отсюда следует свойство ортогональности собственных функций

$$\int_0^1 \rho \eta_m \eta_n d\rho = 0, \quad m \neq n. \quad (8.3.26)$$

Для случая $m = n$ по правилу Лопиталья находим

$$\begin{aligned} N_m &= \int_0^1 \rho \eta_m^2 d\rho = \lim_{\alpha_n \rightarrow \alpha_m} \frac{\text{выражение (8.3.25)}}{\alpha_m^4 - \alpha_n^4} = \\ &= - \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha_n} [\text{выражение (8.3.25)}]_{\alpha_n = \alpha_m}}{4\alpha_n^3} = \frac{J_0(\alpha_m) I_0(\alpha_m)}{1 - \nu} D_m, \end{aligned} \quad (8.3.27)$$

где

$$D_m = \alpha_m [I_0(\alpha_m) J_1(\alpha_m) - J_0(\alpha_m) I_1(\alpha_m)] - (1 + \nu) J_0(\alpha_m) I_0(\alpha_m). \quad (8.3.28)$$

При вычислении N_m учитываем уравнение (8.3.24).

Зная собственную функцию (8.3.23) и свойство ортогональности собственных функций (8.3.26), ищем решение уравнения (8.3.16) в виде ряда

$$\eta_z^{(d)} = \sum_{m=1}^{\infty} \eta_m(\rho) q_m(\tau). \quad (8.3.29)$$

Подставляя решение (8.3.29) в уравнение (8.3.16) и в условия (8.3.17), получаем уравнение

$$\sum_{m=1}^{\infty} (q_m \nabla_1^2 \nabla_1^2 \eta_m + \kappa^2 \eta_m \ddot{q}_m) = - \frac{(1 - \rho^2)}{2(1 + \nu)} \ddot{\chi}_T \quad (8.3.30)$$

при условиях

$$\sum_{m=1}^{\infty} \eta_m q_m = 0, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \eta_m \dot{q}_m = - \frac{(1 - \rho^2)}{2(1 + \nu)} \dot{\chi}_T \quad \text{при } \tau = 0, \quad (8.3.31)$$

где точка сверху означает производную по времени.

Умножая уравнение (8.3.30) и условия (8.3.31) на $\rho \eta_n d\rho$, интегрируя по ρ от нуля до единицы и учитывая уравнение (8.3.20) и

свойство ортогональности (8.3.26), находим для функции q_m уравнение

$$\ddot{q}_m + \alpha_m^4 B_0^4 q_m = - \frac{\ddot{\chi}_T}{2(1+\nu) N_m} \int_0^1 (1-\rho^2) \rho \eta_m d\rho \quad (8.3.32)$$

при условиях

$$q_m = 0, \quad \dot{q}_m = - \frac{\dot{\chi}_T}{2(1+\nu) N_m} \int_0^1 (1-\rho^2) \rho \eta_m d\rho \quad \text{при } \tau = 0, \quad (8.3.33)$$

где множитель N_m определяется выражением (8.3.27),

$$\int_0^1 (1-\rho^2) \rho \eta_m d\rho = \frac{4}{\alpha_m^2} \cdot \frac{1+\nu}{1-\nu} J_0(\alpha_m) I_0(\alpha_m), \quad (8.3.34)$$

а безразмерный параметр

$$B_0 = \sqrt{\frac{1}{\kappa}} = \frac{h}{r_2 \sqrt{a}} \left(\frac{D_M}{\rho_0 h} \right)^{1/4}. \quad (8.3.35)$$

Решение уравнения (8.3.32) при условиях (8.3.33), как легко убедиться подстановкой, можно представить в виде

$$q_m(\tau) = - \frac{1}{2(1+\nu) \alpha_m^2 B_0^2 N_m} \int_0^1 (1-\rho^2) \rho \eta_m d\rho \left[\dot{\chi}_T(0) \sin \alpha_m^2 B_0^2 \tau + \int_0^\tau \ddot{\chi}_T(\tau') \sin \alpha_m^2 B_0^2 (\tau - \tau') d\tau' \right]. \quad (8.3.36)$$

Учитывая, что

$$\dot{\chi}_T(0) = \frac{48}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \ddot{\chi}_T(\tau) = -48 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \tau},$$

решение (8.3.36) запишем следующим образом:

$$q_m(\tau) = - \frac{24}{(1+\nu) \alpha_m^2 B_0^2 N_m} \int_0^1 (1-\rho^2) \rho \eta_m d\rho \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[\frac{\sin \alpha_m^2 B_0^2 \tau}{n^2 \pi^2} - \int_0^\tau e^{-n^2 \pi^2 \tau'} \sin \alpha_m^2 B_0^2 (\tau - \tau') d\tau' \right].$$

Вычисляя интеграл

$$\int_0^\tau e^{-n^2 \pi^2 \tau'} \sin \alpha_m^2 B_0^2 (\tau - \tau') d\tau' = \\ = \frac{n^2 \pi^2 \sin \alpha_m^2 B_0^2 \tau + \alpha_m^2 B_0^2 (e^{-n^2 \pi^2 \tau} - \cos \alpha_m^2 B_0^2 \tau)}{n^4 \pi^4 + \alpha_m^4 B_0^4}$$

и подставляя выражения (8.3.27) и (8.3.34), получаем

$$q_m(\tau) = -\frac{96}{\alpha_m^2 D_m} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_m^2 B_0^2 \sin \alpha_m^2 B_0^2 \tau + n^2 \pi^2 (\cos \alpha_m^2 B_0^2 \tau - e^{-n^2 \pi^2 \tau})}{n^2 \pi^2 (n^4 \pi^4 + \alpha_m^4 B_0^4)},$$

где D_m определяется выражением (8.3.28).

Наконец, на основании (8.3.29) находим

$$\begin{aligned} & \eta_z^{(d)} = \\ = & -96 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta_m(\rho)}{\alpha_m^2 D_m} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_m^2 B_0^2 \sin \alpha_m^2 B_0^2 \tau + n^2 \pi^2 (\cos \alpha_m^2 B_0^2 \tau - e^{-n^2 \pi^2 \tau})}{n^2 \pi^2 (n^4 \pi^4 + \alpha_m^4 B_0^4)}. \end{aligned} \quad (8.3.37)$$

Определение $\eta_z^{(d)}$ с помощью интегрального преобразования Лапласа. Для решения уравнения (8.3.16) при условиях (8.3.17) и (8.3.18) применяем преобразование Лапласа (§ 3.6). Выполняя это преобразование по формуле (3.6.1) и учитывая начальные условия (8.3.17) и равенства

$$\chi_T(0) = 0, \quad \frac{\partial \chi_T(0)}{\partial \tau} = \frac{48}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 6,$$

находим для изображения $\eta_z^{(d)*}$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(\nabla_1^2 \nabla_1^2 + \kappa^2 \rho^2) \eta_z^{(d)*} = -\frac{(1-\rho^2) \kappa^2 \rho^2}{2(1+\nu)} \chi_T^*(\rho) \quad (8.3.38)$$

при граничных условиях

$$\eta_z^{(d)*} = 0, \quad \frac{d^2 \eta_z^{(d)*}}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \cdot \frac{d\eta_z^{(d)*}}{d\rho} = 0 \quad \text{при } \rho = 1, \quad (8.3.39)$$

где

$$\eta_z^{(d)*} = \int_0^{\infty} \eta_z^{(d)} e^{-\rho \tau} d\tau; \quad (8.3.40)$$

$$\chi_T^*(\rho) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\rho} - \frac{96}{\pi^4} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4 (\rho + n^2 \pi^2)} \right]. \quad (8.3.41)$$

Определяя для сплошной пластины решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (8.3.38), в такой же форме, как и для уравнения (8.3.20), и учитывая, что частное решение неоднородного уравнения (8.3.38) имеет вид $-\frac{(1-\rho^2)}{2(1+\nu)} \chi_T^*(\rho)$, находим его общее решение в виде

$$\eta_z^{(d)*} = C_1 J_0(\sqrt{i\kappa\rho} \rho) + C_3 I_0(\sqrt{i\kappa\rho} \rho) - \frac{(1-\rho^2)}{2(1+\nu)} \chi_T^*(\rho). \quad (8.3.42)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_3 , найденные из условий (8.3.39), имеют значения

$$C_1 = \frac{I_0(\sqrt{i\kappa\rho})}{B(\rho)} \chi_T^*, \quad C_3 = -\frac{J_0(\sqrt{i\kappa\rho})}{B(\rho)} \chi_T^*,$$

где

$$B(\rho) = 2i\kappa\rho I_0(\sqrt{i\kappa\rho}) J_0(\sqrt{i\kappa\rho}) - \\ - (1-\nu)\sqrt{i\kappa\rho} [I_0(\sqrt{i\kappa\rho}) J_1(\sqrt{i\kappa\rho}) + J_0(\sqrt{i\kappa\rho}) I_1(\sqrt{i\kappa\rho})]. \quad (8.3.43)$$

Подставляя постоянные интегрирования в решение (8.3.42), находим для изображения следующее выражение:

$$\eta_z^{(d)*} = \chi_T^*(\rho) G^*(\rho) - \frac{(1-\rho^2)}{2(1+\nu)} \chi_T^*, \quad (8.3.44)$$

где

$$G^*(\rho) = \frac{A(\rho)}{B(\rho)}, \quad (8.3.45)$$

$$A(\rho) = I_0(\sqrt{i\kappa\rho}) J_0(\sqrt{i\kappa\rho} \rho) - J_0(\sqrt{i\kappa\rho}) I_0(\sqrt{i\kappa\rho} \rho). \quad (8.3.46)$$

Оригинал функции χ_T^* определяется выражением (8.3.8).

Для определения оригинала функции (8.3.45) применяем формулу (3.6.15), которая для рассматриваемого случая имеет вид

$$G = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A(\rho_m)}{B'(\rho_m)} e^{\rho_m \tau}. \quad (8.3.47)$$

Можно показать, что решением трансцендентного уравнения $B(\rho) = 0$ является

$$\rho_m = \pm i \frac{\alpha_m^2}{\kappa}, \quad (8.3.48)$$

где α_m — корни уравнения (8.3.24).

Учитывая, что при $\rho_m = i \frac{\alpha_m^2}{\kappa}$ $A(\rho_m) = -\eta_m(\rho)$, $B'(\rho_m) = -i\kappa D_m$,

а при $\rho_m = -i \frac{\alpha_m^2}{\kappa}$ $A(\rho_m) = \eta_m(\rho)$, $B'(\rho_m) = -i\kappa D_m$, на основа-

нии формулы (8.3.47) получаем следующее выражение для оригинала функции:

$$G = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta_m(\rho)}{i\kappa D_m} \left[\exp\left(\frac{i\alpha_m^2}{\kappa} \tau\right) - \exp\left(-\frac{i\alpha_m^2}{\kappa} \tau\right) \right] = \\ = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta_m(\rho)}{\kappa D_m} \sin \frac{\alpha_m^2}{\kappa} \tau, \quad (8.3.49)$$

где $\eta_m(\rho)$ — собственная функция (8.3.23), а D_m определяется выражением (8.3.28).

Оригинал произведения двух изображений χ_T^* и G^* получаем по формуле (3.6.11), которая в рассматриваемом случае принимает вид

$$\chi_T^*(\rho) G^*(\rho) = L \left[\int_0^\tau \chi_T(\tau') G(\tau - \tau') d\tau' \right]. \quad (8.3.50)$$

Выполняя необходимые операции, получаем для изображения (8.3.44) оригинал

$$\begin{aligned} \eta_z^{(d)} = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta_m(\rho)}{\kappa D_m} \left[\frac{\kappa}{\alpha_m^2} \left(1 - \cos \frac{\alpha_m^2}{\kappa} \tau \right) - \right. \\ & \left. - \frac{96}{\pi^4} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^2 \pi^2 \sin \frac{\alpha_m^2}{\kappa} \tau - \frac{\alpha_m^2}{\kappa} \cos \frac{\alpha_m^2}{\kappa} \tau + \frac{\alpha_m^2}{\kappa} e^{-n^2 \pi^2 \tau}}{n^4 \pi^4 + \frac{\alpha_m^4}{\kappa^2}} \right] - \eta_z^{(s)}, \end{aligned} \quad (8.3.51)$$

где $\eta_z^{(s)}$ определяется выражением (8.3.15).

Величину $\eta_z^{(s)}$ разлагаем в ряд по собственным функциям $\eta_m(\rho)$:

$$\eta_z^{(s)} = \frac{\chi_T}{2(1+\nu)} (1 - \rho^2) = \frac{\chi_T}{2(1+\nu)} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \eta_m(\rho),$$

где $a_m = \frac{1}{N_m} \int_0^1 (1 - \rho^2) \rho \eta_m d\rho$; N_m — нормирующий множитель (8.3.27).

На основании формул (8.3.34), (8.3.27), (8.3.8) и (8.3.6) выражение для $\eta_z^{(s)}$ преобразуем к виду

$$\eta_z^{(s)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta_m(\rho)}{\alpha_m^2 D_m} \left(1 - \frac{96}{\pi^4} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right). \quad (8.3.52)$$

Подставляя выражение (8.3.52) в решение (8.3.51) и вводя безразмерный параметр (8.3.35), после преобразований получаем формулу (8.3.37). Зная безразмерные прогибы $\eta_z^{(s)}$ и $\eta_z^{(d)}$ и учитывая равенства (8.3.7) и (8.3.8), получаем формулы для квазистатического прогиба

$$u_z^{(s)} = \frac{q' \alpha_T r_2^2 (1 + \nu)}{\lambda_q} \eta_z^{(s)} = \frac{q' \alpha_T r_2^2}{2 \lambda_q} \chi_T (1 - \rho^2) = \frac{\chi_T r_2^2}{2} (1 - \rho^2) \quad (8.3.53)$$

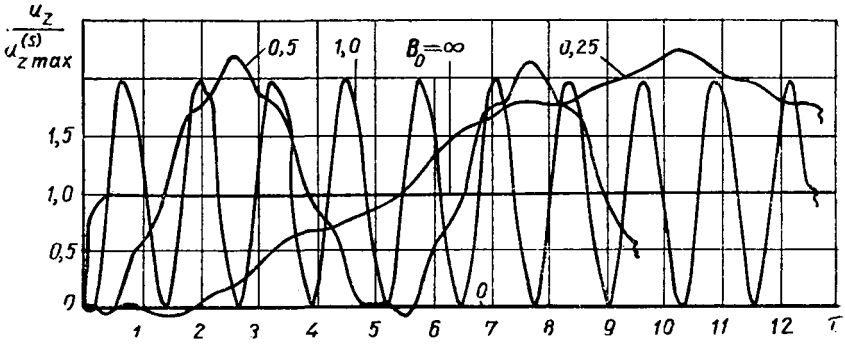


Рис. 57.

и для динамической части прогиба

$$u_z^{(d)} = - \frac{96(1+\nu)q'\alpha_T r_2^2}{\lambda_q} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta_m(\rho)}{\alpha_m^2 D_m} \times \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_m^2 B_0^2 \sin \alpha_m^2 B_0^2 \tau + n^2 \pi^2 (\cos \alpha_m^2 B_0^2 \tau - e^{-n^2 \pi^2 \tau})}{n^2 \pi^2 (n^4 \pi^4 + \alpha_m^4 B_0^4)}, \quad (8.3.54)$$

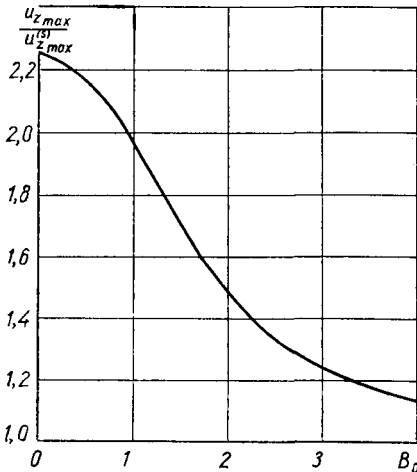


Рис. 58.

при этом

$$u_z = u_z^{(s)} + u_z^{(d)}. \quad (8.3.55)$$

На рис. 57 приводятся кривые изменения отношения динамического прогиба в центре пластины u_z к максимальному квазистатическому прогибу $u_z^{(s)}$ в этой же точке в зависимости от безразмерного времени $\tau = \frac{at}{h^2}$

при различных значениях параметра B_0 . Как видно, динамический прогиб колеблется около квазистатического; влияние инерционных сил увеличивается по мере уменьшения параметра B_0 . При $B_0 = 0$ имеем $u_z^{(d)} = -u_z^{(s)}$ и $u_z = 0$, а при $B_0 \rightarrow \infty$

получаем $u_z^{(d)} = 0$ и $u_z = u_z^{(s)}$.

На рис. 58 показано изменение отношения максимального динамического прогиба u_z к максимальному квазистатическому $u_z^{(s)}$ в зависимости от параметра B_0 . При $B_0 \rightarrow 0$ имеет место наибольший

динамический эффект, при котором $\frac{u_{z \max}}{u_z^{(s) \max}} = 2,24$. В работе [69]

выполнено соответствующее исследование для прямоугольной пластины, при этом указанное отношение оказалось равным двум. Интересно отметить, что для круглой пластины при осесимметричных формах колебаний максимальный динамический эффект получается несколько больше, чем для прямоугольной, при исследовании которой принимаются во внимание неосесимметричные формы колебаний.

§ 8.4. Динамические эффекты при конечной скорости изменения тепловых воздействий

Решения для динамических задач термоупругости, в которых тепловые воздействия изменяются в течение интервала времени, можно получить из приведенных в § 8.2 и § 8.3 решений, применяя известный в теории теплопроводности интеграл Дюамеля [20, 39]. Ниже приводится вывод этого решения с помощью методов операционного исчисления.

Обозначим через $g^*(p)$ изображение какой-либо величины (температуры, напряжения, перемещения) при единичном граничном условии, соответствующем скачкообразному изменению теплового воздействия. Пусть граничное условие изменяется во времени по закону $f(\tau)$, при этом изображение $f(\tau)$ равно $f^*(p)$. Так как изображение единичного граничного условия равно $\frac{1}{p}$, то изображение решения рассматриваемой задачи, очевидно, имеет вид $G^*(p) = pf^*(p)g^*(p)$.

Применяя формулу (3.6.12), получаем при $f(0) = 0$ искомое решение в виде

$$G(\tau) = \int_0^\tau g(\tau') \frac{\partial f(\tau - \tau')}{\partial \tau} d\tau'. \quad (8.4.1)$$

Здесь $g(\tau)$ — решение при единичном граничном условии.

Упругое полупространство. Пусть упругое полупространство, рассмотренное в § 3.7 и § 8.2, подвергается нестационарному нагреву на поверхности $x = 0$, соответствующему таким начальному и граничным условиям: $T - T_0 = 0$ при $\tau = 0$;

$$\left. \begin{aligned} T - T_0 &= \frac{\vartheta - T_0}{\tau_0} \tau \quad \text{при } \xi = 0 \text{ и } 0 \leq \tau \leq \tau_0; \\ T - T_0 &= \vartheta - T_0 \quad \text{при } \xi = 0 \text{ и } \tau_0 \leq \tau < \infty, \end{aligned} \right\} \quad (8.4.2)$$

где $\vartheta \leq T_0$ и $\tau_0 > 0$ — постоянные; ξ, τ — безразмерные переменные, введенные в § 8.2.

Температурное поле определяем, интегрируя решение (3.7.9). Рассматривая в формуле (8.4.1) вместо функций $G(\tau)$ и $f(\tau)$ температурное поле $T - T_0$ и граничные условия (8.4.2) для $T - T_0$, а вместо функции $g(\tau)$ решение (3.7.9) для $T - T_0$, отнесенное к единичному граничному условию, т. е. выражение $\operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} = \operatorname{erfc} \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}$, и выполняя интегрирование по частям, находим

$$\begin{aligned} \frac{T - T_0}{\vartheta - T_0} = \varphi(\tau) &= \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau \operatorname{erfc} \frac{\xi}{2\sqrt{\tau'}} d\tau' = \\ &= \frac{1}{\tau_0} \left[\left(\tau + \frac{\xi^2}{2} \right) \operatorname{erfc} \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \xi \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{4\tau}} \right] \text{ при } 0 \leq \tau \leq \tau_0, \end{aligned} \quad (8.4.3)$$

$$\frac{T - T_0}{\vartheta - T_0} = \varphi(\tau) - \varphi(\tau - \tau_0) \quad \text{при } \tau_0 \leq \tau < \infty.$$

Аналогично определяем напряжение σ_x : рассматривая при тех же граничных условиях вместо функции $g(\tau)$ решение (8.2.16) для $\frac{\sigma_x}{\vartheta - T_0}$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x}{K} = \psi(\tau) &= \frac{1}{\tau_0} \left\{ \int_{\xi}^{\tau} e^{\tau' - \xi} d\tau' - \frac{1}{2} \int_0^\tau \left[e^{\tau' - \xi} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \frac{\xi}{\sqrt{\tau'}} - \sqrt{\tau'} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{\tau' + \xi} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \frac{\xi}{\sqrt{\tau'}} + \sqrt{\tau'} \right) \right] d\tau' \right\} = \\ &= \frac{1}{\tau_0} \left\{ H(\tau - \xi) (e^{\tau - \xi} - 1) - \frac{1}{2} \left[e^{\tau - \xi} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \frac{\xi}{\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{\tau + \xi} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \frac{\xi}{\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right] + \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \frac{\xi}{\sqrt{\tau}} \right) \right\} \text{ при } 0 \leq \tau \leq \tau_0; \end{aligned} \quad (8.4.4)$$

$$\frac{\sigma_x}{K} = \psi(\tau) - \psi(\tau - \tau_0) \quad \text{при } \tau_0 \leq \tau < \infty.$$

При интегрировании учитываем соотношения (8.2.18). Выражения для $\frac{T - T_0}{\vartheta - T_0}$ и $\frac{\sigma_x}{K}$ при $\tau_0 \leq \tau < \infty$ вытекают из представления соответствующего граничного условия (8.4.2) в форме $T - T_0 = \frac{\vartheta - T_0}{\tau_0} [\tau - (\tau - \tau_0)]$ при $\xi = 0$ и $\tau_0 \leq \tau < \infty$.

Напряжения $\sigma_y = \sigma_z$ определяем по формуле (8.2.2), в которой приращение температуры $T - T_0$ имеет выражение (8.4.3). В работе [93] исследовано влияние скорости изменения температуры поверхности полупространства на распределение в нем динамических тепловых напряжений. На рис. 59 представлено изменение напряжения σ_x в зависимости от безразмерного времени τ в сечении $\xi = 1$ при $\tau_0 = \frac{1}{2}$; 1; 2 и предельном значении $\tau_0 = 0$, соответствующем мгновенному повышению температуры поверхности полупространства.

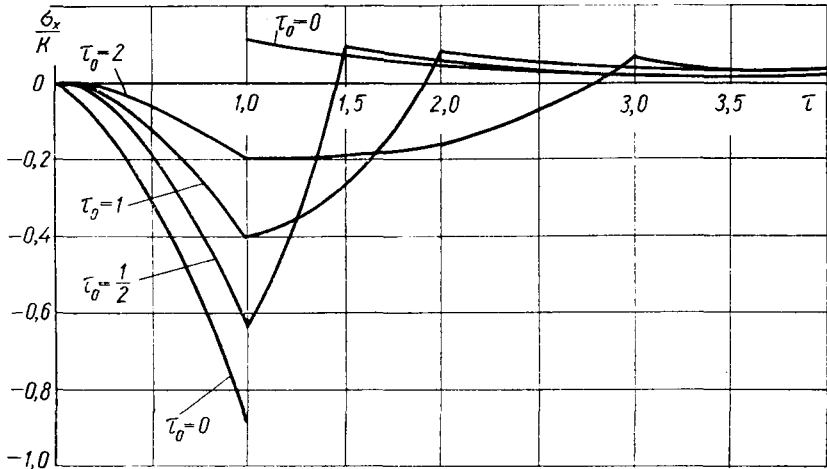


Рис. 59.

При $\tau_0 > 0$ напряжение σ_x в течение всего времени изменяется непрерывно, но его производная при $\tau = 1$ и $\tau = 1 + \tau_0$ претерпевает разрыв. Пиковые значения σ_x быстро уменьшаются с увеличением τ_0 ; при $\tau_0 = 3$ максимальное значение σ_x составляет менее 14% от его значения при $\tau_0 = 0$.

Для стали ($E = 2,04 \cdot 10^6$ дан/см²; $\nu = 0,3$; $\rho = 7,85 \times 10^{-3}$ кг/см³; $a = 0,13$ см²/сек) скорость волны расширения c_1 , вычисленная по формуле (8.2.5), составляет 5910 м/сек, а зависимость между t и τ имеет вид $t = \frac{a}{c_1^2} \tau = 3,7 \cdot 10^{-13} \tau$ сек. Следова-

тельно, для стали при $\tau_0 = 3$ продолжительность нагрева $t_0 \approx \approx 10^{-12}$ сек. Тем не менее даже при столь исключительно быстром нагреве поверхности полупространства максимум динамического напряжения (рис. 59) уменьшается на 86%.

Круглая пластина. К поверхности $z = \frac{h}{2}$ круглой пластины (§ 8.3) подводится тепловой поток, плотность которого q' изменяется

во времени по закону

$$q' = q_0 \frac{\tau}{\tau_0} \quad \text{при } 0 \leq \tau < \tau_0; \quad (8.4.5)$$

$$q' = q_0 \quad \text{при } \tau_0 \leq \tau < \infty.$$

Рассматривая в формуле (8.4.1) вместо функции $f(\tau)$ граничные условия (8.4.5) для q' , а вместо функции $g(\tau)$ решение (8.3.53) для $\frac{u_z^{(s)}}{q'}$ и решение (8.3.54) для $\frac{u_z^{(d)}}{q'}$, после интегрирования получаем

$$u_z^{(s)} = \chi^{(s)}(\tau) = \frac{q_0 \alpha_T r_0^2}{4 \lambda_q \tau_0} (1 - \rho^2) \left[\tau + \frac{96}{\pi^6} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^6} (e^{-n^2 \pi^2 \tau} - 1) \right] \quad (8.4.6)$$

при $0 \leq \tau \leq \tau_0$;

$$u_z^{(s)} = \chi^{(s)}(\tau) - \chi^{(s)}(\tau - \tau_0) \quad \text{при } \tau_0 \leq \tau < \infty;$$

$$u_z^{(d)} = \chi^{(d)}(\tau) = - \frac{96(1 + \nu) q_0 \alpha_T r_0^2}{\lambda_q \tau_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta_m(\rho)}{\alpha_m^4 D_m} \times$$

$$\times \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_m^2 B_0^2 (e^{-n^2 \pi^2 \tau} - \cos \alpha_m^2 B_0^2 \tau) + n^2 \pi^2 \sin \alpha_m^2 B_0^2 \tau}{n^2 \pi^2 B_0^2 (n^4 \pi^4 + \alpha_m^4 B_0^4)}$$

при $0 \leq \tau \leq \tau_0$;

(8.4.7)

$$u_z^{(d)} = \chi^{(d)}(\tau) - \chi^{(d)}(\tau - \tau_0) \quad \text{при } \tau_0 \leq \tau < \infty.$$

На рис. 60 приведена кривая изменения $\Delta = \frac{u_{z \max}}{u_{z \max}^{(s)}}$ в зависимости от τ_0 при $B_0 = 0,225$ и $\nu = 0,3$. Значению $\Delta = 1$ соответствует $\tau_0 = 25,1$. При $\tau_0 > 25,1$ изменение величины Δ носит периодический характер с амплитудой, убывающей, как τ_0^{-1} . При $B_0 = 2$ первый минимум величины Δ наступает при $\tau_0 = 0,318$.

В табл. 25 для $B_0 = 0,225$ и $B_0 = 2$ указаны геометрические размеры круглой пластины из углеродистой стали ($E = 2,04 \cdot 10^9$ дан/см²; $\nu = 0,3$; $\rho_0 = 7,85 \cdot 10^{-3}$ кг/см³, $a = 0,13$ см²/сек) и значения $t_0 = \frac{\tau_0 t^2}{a}$, соответствующие

$\tau_0 = 25,1$ при $B_0 = 0,225$ и $\tau_0 = 0,318$ при $B_0 = 2$. Согласно приведенным в таблице данным величина t_0 быстро уменьшается

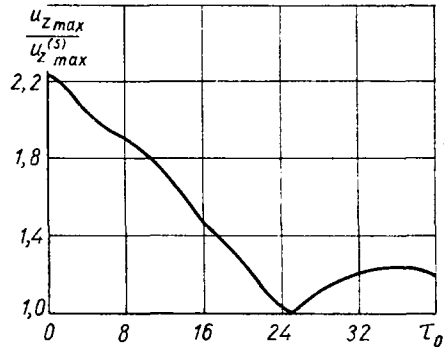


Рис. 60.

Таблица 25

$B_0 = 0,225$			$B_0 = 2$		
$r_2, \text{ см}$	h/r_2	$t_0, \text{ сек}$	$r_2, \text{ см}$	h/r_2	$t_0, \text{ сек}$
500	$0,44 \cdot 10^{-3}$	9,4	500	$0,19 \cdot 10^{-2}$	2,2
50	$0,95 \cdot 10^{-3}$	0,44	25	$0,51 \cdot 10^{-2}$	0,040
10	$0,16 \cdot 10^{-2}$	0,051	5	$0,88 \cdot 10^{-2}$	0,005

с возрастанием соотношения h/r_2 . Для очень тонких пластин значения t_0 соответствуют реальным скоростям тепловых воздействий.

СВЯЗАННАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ

§ 9.1. Эффекты связанности

Законы термодинамики гласят, что изменение деформаций упругого тела сопровождается изменением его температуры, при котором возникает теплоток, обуславливающий увеличение энтропии термодинамической системы и, следовательно, термоупругое рассеяние энергии.

В металлических телах эффект связанности поля деформации и температурного поля обычно мало влияет на термическое возмущение и распределение тепловых напряжений. Но это не значит, что подобное положение сохранится и для новых материалов, обладающих большим параметром связанности (1.8.5) [79]. Пример, иллюстрирующий эффекты связанности при внезапном механическом воздействии в слое из стали и полимерного материала, приведен в § 9.2.

При учете эффекта связанности устанавливаются новые качественные особенности распространения упругих волн [74], которые под влиянием тепловых эффектов распространяются с затуханием и дисперсией. В частности, существенно различаются решение динамической задачи термоупругости о тепловом ударе на поверхности полупространства без учета связи полей деформации и температуры (§ 8.2) и решение с учетом этой связи [89]; в случае «несвязанного» решения разрыв напряжения σ_x (рис. 55) остается неизменным, тогда как при «связанном» он с течением времени быстро уменьшается.

В настоящей главе связанная задача термоупругости рассматривается при малом термическом возмущении, т. е. при $\frac{T-T_0}{T_0} \ll 1$. В этом случае связанная задача становится линейной и при формулировке ее в перемещениях сводится к решению системы уравнений (1.7.6) и (1.7.7). Представления общих решений этой системы обобщают представления общих решений уравнения (1.8.6), описывающего динамическую задачу термоупругости (§ 8.1). Эти представления рассматриваются в § 9.3. Известные представления решения уравнений классической теории упругости Б. Г. Галеркина и П. Ф. Папковича обобщаются на случай связанной задачи термоупругости.

Применение прямых методов для решения связанных задач термоупругости в общем случае встречает большие математические затруднения; перспективной является разработка приближенных

методов решения связанных задач термоупругости на основе вариационных принципов, аналогичных таковым для статических и квазистатических задач термоупругости (§ 2.4). В § 9.4 излагается обобщение начала возможных перемещений Лагранжа на случай связанной задачи термоупругости, проведенное на основе термодинамики необратимых процессов [68].

Исследования связанных задач термоупругости получили интенсивное развитие за последние десять лет; при этом наиболее полно разработана теория плоских термоупругих волн [74—78, 86, 91]. В § 9.5 рассматривается одномерная задача о распространении плоских гармонических термоупругих волн расширения в неограниченной среде, а в § 9.6 — двумерная задача о распространении этих волн вдоль поверхности полупространства. На основании решений обеих задач можно выяснить природу термического возмущения упругих волн и, в частности, оценить результаты классической теории волн Релея [27].

§ 9.7. посвящен распространению продольных термоупругих волн в бесконечно длинном цилиндре. Эта задача представляет интерес в связи с опытным определением упругих постоянных посредством измерения фазовой скорости продольных упругих волн.

§ 9.2. Термическое возмущение упругого слоя при мгновенном приложении поверхностных сил

Пусть к поверхностям слоя $x = \pm \frac{h}{2}$ (рис. 61) мгновенно прикладываются нормальные сжимающие силы интенсивности p_0 . Предполагая

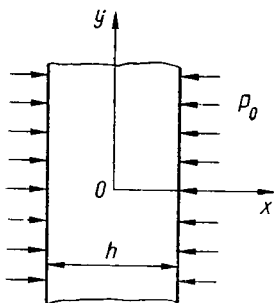


Рис. 61.

поверхности слоя теплоизолированными, определим приращение его температуры $T - T_0$. Для этой задачи отличная от нуля деформация ϵ_x определяется выражением (8.2.1), уравнение движения совпадает с уравнением (8.2.4), а уравнение теплопроводности (1.6.4) при $\epsilon_{kk} = \epsilon_x$ принимает вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{a} (1 + \epsilon) \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{(1 + \nu) \alpha_T T_0}{(1 - \nu) \lambda_q} \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = 0, \quad (9.2.1)$$

где

$$\epsilon = \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha_T^2 T_0}{(\lambda + 2\mu) c_e} = \frac{(1 + \nu) \alpha_T^2 E T_0}{(1 - \nu) (1 - 2\nu) c_e}. \quad (9.2.2)$$

Задача сводится к решению системы уравнений (8.2.4) и (9.2.1) при начальных условиях

$$T = T_0, \quad \sigma_x = 0, \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (9.2.3)$$

и граничных условиях

$$\sigma_x = -p_0 H(t), \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = \pm \frac{h}{2}, \quad (9.2.4)$$

где $H(t)$ — единичная функция Хевисайда (8.2.17).

Вводя в уравнения (8.2.4) и (9.2.1) и в условия (9.2.3), (9.2.4) безразмерные величины

$$\xi = \frac{c_1 x}{a}, \quad \tau = \frac{c_1^2 t}{a}, \quad \Theta = \alpha_T (T - T_0), \quad \sigma = \frac{\sigma_x (1 - 2\nu)}{E} \quad (9.2.5)$$

и учитывая выражения (8.2.5) и (9.2.2), получаем для рассматриваемой задачи следующую разрешающую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tau^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} - (1 + \varepsilon) \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - \varepsilon \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} &= 0 \end{aligned} \quad (9.2.6)$$

при начальных условиях

$$\Theta = 0, \quad \sigma = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = 0 \quad \text{при } \tau = 0 \quad (9.2.7)$$

и граничных условиях

$$\sigma = -\frac{p_0 (1 - 2\nu)}{E} H(t), \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } \xi = \pm \xi_0, \quad (9.2.8)$$

где $\xi_0 = \frac{hc_1}{2a}$.

Применяя преобразование Лапласа (§ 3.6) и учитывая начальные условия (9.2.7), вместо системы уравнений (9.2.6) и условий (9.2.8) находим систему

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma^*}{d\xi^2} - p^2 \sigma^* - p^2 \Theta^* &= 0; \\ \frac{d^2 \Theta^*}{d\xi^2} - p(1 + \varepsilon) \Theta^* - \varepsilon p \sigma^* &= 0 \end{aligned} \quad (9.2.9)$$

при условиях

$$\sigma^* = -\frac{p_0 (1 - 2\nu)}{pE}, \quad \frac{d\Theta^*}{d\xi} = 0 \quad \text{при } \xi = \pm \xi_0, \quad (9.2.10)$$

где $\sigma^* = \int_0^\infty \sigma e^{-p\tau} d\tau$, $\Theta^* = \int_0^\infty \Theta e^{-p\tau} d\tau$.

Исключая из уравнений (9.2.9) σ^* , получаем уравнение четвертого порядка

$$\frac{d^4 \Theta^*}{d\xi^4} - p(1 + \varepsilon + p) \frac{d^2 \Theta^*}{d\xi^2} + p^3 \Theta^* = 0. \quad (9.2.11)$$

Решение этого уравнения ищем в виде $\Theta^* = A e^{\beta \xi}$ ($A, \beta = \text{const}$).

Постоянная β определяется из характеристического уравнения $\beta^4 - \rho(1 + \varepsilon + \rho)\beta^2 + \rho^2 = 0$ и имеет значения

$$\beta_{1,2} = -\beta_{3,4} = \sqrt{\frac{\rho}{2}} [1 + \varepsilon + \rho \pm \sqrt{(1 + \varepsilon + \rho)^2 - 4\rho}]^{1/2}.$$

При этом решение уравнения (9.2.11) записывается в виде

$$\Theta^* = C_1 \operatorname{ch} \beta_1 \xi + C_2 \operatorname{sh} \beta_1 \xi + C_3 \operatorname{ch} \beta_2 \xi + C_4 \operatorname{sh} \beta_2 \xi. \quad (9.2.12)$$

В силу симметрии граничных условий решение задачи является симметричным, вследствие чего постоянные C_2 и C_4 надо принять равными нулю. Тогда решение (9.2.12) определяется выражением

$$\Theta^* = C_1 \operatorname{ch} \beta_1 \xi + C_3 \operatorname{ch} \beta_2 \xi. \quad (9.2.13)$$

Подставляя выражение (9.2.13) во второе уравнение (9.2.9), находим

$$\sigma^* = \frac{1}{\varepsilon \rho} [C_1 [\beta_1^2 - \rho(1 + \varepsilon)] \operatorname{ch} \beta_1 \xi + C_3 [\beta_2^2 - \rho(1 + \varepsilon)] \operatorname{ch} \beta_2 \xi]. \quad (9.2.14)$$

Удовлетворяя граничным условиям (9.2.10), определяем

$$C_1 = -\frac{\varepsilon \rho_0 (1 - 2\nu) \beta_2 \operatorname{sh} \beta_2 \xi_0}{B(\rho) E}; \quad (9.2.15)$$

$$C_3 = \frac{\varepsilon \rho_0 (1 - 2\nu) \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 \xi_0}{B(\rho) E},$$

где

$$B(\rho) = [\beta_1^2 - \rho(1 + \varepsilon)] \beta_2 \operatorname{sh} \beta_2 \xi_0 \operatorname{ch} \beta_1 \xi_0 - \\ - [\beta_2^2 - \rho(1 + \varepsilon)] \beta_1 \operatorname{ch} \beta_2 \xi_0 \operatorname{sh} \beta_1 \xi_0.$$

Подставляя значения постоянных (9.2.15) в решение (9.2.13), получаем

$$\Theta^* = \frac{\varepsilon \rho_0 (1 - 2\nu)}{B(\rho) E} [\beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 \xi_0 \operatorname{ch} \beta_2 \xi - \beta_2 \operatorname{sh} \beta_2 \xi_0 \operatorname{ch} \beta_1 \xi]. \quad (9.2.16)$$

Из физических соображений ясно, что существует предел $\Theta(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Theta(t)$. Тогда, применяя известное в операционном исчислении предельное соотношение [30] $\Theta(\infty) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \Theta^*(\rho)$, находим

$$\Delta T = (T - T_0)_{t=\infty} = \frac{1}{\alpha_T} \Theta(\infty) = \frac{\varepsilon \rho_0 (1 - 2\nu)}{\alpha_T (1 + \varepsilon) E}. \quad (9.2.17)$$

На основании формулы (8.2.2) и очевидного равенства $(\sigma_x)_{t=\infty} = -\rho_0$ определяем соответствующие напряжения

$$(\sigma_y)_{t=\infty} = \frac{\nu}{1 - \nu} (\sigma_x)_{t=\infty} - \frac{1}{1 - \nu} \alpha_T E (T - T_0)_{t=\infty} = \\ = (\sigma_y)_{\varepsilon=0} K = (\sigma_z)_{\varepsilon=0} K, \quad (9.2.18)$$

где

$$(\sigma_y)_{\epsilon=0} = (\sigma_z)_{\epsilon=0} = - \frac{\nu}{1-\nu} p_0, \quad (9.2.19)$$

$$K = 1 + \frac{\epsilon(1-2\nu)}{\nu(1+\epsilon)}. \quad (9.2.20)$$

Коэффициент K характеризует увеличение напряжений (9.2.19), обусловленное связанностью полей деформации и температуры.

В качестве иллюстрации теории рассмотрим эффекты связанности при внезапно приложенном давлении $p_0 = 0,981 \cdot 10^8 \text{ н/м}^2 = 10^3 \text{ кг/см}^2$ в упругом слое из стали и в слое из полимерного материала (поливинилбутирала), который в первом приближении предполагается также упругим. Ниже приводим механические и теплофизические свойства для этих двух материалов. Для стали: $E = 2,1 \times 10^6 \text{ кг/см}^2 = 2,06 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2$, $\nu = 0,3$, $\alpha_T = 12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град}$, $\rho = 7,85 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $c_p = 0,11 \text{ ккал/кг} \cdot \text{град} = 461 \text{ дж/кг} \cdot \text{град}$, $c_\sigma = c_p \rho = 3,62 \cdot 10^6 \text{ дж/м}^3 \cdot \text{град}$, $c_\epsilon = 3,56 \cdot 10^6 \text{ дж/м}^3 \cdot \text{град}$. Для поливинилбутирала*: $E = 2,8 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2 = 2,75 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2$, $\nu = 0,4$, $\alpha_T = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ 1/град}$, $\rho = 1,07 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $c_p = 0,4 \text{ ккал/кг} \cdot \text{град} = 1676 \text{ дж/кг} \cdot \text{град}$, $c_\sigma = c_p \rho = 1,79 \cdot 10^6 \text{ дж/м}^3 \cdot \text{град}$, $c_\epsilon = 1,15 \cdot 10^6 \text{ дж/м}^3 \cdot \text{град}$. Здесь c_p — удельная массовая теплоемкость при постоянном давлении; c_σ и c_ϵ — удельная объемная теплоемкость при постоянных тензорах соответственно напряжения и деформации (величина c_ϵ определяется по формуле (1.6.1) при $T = 293^\circ \text{ К}$).

Таблица 26

Материал	ϵ	$\Delta T, \text{ град}$	K
Сталь	0,0114	0,18	1,015
Поливинилбутираль	0,432	9,4	1,151

Принимая $T_0 = 293^\circ \text{ К}$, определяем для обоих материалов по формуле (9.2.2) коэффициент связанности ϵ и по формулам (9.2.17) и (9.2.20) соответствующие величины ΔT и K . Из данных табл. 26 видно, что при учете связанности приращение температуры ΔT и увеличение напряжений σ_y и σ_z для стали невелики (соответственно 0,18 град и 1,5%), а для поливинилбутирала весьма существенны (соответственно 9,4 град и 15,1%).

* См.: Зарубежные промышленные полимерные материалы и их компоненты. Справочник-словарь. Изд-во АН СССР, М., 1963, стр. 259.

§ 9.3. Представления общего решения

Связанная задача термоупругости при малом термическом возмущении описывается системой уравнений (1.7.6) и (1.7.7) при начальных и граничных условиях, рассмотренных в § 1.7.

При объемной силе

$$\vec{F} = \text{grad } \Pi + \text{rot } \vec{\chi} \quad (9.3.1)$$

известно следующее представление общего решения уравнений (1.7.6) и (1.7.7) [90, 91]:

$$\vec{u} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{A}, \quad (9.3.2)$$

$$T - T_0 = \frac{1}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T} [(\lambda + 2\mu) \square_1^2 \Phi + \Pi],$$

в котором скалярная Φ и векторная \vec{A} функции удовлетворяют уравнениям

$$\square^2 \left[\square_1^2 \Phi + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \Pi \right] - \frac{\varepsilon}{a} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Phi = - \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T}{(\lambda + 2\mu)\lambda_q} \omega_0; \quad (9.3.3)$$

$$\square_2^2 \vec{A} = - \frac{\vec{\chi}}{\mu}, \quad (9.3.4)$$

где

$$\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial}{\partial t}, \quad \square_n^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c_n^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (n = 1, 2); \quad (9.3.5)$$

ε — параметр связанности, имеющий значение (9.2.2); c_1 и c_2 — скорость распространения упругой волны соответственно расширения и искажения [см. выражения (8.1.5)]. При $\varepsilon = 0$ и $\Pi = 0$ уравнение (9.3.3) на основании уравнения (1.8.7) переходит в (8.1.2), а при $\vec{\chi} = 0$ уравнение (9.3.4) переходит в уравнение (8.1.3) динамической задачи термоупругости.

Найдено также обобщение известного представления решения уравнений классической теории упругости Б. Г. Галеркина [7] на случай связанной задачи термоупругости [54]:

$$\vec{u} = \text{grad } \Phi + \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \square_1^2 \vec{A} - \text{grad } \text{div } \vec{A}, \quad (9.3.6)$$

$$T - T_0 = \frac{\lambda + 2\mu}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T} \square_1^2 \Phi,$$

где функции Φ и \vec{A} удовлетворяют уравнениям

$$\square^2 \square_1^2 \Phi - \frac{\varepsilon}{a} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Phi - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{\varepsilon}{a} \square_2^2 \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} =$$

$$= - \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T}{(\lambda + 2\mu)\lambda_q} \omega_0, \quad (9.3.7)$$

$$\square_1^2 \square_2^2 \vec{A} = - \frac{\lambda + \mu}{(\lambda + 2\mu)\mu} \vec{F}. \quad (9.3.8)$$

Как и в динамической задаче термоупругости, представление (9.3.6) при отсутствии объемных сил можно преобразовать к представлению (9.3.2). Действительно, если в представление (9.3.6) и уравнение (9.3.7) внести выражения

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \vec{A}_0 + \vec{A}_1 + \vec{A}_2, \\ \Phi &= \Phi' + \operatorname{div} \vec{A}_1,\end{aligned}\tag{9.3.9}$$

в которых \vec{A}_0 — частное решение неоднородного уравнения (9.3.8), \vec{A}_1 и \vec{A}_2 — решения уравнений

$$\square_1^2 \vec{A}_1 = 0, \quad \square_2^2 \vec{A}_2 = 0,\tag{9.3.10}$$

а Φ' — новая скалярная функция, то форма их не изменится, но вместо Φ и \vec{A} в представлении (9.3.6) возникают Φ' и $\vec{A}_0 + \vec{A}_2$, а в уравнении (9.3.7) Φ' и \vec{A}_0 . На основании второго уравнения (9.3.10) и тождества

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}_2 = \nabla^2 \vec{A}_2 + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}_2$$

при подстановке — $\operatorname{rot} \vec{A}_2 = \vec{A}'$ такое представление при $\vec{A}_0 = 0$, $\Pi = 0$, $\vec{\chi} = 0$ (отсутствие объемных сил) переходит в представление (9.3.2).

Вводя в представление (9.3.6) и в уравнения (9.3.7) и (9.3.8) новые функции

$$B_0 = \operatorname{div} \vec{A} - \vec{B} \cdot \vec{r}, \quad \vec{B} = \frac{1}{2} \square_1^2 \vec{A},\tag{9.3.11}$$

где r — радиус-вектор, получаем обобщение известного представления П. Ф. Папковича [51] на случай связанной задачи термоупругости

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \operatorname{grad} \Phi + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \vec{B} - \operatorname{grad} (\vec{B} \cdot \vec{r} + B_0); \\ T - T_0 &= \frac{\lambda + 2\mu}{(3\lambda + 2\mu) \alpha_T} \square_1^2 \Phi,\end{aligned}\tag{9.3.12}$$

в котором функции Φ , \vec{B} , B_0 удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\square^2 \square_1^2 \Phi - \frac{\varepsilon}{a} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Phi - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{\varepsilon}{a} \square_2^2 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B} \cdot \vec{r} + B_0) &= \\ &= - \frac{(3\lambda + 2\mu) \alpha_T}{(\lambda + 2\mu) \lambda q} \omega_0;\end{aligned}\tag{9.3.13}$$

$$\square_2^2 \vec{B} = - \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu) \mu} \vec{F}, \quad \square_1^2 B_0 + \vec{r} \cdot \square_1^2 \vec{B} = 0.\tag{9.3.14}$$

В случае распространения безвихревой волны (волны расширения) и отсутствия объемных сил и источников тепла ($\vec{A} = 0, \Pi = 0, \omega_0 = 0$) представление (9.3.2) имеет вид

$$\vec{u} = \text{grad } \Phi, \quad T - T_0 = \frac{\lambda + 2\mu}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T} \square_1^2 \Phi, \quad (9.3.15)$$

где функция Φ удовлетворяет уравнению

$$\left(\square_1^2 \square_1^2 - \frac{\varepsilon}{a} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \right) \Phi = 0. \quad (9.3.16)$$

Решение для функции Φ ищем в виде

$$\Phi = \varphi(x, y, z) e^{pt}, \quad (9.3.17)$$

где p — комплексная постоянная. Подставляя это решение в (9.3.16), для φ получаем уравнение

$$\left[\left(\nabla^2 - \frac{p}{a} \right) \left(\nabla^2 - \frac{p^2}{c_1^2} \right) - \frac{\varepsilon p}{a} \nabla^2 \right] \varphi = 0, \quad (9.3.18)$$

которое может быть представлено в виде

$$(\nabla^2 + \delta_1^2)(\nabla^2 + \delta_2^2)\varphi = 0, \quad (9.3.19)$$

где

$$\delta_1^2, \delta_2^2 = -\frac{p^2}{2c_1^2} \left\{ \left(1 + \frac{1+\varepsilon}{\chi'} \right) \pm \left[1 - \frac{2(1-\varepsilon)}{\chi'} + \left(\frac{1+\varepsilon}{\chi'} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}; \quad (9.3.20)$$

$$\chi' = \frac{ap}{c_1^2},$$

а параметр связанности ε имеет значение (9.2.2). Если предположить, что термоупругая связь отсутствует ($\varepsilon = 0$), то из уравнения (9.3.20) получаем

$$\delta_1^2 = -\frac{p^2}{c_1^2}; \quad \delta_2^2 = \frac{p}{a}. \quad (9.3.21)$$

Следовательно, уравнение (9.3.20) описывает распространение двух видов волн расширения, из которых один, связанный с δ_1 , близок к чисто упругой волне, а другой, связанный с δ_2 , сходен по своему характеру с чисто тепловой волной.

На основании уравнений (9.3.17) и (9.3.19) общее решение уравнения (9.3.16) можно представить в виде

$$\Phi = \sum_{j=1}^2 \varphi_j e^{pt}, \quad (9.3.22)$$

где φ_j удовлетворяет уравнению

$$(\nabla^2 + \delta_j^2)\varphi_j = 0, \quad j = 1, 2. \quad (9.3.23)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае общее решение связанной термоупругой задачи на основании представления (9.3.15) и решения (9.3.22) принимает вид

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^2 \text{grad } \varphi_j e^{\rho t}; \quad (9.3.24)$$

$$T - T_0 = -\frac{\lambda + 2\mu}{(3\lambda + 2\mu) \alpha_T} \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\rho^2}{c_1^2} + \delta_j^2 \right) \varphi_j e^{\rho t}. \quad (9.3.25)$$

Учитывая, что

$$\varepsilon_{kk} = \text{div } \vec{u} = \sum_{j=1}^2 \nabla^2 \varphi_j e^{\rho t} = -\sum_{j=1}^2 \delta_j^2 \varphi_j e^{\rho t},$$

и принимая во внимание формулу (9.3.25), получаем на основании соотношения (1.5.20) следующие выражения для напряжений:

$$\sigma_{kl} = 2\mu \left[\varepsilon_{kl} + \delta_{kl} \sum_{j=1}^2 \left(\delta_j^2 + \frac{\rho \rho^2}{2\mu} \right) \varphi_j e^{\rho t} \right], \quad (9.3.26)$$

где δ_{kl} — символ Кронекера; ρ — плотность среды, в которой распространяется волна.

§ 9.4. Вариационный принцип

Исходя из основных положений термодинамики необратимых процессов, Био [68] установил вариационный принцип связанной задачи термоупругости. Здесь приводится вывод этого принципа, несколько отличный от предложенного Био.

Ограничиваясь небольшими отклонениями термодинамической системы от равновесного состояния ($T \approx T_0$), вводим в рассмотрение два векторных поля: поле вектора перемещения \vec{u} и поле вектора энтропии \vec{s} . Вектор энтропии \vec{s} определяет количество тепла, прошедшего в данном направлении, деленное на абсолютную температуру. Он связан с вектором потока тепла \vec{q} следующим равенством:

$$\vec{q} = T \dot{\vec{s}} \approx T_0 \dot{\vec{s}}, \quad (9.4.1)$$

или

$$q_i \approx T_0 \dot{s}_i, \quad (9.4.2)$$

где s_i — компоненты вектора энтропии.

На основании уравнения (1.4.2) и равенства (1.4.9) получаем при $\omega_0 = 0$

$$-\dot{s}_{i,t} = \frac{\dot{Q}}{T_0} = \dot{S}; \quad (9.4.3)$$

$$\dot{S}_i = \frac{1}{\lambda_q} \dot{s}_i \dot{s}_i, \quad (9.4.4)$$

где S — плотность энтропии; \dot{S}_i — локальное образование энтропии в единицу времени.

Варьированию подвергаются компоненты вектора перемещения u_i и вектора энтропии s_i . Сообщая им шесть независимых вариаций δu_i , δs_i ($i = 1, 2, 3$) и используя уравнения (1.2.20), (1.4.5) (9.4.2), составляем следующее очевидное равенство:

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + F_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dV - \int_V \left(T_{,i} + \frac{T_0 \dot{s}_i}{\lambda_q} \right) \delta s_i dV = 0, \quad (9.4.5)$$

где интегрирование распространяется по всему объему тела.

С помощью формулы Остроградского — Гаусса (1.2.12) уравнение (9.4.5) преобразуем к виду

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} n_j \delta u_i d\Omega + \int_V (F_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dV - \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \\ - \int_{\Omega} (T - T_0) n_i \delta s_i d\Omega - \int_V \frac{T_0 \dot{s}_i}{\lambda_q} \delta s_i dV + \int_V (T - T_0) \delta s_{i,i} dV = 0. \quad (9.4.6)$$

Используя формулы (1.5.20), (9.4.3) и выражение для плотности энтропии

$$S = (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \varepsilon_{kk} + c_e \frac{T - T_0}{T_0}, \quad (9.4.7)$$

которое получается из выражения (1.6.2), если в разложении $\ln \frac{T}{T_0}$ в ряд ограничиться линейным членом $\frac{T - T_0}{T_0}$, преобразуем третий и шестой интегралы в уравнении (9.4.6) к виду

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \delta \int_V \left(\frac{\lambda}{2} \varepsilon_{kk}^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \right) dV - \\ - \int_V (3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0) \delta \varepsilon_{kk} dV; \quad (9.4.8)$$

$$\int_V (T - T_0) \delta s_{i,i} dV = - \int_V (T - T_0) \delta S dV = \\ = - \delta \int_V \frac{c_e (T - T_0)^2}{2T_0} dV - \int_V (3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0) \delta \varepsilon_{kk} dV. \quad (9.4.9)$$

При преобразовании интегралов (9.4.8) и (9.4.9) учитываем, что $\delta_{ij} \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{kk}$. Подставляя эти интегралы в уравнение (9.4.6) и принимая во внимание равенство (1.2.9), сформулируем вариационный принцип связанной задачи термоупругости:

$$\delta V_B + \delta D + \delta K = \int_V F_i \delta u_i dV + \int_{\Omega} [f_i \delta u_i - (T - T_0) n_i \delta s_i] d\Omega, \quad (9.4.10)$$

где

$$V_B = \int_V \left[\frac{\lambda}{2} \varepsilon_{kk}^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{c_e (T - T_0)^2}{2T_0} \right] dV, \quad (9.4.11)$$

$$D = \frac{1}{2} \int_V \frac{T_0 \dot{s}_i \dot{s}_i}{\lambda_{q_i}} dV, \quad (9.4.12)$$

а кинетическая энергия K определяется выражением (1.2.29).

Скалярный инвариант V_B называется термоупругим потенциалом Био, а скалярный инвариант D — функцией рассеяния. Инвариант D , как видно из равенства (9.4.4), пропорционален скорости образования энтропии всего объема тела.

Правую часть уравнения (9.4.10) можно интерпретировать как обобщенную термомеханическую виртуальную работу; при этом величина $-(T - T_0) n_i$ (n_i — единичный вектор внешней нормали к поверхности) аналогична силе, а δs_i — виртуальному перемещению.

Записывая компоненты вектора перемещения u_i и компоненты вектора энтропии s_i в виде

$$u_i = \sum_{j=1}^n u_{ij}(x_k) q_j(t), \quad s_i = \sum_{j=1}^n s_{ij}(x_k) q_j(t), \quad (9.4.13)$$

где q_j — обобщенные координаты, и учитывая, что вариации δu_i и δs_i не зависят от времени, определяем

$$\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial q_j} \delta q_j; \quad \delta s_i = \frac{\partial s_i}{\partial q_j} \delta q_j; \quad \frac{\partial u_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial \dot{q}_j}; \quad \frac{\partial s_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{s}_i}{\partial \dot{q}_j}; \quad (9.4.14)$$

$$\delta V_B = \frac{\partial V_B}{\partial q_j} \delta q_j; \quad \delta D = \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j; \quad \delta K = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right] \delta \dot{q}_j.$$

Подставляя величины (9.4.14) в уравнение (9.4.10), записываем его в форме уравнений движения Лагранжа для систем с рассеянием энергии

$$\frac{\partial V_B}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = Q_j, \quad (9.4.15)$$

где Q_j — обобщенная сила,

$$Q_j = \int_V F_i \frac{\partial u_i}{\partial q_j} dV + \int_{\Omega} \left[f_i \frac{\partial u_i}{\partial q_j} - (T - T_0) n_i \frac{\partial \dot{s}_i}{\partial q_j} \right] d\Omega. \quad (9.4.16)$$

В случае несвязанной задачи термоупругости вариациям подвергаются только компоненты вектора перемещения u_i . Игнорируя при этом в равенстве (9.4.9) связывающий член $\int_V (3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0) \delta \varepsilon_{kk} dV$, из вариационного принципа (9.4.6) получаем начало

возможных перемещений Лагранжа для динамической несвязанной задачи термоупругости

$$\delta \int_V F dV + \delta K = \int_V F_i \delta u_i dV + \int_\Omega f_i \delta u_i d\Omega, \quad (9.4.17)$$

где F — плотность свободной энергии,

$$F = \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{kk}^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0) \varepsilon_{kk} - c_e \frac{(T - T_0)^2}{2T_0}. \quad (9.4.18)$$

Это выражение совпадает с выражением (1.5.18) при $T - T_0 \ll T_0$.

Если в уравнении (9.4.10) приравнять механические члены нулю, то получим известное вариационное уравнение теплопроводности

$$\delta V_B + \delta D = - \int_\Omega (T - T_0) n_i \delta s_i d\Omega. \quad (9.4.19)$$

Обобщение вариационного принципа на случай связанной задачи термоупругости с тепловыми источниками дается в работе [3].

Пример. Для иллюстрации применения вариационного принципа Био приведем решение задачи о термоупругом рассеянии энергии при поперечных колебаниях консольной балки [68]. Балка прямоугольного поперечного сечения имеет высоту h , ширину b и длину l . Ось балки направлена вдоль оси x , начало координат находится на заделанном конце балки.

На основании элементарной теории изгиба балки имеем

$$\varepsilon_x = -z \frac{d^2 u_z}{dx^2}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0$$

и

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -z(1 - 2\nu) \frac{d^2 u_z}{dx^2}, \quad (9.4.20)$$

где u_z — прогиб балки.

Полагаем, что прогиб балки имеет такую форму:

$$u_z = q_1 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right), \quad (9.4.21)$$

где q_1 — прогиб свободного конца балки — обобщенная координата.

Предполагаем, что плотность энтропии (9.4.7) изменяется линейно по координате z и по закону косинуса вдоль оси x и соответствует подобным распределениям $T - T_0$ и ε_{kk} , т. е. принимаем

$$S = \frac{2q_2 z}{h} \cos \frac{\pi x}{2l} \quad (9.4.22)$$

где q_2 — обобщенная координата для энтропии.

Используя выражение для плотности энтропии (9.4.7), представляем термоупругий потенциал Био (9.4.11) в виде

$$V_B = \int_V \left\{ \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{kk}^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{T_0}{2c_e} [S - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \varepsilon_{kk}]^2 \right\} dV. \quad (9.4.23)$$

Подставляя в подинтегральное выражение величины (9.4.20), (9.4.21), (9.4.22) и интегрируя его, получаем следующее выражение для термоупругого потенциала Био:

$$V_B = \frac{1}{2} a_{11} q_1^2 + a_{12} q_1 q_2 + \frac{1}{2} a_{22} q_2^2, \quad (9.4.24)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\pi^4}{32} \frac{Ebh^3}{12l^3} \left(1 + E\alpha_T^2 \frac{T_0}{c_e} \right), \\ a_{12} &= \frac{\pi^2}{48} E\alpha_T \frac{T_0 h^2 b}{lc_e}, \\ a_{22} &= \frac{1}{6} \cdot \frac{T_0 b h l}{c_e}. \end{aligned} \quad (9.4.25)$$

Кинетическая энергия балки определяется выражением

$$K = \frac{1}{2} \rho b h \int_0^l \dot{u}_z^2 dx = \frac{1}{2} m_{11} \dot{q}_1^2, \quad (9.4.26)$$

где

$$m_{11} = \frac{3\pi - 8}{2\pi} \rho b h l. \quad (9.4.27)$$

Определим теперь функцию рассеяния D . Полагая, что поток энтропии направлен по координате z , на основании соотношения (9.4.3) получаем

$$-\frac{ds}{dz} = S. \quad (9.4.28)$$

Учитывая выражение (9.4.22) и предполагая отсутствие теплотока через границы $z = \pm \frac{h}{2}$, определяем

$$s = \frac{q_2}{h} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \cos \frac{\pi x}{2l}. \quad (9.4.29)$$

После подстановки (9.4.29) в выражение (9.4.12) и интегрирования находим

$$D = \frac{1}{2} b_{22} \dot{q}_2^2, \quad (9.4.30)$$

где

$$b_{22} = \frac{T_0 b h^3 l}{60 \lambda_q}. \quad (9.4.31)$$

Уравнения движения Лагранжа (9.4.15) при найденных выражениях для V_B , K , D и $Q_j = 0$ приводят к двум дифференциальным уравнениям относительно q_1 и q_2 :

$$\begin{aligned} m_{11} \ddot{q}_1 + a_{11} q_1 + a_{12} q_2 &= 0; \\ b_{22} \dot{q}_2 + a_{12} q_1 + a_{22} q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (9.4.32)$$

При гармонических колебаниях с частотой ω $\dot{q}_2 = i\omega q_2$. Исключая из уравнений (9.4.32) q_2 , получаем

$$m_{11} \ddot{q}_1 + \left(a_{11} - \frac{a_{12}^2}{a_{22} + i\omega b_{22}} \right) q_1 = 0. \quad (9.4.33)$$

Величину

$$a_{11} - \frac{a_{12}^2}{a_{22} + i\omega b_{22}} = a_{11} - \frac{a_{12}^2 a_{22}}{a_{22}^2 + \omega^2 b_{22}^2} + i \frac{a_{12}^2 b_{22} \omega}{a_{22}^2 + \omega^2 b_{22}^2} \quad (9.4.34)$$

можно рассматривать как комплексный коэффициент упругости пружины, зависящий от частоты. Действительная часть выражения (9.4.34) определяет модуль жесткости балки, изменяющийся от его значения при изотермическом процессе до значения при адиабатическом процессе с ростом частоты от нуля до бесконечности. Мнимая часть этого выражения дает эквивалентную демпфирующую силу, которая при $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ обращается в нуль, а при $\omega = \frac{a_{22}}{b_{22}}$ достигает максимума.

Необходимо отметить, что при больших частотах приближенное выражение (9.4.22) несправедливо; в этом случае следует ввести дополнительные обобщенные координаты для S .

§ 9.5. Плоские гармонические термоупругие волны расширения в неограниченной среде

Пусть в неограниченной термоупругой среде возникают плоские гармонические волны расширения с круговой частотой ω . Предполагая в связи с этим, что в решении (9.3.22) φ_j — функции только координаты x , т. е. $\varphi_j = \varphi_j(x)$, для определения φ_j вместо (9.3.23) получаем уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \delta_j^2\right)\varphi_j = 0, \quad j = 1, 2. \quad (9.5.1)$$

Общее решение этого уравнения определяется выражением

$$\varphi_j = C_{j+} \exp(-i\delta_j x) + C_{j-} \exp(i\delta_j x), \quad (9.5.2)$$

где C_{j+} , C_{j-} — постоянные, в общем случае комплексные.

Внося выражение (9.5.2.) в решения (9.3.24) и (9.3.25) и полагая для случая гармонических волн $p = i\omega$, находим искомое решение

$$u_x = \sum_{j=1}^2 i\delta_j \{-C_{j+} \exp[i(\omega t - \delta_j x)] + C_{j-} \exp[i(\omega t + \delta_j x)]\}; \quad (9.5.3)$$

$$u_y = u_z = 0;$$

$$T - T_0 = \frac{\lambda + 2\mu}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T} \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \delta_j^2\right) \{C_{j+} \exp[i(\omega t - \delta_j x)] + C_{j-} \exp[i(\omega t + \delta_j x)]\}, \quad (9.5.4)$$

где

$$\delta_1^2, \delta_2^2 = \frac{\omega^2}{2c_1^2} \left\{ \left(1 + \frac{1+\varepsilon}{i\chi}\right) \pm \left[1 - \frac{2(1-\varepsilon)}{i\chi} + \left(\frac{1+\varepsilon}{i\chi}\right)^2\right]^{1/2} \right\}; \quad (9.5.5)$$

$$\varepsilon = \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha_T^2}{(\lambda + 2\mu) c_e^2}; \quad \chi = \frac{\omega}{\omega^*}; \quad \omega^* = \frac{c_1^2}{l a};$$

постоянные C_{j+} и C_{j-} соответствуют волнам, распространяющимся соответственно в положительном и отрицательном направлении оси x .

Рассматривая волны, распространяющиеся в положительном направлении оси x , и заменяя комплексные величины δ_j выражениями

$$\delta_j = p_j - iq_j, \quad j = 1, 2, \quad (9.5.6)$$

где p_j и q_j — действительные величины, преобразуем формулы (9.5.3) и (9.5.4) к виду:

$$u_x = - \sum_{j=1}^2 i\delta_j C_j \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{v_j} \right) \right] \exp(-q_j x), \quad (9.5.7)$$

$$T - T_0 = \frac{\lambda + 2\mu}{(3\lambda + 2\mu) \alpha_T} \sum_{j=1}^2 C_j \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \delta_j^2 \right) \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{v_j} \right) \right] \exp(-q_j x), \quad (9.5.8)$$

где $C_j = C_{j+}$; v_j — фазовая скорость распространения волны, $v_j = \frac{\omega}{p_j}$.

Для выяснения физического смысла термоупругих волн (9.5.7) и (9.5.8) сравним эти волны с волнами в сплошной среде с нулевым коэффициентом α_T и, следовательно, с нулевым параметром связанности ε . В этом случае согласно выражениям (8.1.1), (8.1.2) и (3.2.4) упругая и тепловая волны описываются уравнениями

$$\square_1^2 u_x = 0 \quad \text{и} \quad \square^2 (T - T_0) = 0, \quad (9.5.9)$$

решения которых имеют вид

$$u_x = C'_1 \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{c_1} \right) \right]; \quad (9.5.10)$$

$$T - T_0 = C'_2 \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{v_2} \right) \right] \exp \left(- \sqrt{\frac{\omega}{2a}} x \right), \quad (9.5.11)$$

где

$$v_2 = \sqrt{2a\omega}.$$

Выражение (9.5.10) представляет собой чисто упругую плоскую гармоническую волну расширения, распространяющуюся в направлении оси x . Эти волна не имеет ни затухания, ни дисперсии. Выражение (9.5.11) соответствует чисто тепловой плоской гармонической волне, которая имеет затухание, характеризуемое коэффициентом $q_2 = \sqrt{\frac{\omega}{2a}}$, и дисперсию, обусловленную тем, что фазовая скорость $v_2 = \sqrt{2a\omega}$ является функцией частоты.

Следовательно, выражение (9.5.7) описывает модифицированную упругую волну, а (9.5.8) — модифицированную тепловую волну. Взаимодействие процесса упругого деформирования и процесса теплопроводности в рассматриваемом случае проявляется в следующем: модифицированная упругая волна в отличие от чисто упругой

(9.5.10) подвергается затуханию и дисперсии. Для модифицированной тепловой волны, которая подвергается, как и чисто тепловая волна (9.5.11), затуханию и дисперсии, фазовая скорость v_2 и коэффициент затухания q_2 не пропорциональны $\omega^{\frac{1}{2}}$.

Выражение (9.5.7) для модифицированной упругой волны, кроме основного члена — квазиупругой волны с фазовой скоростью v_1 и коэффициентом затухания q_1 , содержит дополнительный член,

Т а б л и ц а 27

Величина	Алюминий	Медь	Сталь	Свинец
c_1 , см/сек	$6,32 \cdot 10^5$	$4,36 \cdot 10^5$	$5,80 \cdot 10^5$	$2,14 \cdot 10^6$
ϵ	$3,56 \cdot 10^{-2}$	$1,68 \cdot 10^{-2}$	$1,14 \cdot 10^{-2}$ ($2,97 \cdot 10^{-4}$)	$7,33 \cdot 10^{-2}$
ω^* , 1/сек	$4,66 \cdot 10^{11}$	$1,73 \cdot 10^{11}$	$1,75 \cdot 10^{13}$	$1,91 \cdot 10^{11}$
q_∞ , 1/см	$1,31 \cdot 10^4$	$3,29 \cdot 10^3$	$1,72 \cdot 10^4$ ($4,48 \cdot 10^2$)	$3,27 \cdot 10^4$
ω_c , 1/сек	$9,80 \cdot 10^{13}$	$7,55 \cdot 10^{13}$	$9,95 \cdot 10^{13}$	$3,69 \cdot 10^{13}$

отвечающий волне противоположного вида. Оба типа волн подобным образом представлены и в выражении (9.5.8) для модифицированной тепловой волны.

Наибольший интерес представляет термическая модификация квазиупругой волны

$$u_x^{(1)} = C \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{v_1} \right) \right] \exp(-q_1 x), \quad (9.5.12)$$

где $v_1 = \frac{\omega}{\rho_1}$.

Как следует из формулы (9.5.5) и равенства (9.5.6), величины ρ_1 и q_1 являются функциями параметра связанности ϵ и относительной частоты $\chi = \frac{\omega}{\omega^*}$, где $\omega^* = \frac{c_1^2}{a}$. Параметр ϵ зависит от механических и тепловых свойств материала, а величина ω^* , имеющая определенное физическое значение, рассматривается в теории термоупругих плоских гармонических волн [74, 75] как характеристическая частота. Значения ϵ и ω^* для четырех металлов при температуре 293° К приводятся в табл. 27 [75]*. Из данных этой таблицы видно, что характеристическая частота ω^* значительно

* Значения ϵ и q_∞ для стали, как неправильно вычисленные, указаны в скобках. Значение $\epsilon = 0,0114$, которому соответствует $q_\infty = 1,72 \cdot 10^4$ 1/см, взято из данных табл. 26.

больше частоты, достигаемой в опыте при ультразвуковых колебаниях. Поэтому для большинства материалов в области частот, встречающихся в инженерной практике, можно принять $\chi \ll 1$.

Разлагая выражение для δ_1 , определяемое формулой (9.5.5), в степенной ряд по χ , в этом случае находим

$$p_1 = \frac{\omega}{c_S} \left[1 + \frac{\varepsilon(4-3\varepsilon)}{8(1+\varepsilon)^4} \chi^2 \right]; \quad (9.5.13)$$

$$q_1 = \frac{\varepsilon\omega\chi}{2c_S(1+\varepsilon)^2}, \quad (9.5.14)$$

где

$$c_S = c_1(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}. \quad (9.5.15)$$

Величина c_S является адиабатической фазовой скоростью распространения волны расширения в неограниченной среде. Действительно, полагая в случае адиабатического процесса $a = \frac{\lambda q}{c_e} = 0$, из уравнения (9.3.3), взятого при $\Pi = 0$ и $\omega_0 = 0$, получаем волновое уравнение $\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_S^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = 0$, в котором адиабатическая скорость c_S связана с изотермической скоростью распространения волны расширения c_1 соотношением (9.5.15). Этот же результат получаем при подстановке в выражение

$$c_S^2 = \frac{\lambda_S + 2\mu}{\rho} \quad (9.5.16)$$

значения (1.6.9) для постоянной Ляме λ_S в случае адиабатической деформации.

Фазовая скорость распространения этой волны

$$v_1 = \frac{\omega}{p_1} = c_S \left[1 - \frac{\varepsilon(4-3\varepsilon)}{8(1+\varepsilon)^4} \chi^2 \right] \approx c_S \quad (9.5.17)$$

— постоянная величина, и, таким образом, квазиупругая волна расширения при $\chi \ll 1$ не имеет дисперсии.

С помощью выражений (9.5.15) — (9.5.17) можно установить следующую зависимость:

$$\frac{v_1^2}{c_1^2} = \frac{c_S^2}{c_1^2} = \frac{\lambda_S + 2\mu}{\lambda + 2\mu} = 1 + \varepsilon. \quad (9.5.18)$$

Согласно (9.5.18) статические и динамические (при $\chi \ll 1$) упругие постоянные являются упругими постоянными в случае соответственно изотермической и адиабатической деформации. Эта зависимость может быть использована при экспериментальном определении упругих постоянных на основании точного измерения фазовой скорости продольной упругой волны.

Коэффициент q_1 — положительная величина, поэтому амплитуда волны затухает в теплопроводящей среде по экспоненциальному

закону. Определим для рассматриваемой волны относительное рассеяние энергии $\frac{\Delta W}{W}$, где ΔW — энергия, рассеянная в течение цикла напряжения, а W — упругая энергия, накопленная телом в момент достижения наибольшей деформации. Обозначим через u_1 и u_2 последовательные значения амплитуд перемещения по одну и ту же сторону от положения равновесия.

Если относительное рассеяние энергии мало по сравнению с единицей, то

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{u_1^2 - u_2^2}{u_1^2} \approx \frac{2(u_1 - u_2)}{u_2} \approx 2 \ln \frac{u_1}{u_2}.$$

Поскольку на основании выражения (9.5.12)

$$\frac{u_1}{u_2} = e^{q_1 L},$$

где

$$L = \frac{v_1 2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\rho_1},$$

то, учитывая значения коэффициентов (9.5.13) и (9.5.14), находим

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{4\pi q_1}{\rho_1} = \frac{2\pi \epsilon \chi}{(1 + \epsilon)^2}. \quad (9.5.19)$$

Рассмотрим теперь свойства квазиупругой волны (9.5.12) при $\chi \gg 1$. Разлагая выражение для δ_1 в степенной ряд по χ^{-1} , получаем

$$\rho_1 = \frac{\omega}{c_1}; \quad (9.5.20)$$

$$q_1 = q_\infty = \frac{\epsilon c_1}{2a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon \omega^*}{c_1}. \quad (9.5.21)$$

В этом случае фазовая скорость распространения волны

$$v_1 = \frac{\omega}{\rho_1} = c_1 \quad (9.5.22)$$

совпадает с изотермической скоростью распространения упругой волны расширения, а коэффициент затухания приближается к некоторой предельной величине, соответствующей на основании формулы (9.5.19) относительному рассеянию энергии

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{2\pi \epsilon}{\chi}. \quad (9.5.23)$$

Частота вынужденных колебаний, которая может быть достигнута в упругом твердом теле, ограничена частотой продольных колебаний дебаевского спектра [71] $\omega_c = 2\pi c_1 \left(\frac{3}{4\pi v_a} \right)^{1/3}$, где v_a — объем одного атома в твердом теле.

Значения величин q_∞ и ω_c указаны в табл. 27. Заметим, что характеристическая частота ω^* более чем в 100 раз меньше предельной частоты ω_c дебаевского спектра.

В работе [75] вычислены характеристики квазиупругой волны в широком интервале частот $10^{-11} < \chi < 10^8$ для металлов (табл. 27), обладающих параметром связанности $\epsilon \ll 1$.

Изменение отношений $\frac{v_1}{c_1}$ и $\frac{q_1}{q_\infty}$ в зависимости от приведенной частоты χ для меди представлено

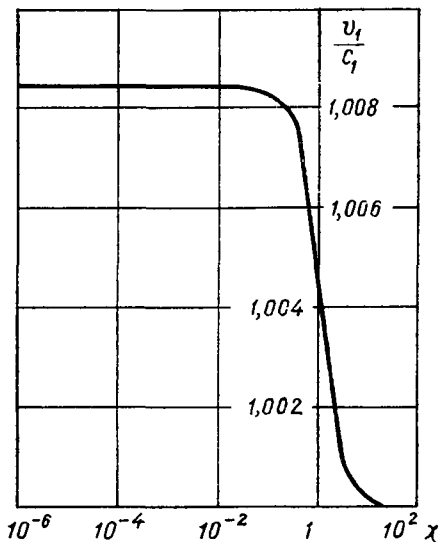


Рис. 62.

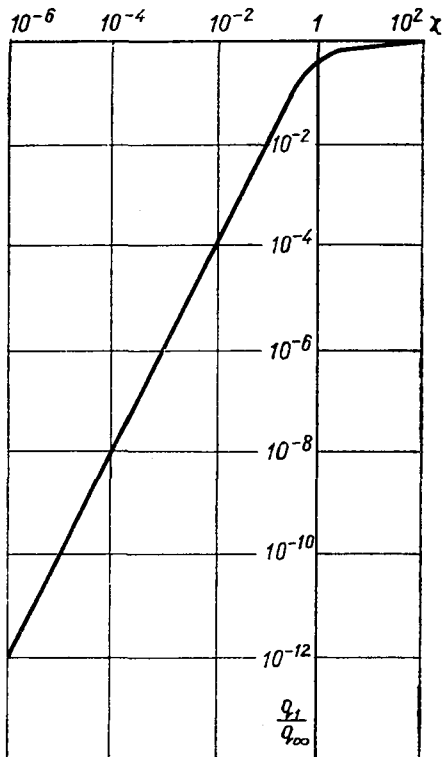


Рис. 63.

на рис. 62 и 63; при этом для χ и $\frac{q_1}{q_\infty}$ используется логарифмическая шкала.

Фазовая скорость v_1 и коэффициент затухания q_1 резко изменяются в окрестности характеристической частоты ω^* ($\chi = 1$). В интервале частот $10^{-11} < \chi < 10^{-1}$ фазовая скорость близка по величине к $(1 + \epsilon)^{1/2} c_1 \approx (1 + \frac{1}{2} \epsilon) c_1$, при $\chi = 1$ становится равной $(1 + \frac{1}{4} \epsilon) c_1$, а при $\chi > 1$ быстро приближается к постоянному значению c_1 . Коэффициент затухания q_1 при низких частотах $\chi < 1$ увеличивается прямо пропорционально ω^2 , при $\chi > 10$ становится постоянной величиной q_∞ и при $\chi = 1$ имеет значение $\frac{1}{2} q_\infty$; сильное затухание возникает в интервале частот $1 < \chi < \frac{\omega_c}{\omega^*}$.

§ 9.6. Термоупругие волны Релея

Рассмотрим распространение плоской гармонической волны в полупространстве вдоль оси x . Пусть плоскость xOy — граница полупространства, а ось z направлена внутрь полупространства (рис. 64). Полагаем, что температура среды, омывающей границу полупространства $z = 0$, неизменна и равна T_0 . Начальная температура полупространства совпадает с температурой среды. Граница полупространства свободна от напряжений:

$$\sigma_z = \sigma_{xz} = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (9.6.1)$$

а между границей полупространства и окружающей средой происходит конвективный теплообмен по закону

$$\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\alpha}{\lambda_q} (T - T_0) = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (9.6.2)$$

где α — коэффициент теплоотдачи; λ_q — коэффициент теплопроводности. Полупространство не подвергается действию объемных сил и внутренних источников тепла ($\vec{F} = 0$, $\omega_0 = 0$).

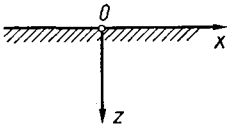


Рис. 64.

Представление общего решения рассматриваемой задачи в перемещениях (9.3.2.) состоит из потенциальной и соленоидальной частей. Для определения потенциальной части решения используем метод, рассмотренный в § 9.3.

Поскольку перемещения не зависят от координаты y , уравнение (9.3.23) для скалярного потенциала $\varphi_j = \varphi_j(x, z)$ принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \delta_j^2 \right) \varphi_j = 0, \quad j = 1, 2. \quad (9.6.3)$$

Применяя метод разделения переменных, находим для волны, распространяющейся в положительном направлении оси x , следующее решение:

$$\varphi_j = f_j(z) e^{-i\gamma x}, \quad (9.6.4)$$

где γ — постоянная, а функция $f_j(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 f_j}{dz^2} - k_j^2 f_j = 0, \quad k_j^2 = \gamma^2 - \delta_j^2, \quad j = 1, 2. \quad (9.6.5)$$

Подставляя (9.6.4) в решение (9.3.22), при $p = i\omega$ получаем

$$\Phi = \sum_{j=1}^2 f_j(z) \exp [i(\omega t - \gamma x)]. \quad (9.6.6)$$

В соленоидальной части решения для векторного потенциала \vec{A} , удовлетворяющего уравнению

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_2^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{A} = 0, \quad (9.6.7)$$

можно, не нарушая общности, положить [28]

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (9.6.8)$$

Учитывая, что $\operatorname{rot}_y \vec{A} = 0$, а все производные по координате y равны нулю, определяем

$$\operatorname{rot} \vec{A} = -\frac{\partial A_y}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial A_y}{\partial x} \vec{e}_z, \quad (9.6.9)$$

где \vec{e}_x и \vec{e}_z — единичные вектора осей x и z . Тогда, подставляя выражения (9.6.8) и (9.6.9) в известную формулу

$$\nabla^2 \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}, \quad (9.6.10)$$

находим

$$\nabla^2 \vec{A} = -\operatorname{rot} \left(-\frac{\partial A_y}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial A_y}{\partial x} \vec{e}_z \right) = \nabla^2 A_y \vec{e}_y. \quad (9.6.11)$$

Принимая во внимание равенство (9.6.9), из векторного уравнения (9.6.7) определяем

$$A_x = A_z = 0 \quad (9.6.12)$$

и получаем следующее скалярное уравнение относительно A_y :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A_y = 0. \quad (9.6.13)$$

Решением этого уравнения для волны, распространяющейся в положительном направлении оси x , является выражение

$$A_y = f_3(z) \exp [i(\omega t - \gamma x)], \quad (9.6.14)$$

где функция $f_3(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 f_3}{dz^2} - k_3^2 f_3 = 0, \quad k_3^2 = \gamma^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}. \quad (9.6.15)$$

Подставляя решения (9.6.6), (9.6.12) и (9.6.14) в представление (9.3.2), находим

$$\left. \begin{aligned} u_x &= - \left[i\gamma (f_1 + f_2) + \frac{df_3}{dz} \right] \exp [i(\omega t - \gamma x)]; \\ u_y &= 0; \\ u_z &= \left(\frac{df_1}{dz} + \frac{df_2}{dz} - i\gamma f_3 \right) \exp [i(\omega t - \gamma x)]; \end{aligned} \right\} \quad (9.6.16)$$

$$T - T_0 = -\frac{\lambda + 2\mu}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T} \left[\left(\delta_1^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} \right) f_1 + \left(\delta_2^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} \right) f_2 \right] \exp [i(\omega t - \gamma x)]. \quad (9.6.17)$$

Зная перемещения (9.6.16), по формуле (9.3.26), в которой

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \left(k_1^2 f_1 + k_2^2 f_2 - i\gamma \frac{df_3}{dz} \right) \exp [i(\omega t - \gamma x)]; \quad (9.6.18)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left[2i\gamma \frac{d}{dz} (f_1 + f_2) + (\gamma^2 + k_3^2) f_3 \right] \exp [i(\omega t - \gamma x)], \end{aligned}$$

определяем напряжения:

$$\sigma_z = \mu \left[(\gamma^2 + k_3^2) (f_1 + f_2) - 2i\gamma \frac{df_3}{dz} \right] \exp [i(\omega t - \gamma x)]; \quad (9.6.19)$$

$$\sigma_{xz} = -\mu \left[2i\gamma \frac{d}{dz} (f_1 + f_2) + (\gamma^2 + k_3^2) f_3 \right] \exp [i(\omega t - \gamma x)].$$

Функции f_1 , f_2 , f_3 , входящие в выражения (9.6.16) — (9.6.19), определяются из уравнений (9.6.5) и (9.6.15). Решения этих уравнений, удовлетворяющие условию быстрого затухания амплитуды волны при удалении от поверхности $z = 0$, имеют вид

$$f_j(z) = C_j \exp(-k_j z), \quad \operatorname{Re}(k_j) > 0. \quad (9.6.20)$$

Удовлетворяя граничным условиям (9.6.1) и (9.6.2), получаем следующую систему однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (\gamma^2 + k_3^2)(C_1 + C_2) + 2i\gamma k_3 C_3 &= 0; \\ -2i\gamma(k_1 C_1 + k_2 C_2) + (\gamma^2 + k_3^2) C_3 &= 0; \end{aligned} \quad (9.6.21)$$

$$\left(\delta_1^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} \right) \left(\frac{\alpha}{\lambda q} + k_1 \right) C_1 + \left(\delta_2^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} \right) \left(\frac{\alpha}{\lambda q} + k_2 \right) C_2 = 0.$$

Система однородных уравнений (9.6.21) имеет нетривиальное решение, если детерминант ее равен нулю. Вычисляя детерминант и принимая во внимание равенства (9.6.5) и (9.6.15), получаем уравнения

$$\begin{aligned} &\left(2 - \frac{\omega^2}{c_2^2 \gamma^2} \right)^2 \left(\beta_1^2 + \beta_1 \beta_2 + \beta_2^2 - 1 + \frac{\omega^2}{c_1^2 \gamma^2} \right) - 4\beta_1 \beta_2 \beta_3 (\beta_1 + \beta_2) = \\ &= -\frac{\alpha}{\lambda q \gamma} \left[\left(2 - \frac{\omega^2}{c_2^2 \gamma^2} \right)^2 (\beta_1 + \beta_2) - 4\beta_3 \left(\beta_1 \beta_2 + 1 - \frac{\omega^2}{c_1^2 \gamma^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (9.6.22)$$

где

$$\beta_j^2 = \frac{k_j^2}{\gamma^2}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (9.6.23)$$

Это уравнение определяет зависимость между частотой ω и величиной γ ; в связи с равенствами (9.5.5) и (9.6.5) величина γ — комплексная.

Если ввести в рассмотрение величину

$$v = \frac{\omega}{\gamma}, \quad (9.6.24)$$

тогда $1/\text{Re } v^{-1}$ является фазовой скоростью распространения термоупругой поверхностной волны, а $-\omega \text{Im } v^{-1}$ — коэффициентом ее затухания. Так как обе эти величины зависят от ω , то термоупругая поверхностная волна подвергается дисперсии.

На основании равенств (9.5.5), (9.6.5) и (9.6.23) имеем

$$\begin{aligned} \beta_1^2 + \beta_2^2 &= 2 - \frac{v^2}{c_1^2} + \frac{i}{\chi} \cdot \frac{v^2}{c_1^2} (1 + \varepsilon); \\ \beta_1^2 \beta_2^2 &= 1 - \frac{v^2}{c_1^2} + \frac{i}{\chi} \cdot \frac{v^2}{c_1^2} \left(1 + \varepsilon - \frac{v^2}{c_1^2}\right). \end{aligned} \quad (9.6.25)$$

Используя выражения (9.6.25) и полагая, что $\chi \ll 1$, разлагаем каждый член уравнения (9.6.22) в ряд по степеням χ :

$$\begin{aligned} & - \left(2 - \frac{v^2}{c_2^2}\right)^2 \frac{i}{\chi} \cdot \frac{v^2}{c_1^2} (1 + \varepsilon) [1 + O(\chi^{1/2})] + \\ & + 4 \frac{i}{\chi} \frac{v^2}{c_1^2} \left\{ (1 + \varepsilon) \left(1 - \frac{v^2}{c_2^2}\right) \left(1 + \varepsilon - \frac{v^2}{c_1^2}\right) \right\}^{1/2} [1 + O(\chi^{1/2})] = \\ & = \frac{\alpha}{\lambda_q \gamma} \left\{ \left(2 - \frac{v^2}{c_2^2}\right)^2 (1 + i) \frac{v}{c_1} \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{2\chi}} [1 + O(\chi^{1/2})] - \right. \\ & \left. - 4 \frac{1 + i}{\sqrt{2\chi}} \frac{v}{c_1} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c_2^2}\right) \left(1 + \varepsilon - \frac{v^2}{c_1^2}\right) \right]^{1/2} [1 + O(\chi^{1/2})] \right\}. \end{aligned} \quad (9.6.26)$$

Пренебрегая величинами порядка $\chi^{1/2}$ и учитывая равенство (9.5.15), получаем

$$\left(2 - \frac{v^2}{c_2^2}\right)^2 = 4 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c_2^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c_S^2}\right) \right]^{1/2}, \quad (9.6.27)$$

где c_S — адиабатическая фазовая скорость распространения волны расширения в неограниченной среде. В этом случае скорость v перестает зависеть от частоты ω и коэффициента теплоотдачи α .

Соотношение (9.6.27) — аналог известного из классической теории волн Релея соотношения [27]

$$\left(2 - \frac{v^2}{c_2^2}\right)^2 = 4 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c_2^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c_1^2}\right) \right]^{1/2}, \quad (9.6.28)$$

связывающего скорость распространения поверхностной упругой волны Релея v со скоростями распространения упругих волн расширения c_1 и искажения c_2 .

В работе [76] детально изучены свойства термоупругих волн Релея и установлено, что эти волны распространяются в виде квазиупругих волн (E — мод), подобных классической волне Релея, но подвергающихся демпфированию и дисперсии, и в виде квазитепловых волн (T — мод), в основном диффузионного характера. При низких частотах ($\chi \ll 1$) возникают адиабатические деформации, а при высоких ($\chi \gg 1$) — изотермические. В случае постоянной температуры на поверхности полупространства существует одна E — мода при низких частотах и две разные — при высоких, а в случае теплоизолированной поверхности — две разные E — моды при низких частотах и одна — при высоких.

§ 9.7. Продольные волны в бесконечно длинном сплошном цилиндре

Рассмотрим влияние термоупругого рассеяния энергии на распространение продольных волн в бесконечно длинном сплошном цилиндре.

Предполагая движение осесимметричным и происходящим в меридиональной плоскости цилиндра rz , рассматриваем пространственное изменение потенциала, входящего в решение (9.3.22), в цилиндрических координатах $\varphi_j = \varphi_j(r, z)$. Тогда уравнение (9.3.23) принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \delta_j^2 \right) \varphi_j = 0, \quad j = 1, 2. \quad (9.7.1)$$

С помощью метода разделения переменных находим для сплошного цилиндра следующее решение уравнения (9.7.1):

$$\varphi_j = C_j J_0(h_j r) e^{i\gamma z}, \quad (9.7.2)$$

где $J_0(x)$ — бесселева функция нулевого порядка первого рода; $h_j^2 = \delta_j^2 - \gamma^2$. Внося решение (9.7.2) в (9.3.22), получаем

$$\Phi = \sum_{j=1}^2 C_j J_0(h_j r) \exp(pt \pm i\gamma z). \quad (9.7.3)$$

На основании соображений, аналогичных изложенным в § 9.6, определяем решение для векторного потенциала \vec{A} . Принимая во внимание формулы (2.6.3), (9.6.7) и (9.6.9), при $\text{rot}_\theta \vec{A} = 0$ и $\frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} = 0$ находим

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} &= -\text{rot} \left[-\vec{e}_r \frac{\partial A_\theta}{\partial z} + \vec{e}_z \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} \right] = \\ &= \vec{e}_\theta \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} \right\}. \end{aligned} \quad (9.7.4)$$

Тогда из векторного уравнения (9.6.7) определяем

$$A_r = A_z = 0 \quad (9.7.5)$$

и получаем скалярное уравнение для определения A_θ :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A_\theta = 0. \quad (9.7.6)$$

Решением уравнения (9.7.6) для сплошного цилиндра является выражение

$$A_\theta = iCJ_1(kr) \exp(pt \pm i\gamma z), \quad (9.7.7)$$

где $J_1(x)$ — бesselева функция первого порядка первого рода; $k^2 = -\frac{p^2}{c_2^2} - \gamma^2$. При $\text{Re } \gamma > 0$ знак плюс перед i соответствует

волне, распространяющейся в отрицательном направлении оси z , а знак минус — в положительном. В дальнейшем рассматриваем волну, распространяющуюся в положительном направлении оси.

Решения (9.7.3), (9.7.5) и (9.7.7) подставляем в представление (9.3.2). Используя при этом формулу (2.6.3) и формулу для дифференцирования бesselевой функции [12], находим

$$\left. \begin{aligned} u_r &= - \left[\sum_{j=1}^2 C_j h_j J_1(h_j r) + C\gamma J_1(kr) \right] \exp(pt - i\gamma z); \\ u_\theta &= 0; \\ u_z &= -i \left[\sum_{j=1}^2 C_j \gamma J_0(h_j r) - Ck J_0(kr) \right] \exp(pt - i\gamma z); \end{aligned} \right\} \quad (9.7.8)$$

$$T - T_0 = - \frac{\lambda + 2\mu}{(3\lambda + 2\mu) \alpha_T} \sum_{j=1}^2 C_j \left(\frac{p^2}{c_1^2} + \delta_j^2 \right) J_0(h_j r) \exp(pt - i\gamma z). \quad (9.7.9)$$

Компоненты тензора напряжения на поверхности $r = \text{const}$ определяем по формуле (9.3.26) в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2\mu \left\{ \sum_{j=1}^2 C_j \left[\frac{h_j}{r} J_1(h_j r) + \left(\gamma^2 + \frac{p^2}{2c_2^2} \right) J_0(h_j r) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \gamma C \left[kJ_0(kr) - \frac{1}{r} J_1(kr) \right] \right\} \exp(pt - i\gamma z); \\ \sigma_{rz} &= i\mu \left[2\gamma \sum_{j=1}^2 C_j h_j J_1(h_j r) - C(k^2 - \gamma^2) J_1(kr) \right] \exp(pt - i\gamma z), \\ \sigma_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.7.10)$$

Для получения единственного решения рассматриваемой задачи необходимо удовлетворить граничным условиям как для напряже-

ний, так и для теплообмена на цилиндрической поверхности. Предполагаем, что поверхность цилиндра ($r = r_2$) свободна от внешних сил и теплоизолирована. Удовлетворяя граничным условиям

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = r_2, \quad (9.7.11)$$

получаем для гармонических волн следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} C_1 \left[\frac{h_1}{r_2} J_1(h_1 r_2) + \left(\gamma^2 - \frac{\omega^2}{2c_2^2} \right) J_0(h_1 r_2) \right] + C_2 \left[\frac{h_2}{r_2} J_1(h_2 r_2) - \right. \\ \left. - \left(\gamma^2 - \frac{\omega^2}{2c_2^2} \right) J_0(h_2 r_2) \right] + C\gamma \left[kJ_0(kr_2) - \frac{1}{r_2} J_1(kr_2) \right] = 0; \\ C_1 2\gamma h_1 J_1(h_1 r_2) + C_2 2\gamma h_2 J_1(h_2 r_2) - C(k^2 - \gamma^2) J_1(kr_2) = 0; \\ C_1 h_1 \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \delta_1^2 \right) J_1(h_1 r_2) + C_2 h_2 \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \delta_2^2 \right) J_1(h_2 r_2) = 0. \end{aligned} \right\} (9.7.12)$$

Если радиус цилиндра r_2 достаточно мал, чтобы $h_j r_2$ ($j = 1, 2$) и kr_2 были малы по сравнению с единицей, т. е. длина гармонической волны велика по сравнению с радиусом цилиндра, то

$$J_0(h_j r_2) \approx J_0(kr_2) \approx 1; \quad J_1(h_j r_2) \approx \frac{1}{2} h_j r_2, \quad J_1(kr_2) \approx \frac{1}{2} kr_2.$$

Подставляя эти приближенные значения в систему уравнений (9.7.12) и приравнявая определитель данной системы нулю, находим частотное уравнение

$$\begin{aligned} h_1^2 \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \delta_1^2 \right) \left[\left(\frac{h_2^2}{2} + \gamma^2 - \frac{\omega^2}{2c_2^2} \right) (k^2 - \gamma^2) - \gamma^2 h_2^2 \right] - \\ - h_2^2 \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \delta_2^2 \right) \left[\left(\frac{h_1^2}{2} + \gamma^2 - \frac{\omega^2}{2c_2^2} \right) (k^2 - \gamma^2) - \gamma^2 h_1^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (9.7.13)$$

Учитывая, что

$$\frac{h_j^2}{2} + \gamma^2 - \frac{\omega^2}{2c_2^2} = \frac{\delta_j^2}{2} + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\omega^2}{2c_2^2};$$

$$k^2 - \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} - 2\gamma^2, \quad \gamma^2 h_j^2 = \gamma^2 \delta_j^2 - \gamma^4, \quad j = 1, 2,$$

преобразуем частотное уравнение (9.7.13) к виду

$$\left(\gamma^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2} \right) \left(\gamma^2 + \frac{i\omega^2}{\chi c_1^2} \right) + \frac{i\omega^2}{\chi c_0^2} \cdot \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2 - 1)} \left(3\gamma^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2} \right) = 0, \quad (9.7.14)$$

где

$$c_0^2 = \frac{E}{\rho}; \quad \varepsilon^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}; \quad \chi = \frac{a\omega}{c_1^2}, \quad (9.7.15)$$

а ε имеет значение (9.2.2).

Если отсутствует тепловой эффект ($\varepsilon = 0$), фазовая скорость распространения продольной волны $v = \frac{\omega}{\gamma} = c_0$, т. е. равна скорости распространения продольной волны в стержне, найденной по элементарной теории.

Тот факт, что уравнение (9.7.14) комплексное, свидетельствует о том, что амплитуда волны затухает в пространстве.

Находим следующие корни уравнения (9.7.14):

$$\gamma_1^2, \gamma_2^2 = \frac{\omega^2}{2c_0^2} \left\{ \left(1 - \frac{\alpha}{\chi_1} \right) \pm \left[1 + \frac{\beta}{\chi_1} + \left(\frac{\alpha}{\chi_1} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad (9.7.16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= i\alpha_1\chi_1, & \alpha_1 &= \frac{1}{\chi_1} [1 + (1 + k')\varepsilon_1]; \\ \beta &= i(4\beta_1 - 2\alpha_1)\chi_1, & \beta_1 &= \frac{1}{\chi_1}(1 + \varepsilon_1); \\ \chi_1 &= \chi \frac{c_1^2}{c_0^2}, & k' &= \frac{1 - 2\nu}{2(1 + \nu)}, & \varepsilon_1 &= 2(1 - \nu)\varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (9.7.17)$$

Легко показать, что уравнение (9.7.16) соответствует волнам двух видов: волна, связанная с γ_1 , по своему характеру близка к чисто упругой, а волна, связанная с γ_2 , — к чисто тепловой. Из этого уравнения определяем

$$\begin{aligned} \pm \gamma_1 &= \frac{\omega}{2c_0} \left[\left(1 - \frac{\alpha}{\chi_1} + i \sqrt{\frac{2\alpha + \beta}{\chi_1}} \right)^{1/2} + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{\alpha}{\chi_1} - i \sqrt{\frac{2\alpha + \beta}{\chi_1}} \right)^{1/2} \right]; \\ \pm \gamma_2 &= \frac{\omega}{2c_0} \left[\left(1 - \frac{\alpha}{\chi_1} + i \sqrt{\frac{2\alpha + \beta}{\chi_1}} \right)^{1/2} - \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{\alpha}{\chi_1} - i \sqrt{\frac{2\alpha + \beta}{\chi_1}} \right)^{1/2} \right]. \end{aligned} \quad (9.7.18)$$

Знак перед γ_1 и γ_2 не оказывает влияния на вид решения (9.7.7) и определяет лишь направление распространения волн; поэтому в дальнейшем рассматриваем только значения $+\gamma_1$ и $+\gamma_2$.

Предполагая, что $\chi \ll 1$, и сохраняя лишь члены с χ и χ^2 , из (9.7.18) получаем

$$\gamma_i = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_1}} \left[1 - \frac{3}{8\alpha_1^2} - i \left(\frac{1}{2\alpha_1} - \frac{\beta_1}{2\alpha_1^2} \right) \right],$$

$$\gamma_2 = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\frac{\alpha_1}{2}} \left[1 + \frac{1}{2\alpha_1} - \frac{\beta_1}{2\alpha_1^2} + \frac{1}{8\alpha_1^2} - \right. \quad (9.7.19)$$

$$\left. - i \left(1 - \frac{1}{2\alpha_1} + \frac{\beta_1}{2\alpha_1^2} + \frac{1}{8\alpha_1^2} \right) \right].$$

Если положить

$$\gamma_j = \frac{\omega}{v_j} - iq_j \quad (j = 1, 2), \quad (9.7.20)$$

где v_1 , q_1 и v_2 , q_2 — фазовые скорости распространения и коэффициенты затухания упругой и тепловой волны, и разложить выражения (9.7.19) в ряды по степеням ϵ , предполагая, что $\epsilon \ll 1$, то найдем следующие выражения для волновых характеристик:

$$v_1 = c_S \left\{ 1 - \frac{(1-\nu)(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \left[\epsilon - \frac{(1-\nu)(43-14\nu)}{4(1+\nu)} \epsilon^2 \right] \chi_1^2 \right\};$$

$$q_1 = \frac{\omega}{c_S} \frac{(1-\nu)(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \left[\epsilon - \frac{6(1-\nu)}{1+\nu} \epsilon^2 \right] \chi_1;$$

$$v_2 = c_0 \left(\frac{2}{\alpha_1} \right)^{1/2} \left\{ 1 - \frac{(1-\nu)(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \left[\epsilon - \frac{6(1-\nu)}{1+\nu} \epsilon^2 \right] \chi_1 + \right. \quad (9.7.21)$$

$$\left. + \frac{(1-\nu)(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \left[1 - \frac{3(1-\nu)(13-2\nu)}{4(1+\nu)} \epsilon^2 \right] \chi_1^2 \right\};$$

$$q_2 = \frac{\omega}{c_0} \left(\frac{\alpha_1}{2} \right)^{1/2} \left\{ 1 - \frac{(1-\nu)(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \left[\epsilon - \frac{6(1-\nu)}{1+\nu} \epsilon^2 \right] \chi_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{(1-\nu)(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \left[\epsilon - \frac{(1-\nu)(41-10\nu)}{4(1+\nu)} \epsilon^2 \right] \chi_1^2 \right\},$$

где $c_S = c_0 \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} \right)^{1/2}$ — адиабатическая фазовая скорость распространения волны расширения в стержне. Скорость c_S можно определить, решая рассматриваемую задачу при $a = \frac{\lambda q}{c_\epsilon} = 0$. Используя выражения (9.7.17) для α_1 и β_1 , находим

$$c_S^2 = c_0^2 \frac{1+\nu+3(1-\nu)\epsilon}{1+\nu+2(1-\nu^2)\epsilon}. \quad (9.7.22)$$

Это же соотношение получаем на основании равенства $c_S^2 = c_0^2 \frac{E_S}{E}$, где E_S — адиабатический модуль упругости. Из первой формулы (9.7.21) следует, что при $\chi \ll 1$ фазовая скорость модифицированной упругой волны $v_1 \approx c_S$. Анализ решений задач § 9.5 и § 9.6 также показал, что при $\chi \ll 1$ фазовая скорость модифицированной упругой волны расширения по своей величине очень близка к адиабатической фазовой скорости; это означает, что в случае гармонических тепловых возмущений при $\chi \ll 1$ решение уравнения (1.8.2), описывающего адиабатическую деформацию, дает удовлетворительные результаты для связанной задачи термоупругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасьева-Эренфест Т. А. Необратимость, односторонность и второе начало термодинамики.— *Ж. прикл. физ.*, 1928, 5, 3—4.
2. Базаров И. П. Термодинамика. Физматгиз, М., 1961.
3. Балабух Л. И., Шаповалов Л. А. О вариационных уравнениях термоупругости.— *ПММ*, 1960, 24, 4.
4. Безухов Н. И. и др. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. «Машиностроение», М., 1965.
5. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. «Мир», М., 1964.
6. Вщенко-Захарченко М. Е. Символическое исчисление и приложение его к интегрированию линейных дифференциальных уравнений. К., 1862.
7. Галеркин Б. Г. Определение напряжений и перемещений в упругом изотропном теле при помощи трех функций. Собр. соч., т. I. Изд-во АН СССР, 1952.
8. Гейтвуд Б. Е. Температурные напряжения применительно к самолетам, снарядам, турбинам и ядерным реакторам. ИЛ, М., 1959.
9. Гершунов Е. М. Расчеты круглых и кольцевых пластин на действие произвольной динамической нагрузки.— *Изв. АН СССР, Механика и машиностроение*, 1964, 6.
10. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. ИЛ, М., 1952.
11. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, М., 1953.
12. Грей Э., Метьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения в физике и механике. ИЛ, М., 1953.
13. Гринченко В. Т. Осесимметричная задача теории упругости для полого цилиндра конечной длины.— *ПМ*, 1967, III, 8.
14. Даниловская В. И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы.— *ПММ*, 1950, 14, 3.
15. Даниловская В. И. Об одной динамической задаче термоупругости.— *ПММ*, 1952, 16, 3.
16. Де Гроот С. Р. Термодинамика необратимых процессов. Гостехтеориздат, М., 1956.
17. Динник А. Н. Приложение функций Бесселя к задачам теории упругости. Ч. 2 (гл. VI. Температурные напряжения в цилиндре). Изв. Екатеринбург. горн. ин-та, 1915.
18. Жермен П. Механика сплошных сред. «Мир», М., 1965.
19. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, М.— Л., 1962.
20. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. «Наука», М., 1964.
21. Кирпичев М. В. Теория подобия. Изд-во АН СССР, М., 1953.

22. Коваленко А. Д. Круглые пластины переменной толщины. Физматгиз, М., 1959.
23. Коваленко А. Д. Пластины и оболочки в роторах турбомашин. Изд-во АН УССР, К., 1955.
24. Коваленко А. Д. Развитие теории гипергеометрических функций в связи с задачами об упругом равновесии пластин и оболочек.— ПММ, 1967, 31, 4.
25. Коваленко А. Д., Григоренко Я. М., Ильин Л. А. Теория тонких конических оболочек и ее приложение в машиностроении. Изд-во АН УССР, К., 1963.
26. Коваленко А. Д., Григоренко Я. М., Лобкова Н. А. Расчет конических оболочек линейно-переменной толщины. Изд-во АН УССР, К., 1961.
27. Колюцкий Г. Волны напряжения в твердых телах. ИЛ, М., 1955.
28. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начало тензорного исчисления. Изд-во АН СССР, М., 1961.
29. Коялович Б. М. Исследования о бесконечных системах линейных уравнений. Изв. ФТИ им. В. А. Стеклова, 1931, 3.
30. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. «Наука», М., 1965.
31. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1954.
32. Лебедев Н. Н. Температурные напряжения в теории упругости. ОНТИ, М.—Л., 1937.
33. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Гостехиздат, М., 1953.
34. Лейбензон Л. С. Теория упругости. Собр. трудов, т. 1. Изд-во АН СССР, М., 1951.
35. Леонтович М. А. Введение в термодинамику. Гостехиздат, М.—Л., 1951.
36. Лобкова Н. А., Ильин Л. А. К теории тонких неоднородных пластин.— ПМ, 1965, 1, 8.
37. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, М., 1947.
38. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, М., 1955.
39. Лыков А. В. Теория теплопроводности. «Высшая школа», М., 1967.
40. Маделунг Э. Математический аппарат физики. Физматгиз, М., 1958.
41. Майзель В. М. Температурная задача теории упругости. Изд-во АН УССР, К., 1951.
42. Мелан Э. и Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Физматгиз, М., 1958.
43. Мотовиловец И. А. Теплопроводность пластин и тел вращения. «Наукова думка», К., 1969.
44. Мусхелишвили Н. И. О тепловых напряжениях в плоской задаче теории упругости. Изв. электротехнич. ин-та, Пгр., 1916, 13.
45. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1954.
46. Новацкий В. Вопросы термоупругости. Изд-во АН СССР, М., 1962.
47. Новожилов В. В. Теория упругости. Судпромгиз, Л., 1958.
48. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, Л., 1962.
49. Папкович П. Ф. Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функции.— Изв. АН СССР, Сер. мат. и естеств. наук, 1932, 10.
50. Папкович П. Ф. Об общем интеграле тепловых напряжений (по поводу статьи Лебедева).— ПММ, 1937, 1, 2.
51. Папкович П. Ф. Теория упругости. Оборонгиз, Л.—М., 1939.
52. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. Физматгиз, М., 1963.

53. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Вид-во АН УРСР, К., 1961.
54. Подстригач Я. С. О влиянии термоупругого рассеяния на напряженное состояние деформируемого тела.— Изв. АН СССР, ОТН, 1960, 4.
55. Подстригач Я. С., Швеиц Р. Н. Некоторые динамические задачи термоупругости тонких оболочек. Теория оболочек и пластин.— В кн.: Тр. IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1964.
56. Прагер В. Введение в механику сплошных сред. ИЛ, М., 1963.
57. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. Физматгиз, М., 1962.
58. Седов Л. И. Механика сплошной среды, ч. I—IV. Изд-во МГУ, 1968.
59. Соболев С. Л. Алгоритмы Шварца в теории упругости.— ДАН СССР, 1936, IV, 6.
60. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, Л.— М., 1937.
61. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. Физматгиз, М., 1963.
62. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. «Наука», М., 1966.
63. Улитко А. Ф. Метод векторных собственных функций в пространственных задачах теории упругости.— ПМ, 1967, III, 9.
64. Умов Н. А. Избранные сочинения. Теория термомеханических явлений в твердых упругих телах (1872). Гостехтеориздат, М., 1950.
65. Шиллер Н. Н. О втором законе термодинамики и об одной новой его формулировке. Киев. универ. изв., 1898.
66. Шиллер Н. Н. Опытные данные и определения, лежащие в основании второго закона термодинамики. Киев. универ. изв., 1900, 3.
67. Шорин С. Н. Теплопередача. «Высшая школа», М., 1964.
68. Biot M. A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics.— J. Appl. Phys., 1956, 27, 3.
69. Boley В. А., Barber A. D. Dynamic response of beams and plates to rapid heating.— J. Appl. Mech., 1957, 24, 3.
70. Boley В. А., Tolins I. S. Transient coupled thermoelastic boundary value problems in the half — space.— J. Appl. Mech., Trans. ASME, 1962, E 29, 4.
71. Brillowin L. Tensors in mechanics and elasticity. 2. Academic Press, New York and London, 1964.
72. Buchdahl H. A. On the unrestricted theorem of Carathéodory and its application in the treatment of the second law of thermodynamics.— Amer. J. Phys., 1949, 17, 4.
73. Carathéodory C. Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik.— Math. Ann., 1909, 67.
74. Chadwick P. Progress in solid mechanics. Thermoelasticity. The dynamical theory. North — Holland Pub. Co., Amsterdam, 1960, 1.
75. Chadwick P., Sneddon I. N. Plane waves in an elastic solid conducting heat. J. Mech. a. Phys. Solids, 1958, 6, 3.
76. Chadwick P., Windle D. W. Propagation of Rayleigh waves along isothermal and insulated boundaries.— Proc. Roy. Soc., 1964, A280, 1380.
77. Deresiewicz H. Plane waves in a thermoelastic solid.— J. Acoust. Soc. Amer., 1957, 29.
78. Deresiewicz H. Solution of the equations of thermoelasticity.— Proc. 3rd Nat. Congr. Appl. Mech. ASME, 1958, June.
79. Dillon O. W. Jr. Thermoelasticity when the material coupling parameter equals unity.— Trans. ASME, 1965, E32, 2.
80. Duhamel J. M. C. Second mémoire sur les phénomènes thermo — mécaniques.— J. de l'Ecole Polytechnique, 1837, 15.
81. Ehrenfest-Afanassjewa. T. Zur Axiomatisierung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik.— Z.f. Phys., 1925, 33.
82. Goodier J. N. On the integration of the thermoelastic equations.— Phil. Mag., 1937, 7, 23.

83. H e m p W. S. Fundamental principles and theorems of thermoelasticity.—*Aeronaut. Quart.*, 1956, 7, Aug.
84. J o h n s D. J. Thermal stress analyses.—Pergamon Press, Oxford — Ld.—Edinburgh — N. Y.—P.—Frankfurt, 1965.
85. K r a u s H. Thermally induced vibrations of thin nonshallow spherical shells.—*AIAA J.*, 1966, 4, 3.
86. L o c k e t t F. J. Effect of thermal properties of a solid on the velocity of Rayleigh waves.—*J. Mech. and Phys. Solids*, 1958, 7.
87. L o r e n z R. Temperaturspannungen in Hohlzylinder.—*Z. V. D. I.*, 1907, 51.
88. M i c h e l l J. H. On the direct determination of stress in an elastic solid, with application to the theory of plates.—*Proc. Ld. Math. Soc.*, 1900, 31.
89. M u k i R., B r e u e r S. Coupling effects in a transient thermoelastic problem. *Österr. Ing. Archiv*, 1962, 26, 4.
90. N o w a c k i W. Thermoelasticity.—Pergamon — Press, Oxford — Ld. N. Y.—P, 1962.
91. N o w a c k i W. Dynamiczne zagadnienia termosprężystości.—*Mech. Teoret. i Stosowana*, 1965, 3, 3.
92. R ü d i g e r D. Bemerkung zur Integration der thermoelastischen Grundgleichungen. *Österr. Ing. Archiv*, 1964, 18, 1—2.
93. S t e r n b e r g E., C h a k r a v o r t y J. G. On inertia effects in a transient thermoelastic problem. *Trans. ASME*, 1959, E26, 4.
94. S t e r n b e r g E., E u b a n k s R. A. On stress function for elastokinetics and the integration of the repeated wave equation.—*Quart. Appl. Math.*, 1957, 15, 2.
95. T r o s t e l R. Instationäre Wärmespannungen in einer Hohlkugel.—*Ing. Arch.*, 1956, 24.
96. T r o s t e l R. Instationäre Wärmespannungen in Hohlzylinder mit Kreisringquerschnitt.—*Ing. Arch.*, 1956, 24, 1.
97. W a r r e n W. E. A transient axisymmetric thermoelastic problem for the hollow sphere.—*AIAA J.*, 1963, 1, 11.
98. W e i n e r J. H. A uniqueness theorem for the coupled thermoelastic problem.—*Quart. of Appl. Math.*, 1957, 15, 1.
99. W e i n e r R. S. Forced axisymmetric motions of circular elastic plates.—*J. of Appl. Mech, Trans. ASME*, 1965, E32, 4.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
Глава первая. Термодинамические основы термоупругости	12
§ 1.1. Общие замечания и обозначения	12
§ 1.2. Деформации. Уравнения равновесия (движения). Работа деформации	15
§ 1.3. Основные понятия и положения классической термодинамики	20
§ 1.4. Основные положения термодинамики необратимых процессов в связи с термоупругим деформированием твердого тела	24
§ 1.5. Термодинамические функции. Уравнения состояния. Уравнение теплопроводности	26
§ 1.6. Случай малого термического возмущения. Адиабатическая деформация	31
§ 1.7. Постановка задачи термоупругости	32
§ 1.8. Классификация задач термоупругости	34
Глава вторая. Основные уравнения статической и квазистатической задач термоупругости	37
§ 2.1. Постановка задачи	37
§ 2.2. Представление общего решения задачи термоупругости в перемещениях	38
§ 2.3. Постановка задачи термоупругости в напряжениях	40
§ 2.4. Вариационные принципы термоупругости	45
§ 2.5. Обобщение теоремы о взаимности работ на задачу термоупругости	47
§ 2.6. Уравнения термоупругости в цилиндрических и сферических координатах	49
Глава третья. Основные законы и задачи теплопроводности	54
§ 3.1. Основные способы теплообмена и методы решения задач теплопроводности	54
§ 3.2. Уравнение теплопроводности. Начальное и граничные условия	55
§ 3.3. Уравнения нестационарной теплопроводности пластин	59
§ 3.4. Стационарное осесимметричное температурное поле диска, цилиндра и круглой пластины	63
§ 3.5. Стационарное неосесимметричное плоское температурное поле длинного цилиндра	67
§ 3.6. Преобразование Лапласа	69
§ 3.7. Нестационарное температурное поле полупространства и неограниченной пластины	72
§ 3.8. Нестационарное плоское осесимметричное температурное поле диска и длинного цилиндра	79

§ 3.9. Нестационарное плоское осесимметричное температурное поле длинного полого цилиндра	82
§ 3.10. Нестационарное осесимметричное температурное поле цилиндра конечной длины	86
§ 3.11. Нестационарное плоское осесимметричное температурное поле длинного цилиндра под воздействием линейного источника тепла, расположенного на оси цилиндра	88
Глава четвертая. Плоская задача термоупругости	92
§ 4.1. Особенности плоской задачи термоупругости	92
§ 4.2. Плоская деформация и плоское напряженное состояние	94
§ 4.3. Пространственное температурное поле, вызывающее плоское напряженное состояние. Тепловые напряжения в пластине при изменении температуры только по толщине	101
§ 4.4. Постановка плоской задачи термоупругости в напряжениях для многосвязного тела	104
§ 4.5. Применение теории функций комплексного переменного в плоской задаче термоупругости при стационарном температурном поле. Дислокационная аналогия	110
§ 4.6. Тепловые напряжения в цилиндре и диске при плоском осесимметричном температурном поле	116
§ 4.7. Тепловые напряжения в полом цилиндре и диске с центральным отверстием при плоском стационарном неосесимметричном температурном поле	121
§ 4.8. Решение задачи о тепловых напряжениях в полом цилиндре с помощью дислокационной аналогии	125
§ 4.9. Некоторые свойства гипергеометрических функций	129
§ 4.10. Тепловые напряжения в цилиндре при переменных модуле упругости и коэффициенте линейного теплового расширения	132
Глава пятая. Термоупругость круглых пластин	137
§ 5.1. Основные предположения и задачи	137
§ 5.2. Основные уравнения термоупругости пластин переменной толщины	138
§ 5.3. Тепловые напряжения в пластине постоянной толщины	145
§ 5.4. Тепловые напряжения в пластине линейно-переменной толщины при осесимметричном температурном поле	155
§ 5.5. Термоупругость неоднородных пластин при осесимметричном температурном поле	165
Глава шестая. Термоупругость оболочек вращения	170
§ 6.1. Вводные замечания	170
§ 6.2. Некоторые понятия и формулы теории поверхностей вращения	171
§ 6.3. Деформации оболочки	174
§ 6.4. Уравнения равновесия оболочки	177
§ 6.5. Соотношения между усилиями, моментами и деформациями	179
§ 6.6. Тепловые напряжения в цилиндрической оболочке	180
§ 6.7. Разрешающие уравнения	188
§ 6.8. Форма решений и граничные условия	192
§ 6.9. Тепловые напряжения в конической оболочке	194
§ 6.10. Тепловые напряжения в сферической оболочке	206
Глава седьмая. Осесимметричная задача термоупругости	218
§ 7.1. Основные уравнения	218
§ 7.2. Тепловые напряжения в цилиндре конечной длины	223
§ 7.3. Расчет тепловых напряжений в сплошном цилиндре конечной длины	234

§ 7.4. Тепловые напряжения в полой сфере	239
§ 7.5. Тепловые напряжения, возникающие при аэродинамическом нагреве полой сферы в сверхзвуковом потоке	247
Глава восьмая. Динамическая задача термоупругости	251
§ 8.1. Представления общего решения	251
§ 8.2. Тепловые напряжения в упругом полупространстве при тепловом ударе на его поверхности	253
§ 8.3. Осесимметричные колебания круглой пластины, возбужденные тепловым ударом	258
§ 8.4. Динамические эффекты при конечной скорости изменения тепловых воздействий	268
Глава девятая. Связанная задача термоупругости	273
§ 9.1. Эффекты связанности	273
§ 9.2. Термическое возмущение упругого слоя при мгновенном приложении поверхностных сил	274
§ 9.3. Представления общего решения	278
§ 9.4. Вариационный принцип	281
§ 9.5. Плоские гармонические термоупругие волны расширения в неограниченной среде	286
§ 9.6. Термоупругие волны Релея	292
§ 9.7. Продольные волны в бесконечно длинном сплошном цилиндре	296
Литература	301

Коваленко Анатолий Дмитриевич

ОСНОВЫ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Печатается по постановлению ученого совета Института механики АН УССР.

Редактор П. Я. Фурер. Художественный редактор И. М. Галушко. Оформление художника В. Н. Кононенко. Технический редактор Б. М. Кричевская. Корректор Р. С. Коган.
Сдано в набор 23.III. 1970 г. Подписано к печати 14.IX. 1970 г. БФ 08420. Зак. 676. Изд. № 76. Тираж 5000. Бумага № 2, 60×90^{1/16}. Печ. физ. л. 19,25. Условн. печ. л. 19,25. Учетно-изд. л. 21,55. Цена 1 руб. 14 коп.

Издательство «Наукова думка», Киев, Репина, 3.

Киевский полиграфический комбинат Комитета по печати при Совете Министров УССР, ул. Довженко, 3.

Замеченные опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
78	13-я сверху	$\dots e - \mu_n^2 \tau,$	$\dots e^{-\mu_n^2 \tau},$
133	4-я снизу	$+ C_2 \alpha x^{1-c} (1-c) \dots$	$+ C_2 \alpha x^{1-c} [(1-c) \dots$
134	1-я сверху	$\times {}_3F_2(a' + \lambda_j),$	$\times {}_3F_2(a' + \lambda_j),$
141	16-я сверху	$\left(N_{r,r} + \frac{\partial N_r}{\partial r} dr \right) d\Theta,$	$\left(N_{r,r} + \frac{\partial N_{r,r}}{\partial r} dr \right) d\Theta,$
151	14-я сверху	$T_r^{(0)}$ и $T_r^{(1)}$	$T^{(0)}(r)$ и $T^{(1)}(r)$