

Über die Spannungen und Formänderungen  
von Körpern, für die das Hookesche  
Gesetz nicht gilt.

---

DISSERTATION

zur

ERLANGUNG DER WÜRDE EINES DOKTOR-INGENIEURS

Der Königlichen Technischen Hochschule zu Berlin

vorgelegt am 19. Mai 1914

von

Dipl.-Ing. Johannes Petermann

aus Guhrau.

---

Genehmigt am 8. Juli 1914.

---

1914.

SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH

Über die Spannungen und Formänderungen  
von Körpern, für die das Hookesche  
Gesetz nicht gilt.

---

DISSERTATION

zur

ERLANGUNG DER WÜRDE EINES DOKTOR-INGENIEURS

Der Königlichen Technischen Hochschule zu Berlin

vorgelegt am 19. Mai 1914

von

Dipl.-Ing. Johannes Petermann

aus Guhrau.

---

Genehmigt am 8. Juli 1914.

1914.

SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH

Referent: Professor Dr.-Ing. Müller-Breslau, Geh. Reg.-Rat.

Korreferent: Professor Siegmund Müller.

ISBN 978-3-662-28080-5 ISBN 978-3-662-29588-5 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-29588-5

Es sei mir auch an dieser Stelle gestattet, Herrn  
Geheimen Regierungsrat Professor Dr. <sup>r</sup>Jng. Müller-  
Breslau, auf dessen Anregung diese Arbeit auch ent-  
standen ist, meinen ergebensten Dank auszusprechen.

Johannes Petermann.

## ÜBER DIE SPANNUNGEN UND FORMÄNDERUNGEN VON KÖRPERN, FÜR DIE DAS HOOKESCHE GESETZ NICHT GILT.

Von *Dipl.-Ing. Johannes Petermann (Berlin-Charlottenburg)*.

### Einleitung.

Für die Beziehung zwischen Spannung und Dehnung sind für Körper, die dem Hookeschen Gesetz nicht folgen, schon um die Mitte des vorigen Jahrhunderts, ja schon in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts Gesetze aufgestellt worden. Diejenigen von ihnen, die ihrer verhältnismäßig einfachen Form wegen für die praktische Verwertung allein in Frage kommen, sind:

das Potenzgesetz  $\epsilon = \alpha \sigma^m$ ,

aufgestellt von Bülfinger 1729, Hodgkinson 1822 und v. Bach-Schüle 1897;

das Hyperbelgesetz  $\epsilon = \frac{\sigma}{a - b \sigma}$ ,

aufgestellt von Cox 1850, von Lang 1896, und

das Parabelgesetz  $\sigma = \alpha \epsilon - \beta \epsilon^2$ ,

aufgestellt von Hodgkinson 1849 und von Hartig 1893.

Über die auf Grund dieser Gesetze ermittelten Beziehungen zwischen Randspannung und Moment sind eine Reihe von Abhandlungen erschienen, von denen die wichtigsten sind die von Carling (Potenzgesetz), Franke, Weiske (Hyperbelgesetz) und Haberkalt (Parabelgesetz). Sie beziehen sich teils auf homogenes, teils auf nichthomogenes Material — Beton mit Eiseneinlagen — und geben durchweg, soweit sie eine Lösung auf exaktem Wege suchen, Rechnungsverfahren an, die ihrer Umständlichkeit wegen einen Weg in die Praxis bisher nicht gefunden haben. Eine Ermittlung der Randspannung unmittelbar aus dem gegebenen Moment ist danach nicht möglich; fast jeder der genannten Autoren geht in der Weise vor, daß er für einen gewählten Spannungs- oder Dehnungswert nach oft recht langen Zwischenrechnungen das zugehörige Moment ermittelt, dafür Tabellen aufstellt und diese zur Bestimmung der durch ein gegebenes Moment erzeugten Spannung benutzt.

Es soll in der vorliegenden Arbeit versucht werden, diese komplizierten Beziehungen zwischen Randspannungen und Moment oder exzentrischer

Längskraft auf eine einfache Formel zu bringen, die sich den genauen Werten gut anpaßt und die zu Untersuchungen von Formänderungen und zur Ermittlung statisch unbestimmter Größen geeignet ist.

Es ist dabei das Potenzgesetz zugrundegelegt worden, das wegen seiner geschlossenen Form dazu besonders geeignet war, während das Hyperbelgesetz infolge des Auftretens von Logarithmen zusammengesetzter Ausdrücke die Rechnung wesentlich komplizierter gestaltet hätte. Außerdem liefert auch das Potenzgesetz, wie Mehrke nachgewiesen hat, in der Regel genauere Ergebnisse. Die Wahl des Parabelgesetzes hätte trotz der ganzzahligen Exponenten gegenüber der Benutzung des Potenzgesetzes keine Vorteile geboten; von Vorteil war seine Wahl nur für die Untersuchung im letzten Abschnitt.

Es wurde ebenso wie in den obenerwähnten Abhandlungen von der Voraussetzung ausgegangen, daß die Querschnitte während der Formänderung eben bleiben.

### I. Randspannungen im rechteckigen Querschnitt infolge Wirkung eines Moments.

Carling kommt bei Untersuchung eines Rechteckquerschnittes auf Biegung zu folgenden Formeln:

$$\sigma_2 = \beta \sigma_1 \frac{z}{h - z} \dots \dots \dots (1)$$

$$z = \frac{h}{1 + \frac{n}{\gamma^n + 1} \frac{m-n}{\sigma_1^{n+1}}} \dots \dots (2)$$

$$M = \frac{m}{2m+1} \sigma_1 z^2 + \frac{n}{2n+1} \sigma_2 (h-z)^2 \dots (3)$$

Der Untersuchung zugrundegelegt ist das Potenzgesetz, und zwar ist das

$$\begin{aligned} \text{Spannungsgesetz für Zug } \epsilon_z &= \alpha_1 \sigma^m, \\ \text{„ „ Druck } \epsilon_d &= \alpha_2 \sigma^n, \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{m(n+1)}{n(m+1)},$$

$$\gamma = \frac{1}{\beta} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Die Bedeutung der übrigen Größen geht aus Fig. 1 hervor;  $b$  ist die Breite des Querschnittes.

Carling wählt nun  $\sigma_1$ , ermittelt der Reihe nach  $z$ ,  $\sigma_2$  und  $M$ , und stellt danach eine Tabelle auf.

Eliminiert man aus Gl. (3) die Größen  $\sigma_2$  und  $z$ , dann erhält man eine Beziehung zwischen  $M$  und  $\sigma_1$  von der Form:

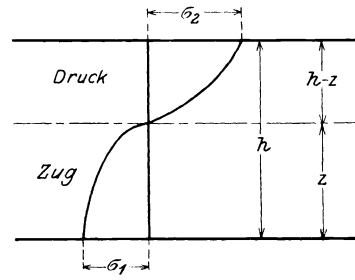


Fig. 1.

$$\frac{M}{b} = \frac{m}{2m+1} \sigma_1 \frac{h^2}{\left(1 + \frac{1}{\gamma^{n+1} \sigma_1^{n+1}}\right)^2} + \frac{n}{2n+1} \beta \sigma_1 \frac{h^2}{\left(1 + \frac{1}{\gamma^{n+1} \sigma_1^{n+1}}\right)} \left(1 + \gamma^{n+1} \sigma_1^{n+1}\right) \dots (4)$$

Setzt man nun

$$\gamma^{n+1} \sigma_1^{n+1} = x \dots (5)$$

und

$$\sigma_1 = \left( \frac{x}{\gamma^{n+1}} \right)^{\frac{1}{n+1}} \dots (5a)$$

dann ist

$$\frac{M}{b} = \frac{x^{m-n}}{\gamma^{m-n}} h^2 \left[ \frac{m}{(2m+1) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} + \frac{n\beta}{(2n+1) \left(1 + \frac{1}{x}\right) (1+x)} \right]$$

$$\frac{M}{b h^2} = \frac{x^{m-n}}{\gamma^{m-n} (1+x)^2} \left[ \frac{m}{2m+1} x + \frac{n\beta}{2n+1} \right] \dots (6)$$

Für  $z$ ,  $h-z$  und  $\sigma_2$  ergibt sich dann:

$$z = \frac{h}{1 + \frac{1}{x}},$$

$$h-z = \frac{h}{1+x}$$

$$\sigma_2 = \beta \sigma_1 \frac{z}{h-z} = \beta \sigma_1 x \dots (7)$$

Setzt man in Gl. (6)

$$\frac{m+1}{m-n} = p,$$

$$\gamma^{m-n} = c,$$

$$\frac{m}{2m+1} = a,$$

$$\frac{n\beta}{2n+1} = b,$$

so ist

$$\frac{M}{b h^2} = \frac{x^p (a x + b)}{c (1+x)^2},$$

setzt man weiter

$$\frac{a}{c} = A \text{ und } \frac{b}{c} = B,$$

so ist

$$\frac{M}{b h^2} = \frac{A x^{p+1} + B x^p}{(1+x)^2}$$

$$= A x^{p-1} - (2A - B) x^{p-2}$$

$$+ (3A - 2B) x^{p-3} - (4A - 3B) x^{p-4}$$

$$+ (5A - 4B) x^{p-5} - (6A - 5B) x^{p-6}$$

$$+ (7A - 6B) x^{p-7} - \dots$$

und setzt man nach Gl. (5)

$$x = C \sigma_1^q,$$

so ist

$$\frac{M}{b h^2} = A C^{p-1} \sigma_1^{(p-1)q}$$

$$- (2A - B) C^{p-2} \sigma_1^{(p-2)q}$$

$$+ (3A - 2B) C^{p-3} \sigma_1^{(p-3)q}$$

$$- (4A - 3B) C^{p-4} \sigma_1^{(p-4)q}$$

$$+ (5A - 4B) C^{p-5} \sigma_1^{(p-5)q}$$

$$- (6A - 5B) C^{p-6} \sigma_1^{(p-6)q}$$

$$+ \dots$$

Man erhält damit einen Ausdruck von der Form:

$$M = K_1 \sigma_1^{r-q} + K_2 \sigma_1^{r-2q} + K_3 \sigma_1^{r-3q} + \dots (8)$$

Die rechte Seite ist eine unendliche Reihe mit sehr langsam abnehmenden gebrochenen Exponenten.

Die Auflösung dieser Gleichung nach  $\sigma_1$  oder der Gl. (6) nach  $x$  ist nicht möglich; wir ermitteln daher zunächst für beliebige Werte  $\sigma_1$  nach Gl. (5) die Werte  $x$ , nach Gl. (6) die entsprechenden Werte  $\frac{M}{bh^2}$  und nach Gl. (7) die  $\sigma_2$ ; die Benutzung der Gl. (5) bis (7) ergibt gegenüber der Benutzung der Gl. (1) bis (3) eine Vereinfachung der Rechenoperationen um etwa 30%.

Dann suchen wir eine geeignete Näherungsformel, die mit befriedigender Genauigkeit die Beziehung darstellt zwischen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  einerseits und dem Wert  $\frac{M}{bh^2}$  andererseits — bzw. dem Wert  $\frac{6M}{bh^2} = \sigma_0$  (der Spannung, die sich nach dem Hookeschen Gesetz ergeben würde) — von der Form  $\sigma = f(\sigma_0)$ .

Als Näherungsformeln kommen in Betracht:

I.  $\sigma = a \sigma_0 \dots \dots \dots (9)$

II.  $\sigma = \sigma_0^p \dots \dots \dots (10)$

III.  $\sigma = c \sigma_0^p \dots \dots \dots (11)$

IV.  $\sigma = a \sigma_0 + b \sigma_0^2 \dots \dots \dots (12)$

Die Konstanten dieser Formeln werden aus den genauen Werten  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_0$  nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt und ergeben sich zu:

für I:

$$a = \frac{[\sigma_0 \sigma]}{[\sigma_0^2]} \dots \dots \dots (13)$$

für II:

$$p = \frac{[\log \sigma_0 \log \sigma]}{[\log^2 \sigma_0]} \dots \dots \dots (14)$$

für III:

$$\log c = \frac{[\log \sigma] [\log^2 \sigma_0] - [\log \sigma_0] [\log \sigma_0 \log \sigma]}{i [\log^2 \sigma_0] - [\log \sigma_0]^2} \dots \dots (15a)$$

$$p = \frac{i [\log \sigma_0 \log \sigma] - [\log \sigma_0] [\log \sigma]}{i [\log^2 \sigma_0] - [\log \sigma_0]^2} \dots \dots (15b)$$

für IV:

$$a = \frac{[\sigma_0 \sigma] [\sigma_0^4] - [\sigma_0^2 \sigma] [\sigma_0^3]}{[\sigma_0^2] [\sigma_0^4] - [\sigma_0^3]^2} \dots \dots \dots (16a)$$

$$b = \frac{[\sigma_0^2 \sigma] [\sigma_0^2] - [\sigma_0 \sigma] [\sigma_0^3]}{[\sigma_0^2] [\sigma_0^4] - [\sigma_0^3]^2} \dots \dots \dots (16b)$$

$i$  bedeutet die Zahl der für die Ermittlung verwerteten  $\sigma_0$  bzw.  $\sigma$ .

Um die Genauigkeit der vier Näherungsformeln I bis IV festzustellen, ist ein Zahlenbeispiel durchgerechnet.

Zahlenbeispiel.

Als Material wurde ein Beton vom Mischungsverhältnis 1:3 gewählt, für den Prof. Dr.-Ing. Mörsch in seinem Werke „Der Eisenbetonbau“, 4. Aufl. S. 43 Dehnungszahlen veröffentlicht hat.

Die Probekörper, die zur Ermittlung dieser Zahlen verwendet wurden, waren aus Mannheimer Portlandzement und Rheinkiessand hergestellt. Der Kiessand bestand aus etwa 3 Teilen Sand von 0–5 mm und 2 Teilen Kies von 5–20 mm Korngröße. Die zusammengehörigen Werte von  $\sigma$  und  $\epsilon$  sind in der folgenden Tabelle 1 zusammengestellt:

Tabelle 1.

Zug		Druck	
$\sigma$ kg/cm <sup>2</sup>		$\sigma$ kg/cm <sup>2</sup>	
1,6	0,000 006	3,0	0,000 010
3,1	0,000 013	6,1	0,000 021
4,6	0,000 020	9,2	0,000 032
6,2	0,000 028	12,2	0,000 043
7,7	0,000 038	15,3	0,000 055
9,2	0,000 047	18,3	0,000 067
		24,5	0,000 092
		30,6	0,000 117
		36,8	0,000 143
		49,0	0,000 198
		61,3	0,000 255

Aus den Werten dieser Tabelle wurden die Konstanten des Potenzgesetzes nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt mittels der Formeln

$$\log a = \frac{[\log^2 \sigma] [\log \epsilon] - [\log \sigma] [\log \sigma \log \epsilon]}{i [\log^2 \sigma] - [\log \sigma]^2}$$

$$m \text{ bzw. } n = \frac{i [\log \sigma \log \epsilon] - [\log \sigma] [\log \epsilon]}{i [\log^2 \sigma] - [\log \sigma]^2}$$

sie ergaben sich zu

$$a_1 = \frac{1}{291\,536} \left( \frac{\text{cm}^2}{\text{kg}} \right)^m,$$

$$m = 1,169\,813\,68,$$

$$a_2 = \frac{1}{334\,436} \left( \frac{\text{cm}^2}{\text{kg}} \right)^n,$$

$$n = 1,073\,629\,59.$$

Die Spannungsgesetze für das vorliegende Material lauten also

$$\text{für Zug } \epsilon_z = \frac{1}{291\,536} \sigma^{1,169\,813\,68},$$

$$\text{für Druck } \epsilon_d = \frac{1}{334\,436} \sigma^{1,073\,629\,59}.$$

Nun wurden für angenommene Werte  $\sigma_1$  unter Benutzung der Formeln 5 bis 7 die zugehörigen Werte  $\sigma_2$ ,  $\frac{M}{bh^2}$  und  $\sigma_0$  ermittelt; sie sind in der folgenden Tabelle 2 zusammengestellt und in Fig. 2 aufgetragen:

Tabelle 2.

$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\frac{M}{b h^2}$	$\sigma_0 = \frac{6 M}{b h^2}$
1	1,089 496	0,180 337	1,082 02
2	2,250 186	0,366 296	2,197 78
4	4,647 415	0,743 823	4,462 94
6	7,103 474	1,125 57	6,753 42
8	9,598 528	1,510 06	9,060 36
10	12,122 990	1,896 58	11,397 5
12	14,671 143	2,284 72	13,708 3
14	17,239 153	2,674 21	16,045 3
16	19,824 295	3,064 84	18,389 0
18	22,424 518	3,456 48	20,738 9
20	25,038 191	3,849 00	23,094 0

Die Werte dieser Tabelle sind also die Ergebnisse der genauen Rechnung nach dem Potenzgesetz.

Aus ihnen ergeben sich unter Benutzung der Gl. (13) bis (16) die Konstanten für die vier Näherungsformeln I bis IV, die für I und II nur für die Zugspannung  $\sigma_1$ , für III und IV auch für die Druckspannung  $\sigma_2$  ermittelt worden sind, da diese Formeln später noch weiter verwendet werden.

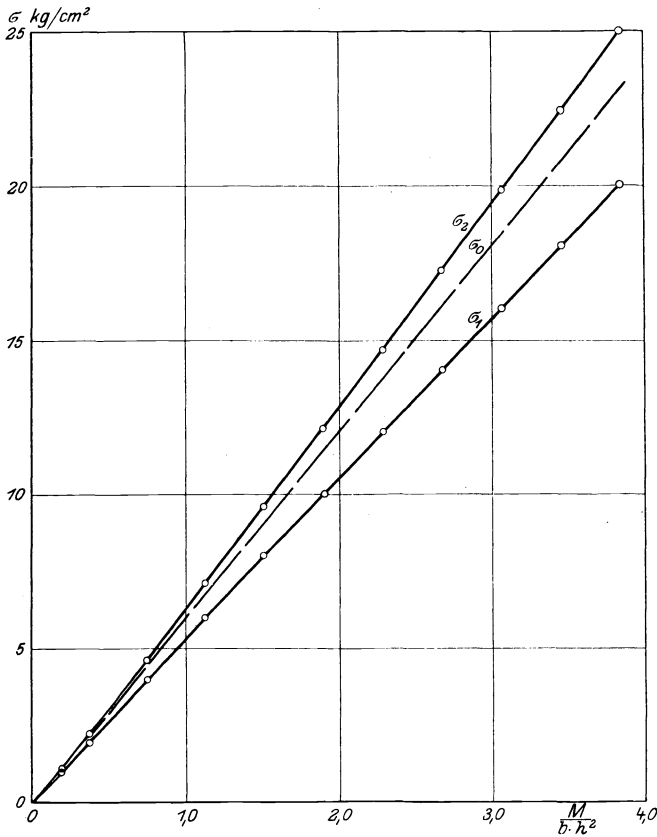


Fig. 2.

Tabelle 3.

$\sigma_1$	I		II		III		IV		$\sigma_2$	III		IV	
	$\sigma_1^I$	$\frac{\sigma_1^I - \sigma_1^I 100}{\sigma_1}$	$\sigma_1^{II}$	$\frac{\sigma_1^{II} - \sigma_1^I 100}{\sigma_1}$	$\sigma_1^{III}$	$\frac{\sigma_1^{III} - \sigma_1^I 100}{\sigma_1}$	$\sigma_1^{IV}$	$\frac{\sigma_1^{IV} - \sigma_1^I 100}{\sigma_1}$		$\sigma_2^{III}$	$\frac{\sigma_2^{III} - \sigma_2^I 100}{\sigma_2}$	$\sigma_2^{IV}$	$\frac{\sigma_2^{IV} - \sigma_2^I 100}{\sigma_2}$
1	0,942 693	- 5,731	1,077 62	+ 7,762	0,999 622	- 0,0378	0,967 196	- 3,28	1,089 496	1,089 07	1,130 772	+ 3,80	
2	1,914 780	- 4,261	2,110 03	+ 5,502	2,000 14	+ 0,007	1,961 435	- 1,93	2,250 186	2,250 35	2,301 326	+ 2,27	
4	3,888 265	- 2,793	4,130 54	+ 3,263	4,001 04	+ 0,026	3,970 157	- 0,745	4,647 415	4,648 69	4,691 847	+ 0,956	
6	5,883 809	- 1,937	6,117 88	+ 1,965	6,001 52	+ 0,0253	5,988 062	- 0,198	7,103 474	7,105 37	7,128 330	+ 0,350	
8	7,893 693	- 1,329	8,083 86	+ 1,048	8,001 60	+ 0,020	8,007 008	- 0,088	9,598 528	9,600 55	9,601 880	+ 0,035	
10	9,914 206	- 0,858	10,034 0	+ 0,340	10,001 3	+ 0,013	10,022 988	+ 0,23	12,122 990	12,124 6	12,108 294	- 0,121	
12	11,943 136	- 0,474	11,971 6	- 0,237	12,000 6	+ 0,005	12,033 609	+ 0,28	14,671 143	14,671 9	14,645 106	- 0,177	
14	13,979 209	- 0,149	13,898 8	- 0,723	13,999 6	- 0,0029	14,037 453	+ 0,268	17,239 153	17,238 7	17,210 958	- 0,163	
16	16,021 120	+ 0,132	15,817 0	- 1,144	15,998 2	- 0,011	16,033 100	+ 0,207	19,824 295	19,822 0	19,804 393	- 0,100	
18	18,068 433	+ 0,380	17,727 6	- 1,513	17,996 6	- 0,019	18,020 009	+ 0,111	22,424 518	22,420 1	22,425 028	+ 0,0023	
20	20,120 276	+ 0,601	19,631 2	- 1,844	19,994 7	- 0,0265	19,997 233	- 0,014	25,038 191	25,031 2	25,071 894	+ 0,135	



Die Zahlenwerte der Konstanten und die entsprechenden Formeln sind danach:

- I.  $a_1 = 0,871\ 233\ 91$   
 $\sigma_1 = 0,871\ 233\ 91\ \sigma_0 \dots \dots \dots (9')$
- II.  $p_1 = 0,948\ 255\ 9$   
 $\sigma_1 = \sigma_0 0,948\ 255\ 9 \dots \dots \dots (10')$
- III.  $c_1 = 0,925\ 393$   
 $p_1 = 0,978\ 796\ 44$   
 $\sigma_1 = 0,925\ 393\ \sigma_0^{0,978\ 796\ 44} \dots \dots \dots (11')$   
 $c_2 = 1,004\ 596$   
 $p_2 = 1,024\ 196\ 04$   
 $\sigma_2 = 1,004\ 596\ \sigma_0^{1,024\ 196\ 04} \dots \dots \dots (11'')$
- IV.  $a_1 = 0,895\ 255\ 08$   
 $b_1 = -0,001\ 270\ 853\ 3\ \text{cm}^2/\text{kg}$   
 $\sigma_1 = 0,895\ 255\ 08\ \sigma_0 - 0,001\ 270\ 853\ 3\ \sigma_0^2 (12')$   
 $a_2 = 1,043\ 061\ 2$   
 $b_2 = 0,001\ 843\ 949\ 7\ \text{cm}^2/\text{kg}$   
 $\sigma_2 = 1,043\ 061\ 2\ \sigma_0 + 0,001\ 843\ 949\ 7\ \sigma_0^2 (12'')$

In der folgenden Tabelle sind die nach den vier Näherungsformeln sich ergebenden Werte  $\sigma_1$  — für III und IV auch  $\sigma_2$  — den durch die genaue Rechnung ermittelten gegenübergestellt; sie sind zum Unterschiede von diesen mit ihrer römischen Ziffer als Zeiger versehen; gleichzeitig ist auch ihr Fehler gegenüber den genauen Werten in Prozenten der letzteren angegeben, um einen Vergleich der Näherungsformeln nach ihrer Güte zu ermöglichen.

Aus Tabelle 3 geht hervor, daß die Näherungsformel III die weitaus genaueste ist, ihr Fehler ist durchweg kleiner als 0,5 ‰. Ihre Genauigkeit genügt also für alle praktischen Fälle vollkommen, es ist unbedingt zulässig, bei dem hier vorliegenden Material die Randspannungen im Rechteckquerschnitt — infolge reiner Biegungsbeanspruchung — zu berechnen nach den Formeln:

$$\sigma_1 = 0,925\ 393\ \sigma_0^{0,978\ 796}$$

$$\sigma_2 = 1,004\ 596\ \sigma_0^{1,024\ 196}$$

### II. Beanspruchung eines rechteckigen Querschnitts durch eine Normalkraft innerhalb des Kerns.

Die Grundlage für die Untersuchung bildet wieder das Potenzgesetz.

Die Bedeutung der einzelnen Größen ist durch Fig. 3 gegeben.

Es ist

$$\epsilon = \alpha_2 \sigma^n$$

$$\epsilon_z = \epsilon_2 \frac{z}{z_2} = \epsilon_1 \frac{z}{z_1}$$

$$\sigma_z^n = \sigma_2^n \frac{z}{z_2} = \sigma_1^n \frac{z}{z_1}$$

$$\sigma_z = \sigma_2 \left( \frac{z}{z_2} \right)^{\frac{1}{n}} = \sigma_1 \left( \frac{z}{z_1} \right)^{\frac{1}{n}}$$

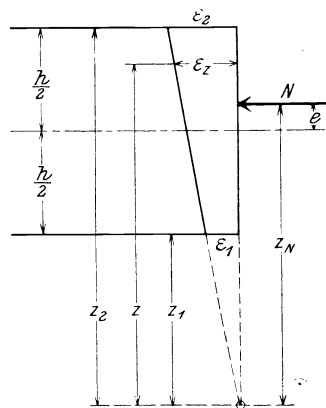


Fig. 3.

Die Gleichgewichtsbedingung für die Normalkräfte lautet

$$N = b \int \sigma_z dz = b \sigma_2 \frac{1}{z_2^n} \int_{z_1}^{z_2} z^n dz$$

$$= b \sigma_2 \frac{n}{n+1} \cdot \frac{z_2^{n+1} - z_1^{n+1}}{z_2^n} \dots (17)$$

Ferner ist

$$\sigma_1 = \sigma_2 \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^{\frac{1}{n}} \dots \dots \dots (18)$$

Die Gleichgewichtsbedingung für die Momente ergibt

$$N z_N = b \int \sigma_z z dz = b \sigma_2 \frac{1}{z_2^n} \int_{z_1}^{z_2} z^{n+1} dz$$

$$= b \sigma_2 \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{z_2^{2n+1} - z_1^{2n+1}}{z_2^n} \dots (19)$$

Dividiert man Gl. (19) durch Gl. (17), so erhält man

$$z_N = \frac{n+1}{2n+1} \cdot \frac{z_2^{2n+1} - z_1^{2n+1}}{z_2^{n+1} - z_1^{n+1}}$$

Setzt man nun

$$z_2 = x_2 h$$

$$z_1 = z_2 - h = (x_2 - 1) h$$

$$z_N = x_N h$$

$$e = x_e h$$

so ist

$$x_N h = \frac{n+1}{2n+1} \cdot \frac{[x_2^{2n+1} - (x_2 - 1)^{2n+1}] h^{2n+1}}{[x_2^{n+1} - (x_2 - 1)^{n+1}] h^{n+1}}$$

$$x_N = \frac{n+1}{2n+1} \cdot \frac{x_2^{2n+1} - (x_2 - 1)^{2n+1}}{x_2^{n+1} - (x_2 - 1)^{n+1}}$$

Nun ist

$$x_e h = x_N h - \left(x_2 - \frac{1}{2}\right) h$$

also

$$x_e = \frac{n+1}{2n+1} \cdot \frac{x_2 \frac{2n+1}{n} - (x_2-1) \frac{2n+1}{n}}{x_2 \frac{n}{n} - (x_2-1) \frac{n}{n}} - x_2 + \frac{1}{2} \quad (20)$$

Für die Lage des Kernpunkts ergibt sich

$$x_k = \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2}.$$

Gl. (20) sagt aus, daß  $x_2$  nur abhängig ist von  $x_e$ , die Lage der Nulllinie also nur von der Exzentrizität der Kraft und der Querschnittshöhe  $h$ ; Gl. (17), daß  $\sigma_2$  proportional ist  $N$ .

Um aus Gl. (17) bei gegebenem  $N$  und  $e$  die Randspannung  $\sigma_2$  zu bestimmen, ist es nötig,  $x_2$  zu ermitteln, d. h. das dem gegebenen  $x_e$  entsprechende  $x_2$ .

Die Gl. (20) nach  $x_2$  aufzulösen ist aber nicht möglich. Wir berechnen daher nach ihr für beliebige Werte  $x_2$  die zugehörigen  $x_e$  und stellen dann eine Näherungsformel von der Form  $x_2 = f(x_e)$  auf, für die wir die Konstanten nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen.

Als Näherungsformeln kommen hier in Betracht:

$$\text{V. } x_2 = a + \frac{b}{x_e} \dots \dots \dots (21)$$

$$\text{VI. } x_2 = a + \frac{b}{x_e^2} \dots \dots \dots (22)$$

$$\text{VII. } x_2 = a + \frac{b}{x_e} + c \cdot x_e \dots \dots (23)$$

Für die Konstanten dieser drei Gleichungen ergeben sich folgende Formeln:

zu V:

$$a = \frac{[x_2] \left[ \frac{1}{x_e^2} \right] - \left[ \frac{x_2}{x_e} \right] \left[ \frac{1}{x_e} \right]}{i \left[ \frac{1}{x_e^2} \right] - \left[ \frac{1}{x_e} \right]^2} \dots \dots (24a)$$

$$b = \frac{i \left[ \frac{x_2}{x_e} \right] - [x_2] \left[ \frac{1}{x_e} \right]}{i \left[ \frac{1}{x_e^2} \right] - \left[ \frac{1}{x_e} \right]^2} \dots \dots (24b)$$

zu VI:

$$a = \frac{[x_2] \left[ \frac{1}{x_e^4} \right] - \left[ \frac{1}{x_e^2} \right] \left[ \frac{x_2}{x_e^2} \right]}{i \left[ \frac{1}{x_e^4} \right] - \left[ \frac{1}{x_e^2} \right]^2} \dots \dots (25a)$$

$$b = \frac{i \left[ \frac{x_2}{x_e^2} \right] - [x_2] \left[ \frac{1}{x_e^2} \right]}{i \left[ \frac{1}{x_e^4} \right] - \left[ \frac{1}{x_e^2} \right]^2} \dots \dots (25b)$$

zu VII:

$$a = \frac{1}{J} \left\{ [x_2] \left( \left[ \frac{1}{x_e^2} \right] [x_e^2] - i^2 \right) - \left[ \frac{x_2}{x_e} \right] \left( \left[ \frac{1}{x_e} \right] [x_e^2] - i [x_e] \right) + [x_2 x_e] \left( i \left[ \frac{1}{x_e} \right] - [x_e] \left[ \frac{1}{x_e^2} \right] \right) \right\} \dots (26a)$$

$$b = \frac{1}{J} \left\{ i \left( \left[ \frac{x_2}{x_e} \right] [x_e^2] - i [x_2 x_e] \right) - \left[ \frac{1}{x_e} \right] \left( [x_2] [x_e^2] - [x_e] [x_2 x_e] \right) + [x_e] \left( i [x_2] - [x_e] \left[ \frac{x_2}{x_e} \right] \right) \right\} \dots (26b)$$

$$c = \frac{1}{J} \left\{ i \left( \left[ \frac{1}{x_e^2} \right] [x_2 x_e] - i \left[ \frac{x_2}{x_e} \right] \right) - \left[ \frac{1}{x_e} \right] \left( \left[ \frac{1}{x_e} \right] [x_2 x_e] - i [x_2] \right) + [x_e] \left( \left[ \frac{1}{x_e} \right] \left[ \frac{x_2}{x_e} \right] - \left[ \frac{1}{x_e^2} \right] [x_2] \right) \right\} \dots (26c)$$

$$J = i \left( \left[ \frac{1}{x_e^2} \right] [x_e^2] - i^2 \right) - \left[ \frac{1}{x_e} \right] \left( \left[ \frac{1}{x_e} \right] [x_e^2] - i [x_e] \right) + [x_e] \left( i \left[ \frac{1}{x_e} \right] - [x_e] \left[ \frac{1}{x_e^2} \right] \right).$$

Ist nun für gegebenes  $x_e$  nach einer der Näherungsformeln — über ihre Genauigkeit gibt das folgende Zahlenbeispiel Aufschluß — das zugehörige  $x_2$  ermittelt, dann erhalten wir nach Gl. (17)

$$\sigma_2 = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{N}{b} \cdot \frac{z_2 \frac{n}{n+1}}{z_2 \frac{n}{n+1} - z_1 \frac{n}{n+1}} = \frac{N}{bh} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{x_2 \frac{1}{n}}{x_2 \frac{n+1}{n} - (x_2-1) \frac{n+1}{n}} \dots \dots (27)$$

Setzen wir  $\frac{N}{bh} = \sigma'$ , so ist

$$\sigma_2 = \sigma' f(x_2) \dots \dots \dots (28)$$

Für  $f(x_2)$  kann man eine Tabelle aufstellen, so daß die Randspannung  $\sigma_2$ , wenn  $x_2$  nach einer der Gl. (21) bis (23) aus  $x_e$  ermittelt ist, schnell bestimmt werden kann.

Zum Vergleich sei die Randspannung nach dem Hookeschen Gesetz angegeben unter Einführung von  $x_e$ :

$$\sigma \sigma_2 = \frac{N}{F} + \frac{M}{W} = \frac{N}{F} \left( 1 + \frac{6e}{h} \right) = \frac{N}{F} (1 + 6x_e) = \sigma' (1 + 6x_e) \dots \dots (29)$$

Zahlenbeispiel.

Es wird dasselbe Material gewählt wie im Zahlenbeispiel des ersten Abschnitts.

Nach Gl. (20) werden dann für gewählte Werte  $x_2$  die zugehörigen  $x_e$  errechnet (s. Tabelle 4). Nun werden die Konstanten für die drei Näherungsformeln 21–23 bestimmt und für die durch die genaue Rechnung erhaltenen  $x_e$  mit Hilfe

dieser drei Formeln die zugehörigen  $x_2$  ermittelt. Es hat sich dabei herausgestellt, daß die Ergebnisse der beiden ersten Formeln mit ziemlich beträchtlichen Fehlern behaftet sind, daß die der dritten jedoch recht befriedigend sind. Es seien daher nur diese letzteren hier wiedergegeben. Für die Konstanten dieser Formel ergaben sich nach den Gl. (26 a—c) folgende Werte:

$$\begin{aligned} a &= 0,479\ 56 \\ b &= 0,078\ 062 \\ c &= 0,207\ 63. \end{aligned}$$

Es ist also

$$x_2^{VII} = 0,479\ 56 + \frac{0,078\ 062}{x_e} + 0,207\ 63\ x_e.$$

Die folgende Tabelle zeigt die gute Übereinstimmung zwischen den Werten  $x_2^{VII}$  und den genauen  $x_2$ . Die Werte der ersten beiden Spalten sind in Fig. 4 aufgetragen.

Tabelle 4.

$x_2$	$x_e$	$x_2^{VII}$	$\frac{x_2^{VII} - x_2}{x_2} \cdot 100$
1,0	0,1589	1,003 81	+ 0,381
1,1	0,1312	1,101 78	+ 0,162
1,2	0,1120	1,199 59	- 0,034
1,4	0,0867	1,397 93	- 0,148
1,7	0,0649	1,695 84	- 0,245
2,0	0,0519	1,994 42	- 0,279
2,5	0,0389	2,494 38	- 0,225
3	0,0311	2,996 05	- 0,132
4	0,0222	4,000 48	+ 0,012
6	0,0141	6,018 80	+ 0,313
10	0,0082	10,001 02	+ 0,010
20	0,0040	19,995 89	- 0,021

Die Genauigkeit von Formel VII ist danach praktisch vollkommen ausreichend, ihr Fehler ist kleiner als 0,4 %.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, für den Ausdruck in Gl. (28)

$$f(x_2) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{x_2^n - (x_2 - 1)^n}$$

eine Tabelle aufzustellen. Es ist das geschehen für das Material unseres Beispiels in Tabelle 5; dort sind auch zum Vergleich mit den Ergebnissen des Hookeschen Gesetzes die Werte  $(1 + 6 x_e)$  eingetragen.

Ist beispielsweise für den Querschnitt eines Betonbogens ohne Eiseneinlagen

$$\sigma' = 25\ \text{kg/cm}^2 \text{ und } x_e = 0,1589,$$

so ist die wirklich auftretende größte Randspannung

$$\sigma_s = 25 \cdot 1,931\ 4 = 48,285\ \text{kg/cm}^2.$$

Tabelle 5.

$x_2$	$x_e$	$f(x_2)$	$1 + 6 x_e$
1,0	0,158 9	1,931 420	1,953 4
1,1	0,131 2	1,773 111	1,787 2
1,2	0,112 0	1,661 711	1,672 0
1,4	0,086 7	1,514 291	1,520 2
1,7	0,064 9	1,385 840	1,389 4
2,0	0,051 9	1,308 854	1,311 4
2,5	0,038 9	1,231 842	1,233 4
3	0,031 1	1,185 596	1,186 6
4	0,022 2	1,132 685	1,133 2
6	0,014 1	1,084 514	1,084 6
10	0,008 2	1,048 968	1,049 2
20	0,004 0	1,023 871	1,024 0

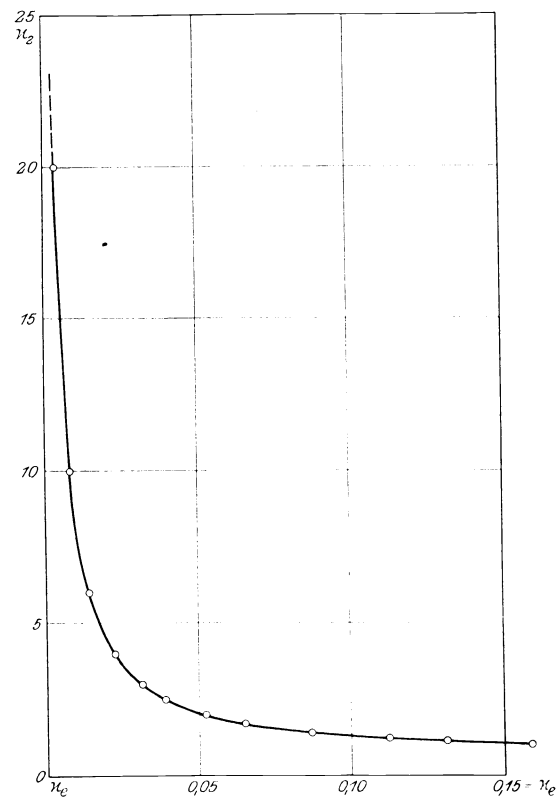


Fig. 4.

Nach dem Hookeschen Gesetz

$${}_{0}\sigma_2 = 25 \cdot 1,953\ 4 = 48,835\ \text{kg/cm}^2.$$

Der letztere Wert unterscheidet sich sehr wenig von dem genauen, ist überdies etwas ungünstiger, so daß es für alle praktischen Fälle unbedingt zulässig erscheint, die genaue Rechnung nach dem Potenzgesetz durch die wesentlich einfachere nach dem Hookeschen Gesetz zu ersetzen.

**III. Beanspruchung eines rechteckigen Querschnitts durch eine Normalkraft außerhalb des Kerns.**

Da bei einem Material ohne Proportionalität zwischen Spannung und Dehnung das Gesetz von der Addition der Wirkungen nicht gilt, kann auch dieser Fall ebensowenig wie der vorige durch Zerlegung — Ersatz der exzentrischen Druckkraft durch eine zentrische und ein Moment — untersucht werden. Der Vollständigkeit wegen ist versucht worden, auch hier die Beziehungen zwischen den Randspannungen und den wirkenden Kräften festzustellen, es ist aber leider nicht gelungen, eine bequeme Lösung zu finden.

Es ist

$$\begin{aligned} \text{für Druck} \quad \epsilon_d &= \alpha_2 \sigma^n, \\ \text{„ Zug} \quad \epsilon_z &= \alpha_1 \sigma^m, \\ \sigma_d &= \sigma_2 \left( \frac{\epsilon_d}{\epsilon_2} \right)^{\frac{1}{n}} = \sigma_2 \left( \frac{y}{y_2} \right)^{\frac{1}{n}} \\ \sigma_z &= \sigma_1 \left( \frac{y}{y_1} \right)^{\frac{1}{m}}. \end{aligned}$$

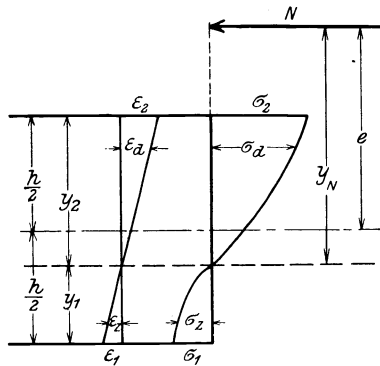


Fig. 5.

Die Gleichgewichtsbedingung für die Normalkräfte ergibt:

$$\begin{aligned} N &= b \int \sigma_d dy - b \int \sigma_z dy \\ &= b \sigma_2 \frac{1}{y_2^{\frac{1}{n}}} \int_0^{y_2} y^{\frac{1}{n}} dy - b \sigma_1 \frac{1}{y_1^{\frac{1}{m}}} \int_0^{y_1} y^{\frac{1}{m}} dy \\ &= \frac{n}{n+1} b \sigma_2 y_2 - \frac{m}{m+1} b \sigma_1 y_1 \dots \dots (30) \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\sigma_2 = \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{\frac{1}{n}} \sigma_1^{\frac{m}{n}} \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^{\frac{1}{n}} \dots \dots (31)$$

$$h = y_1 + y_2 \dots \dots \dots (32)$$

Die Gleichgewichtsbedingung für die Momente lautet:

$$\begin{aligned} N \cdot y_N &= b \int \sigma_d y dy + b \int \sigma_z y dy \\ &= b \sigma_2 \frac{1}{y_2^{\frac{1}{n}}} \int_0^{y_2} y^{1+\frac{1}{n}} dy \\ &\quad + b \sigma_1 \frac{1}{y_1^{\frac{1}{m}}} \int_0^{y_1} y^{1+\frac{1}{m}} dy \\ &= \frac{n}{2n+1} b \sigma_2 y_2^2 + \frac{m}{2m+1} b \sigma_1 y_1^2 \end{aligned} \quad (33)$$

Die Formeln sind der Form nach dieselben wie die im Abschnitt I für reine Biegebeanspruchung mit dem Unterschiede, daß dort  $N=0$  ist und fortfällt. Die Auflösung ist infolgedessen hier noch komplizierter, so daß von einer weiteren Entwicklung vorläufig abgesehen wird.

Eine Näherungslösung wäre in der Weise möglich, daß man die Randspannung für eine Reihe von Werten  $N_1, N_2, N_3 \dots N_n$  und  $e_1, e_2, e_3 \dots e_n$  berechnet, dann eine Näherungsgleichung von der Form  $\sigma = f(N, e)$  aufstellt,  $\sigma$  also als Funktion zweier unabhängigen Veränderlichen durch die Gleichung einer Fläche darstellt und die Konstanten dieser Näherungsformel nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt.

**IV. Formänderung bei reiner Biegebeanspruchung.**

Nach Mohr ist die Biegelinie das Seilpolygon für eine kontinuierliche Belastung, deren Ordinate gleich dem Kontingenzwinkel der elastischen Linie ist.

Es ist

$$w = d\alpha = \frac{d_1 - d_2}{h}$$

Wir benutzen die im Abschnitt I aufgestellte Näherungsformel III und setzen für die Randspannung

$$\begin{aligned} \text{auf der Zugseite} \quad \sigma_1 &= c_1 \sigma_0^{\alpha'} \\ \text{Druckseite} \quad \sigma_2 &= c_2 \sigma_0^{\alpha'} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} d_1 &= \alpha_1 c_1^m \sigma_0^{m\alpha'} dx \\ d_2 &= -\alpha_2 c_2^n \sigma_0^{n\alpha'} dx \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} w &= \frac{\alpha_1 c_1^m \sigma_0^{m\alpha'} + \alpha_2 c_2^n \sigma_0^{n\alpha'}}{h} dx \\ &= \frac{2 \sigma_0}{h} \cdot \frac{\alpha_1 c_1^m \sigma_0^{m\alpha'-1} + \alpha_2 c_2^n \sigma_0^{n\alpha'-1}}{2} dx. \end{aligned}$$

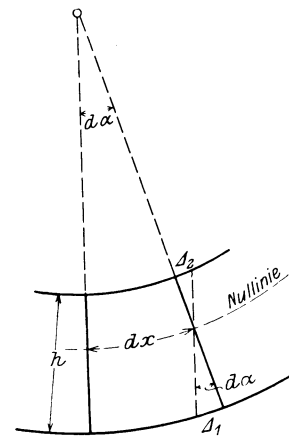


Fig. 6.

Wir führen jetzt, um einen Vergleich mit den Ergebnissen des Hookeschen Gesetzes zu ermöglichen, einen Elastizitätsmodul  $E$  ein, der beliebig groß gewählt werden kann, und erhalten

$$w = \frac{M}{EJ} \varphi dx \dots \dots \dots (34)$$

worin ist

$$\varphi = \frac{E}{2} [\alpha_1 c_1^m \sigma_0^{m\mu-1} + \alpha_2 c_2^n \sigma_0^{n\nu-1}]$$

$$= \varphi_1 \sigma_0^{\varrho_1} + \varphi_2 \sigma_0^{\varrho_2} \dots \dots (35)$$

hiervon ist

$$\varphi_1 = \frac{E}{2} \alpha_1 c_1^m$$

$$\varphi_2 = \frac{E}{2} \alpha_2 c_2^n$$

$$\varrho_1 = m\mu - 1$$

$$\varrho_2 = n\nu - 1.$$

Für die Größe  $\varphi$  läßt sich für jedes Material eine Tabelle aufstellen.

Man hat dann nach Auftragung der  $\frac{M}{EJ}$ -Fläche nur nötig, für einzelne Querschnitte die Spannung nach dem Hookeschen Gesetz  $\sigma_0$  zu bestimmen, aus der Tabelle die zugehörigen Werte  $\varphi$  zu entnehmen und mit ihnen die Ordinaten der  $\frac{M}{EJ}$ -Fläche zu multiplizieren. Das zu dieser  $\frac{M}{EJ} \cdot \varphi$ -Fläche gezeichnete Seilpolygon ist dann die Biegelinie,

Statt die  $\frac{M}{EJ}$ -Fläche oder die M-Fläche mit  $\varphi$  zu multiplizieren, kann man auch die J-Fläche durch  $\varphi$  dividieren und erhält dann einen Balken mit veränderlichem  $J_x = \frac{J}{\varphi_x}$ , auf den dann das gewöhnliche Verfahren angewendet werden kann.

**Zahlenbeispiel.**

Das Material ist dasselbe wie bei den früheren Beispielen.

Es ist

für Zug  $\alpha_1 = \frac{1}{291\,536}$ ,  $m = 1,169\,813\,68$

$c_1 = 0,925\,393$ ,  $\mu = 0,978\,796\,44$

für Druck  $\alpha_2 = \frac{1}{334\,436}$ ,  $n = 1,073\,629\,59$

$c_2 = 1,004\,596$ ,  $\nu = 1,024\,196\,04.$

$E$  wird gewählt zu  $350\,000\text{ kg/cm}^2$ ; es ist das der Wert, den Faerber nach Durchbiegungsmessungen an einem Betongewölbe ermittelt hat (Deutsche Bauzeitung, Mitteilungen über Zement, Beton- und Eisenbetonbau 1911 S. 117).

Danach ergibt sich

$\varphi_1 = 0,690\,165\,19$

$\varphi_2 = 0,525\,853\,97$

$\varrho_1 = 0,145\,009\,5$

$\varrho_2 = 0,099\,607\,18.$

Die sich hiernach ergebenden Werte für  $\varphi$  sind in der folgenden Tabelle 6 zusammengestellt.

Tabelle 6.

$\sigma_0$	$\varphi$	$\Delta \varphi$	$\sigma_0$	$\varphi$	$\Delta \varphi$
1	1,216 02		11	1,644 88	0,019 72
2	1,326 58	0,110 56	12	1,663 10	0,018 22
3	1,396 02	0,069 44	13	1,680 0	0,016 9
4	1,447 55	0,051 53	14	1,695 9	0,015 9
5	1,488 88	0,041 33	15	1,710 8	0,014 9
6	1,523 54	0,034 66	16	1,724 8	0,014 0
7	1,553 50	0,029 96	17	1,738 1	0,013 3
8	1,579 93	0,026 43	18	1,750 8	0,012 7
9	1,603 64	0,023 71	19	1,762 9	0,012 1
10	1 625 16	0,021 52	20	1,774 4	0,011 5

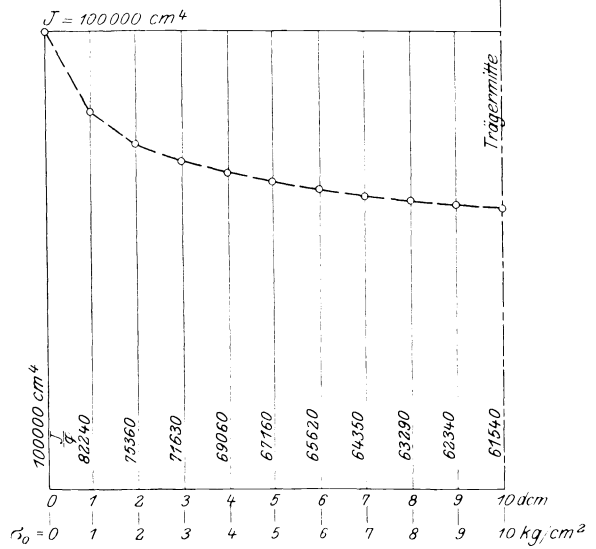
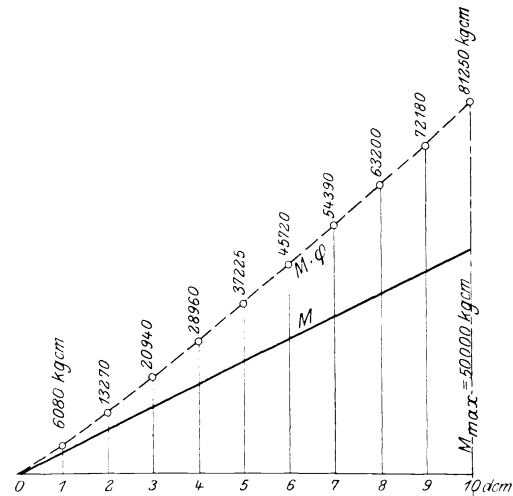


Fig. 7.

Um ein Beispiel zu geben, ist in Fig. 7 für einen einfachen Balken von 2 m Stützweite,  $J=100\,000\text{ cm}^4$  und  $W=5000\text{ cm}^3$ , der in der Mitte mit einer Einzellast von 1000 kg belastet ist, die halbe  $M$ - und die halbe  $M\varphi$ -Fläche aufgetragen, ebenso auch die halbe  $J$ - und die halbe  $\frac{J}{\varphi}$ -Fläche.

Durch Wahl eines anderen  $E$  ließe sich noch eine bessere Übereinstimmung zwischen den einzelnen Flächen — für die Ermittlung der Durchbiegung an einer bestimmten Stelle sogar volle Übereinstimmung — zwischen dem Ergebnis der genauen Rechnung und der nach dem Hookeschen Gesetz erzielen.

**V. Zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme.**

Da auf Körper, für die das Hookesche Gesetz nicht gilt, der Maxwellsche Satz von der Gegenseitigkeit der Formänderungen nicht anwendbar ist, so ist die Berechnung statisch unbestimmter Größen mit Hilfe von Biegungslinien für die Zustände  $X_a = -1$ ,  $X_b = -1$  usw. nicht möglich.

Es soll nach dem Vorgange von Müller-Breslau (Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, Leipzig 1886, Seite 150) unter Anwendung des Gesetzes der virtuellen Verschiebungen zunächst für den Fall reiner Biegung — z. B. Balken auf mehreren Stützen bei Vernachlässigung der Schubspannungen — versucht werden, eine Lösung zu finden.

Das Gesetz der virtuellen Verschiebungen lautet für Tragwerke, die nur auf Biegung beansprucht werden,

$$\sum \bar{Q} \delta = \int \bar{M} \Delta d\varphi.$$

Leisten die äußeren Kräfte keine Arbeit und treten Auflagerverschiebungen nicht auf, so ist

$$\int \bar{M} \Delta d\varphi = 0.$$

Diesen Satz hat Müller-Breslau zuerst zur Berechnung statisch unbestimmter Größen benutzt, indem er ihn der Reihe nach auf die Belastungszustände  $X_a = -1$ ,  $X_b = -1$  . . . anwandte.

Man erhält durch dieses Verfahren so viel Gleichungen, wie Unbekannte  $X$  vorhanden sind, und ist dann in der Lage, diese zu berechnen. Die Gleichungen lauten:

$$\int M_a \Delta d\varphi = 0$$

$$\int M_b \Delta d\varphi = 0$$

-----

$\Delta d\varphi$  ist die dem wirklichen Verschiebungszustande entsprechende Winkeländerung zweier benachbarten Querschnitte am Ende der Formänderung; es ist also

$$\Delta d\varphi = \frac{\epsilon_1 dx - \epsilon_2 dx}{h}$$

wobei  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  die Dehnungen der äußeren Randschichten sind (s. Abschnitt IV).

Die Einführung des Potenzgesetzes in diese Gleichung würde wieder zu unendlichen Reihen führen; wir wählen daher als Ausdruck der Beziehung zwischen Spannung und Dehnung hier das Parabelgesetz in der Form

$$\epsilon = \alpha \sigma + \beta \sigma^2$$

und erhalten

$$\Delta d\varphi = \frac{(\alpha_1 \sigma_1 + \beta_1 \sigma_1^2) + (\alpha_2 \sigma_2 + \beta_2 \sigma_2^2)}{h} dx \dots (36)$$

wobei für  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  die absoluten Werte einzusetzen sind.

Für die Beziehung zwischen den Randspannungen und dem Moment wählen wir nach Gl. (12) die Form

$$\sigma_1 = \gamma_1 M + \vartheta_1 M^2 \dots \dots \dots (37)$$

$$\sigma_2 = \gamma_2 M + \vartheta_2 M^2 \dots \dots \dots (37a)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \Delta d\varphi &= \frac{1}{h} [\alpha_1 (\gamma_1 M + \vartheta_1 M^2) + \beta_1 (\gamma_1 M + \vartheta_1 M^2)^2] dx \\ &+ \frac{1}{h} [\alpha_2 (\gamma_2 M + \vartheta_2 M^2) + \beta_2 (\gamma_2 M + \vartheta_2 M^2)^2] dx \\ &= \frac{1}{h} [(\alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2) M \\ &+ (\alpha_1 \vartheta_1 + \alpha_2 \vartheta_2 + \beta_1 \gamma_1^2 + \beta_2 \gamma_2^2) M^2 \\ &+ 2(\beta_1 \gamma_1 \vartheta_1 + \beta_2 \gamma_2 \vartheta_2) M^3 \\ &+ (\beta_1 \vartheta_1^2 + \beta_2 \vartheta_2^2) M^4] dx \end{aligned}$$

$$\Delta d\varphi = \frac{dx}{h} [a_1 M + a_2 M^2 + a_3 M^3 + a_4 M^4] \dots (38)$$

Dieser Wert wird eingesetzt in die den Zuständen  $X_a = -1$ ,  $X_b = -1$  . . . entsprechenden virtuellen Arbeitsgleichungen, die folgende Form annehmen:

$$\left. \begin{aligned} \int M_a (a_1 M + a_2 M^2 + a_3 M^3 + a_4 M^4) dx &= 0 \\ \int M_b (a_1 M + a_2 M^2 + a_3 M^3 + a_4 M^4) dx &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (39)$$

-----

Setzt man jetzt

$$M = M_0 - M_a X_a - M_b X_b \dots \dots$$

in die Gl. (39) ein, dann erhält man von Gleichungen vierten Grades, in denen nur noch die Unbe-

kannten  $X_a, X_b \dots$  auftreten, so viele wie Unbekannte noch vorhanden sind.

Liegt ein einfach statisch unbestimmtes System vor, so ist

$$M = M_0 - M_a X_a$$

und

$$0 = \int M_a \mathcal{A} d\eta = \int M_a [a_1 (M_0 - M_a X_a) + a_2 (M_0 - M_a X_a)^2 + a_3 (M_0 - M_a X_a)^3 + a_4 (M_0 - M_a X_a)^4] dx$$

Die Auflösung ergibt

$$C_1 X_a - C_2 X_a^2 + C_3 X_a^3 - C_4 X_a^4 = C_0 \dots \dots \dots (40)$$

Hierin ist

$$C_1 = a_1 \int M_a^2 dx + 2 a_2 \int M_0 M_a^2 dx + 3 a_3 \int M_0^2 M_a^2 dx + 4 a_4 \int M_0^3 M_a^2 dx$$

$$C_2 = a_2 \int M_a^3 dx + 3 a_3 \int M_0 M_a^3 dx + 6 a_4 \int M_0^2 M_a^3 dx$$

$$C_3 = a_3 \int M_a^4 dx + 4 a_4 \int M_0 M_a^4 dx$$

$$C_4 = a_4 \int M_a^5 dx$$

$$C_0 = a_1 \int M_0 M_a dx + a_2 \int M_0^2 M_a dx + a_3 \int M_0^3 M_a dx + a_4 \int M_0^4 M_a dx$$

Zahlenbeispiel.

Das Parabelgesetz für das Material, das in den Zahlenbeispielen der Abschnitte I bis IV vorausgesetzt wurde, lautet

für Zug:  $\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{280\,847} + \frac{\sigma_1^2}{5\,889\,806}$ ,

„ Druck:  $\epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{290\,305} + \frac{\sigma_2^2}{84\,799\,580}$ .

Die Konstanten sind nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt.

Die Näherungsgleichungen in Parabelform für die Beziehungen zwischen den Randspannungen und dem Moment lauten nach Abschnitt I

für Zug:  $\sigma_1 = \frac{0,895\,255}{W} M - \frac{0,001\,270\,85}{W^2} M^2$ ;

„ Druck:  $\sigma_2 = \frac{1,043\,061}{W} M + \frac{0,001\,843\,95}{W_2} M^2$ .

Die Konstanten gelten für die Einheiten kg und cm; nach der Umformung auf t und m, die für die Zahlenrechnung hier bequemer ist, erhalten wir:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\,808\,470} \frac{m^2}{t}; \quad \beta_1 = \frac{1}{588\,980\,600} \frac{m^4}{t^2};$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\,903\,050} \frac{m^2}{t}; \quad \beta_2 = \frac{1}{8\,479\,958\,000} \frac{m^4}{t^2};$$

$$\gamma_1 = \frac{0,895\,255}{W} \frac{1}{m^3}; \quad \delta_1 = - \frac{0,000\,127\,085}{W^2} \frac{1}{t\,m^4};$$

$$\gamma_2 = \frac{1,043\,061}{W} \frac{1}{m^3}; \quad \delta_2 = \frac{0,000\,184\,395}{W^2} \frac{1}{t\,m^4}.$$

Setzen wir  $\mathfrak{B} = 1000\,W$ , so ist für Gl. (38):

$$a_1 = \frac{0,000\,678\,068\,0}{\mathfrak{B}} \frac{1}{tm},$$

$$a_2 = \frac{0,001\,570\,361\,2}{\mathfrak{B}^2} \frac{1}{t^2 m^2},$$

$$a_3 = - \frac{0,000\,340\,978\,0}{\mathfrak{B}^3} \frac{1}{t^3 m^3},$$

$$a_4 = \frac{0,000\,031\,430\,9}{\mathfrak{B}^4} \frac{1}{t^4 m^4}.$$

Es sei als Beispiel ein Balken auf drei Stützen untersucht mit den in Fig. 8 angegebenen Ab-

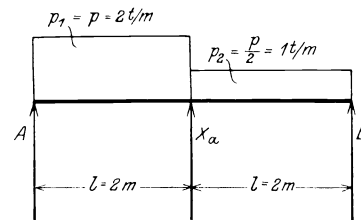


Fig. 8.

messungen und Belastungen. Das Widerstandsmoment des rechteckigen Querschnitts sei  $W = 5000\,cm^3$ . Die Reaktion der Mittelstütze sei als statisch unbestimmte Größe  $X_a$  eingeführt.

Die Konstanten der Gl. (40) ergeben sich zu

$$C_1 = 0,000\,538\,920 \frac{\text{m}^2}{\text{t}},$$

$$C_2 = 0,000\,039\,780 \frac{\text{m}^2}{\text{t}^2},$$

$$C_3 = -0,000\,001\,722 \frac{\text{m}^2}{\text{t}^3},$$

$$C_4 = 0,000\,000\,033\,5 \frac{\text{m}^2}{\text{t}^4},$$

$$C_0 = 0,001\,383\,946 \text{ m}^2.$$

Multiplizieren wir sie mit  $10^9$ , so lautet die Gl. (40):

$$538\,290 X_a - 39\,780 X_a^2 - 1\,722 X_a^3 - 33,5 X_a^4 = 1\,383\,946.$$

Es ergibt sich

$$X_a = 3,880 \text{ t.}$$

Der Auflagerdruck der linken Stütze ist

$$A = \frac{7}{8} p l - \frac{X_a}{2} = 1,56 \text{ t.}$$

Das absolut größte Moment tritt über der Mittelstütze auf und ist

$$M_1 = A \cdot l - p \frac{l^2}{2} = 0,88 \text{ tm.}$$

Ihm entspricht

$$\sigma_0 = \frac{M_1}{W} = \frac{88\,000}{5\,000} = 17,6 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Randspannungen sind danach

auf der Zugseite

$$\sigma_1 = 0,895\,255 \cdot 17,6 - 0,001\,270\,85 \cdot 17,6^2 = 15,363 \text{ kg/cm}^2,$$

auf der Druckseite

$$\sigma_2 = 1,043\,061 \cdot 17,6 + 0,001\,843\,95 \cdot 17,6^2 = 18,929 \text{ kg/cm}^2.$$

Für ein Material, das dem Hookeschen Gesetz folgt, würde sich ergeben

$$X_a = \frac{\int M_0 M_a \, dx}{\int M_a^2 \, dx} = \frac{15}{16} p l = 3,75 \text{ t,}$$

$$A = \frac{7}{8} p l - \frac{15}{32} p l = \frac{13}{32} p l,$$

$$M_1 = \frac{13}{32} p l^2 - \frac{p l^2}{2} = -\frac{3}{32} p l^2 = -75\,000 \text{ kg cm,}$$

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \frac{75\,000}{5\,000} = 15 \text{ kg/cm}^2$$