

Г. Н. АБРАМОВИЧ

ПРИКЛАДНАЯ ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ

*Допущено Главным управлением высшего
образования Министерства культуры СССР
в качестве учебника для высших технических
учебных заведений*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1953

Редактор *С. Н. Шустов.*

Техн. редактор *С. Н. Ахламов.*

Корректор *О. А. Сигал.*

Подписано к печати 14/VIII 1953 г. Бумага 60×92/16. 23,0 бум. л. 46,0 печ. л.
39,85 уч.-изд. л. 36 823 тип. зн. в печ. л. Т-05293. Тираж 10 000 экз.
Цена книги 11 руб. 95 коп. Переплёт 1 руб. 50 коп. Заказ № 1050.

16-я типография Союзполиграфпрома Главиздата Министерства культуры СССР.
Москва, Трёхпрудный пер., 9.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Из предисловия к первому изданию	5
Предисловие ко второму изданию	6
Глава I. Уравнения газовой динамики для единичной струйки .	7
§ 1. Уравнение неразрывности	7
§ 2. Уравнение энергии	9
§ 3. Предельная скорость движения газа. Критерий подобия .	18
§ 4. Механическая форма уравнения энергии (уравнение Бернулли)	23
§ 5. Уравнение количества движения	34
§ 6. Уравнение моментов количества движения	41
§ 7. Энтропия	42
Глава II. Некоторые сведения из гидродинамики	46
§ 1. Циркуляция скорости. Вихрь	46
§ 2. О сложении потоков идеальной жидкости	57
§ 3. Теория центробежной форсунки	63
Глава III. Скачки уплотнения	71
§ 1. Прямые скачки уплотнения	71
§ 2. Косые скачки уплотнения	83
§ 3. О применении пневматического насадка в сверхзвуковом потоке	98
Глава IV. Ускорение газового потока	101
§ 1. Сверхзвуковое сопло	101
§ 2. Простое сопло	107
§ 3. Сверхзвуковое течение газа с непрерывным увеличением скорости. Обтекание внешнего тупого угла	108
§ 4. Обтекание плоской стенки	122
§ 5. Обтекание выпуклой кривой	124
§ 6. Истечение из единичного плоского сопла с косым срезом в пространстве с пониженным давлением	126
Глава V. Одномерные газовые потоки	130
§ 1. Адиабатическое течение газа с трением. Кризис течения .	130
§ 2. Трение в трубе постоянного сечения	133
§ 3. Движение подогреваемого газа по трубе постоянного сечения	141
§ 4. Общие условия перехода от дозвукового течения к сверхзвуковому и обратно	151
§ 5. О распространении детонации и трения в газах	166
§ 6. Расчёт газовых потоков с использованием газодинамических функций	181

Глава VI. Теория пограничного слоя. Турбулентные газовые струи	198
§ 1. Основные понятия пограничного слоя	198
§ 2. Течение газа в гладкой цилиндрической трубе	211
§ 3. Обтекание пластины	232
§ 4. Общие свойства турбулентной газовой струи	241
§ 5. Горячая и холодная газовые струи	266
§ 6. Струя с тяжёлыми примесями (двухфазная струя)	277
Глава VII. Сопротивление сопла и диффузора. Газовый эжектор	283
§ 1. Сопротивление сопла	283
§ 2. Сопротивление диффузора	290
§ 3. Теория газового эжектора	305
§ 4. О длине камеры смещения эжектора	326
§ 5. Приближённые формулы расчёта эжектора	339
Глава VIII. Элементы теории крыла и решётки крыльев	344
§ 1. Основные геометрические параметры крылового профиля и решётки крыльев	344
§ 2. Теорема Жуковского о силах, действующих на крыло и решётку крыльев в потоке	349
§ 3. Обтекание крыла потоком несжимаемой жидкости	370
§ 4. Обтекание крыла дозвуковым потоком газа	389
§ 5. Сверхзвуковое обтекание крыла	395
§ 6. Обтекание решётки крыльев потоком несжимаемой жидкости	402
§ 7. Обтекание решётки крыльев дозвуковым потоком газа	432
§ 8. Сверхзвуковое обтекание решётки крыльев	449
Глава IX. Элементы газовой динамики компрессоров и турбин	457
§ 1. Основные типы лопаточных турбомашин и их элементы	457
§ 2. Связь между параметрами газа в абсолютном и относительном движениях	466
§ 3. Относительное движение единичной струйки газа в рабочем колесе	482
§ 4. Основные соотношения между параметрами газового потока в элементарной ступени турбомшины	495
§ 5. Коэффициент полезного действия элементарной ступени компрессора	507
§ 6. Коэффициент полезного действия элементарной ступени турбины	520
§ 7. Элементарная ступень компрессора	534
§ 8. Элементарная ступень турбины	573
§ 9. Профилирование элементарного венца	594
§ 10. Течение газа в межвенцовых зазорах ступени турбомшины	609
Глава X. Реактивная сила. Воздушно-реактивные двигатели	661
§ 1. Расчёт реактивной силы (тяги)	661
§ 2. Реактивная сила на нерасчётном режиме	666
§ 3. Прямоточный воздушно-реактивный двигатель	671
§ 4. Турбо-реактивный двигатель	685
§ 5. О месте приложения реактивной силы	704
Приложения I—II	709—712
Предметный указатель	733

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящей книге излагаются основы газовой динамики в применении к теории реактивных двигателей и других машин и аппаратов, работа которых связана с движением газа при больших скоростях. Непосредственный расчёт газовых машин в задачи книги не входит.

В значительной части книги используются одномерные уравнения газовой динамики, на которых по преимуществу и основываются современные методы расчёта реактивных двигателей, компрессоров и турбин. Однако не во всех вопросах теории газовых машин можно рассматривать поток как единичную струю газа; например, теория течений с непрерывным увеличением скорости требует частичного использования дифференциальных уравнений двумерного газового потока. Во всех таких случаях мы, конечно, применяем необходимые дифференциальные уравнения.

Книга составлена как учебник для моторных факультетов авиационных институтов по программе, утверждённой Министерством высшего образования СССР. Материал излагается в таком же виде и объёме, как и в лекциях по газовой динамике, читаемых автором в Московском авиационном институте им. С. Орджоникидзе. Для пользования книгой читатель должен быть знаком с основами гидравлики и термодинамики.

Автор стремился достигнуть возможно большей наглядности и доступности изложения и в освещении каждого вопроса искал наиболее простых средств. На моторных факультетах отдельные курсы гидродинамики и аэродинамики не читаются. Это обстоятельство заставило автора уделить место таким вопросам из указанных дисциплин, знание которых необходимо для усвоения газовой динамики, но одновременно это привело к некоторому нарушению единства стиля книги.

Г. Абрамович

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Во втором издании книга дополнена новыми разделами и переработана. Изложена теория пограничного слоя в газовом течении у пластины и в трубе и дан пример расчёта пограничного слоя у крылового профиля. Приведены газодинамические функции, получившие в последнее время широкое применение в инженерных расчётах. Выделены в самостоятельную главу и существенно пополнены разделы, относящиеся к теории сопел, диффузоров и эжекторов; в заново написанных параграфах об эжекторах освещены дополнительно такие вопросы, как влияние трения на изменение параметров газового потока в смесительной камере, определение длины смесительной камеры на основе теории свободной струи, применение упрощённых приближённых формул к расчёту газового эжектора. Коренным образом переработана глава о лопаточных машинах, в которой теперь изложены элементы газовой динамики не только осевых, но также центробежных и диагональных турбомашин. Ряд более мелких исправлений и добавлений внесён в остальные разделы книги.

Книга дополнена оптическими фотографиями сверхзвукового обтекания клина, конуса, тупоносых осесимметричных, плоских тел и ромбовидных профилей и сверхзвуковых струй в камере смещения эжектора; почти все эти фотографии являются кадрами из звукового кинофильма «Вопросы газовой динамики», снятого в 1951 г. Московской киностудией научно-популярных фильмов.

Несколько параграфов и одну главу книги составили под редакцией автора другие лица: §§ 1—3 главы VI—Б. А. Жестков, § 6 главы V и §§ 3—5 главы VII—А. Я. Черкез, главу IX—С. И. Гинзбург.

Ценные редакционные замечания сделали при чтении рукописи Г. Ю. Степанов, К. А. Ушаков, К. В. Холщевников и Г. Г. Черный. Всем указанным лицам автор выражает глубокую благодарность.

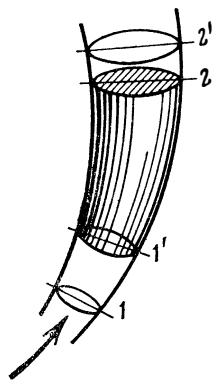
Г. Абрамович

ГЛАВА I

УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ ЕДИНИЧНОЙ СТРУЙКИ

§ 1. Уравнение неразрывности

Основные уравнения газовой динамики мы выведем для элементарной струйки газа, поперечные размеры которой настолько малы, что в каждом её сечении можно считать постоянными все основные параметры потока: скорость, давление, температуру и плотность газа. Именно в таком виде уравнения газовой динамики применяются обычно в теории реактивных двигателей. В тех случаях, когда в пределах поперечного сечения рабочей струи параметры потока меняются (например, неодинаковы значения скорости или температуры), вводится представление о средних по сечению значениях этих величин, и тогда при помощи соответствующих, в большинстве случаев незначительных, поправок удаётся использовать все уравнения, полученные для элементарной струйки. Метод элементарной струйки лежит в основе гидравлики, поэтому газодвух динамику элементарной (единичной) струйки иногда называют «газовой гидравликой».



Фиг. 1. Элементарная струйка.

Чтобы получить уравнение неразрывности, рассмотрим стационарное (установившееся) движение элементарной струйки газа (фиг. 1). При стационарном движении в любой точке пространства сохраняются неизменными по времени скорость движения и состояние жидкости (плотность, давление, температура). Траектории частиц при таком движении называются линиями тока¹⁾. Боковая поверхность струйки, носящая название поверхности тока, является для жидкости (газа) непроницаемой (векторы скорости

¹⁾ При неустановившемся движении линии тока определяются иначе и не совпадают с траекториями частиц.

течения касательны к ней); образующие поверхности тока являются линиями тока.

Рассмотрим некоторый участок струйки между двумя нормальными к поверхности тока сечениями 1 и 2 ; заметим, что в соответствии с указанным на фиг. 1 направлением движения в объёме $1-2$ приток газа осуществляется только через поперечное сечение 1 , а расход газа — только через сечение 2 .

За бесконечно малый промежуток времени $d\tau$ выделенная часть струйки переместится в новое положение $1'-2'$. Перемещение состоит в том, что за время $d\tau$ заштрихованный объём $1'-2$ вместит газ, вытесненный из области $1-1'$, а известное количество газа за то же время вытечет из этого объёма и заполнит область $2-2'$. Приток газа в объёме $1'-2$ составляет

$$dG_1 = \gamma_1 F_1 dl_1 \quad [кг], \quad (1)$$

где γ_1 — удельный вес газа в поперечном сечении 1 , равный произведению плотности ρ_1 на ускорение силы тяжести g , F_1 — площадь поперечного сечения 1 . Расстояние между сечениями 1 и $1'$ равно произведению скорости движения на элементарный промежуток времени:

$$dl_1 = \omega_1 d\tau,$$

где ω_1 — скорость в сечении 1 , откуда

$$dG_1 = \gamma_1 \omega_1 F_1 d\tau.$$

Расход жидкости из объёма $1'-2$ равен, очевидно,

$$dG_2 = \gamma_2 \omega_2 F_2 d\tau.$$

При установившемся режиме и отсутствии разрывов сплошности в движущейся среде приток газа должен равняться расходу:

$$dG_1 = dG_2 = dG.$$

Отсюда после соответствующей подстановки получаем уравнение неразрывности — закон сохранения массы — для единичной струйки сжимаемой жидкости (газа) при установившемся течении:

$$\gamma_1 \omega_1 F_1 = \gamma_2 \omega_2 F_2. \quad (2)$$

В случае несжимаемой жидкости, т. е. при $\gamma = \text{const}$, уравнение (2) принимает более простую форму:

$$\omega_1 F_1 = \omega_2 F_2, \quad (3)$$

которая применима к газовым течениям в тех случаях, когда изменениями удельного веса газа можно пренебречь.

Как известно из гидравлики, на основании уравнения неразрывности (3) по расположению линий тока в несжимаемой

среде можно судить о скорости движения. В местах сгущения линий тока скорость растёт; если линии тока раздвигаются, то скорость падает. При движении газа не всегда можно непосредственно по картине линий тока определить изменение скорости, так как изменения плотности (удельного веса) газа могут быть значительными.

В газе, как нетрудно видеть из уравнения неразрывности, картина линий тока однозначно определит изменение плотности тока:

$$j = \gamma\omega = \frac{G}{F},$$

представляющей произведение удельного веса газа на скорость, т. е. весовой расход газа через единицу площади поперечного сечения. В местах сгущения линий тока плотность тока увеличивается, а в местах расхождения линий тока — убывает.

§ 2. Уравнение энергии

Следуя первому началу термодинамики, составим баланс энергии в неподвижной системе координат (фиг. 1), т. е. рассмотрим преобразование энергии в одной и той же массе газа, заполнявшей вначале объём $1-2$, а через бесконечно малый промежуток времени $d\tau$ переместившейся в положение $1'-2'$.

Приращение любого вида энергии равно разности количеств этого вида энергии в положениях $1'-2'$ и $1-2$. Ввиду того, что заштрихованный объём $1'-2$ является общим для этих двух положений, энергия массы газа, заполняющей объём $1'-2$, при вычитании сокращается¹⁾, и приращение энергии измеряется разностью количеств энергии в бесконечно малых объёмах $2-2'$ и $1-1'$. Отсюда следует, что приращение кинетической энергии равно:

$$dE_{\text{к}} = \frac{dG}{g} \cdot \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2};$$

здесь $\frac{dG}{g}$ — массовый расход газа через поперечное сечение струйки за время $d\tau$. Приращение потенциальной энергии (энергии положения)

$$dE_{\text{п}} = dG(z_2 - z_1),$$

где z_2 и z_1 — высоты расположения (нивеллирные уровни) сечений 2 и 1 . Приращение внутренней (тепловой) энергии

$$dE_{\text{т}} = \frac{dG}{A}(u_2 - u_1),$$

¹⁾ Движение газа предполагается, как и в предыдущем параграфе, установившимся.

где $A = \frac{1}{427}$ — тепловой эквивалент механической работы,

$$u = c_v T$$

— тепловая энергия единицы веса газа (произведение теплоёмкости при постоянном объёме на абсолютную температуру). Если теплоёмкость газа в сечениях 1 и 2 одинакова, то прирост внутренней энергии равен:

$$dE_T = \frac{c_v dG}{A} (T_2 - T_1).$$

На поверхность выделенной части струйки газа действуют направленные внутрь и по нормали к ней внешние силы давления p . При перемещении газа внешние силы давления производят работу. Например, перенос газа из сечения 1 в сечение 1' происходит как бы под действием поршня площадью F_1 с давлением p_1 . Работа поршня за время $d\tau$ равна:

$$p_1 F_1 \omega_1 d\tau = \frac{p_1}{\gamma_1} dG.$$

Точно так же можно представить себе, что давление p_2 на сечение 2 осуществляется поршнем площадью F_2 . За время $d\tau$ газ переместит поршень в положение 2, произведя отрицательную работу:

$$- p_2 F_2 \omega_2 d\tau = - \frac{p_2}{\gamma_2} dG.$$

Силы давления, действующие на боковую поверхность струйки (поверхность тока), никакой работы не производят, так как они нормальны к траекториям движения частиц газа. Таким образом, энергия, внесённая силами давления, равна разности между работами поршня 1 и поршня 2:

$$dE_d = dG \left(\frac{p_1}{\gamma_1} - \frac{p_2}{\gamma_2} \right).$$

К газовой струйке на участке 1—2 может быть за время $d\tau$ подведено тепло в количестве dW , в механических единицах равном $\frac{dW}{A}$. Далее, газовая струйка за время $d\tau$ может произвести техническую работу dl , например, приводя во вращение колесо турбины, установленное между сечениями 1 и 2. Наконец, следует учесть работу, расходуемую газом за время $d\tau$ на преодоление сил трения: $dl_{тр}$.

Согласно первому началу термодинамики (закону сохранения энергии) сумма подведённых к газу тепловой энергии и работы сил давления равна сумме работ технической и тре-

ния и повышения запасов потенциальной, внутренней и кинетической энергии:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{A} + \left(\frac{p_1}{\gamma_1} - \frac{p_2}{\gamma_2} \right) dG = \\ = dl + dl_{\text{тр}} + (z_2 - z_1) dG + \frac{u_2 - u_1}{A} dG + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} dG. \end{aligned} \quad (4)$$

Разделив все члены полученного выражения на величину dG , приходим к уравнению энергии для единицы веса (1 кг) газа:

$$\frac{Q}{A} + \frac{p_1}{\gamma_1} - \frac{p_2}{\gamma_2} = L + L_{\text{тр}} + z_2 - z_1 + \frac{u_2 - u_1}{A} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}. \quad (5)$$

Здесь введены обозначения: $Q = \frac{dW}{dG}$ — тепло, подводимое к 1 кг газа на участке 1—2, $L = \frac{dl}{dG}$ — техническая работа, совершаемая 1 кг газа на том же участке, $L_{\text{тр}} = \frac{dl_{\text{тр}}}{dG}$ — работа сил трения, приходящаяся на 1 кг газа.

Приток тепла в общем случае осуществляется двумя способами: 1) извне ($Q_{\text{нар}}$), за счёт теплообмена через боковую поверхность струйки, 2) изнутри ($Q_{\text{вн}}$), за счёт преобразования в тепло работы трения. Таким образом,

$$Q = Q_{\text{нар}} + Q_{\text{вн}}. \quad (6)$$

Вторая часть теплового потока, очевидно, в точности равна тепловому эквиваленту работы трения:

$$\frac{Q_{\text{вн}}}{A} = L_{\text{тр}}. \quad (7)$$

Из термодинамики известно уравнение состояния газа

$$pv = RT, \quad (8)$$

где R — газовая постоянная, а удельный объём газа v есть величина, обратная удельному весу:

$$v = \frac{1}{\gamma}. \quad (9)$$

Отсюда

$$\frac{p}{\gamma} = RT. \quad (10)$$

Кроме того, известно соотношение, связывающее теплоёмкость при постоянном объёме (c_v) и теплоёмкость при постоянном давлении (c_p):

$$c_p = c_v + AR. \quad (11)$$

Введём в рассмотрение *теплосодержание* (или *энтальпию*) газа, т. е. произведение теплоёмкости при постоянном давлении на абсолютную температуру:

$$i = c_p T.$$

Тогда соотношение (11) примет несколько иной вид:

$$i = u + ART, \quad (12)$$

или на основании (10)

$$i = u + A \frac{P}{\gamma}. \quad (13)$$

Используя выражения (6), (7) и (13), можно придать уравнению энергии следующую форму:

$$\frac{Q_{\text{нар}}}{A} - L = z_2 - z_1 + \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2g} + \frac{i_2 - i_1}{A}. \quad (14)$$

Это есть тепловая форма уравнения энергии или так называемое уравнение *теплосодержания* для газа. Существенно то обстоятельство, что уравнение *теплосодержания* не содержит работы трения. В самом деле, поскольку работа, расходуемая на преодоление трения или любого другого вида сопротивления, преобразуется полностью в тепло, а последнее остаётся в газовой струе, наличие сил трения не может нарушить общего баланса энергии, а лишь приводит к преобразованию одного вида энергии в другой.

Обычно в технике приходится иметь дело с частными формами уравнения *теплосодержания*. Так, в большинстве случаев изменение потенциальной энергии пренебрежимо мало в сравнении с другими частями уравнения энергии, и членом $(z_2 - z_1)$ пренебрегают. Тогда уравнение *теплосодержания* имеет следующий вид:

$$\frac{Q_{\text{нар}}}{A} - L = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2g} + \frac{i_2 - i_1}{A}. \quad (15)$$

При отсутствии технической работы и теплообмена с окружающей средой, т. е. в случае энергетически изолированного процесса в газе, имеем:

$$A \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2g} = i_1 - i_2. \quad (16)$$

В частности, уравнение (16) определяет движение газа по трубе, если нет теплопередачи через стенки. Согласно сказанному это уравнение справедливо вне зависимости от того, действуют или нет силы трения. Иначе говоря, изменение *теплосодержания* (температуры) в энергетически изолированном процессе

связано только с изменением скорости. Если скорость газа не меняется, то остаётся постоянной и температура.

Отсутствие влияния сил трения можно объяснить следующим образом. Под действием трения давление вдоль трубы падает, т. е. газ расширяется, и следовательно, температура должна была бы уменьшаться. Однако работа сил трения преобразуется в тепло; и так как работа сил трения в точности равна механическому эквиваленту тепла, подведённого за счёт этой работы, то подогрев компенсирует охлаждение.

Вдоль трубы постоянного сечения под влиянием сил трения температура газа в дозвуковом течении даже убывает. Происходит это потому, что падение давления сопровождается уменьшением удельного веса газа, а плотность тока остаётся неизменной:

$$j = \frac{G}{F} = \gamma w = \text{const.}$$

Поэтому скорость газа возрастает, и температура в соответствии с уравнением (16) понижается. При малой скорости движения температура изменяется только за счёт теплообмена или в тех местах, где газ проходит через турбину (расходует энергию, $L_T > 0$) или через компрессор (получает энергию, $L_K < 0$).

Если изменением скорости и теплообменом можно пренебречь, то уравнение теплосодержания принимает следующую форму:

$$i_2 - i_1 = -AL. \quad (17)$$

Иначе говоря, изменение теплосодержания газа при этом эквивалентно механической работе. В колесе турбины температура газа уменьшается:

$$i_2 = i_1 - AL_T \quad (L_T > 0), \quad (18)$$

в колесе компрессора температура возрастает:

$$i_2 = i_1 - AL_K \quad (L_K < 0).$$

Напомним, что здесь имеется в виду работа L , отнесённая к 1 кг газа. Таким образом, следуя уравнению теплосодержания, мы получаем простые соотношения для расчёта температурных перепадов на турбине и компрессоре при малых изменениях кинетической энергии:

$$\Delta T = \frac{i_2 - i_1}{c_p} = -\frac{AL}{c_p}. \quad (19)$$

Здесь c_p — среднее значение теплоёмкости при постоянном давлении на данном интервале температур.

Если скорость изменяется существенно, то расчёт лишь немного усложнится. Именно:

$$i_2 - i_1 + A \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2g} = -AL. \quad (20)$$

Наконец, при изотермическом процессе ($i_2 = i_1 = \text{const}$) механическая работа расходуется целиком на изменение кинетической энергии:

$$A \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2g} = -AL. \quad (21)$$

Режим, близкий к изотермическому, можно получить в многоступенчатом компрессоре с промежуточным (между каждой парой ступеней) охлаждением газа.

Когда технической работы нет, уравнение теплосодержания даёт:

$$Q_{\text{нар}} = i_2 - i_1 + A \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2g}; \quad (22)$$

в таком виде оно применяется к теплообменным процессам.

Возвратимся теперь к энергетически изолированным течениям газа, когда выполняются условия

$$Q_{\text{нар}} = 0, \quad AL = 0, \quad (23)$$

и уравнение теплосодержания приобретает форму (16). При этом его можно записать следующим образом:

$$i_2 + A \frac{\omega_2^2}{2g} = i_1 + A \frac{\omega_1^2}{2g} = i + A \frac{\omega^2}{2g} = \text{const}. \quad (24)$$

Отсюда нетрудно видеть, что если газовую струю затормозить полностью, то теплосодержание газа достигнет максимального возможного значения:

$$i_0 = i + A \frac{\omega^2}{2g}. \quad (25)$$

Получающееся при этом значение теплосодержания i_0 мы будем называть *полным теплосодержанием*, а соответствующую абсолютную температуру

$$T_0 = \frac{i_0}{c_p} \quad (26)$$

— температурой торможения.

С помощью (25) из уравнения теплосодержания (15) можно исключить скорости; получаем уравнение

$$Q_{\text{нар}} - AL = i_{02} - i_{01} \quad (27)$$

Итак, температура газа получается равной температуре торможения в том случае, когда скорость течения уменьшается до нуля при отсутствии энергетического обмена с окружающей

средой. Пользуясь средним значением теплоёмкости, можно вычислить температуру торможения по следующей формуле:

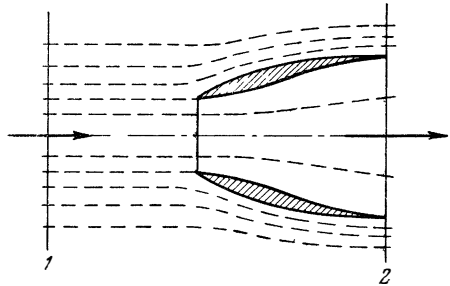
$$T_0 = T + A \frac{\omega^2}{2gc_p}. \quad (28)$$

Для воздуха ($c_p \approx 0,24$) имеем приближённо:

$$T_0 \approx T + \frac{\omega^2}{2000}. \quad (29)$$

Например, в воздушном потоке нормальной температуры ($T_1 \approx 300^\circ \text{ абс}$) при скорости движения $\omega = 100; 350; 1000 \text{ м/сек}$ получается соответственно температура торможения: $T_0 \approx 305, 360, 800^\circ \text{ абс}$.

В конце входного диффузора (фиг. 2) воздушно-реактивного двигателя, обычно вне зависимости от скорости полёта, устанавливается сравнительно малая скорость потока. По этой причине температура воздуха в диффузоре двигателя получается близкой к температуре торможения. Пусть скорость воз-



Фиг. 2. Диффузор воздушно-реактивного двигателя.

духа в конце диффузора $\omega_2 = 100 \text{ м/сек}$. Тогда температура здесь при различной скорости полёта получается из условия

$$T_2 \approx T_0 - \frac{\omega_2^2}{2000} = T_1 + \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2000}.$$

В нашем случае ($\omega_2 = 100 \text{ м/сек}$, $T_1 = 300^\circ \text{ абс}$)

$$T_2 \approx 295 + \frac{\omega_1^2}{2000}. \quad (30)$$

Результаты подсчёта температуры T_2 по формуле (30) сведены в следующую таблицу:

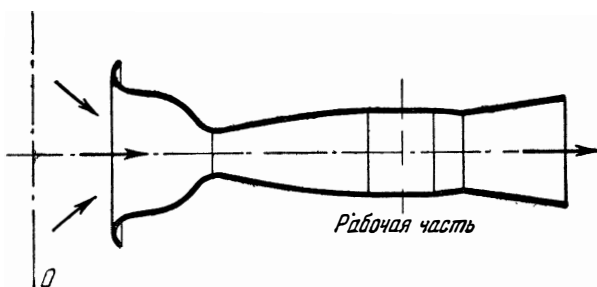
Т а б л и ц а I

ω_1	100	350	1000 м/сек
T_0	305	360	800 град абс
T_2	300	355	795 град абс

Как видим, разогрев воздуха только за счёт торможения при большой скорости потока (полёта) получается весьма значительным.

Уравнение теплосодержания объясняет следующий весьма интересный факт. При течении газа возле твёрдой поверхности

без теплообмена температура последней равна температуре торможения в газе. Дело в том, что в связи с вязкостью газа возле твёрдой стенки всегда образуется тонкий пограничный слой, в котором скорость газа относительно стенки меняется от величины, равной скорости обтекающего потока, до нуля (на стенке). Но раз частицы газа непосредственно возле стенки затормаживаются, то при отсутствии теплообмена температура на стенке должна быть равна температуре торможения. Так, например, в рабочей части аэродинамической трубы сверхзвуковых скоростей (фиг. 3), где скорость очень велика, должна получиться значительно более низкая температура ($T_{р.ч}$), чем в предкамере,



Фиг. 3. Схема аэродинамической трубы сверхзвуковых скоростей.

из которой покоящийся воздух (T_0) поступает в трубу. Например, при скорости в рабочей части $w_{р.ч} = 600$ м/сек и температуре торможения в предкамере $T_0 = 300^\circ$ абс получается температура в потоке:

$$T_{р.ч} \approx T_0 - \frac{w_{р.ч}^2}{2000} = 120^\circ \text{ абс} = -153^\circ \text{ Ц.}$$

Несмотря на это, как показывают опыты, температура стенки на всём протяжении аэродинамической трубы, включая рабочую часть, остаётся постоянной и приблизительно равной температуре торможения:

$$T_{ст} = T_0 = \text{const.}$$

Температура термометра, помещённого в рабочую часть, также приблизительно равна температуре торможения. Это объясняется образованием у стенок трубы и термометра пограничного слоя, в котором обтекающий газовый поток полностью затормаживается. Таким образом, неподвижный термометр не может измерить температуру в потоке газа. По тем же причинам поверхность тел, движущихся с большой скоростью в воздухе, бывает сильно разогрета. Например, поверхность снаряда, вылетающего из ору-

для со скоростью $\omega = 1500$ м/сек, за счёт образования воздушного пограничного слоя, в котором относительная скорость полностью гасится, должна была бы иметь температуру (T_0) выше, чем в воздухе, на $T_0 - T = \frac{\omega^2}{2000} = 1125^\circ$. В действительности температура снаряда меньше полученной здесь за счёт теплоизлучения в пространство. При очень большой скорости полёта делается невозможным обледенение поверхности самолёта. Например, при скорости $\omega = 900$ км/час (250 м/сек) температура торможения на величину $\Delta T = \frac{250^2}{2000} = 31^\circ$ Ц выше, чем в окружающей атмосфере. Температура поверхности самолёта близка к температуре торможения, поэтому в данном примере даже при морозе в $20 - 25^\circ$ Ц обледенения не получится.

Истинная температура обтекаемой газом поверхности, как отмечалось, отличается от температуры торможения. Для определения температуры поверхности пользуются следующей формулой:

$$T_{\text{пов}} = T + \varphi \frac{A\omega^2}{2gc_p}, \quad (31)$$

или для воздуха

$$T_{\text{пов}} \approx T + \varphi \frac{\omega^2}{2000}. \quad (32)$$

Здесь φ — поправочный коэффициент, который определяется большей частью опытным, а иногда теоретическим путём. При $\varphi = 1$ выражения (31) и (32) превращаются в известные уже формулы для температуры торможения. Таким образом, температура поверхности тем ближе к температуре торможения в газе, чем ближе значение коэффициента φ к единице. Для дозвукового скоростного самолёта приближённое значение поправочного коэффициента равно 0,8. Для сверхзвуковой высотной ракеты поправочный коэффициент может уменьшиться до значения $\varphi \approx 0,5$.

Остановимся ещё на одном примере из практики. При обтекании твёрдого тела в некоторой области вне пограничного слоя скорость выше, чем в набегающем потоке, и следовательно, температура в таких местах ниже, чем в набегающем потоке. Этим объясняется одно явление, иногда наблюдаемое лётчиками при пикировании. Оно состоит в том, что в момент пикирования с большой скоростью часть верхней поверхности крыла скрывается от глаз лётчика под пеленой молочного цвета. Как только лётчик выходит из пикирования, т. е. скорость резко снижается, пелена исчезает. Повидимому, при этом в слоях воздуха, имеющих повышенную скорость и пониженную температуру, происходит конденсация влаги, которая прекращается при выходе на меньшую скорость, т. е. при более высокой температуре.

Уравнение энергии для покоящегося газа имеет более простой вид, чем для потока. Если газ не течёт, то нет изменений кинетической и потенциальной энергий и не могут совершаться техническая работа и работа трения.

Рассмотрим элементарную работу сил давления в покоящемся газе, для чего разобьём её на две части:

$$d\left(\frac{P}{\gamma}\right) = d(pv) = v dp + p dv.$$

Одну из частей можно назвать работой проталкивания:

$$dL_{\text{п}} = v dp.$$

Она измеряет затраты энергии на перемещение заданного объёма газа (v) под влиянием перепада давления. Работа проталкивания в покоящемся газе равна нулю. Вторая часть представляет собой работу деформации

$$dL_{\text{д}} = p dv,$$

которая отражает затраты энергии на изменение объёма газа под действием заданного давления. В покоящемся газе работа деформации может совершаться.

На основании изложенного уравнение энергии для одного килограмма покоящегося газа имеет следующую форму:

$$dQ = du + Ap dv, \quad (33)$$

или в конечном виде:

$$Q = u_2 - u_1 + A \int_1^2 p dv. \quad (34)$$

Иначе говоря, *в покоящемся газе всё тепло, подводимое к газу, может расходоваться только на повышение запаса внутренней энергии и работу расширения (деформации).*

Следует отметить, что в случае перехода от неподвижной системы координат к системе, движущейся поступательно вместе с выбранным элементом газа, уравнение энергии имеет также форму (33) или (34), ибо относительно такой подвижной системы координат скорость потока равна нулю¹⁾.

§ 3. Предельная скорость движения газа. Критерий подобия

Рассматривая истечение газа при отсутствии энергетического обмена, нетрудно убедиться в том, что скорость истечения ни при каких условиях не может быть получена выше некоторой

¹⁾ Это заключение справедливо, если пренебречь работой переносной силы инерции.

максимальной величины. В самом деле, из соотношения

$$i_0 = i + A \frac{w^2}{2g}$$

следует, что максимальная скорость получается в том случае, когда теплосодержание в потоке равно нулю, т. е. когда полное теплосодержание газа целиком преобразуется в кинетическую энергию:

$$A \frac{w_{\max}^2}{2g} = i_0.$$

Отсюда получим формулу для максимального значения скорости в газе

$$w_{\max} = \sqrt{\frac{2gi_0}{A}}. \quad (35)$$

Соответствующая приближённая формула для воздуха, выведенная в предположении постоянства теплоёмкости ($c_p \approx 0,24$), имеет следующий вид:

$$w_{\max} \approx 44,8 \sqrt{T_0}.$$

Если температура торможения воздуха (температура в сосуде, из которого воздух вытекает) близка к нормальной ($T_0 \approx 300^\circ \text{ абс}$); то максимальная возможная скорость истечения $w_{\max} = 776 \text{ м/сек}$.

Увеличение максимального значения скорости может быть достигнуто только путём повышения температуры торможения (полного теплосодержания).

Для того чтобы перевести газ из состояния покоя в движение со скоростью w , необходимо израсходовать часть его теплосодержания, равную

$$A \frac{w^2}{2g} = i_0 - i.$$

Разделив обе части этого равенства на полное теплосодержание, получим:

$$\frac{i_0 - i}{i_0} = \frac{Aw^2}{2gi_0}.$$

При постоянной теплоёмкости это безразмерное выражение примет следующий вид:

$$\frac{T_0 - T}{T_0} = \frac{Aw^2}{2gc_p T_0}.$$

Если теперь умножить и разделить правую часть на газовую постоянную R , учесть соотношение $AR = c_p - c_v$ и обозначить отношение теплоёмкостей через $k = \frac{c_p}{c_v}$, то получится:

$$\frac{T_0 - T}{T_0} = \frac{w^2}{kgRT_0} \frac{k-1}{2}.$$

Но, как известно из физики, скорость звука в газе равна¹⁾:

$$a = \sqrt{kgRT} = \sqrt{\frac{kp}{\rho}} = \sqrt{\frac{d\rho}{d\rho}}. \quad (36)$$

Поэтому степень использования теплосодержания газа для получения заданного значения скорости потока определяется отношением скорости потока к скорости звука в неподвижном газе:

$$\frac{T_0 - T}{T_0} = \frac{w^2}{a_0^2} \cdot \frac{k-1}{2}.$$

Отсюда выводится новое выражение для максимальной скорости истечения ($T = 0$):

$$w_{\max} = a_0 \sqrt{\frac{2}{k-1}}. \quad (37)$$

Для воздуха ($k = 1,4$) получаем:

$$w_{\max} = 2,23 \cdot a_0,$$

т. е. максимальная скорость истечения воздуха не может превосходить скорости звука в неподвижном воздухе более, чем в 2,23 раза; при $k = 1,2$ максимальная скорость газа выше:

$$w_{\max} = 3,16 \cdot a_0.$$

Можно тепловой перепад разделить не на полное теплосодержание, а на теплосодержание в потоке, тогда получим:

$$\frac{T_0 - T}{T} = \frac{w^2}{kgRT} \cdot \frac{k-1}{2}.$$

В этом случае скорость потока оказывается отнесённой к скорости звука в потоке, а не в неподвижном газе:

$$\frac{T_0 - T}{T} = \frac{w^2}{a^2} \cdot \frac{k-1}{2}. \quad (38)$$

Отношение скорости потока к скорости звука в потоке обозначают буквой M :

$$M = \frac{w}{a}. \quad (39)$$

Число M характеризует степень преобразования теплосодержания в кинетическую энергию потока:

$$\frac{T_0 - T}{T} = \frac{k-1}{2} M^2.$$

¹⁾ Эта формула будет выведена в § 1 гл. III.

Число M является *основным критерием подобия*¹⁾ для газовых течений большой скорости.

Если $M < 1$, — течение газа называется *дозвуковым*, при $M > 1$ — *сверхзвуковым*.

Отсюда можно получить расчётную формулу для отношения температуры торможения к температуре в потоке как функцию числа M :

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2. \quad (40)$$

Нетрудно видеть, что максимальное значение числа M (при $T = 0$) равно бесконечности. Этот факт объясняется тем, что при достижении максимальной скорости вместе с абсолютной температурой обращается в нуль и скорость звука.

Поскольку скорость потока может быть как выше, так и ниже скорости звука, существует и такой режим, когда скорость потока равна скорости звука, т. е. $M = 1$. Этот режим называется *критическим*; ему соответствует значение температуры в потоке:

$$T_{кр} = T_0 \frac{2}{k+1}. \quad (41)$$

В воздухе ($k = 1,4$) критическая температура получается на 20% ниже температуры торможения. Само значение скорости звука для критического режима отличается от такового для заторможенного газа, но также является вполне определённым:

$$\frac{a_{кр}}{a_0} = \sqrt{\frac{T_{кр}}{T_0}}, \quad (42)$$

откуда

$$a_{кр} = a_0 \sqrt{\frac{2}{k+1}} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} gRT_0}. \quad (43)$$

В воздухе $a_{кр} = 0,913 a_0$, а так как при этом $R = 29,27$, то для a_0 мы получаем следующее значение:

$$a_0 = 20,1 \sqrt{T_0},$$

для $a_{кр}$ получается:

$$a_{кр} = 18,3 \sqrt{T_0}.$$

Отношение скорости потока к скорости звука в качестве критерия, характеризующего обтекание тел газом, фактически впервые применил русский учёный профессор Артиллерийской

1) Обоснование того, что число M является критерием подобия для газовых течений, можно найти, например, в курсе Фабрикант Н. Я., Аэродинамика, т. I, Гостехиздат, М., 1949.

академии Н. В. Маиевский ещё в 1868 г. ¹⁾ при изучении траектории полёта и воздушного сопротивления снарядов.

Можно характеризовать степень преобразования теплосодержания в кинетическую энергию ещё одним способом, поделив тепловой перепад на теплосодержание при критическом режиме:

$$\frac{T_0 - T}{T_{кр}} \approx \frac{i_0 - i}{i_{кр}} = \frac{w^2}{a_{кр}^2} \cdot \frac{k-1}{2}.$$

Отсюда с помощью равенства (41) получаем новую формулу для отношения температур в энергетически изолированном газовом течении:

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2. \quad (44)$$

Здесь принято обозначение

$$\lambda = \frac{w}{a_{кр}}. \quad (45)$$

Величину λ , измеряющую отношение скорости потока к критической скорости, будем именовать коэффициентом скорости. На критическом режиме ($w = w_{кр} = a_{кр}$) коэффициент скорости равен числу M : $\lambda_{кр} = M_{кр} = 1$. Максимальной скорости потока при $T = 0$ соответствует определённое максимальное значение коэффициента скорости:

$$\lambda_{max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}. \quad (46)$$

Для воздуха ($k = 1,4$) имеем: $\lambda_{max} = 2,45$. Для случая $k = 1,2$ соответственно: $\lambda_{max} = 3,31$.

Коэффициент скорости, как и число M , может считаться критерием подобия для газовых течений, характеризующим степень преобразования теплосодержания в кинетическую энергию.

Данному значению числа M соответствует совершенно определённое значение коэффициента скорости. Найдём формулу перехода от числа M к коэффициенту скорости:

$$M^2 = \frac{w^2}{a^2} = \frac{w^2}{a_{кр}^2} \cdot \frac{a_{кр}^2}{a_0^2} \cdot \frac{a_0^2}{a^2},$$

откуда на основании (41), (42) и (44) получаем:

$$M^2 = \frac{2}{k+1} \cdot \frac{\lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}, \quad (47)$$

¹⁾ Маиевский Н. В., Внешняя баллистика. СПб, 1870, см. также работу того же автора: О решении задач прицельной и навесной стрельбы, СПб, 1882.

или

$$\lambda^2 = \frac{\frac{k+1}{2} \cdot M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}. \quad (48)$$

В газовой динамике и теории реактивных двигателей применяются оба безразмерных числа (λ ; M). В одних случаях более простые соотношения получаются при использовании коэффициента скорости, а в других — числа M . На фиг. 4 представлены кривые $\lambda = f(M)$ для случаев $k = 1,4$ и $k = 1,2$.

Иногда масштабом скоростей служит максимальная скорость газа w_{\max} . В этих случаях безразмерное уравнение теплосодержания может быть представлено на основании (35) в следующем виде:

$$\frac{T_0 - T}{T_0} = \frac{w^2}{w_{\max}^2} = \Lambda^2.$$

Величину

$$\Lambda = \frac{w}{w_{\max}}$$

иногда называют безразмерной скоростью газа.

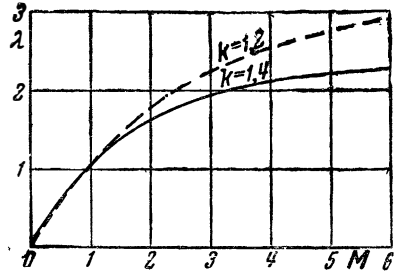
Зависимость отношения температуры в потоке к температуре торможения от безразмерной скорости выглядит так:

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \Lambda^2.$$

§ 4. Механическая форма уравнения энергии (уравнение Бернулли)

Выше мы подробно рассмотрели уравнение теплосодержания, представляющее собой тепловую форму уравнения энергии. Оно связывало температуру газа со скоростью движения с учётом энергетических воздействий (подвода тепла, технической работы и изменения потенциальной энергии). Такие факторы, как давление и удельный вес газа, в уравнение теплосодержания не входили.

Можно получить иную (механическую) форму уравнения энергии, куда, наоборот, не входит температура газа, а скорость движения связана с давлением и удельным весом. Запишем уравнение энергии для одного килограмма газа между



Фиг. 4. Зависимость коэффициента скорости от числа M .

двумя бесконечно близкими сечениями газовой струйки в неподвижной системе координат:

$$\frac{dQ}{A} - d(pv) - dL - dL_{\text{тр}} = \frac{du}{A} + d \frac{w^2}{2g} + dz \quad (49)$$

и в системе координат, движущейся с выбранным элементом газа [см. (33)]:

$$\frac{dQ}{A} = \frac{du}{A} + p dv, \quad (50)$$

и вычтем второе равенство из первого:

$$-dL - dL_{\text{тр}} = d \frac{w^2}{2g} + dz + d(pv) - p dv. \quad (51)$$

Подставляя выражение удельного объема через удельный вес ($v = \frac{1}{\gamma}$), получаем:

$$-dL = d \frac{w^2}{2g} + dz + \frac{dp}{\gamma} + dL_{\text{тр}}. \quad (52)$$

Это есть механическая форма уравнения энергии, или, что то же, уравнение живых сил для единичной струйки.

После интегрирования будем иметь:

$$-L = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + z_2 - z_1 + \int_1^2 \frac{dp}{\gamma} + L_{\text{тр}}. \quad (53)$$

Выведенное уравнение носит название *обобщённого уравнения Бернулли*. Оно выражает скорость движения в функции от давления и удельного веса газа с учётом производимой газом технической работы (L), изменения потенциальной энергии ($z_2 - z_1$) и работы сил трения ($L_{\text{тр}}$). В газовой динамике часто пользуются упрощённой формой уравнения Бернулли, соответствующей режиму, когда отсутствует техническая работа ($L = 0$), нет гидравлических потерь ($dL_{\text{тр}} = 0$) и запас потенциальной энергии не изменяется ($z_2 = z_1$). Для этого режима уравнение Бернулли запишется в следующей форме:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + \int_1^2 \frac{dp}{\gamma} = 0. \quad (54)$$

Уравнение Бернулли иногда используется в несколько ином виде. Для этого интеграл разбивается на две части:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\gamma} = \int_1^0 \frac{dp}{\gamma} + \int_0^2 \frac{dp}{\gamma} = \int_0^2 \frac{dp}{\gamma} - \int_0^1 \frac{dp}{\gamma}; \quad (55)$$

отсюда получается:

$$\frac{w_1^2}{2g} + \int_0^1 \frac{dp}{\gamma} = \frac{w_2^2}{2g} + \int_0^2 \frac{dp}{\gamma} = \frac{w^2}{2g} + \int_0^p \frac{dp}{\gamma} = \text{const.} \quad (56)$$

В этом случае вычисление интегралов ведётся каждый раз от абсолютного вакуума до давления, соответствующего заданной скорости потока. Постоянную этого уравнения можно получить, исходя из того, что при расширении газа до абсолютного вакуума достигается максимальная скорость потока.

Поэтому уравнению Бернулли можно придать следующий вид:

$$\frac{w^2}{2g} + \int_0^p \frac{dp}{\gamma} = \frac{w_{\text{max}}^2}{2g}. \quad (57)$$

В тех случаях, когда удельный вес газа на участке 1—2 элементарной струйки остаётся практически постоянным, интеграл уравнения Бернулли равен:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\gamma} = \frac{p_2 - p_1}{\gamma},$$

и уравнение Бернулли выглядит особенно просто:

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = 0,$$

или

$$\frac{p_2}{\gamma} + \frac{w_2^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{w_1^2}{2g}. \quad (58)$$

В такой форме оно применяется в гидравлике идеальной несжимаемой жидкости. Иногда уравнение Бернулли для идеальной несжимаемой жидкости записывается так:

$$p_2 + \gamma \frac{w_2^2}{2g} = p_1 + \gamma \frac{w_1^2}{2g}. \quad (59)$$

В первом случае оно составлено для 1 кг, а во втором — для 1 м³ жидкости. Кинетическую энергию 1 кг жидкости $\left(\frac{w_1^2}{2g}\right)$ называют *скоростной высотой*, а кинетическую энергию 1 м³ жидкости $\left(\gamma \frac{w_1^2}{2g}\right)$ — *скоростным напором*.

Если нельзя пренебречь технической работой, гидравлическими потерями и изменением потенциальной энергии, то уравнение Бернулли для 1 кг несжимаемой жидкости имеет такой вид:

$$-L = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + z_2 - z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + L_{\text{тр.}} \quad (60)$$

Посредством этого равенства можно вычислить, например, работу, которую отдаёт жидкость колесу турбины ($L > 0$), стоящему между сечениями 1 и 2, если все прочие члены этого уравнения известны.

Для того чтобы пользоваться уравнением Бернулли для сжимаемого газа, нужно заранее знать термодинамический процесс изменения состояния газа, так как без этого неизвестна зависимость удельного веса газа от давления и нельзя взять

интеграл $\int_1^2 \frac{dp}{\gamma}$, выражающий работу проталкивания. Вычислим

этот интеграл для основных термодинамических процессов.

При *изохорическом* процессе (постоянный объём, т. е. постоянный удельный вес), типичном для гидравлики капельных жидкостей, как уже указывалось, этот интеграл равен:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\gamma} = \frac{p_2 - p_1}{\gamma}. \quad (61)$$

В *изобарическом* процессе (постоянное давление) интеграл равен нулю:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\gamma} = 0. \quad (62)$$

Если осуществляется *изотермический* процесс (постоянная температура), то согласно уравнению состояния газа (8)

$$\frac{p}{\gamma} = RT = \text{const},$$

т. е. давление прямо пропорционально удельному весу газа:

$$\gamma = \gamma_1 \frac{p}{p_1},$$

откуда получается следующее выражение для интеграла:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma_1} \int_1^2 \frac{dp}{p} = \frac{p_1}{\gamma_1} \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (63)$$

Предположим теперь, что состояние газа изменяется по *идеальной адиабате*:

$$\frac{p}{\gamma^k} = \text{const},$$

тогда

$$\gamma = \gamma_1 \left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}},$$

и, следовательно, интеграл равен:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\gamma} = \frac{p_1^{\frac{1}{k}}}{\gamma_1} \int_1^2 \frac{dp}{\frac{1}{p^k}} = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\gamma_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]. \quad (64)$$

Наконец, в *политропическом* процессе с постоянным показателем политропы ($n = \text{const}$)

$$\frac{p}{\gamma^n} = \text{const}$$

получим следующее выражение для интеграла

$$\int_1^2 \frac{dp}{\gamma} = \frac{n}{n-1} \frac{p_1}{\gamma_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right]. \quad (65)$$

Следует отметить, что подводимое к газу тепло непосредственно не отражено в уравнении Бернулли. Однако оно учитывается при вычислении интеграла, так как влияет на вид функции $\gamma = f(p)$, т. е. на характер процесса, по которому изменяется состояние газа.

Наибольшее значение в газовой динамике имеет *идеальный адиабатический* процесс, который предполагает отсутствие теплового воздействия и работы сил трения. По этой причине при идеальной адиабате энтропия¹⁾ газа остаётся неизменной, т. е. такой процесс является идеальным термодинамическим—*изоэнтропическим*—процессом. Напомним, что далеко не всякий адиабатический процесс является идеальным. Например, при выводе уравнения теплосодержания мы показали, что наличие трения не нарушает адиабатичности процесса, но процесс с трением уже не может быть идеальным, так как он протекает с увеличением энтропии. Иначе говоря, адиабатичность процесса требует только отсутствия теплообмена с внешней средой, а не постоянства энтропии. Таким образом, адиабатичность совмещается с постоянством энтропии только в идеальном процессе. Если движение газа совершается в горизонтальной плоскости ($z_2 = z_1$) и нет технической работы ($L = 0$), а процесс является идеально адиабатическим, то уравнение Бернулли на основании (54) и (64) имеет следующий вид:

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\gamma_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] + \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2g} = 0. \quad (66)$$

Рассмотрим случай идеального торможения газовой струи, т. е. определим давление $p_2 = p_0$, которое получится, если ско-

¹⁾ См. ниже § 7.

рость течения изэнтропическим путём уменьшится от $\omega_1 = \omega$ (при этом $p_1 = p$, $\gamma_1 = \gamma$) до $\omega_2 = 0$. Уравнение Бернулли в этом случае даёт:

$$\frac{k}{k-1} \frac{p}{\gamma} \left[\left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] = \frac{\omega^2}{2g}, \quad (67)$$

откуда

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} \frac{\omega^2}{kg \frac{p}{\gamma}} \right)^{\frac{k}{k-1}};$$

выражение (36), связывающее скорость звука с параметрами состояния газа,

$$a = \sqrt{\frac{kp}{\rho}},$$

приводит к формуле для вычисления давления в идеально заторможенной газовой струе, в функции давления (p) и числа M перед торможением:

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (68)$$

Величина p_0 носит название *полного давления*. Как и температура торможения, полное давление является удобной характеристикой газового потока, так как оно связывает сразу два фактора: скорость и давление в потоке; последнее обычно называют *статическим давлением*. Итак, *отношение полного давления к статическому есть функция только числа M* .

Формулу (68) можно получить непосредственно из выражения (40) для температуры торможения:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2,$$

пользуясь пропорциями идеальной адиабаты:

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad (69)$$

$$\frac{p_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (70)$$

Отсюда же получается формула для вычисления плотности в идеально заторможенной газовой струе:

$$\frac{p_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (71)$$

С помощью функции (44), связывающей температуру торможения с коэффициентом скорости, находим из пропорции (69) зависимость полного давления от коэффициента скорости:

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (72)$$

Для плотности идеально заторможенного газа соответственно получим:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (73)$$

Нужно отметить, что истинное давление, которое получается при торможении струи газа, может существенно отличаться от полного давления, отвечающего состоянию газа перед торможением, т. е. определённого по формуле (68). Сбъясняется это тем, что в действительности торможение струи часто протекает не по идеальной адиабате, а с более или менее существенными гидравлическими потерями. Например, в диффузоре при дозвуковом течении газа уменьшение скорости обычно сопровождается вихреобразованиями, вносящими значительные сопротивления в газовый поток. При торможении сверхзвукового потока всегда образуются ударные волны, дающие специфическое «волновое» сопротивление. Итак, действительное давление в заторможенной струе газа обычно ниже полного давления набегающей струи.

Вообще, если на участке струи 1—2 наблюдаются потери, то это обязательно приводит к тому, что полное давление в сечении 2 ниже полного давления в сечении 1:

$$p_{02} < p_{01}.$$

Если ввести безразмерную величину, носящую название коэффициента давления:

$$\sigma = \frac{p_{02}}{p_{01}}, \quad (74)$$

то чем больше потери, тем ниже значение коэффициента давления и меньше полное давление в конце рассматриваемого участка струи:

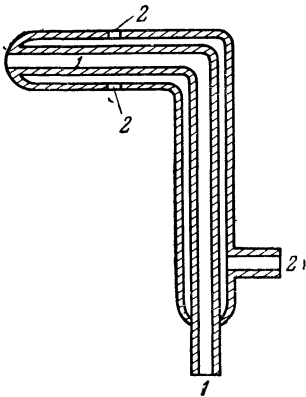
$$p_{02} = \sigma p_{01}. \quad (75)$$

Можно оценивать потери и по разности полных давлений:

$$\Delta p_0 = p_{01} - p_{02} = (1 - \sigma) p_{01}. \quad (76)$$

На применении уравнения Бернулли основан пневматический способ определения скорости потока, который состоит в том, что в поток вводится насадок (фиг. 5), состоящий из двух тру-

бок. Открытое отверстие одной из этих трубок (1) размещается в носовой части насадка (навстречу потоку), а отверстия второй трубки (2) расположены в боковой поверхности насадка (вдоль потока); при дозвуковой скорости замедления струи газа от встречи с насадком проходит без каких-либо потерь, так как трение и вихреобразования возникают уже на боковой поверхности насадка, т. е. после того, как струя минует область своего полного торможения, размещающуюся перед самым носиком насадка. По этой причине в первой трубке господствует давление, почти в точности равное полному давлению набегающего потока; во второй трубке, если её входное отверстие достаточно удалено от носика, устанавливается давление, близкое к статическому давлению потока. Трубки 1 и 2 сообщаются с манометром, измеряющим давление. Отношение измеренных давлений



Фиг. 5. Схема пневматического насадка.

$$\frac{P_0}{P} = \frac{P_1}{P_2}$$

даёт возможность по формуле (68) или (72) вычислить значения числа M или коэффициента скорости потока.

Расчёты по этим формулам достаточно точны только для дозвукового потока. Объясняется это тем, что при торможении сверхзвукового потока перед насадком возникает ударная волна, пересекая которую газы претерпевают значительные гидравлические потери. Поэтому давление в трубке 1 пневматического насадка при сверхзвуковом течении существенно отличается от полного давления набегающего потока, что делает формулы (68) и (72) в этом случае неприменимыми.

Нужно заметить, что пользоваться пневматическим насадком можно и для измерения сверхзвуковой скорости, но при этом следует применять специальные расчётные формулы, учитывающие волновое сопротивление. Такие формулы мы выведем в дальнейшем.

Итак предельное значение скорости, выше которого нельзя применять формулы (68) и (72) при торможении газового потока, равно скорости звука ($M = \lambda = 1$).

Для ускоряющегося газового потока этими формулами можно пользоваться и при сверхзвуковых скоростях, так как увеличение скорости происходит обычно без заметных потерь (изоэнтропически) не только в области $M < 1$, но и в случае $M > 1$,

т. е. полное давление в ускоряющейся газовой струе почти не меняется. В частности, по формулам (68) или (72) вычисляется *скорость истечения*. При этом в сосуде, где газ покоится, давление равно полному давлению вытекающей струи p_0 , а в выхлопном отверстии сопла — статическому давлению p . Из формулы (68) получим:

$$M^2 = \left[\left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \frac{2}{k-1}, \quad (77)$$

или из формулы (72):

$$\lambda^2 = \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \frac{k+1}{k-1}. \quad (78)$$

Отсюда определим скорость истечения ω :

$$\omega = aM,$$

где

$$a = a_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}} = a_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{2k}} \quad (79)$$

или

$$\omega = a_{кр} \cdot \lambda,$$

где

$$a_{кр} = a_0 \sqrt{\frac{2}{k+1}}. \quad (80)$$

Как нетрудно видеть, расчёт скорости истечения более удобно вести по коэффициентам скорости, чем по числам M . Точные значения скорости истечения немного ниже определяемых по формулам (77)–(80), так как некоторых потерь трения избежать нельзя, но погрешность этих формул обычно не больше 1–5%.

Кривые зависимости $\lambda = f\left(\frac{p_0}{p}\right)$ для случаев $k = 1,4$ и $k = 1,2$ представлены на фиг. 6.

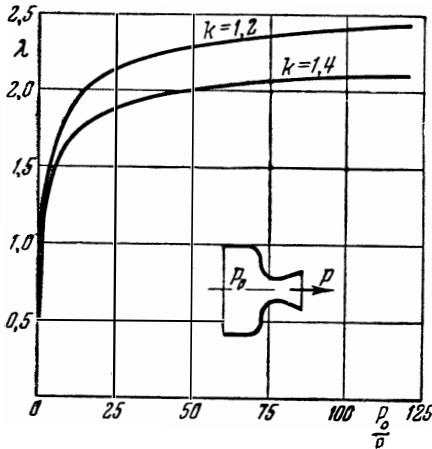
Исследуем с помощью уравнения Бернулли техническую работу компрессора и турбины. В компрессоре полное давление газа увеличивается:

$$p_{02} > p_{01},$$

а в газовой турбине падает:

$$p_{02} < p_{01}.$$

Коэффициент давления за компрессором соответственно больше единицы, а за турбиной — меньше единицы. Для большей наглядности предположим, что работа трения и изменение потенциальной энергии отсутствуют и изменение давления в машине идёт по изоэнтропическому закону. В этом случае уравнение Бернулли напишется так:



Фиг. 6. Зависимость коэффициента скорости истечения от отношения полного давления к статическому в выхлопном отверстии.

во (67), введём в выражение (81) полные давления перед и за машиной, исключив из него скорости:

$$\frac{k}{k-1} \left\{ \frac{p_2}{\gamma_2} \left[\left(\frac{p_{02}}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] - \frac{p_1}{\gamma_1} \left[\left(\frac{p_{01}}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] + \frac{p_1}{\gamma_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \right\} = -L,$$

откуда

$$\frac{k}{k-1} \left\{ \frac{1}{\gamma_2^{\frac{1}{k}}} \left(\frac{p_2}{p_{02}} \right)^{\frac{k-1}{k}} - \frac{p_2}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_1^{\frac{1}{k}}} \left(\frac{p_1}{p_{01}} \right)^{\frac{k-1}{k}} + \frac{p_1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_1^{\frac{1}{k}}} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - \frac{p_1}{\gamma_1} \right\} = -L;$$

но в идеальном адиабатическом процессе имеет место равенство

$$\frac{1}{\gamma_2^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{\gamma_1^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{\gamma_{01}^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{\gamma_{02}^{\frac{1}{k}}},$$

$$\begin{aligned} -L &= \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + \int_1^2 \frac{dp}{\gamma} = \\ &= \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + \\ &+ \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\gamma_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (81)$$

Компрессор или турбина, работающие в таких условиях, носят название *идеального компрессора* или *идеальной турбины*. Используя равенство

с помощью которого после несложных преобразований получается:

$$-L = \frac{k}{k-1} \frac{p_{01}}{\gamma_{01}} \left[\left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]. \quad (82)$$

Итак, в идеальном случае техническая работа может быть определена по изменению полных давлений без учёта конкретных значений скорости газа до и после машины. Работа, используемая газовой турбиной, является положительной ($p_{02} < p_{01}$), а подводимая компрессором — отрицательной ($p_{02} > p_{01}$).

Отклонение от идеального изэнтропического процесса в машине учитывается обычно с помощью дополнительного множителя, представляющего собой коэффициент полезного действия машины. В случае компрессора получим:

$$L_{\kappa} = \frac{L}{\eta_{\kappa}}. \quad (83)$$

В случае турбины

$$L_{\tau} = \eta_{\tau} L. \quad (84)$$

Отношение значений полного давления за и перед машиной

$$\pi = \frac{p_{02}}{p_{01}} \quad (85)$$

будем называть в дальнейшем *степенью повышения давления* (для компрессора) или *степенью понижения давления* (для турбины). Уравнение идеальной технической работы мы будем применять в следующем виде:

$$L = -\frac{k}{k-1} RT_{01} \left[\pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \text{ [кдж/кг]}. \quad (86)$$

Наиболее существенной особенностью технической работы является то, что её величина, как видно из выражения (86), прямо пропорциональна начальной температуре газа (при одном и том же отношении значений полного давления техническая работа, приходящаяся на 1 кг газа, изменяется в зависимости от температуры газа перед машиной). Это свойство технической работы лежит в основе рабочего процесса любой тепловой газовой машины. Например, в двигателе внутреннего сгорания всегда рабочее тело вначале сжимается, затем подогрывается и потом расширяется. В соответствии с изложенным работа, затраченная при сжатии холодного газа, меньше работы, которую он про изведёт после подогрева при расширении до первоначального давления. Из разности этих работ, собственно говоря, и получается полезная работа, совершаемая двигателем внутреннего сгорания.

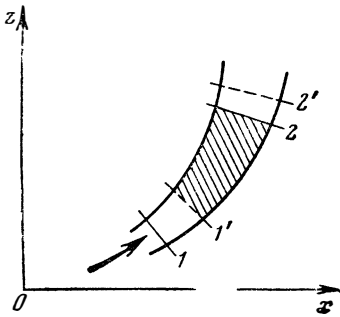
§ 5. Уравнение количества движения

Теорема об изменении количества движения—элементарное изменение количества движения равно элементарному импульсу силы—обычно представляется в виде

$$d(m\omega) = P d\tau, \quad (87)$$

где P —сумма проекций на какую-либо ось всех сил, приложенных к телу массы m , ω —проекция скорости на ту же ось, $d\tau$ —время действия силы P . В таком виде теорема об изменении количества движения используется в механике твёрдого тела.

Применительно к потокам жидкостей и газов более удобна несколько иная (гидродинамическая) форма теоремы об изменении количества движения, которую



Фиг. 7. Элементарная струйка.

получил впервые Эйлер. Выведем уравнение количества движения в гидродинамической форме. Для этого выделим элементарную струйку (фиг. 7) и проведём два нормальных к её оси сечения 1 и 2 . Разобьём всю массу жидкости, заключённую в объёме $1-2$, на большое число частей так, чтобы в пределах каждой из них, имеющей массу m , скорость движения ω можно было считать постоянной, и установим связь между проекциями сил и количества

движения на ось x . Согласно теореме об изменении количества движения (87) сумма проекций импульсов всех сил, приложенных к массе жидкости $1-2$, равняется изменению проекции суммарного количества движения:

$$P_x d\tau = d \sum m\omega_x. \quad (88)$$

Рассмотрим изменение суммарного количества движения $d \sum m\omega_x$ за время $d\tau$, в течение которого выделенная масса жидкости переместится из положения $1-2$ в положение $1'-2'$. Предположим, как это мы делали в предыдущих параграфах, что жидкость находится в установившемся движении, тогда количество движения массы $1'-2'$, входящее как в начальное, так и в конечное значение суммарного количества движения, остаётся неизменным и при вычитании сокращается. Иначе говоря, прирост суммарного количества движения должен быть равен разности количества движения, взятого соответственно для масс $2-2'$ и $1-1'$, которые в уста-

новившемся движении одинаковы:

$$d \sum m \omega_x = (\omega_{x2} - \omega_{x1}) dM.$$

Здесь dM — масса жидкости элемента $1-1'$ (или $2-2'$), ω_{x2} , ω_{x1} — проекции на ось x скорости потока в сечениях 2 и 1 . Элементарная масса dM равна произведению секундного весового расхода жидкости на промежуток времени $d\tau$, поделённому на ускорение силы тяжести:

$$dM = \frac{G}{g} d\tau.$$

Отсюда

$$d \sum m \omega_x = (\omega_{x2} - \omega_{x1}) \frac{G}{g} d\tau.$$

Величина $\frac{G\omega}{g}$, равная произведению массы, протекающей за 1 секунду через поперечное сечение, на скорость потока, носит название секундного количества движения.

Подставляя полученное выражение в исходное равенство (88), приходим к уравнению количества движения в гидродинамической форме (первому уравнению Эйлера), согласно которому сумма проекций всех сил приложенных к струе жидкости на любом её участке, равна приращению проекции секундного количества движения на этом участке, или, что то же. произведению секундной массы на приращение проекции скорости:

$$P_x = \frac{G}{g} (\omega_{x2} - \omega_{x1}). \quad (89)$$

Аналогичные уравнения можно составить и для двух других осей.

Применим уравнение количества движения к прямолинейной струйке постоянного сечения. Проведём торцевые части контрольной поверхности нормально к направлению потока, причём пусть образующая боковой поверхности струйки параллельна оси x . Скорость потока ω направлена в сторону положительной оси x . Составим баланс сил и количества движения в направлении потока. На контрольную поверхность действуют силы давления, нормальные к ней. Поэтому проекции на ось x сил давления, приложенных к боковой поверхности, равны нулю. Изменение давления на участке между торцевыми сечениями струйки даст силу, действующую на них (площадь сечений одинакова и равна F). Эта сила, параллельная оси x , равна $(p_1 - p_2) F$. К боковой поверхности приложена сила трения, направленная параллельно потоку, против него: $-P_{\text{тр}}$. Кроме того, между торцевыми сечениями струйки может находиться какая-либо машина, получающая от газа техническую работу.

Пусть проекция на направление движения силы, с которой действует машина на газ, равна $-P^1$). Итак сумма проекций всех сил равна:

$$P_x = (p_1 - p_2) F - P_{\text{тр}} - P.$$

По уравнению количества движения эта сила должна быть равна изменению количества движения:

$$(p_1 - p_2) \cdot F - P_{\text{тр}} - P = \frac{G}{g} (\omega_2 - \omega_1). \quad (90)$$

Если расстояние между сечениями 1 и 2 бесконечно мало, то уравнение количества движения нужно записать в дифференциальной форме:

$$\frac{G}{g} d\omega + F dp = -dP_{\text{тр}} - dP.$$

Умножив все члены этого уравнения на скорость движения и разделив на весовой расход газа, получим уравнение работы всех сил для цилиндрической струйки, отнесённое к 1 кг газа:

$$\frac{\omega d\omega}{g} + \frac{dp}{\gamma} = -\frac{\omega dP_{\text{тр}}}{G} - \frac{\omega dP}{G}.$$

Здесь использовано уравнение расхода в цилиндрической струйке:

$$\gamma\omega = \frac{G}{F} = \text{const}.$$

Нетрудно видеть, что стоящие в правой части члены представляют собой работу сил трения:

$$\frac{\omega}{G} dP_{\text{тр}} = dL_{\text{тр}}$$

и техническую работу:

$$\frac{\omega}{G} dP = dL.$$

Таким образом, уравнение количества движения для цилиндрической струйки газа легко преобразуется в уравнение Бернулли:

$$-dL = d\left(\frac{\omega^2}{2g}\right) + \frac{dp}{\gamma} + dL_{\text{тр}}. \quad (91)$$

В дальнейшем уравнение количества движения для цилиндрической струи газа мы будем применять в следующей форме:

$$dp + \rho\omega d\omega = -\frac{dP_{\text{тр}}}{F} - \frac{dP}{F}. \quad (92)$$

¹⁾ Проекция силы, приложенной газовым потоком к машине, считается положительной.

При отсутствии трения и силового воздействия газа на какую-либо машину дифференциальное уравнение количества движения приобретает особенно простой вид:

$$dp = -\rho\omega d\omega. \quad (93)$$

В интегральной форме уравнение количества движения для цилиндрической струйки напишется так:

$$p_2 - p_1 + \rho_1\omega_1(\omega_2 - \omega_1) = -\frac{P_{\text{тр}}}{F} - \frac{P}{F},$$

или при условии $P_{\text{тр}} = 0$ и $P = 0$:

$$p_2 - p_1 = \rho_1\omega_1(\omega_1 - \omega_2), \quad (94)$$

или

$$p + \rho\omega^2 = \text{const.}$$

Итак, в цилиндрической струйке давление может измениться даже в том случае, когда нет трения и технической работы. Для этого достаточно, чтобы изменялась скорость течения, что может быть достигнуто при подводе или отводе тепла. Например, при подогреве газа, в связи с уменьшением его плотности, скорость растёт ($\rho_1\omega_1 = \rho_2\omega_2$), а давление падает.

Важная особенность уравнения количества движения состоит в том, что с его помощью расчёт действующих сил производится только по состоянию потока на контрольной поверхности без проникновения в сущность процессов, происходящих внутри этой контрольной поверхности. Поэтому уравнение количества движения позволяет во многих случаях достаточно точно рассчитать гидродинамический процесс, не вникая в его детали.

Следует отметить, что эффективность использования уравнения количества движения зависит очень сильно от того, насколько удачно выбрана в потоке контрольная поверхность.

Рассмотрим несколько примеров применения уравнения количества движения.

Пример 1. Определим гидравлические потери в потоке несжимаемой жидкости при внезапном расширении канала (фиг. 8). Опыт показывает, что в этом случае струя, выходящая из узкой части канала, не заполняет вначале всего поперечного сечения широкого канала, а растекается постепенно. В углах между поверхностью струи и стенками образуются замкнутые токи жидкости, причём давление на торцевой стенке 1 по опытам оказывается почти равным статическому давлению на выходе из узкой части канала (p_1). При внезапном расширении канала наблюдается значительное гидравлическое сопротивление, т. е. происходит уменьшение полного давления в потоке. Если поместить сечение 2 в таком месте, где поток уже полностью выравнялся, т. е. статическое давление p_2 и скорость потока ω_2

по сечению постоянны, то потери равны разности полных давлений:

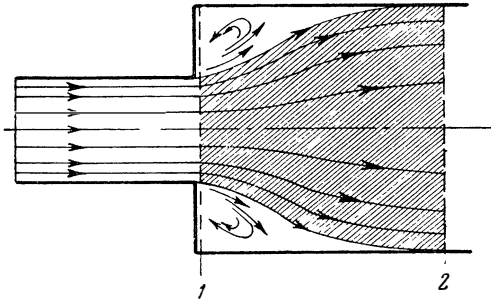
$$\Delta p_0 = p_{01} = p_{02}.$$

Полное давление p_0 в случае движения несжимаемой жидкости определяется совершенно аналогично тому, как это делалось для идеального адиабатического процесса в § 4, т. е. как давление в полностью заторможенной струе без потерь и в отсутствии технической работы; при $z = \text{const}$, согласно уравнению Бернулли для несжимаемой жидкости, имеем:

$$p_{01} = p_1 + \frac{\rho \omega_1^2}{2}.$$

Таким образом, для несжимаемой жидкости

$$\Delta p_0 = \left(p_1 + \frac{\rho \omega_1^2}{2} \right) - \left(p_2 + \frac{\rho \omega_2^2}{2} \right).$$



Фиг. 8. Схема потока при внезапном расширении канала.

Скорости ω_1 и ω_2 можно связать уравнением неразрывности

$$\omega_1 F_1 = \omega_2 F_2;$$

изменение статического давления ($p_1 - p_2$) заранее неизвестно, т. е. получается одно уравнение с двумя неизвестными. Дополнительно можно использовать уравнение количества движения. Учитывая, что участок растекания струи 1—2 имеет не слишком большую длину, силой трения обычно пренебрегают. Тогда уравнение количества движения можно применить в простейшей форме (94):

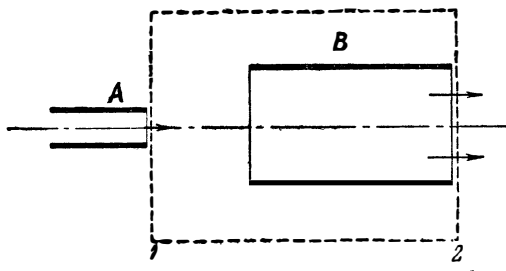
$$p_1 - p_2 = \rho \omega_2 (\omega_2 - \omega_1).$$

Здесь используется постоянство давления в сечении 1, что не является самоочевидным, но, как указано выше, подтверждается опытами. В отличие от уравнения Бернулли уравнение количества движения даёт возможность сразу определить разность значений статического давления, получающихся в потоке при внезапном расширении канала. Если этот результат подставить в уравнение Бернулли, то найдутся и потери полного давления при внезапном расширении канала:

$$\Delta p_0 = \rho \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{2}.$$

Следует обратить внимание на то, что применение уравнения количества движения принесло в данном случае успех благодаря удачному выбору контрольной поверхности $1-2$, на котором оказались известными основные действующие силы.

Пример 2. Произведём расчёт простейшего эжектора, состоящего из сопла A и цилиндрической смесительной трубы B , расположенных в пространстве, заполненном неподвижной жидкостью (фиг. 9). Из сопла подаётся струя, которая подсасывает жидкость из окружающего пространства. Пусть на выходе из смесительной трубы скорость и удельный вес смеси примерно постоянны. Построим контрольную поверхность из сечений 1 и 2 , проходящих нормально к потоку по срезу сопла и срезу смесительной трубы, и боковых поверхностей, направленных параллельно потоку. На всей контрольной поверхности господствует одно и то же давление покоящейся жидкости, т. е. главный вектор сил давления равен нулю.



Фиг. 9. Простейший эжектор.

Если пренебречь силой трения на стенках смесительной трубы, то окажется, что сумма проекций на ось x всех сил в пределах контрольной поверхности $1-2$ равна нулю, а следовательно, не должно быть изменения количества движения.

Изменение количества движения у активной струи на участке $1-2$

$$\frac{G_1}{g} (\omega_2 - \omega_1).$$

То же у жидкости, подсосанной из окружающего пространства, где она находилась в покое ($\omega = 0$):

$$\frac{G_2 - G_1}{g} (\omega_2 - 0),$$

откуда суммарное изменение количества движения

$$\frac{G_2 \omega_2}{g} - \frac{G_1 \omega_1}{g} = 0.$$

Здесь G_1 , G_2 — секундные весовые расходы жидкости соответственно в сопле и на выходе из смесительной трубы, ω_1 и ω_2 — значения скорости истечения из сопла и смесительной трубы.

Отсюда получаем, что расходы жидкости в сопле и на вы-

ходе из смесительной трубы обратно пропорциональны величинам соответственных скоростей:

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{w_1}{w_2}.$$

С другой стороны, из уравнения неразрывности

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{\gamma_2 w_2 F_2}{\gamma_1 w_1 F_1},$$

где γ — удельный вес, F — площадь сечения. Сравнивая последние два выражения, приходим к следующей расчётной формуле:

$$\frac{G_2}{G_1} = \sqrt{\frac{\gamma_2 F_2}{\gamma_1 F_1}}.$$

Если удельный вес жидкости в активной струе и в окружающем пространстве одинаков, то отношение весовых расходов жидкости равно отношению диаметров смесительной трубы и сопла:

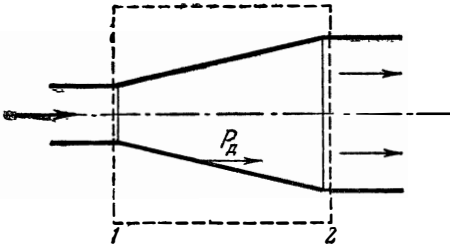
$$\frac{G_2}{G_1} = \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} = \frac{D_2}{D_1}.$$

Пример 3. Вычислим силу, действующую на стенки диффузора (фиг. 10) при отсутствии гидравлических потерь в потоке несжимаемой жидкости. Пусть давление и скорость в сечении 1 перед диффузором постоянны и равны p_1 , w_1 и в сечении 2 после диффузора также постоянны и равны p_2 , w_2 . Уравнение Бернулли, если нет потерь, даёт:

$$p_1 + \frac{\rho w_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho w_2^2}{2}.$$

Из уравнения неразрывности получаем:

$$w_1 F_1 = w_2 F_2 = \frac{G}{\gamma}.$$



Фиг. 10. Диффузор.

Проведём контрольную поверхность из поперечных сечений 1 и 2 и боковых поверхностей, расположенных параллельно потоку и охватывающих диффузор. Вследствие наклона стенок диффузора сумма проекций на ось x сил давления, приложенных от стенок к жидкости, не равна нулю ($P_d \neq 0$).

Сумма проекций всех сил на ось x получается путём сложения силы P_d с силами давления на торцевые сечения. Отсюда по уравнению количества движения получается:

$$P_d + p_1 F_1 - p_2 F_2 = \frac{G}{g} (w_2 - w_1).$$

Производя замену величин w_1 и p_2 с помощью уравнений неразрывности и Бернулли, приходим к следующему выражению для проекции на направление потока силы, действующей на поток от стенок диффузора:

$$P_d = p_1 (F_2 - F_1) + \frac{Gw_2}{2g} \left(\frac{F_2 - F_1}{F_1} \right)^2.$$

Пусть внешнее давление — p_n , тогда проекция на ось x силы внешнего давления на диффузор

$$P_{нар} = p_n (F_2 - F_1).$$

В итоге получаем следующее значение проекции на ось x результирующей силы, которая действует на стенки диффузора:

$$-P = P_d - P_{нар} = (p_1 - p_n) (F_2 - F_1) + \frac{Gw_2}{2g} \left(\frac{F_2 - F_1}{F_1} \right)^2.$$

В частном случае, когда внешнее давление одинаково с давлением в узком сечении диффузора, эта сила равна:

$$-P = \frac{Gw_2}{2g} \left(\frac{F_2}{F_1} - 1 \right)^2 = \frac{\gamma w_1^2}{2g} F_2 \left(1 - \frac{F_1}{F_2} \right)^2.$$

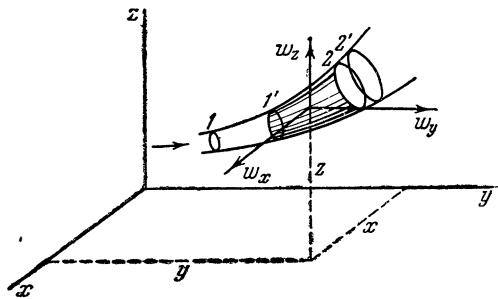
Последнее выражение применяется иногда при вычислении силы, действующей на входной диффузор воздушно-реактивного двигателя.

§ 6. Уравнение моментов количества движения

Как известно из механики, изменение суммарного момента количества движения относительно какой-либо оси например оси y , равно сумме моментов импульсов всех сил, приложенных к телу, относительно той же оси (фиг. 11):

$$d \sum m (w_x z - w_z x) = M_y d\tau. \quad (95)$$

Здесь $m w_z$, $m w_x$ — проекции количества движения некоторой элементарной массы m на оси z и x ; x , z — соответствующие координаты, $m (w_x z - w_z x)$ — момент количества движения элементарной массы m относительно оси y .



Фиг. 11. К выводу уравнения моментов количества движения.

Если движение жидкости является установившимся, то изменение суммарного момента количества движения жидкости,

перемещающейся за время $d\tau$ из объёма $1-2$ в объём $1'-2'$, равно разности моментов количества движения в элементарных объёмах $2-2'$ и $1-1'$:

$$d \sum m (\omega_{xz} - \omega_z x) = \frac{G}{g} [(\omega_{x_2 z_2} - \omega_{z_2 x_2}) - (\omega_{x_1 z_1} - \omega_{z_1 x_1})] d\tau, \quad (96)$$

где G — секундный расход жидкости. Объясняется это тем, что момент количества движения заштрихованной массы $1'-2$ при вычитании сокращается, так как движение жидкости предполагается установившимся.

Подставляя (96) в правую часть равенства (95), получим второе уравнение Эйлера, т. е. уравнение моментов количества движения в гидродинамической форме:

$$M_y = \frac{G}{g} [(\omega_{x_2 z_2} - \omega_{z_2 x_2}) - (\omega_{x_1 z_1} - \omega_{z_1 x_1})]. \quad (97)$$

Аналогичные уравнения могут быть составлены для осей z и x . Согласно второму уравнению Эйлера сумма моментов относительно любой оси всех сил, приложенных к жидкому объёму, равна разности моментов относительно той же оси секундных количеств движения выходящей и входящей жидкости.

Уравнение моментов количества движения приобретает более простую форму, если ввести полярные координаты¹⁾; в этом случае скорости раскладываются на радиальные и окружные слагающие, причём моменты радиальных слагающих количества движения равны нулю. Уравнение (97) при этом имеет вид

$$M = \frac{G}{g} (\omega_{u_2 r_2} - \omega_{u_1 r_1}), \quad (98)$$

где M — сумма моментов всех сил, приложенных к какому-либо жидкому объёму относительно начала координат.

Для случая движения по инерции ($M = 0$) получим известный закон площадей

$$\omega_u r = \text{const.} \quad (99)$$

§ 7. Энтропия

Согласно второму закону термодинамики при реальных необратимых процессах, протекающих в конечной изолированной системе, энтропия возрастает, а при обратимых — остаётся неизменной.

¹⁾ При этом движение предполагается плоскопараллельным, т. е. траектории частиц суть плоские кривые.

Математически прирост энтропии определяется так:

$$dS = \frac{dQ}{T};$$

здесь dS — прирост энтропии, dQ — полное количество тепла, подводимое как извне, так и изнутри (например, за счёт работы сил трения), T — абсолютная температура.

По первому закону термодинамики (33):

$$dQ = du + Ap dv.$$

В случае идеального газа имеем:

$$du = c_v dT;$$

отсюда с помощью уравнения состояния ($p v = RT$) получаем:

$$dS = \frac{dQ}{T} = c_v \frac{dT}{T} + AR \frac{dv}{v},$$

откуда, после замены

$$AR = c_p - c_v = (k - 1) c_v$$

и интегрирования, находим:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = c_v \ln \frac{T_2 v_2^{k-1}}{T_1 v_1^{k-1}},$$

или на основании уравнения состояния:

$$S_2 - S_1 = c_v \ln \frac{p_2 v_2^k}{p_1 v_1^k}. \quad (100)$$

Изменение энтропии в идеальном адиабатическом процессе, который является обратимым, равно нулю, так как в этом случае

$$p_2 v_2^k = p_1 v_1^k = p v^k = \text{const.}$$

Всякий реальный процесс для изолированной конечной системы протекает в таком направлении, что энтропия возрастает:

$$S_2 - S_1 > 0.$$

Для того чтобы убедиться в этом на примере идеального газа, перейдём в равенстве (100) от параметров потока к параметрам торможения, используя очевидное соотношение

$$p v^k = p_0 v_0^k$$

и выразив удельный объём через давление и температуру:

$$v_0 = \frac{RT_0}{p_0};$$

тогда получим:

$$S_2 - S_1 = -c_v (k - 1) \ln \frac{p_{02}}{p_{01}} \left(\frac{T_{01}}{T_{02}} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (101)$$

В изолированной системе температура торможения не изменяется:

$$T_{01} = T_{02}.$$

Разбивая подвод тепла на наружный и внутренний

$$dQ = dQ_{\text{нар}} + dQ_{\text{вн}}$$

и замечая, что в изолированной системе нет теплообмена с внешней средой

$$dQ_{\text{нар}} = 0,$$

получаем следующее выражение для изменения энтропии в изолированной системе:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ_{\text{вн}}}{T} = AR \ln \frac{p_{01}}{p_{02}}. \quad (102)$$

Ввиду того, что полное давление в газовом потоке за счёт потерь падает:

$$p_{02} < p_{01}$$

и соответственно тепло трения имеет всегда положительный знак:

$$dQ_{\text{вн}} > 0,$$

энтропия в изолированной системе либо увеличивается (необратимый процесс), либо при отсутствии потерь остаётся неизменной (обратимый процесс).

Вводя коэффициент давления, учитывающий гидравлические потери

$$\sigma = \frac{p_{02}}{p_{01}},$$

получим для энергоизолированного газового потока (без теплообмена и механической работы) прямую связь между гидравлическими потерями и приростом энтропии:

$$S_2 - S_1 = -AR \ln \sigma. \quad (103)$$

В теплоизолированном газовом потоке ($dQ_{\text{нар}} = 0$) без потерь ($dQ_{\text{вн}} = 0$) при совершении механической работы энтропия останется неизменной, несмотря на то, что полное теплосодержание газа изменяется:

$$-AL = i_{02} - i_{01} \neq 0.$$

В этом случае ($dQ_{\text{нар}} = dQ_{\text{вн}} = 0$) согласно выражению (101)

$$S_2 - S_1 = 0.$$

Тогда, в частности, в идеальном компрессоре и в идеальной турбине имеем:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

В реальных машинах энтропия изменяется. Пусть отличие реального процесса от идеального учитывается некоторым множителем (m):

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = m \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

отсюда изменение энтропии

$$S_2 - S_1 = -c_v (k-1) \ln(m). \quad (104)$$

Как в компрессоре, так и в турбине при теплоизолированном процессе ($dQ_{\text{нар}} = 0$) гидравлические потери выражаются в подводе тепла к газу ($dQ_{\text{вн}} > 0$), т. е. в обоих случаях этот множитель меньше единицы ($m < 1$)¹⁾. Поэтому в реальных турбомашинах энтропия возрастает ($S_2 - S_1 > 0$).

¹⁾ И в компрессоре и в турбине при заданных перепаде температур и начальном давлении конечное давление тем ниже, чем больше гидравлические потери.

ГЛАВА II

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ГИДРОДИНАМИКИ

§ 1. Циркуляция скорости. Вихрь

Введём некоторые положения гидродинамики идеальной жидкости, которыми мы будем пользоваться ниже. Для простоты ограничимся рассмотрением плоского установившегося движения жидкости. В установившемся плоском движении скорость частицы является функцией двух координат:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(x, y).$$

Здесь \boldsymbol{w} — вектор скорости. Эта векторная функция определяет поле скоростей.

При исследовании различных случаев газовых течений и, в частности, обтекания крыльев и иных тел полезно ввести некоторую величину, связанную с полем скоростей рассматриваемого течения и называемую *циркуляцией скорости*.

Под циркуляцией скорости Γ по замкнутому контуру L понимают интеграл

$$\oint_L \omega \cos(\boldsymbol{w}, \hat{l}) dl. \quad (1)$$

Здесь ω — величина вектора скорости, $(\boldsymbol{w}, \hat{l})$ — угол между вектором скорости и направлением контура в данной точке, dl — элемент длины дуги контура. Знак \oint показывает, что интеграл берётся по замкнутому контуру.

Таким образом, циркуляция скорости представляет собой предел суммы произведений тангенциальной к контуру проекции скорости на соответствующий элемент длины контура. Положительным направлением обхода на контуре будем считать направление обхода против часовой стрелки¹⁾.

Из самого определения циркуляции следует, что циркуляция по любому контуру L может быть выражена в виде суммы дир-

¹⁾ Иногда удобнее считать положительным противоположное направление.

куляций по отдельным клеткам произвольной сетки, покрывающей площадь, ограниченную контуром L (фиг. 12). В самом деле, рассмотрим некоторый замкнутый контур $ADCBA$. Пусть произвольная дуга AC разбивает область, ограниченную этим контуром, на две *клетки*: $ACBA$ и $ADCA$ (фиг. 13). Выразим циркуляцию для каждой клетки. Для первой клетки

$$\Gamma_{ACBA} = \oint_{(ACBA)} \omega \cos(\hat{\omega}, l) dl.$$

При этом интеграл по контуру $ACBA$ может быть разбит на два интеграла: интеграл по дуге CBA и по дуге AC . Для второй клетки

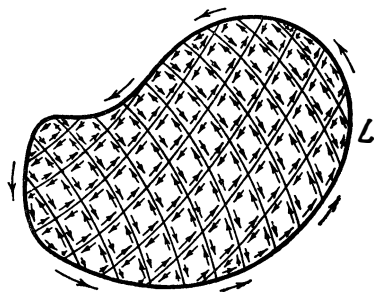
$$\Gamma_{ADCA} = \oint_{(ADCA)} \omega \cos(\hat{\omega}, l) dl.$$

Интеграл по этому контуру составляется из интегралов по дуге ADC и по дуге CA . Сумма циркуляций по контурам $ACBA$ и $ADCA$ равна сумме четырёх интегралов, причём интеграл по дуге AC , входящий в первую циркуляцию, и интеграл по дуге CA , входящий во вторую циркуляцию, взаимно уничтожаются, ибо они представляют интеграл по одной и той же дуге проходимой в противоположных направлениях (подинтегральная функция в обоих интегралах одна и та же). Поэтому сумма циркуляций по контурам $ACBA$ и $ADCA$ равна сумме интегралов по дугам CBA и ADC , т. е. интегралу по контуру $ADCBA$. Итак,

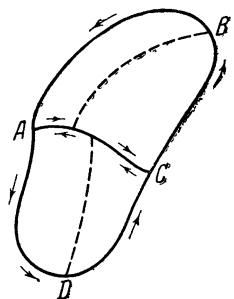
$$\Gamma_{ACBA} + \Gamma_{ADCA} = \Gamma_{ADCBA}.$$

Таким образом, *сумма циркуляций по контурам двух клеток равна циркуляции по всему контуру L* . Если каждую из клеток $ABCA$ и $ACDA$ разбить ещё на две клетки, то для каждой из них можно полностью повторить приведённое выше рассуждение. Продолжая процесс разбиения дальше и повторяя каждый раз такие же рассуждения, мы приходим к высказанному выше положению о суммировании циркуляций (см. фиг. 12).

Выразим теперь подинтегральное выражение в формуле (1) с помощью полярных координат (r, φ) . Для этого рассмотрим фиг. 14. Пусть $M(r, \varphi)$ — точка произвольного контура L ,



Фиг. 12. К суммированию циркуляции.



Фиг. 13. К суммированию циркуляции.

$dl = MN$ — элемент дуги этого контура, w — вектор скорости в точке M с проекциями w_r и w_u . Обозначим угол $(w, \hat{l}) = \angle NMP = \alpha$, $\angle PMK = \beta$, $\angle NMK = \gamma$. Из рисунка видно что

$$\alpha = \gamma - \beta.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \cos(w, \hat{l}) &= \\ &= \cos \alpha = \cos(\gamma - \beta) = \\ &= \cos \gamma \cos \beta + \sin \gamma \sin \beta. \end{aligned}$$

Но из малого криволинейного прямоугольного треугольника MNK получаем:

$$\cos \gamma = \frac{MK}{MN} = \frac{dr}{dl},$$

$$\sin \gamma = \frac{NK}{MN} = r \frac{d\varphi}{dl}.$$

Далее, очевидно, что

$$\cos \beta = \frac{w_r}{w}, \quad \sin \beta = \frac{w_u}{w}.$$

Фиг. 14. К определению связи между вихрем и циркуляцией.

Подставляя эти значения в выражение для $\cos(w, \hat{l})$, найдём:

$$\begin{aligned} \cos(w, \hat{l}) &= \frac{dr}{dl} \cdot \frac{w_r}{w} + \\ &+ \frac{r d\varphi}{dl} \cdot \frac{w_u}{w}. \end{aligned}$$

Тогда подинтегральное выражение в формуле (1) принимает вид

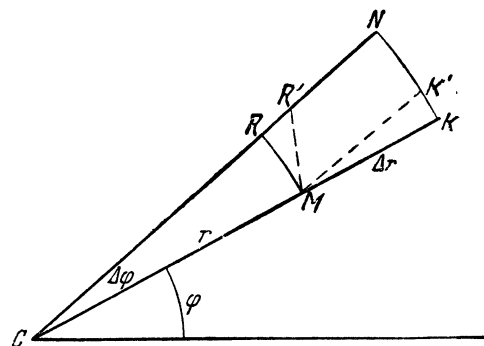
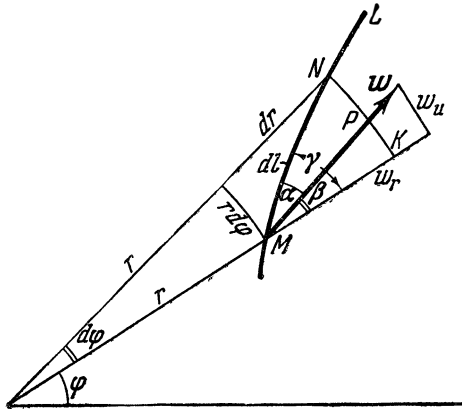
$$\begin{aligned} w \cos(w, \hat{l}) dl &= w dl \times \\ &\times \frac{w_r dr + w_u \cdot r d\varphi}{w dl} = \\ &w_r dr + w_u \cdot r d\varphi. \end{aligned}$$

Фиг. 15. К определению завихренности в полярных координатах.

Таким образом, в полярных координатах получаем следующую формулу для циркуляции скорости:

$$\Gamma = \oint_L w_r dr + w_u \cdot r d\varphi. \tag{2}$$

Элементарное перемещение частицы жидкости или газа в общем случае состоит из трёх частей: поступательного перемещения,



вращения частицы, т. е. завихренности, и деформации частицы. Движения, в которых вращение частиц отсутствует, называются безвихревыми, движения с вращением — вихревыми.

Введём величину, характеризующую завихренность двумерного газового потока и называемую *вихрем скорости*, и выразим вихрь скорости в полярных координатах. При движении жидкой частицы $MKNR$ (фиг. 15) с вращением форма её в общем случае изменяется. Пусть через малый промежуток времени Δt грани MR и MK займут положение MR' и MK' . Перемещение частицы в целом, определяемое поступательной скоростью, в данном вопросе не имеет значения. Определим угловые скорости вращения точек R и K относительно точки M . Если составляющие скорости в точке M обозначить через ω_r и ω_u , то составляющие скорости в точке K равны:

$$\omega_r + \frac{\partial \omega_r}{\partial r} \Delta r \quad \text{и} \quad \omega_u + \frac{\partial \omega_u}{\partial r} \Delta r,$$

а составляющие относительной скорости точки K (относительно точки M) — $\frac{\partial \omega_r}{\partial r} \Delta r$ и $\frac{\partial \omega_u}{\partial r} \Delta r$. Очевидно, вращение точки K относительно точки M создаёт только вторая из этих составляющих, так как первая перпендикулярна к направлению вращения (направлена по MK). Таким образом, окружная скорость вращения точки K относительно M , за счёт которой проделывается путь KK' , равна $\frac{\partial \omega_u}{\partial r} \Delta r$, а относительная угловая скорость вращения точки K около центра M равна:

$$\omega_K = \frac{\frac{\partial \omega_u}{\partial r} \Delta r}{\Delta r} = \frac{\partial \omega_u}{\partial r}.$$

Составляющие скорости в точке R равны (фиг. 16):

$$\omega_r + \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} \Delta \varphi$$

и

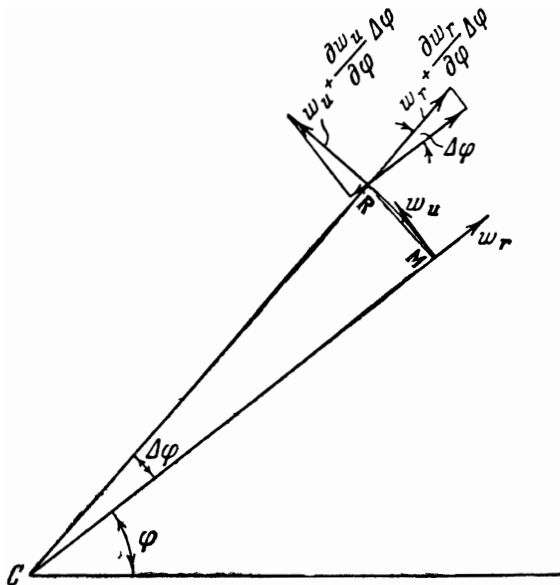
$$\omega_u + \frac{\partial \omega_u}{\partial \varphi} \Delta \varphi.$$

Вращение точки R относительно M происходит по направлению, перпендикулярному к хорде MR . В силу малости угла $\Delta \varphi$ можно считать хорду MR перпендикулярной к радиусу CM , а длину хорды MR — равной длине дуги MR . Тогда направление вращения точки R относительно M параллельно радиусу CM . Найдём проекции обеих составляющих скорости точки R на направление

вращения. Из фиг. 16 видно, что эти проекции соответственно равны

$$-\left(\omega_r + \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} \Delta \varphi\right) \cos \Delta \varphi \quad \text{и} \quad \left(\omega_u + \frac{\partial \omega_u}{\partial \varphi} \Delta \varphi\right) \sin \Delta \varphi.$$

Знак минус у первой проекции принят потому, что эта проекция создаёт вращение по часовой стрелке, а положительным считается вращение против часовой стрелки. Считая приближённо



Фиг. 16. К определению приращений скорости в полярных координатах.

$\cos \Delta \varphi \approx 1$ и $\sin \Delta \varphi \approx \Delta \varphi$ и отбрасывая член второго порядка малости, имеющий множителем $(\Delta \varphi)^2$, получим следующие значения рассматриваемых проекций:

$$-\left(\omega_r + \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} \Delta \varphi\right)$$

и

$$\omega_u \Delta \varphi.$$

Чтобы получить окружную скорость вращения точки R относительно M , из полученных выражений нужно, очевидно, вычесть проекции составляющих скорости в самой точке M на то же направление CM . Но проекция w_r на CM равна самой величине w_r , а проекция w_u на CM равна нулю. Таким образом, окружная

скорость точки R относительно M , за счёт которой проделывается путь RR' (фиг. 15), выражается так:

$$\omega_u \Delta\varphi - \left(\omega_r + \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} \Delta\varphi - \omega_r \right),$$

откуда относительная угловая скорость вращения точки R около центра M равна:

$$\omega_R = \frac{\omega_u \Delta\varphi - \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} \Delta\varphi}{RM} = \frac{\omega_u}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi},$$

так как

$$RM \approx r \Delta\varphi.$$

За среднюю угловую скорость частицы относительно точки M , характеризующую завихренность потока в точке M , принимают среднюю арифметическую угловых скоростей *крайних* точек R и K :

$$\omega_{cp} = \frac{\omega_K + \omega_R}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_u}{\partial r} + \frac{\omega_u}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} \right).$$

Это выражение удобно преобразовать к виду

$$\omega_{cp} = \frac{1}{2r} \left(r \frac{\partial \omega_u}{\partial r} + \omega_u - \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{2r} \left[\frac{\partial (\omega_u r)}{\partial r} - \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} \right]. \quad (3)$$

Оно представляет собой выражение *вихря скорости в полярных координатах*.

В гидродинамике доказывается, что установившиеся движения идеальной жидкости бывшие безвихревыми в некоторый момент времени, всегда остаются безвихревыми. Если же движение было в некоторый момент вихревым, оно всегда будет вихревым. Возникновение вихрей должно быть вызвано специальными причинами, например вязкостью газа или жидкости.

Условие отсутствия вихрей имеет, очевидно, следующий вид:

$$\omega_{cp} = 0, \quad (4)$$

т. е.

$$\frac{\partial (\omega_u r)}{\partial r} - \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} = 0. \quad (5)$$

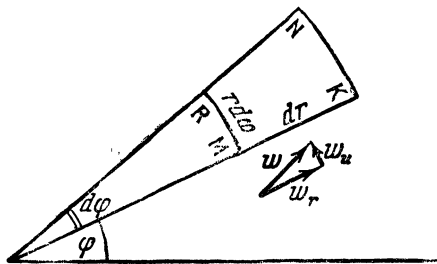
Дифференциальное уравнение (5) выражает собой условие отсутствия вихрей в полярных координатах.

Чтобы выяснит связь между понятиями вихря и циркуляции скорости, преобразуем подинтегральное выражение в формуле (2) к другому виду. Рассмотрим элементарную площадку $MKNR$, ограниченную координатными линиями MK , RN , MR и KN (фиг. 17).

Составим подинтегральное выражение для циркуляции по контуру $MKNR$. Очевидно, получим:

$$d\Gamma = \omega_r dr + \left(\omega_u + \frac{\partial \omega_u}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\varphi - \left(\omega_r + \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} d\varphi \right) dr - \omega_u r d\varphi.$$

Здесь: ω_r — тангенциальная проекция скорости на отрезке $MK = dr$, $\omega_u + \frac{\partial \omega_u}{\partial r} dr$ — тангенциальная проекция скорости на дуге



Фиг. 17. К определению циркуляции в полярных координатах.

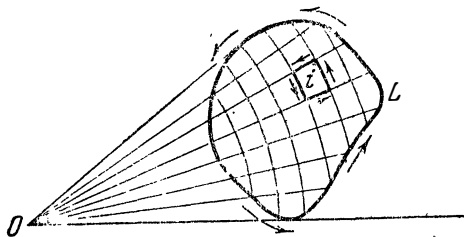
$KN = (r + dr) d\varphi$, $\omega_r + \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} d\varphi$ — тангенциальная проекция скорости на отрезке $NR = dr$ и ω_u — тангенциальная проекция скорости на дуге $RM = r d\varphi$.

У последних двух членов принят знак минус потому, что положительное направление скорости на отрезке NR и на дуге RM противоположно направлению обхода по контуру $MKNR$. Производя

выкладки и отбрасывая член третьего порядка малости $\frac{\partial \omega_u}{\partial r} (dr)^2 d\varphi$, получим:

$$d\Gamma = \left(r \frac{\partial \omega_u}{\partial r} + \omega_u - \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} \right) dr d\varphi,$$

что можно записать в таком виде:



Фиг. 18. К суммированию циркуляции и завихренности.

$$d\Gamma = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r\omega_u)}{\partial r} - \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} \right] r d\varphi dr.$$

Сравнивая это выражение с выражением (3) для вихря скорости ω и замечая, что произведение $r d\varphi dr$ представляет собой элементарную площадь dF , охватываемую контуром $MKNR$, запишем последнее выражение в такой форме:

$$d\Gamma = 2\omega dF.$$

Если теперь разбить площадь, охватываемую произвольным контуром L , на элементарные площадки, образованные сеткой координатных линий (фиг. 18), и использовать правило сумми-

рования циркуляций, то получим:

$$\Gamma_L = \sum d\Gamma_i = \sum 2\omega_i dF_i,$$

или, если перейти от сумм к интегралам:

$$\Gamma = \oint_L \omega_r dr + \omega_u r d\varphi = 2 \int_{(F)} \omega dF. \quad (6)$$

Полученный результат и выражает искомую связь между вихрем скорости и циркуляцией¹⁾. Если величина вихря одинакова во всех точках: $\omega = \omega_0 = \text{const}$, то

$$\Gamma = 2\omega_0 \int_{(F)} dF = 2\omega_0 F,$$

т. е. в этом случае величина циркуляции по некоторому контуру равна удвоенному произведению величины вихря на площадь, охватываемую контуром.

Рассмотрим установившееся движение жидкости. Циркуляция Γ при установившемся движении сохраняет постоянное значение по всякому неподвижному замкнутому контуру²⁾.

Предположим далее, что движение является установившимся и безвихревым ($\omega = 0$). В этом случае циркуляция по любому неподвижному контуру равна нулю. Последнее заключение, однако, верно лишь в том случае, если внутри неподвижного контура находятся только частицы жидкости, совершающие безвихревое движение. Циркуляция по неподвижному замкнутому контуру отлична от нуля, если контур охватывает область, внутри которой находится, например, одиночный вихрь³⁾ или обтекаемое тело⁴⁾.

Таким образом, мы видим, что возникновение циркуляции всегда связано с образованием вихрей в потоке жидкости или газа.

¹⁾ Формула (6) выражает для плоского движения теорему Стокса (см., например, Фабрикант Н. Я., Аэродинамика. Гостехиздат, М., 1949).

²⁾ В гидродинамике доказывается для весьма широкого класса практически важных движений, что и в случае неустановившегося движения циркуляция по замкнутому контуру постоянна, однако в этом случае рассматривается так называемый жидкий контур, т. е. контур, состоящий из одних и тех же частиц. Последнее утверждение называется теоремой Томпсона. Из этой теоремы следует, что если некоторая масса жидкости в начальный момент времени имела безвихревое движение или покоилась, то и впредь в этой части жидкости не возникнет вихрей, о чём уже упоминалось выше (см. также учебник Н. Я. Фабриканта, цитированный выше, в первой сноске).

³⁾ Об одиночном вихре см. ниже—пример 2.

⁴⁾ Как будет показано ниже, при обтекании тела вязкой жидкостью в потоке образуются вихри.

Рассмотрим теперь некоторые простейшие примеры движения жидкости, которые позволяют выяснить физический смысл понятий вихря и циркуляции.

Пример 1. Вращение жидкости как твёрдого тела. Пусть жидкость вращается как твёрдое тело вокруг начала координат с постоянной угловой скоростью ε . Тогда величина скорости в каждой точке $\omega = \varepsilon r$, где r — расстояние точки от начала координат. Найдём радиальную и окружную составляющие скорости. Ясно, что в данном случае

$$\omega_r = 0, \quad \omega_u = \omega = \varepsilon \cdot r.$$

Составим выражение для вихря скорости. По формуле (3)

$$\omega = \frac{1}{2r} \left[\frac{\partial(r\omega_u)}{\partial r} - \frac{\partial\omega_r}{\partial\varphi} \right] = \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2\varepsilon) = \varepsilon.$$

Величина вихря скорости во всех точках одинакова и равна постоянной угловой скорости вращения частиц жидкости. Этот результат был заранее очевиден, ибо он непосредственно следует из самого определения вихря.

Найдём теперь величину циркуляции по контуру, окружающему начало координат. В качестве такого контура возьмём окружность радиуса r . Из формулы (2) получим:

$$\Gamma = \oint_L \omega_r dr + \omega_u r d\varphi = \int_0^{2\pi} \varepsilon r \cdot r d\varphi = 2\pi\varepsilon r^2.$$

Величина циркуляции пропорциональна квадрату радиуса. Разделив её на площадь круга F , найдём:

$$\frac{\Gamma}{F} = \frac{2\pi\varepsilon r^2}{\pi r^2} = 2\varepsilon = 2\omega$$

или

$$\Gamma = 2\omega F.$$

Это равенство иллюстрирует теорему Стокса (6); в данном случае величина циркуляции по окружности равна удвоенному произведению постоянной величины вихря ω на площадь круга.

Пример 2. Безвихревое циркуляционное движение. В качестве второго примера рассмотрим такое плоское движение жидкости, когда частицы жидкости движутся по концентрическим окружностям вокруг начала координат со скоростями, обратно пропорциональными расстояниям частиц от начала координат, так что скорость в каждой точке $\omega = \frac{c}{r}$, где c — постоянная. Здесь радиальная и окружная составляющие скорости равны:

$$\omega_r = 0, \quad \omega_u = \omega = \frac{c}{r}.$$

Найдём величину вихря:

$$\omega := \frac{1}{2r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r\omega_u) - \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} \right] = \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{c}{r} \right) = 0.$$

Таким образом, величина вихря во всех точках, кроме начала координат, равна нулю. В начале координат ($r=0$) скорость равна бесконечности, т. е. начало координат математически является особой точкой. Физически такое движение возможно лишь вне некоторого ядра конечного радиуса r_0 . Ядро может состоять из твёрдого тела или из жидкости другой или той же плотности. Вне ядра течение является безвихревым. На поверхности ядра скорость имеет некоторую конечную величину

$$\omega_0 = \frac{c}{r_0}.$$

Найдём значение циркуляции по окружности с центром в начале координат:

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} \frac{c}{r} \cdot r \, d\varphi = 2\pi c = \text{const};$$

в данном случае циркуляция по любой окружности есть величина постоянная. Так как $\omega = \frac{c}{r}$, то можно записать:

$$\Gamma = 2\pi c = 2\pi r\omega = \text{const} = 2\pi r_0\omega_0,$$

где r_0 — радиус ядра, а ω_0 — скорость на его поверхности¹⁾. Таким образом, скорость в любой точке

$$\omega = \frac{r_0\omega_0}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

Рассмотренное движение жидкости носит название *безвихревого циркуляционного движения*, а соответствующее ему поле скоростей называется *полем скоростей плоского изолированного вихря*. Если считать жидкость несжимаемой, то давление

$$p = \text{const} - \frac{\rho\omega^2}{2} = \text{const} - \rho \frac{r_0^2\omega_0^2}{2r^2}$$

убывает с уменьшением расстояния от начала координат, т. е. от центра вихря.

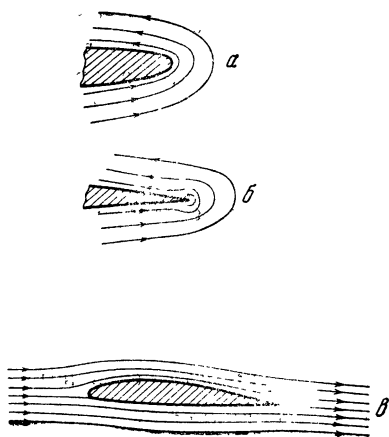
При $r_0 \rightarrow 0$ ядро переходит в точку. Эту точку называют точечным изолированным вихрем. Поэтому безвихревое циркуляционное движение можно связать с точечным вихрем; последний индуцирует в каждой точке плоскости скорость, перпенди-

¹⁾ Как нетрудно показать, циркуляция по любому замкнутому контуру, не охватывающему ядро, равна нулю, т. е. ядро играет роль вихря.

кулярную к отрезку, соединяющему эту точку с вихрем, и равную по величине $\frac{\Gamma}{2\pi r}$, где r — длина указанного отрезка, т. е. индуцирует безвихревое циркуляционное движение с циркуляцией Γ .

Отметим теперь одно важное явление, относящееся к обтеканию тел потоком идеальной жидкости. Если контур обтекаемого

тела имеет участок, представляющий собой дугу с малым радиусом закругления (фиг. 19, а), то часть потока вблизи этой дуги походит на циркуляционное движение: скорость увеличивается по мере приближения к контуру дуги и при достаточно малых радиусах закругления может стать очень большой. При некотором (достаточно малом) радиусе закругления скорость должна быть столь велика, что давление (вычисляемое по уравнению Бернулли для несжимаемой жидкости) должно стать отрицательным, что невозможно. Когда радиус закругления равен нулю, т. е. когда жидкость обтекает острую кромку (угловую точку контура, фиг. 19, б).



Фиг. 19. Схема обтекания закруглённых и острых кромок.

скорость обращается в бесконечность точно так же, как в центре вихря, индуцирующего циркуляционное движение. Но бесконечно большая скорость требует нереального бесконечного отрицательного давления. Поэтому бесконечно большая скорость невозможна, следовательно, невозможно безотрывное обтекание острых кромок, и происходит срыв струй¹⁾. Единственно возможным случаем безотрывного обтекания тела с острой кромкой (крылового профиля) потоком идеальной несжимаемой жидкости является случай, изображённый на фиг. 19, в: здесь острая кромка лежит на линии раздела потоков, обтекающих верхнюю и нижнюю стороны профиля, и струи жидкости плавно сходят к контура тела.

В реальной жидкости, обладающей вязкостью, при срыве струй из завихренных частиц пограничного слоя образуется вихрь, который как бы «округляет» острую кромку, и струи жидкости обтекают уже не острую кромку, а этот вихрь.

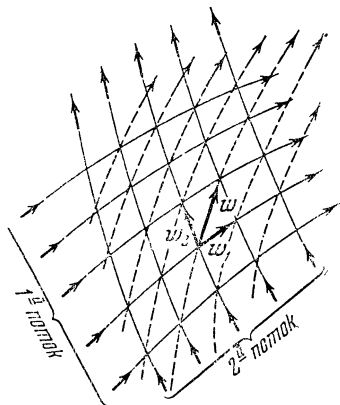
¹⁾ В дальнейшем будет показано, что в сверхзвуковом потоке газа возможно безотрывное обтекание острой кромки, при этом скорость нигде не обращается в бесконечность.

§ 2. О сложении потоков идеальной жидкости

В дальнейшем нам придётся складывать потоки идеальной жидкости. Опишем правила сложения таких потоков. Если известны два каких-либо плоскопараллельных установившихся течения идеальной несжимаемой жидкости, т. е. для каждого из этих течений известны величина и направление скорости в каждой точке плоскости, то можно построить новое результирующее течение, которое представит результат *наложения* этих двух известных течений. Для этого в каждой точке плоскости нужно построить векторы скорости каждого из двух известных течений и найти вектор скорости нового течения как геометрическую сумму этих векторов.

Дадим простой способ графического определения линий тока результирующего потока по линиям тока накладываемых потоков. Для этого нанесём на чертёж линии тока двух каких-либо плоских потоков (фиг. 20). Пересечение этих линий тока образует *сетку*. Линии тока надо вычертить так, чтобы стороны клеток этой сетки изображали в определённом масштабе векторы скорости накладываемых потоков в данной точке¹⁾. Тогда для получения линий тока результирующего потока достаточно соединить между собой последовательные точки пересечения линий тока накладываемых потоков, т. е. провести *диагональ* в каждой клетке сетки. Эти диагонали изображают в том же масштабе векторы скорости результирующего потока в соответствующих точках (фиг. 20).

В качестве примера сложения плоскопараллельных потоков рассмотрим поле скоростей, которое создаёт бесконечная цепочка точечных вихрей одинаковой интенсивности, расположенных на одной прямой, называемой осью цепочки, на равных расстояниях друг от друга²⁾ (фиг. 21). Обозначим расстояние между двумя соседними вихрями цепочки через t и будем считать, что каждый вихрь индуцирует циркуляционное движение с



----- Результирующий поток

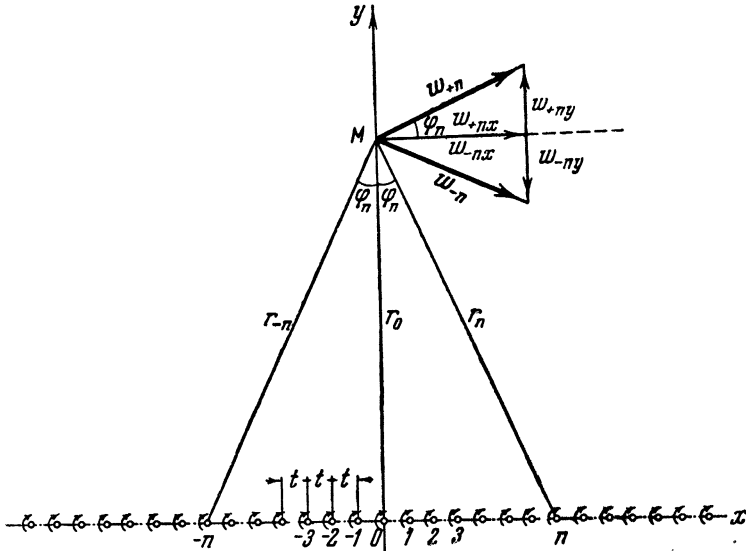
Фиг. 20. Графическое сложение потоков.

¹⁾ Легко показать, что для выполнения этого условия достаточно провести линии тока так, чтобы расход между любыми двумя соседними линиями тока для обоих потоков был одинаковым.

²⁾ Излагаемый ниже расчёт цепочки принадлежит С. Л. Вишневецкому.

положительной¹⁾ циркуляцией Γ . Скорость в каждой точке плоскости представляет собой геометрическую сумму скоростей, индуцируемых в этой точке каждым вихрем.

Совместим начало координат с одним из вихрей цепочки, ось x направим по оси цепочки вправо, а ось y — перпендикулярно к ней вверх. Вихрь, расположенный в начале координат, будем считать имеющим номер 0, вихри справа от него зану-



Фиг. 21. Бесконечная цепочка точечных вихрей.

меруем: 1, 2, 3, ..., n , ..., а вихри слева от него занумеруем: $-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$

Рассмотрим произвольную точку M на оси y . Расстояние от этой точки до каждого из вихрей цепочки обозначим буквой r с соответствующим индексом. Тогда скорость, индуцируемая в точке M вихрем с номером n , равна

$$\omega_n = \frac{\Gamma}{2\pi r_n}. \quad (7)$$

Вектор скорости, индуцируемой каждым вихрем, перпендикулярен к отрезку r_n , соединяющему точку M с этим вихрем. Рассмотрим скорости, индуцируемые двумя вихрями с номерами n и $-n$, расположенными симметрично относительно начала координат. Вследствие симметрии для этих вихрей $r_n = r_{-n}$. Из ри-

¹⁾ Здесь и в дальнейшем положительным считается вращение по часовой стрелке.

сунка видно, что векторы скорости w_{+n} и w_{-n} симметричны относительно прямой, проведённой через точку M параллельно оси x . Поэтому проекции этих векторов на ось x равны по величине и по знаку, а их проекции на ось y равны по величине, но противоположны по знаку. Таким образом, для каждой пары симметричных относительно начала координат вихрей имеем:

$$\begin{aligned} \omega_{nx} &= \omega_{-nx}, \\ \omega_{ny} &= -\omega_{-ny}, \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \omega_{+nx} + \omega_{-nx} &= 2\omega_{nx}, \\ \omega_{+ny} + \omega_{-ny} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Для вихря с номером 0:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{0x} = \omega_0 &= \frac{\Gamma}{2\pi r_0}, \\ \omega_{0y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Вычислим теперь сумму проекций на оси x и y скоростей, индуцируемых в точке M всеми вихрями цепочки. Используя (8) и (9), получим:

$$\begin{aligned} \omega_y &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \omega_{ny} = \omega_{0y} + (\omega_{1y} + \omega_{-1y}) + (\omega_{2y} + \omega_{-2y}) + \dots + \\ &\quad + (\omega_{+ny} + \omega_{-ny}) + \dots = 0, \\ \omega_x &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_{nx} = \omega_{0x} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{nx}, \end{aligned} \quad (10)$$

но

$$\omega_{nx} = \omega_n \cos \varphi_n, \quad (11)$$

где φ_n — угол между вектором w_n и осью x , равный углу между отрезками r_0 и r_n . Таким образом, $\cos \varphi_n = \frac{r_0}{r_n}$; расстояние от начала координат до вихря с номером n равно nt . Поэтому

$$r_n^2 = r_0^2 + n^2 t^2. \quad (12)$$

Из (7), (11) и (12) получаем:

$$\omega_{nx} = \frac{\Gamma}{2\pi r_n} \cdot \frac{r_0}{r_n} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{r_0}{r_0^2 + n^2 t^2}. \quad (13)$$

Подставляя (9) и (13) в (10), находим:

$$\omega_x = \frac{\Gamma}{2\pi r_0} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{r_0}{r_0^2 + n^2 t^2} = \frac{\Gamma}{2\pi r_0} + \frac{\Gamma r_0}{\pi t^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{r_0}{t}\right)^2 + n^2}.$$

Бесконечная сумма

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{r_0}{t}\right)^2 + n^2}$$

приближённо равна интегралу

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{r_0}{t}\right)^2 + n^2} dn,$$

который может быть вычислен:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{r_0}{t}\right)^2 + n^2} \approx \int_0^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{r_0}{t}\right)^2 + n^2} dn = \left[\frac{t}{r_0} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{nt}{r_0} \right]_{n=0}^{n=\infty} = \frac{t}{r_0} \cdot \frac{\pi}{2} \quad 1).$$

Подставляя найденное значение в выражение для ω_x , получим:

$$\omega_x \approx \frac{\Gamma}{2\pi r_0} + \frac{\Gamma r_0}{\pi t^2} \cdot \frac{t}{r_0} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\Gamma}{2t} \left(1 + \frac{t}{\pi r_0} \right).$$

Ранее мы получили: $\omega_y = 0$.

Таким образом, в точке $M(0, r_0)$ скорость, индуцируемая всеми вихрями цепочки, параллельна оси цепочки и имеет величину

$$\omega \approx \frac{\Gamma}{2t} \left(1 + \frac{t}{\pi r_0} \right).$$

Так как цепочка вихрей бесконечна, то за ось y можно принять вертикальную прямую, проходящую через любой из вихрей цепочки, т. е. любую вертикаль с абсциссой $x = \pm kt$, где k — целое число. Поэтому предыдущая формула даёт приближённо величину скорости во всех точках плоскости с координатами $(\pm kt, r_0)$, где k — целое, а r_0 — любое число; чтобы от-

1) Точное значение этой суммы равно:

$$\frac{t}{2r_0} \left[\pi \frac{e^{\frac{\pi r_0}{t}} + e^{-\frac{\pi r_0}{t}}}{e^{\frac{\pi r_0}{t}} - e^{-\frac{\pi r_0}{t}}} + \frac{t}{r_0} \right] = \frac{t}{r_0} \cdot \frac{\pi}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi r_0}{t} + \frac{t^2}{2r_0^2}.$$

(См., например, Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 2-е изд., Гостехиздат, М., 1948.)

метить это обстоятельство, перепишем предыдущую формулу в виде ¹⁾

$$w_{kt} \approx \frac{\Gamma}{2t} \left(1 - \frac{t}{\pi r_0} \right). \quad (14)$$

Подобным же путём могут быть получены приближённые значения скорости во всех точках с координатами $\left(\pm \frac{m}{2} t, r_0 \right)$, где m — нечётное число, т. е. на прямых, перпендикулярных к оси цепочки и проходящих посередине между двумя соседними вихрями цепочки. Принимая такую прямую за ось y , сохраняя прежние обозначения и рассуждая точно так же, как в предыдущем случае, найдём:

$$w_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_{ny} = 0,$$

$$w_x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} w_{nx}.$$

В этом случае попрежнему

$$w_{nx} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{r_0}{r_n^2}.$$

Но, очевидно,

$$r_n^2 = r_0^2 + \left[(2n-1) \frac{t}{2} \right]^2.$$

Таким образом,

$$w_x = \frac{4\Gamma}{\pi} \cdot \frac{r_0}{t^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{r_0}{t} \right)^2 + (2n-1)^2}.$$

Заменяя сумму интегралом, приближённо получим,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{r_0}{t} \right)^2 + (2n-1)^2} &\approx \int_1^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{r_0}{t} \right)^2 + (2n-1)^2} dn = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{2r_0} \left[\operatorname{arctg} \frac{(2n-1)t}{2r_0} \right]_{n=1}^{n=\infty} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{2r_0} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{t}{2r_0} \right), \end{aligned}$$

¹⁾ Если взять точное значение бесконечной суммы, то получим следующее точное значение скорости:

$$w_{kt} = -\frac{\Gamma}{2t} \operatorname{cth} \frac{\pi r_0}{t}.$$

откуда

$$\omega_x = \frac{\Gamma}{2t} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctg \frac{t}{2r_0} \right).$$

Так как попрежнему $\omega_y = 0$, то полная скорость в точках с координатами $\left(\pm \frac{m}{2} t, r_0 \right)$ равна:

$$\omega_{m_t} = \frac{\Gamma}{2t} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctg \frac{t}{2r_0} \right). \quad (15)$$

Если построить распределение скорости по любой прямой $y = r_0$, параллельной оси цепочки, то в силу симметрии ясно, что это распределение имеет периодический характер, т. е. значения скорости во всех точках с координатами $(\alpha + kt, r_0)$ и $\left(\alpha + \frac{mt}{2}, r_0 \right)$, где α — любое число, соответственно одинаковы. Из качественных соображений можно заключить, что значения скорости, даваемые формулой (14), суть наибольшие значения скорости на этой прямой, а значения (15) — наименьшие значения скорости на этой прямой. Поэтому скорость ω_α в любой точке на прямой $y = r_0$ заключена в следующих пределах:

$$\omega_{m_t} < \omega_\alpha < \omega_{kt}. \quad (16)$$

Формулы (14) и (15) являются приближёнными и при малых значениях $\frac{r_0}{t}$ ими пользоваться нельзя. Они становятся тем более точными, чем больше величина отношения $\frac{r_0}{t}$. В пределе при $\frac{r_0}{t} \rightarrow \infty$ эти формулы дают совершенно точный результат. Поэтому, пользуясь ими, можно определить точное значение скорости, индуцируемой бесконечной прямолинейной цепочкой точечных вихрей на бесконечности «над» и «под» цепочкой, — величины, которые играют существенную роль в дальнейшем.

Устремляя $r_0 \rightarrow \infty$ в формулах (14) и (15), получим одинаковый результат:

$$\omega_{kt} = \omega_{m_t} = \frac{\Gamma}{2t}.$$

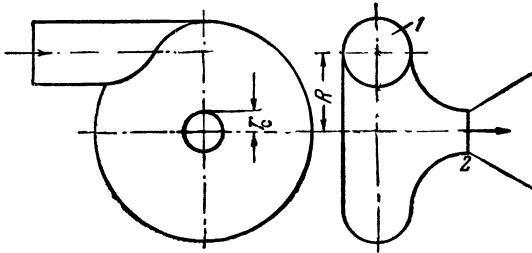
Неравенство (16) показывает, что и во всех остальных точках на бесконечности скорость имеет такую же величину. Скорость эта направлена параллельно оси цепочки. На бесконечности *над* цепочкой скорость $\omega_{+\infty}$ направлена вправо, на бесконечности *под* цепочкой скорость $\omega_{-\infty}$ направлена влево. Таким образом, окон-

чительно скорости, индуцируемые цепочкой вихрей, в любой точке на бесконечности равны¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{+\infty} &= +\frac{\Gamma}{2t}, \\ \omega_{-\infty} &= -\frac{\Gamma}{2t}. \end{aligned} \right\} \quad (17).$$

§ 3. Теория центробежной форсунки

Остановимся ещё на одном примере сложного течения жидкости, состоящего из поступательного течения и поля вихря, имеющего место в центробежной форсунке. Корпус форсунки имеет



Фиг. 22. Схема центробежной форсунки.

форму цилиндра с центральным выходным соплом, расположенным в торцевой стенке (фиг. 22). Подача жидкости в форсунку осуществляется по трубке, ось которой перпендикулярна к оси цилиндра, но не пересекается с нею.

Из геометрической схемы форсунки видно, что момент количества движения струи жидкости на входе в форсунку относительно оси выходного сопла не равен нулю. Поэтому жидкость протекает сквозь форсунку с вращением. При выходе струи из форсунки прекращается действие центростремительных сил от твёрдых стенок и жидкие частицы разлетаются (распыляются) в пространстве по прямолинейным лучам, касательным к их прежним траекториям, т. е. к цилиндрическим поверхностям, соосным с выходным соплом форсунки.

Тангенс угла, который образуют линии распыла с осью форсунки, равен отношению тангенциальной скорости к поступательной в выходном сечении сопла:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w_u}{w_a}. \quad (18).$$

¹⁾ Полученный результат подтверждается точным расчётом по формулам, приводимым, например, в книге: Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. 1, Гостехиздат, М., 1948.

Исследуем поток в форсунке, пренебрегая действием сил трения. В этом случае момент количества движения любой жидкой частицы относительно оси форсунки должен сохранить постоянное значение на всём пути от входа в форсунку до выхода из неё

$$\omega_{\text{вх}} \cdot R = \omega_u \cdot r. \quad (19)$$

Здесь $\omega_{\text{вх}}$ — скорость входа в форсунку, R — радиальное расстояние от оси форсунки до частицы жидкости во входном отверстии форсунки, ω_u — тангенциальная составляющая скорости в выходном отверстии, r — радиальное расстояние от оси форсунки до частицы жидкости в выходном отверстии форсунки.

В случае пренебрежения гидравлическими потерями давление в потоке определяется уравнением Бернулли

$$(z_{\text{вх}} - z) + \frac{p_{\text{вх}}}{\gamma} + \frac{\omega_{\text{вх}}^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} + \frac{\omega_a^2}{2g} + \frac{\omega_u^2}{2g} = \text{const.}$$

Здесь $p_{\text{вх}}$ — давление во входном отверстии, γ — вес единицы объёма жидкости, $z_{\text{вх}} - z$ — геометрическая разность уровней во входном и выходном отверстиях.

Полагая вход и выход форсунки расположенными в одной горизонтальной плоскости ($z_{\text{вх}} = z$) и вводя обозначение для полного напора

$$H = \frac{p_{\text{вх}}}{\gamma} + \frac{\omega_{\text{вх}}^2}{2g} = \text{const.},$$

будем иметь:

$$\frac{p}{\gamma} = H - \left(\frac{\omega_a^2}{2g} + \frac{\omega_u^2}{2g} \right). \quad (20)$$

Из уравнения (20) нетрудно видеть, что вблизи оси форсунки ($r \approx 0$) скорость потока должна иметь бесконечно большое положительное значение, а давление — бесконечно большое отрицательное значение, что невозможно. В действительности наблюдается следующее явление. По мере приближения к оси форсунки скорость растёт, а давление падает, но только до тех пор, пока последнее не станет равным атмосферному. Дальнейшее уменьшение давления в центральной области невозможно, так как одним своим основанием эта область выходит сквозь сопло в атмосферу. Иначе говоря, центральная часть форсунки не может быть заполнена потоком жидкости; здесь располагается воздушный вихрь с давлением, равным атмосферному; избыточное давление в вихре равно нулю: $p_m = 0$. Истечение жидкости из форсунки осуществляется через кольцевое сечение, внутренний радиус которого равен радиусу воздушного вихря (r_m), а внешний — радиусу сопла (r_c).

Таким образом. *живое сечение* струи жидкости на выходе из форсунки равно:

$$F = \varphi \cdot \pi \cdot r_c^2 = \pi (r_c^2 - r_m^2), \quad (21)$$

откуда *коэффициент живого сечения* форсунки (степень заполнения сопла)

$$\varphi = 1 - \frac{r_m^2}{r_c^2}. \quad (22)$$

Для выяснения закона распределения поступательных компонент скорости w_u в выходном сечении форсунки воспользуемся принципом Даламбера. Согласно этому принципу разность давлений dp на боковых поверхностях кольцевого элемента жидкой струи (фиг. 23) радиуса r и толщины dr уравнивается центробежной силой, приходящейся на единицу поверхности кольцевого элемента

$$dp = \frac{w_u^2}{r} dm.$$

Масса кольцевого элемента с поверхностью, равной единице, составляет:

$$dm = \frac{\gamma}{g} \cdot dr.$$

По закону площадей имеем:

$$w_u r = w_{um} \cdot r_m$$

и, следовательно,

$$dr = -\frac{w_{um} \cdot r_m}{w_u^2} \cdot dw_u.$$

Используя эти соотношения, получим:

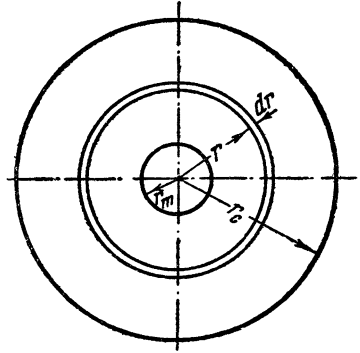
$$dp = -\frac{\gamma}{g} \cdot w_u \cdot dw_u$$

и

$$\frac{p}{\gamma} = -\frac{w_u^2}{2g} + \text{const.}$$

По высказанному ранее условию на границе воздушного вихря ($w_u = w_{um}$) избыточное давление равняется нулю ($p_m = 0$). Таким образом, получаем закон распределения давления, обеспечивающий равновесие закрученного потока:

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{w_{um}^2}{2g} - \frac{w_u^2}{2g}. \quad (23)$$



Фиг. 23. Выходное поперечное сечение форсунки.

Из сопоставления равенств (20) и (23) следует, что поступательная скорость в выходном сечении форсунки должна быть постоянной величиной:

$$\omega_a = \text{const.} \quad (24)$$

Значение выходной поступательной скорости может быть найдено по состоянию потока на границе воздушного вихря:

$$\frac{\omega_a^2}{2g} = H - \frac{\omega_{um}^2}{2g}. \quad (25)$$

Приведённые соображения позволяют получить простой метод расчёта форсунки, если пренебречь действием сил трения.

Секундный расход жидкости равен произведению скорости истечения на площадь живого сечения потока:

$$Q = \omega \cdot F_{\text{ж}} = \omega \cdot \varphi \cdot \pi \cdot r_c^2.$$

Введём вспомогательное понятие — *эквивалентную скорость*, представляющую собой отношение секундного расхода жидкости к площади выходного сечения сопла:

$$\omega_a = \frac{Q}{\pi \cdot r_c^2}. \quad (26)$$

Тогда поступательная скорость истечения из форсунки может быть выражена через эквивалентную скорость:

$$\omega_a = \frac{\omega_a}{\varphi}. \quad (27)$$

Расход жидкости можно также получить из условий входа в форсунку:

$$Q = \omega_{\text{вх}} \cdot \pi \cdot r_{\text{вх}}^2,$$

где $r_{\text{вх}}$ — радиус отверстия, через которое жидкость поступает в форсунку. Таким образом, скорость входа жидкости в форсунку можно выразить через эквивалентную скорость:

$$\omega_{\text{вх}} = \omega_a \cdot \frac{r_c^2}{r_{\text{вх}}^2}. \quad (28)$$

Наконец, закон площадей даёт возможность связать тангенциальную скорость в произвольной точке форсунки с эквивалентной скоростью:

$$\omega_u = \omega_a \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{r_c^2}{r_{\text{вх}}^2}.$$

В целях упрощения дальнейших рассуждений будем приближённо считать, что плечо любой частицы во входном отверстии равно расстоянию от оси этого отверстия до оси форсунки:

$$R = R_{\text{вх}}.$$

Результаты расчёта в этом случае будут тем ближе к действительности, чем входное отверстие форсунки уже, т. е. чем меньше величина $\frac{r_{\text{ВХ}}}{R_{\text{ВХ}}}$. Высказанное предположение приводит к следующей формуле для тангенциальной скорости:

$$\omega_u = \omega_0 \frac{R_{\text{ВХ}}}{r} \cdot \frac{r_c^2}{r_{\text{ВХ}}^2}. \quad (29)$$

Тангенциальная скорость около стенки выходного отверстия форсунки равна:

$$\omega_{uc} = \omega_0 \frac{R_{\text{ВХ}} \cdot r_c}{r_{\text{ВХ}}^2}. \quad (30)$$

Тангенциальная скорость на границе воздушного вихря в выходном отверстии составляет:

$$\omega_{um} = \omega_0 \cdot \frac{R_{\text{ВХ}} \cdot r_c}{r_{\text{ВХ}}^2} \cdot \frac{r_c}{r_m},$$

откуда при помощи равенства (22) получаем:

$$\omega_{um} = \omega_0 \cdot \frac{R_{\text{ВХ}} \cdot r_c}{r_{\text{ВХ}}^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\varphi}}. \quad (31)$$

Используем полученные выражения для того, чтобы выразить полный напор жидкости через эквивалентную скорость; для этого подставим выражения (27) и (31) в уравнение (25). Получим следующее равенство для полного напора форсунки:

$$H = \frac{\omega_0^2}{2g} \left(\frac{1}{\varphi^2} + \frac{R_{\text{ВХ}}^2 \cdot r_c^2}{r_{\text{ВХ}}^4 \cdot (1-\varphi)} \right); \quad (32)$$

эквивалентная скорость при истечении из форсунки равна:

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2gH}}{\sqrt{\frac{1}{\varphi^2} + \frac{A^2}{1-\varphi}}} = \mu \cdot \sqrt{2gH}. \quad (33)$$

Здесь для геометрической характеристики форсунки введено специальное обозначение

$$A = \frac{R_{\text{ВХ}} \cdot r_c}{r_{\text{ВХ}}^2}. \quad (34)$$

Эквивалентная скорость представляет собой скорость истечения из форсунки в том случае, когда поток сплошь заполняет выходное отверстие. Следовательно, знаменатель формулы (33) равен единице, делённой на коэффициент расхода форсунки μ .

Таким образом, получаем выражение для коэффициента расхода форсунки

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varphi^2} + \frac{A^2}{1-\varphi}}} \quad (35)$$

Как видим, коэффициент расхода форсунки определяется двумя параметрами: геометрической характеристикой форсунки $A = \frac{R_{\text{вх}} \cdot r_c}{r_{\text{вх}}^2}$ и коэффициентом живого сечения $\varphi = 1 - \frac{r_m^2}{r_c^2}$.

Для построения теории центробежной форсунки необходимо установить связь между коэффициентом живого сечения и геометрической характеристикой $\varphi = f(A)$. При этом можно воспользоваться следующими соображениями. Из формулы (35) получается, что в зависимости от размеров воздушного вихря может установиться тот или иной секундный расход жидкости через форсунку. Вычисления показывают, что как при очень больших, так и при очень малых размерах воздушного вихря имеют место небольшие значения коэффициента расхода. В первом случае получаются очень малые живые сечения для прохода жидкости, во втором случае — очень малые значения скорости истечения (напор тратится на создание больших тангенциальных скоростей в точках, расположенных близко к оси форсунки).

Можно доказать, что устойчивым должен быть воздушный вихрь таких размеров, при которых обеспечивается максимальный расход жидкости в форсунке¹⁾. Тогда истинное значение коэффициента живого сечения форсунки соответствует максимальному значению коэффициента расхода. Для выполнения этого условия следует вычислить производную $\frac{d\mu}{d\varphi}$ из формулы (35) и приравнять её нулю. В результате получается следующая зависимость между коэффициентом живого сечения и геометрической характеристикой форсунки (фиг. 24):

$$A = \frac{1-\varphi}{\sqrt{\frac{\varphi^3}{2}}} \quad (36)$$

Подставляя результат (36) в равенство (35), получаем окончательную формулу для определения коэффициента расхода форсунки:

$$\mu = \varphi \sqrt{\frac{\varphi}{2-\varphi}} \quad (37)$$

¹⁾ Это же условие можно сформулировать иначе: в форсунке устанавливается такой режим течения, при котором для данного расхода потребный напор — минимальный.

Согласно выражению (36) при изменении геометрической характеристики форсунки от $A=0$ до $A=\infty$ значения коэффициента живого сечения и коэффициента расхода изменяются в пределах от 1 до 0.

Секундный расход жидкости через данную форсунку зависит от величины полного напора в линии нагнетания:

$$Q = \mu F_c \sqrt{2gH}. \quad (38)$$

Здесь $F_c = \pi r_c^2$ — площадь сечения выходного сопла форсунки.

Как указывалось выше, из сопла форсунки частицы жидкости разлетаются по прямолинейным траекториям, направление которых совпадает с направлением результирующей скорости течения в выходном участке сопла¹⁾. Таким образом, тангенс бокового угла распыла определяется отношением окружного компонента скорости к осевому $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega_u}{\omega_a}$.

Следует отметить, что в связи с непостоянством скорости в поперечном сечении потока углы распыла у различных частиц неодинаковы. Будем считать, что распыл приблизительно характеризуется некоторой средней величиной угла, соответствующей среднему значению окружной скорости:

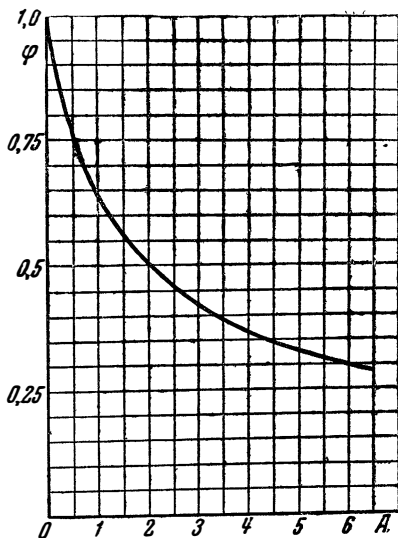
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega_{u \text{ ср}}}{\omega_a},$$

где по закону площадей

$$\omega_{u \text{ ср}} = \frac{\omega_{uc} r_c}{r_{\text{ср}}},$$

причём

$$r_{\text{ср}} = \frac{r_c + r_m}{2}.$$



Фиг. 24. Зависимость коэффициента живого сечения от геометрической характеристики форсунки.

¹⁾ Рассматривается случай истечения в неподвижную среду.

Пользуясь выражениями (22), (30) и (36) получим следующую формулу для бокового угла распыла:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(1-\varphi) \cdot \sqrt{\bar{s}}}{(1 + \sqrt{1-\varphi}) \cdot \sqrt{\varphi}} . \quad (39)$$

Заметим, что формула (39) является приближённой; она даёт завышенные значения углов распыла. Объясняется это тем, что в выходном участке сопла господствует давление выше атмосферного (центробежное давление). Перед выходом струи из сопла, как показал В. И. Скобелкин, избыточное давление преобразуется в скоростной напор, что приводит к увеличению осевой скорости, т. е. к уменьшению угла распыла.

Ввиду сложности преобразования скорости перед выходом из сопла мы не станем анализировать этот процесс ради уточнения формулы для угла распыла, тем более, что в данной приближённой теории не рассматривается влияние другого существенного фактора — трения жидкости о стенки форсунки.

Результаты испытаний свидетельствуют о том, что приведённая теория центробежной форсунки удовлетворительно подтверждается экспериментом как с качественной, так и с количественной стороны.

Г Л А В А III

СКАЧКИ УПЛОТНЕНИЯ

§ 1. Прямые скачки уплотнения

В случае полёта тела со сверхзвуковой скоростью ($\omega_n > a_n$) перед ним возникает ударная волна (скачок уплотнения), вызывающая значительное сопротивление.

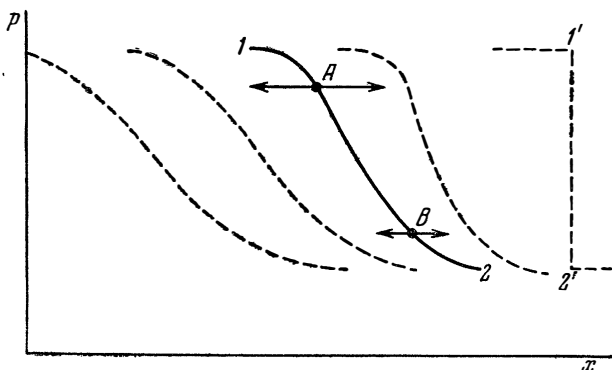
Если рассматриваемое тело представляет собой летательный аппарат, снабжённый воздушно-реактивным двигателем, то в сверхзвуковой струе воздуха, которая тормозится при втекании в двигатель, также происходит скачок уплотнения. Принципиально можно представить себе и плавный переход сверхзвукового потока в дозвуковой осуществляемый посредством специального обратного сопла, установленного на входе в двигатель. При этом не было бы потерь полного давления. Однако торможение сверхзвукового потока таким способом осуществить не удаётся, в силу чего приходится мириться с существованием ударных волн и наличием соответствующего волнового сопротивления.

Обратимся к теории ударных волн. Многочисленные опыты показывают, что всякое повышение давления, возникшее в каком-либо месте газовой среды, распространяется в ней с большой скоростью во все стороны в виде волн давления. Слабые волны давления, как известно из акустики, движутся со скоростью звука; их изучением занимаются в акустике. Сильные волны давления, как видно из опытов, распространяются со скоростями, значительно большими, чем скорость звука. Основная особенность сильной волны давления заключается в том, что фронт волны очень узок, в связи с чем состояние газа (давление, плотность, температура) изменяется скачком¹⁾.

Можно дать следующее качественное объяснение этого факта. Пусть в некоторой области (фиг. 25) произошло изменение давле-

¹⁾ Приближённая теория гласит, что толщина области, в которой ущемляется сильная волна давления, должна быть порядка длины свободного пробега молекул.

ния, и вначале волна получила плавную форму $IAB2$. На отдельных бесконечно узких участках волны величина давления возрастает незначительно, поэтому распространение такой волны происходит со скоростью звука. В области высоких сжатий (A) наблюдаются, естественно, более высокие температуры, чем в области малых сжатий (B), в силу чего «вершина» волны давления движется быстрее, чем её «подножие». В сторону меньших давлений (вправо) волна распространяется как волна сжатия, в сторону высоких давлений (влево)—как волна разрежения. Таким образом, если даже вначале волна сжатия является пологой,



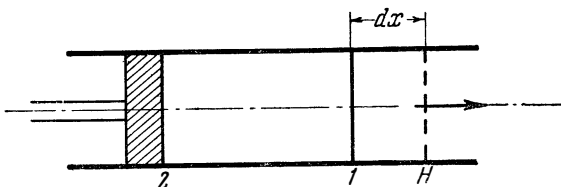
Фиг. 25. Схема образования волн сжатия и разрежения.

то со временем она делается всё круче и круче; процесс этот остановится, и волна приобретёт устойчивую форму только в тот момент, когда фронт волны станет совсем плоским ($1'—2'$). Итак, волны сжатия распространяются как скачки давления (разрыва), в связи с чем их называют ударными волнами.

По тем же причинам, т. е. вследствие того, что в точке A волна разрежения движется быстрее, чем в точке B , фронт волны разрежения со временем растягивается. Иначе говоря, возникновение волны разрежения не должно приводить к образованию скачков разрежения.

Ниже будет показано, что в адиабатических (без подвода тепла) скачках сжатия происходит увеличение энтропии газа, а в адиабатических скачках разрежения, если бы они существовали, энтропия должна была бы уменьшаться. Этим доказывается законность существования адиабатических скачков давления и одновременно невозможность возникновения адиабатических скачков разрежения (как известно из термодинамики, в конечной замкнутой системе энтропия убывать не может). В полном соответствии с этим находится тот известный факт, что наблюдаемые иногда в действительности скачки разрежения (скачок конден-

сации, фронт пламени) получаются только при условии подвода тепла в области скачка, т. е. в таких особых условиях, когда и при скачке разрежения энтропия газа растёт. Нужно заметить, что возникновение скачков разрежения при подводе тепла к газу отнюдь не противоречит процессу, изображённому на фиг. 25. В самом деле, если в области пониженных давлений B за счёт подвода тепла получается температура выше, чем в области высоких давлений A , то скорость звука у подножия волны выше, чем у вершины; в связи с этим со временем должна усилиться крутизна фронта волны разрежения, что приведёт к образованию



Фиг. 26. Схема распространения ударной волны.

теплового скачка разрежения. В адиабатическом же случае, как уже указывалось, скачки разрежения существовать не могут.

Остановимся теперь на теории ударных волн. Представим себе, например, что под влиянием резкого смещения поршня (фиг. 26) в трубе возникла и распространяется слева направо сильная волна сжатия. Пусть за бесконечно малый промежуток времени фронт волны переместился на расстояние dx . Это значит, что в области $1-H$ за время $d\tau$ произошло повышение давления от величины p_H (давление невозмущённого газа) до величины p_1 (давление за фронтом волны сжатия), в соответствии с чем в области $1-H$ должно наблюдаться повышение плотности газа на величину

$$\Delta\rho = \rho_1 - \rho_H.$$

Однако это может произойти только в том случае, если некоторое количество газа, равное

$$dG = (\rho_1 - \rho_H) gF dx,$$

перетечёт из объёма $1-2$ в объём $H-1$ (здесь F — площадь поперечного сечения). Итак, при распространении сильной волны сжатия газ позади фронта волны должен находиться в движении, следуя в том же направлении, что и волна. Из уравнения неразрывности можно определить скорость газового потока (ω_H):

$$dG = \rho_1 gF \omega_H d\tau,$$

откуда

$$\omega_{\Pi} = \frac{\rho_1 - \rho_{\Pi}}{\rho_1} \frac{dx}{d\tau}. \quad (1)$$

Но производная пути по времени есть не что иное, как скорость движения волны:

$$\omega_{\text{в}} = \frac{dx}{d\tau}. \quad (2)$$

Отсюда получаем равенство, связывающее *скорость распространения волны со скоростью газа, движущегося за фронтом волны* в том же направлении:

$$\omega_{\text{в}} = \omega_{\Pi} \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_{\Pi}}. \quad (3)$$

Применяя к области $H - I$ теорему о количестве движения, можно получить второе соотношение между теми же величинами. В самом деле, за время $d\tau$ масса газа, заполнявшая объём $H - I$,

$$\rho_{\Pi} F dx$$

перейдёт из состояния покоя в движение со скоростью ω_{Π} . Соответствующее изменение количества движения должно быть равно импульсу силы, вызванной разностью давлений, действующих в сечениях I и H :

$$(p_1 - p_{\Pi}) F d\tau = \rho_{\Pi} F (\omega_{\Pi} - 0) dx.$$

откуда скорость волны равна:

$$\omega_{\text{в}} = \frac{dx}{d\tau} = \frac{p_1 - p_{\Pi}}{\rho_{\Pi} \omega_{\Pi}}. \quad (4)$$

Подставив выражение для скорости газа из (3) в (4), получим скорость распространения волны сжатия как функцию прироста давления и прироста плотности:

$$\omega_{\text{в}} = \sqrt{\frac{p_1 - p_{\Pi}}{\rho_1 - \rho_{\Pi}} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_{\Pi}}}. \quad (5)$$

В случае *слабой волны*, когда повышение давления (и плотности) получается незначительным:

$$\rho_1 \approx \rho_{\Pi}, \quad p_1 \approx p_{\Pi},$$

имеем:

$$\omega_{\text{в}} = a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}, \quad (6)$$

но такая *слабая волна* является не чем иным, как *акустической волной*, поэтому выражение (6) представляет собой *формулу для скорости звука*.

Из сравнения равенств (5) и (6) видно, что *скорость распространения сильной волны сжатия всегда выше скорости звука*. Обычно распространение звука сопровождается столь незначительным изменением состояния газа, что энтропию можно считать практически постоянной, т. е. полагать, что при этом имеет место идеальный адиабатический процесс:

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const.}$$

Но в этом случае

$$\frac{dp}{d\rho} = k \frac{p}{\rho}$$

или на основании уравнения состояния для идеального газа

$$\frac{dp}{d\rho} = kgRT.$$

Отсюда получается уже применявшаяся выше формула [(36) гл. I] для скорости звука в идеальном газе

$$a = \sqrt{\frac{kp}{\rho}} = \sqrt{kgRT}.$$

Подставляя выражение (5) в равенство (3), найдём формулу для *скорости газового потока за фронтом волны сжатия*:

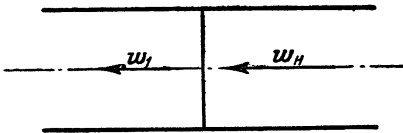
$$\omega_{\Pi} = \sqrt{\frac{(p_1 - p_{\Pi})(\rho_1 - \rho_{\Pi})}{\rho_1 \rho_{\Pi}}}. \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что с ослаблением волны сжатия скорость движения газа падает. В случае слабой звуковой волны газ за её фронтом неподвижен, так как согласно равенству (7) при $p_1 \approx p_{\Pi}$ и $\rho_1 \approx \rho_{\Pi}$ получается $\omega_{\Pi} = 0$. В действительности, как известно, звуковая волна состоит из правильно чередующихся областей сжатия и разрежения, причём газ за её фронтом находится в очень слабом колебательном движении, средняя поступательная скорость газовых частиц равна нулю.

Заметим теперь, что ввиду происходящего вытекания газа из области 1—2 (фиг. 26), расположенной позади фронта сильной волны сжатия, давление в этой области со временем убывает. По указанной причине ударная волна, возникающая в неподвижном газе под влиянием единичного сжатия (например, взрыва или смещения поршня), всегда более или менее быстро затухает. И только в том случае, когда источник возмущения не прекращает своего действия, можно получить незатухающую

ударную волну. Обнаруженное выше свойство ударных волн распространяться со скоростью, большей, чем скорость звука, приводит к тому, что незатухающие ударные волны образуются перед телом только в тех случаях, когда движение происходит со сверхзвуковой скоростью. Но зато в этих случаях ударные волны наблюдаются всегда. Например, при движении в газе с постоянной сверхзвуковой скоростью твёрдого тела перед последним образуется ударная волна постоянной интенсивности, которая движется с той же скоростью.

Исследуем более детально изменение состояния в газе, получающееся при прохождении в нём ударной волны стационарного характера. Обратимся сначала к простейшей схеме, когда фронт волны составляет прямой угол с направлением распространения. Такая волна называется *прямой ударной волной*.



Фиг. 27. Схема прямого скачка уплотнения.

Ради удобства расчёта выгодно обратить движение, т. е. остановить фронт волны, направив поток навстречу волне со скоростью, равной скорости распространения волны (фиг. 27):

$$w_{\text{н}} = -w_{\text{в}};$$

тогда относительная скорость газа за фронтом волны:

$$w_1 = w_{\text{н}} - w_{\text{в}}. \quad (8)$$

Остановив ударную волну встречным потоком газа, мы получили некоторую неподвижную поверхность, пересекая которую все элементарные струйки газа одновременно претерпевают скачкообразные изменения скорости движения, плотности, давления и температуры.

По этой причине ударную волну называют также *скачком уплотнения*. Скачки уплотнения удобно наблюдать в сверхзвуковых аэродинамических трубах при обтекании воздухом неподвижных твёрдых тел.

Примем площадь поперечного сечения струи равной единице ($F = 1 \text{ м}^2$) и, пользуясь известными уравнениями газовой динамики, найдём связь между значениями скорости газа до и после скачка уплотнения (фиг. 27). Уравнение неразрывности даёт:

$$\rho_1 w_1 = \rho_{\text{н}} w_{\text{н}}.$$

Из уравнения количества движения получается:

$$P_1 - P_{\text{н}} = \rho_{\text{н}} w_{\text{н}} (w_{\text{н}} - w_1).$$

Силой трения мы пренебрегли ввиду малости расстояния $I-H$. Сопоставляя эти уравнения, найдём:

$$p_1 - p_H = \rho_H \omega_H^2 - \rho_1 \omega_1^2 = \omega_1 \omega_H (\rho_1 - \rho_H), \quad (9)$$

откуда

$$\frac{p_1 - p_H}{\rho_1 - \rho_H} = \omega_1 \omega_H. \quad (10)$$

Если извне тепло не подводится, то полное теплосодержание газа остаётся постоянным. Теплоотдачей можно пренебречь, так как боковые поверхности области скачка $I-H$ ничтожно малы. Поэтому из уравнения теплосодержания следует:

$$i_0 = c_p T_0 = c_p T_H + A \frac{\omega_H^2}{2g} = c_p T_1 + A \frac{\omega_1^2}{2g} = \text{const};$$

здесь T_0 — температура торможения. Из этого уравнения имеем:

$$T_H = T_0 - \frac{A}{2gc_p} \omega_H^2.$$

Согласно уравнению состояния газа

$$\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_H}{\rho_H T_H} = gR,$$

следовательно,

$$T_0 = \frac{p_{0H}}{gR\rho_{0H}} = \frac{p_{01}}{gR\rho_{01}};$$

здесь p_{01} , p_{0H} — полное давление соответственно за и перед скачком уплотнения; ρ_{01} , ρ_{0H} — плотность газа, соответствующая полному торможению, в тех же сечениях. Следовательно,

$$p_H = \rho_H \left(\frac{p_{0H}}{\rho_{0H}} - \frac{AR\omega_H^2}{2c_p} \right).$$

Из термодинамики известно соотношение

$$AR = c_p \frac{k-1}{k},$$

поэтому

$$p_H = \rho_H \left(\frac{p_{0H}}{\rho_{0H}} - \frac{k-1}{2k} \omega_H^2 \right). \quad (11)$$

По аналогии получаем:

$$p_1 = \rho_1 \left(\frac{p_{0H}}{\rho_{0H}} - \frac{k-1}{2k} \omega_1^2 \right). \quad (12)$$

Вычтя равенство (11) из равенства (12), имеем:

$$p_1 - p_H = (\rho_1 - \rho_H) \frac{p_{0H}}{\rho_{0H}} + \frac{k-1}{2k} (\rho_H \omega_H^2 - \rho_1 \omega_1^2),$$

откуда на основании (9) выводится:

$$\frac{p_1 - p_H}{\rho_1 - \rho_H} = \frac{2k}{k+1} \cdot \frac{p_{0H}}{\rho_{0H}}. \quad (13)$$

Используем выражение [(43) гл. I] для критической скорости:

$$a_{кр}^2 = \frac{2k}{k+1} gRT_0 = \frac{2k}{k+1} \frac{p_{0H}}{\rho_{0H}}.$$

Тогда найдём:

$$\frac{p_1 - p_H}{\rho_1 - \rho_H} = \frac{2k}{k+1} gRT_0 = a_{кр}^2. \quad (14)$$

Наконец, сопоставляя равенства (10) и (14), приходим к следующему простому соотношению между величинами скорости газа до и после прямого скачка:

$$\omega_H \omega_1 = a_{кр}^2. \quad (15)$$

Это кинематическое соотношение можно привести к безразмерному виду, вводя коэффициенты скорости $\left(\lambda = \frac{\omega}{a_{кр}}\right)$:

$$\frac{\omega_H}{a_{кр}} \cdot \frac{\omega_1}{a_{кр}} = 1$$

или

$$\lambda_H \lambda_1 = 1, \quad (16)$$

откуда видно, что в прямом скачке уплотнения всегда сверхзвуковая скорость газа переходит в дозвуковую, так как если $\omega_H > a_{кр}$, то $\omega_1 < a_{кр}$. Одновременно можно заметить что чем больше значение коэффициента скорости перед скачком, тем меньше его значение после скачка, т. е. чем выше начальная скорость ω_H , тем сильнее получается скачок уплотнения. С уменьшением начальной скорости скачок ослабевает и исчезает совсем при $\omega_H \approx \omega_1 \approx a$.

Установим теперь связь между давлением и плотностью газа в скачке уплотнения. Для этого сложим равенства (11) и (12):

$$p_1 + p_H = (\rho_1 + \rho_H) \frac{p_{0H}}{\rho_{0H}} - \frac{k-1}{2k} (\rho_H \omega_H^2 + \rho_1 \omega_1^2).$$

Но из уравнения неразрывности следует:

$$\rho_H \omega_H^2 + \rho_1 \omega_1^2 = \omega_H \omega_1 (\rho_1 + \rho_H).$$

Подставляя этот результат в предыдущее выражение, имеем:

$$\frac{p_1 + p_H}{\rho_1 + \rho_H} = \frac{p_{0H}}{\rho_{0H}} - \frac{k-1}{2k} \omega_H \omega_1,$$

откуда на основании (10) и (13) получаем основное динамическое соотношение

$$\frac{p_1 - p_H}{\rho_1 - \rho_H} = k \frac{p_1 + p_H}{\rho_1 + \rho_H}, \quad (17)$$

согласно которому отношение прироста давления к приросту плотности в скачке уплотнения пропорционально отношению среднего давления к средней плотности. Отсюда между прочим, следует уже известный нам результат, что при бесконечно малом скачке уплотнения ($p_1 \approx p_H$, $\rho_1 \approx \rho_H$) получается:

$$\frac{dp}{d\rho} = k \frac{p}{\rho}.$$

Это подтверждает сделанное выше предположение, что звуковой волне отвечает идеальный адиабатический процесс.

Рассмотрим более детально термодинамический процесс изменения состояния газа в скачке уплотнения. Для этого представим динамическое соотношение в несколько ином виде:

$$\frac{\rho_1 + \rho_H}{\rho_1 - \rho_H} = k \frac{p_1 + p_H}{p_1 - p_H}.$$

Разделим числитель и знаменатель в левой части этого равенства на величину ρ_H , а в правой на p_1 :

$$\frac{\frac{\rho_1}{\rho_H} + 1}{\frac{\rho_1}{\rho_H} - 1} = k \frac{1 + \frac{p_H}{p_1}}{1 - \frac{p_H}{p_1}}.$$

Отсюда после несложных преобразований получается зависимость отношения $\frac{\rho_1}{\rho_H}$ от отношения $\frac{p_1}{p_H}$ в скачке уплотнения, носящая название ударной адиабаты:

$$\frac{\rho_1}{\rho_H} = \frac{k+1 + \frac{p_H}{p_1}}{1 + \frac{k+1}{k-1} \frac{p_H}{p_1}}. \quad (18)$$

Существенной особенностью ударной адиабаты является то, что при неограниченном возрастании давления в скачке уплотнения ($p_1 \rightarrow \infty$) увеличение плотности имеет совершенно определённый предел, который, как это видно из уравнения (18), равен:

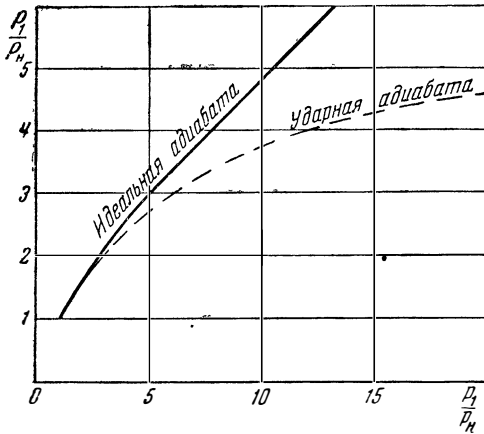
$$\left| \frac{\rho_1}{\rho_H} \right|_{\max} = \frac{k+1}{k-1}. \quad (19)$$

Например, для воздуха ($k=1,4$) увеличение плотности в скачке уплотнения не может быть более шестикратного:

$$\left| \frac{\rho_1}{\rho_H} \right|_{\max} = 6.$$

При скачке уплотнения в газе с меньшим значением показателя k может наблюдаться более сильное, но также ограниченное возрастание плотности; например, при $k=1,2$

$$\left| \frac{\rho_1}{\rho_H} \right|_{\max} = 11.$$



Фиг. 28. Сравнение ударной адиабаты с идеальной адиабатой.

Следует подчеркнуть, что в отличие от ударной адиабаты в случае идеального адиабатического процесса, в котором имеет место зависимость

$$\frac{\rho_1}{\rho_H} = \left(\frac{p_1}{p_H} \right)^{\frac{1}{k}},$$

увеличение плотности с ростом давления является неограниченным ($\rho_1 \rightarrow \infty$ при $p_1 \rightarrow \infty$).

Сравнение адиабат ударной и идеальной произведено на фиг. 28.

Изменение давления и плотности газа в прямом скачке уплотнения можно представить в функции числа M перед скачком. Из уравнения количества движения с учётом формулы для скорости звука [(36) гл. I] и уравнения неразрывности найдём:

$$\frac{p_1}{p_H} - 1 = kM_H^2 \left(1 - \frac{\rho_H}{\rho_1} \right).$$

Если с помощью ударной адиабаты заменить отношение $\frac{\rho_H}{\rho_1}$ его выражением через отношение $\frac{p_1}{p_H}$, то после некоторых преобразований получится:

$$\frac{p_1}{p_H} = \frac{2k}{k+1} M_H^2 - \frac{k-1}{k+1}. \quad (20)$$

В частности, для воздуха ($k=1,4$)

$$\frac{p_1}{p_H} = \frac{7}{6} M_H^2 - \frac{1}{6}.$$

Можно выразить отношение давлений в прямом скачке уплотнения и в функции коэффициента скорости перед скачком λ_H , для этого следует в равенстве (20) произвести замену переменных по формуле (47) из главы I:

$$\frac{p_1}{p_H} = \frac{\lambda_{H1}^2 \frac{k-1}{k-1}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_H^2}. \quad (21)$$

При уменьшении скорости набегающего потока до критического значения ($M_H = 1$) скачок уплотнения вырождается ($p_1 = p_H$). В дозвуковом потоке, как уже указывалось выше, скачки уплотнения невозможны. Вообще же повышение давления при прямом скачке уплотнения зависит только от значения числа M в набегающем потоке, причём с возрастанием M давление увеличивается неограниченно ($p_1 \rightarrow \infty$ при $M_H \rightarrow \infty$). Подставив результат (20) в уравнение (18), нетрудно вывести зависимость плотности за прямым скачком уплотнения непосредственно от числа M или с помощью [(47) гл. I] от коэффициента скорости λ_H в набегающем потоке:

$$\frac{\rho_1}{\rho_H} = \frac{\omega_H}{\omega_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1}}{1 + \frac{1}{M_H^2} \frac{2}{k-1}} = \lambda_H^2. \quad (22)$$

Из равенства (22) ещё раз заключаем, что даже при бесконечно большом значении числа M плотность газа увеличивается в скачке не более чем в $\frac{k+1}{k-1}$ раз.

Определим потери полного давления в прямом скачке уплотнения.

Полное давление в струе после скачка, очевидно, равно:

$$p_{01} = \frac{p_1}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}}} = \frac{p_1}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{1}{\lambda_H^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}}. \quad (23)$$

Полное давление перед скачком равно:

$$p_{0H} = \frac{p_H}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_H^2\right)^{\frac{k}{k-1}}},$$

поэтому коэффициент давления, учитывающий волновое сопро-

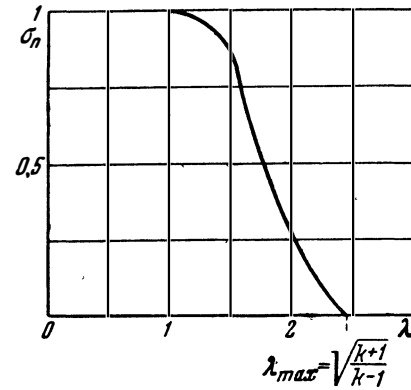
тивление (потери в прямом скачке), выражается, если использовать выражение (21), следующим образом:

$$\sigma_{\Pi} = \frac{p_{01}}{p_{0H}} = \lambda_H^2 \left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_H^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_H^2} \right]^{\frac{1}{k-1}}. \quad (24)$$

При скорости полёта, равной или меньшей, чем скорость звука ($\lambda_H \leq 1$), волновое сопротивление исчезает:

$$\sigma_{\Pi} = 1;$$

формула (24) справедлива только при $\lambda_H \geq 1$. При бесконечно большой скорости полёта ($\lambda_H^2 = \frac{k+1}{k-1}$) получается $\sigma_{\Pi} = 0$, однако при этом потери не поглощают всего первоначального запаса полного давления, так как другой множитель (p_{0H}) стремится к бесконечности. Кривая зависимости $\sigma_{\Pi} = f(\lambda_H)$ для воздуха ($k = 1,4$) приведена на фиг. 29.



Фиг. 29. Зависимость коэффициента давления за прямым скачком уплотнения от коэффициента скорости.

Из равенств (71) главы I и (22) можно получить формулу для определения плотности заторможенного газа после прямого скачка уплотнения:

$$\frac{\rho_{01}}{\rho_H} = \frac{\lambda_H^2}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\lambda_H^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}}. \quad (25)$$

В заключение заметим, что выведенное выше равенство (10) и уравнение неразрывности дают возможность представить скорость потока перед скачком как следующую функцию возрастающего давления и плотности:

$$\omega_H = \sqrt{\frac{p_1 - p_H}{\rho_1 - \rho_H} \frac{\rho_1}{\rho_H}}.$$

Но это есть уже известное выражение (5) для скорости распространения прямой ударной волны в неподвижном воздухе. Такой результат является вполне естественным, так как для того, чтобы остановить ударную волну, следует направить газовый

поток навстречу волне и сообщить ему скорость, равную скорости волны.

Подставляя выражение (22) в соотношение (15), получаем новую формулу для относительной скорости газа за фронтом скачка:

$$\omega_1 = a_{\text{кр}} \sqrt{\frac{\rho_{\text{н}}}{\rho_1}}.$$

Отсюда с помощью (19) обнаруживается, что коэффициент относительной скорости газа за скачком не может быть меньше некоторого определённого значения:

$$|\lambda_1|_{\text{min}} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}. \quad (26)$$

Если перейти от неподвижного скачка уплотнения к скачку, распространяющемуся в неподвижном газе со скоростью $\omega_{\text{в}} = \omega_{\text{н}}$, то с помощью полученных равенств можно определить абсолютную скорость, которую приобретает газ в следе за скачком:

$$\omega_{\text{п}} = \omega_{\text{н}} - \omega_1 = a_{\text{кр}} \left(\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_{\text{н}}}} - \sqrt{\frac{\rho_{\text{н}}}{\rho_1}} \right), \quad (27)$$

или на основании (22)

$$\omega_{\text{п}} = \omega_{\text{н}} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{\text{н}}^2} \right) \quad (28)$$

и в безразмерном выражении:

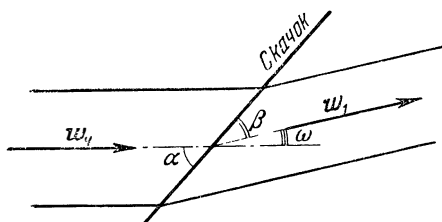
$$\lambda_{\text{п}} = \lambda_{\text{н}} - \frac{1}{\lambda_{\text{н}}}. \quad (29)$$

Согласно закону (16) за ударной волной скорость газа относительно фронта волны получается всегда меньше звуковой ($\lambda_1 < 1$); на основании этого становится ясным, что всякое изменение давления, происходящее позади волны и распространяющееся со скоростью звука, может догнать фронт волны. Именно по этой причине описанное выше (фиг. 26) падение давления в следе за ударной волной, возникшей в неподвижном газе, приводит к ослаблению перепада давления на фронте волны и вызывает её затухание.

§ 2. Косые скачки уплотнения

Характерной особенностью прямого скачка уплотнения, как можно было заметить, является то, что, пересекая его фронт, газовый поток не меняет своего направления, причём фронт прямого скачка располагается нормально к направлению потока.

Помимо прямых скачков уплотнения, встречаются и так называемые *косые скачки уплотнения*. Фронт косого скачка располагается наклонно к направлению потока (фиг. 30). Косой скачок получается в том случае, когда, пересекая фронт скачка, газовый поток должен изменить своё направление. Например, при сверхзвуковом обтекании газом клиновидного тела (фиг. 31,а),

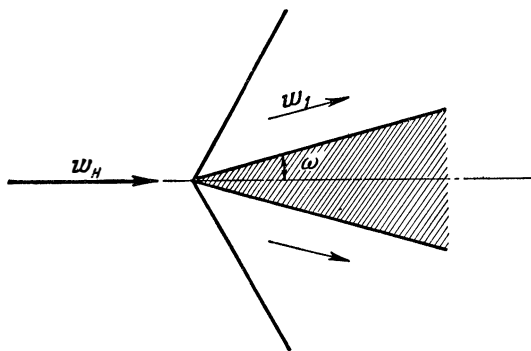


Фиг. 30. Схема косого скачка уплотнения.

встречи струи с фронтом косого скачка вектор скорости w_n составлял с ним угол α (фиг. 30), то после пересечения фронта струя отклоняется на угол ω , а угол между вектором скорости и фронтом скачка становится равным

$$\beta = \alpha - \omega. \quad (30)$$

Разложим вектор скорости на два компонента, из которых один нормален (w_n), а другой параллелен (w_t) фронту скачка



Фиг. 32. Образование косого скачка уплотнения при обтекании клина.

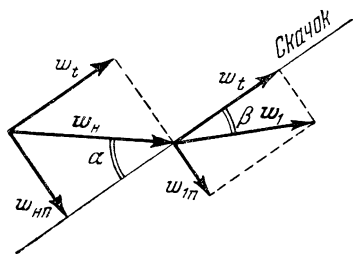
(фиг. 33). Нетрудно показать, что при пересечении струей фронта косого скачка нормальный компонент скорости уменьшается:

$$w_{1n} < w_{2n}, \quad (31)$$

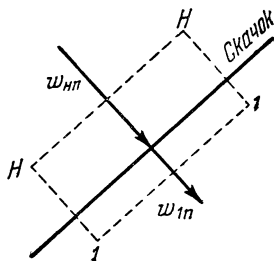
а тангенциальный компонент остаётся неизменным:

$$\omega_t = \text{const.} \quad (32)$$

Обратимся для этого к фиг. 34, на которой нанесён прямоугольный контур $H11H$, охватывающий часть фронта косоугольного скачка. Боковые участки контура ($H-1$) проведены перпендикулярно к фронту, а торцевые ($H-H$ и $1-1$) — параллельно ему. Составим баланс количества движения для этого контура сначала в проекции на направление фронта. Ввиду того, что силы давления на обоих боковых поверхностях ($H-1$) одинаковы, соответствующая проекция количества движения остаётся неизменной, откуда и вытекает условие (32), указывающее на постоянство тангенциального компонента скорости. Если теперь



Фиг. 33. Кинематика потока при косом скачке уплотнения.



Фиг. 34. Расчётная схема косоугольного скачка уплотнения.

составить баланс количества движения в проекции на направление $H-1$, перпендикулярное к фронту, то ввиду того, что на поверхностях $H-H$ и $1-1$ господствуют существенно разные давления, получится¹⁾:

$$p_1 - p_H = \rho_H \omega_{Hn} (\omega_{Hn} - \omega_{1n}).$$

Давление в скачке уплотнения возрастает ($p_1 > p_H$), откуда следует условие (31), согласно которому нормальный компонент скорости в скачке уменьшается.

Приведённые соображения показывают, что *косой скачок уплотнения сводится к прямому скачку, который сносится вместе с потоком газа вбок со скоростью ω_t* . В отличие от прямого скачка в косом скачке претерпевает разрыв (скачкообразное уменьшение) не полная скорость газового потока, а только её компонент, нормальный к фронту скачка. В самом деле, согласно уравнению неразрывности

$$\rho_1 \omega_{1n} = \rho_H \omega_{Hn}.$$

¹⁾ При составлении этого уравнения мы приняли во внимание уравнение неразрывности

$$\rho_H \omega_{Hn} = \rho_1 \omega_{1n}.$$

Уравнение теплосодержания в адиабатическом случае (нет теплообмена) даёт:

$$T_0 = T_H + \frac{A}{2gc_p} \omega_H^2 = T_1 + \frac{A}{2gc_p} \omega_1^2.$$

Далее, мы имеем:

$$\omega_H^2 = \omega_{Hn}^2 + \omega_i^2,$$

$$\omega_1^2 = \omega_{1n}^2 + \omega_i^2,$$

откуда

$$c_p T_0 - \frac{A}{2g} \omega_i^2 = c_p T_H + \frac{A}{2g} \omega_{Hn}^2 = c_p T_1 + \frac{A}{2g} \omega_{1n}^2.$$

Введём в рассмотрение *температуру частичного торможения*, понимая под этим следующую величину:

$$T_n = T_H + \frac{A}{2gc_p} \omega_{Hn}^2 = T_1 + \frac{A}{2gc_p} \omega_{1n}^2 = T_0 - \frac{A}{2gc_p} \omega_i^2,$$

т. е. температуру, которая получится не при полном торможении потока, а лишь при погашении нормальных к фронту скачка компонент скорости. Как показывает это равенство, температура частичного торможения имеет одно и то же значение перед и за фронтом скачка, это вытекает из условия $\omega_i = \text{const}$. Если присоединить к этим уравнениям ещё и уравнение состояния

$$\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_H}{\rho_H T_H},$$

то окажется, как и следовало ожидать, что косой скачок уплотнения описывается в точности теми же соотношениями, что и прямой скачок уплотнения (см. стр. 77—78), с той лишь разницей, что в первом случае вместо полной скорости фигурируют нормальные к фронту скачка её компоненты, а вместо температуры полного торможения T_0 — температура частичного торможения T_n .

По этой причине, не повторяя всех выкладок, которые были подробно приведены в теории прямого скачка, можем написать сразу ряд готовых выражений. Например, вместо равенства (10) имеем:

$$\frac{p_1 - p_H}{\rho_1 - \rho_H} = \omega_{1n} \cdot \omega_{Hn}. \quad (33)$$

Соответственно вместо равенства (14) получим:

$$\frac{p_1 - p_H}{\rho_1 - \rho_H} = \frac{2k}{k+1} gRT_n = a_{крn}^2. \quad (34)$$

Здесь $a_{крn}$ — частичная критическая скорость, которая соответствует температуре частичного торможения T_n . Основное кинема-

тическое соотношение для косо́го скачка принимает следующую форму:

$$\omega_{1n} \cdot \omega_{Hn} = a_{крn}^2. \quad (35)$$

Равенство (34) даёт возможность связать полную критическую скорость с частичной критической скоростью:

$$a_{кр}^2 = \frac{2k}{k+1} gRT_0 = a_{крn}^2 + \frac{k-1}{k+1} \omega_i^2. \quad (36)$$

Пользуясь этим выражением, можно получить вторую часто встречающуюся форму основного кинематического соотношения для косо́го скачка уплотнения:

$$\omega_{1n} \omega_{Hn} + \frac{k-1}{k+1} \omega_i^2 = a_{кр}^2. \quad (37)$$

В частном случае, когда косо́й скачок переходит в прямой ($\alpha = 90^\circ$, $\omega_i = 0$, $\omega_{Hn} = \omega_H$, $\omega_{1n} = \omega_1$), из соотношений (35) и (37) получаем уже известное соотношение (15). Переходя к коэффициентам скорости

$$\lambda_{1n} = \frac{\omega_{1n}}{a_{крn}}, \quad \lambda_{Hn} = \frac{\omega_{Hn}}{a_{крn}},$$

получим в случае косо́го скачка безразмерное кинематическое соотношение

$$\lambda_{1n} \cdot \lambda_{Hn} = 1, \quad (38)$$

которое соответствует равенству (16) для прямого скачка. Естественно, что динамическое соотношение (17) пригодно для косо́го скачка уплотнения без каких-либо изменений, и ударная адиабата применима к косо́му скачку уплотнения точно в таком же виде (18), как и к прямо́му скачку.

Изменение статического и полного давлений в косо́м скачке найдутся соответственно из зависимостей (21) и (23), если вставить в эти формулы вместо λ_H величину λ_{Hn} :

$$\frac{p_1}{p_H} = \frac{\lambda_{Hn}^2 - \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \lambda_{Hn}^2}, \quad (39)$$

$$\sigma_k = \frac{p_{01}}{p_{0H}} = \lambda_{Hn}^2 \left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{Hn}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{Hn}^2} \right]^{\frac{1}{k-1}}, \quad (40)$$

причём коэффициент скорости λ_{Hn} подсчитан здесь по нормальной составляющей скорости и частичной критической скорости:

$$\lambda_{Hn} = \frac{\omega_{Hn}}{a_{крn}}.$$

Можно, разумеется, получить и такие формулы, которые связывают изменение давления в косом скачке непосредственно с абсолютной скоростью набегающего потока.

Согласно уравнению импульсов прирост статического давления в косом скачке равен:

$$p_1 - p_H = \rho_H \omega_{Hn} (\omega_{Hn} - \omega_{1n}).$$

Уравнение (37) связывает компоненты скорости:

$$\omega_{Hn} \cdot \omega_{1n} = a_{кр}^2 - \frac{k-1}{k+1} \omega_i^2.$$

Подставляя уравнение (37) в уравнение импульсов и переходя к коэффициентам λ , получим:

$$p_1 - p_H = \rho_H a_{кр}^2 \cdot \left(\lambda_H^2 \cdot \sin^2 \alpha - 1 + \frac{k-1}{k+1} \lambda_H^2 \cos^2 \alpha \right).$$

Однако из (44) и (43) главы I следует:

$$\frac{\rho_H}{\rho_H} = \frac{\frac{2k}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_H^2} \cdot \frac{1}{a_{кр}^2}.$$

Отсюда отношение значений статического давления за и перед косым скачком уплотнения равно:

$$\frac{p_1}{p_H} = \frac{\lambda_H^2 \left[1 - \frac{4k}{(k+1)^2} \cos^2 \alpha \right] - \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_H^2}. \quad (41)$$

Выражение (41) при увеличении угла косого скачка до значения $\alpha = 90^\circ$ переходит в известное выражение (24), полученное выше для прямого скачка. Вычислим значение $\frac{p_1}{p_H}$ для воздуха ($k = 1,4$):

$$\frac{p_1}{p_H} = \frac{\lambda_H^2 (1 - 0,972 \cos^2 \alpha) - 0,167}{1 - 0,167 \cdot \lambda_H^2}.$$

Отношение значений полного давления за и перед косым скачком является функцией коэффициентов скорости и может быть определено следующим образом:

$$\sigma_k = \frac{p_{01}}{p_{0H}} = \frac{p_{01}}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p_H} \cdot \frac{p_H}{p_{0H}}, \quad (42)$$

где

$$\frac{p_H}{p_{0H}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_H^2 \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

$$\frac{p_1}{p_{01}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2 \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

а отношение значений статического давления $\frac{p_1}{p_H}$ берётся по формуле (41).

Таким образом, для расчёта отношения значений полного давления σ_R в косом скачке уплотнения нужно знать коэффициент скорости λ_1 . Из треугольника скоростей за косым скачком следует:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \omega_{1n}^2 + \omega_t^2, \\ \omega_{1n} &= \omega_H \cdot \sin \alpha, \quad \omega_t = \omega_H \cos \alpha, \end{aligned}$$

причём согласно (37)

$$\omega_{1n} \cdot \omega_{1n} = a_{кр}^2 - \frac{k-1}{k+1} \omega_t^2.$$

Отсюда выводится расчётная формула для коэффициента скорости за косым скачком уплотнения. Эту формулу можно получить так:

$$\lambda_1^2 = \frac{\omega_1^2}{a_{кр}^2} = \frac{\omega_{1n}^2}{a_{кр}^2} + \frac{\omega_t^2}{a_{кр}^2},$$

но из (35)

$$\begin{aligned} \omega_{1n} &= \frac{a_{кр}^2 - \frac{k-1}{k+1} \omega_t^2}{\omega_{1n}} = \frac{a_{кр}^2 - \frac{k-1}{k+1} \omega_H^2 \cos^2 \alpha}{\omega_H \sin \alpha}, \\ \omega_t &= \omega_H \cos \alpha. \end{aligned}$$

Вставляя эти значения ω_{1n} и ω_t в выражение для λ_1 , будем иметь:

$$\lambda_1^2 = \lambda_H^2 \cos^2 \alpha + \frac{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_H^2 \cos^2 \alpha\right)^2}{\lambda_H^2 (1 - \cos^2 \alpha)}. \quad (43)$$

Увеличение угла скачка до прямого ($\alpha = 90^\circ$) приводит к известному соотношению (16) для прямого скачка:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_H}.$$

Увеличение давления в косом скачке уплотнения можно также представить в функции числа M набегающего потока и угла α , который образует вектор скорости ω_H с фронтом скачка. Из треугольника скоростей (фиг. 33) перед скачком имеем:

$$\omega_{1n} = \omega_H \cdot \sin \alpha. \quad (44)$$

Подставим это выражение в уравнение импульсов

$$p_1 - p_H = \omega_{1n} \rho_H (\omega_{1n} - \omega_{1n})$$

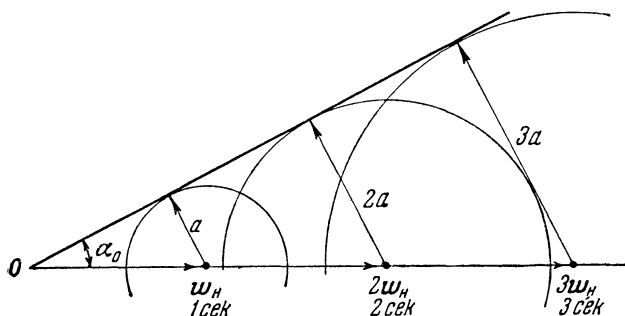
и разделим обе части последнего на величину p_H . Тогда, используя уравнение неразрывности и формулу для скорости звука [(36) гл. I], получим:

$$\frac{p_1}{p_H} = 1 + kM_H^2 \cdot \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{p_H}{p_1} \right).$$

Выразив с помощью уравнения ударной адиабаты (18) отношение плотностей $\frac{\rho_H}{\rho_1}$ через отношение давлений и подставив его в последнее уравнение, приходим к искомой зависимости:

$$\frac{p_1}{p_H} = \frac{2k}{k+1} M_H^2 \cdot \sin^2 \alpha - \frac{k-1}{k+1}. \quad (45)$$

При одной и той же скорости набегающего потока косой скачок, как это следует из (45), всегда бывает слабее прямого.



Фиг. 35. Образование волны слабых возмущений.

Интенсивность косого скачка уплотнения изменяется с изменением угла наклона его фронта к направлению набегающего потока. В предельном случае, когда косой скачок переходит в прямой ($\alpha = 90^\circ$), увеличение давления получается максимальным. При этом равенство (45) принимает тот же вид, что и равенство (20), известное из теории прямого скачка уплотнения.

В другом предельном случае, когда угол наклона скачка к направлению потока перед ним определяется условием

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{M_H}, \quad (46)$$

косой скачок вырождается в бесконечно слабую волну ($p_1 \approx p_H$). Разъясним этот факт несколько подробнее. Пусть в некоторой точке O сверхзвукового газового потока возникло бесконечно малое возмущение (фиг. 35), вызвавшее незначительные колебания давления. Слабая волна сжатия (или разрежения) побежит

из центра возмущения во все стороны со скоростью звука a . Через единицу времени ($\tau = 1$ сек.) фронт волны будет представлять собой сферу радиуса $r = a$. Однако вся масса жидкости, в которой возникла волна, сносится по потоку со сверхзвуковой скоростью $\omega_n > a$. По этой причине слабые волны давления никогда не выйдут за пределы конуса, поверхность которого является огибающей для сферических волн. Образующая такого конуса носит название *характеристики*, а угол α_0 между образующей и осью называют *углом распространения слабых возмущений*. Этот угол, как видно из фиг. (35), определяется равенством

$$\sin \alpha_0 = \frac{a}{\omega_n} = \frac{1}{M_n}.$$

Итак, фронт очень слабого косоугольного скачка уплотнения располагается по отношению к набегающему потоку под углом α_0 , который определяется равенством (46). Сильные возмущения, как было показано выше, распространяются со сверхзвуковой скоростью, в связи с чем фронт сильного скачка образует с набегающим потоком больший угол, чем характеристика:

$$\alpha > \alpha_0.$$

Предельный диапазон углов α для косоугольного скачка уплотнения, как видно из приведённых выше данных, следующий:

$$90^\circ \geq \alpha \geq \alpha_0.$$

Подставим выражение (45) в уравнение ударной адиабаты (18), тогда получим равенство, связывающее отношение $\frac{\rho_1}{\rho_n}$ в случае косоугольного скачка уплотнения с числом M набегающего потока и углом наклона скачка:

$$\frac{\rho_1}{\rho_n} = \frac{\frac{k+1}{k-1}}{1 + \frac{1}{M_n^2 \sin^2 \alpha} \cdot \frac{2}{k-1}} = \lambda_{nn}^2. \quad (47)$$

Это равенство при $M_n \approx \frac{1}{\sin \alpha}$ даёт $\rho_1 \approx \rho_n$, а в случае $\alpha = 90^\circ$ переходит в соответствующее равенство (22) для прямого скачка уплотнения.

Зная отношение значений плотности газа за и перед косым скачком, можно вычислить угол ω , на который отклоняется поток в скачке (фиг. 30). Из уравнения неразрывности имеем:

$$\frac{\omega_{1n}}{\omega_{nn}} = \frac{\rho_n}{\rho_1}.$$

В то же время по схеме потока в скачке (фиг. 33) получается:

$$\frac{\omega_{1n}}{\omega_{Hn}} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (48)$$

Отсюда следует:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\rho_H}{\rho_1} \operatorname{tg} \alpha, \quad (49)$$

или на основании равенства (47):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \lambda_{Hn}^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{k+1}{2} \cdot M_H^2 \sin^2 \alpha}{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_H^2 \cdot \sin^2 \alpha} \operatorname{tg} \alpha = \\ &= \frac{k-1}{k+1} \left(1 + \frac{2}{k-1} \frac{1}{M_H^2 \sin^2 \alpha} \right) \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \quad (50)$$

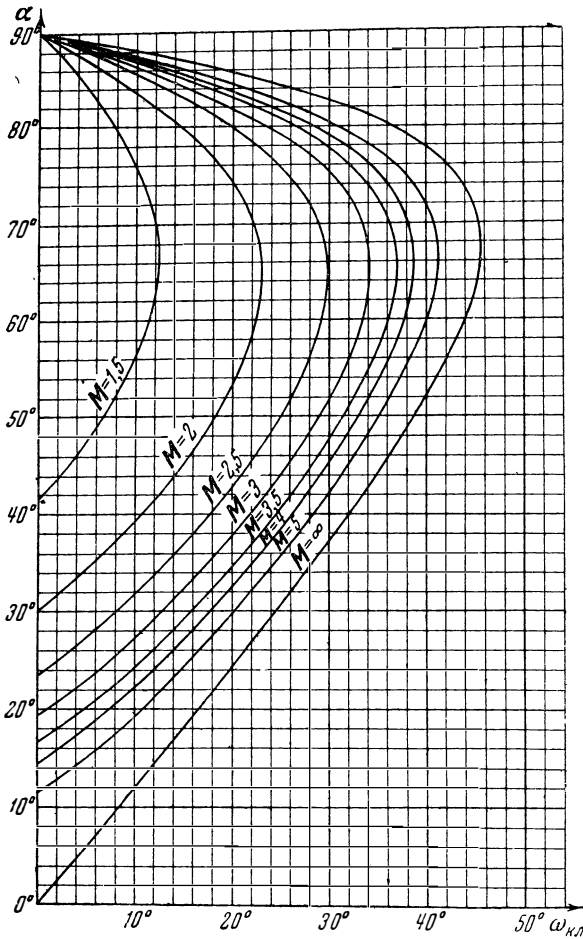
Но если известен угол между вектором скорости за скачком и фронтом последнего, то угол отклонения потока согласно выражению (30) равен:

$$\omega = \alpha - \beta.$$

Мы указали способ определения угла, на который отклоняется поток в скачке, когда положение фронта известно. Если, наоборот, задано определённое отклонение сверхзвукового потока, то в тех случаях, когда в результате отклонения величина скорости должна уменьшиться (например, при сверхзвуковом обтекании клина, изображённого на фиг. 31, а), возникает косой скачок уплотнения; при этом по формулам (30) и (50) может быть вычислен угол α , под которым расположится фронт скачка по отношению к потоку.

На фиг. 36 представлены кривые $\alpha = f(\omega)$, соответствующие различным значениям числа M набегающего потока, построенные для воздуха ($k = 1,4$). Как видим, каждому значению числа M отвечает некоторое предельное отклонение потока ($\omega = \omega_{\max}$), выше которого нельзя получить ни при каком положении фронта скачка. Так, при $M = 2$ поток может быть отклонён не более, чем на угол $\omega_{\max} = 23^\circ$, при $M = 3$ — на $\omega_{\max} = 34^\circ$, при $M = 4$ — на $\omega_{\max} = 39^\circ$. Даже при бесконечно большой скорости ($M = \infty$) поток можно отклонить максимум на угол $\omega_{\max} = 46^\circ$. Наличие такого ограничения в отклонении потока после скачков уплотнения является вполне естественным фактом, ибо как при бесконечно слабом скачке, т. е. когда угол α равен углу распространения слабых возмущений, а образующая конуса возмущений является *характеристикой*, так и при наиболее сильном — прямом скачке угол отклонения потока становится равным нулю, следовательно, кривые $\omega = f(\alpha)$ имеют максимумы.

На кривых фиг. 36 видно, что одному и тому же отклонению потока отвечают два положения фронта скачка. Опыты показывают, что из двух возможных положений скачка более

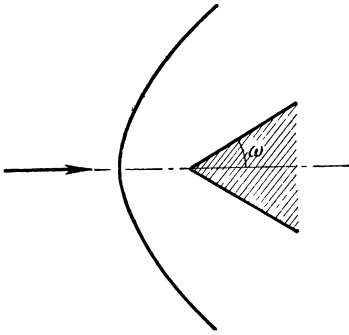


Фиг. 36. Зависимость направления косого скачка от угла отклонения потока.

устойчиво такое, при котором угол между направлением потока и фронтом скачка меньше. Таким образом, на фиг. 36 более важны нижние ветви кривых, лежащие под точками максимумов. Нижнее пересечение каждой из кривых $\alpha = f(\omega)$ с осью ординат соответствует перерождению скачка в слабую волну,

а получающийся при этом угол α_0 представляет собой угол слабых возмущений.

Возможен случай сверхзвукового обтекания клина, у которого угол при вершине оказывается больше, чем допускается по фиг. 36. При этом не может осуществиться обтекание с плоским косым скачком уплотнения. Опыт показывает, что в таком случае образуется скачок уплотнения с криволинейным фронтом (фиг. 37), причём поверхность скачка размещается впереди, не соприкасаясь с носиком клина. В центральной своей части скачок получается прямым, но при удалении от оси симметрии переходит в косой скачок, который на больших расстояниях вырождается в слабую волну. Такая же форма скачка уплотнения наблюдается при сверхзвуковом обтекании тела, имеющего закруглённую носовую часть (фиг. 38).



Фиг. 37. Скачок уплотнения при сверхзвуковом обтекании клина со слишком большим углом при вершине ($\omega > \omega_{\max}$).

Иногда необходимо вычислить скорость потока после косого скачка уплотнения. Проще всего это сделать, пользуясь треугольниками скоростей (фиг. 33), из которых следует:

$$\omega_1 = \frac{\omega_t}{\cos \beta}, \quad \omega_t = \omega_n \cos \alpha.$$

Отсюда получаем:

$$\omega_1 = \omega_n \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \quad (51)$$

или в безразмерных обозначениях:

$$\lambda_1 = \lambda_n \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}. \quad (52)$$

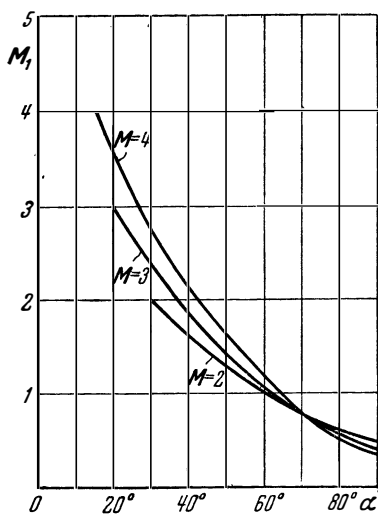
Обращаясь к известной переходной формуле [(47) гл. I], можно найти соответствующее значение числа M за косым скачком:

$$M_1^2 = \frac{1}{k+1} \frac{\lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}.$$

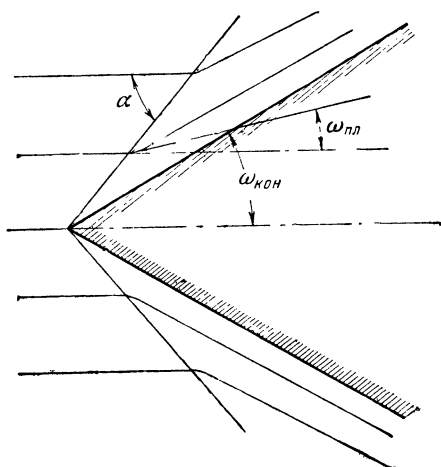
На фиг. 39 приведены кривые зависимости числа M_1 за скачком уплотнения от положения фронта: $M_1 = f(\alpha)$ для трёх значений числа M в набегающем потоке ($M = 2, 3, 4$). Как видим, во всех трёх случаях при углах наклона фронта $\alpha \leq 60^\circ$ скорость потока после косого скачка уплотнения оказывается сверх-

звуковой. Крайняя левая точка каждой кривой отвечает режиму перехода косого скачка уплотнения в слабую волну, крайняя правая точка — в прямой скачок уплотнения.

Случай, когда образуется прямой скачок, является наиболее простым, так как при этом сразу получается дозвуковое течение. После косого скачка поток замедляется, но, как мы видели, может оставаться сверхзвуковым. В таком случае последующее



Фиг. 39. Зависимость числа M за скачком уплотнения от угла наклона скачка.

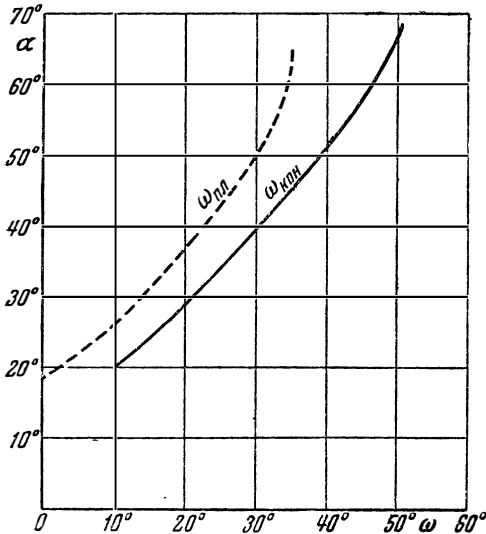


Фиг. 40. Схема сверхзвукового обтекания конуса.

торможение должно сопровождаться вторым скачком, который может быть как прямым, так и косым. В последнем случае может понадобиться ещё один скачок. Итак, полное торможение сверхзвукового потока требует либо одного прямого скачка, либо системы из нескольких косых скачков, обычно завершаемой слабым прямым скачком. Можно представить себе такую систему скачков, в которой потери меньше, нежели в одном прямом скачке. Остановимся теперь на сверхзвуковом обтекании конуса.

При симметричном сверхзвуковом обтекании конуса (фиг. 40) перед последним устанавливается коническая ударная волна (фиг. 31, б), причём вершины конуса и ударной волны (поверхности скачка, практически совпадают. Ввиду того, что толщина скачка всегда очень мала, приведённые выше формулы для расчёта плоскопараллельного косого скачка применимы и к осесимметричному скачку. В частности, если известны угол между фронтом и направлением потока α и скорость перед скачком

(фиг. 40), то по формуле (50) можно отыскать направление потока $\omega_{пл}$ ($\beta_{пл} = \alpha - \omega_{пл}$), по формуле (51) — скорость и по формуле (45) — статическое давление непосредственно за скачком. Однако в отличие от плоского в осесимметричном потоке направление струй газа непосредственно за скачком ($\omega_{пл}$) непараллельно поверхности тела ($\omega_{пл} \neq \omega_{кон}$). В связи с этим угол отклонения



Фиг. 41. Сравнение углов косо́го скачка на конусе и на клине (пунктир) при коэффициенте скорости $\lambda_n = 2$ ($M_n = 3,16$).

отклонения потока непосредственно за скачком (пунктир), т. е. отвечающая плоскому потоку (обтекание клина). Как видим, при одинаковых углах конуса и клина на конусе скачок получается слабее (более наклонный).

Выше было указано, что изменения направления потока, скорости и состояния газа в самом скачке не зависят от формы поверхности скачка; при заданной скорости потока (λ_n) и угле скачка α эти изменения получаются одинаковыми в плоскопараллельном и осесимметричном течениях. Различие этих двух случаев состоит только в том, что один и тот же угол скачка получается не при одинаковых углах раствора конуса и клина. Иначе говоря, при сравнении осесимметричного и плоского косых

струй за скачком постепенно изменяется, приближаясь асимптотически к полууглу при вершине конуса. Непосредственно за скачком угол отклонения имеет наименьшее значение:

$$\omega_{пл} < \omega_{кон}$$

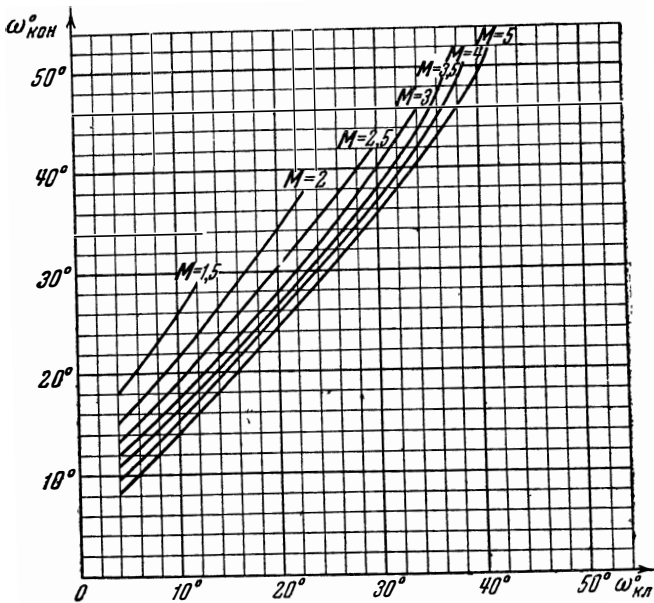
и, как упоминалось, получается таким же, как для плоского потока, т. е. может быть определён с помощью фиг. 36.

Зависимость угла α между фронтом скачка и направлением потока от полуугла при вершине конуса ($\omega_{кон}$) для случая $\lambda_n = 2$ ($M_n = 3,16$) приведена на фиг. 41 (сплошная)¹⁾. Здесь же нанесена кривая $\alpha = f(\omega_{пл})$, дающая углы

¹⁾ Расчёт произведён Г. И. Петровым и Е. П. Уховым. См. Петров Г. И. и Ухов Е. П., Расчёт восстановления давления при переходе от сверхзвукового потока к дозвуковому при различных системах плоских скачков уплотнения, М., 1947.

скачков целесообразно выражать все факторы в функции угла скачка, а не угла при вершине обтекаемого тела. В этом случае результаты расчёта осесимметричного и плоского скачков получатся одинаковыми.

Течение газа за скачком в осесимметричном случае отличается от плоского, именно: скорость потока, статическое давление и плотность газа имеют близкие, но неодинаковые значения,



Фиг. 42. Зависимость полуугла при вершине конуса от угла поворота потока в скачке для различных скоростей потока.

а углы поворота потока в скачке (угол клина) и на бесконечности (угол конуса) существенно различны. На фиг. 42 приведены кривые

$$\omega_{\text{кон}} = f(\omega_{\text{пл}})$$

для различных значений числа M . На фиг. 43 изображены кривые значений числа M за скачком (пунктир) и на поверхности конуса (сплошная) в функции угла скачка при различных значениях скорости набегающего потока. Как видим, уменьшение скорости между областью, лежащей непосредственно за скачком (соответствует плоскому течению), и поверхностью конуса получается незначительным; так как числа M за скачком и на поверхности конуса близки, то близки и соответственные числа λ .

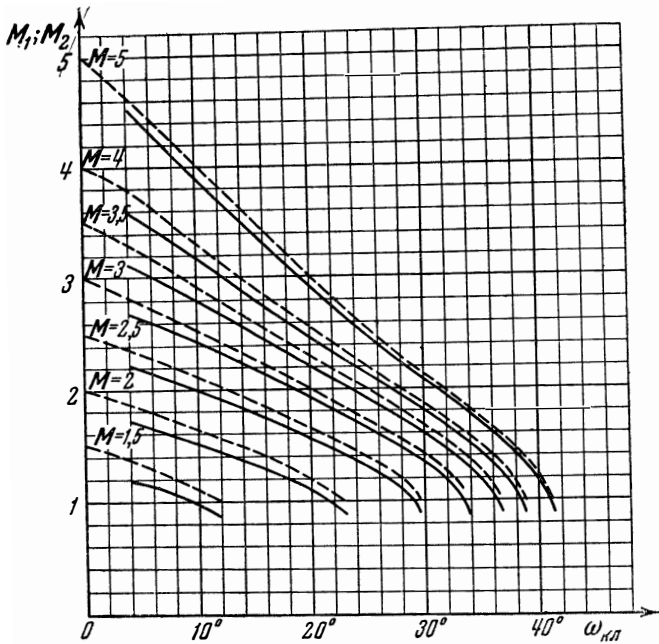
Для практических расчётов можно считать, что скорость за осесимметричным скачком есть средняя арифметическая величина:

$$\lambda_1 \approx \frac{\lambda_{1 \text{ пл}} + \lambda_{1 \text{ кон}}}{2}, \quad (53)$$

или даже равная скорости за плоским скачком:

$$\lambda_1 \approx \lambda_{1 \text{ пл}}. \quad (54)$$

Но при этом для осесимметричного течения оказываются пригодными формулы, полученные выше для плоскопараллельного



Фиг. 43. Значения чисел M за скачком (пунктир) и на поверхности конуса в зависимости от угла скачка.

течения, с той лишь разницей, что одним и тем же углам скачка соответствуют разные углы при вершине тела (фиг. 43).

§ 3. О применении пневматического насадка в сверхзвуковом потоке

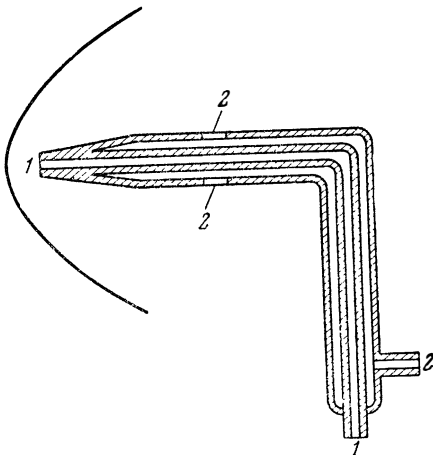
Для измерения скорости сверхзвукового газового течения можно пользоваться обычным пневматическим насадком (фиг. 44). Нужно только учесть, что при сверхзвуковом обтекании насадка перед ним возникает ударная волна. Если ось симметрии

насадка параллельна направлению потока, то центральная газовая струйка, претерпевающая полное торможение, сначала проходит через прямую часть ударной волны, где её скорость становится дозвуковой; затем при подходе к отверстию 1 скорость плавно уменьшается до нуля.

Давление в трубке 1 (p_{01}) может быть вычислено следующим способом. Из выражения (68) главы I имеем:

$$\frac{p_{01}}{p_1} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{k}{k-1}};$$

здесь p_1 , M_1 — статическое давление и число M непосредственно за ударной волной. Используя формулы (47), (48) главы I и (16), переходим к числу M в набегающем потоке:



Фиг. 44. Пневматический насадок в сверхзвуковом потоке.

$$M_1^2 = \frac{\frac{2}{k+1} \cdot \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2} = \frac{\frac{2}{k+1} \cdot \frac{1}{\lambda_H^2}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\lambda_H^2}} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_H^2}{k M_H^2 - \frac{k-1}{2}}$$

или

$$1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 = \frac{\left(\frac{k+1}{2} \right)^2 \cdot M_H^2}{\frac{k-1}{2} \left(\frac{2k}{k-1} M_H^2 - 1 \right)}.$$

Отсюда на основании равенства (20)

$$\frac{p_1}{p_H} = \frac{2k}{k+1} M_H^2 - \frac{k-1}{k+1}$$

получаем общераспространённую формулу, выражающую отношение давления p_{01} в трубке 1 к статическому давлению в набегающем потоке (p_H) как функцию числа M в набегающем потоке:

$$\frac{p_{01}}{p_H} = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left(\frac{2}{k-1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{M_H^{\frac{2k}{k-1}}}{\left(\frac{2k}{k-1} M_H^2 - 1 \right)^{\frac{1}{k-1}}}. \quad (55)$$

В случае воздуха ($k=1,4$) формула приводится к следующему виду:

$$\frac{p_{01}}{p_H} = \frac{166,7 \cdot M_H^2}{(7 \cdot M_H^2 - 1)^{2,5}}. \quad (56)$$

Если боковые отверстия 2 находятся на расстоянии, равном не менее 4—6 диаметрам насадка от переднего его края, то, как показывает опыт, давление в трубке 2 равно статическому давлению набегающего потока (p_H). Таким образом, величины p_{01} и p_H измеряются непосредственно на манометрах, присоединённых соответственно к трубкам 1 и 2 насадка.

Для вычисления скорости потока по формулам (55) или (56) нужно ещё знать скорость звука, или, что то же, температуру набегающего потока:

$$\omega_H = M_H \cdot a_H, \quad a_H = \sqrt{kgRT_H}.$$

В некоторых случаях удобнее пользоваться формулой, выражающей отношение давлений в трубках насадка в функции коэффициента скорости набегающего потока (λ_H). Эту формулу можно получить из выражений (21) и (23) данной главы:

$$\frac{p_{01}}{p_H} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_H^2} - \frac{k-1}{k+1}\right) \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\lambda_H^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}}. \quad (57)$$

В случае воздуха ($k=1,4$)

$$\frac{p_{01}}{p_H} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_H^2} - 0,167\right) \left(1 - \frac{0,167}{\lambda_H^2}\right)^{2,5}}. \quad (58)$$

Вычисление скорости набегающего потока по формуле (57) можно выполнить, если известно значение критической скорости:

$$\omega_H = \lambda_H \cdot a_{кр},$$

где

$$a_{кр} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \cdot gRT_{0H}},$$

причём

$$T_{0H} = \frac{T_H}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_H^2}.$$

Заметим, что, например, в аэродинамической трубе всегда известна именно температура торможения, т. е. температура всасываемого в трубу воздуха.

ГЛАВА IV

УСКОРЕНИЕ ГАЗОВОГО ПОТОКА

§ 1. Сверхзвуковое сопло

В сверхзвуковом сопле Лавалья газовый поток преобразуется таким образом, что скорость истечения становится больше скорости звука:

$$M > 1, \quad \omega_a > a.$$

Рассмотрим случай одномерного потока газа по сверхзвуковому соплу. Уравнение неразрывности даёт:

$$\frac{G}{g} = \rho \omega F = \text{const.}$$

Газ движется по соплу с ускорением, поэтому при малой скорости, когда плотность газа можно считать неизменной, необходимо уменьшать сечения. Этим обусловлено сужение начальной части сопла. При дальнейшем расширении газа увеличение скорости сопровождается заметным уменьшением давления и, следовательно, плотности газа, что частично компенсирует рост скорости, и поэтому сужать сечение канала нужно уже не так быстро. Наконец, процесс проходит через такую точку, когда плотность расширяющегося газа уменьшается обратно пропорционально скорости, и сечение в данном месте изменять не придётся. Как известно, в этом сечении канала скорость потока равна скорости звука. Дальнейшее увеличение скорости сопровождается ещё более быстрым падением плотности, и для удовлетворения уравнению неразрывности нужно увеличивать сечение сопла.

Таким образом, *сверхзвуковое сопло, предназначенное для получения сверхзвукового потока, должно состоять из сужающейся (дозвуковой) и расширяющейся (сверхзвуковой) частей (фиг. 45). В узком сечении сверхзвукового сопла (критическом сечении) скорость потока равна звуковой.*

Нетрудно прийти к этому же выводу и математическим путём. Для этого необходимо рассмотреть совместно уравнения нераз-

рвности и Бернулли (без учёта трения) в дифференциальной форме:

$$d(\rho w F) = 0, \quad dp + \rho w dw = 0.$$

Разделим второе уравнение на ρw^2 и умножим и разделим первый его член на $d\rho$. Тогда получим:

$$\frac{1}{w^2} \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dw}{w} = 0.$$

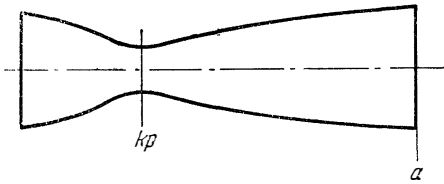
Из первого уравнения имеем:

$$F w d\rho + F \rho dw + \rho w dF = 0$$

или после деления на $\rho w F$:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dF}{F} - \frac{dw}{w}.$$

Подставляя этот результат во второе уравнение и учитывая, что согласно равенству (36) производная давления по плотности в идеальном адиабатическом процессе равна квадрату скорости звука в газе, получим:



Фиг. 45. Сопло Лавалья.

$$\left(\frac{w^2}{a^2} - 1 \right) \frac{dw}{w} = \frac{dF}{F}. \quad (1)$$

Анализируя это равенство, можно заметить, что при расширении (ускорении) газа,

когда $\frac{dw}{w} > 0$, сечение сопла должно изменяться так, как указывалось выше, а именно:

$$\text{если } w < a, \quad \text{то } \frac{dF}{F} < 0 \text{ (сужение),}$$

$$\text{если } w = a, \quad \text{то } \frac{dF}{F} = 0 \text{ (кризис),}$$

$$\text{если } w > a, \quad \text{то } \frac{dF}{F} > 0 \text{ (расширение).}$$

Таким образом, наблюдаются три режима: *дозвуковой* $w < a_{кр}$, *критический* $w = a_{кр}$, *сверхзвуковой* $w > a_{кр}$.

Следует отметить, что около критического сечения канала очень чувствителен к изменению поперечного сечения канала. Так, например, для изменения числа M на 10% (от $M = 0,9$ до $M = 1$) достаточно изменить площадь сечения на 1%, а для перехода от $M = 0,95$ к $M = 1$ — на 0,25%. По этой причине нельзя поддерживать критический режим на достаточно протяжённом участке прямой трубы (пограничный слой, образу-

ющийся за счёт торможения газа у стенок, как бы сужает сечение струи).

Плотность, как уже отмечалось, с ростом скорости уменьшается. В районе критического сечения сопла

$$\frac{dF}{F} = 0;$$

на этом участке уравнение неразрывности, если отложить по оси абсцисс ρ , а по оси ординат ω , выражает гиперболу, а площадь поперечного сечения проходит через экстремум (минимум). Из соотношения (1) следует, что именно в узком сечении сопла Лаваля получается скорость потока, равная местной скорости звука.

Рассмотрим зависимость скорости от площади поперечного сечения сопла. Для этого, пользуясь уравнением неразрывности, свяжем произвольное сечение сверхзвукового сопла с его минимальным сечением:

$$\rho \omega F = \rho_{\text{кр}} \omega_{\text{кр}} F_{\text{кр}};$$

отсюда

$$\frac{F}{F_{\text{кр}}} = \frac{\rho_{\text{кр}} \omega_{\text{кр}}}{\rho \omega}.$$

Однако $\omega = aM$ и $M_{\text{кр}} = 1$, поэтому

$$\frac{F}{F_{\text{кр}}} = \frac{\rho_{\text{кр}} a_{\text{кр}}}{\rho a M}.$$

Но, как известно,

$$\frac{a_{\text{кр}}}{a} = \left(\frac{T_{\text{кр}}}{T} \right)^{\frac{1}{2}}$$

и при идеальном процессе

$$\frac{\rho_{\text{кр}}}{\rho} = \left(\frac{T_{\text{кр}}}{T} \right)^{\frac{1}{k-1}},$$

следовательно,

$$\frac{F}{F_{\text{кр}}} = \left(\frac{T_{\text{кр}}}{T} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \cdot \frac{1}{M}.$$

На основании равенств (40) и (41) главы I имеем:

$$\frac{T_{\text{кр}}}{T} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2}}.$$

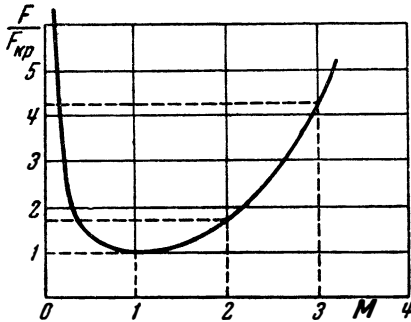
Отсюда следует:

$$\frac{F}{F_{кр}} = \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}{M \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}. \quad (2)$$

Если принять для воздуха $k = 1,4$, то получится:

$$\frac{F}{F_{кр}} = \frac{(1 + 0,2M^2)^3}{1,73M}. \quad (3)$$

Из этих формул видно, что потребное безразмерное значение площади сечения является функцией только числа M . Следует подчеркнуть, что все приведённые выражения справедливы при



Фиг. 46. Зависимость безразмерной площади сопла Лавала от числа M ($k=1,4$).

из кривой, уравнение (2) имеет два решения; одному и тому же

$\frac{F}{F_{кр}}$ отвечают два значения числа M : одно при дозвуковой скорости и другое при сверхзвуковой скорости. Для входной части сопла, предшествующей критическому сечению, годны все дозвуковые решения, а для выходной части — все сверхзвуковые. Однозначное решение получается только в критическом сечении

$$\left(\frac{F}{F_{кр}} = 1\right).$$

Давление и плотность газа при идеальном процессе зависят однозначно от числа M и определяются формулами (68) и (71) главы I. Отсюда следует, что, выбрав произвольное сечение, мы получим в этом сечении определённое значение числа M которому соответствуют определённые значения температуры, давления и плотности газа (с точностью до влияния пограничного слоя).

отсутствии тепловых и гидравлических потерь, т. е. при изменении состояния газа по идеальной адиабате.

Если задаётся конфигурация сверхзвукового сопла, то можно указать, какое число M получается в любом сечении. Каждому значению числа M соответствует определённая величина отношения $\frac{F}{F_{кр}}$. Кри-

вая $\frac{F}{F_{кр}} = f(M)$, построенная по формуле (3), приведена на фиг. 46. При этом, как видно

Величина скорости в данном сечении сверхзвукового сопла зависит только от температуры торможения T_0 . Изменение полного давления p_0 на скорость не влияет, так как пропорционально ему изменяется и местное давление p , а их отношение остаётся неизменным; также остаётся неизменным и отношение температур

$$\frac{T_0}{T} = \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Для получения на срезе сверхзвукового сопла определённого значения числа M необходимо соответствующим образом подобрать площадь сечения и, кроме того, надо иметь достаточный запас давления в камере перед соплом. Другими словами, для достижения требуемого числа M на срезе сопла давление в камере должно в известное число раз превосходить давление окружающей среды.

Предположим, что давление в камере p_0 возросло, тогда на срезе сопла давление также увеличивается, и газ истекает с избыточным давлением. Где-то за срезом сопла давление уравнивается с атмосферным, избыток давления израсходуется в струе на увеличение скорости, а так как для сверхзвукового потока увеличение скорости требует увеличения поперечного сечения струи, то струя как бы образует в пространстве расширяющееся сверхзвуковое сопло. Если же давление в камере по какой-либо причине понизится, то на срезе произойдёт понижение давления, причём давление может получиться ниже атмосферного; скорость истечения при этом не изменится, так как она является функцией только отношения площадей выходного и критического сечений сопла. Изменение давления в атмосфере не сказывается на истечении из сопла, так как волна давления, распространяющаяся со скоростью звука, сносится сверхзвуковым газовым потоком. По выходе газовой струи из сопла давление в ней в конце концов должно сравняться с атмосферным, т. е. повыситься за счёт торможения сверхзвукового потока; этот процесс сопровождается возникновением ударных волн и будет ниже разобран более подробно.

Таким образом, *давление на срезе данного сверхзвукового сопла не связано с давлением атмосферы, а зависит только от давления в камере и формы сопла.*

Лишь в случае так называемого расчётного режима давление на срезе сопла равно атмосферному давлению: $p_a = p_n$. На нерасчётных режимах, когда давление на срезе больше или меньше атмосферного, должно происходить изменение давления в струе вне сопла.

Уже отмечалось, что процесс преобразования давления в скорость в сверхзвуковом и в дозвуковом потоках протекает без

существенных потерь, т. е. примерно при постоянной энтропии, и, следовательно, очень близок к идеальной адиабате. Именно поэтому приведённые выше формулы расчёта идеального сверхзвукового сопла дают хорошие результаты для реальных сопел.

Во многих случаях расчётные формулы упрощаются, если параметры состояния газа определяются в функции не от числа M , а от коэффициента скорости. Удобство оперирования коэффициентом скорости связано с тем, что его знаменатель (критическая скорость) зависит только от температуры торможения, которая постоянна для любого участка потока с изолированным процессом. Законы изменения температуры, давления и плотности газа в функции коэффициента λ выражаются формулами (44), (72) и (73) главы I.

Выведем выражение, связывающее площадь сечения сверхзвукового сопла с коэффициентом скорости. Обратимся к уравнению неразрывности

$$\frac{F}{F_{кр}} = \frac{\rho_{кр} a_{кр}}{\rho \omega}.$$

Подставляя сюда

$$\omega = \lambda \cdot a_{кр}, \quad \frac{\rho_{кр}}{\rho} = \left(\frac{T_{кр}}{T} \right)^{\frac{1}{k-1}},$$

получим:

$$\frac{F}{F_{кр}} = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2} \right]^{\frac{1}{k-1}}. \quad (4)$$

Выведем в заключение формулу для расчёта секундного расхода газа в сверхзвуковом сопле. Удобно находить расход газа по критическому сечению сопла:

$$G = g \cdot \rho_{кр} a_{кр} \cdot F_{кр}, \quad (5)$$

так как из выражений (44), (72), (73) главы I легче всего определить состояние газа в критическом сечении ($\lambda = 1$):

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_0}{T_{кр}} &= \frac{k+1}{2}, & \frac{\rho_0}{\rho_{кр}} &= \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}}, \\ \frac{p_0}{p_{кр}} &= \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k}{k-1}}, & \frac{a_0}{a_{кр}} &= \left(\frac{T_0}{T_{кр}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

В частности, для воздуха ($k = 1,4$) имеет место

$$T_0 = 1,2 \cdot T_{кр}, \quad \rho_0 = 1,58 \rho_{кр}, \quad p_0 = 1,89 p_{кр}, \quad a_0 = 1,1 a_{кр}. \quad (7)$$

Заменяя с помощью соотношений (6) критические значения

плотности и скорости звука в выражении (5) значениями, соответствующими состоянию торможения, т. е. состоянию в камере перед соплом, получим:

$$G = g\rho_0 a_0 F_{кр} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}},$$

или на основании уравнения состояния и формулы (36) главы I:

$$G = \frac{p_0 F_{кр}}{\sqrt{T_0}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \left(\frac{kg}{R} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

Итак, расход газа через сверхзвуковое сопло зависит только от состояния газа в камере перед соплом. Для воздуха ($k=1,4$, $R=29,27$) имеем следующую упрощённую формулу расхода:

$$G = 0,4 \frac{p_0 F_{кр}}{\sqrt{T_0}} |кг/сек|. \quad (9)$$

По формулам (8) и (9) производят подбор размеров критического сечения сверхзвукового сопла для заданного расхода и известного состояния газа перед соплом.

§ 2. Простое сопло

В тех случаях, когда скорость истечения меньше критической, в качестве сопла применяют простой сходящийся насадок — конфузор. Состояние газа и скорость течения в различных сечениях конфузора можно определять по тем же формулам, что и в случае сверхзвукового сопла. Однако поток в конфузоре имеет ряд особенностей, которые нельзя не учитывать.

Наиболее важно, что при дозвуковом режиме истечения давление в струе на срезе сопла практически равно давлению в окружающей среде (в обтекающем потоке), так как при этом режиме любое изменение давления в атмосфере в виде волны давления проникает внутрь сопла, вызывая изменение давления перед соплом и соответствующее изменение скорости истечения; перестройка потока продолжается до тех пор, пока давление в струе на срезе сопла не сравняется с атмосферным. Поэтому в отличие от сверхзвукового сопла в простом конфузоре скорость истечения определяется не его формой, а только давлением в камере перед конфузуром. Таким образом, если известно давление в камере p_0 , то при заданном давлении в плоскости выходного среза p_H коэффициент скорости истечения находится непосредственно по формуле (78) главы I:

$$\lambda_a^2 = \frac{k+1}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p_H}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right].$$

Величина скорости истечения равна $\omega_a = \lambda_a \cdot a_{кр}$, где критическая скорость зависит согласно формуле (43) главы I только от температуры в камере перед соплом (температуры торможения):

$$a_{кр} = a_0 \sqrt{\frac{2}{k+1}} = \sqrt{\frac{2k}{k+1}} gRT_0.$$

Расход газа в конфузоре найдём по уравнению неразрывности, применив его к выходному сечению:

$$G = g\rho_a \omega_a F_a.$$

Если использовать известные уже зависимости:

$$\frac{\rho_a}{\rho_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_a^2\right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad \frac{a_{кр}}{a_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

то получится:

$$G = g\rho_0 a_0 F_a \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_a^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda_a$$

или

$$G = \frac{\rho_0 F_a}{\sqrt{T_0}} \lambda_a \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_a^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{2kg}{(k+1)R}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

причём величина λ_a предварительно вычисляется, как уже указывалось, по формуле (78) главы I.

§ 3. Сверхзвуковое течение газа с непрерывным увеличением скорости. Обтекание внешнего тупого угла

Рассмотрим сначала простейший вид сверхзвукового течения газа — поступательный равномерный поток. При таком течении все частицы газа движутся по параллельным траекториям с постоянной по величине скоростью. Траектории частиц являются одновременно линиями тока, которые непроницаемы для газа.

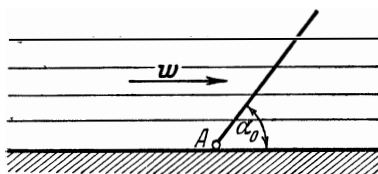
Если в поле течения нет никаких препятствий в виде твёрдых тел или границ (стенок), то газ не испытывает никаких возмущений. Простейшей границей, могущей изменить характер равномерного поступательного течения газа, является прямолинейная твёрдая стенка. Рассмотрим сначала случай, когда такая стенка расположена параллельно направлению течения, т. е. совпадает с одной из линий тока. Если движущийся газ занимает всю бесконечную область над стенкой и сама стенка тоже бесконечна по длине, то ясно, что в этом случае стенка не окажет никакого влияния на течение газа¹⁾. Отметим, что это положение справедливо и в общем случае для кривых линий тока: если

¹⁾ Влиянием вязкости газа мы пренебрегаем.

стенка совпадает с линией тока, то она не оказывает воздействия на движущийся газ.

Если бы в некоторой точке A стенки (фиг. 47) имелось какое-либо препятствие, то оно вызвало бы слабое возмущение равномерного потока. Такое возмущение распространилось бы в равномерном сверхзвуковом потоке по прямой линии — характеристике, — составляющей с направлением скорости угол α_0 , определяемый из условия

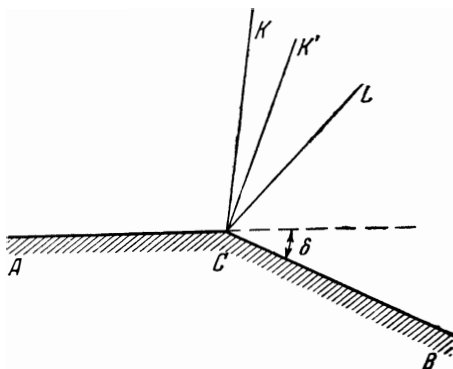
$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{M}.$$



Фиг. 47. Параллельный равномерный поток над плоской стенкой.

Этот угол, как нам уже известно, называется углом распространения слабых возмущений.

Теперь мы можем дать картину обтекания внешнего тупого угла. Пусть в некоторой точке C стенка поворачивает, образуя с первоначальным направлением угол δ (фиг. 48). При сверхзвуковом обтекании внешнего тупого угла ACB газ расширяется, ибо область, занятая газом, увеличивается; при расширении газ ускоряется. Вдоль участка стенки AC скорость газа постоянна. Угловая точка C при обтекании её газом является препятствием, которое служит источником возникновения слабых возмущений в газовом потоке. Эти возмущения, как было показано, распространяются в равномерном потоке по прямой линии — характеристике CK , которая отделяет невозмущённый газовый поток от возмущённого. Вдоль участка стенки CB скорость газа снова принимает постоянное значение, большее, чем в исходном потоке вдоль AC . Это значит, что возмущение, возникшее вследствие обтекания угловой точки C , закончится на другой характеристике CL , которая также прямолинейна. Таким образом, поворот потока к новому направлению осуществляется внутри угла KCL между двумя прямолинейными характеристиками. Для большей наглядности разобьём непрерывное расширение газа внутри угла KCL на большое число участков с незначительными, но прерывными изменениями параметров.



Фиг. 48. Поворот сверхзвукового потока газа при обтекании угла ACB .

Первый малый скачок скорости и давления произойдет на плоскости, следом которой является прямая $СК$; так как давление при этом падает, то согласно теории скачков нормальная к плоскости $СК$ составляющая скорости увеличивается; ввиду неизменности тангенциальной составляющей скорости поток немного изменяет своё направление, отклоняясь от плоскости скачка разрежения в сторону, противоположную той, в которую он отклонился бы в скачке сжатия. Итак, за плоскостью $СК$ слабого скачка разрежения поток получил несколько большую скорость, немного отклонился в соответствующем направлении, а давление, плотность и температура газа слегка уменьшились. Возмущение, распространяющееся из области более низких давлений, теперь уже должно быть ограничено новой характеристикой $СК'$, которая вследствие отклонения потока и увеличения числа M располагается правее прежней характеристики $СК$. Левее характеристики $СК'$ никакие возмущения не проникают, поэтому вдоль линии $СК'$, так же как перед этим вдоль линии $СК$, параметры газа и скорость движения неизменны.

Если скорость потока, которая несколько увеличилась в первом скачке, спроектировать на направления, нормальное и тангенциальное ко второй характеристике $СК'$, то окажется, что нормальная составляющая скорости здесь меньше ($\omega'_u < \omega_u$), а радиальная — больше ($\omega'_r > \omega_r$), чем на линии $СК$.

Второй слабый скачок разрежения, который мы совместим с плоскостью $СК'$, вызывает новое отклонение потока в сторону $СВ$ и дальнейшее расширение газа, сопровождающееся увеличением скорости.

Поворот потока, очевидно, завершится, если струйка, прилегающая к стенке, станет параллельной направлению $СВ$ (фиг. 48). Следовательно, у самой стенки вектор скорости параллелен $СВ$.

Но в силу того, что все характеристики, исходящие из точки $С$, прямолинейны, т. е. скорость (и остальные параметры газа) вдоль них не изменяется, то и вдоль *последней* характеристики $СL$ вектор скорости сохраняет постоянное (по величине и направлению) значение ω_n ¹⁾. Таким образом, за *последней* характеристикой $СL$ поток снова становится поступательным. Но за точкой $С$ поток не испытывает более никаких возмущений. Следовательно, после поворота около угла поток будет над стенкой $СВ$ таким же, каким был поток над стенкой $АС$, т. е. равномерным и параллельным потоком с постоянной скоростью $\omega_n > \omega_n$. Последняя характеристика $СL$, на которой завершается поворот газового потока около точки $С$, распола-

¹⁾ Точка $С$ является *особой точкой*, так как в этой точке сходятся лучи, на каждом из которых значения скорости и давления постоянны. Эти постоянные значения скорости и давления различны для разных лучей.

гается под углом α_k к стенке CB , соответствующим равенству

$$\sin \alpha_k = \frac{1}{M_k},$$

тогда как первая характеристика располагается под углом α_H к стенке AC в соответствии с равенством

$$\sin \alpha_H = \frac{1}{M_H};$$

здесь M_H , M_k — значения чисел M до и после поворота потока.

Как известно, конечные адиабатические скачки разрежения невозможны. Однако, если разбить угол KCL на бесконечно большое число бесконечно малых углов, то мы перейдем от рассмотренной выше условной схемы с малыми скачками разрежения к непрерывному расширению газа; вместо конечного числа слабых скачков получается бесконечное число характеристик — *пучок характеристик*.

Таким образом, поворот потока около тупого угла и связанное с этим расширение газа (уменьшение давления) можно рассматривать как последовательность слабых возмущений, источником которых служит вершина угла; эти возмущения распространяются в потоке по прямолинейным характеристикам, исходящим из вершины.

Приведённые рассуждения показывают, что при повороте сверхзвукового газового потока около внешнего тупого угла значения скорости, давления и плотности остаются постоянными вдоль лучей, исходящих из угловой точки и являющихся характеристиками. Поэтому при аналитическом исследовании обтекания тупого угла удобно воспользоваться полярными координатами, поместив начало координат в этой угловой точке. Координатными линиями тогда служат лучи, исходящие из угловой точки, и концентрические окружности с центром в этой угловой точке. Координатами точки на плоскости являются радиус-вектор r этой точки и угол φ , составляемый радиусом-вектором с лучом, имеющим фиксированное направление, которое мы определим позже. Все параметры газа будем рассматривать как функции от r и φ : $\omega = \omega(r, \varphi)$, $p = p(r, \varphi)$, $\rho = \rho(r, \varphi)$. В силу того, что параметры газа вдоль лучей в нашей задаче сохраняются постоянными, частные производные от ω , p и ρ по r равны нулю (при перемещении вдоль луча не происходит изменения параметров газа). Таким образом,

$$\frac{\partial \omega}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0. \quad (11)$$

Составляющие скорости по радиусу-вектору и по направлению, перпендикулярному к нему, обозначены соответственно

через w_r и w_u . Величина скорости

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_u^2}$$

В силу того, что $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$, имеем также:

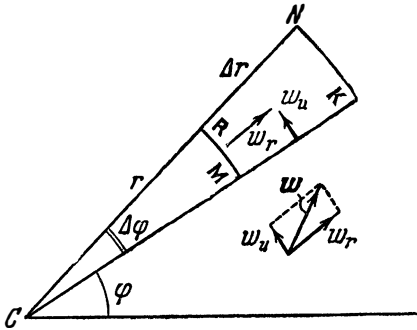
$$\frac{\partial w_r}{\partial r} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial w_u}{\partial r} = 0. \quad (12)$$

Ниже мы дадим аналитическое решение задачи об обтекании тупого угла, используя полярные координаты.

Основное свойство характеристики, как уже известно, состоит в том, что нормальная к ней составляющая скорости равна скорости звука a , но характеристика совпадает с радиусом-вектором, поэтому в выбранной нами полярной системе координат нормальная составляющая скорости может быть найдена из условия

$$w_u = a.$$

Течение газа около внешнего тупого угла является плавным и ускоренным, поэтому его можно считать безвихревым. Но тогда циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю. Составим выражение для циркуляции по контуру $MRNK$,



Фиг. 49. К выводу условия отсутствия завихренности.

ограниченному отрезками двух радиусов-векторов, проведённых из вершины угла, и двух дуг, обходя этот контур по часовой стрелке (фиг. 49):

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma = w_u r \Delta \varphi + \left(w_r + \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} \Delta \varphi \right) \Delta r - \\ - \left(w_u + \frac{\partial w_u}{\partial r} \Delta r \right) (r + \Delta r) \Delta \varphi - w_r \Delta r = 0; \end{aligned}$$

учитывая постоянство скорости по радиусу-вектору, являющемуся характеристикой, имеем:

$$\frac{\partial w_r}{\partial \varphi} - w_u = 0. \quad \{ (13)$$

Это и есть условие отсутствия завихренности в сверхзвуковом газовом потоке, обтекающем внешний тупой угол. Его можно было бы получить также непосредственно из выражения (3) главы II для завихренности.

Составим теперь уравнение энергии.

В главе I было выведено уравнение Бернулли. В нашем случае, когда отсутствует механическая работа, гидравлические потери не учитываются и запас потенциальной энергии не изменяется, уравнение Бернулли имеет вид

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + \int_1^2 \frac{dp}{\gamma} = 0.$$

Мы выразим удельный вес через плотность, $\gamma = g\rho$, и так как написанное уравнение справедливо для двух произвольных состояний газа, то запишем его в форме уравнения (57) главы I:

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{w_r^2 + w_u^2}{2} = \text{const} = \frac{w_{\text{max}}^2}{2},$$

где w_{max} — максимальная скорость газа. Это же уравнение в дифференциальной форме записывается так:

$$\frac{dp}{\rho} + (w_r dw_r + w_u dw_u) = 0.$$

Напишем, наконец, уравнение процесса.

Процесс обтекания угла мы будем считать изоэнтропическим, т. е. подчиняющимся уравнению идеальной адиабаты:

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const}.$$

Таким образом, для аналитического исследования задачи обтекания внешнего тупого угла сверхзвуковым потоком газа мы получили следующие четыре уравнения. Уравнение характеристики

$$w_u = a, \quad (14)$$

уравнения отсутствия вихрей в потоке

$$\frac{dw_r}{d\varphi} = w_u, \quad (15)$$

уравнение Бернулли в интегральной форме

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{w_r^2 + w_u^2}{2} = \frac{w_{\text{max}}^2}{2} \quad (16)$$

или в дифференциальной форме

$$\frac{dp}{\rho} + w_r dw_r + w_u dw_u = 0, \quad (17)$$

уравнение процесса

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const} = m. \quad (18)$$

Отметим в заключение, что так как параметры газа вдоль лучей при обтекании угла сохраняются неизменными, т. е. не зависят от r , то все они являются фактически функциями только одного переменного — полярного угла φ . Поэтому мы вместо частных производных по φ можем писать полные производные.

Перейдём к решению системы уравнений (14) — (18).

Нашей задачей будет вначале получение одного дифференциального уравнения с одной неизвестной функцией. Из уравнения (18) следует:

$$p = m\rho^k, \quad dp = mk\rho^{k-1} d\rho.$$

Подставляя это выражение в уравнение (16), найдём:

$$mk \int \rho^{k-2} d\rho + \frac{\omega_r^2 + \omega_u^2}{2} = \frac{\omega_{\max}^2}{2},$$

или после интегрирования:

$$\frac{mk}{k-1} \rho^{k-1} + \frac{\omega_r^2 + \omega_u^2}{2} = \frac{\omega_{\max}^2}{2}.$$

Заметим теперь, что

$$a^2 = k \frac{p}{\rho} = mk\rho^{k-1};$$

но $a^2 = \omega_u^2$, следовательно, $mk\rho^{k-1} = \omega_u^2$, и из предыдущего уравнения получаем:

$$\frac{\omega_u^2}{k-1} + \frac{\omega_r^2 + \omega_u^2}{2} = \frac{\omega_{\max}^2}{2},$$

или

$$\omega_u^2 + \frac{k-1}{k+1} \omega_r^2 = \frac{k-1}{k+1} \omega_{\max}^2.$$

Используя теперь уравнение (15), приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$\left(\frac{d\omega_r}{d\varphi}\right)^2 + \frac{k-1}{k+1} \omega_r^2 = \frac{k-1}{k+1} \omega_{\max}^2.$$

В этом уравнении переменные ω_r и φ разделяются:

$$\frac{d\omega_r}{d\varphi} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1} (\omega_{\max}^2 - \omega_r^2)},$$

или

$$\frac{d\omega_r}{\sqrt{\frac{k-1}{k+1} (\omega_{\max}^2 - \omega_r^2)}} = d\varphi.$$

Это можно переписать ещё в таком виде:

$$\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \frac{d\left(\frac{\omega_r}{\omega_{\max}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_r}{\omega_{\max}}\right)^2}} = d\varphi.$$

Производя интегрирование, получим:

$$\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arcsin \frac{\omega_r}{\omega_{\max}} = \varphi + c_1,$$

где c_1 — постоянная интегрирования. Разрешая это выражение относительно искомой величины ω_r , найдём:

$$\omega_r = \omega_{\max} \sin \left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} (\varphi + c_1) \right].$$

Тогда из уравнения (15) сразу следует:

$$\omega_u = \omega_{\max} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \cos \left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} (\varphi + c_1) \right].$$

Определим теперь постоянную интегрирования c_1 . Рассмотрим такой случай, когда скорость невозмущённого потока (до поворота) равна скорости звука ($M_H = 1$). В этом случае начальная характеристика KC (фиг. 48) перпендикулярна к стенке AC , так как

$$\sin \alpha_H = \frac{1}{M_H} = 1,$$

т. е. полярные углы φ нужно отсчитывать от перпендикуляра к направлению скорости невозмущённого потока. Тогда при $\varphi = 0$ имеем:

$$\omega_r = 0, \quad \omega_u = \omega,$$

и выражение для ω_r превращается в уравнение для определения c_1 :

$$0 = \omega_{\max} \sin \left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} (0 + c_1) \right].$$

Отсюда ясно, что $c_1 = 0$. Таким образом, получаем следующие выражения для составляющих скорости ω_r и ω_u :

$$\omega_r = \omega_{\max} \sin \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \varphi \right),$$

$$\omega_u = \omega_{\max} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \cos \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \varphi \right).$$

Пользуясь выражением (46) главы I, можно перейти от максимальной скорости газа к критической

$$\omega_{\max} = a_{\text{кр}} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$$

и выражения для ω_r и ω_u записать в следующем виде:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} a_{\text{кр}} \sin \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \varphi \right), \quad (19)$$

$$\omega_u = a_{\text{кр}} \cos \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \varphi \right). \quad (20)$$

При $\varphi = 0$ получим: $\omega_r = 0$, $\omega_u = \omega = a_{\text{кр}}$, т. е. скорость невозмущённого потока равна критической скорости звука.

Найдём теперь величину полной скорости на каждом из лучей: $\omega = \sqrt{\omega_r^2 + \omega_u^2}$. Из уравнений (19) и (20) получим:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= a_{\text{кр}}^2 \left[\frac{k+1}{k-1} \sin^2 \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \varphi \right) + \cos^2 \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \varphi \right) \right] = \\ &= a_{\text{кр}}^2 \left[1 + \frac{2}{k-1} \sin^2 \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \varphi \right) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда определяется коэффициент скорости

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{a_{\text{кр}}^2} = 1 + \frac{2}{k-1} \sin^2 \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \varphi \right). \quad (21)$$

Все остальные параметры газа выражаются через коэффициент скорости по формулам, полученным в главе I:

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad (22)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (23)$$

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2, \quad (24)$$

$$M = \sqrt{\frac{\frac{2}{k+1} \lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}}. \quad (25)$$

Таким образом, определив по формуле (21) величину λ^2 для соответствующих значений φ , мы сможем по формулам (22)–(25) полностью рассчитать состояние газа на каждом из лучей, проходящих через вершину угла. При $\varphi = 0$ получается $\lambda = 1$, при $\varphi > 0$ $\lambda > 1$. По мере увеличения полярного угла скорость газа возрастает, а давление, плотность и температура уменьшаются.

Как видно из выражения (21), при некотором значении полярного угла коэффициент скорости может достигнуть максимального значения

$$\lambda_{\max}^2 = \frac{k+1}{k-1},$$

когда давление, температура и плотность газа равны нулю. Очевидно, что дальнейшее возрастание скорости невозможно, а следовательно, прекратится и поворот потока. Иначе говоря, существует предельное значение полярного угла, определяемое из условия

$$\frac{k+1}{k-1} = 1 + \frac{2}{k-1} \sin^2 \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \varphi_{\max} \right)$$

или

$$\sin^2 \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \varphi_{\max} \right) = 1,$$

откуда

$$\varphi_{\max} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}. \quad (26)$$

Заметим, что полученное решение пригодно для всех значений скорости сверхзвукового невозмущённого потока, а не только в случае $\lambda_n = 1$. Если скорость невозмущённого потока больше скорости звука, то отсчёт по формуле (21) следует начинать не от нулевого полярного угла ($\varphi = 0$), а от того значения угла (φ_n), которое соответствует заданной скорости невозмущённого потока (λ_n) по формуле (21):

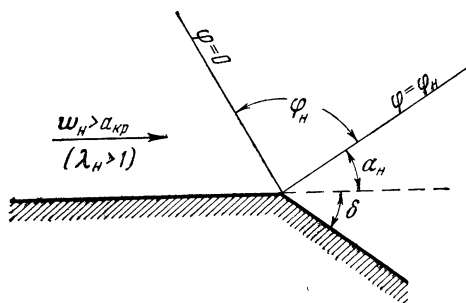
$$\lambda_n^2 = 1 + \frac{2}{k-1} \sin^2 \left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \varphi_n \right],$$

или, что то же:

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arcsin \sqrt{\frac{k-1}{2} (\lambda_n^2 - 1)}. \quad (27)$$

Пригодность полученного решения для любого значения скорости основывается на том, что в данной задаче вдоль любой характеристики скорость и остальные параметры газа не изменяются, т. е. на любой характеристике поток является равномерным и параллельным. И поэтому для поворота потока, происходящего правее данной характеристики, не может иметь значения предистория потока, т. е. достигнуто ли данное значение λ_n в результате ускорения газа при предварительном повороте от $\lambda = 1$ и $\varphi = 0$ до $\lambda = \lambda_n$ и $\varphi = \varphi_n$ или поворот начинается сразу при значении коэффициента скорости $\lambda = \lambda_n$. Итак, в случае $\lambda_n > 1$ при $\varphi \leq \varphi_n$ поток остаётся невозмущённым, т. е. все параметры газа сохраняют своё значение. При $\varphi > \varphi_n$

параметры газа вычисляются по полученным выше формулам (22)–(25). Надо только помнить, что при скорости невозмущённого потока, большей скорости звука, углы φ нужно отсчитывать не от перпендикуляра к направлению невозмущённого потока, а от прямой, составляющей угол $\varphi_n + \alpha_n$ с направлением невозмущённого потока, где $\alpha_n = \arcsin \frac{1}{M_n}$ (фиг. 50) является углом слабого возмущения, т. е. углом между характеристикой и направлением заданного невозмущённого потока.

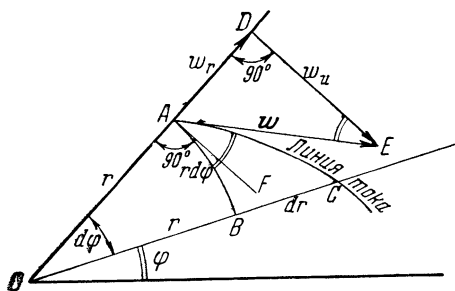


Фиг. 50. Схема отсчёта углов φ при $w_n > a_{кр}$.

Чтобы получить наглядную картину обтекания внешнего тупого угла, найдём форму линий тока. Для этого составим дифференциальное уравнение линий тока в полярных координатах. Вспомним, что направление касательной к линии тока в каждой её точке совпадает с направлением вектора скорости в этой точке. Возьмём два бесконечно близких радиуса-вектора, составляющих друг с другом угол $d\varphi$, и проведём в точке A первого радиуса отрезок линии тока AC , вектор скорости $w = AE$, направленный по касательной к линии тока в точке A , и дугу окружности AB радиуса r (фиг. 51). Рассмотрим бесконечно малый прямоугольный криволинейный треугольник ABC . Тангенс угла A этого треугольника равен отношению

$$\frac{BC}{AB} = \frac{dr}{r d\varphi}.$$

Но угол между кривыми AB и AC равен углу между их касательными AF и AE , т. е. $\text{tg}(\angle EAF) = \frac{dr}{r d\varphi}$. Вектор скорости w разложим на составляющие w_r и w_u . Из треугольника ADE



Фиг. 51. К определению линии тока при обтекании внешнего тупого угла.

угла A этого треугольника равен отношению

видно, что $\operatorname{tg}(\angle DEA) = \frac{\omega_r}{\omega_u}$. Но из построения ясно, что $\angle DEA = \angle EAF$. Таким образом,

$$\frac{dr}{r d\varphi} = \frac{\omega_r}{\omega_u}. \quad (28)$$

Уравнение (28) представляет собой дифференциальное уравнение линий тока в полярных координатах в общем виде.

В случае обтекания угла ω_r и ω_u определяются формулами (19) и (20) и мы получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dr}{r} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \cdot \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varphi\right)}{\cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varphi\right)} d\varphi.$$

Его можно переписать в таком виде:

$$\frac{dr}{r} = - \frac{\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} d \cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varphi\right)}{\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varphi\right)}.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, найдём:

$$\ln r = - \frac{k+1}{k-1} \ln \cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varphi\right) + \ln r_0,$$

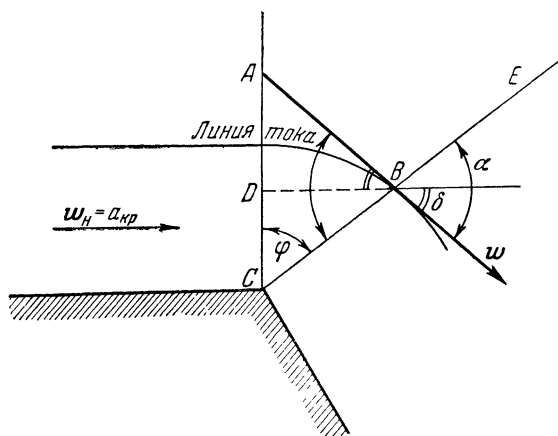
где через $\ln r_0$ обозначена произвольная постоянная интегрирования. После потенцирования получим:

$$r = r_0 \left[\cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varphi\right) \right]^{-\frac{k+1}{k-1}}. \quad (29)$$

Уравнение (29) есть уравнение линий тока в полярных координатах. Здесь r_0 — длина радиуса-вектора линии тока при $\varphi = 0$, т. е. в невозмущённом потоке. Из уравнения (29) видно, что все линии тока представляют собой подобные кривые с центром подобия в вершине угла. Расстояние по нормали между двумя соседними линиями тока увеличивается в направлении течения.

Найдём теперь угол δ , составляемый касательной к линии тока с направлением невозмущённого потока, движущегося со скоростью звука, т. е. угол, на который поворачивается поток, дойдя до соответствующего луча, составляющего угол φ с перпендикуляром к направлению скорости невозмущённого

потока (при $\lambda_n = 1$). Для этого рассмотрим фиг. 52. Здесь w — вектор скорости в точке B , направленный по касательной к линии тока. Угол α — местный угол распространения слабых возмущений. Этот угол равен, как известно, углу между направлением скорости w и характеристикой BE в данной точке.



Фиг. 52. Связь между углами, α , φ и δ при обтекании тупого угла.

Угол δ — искомый угол поворота потока. Из рисунка ясно, что $\angle ABD = \delta$, а угол $ABC = \alpha$. Тогда имеем:

Из треугольника ABC : $\angle A = \pi - \varphi - \alpha$.

Из треугольника ABD : $\angle A = \frac{\pi}{2} - \delta$.

Таким образом,

$$\pi - \varphi - \alpha = \frac{\pi}{2} - \delta,$$

или

$$\delta = \alpha + \varphi - \frac{\pi}{2}. \quad (30)$$

Угол распространения слабых возмущений

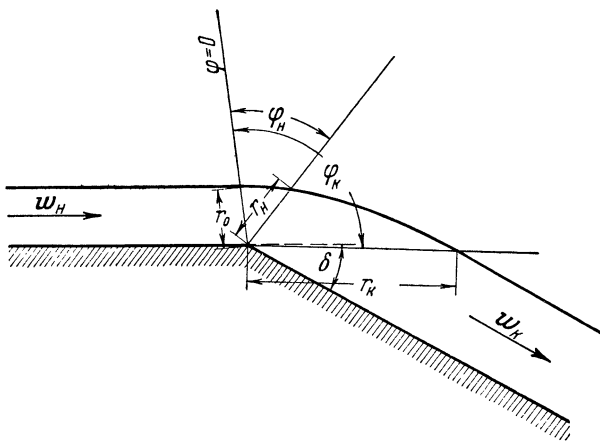
$$\alpha = \arcsin \frac{1}{M}, \quad (31)$$

Поэтому для вычисления угла поворота потока δ , соответствующего заданному значению угла φ , нужно проделать следующие операции:

1) определить по формуле (21) коэффициент скорости λ для заданного значения φ ,

- 2) по формуле (25) определить число M ,
- 3) по формуле (31) определить угол α и, наконец,
- 4) вычислить угол δ по формуле (30) для заданного значения φ . Таким образом, мы получим угол поворота потока δ в функции от полярного угла φ .

До сих пор независимым переменным являлся полярный угол φ , и все параметры газа вычислялись в функции от этого угла. В действительности же обычно бывают известны величина обтекаемого тупого угла, т. е. величина угла пово-

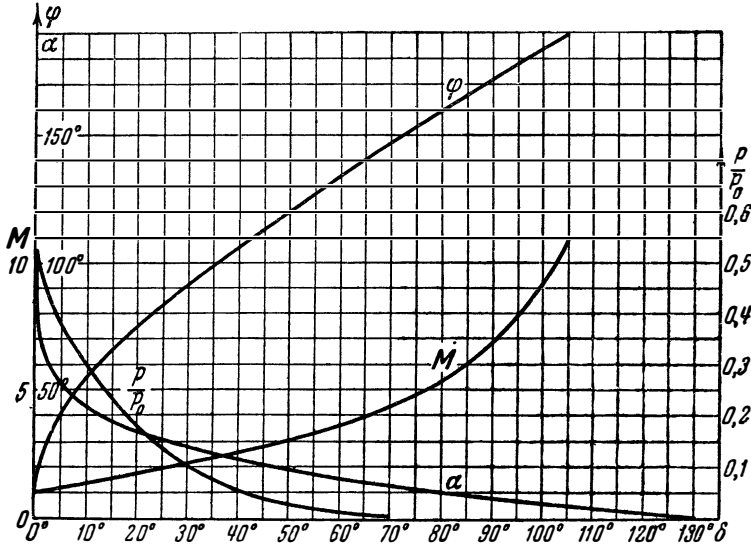


Фиг. 53. Линия тока сверхзвукового потока, обтекающего внешний тупой угол.

рота потока δ , и значение скорости набегающего потока. По этим данным нужно определить все параметры газа (скорость, давление, температуру и т. д.) после поворота потока около заданного тупого угла. Поэтому для практических расчетов удобно составить таблицу, где за основной параметр принят угол поворота потока δ , а все остальные параметры газа вычислены в функции этого угла. Такая таблица, рассчитанная по формулам (21)–(25), (30) и (31), приводится в приложении I к книге на страницах 709–711. Пользоваться этой таблицей нужно следующим образом: по заданной скорости невозмущенного потока w_n определяется коэффициент скорости λ_n . Далее отыскивается *фиктивный* угол поворота потока δ_n , соответствующий значению λ_n (угол, на который должен повернуться поток, текущий со скоростью звука, чтобы достичь заданной скорости w_n). Затем определяется угол $\delta_k = \delta_n + \delta$, где δ — заданный угол поворота потока (фиг. 52). Для значения δ_k из таблицы выписываются величины λ_k , $\frac{p_k}{p_0}$, $\frac{\rho_k}{\rho_0}$, $\frac{T_k}{T_0}$ и M_k , которые опре-

деляют соответственно коэффициент скорости, давление, плотность, температуру и число M после поворота потока около заданного тупого угла. Кривые $\varphi(\delta)$, $M(\delta)$, $\alpha(\delta)$ и $\frac{P}{P_0} = f(\delta)$ изображены на фиг. 54.

При желании можно определить форму линии тока по формуле (29), задавшись величиной r_0 и рядом значений φ от $\varphi = \varphi_H$ до $\varphi = \varphi_K$ (фиг. 53).



Фиг. 54. Вспомогательные кривые к расчёту сверхзвукового обтекания внешнего тупого угла.

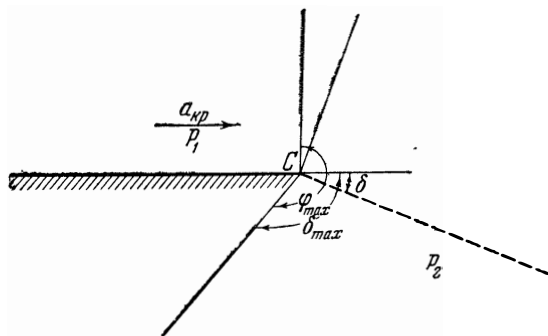
Изложенная теория обтекания внешнего тупого угла сверхзвуковым потоком газа применяется для решения большого числа конкретных задач газовой динамики; некоторые из них мы рассмотрим ниже.

§ 4. Обтекание плоской стенки¹⁾

Пусть сверхзвуковой поток газа течёт с заданной скоростью над плоской неподвижной стенкой. В точке C (фиг. 55) стенка обрывается, а давление в пространстве за точкой C меньше, чем давление в невозмущённом потоке вдоль стенки. Тогда точно так же, как в случае обтекания внешнего тупого угла, точка C явится источником возмущений. Поток, обтекая точку C ,

¹⁾ §§ 4—6, написанные для первого издания под редакцией автора С. Л. Вишневецким, помещены здесь без изменений.

повернётся на некоторый угол δ . Скорость его увеличится, а давление в потоке упадёт до величины давления, существующего в пространстве за точкой C . Картина течения при этом совершенно аналогична обтеканию внешнего тупого угла. Различие заключается лишь в том, что в случае обтекания тупого угла задан угол поворота потока δ и требуется определить все параметры газа после поворота, а в рассматриваемом нами случае обтекания полубесконечной плоской стенки задано давление в потоке после поворота и требуется найти угол поворота потока и все остальные параметры газа. Угол поворота потока опре-



Фиг. 55. Схема сверхзвукового обтекания стенки.

деляет границу, отделяющую повернутый поток газа от неподвижного газа под стенкой (пунктир на фиг. 55).

Для расчёта обтекания плоской полубесконечной стенки нужно воспользоваться таблицей приложения I к книге на стр. 709 — 711. По заданной величине давления определяются угол поворота потока и все остальные параметры газа.

Легко вычислить максимальный угол δ_{\max} , на который может повернуться газовый поток, текущий вдоль плоской стенки. Этот угол представляет собой угол поворота потока, текущего со скоростью звука, при истечении в вакуум.

Положим в формуле (22) $p = 0$. Тогда $\lambda^2 = \frac{k+1}{k-1} = \lambda_{\max}^2$. Подставляя $\lambda = \lambda_{\max}$ в формулу (27), найдём:

$$\varphi_{\max} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}.$$

Так как при $\lambda = \lambda_{\max}$ имеем: $M = \infty$, $\alpha = \arcsin \frac{1}{M} = 0$, то из формулы (30) получаем:

$$\delta_{\max} = \left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - 1 \right) \frac{\pi}{2}.$$

При $k = 1,4$ значения φ_{\max} и δ_{\max} будут: $\varphi_{\max} = 220^\circ 27'$, $\delta_{\max} = 130^\circ 27'$. Отсюда следует, что поток, движущийся вдоль плоской стенки и вытекающий в вакуум, не заполняет всего свободного пространства под стенкой. Луч $\varphi = \varphi_{\max}$ отделяет этот поток от пустоты под стенкой. Ясно, что это положение справедливо не только для случая $\lambda_n = 1$, но также при $\lambda_n > 1$. Угол поворота такого потока при истечении в вакуум равен $\delta_{\max} - \delta_n$, где δ_n — фиктивный угол поворота потока, соответствующий заданному значению λ_n . Этот предельный угол, на который может повернуться сверхзвуковой поток заданной скорости, обозначим $\delta_{\text{пр}}$. Таким образом,

$$\delta_{\text{пр}} = \delta_{\max} - \delta_n.$$

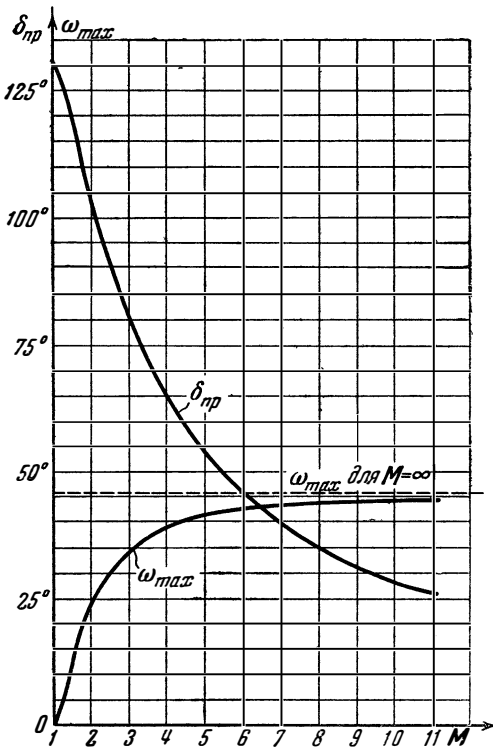
Зависимость $\delta_{\text{пр}}$ от числа M невозмущённого потока (при $k = 1,4$) представлена на графике (фиг. 56). При $M = 1$ имеем: $\delta_n = 0$ и $\delta_{\text{пр}} = \delta_{\max}$. При $M = \infty$: $\delta_n = \delta_{\max}$ и $\delta_{\text{пр}} = 0$.

Если сверхзвуковой поток должен обтекать тупой угол, для которого

$\delta > \delta_{\text{пр}}$, то после поворота потока около вершины угла поток отрывается и следует не по стенке, а по лучу, соответствующему $\delta = \delta_{\text{пр}}$; между лучом и стенкой образуется вакуум. Это явление можно назвать *срывом сверхзвукового потока*.

§ 5. Обтекание выпуклой кривой

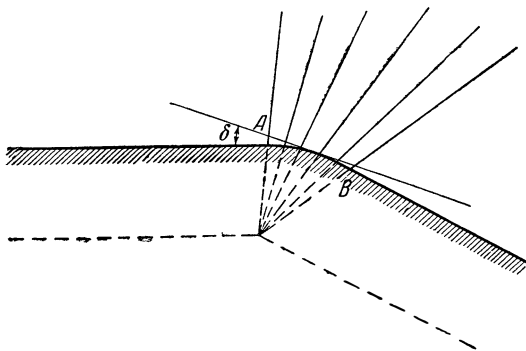
Чтобы составить себе представление о картине, возникающей при обтекании выпуклой кривой линии, рассмотрим вначале одну из линий тока, полученных при обтекании тупого угла, и примем её за твёрдую кривую стенку (фиг. 57). Тогда над этой стенкой поток известен, ибо он останется таким же, каким



Фиг. 56. Предельные углы поворота потока в скачке уплотнения и при обтекании внешнего тупого угла.

он был над соответствующей (теперь *отвердевшей*) линией тока при обтекании угла.

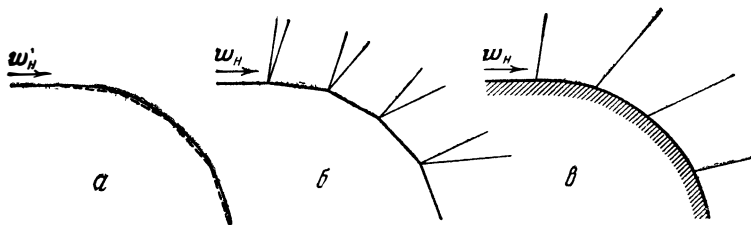
Через каждую точку обтекаемой кривой линии проходит прямолинейная характеристика, вдоль которой все параметры газа остаются неизменными. Состояние газа на каждой характеристике определяется по углу поворота потока δ , соответствующему



Фиг. 57. Схема сверхзвукового обтекания выпуклой кривой.

общему этой характеристике, и равному углу между касательной к стенке в *начальной точке* характеристики и направлением невозмущённого потока. При расчёте параметров газа нужно воспользоваться выведенными ранее формулами или таблицей приложения I к книге на стр. 709—711.

Замечательно, что *такая же точно качественная картина имеет место при обтекании выпуклой кривой стенки любой*



Фиг. 58. Переход от обтекания ломаной стенки к обтеканию выпуклой кривой.

формы. Необходимо только, чтобы выпуклость стенки была направлена всегда в сторону газа. Чтобы показать это, заменим произвольную кривую стенку вписанной ломаной линией, состоящей из последовательности прямолинейных отрезков (фиг. 58, а). Обтекание такой ломаной сводится к обтеканию последовательности внешних тупых углов и, следовательно, может быть пол-

ностью рассчитано. Картина обтекания показана на фиг. 58, б. Если теперь безгранично увеличивать число вершин ломаной, вписанной в данную кривую, то в пределе мы получим обтекание кривой, причём ясно, что через каждую точку кривой проходит прямолинейная характеристика, вдоль которой параметры газа не меняются (фиг. 58, в).

Чтобы рассчитать обтекание произвольной кривой выпуклой стенки, нужно знать лишь угол поворота, т. е. направление касательной для каждой точки стенки. Если, например, форма стенки задана уравнением в виде $y = y(x)$ (ось X направлена по вектору скорости невозмущённого потока), то, дифференцируя это уравнение, мы найдём угол касательной с осью X для каждого значения абсциссы X , равный углу поворота потока δ . Таким образом,

$$\delta = \text{arc tg } [y'(x)].$$

Зная δ , легко определить все параметры газа, действуя точно так же, как в случае обтекания тупого угла. В частности, можно найти распределение скоростей и давлений вдоль стенки. При обтекании кривой выпуклой стенки, так же как и при обтекании угла, газ разгоняется. Скорость газа непрерывно увеличивается, а давление падает.

Если окажется, что в какой-либо точке стенки

$$\delta > \delta_{\text{пр}},$$

то произойдёт срыв потока.

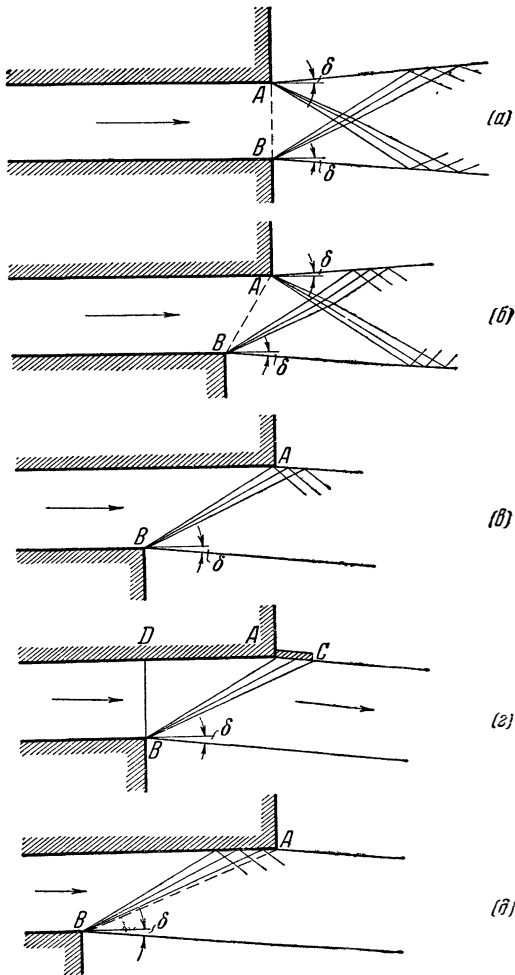
Нахождение формы ливий тока при обтекании выпуклой стенки произвольного вида является более трудной задачей, и мы её здесь рассматривать не будем. Строгая теория обтекания кривой стенки создана И. А. Кибелем и С. А. Христиановичем.

§ 6. Истечение из единичного плоского сопла с косым срезом в пространство с пониженным давлением¹⁾

Рассмотрим истечение сверхзвукового потока газа из плоского сопла. Пусть сопло обеспечивает равномерную скорость на срезе сопла, а давление в свободном пространстве, в которое вытекает газ, меньше, чем давление в плоскости среза сопла. Изложенная выше теория обтекания плоской стенки позволяет определить направление границ струи непосредственно после среза сопла.

¹⁾ Вопрос об истечении из решётки сопел с косым срезом рассматривается в § 8 гл. VIII.

Поведение газа вблизи кромок сопла A и B (фиг. 59) точно такое же, как при обтекании одной плоской стенки. Около каждой из кромок поток повернется на такой угол δ , чтобы дав-



Фиг. 59. Различные схемы истечения из сопла с косым срезом.

ление в потоке стало равным заданному давлению в свободном пространстве. Следовательно, струя в целом при истечении расширяется. Угол поворота потока δ около каждой из кромок можно найти по заданным величинам скорости и давления на

срезе сопла и давлению в свободном пространстве так же, как при обтекании одной плоской стенки. Этот угол δ определяет направление границ струи за срезом сопла. Вдоль всей свободной границы струи существует постоянное значение скорости, которое соответствует внешнему давлению и легко может быть вычислено по приведённым выше формулам и таблице.

Пучки прямолинейных характеристик, исходящих из точек A и B , пересекаются; как показано на рисунке. После пересечения характеристик скорость потока изменяется, и, как это следует из § 2 главы III, характеристики перестают быть прямолинейными. Это обстоятельство значительно усложняет расчёт дальнейших участков струи.

Если плоскость среза сопла не перпендикулярна к оси потока то такое сопло называют *соплом с косым срезом*. Наличие такого среза нарушает симметрию потока и значительно усложняет расчёт возникающего при этом течения. Изучение истечения из каналов с косым срезом имеет важное практическое значение, так как такое истечение имеет место при работе паровых и газовых турбин, где в силу конструктивных соображений сопловые аппараты представляют собой каналы с косым срезом.

Рассмотрим истечение сверхзвукового потока газа из плоского сопла с косым срезом в пространство, в котором давление меньше, чем давление в потоке внутри сопла. Косой срез образуется при смещении кромки B сопла относительно кромки A назад, против потока. При небольшом смещении кромки B , т. е. при небольшом наклоне плоскости среза AB (фиг. 59, б), получится, очевидно, несимметричная свободная струя. При этом область пересечения пучков характеристик, исходящих из кромок A и B , перемещается к точке A . Следовательно, прямолинейные характеристики, исходящие из кромки A , начинают искривляться раньше, чем в случае прямого среза. За плоскостью среза AB струя расширяется. Углы поворота потока около каждой из кромок A и B , очевидно, такие же, как и в случае прямого среза.

Предельным положением кромки B для течения такого вида является то её положение, при котором «первая» характеристика, проведённая из кромки B , проходит точно через кромку A . Такой случай изображён на фиг. 59, в. Картина течения вблизи кромки B попрежнему аналогична обтеканию одной плоской стенки. Поэтому направление границы струи за кромкой B сохраняется прежним и его легко можно определить. Характеристики, исходящие из кромки A , начнут искривляться сразу за точкой A . Это усложняет определение второй границы струи за точкой A .

Если за кромкой A сделать направляющий козырёк, выполненный по линии тока, соответствующей повороту потока около кромки B (фиг. 59, г), то течение можно рассчитать полностью.

Обтекание кромки B при заданном внешнем давлении аналогично обтеканию внешнего тупого угла. Поэтому форму линии тока можно определить по формуле (29). Таким образом, мы получаем профиль направляющего козырька AC . Давление на луче BC равно заданному внешнему давлению, вследствие чего за лучом BC струя опять становится параллельной и равномерной. Скорость в этой струе больше, чем скорость внутри сопла в сечении BD . Струя отклоняется от оси сопла на угол δ , определяемый отношением внешнего давления к давлению внутри сопла в сечении BD .

Смещая кромку B ещё дальше назад, мы получим случай истечения из косо́го среза, изображённый на фиг. 59, ∂ . Здесь «первая» характеристика, исходящая из кромки B , приходит на противоположную стенку внутри сопла в некоторой точке левее A . Точный расчёт течения вблизи участка стенки между указанной точкой и точкой A и определение границы струи за кромкой A составляют довольно сложную задачу. Если, как и в предыдущем случае, сделать направляющий козырёк, поместив начало его в точку встречи первой характеристики со стенкой A , то мы сведём рассматриваемый случай к предыдущему.

Практически применимыми случаями истечения из косо́го среза являются случаи ϵ , ζ и ∂ . В случаях ϵ и ∂ пользуются приближённым расчётом, определяя скорость истечения и угол поворота струи в целом так же, как в случае ζ , т. е. пренебрегают небольшим изменением параметров потока, связанным с нарушением принятой при расчёте картины течения вблизи кромки A .

Подчеркнём ещё раз, что во всех практически применимых случаях истечения из плоского канала с косым срезом в пространстве с пониженным давлением поток в косом срезе испытывает расширение, а струя получает добавочное отклонение; при этом скорость истечения увеличивается по сравнению со скоростью, которую может обеспечить то же самое сопло с прямым срезом.

Г Л А В А V
ОДНОМЕРНЫЕ ГАЗОВЫЕ ПОТОКИ

§ 1. Адиабатическое течение газа с трением.
Кризис течения

Рассмотрим установившееся течение газа в трубе постоянного сечения при наличии трения, но без теплообмена с внешней средой.

Уравнение неразрывности в этом случае ($G = \text{const}$, $F = \text{const}$) имеет следующий вид:

$$\rho w = \text{const},$$

или в дифференциальной форме:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dw}{w}. \quad (1)$$

Дифференциальное уравнение состояния

$$dp = gR (\rho dT + T d\rho). \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) получаем:

$$\frac{dp}{\rho} = gR dT - gRT \frac{dw}{w}. \quad (3)$$

Используя уравнение Бернулли в дифференциальной форме

$$\frac{dp}{\rho} + w^2 \frac{dw}{w} + g dL_{\text{тр}} = 0$$

и известное выражение для скорости звука

$$a^2 = kgRT,$$

преобразуем выражение (3) к новому виду

$$gR dT + \left(w^2 - \frac{a^2}{k} \right) \cdot \frac{dw}{w} + g dL_{\text{тр}} = 0. \quad (4)$$

Ввиду того, что рассматриваемый процесс является энергетически изолированным, температура торможения вдоль трубы

не изменяется, откуда на основании уравнения теплосодержания следует:

$$dT_0 = dT + \frac{A \cdot \omega^2}{g \cdot c_p} \frac{d\omega}{\omega} = 0,$$

или, принимая во внимание равенства

$$AR = c_p - c_v, \quad c_p = kc_v,$$

имеем:

$$gR dT = -\frac{k-1}{k} \omega^2 \frac{d\omega}{\omega}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), приходим к соотношению, связывающему изменение скорости вдоль трубы постоянного сечения с работой сил трения:

$$(M^2 - 1) \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{kg}{a^2} dL_{\text{тр}}. \quad (6)$$

Существенно, что трение является односторонним воздействием: работа сил трения всегда положительна ($dL_{\text{тр}} > 0$). Поэтому согласно соотношению (6) *под влиянием трения дозвуковой поток ($M < 1$) ускоряется ($d\omega > 0$), а сверхзвуковой ($M > 1$) — замедляется ($d\omega < 0$)*. Непрерывный переход через скорость звука при воздействии только трением невозможен.

Выведем формулы, определяющие изменение параметров газа вдоль изолированной трубы при наличии трения.

Ввиду того, что процесс в газе энергетически изолирован, температура торможения не меняется:

$$T_{01} = T_{02} = \text{const}. \quad (7)$$

Термодинамическая температура, если воспользоваться уравнениями (44) главы I и (7), определяется из соотношения

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}. \quad (8)$$

Вследствие постоянства температуры торможения критическая скорость вдоль трубы также не изменяется; отсюда отношение коэффициентов скорости равно отношению скоростей и на основании уравнения неразрывности — обратному отношению плотностей

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad (9)$$

Подставив равенства (8) и (9) в уравнение состояния, получим зависимость давления от коэффициента скорости:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}. \quad (10)$$

Ввиду постоянства температуры торможения полное давление пропорционально плотности заторможенного газа ¹⁾:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Отсюда на основании (10) получаем:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (11)$$

Дадим λ_1 какое-либо постоянное значение и будем рассматривать λ_2 как переменную величину, а параметры T_2 , ρ_2 , p_2 , p_{02} , ρ_{02} — как функции переменного λ_2 . Выше было установлено на основании соотношения (6), что трение ускоряет дозвуковой и замедляет сверхзвуковой поток. Тогда нужно считать λ_2 возрастающим при дозвуковом и убывающим при сверхзвуковом потоке. Поэтому согласно зависимостям (8), (9) и (10) термодинамическая температура, плотность и статическое давление вдоль изолированной трубы под влиянием трения падают в дозвуковом и растут в сверхзвуковом течении. Из равенства (11) следует, что в критическом сечении при $\lambda_2 = 1$ полное давление p_{02} имеет минимальное значение ²⁾, но тогда из выражения (102) главы I вытекает, что в критическом сечении энтропия достигает максимального значения. Полное давление и плотность заторможенного газа в соответствии с равенством (11) как в дозвуковом, так и в сверхзвуковом потоке вдоль трубы убывают, и только один параметр — температура торможения — не меняется.

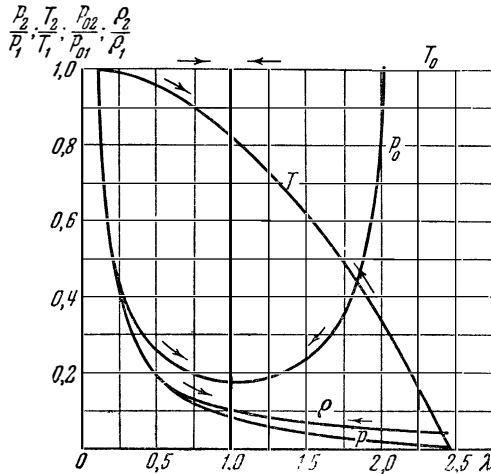
¹⁾ Это вытекает из уравнения состояния и формулы (72) главы I.

²⁾ В этом можно убедиться, дифференцируя равенство (11) по λ_2 . Подставляя в выражение производной вместо λ_2 единицу, получим:

$$\frac{d}{d\lambda_2} \left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right)_{\lambda_2=1} = 0.$$

Вторая производная положительна при $\lambda_2 = 1$.

То обстоятельство, что энтропия достигает максимума в критическом сечении, как раз и обуславливает существование кризиса течения в изолированной трубе, делающего невозможным плавный переход через скорость звука под влиянием трения; при таком переходе энтропия должна была бы уменьшаться, а это противоречит второму началу термодинамики.



Фиг. 60. Зависимость параметров газа от коэффициента скорости в трубе постоянного сечения.

На фиг. 60 изображены кривые температуры, плотности, давления, температуры торможения и полного давления в изолированной трубе в функции коэффициента скорости λ_2 при $\lambda_1 = 0,1$ для дозвукового потока, $\lambda_1 = 2,3$ для сверхзвукового потока и $k = 1,4$. Стрелки на фигурах указывают направление протекания процесса.

§ 2. Трение в трубе постоянного сечения

Исследуем влияние трения на изменение параметров турбулентного газового потока в трубах постоянного диаметра. Для этого заменим работу силы трения в соотношении (6) общепринятым в гидравлике выражением

$$dL_{\text{тр}} = \zeta \cdot \frac{w^2}{2g} \frac{dx}{D}; \quad (12)$$

здесь ζ — коэффициент трения в трубе, D — диаметр трубы, dx — длина бесконечно малого участка трубы. Тогда получим:

$$(M^2 - 1) \cdot \frac{dw}{w} = -\zeta \cdot k \cdot \frac{M^2}{2} \cdot \frac{dx}{D}.$$

Пользуясь выражением (47) главы I и постоянством критической скорости в трубе, из чего следует равенство

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{d\lambda}{\lambda},$$

перейдём в соотношении (6) от числа M к коэффициенту скорости λ :

$$\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right) \cdot \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{k}{k+1} \cdot \zeta \frac{dx}{D}. \quad (13)$$

Допустим в первом приближении, что коэффициент трения в трубе как в дозвуковых, так и в сверхзвуковых потоках не зависит от числа M , а следовательно, и от коэффициента скорости λ .

В шероховатых трубах для несжимаемой жидкости величина ζ не зависит также от числа R^*) и определяется по формуле¹⁾

$$\zeta = \frac{1}{\left(1,74 + 2 \lg \frac{1}{\varepsilon}\right)^2}, \quad (14)$$

где $\varepsilon = \frac{2h}{D} = \frac{h}{r}$ — относительная шероховатость трубы (h — высота выступов шероховатости).

Рассмотрим, далее, трение в так называемых технически гладких трубах. Технически гладкая труба характеризуется тем, что выступы шероховатости в ней покрываются ламинарным подслоем²⁾. Толщина подслоя уменьшается с ростом числа R ; поэтому одна и та же труба при малых R является гладкой, а при больших R шероховатой (фиг. 61).

В технически гладких трубах для турбулентного потока несжимаемой жидкости коэффициент трения зависит от числа R и может быть определён по формуле

$$\zeta = 0,0032 + \frac{0,221}{R^{0,237}}; \quad (15)$$

здесь

$$R = \frac{\rho\omega D}{\mu},$$

μ — коэффициент вязкости газа, величина которого зависит от температуры газа.

Поскольку в прямой трубе согласно уравнению неразрывности

$$\rho\omega = \text{const},$$

*) Подробнее о числе R будет сказано в главе VI § 1.

1) См. «Проблемы турбулентности», стр. 29, ОНТИ, 1936.

2) Подробнее о ламинарном подслое см. гл. VI.

число R по длине трубы изменяется незначительно (только за счёт изменения вязкости).

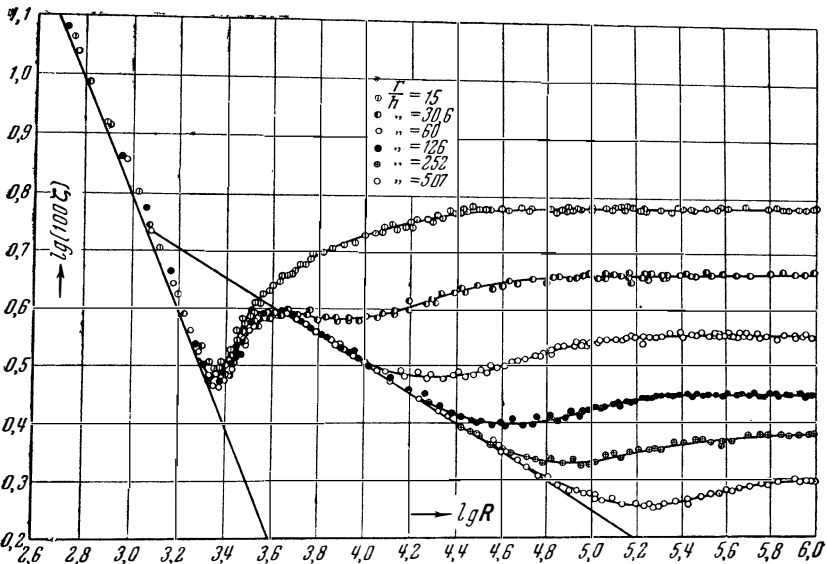
Итак, приближённо полагаем коэффициент трения в трубе постоянной величиной:

$$\zeta \approx \text{const.}$$

В этом случае уравнение (13) легко интегрируется:

$$\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2} - \ln \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} = \frac{2k}{k+1} \zeta \frac{x}{D}; \quad (16)$$

здесь λ_1 — значение коэффициента скорости в начале трубы при $x_1 = 0$, λ_2 — значение коэффициента скорости в произвольном



Фиг. 61. Зависимость коэффициента трения ζ от R в трубах с различной шероховатостью по опытам Никурадзе.

сечения трубы на расстоянии $x = x_2$ от начала. С помощью выражения (16) можно определить значение коэффициента скорости в произвольном сечении трубы, если известны коэффициент скорости в начале трубы λ_1 , диаметр трубы D , коэффициент трения ζ и показатель идеальной адиабаты k .

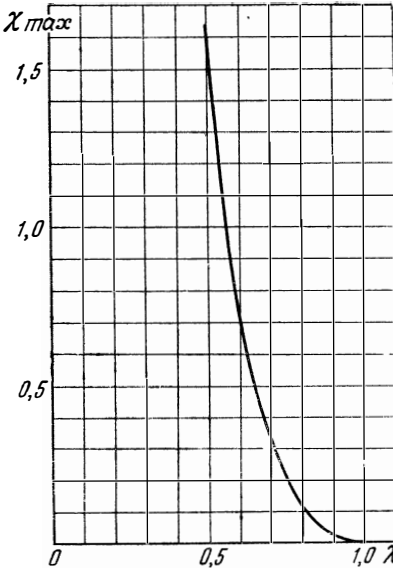
Как было показано в предыдущем параграфе, в предельном случае как в сверхзвуковом ($\lambda_1 > 1$), так и в дозвуковом ($\lambda_1 < 1$) течениях

$$\lambda_2 \text{ пр} = 1.$$

Иначе говоря, длина трубы в формуле (16) не должна быть больше некоторой максимальной величины

$$x \leq x_{\max},$$

которой соответствует значение $\lambda_2 = 1$. В этом можно убедиться, решая обычным путём задачу на экстремум. Обозначим правую часть выражения (16)



Фиг. 62. Зависимость критической длины трубы от начального значения коэффициента скорости.

приведённую длину трубы с начальным значением коэффициента скорости, приобретает следующий вид:

$$\chi_{\max} = \frac{2k}{k+1} \cdot \zeta \cdot \frac{x_{\max}}{D} = \frac{1}{\lambda_1^2} - 1 - \ln \frac{1}{\lambda_1^2}. \quad (18)$$

Полученный результат (фиг. 62) нужно понимать следующим образом. При дозвуковом течении возможны три режима. Если при заданной начальной скорости λ_1 приведённая длина трубы меньше максимальной ($\chi < \chi_{\max}$), то скорость в конце трубы должна быть ниже критической ($\lambda_2 < 1$). Если приведённая длина равна максимальной ($\chi = \chi_{\max}$), то в конце трубы получается в точности критический режим ($\lambda_2 = 1$). Если, наконец, вычисленная по формуле (17) приведённая длина трубы ока-

$$\chi = \frac{2k}{k+1} \cdot \zeta \cdot \frac{x}{D}, \quad (17)$$

назвав её *приведённой длиной трубы*. Приравняем нулю первую производную приведённой длины трубы χ по λ_2^2 (при $\lambda_1 = \text{const}$):

$$\frac{d\chi}{d\lambda_2^2} = \frac{1}{\lambda_2^4 \text{ пр}} - \frac{1}{\lambda_2^2 \text{ пр}} = 0.$$

Отсюда получаем:

$$\lambda_2 \text{ пр} = 1.$$

Вторая производная этой величины (при $\lambda_2 \text{ пр} = 1$) есть отрицательная величина

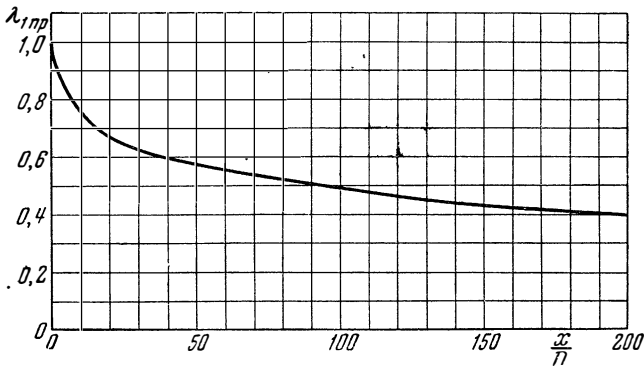
$$\frac{d^2\chi}{d(\lambda_2^2)^2} = -\frac{2}{\lambda_2^6 \text{ пр}} + \frac{1}{\lambda_2^4 \text{ пр}} = -1.$$

Итак, действительно критическая длина трубы ($\chi = \chi_{\max}$) получается в случае $\lambda_2 \text{ пр} = 1$. При этом формула, связывающая максимальную прив-

зывается больше максимальной, определяемой по формуле (18), то это означает, что принятое начальное значение коэффициента скорости λ_1 не может быть реализовано; в начале трубы с заданной приведённой длиной χ можно осуществить величину коэффициента скорости $\lambda_{1\text{ пр}}$, не большую, чем получается из формулы (18):

$$\chi = \chi_{\text{max}} = \frac{1}{\lambda_{1\text{ пр}}^2} - 1 - \ln \frac{1}{\lambda_{1\text{ пр}}^2},$$

так как в этом случае (при $\lambda_1 = \lambda_{1\text{ пр}}$) скорость в конце трубы равна критической ($\lambda_2 = 1$), т. е. через трубу протекает максимально возможный секундный расход газа.



Фиг. 63. Зависимость предельного значения коэффициента скорости в начале трубы от её длины.

На фиг. 63 представлена зависимость предельного значения коэффициента скорости $\lambda_{1\text{ пр}}$ от безразмерной длины трубы $\left(\frac{x}{D}\right)$ при $\zeta = 0,015$ и $k = 1,4$ в случае дозвукового потока.

При сверхзвуковом течении, для которого формула (16) также пригодна, возможны следующие режимы. Если при заданной начальной скорости λ_1 приведённая длина меньше максимальной ($\chi < \chi_{\text{max}}$), то в конце трубы получается сверхзвуковое течение ($\lambda_2 > 1$). Если приведённая длина равна максимальной ($\chi = \chi_{\text{max}}$), то скорость в конце трубы равна критической ($\lambda_2 = 1$). Если же приведённая длина, вычисленная по формуле (17), получается больше максимальной, определённой по формуле (18) при заданном значении коэффициента скорости в начале трубы λ_1 , то плавное торможение сверхзвукового потока на протяжении всей трубы невозможно; в некотором сечении трубы произойдёт скачок уплотнения, за которым установится ускоренное дозву-

ковое течение. Местоположение скачка определяется тем, что скорость в конце трубы должна быть равна критической.

Расчёт местоположения скачка уплотнения можно произвести следующим образом. Пусть задана сверхзвуковая скорость в начале трубы λ_1 , длина трубы x , диаметр трубы D , коэффициент трения ζ и показатель идеальной адиабаты k . Вычисляем по формуле (17) приведённую длину трубы χ . По формуле (18) определяем максимальную приведённую длину χ_{\max} и убеждаемся в том, что истинная приведённая длина больше максимальной ($\chi > \chi_{\max}$). В этом случае, как было указано, в некотором сечении, отстоящем на расстоянии $x_{\text{ск}}$ от начала трубы, возникает скачок уплотнения. Для простоты допустим, что скачок уплотнения прямой, тогда коэффициенты скорости до скачка (λ') и после скачка (λ'') связаны соотношением (16) главы III

$$\lambda' \cdot \lambda'' = 1. \quad (19)$$

Коэффициент скорости перед скачком (λ') можно найти из формулы (16):

$$\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda'^2} - \ln \frac{\lambda'^2}{\lambda_1^2} = \frac{2k}{k+1} \zeta \frac{x_{\text{ск}}}{D} = \chi_{\text{ск}}. \quad (20)$$

Коэффициент скорости за скачком, где устанавливается ускоренное дозвуковое течение ($\lambda'' < 1$), связан с длиной дозвукового участка трубы, в конце которого имеет место кризис ($\lambda_2 = 1$), формулой (18):

$$\frac{1}{\lambda''^2} - 1 - \ln \frac{1}{\lambda''^2} = \frac{2k}{k+1} \zeta \frac{x - x_{\text{ск}}}{D} = \chi - \chi_{\text{ск}},$$

откуда на основании (19) получаем:

$$\lambda'^2 - 1 - \ln \lambda'^2 = \chi - \chi_{\text{ск}}. \quad (21)$$

Решая совместно два уравнения (20) и (21) с двумя неизвестными ($\chi_{\text{ск}}$, λ'), приходим к уравнению с одним неизвестным, по которому вычисляется скорость перед скачком:

$$\lambda'^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} - 1 - \frac{1}{\lambda'^2} - \ln \frac{\lambda'^4}{\lambda_1^2} = \chi, \quad (22)$$

после чего по формуле (21) определяется местоположение скачка.

Формулы (20), (21) и (22) для определения местоположения скачка уплотнения неудобны, так как по ним приходится вести расчёты методом последовательных приближений. Можно рекомендовать вспомогательные графики (фиг. 64), существенно упрощающие расчёты. Кривая (I) отвечает вспомогательной зависимости

$$a = \frac{1}{\lambda^2} + \ln \lambda^2. \quad (23)$$

Кривая (2) изображает функцию (21):

$$\chi - \chi_{\text{сн}} = \lambda'^2 - 1 - \ln \lambda'^2.$$

Кривая (3) соответствует функции (18):

$$\chi_{\text{max}} = \frac{1}{\lambda_1^2} - 1 - \ln \frac{1}{\lambda_1^2}.$$

Поясним способ пользования этими кривыми на конкретном примере. Пусть дана труба с приведённой длиной $\chi = 0,6$. По кривой (3) видно, что в этой трубе установится критический режим ($\lambda_2 = 1$) при значении коэффициента скорости на входе $\lambda_1 = 1,95$. Проверим сначала характер течения в трубе в случае $\lambda_1 > 1,95$, например для $\lambda_1 = 2,2$. По формуле (16) можно вычислить скорость в конце трубы:

$$\frac{1}{\lambda_2^2} + \ln \lambda_2^2 = \frac{1}{\lambda_1^2} + \ln \lambda_1^2 - \chi$$

или в соответствии с обозначением (23)

$$a_2 = a_1 - \chi. \quad (24)$$

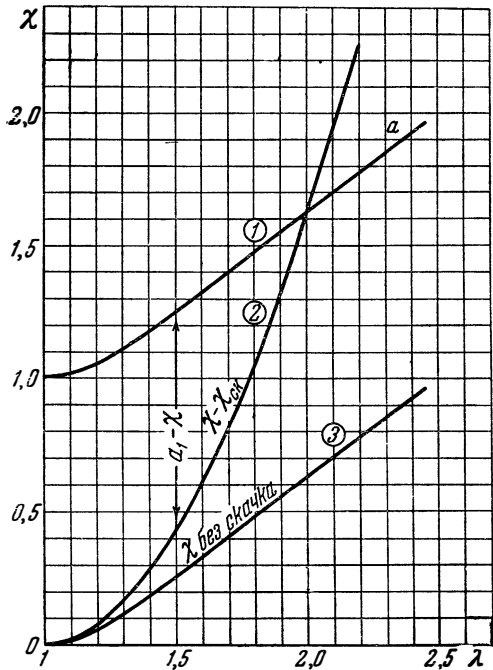
На кривой (1) при $\lambda_1 = 2,2$ находим точку $a_1 = 1,78$, откуда

$$a_2 = 1,78 - 0,60 = 1,18,$$

чему на кривой (1) отвечает значение коэффициента скорости в конце трубы $\lambda_2 = 1,4$. Итак, в трубе, имеющей приведённую длину $\chi = 0,6$, при начальном значении коэффициента скорости $\lambda_1 = 2,2$ происходит плавное торможение сверхзвукового потока до значения коэффициента скорости $\lambda_2 = 1,4$.

Пусть теперь труба имеет приведённую длину больше максимальной ($\chi > \chi_{\text{max}}$), т. е. в данном примере $\lambda_1 < 1,95$. Положим $\lambda_1 = 1,8$. Тогда согласно кривой (3)

$$\chi_{\text{max}} = 0,48, \text{ т. е. } \chi_{\text{max}} < \chi.$$



Фиг. 64. Вспомогательные кривые для расчёта сверхзвукового потока в трубе постоянного сечения.

В этом случае в трубе возникает скачок уплотнения, в результате чего на участке трубы длиной $\chi - \chi_{\text{СК}}$ установится дозвуковое течение, причём, как видно из сравнения кривых (2) и (3), критическая длина трубы существенно увеличивается. Для отыскания местоположения скачка уплотнения преобразуем формулу (20) с помощью обозначений (23). Тогда расстояние от начала трубы до сечения, в котором происходит скачок уплотнения, равно:

$$\chi_{\text{СК}} = a_1 - a'. \quad (25)$$

Но, с другой стороны,

$$\chi = (\chi - \chi_{\text{СК}}) + \chi_{\text{СК}};$$

заменяя последнее слагаемое в правой части этой формулы по (25), получаем:

$$a_1 - \chi = a' - (\chi - \chi_{\text{СК}}). \quad (26)$$

Теперь, пользуясь кривыми фиг. 64, определим местоположение скачка уплотнения в трубе при $\lambda_1 = 1,8$. По кривой (1) находим:

$$a_1 = 1,48,$$

откуда

$$a_1 - \chi = 1,48 - 0,60 = 0,88.$$

Остаётся найти значение λ' , при котором расстояние между кривыми (1) и (2) равно согласно (25):

$$a' - (\chi - \chi_{\text{СК}}) = 0,88.$$

Получается по фиг. 64

$$\lambda' = 1,4, \quad a' = 1,18,$$

чему соответствует по формуле (24) приведённое расстояние от начала трубы до скачка уплотнения:

$$\chi_{\text{СК}} = a_1 - a' = 0,3.$$

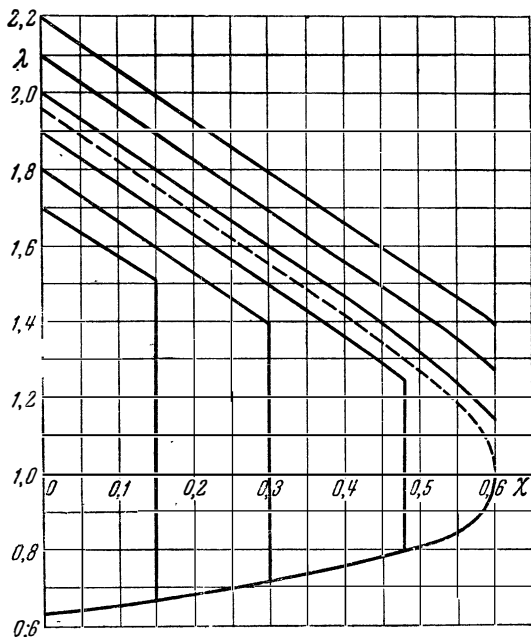
Описанным способом по кривым фиг. 64 вычислены и нанесены на фиг. 65 кривые изменения коэффициента скорости

$$\lambda = f(\chi)$$

в трубе с приведённой длиной $\chi = 0,6$, получающиеся при различных начальных значениях коэффициента скорости λ_1 в начале трубы (при $\chi = 0$). Как видим, скачок уплотнения располагается тем ближе к началу трубы, чем меньше начальная скорость газа. Значения скорости после скачка в дозвуковой

области лежат во всех случаях на универсальной кривой, соответствующей формуле

$$\chi = \frac{1}{\lambda^{0,2}} - 1 - \ln \frac{1}{\lambda^{0,2}}.$$



Фиг. 65. Кривые распределения значений коэффициента скорости по трубе с приведённой длиной $\chi = 0,6$ при различных начальных скоростях.

При $\lambda_1 = 1,6$ скачок помещается в начале трубы ($\lambda_1 = \lambda'$), т. е. участок сверхзвукового течения вовсе ликвидируется.

§ 3. Движение подогреваемого газа по трубе постоянного сечения¹⁾

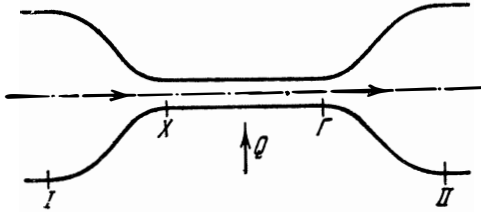
Процесс подвода тепла вносит особый вид сопротивления: при подогреве движущегося газа полное давление падает.

Будем рассматривать движение газа в трубе, изображённой на фиг. 65. Обозначим λ_x и λ_r коэффициенты скорости в соответственных сечениях. Пусть скорость в трубе мала:

$$\lambda_x \ll 1 \text{ и } \lambda_r \ll 1.$$

¹⁾ См. Абрамович Г. Н., О тепловом кризисе в газовом течении, Доклады Академии наук СССР, т. 54, 1946, № 7.

Прибегнем к следующей идеализированной схеме. Газ поступает в трубу $X-G$ из канала с большим поперечным сечением I (фиг. 66). На участке $I-X$ реализуется течение без потерь и теплообмена. Подвод тепла осуществляется только в цилиндрической трубе $X-G$. После этого газ без потерь и теплообмена вытекает в широкий канал II . Несмотря на то, что в каналах I и II скорость мала, а гидравлическими потерями можно пренебречь, значения полного давления в сечениях I и II неодинаковы: как мы покажем сейчас, вследствие подогрева полное давление во втором канале меньше.



Фиг. 66. К определению теплового сопротивления.

Согласно уравнению Бернулли

$$p_x = p_{01} - \rho_x \frac{\omega_x^2}{2},$$

$$p_g = p_{02} - \rho_g \frac{\omega_g^2}{2}.$$

Отсюда изменение полного давления

$$p_{01} - p_{02} = (p_x - p_g) + \left(\rho_x \frac{\omega_x^2}{2} - \rho_g \frac{\omega_g^2}{2} \right).$$

При рассмотрении уравнения неразрывности

$$\rho_x \omega_x = \rho_g \omega_g$$

нетрудно заметить, что если за счёт подогрева плотность газа уменьшается, то скорость его растёт и, следовательно, статическое давление падает.

Из уравнения импульсов можно определить падение статического давления при подогреве на участке $X-G$ (пренебрегая трением):

$$p_x - p_g = \rho_x \omega_x (\omega_g - \omega_x)$$

или

$$p_x - p_g = 2 \left(\rho_g \frac{\omega_g^2}{2} - \rho_x \frac{\omega_x^2}{2} \right).$$

Подставив эту разность в ранее полученное уравнение, имеем:

$$p_{01} - p_{02} = \rho_g \frac{\omega_g^2}{2} - \rho_x \frac{\omega_x^2}{2}.$$

Отсюда видно, что при подогреве медленно движущегося газа величина потерь мала. При значительной же скорости ими пренебрегать уже нельзя.

Обнаруженное «тепловое» сопротивление нетрудно объяснить с точки зрения термодинамики. В рассмотренном примере имеет место расширение газа в конфузоре, затем подогрев его при пониженном давлении и, наконец, сжатие в диффузоре. Но такой цикл противоположен обычному циклу тепловой машины, в котором подвод тепла идёт при повышенном давлении. По этой причине рассматриваемый процесс связан с поглощением, а не выделением энергии.

Оценим влияние подвода тепла на расход газа в трубе. Пусть истечение газа происходит через трубу постоянного сечения (фиг. 67), в которой температура газа увеличивается от значения T_x до T_Γ . Ограничиваясь случаем малых скоростей ($\lambda_\Gamma \ll 1$), при котором абсолютная величина давления меняется незначительно, получим:

$$\frac{w_x}{w_\Gamma} = \frac{\rho_\Gamma}{\rho_x} \approx \frac{T_x}{T_\Gamma} \approx \frac{T_{ox}}{T_{o\Gamma}}.$$

Отсюда, пренебрегая сопротивлением трения, имеем:

$$p_x - p_\Gamma = \rho_x \cdot w_x^2 \cdot \left[\frac{T_\Gamma}{T_x} - 1 \right]$$

и

$$p_{ox} - p_x = \frac{1}{2} \rho_x w_x^2,$$

откуда

$$p_{ox} - p_\Gamma = (p_x - p_\Gamma) + (p_{ox} - p_x) = \frac{1}{2} \rho_x w_x^2 \left[2 \frac{T_\Gamma}{T_x} - 1 \right].$$

Здесь уменьшаемое есть полное давление в сосуде, из которого газ вытекает:

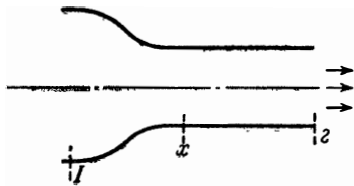
$$p_{ox} = p_{o\Gamma},$$

а вычитаемое — статическое давление в выходном сечении трубы:

$$p_\Gamma = p_n.$$

Весовой расход газа при заданном перепаде давлений

$$H = p_{o1} - p_n$$



Фиг. 67. К учёту влияния подогрева на расход газа в трубе.

равен

$$G = \rho_x \omega_x \cdot g \cdot F,$$

где F — поперечное сечение трубы.

Из сопоставления полученных формул имеем:

$$\omega_x = \sqrt{\frac{2H}{\rho_x \left(2 \frac{T_\Gamma}{T_x} - 1 \right)}}.$$

Отсюда получаем формулу для отношения расходов газа при отсутствии и наличии подогрева в трубе:

$$\frac{G_x}{G_\Gamma} = \sqrt{2 \frac{T_\Gamma}{T_x} - 1}.$$

Как видим, подвод тепла при заданном перепаде давлений ведёт к уменьшению весового расхода газа при одновременном увеличении скорости истечения.

Исследуем теперь падение давления на участке $X - \Gamma$ трубы при большой скорости движения газа. Согласно уравнению неразрывности

$$\omega_x \rho_x = \omega_\Gamma \rho_\Gamma \quad (27)$$

при подогреве плотность газа падает, а скорость возрастает. В соответствии с уравнением импульсов

$$p_x - p_\Gamma = \rho_x \omega_x (\omega_\Gamma - \omega_x) \quad (28)$$

рост скорости обуславливает падение давления. Из уравнения состояния имеем:

$$\rho = \frac{p}{gRT} \quad \text{или} \quad \frac{p_\Gamma}{\rho_\Gamma T_\Gamma} = \frac{p_x}{\rho_x T_x}. \quad (29)$$

Отсюда видно, что плотность падает несколько быстрее, чем по закону обратной пропорциональности с температурой, так как одновременно с ростом температуры уменьшается давление. Поэтому скорость газа увеличивается быстрее, чем температура. Скорость звука, которая пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры, увеличивается вдоль трубы значительно медленнее, чем скорость потока. По этой причине число $M = \frac{\omega}{a}$ по длине трубы растёт.

Поток, имеющий любую начальную скорость, можно за счёт соответствующего подогрева довести до критической скорости ($M_\Gamma = 1$). При большом начальном значении числа M понадобится незначительный подогрев. Чем ниже скорость, тем более сильный *критический* подогрев необходим. Но никаким подо-

гревом нельзя перевести поток в цилиндрической трубе в сверхзвуковую область. Это явление носит название *теплового кризиса*¹⁾.

Естественно, что после того, как в конце трубы достигнут кризис, скорость потока в начале трубы не может быть увеличена никакими способами. Если по достижении кризиса продолжать подогрев газа, то величина критической скорости в конце трубы растёт, а скорость в начале трубы падает. Иначе говоря, заданному количеству тепла соответствует совершенно определённое предельное значение числа M в начале трубы.

Теплосодержание заторможенного газа складывается из теплосодержания в потоке и теплового эквивалента кинетической энергии:

$$i_{0x} = i_x + A \frac{w_x^2}{2g}, \quad i_{0r} = i_r + A \frac{w_r^2}{2g}.$$

Вследствие подвода тепла теплосодержание в конце трубы больше, чем в начале, на величину количества тепла, сообщённого 1 кг газа:

$$Q = i_{0r} - i_{0x}.$$

Отсюда получаем:

$$Q = c_p (T_{0r} - T_{0x}) = c_p (T_r - T_x) + \frac{A}{2g} (w_r^2 - w_x^2). \quad (30)$$

Приведённых четырёх уравнений (27), (28), (29) и (30) достаточно для определения четырёх параметров газа — p_r , ρ_r , T_r , w_r в конце трубы.

Для упрощения рабочих формул сведём их к безразмерному виду, пользуясь известными величинами

$$\lambda_x = \frac{w_x}{a_{кр\ x}} \quad \text{и} \quad \lambda_r = \frac{w_r}{a_{кр\ r}}, \quad (31)$$

где

$$a_{кр\ r} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} gRT_{0r}},$$

$$a_{кр\ x} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} gRT_{0x}}.$$

Рассматриваемая система из четырёх уравнений с четырьмя неизвестными приводится к одному квадратному уравнению. Чтобы получить это квадратное уравнение, будем исходить из уравнения (28):

$$p_r \left(\frac{p_x}{p_r} - 1 \right) = \rho_r w_r (w_r - w_x).$$

¹⁾ Более подробное обоснование явления теплового кризиса даётся в следующем параграфе.

Вставляем в это уравнение значение $\frac{P_x}{P_\Gamma}$ из уравнения (29):

$$\frac{\rho_x}{\rho_\Gamma} \cdot \frac{T_x}{T_\Gamma} - 1 = \frac{\rho_\Gamma}{P_\Gamma} \cdot \omega_\Gamma^2 \left(1 - \frac{\rho_\Gamma}{\rho_x} \right),$$

но по формуле (36) главы I

$$\frac{kP_\Gamma}{\rho_\Gamma} = a_\Gamma^2,$$

следовательно, наше уравнение примет вид

$$\frac{\rho_x}{\rho_\Gamma} \cdot \frac{T_x}{T_\Gamma} - 1 = kM_\Gamma^2 \left(1 - \frac{\rho_\Gamma}{\rho_x} \right). \quad (32)$$

Выразим теперь отношение температур в потоке

$$\frac{T_x}{T_\Gamma} = \frac{T_{0x} - \frac{Aw_x^2}{c_p \cdot 2g}}{T_{0\Gamma} - \frac{Aw_\Gamma^2}{c_p \cdot 2g}} = \frac{T_{0x} - \frac{Aw_x^2}{c_p \cdot 2g T_{0\Gamma}}}{1 - \frac{Aw_\Gamma^2}{c_p \cdot 2g T_{0\Gamma}}}.$$

Вводя критическую скорость $a_{крг}$, получим:

$$\frac{T_x}{T_\Gamma} = \frac{\frac{T_{0x}}{T_{0\Gamma}} - \frac{k-1}{k+1} \left(\frac{\rho_\Gamma}{\rho_x} \right)^2 \lambda_\Gamma^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_\Gamma^2}.$$

Используя формулу (47) главы I, имеем:

$$M_\Gamma^2 = \frac{\frac{2}{k+1} \lambda_\Gamma^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_\Gamma^2}.$$

Вставляя значения M_Γ^2 и $\frac{T_x}{T_\Gamma}$ в уравнение (32), приходим к искомому квадратному уравнению

$$\left(\frac{\rho_\Gamma}{\rho_x} \right)^2 \frac{\lambda_\Gamma^2}{1 + \lambda_\Gamma^2} - \frac{\rho_\Gamma}{\rho_x} + \frac{T_{0x}}{T_{0\Gamma}} \cdot \frac{1}{1 + \lambda_\Gamma^2} = 0, \quad (33)$$

решая которое находим¹⁾:

$$\frac{\rho_\Gamma}{\rho_x} = \frac{1 + \lambda_\Gamma^2}{2\lambda_\Gamma^2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\lambda_\Gamma^2}{(1 + \lambda_\Gamma^2)^2} \frac{T_{0x}}{T_{0\Gamma}}} \right], \quad (34)$$

¹⁾ Почему мы берём именно этот корень квадратного уравнения, будет пояснено ниже (стр. 169).

или

$$\frac{\rho_x}{\rho_\Gamma} = \frac{1 + \lambda_x^2}{2\lambda_x^2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\lambda_x^2}{(1 + \lambda_x^2)^2} \cdot \frac{T_{0\Gamma}}{T_{0x}}} \right], \quad (35)$$

причём

$$\frac{\rho_x}{\rho_\Gamma} = \frac{w_\Gamma}{w_x}.$$

Уравнение (35) используется в тех случаях, когда известно состояние газа в начале трубы. Если же газ разгоняется в конце трубы до критической скорости, то удобнее применять уравнение (34).

При отсутствии подогрева ($T_{0x} = T_{0\Gamma}$) получается:

$$\rho_\Gamma = \rho_x.$$

Если в конце трубы имеет место тепловой кризис ($\lambda_\Gamma = 1$), то уравнение (34) примет следующий вид:

$$\frac{\rho_\Gamma}{\rho_x} = \frac{w_x}{w_\Gamma} = 1 - \sqrt{1 - \frac{T_{0x}}{T_{0\Gamma}}}, \quad (36)$$

где

$$w_\Gamma = a_{кр \Gamma} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} gRT_{0\Gamma}}.$$

Предельное значение скорости в начале трубы при этом равно:

$$|w_x|_{\max} = a_{кр \Gamma} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{T_{0x}}{T_{0\Gamma}}} \right), \quad (37)$$

Разделив обе части равенства (37) на $a_{кр x}$, можно перейти к коэффициенту скорости:

$$|\lambda_x|_{\max} = \frac{a_{кр \Gamma}}{a_{кр x}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{T_{0x}}{T_{0\Gamma}}} \right),$$

но

$$\frac{a_{кр \Gamma}}{a_{кр x}} = \sqrt{\frac{T_{0\Gamma}}{T_{0x}}},$$

поэтому

$$|\lambda_x|_{\max} = \sqrt{\frac{T_{0\Gamma}}{T_{0x}}} - \sqrt{\frac{T_{0\Gamma}}{T_{0x}} - 1}. \quad (38)$$

Расчёт изменения максимальной скорости на входе в трубу при варьировании подогрева дан в таблице II.

Таблица II

$T_{ог} / T_{0x}$	1	2	4	6	8
$ \lambda_x _{max}$	1	0,41	0,27	0,22	0,17

Уменьшение скорости в начале трубы с усилением подогрева в условиях теплового кризиса объясняется сокращением расхода газа:

$$G = \rho_x \cdot \omega_x \cdot F = \rho_r \cdot \omega_r \cdot F.$$

В самом деле, при тепловом кризисе скорость увеличивается пропорционально корню квадратному из температуры:

$$\omega_r = a_r \sim \sqrt{T_r},$$

а плотность газа падает быстрее, чем по закону обратной пропорциональности с температурой (ввиду уменьшения давления):

$$\rho_r \sim \frac{p_r}{T_r},$$

поэтому расход газа уменьшается быстрее, чем по закону обратной пропорциональности с корнем квадратным из температуры:

$$G = \rho_r \cdot \omega_r \cdot F \sim \frac{p_r}{\sqrt{T_r}}.$$

Но плотность в начале трубы не зависит от подогрева, поэтому падение расхода приводит к уменьшению скорости в начале трубы. Малые значения коэффициента скорости на входе в камеру сгорания, получающиеся при сильном подогреве, приводят к большим габаритам двигателя. С увеличением скорости полёта растут начальная температура (T_{0x}) и предельное значение скорости на входе в камеру сгорания.

Согласно уравнению импульсов перепад давления в трубе равен:

$$\frac{p_x}{p_r} - 1 = \frac{\rho_r \cdot \omega_r^2}{p_r} \left(1 - \frac{\omega_x}{\omega_r} \right),$$

но на основании формул (36) и (47) главы I имеем:

$$k \frac{p_r}{\rho_r} = a_r^2 = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_r^2}{2} a_{кр\ r}^2,$$

поэтому

$$\frac{P_x}{P_\Gamma} = 1 + \frac{\frac{2k}{k+1} \lambda_\Gamma^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_\Gamma^2} \left(1 - \frac{\omega_x}{\omega_\Gamma} \right). \quad (39)$$

Предельное падение давления получается при достижении теплового кризиса ($\lambda_\Gamma = 1$). В этом случае на основании (36)

$$\left| \frac{P_x}{P_\Gamma} \right|_{\max} = 1 + k \sqrt{1 - \frac{T_{0x}}{T_{0\Gamma}}}. \quad (40)$$

Осуществляя очень сильный подогрев ($\frac{T_{0x}}{T_{0\Gamma}} \rightarrow 0$), можно довести падение давления до следующей наивысшей величины:

$$\left| \frac{P_x}{P_\Gamma} \right|_{\max} = k + 1,$$

или при $k = 1,4$

$$\left| \frac{P_x}{P_\Gamma} \right|_{\max} = 2,4.$$

Напомним, что в сопле Лавала падение давления, необходимое для получения критической скорости, составляет:

$$\frac{P_0}{P_{кр}} = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

т. е. при $k = 1,4$

$$\frac{P_0}{P_{кр}} = 1,89.$$

Определим теперь падение полного давления в цилиндрической трубе. В начале и в конце трубы имеем соответственно:

$$\frac{P_x}{P_{0x}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_x^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

и

$$\frac{P_\Gamma}{P_{0\Gamma}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_\Gamma^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Разделив первое уравнение на второе, получим:

$$\frac{P_x}{P_{0x}} \cdot \frac{P_{0\Gamma}}{P_\Gamma} = \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_x^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_\Gamma^2} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Отсюда коэффициент полного давления в трубе равен:

$$\sigma_{к.с} = \frac{P_{0Г}}{P_{0Х}} = \frac{P_{Г}}{P_{Х}} \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{Г}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{Х}^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (41)$$

Наибольшее падение полного давления получается в условиях теплового кризиса. Подставляя выражения (38) и (40) в равенство (41), можем выразить падение полного давления как функцию отношения температур торможения:

$$\sigma_{кр} = \frac{\left[k - (k-1) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{T_{0Х}}{T_{0Г}}} \right) \frac{T_{0Г}}{T_{0Х}} \right]^{\frac{k}{k-1}}}{1 + k \sqrt{1 - \frac{T_{0Х}}{T_{0Г}}}} \quad (42)$$

Зависимость изменения полного давления при тепловом кризисе в трубе от отношения температур торможения, вычисленная по формуле (42), представлена в нижеследующей таблице:

Таблица III

$T_{0Г} / T_{0Х}$	1	1,5	2	4	6	8	∞
$\sigma_{кр}$	1	0,89	0,86	0,82	0,81	0,80	0,79

Как видим, потери полного давления при реальном подогреве ($\frac{T_{0Г}}{T_{0Х}} \approx 4-8$) получаются такого же порядка, как и при бесконечно сильном подогреве. При $\frac{T_{0Х}}{T_{0Г}} \rightarrow 0$, т. е. при бесконечном подогреве газа,

$$\sigma_{кр} = \frac{1}{2} \left[\frac{k+1}{2} \right]^{\frac{1}{k-1}}$$

Следовательно, для воздуха ($k=1,4$) максимальное падение полного давления равно:

$$\sigma_{кр} = 0,79.$$

Итак, полное давление в конце подогрева составляет не меньше 80% от полного давления в начале подогрева.

Выше было показано, что при малых скоростях течения газа по трубе с подводом тепла в случае постоянного перепада давлений усиление подогрева ведёт к снижению расхода газа.

Нетрудно показать, что и при больших скоростях в случае постоянного перепада давлений подогрев вызывает уменьшение расхода газа, однако ввиду громоздкости соответствующих выкладок мы здесь на этом не останавливаемся.

§ 4. Общие условия перехода от дозвукового течения к сверхзвуковому и обратно

В предыдущих параграфах было показано, что при подводе тепла или совершении работы трения в движущемся по цилиндрической трубе с дозвуковой скоростью газе происходит увеличение числа M ; то же явление наблюдается в дозвуковом потоке при сужении трубы без теплообмена и трения.

Ниже будет доказано, что изменение числа M в газовом потоке происходит не только под влиянием трения, теплового и геометрического воздействий, но также при изменении расхода газа в канале и при совершении механической работы. Указанные воздействия вызывают изменение числа M как в дозвуковом, так и в сверхзвуковом потоке газа.

Рассмотрим в общем виде влияние этих воздействий на скорость движения газа. Для простоты будем считать газ идеальным. Весовой расход газа равен:

$$G = g\rho\omega F,$$

отсюда

$$dG = g \cdot d(\rho\omega F)$$

и после дифференцирования произведения

$$\frac{dG}{G} = \frac{dF}{F} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\omega}{\omega}. \quad (43)$$

Дифференцируя уравнение состояния для идеального газа ($p = g\rho RT$), получаем:

$$dp = gR(\rho \cdot dT + T \cdot d\rho),$$

откуда

$$\frac{dp}{p} = gR \left(dT + T \frac{d\rho}{\rho} \right). \quad (44)$$

Сопоставление выражений (43) и (44) даёт:

$$\frac{dp}{p} = gR dT + gRT \left(\frac{dG}{G} - \frac{dF}{F} - \frac{d\omega}{\omega} \right); \quad (45)$$

из уравнения Бернулли в дифференциальной форме имеем:

$$\frac{dp}{\rho} = -\omega d\omega - g dL - g dL_{тр}, \quad (46)$$

где L — техническая работа, $L_{\text{тр}}$ — работа трения. Сопоставляя последние два выражения, освобождаемся от членов, содержащих плотность и давление:

$$gR dT + \frac{a^2}{k} \left(\frac{dG}{G} - \frac{dF}{F} \right) + \left(w^2 - \frac{a^2}{k} \right) \frac{dw}{w} + g dL + g dL_{\text{тр}} = 0. \quad (47)$$

Здесь используется выражение для скорости звука ($a^2 = kgRT$). От члена, содержащего температуру ($gR dT$), можно избавиться с помощью дифференциального уравнения энергии

$$\begin{aligned} dQ_{\text{нар}} &= di + Ad \frac{w^2}{2g} + A dL = \\ &= \frac{Ak}{g(k-1)} gR dT + \frac{A}{g} w dw + A dL, \end{aligned} \quad (48)$$

где $Q_{\text{нар}}$ — тепло, подводимое к газу извне, $di = c_p dT = AR \frac{k}{k-1} dT$ — прирост теплосодержания. Подставляя (48) в (47) и производя элементарные преобразования, приходим к соотношению, связывающему изменение скорости газового потока с внешними воздействиями (геометрическим, расходным, механическим, тепловым и трением):

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = \frac{dF}{F} - \frac{dG}{G} - \frac{g}{a^2} dL - \frac{k-1}{A} \frac{g}{a^2} dQ_{\text{нар}} - \frac{kg}{a^2} dL_{\text{тр}}. \quad (49)$$

Это соотношение было установлено Л. А. Вулисом¹⁾ и получило название *условия обращения воздействия*. Особенность этого соотношения состоит в том, что знак его левой части изменяется при переходе значения скорости через критическое. Поэтому характер влияния отдельных физических воздействий на газовое течение противоположен при дозвуковом и сверхзвуковом режимах. Воздействия, вызывающие ускорение в дозвуковом потоке (сужение канала, подвод дополнительной массы газа, совершение газом работы, трение и подвод тепла):

$$dF < 0, \quad dG > 0, \quad dL > 0, \quad dQ_{\text{нар}} > 0,$$

приводят к замедлению сверхзвукового потока и ускорению дозвукового потока; воздействия обратного знака (расширение канала, отсос газа, сообщение газу механической энергии и отвод тепла: $dF > 0$, $dG < 0$, $dL < 0$, $dQ_{\text{нар}} < 0$) приводят к замедлению дозвукового и ускорению сверхзвукового потоков. Отсюда следует важный вывод, что под влиянием одностороннего воздействия величину скорости газового потока можно довести

¹⁾ Вулис Л. А., Доклады Академии наук СССР, т. 54, № 8, 1946; Вулис Л. А., Термодинамика газовых потоков. Энергоиздат, 1950.

до критической, но нельзя перевести через неё. Например, путём подвода тепла можно ускорять дозвуковой поток, но только до тех пор, пока не получится $M = 1$. Для того же, чтобы перевести дозвуковой поток в сверхзвуковой, нужно переменить знак воздействия, т. е. в зоне $M = 1$ начать отводить тепло. Таково обоснование описанного в предыдущем параграфе явления теплового кризиса в камере сгорания. Подогрев газа в сверхзвуковом течении вызывает торможение скорости, но переход к дозвуковому течению и дальнейшее торможение станут возможными только в том случае, если, начиная с $M = 1$, мы переключимся на охлаждение газа.

Рассмотрим отдельно каждое из четырёх воздействий.

При этом получим в дополнение к известному соплу Лавалья (геометрическое воздействие) ещё три указанных Л. А. Вулисом способа перехода через скорость звука, т. е. *расходное, механическое и тепловое сопла*.

Геометрическое сопло, т. е. известное сопло Лавалья, представляет собой прибор, в котором только за счёт придания каналу соответствующей формы можно осуществить переход от дозвуковой скорости к сверхзвуковой. В этом частном случае чисто геометрического воздействия на поток ($dF \neq 0$) отсутствуют прочие воздействия, т. е. не меняется расход газа ($dG = 0$), нет обмена теплом и работой с внешней средой ($dQ_{\text{нар}} = 0$, $dL = 0$) и нет трения ($dL_{\text{тр}} = 0$).

Но тогда соотношение (49) переходит в полученное ранее равенство (1) главы IV:

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = \frac{dF}{F}.$$

Не останавливаясь вторично на исследовании течения в сопле Лавалья, напомним только, что ускорение потока в дозвуковой части сопла Лавалья ($M < 1$) получается путём сужения канала ($dF < 0$), но, начиная с критического сечения ($M = 1$), для получения сверхзвукового потока и дальнейшего его ускорения приходится изменять знак воздействия, т. е. расширять канал ($dF > 0$).

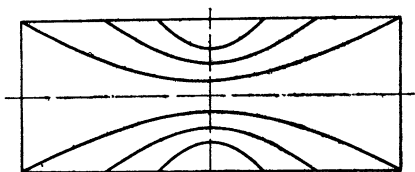
Течение идеального газа в геометрическом сопле (фиг. 45) при отсутствии трения является изоэнтропическим. В критическом сечении ($M = 1$) сопла воздействие проходит через минимум ($dF = 0$).

Расходное сопло даёт возможность получить переход через скорость звука за счёт изменения расхода газа в трубе постоянного сечения ($dF = 0$) при отсутствии обмена с внешней средой работы ($dL = 0$) и тепла ($dQ_{\text{нар}} = 0$) и без трения ($dL_{\text{тр}} = 0$). В этом случае соотношение (49) принимает следующую форму:

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = - \frac{dG}{G}.$$

Ускорение движения ($dw > 0$) достигается здесь за счёт подвода дополнительной массы газа в дозвуковой части канала и отсоса газа в сверхзвуковой его части. В критическом сечении ($M = 1$) расход газа и, следовательно, плотность тока проходят через максимум.

Расходное сопло в принципе аналогично геометрическому. Если разбить поток в расходном сопле на отдельные струйки постоянного расхода, то каждая из них представляет собой геометрическое сопло с наиболее узким сечением в области кризиса ($M = 1$); однако сужение элементарных струек в нём осуществляется не путём сужения общего канала, а за счёт подвода и отвода дополнительных количеств газа (фиг. 68).



Фиг. 68. Схема потока в расходном сопле.

Естественно, что изменение состояния идеального газа в расходном сопле (без трения) идёт по изоэнтропическому закону.

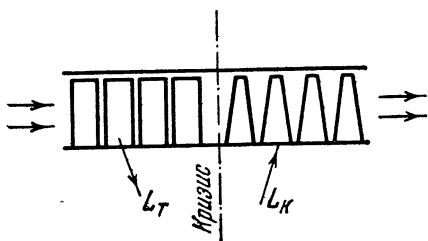
Механическое сопло даёт ещё один принципиально возможный путь перехода через скорость звука: за счёт технической работы при отсутствии других воздействий ($dF = 0$, $dG = 0$, $dQ_{\text{нар}} = 0$, $dL_{\text{тр}} = 0$). В этом случае основное соотношение (49) выглядит так:

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = -\frac{g}{a^2} \cdot dL,$$

из чего следует, что если газовый поток совершает работу ($dL > 0$), например, на колесе турбины, то в дозвуковом режиме

($M < 1$) он ускоряется ($dw > 0$), а в сверхзвуковом ($M > 1$) замедляется ($dw < 0$). При подводе работы к газу ($dL < 0$, т. е. на лопатках нагнетателя, в дозвуковом течении наблюдается замедление, а в сверхзвуковом — ускорение.

В критическом сечении ($M = 1$) механического сопла работа проходит через экстремум (минимум: $dL = 0$).



Фиг. 69. Схема механического сопла.

Непрерывный переход через скорость звука в механическом сопле можно получить, изменив знак воздействия в критическом сечении. Пропуская дозвуковой поток газа через турбину, можно разогнать его до критической скорости; после этого нужно пустить его через нагнетатель, и тогда получится ускоряющийся сверхзвуковой поток (фиг. 69).

Таким образом, сверхзвуковое механическое сопло должно состоять из последовательно включённых турбины (в области $M < 1$) и компрессора (в области $M > 1$), между которыми предполагается критическое сечение ($M = 1$).

Особенностью механического сопла является то, что параметры торможения проходят в его критическом сечении через минимум. В самом деле, уравнение теплосодержания для механического сопла можно записать следующим образом:

$$i_{0H} = i_0 + AL.$$

Здесь i_{0H} , i_0 — значения полного теплосодержания газа соответственно в начальном и произвольном сечениях сопла, L — техническая работа, совершённая газом между начальным и произвольным сечениями сопла. Поэтому в дозвуковой части механического сопла, где газ совершает работу (на турбине), т. е.

$$L > 0,$$

полное теплосодержание (и температура торможения) убывает:

$$i_0 < i_{0H}.$$

В сверхзвуковой области, где к газу подводится механическая энергия ($L < 0$), происходит увеличение полного теплосодержания по сравнению с его значением в критическом сечении:

$$i_0 > i_{0кр},$$

отсюда

$$T_0 > T_{0кр}.$$

В том, что полное давление и плотность заторможенного газа проходят вместе с температурой торможения в критическом сечении механического сопла через минимумы, можно убедиться с помощью изоэнтропических пропорций:

$$\frac{p_0}{p_{0H}} = \left(\frac{T_0}{T_{0H}} \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

$$\frac{\rho_0}{\rho_{0H}} = \left(\frac{T_0}{T_{0H}} \right)^{\frac{1}{k-1}},$$

которые применимы к идеальному механическому соплу ввиду отсутствия в нём трения и теплоотдачи.

Для анализа изменения параметров потока в идеальном механическом сопле выразим отношение значений числа M в двух сечениях сопла через параметры потока:

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{w_2}{w_1} \cdot \frac{a_1}{a_2} = \frac{\rho_1 a_1}{\rho_2 a_2}.$$

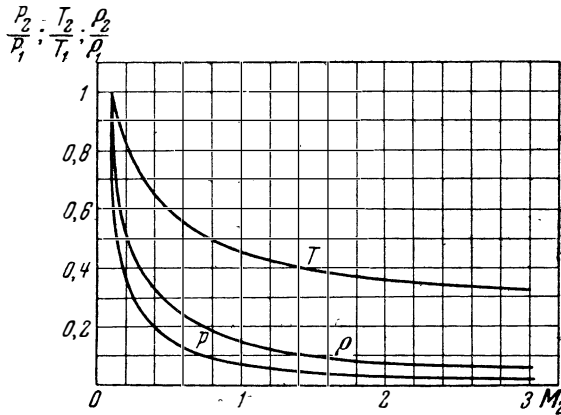
Здесь использовано уравнение неразрывности для канала постоянного сечения, каковым является механическое сопло ($dF = 0$); согласно пропорциям идеального адиабатического процесса

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{k-1}};$$

отношение значения скорости звука

$$\frac{a_1}{a_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда получаем простые зависимости между значением числа



Фиг. 70. Зависимость параметров газа от числа M_2 в механическом сопле при $M_1 = 0,1$, $k = 1,4$.

M и параметрами газа в идеальном механическом сопле:

$$\frac{M_2}{M_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{k+1}{2k}} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\frac{k+1}{2}}. \quad (50)$$

Итак, монотонное возрастание значения числа M в механическом сопле сопровождается монотонным падением температуры, давления и плотности.

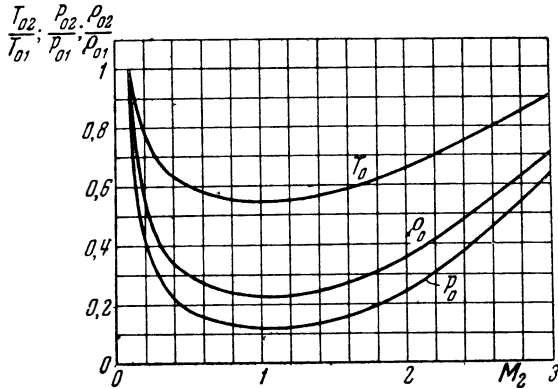
Кривые изменения параметров потока и торможения в сверхзвуковом механическом сопле при $M_1 = 0,1$ представлены на фиг. 70 и 71.

Из выражения (50) следует, что максимальная скорость истечения из механического сопла ничем не ограничивается:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{2}{k+1}}.$$

т. е. при $M_2 \rightarrow \infty$ имеем: $\omega_2 \rightarrow \infty$. Этот результат не должен вызывать удивления, так как в сверхзвуковом участке механического сопла к газу подводится энергия ($dL < 0$).

Тепловое сопло, пока ещё не осуществлённое, даёт принципиальную возможность перехода газового потока через скорость звука за счёт ещё одного — чисто теплового — воздействия при отсутствии других воздействий, т. е. в цилиндрической трубе ($dF = 0$), при постоянном расходе газа ($dG = 0$), без совершения



Фиг. 71. Зависимость параметров торможения от числа M_2 в механическом сопле при $M_1 = 0,1$, $k = 1,4$.

механической работы ($dL = 0$) и без трения ($dL_{\text{тр}} = 0$). Основное соотношение (49) применительно к тепловому соплу имеет следующий вид:

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = - \frac{g(k-1)}{A \cdot a^2} dQ_{\text{нар}}.$$

Ускорение газа ($dw > 0$) в дозвуковом потоке ($M < 1$) здесь связано с подводом тепла ($dQ_{\text{нар}} > 0$), а в сверхзвуковом — с его отводом ($dQ_{\text{нар}} < 0$). Подвод тепла при сверхзвуковом и отвод тепла при дозвуковом режиме вызывают замедление потока ($dw < 0$). Таким образом, для того чтобы преобразовать дозвуковой поток в сверхзвуковой посредством теплового сопла, в дозвуковом участке последнего нужно повышать теплосодержание газа, а в сверхзвуковом — понижать его, т. е. в критическом сечении теплового сопла, где количество подведённого к газу тепла проходит через максимум ($dQ_{\text{нар кр}} = 0$), следует изменить знак воздействия.

Температура торможения в критическом сечении теплового сопла (в противоположность случаю механического сопла)

достигает максимального значения; это вытекает из уравнения теплосодержания, которое применительно к тепловому соплу имеет следующий вид:

$$i_{0н} = i_0 - Q_{нар}.$$

В предыдущем параграфе изложена теория *теплового сопротивления*, из которой следует, что при подводе тепла к газовому потоку полное давление в нём падает, а при отводе тепла — растёт. Формулы теплового сопротивления были выведены применительно к случаю движения газа без трения по трубе постоянного сечения, т. е. именно к случаю теплового сопла. Из этой теории следует, что полное давление в критическом сечении теплового сопла, как и в механическом сопле, проходит через минимум.

Плотность заторможенного газа, прямо пропорциональная полному давлению и обратно пропорциональная температуре торможения, достигает в критическом сечении минимального значения.

В рассмотренных выше идеальных соплах: геометрическом, расходном и механическом, изменение состояния газа было изоэнтропическим, т. е. описывалось уравнением идеальной адиабаты

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const.}$$

В тепловом сопле в связи с подводом и отводом тепла энтропия изменяется.

Исследуем термодинамический процесс, который имеет место в тепловом сопле¹⁾. Дифференциальная форма уравнения количества движения применительно к цилиндрической трубе при отсутствии трения имеет следующий вид:

$$dp = -\rho\omega d\omega.$$

Уравнение неразрывности в этом случае ($dF = 0$, $dG = 0$) даёт:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d\omega}{\omega};$$

отсюда

$$\frac{dp}{d\rho} = \omega^2. \quad (51)$$

В политропическом процессе при постоянном показателе политропы имеем:

$$\frac{p}{\rho^n} = \text{const.}$$

¹⁾ См. Вулис Л. А., О переходе через скорость звука в газовом течении. Доклады Академии наук СССР, т. 54, 1946, № 8.

откуда получаем:

$$\frac{dp}{d\rho} = n \frac{p}{\rho} = n \frac{a^2}{k}; \quad (52)$$

здесь использовано известное выражение для скорости звука в газе

$$a^2 = \frac{k\rho}{\rho}.$$

Приравнивая правые части выражений (51) и (52), замечаем, что показатель политропы в тепловом сопле является существенно переменной величиной

$$n = k \cdot M^2. \quad (53)$$

Формула (53) показывает наличие двух характерных сечений в тепловом сопле.

В сечении, где $M = \frac{1}{\sqrt{k}}$, местное значение показателя политропы равно единице: $n = 1$, т. е. элементарный термодинамический процесс в этом сечении — изотермический ($dT = 0$), и следовательно, температура газа здесь проходит через максимум.

В критическом сечении теплового сопла, т. е. при $M = 1$, показатель политропы на основании формулы (53) равен показателю идеальной адиабаты: $n = k$, т. е. здесь имеет место элементарный изоэнтропический процесс, при котором, как уже указывалось выше, количество подведённого к газу тепла и температура торможения проходят через максимум ($dQ_{\text{нар}} = 0$, $dT_0 = 0$).

От изотермического до критического сечений теплового сопла наблюдается интересное явление: понижение температуры газа ($dT < 0$) при подводе тепла ($dQ_{\text{нар}} > 0$). На этом участке сопла прирост кинетической энергии газа больше прироста полного теплосодержания.

Для отыскания зависимости давления от числа M в тепловом сопле без трения используем уравнение количества движения в следующей форме:

$$p_1 + \rho_1 \omega_1^2 = p_2 + \rho_2 \omega_2^2; \quad (54)$$

отсюда

$$p_1 (1 + kM_1^2) = p_2 (1 + kM_2^2)$$

или

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2}. \quad (55)$$

Иначе говоря, давление газа в тепловом сопле с ростом числа M монотонно падает.

Зависимость плотности газа и скорости течения в тепловом сопле от числа M можно найти следующим способом:

$$\frac{M_2^2}{M_1^2} = \frac{\omega_2^2 a_1^2}{\omega_1^2 a_2^2} = \frac{\omega_2^2 T_1}{T_2 \omega_1^2},$$

но из уравнения состояния

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

и из уравнения неразрывности

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2};$$

отсюда

$$\frac{M_2^2}{M_1^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{p_1}{p_2}.$$

Используя зависимость (55), получаем:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{M_1^2}{M_2^2} \frac{1 + kM_2^2}{1 + kM_1^2}, \quad (56)$$

откуда видно, что *плотность газа вдоль теплового сопла монотонно падает с ростом числа M .*

Температура газа в тепловом сопле как функция числа M может быть получена делением равенства (55) на равенство (56):

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{M_2^2}{M_1^2} \left[\frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \right]^2. \quad (57)$$

Как нетрудно убедиться из выражения (57), кривая температуры имеет максимум в точке¹⁾

$$M_2^2 = \frac{1}{k}.$$

В любых двух сечениях теплового сопла с одинаковой температурой ($T_2 = T_1$) значения числа M , как это явствует из выражения (57), связаны следующей зависимостью:

$$M_2 M_1 = \frac{1}{k}.$$

Выведем формулы для параметров торможения в тепловом сопле. Эти формулы приобретают более простой вид, если в них

¹⁾ Для этого в равенстве (57) будем рассматривать M_1 и T_1 как постоянные величины, M_2 — как аргумент, а T_2 — как функцию от M_2 . Приравнявая нулю производную $\frac{dT_2}{dM_2}$, находим $M_2^2 = \frac{1}{k}$. Вторая производная $\frac{d^2T_2}{dM_2^2}$ отрицательна при $M_2^2 = \frac{1}{k}$.

число M заменить коэффициентом скорости λ , для чего можно воспользоваться известным соотношением (48) главы I

$$\lambda^2 = \frac{\frac{k+1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}.$$

Температуру торможения найдём, пользуясь формулой (44) главы I, из равенства

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2},$$

откуда согласно равенству (57), выразив M через λ по формуле (47) главы I, получаем:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \left(\frac{1 + \lambda_1^2}{1 + \lambda_2^2} \right)^2. \quad (58)$$

Полное давление в тепловом сопле может быть получено по формуле (72) главы I из выражения

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1} \left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2} \right]^{\frac{k}{k-1}};$$

отсюда с помощью равенства (55) приходим к следующей зависимости:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{1 + \lambda_1^2}{1 + \lambda_2^2} \left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2} \right]^{\frac{1}{k-1}}. \quad (59)$$

Плотность заторможенного газа в тепловом сопле можно определить путём деления выражения (59) на выражение (58):

$$\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \cdot \frac{1 + \lambda_2^2}{1 + \lambda_1^2} \left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2} \right]^{\frac{1}{k-1}}. \quad (60)$$

Кривые изменения в тепловом сопле параметров потока и торможения с изменением числа M_2 при $M_1 = 0,1$ даны на фиг. 72 и 73.

Определим количество тепла (Q), которое нужно подвести в тепловом сопле, чтобы изменить скорость газа от какого-

либо одного значения (λ_1) до другого (λ_2). При постоянной теплоёмкости имеем:

$$Q = c_p (T_{02} - T_{01}),$$

или в безразмерном виде:

$$q = \frac{Q}{c_p T_{01}} = \frac{T_{02}}{T_{01}} - 1;$$

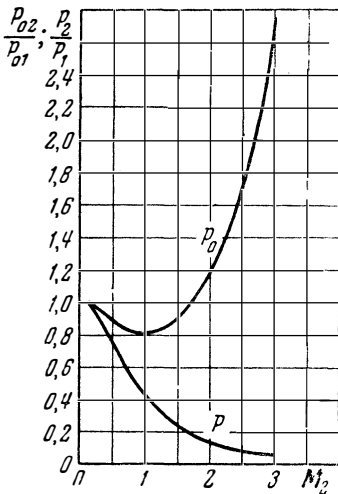
подставляя сюда отношение температур торможения из равенства (58), находим:

$$q = \frac{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_1^2 \lambda_2^2)}{\lambda_1^2 (1 + \lambda_2^2)^2}.$$

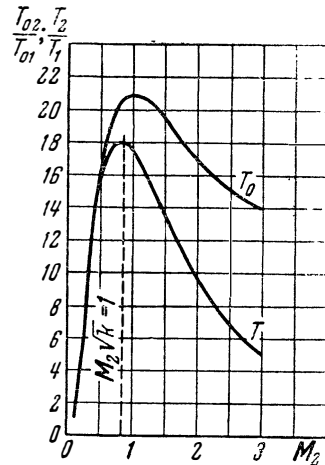
Максимальное количество тепла, отвечающее критическому подогреву (до $\lambda_2 = 1$), равно:

$$q_{\max} = \left[\frac{1 - \lambda_1^2}{2\lambda_1} \right]^2. \quad (61)$$

Оно резко уменьшается с ростом начальной скорости газа (λ_1), в чём можно убедиться на графике фиг. 74. Предельно возмож-



Фиг. 72. Зависимость статического и полного давлений от числа M_2 в тепловом сопле при $M_1 = 0,1$, $k = 1,4$.



Фиг. 73. Зависимость температур потока и торможения от числа M_2 в тепловом сопле при $M_1 = 0,1$, $k = 1,4$.

ная скорость истечения из теплового сопла (при $M_2 = \infty$) согласно равенству (56) зависит от начального значения числа M :

$$\frac{w_{\max}}{w_1} = 1 + \frac{1}{k \cdot M^2}.$$

В частности, если вести отсчёт от критического сечения, т. е. положить:

$$M_1 = 1, \quad \omega_1 = a_{\text{кр}}^*,$$

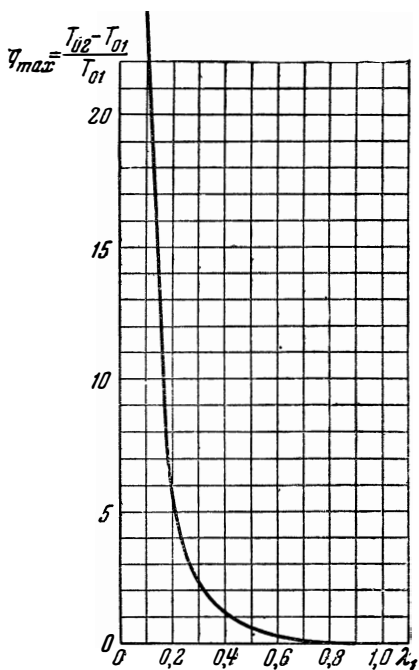
то получится:

$$\frac{\omega_{\text{max}}}{a_{\text{кр}}^*} = \frac{k+1}{k};$$

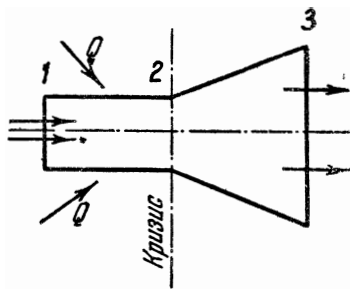
здесь $a_{\text{кр}}^*$ — значение критической скорости в сечении, где $M = 1$ ¹⁾.

Помимо четырёх описанных «чистых» схем сверхзвуковых сопел, принципиально возможны комбинированные схемы.

Наиболее реальным является так называемое полутепловое сопло, в котором дозвуковой участок является тепловым, а сверхзвуковой — геометрическим (фиг. 75). В таком сопле газ ускоряется от некоторого начального дозвукового значения скорости до критического в цилиндрической трубе 1—2 за счёт подвода тепла, а переход к сверхзвуковой скорости и дальнейшее ускорение пото-



Фиг. 74. Зависимость критического подогрева в трубе постоянного сечения от начального значения коэффициента скорости.



Фиг. 75. Схема полутеплового сопла.

ка осуществляются без теплообмена в расширяющейся трубе 2—3. Расчёт дозвукового участка полутеплового сопла ведётся

¹⁾ Следует учитывать, что в связи с подводом тепла значение критической скорости по длине сопла меняется.

по формулам теплового сопла, а сверхзвукового участка — по формулам геометрического сопла.

Сравним полутепловое сопло с геометрическим при одинаковом конечном значении полного теплосодержания (i_{03}), имея в виду, что в полутепловом сопле подогрев газа совершается в цилиндрической трубе 1—2, а в геометрическом сопле то же количество тепла подводится к газу до его входа в сопло. Значения скорости истечения из обоих сопл одинаковы, так как в критических сечениях величина температуры торможения одна и та же. Полное давление на выходе из полутеплового сопла ниже в связи с наличием теплового сопротивления в его дозвуковом участке, поэтому ниже и статическое давление на выходе из полутеплового сопла.

Рассмотрим пример полутеплового сопла с начальной скоростью газа, соответствующей значению коэффициента скорости $\lambda_1 = 0,2$. При этом безразмерный подогрев газа в дозвуковом участке сопла согласно выражению (61) должен быть равен:

$$q_{\max} = \left(\frac{1 - \lambda_1^2}{2\lambda_1} \right)^2 = 5,75.$$

Потери полного давления в полутепловом сопле ($\lambda_2 = 1$) можно вычислить по формуле (59):

$$\left[\frac{p_{03}}{p_{01}} \right]_{\text{п. т.}} = \left[\frac{p_{02}}{p_{01}} \right]_{\text{п. т.}} = \frac{1 + \lambda_1^2}{2} \left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{\frac{2}{k+1}} \right]^{\frac{1}{k-1}},$$

что при $\lambda_1 = 0,2$ и $k = 1,4$ даёт:

$$\left[\frac{p_{03}}{p_{01}} \right]_{\text{п. т.}} = \sigma_{\text{п. т.}} = 0,82.$$

Полное давление в геометрическом сопле сохраняет постоянное значение:

$$\left[\frac{p_{03}}{p_{01}} \right]_{\Gamma} = 1.$$

Поэтому статическое давление на выходе из полутеплового сопла при одной и той же скорости истечения составляет 100 $\sigma_{\text{п. т.}}$ % от статического давления на выходе из геометрического сопла:

$$p_3 \text{ п. т.} = \sigma_{\text{п. т.}} \cdot p_{3\Gamma};$$

далее:

$$\left[\frac{p_3}{p_{01}} \right]_{\text{п. т.}} = \frac{p_3}{p_{03}} \frac{p_{03}}{p_{01}} = \sigma_{\text{п. т.}} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_3^2 \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

где λ_3 — коэффициент скорости истечения из сопла, p_{01} — полное давление в начальном сечении сопла. При равных перепадах давления

$$\left[\frac{p_3}{p_{01}} \right]_{\text{п. т.}} = \left[\frac{p_3}{p_{01}} \right]_{\Gamma}$$

скорость истечения из полутеплового сопла меньше, чем из геометрического сопла ($\lambda_{3 \text{ п. т.}} < \lambda_{3 \Gamma}$); это вытекает из равенства

$$\sigma_{\text{п. т.}} \left[1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{3 \text{ п. т.}}^2 \right]^{\frac{k}{k-1}} = \left[1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{3 \Gamma}^2 \right]^{\frac{k}{k-1}},$$

связывающего отношение статического давления к полному с коэффициентом скорости. Например, при $\sigma_{\text{п. т.}} = 0,82$ и $\lambda_{3 \Gamma} = 2$ коэффициент скорости истечения из полутеплового сопла $\lambda_{3 \text{ п. т.}} = 1,97$, т. е. на 1,5% меньше коэффициента скорости истечения из геометрического сопла.

Рассматривая различные типы сопел, предназначенных для перехода через скорость звука, мы во всех случаях имели в виду переход от дозвуковой к сверхзвуковой скорости. Полученные формулы принципиально пригодны и для обратного случая, т. е. плавного преобразования сверхзвукового потока в дозвуковой, однако при торможении сверхзвукового потока могут возникнуть скачки уплотнения, которые усложняют явление.

Остановимся теперь кратко на совместном проявлении двух или нескольких воздействий. В качестве первого примера разберём случай геометрического сопла с трением. Основное соотношение (49) имеет в этом случае вид

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = \frac{dF}{F} - \frac{gk}{a^2} \cdot dL_{\text{тр.}}$$

Наиболее интересной особенностью этого сопла является то, что критическая скорость получается в его расходящейся части, так как при $M = 1$

$$\frac{dF}{F} = \frac{gk}{a^2} dL_{\text{тр.}} > 0,$$

а в узком сечении ($dF = 0$ при $dw > 0$) имеет место дозвуковая скорость и

$$M < 1.$$

Выясним теперь главные особенности геометрического сопла с теплообменом. Основное соотношение в этом случае

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = \frac{dF}{F} - \frac{g}{a^2} \frac{k-1}{A} dQ_{\text{нар.}}$$

Местоположение критического сечения ($M = 1$) определяется равенством

$$\frac{dF}{F} = \frac{g}{a^2} \frac{k-1}{A} dQ_{\text{нар.}}$$

При подводе тепла ($dQ_{\text{нар}} > 0$) — например, при догорании газов в сопле — критическая скорость помещается в расходящейся части сопла ($dF > 0$), при отводе тепла ($dQ_{\text{нар}} < 0$), т. е. теплоотдаче через стенки сопла, критическая скорость достигается в сходящейся части сопла ($dF < 0$). В первом случае в узком сечении сопла ($dF = 0$) имеет место дозвуковая, а во втором случае — сверхзвуковая скорость.

Таким же путём можно исследовать совместное действие в газовом течении любых других воздействий.

§ 5. О распространении детонации и горения в газах¹⁾

Творцом теории распространения детонации в газах является известный русский физик В. А. Михельсон, посвятивший в 1889 г. этому вопросу работу «О нормальной скорости воспламенения гремучих газовых смесей»²⁾.

Выдающиеся теоретические и экспериментальные исследования в области горения и детонации принадлежат Н. Н. Семёнову, Я. Б. Зельдовичу, Д. А. Франк-Каменецкому, К. И. Щёлкину и другим советским учёным³⁾.

Распространение пламени в горючей газовой смеси вне зависимости от механизма воспламенения (теплопроводностью при медленном горении или ударной волной при детонации) подчиняется основным законам газовой динамики и, следовательно, может быть описано уравнениями сохранения массы, количества движения и энергии.

Фронт пламени представляет собой тонкий слой газа практически постоянного сечения, по обе стороны которого значения скорости движения (относительно фронта волны), температуры, давления и других параметров различны. В соответствии с этим фронт пламени можно трактовать как поверхность сильного разрыва (теплового скачка).

В современном представлении детонационная волна, распространяющаяся в горючей газовой среде, является двухслойной. Первый слой представляет собой адиабатическую ударную волну, при прохождении через которую газ сильно разогревается.

¹⁾ В этом параграфе даётся расширенное изложение работы: Абрамович Г. Н. и Вулис Л. А., К механике распространения детонации и горения. Доклады Академии наук СССР, т. 55, вып. 2, 1947.

²⁾ Михельсон В. А., Полное собрание сочинений, т. 1, М., 1930.

³⁾ См., например, Зельдович Я. Б., Теория горения и детонации газов. Изд. Академии наук СССР, 1944.

В химически активном газе разогрев этот, если он достаточно интенсивен, может вызвать воспламенение. В связи с тем, что толщина ударной волны ничтожно мала (порядка длины свободного пробега молекулы), в пределах её процесс горения, по видимому, развиться не в состоянии. Поэтому область, в которой протекает горение, образует второй, более протяжённый, но практически также весьма тонкий слой, примыкающий непосредственно к ударной волне (фиг. 76).

Разогрев газа при прохождении его через ударную волну в детонационном горении заменяет собой в сущности подогрев его теплопроводностью в нормальном горении.

Рассмотрим явление детонации в условиях одномерной задачи. В этом случае для плоской ударной волны по известному соотношению (15) главы III произведение скоростей газа относительно фронта волны (взятых соответственно перед и за фронтом) равно квадрату критической скорости:

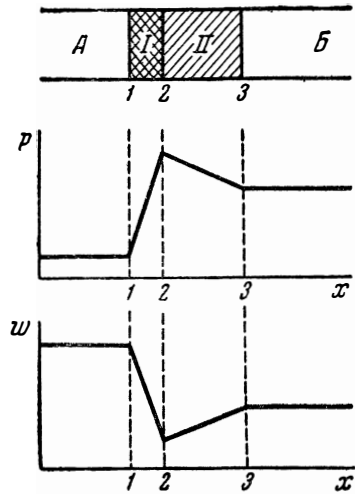
$$\omega_1 \cdot \omega_2 = a_{кр}^2.$$

Величина ω_1 является скоростью распространения ударной волны (в нашем случае волны детонации в неподвижном газе). Для исследования процесса удобнее считать, что газ притекает со скоростью ω_1 к области детонации, а фронт волны неподвижен. Эта обращённая схема явления принята нами в последующем изложении.

Ударная волна (скачок уплотнения), как известно, распространяется со сверхкритической скоростью ($\omega_1 > a_{кр}$), поэтому скорость газа за фронтом волны всегда ниже критической ($\omega_2 < a_{кр}$). Иначе говоря, процесс горения при детонации, как и при медленном горении, протекает в дозвуковой части газового потока.

В конце второго слоя детонационной волны вследствие подвода тепла при горении скорость газа выше, чем вначале, а давление соответственно ниже. Таким образом, первый слой детонационной волны представляет собой скачок сжатия, а второй слой, где происходит горение, — скачок разрежения. Примерный характер кривых давления и скорости газа в детонационной волне показан на фиг. 76.

Перейдём к расчёту скачка уплотнения.



Фиг. 76. Схема детонационной волны: А—свежая смесь, В—продукты сгорания; I—скачок уплотнения, II—зона горения.

Для расчёта изменения состояния газа в первом слое плоской детонационной волны мы можем воспользоваться соотношениями прямого скачка уплотнения. Вводя ради удобства безразмерную величину коэффициента скорости, получим соотношение (16) главы III:

$$\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}.$$

Для рассматриваемого случая существенно, что в первом слое детонационной волны (адиабатическом скачке уплотнения) температура торможения остаётся неизменной:

$$T_{01} = T_{02}.$$

Следовательно, критическая скорость в первом слое не изменится:

$$a_{1 \text{ кр}} = a_{2 \text{ кр}},$$

тогда как в продуктах сгорания значение её увеличивается

$$T_{03} > T_{01},$$

и соответственно:

$$a_{3 \text{ кр}} > a_{1 \text{ кр}}.$$

Это обстоятельство необходимо учесть в дальнейшем при вычислении коэффициентов скорости:

$$\lambda_1 = \frac{\omega_1}{a_{1 \text{ кр}}}, \quad \lambda_2 = \frac{\omega_2}{a_{2 \text{ кр}}}, \quad \lambda_3 = \frac{\omega_3}{a_{3 \text{ кр}}}.$$

Из уравнения неразрывности

$$\rho_1 \omega_1 = \rho_2 \omega_2$$

с помощью выражения (16) главы III найдём для изменения плотности и скорости соотношения

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \lambda_1^2. \quad (62)$$

Закон изменения давления в прямом скачке уплотнения может быть получен из уравнения импульсов в виде известного равенства (21) главы III

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\lambda_1^2 - \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}. \quad (63)$$

Изменение температуры газа в скачке уплотнения на основании этого равно:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\lambda_1^2}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}. \quad (64)$$

Например, при скорости распространения ударной волны $\omega_1 = 2000$ м/сек, начальной температуре газа $T_1 = 400^\circ$ абс, $R = 30$ кгм/кг град и $k = 1,4$ имеем: $T_{01} \cong 2400^\circ$ абс, $a_{1\text{кр}} \cong 900$ м/сек, $\lambda_1 \cong 2,2$, $\lambda_2 \approx 0,45$, чему соответствует $T_2 \approx 2300^\circ$ абс.

Нет сомнений, что в данном случае ударная волна может вызвать воспламенение горючей газовой смеси.

Займёмся теперь расчётом зоны горения.

Естественно, что все формулы, выведенные в §§ 2 и 3 на случай подогрева газа в цилиндрической трубе, пригодны для расчёта второго (теплого) слоя детонационной волны, так как при выводе указанных формул длина трубы не имела значения (трением и теплоотдачей через боковую поверхность мы пренебрегали).

Для расчёта состояния газа во втором (дозвуковом) слое детонационной волны — в области горения — проще всего прибегнуть к соотношению (58) между температурой торможения и коэффициентом скорости

$$\frac{T_{03}}{T_{02}} = \frac{\lambda_3^2 (1 + \lambda_2^2)^2}{\lambda_2^2 (1 + \lambda_3^2)^2} = \frac{\lambda_3^2 (\lambda_1^2 + 1)^2}{\lambda_1^2 (1 + \lambda_3^2)^2}, \quad (65)$$

откуда после решения биквадратного уравнения получим следующее выражение:

$$\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1 + \lambda_3^2}{2\lambda_3} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\lambda_3^2}{(1 + \lambda_3^2)^2} \cdot \frac{T_{01}}{T_{03}}} \right] \sqrt{\frac{T_{03}}{T_{01}}}, \quad (66)$$

или

$$\lambda_3 = \frac{1 + \lambda_2^2}{2\lambda_2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\lambda_2^2}{(1 + \lambda_2^2)^2} \cdot \frac{T_{03}}{T_{01}}} \right] \sqrt{\frac{T_{01}}{T_{03}}}. \quad (67)$$

Здесь, как и ранее¹⁾, отброшены корни, дающие сверхзвуковые решения, так как рассматривается зона горения, где относительные скорости ниже скорости звука ($\lambda_2 < 1$); кроме того, принято $T_{01} = T_{02}$. Коэффициент скорости λ_2 — непосредственно за скачком уплотнения — обычно значительно меньше единицы; если при этом и относительный прирост температуры торможения в области горения невелик ($\frac{T_{03}}{T_{01}} \approx 1$), то формулу (67) можно существенно упростить:

$$\lambda_3 \approx \frac{\lambda_2}{1 + \lambda_2^2} \sqrt{\frac{T_{03}}{T_{01}}} \approx \lambda_2 \sqrt{\frac{T_{03}}{T_{01}}}$$

(так как при сделанных предположениях $\lambda_2^2 \ll 1$). Таким образом,

$$\lambda_3 \approx \lambda_2 \sqrt{1 + \frac{\Delta T_0}{T_{01}}}, \quad (68)$$

¹⁾ См. стр. 146.

где $\Delta T_0 = \frac{Q}{c_p}$, если Q — количество теплоты, выделяющейся при сгорании единицы смеси. Из формулы (68) видно, что при слабом разогреве ($\frac{\Delta T_0}{T_{01}} \approx 0$) коэффициент скорости для продуктов сгорания близок к коэффициенту скорости за скачком уплотнения.

С усилением скачка уплотнения, т. е. с увеличением скорости распространения ударной волны, температура торможения исходной смеси $T_{01} = T_{02}$ резко возрастает согласно известному равенству (44) главы I

$$T_{01} = \frac{T_1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}; \quad (69)$$

при этом резко увеличивается и температура в потоке перед областью горения T_2 . В пределе при $M_1 = \infty$ и $\lambda_1 = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ имеем $T_{01} = T_{02} = \infty$ и $T_2 = \infty$. С увеличением температуры T_2 в связи с возрастающей ролью термической диссоциации¹⁾ несколько уменьшается абсолютная разность температур торможения:

$$\Delta T_0 = T_{03} - T_{01}.$$

Следовательно, с усилением ударной волны уменьшается как относительный разогрев газа $\frac{\Delta T_0}{T_{01}}$, так и коэффициент скорости продуктов сгорания λ_3 .

Наиболее отчётливо это видно, если в формулу (68) вместо переменной температуры торможения ввести постоянную температуру холодного газа:

$$\lambda_3 \approx \frac{1}{\lambda_1} \sqrt{1 + \frac{\Delta T_0}{T_1} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2\right)}. \quad (70)$$

Горение, протекающее за фронтом очень сильной ударной волны, начинается на столь высоком тепловом уровне что может вызвать лишь относительно небольшой прирост температуры торможения. Поэтому в пределе

$$\lambda_3 \text{ пр} \approx \lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1},$$

т. е. детонационная волна сближается с обычным скачком уплотнения.

¹⁾ Термической диссоциацией называется наблюдающееся при высоких температурах, а также при низких давлениях явление частичного разложения продуктов горения; реакция идёт в обратном направлении и сопровождается поглощением теплоты.

Изучим стационарный режим детонации.

Изложенные соображения позволяют представить себе процесс образования стационарной волны детонации в следующем виде. Обычно детонационная волна возникает как результат местного взрыва в горючей смеси. В области взрыва развиваются весьма высокие давления и от неё устремляется очень сильная ударная волна. При прохождении через холодную горючую смесь эта волна, как указывалось выше, вызывает значительный разогрев газа и может довести его до воспламенения. Именно в этом случае за фронтом ударной волны следует область горения, образующая в совокупности с ударной волной волну детонационную. Так как вблизи центра взрыва скорость распространения волны и интенсивность её очень велики, то относительные скорости газа в начале области горения и в конце её близки между собой и существенно ниже критической скорости:

$$\lambda_2 \cong \lambda_3 \ll 1.$$

Однако с удалением от центра взрыва волна детонации ослабляется и скорость распространения её λ_1 падает. В связи с этим происходит снижение температуры торможения в начале области горения (T_{02}) и рост коэффициента скорости газа (λ_2). Как показывает уравнение (68), при этом увеличиваются относительный разогрев газа $\left(\frac{\Delta T_0}{T_{01}}\right)$ и скорость движения продуктов сгорания (λ_3). Очевидно, что когда детонационная волна ослабится настолько, что λ_3 поднимется до критического значения ($\lambda_{3\text{кр}} = 1$), дальнейшее снижение скорости детонации окажется невозможным¹⁾.

Следовательно, процесс детонации, начавшийся со взрыва, непрерывно ослабевает до тех пор, пока скорость распространения не снизится до минимального значения, отвечающего наступлению теплового кризиса в зоне горения. С этого момента распространение детонационной волны приобретает устойчивый стационарный характер.

Как было указано в § 4, дальнейшее ускорение и переход в сверхзвуковую область возможны единственно при перемене знака воздействия — в данном случае при переходе от выделения тепла в зоне горения к отводу его, начиная от критического сечения (*тепловое сопло*). Таким образом, наступление *теплового кризиса* в зоне горения приводит к установлению стационарных значений λ_1 , λ_2 и λ_3 .

Мы можем определить коэффициент скорости распространения установившейся детонационной волны, подставив в уравне-

¹⁾ В отличие от этого простая ударная волна, образовавшаяся в результате взрыва и распространяющаяся в инертной среде, по мере удаления от центра взрыва полностью вырождается в волну акустическую.

ние (66) значение $\lambda_3 = 1$. При этом

$$\frac{1}{\lambda_1} = \lambda_2 = \sqrt{\frac{T_{03}}{T_{01}}} - \sqrt{\frac{T_{03}}{T_{01}} - 1} \quad (71)$$

или же после освобождения от радикалов

$$\frac{T_{03}}{T_{01}} = \left(\frac{\lambda_1^2 + 1}{2\lambda_1} \right)^2 = \left(\frac{1 + \lambda_2^2}{2\lambda_2} \right)^2, \quad (72)$$

или

$$\frac{\Delta T_0}{T_{01}} = \left(\frac{\lambda_1^2 - 1}{2\lambda_1} \right)^2 = \left(\frac{1 - \lambda_2^2}{2\lambda_2} \right)^2. \quad (73)$$

Последние два выражения, так же как и уравнение (65), сохраняют одинаковый вид при подстановке в них коэффициентов скорости λ_1 и λ_2 . Тем самым изменение температуры торможения связывается здесь или со скоростью распространения детонации (λ_1), или с максимальной скоростью распространения зоны горения (λ_2). Существенно, что максимальное значение λ_2 сохраняется вне зависимости от механизма зажигания, т. е. относится как к детонационному, так и к нормальному распространению пламени.

Перейдём к вычислению скорости распространения волны.

Обозначим для краткости тепловую характеристику горючей смеси ϑ ¹⁾:

$$\frac{T_{03} - T_{01}}{T_1} = \frac{\Delta T_0}{T_1} = \vartheta.$$

Из формул (69), (72) имеем:

$$\vartheta \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2 \right) = \left(\frac{\lambda_1^2 - 1}{2\lambda_1} \right)^2,$$

откуда квадрат коэффициента скорости распространения волны равен:

$$\lambda_1^2 = \frac{1 + 2\vartheta}{1 + 4\vartheta} \frac{k-1}{k+1} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{1 + 4\vartheta}{(1 + 2\vartheta)^2} \frac{k-1}{k+1}} \right]. \quad (74)$$

В уравнении (74) оба знака перед корнем отвечают реальным значениям коэффициента скорости. Положительный знак соответствует детонационному горению ($\lambda_1 > 1$), т. е. скорости распространения ударной волны. Отрицательный знак отвечает

¹⁾ По смыслу эта величина равна отношению количества выделившегося тепла к начальной энтальпии газа: $\vartheta = \frac{Q}{c_p T_1}$. Например, для холодной ($T_1 \cong 300^\circ \text{ abs}$) смеси бензина с воздухом (при $\alpha \cong 1$) $\vartheta \cong 6,5$.

распространению медленного горения. Следует заметить, что формула (74) также и при отрицательном знаке пригодна для детонации. В этом случае она связывает коэффициент скорости непосредственно за фронтом скачка уплотнения λ_2 (вместо λ_1) с величиной $\vartheta' = \frac{\Delta T_0}{T_2}$ (вместо $\vartheta = \frac{\Delta T_0}{T_1}$).

В практически интересных случаях, когда $\vartheta > 1$, вместо выражения (74) можно с ошибкой менее 2% принять приближённо:

а) для скорости распространения стационарной волны детонации

$$\lambda_1^2 = \frac{2 + 4\vartheta}{1 + 4\vartheta} \frac{k-1}{k+1}; \quad (75)$$

б) для предельной скорости распространения волны горения

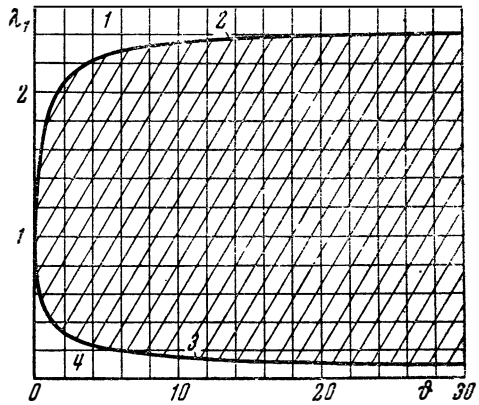
$$\lambda_1^2 = \frac{1}{2 + 4\vartheta}. \quad (76)$$

Пользуясь известной связью между коэффициентом скорости и числом M , можно получить также аналогичные зависимости числа M для волн детонации и горения от тепловой характеристики газовой смеси.

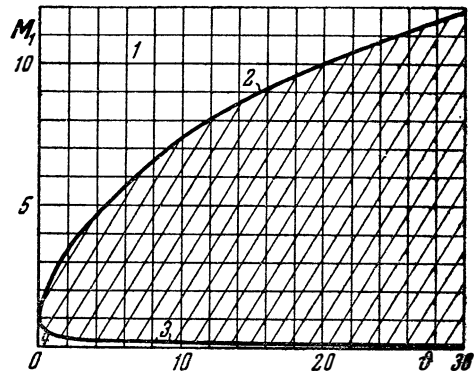
На фиг. 77 и 78 изображены графики зависимостей

$$\lambda_1 = f(\vartheta) \text{ и } M_1 = F(\vartheta)$$

для газовой смеси (при $k=1,4$). Верхние ветви обеих кривых (в сверхзвуковой области движения $\lambda_1 > 1$, $M_1 > 1$) отвечают



Фиг. 77. Зависимость экстремальной величины коэффициента скорости распространения волны горения от тепловой характеристики смеси: 1—область нестационарной детонации; 2—стационарный режим детонации, 3—максимальная скорость горения, 4—область нормального горения.



Фиг. 78. Зависимость экстремальной величины числа M для распространения волны горения от тепловой характеристики смеси: 1—область нестационарной детонации, 2—стационарный режим детонации, 3—максимальная скорость горения, 4—область нормального горения.

установившейся минимальной скорости распространения детонации, нижние ветви (в дозвуковой области $\lambda_1 < 1$, $M_1 < 1$) — максимальной скорости горения, т. е. предельно возможной скорости нормального распространения пламени.

Мы приходим, таким образом, к единому представлению о скорости распространения горения. При этом в сверхзвуковой области (выше кривой) лежат значения, соответствующие неустановившемуся режиму детонации, тогда как в дозвуковой (ниже кривой) — бесчисленное множество значений, отвечающих стационарному нормальному распространению горения при малых скоростях движения газа. Наконец, режимы, отвечающие заштрихованной области (фиг. 77 и 78), не могут быть реализованы в связи с явлением теплового кризиса (т. е. невозможностью перейти через скорость звука при подводе тепла).

Именно этим, повидимому, следует объяснить тот факт, что переход от медленного горения к детонации, как показывают опыты в трубах, всегда осуществляется скачкообразно.

Следует отметить одну интересную особенность полученных кривых. Как видно из графиков, достаточно самого незначительного теплового воздействия, чтобы предельная скорость горения стала существенно ниже, а скорость детонации существенно выше звуковой.

Дадим расчёт давлений при детонации и горении.

Расчёт предельного скачка разрежения во фронте пламени, достигаемого при тепловом кризисе, можно произвести посредством уравнения импульсов. В случае $\lambda_3 = M_3 = 1$ имеем:

$$\frac{p_2}{p_3} = 1 + k \left(1 - \frac{w_2}{w_3} \right)^2,$$

но на этом режиме

$$\frac{w_2}{w_3} = \lambda_2 \sqrt{\frac{T_{01}}{T_{03}}},$$

откуда на основании зависимости (71) получается:

$$\frac{p_2}{p_3} = 1 - \sqrt{1 - \frac{T_{01}}{T_{03}}}. \quad (77)$$

¹⁾ Чтобы получить это уравнение, напишем уравнение импульсов (94) главы I для нашего случая:

$$p_2 - p_3 = \rho_3 w_3 (w_3 - w_2)$$

или

$$\frac{p_2}{p_3} - 1 = k \frac{\rho_3 w_3^2}{k p_3} \left(1 - \frac{w_2}{w_3} \right),$$

по $\frac{\rho_3 w_3^2}{k p_3} = \frac{w_3^2}{a_3^2} = M_3^2 = 1$; таким образом, мы приходим к рассматриваемому уравнению.

Таким образом, предельное падение давления в газовом потоке в области горения равно:

$$\frac{p_2}{p_3} = 1 + k \sqrt{1 - \frac{T_{01}}{T_{03}}}, \quad (78)$$

или на основании выражения (72):

$$\frac{p_2}{p_3} = 1 + k \frac{1 - \lambda_2^2}{1 + \lambda_2^2} = 1 + k \frac{\lambda_1^2 - 1}{\lambda_1^2 + 1}. \quad (79)$$

При этом значение коэффициента скорости как в детонационном, так и в предельном случае нормального горения берётся из соотношения (74).

Если воспользоваться равенством (75), то найдётся следующая приближённая формула падения давления во второй области волны детонации (для $\vartheta > 1$):

$$\frac{p_2}{p_3} \simeq 1 + \frac{1 + 8\vartheta + k}{1 + 8\vartheta + \frac{1}{k}}. \quad (80)$$

Соответственно равенство (76) приведёт к приближённому выражению перепада давлений для предельной скорости нормального горения:

$$\frac{p_2}{p_3} \simeq 1 + k \frac{1 + 4\vartheta}{3 + 4\vartheta}. \quad (81)$$

Изменение давления при прохождении через всю область детонации, состоящую из адиабатического скачка уплотнения и зоны горения, получится при делении равенства (63) на (79):

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{p_3}{p_2} \frac{p_2}{p_1} = \frac{\lambda_1^2 + 1}{k + 1 - (k - 1)\lambda_1^2}. \quad (82)$$

Весьма простые зависимости получаются для изменения плотности газа. При предельной скорости нормального горения на основании уравнения неразрывности и выражений (77) и (72) получаем:

$$\frac{\rho_3}{\rho_2} = \frac{w_2}{w_3} = \frac{2}{\lambda_1^2 + 1} = \frac{2\lambda_2^2}{1 + \lambda_2^2}. \quad (83)$$

При стационарном режиме детонационного горения, используя равенства (16) главы III и (62), имеем:

$$\frac{\rho_3}{\rho_1} = \frac{\rho_3}{\rho_2} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 1}. \quad (84)$$

Остановимся более подробно на некоторых общих свойствах одномерных неадиабатических волн и дадим, в частности, расчётные формулы для определения абсолютной скорости распространения волны. Из уравнений импульсов и неразрывности

следует, что в любом случае ударной волны (в пренебрежении силами трения) справедливо следующее соотношение:

$$\frac{p_3 - p_1}{\rho_3 - \rho_1} = w_1 \cdot w_3. \quad (85)$$

С другой стороны, уравнение теплосодержания с учётом уравнения состояния идеального газа даёт для скачка давления при любом подводе (или отводе) тепла¹⁾:

$$\frac{p_3 - p_1}{\rho_3 - \rho_1} = a_{3 \text{ кр}}^2 + \frac{\rho_1}{\rho_3 - \rho_1} (a_{3 \text{ кр}}^2 - a_{1 \text{ кр}}^2). \quad (86)$$

Из уравнений (85) и (86) и неразрывности нетрудно вывести соотношение между скоростями для произвольного скачка давлений:

$$w_1 w_3 (w_1 - w_3) = a_{3 \text{ кр}}^2 w_1 - a_{1 \text{ кр}}^2 w_3. \quad (87)$$

В частном случае, когда подвод тепла отсутствует и $a_{1 \text{ кр}}^2 = a_{3 \text{ кр}}^2$, мы снова получаем соотношение (16) главы III для адиабатического скачка уплотнения.

В интересующем нас случае установившейся детонации (или распространения горения с предельной скоростью), когда наступает тепловой кризис, т. е.

$$\lambda_3 = 1 \text{ и } w_3 = a_{3 \text{ кр}},$$

уравнение (87) принимает вид

$$(w_1 - a_{3 \text{ кр}})^2 = a_{3 \text{ кр}}^2 - a_{1 \text{ кр}}^2, \quad (88)$$

причём для детонации

$$w_1 > a_{3 \text{ кр}},$$

для медленного горения

$$w_1 < a_{3 \text{ кр}}.$$

¹⁾ Напишем уравнение теплосодержания (16) главы I для газа до и после ударной волны

$$c_p (T_{01} - T_1) = A \frac{w_1^2}{2g},$$

$$c_p (T_{03} - T_3) = A \frac{w_3^2}{2g},$$

или, заменяя из уравнения состояния $T = \frac{p}{Rg\rho}$:

$$p_1 = \rho_1 g R T_{01} - \frac{AR}{2c_p} \rho_1 w_1^2, \quad p_3 = \rho_3 g R T_{03} - \frac{AR}{2c_p} \rho_3 w_3^2.$$

Вычитая из второго уравнения первое, с учётом равенств

$$\frac{AR}{2c_p} = \frac{k-1}{2k} \quad \text{и} \quad a_{\text{кр}}^2 = \frac{2k}{k+1} g R T_0$$

и закона импульсов получим (86).

Как и в приведённых ранее безразмерных уравнениях, мы имеем здесь два решения:

$$\omega_1 = a_{3 \text{ кр}} \pm \sqrt{a_{3 \text{ кр}}^2 - a_{1 \text{ кр}}^2}, \quad (89)$$

отвечающих минимальной скорости распространения детонации (положительный корень) и максимальной скорости медленного горения (отрицательный корень).

Полученные общие соотношения применимы к любым неадиабатическим скачкам давления вне зависимости от механизма выделения тепла. Мы видели, что в рассмотренных выше двух случаях распространения фронта пламени непосредственно тепловой скачок (т. е. зона горения) представлял как при детонации, так и при нормальном горении скачок разрежения в дозвуковом течении. Нетрудно указать и случай теплового скачка сжатия в сверхзвуковом потоке. Мы имеем в виду хорошо известные скачки конденсации, сопровождающейся переходом от большей сверхзвуковой скорости к меньшей, но всё ещё сверхзвуковой скорости. И в этом случае приведённые выше уравнения и выводы остаются справедливыми.

В заключение исследуем движение газов за фронтом волны.

Выше были получены основные соотношения, характеризующие газовый поток, проходящий через область скачка детонации или пламени с неподвижным фронтом, т. е. в обращённой схеме. Рассмотрим теперь, какой вид приобретут все соотношения, если перейти к нормальной схеме, когда газ неподвижен, а в нём распространяется волна детонации или горения со скоростью ω_1 . В этом случае за фронтом ударной волны следуют ещё не воспламенившиеся частицы газа со скоростью

$$\omega_x = \omega_1 - \omega_2,$$

а позади области горения движутся продукты горения со скоростью

$$\omega_r = \omega_1 - \omega_3,$$

где под ω_x и ω_r мы понимаем абсолютные скорости. Нетрудно видеть, что в случае детонации

$$\omega_1 > \omega_3 > \omega_2$$

как фронт пламени, так и продукты горения движутся в том же направлении, что и фронт ударной волны, но только скорость частиц во фронте пламени выше, чем в продуктах горения:

$$\omega_x > \omega_r.$$

В случае нормального горения, когда

$$\omega_1 = \omega_2 < \omega_3,$$

величина w_r получается отрицательной, т. е. направления движения продуктов горения и фронта пламени противоположны.

Как было установлено, при стационарном режиме детонации и при предельной скорости нормального горения имеет место

$$w_3 = a_{3 \text{ кр}} \text{ или } \lambda_3 = 1,$$

вследствие чего в этих режимах скорость движения продуктов горения равна:

$$w_r = w_1 - a_{3 \text{ кр}},$$

где согласно полученной выше зависимости (89)

$$w_1 = a_{3 \text{ кр}} \pm \sqrt{a_{3 \text{ кр}}^2 - a_{1 \text{ кр}}^2}.$$

Отсюда приходим к следующему выражению для скорости распространения продуктов горения в случаях стационарной детонации и предельного режима нормального горения:

$$w_r = \pm \sqrt{a_{3 \text{ кр}}^2 - a_{1 \text{ кр}}^2}. \quad (90)$$

Знак плюс отвечает детонации, знак минус — нормальному горению.

Найдём теперь значения коэффициентов скорости. Для фронта ударной волны получим:

$$\lambda_1 = \frac{w_1}{a_{1 \text{ кр}}}.$$

Для частиц, следующих непосредственно за фронтом ударной волны,

$$\lambda_x = \frac{w_x}{a_{1 \text{ кр}}} = \lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1}; \quad (91)$$

здесь

$$a_{1 \text{ кр}} = a_{2 \text{ кр}}.$$

Наконец, для продуктов горения согласно (90) имеем:

$$\lambda_r = \frac{w_r}{a_{3 \text{ кр}}} = \pm \sqrt{1 - \frac{T_{01}}{T_{03}}},$$

откуда с помощью (72) находим:

$$\lambda_r = \frac{\lambda_1^2 - 1}{\lambda_1^2 + 1}. \quad (92)$$

Положительные значения λ_r получаются при детонации ($\lambda_1 > 1$), отрицательные — при нормальном горении ($\lambda_1 < 1$). В случае $\lambda_1 = 1$ имеет место

$$\lambda_r = 0,$$

т. е. при движении волны со скоростью звука газ остаётся неподвижным, что вполне соответствует физической природе явления ¹⁾.

Наибольшее значение скорости продуктов нормального горения получается, естественно, в неподвижной смеси бесконечно большой калорийности [$\vartheta = \infty$, т. е. $\lambda_1 = 0$, см. (76)]; оно равно:

$$\lambda_{\Gamma} = -1.$$

Максимум скорости продуктов детонации достигается также при бесконечно большой калорийности [по (75): $\vartheta = \infty$, $\lambda_1^2 = \frac{k+1}{k-1}$], но в этом случае, как нетрудно видеть из (92), он равен:

$$\lambda_{\Gamma} = \frac{1}{k}.$$

Итак, абсолютная скорость движения сгоревших частиц всегда меньше скорости звука. Этот результат справедлив как при нормальном горении, так и при детонации.

Между тем, как нетрудно видеть из (91), скорость несгоревших частиц (в начале зоны горения) в случае детонации может быть больше звуковой; получается это на режиме

$$\lambda_x = \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} > 0,$$

или

$$\lambda_1^2 - \lambda_1 - 1 > 1,$$

т. е. при

$$\lambda_1 > \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,62 \text{ и } M_1 > 2.$$

Максимальное значение этой скорости, очевидно, получается на режиме $M_1 = \infty$ и $\lambda_1^2 = \frac{k+1}{k-1}$; оно равно:

$$\lambda_{x \max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}.$$

Если $k = 1,4$, то $\lambda_{x \max} = 2,04$ и $M_{x \max} = 3,4$.

Интересный результат получится, если связать абсолютные скорости газа в начале и в конце зоны детонационного горения:

$$\frac{\omega_x}{\omega_{\Gamma}} = \frac{\lambda_x}{\lambda_{\Gamma}} \cdot \frac{a_1 \text{ кр}}{a_3 \text{ кр}},$$

¹⁾ Выше [см. (74)] было показано, что $\lambda_1 = 1$ получается только при нулевой калорийности смеси, когда детонация и горение вырождаются в обычные звуковые волны.

откуда, используя зависимости (91), (92) и (72), обнаруживаем следующее простое соотношение:

$$\omega_x = 2\omega_r, \quad (93)$$

т. е. при детонации скорость частиц перед фронтом пламени всегда вдвое выше скорости сгоревших частиц.

Давления как за фронтом ударной волны (p_2), так и в конце зоны горения (p_3), очевидно, не изменяются от того, что мы обратили движение, т. е. могут быть определены по формулам (63) и (79). Можно, однако, посредством (92) придать формуле (79) следующий особенно простой вид:

$$\frac{p_2}{p_3} = 1 \pm k\lambda_r. \quad (94)$$

Здесь знак минус берётся при нормальном горении, знак плюс — при детонации. В предельных случаях нормального горения ($\lambda = -1$) и детонации ($\lambda_r = \frac{1}{k}$) получаем соответственно для максимальной скорости нормального горения:

$$\frac{p_2}{p_3} = 1 + k \quad (95)$$

и для минимальной скорости детонации:

$$\frac{p_2}{p_3} = 2. \quad (96)$$

При встрече продуктов горения с тупоносим препятствием произойдёт повышение давления до величины p_{03} , которая для обоих режимов найдётся из одного и того же выражения, соответствующего изоэнтروпийному процессу:

$$\frac{p_3}{p_{03}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_r^2\right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (97)$$

Более значительное повышение давления произойдёт при остановке частиц ещё не загоревшегося газа, движущихся со скоростью ω_x . На режимах $\lambda_x < 1$ действует та же изоэнтропическая зависимость:

$$\frac{p_2}{p_{02}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_x^2\right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (98)$$

Для сверхзвуковых режимов ($\lambda_x > 1$), когда торможение начинается с прямого скачка уплотнения, переводящего поток к дозвуковой скорости $\lambda'_x = \frac{1}{\lambda_x}$ и давлению, определяемому формулой (63):

$$\frac{p'_2}{p_2} = \frac{\lambda_x^2 - \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_x^2}, \quad (99)$$

имеем при полном торможении:

$$\frac{p'_2}{p_{02}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{1}{\lambda_x^2} \right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad (100)$$

или окончательно:

$$\frac{p_2}{p_{02}} = \frac{1}{\lambda_x^2} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_x^2 \right) \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\lambda_x^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

В предельном случае $\lambda_1^2 = \frac{k+1}{k-1}$, т. е. $\lambda_x = 2,04$ (при $k = 1,4$), получим предельное повышение давления при торможении

$$\frac{p_{02}}{p_2} \cong 15,$$

или по сравнению с давлением в продуктах горения:

$$\frac{p_{02}}{p_3} \cong 30.$$

При встрече газов, следующих непосредственно за фронтом детонационной волны, с остроносым препятствием может получиться вместо прямого косой скачок уплотнения. В последнем случае повышение давления при торможении газов оказывается меньшим

§ 6. Расчёт газовых потоков с использованием газодинамических функций

Рассматривая различные уравнения для одномерного газового потока, выведенные, например, в §§ 1—2 главы IV и §§ 1—3 настоящей главы, можно заметить, что величина коэффициента скорости λ входит в них в виде нескольких часто встречающихся комбинаций, получивших название газодинамических функций. Дадим этим функциям сокращённые обозначения и вычислим их значения в зависимости от величины λ .

Расчёт газовых потоков с помощью таблиц этих величин получил в последнее время широкое распространение, так как он позволяет упростить преобразование основных уравнений газовой динамики и облегчить вычислительную работу.

Рассмотрим основные из применяющихся в настоящее время газодинамических функций и на ряде примеров проиллюстрируем использование их для решения различных задач.

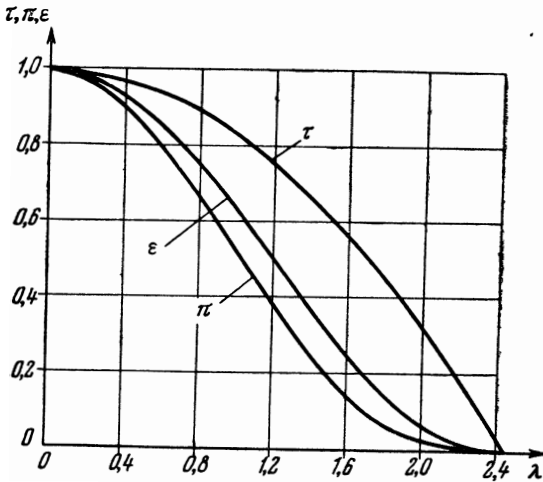
В § 3 главы I путём преобразования уравнения теплосодержания была получена формула (44)

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2,$$

связывающая температуру в потоке T с температурой торможения T_0 и коэффициентом скорости λ . Обозначим

$$1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 = \tau(\lambda). \quad (101)$$

Функция $\tau(\lambda)$ монотонно уменьшается от единицы до нуля с увеличением λ от нуля до предельного значения $\lambda_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$.



Фиг. 79. Кривые газодинамических функций $\tau(\lambda)$, $\varepsilon(\lambda)$, $\pi(\lambda)$.

На основании пропорций идеальной адиабаты в § 4 главы I были получены выражения (72) и (73) для отношения давления и плотности в потоке к давлению и плотности заторможённого газа. Введём для них обозначения

$$\pi(\lambda) = \frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad (102)$$

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad (103)$$

Связь между функциями $\tau(\lambda)$, $\pi(\lambda)$ и $\varepsilon(\lambda)$ при одном значении λ очевидна:

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} = \frac{\pi(\lambda)}{\tau(\lambda)}. \quad (104)$$

Характер изменения функций в зависимости от λ ясен из фиг. 79.

Располагая таблицами, в которых для каждого значения λ вычислены значения функций $\tau(\lambda)$, $\pi(\lambda)$ и $\varepsilon(\lambda)$, можно быстро

определять параметры торможения по параметрам в потоке и наоборот. Такие таблицы для значений $k=1,40$ и $k=1,33$, составленные А. Л. Пархомовым, приведены в конце книги.

Для расчётов, не требующих большой точности, можно пользоваться приложенным к книге вспомогательным графиком.

Пример 1. В одном из сечений идеального сверхзвукового сопла известно: давление в потоке $p_1=6$ кг/см², температура торможения $T_0=310^\circ$ абс, коэффициент скорости $\lambda_1=0,6$. Найти значения давления и коэффициента скорости воздуха в сечении 2, где температура T_2 равна 243° абс.

Поскольку температура торможения и полное давление в потоке постоянны, то можно составить следующие уравнения:

$$\tau(\lambda_2) = \frac{T_2}{T_0},$$

$$p_2 = p_0 \pi(\lambda_2) = \frac{p_1}{\pi(\lambda_1)} \cdot \pi(\lambda_2).$$

Подставляя значения T_2 и T_0 в первое уравнение, находим:

$$\tau(\lambda_2) = 0,7835$$

и по таблицам определяем:

$$\lambda_2 = 1,14.$$

Далее по таблицам находим значения функции $\pi(\lambda)$ для $\lambda=0,6$ и $\lambda=1,14$, которые подставляем в выражение для p_2 :

$$p_2 = 6 \cdot \frac{0,4255}{0,8053} = 3,17 \text{ кг/см}^2.$$

Рассмотрим ещё две функции коэффициента скорости λ , которые встречаются в преобразованиях уравнения расхода газа. Подставим в уравнение расхода газа через сечение F

$$G = \gamma \omega F$$

соотношения

$$\gamma = \gamma_0 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} = \frac{p_0}{RT_0} \cdot \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

и

$$\omega = \lambda \cdot a_{кр} = \lambda \sqrt{2g \frac{k}{k+1} RT_0},$$

выражающие удельный вес γ и скорость потока ω через параметры торможения p_0 и T_0 и коэффициент скорости λ . Получаем:

$$G = \frac{p_0}{RT_0} \sqrt{2g \frac{k}{k+1} RT_0} \cdot F \cdot \lambda \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Умножим обе части уравнения на

$$a_{кр} = \sqrt{2g \frac{k}{k+1} RT_0}.$$

После сокращений получаем:

$$\frac{G}{g} a_{кр} = \frac{2k}{k+1} p_0 F \cdot \lambda \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (105)$$

Это уравнение выражает расход газа в данном сечении через полное давление, критическую скорость звука и следующую функцию коэффициента скорости

$$\lambda \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} = \lambda \varepsilon(\lambda).$$

В таблицах газодинамических функций обычно приводятся значения функции $q(\lambda)$, пропорциональной произведению $\lambda \varepsilon(\lambda)$:

$$q(\lambda) = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \lambda \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (106)$$

Коэффициент пропорциональности выбран так, чтобы при $\lambda = 1$ получить $q(\lambda) = 1$. В таком виде функция $q(\lambda)$ приобретает физический смысл безразмерной плотности тока. Легко убедиться, что

$$q(\lambda) = \frac{\rho \omega}{(\rho \omega)_{кр}},$$

где $(\rho \omega)_{кр}$ — максимальное значение плотности тока, соответствующее течению со скоростью звука. При постоянных значениях G , $a_{кр}$ и ρ_0 (например, при течении газа в сопле Лавала без трения) величина $q(\lambda)$ обратно пропорциональна площади сечения. График функции $q(\lambda)$ приведён на фиг. 80. При увеличении λ от нуля до единицы величина $q(\lambda)$ растёт от нуля до своего максимального значения $q(\lambda) = 1$, а далее вновь снижается до нуля при значении $\lambda = \lambda_{max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$. Одно и то же значение $q(\lambda)$ соответствует двум значениям коэффициента скорости, одно из которых больше, а другое меньше единицы.

Подставляя в уравнение (105) выражение $q(\lambda)$ и $a_{кр}$, представим его в виде, более удобном для вычисления расхода газа:

$$G = m \cdot \frac{p_0 F \cdot q(\lambda)}{\sqrt{T_0}}, \quad (107)$$

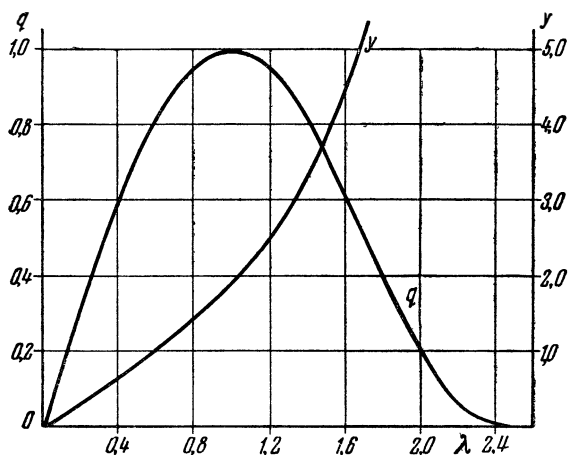
где

$$m = \sqrt{k \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k-1}{k-1}}} \cdot \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

В нижеследующей таблице приведены значения $\sqrt{k \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}$ для различных k :

k	1,4	1,35	1,33	1,30	1,25
$\sqrt{k \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}$	0,685	0,676	0,673	0,667	0,658

Для воздуха $\left(k = 1,40, R = 29,27 \frac{\text{кгм}}{\text{кг}\cdot\text{град}}\right) m = 0,3965$. Для выхлопных газов в турбореактивных двигателях $\left(k = 1,33, R = 29,4 \frac{\text{кгм}}{\text{кг}\cdot\text{град}}\right)$ можно принимать $m = 0,389$.



Фиг. 80. Кривые газодинамических функций $q(\lambda)$, $y(\lambda)$.

При течении со скоростью звука $q(\lambda) = 1$, и уравнение (107) сводится к полученному в главе IV выражению для расхода газа в критическом сечении сопла Лаваля.

Из уравнения расхода (107) можно получить непосредственно ряд зависимостей, выведенных ранее более сложным путём. В качестве примера проанализируем с помощью уравнения (107) характер изменения скорости при течении по цилиндри-

ческой трубе с трением. Для этого случая ($G = \text{const.}$, $T_0 = \text{const.}$ и $F = \text{const.}$) из (107) имеем:

$$q(\lambda) = \frac{\text{const}}{p_0}. \quad (108)$$

Полное давление из-за наличия трения всегда снижается, следовательно, на основании (108) скорость течения изменяется так, что величина $q(\lambda)$ растёт. В дозвуковой области это означает ускорение, а в сверхзвуковой — торможение потока; в обоих случаях предельный режим $\lambda = 1$ соответствует максимальному значению $q(\lambda)$.

При решении ряда задач требуется связать расход газа не с полным, а со статическим давлением в данном сечении. Такую связь легко получить из уравнения расхода (107), если заменить в правой части величину полного давления её выражением согласно (102):

$$p_0 = \frac{p}{\pi(\lambda)} = \frac{p}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}. \quad (109)$$

Из уравнения (107) находим:

$$G = m \frac{pF \cdot y(\lambda)}{\sqrt{T_0}}. \quad (110)$$

Функция

$$y(\lambda) = \frac{q(\lambda)}{\pi(\lambda)} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{\lambda}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2} \quad (111)$$

является второй газодинамической функцией, применяющейся в преобразованиях уравнения расхода (см. фиг. 80). Значения её, так же как и значения функции $q(\lambda)$, приведены в таблицах и на вспомогательном графике в конце книги. С увеличением λ функция $y(\lambda)$ монотонно возрастает, причём при $\lambda \rightarrow \lambda_{\text{max}}$ $y(\lambda) \rightarrow \infty$.

Пример 2. Определить коэффициент скорости λ_2 и статическое давление воздуха p_2 на выходе из диффузора, если известно, что на входе в диффузор полное давление $p_{01} = 3 \text{ кг/см}^2$, а коэффициент скорости $\lambda_1 = 0,85$. Известны также отношение площадей выходного и входного сечений $\frac{F_2}{F_1} = 2,5$ и коэффициент полного давления $\sigma = \frac{p_{02}}{p_{01}} = 0,94$.

Для решения задачи записываем уравнение равенства расходов воздуха в сечениях 1 и 2, пользуясь соотношением (107):

$$\frac{p_{01} F_1 \cdot q(\lambda_1)}{\sqrt{T_{01}}} = \frac{p_{02} F_2 \cdot q(\lambda_2)}{\sqrt{T_{02}}}.$$

При отсутствии теплообмена через стенки диффузора $T_{01} = T_{02}$, поэтому для принятых условий получаем:

$$q(\lambda_2) = q(\lambda_1) \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{F_1}{F_2} = 0,425 q(\lambda_1).$$

По таблицам находим для $\lambda_1 = 0,85$: $q(\lambda_1) = 0,9729$, следовательно, $q(\lambda_2) = 0,413$, чему соответствует $\lambda_2 = 0,27$; $\pi(\lambda_2) = 0,9581$. Полное давление на выходе из диффузора равно $p_{02} = \sigma p_{01}$, а статическое давление $p_2 = p_{02} \cdot \pi(\lambda_2) = 2,7 \text{ кг/см}^2$.

Пример 3. Определить полное давление в выходном сечении компрессора площадью $F = 0,1 \text{ м}^2$ по измеренному значению статического давления $p = 4,2 \text{ кг/см}^2$; расход воздуха равен 50 кг/сек , температура торможения $T_0 = 480^\circ \text{ абс}$.

Пользуясь уравнением расхода (110), вычисляем значение функции:

$$y(\lambda) = \frac{G \sqrt{T_0}}{m F p} = \frac{50 \sqrt{480}}{0,3965 \cdot 0,1 \cdot 4,2 \cdot 10^4} = 0,658.$$

По таблицам газодинамических функций находим, что этому значению $y(\lambda)$ соответствует

$$\lambda = 0,406, \quad \pi(\lambda) = 0,907.$$

Далее определяем полное давление:

$$p_0 = \frac{p}{\pi(\lambda)} = \frac{4,2}{0,907} = 4,63 \text{ кг/см}^2.$$

Подобное вычисление часто необходимо при обработке экспериментальных данных. При обычном расчёте вычисление проводится методом последовательных приближений.

Подставим теперь в выражение импульса, т. е. суммы секундного количества движения и силы давления в данном поперечном сечении потока

$$\frac{G}{g} \omega + pF = \frac{G}{g} \left(\omega + \frac{p}{\rho \omega} \right), \quad (112)$$

следующие соотношения:

$$\frac{p}{\rho} = gRT = gRT_0 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right) = \frac{k+1}{2k} a_{кр}^2 \cdot \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right),$$

$$\omega = \lambda a_{кр}.$$

Получаем:

$$\frac{G}{g} \omega + pF = \frac{G}{g} \left[\lambda a_{кр} + \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{a_{кр}}{\lambda} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right) \right],$$

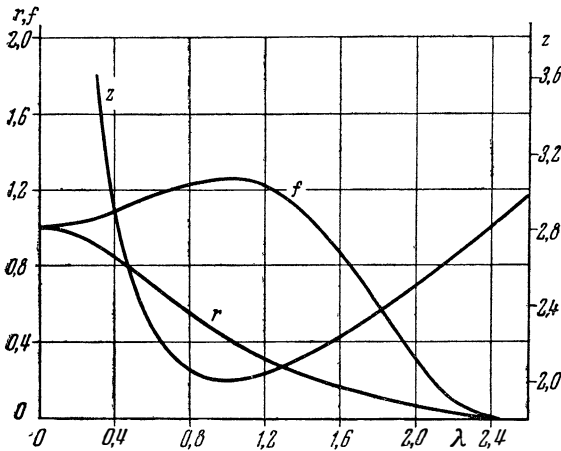
или после упрощения:

$$\frac{G}{g} \omega + pF = \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{G}{g} a_{кр} \cdot z(\lambda), \quad (113)$$

где $z(\lambda)$ обозначает следующую функцию коэффициента скорости:

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = z(\lambda). \quad (114)$$

График функции $z(\lambda)$ приведён на фиг. 81. Минимальное значение $z(\lambda) = 2$ соответствует критической скорости течения. В дозвуковых и сверхзвуковых течениях $z(\lambda) > 2$. Легко видеть, что при замене величины λ обратной ей величиной $\bar{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$ зна-



Фиг. 81. Кривые газодинамических функций $z(\lambda)$, $f(\lambda)$, $r(\lambda)$.

чение $z(\lambda)$ не изменяется. Таким образом, одному значению $z(\lambda)$ могут соответствовать два взаимно обратных значения λ .

Выражение импульса газового потока (113), полученное Б. М. Киселёвым, используется для преобразования уравнения количества движения. Оно оказывается чрезвычайно полезным при решении широкого круга задач газовой динамики: расчёта течений с подводом тепла и охлаждением, с трением, с ударом при внезапном расширении канала, расчёта процесса смешения потоков, расчёта сил, действующих на стенки канала, и т. п. Приведём два примера, поясняющих методику таких расчётов.

Пример 4. На входе в цилиндрический участок трубы поток характеризуется параметрами

$$T_{01} = 600^\circ \text{ абс}, \quad \lambda_1 = 0,4.$$

При протекании через трубу температура торможения газа повышается до значения $T_{02} = 1200^\circ \text{ абс}$. Определить, пренебрегая трением, коэффициент скорости потока после подвода тепла.

Для потока в цилиндрической трубе без учёта трения уравнение количества движения записывается в виде

$$\frac{G}{g}(\omega_2 - \omega_1) = F(p_1 - p_2), \quad (115)$$

т. е. силы давления во входном и выходном сечении являются единственными силами, вызывающими изменение количества движения.

Уравнение количества движения (115) можно представить в виде

$$\frac{G}{g}\omega_1 + p_1 F = \frac{G}{g}\omega_2 + p_2 F;$$

заменяем выражения импульсов согласно соотношению (113). Получим:

$$a_{1 \text{ кр}} \cdot z(\lambda_1) = a_{2 \text{ кр}} z(\lambda_2)$$

или

$$z(\lambda_2) = z(\lambda_1) \sqrt{\frac{T_{01}}{T_{02}}}. \quad (116)$$

Подставляя численные значения, находим:

$$z(\lambda_2) = 2,9 \sqrt{\frac{600}{1200}} = 2,05.$$

По таблицам или непосредственным вычислением из квадратного уравнения

$$\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_2} = 2,05$$

определяем:

$$\lambda_2 = 0,8.$$

Второе решение $\lambda_2 = 1,25$ нереально, так как подогревом нельзя перевести дозвуковой поток в сверхзвуковой.

Отметим, кстати, что если из уравнения (116) следует $z(\lambda_2) < 2$, то это означает, что заданное повышение температуры газа физически невозможно без снижения скорости во входном сечении, т. е. без уменьшения расхода газа.

Пример 5. Найти связь между коэффициентами скорости потока до и после прямого скачка и определить изменение полного давления в скачке.

Как известно, в прямом скачке сохраняются значения расхода, температуры торможения или критической скорости звука и импульса газового потока. Эти условия записываются в виде

а) $G_1 = G_2,$

б) $T_{01} = T_{02}$ или $a_{1 \text{ кр}} = a_{2 \text{ кр}},$

в) $p_1 F + \frac{G_1}{g}\omega_1 = p_2 F + \frac{G_2}{g}\omega_2$ или $\frac{G_1}{g} a_{1 \text{ кр}} z(\lambda_1) = \frac{G_2}{g} a_{2 \text{ кр}} z(\lambda_2).$

На основании двух первых уравнений последнее уравнение принимает вид

$$z(\lambda_2) = z(\lambda_1). \quad (1)$$

Если исключить случай $\lambda_2 = \lambda_1$, соответствующий безударному течению с постоянными параметрами, из (117) следует:

$$\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}.$$

Такой же результат мы получили в § 1 главы III иным путём.

Чтобы определить снижение полного давления в скачке, воспользуемся уравнением неразрывности в форме (107):

$$\frac{p_{01} F \cdot q(\lambda_1)}{\sqrt{T_{01}}} = \frac{p_{02} F \cdot q(\lambda_2)}{\sqrt{T_{02}}}.$$

Так как $F = \text{const}$ и $T_{01} = T_{02}$, то отсюда непосредственно следует:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda_2)}$$

или

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{q(\lambda_1)}{q\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)}.$$

Это соотношение эквивалентно уравнению (24) главы III, но получено более простым путём.

Составим ещё два выражения для импульса в газовом потоке. Для этого заменим произведение $\frac{G}{g} a_{кр}$, входящее в правую часть уравнения (113), его значением согласно (105) и затем (109). В результате выражаем импульс в одном случае через полное давление в газовом потоке

$$\begin{aligned} \frac{G}{g} \omega + pF &= p_0 F \lambda \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot z(\lambda) = \\ &= \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot p_0 F \cdot q(\lambda) z(\lambda), \quad (118) \end{aligned}$$

а в другом случае через статическое давление

$$\frac{G}{g} \omega + pF = pF \frac{\lambda}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2} \cdot z(\lambda) = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot pF \cdot y(\lambda) z(\lambda). \quad (119)$$

Введём обозначения для двух новых функций коэффициента скорости λ , входящих в правые части этих выражений:

$$f(\lambda) = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot q(\lambda) \cdot z(\lambda) = (\lambda^2 + 1) \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad (120)$$

$$r(\lambda) = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \frac{1}{y(\lambda) \cdot z(\lambda)} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}{\lambda^2 + 1}. \quad (121)$$

Подставляя эти значения, получаем окончательно:

$$\frac{G}{g} \omega + pF = p_0 F \cdot f(\lambda), \quad (122)$$

$$\frac{G}{g} \omega + pF = pF \cdot \frac{1}{r(\lambda)}. \quad (123)$$

Функция $r(\lambda)$ введена как обратная величина произведению $y(\lambda) \cdot z(\lambda)$, благодаря чему облегчается пользование таблицами (произведение $y(\lambda) z(\lambda)$ быстро возрастает с увеличением λ , стремясь к бесконечности при $\lambda \rightarrow \lambda_{\max}$, величина же $r(\lambda)$ изменяется в пределах от единицы до нуля).

Графики функций $f(\lambda)$ и $r(\lambda)$ приведены на фиг. 81.

Обращает на себя внимание очень небольшой диапазон изменения функции $f(\lambda)$ (около 25% в интервале значений $0 < \lambda < 1,5$). Иначе говоря, при постоянном полном давлении импульс потока в данном сечении слабо зависит от величины скорости (при дозвуковых и небольших сверхзвуковых скоростях).

Полезно запомнить, что согласно (122) и (123) при заданных значениях площади сечения F , коэффициента скорости λ и полного (или статического) давления импульс не зависит от температуры газа. Это вполне соответствует следующему простейшему соображению: скорость течения при данном λ изменяется прямо пропорционально, а расход газа — обратно пропорционально корню квадратному из абсолютной температуры, поэтому с изменением температуры не изменяется как величина количества движения $\frac{G}{g} \omega$, так и сила давления pF .

Перечислим ещё раз введённые газодинамические функции и соотношения между ними:

1. Простейшие функции, которые выражают связь между параметрами газа в потоке и параметрами торможения:

$$\tau(\lambda) = \frac{T}{T_0}, \quad \pi(\lambda) = \frac{p}{p_0}, \quad \varepsilon(\lambda) = \frac{\rho}{\rho_0}.$$

2. Функции, выражающие расход газа через полное давление

$$q(\lambda)$$

или через статическое давление

$$y(\lambda) = \frac{q(\lambda)}{\pi(\lambda)}.$$

3. Функция

$$z(\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda},$$

полученная при преобразовании уравнения импульсов, и часто встречающиеся комбинации функций

$$\left. \begin{aligned} f(\lambda) &= \text{const} \cdot q(\lambda) z(\lambda) \\ r(\lambda) &= \frac{\text{const}}{y(\lambda) \cdot z(\lambda)}. \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

При вычислениях с помощью таблиц следует иметь в виду, что функции $q(\lambda)$, $z(\lambda)$, $f(\lambda)$ в области околосвуковых скоростей (при λ , близких к единице) изменяются слабо. Поэтому если по величинам $q(\lambda)$, $z(\lambda)$ или $f(\lambda)$ надо определить значение λ , то небольшая погрешность в величине функции приведёт к значительной ошибке в λ . Таких вычислений следует избегать, используя по возможности в этих случаях другие соотношения данного параграфа, включающие функции $y(\lambda)$ или $r(\lambda)$; понятно, что в этой области не рекомендуется определение λ с помощью графиков.

Если коэффициент скорости λ должен быть найден по величине функции $z(\lambda)$, то при $z(\lambda) < 2,10$ для уменьшения ошибки лучше вычислить два возможных значения непосредственно из формулы

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = z(\lambda)$$

или

$$\lambda = \frac{z(\lambda) \pm \sqrt{z^2(\lambda) - 4}}{2}.$$

В заключение рассмотрим применение газодинамических функций для решения некоторых сравнительно сложных задач.

Пример 6. Определить потери полного давления в потоке воздуха при внезапном расширении трубы и коэффициент скорости λ_2 после выравнивания поля скоростей, если заданы коэффициент скорости перед расширением $\lambda_1 = 0,8$ и отношение продольных сечений $\frac{F_2}{F_1} = 4$.

Подобную задачу мы решали в § 5 главы I для несжимаемой жидкости. Сделаем это сейчас с учётом сжимаемости воздуха. Запишем уравнение количества движения, пренебрегая

трением и учитывая, что при дозвуковых скоростях статическое давление постоянно во всём сечении $1-1$ (фиг. 8):

$$\frac{G}{g} (\omega_1 - \omega_2) = p_2 F_2 - p_1 F_1.$$

Сгруппируем члены уравнения так, чтобы выделить импульсы потока в сечении $1-1$ и $2-2$. Получаем:

$$\left(\frac{G}{g} \omega_2 + p_2 F_2 \right) = \left(\frac{G}{g} \omega_1 + p_1 F_1 \right) + p_1 (F_2 - F_1),$$

где $p_1 (F_2 - F_1)$ — сила давления на кольцевую площадку в сечении $1-1$.

Заменим теперь выражения импульсов согласно (113), а статическое давление p_1 выразим с помощью уравнения расхода (110). Уравнение количества движения принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{G}{g} a_{кр} z (\lambda_2) = \\ = \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{G}{g} a_{кр} \cdot z (\lambda_1) + \frac{k+1}{2k} \frac{G}{g} a_{кр} \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{\lambda_1} \cdot \frac{F_2 - F_1}{F_1}; \end{aligned}$$

или после сокращения и подстановки функции $y (\lambda_1)$:

$$z (\lambda_2) = z (\lambda_1) + \left(\frac{F_2}{F_1} - 1 \right) \frac{1}{y (\lambda_1)} \cdot \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Из этого уравнения по величинам λ_1 и $\frac{F_2}{F_1}$ можно найти коэффициент скорости после расширения трубы λ_2 .

Отметим, что результат не зависит от абсолютных значений давления и температуры газа и очень мало меняется в зависимости от показателя адиабаты k .

Для нашего случая $\lambda_1 = 0,8$, т. е. $z (\lambda_1) = 2,05$, $y (\lambda_1) = 1,4126$. Отсюда получаем $z (\lambda_2)$:

$$z (\lambda_2) = 2,05 + (4 - 1) \cdot \frac{1}{1,4126} \cdot 0,634 = 3,396$$

и

$$\lambda_2 = 0,326.$$

Потери полного давления при внезапном расширении получим из уравнения неразрывности (107):

$$\frac{p_{01} F_1 \cdot q (\lambda_1)}{V T_0} = \frac{p_{02} F_2 \cdot q (\lambda_2)}{V T_0},$$

откуда

$$\sigma = \frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{F_1 q (\lambda_1)}{F_2 q (\lambda_2)}.$$

С помощью таблиц находим:

$$\sigma = \frac{0,9518}{0,4917} \cdot \frac{1}{4} = 0,485.$$

Пример 7. Камера горения представляет собой цилиндрическую трубу с соплом регулируемого сечения на выходе. Параметры потока на входе в камеру заданы:

$$p_{01} = 1,8 \text{ кг/см}^2, \quad T_{01} = 450^\circ \text{ абс}, \quad \lambda_1 = 0,4.$$

Определить максимально возможное повышение температуры газа в камере и величину потерь полного давления на этом режиме.

Чем выше температура торможения газа на выходе из камеры горения, тем больше — при прочих равных условиях — должно быть сечение сопла. Поэтому максимально возможному подогреву газа соответствует полное раскрытие сопла, т. е. $F_2 = \bar{F}_1$. При подводе тепла полное давление в потоке уменьшается:

$$p_{02} < p_{01} = 1,8 \text{ кг/см}^2.$$

Следовательно, отношение давлений $\frac{p_{02}}{p_2}$ меньше критического, скорость истечения — дозвуковая, а статическое давление на выходе равно атмосферному ($p_2 = p_n$).

Записываем уравнение количества движения потока, выражая импульс в сечении 1 через известное полное давление p_{01} по формуле (122), а в сечении 2 — через статическое давление $p_2 = p_n$ по формуле (123). Так как трением пренебрегаем, то эти импульсы равны:

$$p_{01} F_1 \cdot f(\lambda_1) = p_2 F_2 \cdot \frac{1}{r(\lambda_2)},$$

или при $F_2 = F_1$ и $p_2 = p_n$

$$r(\lambda_2) = \frac{p_n}{p_{01} \cdot f(\lambda_1)}.$$

Будем пренебрегать изменением теплоёмкости газа при подогреве и считать $k = \text{const} = 1,40$. Подставляя в полученное уравнение табличные данные, имеем:

$$r(\lambda_2) = \frac{1,033}{1,8 \cdot 1,0842} = 0,5295;$$

т. е. $\lambda_2 = 0,822$, $\pi(\lambda_2) = 0,6583$, $z(\lambda_2) = 2,0385$. Далее наиболее удобно воспользоваться уравнением

$$\frac{G}{g} a_{1кр} z(\lambda_1) = \frac{G}{g} a_{2кр} \cdot z(\lambda_2),$$

откуда следует:

$$T_{02} = T_{01} \cdot \left[\frac{z(\lambda_1)}{z(\lambda_2)} \right]^2$$

или

$$T_{02} = 450 \left[\frac{2,9}{2,0385} \right]^2 = 911^\circ \text{ абс.}$$

Это и есть предельное значение температуры, при котором сохраняется заданная величина коэффициента скорости на входе. Скорость истечения на этом предельном режиме меньше скорости звука ($\lambda_2 = 0,822$), так как располагаемый перепад давлений недостаточен для достижения критической скорости в потоке.

Полное давление в выходном сечении равно:

$$p_{02} = \frac{p_n}{\pi(\lambda_2)} = \frac{1,033}{0,6583} = 1,568 \text{ кг/см}^2,$$

а коэффициент полного давления

$$\sigma = \frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{1,568}{1,80} = 0,872.$$

Пример 8. В поперечном сечении потока измерены поля температур, полных и статических давлений. Требуется найти средние значения параметров потока таким образом, чтобы полная энергия, импульс и расход газа, вычисленные по средним значениям параметров, были равны действительным значениям полной энергии, импульса и расхода в потоке.

По результатам измерений для каждой точки потока можно считать известными значениями полного давления p_0 , температуры торможения T_0 и коэффициента скорости λ . По величине λ в каждой точке могут быть найдены и газодинамические функции $\pi(\lambda)$, $q(\lambda)$ и т. д.

Элементарные значения расхода газа, импульса и энергии записываются при помощи обычных соотношений. Для потока в целом эти величины определяются интегралами по всему сечению от соответствующих элементарных выражений. Так, например, расход газа в потоке

$$G = \int_{(F)} dG = \int_{(F)} m \frac{p_0 \cdot q(\lambda)}{\sqrt{T_0}} \cdot dF. \quad (125)$$

Для определения расхода по этой формуле необходимо в каждой точке потока вычислить величину $\frac{p_0 \cdot q(\lambda)}{\sqrt{T_0}}$, построить график $\frac{p_0 \cdot q(\lambda)}{\sqrt{T_0}} = \Phi(F)$ и планиметрированием найти площадь, ограниченную кривой; т. е. воспользоваться методом графического

интегрирования. Можно воспользоваться также известными приближёнными способами.

Переходим к решению задачи. Приравняем величины полной энергии газа, вычисленные в одном случае по истинным, а в другом — по средним значениям параметров:

$$G c_p \bar{T}_0 = \int_{(G)} c_p T_0 dG. \quad (126)$$

Теплоёмкость c_p считаем постоянной по сечению. Подставляя сюда выражения для общего расхода газа G и элементарного расхода, получаем формулу для определения средней величины температуры торможения:

$$\bar{T}_0 = \frac{\int_{(F)} \sqrt{\bar{T}_0} p_0 \cdot q(\lambda) dF}{\int_{(F)} \frac{1}{\sqrt{\bar{T}_0}} \cdot p_0 q(\lambda) dF}. \quad (127)$$

Это значение T_0 согласно (126) является среднемассовым значением температуры торможения. Воспользуемся этим значением для определения средней величины критической скорости звука

$$\bar{a}_{кр} = \sqrt{2g \frac{k}{k+1} R \bar{T}_0}.$$

Далее запишем условие равенства действительного импульса потока и импульса, вычисленного по средним значениям параметров:

$$\frac{k+1}{2k} \cdot \frac{G}{g} \bar{a}_{кр} \cdot z(\bar{\lambda}) = \frac{k+1}{2gk} \int_{(G)} a_{кр} \cdot z(\lambda) \cdot dG.$$

Если элементарный импульс газа выразить с помощью уравнения (122), что эквивалентно подстановке в записанное уравнение значения dG согласно (125), то получается удобная формула для определения соответствующей средней величины коэффициента скорости $\bar{\lambda}$:

$$z(\bar{\lambda}) = \frac{2gk}{k+1} \cdot \frac{1}{\bar{a}_{кр} G} \int_{(G)} p_0 f(\lambda) dF, \quad (128)$$

в которой G и $a_{кр}$ — найденные выше значения для потока в целом. В соответствии с режимом течения газа по функции $z(\bar{\lambda})$ находится значение $\bar{\lambda} < 1$ или $\bar{\lambda} > 1$.

Таким образом, по уравнениям энергии и импульса определяются средние величины температуры торможения и коэффи-

циента скорости в потоке. Подставляя эти величины в уравнение расхода газа, выраженного по средним параметрам в потоке, находим среднее значение полного давления газа в данном сечении:

$$\bar{p}_0 = \frac{G \sqrt{\bar{T}_0}}{m \cdot F \cdot q(\bar{\lambda})}. \quad (129)$$

По найденным значениям \bar{T}_0 , \bar{p}_0 и $\bar{\lambda}$ однозначно определяются все параметры осреднённого потока: скорость $\bar{\omega}$, плотность $\bar{\rho}$ и т. д.

Отметим, что средние значения параметров, удовлетворяющие поставленным в задаче условиям, получаются вполне определёнными независимо от способа решения основных уравнений, хотя при этом могут быть получены и различные по внешнему виду формулы.

Мы остановились лишь на одном из возможных способов определения средних значений параметров потока; в ряде случаев целесообразно применять другие способы осреднения, например, осреднение с использованием условия сохранения энтропии вместо условия сохранения импульса.

ГЛАВА VI
ТЕОРИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ.
ТУРБУЛЕНТНЫЕ ГАЗОВЫЕ СТРУИ

§ 1. Основные понятия пограничного слоя

Течение реальной жидкости отличается от течения идеальной жидкости наличием вязкости, проявляющейся в виде силы внутреннего трения. Как известно из гидравлики, сила трения, по гипотезе Ньютона, пропорциональна изменению величины скорости, приходящемуся на единицу длины в направлении нормали к поверхности тела. Величина силы трения, действующей на единицу площади, называется напряжением трения; обозначим напряжение трения через τ ; высказанную гипотезу Ньютона можно выразить так:

$$\tau = \mu \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1)$$

где μ — коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом вязкости*; чем больше μ , тем более вязка жидкость. Величина этого коэффициента существенно зависит от температуры жидкости. Результаты многочисленных экспериментов хорошо подтверждают это соотношение. Поэтому гипотезу Ньютона можно рассматривать как физический закон. С увеличением температуры вязкость воздуха возрастает, вязкость воды падает. Для газов изменение коэффициента вязкости в широком диапазоне изменения температур определяется формулой Сатерленда

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{273} \right)^{1,5} \frac{273^\circ + c}{T + c}. \quad (2)$$

Для воздуха $\mu_0 = 1,755 \cdot 10^{-6} \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2}$, $c = 122^\circ$.

При решении практических задач удобнее пользоваться степенной зависимостью μ от температуры:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^n. \quad (3)$$

Следует иметь в виду, что значение n зависит от рассматриваемого интервала температур. Например, для воздуха в интервале температур от 20 до 120° Ц $n = 0,75$, а в интервале от 300 до 400° Ц $n = 0,65$.

Рассмотрим движение вязкой жидкости вблизи твёрдой стенки. Под действием сил вязкости слои жидкости по мере приближения к стенке постепенно подтормаживаются и на самой стенке «прилипают» к ней. Эта область вихревого движения вязкой жидкости, расположенная около обтекаемого тела, называется *пограничным слоем*. Условно границей пограничного слоя принято считать ту линию, на которой скорость отличается от местной скорости внешнего потока на один процент. Пограничный слой при больших числах R имеет очень малую толщину по сравнению с размерами тела. Так, например, на крыле самолёта с хордой 1,5—2 м эта толщина равна нескольким сантиметрам.

Ввиду относительно малой толщины пограничного слоя статическое давление в нём по нормали к поверхности тела не изменяется:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

Это подтверждено результатами многочисленных опытов и является основной физической характеристикой пограничного слоя. Введение понятия о пограничном слое позволяет условно разбить поток на две области: пограничный слой, т. е. область, непосредственно примыкающую к телу, где сказывается влияние вязкости, и внешний поток, который можно считать потенциальным¹⁾. Такая схематизация течения оказывается исключительно плодотворной при решении практических задач, так как позволяет использовать во внешней области потока решения для идеальной жидкости. Схематическая картина течения вблизи тела приведена на фиг. 82. Следует отметить, что масса жидкости, захватываемая влиянием вязкости, по длине стенки возрастает, т. е. граница пограничного слоя не совпадает с какой-либо линией тока; линий тока входят в пограничный слой, пересекаясь с его границей.

Передача давления через пограничный слой объясняет происхождение отрыва пограничного слоя от поверхности тела при возрастании давления по потоку (крыловой профиль с положительным градиентом давления или диффузор). В самом деле, при движении в сторону повышающегося давления поток подтормаживается. Так как кинетическая энергия потока по сечению пограничного слоя изменяется, то под влиянием возрастающего

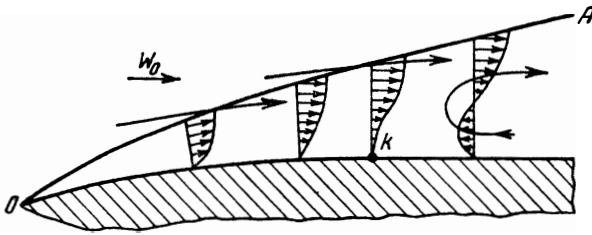
¹⁾ Внешней считается та часть потока, в которой сохраняется полное давление набегающего потока.

давления слоя жидкости, расположенные ближе к телу, подтормаживаются сильнее. В некотором месте поток останавливается:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \quad (5)$$

и происходит отрыв пограничного слоя от тела (фиг. 82). Следует сразу же оговориться, что существующие методы расчёта пограничного слоя справедливы лишь для безотрывного течения или для области, расположенной до места отрыва.

Существуют два способа расчёта параметров жидкости в пограничном слое. Первый заключается в решении системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих



Фиг. 82. Профили скорости и схема образования отрыва потока в пограничном слое.

течение жидкости в пограничном слое. Решение этих уравнений, впервые составленных Л. Прандтлем, возможно лишь для отдельных частных случаев.

Второй, более простой, метод состоит в решении интегрального уравнения импульсов в пограничном слое, однако при этом решении нужно наперёд задаваться профилем скорости в поперечном сечении пограничного слоя.

Составим интегральное уравнение импульсов при установившемся течении в пограничном слое. Применяя уравнение количества движения к объёму жидкости с основанием, равным площади сечения пограничного слоя, и единичной глубиной, получим (см. § 5 гл. I):

$$P_x = \Delta (\Sigma m w_x),$$

где $\Delta (\Sigma m w_x)$ есть проекция на ось x секундного количества движения, протекающего через поверхность, ограничивающую рассматриваемый объём (фиг. 83), а P_x — проекция на ось x равнодействующей всех сил, приложенных к выделенному объёму.

Подсчитаем сначала секундное изменение количества движения жидкости в объёме $abcd$. Через элемент площади dy протекает за единицу времени масса жидкости $\rho w_x dy$, переносящая количество движения $\rho w_x^2 dy$.

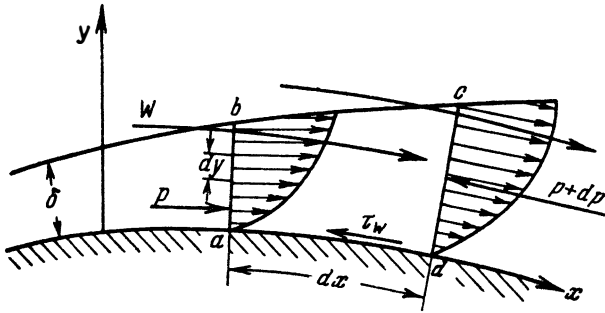
Поэтому секундное количество движения, переносимое вытекающей через сечение ab жидкостью, равно:

$$(\Sigma m\omega_x)_{ab} = \int_0^{\delta} \rho\omega_x^2 dy.$$

Аналогично количество движения вытекающей через сечение cd жидкости равно:

$$(\Sigma m\omega_x)_{cd} = \int_0^{\delta} \rho\omega_x^2 dy + \left(\frac{d}{dx}\right) \int_0^{\delta} \rho\omega_x^2 dy dx.$$

Найдём теперь количество движения, поступающее в рассматриваемый объём через границу пограничного слоя bc . Весовой



Фиг. 83. К выводу интегрального уравнения импульсов.

расход жидкости, вытекающей через bc , очевидно, равен разности расходов через сечения cd и ab , т. е.

$$G_{bc} = G_{cd} - G_{ab} = \left(\frac{d}{dx}\right) \int_0^{\delta} \rho\omega_x dy dx.$$

Так как скорость на границе слоя равна скорости потенциального потока W_0 , то количество движения жидкости, вытекающей через bc , равно:

$$(\Sigma m\omega_x)_{bc} = W_0 \left(\frac{d}{dx}\right) \int_0^{\delta} \rho\omega_x dy dx.$$

Следовательно, изменение количества движения рассматриваемого объёма согласно § 5 главы I равно:

$$\begin{aligned} \Delta (\Sigma m\omega_x) &= (\Sigma m\omega_x)_{cd} - (\Sigma m\omega_x)_{ab} - (\Sigma m\omega_x)_{bc} = \\ &= \left\{ \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho\omega_x^2 dy - W_0 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho\omega_x dy \right\} dx. \end{aligned}$$

Найдём теперь проекцию равнодействующей всех сил, приложенных к рассматриваемому объёму. При этом внешними массовыми силами будем пренебрегать. Силы трения по сечениям ab и cd не дают составляющей на ось x . На внешней границе пограничного слоя bc сила трения равна нулю, так как на границе градиент скорости равен нулю. Следовательно, нам нужно учесть силы давления в сечениях ab , cd и bc , а также силу трения на поверхности тела ad .

Проекции сил давления на ось x равны: $P_{xab} = p\delta$; $P_{xbc} = p ds \cdot \frac{d\delta}{ds}$, где ds есть длина дуги bc и $\frac{d\delta}{ds}$ — синус угла, который bc составляет с осью x ; $P_{xcd} = -[p\delta + d(p\delta)]$. Сумма проекций сил давления равна:

$$P_{xab} + P_{xbc} + P_{xcd} = p\delta + p d\delta - p\delta - d(p\delta) = -\delta dp = -\delta \frac{dp}{dx} dx.$$

Сила трения на стенке, действующая на поверхность $ad = dx$, равна $P_{тр} = -\tau_w dx$, где τ_w — напряжение трения на стенке. Поэтому проекция равнодействующей всех сил, приложенных к выделенному объёму, равна:

$$P_x = -\left(\delta \frac{dp}{dx} + \tau_w\right) dx.$$

Подставляя найденные значения $\Delta(\Sigma m w_x)$ и P_x в уравнение изменения количества движения, получим искомое интегральное соотношение импульсов в пограничном слое:

$$-\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho w_x^2 dy + W_0 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho w_x dy = \delta \frac{dp}{dx} + \tau_w. \quad (6)$$

В этом уравнении W_0 и p являются известными функциями x и определяются из расчёта обтекания тела потоком идеальной жидкости или находятся из эксперимента.

Преобразуем уравнение (6) к виду, удобному для решения. Из уравнения Бернулли имеем:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho W_0 \frac{dW_0}{dx},$$

далее:

$$W_0 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho w_x dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho W_0 w_x dy - \frac{dW_0}{dx} \int_0^{\delta} \rho w_x dy.$$

Подставляя эти выражения в (6), получим:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho w_x (W_0 - w_x) dy + \frac{dW_0}{dx} \int_0^{\delta} \rho (W_0 - w_x) dy = \tau_w.$$

Введём теперь понятия о *толщине вытеснения* δ^* и *толщине потери импульса* δ^{**} , определяемые соответственно следующими выражениями:

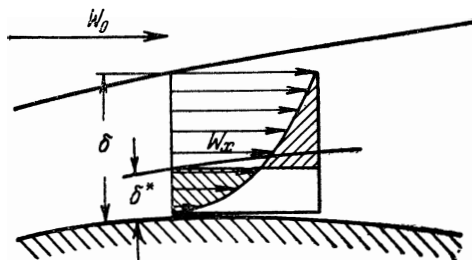
$$\delta^* = \frac{\int_0^{\delta} (\rho_0 W_0 - \rho \omega_x) dy}{\rho_0 W_0} = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho \omega_x}{\rho_0 W_0} \right) dy, \quad (7)$$

$$\delta^{**} = \frac{\int_0^{\delta} \rho \omega_x (W_0 - \omega_x) dy}{\rho_0 W_0^2} = \int_0^{\delta} \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 - \frac{\omega_x}{W_0} \right) \frac{\omega_x}{W_0} dy. \quad (8)$$

Заметим, что эти величины имеют ясный физический смысл. Толщина вытеснения δ^* характеризует смещение линий тока, вызванное торможением жидкости вблизи поверхности тела (фиг. 84), а величина δ^{**} выражает уменьшение количества движения (по сравнению с потоком невязкой жидкости). Толщины δ^* и δ^{**} по величине всегда меньше толщины пограничного слоя δ .

Вводя в интегральное уравнение величины δ^* и δ^{**} , получим:

$$\frac{d}{dx} (\delta^{**} \rho_0 W_0^2) + \rho_0 W_0 \delta^* \frac{dW_0}{dx} = \tau_w,$$



Фиг. 84. Геометрическое определение толщины вытеснения.

откуда найдём следующую форму для интегрального уравнения импульсов в пограничном слое:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + (2\delta^{**} + \delta^*) \frac{1}{\Lambda_0} \frac{d\Lambda_0}{dx} - \frac{2\delta^{**}}{k-1} \cdot \frac{\Lambda_0}{1-\Lambda_0^2} \cdot \frac{d\Lambda_0}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho_0 W_0^2}, \quad (9)$$

где $\Lambda_0 = \frac{W_0}{\sqrt{2gI_{ср}T_{00}}}$ — скорость, отнесённая к максимальной скорости газа; T_{00} , ρ_{00} , p_{00} — соответственно температура торможения, плотность и полное давление идеально заторможенного газа для внешнего потока; $A = \frac{1}{J}$; $\rho_0 = \rho_{00} (1 - \Lambda_0^2)^{\frac{1}{k-1}}$.

Основным критерием подобия для течений вязкой несжимаемой жидкости или течений газа с небольшими дозвуковыми скоростями является число **R**.

Как мы уже говорили выше, для расчёта пограничного слоя необходимо наперёд задать закон распределения скоростей в пограничном слое. Движение жидкости в пограничном слое может иметь различный характер, определяемый значением

числа R . При небольших числах R движение частиц жидкости имеет упорядоченный слоистый характер; такое движение и соответствующий пограничный слой называются *ламинарными*. При больших числах R движение частиц имеет беспорядочный турбулентный характер; соответствующий пограничный слой называют *турбулентным*.

Исследования течений жидкости в круглых трубах показали существование *критического числа* R :

$$R_{кр} = \frac{2w_{ср}R\rho}{\mu} \quad (10)$$

($w_{ср}$ — средняя скорость, R — радиус трубы, ρ — плотность, μ — коэффициент вязкости), являющегося основным критерием перехода ламинарного течения в турбулентное. Максимальное значение этого числа, при котором в случае любого начального возмущения течение успокаивается и становится ламинарным, равно примерно 2000. Следует иметь в виду, что при искусственном уменьшении начальных возмущений в потоке ламинарное течение удаётся осуществить до значений числа $R = 150\,000$.

В случае внешнего обтекания переход ламинарного слоя в турбулентный характеризуется числом

$$R_{кр}^{**} = \frac{W_0 \rho \delta^{**}}{\mu} \approx 600.$$

Для ламинарного слоя распределение скоростей в пограничном слое обычно задают в виде полинома

$$\frac{w}{W_0} = \sum_{n=0} A_n \left(\frac{y}{\delta} \right)^n, \quad (11)$$

в котором значения коэффициентов A_n определяют из следующих граничных условий:

$$\text{при } y = 0: \quad w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0,$$

т. е. вблизи стенки напряжение трения не изменяется;

$$\text{при } y = \delta: \quad w = W_0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^i w}{\partial y^i} = 0,$$

т. е. на границе пограничного слоя скорость плавно переходит в скорость невозмущённого потока.

Обычно при решении ограничиваются полиномами третьей или четвёртой степени и значения коэффициентов находят, используя два граничных условия на стенке и два или три условия на границе пограничного слоя.

При турбулентном режиме профиль скоростей является более выполненным, т. е. более близким к прямоугольному, чем при

ламинарном и хорошо аппроксимируется степенной зависимостью вида

$$\frac{w}{W_0} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{n}},$$

где $n \geq 7$, причём n увеличивается с увеличением числа Рейнольдса.

Универсальным законом распределения скорости в турбулентном слое, проверенным в широком диапазоне значений числа R , является логарифмический закон

$$\frac{w}{W_0} = 1 + \frac{1}{\alpha \xi} \ln \frac{y}{\delta}. \quad (12)$$

Этот закон получается, если напряжение трения¹⁾

$$\tau = \rho \left(l \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (13)$$

в сечении пограничного слоя принять постоянным:

$$\tau = \tau_w = \text{const},$$

а длину пути смещения считать пропорциональной расстоянию от стенки:

$$l = \alpha y, \quad (14)$$

где α — коэффициент пропорциональности, равный 0,4. Тогда, вводя новую переменную

$$\xi = \frac{W_0}{V \frac{\tau_w}{\rho}}, \quad (15)$$

где W_0 и τ_w — функции только x , а ρ — функция x и y , запишем уравнение (13) так:

$$\frac{1}{\alpha \xi} = y \frac{\partial \frac{w}{W_0}}{\partial y}.$$

В теории пограничного слоя предполагается, что $\frac{\partial w}{\partial x}$ мало в сравнении с $\frac{\partial w}{\partial y}$, т. е. можно положить:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{dy},$$

тогда

$$\frac{1}{\alpha \xi} \frac{dy}{y} = \frac{dw}{W_0}.$$

¹⁾ См. «Проблемы турбулентности», стр. 15, ОНТИ, 1936.

Интегрируя в пределах слоя и учитывая, что при $y = \delta$: $w = W_0$, получим логарифмический закон распределения скорости в пограничном слое.

Однако по этому профилю скорости (равно как и по степенному) напряжение трения непосредственно на стенке определить нельзя, так как при $y = 0$: $w = -\infty$, $\frac{\partial w}{\partial y} = \infty$ и, следовательно, этот закон непригоден непосредственно у стенки.

Вблизи обтекаемого тела число R , определённое по местным параметрам жидкости в пограничном слое, может быть сколь угодно малым. Поэтому в этой области должно существовать ламинарное течение. Эта пристеночная часть пограничного слоя называется ламинарным подслоем. Ввиду малой толщины подслоя распределение скоростей в подслое принимают линейным и, следовательно

$$\tau_w = \mu_w \frac{w_{\text{л}}}{\delta_{\text{л}}}, \quad (16)$$

где μ_w — коэффициент вязкости на стенке, $w_{\text{л}}$ — скорость на границе подслоя, $\delta_{\text{л}}$ — толщина подслоя; переход в подслое ламинарного течения в турбулентное определяется местным значением критического числа R :

$$\frac{\rho w_{\text{л}} \delta_{\text{л}}}{\mu} = \alpha^2 \quad (17)$$

где $\alpha \approx 11,5$.

Из уравнений (15), (16) и (17) получаем следующие выражения для скорости на границе подслоя и толщины подслоя

$$w_{\text{л}} = W_0 \frac{\alpha}{\xi}, \quad (18)$$

$$\delta_{\text{л}} = \frac{\mu}{W_0 \rho} \alpha \xi = \frac{\delta \alpha \xi}{R_{\delta}} = \frac{\delta^{**} \alpha \xi}{R^{**}}. \quad (19)$$

Приравнявая скорость на границе подслоя, из (12) и (18) имеем:

$$R_{\delta} = 0,288 \alpha \xi e^{\alpha \xi}$$

или

$$R^{**} = 0,288 \left(1 - \frac{2}{\alpha \xi} \right) e^{\alpha \xi}, \quad (20)$$

так как

$$\frac{\delta^{**}}{\delta} = \frac{1}{\alpha \xi} \left(1 - \frac{2}{\alpha \xi} \right).$$

$$\frac{\alpha}{x} e^{-\alpha x} = \frac{11,5}{0,4} e^{-4,6} = 0,288.$$

Для течения в трубе радиуса R_a , записав профиль скорости (12) в виде

$$\frac{w}{W_0} = 1 + \frac{1}{\alpha\xi} \ln \frac{R_a - R}{R_a}, \quad (21)$$

из условия равенства скоростей на границе подслоя получим:

$$\frac{w_{\text{л}}}{W_0} = 1 + \frac{1}{\alpha\xi} \ln \frac{\delta_{\text{л}}}{R_a},$$

откуда с помощью (18) и (19) имеем:

$$\frac{\delta_{\text{л}}}{R_a} = \frac{\mu}{R_a W_{0\rho}} \alpha\xi = \frac{\mu}{2R_a w_{\text{ср}\rho}} 2\alpha\xi \frac{w_{\text{ср}}}{W_0} = e^{\alpha x - \alpha\xi}.$$

Подставив в это уравнение значение

$$\frac{w_{\text{ср}}}{W_0} = \frac{1}{F} \int_{(F)} \frac{w}{W_0} dF = 1 - \frac{1,5}{\alpha\xi}$$

полученное с использованием (21), и

$$R = \frac{2R_a w_{\text{ср}\rho}}{\mu},$$

$$\frac{\alpha}{x} e^{-\alpha x} = 0,288 \quad (\alpha = 11,5, x = 0,4);$$

после простых преобразований имеем:

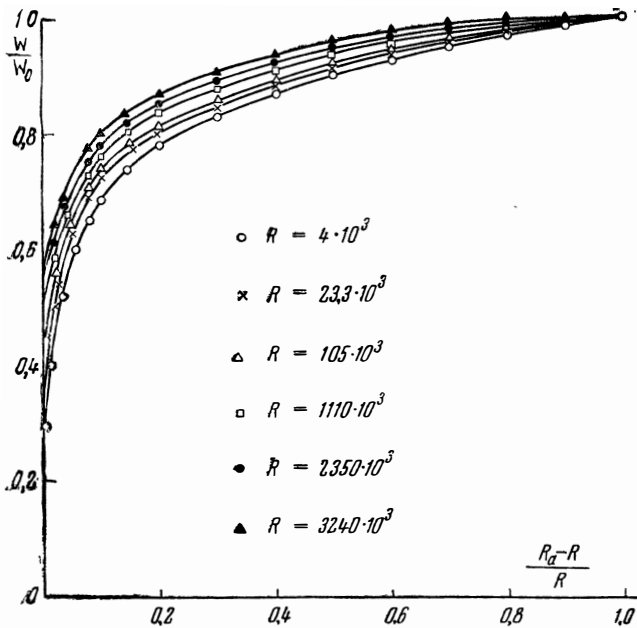
$$R = \frac{2R_a W_{\text{ср}\rho}}{\mu} = 0,576 (\alpha\xi - 1,5) e^{\alpha\xi}. \quad (22)$$

По заданному числу R с помощью (22) определяем значение $\alpha\xi$ и затем по (12) находим распределение скорости в пограничном слое. Как видно из графиков фиг. 85, где изображены теоретические профили при разных значениях R , логарифмический закон распределения скорости прекрасно согласуется с результатами опытов в круглых трубах.

Остановимся теперь кратко на взаимодействии пограничного слоя со скачками уплотнения. Отметим сначала, что при отсутствии скачков уплотнения пограничный слой оказывает воздействие на внешний поток. Это происходит следующим образом. Утолщение пограничного слоя в направлении течения учитывается увеличением толщины вытеснения δ^* , приводящим к отклонению линий тока во внешнем потоке. Таким образом, влияние пограничного слоя как бы сводится к некоторому смещению контура тела на величину толщины вытеснения. Поэтому, вообще говоря, при расчёте течения нужно итти методом последовательных приближений: сначала рассчитать обтекание тела потоком идеальной жидкости, затем по найденному распределению давления и скорости вдоль поверхности тела рассчитать пограничный слой, далее рассчитать обтекание фиктивного тела,

поверхность которого смещена на толщину вытеснения δ^* , и т. д. Однако обычно ограничиваются расчётом первого приближения, так как толщина вытеснения мала по сравнению с размерами тела.

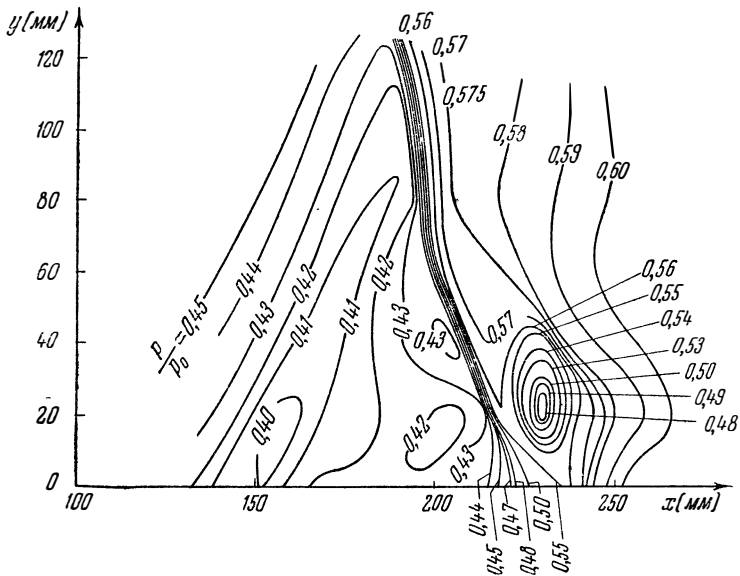
При наличии в потоке скачков уплотнения пограничный слой оказывает сильное влияние на форму и положение скачка. Как отмечено выше, при движении с положительным градиентом давления выполненность профиля скорости в пограничном



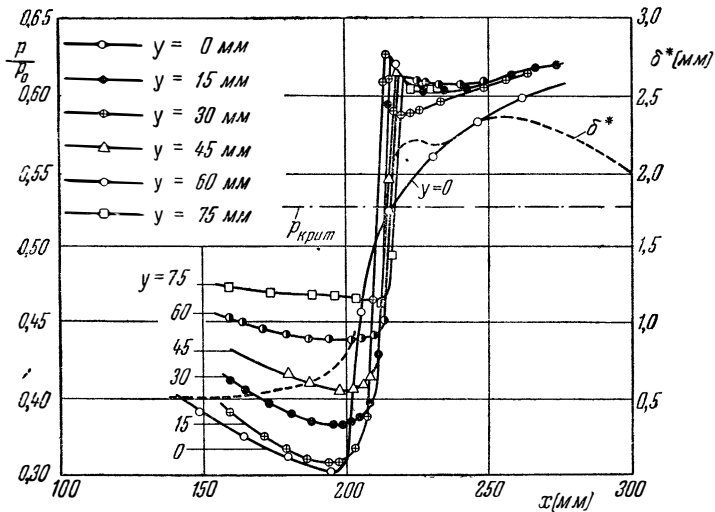
Фиг. 85. Распределение скоростей в турбулентном пограничном слое трубы при различных значениях числа R .

слое уменьшается, что увеличивает толщину вытеснения и вызывает отрыв пограничного слоя. Скачок уплотнения вносит резкий положительный градиент давления; рост давления передаётся навстречу потоку по дозвуковой части пограничного слоя, имеющейся вблизи стенки. Вследствие этого толщина вытеснения δ^* в районе скачка существенно возрастает, что значительно отклоняет линии тока во внешнем течении и сказывается на форме и интенсивности скачка; в пограничном слое в области скачка уплотнения обычно наблюдается отрыв.

На фиг. 86 приведена фотография обтекания хвостовой части крылового профиля при большой дозвуковой скорости невозмущённого набегающего потока. В образующейся при этом около крыла местной сверхзвуковой зоне виден скачок уплотнения

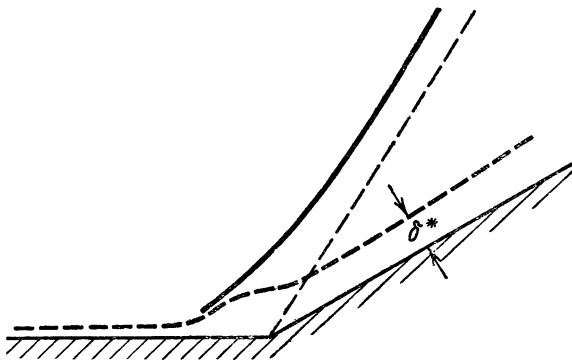


Фиг. 89. Распределение давления в районе скачка уплотнения при ламинарном пограничном слое.



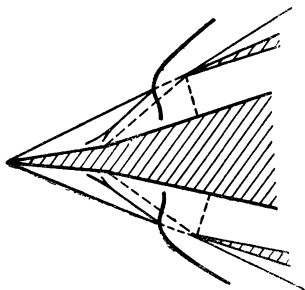
Фиг. 90. Распределение давления и изменение толщины вытеснения в районе скачка при турбулентном пограничном слое.

и связанный с ним отрыв пограничного слоя от профиля; область отрыва ограничена горизонтальными белыми полосами, отходящими от поверхности крыла. Заметим, что форма



Фиг. 91. Деформация скачка уплотнения при обтекании тупого угла под влиянием пограничного слоя. Фронт скачка в потоке без пограничного слоя и изменение толщины вытеснения в районе скачка показаны пунктиром.

скачка уплотнения в пограничном слое сильно зависит от выпуклости профиля



Фиг. 92. Деформация скачков уплотнения в трёхскачковом диффузоре под влиянием пограничного слоя.

скорости. Например, при значениях $M \sim 1,1$ в ламинарном слое (фиг. 87) появляется несколько лямбдаобразных скачков уплотнения, каждый из которых состоит из слабого косоугольного скачка, за которым располагается более сильный прямой скачок; в турбулентном пограничном слое (фиг. 88) при $M \sim 1,1$ образуется один прямой скачок уплотнения, несколько искривлённый у стенки. На фиг. 89 и 90 показано распределение давления в районе скачка уплотнения соответственно для этих двух случаев. Кроме того, на фиг. 90 нанесена толщина вытеснения δ^* , увеличивающаяся в районе скачка примерно в пять раз. Как видно из этих фигур, давление меняется не только

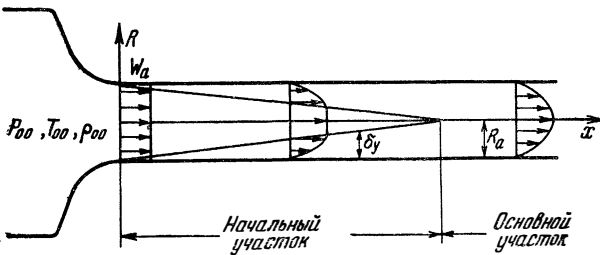
вдоль пограничного слоя, но и поперёк его. Таким образом, условие $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ в данном случае не выполняется и, следовательно, в присутствии скачка уравнения пограничного слоя не могут быть использованы для расчёта течения около поверхности тела.

При обтекании внутреннего тупого угла сверхзвуковым потоком с числом M , значительно бóльшим единицы (фиг. 91), вследствие резкого возрастания толщины вытеснения скачок уплотнения не только искривляется, но и отходит от вершины угла вперёд по потоку. Взаимное влияние пограничного слоя и скачков уплотнения может существенно ухудшить работу сверхзвукового диффузора¹⁾ (фиг. 92) (восстановление давления уменьшается, а сопротивление возрастает).

Точный анализ взаимодействия пограничного слоя со скачками уплотнения представляет весьма трудную задачу.

§ 2. Течение газа в гладкой цилиндрической трубе

Пусть в цилиндрическую трубу через некоторое сопло втекает газ с равномерным распределением параметров W_a , ρ_a , p_a , T_a по входному сечению (фиг. 93). Такое течение получается в хо-



Фиг. 93. Схема течения газа в трубе.

рошо спроектированном сопле — при отсутствии потерь. Напомним, что в § 3 главы I мы ввели величину $\Lambda = \frac{w}{w_{\max}} = \lambda \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}$, с помощью которой параметры газа во входном сечении трубы можно определить по значению параметров газа в сосуде перед соплом, обозначенных через ρ_{00} , p_{00} , T_{00} . Имеем:

$$p_a = p_{00} (1 - \Lambda_a^2)^{\frac{k}{k-1}}, \quad \rho_a = \rho_{00} (1 - \Lambda_a^2)^{\frac{1}{k-1}}, \quad T_a = T_{00} (1 - \Lambda_a^2).$$

Значение безразмерной скорости Λ_a в соответствии с данными § 3 главы I и § 1 главы IV при сверхзвуковом истечении из сопла определяется размерами сопла ($k = 1,4$):

$$\Lambda_a (1 - \Lambda_a^2)^{\frac{1}{k-1}} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \left(\frac{k-1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{F_{кр}}{F} = 0,259 \frac{R_{кр}^2}{R_a^2},$$

¹⁾ Подробное описание работы свехзвукового диффузора даётся в § 2 главы III.

а при дозвуковом истечении — условием равенства статического давления на выходе из трубы и окружающего давления. При движении газа вдоль трубы профиль скорости вследствие трения постепенно деформируется. Схематически профиль скорости можно составить из ядра постоянной скорости и пограничного слоя толщиной δ_y (фиг. 93).

Рассмотрим случай, когда теплообмен между газом и стенками трубы отсутствует. Тогда температура торможения в любой точке потока постоянна¹⁾:

$$T + \frac{w^2 A}{2gc_p} = T_{00}. \quad (23)$$

Кроме уравнения (23), для решения задачи воспользуемся уравнениями импульсов и расхода

$$d \left(2\pi \int_0^{R_a} \rho w^2 R dR + \pi R_a^2 p \right) = -2\pi R_a \tau_w dx, \quad (24)$$

$$Q = \pi R_a^2 \rho_a W_a = 2\pi \int_0^{R_a} \rho w R dR, \quad (25)$$

уравнением состояния

$$p = \rho R T \quad (26)$$

и зависимостью коэффициента вязкости от температуры, которую представим в таком виде:

$$\mu = \mu_{00} \left(\frac{T}{T_{00}} \right)^n.$$

Уравнения (23) — (25) для удобства решения приведём к безразмерному виду:

$$\frac{T}{T_{00}} = 1 - \Lambda^2, \quad (27)$$

$$\frac{d}{dx} \left(2 \int_0^1 \frac{\rho}{\rho_{00}} \Lambda^2 \bar{R} d\bar{R} + \frac{k-1}{2k} \frac{p}{p_{00}} \right) = - \frac{2\tau_w A}{\rho_{00} 2gc_p T_{00}}, \quad (28)$$

$$\bar{Q} = \frac{Q}{\pi R_a^2 \rho_{00}} \cdot \sqrt{\frac{A}{2gc_p T_{00}}} = \Lambda_a (1 - \Lambda_a^2)^{\frac{1}{k-1}} = q(\Lambda_a) = 2 \int_0^1 \frac{\rho}{\rho_{00}} \Lambda \bar{R} d\bar{R}, \quad (29)$$

¹⁾ Температура торможения постоянна, если число Прандтля в газе равно единице: $P = \frac{\mu c_p}{\lambda} = 1$. В частности, это практически справедливо для воздуха, в котором $P = 0,73$. Подробнее об этом см. в работе: Доронин А. А., Пограничный слой в сжимаемом газе. Прикладная математика и механика, т. 4, 1942.

где

$$\bar{x} = \frac{x}{R_a}, \quad \bar{R} = \frac{R}{R_a}.$$

При преобразовании уравнения (24) было использовано соотношение

$$\frac{p_{00}A}{\rho_{00}^2 g c_p T_{00}} = \frac{k-1}{2k},$$

полученное из уравнения состояния.

Таким образом, мы имеем четыре уравнения (26), (27), (28), (29), связывающие пять неизвестных Λ , $\bar{\delta}_y$, $\frac{T}{T_{00}}$, $\frac{\rho}{\rho_{00}}$ и $\frac{p}{p_{00}}$. Однако этих уравнений достаточно, так как в той части трубы, где имеется ядро постоянной скорости, давление является функцией безразмерной скорости:

$$\frac{p}{p_{00}} = (1 - \Lambda^2)^{\frac{k}{k-1}},$$

а в той части, где пограничный слой полностью развился, $\delta_y = R_a$.

Для решения задачи нам нужно задаться законом распределения скорости в пограничном слое, причём точность решения существенно зависит от того, насколько удачно выбран этот закон. В случае течения несжимаемой жидкости в начальном участке трубы хорошо подходят: для ламинарного режима параболический закон

$$\frac{w}{W} = 2 \frac{R_a - R}{\delta_y} - \left(\frac{R_a - R}{\delta_y} \right)^2,$$

для турбулентного режима — логарифмический закон

$$\frac{w}{W} = 1 + \frac{1}{\alpha \xi} \ln \frac{R_a - R}{\delta_y};$$

здесь W — скорость в ядре течения, являющаяся функцией от x . Применительно к сжимаемой жидкости указанные профили скорости не получили достаточной экспериментальной проверки. Кроме того, использование этих закономерностей связано с большими неудобствами при вычислении интегралов, входящих в уравнения (28) и (29). Поэтому для решения задачи перейдём к вспомогательным переменным x и η , где

$$\eta = \sqrt{2 \int_0^R \frac{\rho}{\rho_{00}} R dR} \quad (30)$$

1) Значение τ_w определяется по задаваемому закону распределения скорости в пограничном слое.

или

$$\rho_{00} \eta d\eta = \rho R dR.$$

Как показано в работе А. А. Дородницына¹⁾, при этом уравнения пограничного слоя для сжимаемой жидкости становятся сходными с аналогичными уравнениями несжимаемой жидкости. В этих переменных зададимся для ламинарного течения параболическим законом

$$\frac{w}{W} = 2 \frac{\tilde{R}_a - \eta}{\delta} - \left(\frac{\tilde{R}_a - \eta}{\delta} \right)^2, \quad (31)$$

а для турбулентного течения логарифмическим законом

$$\frac{w}{W} = 1 + \frac{1}{\chi \xi} \ln \frac{\tilde{R}_a - \eta}{\delta}; \quad (32)$$

здесь \tilde{R}_a есть то значение η , которое соответствует $R = R_a$,

$$\xi = \frac{W}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_{\text{пл}} \mu_w}}}}, \quad (33)$$

где $\mu_{\text{пл}}$, $\rho_{\text{пл}}$ — вязкость и плотность газа на границе подслоя.

При использовании вспомогательных переменных мы вводим ещё одну неизвестную — толщину пограничного слоя, значения которой в действительных (δ_y) и вспомогательных (δ) переменных связаны между собой; разбивая область интегрирования на две части от нуля до $R_a - \delta_y$ и от $R_a - \delta_y$ до R_a , получим:

$$R_a^2 = 2 \int_0^{R_a - \delta_y} R dR + 2 \int_{R_a - \delta_y}^{R_a} R dR,$$

где

$$\int_0^{R_a - \delta_y} R dR = \int_0^{\tilde{R}_a - \delta} \frac{\rho_{00}}{\rho} \eta d\eta, \quad \int_{R_a - \delta_y}^{R_a} R dR = \int_{\tilde{R}_a - \delta}^{\tilde{R}_a} \frac{\rho_{00}}{\rho} \eta d\eta.$$

Отношение $\frac{\rho_{00}}{\rho}$ согласно (26) и (27) равно:

$$\frac{\rho_{00}}{\rho} = \frac{P_{00}}{P} \frac{T}{T_{00}} = \frac{P_{00}}{P} (1 - \Lambda^2),$$

¹⁾ См. ссылку на эту работу, приведённую на стр. 212. Переход от пере-

менных (x, y) к новым переменным $\xi = x$; $\eta = \sqrt{2 \int_0^{\tilde{R}} \frac{\rho}{\rho_{00}} R dR}$ даёт возможность

свести дифференциальные уравнения пограничного слоя для сжимаемой жидкости к уравнениям, сходным с уравнениями для несжимаемой жидкости.

поэтому уравнение, связывающее $\bar{\delta}_y$ и $\bar{\delta}$, можно записать в таком виде:

$$1 = (1 - \bar{\delta}_y)^2 + 2 \frac{P_{00}}{P} \int_{\frac{\tilde{R}_a - \bar{\delta}}{\tilde{R}_a}}^{\frac{\tilde{R}_a}{\tilde{R}_a}} (1 - \Lambda^2) \bar{\eta} d\bar{\eta}; \quad (34)$$

здесь $\frac{\tilde{R}_a}{R_a} = \frac{\tilde{R}_a}{R_a}$, $\bar{\eta} = \frac{\eta}{R_a}$, $\bar{\delta} = \frac{\delta}{R_a}$, $\bar{\delta}_y = \frac{\delta_y}{R_a}$.

Остановимся теперь на определении напряжения трения на стенке по заданному профилю скоростей. Для ламинарного течения

$$\tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial \omega}{\partial R} \right)_{R=R_a} = -\mu_w \frac{2W R_a}{\delta} \frac{\rho_w}{\tilde{R}_a} = \mu_w \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial R} \right)_{R=\tilde{R}_a}, \quad (35)$$

где ρ_w — плотность газа на стенке. Для турбулентного течения, как уже говорилось выше, определить величину трения непосредственно по логарифмическому профилю скорости нельзя, так как при $\eta = \tilde{R}_a$ получается $\omega = -\infty$. Напомним, что при выводе логарифмической формулы распределения скорости в пограничном слое предполагается, что непосредственно около стенки имеется ламинарный подслой, напряжение трения по толщине пограничного слоя не изменяется и путь смещения прямо пропорционален расстоянию от стенки. Принимая распределение скорости в ламинарном подслое линейным:

$$\tau_w = \mu_w \frac{\omega_{\text{л}}}{\delta_{y\text{л}}}, \quad (36)$$

беря упомянутое выше условие на границе ламинарного подслоя и турбулентного ядра течения

$$\frac{\omega_{\text{л}} \delta_{y\text{л}} \rho_{\text{л}}}{\mu_{\text{л}}} = \alpha^2, \quad (37)$$

где $\alpha = 11,5$, и воспользовавшись уравнением (33), получим:

$$\frac{\omega_{\text{л}}}{W} = \frac{\alpha}{\xi}, \quad (38)$$

$$\delta_{y\text{л}} = \frac{\alpha \xi \mu_{\text{л}}}{W}.$$

Последнее выражение удобнее представить в таком виде:

$$\delta_{y\text{л}} = 2R_a \frac{\alpha \xi}{\Lambda R_{00}} \left(\frac{T_{\text{л}}}{T_{00}} \right)^{1+n} \frac{P_{00}}{P}, \quad (39)$$

где

$$\mathbf{R}_{00} = \frac{2R_a \rho_{00} \sqrt{2gJc_p T_{00}}}{\mu_{00}} \quad (40)$$

есть обобщённое число Рейнольдса и

$$\mu_{\text{л}} = \mu_{00} \left(\frac{T_{\text{л}}}{T_{00}} \right)^n, \quad \rho_{\text{л}} = \rho_{00} \frac{p}{p_{00}} \frac{T_{00}}{T_{\text{л}}}.$$

С другой стороны, в случае логарифмического профиля скоростей (32), допуская, что при $\eta = \tilde{R}_a - \delta_{\text{л}}$ имеет место равенство $\omega = \omega_{\text{л}}$, и воспользовавшись (38), получим:

$$\delta_{\text{л}} =: \delta e^{x\xi \left(\frac{\alpha}{\xi} - 1 \right)}, \quad (41)$$

Связь между $\delta_{\text{ул}}$ и $\delta_{\text{л}}$ найдётся из равенства

$$\int_{R_a - \delta_{\text{ул}}}^{R_a} R dR = \int_{\tilde{R}_a - \delta_{\text{л}}}^{\tilde{R}_a} \frac{\rho_{00}}{\rho} \eta d\eta.$$

Заменяя $\frac{\rho_{00}}{\rho}$ согласно (26) и (27) на $\frac{\rho_{00}}{p} (1 - \Lambda^2)$ и пренебрегая в пределах ламинарного подслоя значением $\Lambda_{\text{л}}^2$ по сравнению с единицей¹⁾, получим:

$$-2R_a \delta_{\text{ул}} + \delta_{\text{ул}}^2 = \frac{\rho_{00}}{p} (-2\tilde{R}_a \delta_{\text{л}} + \delta_{\text{л}}^2).$$

Отбрасывая $\delta_{\text{ул}}^2$ и $\delta_{\text{л}}^2$ как малые второго порядка, имеем:

$$R_a \delta_{\text{ул}} = \frac{\rho_{00}}{p} \tilde{R}_a \delta_{\text{л}}.$$

Подставив сюда значение $\delta_{\text{ул}}$ и $\delta_{\text{л}}$ из (39) и (41), после несложных выкладок приходим (при $x = 0,4$ и $\alpha = 11,5$) к уравнению

$$\tilde{R}_a \delta = 0,576 \frac{x\xi e^{x\xi}}{\Lambda \mathbf{R}_{00}}, \quad (42)$$

образующему вместе с уравнениями (26), (27), (28) и (29) замкнутую систему пяти уравнений с пятью неизвестными.

Отметим ещё раз, что, зная ξ , можно определить напряжение трения на стенке τ_w по формуле (33), из которой, пренебрегая

¹⁾ Величина $\frac{\omega_{\text{л}}}{W} = \frac{\alpha}{\xi}$ обычно колеблется в пределах 0,4–0,5, поэтому $\Lambda_{\text{л}}^2 < 0,25$. При линейном распределении скорости по подслою член, учитывающий $\Lambda_{\text{л}}^2$, составляет по сравнению с единицей для $M = \infty$ ($\Lambda = 1$) ~ 8%, а для $M = 3$ ($\Lambda = 0,8$) ~ 5%.

членом с Λ_a^2 , т. е., полагая $T_{\text{л}} = T_w = T_{00}$, имеем:

$$\tau_w = \frac{W^2}{\xi^2} \rho_{00} \frac{p}{p_{00}}. \quad (43)$$

Таким образом, мы получили формулы для расчёта течения в трубе как при ламинарном, так и при турбулентном режимах. Ниже мы приводим полное решение для этих обоих режимов в основном участке трубы (когда пограничный слой заполняет всё сечение трубы). Для начального участка мы ограничимся лишь некоторыми качественными соображениями ввиду того, что относительная длина начального участка в ряде важных задач невелика, а решение для начального участка получается очень сложным¹⁾.

Остановимся сначала на ламинарном режиме течения. В основном участке трубы $\delta_y = R_a$ и, следовательно, $\delta = \tilde{R}_a$. Поэтому профиль скорости (31) можно представить следующим образом:

$$\frac{w}{W} = 2 \frac{\delta - \eta}{\delta} - \left(\frac{\delta - \eta}{\delta} \right)^2.$$

Уравнение расхода (29) при этом профиле после интегрирования приведётся к такому виду:

$$q(\Lambda_a) = 0,5 \bar{\delta}^2 \Lambda.$$

Здесь использовано условие (30), согласно которому $\eta d\eta = \frac{p}{\rho_{00}} R dR$; через Λ_a обозначена безразмерная скорость на оси трубы.

Уравнение (34), связывающее δ_y с δ , запишется так:

$$1 = \frac{p_{00}}{p} \left(1 - \frac{\Lambda^2}{3} \right) \bar{\delta}^2.$$

Это равенство после исключения $\bar{\delta}^2$ на основании предыдущего равенства послужит для определения статического давления в функции безразмерной скорости на оси трубы:

$$\frac{p}{p_{00}} = 2q(\Lambda_a) \frac{1 - \frac{\Lambda^2}{3}}{\Lambda}. \quad (44)$$

Уравнение импульсов (28) после вычисления интеграла, исключения $\bar{\delta}^2$ и подстановки значения $\frac{p}{p_{00}}$ согласно (44) запишется в следующем виде:

$$\frac{q(\Lambda_a)}{k} \frac{d}{dx} \left(\frac{k-1 + \frac{k+1}{3} \Lambda^2}{\Lambda} \right) = - \frac{2\tau_w}{\rho_{00}^2 g J c_p T_{00}}.$$

¹⁾ См. Жестков Б. А., О ламинарном течении вязкого газа в плоском канале с теплоизолированными стенками. М., 1947.

Правая часть этого уравнения в основном участке трубы равна:

$$\frac{\tau_w}{\rho_{00} 2g J c_p T_{00}} = -\mu_w \frac{2WR_a}{\delta^2} \frac{\rho_w}{\rho_{00}} \frac{1}{\rho_{00} 2g J c_p T_{00}} = -\frac{4\Lambda^2}{R_{00}} \frac{p}{\rho_{00}} \frac{1}{2g(\Lambda_a)},$$

где

$$R_{00} = \frac{2R_a \rho_{00} \sqrt{2g J c_p T_{00}}}{\mu_{00}}.$$

Исключая отсюда $\frac{p}{\rho_{00}}$ с помощью (44) и подставляя значение

$\frac{\tau_w}{\rho_{00} 2g J c_p T_{00}}$ в уравнение импульсов, имеем:

$$\frac{d}{d\bar{x}} \left(\frac{k-1 + \frac{k+1}{3} \Lambda^2}{\Lambda} \right) = \frac{8k}{R_{00} g(\Lambda_a)} \Lambda \left(1 - \frac{\Lambda^2}{3} \right), \quad (45)$$

но

$$\frac{d}{d\bar{x}} = \frac{d}{d\Lambda} \cdot \frac{d\Lambda}{d\bar{x}},$$

поэтому уравнение (45) можно переписать в таком виде:

$$\frac{1}{\Lambda \left(1 - \frac{\Lambda^2}{3} \right)} \frac{d}{d\Lambda} \left(\frac{k-1 + \frac{k+1}{3} \Lambda^2}{\Lambda} \right) d\Lambda = \frac{8k}{R_{00} g(\Lambda_a)} d\bar{x},$$

откуда

$$\bar{x} - \bar{x}_\delta = \frac{R_{00} g(\Lambda_a)}{8k} \int_{\Lambda_\delta}^{\Lambda} \frac{k-1 - \frac{k+1}{3} \Lambda^2}{\Lambda^3 \left(1 - \frac{\Lambda^2}{3} \right)} d\Lambda, \quad (46)$$

где \bar{x}_δ и Λ_δ — значения \bar{x} и Λ в конце начального участка. При возрастании значения \bar{x} скорость Λ может возрастать или

убывать; при $\Lambda < \sqrt{3 \frac{k-1}{k+1}}$ величина Λ возрастает, а при

$\Lambda > \sqrt{3 \frac{k-1}{k+1}}$ убывает, стремясь в обоих случаях к пределу:

$$\Lambda_{кр} = \sqrt{3 \frac{k-1}{k+1}}.$$

Введём в рассмотрение среднюю массовую скорость:

$$\omega_{ср} = \frac{\int_0^{R_a} \rho \omega^2 R dR}{\int_0^{R_a} \rho \omega R dR}.$$

Вычисления для ламинарного режима дают:

$$\Lambda_{\text{кр}} = \frac{2}{3} \Lambda,$$

отсюда при $k = 1,4$

$$\Lambda_{\text{кр кр}} = \frac{2}{3} \sqrt{3 \frac{k-1}{k+1}} = 0,47, \quad \mathbf{M}_{\text{кр кр}} = 1,19,$$

т. е. среднемассовая скорость в критическом сечении трубы немного отличается от скорости звука, что можно объяснить приближённостью решения. Взяв интеграл в формуле (46), получим:

$$\bar{x} - \bar{x}_\delta = \frac{\mathbf{R}_{00} q(\Lambda_a)}{8k} \left[\frac{k-1}{2} \left(\frac{1}{\Lambda_\delta^2} - \frac{1}{\Lambda^2} \right) - \frac{1}{3} \ln \frac{\Lambda^2 \left(1 - \frac{\Lambda_\delta^2}{3} \right)}{\Lambda_\delta^2 \left(1 - \frac{\Lambda^2}{3} \right)} \right]. \quad (47)$$

Перейдём теперь к рассмотрению турбулентного режима течения. Профиль скоростей (32) в основном участке трубы:

$$\frac{w}{W} = 1 + \frac{1}{\alpha \xi} \ln \frac{\delta - \eta}{\delta},$$

поэтому уравнения (29) и (34) после выкладок запишутся в таком виде:

$$q(\Lambda_a) = \bar{\delta}^2 \Lambda \left(1 - \frac{1,5}{\alpha \xi} \right), \quad (48)$$

$$1 = \frac{p_{00}}{p} \bar{\delta}^2 \left[1 - \Lambda^2 \left(1 - \frac{3}{\alpha \xi} + \frac{3,5}{\alpha^2 \xi^2} \right) \right].$$

Если из последнего уравнения исключить $\bar{\delta}^2$, то оно может служить для определения статического давления:

$$\frac{p}{p_{00}} = q(\Lambda_a) \frac{1 - \Lambda^2 \left(1 - \frac{3}{\alpha \xi} + \frac{3,5}{\alpha^2 \xi^2} \right)}{\Lambda \left(1 - \frac{1,5}{\alpha \xi} \right)}. \quad (49)$$

Дополнительное уравнение (42) в основном участке примет вид

$$\bar{\delta}^2 = 0,576 \frac{\alpha \xi e^{\alpha \xi}}{\mathbf{R}_{00} \Lambda}.$$

Исключив $\bar{\delta}^2$ с помощью (48), получим:

$$(\alpha \xi - 1,5) e^{\alpha \xi} = \frac{\mathbf{R}_{00} q(\Lambda_a)}{0,576}. \quad (50)$$

Отсюда следует, что величина ξ в основном участке трубы постоянна и определяется значением числа \mathbf{R}_{00} и безразмерным расходом $q(\Lambda_a)$.

Удобнее всего значение $x\xi$ рассчитывать методом последовательных приближений:

$$x\xi_i = x\xi_0 - \ln(x\xi_{i-1} - 1,5),$$

где

$$x\xi_0 = \ln \frac{R_{00} q(\Lambda_0)}{0,576}.$$

При расчётах обычно бывает достаточно второго или третьего приближения. Уравнение импульсов (28) после вычисления интеграла, исключения $\bar{\delta}^2$ с помощью (48) и подстановки $\frac{p}{P_{00}}$ согласно (49) запишется в таком виде:

$$\frac{q(\Lambda_0)}{2k \left(1 - \frac{1,5}{x\xi}\right)} \frac{d}{dx} \left[\frac{k-1 + (k+1) \left(1 - \frac{3}{x\xi} + \frac{3,5}{x^2\xi^2}\right) \Lambda^2}{\Lambda} \right] = - \frac{2\tau_w}{\rho_{00} 2gJc_p T_{00}}, \quad (51)$$

но правая часть уравнения согласно (43) имеет вид:

$$\frac{\tau_w}{\rho_{00} 2gJc_p T_{00}} = \frac{\Lambda^2}{\xi^2} \frac{p}{P_{00}} = \frac{q(\Lambda_0)}{\xi^2} \frac{\Lambda \left[1 - \Lambda^2 \left(1 - \frac{3}{x\xi} + \frac{3,5}{x^2\xi^2}\right) \right]}{1 - \frac{1,5}{x\xi}}.$$

Поэтому уравнение (51) можно переписать так:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{k-1 + (k+1) \left(1 - \frac{3}{x\xi} + \frac{3,5}{x^2\xi^2}\right) \Lambda^2}{\Lambda} \right] = - \frac{4k}{\xi^2} \Lambda \left[1 - \Lambda^2 \left(1 - \frac{3}{x\xi} + \frac{3,5}{x^2\xi^2}\right) \right].$$

Так как

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\Lambda} \frac{d\Lambda}{dx},$$

то после несложных выкладок получим:

$$\bar{x} - x_\delta = \frac{k-1}{4k} \xi^2 \int_{\Lambda_\delta}^{\Lambda} \frac{1 - \frac{k+1}{k-1} \left(1 - \frac{3}{x\xi} + \frac{3,5}{x^2\xi^2}\right) \Lambda^2}{\Lambda^3 \left[1 - \Lambda^2 \left(1 - \frac{3}{x\xi} + \frac{3,5}{x^2\xi^2}\right) \right]} d\Lambda. \quad (52)$$

Как и в предыдущем случае, если

$$\Lambda < \sqrt{\frac{k-1}{k+1} \frac{1}{1 - \frac{3}{x\xi} + \frac{3,5}{x^2\xi^2}}},$$

то скорость вдоль трубы возрастает, а если

$$\Lambda > \sqrt{\frac{k-1}{k+1} \frac{1}{1 - \frac{3}{x\xi} + \frac{3,5}{x^2\xi^2}}},$$

то убывает.

Значение

$$\Lambda_{кр} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1} \frac{1}{1 - \frac{3}{\alpha\xi} + \frac{3,5}{\alpha^2\xi^2}}}$$

называется критической скоростью. Отметим, что среднemasовая скорость

$$\omega_{ср} = W \frac{1 - \frac{3}{\alpha\xi} + \frac{3,5}{\alpha^2\xi^2}}{1 - \frac{1,5}{\alpha\xi}}$$

в критическом сечении трубы практически равна скорости звука ($M_{ср кр} = 1$), так как

$$\Lambda_{ср кр} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{\alpha\xi} + \frac{3,5}{\alpha^2\xi^2}}}{1 - \frac{1,5}{\alpha\xi}}} \approx \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} = 0,408.$$

Плавный переход через это значение скорости невозможен. Если длина трубы больше критической, то, как и в случае одномерного течения, рассмотренного в § 1 главы V, при начальной дозвуковой скорости изменятся начальные условия (уменьшается начальная скорость), а при начальной сверхзвуковой скорости в трубе возникают скачки уплотнения. Взяв интеграл в формуле (52), получим:

$$\begin{aligned} x - x_0 = \frac{\xi^2}{4k} \left\{ k-1 \left(\frac{1}{\Lambda_0^2} - \frac{1}{\Lambda^2} \right) - \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{3}{\alpha\xi} + \frac{3,5}{\alpha^2\xi^2} \right) \ln \frac{\Lambda^2 \left[1 - \Lambda_0^2 \left(1 - \frac{3}{\alpha\xi} + \frac{3,5}{\alpha^2\xi^2} \right) \right]}{\Lambda_0^2 \left[1 - \Lambda^2 \left(1 - \frac{3}{\alpha\xi} + \frac{3,5}{\alpha^2\xi^2} \right) \right]} \right\}. \end{aligned} \quad (53)$$

Таким образом, зная параметры газа перед соплом и начальную безразмерную скорость, можно определить значения R_{00} и $q(\Lambda_a)$ и затем по формуле (50) рассчитать значение $\alpha\xi$. Безразмерную скорость Λ_0 в начале основного участка можно найти из условия равенства статических давлений в месте перехода от начального к основному участку:

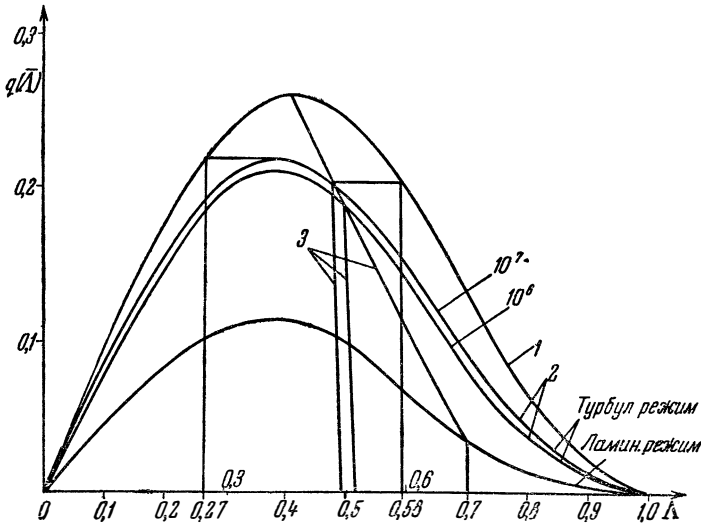
$$\frac{P}{P_{00}} = (1 - \Lambda_0^2)^{\frac{k}{k-1}} = \frac{q(\Lambda_a)}{1 - \frac{1,5}{\alpha\xi}} \frac{1 - \Lambda_0^2 \left(1 - \frac{3}{\alpha\xi} + \frac{3,5}{\alpha^2\xi^2} \right)}{\Lambda_0^2}. \quad (54)$$

Определим теперь область изменения скорости в начальном и

основном участках трубы. Для этого построим (фиг. 94) кривую 1

$$q(\Lambda) = \Lambda(1 - \Lambda^2)^{\frac{1}{k-1}} \quad \text{при } 0 < \Lambda < 1,$$

с помощью которой по заданной начальной безразмерной скорости Λ_a находим безразмерный расход $q(\Lambda_a)$ и кривую 2, соответ-



Фиг. 94. Изменение безразмерного расхода в зависимости от безразмерной скорости: 1—при равномерной скорости в начале трубы; 2—при полностью развившемся пограничным слое в начале основного участка течения; 3—при критических скоростях.

ствующую безразмерному расходу в начале основного участка. Уравнение этой кривой для турбулентного режима течения на основании (54):

$$\frac{q(\Lambda_a)}{q(\Lambda)} = \frac{\left(1 - \frac{1,5}{\alpha\xi}\right) (1 - \Lambda^2)}{1 - \Lambda^2 \left(1 - \frac{3}{\alpha\xi} + \frac{3,5}{\alpha^2\xi^2}\right)}. \quad (55)$$

Задаваясь величинами $q(\Lambda_a)$ и R_{00} , находим по формуле (50) значение $\alpha\xi$ и по формуле (55) значение Λ , при котором происходит смыкание пограничного слоя на оси трубы. На фиг. 94 приведены две такие кривые для двух значений числа Рейнольдса: $R_{00} = 10^6$ и $R_{00} = 10^7$. Область изменения Λ в начальном участке трубы заключена между первой и второй кривыми, а в основном участке — внутри второй кривой. Мы видим, что при начальных околосвуковых скоростях в трубе получается лишь начальный участок течения. Увеличение начальной до-

звуковой скорости или уменьшение начальной сверхзвуковой скорости возможно лишь до такого значения $\Lambda = \Lambda_{кр}$, при котором средняя по сечению скорость равна звуковой. Значение критической скорости в основном и начальном участках трубы определяется с помощью кривой 3, нанесённой на фиг. 94. На этой же фигуре нанесены расчётные кривые для ламинарного режима течения, которые напоминают соответствующие кривые турбулентного режима.

Проанализируем подробнее возможные случаи течения, например, для турбулентного режима при $R_{00} = 10^7$.

1. При начальных дозвуковых скоростях, заключённых в интервале

$$0 < \Lambda_a < 0,27 \quad (0 < M_a < 0,63),$$

двигаясь вправо от кривой 1 по линии постоянного значения

$$q(\Lambda_a) = \Lambda_a \left(1 - \Lambda_a^2\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

(скорость вдоль трубы возрастает), будем находиться сначала в начальном, затем после прохождения кривой 2 в основном участке трубы, причём в последнем, если наперёд не ограничивать длину трубы, дойдём до критического сечения примерно при $\Lambda_{кр} = 0,408$ (см. кривую 3).

2. При начальных дозвуковых скоростях

$$0,27 < \Lambda_a < 0,408 \quad (0,63 < M_a < 1)$$

пограничный слой не может заполнить всего сечения трубы; скорость в ядре течения возрастает от значения $\Lambda = \Lambda_a$ до некоторого максимального значения $\Lambda = \Lambda_{кр}$ (до кривой 3).

3. При начальных сверхзвуковых скоростях¹⁾

$$0,408 < \Lambda_a < 0,59 \quad (1 < M_a < 1,64)$$

пограничный слой не может заполнить всего сечения трубы. Скорость в ядре течения уменьшается от $\Lambda = \Lambda_a$ до некоторого минимального значения $\Lambda = \Lambda_{кр}$ (до кривой 3).

4. При начальных сверхзвуковых скоростях

$$0,59 < \Lambda_a < 1 \quad (1,64 < M_a < \infty)$$

скорость на оси (или в ядре течения) убывает; до пересечения с кривой 2 имеет место начальный участок, затем основной, причём в последнем на некотором расстоянии от начала трубы скорость становится равной критической (на линии 3).

Отметим, что во всех случаях число M , соответствующее скорости на оси при критическом режиме, больше единицы. Это, однако, не противоречит результатам решения для одно-

¹⁾ Здесь рассматривается только непрерывное торможение сверхзвукового потока в трубе.

мерного потока (§ 1 гл. V), так как если средняя скорость равна критической ($M_{cp} = 1$), то наличие малых скоростей у стенки с необходимостью влечёт за собой появление местной сверхзвуковой области около оси трубы.

Наглядное представление о характере течения газа по трубе можно получить из анализа уравнения неразрывности. Разобьём трубу на элементарные кольца столь малой толщины ΔR , чтобы в каждом из них можно было скорость считать постоянной. Расход газа через элементарное кольцо равен $2\pi R \Delta R \omega_r$, а соответствующий удельный безразмерный расход (делим на величину $\rho_{00} \sqrt{2gJc_p T_{00}} R dR$):

$$q(\Lambda) = \frac{\rho}{\rho_{00}} \Lambda.$$

Вспоминая, что при постоянстве температуры торможения в поперечном сечении потока

$$\frac{\rho}{\rho_{00}} = \frac{p}{p_{00}} \frac{T_{00}}{T} = \frac{p}{p_{00}} \frac{1}{1-\Lambda^2}$$

преобразуем выражение $q(\Lambda)$ в следующее:

$$q(\Lambda) = \frac{p}{p_{00}} \frac{\Lambda}{1-\Lambda^2}.$$

Поэтому

$$\frac{q(\Lambda)}{q(\Lambda_0)} = \frac{\Lambda}{\Lambda_0} \frac{1-\Lambda_0^2}{1-\Lambda^2} < 1,$$

где $q(\Lambda_0)$ — удельный безразмерный расход на оси трубы. Ясно, что чем меньше Λ (чем ближе элементарное кольцо к стенке трубы), тем сильнее это неравенство, а следовательно, пропускная способность элементарного кольца в данном сечении тем больше, чем больше в этом кольце скорость.

С другой стороны, пропускная способность элементарного кольца вблизи оси трубы существенно зависит от величины Λ_0 , так как в начальном участке пропускная способность (удельный безразмерный расход) определяется кривой 1 фиг. 94, согласно которой при увеличении Λ_0 от нуля до 0,408 величина $q(\Lambda_0)$ возрастает, а при дальнейшем увеличении Λ_0 от 0,408 до единицы (сверхзвуковые скорости) — уменьшается.

При начальных дозвуковых скоростях условие сохранения первоначального расхода при возрастании безразмерной скорости примерно до $\Lambda_0 = 0,408^1$) способствует нарастанию пограничного слоя, ибо в этом интервале изменения Λ_0 удель-

¹⁾ При начальных дозвуковых скоростях статическое давление вдоль трубы уменьшается, что интенсифицирует описанный процесс и приводит к расширению ядра течения при скоростях несколько меньше звуковой скорости.

ный безразмерный расход в ядре течения возрастает. Дальнейшее увеличение Λ_0 уменьшает пропускную способность ядра течения, так что сохранение начального расхода делается возможным лишь при расширении области ядра течения, что осуществляется за счёт уменьшения толщины пограничного слоя.

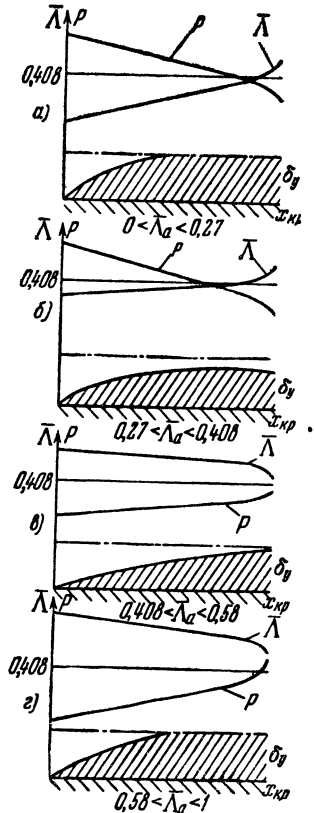
Таким образом, условие постоянства расхода при переходе через скорость звука в местной зоне и связанное с этим уменьшение местной пропускной способности (в ядре течения) вызывают всё более быстрое увеличение скорости Λ_0 , расширение сверхзвуковой зоны, уменьшение толщины пограничного слоя (если слой не сомкнулся) и в соответствии с этим ещё более быстрое падение давления. Совокупность этих обстоятельств и приводит к наступлению кризиса в том сечении трубы, где

$$\frac{d\Lambda_0}{dx} = +\infty \text{ и } \frac{dp}{dx} = -\infty,$$

т. е. к *запиранию* трубы.

В этом сечении средняя скорость примерно (из-за приближённости решения) равна скорости звука, т. е. поток в трубе ведёт себя в среднем как элементарная струйка, для которой переход через скорость звука при постоянном сечении трубы невозможен.

При начальных сверхзвуковых скоростях уменьшение скорости в ядре течения (сверхзвуковое течение предполагается непрерывным) увеличивает пропускную способность элементарных колец, находящихся в ядре течения, что способствует росту пограничного слоя, появлению местной зоны (около стенки) с дозвуковыми скоростями и восстанавливает давление. Эти процессы по мере развития дозвуковой зоны ускоряются, что и приводит к наступлению кризиса в том сечении трубы, где $\frac{d\Lambda_0}{dx} = -\infty$ и $\frac{dp}{dx} = \infty$, а среднемассовая по сечению скорость примерно равна звуковой. Схематическая картина изменения по длине трубы параметров газа и толщины пограничного слоя при турбулентном режиме показана на фиг. 95. Для ламинарного режима течения получается качественно такая же картина — лишь



Фиг. 95. Качественная картина течения в трубе при различных начальных безразмерных скоростях.

изменяться интервалы начальных скоростей и критические длины трубы.

Пример 1. Рассчитаем критическую длину трубы при начальных значениях $R = 4,2 \cdot 10^5$ и $M_{cp} = 0,33$ для турбулентного и ламинарного режимов течения.

При $k = 1,4$ по формуле $\Lambda = \frac{M}{\sqrt{5 + M^2}}$ находим¹⁾ $\Lambda_{cp} = \frac{0,33}{\sqrt{5 + 0,33^2}} = 0,146$. По формуле

$$R_{00g}(\Lambda_a) = \frac{R}{(1 - \Lambda_{cp}^2)^{0,75}} = \frac{4,2 \cdot 10^5}{0,985} = 4,26 \cdot 10^5.$$

По формуле

$$\alpha \xi_i = \ln \frac{R_{00g}(\Lambda_a)}{0,576} - \ln(\alpha \xi_{i-1} - 1,5)$$

последовательно получаем:

$$\alpha \xi_0 = \ln \frac{4,26 \cdot 10^5}{0,576} = 13,50, \quad \alpha \xi_1 = 13,50 - \ln 12 = 11,00;$$

$$\alpha \xi_2 = 13,50 - \ln 9,5 = 11,25, \quad \alpha \xi_3 = 13,50 - \ln 9,75 = 11,23.$$

По формуле

$$\Lambda = \Lambda_{cp} \frac{1 - \frac{1,5}{\alpha \xi}}{1 - \frac{3}{\alpha \xi} + \frac{3,5}{\alpha^2 \xi^2}}$$

находим начальную скорость на оси трубы

$$\Lambda_a = 0,146 \frac{0,866}{0,760} = 0,167.$$

По формуле

$$\Lambda_{кр} = \frac{0,408}{\sqrt{1 - \frac{3}{\alpha \xi} + \frac{3,5}{\alpha^2 \xi^2}}}$$

находим критическую скорость на оси трубы: $\Lambda_{кр} = 0,471$.
Наконец, по формуле

$$\bar{x}_{кр} = \frac{\alpha^2 \xi^2}{5,6 \alpha^2} \left\{ 0,2 \left(\frac{1}{\Lambda_a^2} - \frac{1}{\Lambda_{кр}^2} \right) - \left(1 - \frac{3}{\alpha \xi} + \frac{3,5}{\alpha^2 \xi^2} \right) \ln \frac{\Lambda_{кр}^2 \left[1 - \Lambda_a^2 \left(1 - \frac{3}{\alpha \xi} + \frac{3,5}{\alpha^2 \xi^2} \right) \right]}{\Lambda_a^2 \left[1 - \Lambda_{кр}^2 \left(1 - \frac{3}{\alpha \xi} + \frac{3,5}{\alpha^2 \xi^2} \right) \right]} \right\}$$

¹⁾ В самом деле, $\Lambda = \frac{\omega}{\omega_{max}} = \frac{\omega}{a} \frac{a}{a_0} \frac{a_0}{\omega_{max}} = M \sqrt{\frac{1}{\frac{2}{k-1} + M^2}}$.

получим безразмерную критическую длину трубы для турбулентного режима:

$$\bar{x}_{кр} = \frac{x}{R_a} = 140 \left\{ 0,2 (36,0 - 4,5) - 0,760 \ln \frac{36 (1 - 0,76 \cdot 0,028)}{4,5 (1 - 0,76 \cdot 0,222)} \right\} = 646.$$

Для ламинарного режима: $\Lambda_a = 1,5 \Lambda_{кр} = 0,219$; $\Lambda_{кр} = 0,701$ и критическая длина трубы

$$\begin{aligned} \bar{x}_{кр} &= \frac{x_{кр}}{R_a} = \\ &= \frac{R_{00} g (\Lambda_a)}{11,2} \left[0,2 \left(\frac{1}{\Lambda_a^2} - \frac{1}{\Lambda_{кр}^2} \right) - \frac{1}{3} \ln \frac{\Lambda_{кр}^2 \left(1 - \frac{\Lambda_a^2}{3} \right)}{\Lambda_a^2 \left(1 - \frac{\Lambda_{кр}^2}{3} \right)} \right] = 1,11 \cdot 10^5. \end{aligned}$$

Таким образом, при ламинарном режиме течения критическая длина трубы в 170 раз больше, чем при турбулентном режиме.

Отметим, что для выбранных условий экспериментально определённая критическая длина трубы равнялась $\bar{x}_{кр} = 640$, т. е. 320 калибров¹⁾. Это же значение мы получили теоретическим путём при турбулентном режиме течения.

Остановимся теперь на определении коэффициента сопротивления. Гидравлический коэффициент сопротивления связан с напряжением трения соотношением:

$$\zeta = \frac{8\tau_w}{(\omega\rho^2)_{ср}}, \tag{56}$$

причём в случае течения газа в трубе нужно брать среднее по сечению значение скоростного напора. Ввиду постоянства расхода вдоль трубы средней скоростной напор определим так:

$$(\rho\omega^2)_{ср} = (\rho\omega_{ср}) \omega_{ср} = q (\Lambda_a) \rho_{00} \sqrt{2gJc_p T_{00}} \omega_{ср}, \tag{57}$$

где среднемассовая скорость:

$$\omega_{ср} = \frac{\int_0^{R_a} \rho\omega^2 R dR}{\int_0^{R_a} \rho\omega R dR}.$$

Для ламинарного режима

$$\omega_{ср} = \frac{2}{3} W, \quad \tau_w = \frac{4}{R_{00}} \left(1 - \frac{\Lambda^2}{3} \right) \rho_{00} 2gJc_p T_{00},$$

¹⁾ Keenan I. H. and Neuman E. P., Measurements of Friction in a Pipe for Subsonic and Supersonic Flow of Air. Journal of Applied Mechanics. June, 1946, № 2.

для турбулентного режима

$$\omega_{\text{ср}} = W \frac{1 - \frac{3}{\alpha\xi} + \frac{3,5}{\alpha^2\xi^2}}{1 - \frac{1,5}{\alpha\xi}},$$

$$\tau_w = \frac{q(\Lambda_a)}{\xi^2 \left(1 - \frac{1,5}{\alpha\xi}\right)} \Lambda \left[1 - \Lambda^2 \left(1 - \frac{3}{\alpha\xi} + \frac{3,5}{\alpha^2\xi^2} \right) \right] \rho_{00} 2gJc_p T_{00}.$$

Поэтому коэффициент сопротивления для ламинарного режима течения газа в трубе

$$\zeta_{\text{лн}} = \frac{64}{\mathbf{R}_{00}} \frac{1 - \frac{\Lambda^2}{3}}{2 \Lambda}, \quad (58)$$

для турбулентного режима

$$\zeta_{\text{т}} = \frac{8}{\xi^2} \frac{1 - \Lambda^2 \left(1 - \frac{3}{\alpha\xi} + \frac{3,5}{\alpha^2\xi^2} \right)}{1 - \frac{3}{\alpha\xi} + \frac{3,5}{\alpha^2\xi^2}}, \quad (59)$$

где значение ξ определяется из уравнения (50) по заданным в сосуде параметрам газа и геометрическим размерам сопла:

$$(\alpha\xi - 1,5) e^{\alpha\xi} = \frac{\mathbf{R}_{00} q(\Lambda_a)}{0,576}.$$

Найдём сначала коэффициент сопротивления для несжимаемой жидкости, т. е. в случае

$$\rho = \rho_{00} = \text{const.}$$

Для ламинарного режима из (58) получим:

$$\zeta_{\text{лн}} = \frac{64}{\mathbf{R}_{00}} \frac{1}{\Lambda_{\text{ср}}}.$$

Так как в данном случае

$$\mathbf{R}_{00} \Lambda_{\text{ср}} = \frac{2R_a \rho \sqrt{2gJc_p T_{00}} \Lambda_{\text{ср}}}{\mu} = \frac{2R_a \rho \omega_{\text{ср}}}{\mu} = \mathbf{R},$$

то окончательно

$$\zeta_{\text{лн}} = \frac{64}{\mathbf{R}}. \quad (60)$$

Эта же зависимость получается при точном решении задачи о течении несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе. Теоретическая формула (60) хорошо подтверждается экспериментами при значениях числа \mathbf{R} , соответствующих ламинарному режиму течения. Это видно из графика фиг. 96, на которой

сплошной линией нанесена кривая (60), а кружками — экспериментальные данные. Следует напомнить, что ламинарный режим течения в трубах имеет место при значениях $R \leq 2000$; при больших значениях числа R обычно наблюдается турбулентное течение. Для турбулентного режима течения

$$\zeta_{\text{тн}} = \frac{8}{\xi^2} \frac{1}{1 - \frac{3}{\chi\xi} + \frac{3,5}{\chi^2\xi^2}} \approx \frac{8\chi^2}{(\chi\xi - 1,5)^2} \quad (61)$$

Так как в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} R_{00} q (\Lambda_a) &= \\ &= \frac{2R_{a\rho} \sqrt{2gJ_{cp}T_{00}} \Lambda_a}{\mu} = \\ &= \frac{2R_{a\rho} W_a}{\mu} = R, \end{aligned}$$

то из (50) получим:

$$\chi\xi = \ln \frac{R}{\chi\xi - 1,5} - \ln 0,576.$$

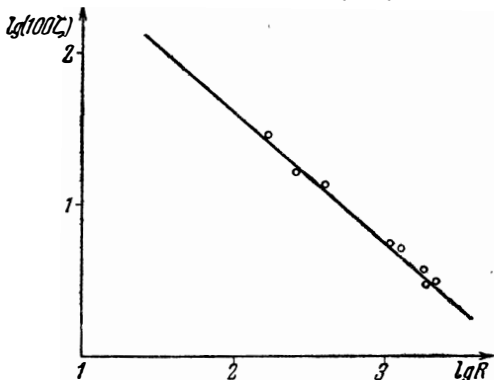
Подставляя в это выражение значение $\chi\xi$ из (61), найдём:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\zeta_{\text{тн}}}} &= \frac{2,3}{\sqrt{8\chi^2}} \lg R \sqrt{\zeta_{\text{тн}}} - \\ &- \frac{1,5}{\sqrt{8\chi^2}} - \frac{2,3}{\sqrt{8\chi^2}} \lg 0,576 - \\ &- \frac{2,3}{\sqrt{8\chi^2}} \lg \sqrt{8\chi^2}. \end{aligned}$$

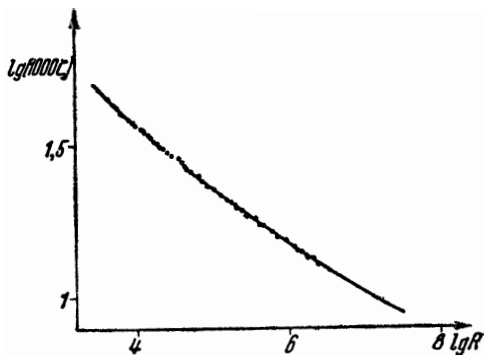
Отсюда при $\chi = 0,4$ приходим к известной формуле¹⁾ для турбулентного течения в несжимаемой жидкости

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta_{\text{тн}}}} = 2,01 \lg R \sqrt{\zeta_{\text{тн}}} - 0,84. \quad (62)$$

Эта полуэмпирическая формула хорошо подтверждена экспериментом в широком диапазоне значений числа R (фиг. 97).



Фиг. 96. Изменение коэффициента сопротивления в зависимости от числа R при ламинарном режиме течения для несжимаемой жидкости.



Фиг. 97. Изменение коэффициента сопротивления в зависимости от числа R при турбулентном режиме для несжимаемой жидкости.

¹⁾ «Проблемы турбулентности», стр. 28, ОНТИ, 1936.

Установим теперь связь между значениями коэффициентов сопротивления при больших скоростях течения газа и в несжимаемой жидкости. Из (59) и (61) имеем:

$$\zeta_T = \zeta_{TH} \left[1 - \Lambda^2 \left(1 - \frac{3}{\alpha \xi} + \frac{3,5}{\alpha^2 \xi^2} \right) \right]. \quad (63)$$

Замечая, что

$$\Lambda_{cp} = \Lambda \left(1 - \frac{3}{\alpha \xi} + \frac{3,5}{\alpha^2 \xi^2} \right),$$

найдем:

$$\zeta_T = \zeta_{TH} (1 - \Lambda_{cp}^2). \quad (64)$$

Таким образом, коэффициент сопротивления зависит не только от числа R , но и от числа M . Так, например, при $M_{cp} = 3$ ($\Lambda_{cp} = 0,8$):

$$\frac{\zeta_T}{\zeta_{TH}} = 0,36,$$

т. е. коэффициент сопротивления почти в три раза меньше, чем в случае несжимаемой жидкости. При пользовании этой формулой нужно для вычисления ζ_{TH} брать число R из условия

$$R = R_{00} q (\Lambda_a).$$

Отметим, что при течении газа с большими скоростями за счёт изменения коэффициента вязкости

Фиг. 98. Изменение $\alpha \xi$ в зависимости от коэффициента сопротивления, ζ_{TH} для несжимаемой жидкости.

значение числа R изменяется вдоль трубы. Выразим число

$R = \frac{2R_a(\rho\omega)_{cp}}{\mu_{cp}}$ через параметры газа в сосуде и местную скорость:

$$R = \frac{2R_a g (\Lambda_a) \rho_{00} \sqrt{2gJc_p T_{00}}}{\mu_{00}} \frac{\mu_{00}}{\mu_{cp}} = R_{00} q (\Lambda_a) (1 - \Lambda_{cp}^2)^n.$$

Отсюда

$$R_{00} q (\Lambda_a) = \frac{R}{(1 - \Lambda_{cp}^2)^n}. \quad (65)$$

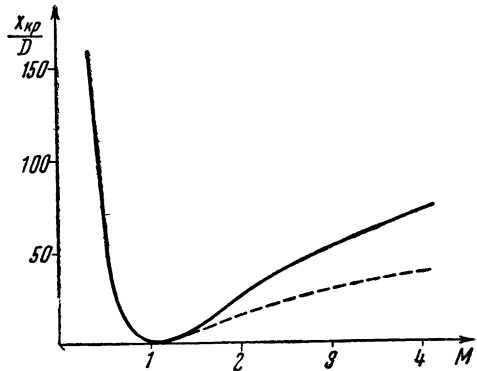
Таким образом, зная число R и среднее по сечению число M_{cp} (или Λ_{cp}), по графику фиг. 98 определяем величину ζ_{TH} и затем по формуле (64) вычисляем значение ζ_T .

Пример. Рассчитаем изменение критической длины трубы в зависимости от начального значения среднего по сечению числа $M_{a\text{ ср}}$. Для простоты расчёт проведём при постоянном значении $\chi\xi$, что соответствует случаю

$$\begin{aligned} R_{00} q(\Lambda_a) &= \\ &= \frac{R}{(1 - \Lambda_{a\text{ ср}}^2)^n} = \text{const.} \end{aligned}$$

Начальная скорость на оси, соответствующая выбранному $M_{a\text{ ср}}$, определяется по формуле

$$\Lambda_a = \frac{M_{a\text{ ср}}}{\sqrt{5 + M_{a\text{ ср}}^2}} \frac{1 - \frac{1,5}{\chi\xi}}{1 - \frac{3}{\chi\xi} + \frac{3,5}{\chi^2\xi^2}}$$



Фиг. 99. Изменение критической длины трубы в зависимости от среднего числа M на входе в трубу.

Критическая скорость на оси в рассматриваемом случае постоянна и равна:

$$\Lambda_{\text{кр}} = \frac{0,408}{\sqrt{1 - \frac{3}{\chi\xi} + \frac{3,5}{\chi^2\xi^2}}}$$

Следовательно, безразмерная критическая длина трубы

$\frac{x_{\text{кр}}}{2} = \frac{x}{D_a}$ определится по формуле

$$\begin{aligned} \frac{x_{\text{кр}}}{D_a} &= \frac{\chi^2\xi^2}{11,2 \chi^2} \left\{ 0,2 \left(\frac{1}{\Lambda_a^2} - \frac{1}{\Lambda_{\text{кр}}^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{3}{\chi\xi} + \frac{3,5}{\chi^2\xi^2} \right) \ln \frac{\Lambda_{\text{кр}}^2 \left[1 - \Lambda_a^2 \left(1 - \frac{3}{\chi\xi} + \frac{3,5}{\chi^2\xi^2} \right) \right]}{\Lambda_a^2 \left[1 - \Lambda_{\text{кр}}^2 \left(1 - \frac{3}{\chi\xi} + \frac{3,5}{\chi^2\xi^2} \right) \right]} \right\}. \end{aligned}$$

Результаты расчёта для $\chi\xi = 10$ приведены на графике фиг. 99. Как видно, при сверхзвуковых начальных скоростях критические длины трубы значительно меньше, чем при начальных дозвуковых скоростях.

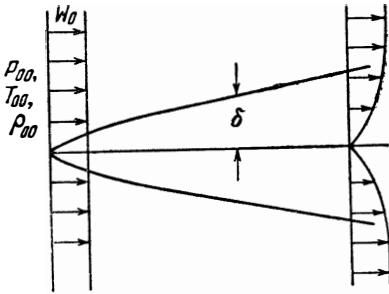
Для сравнения на фиг. 99 пунктирной линией нанесены критические длины, подсчитанные по одномерной теории в предположении, что коэффициент сопротивления не зависит от числа M^1). Из сопоставления результатов расчёта видно, что при начальных

¹⁾ См. § 2 главы V.

дозвуковых скоростях отличие в критических длинах незначительно (кривые практически совпадают). Затем по мере увеличения начального числа $Ma_{ср}$ разница между кривыми постепенно увеличивается. Например, при $Ma_{ср} = 4$ неучёт влияния сжимаемости на коэффициент сопротивления занижает критическую длину вдвое.

§ 3. Обтекание пластины

Рассмотрим обтекание плоской пластины потоком газа со скоростью W_0 и температурой торможения T_{30} (фиг. 100). Для решения задачи используем уравнение импульсов, которое при отсутствии градиента давления [см. (9)] выглядит так:



Фиг. 100. Схема обтекания пластины.

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \frac{\rho}{\rho_0} \frac{w}{W_0} \left(1 - \frac{w}{W_0}\right) dy = - \frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho_0 W_0^2}, \quad (66)$$

уравнение состояния

$$p = g\rho RT \quad (67)$$

и зависимость коэффициента вязкости от температуры

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^n.$$

Для определения τ_w мы должны задаться профилем скорости в пограничном слое. Перейдём к вспомогательным переменным x, η :

$$\rho dy = \rho_{00} d\eta,$$

или

$$\eta = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_{00}} dy \quad (68)$$

и представим в этих переменных профиль скорости для ламинарного режима в виде полинома

$$\frac{w}{W_0} = \sum_{n=0} A_n \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^n, \quad (69)$$

а для турбулентного режима по логарифмическому закону

$$\frac{w}{W_0} = 1 + \frac{1}{\alpha\xi} \ln \frac{\eta}{\delta}. \quad (70)$$

Рассмотрим сначала ламинарный пограничный слой. Для отыскания коэффициентов A_n , определяющих профиль скоростей, используем следующие граничные условия:

$$\text{при } y=0: W=0 \text{ и } \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (\tau) = 0,$$

т. е. вблизи стенки напряжение трения не изменяется; при $y=\delta_y$: $w=W_0$ и производная любого порядка i равна нулю: $\frac{\partial^i w}{\partial y^i} = 0$, т. е. на границе пограничного слоя скорость плавно подходит к значению скорости в невозмущённом потоке. Обычно при решении ограничиваются полиномами третьей или четвёртой степени. Во вспомогательных переменных эти условия запишутся в таком виде:

$$\text{при } \eta = 0: w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0, \quad (71)$$

$$\text{при } \eta = \delta: w = W_0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^i w}{\partial \eta^i} = 0. \quad (72)$$

Коэффициент сопротивления

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho_0 W_0^2} = \frac{2}{\rho_0 W_0^2} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 2A_1 \frac{\mu_w}{\rho_0 W_0} \frac{1}{\delta}. \quad (73)$$

Толщина потери импульса выразится следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta^{**} &= \frac{\rho_{00}}{\rho_0} \int_0^{\delta_y} \frac{\rho}{\rho_{00}} \frac{w}{W_0} \left(1 - \frac{w}{W_0} \right) dy = \frac{\rho_{00}}{\rho_0} \int_0^{\delta} \frac{w}{W_0} \left(1 - \frac{w}{W_0} \right) d\eta = \\ &= (1 - \Lambda_0^2)^{\frac{1}{k-1}} \delta N, \end{aligned} \quad (74)$$

где переход от переменной y к переменной η производится на основании формулы (68) и

$$N = \int_0^1 \frac{w}{W_0} \left(1 - \frac{w}{W_0} \right) d \frac{\eta}{\delta}, \quad (75)$$

N является функцией только от x . Коэффициент сопротивления можно представить в таком виде:

$$c_f = 2A_1 N \frac{\rho_w}{\rho_0} \frac{\mu_w}{\rho_0 W_0 \delta^{**}}. \quad (76)$$

С другой стороны, из уравнения (66) получим:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = A_1 N \frac{\rho_w}{\rho_0} \frac{\mu_w}{\rho_0 W_0 \delta^{**}}.$$

Отсюда определим изменение толщины потери импульса вдоль пластины:

$$\delta^{**} = \sqrt{2A_1 N \frac{\rho_w}{\rho_0} \frac{\mu_w x}{\rho_0 W_0}}. \quad (77)$$

Подставив этот результат в выражение для c_f , имеем:

$$c_f = \sqrt{2A_1 N} \sqrt{\frac{\rho_w}{\rho_0}} \left(\sqrt{\frac{\rho_0 W_0 x}{\mu_w}} \right)^{-1}.$$

Замечая, что

$$\frac{\rho_w}{\rho_0} = \frac{T_0}{T_{00}} = 1 - \Lambda_0^2,$$

найдем местный коэффициент сопротивления

$$c_f = \sqrt{2A_1 N} (1 - \Lambda_0^2)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{R_{wx}}} \quad (78)$$

и средний коэффициент сопротивления пластины длиной L

$$C_f = \frac{1}{L} \int_0^L c_f dx = \frac{2\delta^{**}}{L} = 2 \sqrt{2A_1 N} (1 - \Lambda_0^2)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{R_L}}. \quad (79)$$

Из последнего выражения следует, что коэффициент сопротивления для сжимаемого газа выражается через коэффициент сопротивления несжимаемой жидкости в виде:

$$C_f = C_{fH} (1 - \Lambda_0^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (80)$$

т. е. коэффициент сопротивления падает с возрастанием скорости.

Пример 1. Рассчитаем коэффициент сопротивления и изменение δ^{**} при обтекании пластины потоком несжимаемой жидкости с ламинарным пограничным слоем, причём профиль скорости аппроксимируем полиномом третьей степени:

$$\frac{w}{W_0} = A_0 + A_1 \frac{y}{\delta} + A_2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + A_3 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3.$$

В этом случае из выражений (77) и (78) получаем:

$$c_f = \sqrt{2A_1 N} \frac{1}{\sqrt{R_x}}, \quad \delta^{**} = \sqrt{2A_1 N} \frac{x}{\sqrt{R_x}},$$

где

$$R_x = \frac{\rho_0 W_0 x}{\mu_w}.$$

Значения коэффициентов найдём из граничных условий:

$$\text{при } y = 0: \quad w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2 w}{dy^2} = 0,$$

$$\text{при } y = \delta: \quad w = W_0 \quad \text{и} \quad \frac{dw}{dy} = 0.$$

Используя эти условия, имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= A_0, \\ 0 &= A_2, \\ 1 &= A_0 + A_1 + A_2 + A_3, \\ 0 &= A_1 + 2A_2 + 3A_3. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \frac{3}{2}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -\frac{1}{2},$$

и следовательно, профиль скорости

$$\frac{w}{W_0} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3.$$

Вычислим теперь величину

$$N = \int_0^1 \frac{w}{W_0} \left(1 - \frac{w}{W_0} \right) d \frac{y}{\delta}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} N &= \int_0^1 \left[\frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] \left[1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] d \frac{y}{\delta} = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} = \frac{39}{280}. \end{aligned}$$

Поэтому коэффициент сопротивления

$$c_f = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{2} \cdot \frac{39}{280} \frac{1}{\sqrt{R_x}}} = \frac{0,647}{\sqrt{R_x}}, \quad (81)$$

а толщина потери импульса

$$\delta^{**} = 0,645 \frac{x}{\sqrt{R_x}}. \quad (82)$$

Отметим, что при точном решении уравнений пограничного слоя для этого случая получается:

$$c_f = \frac{0,661}{\sqrt{R_x}}.$$

Таким образом, значения коэффициента сопротивления по нашему расчёту и по точному решению практически совпадают.

Перейдём теперь к рассмотрению турбулентного пограничного слоя¹⁾, причём, как отмечалось выше, профиль скорости в пограничном слое возьмём по логарифмическому закону²⁾

$$\frac{w}{W_0} = 1 + \frac{1}{\alpha \xi} \ln \frac{\eta}{\delta},$$

где

$$\xi = \frac{W_0}{\sqrt{\tau_w \frac{\mu_{\text{л}}}{\rho_{\text{л}} \mu_w}}} \quad (83)$$

— величина, обратно пропорциональная напряжению трения на стенке. Напомним, что непосредственно по логарифмическому закону напряжение трения на стенке определить нельзя. Дополнительное уравнение, позволяющее определить величину ξ , получим аналогично рассмотренным выше случаям (см. стр. 205—215), исходя из следующих предположений:

1) в ламинарном подслое, расположенном непосредственно у стенки, распределение скоростей линейно:

$$\tau_w = \mu_w \frac{w_{\text{л}}}{\delta_{y_{\text{л}}}}, \quad (84)$$

2) переход ламинарного подслоя в турбулентное ядро течения определяется критическим числом Рейнольдса

$$\frac{\rho_{\text{л}} w_{\text{л}} \delta_{y_{\text{л}}}}{\mu_{\text{л}}} = \alpha^2, \quad (85)$$

где $\alpha = 11,5$.

Условие равенства скоростей на границе ламинарного подслоя определяет значение $\delta_{\text{л}}$:

$$\frac{\delta_{\text{л}}}{\delta} = e^{\alpha \xi} \left(\frac{w_{\text{л}}}{W_0} - 1 \right) = e^{\alpha \xi - \alpha \xi}, \quad (86)$$

так как на основании последних трёх выражений

$$\frac{w_{\text{л}}}{W_0} = \frac{\alpha}{\xi}.$$

Кроме того, из этих же выражений находим:

$$\delta_{y_{\text{л}}} = \frac{\mu_w}{\rho_{\text{л}} W_0} \alpha \xi = \frac{\mu_w}{\rho_0 W_0} \frac{\rho_w \mu_{\text{л}}}{\rho_{\text{л}} \mu_w} \frac{\rho_0}{\rho_w} \alpha \xi = \frac{\delta^{**}}{\mathbf{R}_w^{**}} \left(\frac{T_{\text{л}}}{T_w} \right)^{1+n} \frac{\rho_0}{\rho_w} \alpha \xi,$$

¹⁾ Следует иметь в виду, что при любых значениях параметров набегающего потока в начале пластины существует некоторый участок с ламинарным пограничным слоем.

²⁾ См. стр. 232.

где

$$\delta^{***} = \int_0^{\delta_y} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{w}{W_0} \left(1 - \frac{w}{W_0}\right) dy = \frac{\rho_{00}}{\rho_0} \int_0^{\delta} \frac{w}{W_0} \left(1 - \frac{w}{W_0}\right) d\eta = \frac{\rho_{00}}{\rho_0} \frac{\delta}{x\xi} \left(1 - \frac{2}{x\xi}\right), \quad (87)$$

$$\mathbf{R}_w^{**} = \frac{\rho_0 W_0 \delta^{***}}{\mu_w}.$$

Связь между $\delta_{\text{л}}$ и $\delta_{y\text{л}}$ отыскиваем из (68), произведя интегрирование по y от нуля до границы подслоя:

$$\delta_{y\text{л}} = \int_0^{\xi_{\text{л}}} \frac{\rho_{00}}{\rho} d\eta.$$

Так как по уравнению состояния

$$\frac{\rho_{00}}{\rho} = \frac{P_{00}}{P} \frac{T}{T_{00}} = \frac{P_{00}}{P} \left(1 - \Lambda^2\right),$$

то, пренебрегая в пределах ламинарного подслоя членом $\Lambda_{\text{л}}^2$, получим:

$$\delta_{y\text{л}} = \delta_{\text{л}} \frac{P_{00}}{P}.$$

Подставляя в это уравнение значения $\delta_{\text{л}}$ и $\delta_{y\text{л}}$, имеем:

$$\mathbf{R}_w^{**} = 0,288 \left(1 - \frac{2}{x\xi}\right) e^{x\xi}. \quad (88)$$

Мы рассматриваем случай, когда теплообмен между газом и пластиной отсутствует. Тогда в пограничном слое температура торможения постоянна и равна $T_{00} = T_w$. Поэтому уравнение импульсов (66) принимает вид

$$\frac{d\delta^{***}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho_0 W_0^2} = \frac{1}{\xi^2} \frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_0} \frac{\mu_w}{\mu_{\text{л}}} \approx \frac{1}{\xi^2} \frac{T_0}{T_{00}}. \quad (89)$$

После интегрирования получим:

$$\mathbf{R}_{xw} = \frac{\rho_0 W_0 x}{\mu_w} = \frac{0,288}{0,4^2} \frac{T_{00}}{T_0} x^2 \xi^2 e^{x\xi} \left(1 - \frac{4}{x\xi} + \frac{5}{x^2 \xi^2}\right) + C, \quad (90)$$

где постоянная C может быть определена из условия равенства толщин потери импульса в месте перехода ламинарного слоя в турбулентный. В случае, если турбулентный слой практически начинается с самого начала пластины, величину C можно принять равной нулю. Местный коэффициент сопротивления составляет:

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho_0 W_0^2} = \frac{2}{\xi^2} \frac{T_0}{T_{00}}. \quad (91)$$

Средний же коэффициент сопротивления пластины длиной L определяется из условия

$$C_f = \frac{1}{L} \int_0^L c_f dx = 2 \frac{\delta_L^{**}}{L} = 2\bar{\delta}_L^{**}, \quad (92)$$

где δ_L^{**} — значение толщины потери импульса в конце пластины. Деля (88) на (90) при $C = 0$, получим:

$$\bar{\delta}_L^{**} = \frac{1}{\xi_L^2} \frac{T_0}{T_{00}} \frac{1 - \frac{2}{\alpha \xi_L}}{1 - \frac{4}{\alpha \xi_L} + \frac{5}{\alpha^2 \xi_L^2}} \quad (93)$$

и, следовательно, средний коэффициент сопротивления пластины равен:

$$C_f = \frac{2}{\xi_L^2} \frac{1 - \frac{2}{\alpha \xi_L}}{1 - \frac{4}{\alpha \xi_L} + \frac{5}{\alpha^2 \xi_L^2}} \frac{T_0}{T_{00}}. \quad (94)$$

В случае обтекания пластины несжимаемой жидкостью мы получаем выражение

$$C_{fH} = \frac{2}{\xi_L^2} \frac{1 - \frac{2}{\alpha \xi_L}}{1 - \frac{4}{\alpha \xi_L} + \frac{5}{\alpha^2 \xi_L^2}} \quad (95)$$

и поэтому

$$C_f = C_{fH} \frac{T_0}{T_{00}} = C_{fH} (1 - \Lambda_0^2), \quad (96)$$

т. е. коэффициент сопротивления пластины, обтекаемой газом, равен коэффициенту сопротивления пластины в несжимаемой жидкости при том же числе $R_{wL} = \frac{\rho_0 W_0 L}{\mu_w}$, умноженному на отношение температуры набегающего потока к температуре заторможенного потока. Так, например, при $M = 3$ коэффициент сопротивления пластины примерно в три раза меньше соответствующего коэффициента сопротивления в случае несжимаемой жидкости.

Найдём зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса. Умножив уравнение (90) на (91), имеем:

$$R_{xw} c_f = 0,576 e^{\alpha \xi} \left(1 - \frac{4}{\alpha \xi} + \frac{5}{\alpha^2 \xi^2} \right), \quad (97)$$

отсюда с помощью (91) находим:

$$\frac{0,245}{\sqrt{c_f}} \left(\frac{T_0}{T_{00}} \right)^{\frac{1}{2}} = \lg R_{wx} c_f - \lg 0,576 \left(1 - \frac{4}{x\xi} + \frac{5}{x^2\xi^2} \right); \quad (98)$$

значение

$$\lg \left(1 - \frac{4}{x\xi} + \frac{5}{x^2\xi^2} \right) \cdot 0,576$$

слабо зависит от числа R_{wx} , так как при изменении R_{wx} величина ξ меняется мало; поэтому в расчётах обычно принимают это значение постоянным и равным $-0,41$, что получается при $x\xi = 10$. Для среднего коэффициента сопротивления пластины аналогично предыдущему получим:

$$\frac{0,272}{\sqrt{C_f}} \left(\frac{T_0}{T_{00}} \right)^{\frac{1}{2}} = \lg R_{Lw} C_f + 0,33. \quad (99)$$

Пример 2. Рассчитаем коэффициент сопротивления пластины длиной 1 м , обтекаемой потоком воздуха со скоростью 100 м/сек ; температура стенки равна 0°Ц при $p = 1 \text{ атм}$. Число $R_{Lw} = = 7,5 \cdot 10^6$.

Если бы пограничный слой был ламинарным, то

$$C_{fл} = \frac{1,293}{\sqrt{R_{Lw}}} = 0,48 \cdot 10^{-3}.$$

При полностью турбулентном пограничном слое с помощью формулы (99), в которой полагаем $\frac{T_0}{T_{00}} = 1$, получим:

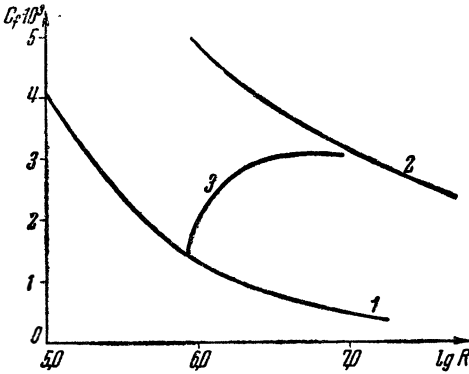
$$C_{fт} = 0,34 \cdot 10^{-2}.$$

Таким образом, в турбулентном пограничном слое коэффициент сопротивления для рассмотренного примера в семь раз больше, чем в ламинарном.

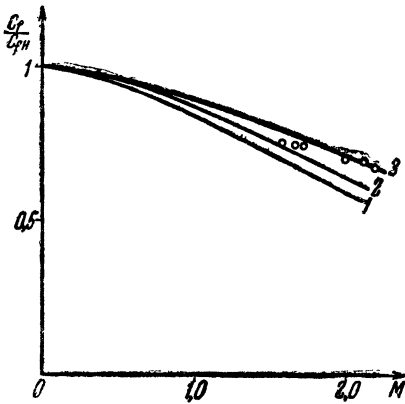
Обычно при обтекании пластины в начале её существует ламинарный пограничный слой, который ввиду увеличения числа R_w^{**} по длине пластины в некотором месте переходит в турбулентный. Местоположение точки перехода зависит от начальной турбулентности потока, качества поверхности и т. д. Поэтому критическое число $R_{кр}^{**}$ в точке перехода может существенно изменяться, но обычно в расчётах принимают минимальное критическое число R , равное $R_{кр}^{**} = 600$. Следовательно, пограничный слой на пластине нужно рассчитывать как ламинарный для $R^{**} < 600$ и как турбулентный для $R^{**} > 600$, причём, как уже указывалось, в точке перехода можно принять, что толщины потери импульса в ламинарном и турбулентном слое одинаковы:

$$\delta_{л}^{**} = \delta_{т}^{**}. \quad (100)$$

Результаты расчёта полного коэффициента сопротивления пластины в зависимости от числа R_{Lw} при обтекании её несжимаемой жидкостью приведены на графике фиг. 101.



Фиг. 101. Зависимость коэффициента сопротивления трения C_f от числа R для пластины: 1—турбулентный режим по всей длине пластины, 2—ламинарный режим по всей длине пластины, 3—в начале пластины ламинарный, в конце—турбулентный режим течения.



Фиг. 102. Изменение отношения $\frac{C_f}{C_{fn}}$ в зависимости от числа M набегающего потока (сравнение с экспериментом).

от числа M набегающего потока приведены на фиг. 102 кружками. На этой же фигуре для сопоставления приведены рас-

чёта коэффициента сопротивления при ламинарном слое, кривая 2 — при турбулентном слое и кривая 3 — в случае, когда пограничный слой ламинарный до $R^{**} = 600$ и турбулентный при $R^{**} > 600$. Из этого графика следует, что при расчёте коэффициента сопротивления для чисел $R_{Lw} > 10^7$ можно полагать, что имеется только турбулентный пограничный слой, а при $R_{Lw} < 10^7$ необходимо учитывать наличие на передней части пластины ламинарного слоя.

Остановимся на зависимости коэффициента сопротивления от числа M набегающего потока. Экспериментально ¹⁾ были определены коэффициенты сопротивления пластины при обтекании её сверхзвуковым потоком при числах $R_{Lw} > 7 \cdot 10^6$ и числах M от 1,5 до 2,2. Экспериментальные значения отношения $\frac{C_f}{C_{fn}}$ (C_{fn} рассчитывалось для того же числа R_{Lw} , которое было в опытах) в зависимости

¹⁾ Wilson R. E., Turbulent Boundary Layer Characteristics at Supersonic Speeds. Theory and Experiment. Journal of the Aeronautical Science, т. 17, № 9, September, 1950.

чётные кривые изменения $\frac{C_f}{C_{fH}}$. Нижняя кривая рассчитана по формуле (96), средняя — по формуле (99). Как видно, теоретический расчёт несколько преувеличивает влияние сжимаемости. Это может быть объяснено, в частности, тем обстоятельством, что при определении коэффициента сопротивления мы пренебрегли значением $\Lambda_{\text{д}}^2$ (квадратом безразмерной скорости на границе ламинарного подслоя) по сравнению с единицей. При сверхзвуковых скоростях неучёт этого члена уменьшает величину коэффициента на несколько процентов. Отношение $\frac{C_f}{C_{fH}}$, полученное с учётом члена $\Lambda_{\text{д}}$ (см. верхнюю кривую на фиг. 102), практически совпадает с экспериментальными значениями.

§ 4. Общие свойства турбулентной газовой струи¹⁾

Струя называется свободной и затопленной, если она не ограничена твёрдыми стенками и распространяется в пространстве, заполненном средой тех же физических свойств, что и вещество струи.

Обычно струя турбулентна²⁾, т. е. в ней наблюдаются беспорядочные движения вихревых масс. Последние при своём поперечном перемещении попадают за пределы струи, переносят в соприкасающиеся со струёй слои неподвижной жидкости³⁾ свои импульсы и увлекают эти слои. На место частиц, выброшенных из струи, в неё проникают частицы окружающей жидкости которые подтормаживают граничные слои потока; устанавливается обмен вещества между струёй и неподвижной жидкостью, в результате чего масса струи растёт, ширина её увеличивается, скорость у границ убывает.

Подторможенные частицы активного потока вместе с увлечёнными частицами окружающей жидкости образуют турбулентный пограничный слой струи, толщина которого в направлении течения возрастает. Если в выходном сечении сопла скорости распределяются равномерно⁴⁾, то в начале струи толщина пограничного слоя равна нулю. В этом случае границы пограничного слоя представляют собой расходящиеся поверхности, которые пересекаются у кромки сопла (фиг. 103).

С внешней стороны пограничный слой струи соприкасается с неподвижной жидкостью, причём под внешней границей понимают

1) См. Абрамович Г. Н., Турбулентные свободные струи жидкостей и газов. Энергоиздат, 1948.

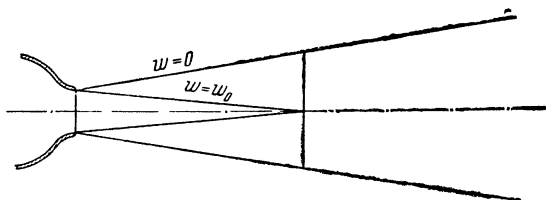
2) Вопрос о ламинарной струе здесь не рассматривается.

3) Под жидкостью подразумеваются как капельные, так и газообразные течения, в частности воздух.

4) Теория струи разработана применительно к этому случаю.

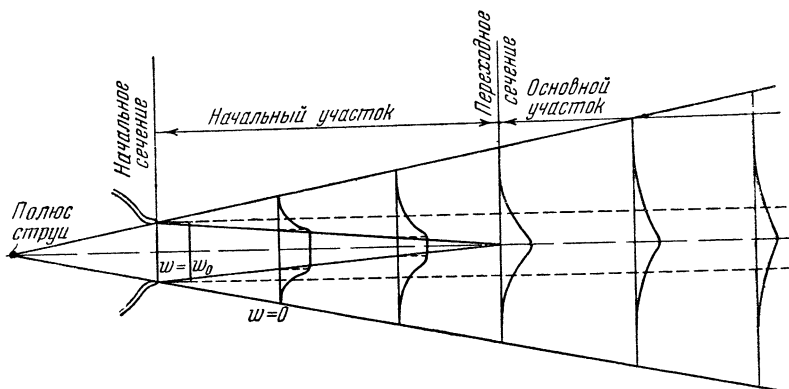
поверхность, во всех точках которой компонент скорости, параллельный оси струи, равен нулю¹⁾ ($w_{x2} = 0$).

С внутренней стороны пограничный слой переходит в ядро постоянных скоростей. Таким образом, на внутренней границе пограничного слоя скорость невозмущённого потока равна скорости истечения ($w_{x1} = w_0$).



Фиг. 103. Распространение свободной струи.

По мере удаления от сопла наряду с утолщением пограничного слоя происходит сужение ядра постоянной скорости. Этот процесс приводит к тому, что на некотором расстоянии ядро невозмущённого потока исчезает совсем.



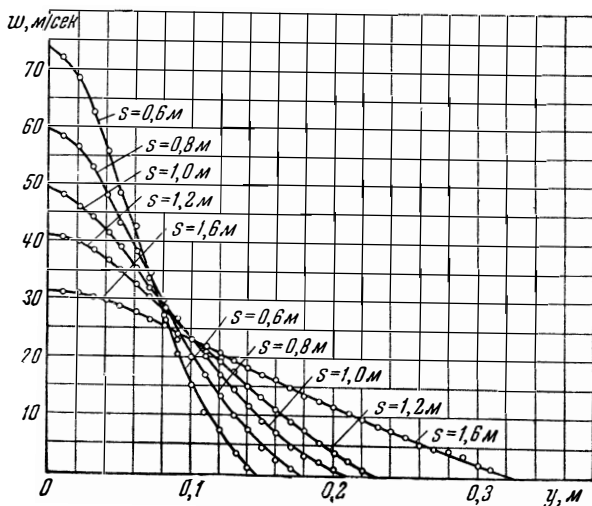
Фиг. 104. Схема свободной струи.

В последующем участке струи пограничный слой заполняет уже всё поперечное сечение, простираясь вплоть до оси потока, и размывание потока сопровождается не только увеличением ширины струи, но также и падением скорости на её оси (фиг. 104).

¹⁾ Ось X совпадает с осью симметрии струи, поэтому y -компонент скорости (w_y) — не может равняться нулю; за его счёт возрастает масса струи (воздух притекает к струе).

Сечение струи, в котором завершается ликвидация ядра постоянной скорости, называют *переходным*. Участок, расположенный между начальным и переходным сечениями струи, называют *начальным*, а участок, следующий за переходным сечением, *основным*. Точку пересечения внешних границ струи называют *полюсом струи*.

Характерной особенностью свободной струи, как показывают теория и многочисленные опыты, является то, что поперечные



Фиг. 105. Поля скорости в различных сечениях осесимметричной струи.

составляющие скорости в любом сечении струи малы по сравнению с продольной скоростью. Если ось X совместить с осью симметрии потока, то компоненты скорости w_y окажутся настолько малыми, что в большинстве приложений теории струи ими можно пренебречь и считать скоростью в струе её компонент w_x ($w \approx w_x$).

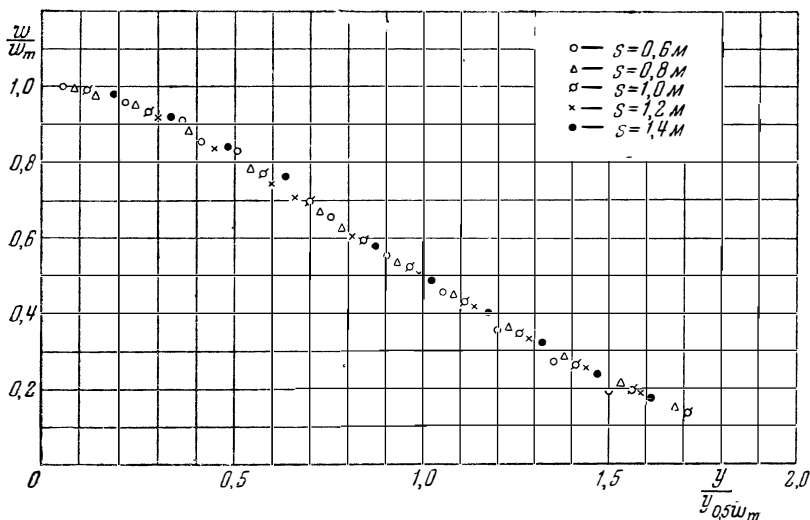
На фиг. 105 приведены кривые распределения скорости в различных сечениях основного участка воздушной струи круглого сечения по опытам Трюпеля. Начальная скорость струи равнялась 87 м/сек . Радиус начального сечения струи составлял $0,045 \text{ м}$. Скоростные поля снимались последовательно на следующих расстояниях от сопла:

$$s = 0,6 \text{ м}, \quad s = 0,8 \text{ м}, \quad s = 1,0 \text{ м}, \quad s = 1,2 \text{ м}, \quad s = 1,6 \text{ м}.$$

Опыты Трюпеля, так же как и исследования других авторов, свидетельствуют о непрерывной деформации скоростного профиля струи. Чем дальше от начала струи выбрано сечение,

тем ниже и шире скоростной профиль. К этому выводу мы приходим при построении скоростных полей в абсолютных координатах (w, y).

Более интересные результаты получаются при нанесении тех же полей в безразмерных координатах. Попробуем, например, отложить вместо абсолютных значений скорости w их отношения к значению скорости w_m на оси струи $\frac{w}{w_m}$ и вместо абсолютных расстояний от оси струи y — их отношения к расстояниям



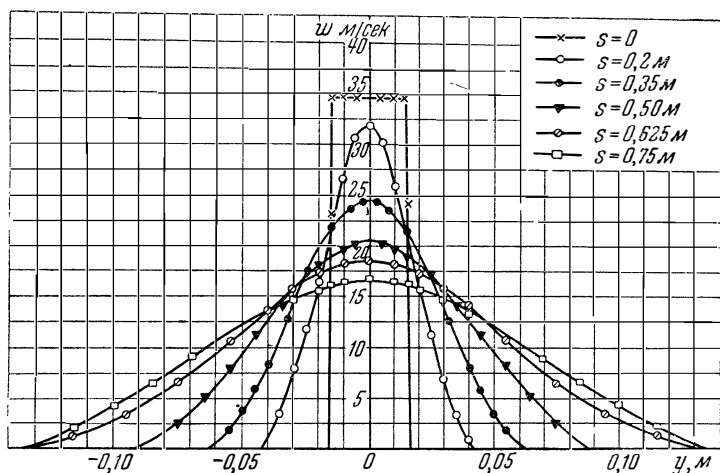
Фиг. 106. Поля скорости осесимметричной струи в безразмерных координатах.

от оси до таких точек, в которых скорость равна половине осевой: $y/y_{0,5w_m}$ (фиг. 106). Полученная диаграмма указывает на полное подобие скоростных полей во всех сечениях основного участка струи. Подобие это заключается в том, что в сходственных точках любых двух сечений основного участка струи безразмерные величины скорости одинаковы. Естественно, что в качестве характерной длины можно взять не только $y_{0,5w_m}$, но, например, и ширину струи b . Тогда равенство безразмерных скоростей для сходственных точек струи $\left(\frac{y_1}{b_1} = \frac{y_2}{b_2}\right)$ выражается следующим образом:

$$\frac{w_1}{w_{m1}} = \frac{w_2}{w_{m2}}.$$

Здесь ω_1 и ω_2 — скорости в сходственных точках двух сечений струи, ω_{m1} и ω_{m2} — соответствующие скорости в центрах этих сечений.

Полученные выводы справедливы не только для струи круглого сечения. В равной мере они относятся и к плоскопараллельной струе (т. е. струе, вытекающей из длинной щели). Для того чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть результаты опытов Фертмана. Последний исследовал скоростные поля воздушной струи, вытекающей из отверстия в узком насадке



Фиг. 107. Поля скорости в различных сечениях плоской струи.

шириной 0,03 м и длиной 0,65 м. Скорость струи равнялась 35 м/сек. На фиг. 107 нанесены поля скорости, снятые в сечениях струи, которые удалены от сопла на расстояния:

$$s = 0, \quad s = 0,20 \text{ м}, \quad s = 0,35 \text{ м},$$

$$s = 0,50 \text{ м}, \quad s = 0,625 \text{ м}, \quad s = 0,75 \text{ м}.$$

Будучи перенесены в безразмерные координаты (те же, что и выше), поля скорости основного участка плоской струи, так же как и в случае струи круглого сечения, оказываются подобными (фиг. 108).

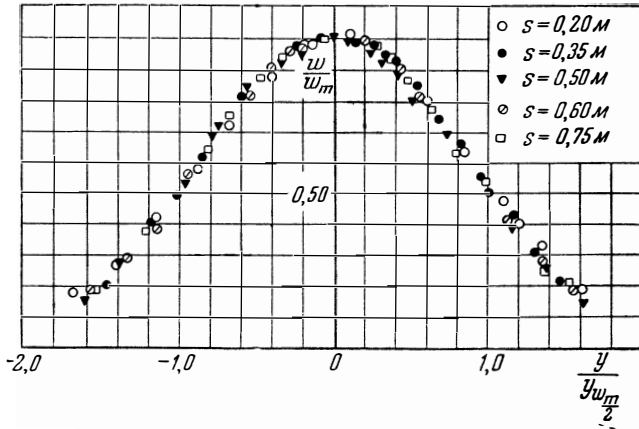
В 1938 г. автором было подробно экспериментально исследовано начальный участок осесимметричной струи воздуха, вытекающей из насадка диаметром 100 мм с различными скоростями (до 40 м/сек). Полученные скоростные поля в пограничном слое начального участка на расстояниях от насадка:

$$x = 100 \text{ мм}, \quad x = 250 \text{ мм}$$

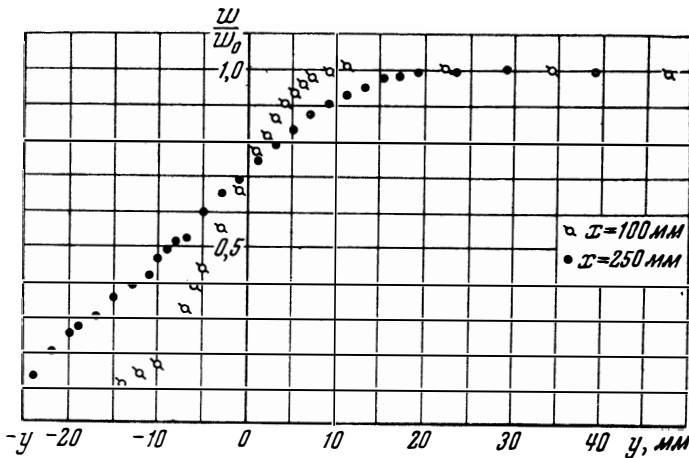
нанесены на фиг. 109. Изображённые поля были приведены к безразмерному виду типа

$$\frac{w}{w_0} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

где w_0 — скорость в ядре невозмущённого потока (скорость исте-



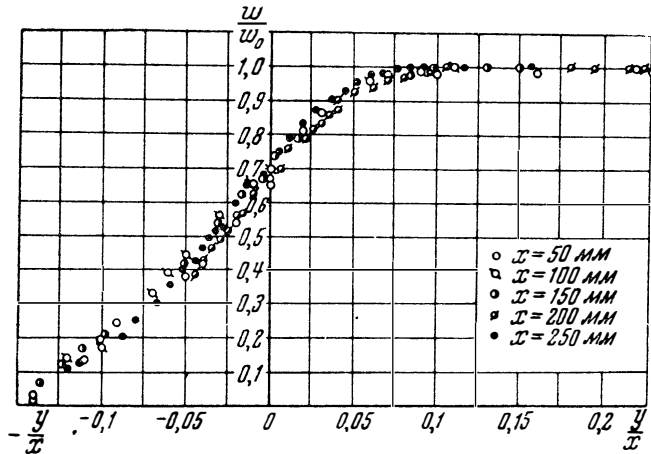
Фиг. 108. Поля скорости плоской струи в безразмерных координатах.



Фиг. 109. Поля скорости в пограничном слое начального участка струи круглого сечения.

чения), x — расстояние от насадка, y — расстояние от точки замера до линии, идущей от кромки насадка параллельно направлению потока.

Результаты, представленные на фиг. 110, свидетельствуют о том, что в начальном участке на небольших расстояниях от насадки ($\frac{x}{D_0} < 3$) скоростные поля в различных сечениях пограничного слоя струи подобны. Сравнивая профили безразмерных скоростей, изображённые на фигурах 106, 108 и 110, можно заметить, что эти профили почти одинаковы.



Фиг. 110. Безразмерные поля скорости в пограничном слое начального участка струи круглого сечения.

Итак, существует универсальная функция f выражающая зависимость безразмерной скорости от безразмерного расстояния между точкой замера и точкой максимальной скорости:

$$\frac{w}{w_m} = f\left(\frac{y}{R_{\text{ГР}}}\right). \quad (101)$$

Здесь $R_{\text{ГР}}$ — полуширина струи для основного участка, и ширина пограничного слоя для начального участка. Функция f может быть определена раз и навсегда хотя бы экспериментальным путём.

Значения безразмерной скорости $\frac{w}{w_m}$ в функции от безразмерной ординаты $\eta = \frac{y}{R_{\text{ГР}}}$, вычисленные по теории струи¹⁾, приводятся в таблице IV.

¹⁾ См. книгу автора, указанную в списке на стр. 241.

Таблица IV

η	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\frac{w}{w_m}$	1	0,907	0,758	0,596	0,443	0,300	0,186	0,098	0,044	0,013	0

Расчёт безразмерной скорости иногда производят также по следующей формуле:

$$\frac{w}{w_m} = \left[1 - \left(\frac{y}{R_{\text{гр}}} \right)^{\frac{3}{2}} \right]^2 = (1 - \eta^{\frac{3}{2}})^2, \quad (102)$$

одинаково пригодной для осесимметричных и плоскопараллельных струй¹⁾. Напомним, что при использовании формулы (102) в начальном участке струи следует понимать под $R_{\text{гр}}$ полную ширину пограничного слоя, под y — расстояние от дачной точки до стыка пограничного слоя с ядром постоянной скорости. В дальнейшем нам понадобятся значения определённых интегралов

$$B = \int_0^1 \left(\frac{w}{w_m} \right)^n \cdot \eta \cdot d\eta, \quad (103)$$

которые вычислены по таблице IV и приведены в нижеследующей таблице:

Таблица V

n	1	1,5	2	2,5	3
B	0,0985	0,0640	0,0464	0,0359	0,0286

Выясним, какую форму должна иметь внешняя граница струи.

Вследствие турбулентности рассматриваемых струй компоненты скорости в любой точке можно разложить на средние по времени и пульсационные составляющие

$$w_x = \bar{w}_x + w'_x, \quad w_y = \bar{w}_y + w'_y,$$

таким образом, чтобы при осреднении за некоторый конечный промежуток времени пульсационные составляющие равнялись нулю:

$$\bar{w}'_x = \bar{w}'_y = 0.$$

¹⁾ Формула (102) и таблица IV дают примерно одинаковые профили скоростей только в том случае, если при использовании (102) принять несколько меньшую ширину струи, чем при использовании таблицы IV.

Если свободный путь жидкой частицы (путь смешения) в турбулентном потоке равен l_T , то при переносе поперёк потока частица попадает в слой, где значение скорости отличается от значения её в слое, из которого частица выделилась, на величину

$$\Delta \bar{w}_x = l_T \cdot \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}.$$

Потеря индивидуальности жидкой частицы — слияние её с массой нового слоя — должна сопровождаться скачкообразным изменением (пульсацией) скорости на величину $w'_x = \Delta \bar{w}_x$. Иначе говоря, пульсация главной составляющей скорости имеет порядок

$$w'_x \sim l_T \cdot \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}.$$

В теории турбулентности принимается, что величины поперечных пульсаций скорости пропорциональны пульсациям главной составляющей скорости:

$$w'_y \sim w'_x, \quad \text{т. е.} \quad w'_y \sim l_T \cdot \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}^1).$$

Отсутствие у свободного потока твёрдых границ позволяет предположить постоянство пути смешения в поперечном сечении потока:

$$l_T(y) = \text{const.}$$

Закон изменения пути смешения вдоль оси абсцисс

$$l_T = l_T(x)$$

может быть установлен при помощи имеющихся экспериментальных данных. Достаточным основанием для этого является подобие пограничных слоёв в различных поперечных сечениях свободного потока. Как упоминалось выше, подобие это установлено в многочисленных экспериментальных работах посредством построения профилей скорости в безразмерных координатах.

Подобие пограничных слоёв в сечениях данного свободного потока не может не относиться, в частности, и к геометрическим факторам. Иначе говоря, следует ожидать равенства между собой безразмерных величин пути смешения для различных сечений потока:

$$\frac{l_1}{b_1} = \frac{l_2}{b_2} = \dots = \text{const.} \quad (104)$$

1) В связи с незначительностью поперечной составляющей скорости полагаем ниже $w_x = w$; осреднённую скорость будем обозначать без чёрточки сверху.

Итак, достаточно установить закон увеличения ширины струи вдоль оси абсцисс, чтобы стал известен закон возрастания пути смещения.

Следующее рассуждение позволяет решить проблему зависимости: $b = b(x)$. Расширение струи (или пограничного слоя струи) происходит за счёт поперечной пульсационной скорости

$$\frac{db}{dt} \sim \omega'_y \sim l_T \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}. \quad (105)$$

Вследствие подобия скоростных профилей в различных сечениях струи можно написать:

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} \sim \frac{\omega_m}{b}, \quad (106)$$

и далее согласно (104), (105) и (106):

$$\frac{db}{dt} \sim \frac{l_T}{b} \cdot \omega_m \sim \omega_m. \quad (107)$$

С другой стороны, скорость расширения струй равна:

$$\frac{db}{dt} = \frac{db}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

т. е.

$$\frac{db}{dt} \sim \frac{db}{dx} \cdot \omega_m. \quad (108)$$

Сравнение выражений (107) и (108) приводит к решению задачи о законе нарастания ширины свободной струи и пути смещения в направлении течения:

$$\frac{db}{dx} = \text{const}, \quad b = x \cdot \text{const}, \quad l_T = x \cdot \text{const}.$$

Полученный линейный закон возрастания ширины струи и пути смещения вдоль потока

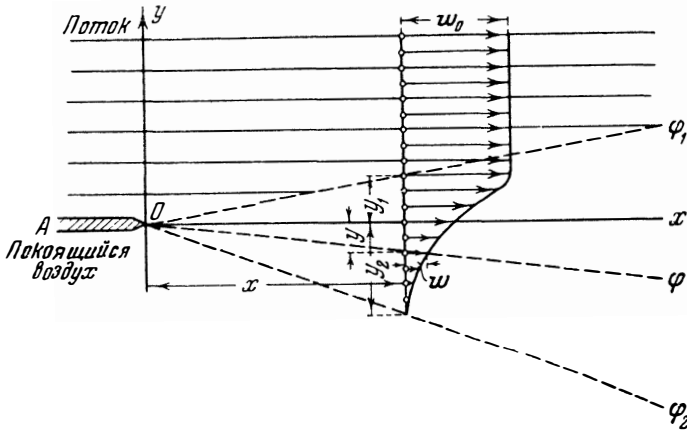
$$b = k \cdot x, \quad l_T = c \cdot x \quad (109)$$

применяется с успехом для свободных струй разной формы: для пограничного слоя беспредельного плоского потока, для плоскопараллельной струи, для осесимметричной струи, вообще в тех случаях свободных струй, когда профили скорости универсальны.

Пусть со стенки AO (фиг. 111) сбегает беспредельная в положительном направлении оси y плоскопараллельная невозмущённая струя со скоростью ω_0 и, начиная от точки O , смешивается с окружающей неподвижной жидкостью¹⁾. Установленный выше закон

1) Плоскость xOy на фиг. 111 расположим горизонтально. В этом случае гравитационные силы, которые действуют, например, в неизотермической газовой струе, можно не рассматривать.

прямолинейного возрастания ширины b пограничного слоя в сочетании с универсальностью скоростных профилей приводит к тому, что вдоль любого луча $O\varphi$, проведённого из начала координат (последнее совмещается с точкой O , где толщина пограничного слоя равна нулю), скорость остаётся постоянной.



Фиг. 111. Пограничный слой свободной струи.

В самом деле, из подобия скоростных профилей вытекает равенство значений скоростей в сходственных точках потока, т. е. при

$$\frac{y_1}{b_1} = \frac{y_2}{b_2} = \dots = \text{const}$$

имеет место

$$\frac{w_1}{w_0} = \frac{w_2}{w_0} = \dots = \text{const}.$$

Но согласно равенству (109)

$$b = k \cdot x.$$

Отсюда получаем, что при

$$\frac{y}{x} = \text{const} \quad (110)$$

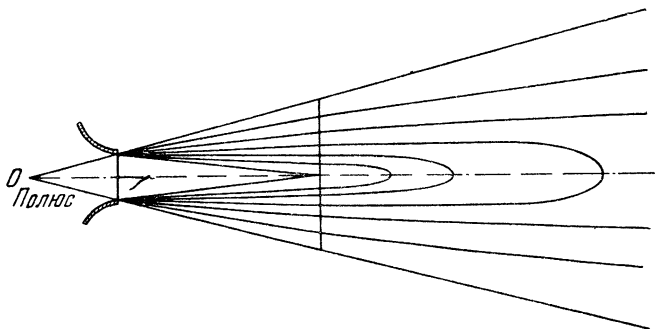
существует условие

$$\frac{w}{w_0} = \text{const}. \quad (111)$$

Но уравнение (110) есть уравнение прямолинейного луча. Итак, в турбулентном пограничном слое плоскопараллельного свободного потока лучи, сходящиеся в месте, где толщина пограничного слоя равна нулю, представляют собой изотакхи (линии равных скоростей). Данный результат относится не только

к плоскопараллельному потоку, но в равной мере и к пограничному слою в начальном участке струи круглого сечения, поскольку опыты показывают, что и в этом случае поля скорости универсальны. Началом координат для изотак пограничного слоя в начальном участке струи служит выходная кромка сопла.

Следует отметить, что изотак начального участка струи получаются одни и те же для абсолютных (ω) и для безразмерных скоростей $\frac{\omega}{\omega_0}$ благодаря тому, что величина скорости в ядре невозмущённого потока (ω_0) по длине струи не меняется.



Фиг. 112. Изотак свободной струи, рассчитанные по скорости истечения.

Форма изотак в основном участке свободной струи зависит от способа определения безразмерной скорости. Для безразмерной скорости, полученной путём деления местной скорости на скорость истечения из сопла $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$, и для абсолютной скорости изотак основного участка образуют факел, изображённый на фиг. 112.

Для безразмерной скорости, вычисленной посредством деления местной скорости на величину скорости в центре соответствующего поперечного сечения $\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)$, изотак основного участка представляют собой прямые линии, сходящиеся в полюсе струи (фиг. 113). Данный результат вытекает из того, что указанная безразмерная скорость зависит только от относительного положения точки в поперечном сечении струи:

$$\frac{\omega}{\omega_m} = f\left(\frac{y}{b}\right).$$

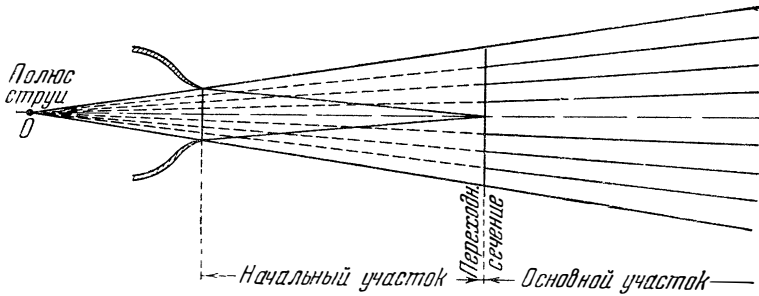
Вследствие линейности закона расширения струи

$$b = k \cdot x$$

зависимость (101) может быть приведена к виду

$$\frac{\omega}{\omega_m} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

откуда и следует, что изотакхи для безразмерной скорости типа $\frac{\omega}{\omega_m}$ являются лучами, которые пересекаются в полюсе струи. Прямолинейность изотакх для указанного типа безразмерной скорости $\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)$ имеет место как в осесимметричном, так и в плоскопараллельном случаях.



Фиг. 113. Изотакхи свободной струи, рассчитанные по местным осевым скоростям.

Остановимся на вопросе об изменении скорости вдоль оси струи.

Давление в струе как показывают опыты, практически неизменно и равно давлению в окружающем пространстве. Благодаря этому полное количество движения секундной массы воздуха во всех сечениях струи должно оставаться одним и тем же:

$$J = \int_0^m \omega \cdot dm = \int_F \rho \cdot \omega^2 \cdot dF = \text{const.} \quad (112)$$

Здесь dm — масса, протекающая в единицу времени сквозь элемент поперечного сечения струи, ρ — плотность воздуха, dF — площадь элемента сечения струи. В случае струи круглого сечения условие постоянства количества движения можно записать следующим образом:

$$J = 2\pi \int_0^{R_{\text{гр}}} \rho \omega^2 y dy = \pi \rho_0 \cdot \omega_0^2 \cdot R_0^3. \quad (113)$$

Здесь R_0 — радиус начального сечения струи, ω_0 — скорость в начальном сечении струи. Приведем это выражение к безразмерному

виду в случае несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$):

$$2 \int_0^{\frac{R_{\text{ГР}}}{R_0}} \left(\frac{w}{w_0} \right)^2 \cdot \frac{y}{R_0} \cdot d \frac{y}{R_0} = 1. \quad (114)$$

Газовые струи со значительными изменениями плотности рассматриваются в следующем параграфе.

Безразмерная ордината (радиус) произвольной точки $\frac{y}{R_0}$ может быть представлена в виде двух сомножителей: $\frac{y}{R_{\text{ГР}}} \cdot \frac{R_{\text{ГР}}}{R_0}$, из которых второй зависит только от расстояния между сечением и полюсом и не зависит от положения точки в поперечном сечении струи. Вводя обозначение $\eta = \frac{y}{R_{\text{ГР}}}$, запишем:

$$\frac{y}{R_0} = \eta \cdot \frac{R_{\text{ГР}}}{R_0}.$$

В свою очередь безразмерная скорость может быть разложена на два сомножителя:

$$\frac{w}{w_0} = \frac{w}{w_m} \cdot \frac{w_m}{w_0},$$

из которых второй также не зависит от положения точки в поперечном сечении струи. Таким образом, выражение (114) может быть представлено в следующем виде:

$$\left(\frac{w_m}{w_0} \right)^2 \cdot \left(\frac{R_{\text{ГР}}}{R_0} \right)^2 \cdot 2 \int_0^1 \left(\frac{w}{w_m} \right)^2 \cdot \eta \cdot d\eta = 1.$$

Определённый интеграл имеет постоянное значение и согласно таблице V равен:

$$\int_0^1 \left(\frac{w}{w_m} \right)^2 \cdot \eta \cdot d\eta = 0,0464.$$

Следовательно, безразмерный радиус поперечного сечения можно связать с безразмерной скоростью в центре этого сечения равенством

$$\left(\frac{w_m}{w_0} \right)^2 \cdot \left(\frac{R_{\text{ГР}}}{R_0} \right)^2 \cdot 2 \cdot 0,0464 = 1,$$

откуда

$$\frac{R_{\text{ГР}}}{R_0} = 3,3 \cdot \frac{w_0}{w_m}. \quad (115)$$

В переходном сечении $w_m = w_0$; отсюда следует, что *безразмерный радиус переходного сечения имеет всегда постоянное значение*:

$$\left| \frac{R_{\text{ГР}}}{R_0} \right|_n = 3,3. \quad (116)$$

Объёмный расход воздуха в поперечном сечении определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \int_0^{R_{\text{ГР}}} w \cdot y \cdot dy = 2\pi \cdot w_m \cdot R_{\text{ГР}}^2 \int_0^1 \frac{w}{w_m} \cdot \eta \cdot d\eta = \\ &= 2\pi R_0^2 \cdot w_0 \cdot \frac{w_m}{w_0} \cdot \left(\frac{R_{\text{ГР}}}{R_0} \right)^2 \int_0^1 \frac{w}{w_m} \cdot \eta \cdot d\eta. \end{aligned} \quad (117)$$

Но произведение $\pi R_0^2 w_0$ представляет собой не что иное, как первоначальный расход газа, истекающего из отверстия трубы:

$$Q_0 = \pi R_0^2 \cdot w_0.$$

Квадрат безразмерного радиуса струи согласно формуле (115) равен:

$$\left(\frac{R_{\text{ГР}}}{R_0} \right)^2 = 10,8 \left(\frac{w_0}{w_m} \right)^2.$$

Наконец, интеграл согласно таблице V равен постоянному числу:

$$\int_0^1 \frac{w}{w_m} \cdot \eta \cdot d\eta = 0,0985.$$

Подстановка этих значений в выражение (117) для расхода газа в струе приводит к формуле

$$\frac{Q}{Q_0} = 2,13 \cdot \frac{w_0}{w_m}. \quad (118)$$

Расход воздуха в переходном сечении также имеет определённое и постоянное значение

$$\left| \frac{Q}{Q_0} \right|_n = 2,13. \quad (119)$$

Назовём *средней по площади скоростью потока* частное $\frac{Q}{F}$ от деления объёмного расхода на поперечное сечение; имеем:

$$\frac{w_{\text{ср } 1}}{w_0} = \frac{Q}{Q_0} \cdot \frac{F_0}{F};$$

при помощи (115) и (118) находим:

$$\frac{w_{\text{ср}1}}{w_0} = 0,2 \cdot \frac{w_m}{w_0}, \quad (120)$$

или

$$w_{\text{ср}1} = 0,2 \cdot w_m. \quad (121)$$

Следовательно, *средняя по площади скорость в любом поперечном сечении струи основного участка составляет 20% от максимальной скорости (в центре) этого сечения.*

Назовём *средней по расходу скоростью* потока частное $\frac{J}{m}$ от деления количества движения на массу; тогда

$$\frac{w_{\text{ср}2}}{w_0} = \frac{J}{J_0} \cdot \frac{m_0}{m}.$$

Имея в виду, что импульс струи постоянен, т. е. $J = J_0$, а отношение масс при постоянной плотности равно отношению объёмных расходов, т. е. $\frac{m}{m_0} = \frac{Q}{Q_0}$, и определяется по (118), получим:

$$\frac{w_{\text{ср}2}}{w_0} = 0,48 \cdot \frac{w_m}{w_0}, \quad (122)$$

или

$$w_{\text{ср}2} = 0,48 \cdot w_m. \quad (123)$$

Следовательно, *средняя по расходу скорость в основном участке струи превышает среднюю по площади скорость в 2,4 раза.*

Полученные характеристики произвольного поперечного сечения струи (в том числе и переходного) справедливы только в пределах её основного участка. Замечательно, что эти характеристики не зависят от индивидуальных свойств струи и позволяют по одному измерению скорости в центре сечения определить размеры этого сечения, расход газа через это сечение, среднюю скорость потока и т. д. Разумеется, это справедливо лишь при отсутствии особых внешних причин, могущих нарушить подобие скоростных профилей струй.

В приведённых формулах все характеристики сечения выражены через скорость в центре этого сечения, последняя же зависит от расстояния x между полюсом и рассматриваемым поперечным сечением. Введение в формулы этого расстояния позволило бы непосредственно (т. е. без измерения скорости на оси) вычислить характеристики сечения по заданному расстоянию. Однако это не может быть достигнуто без помощи некоторого коэффициента a , значение которого для каждой струи

должно быть найдено опытным путём. Границы струи определяются лучом

$$\varphi_{\text{гр}} = \frac{R_{\text{гр}}}{ax},$$

где $\varphi_{\text{гр}}$ — безразмерная ордината границы струи; из теории струи удаётся получить значение $\varphi_{\text{гр}}$; для осесимметричной струи $\varphi_{\text{гр}} = 3,4$, откуда

$$\frac{R_{\text{гр}}}{R_0} = \frac{3,4 \cdot ax}{R_0}. \quad (124)$$

При этом из формулы (115) можно установить непосредственную связь между безразмерной скоростью на оси и безразмерным расстоянием:

$$\frac{\omega_m}{\omega_0} = \frac{3,3}{3,4} \cdot \frac{R_0}{ax} = 0,96 \cdot \frac{R_0}{ax}. \quad (125)$$

Итак, скорость в центре сечения осесимметричной струи обратно пропорциональна расстоянию от полюса:

$$\omega_m = \frac{\text{const}}{x}.$$

Безразмерный расход в поперечном сечении, выраженный через расстояние от полюса струи, равен, как это видно из (118):

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{2,13}{0,96} \cdot \frac{ax}{R_0} = 2,22 \cdot \frac{ax}{R_0}. \quad (126)$$

Для определения абсциссы переходного сечения следует воспользоваться формулой (125) и условием

$$\omega_{m\Pi} = \omega_r.$$

Таким образом, для абсциссы переходного сечения получаем:

$$\frac{ax_{\Pi}}{R_0} = 0,96. \quad (127)$$

Глубина полюса струи h_0 , т. е. расстояние между точкой пересечения границ и срезом сопла, находится из геометрических соотношений в предположении, что углы расширения струи в основном и начальном участках одинаковы¹⁾:

$$\frac{ah_0}{R_0} = 0,29. \quad (128)$$

¹⁾ Иначе говоря, на основании (124), (116) и (127) должно быть:

$$\frac{R_0}{ah_0} = \frac{3,3R_0}{ax_{\Pi}},$$

откуда и приходим к (128).

Наконец, расстояние s_0 между срезом сопла и переходным сечением определяется из разности выражений (127) и (128):

$$\frac{as_0}{R_0} = 0,96 - 0,29 = 0,67. \quad (129)$$

Это расстояние является наименьшим, при котором действительны все приведённые формулы. Для более близких расстояний существуют другие формулы (формулы начального участка), которые здесь не рассматриваются¹⁾.

Во всех приведённых выше формулах под расстоянием x подразумевается расстояние от полюса до рассматриваемого сечения. При желании отсчитывать расстояния от среза сопла необходимо в формулах сделать замену:

$$\frac{ax}{R_0} = \frac{as}{R_0} + 0,29. \quad (130)$$

Здесь s — расстояние между рассматриваемым сечением и срезом сопла. При этом формулы (125) и (126) приобретают вид

$$\frac{w_m}{w_0} = \frac{0,96}{\frac{as}{R_0} + 0,29}, \quad (131)$$

$$\frac{Q}{Q_0} = 2,22 \left(\frac{as}{R_0} + 0,29 \right). \quad (132)$$

Тангенс бокового угла расширения струи, очевидно, равен:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_{\text{гр}}}{2} = \frac{R_{\text{гр}}}{x} = a \cdot \frac{R_{\text{гр}}}{ax} = a\varphi_{\text{гр}} = 3,4 \cdot a;$$

здесь $\alpha_{\text{гр}}$ — центральный угол расширения струи, $3,4 = \varphi_{\text{гр}}$ — безразмерная ордината границы струи. При обычном значении постоянной $a = 0,07$ получается центральный угол расширения струи порядка $\alpha_{\text{гр}} = 14^\circ$.

Тангенс угла сужения ядра постоянных скоростей отыскиваем из условия

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_{\text{п}}}{2} = \frac{R_0}{s_0} = a \cdot \frac{R_0}{as_0}.$$

откуда в соответствии с выражением (129)

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_{\text{п}}}{2} = \frac{a}{0,67} = 1,33 \cdot a.$$

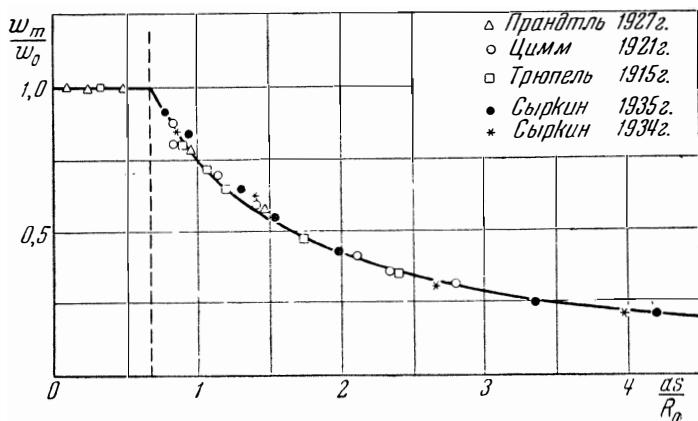
Полагая $a = 0,07$, получаем центральный угол сужения ядра постоянных скоростей порядка $\alpha_{\text{п}} = 7^\circ$.

¹⁾ См. книгу автора, указанную в сноске на стр. 241

Для сравнения формулы (131) с результатами экспериментов приводится фиг. 114, составленная на основании опытов.

При обработке опытных данных приходилось принимать во внимание первоначальный профиль скорости на срезе сопла.

Оказалось, что при равномерном профиле скорости $\left(\left| \frac{\omega_{\max}}{\omega_{\text{ср}}} \right|_0 = 1 \right)$ численное значение опытной постоянной равно: $a = 0,066$ (светлые треугольники и квадраты). При более выпуклом поле ско-



Фиг. 114. Изменение скорости вдоль оси струи круглого сечения.

ростей $\left(\left| \frac{\omega_{\max}}{\omega_{\text{ср}}} \right|_0 = 1,1 \right)$ значение опытного коэффициента увеличивается: $a = 0,070$ (светлые кружки); ещё бóльшая вытянутость профиля скорости $\left(\left| \frac{\omega_{\max}}{\omega_{\text{ср}}} \right|_0 = 1,25 \right)$ приводит к ещё большему значению постоянной: $a = 0,076$ (тёмные кружки и звёздочки).

Приведённые значения a зависят от начального профиля скорости на выходе из сопла и соответствуют струям с «естественной турбулентностью». С. Н. Сыркин и Д. И. Ляховский производили искусственную турбулилизацию, причём установка на срезе сопла турбулизирующей решётки из цилиндрических прутков повысила значение коэффициента до $a = 0,089$, а установка наклонных под углом $\alpha = 45^\circ$ к оси трубы направляющих лопаток, закручивающих поток, повысила a до значения $a = 0,27$. Этими данными следует пользоваться в случаях, при которых нет возможности определить опытную постоянную a путём непосредственного измерения, например, осевой скорости в центре какого-нибудь поперечного сечения струи.

Для плоскопараллельной струи постоянство количества движения приводит к соотношению

$$w_m^2 \cdot x \int_0^{\frac{b_{\text{гр}}}{x}} \left(\frac{w}{w_m} \right)^2 \cdot d \frac{y}{x} = \text{const}$$

($b_{\text{гр}}$ — полуширина сечения струи); вследствие универсальности профилей скорости интеграл имеет постоянное значение:

$$\int_0^{\frac{b_{\text{гр}}}{x}} \left(\frac{w}{w_m} \right)^2 d \frac{y}{x} = \text{const}.$$

Поэтому закон падения скорости вдоль оси плоскопараллельной струи имеет следующий вид:

$$w_m = \frac{\text{const}}{\sqrt{x}}. \quad (133)$$

Подробно на случае плоскопараллельной струи мы не останавливаемся, отметим лишь, что падение безразмерной скорости вдоль оси плоскопараллельной струи выражается формулой

$$\frac{w_m}{w_0} = \frac{1,2}{\sqrt{\frac{ax}{b_0} + 0,41}}, \quad (134)$$

где b_0 — полуширина начального сечения струи, a — экспериментальная константа, которая для обычной плоскопараллельной струи имеет значение порядка $a = 0,10 - 0,11$. Закон (134) хорошо согласуется с опытными данными.

В инженерной практике часто приходится иметь дело со свободными струями, которые имеют температуру, отличную от окружающей. Решение задачи о распространении тепла из покоящегося воздуха в струю (и обратно) возможно лишь после того, как станет известным изменение температуры вдоль струи и в её поперечных сечениях.

Подобие скоростных полей предопределяет подобие полей температуры (в нагретых и охлаждённых струях), полей концентраций (в струях с примесями) и вообще распределений всех тех физических свойств, которые связаны с переносом вещества струи.

Естественно, что поскольку изменение этих свойств (например, температуры) в пограничном слое струи происходит за счёт перемешивания струи с окружающей средой, постольку в рассмотрении следует брать не абсолютное значение интересующей

нас величины в данной точке, а избыточное над соответствующим значением в окружающей среде.

Введём в рассмотрение избыточные температуры:

а) разность между значениями температуры в данной точке струи и в окружающей среде

$$\Delta T = T - T_{\text{н}};$$

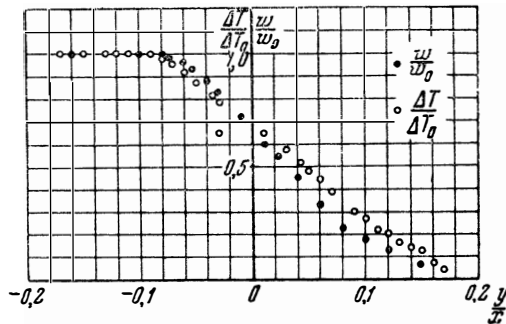
б) разность между значениями температуры на оси струи и в окружающей среде

$$\Delta T_m = T_m - T_{\text{н}};$$

в) избыточную температуру в начальном сечении струи (в устье насадка)

$$\Delta T_0 = T_0 - T_{\text{н}}.$$

Характер распределения избыточных значений температуры в свободной струе, как показывают опыты, аналогичен харак-



Фиг. 115. Поля температуры и скорости в пограничном слое начального участка струи круглого сечения.

теру распределения значений скорости. В ядре постоянной скорости начального участка температура постоянна и равна температуре истечения. В основном участке температурные границы струи по мере удаления от сопла расширяются, тогда как избыточные значения температуры на оси потока убывают.

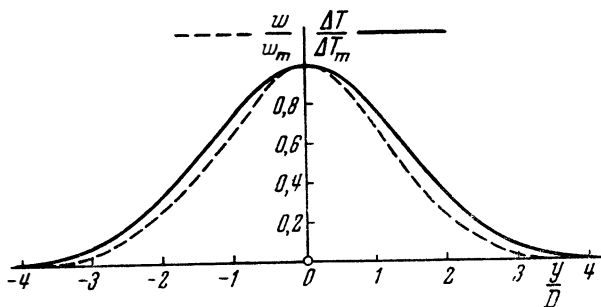
На фиг. 115 приведено поле значений безразмерной избыточной температуры

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_0} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

полученное автором для пограничного слоя начального участка воздушной струи круглого сечения диаметром 100 мм на расстоянии 250 мм от сопла (кружки). Абсциссы (x) отсчиты-

ваются от кромки сопла, а ординаты (y) — от линии, проведённой параллельно направлению потока из кромки сопла. Для сравнения рядом с температурным полем нанесено скоростное поле (точки), полученное в том же сечении струи. Скорость истечения струи из сопла составляла $w_0 = 25$ м/сек, избыточная температура в выходном сечении сопла равнялась $\Delta T_0 = 35^\circ \text{Ц}$.

На фиг. 116 приведено поле температур (сплошная линия), снятое Руденом в основном участке воздушной струи круглого сечения диаметром $D_0 = 72$ мм на расстоянии 1080 мм от сопла.



Фиг. 116. Поля температуры и скорости в основном участке струи круглого сечения.

Избыточная температура истечения равнялась $\Delta T_0 = 17^\circ \text{Ц}$. Результаты опыта обработаны в виде зависимости

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_m} = f_T \left(\frac{y}{D} \right).$$

Здесь y отсчитывается от оси струи. Для сравнения на фиг. 115 нанесено скоростное поле (пунктир), снятое в том же сечении:

$$\frac{w}{w_m} = f \left(\frac{y}{D} \right).$$

Фиг. 115 и 116 свидетельствуют о том, что экспериментальные кривые безразмерной скорости и безразмерной избыточной температуры, полученные в одном и том же поперечном сечении свободной струи, не совпадают.

Теория струи связывает безразмерную избыточную температуру с безразмерной скоростью следующей зависимостью¹⁾:

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_m} = \sqrt{\frac{w}{w_m}}. \quad (135)$$

¹⁾ Абрамович Г. Н. Турбулентные свободные струи жидкостей и газов. Энергоиздат, 1948.

Таким образом, по распределению скорости в поперечном сечении струи можно судить о распределении температуры. На основании формул (102) и (135) получаем также:

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_m} = 1 - \left(\frac{y}{R_{\text{ГР}}} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (136)$$

Закон распределения температуры вдоль оси основного участка струи можно установить тем же методом, что и закон распределения скорости, с той лишь разницей, что вместо постоянства количества движения надо использовать постоянство теплосодержания струи. В самом деле, при определении теплоемкости струи по избыточным температурам жидкости, подсасываемая струей из окружающего пространства, не является теплоносителем, так как её избыточная температура равна нулю ($\Delta T_{\text{н}} = 0$). Иначе говоря, избыточное теплосодержание всей массы жидкости, протекающей через произвольное сечение струи, равно избыточному теплосодержанию первоначальной массы, вытекающей за равный промежуток времени из сопла.

Диффузия тепла в струе выражается в переносе его через границу, проходящую между первоначальной массой и присоединённой массой, за счёт чего, как упоминалось выше, температура на оси струи падает, а поля температуры в поперечных сечениях струи постепенно *сглаживаются*. Постоянство теплосодержания свободной струи, подсчитанного по избыточным температурам, выражается следующим соотношением:

$$\int_0^m \Delta T \cdot dm = \int_F \rho \cdot \Delta T \cdot \omega \cdot dF = \text{const}.$$

В применении к струе круглого сечения получим:

$$2\pi \int_0^{R_{\text{ГР}}} \rho \cdot \Delta T \cdot \omega \cdot y \cdot dy = \pi \cdot \rho_0 \Delta T_0 \cdot \omega_0 \cdot R_0^2, \quad (137)$$

откуда в случае несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$)

$$2 \int_0^{\frac{R_{\text{ГР}}}{R_0}} \frac{\Delta T}{\Delta T_0} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{y}{R_0} \cdot d \frac{y}{R_0} = 1. \quad (138)$$

Вводя безразмерную ординату $\eta = \frac{y}{R_{\text{ГР}}}$, имеем:

$$\frac{y}{R_0} = \eta \cdot \frac{R_{\text{ГР}}}{R_0},$$

и далее:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega}{\omega_m} \cdot \frac{\omega_m}{\omega_0},$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_0} = \frac{\Delta T}{\Delta T_m} \cdot \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0}.$$

В трёх последних выражениях вторые множители представляют собой постоянные для данного сечения величины, которые следует вынести из-под знака интеграла, в связи с чем выражение (137) можно записать так:

$$2 \cdot \frac{\omega_m}{\omega_0} \cdot \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} \left(\frac{R_{\text{гр}}}{R_0} \right)^2 \cdot \int_0^1 \frac{\Delta T}{\Delta T_m} \cdot \frac{\omega}{\omega_m} \cdot \eta \cdot d\eta = 1.$$

Определённый интеграл имеет постоянное значение, которое с учётом формулы (135) можно взять из таблицы V:

$$\int_0^1 \frac{\Delta T}{\Delta T_m} \frac{\omega}{\omega_m} \eta \cdot d\eta = \int_0^1 \left(\frac{\omega}{\omega_m} \right)^{1,5} \eta \cdot d\eta = 0,064.$$

Используя равенства (124) и (125), находим:

$$\Delta T_m = \frac{\text{const}}{x},$$

или

$$\frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} = 0,7 \cdot \frac{R_0}{ax}.$$

Основываясь на выражении (130), получаем окончательную форму зависимости избыточной температуры на оси струи от расстояния до сопла:

$$\frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} = \frac{0,7}{\frac{as}{R_0} + 0,29}. \quad (139)$$

В плоскопараллельной струе принцип сохранения избыточного теплосодержания можно выразить следующим образом:

$$\Delta T_m \cdot \omega_m \cdot x \cdot \int_0^{\frac{b_{\text{гр}}}{x}} \frac{\Delta T}{\Delta T_m} \cdot \frac{\omega}{\omega_m} \cdot d \frac{y}{x} = \text{const}. \quad (140)$$

Постоянство значения интеграла при учёте зависимости (134) даёт закон падения температуры вдоль оси плоскопараллельной струи:

$$\Delta T_m = \frac{\text{const}}{\sqrt{x}}. \quad (141)$$

В довершение предварительного анализа тепловых свойств свободной струи докажем одну теорему о связи между средними температурами и средними скоростями. Из постоянства количества движения в струе следует, что произведение секундной массы, протекающей через произвольное сечение струи на *среднюю по расходу скорость* является постоянной величиной

$$\rho \cdot Q \cdot w_{\text{ср2}} = \rho \cdot Q_0 \cdot w_0,$$

т. е.

$$\frac{Q}{Q_0} \frac{w_{\text{ср2}}}{w_0} = 1. \quad (142)$$

В свою очередь постоянство теплосодержания указывает на то, что произведение массового расхода на *среднюю по расходу избыточную температуру* также не изменяется с переходом от сечения к сечению:

$$\rho \cdot Q \cdot \Delta T_{\text{ср2}} = \rho \cdot Q_0 \cdot \Delta T_0,$$

т. е. при $\rho = \text{const}$

$$\frac{Q}{Q_0} \frac{\Delta T_{\text{ср2}}}{\Delta T_0} = 1. \quad (143)$$

Сравнивая между собой условия (142) и (143), обнаруживаем, что падение средней по расходу температуры вдоль свободной струи подчиняется такому же закону, что и падение средней по расходу скорости:

$$\frac{\Delta T_{\text{ср2}}}{\Delta T_0} = \frac{w_{\text{ср2}}}{w_0}. \quad (144)$$

Интересно подчеркнуть, что условие (144), характеризующее соотношение средних величин, выполняется, несмотря на то, что температурные и скоростные профили свободной струи неподобны.

Выше было указано, что диффузия всякого рода примесей, находящихся иногда в струе во взвешенном состоянии (например, газовые примеси или дисперсная пыль в воздушной струе), имеет очень много общего с распространением тепла.

Если ввести в рассмотрение понятие *избыточной концентрации* (разность между местной концентрацией примесей в струе и концентрацией вне струи), то избыточное содержание примеси окажется одинаковым в различных поперечных сечениях струи, точно так же как оказывается неизменным теплосодержание струи.

Принцип постоянства избыточного содержания примеси даёт возможность найти законы распределения концентрации в поперечных сечениях и вдоль оси струи, причём оказывается, что законы распределения избыточных концентраций в точности

совпадают с законами распределения избыточных температур. В частности, соотношение (144) применимо и к средним значениям концентрации, если осреднение произведено по расходу жидкости:

$$\frac{\Delta x_{\text{ср2}}}{\Delta x_0} = \frac{x_{\text{ср2}} - x_{\text{н}}}{x_0 - x_{\text{н}}} = \frac{\Delta T_{\text{ср2}}}{\Delta T_0} = \frac{w_{\text{ср2}}}{w_0}. \quad (145)$$

Здесь $x_{\text{ср}}$ — среднее по расходу значение концентрации примеси в данном сечении струи, $x_{\text{н}}$ — концентрация в окружающем помещении, x_0 — то же в начальном сечении струи.

Изменение избыточной концентрации примеси в поперечном сечении струи подчиняется закону (135):

$$\frac{\Delta x}{\Delta x_m} = \frac{\Delta T}{\Delta T_m} = \sqrt{\frac{w}{w_m}}. \quad (146)$$

Изменение концентрации примеси вдоль оси струи круглого сечения определяется выражением (139):

$$\frac{\Delta x_m}{\Delta x_0} = \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} = \frac{0,7}{\frac{as}{R_0} + 0,29}. \quad (147)$$

§ 5. Горячая и холодная газовые струи

Закон постоянства количества движения в струе предопределяет более быстрое затухание скорости в том случае, если струя распространяется в среде более плотной, чем её вещество. Это в полной мере относится к распространению горячей воздушной струи в холодном более плотном воздухе.

Кроме того, в горячей струе остаётся постоянным теплосодержание, вычисляемое по избыточной (по отношению к окружающей среде) температуре.

В настоящем параграфе мы найдём приближённые формулы для определения скорости и температуры на оси осесимметричной горячей струи. В отличие от случая слабого подогрева (когда газ можно считать несжимаемой жидкостью) мы рассмотрим случай произвольного подогрева сжимаемого газа.

Составим исходные уравнения. В основу расчёта положим закон постоянства количества движения в поперечном сечении струи

$$2\pi \int_0^{R_{\text{ГР}}} \rho \cdot w^2 \cdot y \cdot dy = \pi \cdot \rho_0 \cdot w_0^2 \cdot R_0^2 \quad (148)$$

и закон постоянства избыточного теплосодержания

$$2\pi \int_0^{R_{\text{ГР}}} \rho \cdot w \cdot \Delta T \cdot y \cdot dy = \pi \cdot \rho_0 \cdot w_0 \cdot \Delta T_0 \cdot R_0^2. \quad (149)$$

Выразим их в безразмерном виде

$$2 \int_0^{\frac{R_{\text{ГР}}}{R_0}} \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{w}{w_0} \right)^2 \cdot \frac{y}{R_0} \cdot d \frac{y}{R_0} = 1, \quad (150)$$

$$2 \int_0^{\frac{R_{\text{ГР}}}{R_0}} \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{w}{w_0} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta T_0} \cdot \frac{y}{R_0} \cdot d \frac{y}{R_0} = 1. \quad (151)$$

Уравнение состояния для случая $p = \text{const}$ позволяет заметить отношение плотностей обратным отношением температур:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{T_0}{T};$$

при этом исходные выражения в самом общем виде выглядят так:

$$2 \int_0^{\frac{R_{\text{ГР}}}{R_0}} \frac{T_0}{T} \left(\frac{w}{w_0} \right)^2 \cdot \frac{y}{R_0} \cdot d \frac{y}{R_0} = 1, \quad (152)$$

$$2 \int_0^{\frac{R_{\text{ГР}}}{R_0}} \frac{T_0}{T} \cdot \frac{w}{w_0} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta T_0} \cdot \frac{y}{R_0} \cdot d \frac{y}{R_0} = 1. \quad (153)$$

Преобразуем каждый из сомножителей, стоящих под знаком интеграла, с целью отделить постоянные величины от переменных. Множитель $\frac{y}{R_0}$ может быть представлен в следующем виде:

$$\frac{y}{R_0} = \frac{y}{R_{\text{ГР}}} \cdot \frac{R_{\text{ГР}}}{R_0}.$$

Далее

$$\frac{w}{w_0} = \frac{w}{w_m} \cdot \frac{w_m}{w_0}, \quad \frac{\Delta T}{\Delta T_0} = \frac{\Delta T}{\Delta T_m} \cdot \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0}.$$

Кроме того, можно преобразовать множитель

$$\frac{T_0}{T} = \frac{T_0}{T_n + \Delta T} = \frac{T_0}{T_n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\Delta T}{T_n}};$$

переменная часть его

$$\frac{\Delta T}{T_n} = \frac{\Delta T}{\Delta T_m} \cdot \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} \cdot \frac{\Delta T_0}{T_n},$$

где

$$\frac{\Delta T_0}{T_n} = \frac{T_0 - T_n}{T_n} = \frac{T_0}{T_n} - 1.$$

Вводя обозначение для безразмерного начального подогрева

$$\theta^* = \frac{T_0}{T_n},$$

перепишем множитель $\frac{T_0}{T}$ в следующем виде:

$$\frac{T_0}{T} = \theta \cdot \frac{1}{1 + (\theta - 1) \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta T_m}}.$$

После подстановки этих значений в (152) и (153) получаем исходные соотношения в окончательном виде:

$$2\theta \left(\frac{\omega_m}{\omega_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{R_{\text{ГР}}}{R_0}\right)^2 \cdot \int_0^1 \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{1 + (\theta - 1) \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta T_m}} = 1 \quad (154)$$

и

$$2\theta \frac{\omega_m}{\omega_0} \cdot \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} \left(\frac{R_{\text{ГР}}}{R_0}\right)^2 \int_0^1 \frac{\frac{\omega}{\omega_m} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta T_m} \cdot \eta \cdot d\eta}{1 + (\theta - 1) \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta T_m}} = 1. \quad (155)$$

Двучленные знаменатели выражений, находящиеся под знаком интеграла, упрощаются в двух крайних случаях очень слабого и очень сильного подогревов.

а) *Случай очень слабого подогрева струи.* В этом случае $\theta \approx 1$, и второй член знаменателя становится пренебрежимо малым по сравнению с единицей. Тогда (154) и (155) соответственно обращаются в выражения

$$2\theta \left(\frac{\omega_m}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{R_{\text{ГР}}}{R_0}\right)^2 \cdot \int_0^1 \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \eta \cdot d\eta = 1 \quad (156)$$

и

$$2\theta \frac{\omega_m}{\omega_0} \cdot \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} \left(\frac{R_{\text{ГР}}}{R_0}\right)^2 \cdot \int_0^1 \frac{\omega}{\omega_m} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta T_m} \cdot \eta \cdot d\eta = 1. \quad (157)$$

б) *Случай бесконечно сильного подогрева струи.* При этом $\theta \rightarrow \infty$, и единица становится пренебрежимо малой по сравнению со вторым членом знаменателя. В таком случае выражения (154) и (155) переходят в следующие:

$$2 \cdot \left(\frac{\omega_m}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{R_{\text{ГР}}}{R_0}\right)^2 \cdot \frac{\Delta T_0}{\Delta T_m} \cdot \int_0^1 \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \cdot \frac{\Delta T_m}{\Delta T} \cdot \eta \cdot d\eta = 1 \quad (158)$$

и

$$2 \cdot \frac{\omega_m}{\omega_0} \left(\frac{R_{\text{ГР}}}{R_0} \right)^2 \int_0^1 \frac{\omega}{\omega_m} \cdot \eta \cdot d\eta = 1. \quad (159)$$

Чтобы приложить полученные результаты к расчёту, нужно сделать ещё следующие предположения.

1. Распределение скорости и распределение температуры в поперечном сечении струи с подогревом не изменяются. Это предположение позволяет заменить интегралы в выражениях (156) и (159) числами, заимствованными из таблицы V:

$$\int_0^1 \left(\frac{\omega}{\omega_m} \right)^2 \eta \cdot d\eta = 0,0464, \quad \int_0^1 \frac{\omega}{\omega_m} \eta \cdot d\eta = 0,0985,$$

и упростить сами выражения:

$$\theta \left(\frac{\omega_m}{\omega_0} \right)^2 \left(\frac{R_{\text{ГР}}}{R_0} \right)^2 = 10,8, \quad (160)$$

$$\frac{\omega_m}{\omega_0} \left(\frac{R_{\text{ГР}}}{R_0} \right)^2 = 5,1. \quad (161)$$

2. Связь между безразмерными значениями температуры и скорости в поперечном сечении струи с подогревом не изменяется:

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_m} = \sqrt{\frac{\omega}{\omega_m}}.$$

При этом интегралы в выражениях (157) и (158) также могут быть заменены числами

$$\int_0^1 \left(\frac{\omega}{\omega_m} \right)^2 \frac{\Delta T_m}{\Delta T} \cdot \eta \cdot d\eta = \int_0^1 \left(\frac{\omega}{\omega_m} \right)^{1,5} \cdot \eta \cdot d\eta = 0,064,$$

а сами выражения дают:

$$\theta \cdot \frac{\omega_m}{\omega_0} \cdot \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} \cdot \left(\frac{R_{\text{ГР}}}{R_0} \right)^2 = 7,84 \quad (162)$$

и

$$\left(\frac{\omega_m}{\omega_0} \right)^2 \left(\frac{R_{\text{ГР}}}{R_0} \right)^2 \cdot \frac{\Delta T_0}{\Delta T_m} = 7,84. \quad (163)$$

Из сопоставления (160) и (162) следует, что при очень слабом подогреве существует пропорциональная связь между безразмерной скоростью и температурой в каждом поперечном сечении струи:

$$\left| \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} \right|_{\theta \approx 1} = 0,72 \cdot \frac{\omega_m}{\omega_0}.$$

Сопоставление же (161) и (163) приводит к аналогичной зависимости для случая бесконечно сильного начального подогрева струи:

$$\left| \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} \right|_{\theta \rightarrow \infty} = 0,65 \cdot \frac{\omega_m}{\omega_0}.$$

Как видно из рассмотренных крайних случаев, существует прямая пропорциональность между безразмерными температурой и скоростью на оси струи:

$$\frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} = k \cdot \frac{\omega_m}{\omega_0}.$$

Коэффициент пропорциональности k зависит от степени начального подогрева, но эта зависимость выражается так слабо, что даже при бесконечно сильном начальном подогреве струи значение коэффициента k всего на 10% отличается от его значения при очень слабом подогреве. Поэтому для приближённого расчёта можно полагать ¹⁾:

$$k = 0,72 = \text{const},$$

а соотношение

$$\frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} = 0,72 \cdot \frac{\omega_m}{\omega_0} \quad (164)$$

справедливым для всех практически интересных случаев начального подогрева струи.

Заметим, что эти выводы получены безотносительно к расстоянию между рассматриваемым поперечным сечением и полюсом, а также независимо от турбулентности потока, начального распределения скорости на срезе сопла и других факторов, учитываемых опытным коэффициентом. Теперь следует установить зависимость границ струи и безразмерных осевых скорости и температуры от расстояния x . Для этого потребуется ещё одно дополнительное предположение. Сформулируем его следующим образом.

3. Границы горячей струи, как и холодной, прямолинейны и совпадают между собой, т. е. угол раскрытия границ струи не зависит от степени подогрева. Таким образом, мы допускаем, что для нагретой струи сохраняется пропорциональность между радиусом поперечного сечения струи и расстоянием:

$$R_{\text{гр}} = 3,4 ax. \quad (165)$$

¹⁾ Это же значение k получается в несжимаемой жидкости, что следует из формул (131) и (139).

В безразмерном виде эта связь такова:

$$\frac{R_{\text{гр}}}{R_0} = 3,4 \cdot \frac{ax}{R_0}. \quad (166)$$

Сделанных трёх предположений достаточно для выяснения всех основных закономерностей нагретой струи.

Перейдём теперь к составлению расчётных формул.

Затухание скорости и температуры вдоль оси горячей струи может быть определено из уравнений (154) и (155).

Для определения закона падения скорости в случае произвольного подогрева используем соотношение (154). Делая замену

$$\frac{R_{\text{гр}}}{R_0} = 3,4 \cdot \frac{ax}{R_0}, \quad \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} = 0,72 \cdot \frac{w_m}{w_0}$$

и прибегая к обозначению

$$\frac{1}{A} = 2 \cdot 3,4^2 \int_0^1 \frac{\left(\frac{w}{w_m}\right)^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{1 + 0,72 \cdot d \sqrt{\frac{w}{w_m}}},$$

где

$$d = (\theta - 1) \frac{w_m}{w_0},$$

получим формулу, позволяющую вычислять безразмерное расстояние $\frac{ax}{R_0}$, на котором находится поперечное сечение струи с заданной в его центре безразмерной скоростью $\frac{w_m}{w_0}$:

$$\frac{ax}{R_0} = \frac{w_0}{w_m} \cdot \sqrt{\frac{A}{\theta}}. \quad (167)$$

Значения параметра A при разных значениях d приведены в таблице VI. Данные таблицы VI изображены на фиг. 117. Как видно, функция A для приведённых значений d линейна, причём уравнение прямой имеет вид

$$A \approx 0,5d + 0,935. \quad (168)$$

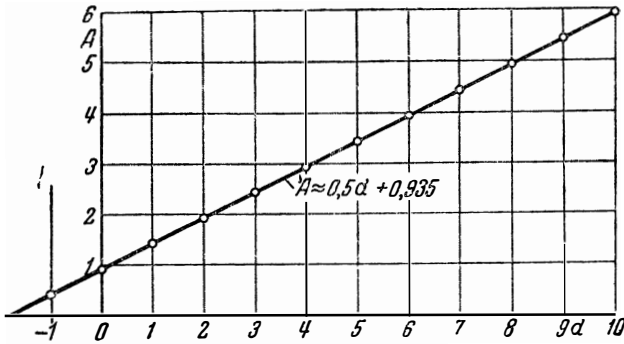
Таблица VI

d	A	d	A
0	0,94	6	3,94
1	1,45	7	4,42
2	1,95	8	4,95
3	2,45	9	5,44
4	2,94	10	5,95
5	3,45		

Пользуясь этим уравнением, можно составить интерполяционную рабочую формулу, с достаточной степенью точности охватывающую весь диапазон начального подогрева струи:

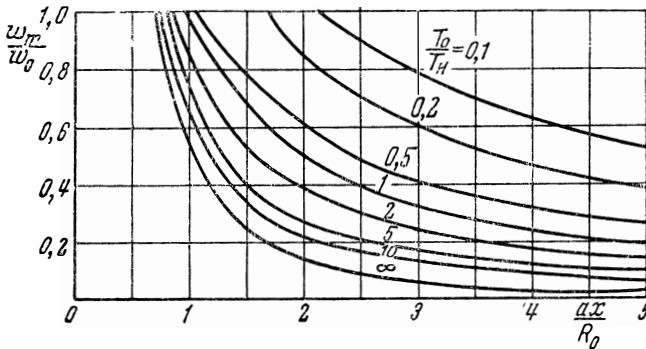
$$\frac{ax}{R_0} = \frac{0,96}{\sqrt{\theta}} \cdot \frac{w_0}{w_m} \cdot \sqrt{1 + 0,535(\theta - 1) \cdot \frac{w_m}{w_0}}. \quad (169)$$

Обычно в практике приходится по заданному расстоянию x определять скорость на оси струи ω_m ; для того чтобы избежать длинных вычислений, нами на основании этой формулы построен



Фиг. 117. Значение параметра A в зависимости от d .

график (фиг. 118). Из графика следует, что с увеличением степени начального подогрева осевая скорость струи затухает быстрее, а начальный участок сокращается.



Фиг. 118. Изменение скорости вдоль оси струи в зависимости от начального подогрева.

Аналогичная формула связи между расстоянием $\frac{ax}{R_0}$ и температурой $\frac{\Delta T_m}{\Delta T_0}$ в соответствии с (155) или (164) имеет вид

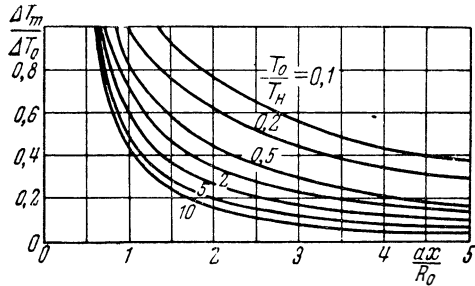
$$\frac{ax}{R_0} = \frac{0,7}{\sqrt{\theta}} \cdot \frac{\Delta T_0}{\Delta T_m} \sqrt{1 + 0,735(\theta - 1) \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0}}. \quad (170)$$

Эта зависимость представлена графически на фиг. 119.

На фиг. 118 и 119 нанесены также кривые изменения скорости и температуры по оси струи, в начальном сечении которой

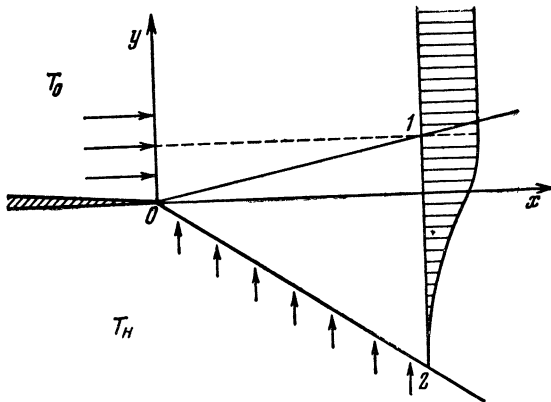
температура ниже, чем в окружающем воздухе. Как видим, дальность струи существенно возрастает при снижении её начальной температуры.

Изменение разности температур между струёй в её начальном сечении и окружающей средой ведёт к изменению длины началь-



Фиг. 119. Зависимость избыточной температуры на оси струи от безразмерного расстояния до начального сечения.

ного участка струи по сравнению с изотермическим случаем; при распространении струи в более горячей среде ядро постоянной скорости удлиняется, а в более холодной среде — укорачивается. Это свойство начального участка струи объясняется следующим



Фиг. 120. Схема пограничного слоя неизоэтермической струи.

образом. Пусть, например, плоскопараллельная струя воздуха температуры T_0 вытекает со скоростью w_0 в пространство с неподвижным воздухом температуры T_H . Тогда в зоне турбулентного смешения (фиг. 120) устанавливается непрерывное распределение скорости, температуры и плотности.

Ввиду постоянства давления во всём пространстве количество движения остаётся неизменным:

$$\rho_0 \omega_0^2 y_1 = \int_1^2 \rho \omega^2 dy.$$

Здесь в левой части стоит количество движения секундной массы невозмущённого потока, втекающей в контур 0120 через грань 01 , в правой части — количество движения секундной массы в зоне смешения, вытекающей через грань $1-2$; отсутствие других членов в этом уравнении объясняется тем, что через грань, параллельную направлению невозмущённого потока, расход воздуха равен нулю, а скорость воздуха, подсосываемого к струе через грань $2-0$, перпендикулярна к направлению невозмущённого потока.

Из опытных данных следует, что поле скорости в зоне смешения не зависит от разности температур в струе и в окружающем пространстве; в § 4 показано, что угол внешней границы струи $x02$ определяется отношением пульсационной скорости к средней скорости, т. е. при неизменном поле скорости этот угол остаётся неизменным, не зависящим от степени неизотермичности струи, но, как это видно из уравнения количества движения, угол внутренней границы $10x$ должен изменяться с изменением отношения плотностей $\frac{\rho_H}{\rho_0}$ в струе и окружающем воздухе.

В самом деле, при $\rho_H > \rho_0$ среднее значение величины $\frac{\rho}{\rho_0}$, стоящей под интегралом

$$y_1 = \int_1^2 \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{w}{W_0} \right)^2 dy,$$

больше единицы, но тогда из условия сохранения количества движения ордината y_1 , а вместе с ней и угол внутренней границы пограничного слоя в горячей струе должны быть больше, чем в изотермической струе; при истечении холодной струи в пространство, заполненное горячим газом ($\rho_H < \rho_0$), средняя величина $\frac{\rho}{\rho_0}$ меньше единицы, т. е. ордината y_1 и угол $10x$ должны быть меньше, чем в изотермической струе.

Мы рассматривали распространение «готовых» неизотермических струй, подогрев или охлаждение которых осуществляется заранее (до смешения с окружающим воздухом).

Остановимся теперь кратко на таком случае, когда теплообразование происходит в объёме самой струи. Предположим для простоты, что подвод тепла (например, горение) осуществляется

на весьма коротком участке $0-1$ (фиг. 121), расположенном у среза сопла.

Для того чтобы обойти вопрос о количестве тепла и способе его подвода будем считать, что температура струи T_1 в сечении 1 известна. Параметры струи в момент истечения (R_0 , ω_0 , ρ_0 , p_0 и T_0) должны быть также известны. Посмотрим, какие параметры остаются неизменными и какие и в какой степени изменяются при переходе струи от сечения 0 к сечению 1 . Опыт показывает, что давление в струе примерно постоянно и равно давлению в окружающей атмосфере:

$$p_1 = p_0.$$

Это условие позволяет воспользоваться уравнением состояния в следующей форме:

$$\frac{p_1}{\rho_0} = \frac{T_0}{T_1}. \quad (171)$$

Постоянство давления приводит к постоянству количества движения на участке $0-1$:

$$m_1 \cdot \omega_1 = m_0 \cdot \omega_0.$$

Изменением массового расхода газа на участке $0-1$ можно пренебречь:

$$m_1 \approx m_0.$$

Из сопоставления двух последних соотношений вытекает важное расчётное условие—равенство скоростей в обоих сечениях факела горения¹⁾:

$$\omega_1 = \omega_0.$$

Уравнение неразрывности

$$\rho_1 \cdot F_1 \cdot \omega_1 = \rho_0 \cdot F_0 \cdot \omega_0$$

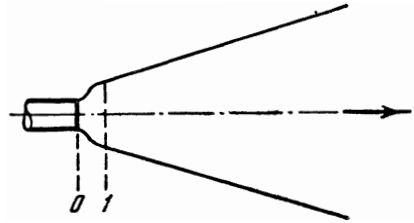
в сочетании с условием постоянства скорости даёт:

$$\rho_1 \cdot F_1 = \rho_0 \cdot F_0,$$

или

$$\frac{F_1}{F_0} = \frac{\rho_0}{\rho_1}. \quad (172)$$

Последнее соотношение с учётом (171) позволяет определить недостающую геометрическую характеристику сечения 1 в зави-



Фиг. 121. Упрощённая схема факела горения.

¹⁾ Факелом горения называют горящую струю.

симости от отношения значений температуры:

$$\frac{F_1}{F_0} = \frac{T_1}{T_0} \quad (173)$$

и

$$\frac{R_1}{R_0} = \sqrt{\frac{T_1}{T_0}}. \quad (174)$$

Таким образом, в сечении 1 известны все начальные условия, позволяющие рассчитать факел горения как горячую струю. При расчёте можно радиус струи R_1 рассматривать как радиус некоторого фиктивного сопла, срезом которого является сечение 1 .

Определение температуры T_1 не входит в задачу данного расчёта; она может быть найдена из баланса тепла.

Дальнейший расчёт факела горения произведём по формулам горячей струи.

Приближённая формула, связывающая безразмерное расстояние и безразмерную скорость на оси горячей струи в зависимости от начального подогрева, имеет следующий вид¹⁾:

$$\frac{ax}{R_1} = \frac{w_1}{w_m} \cdot \sqrt{0,495 \cdot \left(1 - \frac{T_H}{T_1}\right) \frac{w_m}{w_1} + 0,93 \frac{T_H}{T_1}}. \quad (175)$$

Индекс 1 относится к начальным условиям истечения из фиктивного сопла.

Можно воспользоваться связью между размерами действительного и фиктивного сопел истечения

$$R_0 = R_1 \cdot \sqrt{\frac{T_0}{T_1}}$$

и формулой (175) для составления прямой формулы, позволяющей определить расстояние по заданному отношению $\frac{w_m}{w_0}$ и по значениям T_1 — фиктивной температуры в сечении 1 , T_0 — температуры при истечении факела из действительного сопла, T_H — температуры окружающей среды.

Формула, дающая расстояние в радиусах действительного сопла, имеет вид²⁾

$$\frac{ax}{R_0} = \frac{w_0}{w_m} \cdot \sqrt{0,495 \left(\frac{T_1 - T_H}{T_0}\right) \frac{w_m}{w_0} + 0,93 \frac{T_H}{T_0}}. \quad (176)$$

¹⁾ Преобразованная формула (169).

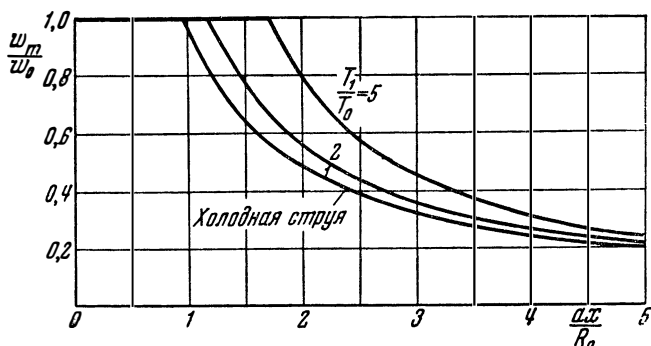
²⁾ Формула (176) немного отличается от (170) при $T = T_H$ из-за изменения полюсного расстояния.

В частном случае, при $T_0 = T_{\text{н}}$, она обращается в формулу (175)

$$\frac{ax}{R_0} = \frac{w_0}{w_m} \cdot \sqrt{0,495 \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right) \frac{w_m}{w_0} + 0,93}. \quad (177)$$

На основании последней формулы составлен график фиг. 122.

Как видно из фиг. 122, подведение тепла в самой струе приводит к увеличению её дальности, тогда как предва-



Фиг. 122. Изменение скорости вдоль оси условного факела горения.

рительное повышение начальной температуры приводило к обратному результату. Это объясняется существенным возрастанием поперечного сечения струи в области подогрева.

§ 6. Струя с тяжёлыми примесями (двухфазная струя)

Рассмотрим газовую струю, содержащую во взвешенном состоянии тяжёлые примеси в жидкой или твёрдой фазе. Такие струи получаются, например, у пневматических форсунок и в ряде других случаев.

Даже при очень больших начальных концентрациях примеси благодаря существенному различию в плотности газа и примеси струю можно рассматривать как газовую. Например, в струе, образующейся при подаче топливо-воздушной смеси из пневматической форсунки при обычном соотношении веса распыливаемого горючего к весу сжатого воздуха (около единицы), отношение объёмов воздуха и жидкого горючего оказывается около тысячи. По мере удаления от форсунки—за счёт присоединения воздуха к струе—это отношение увеличивается ещё в десятки раз. Движение мелких взвешенных капелек в струе в основном подчиняется движению воздуха (т. е. скорость частиц примеси приблизительно совпадает с местной скоростью воздуха в струе). Поэтому допустимо рассматривать струю, содержащую примеси, как свободную воздушную струю.

В то же время наличие посторонней примеси, масса которой соизмерима с массой воздуха в струе, не может не внести поправок в законы её распространения. Оценкой этих поправок мы и займёмся. Будем исходить из закона постоянства количества движения. Количество движения двухфазной струи может быть записано в следующем виде:

$$\int_0^F \rho (1 + \kappa) \omega^2 \cdot dF = \frac{G_B}{g} \omega_0 + \frac{G_{\text{пр}}}{g} \omega_{\text{пр}} = \text{const}, \quad (178)$$

где κ и ω —местные концентрация примеси и скорость в произвольной точке струи, G_B и $G_{\text{пр}}$ —соответственно начальные весовые расходы воздуха и примеси, ω_0 и $\omega_{\text{пр}}$ —соответственно начальные скорости воздуха и примеси, ρ —плотность воздуха, dF —элемент площади. Для струи круглого сечения

$$dF = 2\pi y dy = 2\pi (ax)^2 \cdot \varphi \cdot d\varphi,$$

где a —опытная константа, $\varphi = \frac{y}{ax}$ —безразмерная координата.

При этом уравнение импульсов приобретает вид

$$2\pi (ax)^2 \rho \omega_m^2 \int_0^{\varphi_{\text{гр}}} \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 (1 + \kappa) \varphi d\varphi = \frac{G_B \omega_0}{g} \left(1 + \frac{G_{\text{пр}} \omega_{\text{пр}}}{G_B \omega_0}\right).$$

Интеграл в левой части равенства составлен из двух:

$$\int_0^{\varphi_{\text{гр}}} \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \varphi d\varphi + \int_0^{\varphi_{\text{гр}}} \kappa \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \varphi d\varphi.$$

Безразмерная скорость в поперечном сечении струи зависит от безразмерной координаты φ

$$\frac{\omega}{\omega_m} = f(\varphi),$$

и эта зависимость для свободных струй известна (см. § 4 и табл. IV).

Предполагая, что наличие примесей не вносит заметного искажения в характер распределения скорости по поперечному сечению струи, можно при помощи таблицы IV вычислить значение первого интеграла (см. табл. V). Оно составляет:

$$\int_0^{\varphi_{\text{гр}}} \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \varphi d\varphi = \varphi_{\text{гр}}^2 \int_0^1 \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \eta d\eta = 3,4^2 \int_0^1 \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \eta \cdot d\eta = 0,535,$$

так как $\frac{\varphi}{\varphi_{\text{гр}}} = \frac{y}{R_{\text{гр}}} = \eta$, а по (124) $\varphi_{\text{гр}} = 3,4$.

Теория струй даёт для распределения безразмерной концентрации в поперечном сечении струи закон¹⁾ (146)

$$\frac{x}{x_m} = \sqrt{\frac{w}{w_m}}.$$

Следовательно, второй интеграл приобретает также определённое значение

$$x_m \int_0^{\varphi_{\text{ГР}}} \left(\frac{w}{w_m}\right)^{2,5} \varphi \cdot d\varphi = x_m \cdot \varphi_{\text{ГР}}^2 \int_0^1 \left(\frac{w}{w_m}\right)^{2,5} \cdot \eta \cdot d\eta = 0,415 \cdot x_m.$$

Наконец, из теории струи известна зависимость безразмерной концентрации от безразмерной скорости на оси струи:

$$\frac{x_m}{x_0} = 0,72 \cdot \frac{w_m}{w_0}.$$

С помощью этих соотношений левая часть уравнения импульсов приобретает такой вид:

$$2\pi (ax)^2 \rho \cdot w_m^2 \left(0,535 + 0,3 \cdot x_0 \cdot \frac{w_m}{w_0}\right).$$

В свою очередь правая часть может быть записана следующим образом:

$$\pi R_0^2 \cdot \rho \cdot w_0^2 (1 + x_0 \cdot v_0).$$

где $v_0 = \frac{w_{\text{пр}}}{w_0}$ — отношение начальной скорости примеси к началь-

ной скорости струи, $x_0 = \left| \frac{G_{\text{пр}}}{G_{\text{Б}}} \right|_0$ — начальная концентрация примеси в струе, R_0 — начальный радиус струи (радиус отверстия истечения). Производя необходимые преобразования, можно связать безразмерное расстояние $\frac{ax}{R_0}$ и безразмерную скорость на оси струи $\frac{w_m}{w_0}$ равенством

$$\frac{ax}{R_0} = 0,96 \cdot \frac{w_0}{w_m} \cdot \frac{\sqrt{1 + x_0 \cdot v_0}}{\sqrt{1 + 0,56x_0 \frac{w_m}{w_0}}}. \quad (179)$$

В случае отсутствия в струе примеси ($x_0 = 0$) формула (179) приводит к закону изменения скорости по оси свободной струи, не содержащей примеси:

$$\frac{w_m}{w_0} = \frac{0,96 \cdot R_0}{ax}.$$

При наличии примеси падение осевой скорости в струе зависит

¹⁾ Здесь предполагается, что концентрация примесей в окружающем струю пространстве равна нулю ($x_{\text{пом}} = 0$).

от начальной концентрации примеси

$$\alpha_0 = \left| \frac{G_{\text{пр}}}{G_{\text{в}}} \right|_0$$

и от соотношения начальных скоростей примеси и воздуха

$$\gamma_0 = \frac{w_{\text{пр}}}{w_0}.$$

Наибольший интерес представляют два случая:

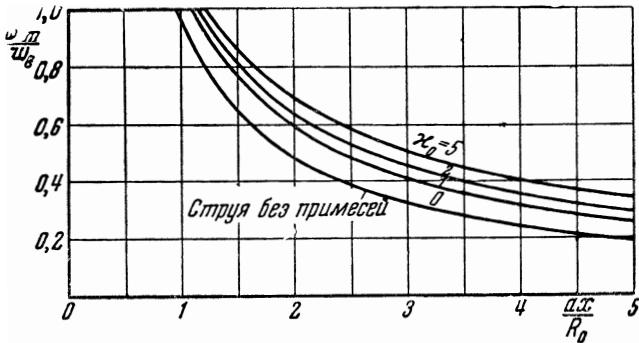
а) Скорость примеси в начале истечения равна скорости истечения ($w_{\text{пр}} = w_0$, $\gamma_0 = 1$). В этом случае формула (179) приобретает вид

$$\frac{ax}{R_0} = 0,96 \frac{w_0}{w_m} \sqrt{\frac{1 + \alpha_0}{1 + 0,56 \cdot \alpha_0 \frac{w_m}{w_0}}}. \quad (180)$$

б) Скорость примеси в начале истечения равна нулю ($w_{\text{пр}} = 0$, $\gamma_0 = 0$), т. е. добавление примеси к струе происходит вне сопла с нулевой скоростью. В этом случае исключается член $\sqrt{1 + \alpha \cdot \gamma_0}$ из формулы (179). Тогда

$$\frac{ax}{R_0} = \frac{0,96}{\frac{w_m}{w_0} \sqrt{1 + 0,56 \alpha_0 \frac{w_m}{w_0}}}. \quad (181)$$

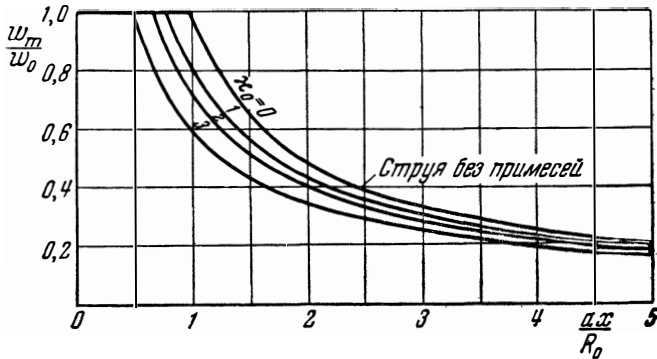
На основании формул (180) и (181) составлены графики (фиг. 123 и 124). Из рассмотрения этих графиков следует, что наличие



Фиг. 123. Изменение скорости вдоль оси струи в зависимости от начальной концентрации примеси (начальная скорость примеси равна начальной скорости воздуха).

тяжёлой примеси существенно влияет на формирование струи; причём это влияние возрастает с увеличением начальной концентрации примеси α_0 . Наличие или отсутствие начальной скорости примеси по-разному отражается на законах затухания

осевой скорости струи. Так, если примесь выбрасывается [из сопла с начальной скоростью, равной начальной скорости струи, то импульс струи увеличивается за счёт импульса примеси, и затухание скорости происходит медленнее, чем в струе, сво-



Фиг. 124. Изменение скорости вдоль оси струи в зависимости от начальной концентрации примеси (начальная скорость примеси равна нулю).

бодной от примеси. Если же примесь добавляется вне сопла (не имеет начальной скорости), то струя затрачивает энергию на вовлечение примеси в движение, и затухание скорости происходит быстрее, чем в струе, свободной от примеси. По мере расширения струи влияние начальных значений концентрации и скорости примеси уменьшается, и, начиная с расстояния $x \approx 5 \frac{R_0}{a}$, струя, несущая примеси, по скорости своего распространения мало отличается от нормальной свободной струи.

Воспользовавшись соотношениями (180) и (181), можно вывести формулы, дающие связь между безразмерными расстоянием и концентрацией на оси струи. При начальной скорости примеси, равной скорости истечения струи ($w_{пр} = w_0$, $v_0 = 1$), учитывая соотношение $\frac{x_m}{x_0} = 0,72 \frac{w_m}{w_0}$, будем иметь:

$$\frac{ax}{R_0} = 0,7 \frac{x_0}{x_m} \sqrt{\frac{1+x_0}{1+0,77 \cdot x_m}}. \quad (182)$$

При начальной скорости примеси, равной нулю ($w_{пр} = v_0 = 0$),

$$\frac{ax}{R_0} = \frac{0,7 \cdot x_0}{x_m \sqrt{1+0,77 \cdot x_m}}. \quad (183)$$

Приведённые формулы совместно с формулами распределения скорости и концентрации в поперечном сечении струи позволяют

составить полную картину распределения скорости и концентрации по всему объёму струи.

Полученные данные позволяют выяснить некоторые особенности топливо-воздушной струи.

Пусть в начальном сечении такой струи имеется большой избыток топлива, т. е. концентрация топлива в воздухе $x_0 = \frac{G_T}{G_B}$

значительно выше теоретически необходимой для полного сгорания x_T . По длине струи за счёт подмешивания окружающего воздуха концентрация топлива постепенно убывает. В любом поперечном сечении концентрация имеет наибольшее значение на оси струи — x_m , вследствие чего сгорание топлива может завершаться лишь в том сечении, где концентрация топлива на оси станет равной теоретически необходимой.

Подставляя в формулы (182) и (183) величину x_T вместо x_m , получим минимальную возможную длину факела горения.

В случае, если начальные скорости топлива и воздуха в струе одинаковы ($v_0 = 1$), длина факела определится из (182):

$$\left(\frac{ax}{R_0}\right)_T = 0,7 \cdot \frac{x_0}{x_T} \sqrt{\frac{1+x_0}{1+0,77x_T}};$$

если начальная скорость топлива равна нулю ($v_0 = 0$), то длину факела найдём из (183):

$$\left(\frac{ax}{R_0}\right)_T = \frac{0,7 \cdot x_0}{x_T \sqrt{1+0,77x_T}}.$$

Например, для бензовоздушной смеси ($x_T \approx \frac{1}{15}$) будет при $v_0 = 1$:

$$\left(\frac{ax}{R_0}\right)_T = 10 \cdot x_0 \cdot \sqrt{1+x_0},$$

а при $v_0 = 0$:

$$\left(\frac{ax}{R_0}\right)_T \approx 10 \cdot x_0.$$

Как видно, из приведённых формул, безразмерная длина факела горения зависит от начальной концентрации топлива в воздухе.

Заметим, что так как средняя по расходу концентрация в струе согласно выражениям (145) и (123) составляет около двух третей от осевой¹⁾:

$$x_{cp} = 0,66 \cdot x_m,$$

то для обеспечения полного сгорания в струе необходимо затратить примерно в полтора раза больше воздуха, чем в случае равномерного смешения топлива с воздухом.

¹⁾ Здесь предполагается, что в окружающем струю воздухе топлива нет ($x_H = 0$), т. е. $\Delta x = x$.

ГЛАВА VII
СОПРОТИВЛЕНИЕ СОПЛА И ДИФФУЗОРА.
ГАЗОВЫЙ ЭЖЕКТОР

§ 1. Сопротивление сопла

Потери полного давления в сопле невелики и сводятся обычно к потерям трения. В идеальном случае при отсутствии потерь скорость истечения из сопла связана с отношением статического давления в выходном сечении p_a к полному давлению в сопле p_{0c} известным равенством

$$\frac{p_a}{p_{0c}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{a \text{ ид}}^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

При наличии потерь истинная скорость истечения меньше идеальной:

$$\lambda_a = \varphi \cdot \lambda_{a \text{ ид}}, \quad (1)$$

где φ — скоростной коэффициент; его значение равно обычно $\varphi = 0,97 - 0,99$. Вводя коэффициент давления, учитывающий потери полного давления в сопле:

$$\sigma_c = \frac{p_{0a}}{p_{0c}},$$

получим:

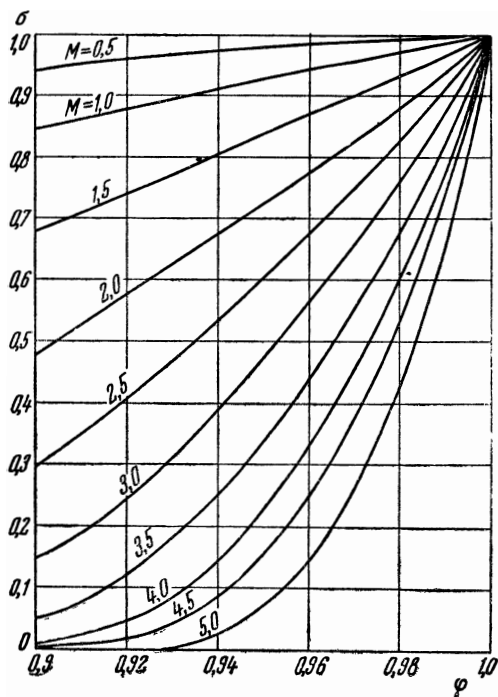
$$\frac{p_a}{p_{0a}} = \frac{p_a}{\sigma_c \cdot p_{0c}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_a^2 \right)^{\frac{k}{k-1}};$$

отсюда устанавливается зависимость коэффициента давления от скоростного коэффициента сопла:

$$\sigma_c = \left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{a \text{ ид}}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{a \text{ ид}}^2 \varphi^2} \right]^{\frac{k}{k-1}}. \quad (2)$$

Например, при $\lambda_{a \text{ ид}} = 1$ и $\varphi = 0,98$ получаем: $\sigma_c = 0,975$.

Зависимость $\sigma_c = f(\varphi)$ при различных значениях числа M в выходном сечении представлена на фиг. 125; кривые рассчитаны по формуле (2) с использованием выражения (47) из главы I. Фиг. 125 показывает, что при скоростях истечения, значительно превосходящих скорость звука ($M_a > 1,5$), даже умеренным потерям скорости ($\varphi > 0,97$) соответствуют большие потери полного давления.



Фиг. 125. Зависимость коэффициента полного давления от скоростного коэффициента.

из струй постоянного полного давления, в которых параметры газа изменяются по законам идеальной адиабаты. В таком случае полные давления в ядре потока в выходном и входном сечениях сопла одинаковы, но из-за существования пограничного слоя точное значение скорости истечения не может быть определено непосредственно по формулам (2), (3) или (4) главы IV. Однако можно воспользоваться этими формулами, если внести поправку к величине площади поперечного сечения сопла, применяя понятие о толщине вытеснения пограничного слоя, введённое в § 1 главы VI.

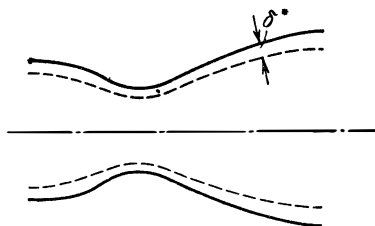
Как известно, отклонение стенки от её истинного положения в сторону от оси сопла на расстояние, равное толщине вытеснения

соответствуют большие потери полного давления.

Для вычисления расхода с учётом потерь в формулу (8) главы IV следует подставить величину $p_0 = \sigma_c \cdot p_{0c}$.

В тех случаях, когда поле полных давлений во входном сечении сопла является равномерным, а очертания сопла настолько плавные, что в нём нет вихревых областей и скачков уплотнения, сопротивление сопла сводится к сопротивлению трения в пограничном слое. Ввиду того, что длина сопла обычно не больше нескольких диаметров сопла, толщина пограничного слоя составляет малую долю радиуса сопла, т. е. большая часть поперечного сечения сопла заполнена ядром потока, состоящим

δ^* (фиг. 126), ведёт к тому, что распределение статического давления и скорости по отклонённой стенке при обтекании её идеальной жидкостью получается таким же, как по истинной стенке, обтекаемой вязкой жидкостью с заданным пограничным слоем. Иначе говоря, соответствующим увеличением поперечных сечений сопла можно компенсировать влияние пограничного слоя на распределение скорости и давления по оси сопла. Наоборот, если заменить заданное сопло фиктивным, контур которого в каждом сечении смещён к оси сопла на расстояние, равное толщине вытеснения δ^* , то распределение скорости по длине фиктивного сопла можно определять по изоэнтропическим формулам (2), (3) или (4) главы IV, причём оно получается таким же, как в заданном сопле.



Фиг. 126. Схема изменения толщины вытеснения δ^* по длине сопла.

В сопле плоскопараллельном площадь фиктивного сечения F_Φ найдётся из условия

$$\frac{F_\Phi}{F} = 1 - \frac{2\delta^*}{b}, \quad (3)$$

где b — ширина поперечного сечения заданного сопла.

В осесимметричном сопле

$$\frac{F_\Phi}{F} = \left(1 - \frac{\delta^*}{R}\right)^2 \approx 1 - \frac{2\delta^*}{R}; \quad (4)$$

здесь R — радиус заданного сопла.

Тогда скорость истечения из заданного сопла определяется по формуле

$$\frac{F_{\Phi \text{ кр}}}{F_{\Phi a}} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda_a \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_a^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (5)$$

В этой формуле $F_{\Phi a}$ — площадь выходного сечения фиктивного сопла, $F_{\Phi \text{ кр}}$ — площадь критического сечения фиктивного сопла.

Найденная таким путём скорость имеет место в истинном сопле в ядре постоянного полного давления, заполняющем большую часть поперечного сечения сопла. По этому значению скорости, пользуясь известной формулой (78) главы I, отвечающей идеальному адиабатическому процессу в газовом потоке, можно определить статическое давление в соответствующем поперечном сечении истинного сопла:

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_a^2\right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad (6)$$

здесь p_0 — полное давление на оси сопла, величина которого во всех сечениях одинакова.

Учёт влияния пограничного слоя путём замены истинного контура сопла фиктивным контуром приводит к сужению сопла, поэтому в дозвуковом течении пограничный слой вызывает увеличение, а в сверхзвуковом — уменьшение скорости (по сравнению со случаем течения невязкого газа в сопле истинного контура).

Итак, несмотря на сохранение полного давления в ядре течения, скорость в ядре в дозвуковом сопле получается больше, чем в идеальном случае:

$$\lambda_a > \lambda_{a \text{ ид}},$$

а в сверхзвуковом сопле — меньше, чем в идеальном случае:

$$\lambda_a < \lambda_{a \text{ ид}}.$$

В соответствии с этим статическое давление в любом сечении истинного сопла при дозвуковом потоке понижается, а при сверхзвуковом потоке повышается по сравнению с давлением в таком же сечении идеального сопла.

Ввиду малости поправок, учитывающих влияние пограничного слоя на скорость и давление, их можно получить путём разложения формулы (4) главы IV и формулы (5) в ряд. Согласно формуле (4) главы IV

$$\frac{F}{F_{\text{кр}}} = \frac{\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}}{\lambda \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}}.$$

Отсюда, если изменение площади поперечного сечения на малую величину ΔF вызывает изменение скорости на малую величину $\Delta \lambda$, то при $k = \text{const}$

$$\frac{F + \Delta F}{F} = \frac{\lambda \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}}{(\lambda + \Delta \lambda) \left[1 - \frac{k-1}{k+1} (\lambda + \Delta \lambda)^2\right]^{\frac{1}{k-1}}}.$$

После разложения в биномиальный ряд с отбрасыванием всех членов со множителями $\Delta \lambda^3$ и более высокого порядка имеем:

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \frac{\lambda^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2} + \frac{\Delta \lambda^2 (3 - \lambda^2)}{(k+1) \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^2}. \quad (7)$$

Во всех случаях, кроме $\lambda \approx 1$, эту формулу можно упростить, отбросив член со множителем $\Delta\lambda^2$. Тогда получается:

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \frac{\lambda^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}. \quad (8)$$

В случае $\lambda = 1$, т. е. в окрестности критического сечения сверхзвукового сопла формула (7) приобретает особенно простой вид

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{k+1}{2} (\Delta\lambda)^2. \quad (9)$$

Отсюда следует, что незначительное изменение площади сечения сопла вблизи критического сечения вызывает заметное изменение скорости. Например, изменение площади сопла около критического сечения на 1% $\left(\frac{\Delta F}{F} = 0,01\right)$ даёт изменение скорости на 9% ($\Delta\lambda = 0,09$).

Формула (8) устанавливает связь между малыми отклонениями площади сечения и соответствующими малыми изменениями скорости газового потока. При учёте влияния пограничного слоя на скорость потока можно вместо изменения площади сечения ввести толщину вытеснения; для осесимметричного сопла имеем:

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{2\bar{\delta}^*}{R} = 2\bar{\delta}^*.$$

Отсюда связь между толщиной вытеснения и изменением скорости приобретает следующий вид (при $\lambda \neq 1$):

$$\bar{\delta}^* = \frac{1}{2} \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \frac{\lambda^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}. \quad (10)$$

Например, изменение коэффициента скорости на 3% ($\Delta\lambda = 0,03$) при $k = 1,4$ и $\lambda = 1,5$ ($M = 1,73$) достигается за счёт толщины вытеснения $\bar{\delta}^*$, составляющей 3,5% от радиуса сопла ($\bar{\delta}^* = 0,035$).

Малые изменения давления, вызываемые малыми изменениями скорости, можно также вычислить по формуле, полученной путём разложения равенства (78) главы I в биномиальный ряд с отбрасыванием всех членов со множителями $\Delta\lambda^2$ и более высокого порядка. В самом деле,

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}};$$

отсюда

$$\frac{p + \Delta p}{p} = \left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} (\lambda + \Delta\lambda)^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2} \right]^{\frac{k}{k-1}}$$

и далее

$$\frac{\Delta p}{p} = - \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \frac{\frac{2k}{k+1} \lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}. \quad (11)$$

Для рассмотренного выше примера ($\Delta\lambda = 0,03$, $\lambda = 1,5$) имеем изменение давления на 8% ($\frac{\Delta p}{p} \approx 0,08$). В случае $\lambda = 1$ для зависимости прироста давления от прироста скорости получаем следующую простую формулу:

$$\frac{\Delta p}{p} = -k \Delta\lambda, \quad (12)$$

т. е. в окрестности критического сечения изменение давления пропорционально изменению скорости.

Ввиду наличия пограничного слоя средняя скорость газа в поперечном сечении меньше скорости в ядре течения:

$$\lambda_{\text{ср}} < \lambda_a.$$

Для вычисления средней по массе газа скорости

$$\lambda_{\text{ср}} = \frac{\int_0^G \lambda_a dG}{G}$$

используют выведенное в § 1 главы VI понятие толщины потери импульса в пограничном слое δ^{**} . Эта величина показывает, на какое расстояние δ^{**} нужно сместить контур сопла (в сторону к его оси) для того, чтобы равномерный поток в фиктивном сопле при той же скорости, что и в ядре течения истинного сопла, имел бы такое же секундное количество движения, как и в истинном сопле. Тогда

$$\lambda G_{\Phi} = \lambda_{\text{ср}} G.$$

Отсюда скоростной коэффициент, учитывающий влияние пограничного слоя, равен:

$$\varphi = \frac{\lambda_{\text{ср}}}{\lambda_a} = \frac{G_{\Phi}}{G} = \frac{F_{\Phi}}{F} = 1 - 2\bar{\delta}^{**}, \quad (13)$$

где

$$\bar{\delta}^{**} = \frac{\delta^{**}}{R}.$$

На вопросах определения толщин вытеснения δ^* и потери импульса δ^{**} в пограничном слое мы здесь не останавливаемся, так как они освещены в § 1 главы VI.

Отметим в заключение, что величина φ в формуле (13) выражает отношение средней по массе газа скорости к скорости в ядре течения, а не к скорости в идеальном сопле. Переход к величине

$$\varphi' = \frac{\lambda_{\text{ср}}}{\lambda_{a \text{ ид}}}$$

может быть осуществлён следующим путём:

$$\varphi' = \varphi \frac{\lambda_{a \text{ ид}}}{\lambda_a} = (1 - 2\bar{\delta}^{**}) \frac{\lambda_{a \text{ ид}}}{\lambda_a},$$

где согласно (10)

$$\bar{\delta}^* = 2 \frac{\lambda_{a \text{ ид}} - \lambda_a}{\lambda_{a \text{ ид}}} \frac{\lambda_{a \text{ ид}}^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{a \text{ ид}}^2}.$$

Опыты Кинана и Неймана¹⁾ дают возможность оценить отношение фиктивного диаметра выхода из сопла $D_{\text{ф}}$ к истинному диаметру выхода (D_a) при различных значениях чисел R и M . Результаты этих опытов сведены в таблицу:

№ сопла	$D_{\text{кр}}$	D_a	$M_{a \text{ ист}}$	R_a	$M_a \text{ расч}$	$\frac{D_{\text{ф}}}{D_a}$
1	0,562"	0,945"	2,06	$3,9 \cdot 10^5$	2,58	0,79
2	0,186"	0,498"	3,14	$3,9 \cdot 10^5$	3,56	0,82
3	0,175"	0,438"	—	$3,8 \cdot 10^5$	—	—
4	0,107"	0,498"	3,87	$1,2 \cdot 10^5$	4,80	0,67
5	0,186"	0,498"	2,84	$0,27 \cdot 10^5$	3,58	0,71

Диаметры критических ($D_{\text{кр}}$) и выходных сечений даны в этой таблице в дюймах, числа R_a подсчитаны по выходному диаметру сопла. Как видим, истинные значения числа M в выходном отверстии ниже расчётных ($M_{a \text{ ист}} < M_{a \text{ расч}}$) и фиктивный диаметр выходного отверстия меньше истинного на 18% — 33%, т. е. безразмерная толщина вытеснения имеет значение порядка

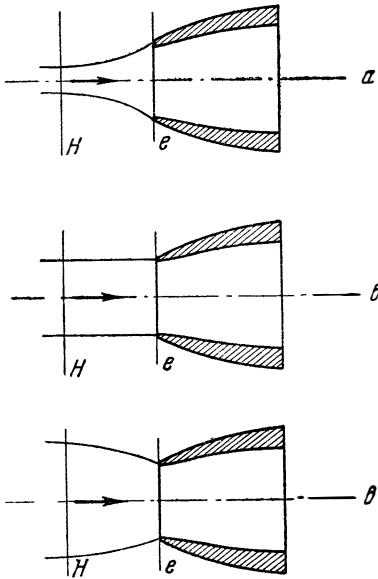
$$\bar{\delta}^* = 0,18 - 0,33,$$

причём меньшие значения толщины вытеснения соответствуют более высоким значениям числа R .

¹⁾ Keenan I., Nauman E., Journal of Applied Mechanics. June, 1946, т. 13, № 2.

§ 2. Сопротивление диффузора

Рассмотрим диффузор двигателя, установленного на движущемся самолёте. Обозначим скорость самолёта ω_n , скорость звука, отвечающую температуре в атмосфере — a_n . Введём обозначения:



Фиг. 127. Конфигурация струи, входящей в диффузор.

F_n — площадь поперечного сечения струи на бесконечности перед двигателем, γ_n — удельный вес воздуха вдали перед двигателем, p_n — давление в атмосфере. Величины площади, скорости, давления во входном отверстии диффузора обозначим теми же буквами с индексом e : F_e , ω_e , p_e . Значения тех же величин в конце диффузора обозначим: F_d , ω_d , p_d .

Работа диффузора зависит от отношения скорости полёта к скорости во входном его отверстии. Рассмотрим сначала режим $\omega_n < a_n$, т. е. полёт с дозвуковой скоростью. Двигатель принимает в диффузор G_B кг/сек воздуха.

Можно представить себе такой случай, когда струя входит в диффузор без изменения своей конфигурации. Площадь поперечного сечения струи на бесконечности перед двигателем F_n при этом равна площади входного отверстия диффузора F_e :

$$F_n = \frac{G_B}{\gamma_n \omega_n} = F_e.$$

Вообще же форма струи на входе в двигатель определяется отношением $\frac{F_n}{F_e}$. В приведённом выше случае $F_n = F_e$, следовательно,

$$\omega_e = \omega_n \text{ и } p_e = p_n$$

(фиг. 127, б), т. е. преобразования скорости и давления перед диффузором нет.

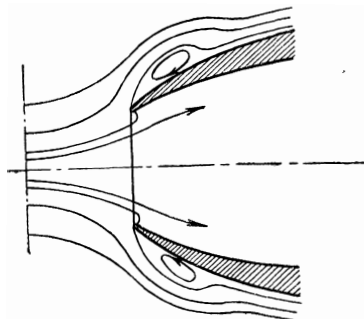
Если мы начнём увеличивать расход воздуха через диффузор, струя изменит свою форму, поджимаясь перед входом, как показано на фиг. 127, в. Изменение формы струи сопровождается преобразованием скорости и давления:

$$\omega_e > \omega_n, \quad p_e < p_n.$$

При уменьшении расхода воздуха струя как бы образует диффузор ещё в атмосфере (перед двигателем) в связи с уменьшением скорости и повышением давления (фиг. 127, а). 80

При постоянном расходе воздуха форма струи перед двигателем зависит от величины входного отверстия диффузора. Изменяя размеры диффузора, мы можем получить любой из трёх приведённых режимов работы. Для

рабочего процесса двигателя выгоден такой случай, когда поток подтормаживается ещё перед диффузором, так как торможение струи перед диффузором идёт без каких либо потерь, и собственное сопротивление диффузора уменьшается вследствие понижения скорости на входе. Необходимо, однако, заметить, что, кроме внутренних потерь, следует учитывать также внешнее лобовое сопротивление двигателя, увеличивающееся с укорочением диффузора. Объясняется это тем, что при растекании потока перед носком двигателя струи



Фиг. 128. Срыв струи при большом входном отверстии диффузора.

подходят к его поверхности под большими углами атаки, и может образоваться срыв на внешней поверхности носка (фиг. 128). Для удовлетворения этих противоречивых требований отыскиваются оптимальные условия работы входного участка двигателя.

Опыты показывают, что для дозвукового воздушно-реактивного двигателя оптимум лежит вблизи режима

$$\omega_e \approx 0,5 \omega_n.$$

Если бы в диффузоре потери отсутствовали, газ в любом его сечении имел бы одно и то же полное давление, равное (при дозвуковых скоростях полёта) полному давлению в набегающей струе воздуха. Наличие потерь нарушает это равенство, и полное давление в конце диффузора всегда ниже, чем в начале:

$$p_{0д} < p_{0н}.$$

Статическое давление вдоль диффузора, наоборот, увеличивается за счёт уменьшения скорости.

Величину гидравлических потерь в диффузоре удобно выразить в долях скоростного напора в широком его сечении:

$$\Delta p_{0д} = p_{0н} - p_{0д} = \zeta_d \cdot \rho_{0д} \frac{\omega_d^2}{2}.$$

Здесь ζ_d — коэффициент гидравлического сопротивления диффузора. Обычно потери в диффузоре относительно невелики:

$\frac{\Delta p_{0д}}{p_{0н}} \ll 1$. Поэтому плотность заторможенного газа в диффузоре можно считать практически неизменяющейся:

$$\rho_{0д} \approx \rho_{0н}.$$

Следовательно, можно принять:

$$\Delta p_{0д} = \zeta_{д} \rho_{0н} \frac{w_{д}^2}{2}.$$

Приведём эту формулу к безразмерному виду:

$$1 - \frac{p_{0д}}{p_{0н}} = \zeta_{д} \frac{k}{k - \frac{p_{0н}}{\rho_{0н}}} \frac{w_{д}^2}{2};$$

здесь

$$\frac{k p_{0н}}{\rho_{0н}} = a_{0н}^2 = \frac{k+1}{2} a_{кр}^2.$$

После соответствующей подстановки имеем:

$$\sigma_{д} = \frac{p_{0д}}{p_{0н}} = 1 - \frac{k}{k+1} \zeta_{д} \frac{w_{д}^2}{a_{кр}^2}.$$

Заметим, что $\frac{w_{д}}{a_{кр}} = \lambda_{д}$ представляет собой коэффициент скорости в конце диффузора. В результате получим следующее выражение для коэффициента полного давления в диффузоре:

$$\sigma_{д} = 1 - \frac{k}{k+1} \zeta_{д} \lambda_{д}^2. \quad (14)$$

Соппротивление диффузора складывается из потерь на трение и на вихреобразование. Вихревые потери вызываются отрывом пограничного слоя от стенок диффузора, причины которого объяснены в главе VI; они зависят от угла раствора диффузора и играют главную роль. При малых углах раствора диффузора гидравлические потери невелики, но по мере увеличения угла они возрастают. С ростом угла раствора зона вихрей перемещается от конца диффузора к его началу и при больших углах вся стенка покрыта вихревой областью.

Многочисленные эксперименты приводят к заключению, что вихревые потери в диффузоре можно оценивать как смягчённое сопротивление удара (в сравнении с внезапным расширением канала)

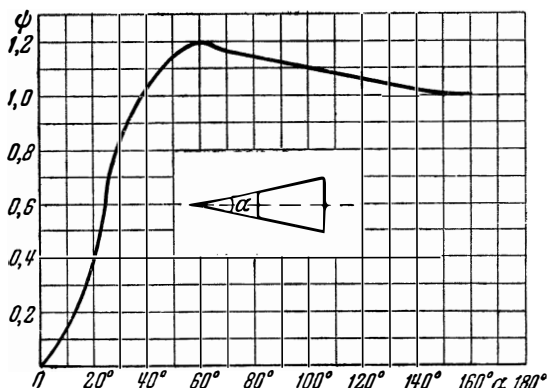
$$\Delta p_{0д} = \psi \Delta p_{уд},$$

где потери удара

$$\Delta p_{уд} = \rho \frac{(w_e - w_n)^2}{2},$$

ψ — коэффициент смягчения удара ($\psi < 1$). Опыты показали¹⁾, что коэффициент смягчения ψ является функцией одного только угла раствора диффузора α .

Соответствующая кривая для прямолинейного диффузора с круглым поперечным сечением дана на фиг. 129. Большим углом раствора ($\alpha > 40^\circ$) соответствует $\psi \geq 1$, т. е. смягчения удара нет. При угле $\alpha = 0$ имеем: $\psi = 0$, т. е. удара нет. Максимальное значение коэффициента смягчения удара ($\psi = 1,2$) достигается при угле $\alpha = 60^\circ$. В этом случае потери даже больше,



Фиг. 129. Зависимость коэффициента смягчения удара от угла раствора диффузора круглого сечения.

чем при внезапном раскрытии канала, когда $\psi = 1$. Объясняется это тем, что вихревая зона в прямом угле устойчива, в то время как при наклонной стенке ($\alpha \approx 60^\circ$) вихревая зона периодически смывается. Таким образом, дополнительные потери при таких углах обуславливаются затратами энергии на возобновление вихревой зоны.

Обычно применяют диффузоры с углами $\alpha = 6 \div 10^\circ$. Таким значениям углов раствора соответствуют величины $\psi = 0,15 - 0,20$. В этой области не наблюдается видимого отрыва струй от стенки диффузора.

Если пренебречь изменением плотности воздуха в пределах диффузора, то получится:

$$\frac{w_e}{w_d} = \frac{F_d}{F_e},$$

1) См. Абрамович Г. Н., Аэродинамика местных сопротивлений. Труды ЦАГИ, вып. 211, 1935.

отсюда

$$\zeta_{\text{д}} = \frac{\Delta p_{0\text{д}}}{\rho_{0\text{н}} \cdot \frac{\omega_{\text{д}}^2}{2}} = \psi \left(\frac{F_{\text{д}}}{F_e} - 1 \right)^2. \quad (15)$$

В качестве примера вычислим коэффициент потерь для диффузора с соотношением поперечных сечений $\frac{F_{\text{д}}}{F_e} = 3$ при угле раствора $\alpha = 8^\circ$. Можно принять для этого случая (с учётом трения):

$$\psi = 0,2.$$

Тогда

$$\zeta_{\text{д}} = 0,2 \cdot 4 = 0,8,$$

$$\sigma_{\text{д}} = 1 - 0,44 \lambda_{\text{д}}^2.$$

Коэффициент скорости в конце диффузора дозвукового воздушно-реактивного двигателя обычно бывает порядка $\lambda_{\text{д}} = 0,2 \div 0,4$. Тогда

$$\sigma_{\text{д}} = 0,98 \div 0,94.$$

На расчёте сопротивления трения мы не останавливаемся, так как он достаточно подробно освещается в главе VI.

Опыты показывают, что в диффузорах с криволинейными боковыми стенками при больших углах раскрытия гидравлические потери могут получиться существенно меньше¹⁾, чем в диффузорах с прямолинейными стенками.

Результаты экспериментального определения потерь (включая трение) в плоских диффузорах одной и той же длины при постоянном среднем угле раскрытия $\alpha = 38^\circ$, но с разными очертаниями боковых стенок приводятся ниже. На фиг. 130 представлены контуры испытывавшихся диффузоров. Первый контур — прямая, второй — дуга окружности, третий — соответствует постоянному градиенту давления по длине диффузора $\frac{dp}{dx} = \text{const}$; четвёртый — постоянному градиенту скорости $\frac{dw}{dx} = \text{const}$, пятый — построен по формуле

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{d(1-\bar{p})}{dx} \cdot \frac{x}{1-p} \right] = \text{const} > 0,$$

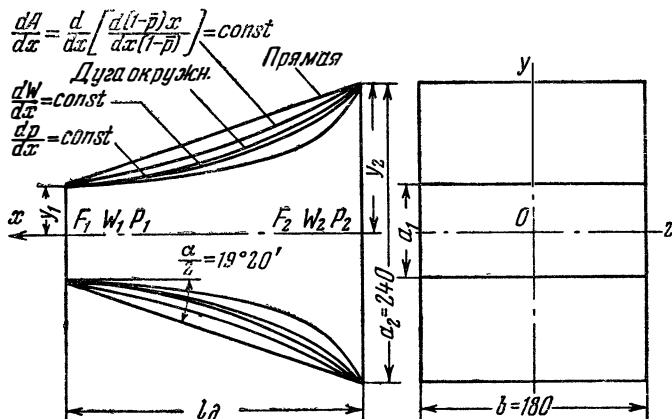
где p — безразмерное давление, определяемое из соотношения

$$\bar{p} = \frac{p - p_1}{\frac{\omega_1^2}{2}}.$$

¹⁾ Идельчик И. Е., Аэродинамика потока и потери напора в диффузорах. Сборник статей по промышленной аэродинамике под редакцией Н. А. Ушакова. М., 1947.

Наименьшее значение коэффициента сопротивления $\zeta = 0,24$ получено для диффузоров 3 и 4 с постоянным градиентом давления и постоянным градиентом скорости. Пятый диффузор имел $\zeta = 0,26$. Для диффузора 2 со стенками, выполненными по дуге окружности, получен коэффициент сопротивления $\zeta = 0,27$, а для диффузора 1 — с прямыми стенками $\zeta = 0,32$.

Таким образом, в диффузорах с постоянными градиентами давления или скорости достигнуто снижение потерь примерно на 25% по сравнению с прямым диффузором.



Фиг. 130. Контуры испытывавшихся диффузоров.

На фиг. 131 представлены кривые зависимости коэффициента потерь от длины диффузора (т. е. от угла α) для диффузоров типа 1 и 3. У достаточно длинных (близких к оптимальным) диффузоров этих типов разница в потерях становится малой.

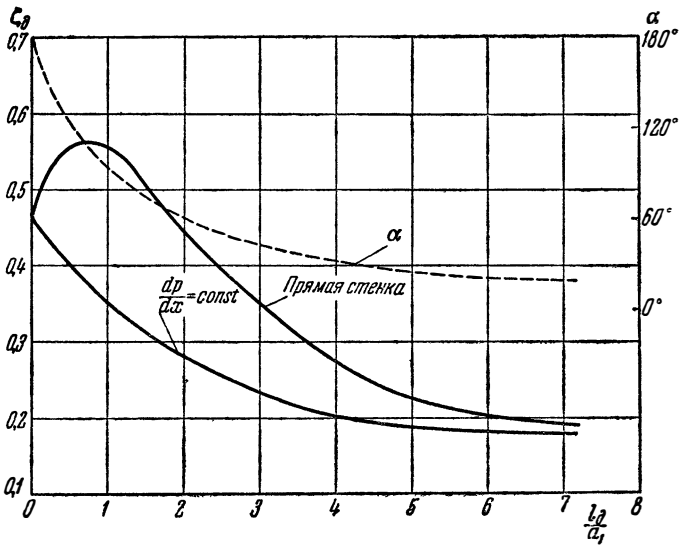
Мы рассматривали сопротивление диффузора в таких условиях, когда можно пренебрегать влиянием сжимаемости воздуха, которая, как показывают опыты, начинает сказываться на величине коэффициента потерь лишь в том случае, если скорость во входном отверстии диффузора близка к скорости звука ($\lambda_e > 0,7$).

На фиг. 129 даны кривые зависимости отношения полных давлений в конце и начале диффузора

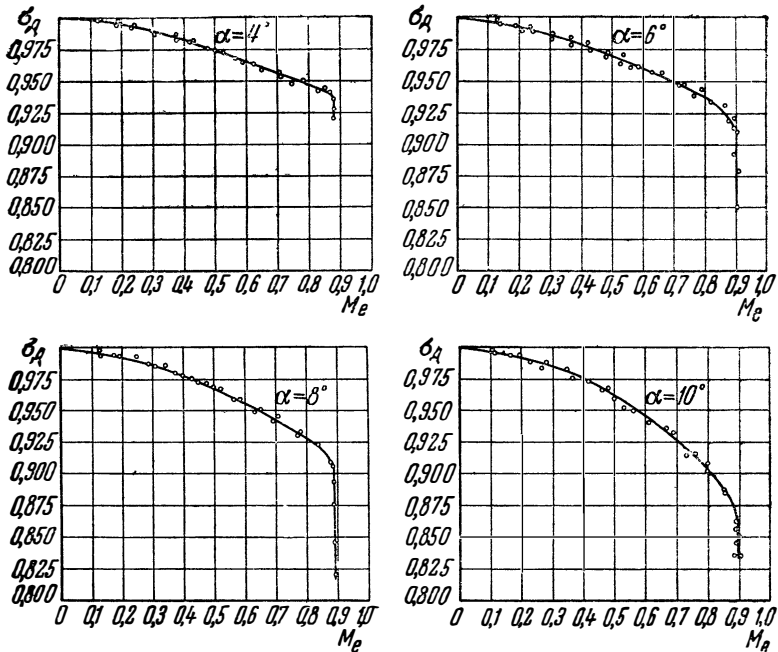
$$\sigma_d = \frac{P_{0д}}{P_{0е}}$$

от числа M_e во входном отверстии диффузора, полученные в опытах К. С. Сцилларда¹⁾ (при центральных углах раскрытия

¹⁾ Сциллард К. С., Исследование диффузоров при больших скоростях. Технические заметки ЦАГИ, 1938.



Фиг. 131. Зависимость коэффициента потерь от длины диффузора.

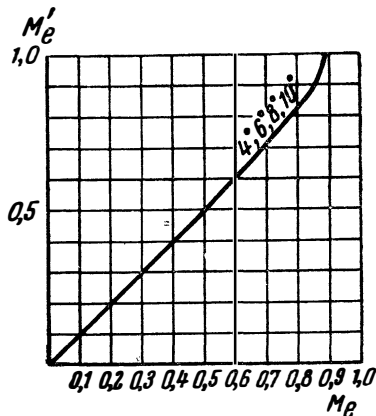


Фиг. 132. Зависимость коэффициента полного давления в диффузоре от числа M_e перед диффузором при углах раскрытия $\alpha = 4, 6, 8$ и 10° (по опытам К. С. Сцилларда).

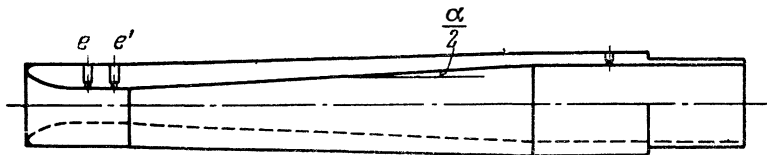
$\alpha = 4, 6, 8, 10^\circ$, диаметре входного сечения 100 мм и диаметре выходного сечения 222 мм). Кривые проведены по экспериментальным точкам, которые также нанесены на фиг. 132. Резкое падение кривых, наступающее при значениях числа M_e около 0,9, объясняется тем, что на этих режимах в начальной части диффузора развивается зона сверхзвуковых скоростей, замыкающаяся скачком уплотнения, который вносит большое волновое сопротивление. Об этом можно судить по кривой фиг. 133, которая изображает зависимость числа M_e' непосредственно при входе в диффузор от числа M_e на расстоянии одного калибра перед входом в диффузор.

Чертеж одного из диффузоров (при $\alpha = 6^\circ$), испытанного К. С. Сциллардом, представлен на фиг. 134; остальные диффузоры данной серии отличаются от изображённого на этой фигуре только углом и соответственно длиной конического участка.

Для оценки влияния числа R на сопротивление диффузора К. С. Сциллард испытывал геометрически подобные диффузоры меньшего размера (с диаметром входного отверстия 18 мм). Результаты испытаний диффузоров увеличенного и малого раз-



Фиг. 133. Связь между значениями числа M в начале (M_e') и конце (M_e) цилиндрического входного участка диффузора (по опытам К. С. Сцилларда).



Фиг. 134. Схема одного из диффузоров, испытанных К. С. Сциллардом.

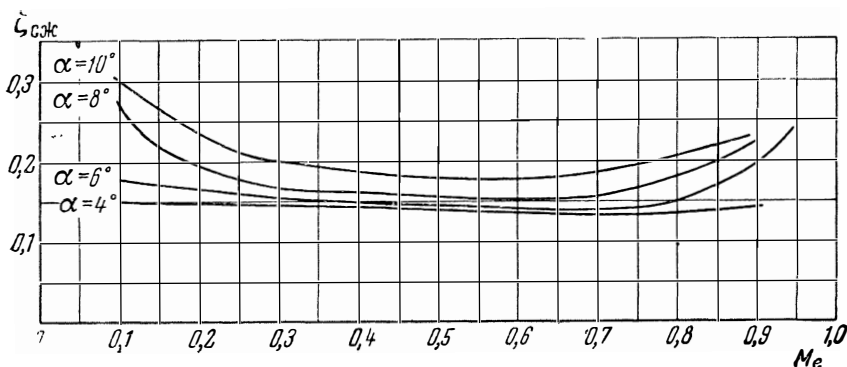
меров оказались близкими, что свидетельствует о слабом влиянии числа R на потери в диффузоре.

Зависимость $\sigma_d = \frac{P_{0d}}{P_{0e}} = f(M_e)$ не даёт наглядного представления о влиянии сжимаемости на сопротивление, так как величина σ_d изменяется со скоростью даже при постоянном значении коэффициента потерь. Удобной характеристикой потерь при

течении сжимаемого газа в диффузоре является коэффициент

$$\zeta_{сж} = \frac{L}{\frac{\omega_e^3}{2g}} = \frac{\frac{k}{k-1} RT_{0Д} \left[\left(\frac{P_{0e}}{P_{0Д}} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]}{\frac{\omega_e^2}{2g}}; \quad (16)$$

Здесь числитель представляет собой адиабатическую работу, которую надо затратить, чтобы поднять в идеальном компрессоре полное давление в конце диффузора до величины полного давления в начале диффузора, а знаменатель выражает кинетическую энергию струи газа во входном отверстии диффузора.



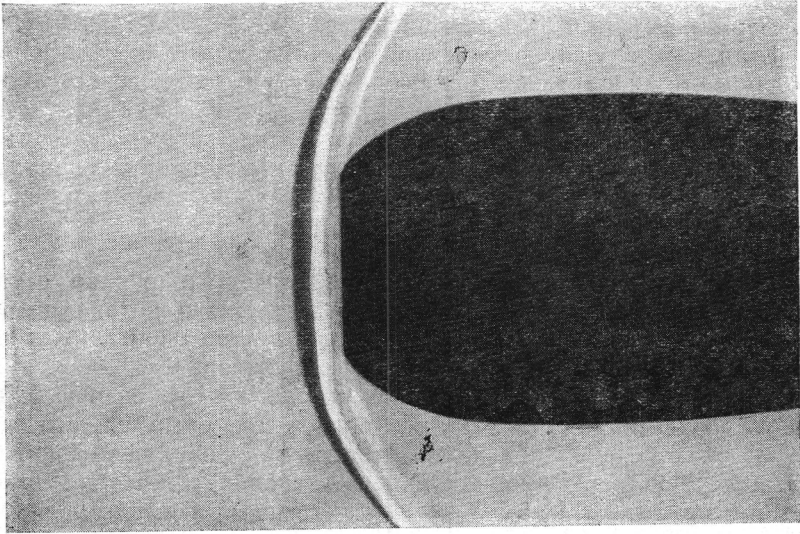
Фиг. 135. Зависимость коэффициента сопротивления диффузора от числа M_e на входе при углах раскрытия $\alpha = 4, 6, 8$ и 10° (по опытам К. С. Спилларда).

Зависимости коэффициентов потерь от числа M_e на входе в диффузор $\zeta_{сж} = f(M_e)$ для четырёх диффузоров К. С. Спилларда, пересчитанные по кривым фиг. 132, изображены на фиг. 135. Как видим, влияние сжимаемости газа на значение коэффициента потерь начинает сказываться лишь при околозвуковых скоростях ($M_e > 0,7$). Некоторое падение кривых $\zeta_{сж} = f(M_e)$ в области $M_e < 0,3$, где заведомо немыслимо влияние сжимаемости, можно объяснить только влиянием числа R , которое возрастает с увеличением числа M_e .

Рассмотрим теперь работу при сверхзвуковой скорости диффузора, имеющего обычную («дозвуковую») форму. Перед входом в такой диффузор образуется скачок уплотнения с криволинейным фронтом (фиг. 136). В центральной части, т. е. в той, которую пересекает рабочая струя воздуха (поступающая внутрь двигателя), скачок должен быть прямым. Последнее вытекает из того, что рабочая струя сохраняет после скачка своё первоначальное направ-

ление. Таким образом, скорость в рабочей струе после скачка — дозвуковая.

В зависимости от величины входного отверстия диффузора (F_e) имеет место то или иное соотношение между значениями



Фиг. 136. Оптическая фотография сверхзвукового потока перед простым диффузором.

скорости после скачка (ω_1) и на входе в диффузор (ω_e). Принципно возможны два случая:

$$\text{а) } \omega_1 > \omega_e,$$

т. е. поток между фронтом скачка и входом в диффузор тормозится;

$$\text{б) } \omega_1 = \omega_e,$$

т. е. скорость после скачка и скорость на входе в диффузор одинаковы.

Возможен и такой случай, когда рабочая струя входит в диффузор со сверхзвуковой скоростью, тогда скачок уплотнения получится не перед диффузором, а внутри него. Режим $\omega_1 < \omega_e$, т. е. ускорение потока между фронтом скачка и входом в диффузор, на практике не реализуется.

Итак, в двигателе с простым диффузором при сверхзвуковой скорости торможение входящей струи начинается с прямого

скачка уплотнения. Потери в скачке и параметры потока за скачком определяются по формулам (24), (15), (16), (21), (22), (23) и (25) главы III.

Поскольку поток в простом диффузоре является дозвуковым даже при сверхзвуковой скорости полёта ($\lambda_1 < 1$, $\lambda_e < 1$), гидравлические потери в канале такого диффузора можно рассчитывать по формулам (14) и (15) настоящей главы.

Если для случая дозвуковой скорости полёта потери полного давления при торможении рабочей струи определялись только внутренним сопротивлением диффузора σ_d , то для случая сверхзвуковой скорости эти потери включают волновое сопротивление σ_n , т. е. соответствуют произведению коэффициентов давления в прямом скачке и в диффузоре:

$$\sigma_n \sigma_d.$$

Применяя диффузоры специальной формы, можно осуществлять ступенчатое торможение сверхзвукового потока посредством различных систем косых скачков уплотнения. Так как за обычным плоским косым скачком скорость остаётся сверхзвуковой, то для полного торможения потока нужно за последним косым скачком поместить прямой скачок или особый («сильный») косой скачок, которые дают переход к дозвуковой скорости течения. На фиг. 36 сильные косые скачки отвечают верхним ветвям кривых $\alpha = f(\omega)$, лежащим выше максимумов, причём фронт сильного косого скачка располагается по отношению к набегающему потоку под углом не менее 60° . Только при этом условии ($\alpha > 60^\circ$) можно получить за фронтом косого скачка дозвуковую скорость потока ($M_1 < 1$).

Различные комбинации скачков исследованы в работе Г. И. Петрова и Е. П. Ухова ¹⁾. Рассмотрим вопрос о сверхзвуковом диффузоре, используя результаты этой работы. Обратимся сначала к наиболее простой схеме сверхзвукового диффузора, в которой торможение потока осуществляется посредством двух скачков: косого и прямого. В косом скачке происходит уменьшение сверхзвуковой скорости, а в прямом скачке — пониженная сверхзвуковая скорость переводится в дозвуковую.

Обозначим коэффициент скорости невозмущённого потока через λ_n , коэффициент скорости за косым скачком через λ_1 и коэффициент скорости за прямым скачком через $\lambda_k = \frac{1}{\lambda_1}$. Как было установлено выше, косой скачок уплотнения представляет собой прямой скачок в отношении нормальных к его фронту составляющих

¹⁾ Петров Г. И. и Ухов Е. П., Расчёт восстановления давления при переходе от сверхзвукового потока к дозвуковому при различных системах плоских скачков уплотнения, М., 1947.

скорости. Поэтому расчёт первого косого скачка системы можно произвести по формулам прямого скачка.

Формулы (41), (42) и (43) главы III дают возможность рассчитать изменение полного давления в косом скачке уплотнения.

Теперь, пользуясь выражениями (21) и (24) главы III, нетрудно определить изменение статического и полного давления в прямом скачке, расположенном за косым скачком. Для этого нужно только учесть, что коэффициент скорости перед прямым скачком есть λ_1 , тогда:

$$\frac{p_{\Pi}}{p_1} = \frac{\lambda_1^2 - \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2},$$

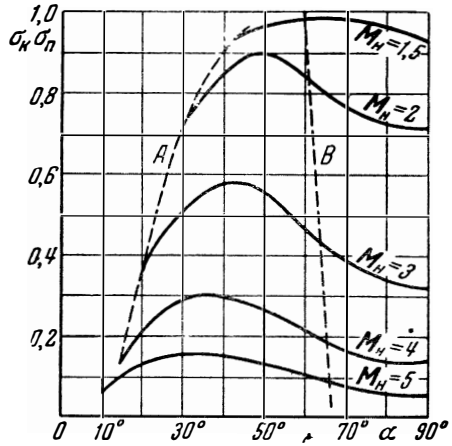
$$\sigma_{\Pi} = \frac{p_{0\Pi}}{p_{01}} = \lambda_1^2 \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (17)$$

Общее изменение полного давления в сверхзвуковом диффузоре, содержащем косой и прямой скачки, определяется произведением коэффициентов давления:

$$\sigma_k \cdot \sigma_{\Pi} = \frac{p_{0\Pi}}{p_{0н}}. \quad (18)$$

При изменении угла α между фронтом косого скачка и направлением невозмущённого потока отношения значений полного и статического давлений за и перед системой скачков изменяются.

На фиг. 137 приведены кривые зависимости отношения полных давлений за и перед системой скачков от угла косого скачка при различных значениях скорости невозмущённого потока (т. е. при различных значениях M_n или λ_n), вычисленные для диффузора с двумя скачками: косой и вслед за ним прямой. Каждому значению числа M_n (фиг. 137) отвечает некоторый угол косого скачка ($\alpha_{опт}$), при котором восстановление полного давления в диффузоре достигает максимума; чем меньше скорость потока, тем ближе оптимальный угол к прямому. Пунктирной линией *A* соединены точки, в которых косой скачок вырождается в слабую волну; в этом случае система состоит из одного прямого скачка. Пунктирной линией *B* соединены точки, правее которых скорость за косым скачком дозвуковая. Иначе говоря, ветвь каждой кривой, лежащая правее линии *B*, отвечает сильному косому скачку, позади которого нет прямого скачка. При $\alpha = 90^\circ$ сильный косой



Фиг. 137. Зависимость отношения полных давлений за и перед системой из двух скачков (косой + прямой) от угла косого скачка.

скачок переходит в прямой скачок. В силу изложенного на каждой из кривых величины коэффициента давления $\sigma_{к\sigma_{п}}$ при $\alpha = 90^\circ$ и при $\alpha = \alpha_0$ (угол слабых возмущений) получаются одинаковыми.

На фиг. 137 видно, что превосходство системы—косой скачок с последующим прямым скачком перед одним прямым скачком, становится существенным только при $M_n \geq 2$. В случае $M_n = 2$ оптимальное восстановление полного давления в системе двух скачков составляет $\sigma_{к\sigma_{п}} = 0,91$ (при $\alpha_{опт} = 50^\circ$), тогда как один прямой скачок даёт 0,72, т. е. на 27% меньше. При $M_n = 3$ получается соответственно для системы из двух скачков $\sigma_d = \sigma_{к\sigma_{п}} = 0,58$ ($\alpha_{опт} = 43^\circ$) и для одного прямого скачка 0,33 ($\alpha = 90^\circ$), т. е. два скачка дают выигрыш в полном давлении около 70%. При дальнейшем увеличении скорости набегающего потока преимущество двух скачков становится ещё более значительным.

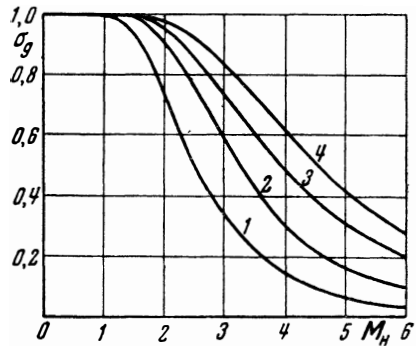
Мы рассмотрели подробно систему из двух скачков. Применяя сложные системы, состоящие из трёх, четырёх и большего числа скачков, можно получить лучшие результаты, чем в двухскачковой системе. Расчёт любой системы плоских скачков уплотнения производится с помощью формул (41)—(57) главы III и формул (17), (18). Можно отыскать оптимальные режимы для сложной системы скачков путём последовательного расчёта. Укажем сначала, как рассчитывается система из трёх скачков (два косых и завершающий прямой). При этом сперва определяются коэффициент скорости (или число M) и давление за первым косым скачком при различных углах наклона его фронта и на основе уже имеющихся данных для каждого значения коэффициента скорости за первым скачком подбирается оптимальная система из остальных двух скачков (косой с последующим прямым). В результате получаются кривые $\sigma_d = f(\alpha)$, аналогичные приведённым на фиг. 137; по ним устанавливаются оптимальные режимы для системы из трёх скачков. Далее можно найти оптимальные режимы для системы из четырёх скачков (три косых с последующим прямым). Для этого нужно вести расчёт при различных положениях первого косого скачка, подбирая к каждому его положению (по значению скорости за первым скачком) оптимальную систему из трёх скачков. Таким же последовательным расчётом можно определить оптимальные режимы для любого заданного числа скачков.

На фиг. 138 приведены кривые оптимальных отношений полного давления за системой скачков к полному давлению перед ней в зависимости от числа M_n перед системой для случаев:

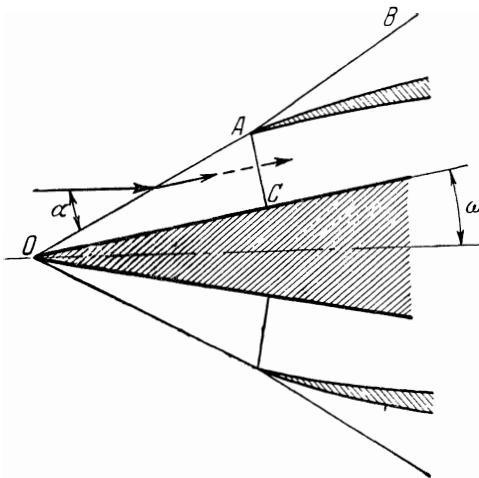
- 1) прямой скачок,
- 2) косой скачок с последующим прямым скачком,
- 3) два косых скачка с последующим прямым скачком,
- 4) три косых скачка с последующим прямым скачком.

Оптимальные режимы получены описанным способом и соответствуют максимальному восстановлению полного давления. Из фиг. 138 видно, что сложные системы скачков могут дать большой эффект лишь при очень высокой скорости. Так, при $M < 1,5$ хорошие результаты даёт один прямой скачок, и более сложные системы в этой области скоростей не требуются. При $M \geq 2$ целесообразно применять двухскачковую систему (косой с последующим прямым). Преимущества четырёхскачковой системы (три косых с последующим прямым) становятся существенными при $M \geq 3$.

Выше рассматривались различные системы скачков уплотнения вне зависимости от конфигурации диффузора, которая необходима для того, чтобы осуществить нужную систему. Полу-



Фиг. 138. Зависимость оптимального восстановления полного давления в различных системах скачков уплотнения от числа M в набегающем потоке.



Фиг. 139. Схема плоского диффузора с двумя скачками: OA — первый косой скачок, CA — прямой скачок, AB — косой скачок внешнего обтекания.

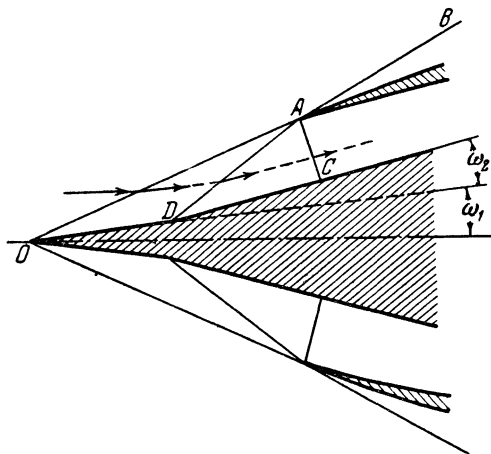
обтекания диффузора, если расстояние OC выбрано из условия встречи фронта скачка OA с кромкой входного отверстия.

ченные результаты применимы непосредственно к диффузорам плоскопараллельной формы и с незначительными изменениями к диффузорам осесимметричным.

Принципиальная схема плоскопараллельного диффузора с двумя скачками уплотнения изображена на фиг. 139. Для того чтобы получить первый косой скачок с нужным углом наклона α , следует устроить клинообразный выступ, отклоняющий поток на угол ω , который для заданного значения M_n подбирается по фиг. 36. Наличие клина не нарушает внешнего

Площадь входного отверстия диффузора должна быть рассчитана так, чтобы скорость потока в нём равнялась скорости за прямым скачком. В этом случае прямой скачок помещается в плоскости CA и не влияет на внешнее обтекание диффузора.

На фиг. 140 изображена принципиальная схема диффузора с тремя скачками уплотнения. В этом случае поверхность клина должна иметь излом. Угол отклонения невозмущённого потока ω_1



Фиг. 140. Схема плоского диффузора с тремя скачками: OA —первый косой скачок, DA —второй косой скачок, CA —прямой скачок, AB —косой скачок внешнего обтекания.

и угол вторичного отклонения ω_2 подбираются попеременно по кривым фиг. 36 в соответствии с заданными углами наклона первого (α_1) и второго (α_2) косых скачков и с учётом скоростей перед первым (M_n) и перед вторым (M_1) скачками. Площадь входного отверстия CA подбирается по скорости за прямым скачком (M_n). Расстояния OD и DC вычисляются из условия пересечения скачков CA и DA на кромке входного отверстия. При данных условиях через систему из трёх скачков проходит только воздух, поступающий внутрь диффузора; внешнее же обтекание не возмущается этой системой скачков.

Принципиальная схема осесимметричного сверхзвукового диффузора ничем не отличается от схемы плоского диффузора.

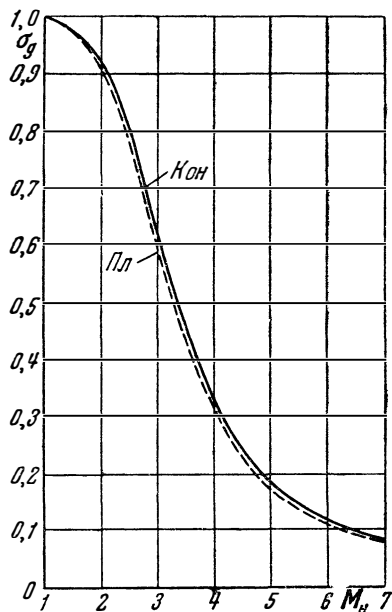
Состояния газа за сложными системами осесимметричных и плоских скачков (при равных углах наклона скачков с одинаковыми порядковыми номерами) должны быть близки между собой. В этом можно убедиться из фиг. 141, на которой изображены две кривые отношения значений полного давления за и перед системами из двух скачков (косой с последующим прямым) при опти-

мальных углах наклона косога скачка в зависимости от числа M_n набегающего потока. Одна из кривых фиг. 141 соответствует осесимметричному, другая (пунктир)—плоскому течению. При расчёте замыкающего прямого скачка в осесимметричном случае скорость перед ним (λ_1) определялась по формуле (53) главы III. В сложном осесимметричном диффузоре все скачки, кроме первого, можно считать практически плоскими ввиду того, что они размещаются в относительно узких кольцевых каналах.

§ 3. Теория газового эжектора

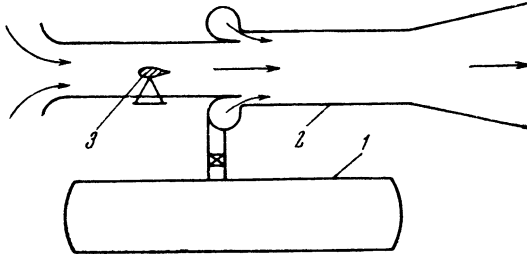
В эжекторе производится увеличение полного давления газового потока под действием струи другого, более высоконапорного газа. Перенос энергии из одного потока в другой осуществляется путём их турбулентного смешения. Назначение эжектора в различных системах может быть различным. В одних случаях эжектор выполняет роль нагнетателя, позволяющего подать большое количество газа сравнительно невысокого давления за счёт энергии небольшого количества газа высокого давления. Таково назначение эжектора, например, в схеме аэродинамической трубы, показанной на фиг. 142. В баллоне *I* содержится воздух более высокого давления, чем необходимо для работы трубы. Однако количество воздуха невелико, и для обеспечения достаточно продолжительной работы трубы сжатый воздух выпускают в эжектор *2*, где к нему примешивается атмосферный воздух, просасываемый эжектором через рабочую часть трубы *3*. Чем больше давление сжатого воздуха, тем большее количество атмосферного воздуха можно привести в движение.

Во многих случаях эжектор используют в качестве эксгаустера для создания пониженного давления в некотором объёме. Для этой цели эжектор применяется в конденсационных установках паровых машин и турбин.



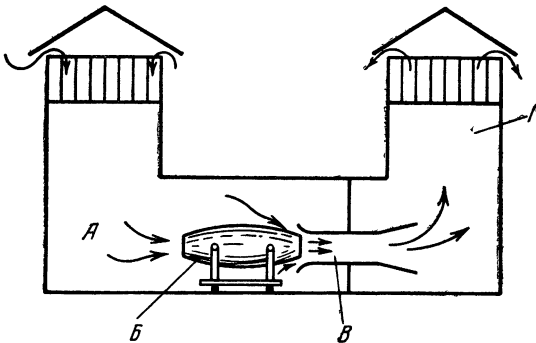
Фиг. 141. Восстановление полного давления за системой из двух скачков (косой + прямой) при оптимальных углах косога скачка в зависимости от скорости потока для осесимметричного и плоского (пунктир) течений.

Часто эжектор используется для поддержания непрерывного тока воздуха в канале или помещении. Примером может служить изображённая на фиг. 143 схема стенда для испытания



Фиг. 142. Схема аэродинамической трубы с эжектором: 1—баллон со сжатым воздухом, 2—эжектор, 3—рабочая часть трубы.

реактивных двигателей. Струя выхлопных газов, покидающих двигатель *Б*, подсасывает в эжектор *В* воздух из бокса *А*, обеспечивая тем самым вентиляцию помещения и охлаждение двигателя. Температура газа в выхлопной шахте при этом получается пониженной из-за разбавления горячих газов атмосферным воздухом; иногда это бывает основной целью применения эжектора в установках такого рода.



Фиг. 143. Схема стенда для испытания реактивных двигателей: *А*—всасывающая шахта, *Б*—двигатель на балансирующей установке, *В*—эжектор, *Г*—выхлопная шахта.

В определённых условиях эжектор может быть применён для увеличения реактивной тяги путём присоединения к струе газа внешнего воздуха.

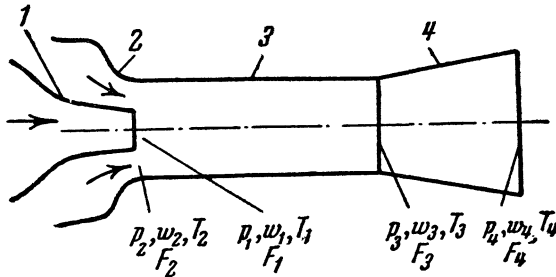
Конструктивные формы эжекторов весьма разнообразны. Обычно можно выделить следующие элементы эжектора: сопло высоконапорного (эжектирующего) газа *1*, сопло низконапорного (эжектируемого) газа *2*, смесительную камеру *3* и диффузор *4* (фиг. 144).

Взаимное расположение, число и форма сопел могут быть различными; это не оказывает существенного влияния на рабочий процесс и параметры эжектора. Если отношение давлений в сопле больше критического, то для полного расширения газа надо использовать сопло Лавала. Однако обычно при не очень больших

такого рода.

сверхкритических отношениях давлений, как и при докритических режимах, в эжекторе применяют нерасширяющиеся сопла, так что скорость истечения газов из сопла не превосходит скорости звука.

Камера смешения выполняется либо вся цилиндрической, либо имеет сходящийся конический участок на входе. Плоскость среза сопла располагается во входном сечении цилиндрического участка камеры смешения или находится на некотором расстоянии



Фиг. 144. Принципиальная схема эжектора: 1—сопло эжектирующего газа, 2—сопло эжектируемого газа, 3—камера смешения, 4—диффузор.

от этого сечения. Мы будем рассматривать только эжекторы с цилиндрической камерой смешения, начало которой совпадает с плоскостью среза сопла.

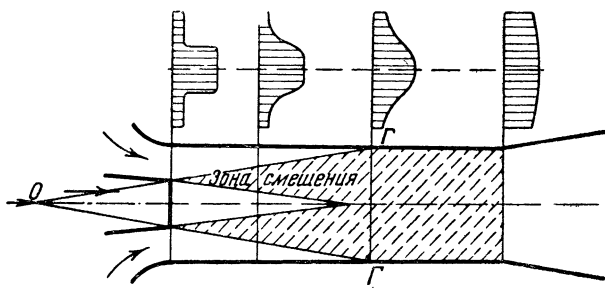
Диффузор эжектора, обычно конический, для повышения эффективности процесса сжатия газа выполняется с небольшим углом раствора: $6^\circ \div 8^\circ$.

Рабочий процесс эжектора сводится к следующему. При установившемся режиме работы эжектора во входном сечении смешительной камеры устанавливается давление p_2 , которое всегда ниже полного давления низконапорного (эжектируемого) газа p_{02} . Под действием разности давлений низконапорный газ устремляется в камеру. Относительный расход этого газа, или, как говорят, коэффициент эжекции $n = \frac{G_2}{G_1}$, зависит от соотношения площадей сопел, от плотности газов, их начальных давлений и от режима работы эжектора. Несмотря на то, что скорость эжектируемого газа во входном сечении w_2 обычно меньше скорости эжектирующего газа w_1 , надлежащим выбором геометрических параметров эжектора можно получить сколь угодно большое значение коэффициента эжекции n .

В камеру смешения эжектирующий и эжектируемый газы входят в виде двух отдельных потоков; в общем случае они могут различаться по химическому составу, скорости, температуре

и давлению. При смешении потоков в камере происходит выравнивание параметров по сечению потока. Весь процесс смешения можно условно разделить на два этапа—начальный и основной. Соответственно выделяются два участка смесительной камеры (фиг. 145).

Течение в начальном участке камеры смешения с известным приближением можно уподобить турбулентной струе в спутном потоке. Ввиду наличия поперечных пульсационных компонентов скорости, свойственных турбулентному движению, потоки внедряются друг в друга, образуя постепенно уширяющуюся зону смешения—пограничный слой струи. Как и в свободной струе, здесь имеются ядро постоянных скоростей эжектирующего газа



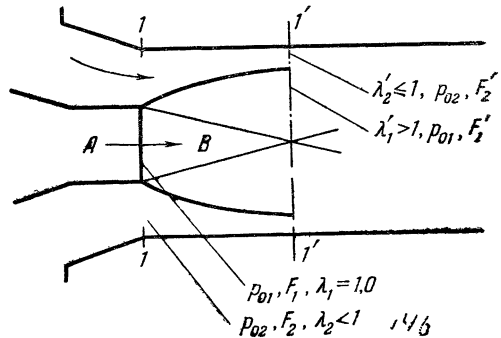
Фиг. 145. Изменение поля скоростей в камере смешения эжектора. Г—Г—граничное сечение, разделяющее начальный и основной участки камеры.

и область невозмущённого эжектируемого потока, лежащие вне зоны смешения. Точка O является полюсом струи. Благодаря непрерывному захватыванию частиц эжектируемого потока высоконапорной струёй и увлечению их в зону смешения поддерживается разрежение на входе в камеру, обеспечивающее подачу эжектируемого газа.

На некотором расстоянии от сопла, в сечении Г—Г, называемом граничным сечением, пограничный слой струи заполняет всё сечение камеры смешения. В этом сечении нет зон невозмущённого эжектируемого и эжектирующего газов, однако параметры потока довольно значительно изменяются по радиусу. На границах струи скорость примерно равна ω_2 , в то время как на оси сечения скорость близка к скорости истечения из сопла ω_1 . Поэтому и в основном участке камеры после граничного сечения продолжается выравнивание параметров потока. В конечном сечении камеры смешения, отстоящем в среднем на расстоянии $6—10$ диаметров камеры от среза сопла, получается достаточно однородная смесь газов, полное давление которой p_{03} тем больше превышает давление эжектируемого газа p_{02} , чем меньше коэффициент

эжекции. В диффузоре, устанавливаемом на выходе из камеры смешения, скоростной напор смеси частично преобразуется в статическое давление. В тех случаях, когда используется непосредственно скоростной напор газа, эжектор выполняется без диффузора. Такова в общих чертах схема процесса смешения газов при дозвуковых скоростях.

При сверхкритическом отношении давлений в сопле картина течения получается несколько иной. В этом случае статическое давление смешивающихся газов во входном сечении камеры может быть неодинаковым. Если сопло эжектирующего газа выполнено нерасширяющимся, то при сверхкритическом отношении давлений статическое давление газа на срезе сопла превышает давление в окружающей среде — эжектируемом газе. Поэтому после выхода из сопла *A* струя эжектирующего газа *B*¹⁾ продолжает расширяться, скорость её становится сверхзвуковой, а площадь сечения — большей, чем площадь сечения сопла (фиг. 146), т. е. газовый поток ведёт себя, как в расширяющейся части сопла Лавала; роль стенок сопла выполняют границы струи.



Фиг. 146. Схема течения в начальном участке камеры смешения при сверхкритическом отношении давлений в сопле.

Поток эжектируемого газа в начальном участке камеры движется между струёй и стенками камеры. В начальном сечении камеры скорость эжектируемого потока дозвуковая, поэтому при течении по суживающемуся «каналу» поток ускоряется, статическое давление в нём падает.

Сечение *I* — *I'* является характерным сечением начального участка камеры: в нём заканчивается выравнивание статических давлений потоков. В дальнейшем мы будем называть его сечением равных давлений.

С удалением от сопла граница между потоками размывается, сверхзвуковое ядро эжектирующей струи суживается, происходит постепенное выравнивание параметров газа по сечению смешительной камеры. На фиг. 147 и 148 приведены фотографии течения в начальном участке камеры на различных режимах, полученные при помощи оптического прибора.

1) На фиг. 146 струя течёт слева направо.

Рабочий процесс эжектора сопровождается потерями. Наряду с обычными потерями на трение о стенки сопел и камеры смешения при работе эжектора возникают потери особого рода, связанные с самим существом процесса смешения потоков. Определенное изменение кинетической энергии, происходящее при смешении двух газовых потоков, секундный расход и скорость в которых обозначим соответственно G_1 , w_1 и G_2 , w_2 . Если предположить, что смешение потоков происходит при постоянном давлении (следует иметь в виду, что это возможно либо при специальной профилировке камеры смешения, либо при смешении свободных струй), то количество движения смеси должно быть равно сумме количеств движения потоков:

$$\frac{G_{\text{см}}}{g} w_{\text{см}} = \frac{G_1}{g} w_1 + \frac{G_2}{g} w_2, \quad (19)$$

откуда

$$w_{\text{см}} = \frac{G_1 w_1 + G_2 w_2}{G_1 + G_2}.$$

Кинетическая энергия смеси

$$E_{\text{см}} = \frac{G_1 + G_2}{2g} w_{\text{см}}^2 = \frac{1}{2g} \frac{(G_1 w_1 + G_2 w_2)^2}{G_1 + G_2}$$

меньше суммы кинетических энергий потоков

$$E_1 + E_2 = \frac{1}{2g} (G_1 w_1^2 + G_2 w_2^2)$$

на величину

$$\Delta E = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \cdot \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}, \quad (20)$$

которая представляет собой потери кинетической энергии, связанные со смешением двух потоков. Из формулы (20) видно, что независимо от температуры, плотности и т. д. потери кинетической энергии тем больше, чем больше разность скоростей смешивающихся потоков. Эти потери аналогичны потерям при ударе неупругих тел.

В цилиндрической камере смешения эжектора происходит подобный процесс, но сопровождаемый изменением статического давления. Сравним параметры потока в двух произвольных сечениях камеры a и b (фиг. 149); очевидно, что поле скоростей в сечении b более равномерное, чем в сечении a . Вследствие равенства расходов газа в обоих сечениях средняя по площади скорость при $\gamma = \text{const}$ не изменяется:

$$\bar{w} = \frac{G}{\gamma F} = \frac{1}{F} \int_{(a)} w dF = \frac{1}{F} \int_{(b)} w dF. \quad (21)$$

Напомним, что степень неравномерности поля скоростей характеризуется коэффициентом поля

$$\tau = F \frac{\int \omega^2 dF}{(\int \omega dF)^2}. \quad (22)$$

При равномерном поле скоростей коэффициент поля τ равен единице. Во всех случаях неравномерного поля $\tau > 1$; чем неравномернее поле, тем больше величина τ . В нашем случае $\tau_a > \tau_b$. Согласно (21) и (22)

$$\begin{aligned} \int_{(a)} \omega^2 dF &= \tau_a \frac{1}{F} \left(\int \omega dF \right)^2 = \tau_a \frac{G^2}{\gamma^2 F}, \\ \int_{(b)} \omega^2 dF &= \tau_b \frac{G^2}{\gamma^2 F}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{(a)} \omega^2 dF > \int_{(b)} \omega^2 dF. \quad (23)$$

Итак, интеграл $\int \omega^2 dF$, определяющий количество движения в потоке, составляет большую величину при неравномерном поле скорости, чем при равномерном, хотя средние по сечению скорости и одинаковы.

Запишем теперь уравнение количества движения между сечениями камеры смешения a и b :

$$\frac{\gamma}{g} \int_{(a)} \omega^2 dF - \frac{\gamma}{g} \int_{(b)} \omega^2 dF = (p_2 - p_1) F.$$

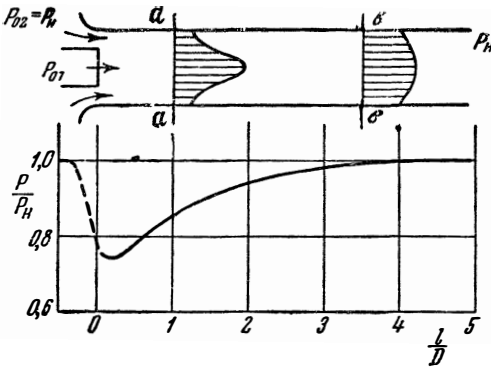
На основании неравенства (23) левая часть данного уравнения всегда положительна, отсюда $p_2 > p_1$. Другими словами, выравнивание поля скоростей в цилиндрической трубе происходит с понижением количества движения и возрастанием статического давления. Эжектор, показанный на фиг. 149, подсасывает атмосферный воздух и выбрасывает его вновь в атмосферу. Это возможно лишь потому, что статическое давление во входном сечении камеры смешения меньше, чем в выходном сечении. Заметим, что иногда при смешении газов различной температуры возможно и снижение статического давления по длине камеры.

В некоторых случаях камеру смешения стремятся спроектировать так, чтобы процесс проходил при постоянном давлении. Для этого площадь сечения камеры должна уменьшаться с удалением от сопла. Ниже мы рассматриваем только цилиндрическую камеру смешения.

Отношение площади сечения эжектирующего сопла F_1 к площади сечения камеры F_3 представляет собой важный геометрический параметр, характеризующий данный эжектор. В расчёте эжектора мы будем пользоваться геометрическим параметром

$$\alpha = \frac{F_1}{F_2} = \frac{F_1}{F_3 - F_1}.$$

Эжектор с большим значением α , т. е. с относительно малой площадью камеры, является высоконапорным, но не может работать с большими коэффициентами эжекции; эжектор с малым значением α позволяет подсосать большое количество газа, но мало повышает его напор.



Фиг. 149. Изменение статического давления вдоль камеры смешения.

Степень уширения диффузора $f = \frac{F_4}{F_3}$ — отношение площади на выходе из диффузора к площади на входе в него — является вторым характерным конструктивным параметром эжектора. В ряде случаев (например, при заданном статическом давлении на выходе из эжектора) степень уширения диффузора f существенно влияет на все параметры эжектора. С увеличением f снижается статическое давление в камере смешения, растут скорость эжектирования и коэффициент эжекции. В других случаях, когда заданы параметры потока на входе в камеру, степень уширения диффузора определяет лишь статическое давление и скорость смеси в выходном сечении эжектора. Рациональная степень уширения диффузора ограничивается возраставшим потерь на трение при чрезмерной его длине.

Перейдём к расчёту газового эжектора. Сопла и диффузор эжектора принципиально не отличаются от обычных сопел и диффузоров, расчёт которых излагался выше. Основные трудности возникают при расчёте камеры смешения, т. е. при определении параметров смеси газов по исходным параметрам газов перед входом в эжектор. Замечательным является тот факт, что для определения параметров потока на выходе из камеры рассмотрение самого процесса смешения не обязательно. Нет необходимости также предварительно вычислять потери, возникающие в процессе смешения, и анализировать механизм процесса.

Течение газа в любом участке камеры смешения подчиняется трём основным уравнениям: уравнению сохранения энергии, уравнению сохранения массы и уравнению количества движения. Этих уравнений достаточно для определения трёх параметров смеси газов в выходном сечении камеры смешения, если поток здесь можно считать одномерным. Три параметра полностью характеризуют состояние газа и позволяют найти любые другие его параметры. По ним же можно, если это требуется, найти потери энергии при смешении потоков. Таким образом, здесь, так же как при решении задачи о скачке уплотнения, мы не вводим в исходные уравнения никаких условий о необратимости процесса, однако после решения их приходим к результату, который соответствует течению с потерями, т. е. росту энтропии.

• Метод расчёта эжектора с учётом сжимаемости газов был предложен С. А. Христиановичем в 1944 г. В трудах М. Д. Миллионщикова, Г. М. Рябинкова, Е. Я. Соколова, Б. М. Киселёва и др. теория газового эжектора была развита и дополнена, а метод расчёта существенно упрощён благодаря применению газодинамических функций.

Запишем основные уравнения, связывающие параметры потока во входном и выходном сечениях цилиндрической камеры смешения. Параметры эжектирующего газа отметим индексом 1, параметры эжектируемого газа—индексом 2, параметры смеси в выходном сечении камеры—индексом 3, параметры заторможенного потока—дополнительным индексом 0. Будем считать заданными параметры потоков во входном сечении камеры смешения и построим решение таким образом, чтобы из трёх уравнений: уравнения сохранения массы, уравнения энергии и уравнения количества движения определить температуру торможения, коэффициент скорости и полное давление смеси газов в выходном сечении камеры.

Закон сохранения массы записываем в виде

$$G_3 = G_1 + G_2$$

или

$$\frac{G_3}{G_1} = n + 1, \quad (24)$$

где $n = \frac{G_2}{G_1}$ — коэффициент эжекции. Пусть теплопередача через стенки эжектора отсутствует. Тогда на основании закона сохранения энергии можно записать:

$$G_1 \left(c_{p1} T_1 + A \frac{w_1^2}{2g} \right) + G_2 \left(c_{p2} T_2 + A \frac{w_2^2}{2g} \right) = G_3 \left(c_{p3} T_3 + A \frac{w_3^2}{2g} \right),$$

или, переходя к температурам торможения,

$$G_1 c_{p1} T_{01} + G_2 c_{p2} T_{02} = G_3 c_{p3} T_{03}. \quad (25)$$

Таким образом, независимо от характера процесса в камере смешения суммарное теплосодержание смеси, отвечающее состоянию полного торможения, равно сумме полных теплосодержаний эжектирующего и эжектируемого газов. Разделим обе части уравнения (25) на G_1 и подставим в него соотношение (24). Пренебрегая различием в теплоёмкостях газов, получим:

$$T_{01} + nT_{02} = (n + 1)T_{03}. \quad (26)$$

Примем обозначение

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{a_{2 \text{ кр}}^2}{a_{1 \text{ кр}}^2} = \theta.$$

Тогда из (26) следует:

$$\frac{T_{03}}{T_{01}} = \frac{a_{3 \text{ кр}}^2}{a_{1 \text{ кр}}^2} = \frac{n\theta + 1}{n + 1}. \quad (27)$$

Это уравнение позволяет определить первый искомый параметр — температуру торможения (или критическую скорость звука) в выходном сечении камеры смешения.

Внешние силы, действующие на боковую поверхность газового потока между начальным и конечным сечениями цилиндрической камеры смешения, не дают составляющих, параллельных оси камеры (если не учитывать трения о стенки камеры). Поэтому изменение секундного количества движения потоков равно разности сил давления на граничных сечениях камеры смешения. В общем случае, когда во входном сечении камеры статические давления эжектирующего и эжектируемого газов различны (но постоянны по сечению каждого сопла), уравнение количества движения записывается в виде

$$\frac{G_1}{g} \omega_1 + \frac{G_2}{g} \omega_2 - \frac{G_3}{g} \omega_3 = p_3 F_3 - p_1 F_1 - p_2 F_2$$

или

$$\frac{G_1}{g} \omega_1 + p_1 F_1 + \frac{G_2}{g} \omega_2 + p_2 F_2 = \frac{G_3}{g} \omega_3 + p_3 F_3. \quad (28)$$

Следуя Б. М. Киселёву, преобразуем это уравнение при помощи газодинамических функций. Заменим выражения импульсов согласно формуле (113) главы V:

$$\frac{G}{g} \omega + pF = \frac{k+1}{2k} \frac{G}{g} a_{\text{кр}} z(\lambda).$$

Различием в величине $\frac{k+1}{2k}$ для газов и смеси будем пренебрегать. Из (28) получаем:

$$G_1 a_{1 \text{ кр}} \cdot z(\lambda_1) + G_2 a_{2 \text{ кр}} z(\lambda_2) = G_3 a_{3 \text{ кр}} \cdot z(\lambda_3). \quad (29)$$

Это уравнение имеет такой же вид, как уравнение (19), записанное без учёта сжимаемости газа и изменения давления в потоке, причём величина

$$a_{\text{кр}} z(\lambda) = a_{\text{кр}} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right)$$

играет ту же роль, что и величина скорости ω в уравнении (19). Поэтому решение уравнения (29) по существу не отличается от решения уравнения (19), только вместо скорости ω_3 здесь мы определим величину $z(\lambda_3) = \lambda_3 + \frac{1}{\lambda_3}$. Разделим обе части уравнения (29) на $G_1 a_{1 \text{ кр}}$ и подставим введённые выше безразмерные величины

$$n = \frac{G_2}{G_1} \quad \text{и} \quad \theta = \frac{a_{2 \text{ кр}}^2}{a_{1 \text{ кр}}^2}.$$

Воспользовавшись уравнениями (24) и (27), получим:

$$z(\lambda_1) + n \sqrt{\theta} \cdot z(\lambda_2) = \sqrt{(n+1)(n\theta+1)} z(\lambda_3). \quad (30)$$

Это уравнение даёт возможность по параметрам газов на входе в камеру определить газодинамическую функцию $z(\lambda_3)$, а стало быть, и коэффициент скорости смеси на выходе из камеры λ_3 .

Из главы V мы знаем, что каждому значению $z(\lambda)$ соответствуют два взаимно обратных значения λ . Другими словами, при заданных параметрах смешивающихся потоков на входе в камеру возможны два режима течения на выходе из камеры смешения, один из которых дозвуковой, другой — сверхзвуковой. Ниже изложены соображения, позволяющие в каждом случае выделить реальный режим течения.

Таким образом, два параметра смеси T_{03} и λ_3 определены. Для нахождения третьего искомого параметра — полного давления смеси p_{03} — воспользуемся уравнением (24), полученным на основании закона сохранения массы:

$$\frac{G_3}{G_1} = n + 1.$$

Заменим величины расхода газа G_3 и G_1 при помощи соотношения (107) главы V:

$$G = m \frac{p_0 F \cdot q(\lambda)}{\sqrt{T_0}},$$

где

$$q(\lambda) = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Уравнение (24) принимает вид

$$\frac{p_{03}}{p_{01}} \cdot \frac{F_3}{F_1} \cdot \frac{q(\lambda_3)}{q(\lambda_1)} \sqrt{\frac{T_{01}}{T_{03}}} = n + 1.$$

Заменим отношение температур $\frac{T_{01}}{T_{03}}$ согласно (27) и учтём, что по условию цилиндричности камеры

$$F_3 = F_1 + F_2$$

или

$$\frac{F_3}{F_1} = 1 + \frac{1}{\alpha},$$

где $\alpha = \frac{F_1}{F_2}$ — геометрический параметр камеры смешения. Получаем:

$$\frac{p_{03}}{p_{01}} = \frac{\sqrt{(n+1)(n\theta+1)}}{1 + \frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda_3)}. \quad (31)$$

Так как λ_3 определено из уравнения (30), то по уравнению (31) можно найти полное давление на выходе из камеры смешения p_{03} .

В уравнениях (27), (30) и (31), помимо параметров газов перед смешением, фигурирует безразмерная величина n — коэффициент эжекции:

$$n = \frac{G_2}{G_1};$$

она может быть выражена через параметры потоков на входе в камеру и не является, таким образом, независимой. С помощью уравнения расхода в виде (107) главы V получаем:

$$n = \frac{p_{02} F_2 q(\lambda_2) \sqrt{T_{01}}}{p_{01} F_1 q(\lambda_1) \sqrt{T_{02}}}$$

или

$$n = \frac{p_{02}}{p_{01}} \frac{q(\lambda_2)}{q(\lambda_1)} \frac{1}{\alpha \sqrt{\theta}}. \quad (32)$$

Это соотношение связывает коэффициент эжекции n с геометрическим параметром эжектора α и параметрами газов на входе в камеру.

Полученных уравнений вместе с соотношением (32) достаточно для определения параметров потока в выходном сечении камеры по заданным начальным параметрам потоков и коэффициенту эжекции (или по геометрическому параметру α).

Напомним, что в этом простейшем расчёте камеры смешения учтены лишь основные потери, свойственные процессу смешения

ния — потери на удар. В ряде задач, однако, играют существенную роль потери на трение о стенки камеры. Легко убедиться, что для учёта сил трения о стенки необходимо изменить вид лишь уравнения импульсов.

Действительно, при составлении суммы сил, действующих вдоль оси потока, нужно учесть силу трения о стенки, которую выражаем по обычной формуле

$$P_{\text{тр}} = \zeta \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{w_3^2}{2g} \gamma_3 F_3.$$

Обозначив

$$\frac{\zeta}{2} \frac{l}{D} = \nu$$

и проведя несложные преобразования, имеем:

$$P_{\text{тр}} = \nu \frac{G_3}{g} a_{3 \text{ кр}} \cdot \lambda_3. \quad (33)$$

Если это выражение подставить в правую часть уравнения количества движения (28), то вместо конечного уравнения (30) получаем следующее уравнение:

$$z(\lambda_1) + n \sqrt{\bar{\theta}} z(\lambda_2) = \sqrt{(n+1)(n^{\nu}+1)} \left[z(\lambda_3) + \frac{2k}{k+1} \nu \lambda_3 \right]. \quad (34)$$

Нахождение из него коэффициента скорости λ_3 не представляет трудностей. Что касается остальных уравнений, то при учёте трения они остаются без изменения (равенство расхода и полной энергии газа во входном и выходном сечениях камеры сохраняется независимо от наличия трения).

По параграмм потока на выходе из камеры смещения можно рассчитать параметры его в выходном сечении диффузора. Температура торможения потока при течении в диффузоре не изменяется:

$$T_{04} = T_{03} \quad \text{и} \quad a_{4 \text{ кр}} = a_{3 \text{ кр}}. \quad (35)$$

Вследствие возникающих в диффузоре потерь полное давление газа в выходном сечении диффузора меньше, чем во входном сечении:

$$p_{04} = \sigma_d p_{03}, \quad (36)$$

где $\sigma_d < 1$ — коэффициент полного давления.

Зависимость σ_d от λ_3 по экспериментальным данным К. С. Спилларда описана в § 2 и приведена на фиг. 132. Следует иметь в виду, что при работе диффузора в эжекторе поле скоростей на входе в диффузор обычно обладает заметной неравномерностью, поэтому коэффициент полного давления σ_d несколько снижается по сравнению с данными, полученными в условиях равномерного поля скоростей.

Для определения коэффициента скорости на выходе из диффузора воспользуемся уравнением неразрывности в форме (107) главы V:

$$\frac{p_{04} F_4 \cdot q(\lambda_4)}{\sqrt{T_{04}}} = \frac{p_{03} F_3 \cdot q(\lambda_3)}{\sqrt{T_{03}}}.$$

Учитывая соотношения (35) и (36), приводим это уравнение к виду

$$q(\lambda_4) = q(\lambda_3) \cdot \frac{1}{\sigma_d \cdot f}, \quad (37)$$

где $f = \frac{F_4}{F_3}$ — степень уширения диффузора.

Часто бывает заданным статическое давление газа на выходе из диффузора p_4 (например, при выходе газа из эжектора в атмосферу). В этом случае удобно выразить расход газа в выходном сечении диффузора посредством формулы (110) главы V:

$$G_4 = m \frac{p_4 \cdot F_4 \cdot y(\lambda_4)}{\sqrt{T_{04}}},$$

что приводит к следующему виду уравнения неразрывности:

$$y(\lambda_4) = q(\lambda_3) \cdot \frac{p_{03}}{p_4} \cdot \frac{1}{f}. \quad (38)$$

По значению функций $q(\lambda_4)$ или $y(\lambda_4)$ с помощью таблиц газодинамических функций можно определить величину коэффициента скорости λ_4 .

По найденным трём параметрам потока p_{04} , T_{04} и λ_4 легко вычислить все параметры в выходном сечении диффузора. В самом деле,

$$\begin{aligned} \omega_4 &= \lambda_4 \cdot a_{4 \text{кр}} = \lambda_4 \sqrt{2g \frac{k}{k+1} RT_{04}}, \\ p_4 &= p_{04} \cdot \pi(\lambda_4) = p_{04} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_4^2\right)^{\frac{k}{k-1}}, \\ \gamma_4 &= \frac{p_{04}}{RT_{04}} \cdot \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_4^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, если считать известными полные давления, температуры торможения и коэффициенты скорости газовых потоков во входном сечении цилиндрической камеры смешения, то, пользуясь уравнениями (27), (30), (31), (32), (35), (36), (37), можно определить конечные параметры смеси газов. Полные давления и температуры торможения эжектирующего и эжектируемого газов обычно заданы или легко определяются по параметрам газов перед соплами эжектора. Что касается коэффици-

ентов скорости λ_1 и λ_2 , то они зависят от статического давления во входном сечении камеры смешения, которое до расчёта эжектора неизвестно; оно определяется режимом работы и эффективностью камеры смешения и диффузора. Поэтому в большинстве случаев для расчёта эжектора приходится задаваться рядом значений λ_1 и λ_2 и находить характеристику эжектора—зависимость конечных параметров эжектора от скоростей во входном сечении камеры. По этой характеристике и выбирают режим, соответствующий условиям данной конкретной задачи, т. е., например, заданному статическому или полному давлению смеси газов, заданному коэффициенту эжекции, максимальному увеличению реактивной тяги и др.

На фиг. 150 приведена сетка кривых $p_{04} = f(n, \lambda_2)$, построенных для заданных полных давлений газов при условии $\lambda_1 = 1$ и $T_{01} = T_{02}$. Очевидно, наиболее выгодным режимам соответствуют соединённые пунктирной линией точки максимального полного давления смеси газов. Следует иметь в виду, что при различных значениях λ_2 для получения данного значения коэффициента эжекции необходимо выбирать по формуле (32) различные величины геометрического параметра $\alpha = \frac{F_2}{F_1}$. Поэтому точки кривой $n = \text{const}$ на фиг. 150 соответствуют различным эжекторам: чем больше λ_2 , тем меньше относительная площадь камеры смешения.

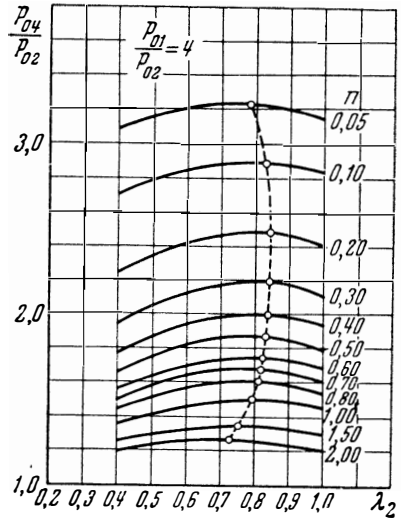
При выборе величин коэффициентов скорости λ_1 и λ_2 необходимо учитывать некоторые дополнительные условия, ограничивающие область возможных режимов.

Так, при дозвуковом режиме истечения газов из сопел можно считать постоянным статическое давление во входном сечении камеры. Это условие связывает между собой значения λ_1 и λ_2 , так как при

$$p_1 = p_2$$

имеем:

$$p_{01} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} = p_{02} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2 \right)^{\frac{k}{k-1}},$$



Фиг. 150. Зависимость отношения полных давлений $\frac{p_{04}}{p_{02}}$ от коэффициента эжекции и входной скорости эжектируемого газа.

или сокращённо:

$$p_{01} \pi (\lambda_1) = p_{02} \pi (\lambda_2). \quad (39)$$

Таким образом, только один из коэффициентов скорости может быть задан произвольно; значение другого определяется по уравнению (39), после чего величины λ_1 и λ_2 подставляются в формулы для расчёта камеры смешения и диффузора. При сверхкритическом отношении давлений в сопле эжектирующего газа, когда $\lambda_1 = 1$, статические давления газов во входном сечении камеры могут быть различными, и величина λ_2 выбирается независимо от λ_1 . Однако и в этом случае, как показали М. Д. Миллионщиков, Г. М. Рябинков и Е. Я. Соколов, существует условие, ограничивающее выбор λ_2 . Выше указывалось, что при сверхкритическом режиме течения статические давления газов становятся одинаковыми на некотором расстоянии от эжектирующего сопла, в так называемом сечении равных давлений (фиг. 146). Скорость эжектирующего газа в этом сечении больше скорости звука ($\lambda_1' > 1$); площадь сечения эжектируемого газа здесь минимальна, так что скорость его не превосходит звуковую ($\lambda_2' \leq 1$).

Приближённо можно полагать, что до сечения равных давлений потоки текут, не смешиваясь друг с другом, причём полное давление и температура торможения в каждом из них постоянны. Тогда условие равенства статических давлений связывает между собой коэффициенты скорости газов λ_1' и λ_2' уравнением

$$p_{01} \pi (\lambda_1') = p_{02} \pi (\lambda_2'). \quad (40)$$

Условие цилиндричности камеры смешения между сечениями I—I и I'—I' означает, что

$$F_1 + F_2 = F_1' + F_2'$$

или

$$\frac{F_1}{F_2} + 1 = \frac{F_1'}{F_1 \cdot F_2} + \frac{F_2'}{F_2}.$$

Если в потоке

$$p_0 = \text{const}, \quad G = \text{const}, \quad T_0 = \text{const},$$

то согласно уравнению расхода

$$F = \frac{\text{const}}{q(\lambda)}.$$

Заменяя в уравнении цилиндричности камеры отношение площадей $\frac{F_1'}{F_1}$ и $\frac{F_2'}{F_2}$ отношениями соответствующих функций $q(\lambda)$,

получаем:

$$\alpha + 1 = \frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda'_1)} \alpha + \frac{q(\lambda_2)}{q(\lambda'_2)}$$

или

$$q(\lambda_2) = q(\lambda'_2) \left[1 - \alpha \frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda'_1)} + \alpha \right], \quad (41)$$

где α — геометрический параметр камеры смешения. Это уравнение связывает коэффициенты скорости эжектируемого газа во входном сечении камеры и в сечении равных давлений.

Таким образом, задаваясь одной из величин λ'_1 или λ'_2 , находим по уравнению (40) значение другой, а затем по уравнению (41) величину λ_2 . Легко видеть, что $\lambda_2 < \lambda'_2$. Предельное значение λ'_2 равно единице; ему соответствует определённое значение $\lambda_{2\max} < 1$, которое является предельно возможным для данного эжектора и заданных начальных параметров газов.

Поэтому произвольно выбирая в расчёте значение λ_2 , нельзя быть уверенным, что соответствующий режим реально осуществим. Если выбранное значение $\lambda_2 > \lambda_{2\max}$, то это означает, что расход эжектируемого газа должен быть больше предельного, получающегося при критическом режиме в сечении равных давлений, что невозможно.

Уравнения (40) и (41) позволяют выделить область реально существующих режимов работы эжектора при сверхкритическом отношении давлений.

Если величина α неизвестна (например, при проектировании эжектора по заданным значениям n и θ , когда α должно быть определено в результате расчёта), то в формулу (41) вместо α нужно подставить его выражение согласно (32). Уравнение (41) в этом случае принимает вид

$$q(\lambda_2) = q(\lambda'_2) \left[1 - \frac{1}{n \sqrt{\theta}} \cdot \frac{p_{02}}{p_{01}} \cdot \frac{q(\lambda_2)}{q(\lambda_1)} \left\{ \frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda'_1)} - 1 \right\} \right]$$

или

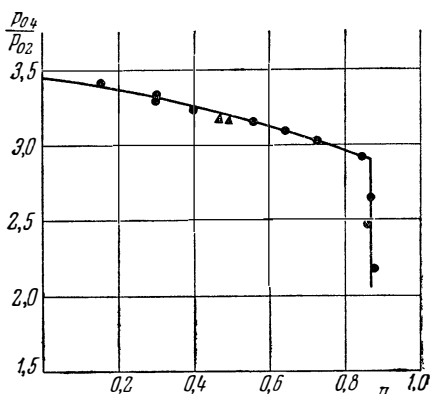
$$q(\lambda_2) = \frac{q(\lambda'_2)}{1 + \frac{1}{n \sqrt{\theta}} \cdot \frac{p_{02}}{p_{01}} \cdot \frac{q(\lambda'_2)}{q(\lambda'_1)} \left[\frac{1}{q(\lambda'_1)} - \frac{1}{q(\lambda_1)} \right]}. \quad (42)$$

При определении коэффициента скорости на выходе из камеры смешения λ_3 обычно возникает затруднение, связанное с тем, что найденному из уравнения (30) значению функции $z(\lambda_3) = \lambda_3 + \frac{1}{\lambda_3}$ может соответствовать два значения λ_3 , взаимно обратных, т. е. связанных зависимостью

$$(\lambda_3)_1 \cdot (\lambda_3)_2 = 1. \quad (43)$$

Эта же зависимость была получена в § 1 главы III для коэффициентов скорости до и после прямого скачка уплотнения. Поскольку в прямом скачке полная энергия, импульс и расход газа не изменяются, все уравнения камеры смешения сохраняют силу, если где-либо в камере возникнет скачок уплотнения. В этом смысле неоднозначности решения уравнения (30). Однако не оба значения λ_3 реально возможны. Так, например, при $\lambda_1 < 1$ и $\lambda_2 < 1$ реально лишь дозвуковое решение для λ_3 ; сверхзвуковое решение при этом соответствует физически невозможному скачку разрежения.

Анализ показывает, что сверхзвуковой режим на выходе из камеры смешения становится возможным лишь в том случае,



Фиг. 151. Характеристика эжектора при $\frac{P_{01}}{P_{02}} = 10$.

основными параметрами — напором (степенью повышения давления) и производительностью (коэффициентом эжекции).

На фиг. 151 приведена характеристика эжектора, полученная из опыта путём изменения давления на выходе из эжектора при постоянных полных давлениях смешивающихся газов P_{01} и P_{02} . Левая ветвь характеристики соответствует режимам, когда коэффициент эжекции невелик и скорость эжектируемого газа нигде не достигает скорости звука. Снижение давления на выходе p_4 приводит на этих режимах к снижению давления во входном сечении камеры, т. е. к увеличению скорости и расхода эжектируемого газа.

Расход эжектирующего газа, скорость которого обычно близка к звуковой, изменяется мало, а при сверхкритическом отношении давлений вообще остаётся постоянным. Поэтому уменьшение давления на выходе из эжектора приводит к значительному возрастанию коэффициента эжекции.

когда скорость эжектируемого газа в сечении равных давлений достигает скорости звука, т. е. $\lambda'_2 = 1$. При $\lambda'_2 < 1$ режим течения на выходе из камеры всегда дозвуковой. Этим можно руководствоваться при решении уравнения (30) относительно λ_3 . При $\lambda_3 > 1$ диффузор эжектора работает как расширяющаяся часть сопла Лавалия.

Параметры одного и того же эжектора могут существенно изменяться по режимам его работы. Характеристикой эжектора называется зависимость между его двумя

При дальнейшем уменьшении давления p_4 скорость эжектируемого потока в сечении равных давлений становится равной скорости звука; эжектирующий газ в этом сечении движется со сверхзвуковой скоростью. Поэтому изменение давления на выходе из эжектора не влияет на скорости и расходы газов во входном сечении камеры. Коэффициент эжекции на этих режимах равен постоянной величине, предельной для данного эжектора. Предельным режимам работы эжектора соответствует вертикальный участок характеристики.

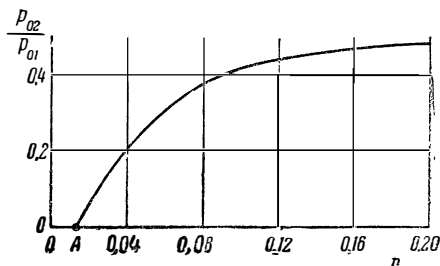
На фиг. 152 приведена другая характеристика эжектора, связывающая коэффициент эжекции с полным давлением эжектирующего газа p_{01} при постоянном полном давлении эжектируемого газа p_{02} и постоянном статическом давлении на выходе p_4 . Такая характеристика представляет интерес, например, для эжектора, показанного на фиг. 149, для которого давления p_{02} и p_4 равны атмосферному.

Когда давление эжектирующего газа возрастает, то расход его через сопло увеличивается пропорционально произведению

$$p_{01} \cdot q(\lambda_1);$$

эжектирующая способность струи при этом усиливается, разрежение в камере смешения и скорость эжектируемого газа на входе в камеру возрастают. Расход эжектируемого газа увеличивается медленнее, чем расход эжектирующего газа (пропорционально величине $q(\lambda_2)$, так как полное давление p_{02} неизменно). Поэтому коэффициент эжекции $n = \frac{G_2}{G_1}$ уменьшается с увеличением полного давления эжектирующего газа.

Уменьшение коэффициента эжекции становится ещё более значительным, когда струя эжектирующего газа, расширяясь в начальном участке камеры, уменьшает площадь эжектируемого газа в сечении равных давлений. При некотором значении полного давления p_{01} струя эжектирующего газа в сечении равных давлений заполняет всю площадь камеры смешения. Расход эжектируемого газа при этом равен нулю. Это явление называется запиранием эжектора; на характеристике ему соответствует точка A .



Фиг. 152. Связь между коэффициентом эжекции и отношением полных давлений смешивающихся газов при $\alpha = 0,4$.

$$\frac{p_{02}}{p_4} = 1. \quad (A - \text{запирание эжектора.})$$

Все рассмотренные режимы работы эжектора и характеристики в целом могут быть рассчитаны для эжектора заданных размеров по изложенному методу расчёта. В частности, момент запирания эжектора можно определить из уравнения (41):

$$q(\lambda_2) = q(\lambda'_2) \left[1 - \alpha \left\{ \frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda'_1)} - 1 \right\} \right]. \quad (44)$$

Каждому значению α соответствует некоторое значение $q(\lambda'_1)$, отвечающее условию запирания эжектора $q(\lambda_2) = 0$, т. е. $G_2 = 0$. При помощи уравнения (40)

$$p_{02} = p_{01} \frac{\pi(\lambda'_1)}{\pi(\lambda'_2)} \quad (45)$$

можно найти значение p_{02} , при котором наступает запирание эжектора.

Пример расчёта эжектора. Для испытательного стенда, показанного на фиг. 143, требуется подобрать эжектор, обеспечивающий просос воздуха для вентиляции помещения и охлаждения испытуемого двигателя. Расход воздуха нужно выбрать так, чтобы температура газов в выхлопной шахте T_{04} была не выше 600° абс. Параметры газа на выходе из сопла двигателя $p_{01} = 2 \frac{\kappa\text{г}}{\text{см}^2}$, $T_{01} = 900^\circ$ абс. Параметры воздуха в боксе $p_{02} = 1,03 \frac{\kappa\text{г}}{\text{см}^2}$, $T_{02} = 300^\circ$ абс. Статическое давление в выхлопной шахте p_4 , определяющееся сопротивлением выхлопной системы, принимаем равным $1,05 \kappa\text{г}/\text{см}^2$.

Расчёт начнём с определения коэффициента эжекции. Пренебрегая различием в теплоёмкостях воздуха и газа, из формулы (26) получаем:

$$n = \frac{T_{01} - T_{03}}{T_{03} - T_{02}} = \frac{900 - 600}{600 - 300} = 1.$$

Таким образом, заданное снижение температуры газов может быть достигнуто путём подмешивания воздуха в количестве, равном расходу газа через двигатель.

Отношение давлений в сопле двигателя выше критического, поэтому $\lambda_1 = 1$.

Как мы указывали выше, для расчёта необходимо задаться рядом значений коэффициента скорости λ_2 и воспользоваться последовательно уравнениями (40), (41), (30).

Легко убедиться, что решение поставленной задачи неоднозначно. Заданным условиям удовлетворяет ряд эжекторов, отличающихся геометрическими параметрами α и f . Однако, прежде чем начать расчёт различных вариантов эжектора, определим область реально возможных параметров.

Найдём значение величины λ_2 , при котором в сечении равных давлений скорость эжектируемого воздуха равна скорости звука,

т. е. $\lambda'_2 = 1,0$. Задаёмся значением $\lambda'_2 = 1,0$, т. е. $q(\lambda'_2) = 1$, $\pi(\lambda'_2) = 0,528$. Из формулы (40) находим:

$$\pi(\lambda'_1) = \frac{P_{02}}{P_{01}} \pi(\lambda'_2),$$

чему соответствует:

$$\lambda'_1 = 1,365 \text{ и } q(\lambda'_1) = 0,850.$$

Подставляя найденные значения величин, а также значения $q(\lambda_1) = 1$ и $\theta = \frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{1}{3}$ в уравнение (42), имеем:

$$q(\lambda_2) = \frac{1}{1 + \sqrt{3} \cdot \frac{1,03}{2} \cdot \frac{1}{1} \left[\frac{1}{0,85} - 1 \right]} = 0,865.$$

Этому значению q и соответствует максимально возможное значение $\lambda_2 = 0,664$.

Теперь можно задаться несколькими значениями $\lambda_2 < 0,664$ и провести расчёт по изложенному выше методу. Выбираем, например, $\lambda_2 = 0,6$. Из формулы (32) находим, что для заданного коэффициента эжекции $n = 1$ геометрический параметр камеры смешения

$$\alpha = \frac{1}{n \sqrt{\theta}} \cdot \frac{P_{02}}{P_{01}} \cdot \frac{q(\lambda_2)}{q(\lambda_1)} = \sqrt{3} \cdot \frac{1,03}{2} \cdot \frac{0,8109}{1} = 0,723.$$

Статическое давление во входном сечении камеры

$$P_2 = P_{02} \cdot \pi(\lambda_2) = 1,03 \cdot 0,8053 = 0,83 \text{ кг/см}^2.$$

Подставляем значения $z(\lambda_1) = 2,0$ и $z(\lambda_2) = 2,267$ в уравнение (30) и определяем значение коэффициента скорости на выходе из камеры смешения:

$$z(\lambda_3) = \frac{2 + 1 \cdot \sqrt{\frac{1}{3} \cdot 2,267}}{\sqrt{1,333 \cdot 2}} = 2,026.$$

Так как $\lambda'_2 < 1$, то реальному режиму соответствует дозвуковое решение, т. е. $\lambda_3 < 1$.

Чтобы избежать вычитания близких величин и тем повысить точность вычисления, рекомендуется дозвуковое решение преобразовать так:

$$\lambda_3 = \frac{z(\lambda_3) - \sqrt{z(\lambda_3)^2 - 4}}{2} = \frac{2}{z(\lambda_3) + \sqrt{z(\lambda_3)^2 - 4}}. \quad (46)$$

Отсюда находим:

$$\lambda_3 = 0,854, \quad q(\lambda_3) = 0,9743.$$

Теперь можно вычислить полное давление после смешения по формуле (31):

$$P_{03} = 2 \frac{\sqrt{1,333 \cdot 2}}{1 + 0,723} \cdot 0,723 \cdot \frac{1}{0,9743} = 1,405.$$

Полное давление на выходе из диффузора определяем по формуле (36), причём коэффициент σ_d выбираем равным 0,93:

$$p_{04} = \sigma_d \cdot p_{03} = 1,405 \cdot 0,93 = 1,305.$$

Из условия задачи известно давление в выхлопной шахте, т. е. давление на выходе из эжектора $p_4 = 1,05$. По величине

$$\frac{p_4}{p_{04}} = \frac{1,05}{1,405 \cdot 0,93} = 0,804 = \pi (\lambda_4)$$

находим:

$$\lambda_4 = 0,602 \text{ и } q(\lambda_4) = 0,8127.$$

Теперь можно определить степень уширения диффузора f . Согласно формуле (37)

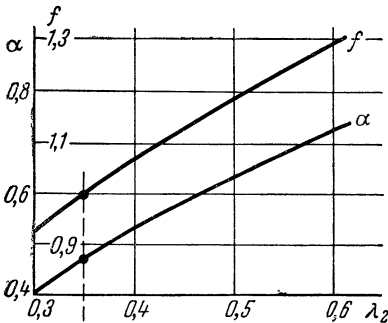
$$f = \frac{q(\lambda_3)}{q(\lambda_4)} \cdot \frac{1}{\sigma_d} = 1,29.$$

Таким образом, один из возможных вариантов эжектора определяется геометрическими параметрами

$$\alpha = 0,723, \quad f = 1,29.$$

Если известна площадь реактивного сопла, то по этим параметрам можно найти и абсолютные размеры камеры смешения и диффузора.

Фиг. 153. Параметры эжекторов α и f в зависимости от выбранного значения λ_2 (к примеру расчёта).



Точно так же проводим расчёт для других значений λ_2 и определяем возможные сочетания α и f , удовлетворяющие условиям задачи. Результаты всех расчётов приведены на фиг. 153:

Окончательный вариант эжектора выбирается в зависимости от дополнительных условий, заданных при проектировании. Так, например, в данном случае можно выполнить эжектор без диффузора. Тогда из фиг. 153 находим значение $\alpha = 0,47$, соответствующее условию $f = 1$.

§ 4. О длине камеры смешения эжектора

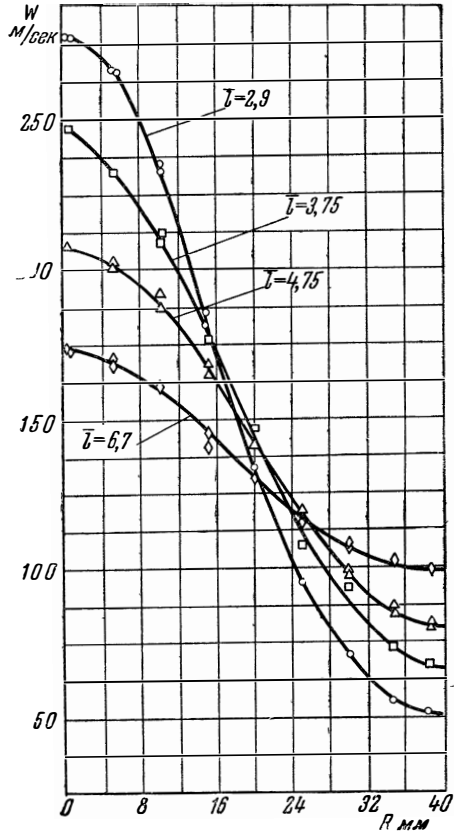
Выше мы занимались определением параметров потока после полного выравнивания полей скорости, температуры и давления и ничего не говорили о потребной для этого длине камеры смешения. Изложенный метод расчёта позволяет определить параметры смеси газов без рассмотрения самого процесса смешения и независимо от длины, на которой происходит предполагающееся полное перемешивание газов.

Между тем из экспериментов известно, что длина камеры смешения существенно влияет на эффективность эжектора. При короткой камере скоростные и температурные поля в её выходном сечении обладают значительной неравномерностью, т. е. эффект перераспределения энергии по массе газа используется не полностью. Кроме того, при этом увеличиваются потери в диффузоре. При излишнем удлинении камеры смешения полное давление смеси и эффективность эжектора падают из-за возрастания потерь на трение о стенки камеры.

Оптимальная длина камеры смешения обычно выбирается экспериментальным путём и по различным данным равна 6—10 калибрам. Чтобы теоретически определить необходимую длину камеры смешения, требуется знание законов перемешивания и выравнивания потоков по длине камеры смешения.

Анализом этого процесса мы и займёмся. На фиг. 154 показаны распределения скоростей в различных сечениях цилиндрической камеры смешения эжектора. С удалением от сопла распределение скоростей в поперечном сечении становится всё более равномерным: скорость потока на периферии растёт за счёт падения скорости вблизи оси камеры. Поля скорости в сечениях камеры смешения внешне различны, однако при более внимательном рассмотрении можно обнаружить в них интересную общую закономерность.

Построим для различных сечений камеры зависимость безразмерной скорости $\frac{w}{w_m}$, т. е. отношения скорости в данной точке к скорости на оси камеры в том же сечении, от безраз-

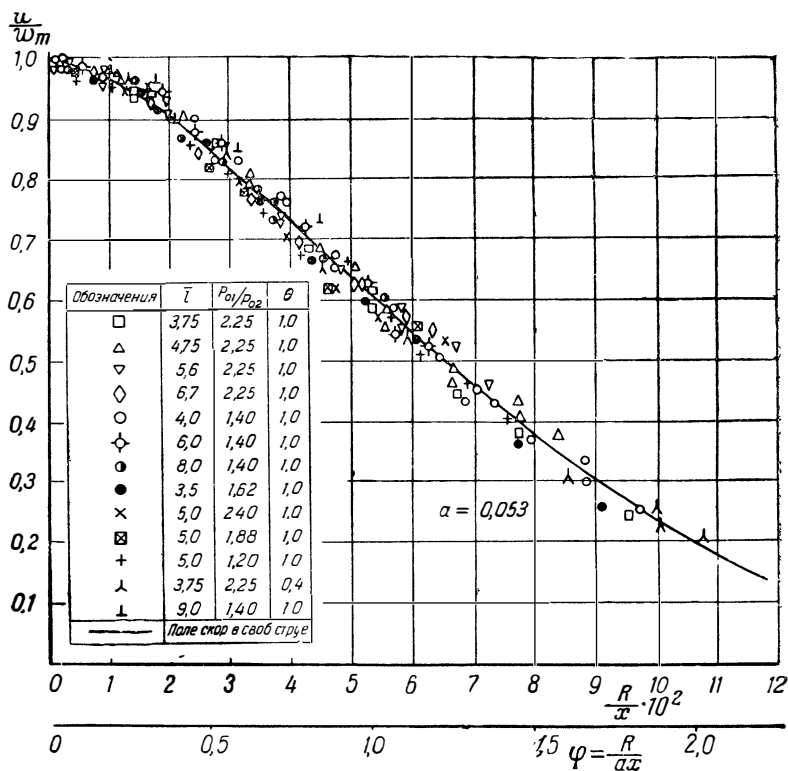


Фиг. 154. Поля скорости в различных сечениях камеры смешения; $\alpha = 0,1$, $\frac{p_{01}}{p_{02}} = 2,25$, $\bar{l} = \frac{l}{D}$ — расстояние от сопла в калибрах.

мерного радиуса (фиг. 155)

$$\varphi = \frac{R}{ax},$$

где R — расстояние от оси до данной точки поля, x — расстояние между данным сечением и полюсом эжектирующей струи, a — экспериментальная константа, характеризующая турбулентность потока.

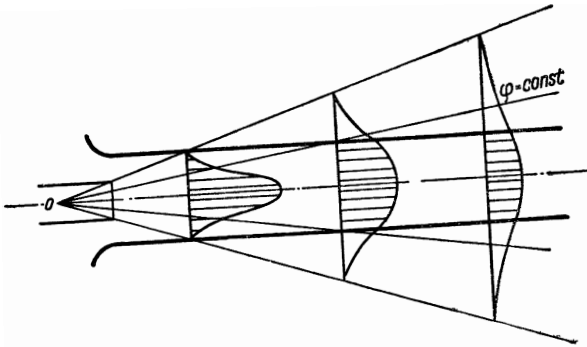


Фиг. 155. Безразмерные поля скоростей в камере смешения и профиль скоростей в свободной струе (сплошная кривая).

Напомним, что такая же система координат использовалась при анализе полей скорости в свободной струе. График, приведённый на фиг. 155, построен на основании многочисленных экспериментов и показывает, что безразмерные поля скорости в различных сечениях основного участка смесительной камеры различных эжекторов в широком диапазоне изменения параметров смешивающихся газов укладываются на одну общую кривую,

близко соответствующую полю скорости в сечении свободной турбулентной струи несжимаемой жидкости (при $a \approx 0,53$).

Поясним смысл этого результата, свидетельствующего об аналогии между течением газа в камере смешения и свободной струей. На фиг. 156 приведена схема свободной струи. Из пре-



Фиг. 156. К аналогии между течением в камере смешения и свободной турбулентной струей.

дыдущего известно, что поля скорости в различных сечениях свободной турбулентной струи подобны, т. е. выражаются одной безразмерной зависимостью

$$\frac{w}{w_m} = f(\varphi). \quad (47)$$

Прямолинейные лучи, проведённые из полюса струи, выражаются уравнением

$$\frac{R}{x} = \text{const}$$

или

$$\varphi = \frac{R}{ax} = \text{const}.$$

Согласно (47) вдоль каждого такого луча безразмерная скорость $\frac{w}{w_m}$ постоянна. Чем больше φ , тем меньше $\frac{w}{w_m}$. Мысленно выделим теперь центральную часть струи цилиндрической трубкой. В каждом сечении внутри трубки оказывается только часть поля свободной струи, причём с удалением от сопла эта часть уменьшается, и скорость на контуре трубки всё меньше отличается от скорости на оси струи. Другими словами, поле скоростей внутри трубки с удалением от сопла выравнивается. Расстояние от данного сечения до полюса струи можно харак-

теризовать значением параметра φ_0 на контуре трубки радиуса R_3 :

$$\varphi_0 = \frac{R_3}{ax}. \quad (48)$$

Величина φ_0 уменьшается при удалении сечения от полюса эжектирующей струи.

Если теперь вернуться к безразмерным полям скоростей в сечениях свободной струи, то можно констатировать, что часть поля, находящаяся внутри цилиндрической трубки, представляет собой уменьшающуюся с удалением от сопла центральную часть одной и той же безразмерной кривой

$$\frac{w}{w_m} = f(\varphi). \quad (49)$$

При $x \rightarrow \infty$ получаем $\varphi_0 \rightarrow 0$, т. е. всё поле скорости стягивается в одну центральную точку графика ($\frac{w}{w_m} = 1$), соответствующую полному выравниванию поля скоростей.

Течение в смесительной камере эжектора характеризуется постоянством секундного расхода газа во всех поперечных сечениях. Поэтому при выравнивании поля скоростей величины скорости на оси и у стенки камеры стремятся к одинаковой конечной средней величине

$$w = w_m = \frac{G_3}{\gamma_3 F_3}, \quad (50)$$

в то время как скорость на оси свободной струи и расход газа в центральной трубке при $x \rightarrow \infty$ уменьшаются до нуля.

В соответствии с этим в камере эжектора статическое давление растёт, что следует из неравенства (22) и уравнения количества движения, между тем как в свободной струе статическое давление постоянно.

Подобие полей скорости в камере смешения эжектора и в свободной струе, обнаруженное экспериментально, указывает на то, что наличие продольного градиента давлений практически не влияет на закономерность переноса количества движения в поперечном направлении.

Универсальность поля скорости в поперечных сечениях камеры смешения представляет собой эмпирический закон, на основании которого можно теоретически рассчитать весь процесс смешения потоков в эжекторе и указать способ определения рациональной длины камеры.

Запишем условие равенства расхода газа в некотором промежуточном сечении основного участка камеры и в бесконечно удалённом сечении, где поле скорости полагаем равномерным. Это удалённое сечение по существу и является выходным сече-

нием камеры 3, в котором по сделанному допущению процесс смешения считался закончившимся.

Удельный вес газа для упрощения полагаем постоянным:

$$G_3 = \gamma F_3 \omega_3 = \gamma \int \omega dF,$$

или для цилиндрической камеры:

$$\pi R_3^2 \omega_3 = 2\pi \int_0^{R_3} \omega R dR. \quad (51)$$

Приведём это уравнение к безразмерному виду, разделив обе его части на $a^2 x^2 \omega_m$ — величину, постоянную для данного сечения камеры:

$$\frac{R_3^2}{a^2 x^2} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_m} = 2 \int_0^{R_3} \frac{\omega}{\omega_m} \cdot \frac{R dR}{a^2 x^2},$$

или согласно принятым обозначениям:

$$\varphi_0^2 \cdot \frac{\omega_3}{\omega_m} = 2 \int_0^{\varphi_0} \frac{\omega}{\omega_m} \varphi d\varphi. \quad (52)$$

Как было показано экспериментально, входящая под знак интеграла величина $\frac{\omega}{\omega_m}$ — отношение скорости в произвольной точке сечения к скорости на оси в том же сечении — выражается одной и той же функцией $f(\varphi)$ для всех сечений основного участка камеры смешения. Поэтому интеграл правой части является функцией лишь φ_0 и может быть взят графически или аналитически при наличии соответствующего выражения для функции $f(\varphi)$; точно так же могут быть вычислены интегралы, включающие квадрат и куб величины $f(\varphi)$ (фиг. 157). Таким образом, из формулы (52) можно определить скорость на оси произвольного сечения ω_m как функцию величины φ_0 , характеризующей расстояние данного сечения до полюса струи:

$$\frac{\omega_m}{\omega_3} = \frac{\varphi_0^2}{2} \frac{1}{\int_0^{\varphi_0} f(\varphi) \varphi d\varphi} = \frac{\varphi_0^2}{2B_1(\varphi_0)} = A(\varphi_0). \quad (53)$$

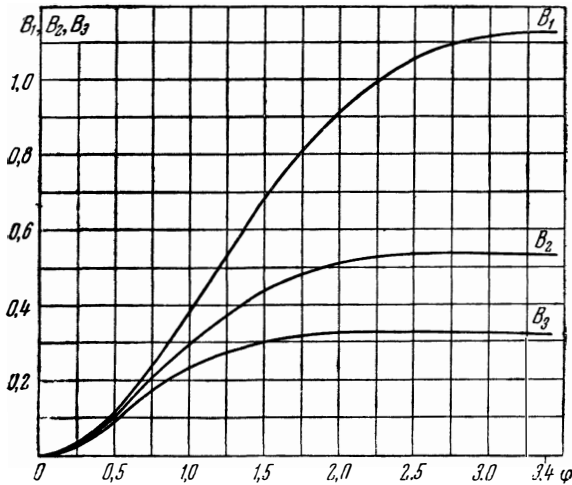
Значения интеграла

$$B_1(\varphi) = \int f(\varphi) \varphi d\varphi$$

используются в теории свободной турбулентной струи¹⁾ и приведены в виде таблиц. Табличные данные позволяют аппроксимировать правую часть уравнения (53) формулой

$$\frac{\omega_m}{\omega_3} = A(\varphi_0) = 1 + 0,25\varphi_0 + 0,0835\varphi_0^3. \quad (54)$$

Скорость в любой точке сечения выражается через скорость



Фиг. 157. Значения интегралов

$$B_1 = \int_0^{\varphi} f(\varphi) \varphi d\varphi, \quad B_2 = \int_0^{\varphi} f^2(\varphi) \varphi d\varphi,$$

$$B_3 = \int_0^{\varphi} f^3(\varphi) \varphi d\varphi.$$

$f(\varphi) = \frac{\omega}{\omega_m}$ — профиль безразмерных скоростей в сечении свободной струи.

на оси данного сечения универсальной зависимостью

$$\omega = \omega_m \cdot f(\varphi)$$

или согласно (53)

$$\omega = \omega_3 \cdot A(\varphi_0) \cdot f(\varphi).$$

¹⁾ Абрамович Г. Н., Турбулентные свободные струи жидкостей и газов. Энергоиздат, 1948.

Поскольку функция $f(\varphi) = \frac{\omega}{\omega_m}$, как было показано, совпадает с аналогичной функцией — безразмерным полем скорости в свободной струе, то для вычислений можно пользоваться указанными выше табличными данными, которые хорошо выражаются формулой

$$f(\varphi) = \frac{4 + 0,5\varphi - 0,167\varphi^3}{(2 + 0,5\varphi + 0,167\varphi^3)^2}. \quad (55)$$

Величина скорости потока после полного выравнивания поля скорости ω_3 определяется по параметрам эжектора. Действительно, из уравнения расхода при $\rho = \text{const}$

$$\frac{G_3}{G_1} = \frac{G_2 + G_1}{G_1} = \frac{F_3 \omega_3}{F_1 \omega_1}$$

получается:

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{\alpha}{\alpha + 1} (n + 1),$$

где $n = \frac{G_2}{G_1}$ — коэффициент эжекции, $\alpha = \frac{F_1}{F_2}$ — геометрический параметр камеры смешения. Подставляя значения ω_3 , $f(\varphi)$ и $A(\varphi_0)$, можно записать следующее выражение для скорости потока в любой точке произвольного сечения камеры смешения:

$$\omega = \omega_1 \frac{\alpha}{\alpha + 1} (n + 1) \frac{(1 + 0,25\varphi_0 + 0,0835\varphi_0^3)(4 + 0,5\varphi - 0,167\varphi^3)}{(2 + 0,5\varphi + 0,167\varphi^3)^2}. \quad (56)$$

Здесь величина φ_0 определяет абсциссу x , а величина φ — ординату R рассматриваемой точки.

Зная скорости и, следовательно, количество движения в каждом сечении камеры, можно из уравнения импульсов определить изменение статического давления на любом участке камеры. Найдём повышение давления от начального до произвольного сечения камеры смешения. Уравнение импульсов записываем в виде

$$(p - p_1) F_3 = \frac{\gamma F_1}{g} \omega_1^2 + \frac{\gamma F_2}{g} \omega_2^2 - \frac{\gamma}{g} \int_{F_3} \omega^2 dF$$

или

$$\frac{g(p - p_1) R_3^2}{\gamma} = R_1^2 \omega_1^2 + R_2^2 \omega_2^2 - 2 \int_0^{R_3} \omega^2 R dR. \quad (57)$$

Разделим правую и левую части уравнения на $\omega_1^2 R_3^2$ и образуем безразмерные величины под интегралом правой части:

$$g \frac{p - p_1}{\gamma \omega_1^2} = \frac{R_1^2}{R_3^2} + \frac{R_2^2}{R_3^2} \cdot \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} - 2 \frac{\omega_3^2}{\omega_1^2} \cdot \frac{\omega_m^2}{\omega^2} \cdot \frac{a^2 x^2}{R_3^2} \int_0^{R_3} \frac{\omega^2}{\omega_m^2} \frac{R dR}{a^2 x^2},$$

или

$$p - p_1 = \frac{\gamma \omega_1^2}{g} \left[\frac{\alpha}{\alpha + 1} + \frac{\alpha^2 n^2}{\alpha + 1} - 2 \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1} \right)^2 (n + 1)^2 \cdot \frac{\omega_m^2}{\omega_3^2} \frac{1}{\varphi_0^2} \cdot \int_0^{\varphi_0} [f(\varphi)]^2 \varphi d\varphi \right]. \quad (58)$$

Величина интеграла

$$B_2(\varphi_0) = \int_0^{\varphi_0} [f(\varphi)]^2 \varphi d\varphi$$

(фиг. 157) вычислена при помощи указанных выше табличных данных. Отношение $\left(\frac{\omega_m}{\omega_3}\right)^2$ определяется на основании формулы (54). Таким образом, вычисление перепада давлений $p - p_1$ не представляет трудностей. Подставляя в формулу (58) значение $\frac{\omega_m}{\omega_3}$ согласно (53), получаем следующее выражение для изменения давления в камере смешения:

$$p - p_1 = \frac{\gamma \omega_1^2}{g} \left[\frac{\alpha}{\alpha + 1} + \frac{\alpha^2 n^2}{\alpha + 1} - \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1} \right)^2 (n + 1)^2 \cdot \tau(\varphi_0) \right], \quad (59)$$

где

$$\tau(\varphi_0) = \frac{\varphi_0^2 \int_0^{\varphi_0} [f(\varphi)]^2 \cdot \varphi d\varphi}{2 \left[\int_0^{\varphi_0} f(\varphi) \varphi d\varphi \right]^2} = \frac{F_3 \int \omega^2 dF}{\left(\int \omega dF \right)^2}.$$

Величина $\tau(\varphi_0)$ представляет собой коэффициент неравномерности поля скорости в рассматриваемом сечении камеры смешения, являющийся важной характеристикой потока. Мы уже указывали, что коэффициент τ — отношение средней скорости по расходу к средней по сечению — тем больше отличается от единицы, чем больше неравномерность поля скорости. Полученная выше закономерность изменения поля скорости в камере смешения позволяет выразить коэффициент поля как функцию величины $\varphi_0 = \frac{R_3}{ax}$ в данном сечении. С помощью табличных значений интегралов $B_1(\varphi)$ и $B_2(\varphi)$ можно получить следующую приближённую формулу:

$$\tau(\varphi_0) = 1 + 0,066\varphi_0 - 0,108\varphi_0^2 + 0,062\varphi_0^3, \quad (60)$$

по которой легко определить из уравнения (59) изменение давления на произвольном участке камеры. Для получения более точного результата следует в уравнении (57) учесть силу трения о стенки камеры.

Пользуясь таким же методом, какой был применён в преобразовании уравнений расхода и количества движения, можно получить простое выражение для определения разности кинетических энергий в начальном и рассматриваемом сечениях камеры:

$$\frac{G_1 w_1^2}{2g} + \frac{G_2 w_2^2}{2g} - \int_{G_3} \frac{w^2}{2g} dG = \frac{G_1 + G_2}{g} \Delta E,$$

или после преобразований:

$$\Delta E = \frac{1}{2} w_1^2 \left[\frac{1 + \alpha^2 n^3}{1 + n} - \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1} \right)^2 \cdot (n + 1)^2 \cdot \frac{\varphi_0^4 \int_0^{\varphi_0} [f(\varphi)]^3 \varphi d\varphi}{\left[\int_0^{\varphi_0} f(\varphi) \varphi d\varphi \right]^3} \right]. \quad (61)$$

Обозначаем

$$\vartheta(\varphi_0) = \frac{\varphi_0^4 \int_0^{\varphi_0} [f(\varphi)]^3 \varphi d\varphi}{\left[\int_0^{\varphi_0} f(\varphi) \varphi d\varphi \right]^3} - \frac{\varphi_0^4}{4} \cdot \frac{B_3(\varphi_0)}{[B_1(\varphi_0)]^3}.$$

По табличным данным подобрана эмпирическая формула

$$\vartheta(\varphi_0) = 1 + 0,02\varphi_0 + 0,04\varphi_0^4.$$

Таким образом, подобие безразмерных полей скорости в камере смешения, т. е. существование зависимости $\frac{w}{w_m} = f(\varphi)$, где $f(\varphi)$ — неизменная функция для всех сечений смесительной камеры, позволяет определить различные характеристики процесса смешения двух потоков и параметры потока в любом промежуточном сечении основного участка камеры.

Расположение сечения характеризуется величиной φ_0 , зависящей от расстояния между сечением и полюсом эжектирующей струи x .

Обычно в эжекторе известно расстояние между данным сечением и плоскостью среза сопла l ; для определения величины x необходимо знать глубину полюса струи h_0 , так как

$$x = l + h_0.$$

Глубина полюса h_0 определяется из расчёта начального участка камеры. Исследование поля скоростей в начальном участке камеры показывает, что течение в этом участке подобно свободной струе, движущейся в спутном потоке¹⁾. Не останавливаясь

¹⁾ Абрамович Г. Н., Газовая динамика воздушно-реактивных двигателей. Оборонгиз, 1947.

на данном вопросе подробно, укажем, что эта аналогия позволяет получить выражение для глубины полюса в зависимости от радиуса сопла и отношения величин скорости основного (эжектирующего) и спутного (эжектируемого) потоков:

$$\frac{ah_0}{R_1} = \frac{0,12\mu}{1-\mu^2} + 0,29, \quad (62)$$

где $\mu = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \alpha n$, α — константа турбулентности, общая для всех сечений камеры.

С помощью формулы (62) записываем соотношение между абсциссой сечения x и расстоянием от сопла l :

$$\varphi_0 = \frac{R_3}{ax} = \frac{R_3}{a(l+h_0)} = \frac{1}{2a\bar{l} + \frac{ah_0}{R_1} \cdot \frac{R_1}{R_3}}$$

и далее:

$$\frac{a\bar{l}}{2} = \frac{1}{4\varphi_0} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \cdot \left(\frac{0,12\alpha n}{1-\alpha^2 n^2} + 0,29 \right), \quad (63)$$

где $\bar{l} = \frac{l}{2R_3}$ — относительное расстояние от сопла (в калибрах).

Зная закономерность выравнивания полей скорости в камере смещения, можно определить рациональную длину камеры смещения, т. е. такую минимальную длину её, при которой полезный эффект от дальнейшего выравнивания полей скорости не компенсирует потерь на трение о стенки.

Запишем уравнения расхода и импульсов для потока в камере смещения эжектора, причём не будем делать обычного предположения о равномерности поля скоростей в выходном сечении камеры. Изменением удельного веса газа в камере смещения пренебрегаем. Уравнение расхода имеет вид

$$\begin{aligned} \text{или} \quad & \gamma F_1 \omega_1 + \gamma F_2 \omega_2 = \gamma \int_{F_3} \omega dF \\ & F_1 \omega_1 + F_2 \omega_2 = F_3 \omega_{cp1}, \end{aligned} \quad (64)$$

где

$$\omega_{cp1} = \frac{\int \omega dF}{F}$$

представляет среднюю величину скорости по площади сечения. Уравнение импульсов записываем с учётом силы трения:

$$M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2 - \int_{M_3} \omega dM = p_3 F_3 - p_1 F_1 - p_2 F_2 + \zeta \frac{l}{D} \frac{\omega_{cp1}^2}{2g} \gamma F_3,$$

или

$$M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2 + p_1 F_1 + p_2 F_2 - p_3 F_3 = \frac{\gamma}{g} \int_{F_3} \omega^2 dF + \frac{\zeta}{2} \frac{l}{D} M_3 \omega_{cp1}.$$

Здесь ζ — коэффициент трения. Интеграл правой части можно выразить следующим образом:

$$\int_{F_3} \omega^2 dF = \frac{F \int \omega^2 dF}{\left(\int \omega dF \right)^2} \cdot \left(\frac{\int \omega dF}{F} \right)^2 \cdot F = \tau \omega_{cp1}^2 F,$$

после чего правую часть уравнения запишем в виде

$$\frac{\gamma}{g} \int_{F_3} \omega^2 dF + \frac{\zeta}{2} \frac{l}{D} M_3 \omega_{cp1} = M_3 \omega_{cp1} (\tau + \nu), \quad (65)$$

где

$$\nu = \frac{\zeta}{2} \frac{l}{D}. \quad (66)$$

Далее можно разрешить уравнения (64) и (65) совместно с другими, известными нам из § 3 уравнениями и определить зависимость конечного результата от величины коэффициента поля τ и коэффициента ν .

Однако можно поступить и более просто. Легко удостовериться в том, что коэффициент поля τ и коэффициент ν не входят ни в одно уравнение эжектора, кроме уравнения импульсов (65). Поскольку в уравнение (65) величины τ и ν входят в виде суммы, то можно заключить, что влияние неравномерности поля скоростей (т. е. увеличенного значения τ) на параметры эжектора идентично влиянию коэффициента трения. В идеальном эжекторе $\tau = 1$ и $\nu = 0$, т. е. коэффициент в правой части уравнения импульсов (65) $\tau + \nu$ равен единице. Следовательно, отличие параметров реального эжектора (при наличии трения в камере и некоторой неравномерности поля скоростей в выходном сечении) от параметров идеального эжектора характеризуется величиной $K = \tau + \nu - 1$, которую условно можно считать эффективным коэффициентом трения. Чем меньше K , тем лучше эжектор.

Величина ν пропорциональна длине камеры смешения. Коэффициент поля τ с помощью уравнений (60) и (63) также может быть выражен через длину камеры смешения; чем больше длина камеры, тем меньше τ . Сумма $\tau + \nu$ с увеличением длины камеры сначала уменьшается, затем начинает расти. Рациональной длиной камеры смешения естественно считать такую длину, при которой величина K достигает минимума (фиг. 158). Таким образом, рациональная длина камеры смешения может быть определена и без решения системы основных уравнений эжектора.

Подставим в выражение

$$K = \tau + \nu - 1$$

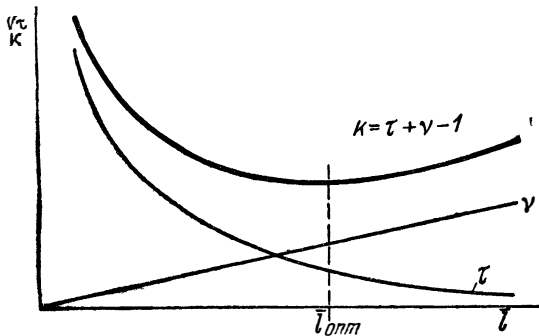
значение τ согласно (60) и значение ν согласно (66). Заменим также величину l её выражением (63) через безразмерное расстояние до полюса φ_0 . Получаем:

$$K = 0,066\varphi_0 - 0,108\varphi_0^2 + 0,062\varphi_0^3 + \frac{\zeta}{a} \cdot \frac{1}{4\varphi_0} - \frac{\zeta}{4a} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \left(\frac{0,12\alpha \cdot n}{1-\alpha^2 n^2} + 0,29 \right).$$

Теперь дифференцируем это выражение по φ_0 и из уравнения

$$\frac{dK}{d\varphi_0} = 0, \text{ т. е. } \frac{\zeta}{a} = 0,264\varphi_0^2 - 0,864\varphi_0^3 + 0,744 \cdot \varphi_0^4, \quad (67)$$

находим значение φ_0 , соответствующее минимальной величине



Фиг. 158. K определению оптимальной длины камеры смешения. K — коэффициент, учитывающий неравномерность поля скоростей и потери на трение.

эффективного коэффициента трения K . Это значение оказывается функцией отношения коэффициента трения ζ к константе турбулентности a ; в области практически возможных значений $\frac{\zeta}{a}$ оптимальное значение φ_0 может быть определено по приближённой формуле

$$(\varphi_0)_{\text{опт}} = \sqrt{1,6 \frac{\zeta}{a} + 0,76}, \quad (68)$$

хорошо соответствующей точной формуле (67).

Оптимальная относительная длина камеры смешения $\bar{l}_{\text{опт}}$ выражается через $(\varphi_0)_{\text{опт}}$ с помощью (63):

$$\bar{l}_{\text{опт}} = \frac{1}{2a (\varphi_0)_{\text{опт}}} - \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \cdot \left(\frac{0,12\alpha \cdot n}{1-\alpha^2 n^2} + 0,29 \right). \quad (69)$$

Как можно видеть, оптимальная длина камеры смешения зависит не только от отношения $\frac{\zeta}{a}$, определяющего $(\varphi_0)_{\text{опт}}$, но и от

геометрического параметра эжектора α и отношения скоростей потоков на входе в камеру $\frac{w_2}{w_1} = \alpha n$. Чем больше α (т. е. относительный диаметр сопла) и чем больше коэффициент эжекции, определяющий отношение скоростей $\frac{w_2}{w_1}$, тем меньше потребная длина камеры смещения. Это объясняется увеличением глубины полюса h_0 : при большем значении h_0 одному и тому же значению $(\varphi_0)_{\text{опт}}$, т. е. x , соответствует меньшая длина камеры.

В настоящем параграфе мы рассмотрели вопрос о расчёте длины камеры смещения для потоков с одинаковой температурой, когда процесс смещения сводился к выравниванию поля скоростей в поперечном сечении камеры.

Аналогичный анализ может быть проведён и для случая смещения потоков с различной температурой; при этом необходимо знать закономерности выравнивания температурного поля при смещении потоков. Эти закономерности могут быть получены экспериментально или приняты в соответствии с данными теории свободной струи (гл. VI).

Следует отметить, что зависимость параметров эжектора от длины камеры смещения вблизи оптимума выражается весьма пологими кривыми. Поэтому можно допускать некоторые отклонения от теоретически определённого значения оптимальной длины камеры. Обычно длину камеры можно выбрать на 1—1,5 калибра меньшей оптимального значения, что практически не сказывается на параметрах эжектора.

§ 5. Приближённые формулы расчёта эжектора

Изложенный выше подробный метод расчёта эжектора позволяет разрешать любые задачи, связанные с определением параметров эжектора, выбором его геометрических параметров при проектировании, подбором оптимальных соотношений.

Недостатком метода являются отсутствие явных зависимостей искомых величин от заданных и необходимость последовательных вычислений по ряду формул с применением таблиц газодинамических функций. Поэтому влияние того или иного фактора на параметры эжектора определяется лишь детальным расчётом.

Существует, однако, ряд приближённых соотношений, позволяющих более просто оценивать связь между различными параметрами эжектора и их взаимное влияние. На некоторых из этих соотношений мы сейчас и остановимся.

В уравнения (30) и (31) входит выражение

$$\sqrt{(n\theta + 1)(n + 1)} = \frac{G_3 a_{3\text{кр}}}{G_1 a_{1\text{кр}}}.$$

Приближенно можно записать:

$$\sqrt{(n\theta + 1)(n + 1)} = n \sqrt{\bar{\theta}} + 1; \quad (70)$$

погрешность этого приближённого равенства не превосходит 2,5% во всём практически важном диапазоне значений $n = \frac{G_2}{G_1}$ и $\theta = \frac{T_{02}}{T_{01}}$. Заменяем радикалы $\sqrt{(n\theta + 1)(n + 1)}$ в формулах (30) и (31) их приближённым значением согласно (70).

Рассматривая теперь систему основных уравнений камеры смешения, отмечаем, что величины коэффициента эжекции и отношения температур торможения θ во все уравнения входят совместно в виде комплекса $n \sqrt{\bar{\theta}}$. Если n и θ изменяются таким образом, что $n \sqrt{\bar{\theta}} = \text{const}$, то полностью сохраняется система уравнений и, следовательно, полученные при её решении значения коэффициентов скоростей, давлений и т. д. Представим теперь себе, что для выполненного эжектора (т. е. при данных α и f) мы, изменяя температуры торможения газов, оставляем неизменными давления газов на входе в эжектор и на выходе из него. Согласно основным уравнениям коэффициент эжекции при этом изменяется обратно пропорционально корню квадратному из отношения температур:

$$n = \frac{\text{const}}{\sqrt{\bar{\theta}}}. \quad (71)$$

Это и есть первое приближённое соотношение, позволяющее оценивать параметры эжектора при изменении θ ; оно хорошо подтверждается экспериментом. Рассмотрим, например, что происходит при повышении температуры торможения эжектирующего газа T_{01} . Если $F_1 = \text{const}$, то расход газа G_1 изменяется обратно пропорционально корню квадратному из T_{01} :

$$G_1 = \frac{\text{const}}{\sqrt{T_{01}}}.$$

В данном случае ($T_{02} = \text{const}$) из приближённой формулы (71) следует:

$$n = \frac{\text{const}}{\sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}} = \text{const} \sqrt{T_{01}}.$$

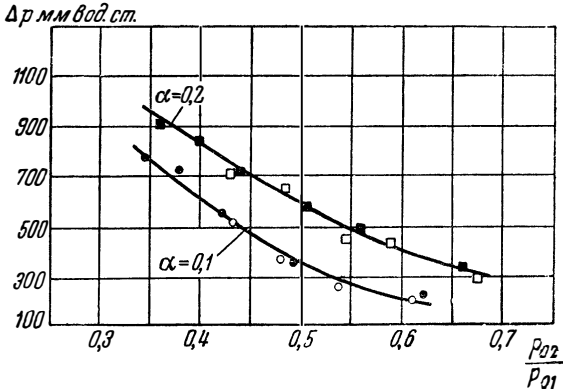
Сравнивая это выражение с предыдущим, можно заключить, что

$$G_2 = nG_1 = \text{const}. \quad (72)$$

Таким образом, увеличение коэффициента эжекции при увеличении температуры торможения эжектирующего газа связано

лишь со снижением расхода этого газа; расход эжектируемого газа не изменяется с изменением температуры эжектирующего газа.

Последнее возможно только в том случае, если статическое давление во входном сечении камеры смешения не зависит от температуры торможения эжектирующего газа. Следующее отсюда общее правило гласит: *при изменении температуры*



Фиг. 159. Зависимость разрежения на входе в камеру смешения от отношения полных давлений $\frac{p_{02}}{p_{01}}$ при различных температурах эжектирующего газа.
 ○ □ — $T_{01} = 300^\circ \text{ abs}$, ● ■ — $T_{01} = 700^\circ \text{ abs}$.

одного из газов расход и скорость другого, а также статическое давление на входе в камеру остаются неизменными. На фиг. 159 приведены экспериментальные данные, подтверждающие эту приближённую закономерность.

Из общих уравнений процесса смешения потоков можно получить ещё одну важную приближённую зависимость. Подставим в уравнение импульсов (28) следующее выражение, вывод которого приведён в § 6 главы V:

$$\frac{G}{g} \omega + pF = p_0 F \cdot f(\lambda)$$

где

$$f(\lambda) = (1 + \lambda^2) \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Выражая таким образом импульс газового потока во входном и выходном сечениях камеры смешения, приводим уравнение импульсов к виду

$$p_{01} F_1 f(\lambda_1) + p_{02} F_2 f(\lambda_2) = p_{03} F_3 f(\lambda_3). \quad (73)$$

В обычном расчёте эжектора такое уравнение менее удобно, чем уравнение импульсов в виде (30), так как включает одновременно две неизвестные величины p_{03} и $f(\lambda_3)$.

Учитывая, однако, пологость функции $f(\lambda)$ и небольшой диапазон её изменения (см. § 6 гл. V), формулу (73) можно без существенной погрешности заменить приближённым соотношением

$$p_{01}F_1 + p_{02}F_2 = p_{03}F_3. \quad (74)$$

Возможность такой замены обуславливается структурой формулы (73). Так как $f(\lambda_1) > f(\lambda_3) > f(\lambda_2)$, то отбрасывание множителей $f(\lambda_1)$ и $f(\lambda_2)$ в левой части уравнения может быть скомпенсировано отбрасыванием множителя $f(\lambda_3)$ в правой части. Подставляя в (74) значение $F_3 = F_1 + F_2$ и разделив правую и левую части на F_2 , получаем формулу для определения полного давления в потоке после смешения:

$$p_{03} = \frac{\alpha p_{01} + p_{02}}{\alpha + 1}. \quad (75)$$

Смысл полученной приближённой формулы, предложенной С. А. Христиановичем, сводится к тому, что в процессе смешения газовых потоков происходит осреднение полного давления по сечению, т. е. полное давление потока на выходе из камеры смешения равно среднему по площади значению полного давления во входном сечении камеры.

Расчёты по формуле (75) показывают, что точность её вполне удовлетворительна, если величины λ_1 , λ_2 и λ_3 лежат в пределах $0,15 < \lambda < 1$.

Удобство пользования формулой (75) очевидно: она позволяет по заданным величинам p_{01} , p_{02} и α непосредственно определить полное давление смеси p_{03} , которое почти всегда является конечным искомым параметром. Таким образом, значительно уменьшаются объём и сложность вычислительной работы по сравнению с подробным точным методом, согласно которому полное давление смеси определяется лишь после нахождения всех коэффициентов скорости и коэффициента эжекции.

Выраженная формулой (75) закономерность позволяет вывести следующее практически важное правило: *чтобы получить возможно большую величину полного давления смеси на выходе из эжектора, следует стремиться к уменьшению площади сечения сопла низконапорного газа (относительной площади камеры смешения), т. е. к увеличению $\alpha = \frac{F_1}{F_2}$.* При этом необходимо, однако, учитывать, что чем меньше площадь сечения камеры смешения по сравнению с площадью сопла эжектирующего газа, тем больше скорость газа на входе в диффузор и, следовательно, потери в диффузоре.

При сверхкритическом отношении давлений в сопле эжектирующего газа, когда расход эжектируемого газа определяется площадью его в сечении равных давлений, минимально возможное значение площади камеры при данном коэффициенте эжекции n соответствует разгону эжектируемого газа в сечении равных давлений до скорости звука. Таким образом, предельные режимы работы эжектора являются выгодными с точки зрения достижения максимальной величины полного давления смеси газов.

Формулы (71) и (75) позволяют установить важную зависимость между температурой газов и полным давлением потока после смешения. Здесь надо различать два случая, в которых полное давление смеси отыскивается соответственно:

а) при изменении температуры одного или обоих газов в выполненном эжекторе, т. е. при $\alpha = \text{const}$,

б) при изменении температуры газов с условием сохранения постоянного коэффициента эжекции, т. е. при $n = \text{const}$.

В обоих случаях $p_{01} = \text{const}$, $p_{02} = \text{const}$.

Согласно формуле (75) в первом случае полное давление смеси газов не зависит от отношения температур торможения θ , т. е. не изменяется при изменении θ . Как указывалось, в этом случае изменится коэффициент эжекции: чем больше $\theta = \frac{T_{02}}{T_{01}}$,

тем меньше согласно (71) величина $n = \frac{G_2}{G_1}$. Чтобы сохранить неизменное значение коэффициента эжекции, нужно увеличить относительную площадь сечения сопла более нагретого газа. Соответственно среднее значение полного давления во входном сечении камеры и равное ему полное давление смеси приблизятся к полному давлению более нагретого газа.

Поэтому, например, повышая температуру эжектирующего газа и изменяя эжектор таким образом, чтобы обеспечить постоянное соотношение расходов (коэффициент эжекции), мы можем получить большее полное давление смеси газов.

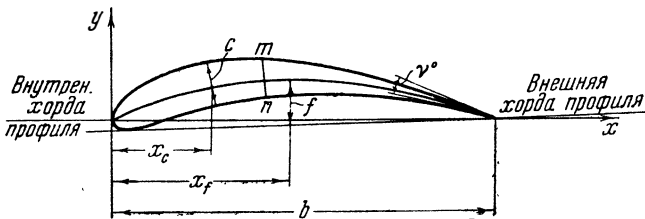
Два приведённых приближённых соотношения весьма полезны при качественном анализе параметров эжектора. Если же в расчёте допустима погрешность в 3—4%, то этими соотношениями можно пользоваться и для количественных определений, что часто бывает очень удобным.

ГЛАВА VIII

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КРЫЛА И РЕШЁТКИ КРЫЛЬЕВ

§ 1. Основные геометрические параметры крылового профиля и решётки крыльев

Обычный «дозвуковой» крыловой профиль впереди скруглён, а сзади имеет заострённый конец (фиг. 160). *Осевой дугой профиля* называется кривая, делящая пополам расстояние между верхней и нижней частями профиля, отсчитываемое по нормали к этой кривой. Приближённо осевую дугу заданного профиля можно найти, если провести ряд секущих mn под одинаковыми углами к элементам профиля и соединить середины полученных отрезков. Определив осевую дугу заданного профиля,



Фиг. 160. Авиационный крыловой профиль.

можно построить некоторый симметричный профиль (с прямой средней линией), имеющий ординаты, равные соответствующим расстояниям точек профиля от осевой дуги. Этот симметричный профиль называют *симметричной частью данного профиля*. Если теперь изогнуть симметричный профиль так, чтобы его ось симметрии перешла в осевую дугу, а ординаты симметричных точек лежали бы на одной и той же нормали к осевой дуге, то мы получим исходный профиль. Таким образом, любой профиль может быть получен в результате изгиба некоторого симметричного профиля.

Для определения положения профиля по отношению к потоку и в качестве характерного размера вводится понятие хорды профиля. Внутренней хордой профиля называют отрезок

прямой, соединяющей две самые удалённые точки осевой дуги профиля. Для слабо изогнутых профилей так определённая хорда практически совпадает с отрезком прямой, соединяющей две самые удалённые точки профиля. Под внешней хордой профиля подразумевают отрезок касательной к нижней части профиля, проходящий через заднюю кромку. В дальнейшем мы будем пользоваться только понятием внутренней хорды, которую будем называть просто хордой профиля. Координаты точек профиля задаются обычно в долях длины хорды, которая принимается за ось абсцисс.

Конфигурация профиля определяется рядом геометрических параметров. Приведём главные из них. Относительной толщиной профиля \bar{c} называется частное от деления максимальной толщины профиля c (фиг. 160) на длину хорды b :

$$\bar{c} = \frac{c}{b}.$$

Относительной вогнутостью \bar{f} , или относительной кривизной профиля, называется отношение максимальной стрелы прогиба осевой дуги f к длине хорды:

$$\bar{f} = \frac{f}{b}.$$

Положения максимальной толщины профиля и максимальной стрелы прогиба осевой дуги являются важными параметрами и определяются соответственно величинами относительных абсцисс

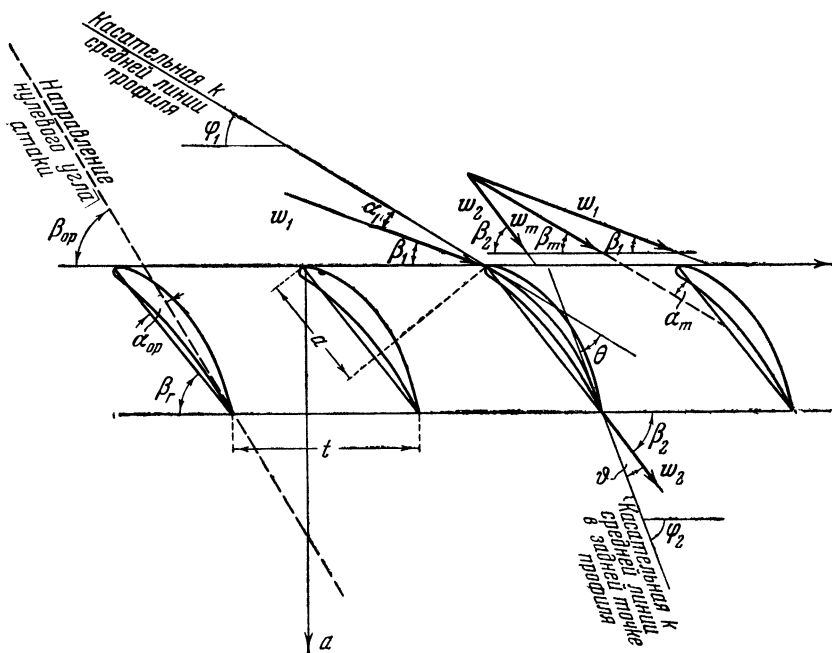
$$\bar{x}_c = \frac{x_c}{b} \text{ и } \bar{x}_f = \frac{x_f}{b}.$$

Кроме того, передняя часть профиля характеризуется радиусом кривизны ρ , а хвостовая часть — углом заострения γ . Изменяя максимальную толщину и пропорционально ей координаты симметричной части профиля, можно получить серию профилей с непрерывным изменением их толщины; выбрав определённый вид уравнения осевой дуги и изменяя только её максимальную кривизну, получим серию профилей переменной кривизны.

В дальнейшем мы часто будем иметь дело с *решёткой профилей*, которая представляет собой совокупность одинаковых крыловых профилей. Линия, соединяющая соответственные точки профилей в решётке (например, задние точки), называется *фронтон решётки*, а нормаль к ней — *осью решётки*. Практическое значение имеют два типа решёток: *прямолинейные решётки* (фиг. 161) и *круговые решётки*¹⁾ (фиг. 162). В прямолинейной решётке фронт есть прямая, в круговой — окружность.

¹⁾ Как будет показано ниже, прямолинейная решётка применяется в осевых, а круговая — в центробежных турбомашинах.

Взаимное расположение профилей в прямолинейной решётке однозначно определяется двумя параметрами: расстоянием между соседними профилями, называемым *шагом решётки* t , и углом между хордой профиля и фронтом, который называется *установочным углом* β_r . За положительное направление фронта u мы примем направление от вогнутой к выпуклой поверхности профиля (фиг. 161). Вместо установочного угла β_r иногда применяют



Фиг. 161. Прямолинейная решётка.

попятие выноса, подразумевая под ним расстояния a между нормальными к хордам двух соседних профилей, проведёнными в подобных точках. Эта величина показывает, насколько профили сдвинуты вперёд по потоку по отношению друг к другу. Как видно из чертежа, $\frac{a}{t} = \bar{a} = -\cos \beta_r$ и, следовательно, положительный вынос соответствует значениям $\beta_r > 90^\circ$, а отрицательный вынос — значениям $\beta_r < 90^\circ$. При $\beta_r = 90^\circ$ значение выноса обращается в нуль. Величина шага решётки, отнесённая к длине хорды профиля, называется *относительным шагом решётки*

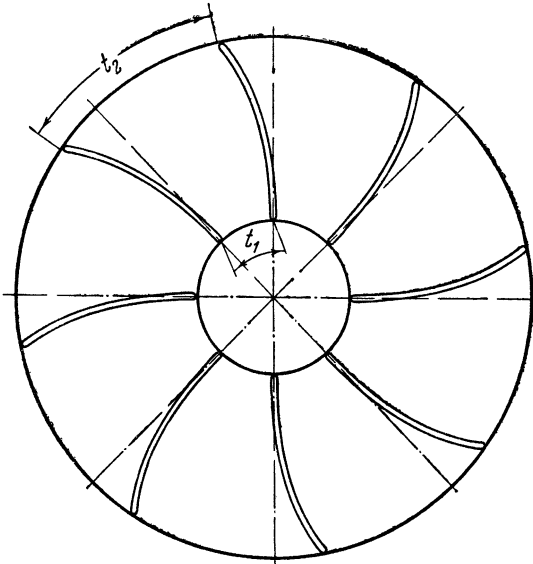
$$\bar{t} = \frac{t}{b},$$

обратная величина называется *густотой решётки*

$$\tau = \frac{b}{t}.$$

Таким образом, прямолинейная решётка может быть однозначно определена формой профиля, густотой и значением установочного угла.

В случае решётки большой густоты, составленной из сильно изогнутых профилей, более целесообразно под относительным



Фиг. 162. Круговая решётка.

шагом понимать величину шага, отнесённую не к длине хорды, а к длине осевой дуги профиля s :

$$\bar{t}_s = \frac{t}{s}$$

и соответственно

$$\tau_s = \frac{s}{t}.$$

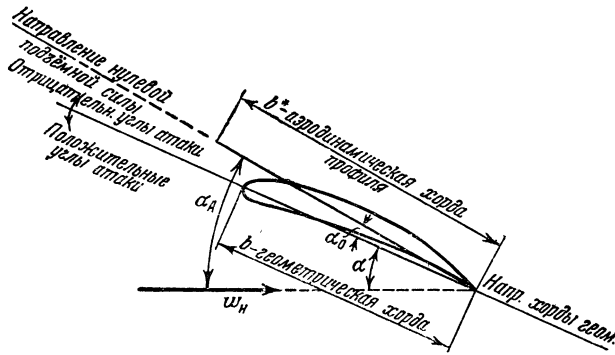
В осевых компрессорах применяются профили малой относительной толщины и небольшой относительной кривизны; профили решёток осевых турбин характеризуются большой кривизной и значительной толщиной. На фиг. 265 и 266 представлены в качестве примера типичные решётки профилей ступени осевого компрессора и ступени осевой турбины.

Важным параметром, определяющим степень искривления профиля решётки, является *угол изгиба профиля* θ , т. е. угол

между касательными к осевой дуге в носике и задней точке, называемыми соответственно передней и задней касательными профиля. Углы φ_1 и φ_2 между указанными касательными и фронтом решётки u (фиг. 161) определяют положение профиля в решётке и поэтому называются соответственно *входным* и *выходным установочными углами* профиля в решётке. Очевидно,

$$\theta = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Перейдём теперь к определению углов, характеризующих положение профиля и решётки профилей по отношению к потоку. В случае единичного профиля таким углом является *угол атаки* σ ,



Фиг. 163. Геометрические параметры крылового профиля.

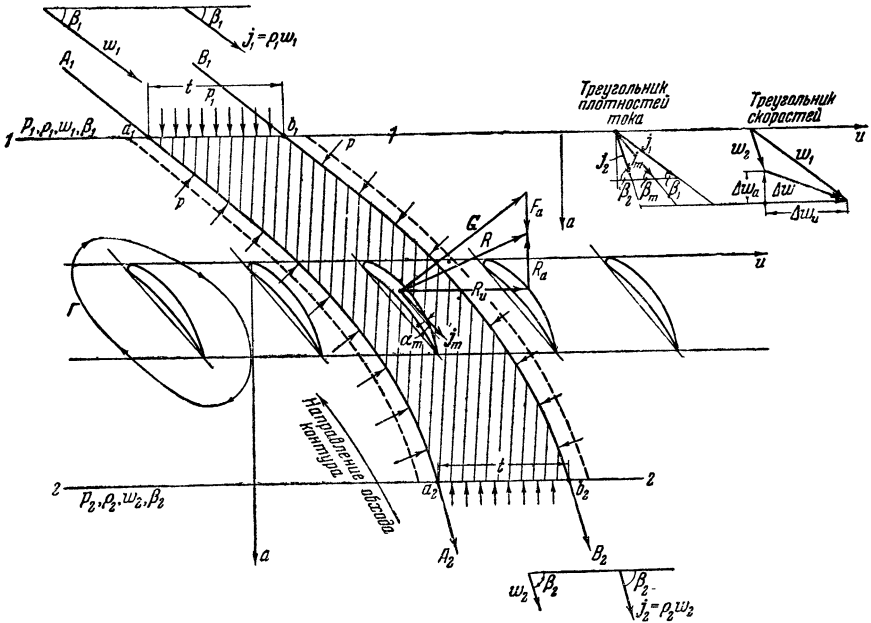
под которым понимается угол между направлением скорости на бесконечности и хордой профиля (фиг. 163). В случае решётки под углом атаки α_m понимается угол между хордой профиля и средней геометрической скоростью w_m ¹⁾. Угол между направлением скорости на входе w_1 и фронтом решётки β_1 называется *углом входа* и соответственно углом скорости на выходе w_2 и фронтом решётки называется *углом выхода* β_2 . Разность этих углов $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$ определяет поворот потока в решётке. *Входным углом атаки* α_1 , или *углом натекания*, называется угол между скоростью w_1 и передней касательной профиля. Соответственный угол на выходе, т. е. угол между w_2 и задней касательной, называется *углом схода* или *углом отставания потока* ϑ . Как видно из фиг. 161,

$$\vartheta = \theta - \Delta\beta + \alpha_1.$$

¹⁾ Средняя геометрическая скорость есть геометрическая полусумма скорости на входе w_1 и скорости на выходе w_2 из решётки.

§ 2. Теорема Жуковского о силах, действующих на крыло и решётку крыльев в потоке

Рассмотрим общий случай плоского обтекания прямолинейной бесконечной решётки крыльев установившимся потоком сжимаемого газа без ограничения как значений скорости, так и характера и величины потерь. Будем предполагать, что крылья, образующие решётку, имеют бесконечный размах, и все скорости



Фиг. 164. К выводу теоремы Н. Е. Жуковского о подъёмной силе крыла в решётке.

лежат в плоскостях, нормальных к размаху крыльев, т. е. течение является плоскопараллельным.

Определим силу, с которой воздействует поток на единицу длины размаха крыла. Проведём сечения 1—1 и 2—2, параллельные фронту решётки (фиг. 164) и настолько удалённые от неё, что можно считать скорость и давление в каждом из этих сечений постоянными. Выберем любую линию тока A_1A_2 и проведём другую линию тока B_1B_2 на расстоянии одного шага от первой линии тока. Очевидно, что эти линии тока конгруэнтны, т. е. совпадают при наложении. Применяя к объёму жидкости, ограниченному отрезками прямых a_1b_1 и a_2b_2 и отрезками линий тока a_1a_2 и b_1b_2 уравнение количества движения, получим согласно (89) из главы I следующие выражения для проекций

на фронт решётки и на ось решётки равнодействующей всех сил, приложенных к объёму жидкости:

$$P_u = M (\omega_{2u} - \omega_{1u}), \quad (1)$$

$$P_a = M (\omega_{2a} - \omega_{1a}), \quad (2)$$

где M — секундная масса жидкости, проходящая через один шаг решётки¹⁾:

$$M = \rho_1 \omega_{1a} \cdot t = \rho_2 \omega_{2a} \cdot t.$$

С другой стороны, эти силы можно определить сложением проекций всех сил действующих на объём $a_1 b_1 b_2 a_2$, т. е. силы давления по контуру $a_1 b_1 b_2 a_2$ и реакции от силы давления на поверхность крыла (гравитационными силами мы пренебрегаем). Обозначая составляющие силы, приложенной к крылу, через R_u и R_a и замечая, что равнодействующие сил давления, приложенных к отрезкам линий тока $a_1 a_2$ и $b_1 b_2$, равны по величине и направлены в противоположные стороны, имеем:

$$P_u = -R_u$$

и

$$P_a = -R_a + (p_1 - p_2) t.$$

Подставляя последние равенства в выражения (1) и (2) и обозначая

$$\Delta \omega_u = \omega_{1u} - \omega_{2u},$$

$$\Delta \omega_a = \omega_{1a} - \omega_{2a},$$

$$\Delta p = p_1 - p_2,$$

получим:

$$R_u = M \Delta \omega_u, \quad (3)$$

$$R_a = t \Delta p + M \Delta \omega_a. \quad (4)$$

Введём в рассмотрение проекции вектора плотности тока ($\mathbf{j} = \rho \mathbf{w}$):

$$j_{1a} = \rho_1 \omega_1 \sin \beta_1,$$

$$j_{2a} = \rho_2 \omega_2 \sin \beta_2.$$

Согласно уравнению неразрывности

$$j_{1a} = j_{2a}.$$

Это означает, что концы векторов плотности тока \mathbf{j}_1 и \mathbf{j}_2 , построенных из одного полюса, лежат на прямой, параллельной фронту решётки (фиг. 164).

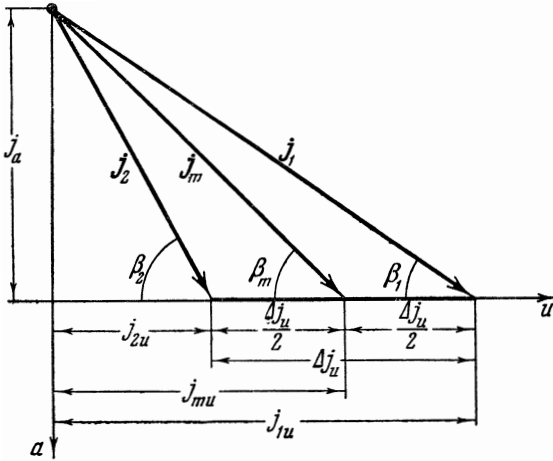
Для построения геометрической полусуммы этих векторов \mathbf{j}_m достаточно соединить с полюсом середину отрезка прямой, заклю-

¹⁾ Толщина струи в направлении перпендикуляра к плоскости чертежа равна единице.

чѐнного между концами векторов \mathbf{j}_1 и \mathbf{j}_2 и равного по величине (фиг. 165)

$$\Delta j_u = j_{1u} - j_{2u} = j_1 \cos \beta_1 - j_2 \cos \beta_2.$$

Обозначая угол между направлением геометрической полусуммы плотностей тока \mathbf{j}_m и фронтом решётки через β_m , получим сле-



Фиг. 165. Треугольник плотностей тока.

дующие выражения для осевой и фронтальной составляющих:

$$j_{ma} = j_m \sin \beta_m = \rho_1 \omega_1 \sin \beta_1 = \rho_2 \omega_2 \sin \beta_2,$$

$$j_{mu} = j_m \cos \beta_m = \frac{1}{2} (\rho_1 \omega_1 \cos \beta_1 + \rho_2 \omega_2 \cos \beta_2).$$

Из последних двух выражений вытекает следующее равенство:

$$\operatorname{ctg} \beta_m = \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \beta_2) = \frac{j_{mu}}{j_{ma}}. \quad (5)$$

Таким образом, направление геометрической полусуммы плотностей тока на входе и на выходе может быть определено, если известны направления скорости на входе и выходе из решётки.

Выражая секундную массу через плотность тока

$$M = \rho_1 \omega_1 a t = j_{ma} t,$$

получим для фронтальной составляющей силы на крыле:

$$R_u = j_{ma} t \cdot \Delta \omega_u. \quad (6)$$

Определим теперь связь между величиной $\Delta \omega_u$ и значением циркуляции Γ по контуру $a_1 b_1 b_2 a_2$.

Обходя контур по положительному направлению, т. е. по часовой стрелке, имеем следующие величины циркуляции для

фронтальных участков контура:

$$\begin{aligned}\Gamma_{a_1 b_1} &= t \cdot \omega_1 \cos \beta_1 = t \omega_{1u}, \\ \Gamma_{b_2 a_2} &= -t \omega_2 \cos \beta_2 = -t \omega_{2u}.\end{aligned}$$

Так как отрезки линий тока $a_1 a_2$ и $b_1 b_2$ равны и имеют одно и то же распределение скорости, то в силу разного направления при обходе их

$$\Gamma_{b_1 b_2} = -\Gamma_{a_1 a_2}.$$

Таким образом, суммарная величина циркуляции по контуру $a_1 b_1 b_2 a_2$ равна:

$$\Gamma = \Gamma_{a_1 b_1} + \Gamma_{b_1 b_2} + \Gamma_{b_2 b_1} + \Gamma_{a_2 a_1} = t (\omega_{1u} - \omega_{2u})$$

или

$$\Gamma = t \Delta \omega_u. \quad (7)$$

Подставляя последнее выражение в формулу (6), получим следующее выражение для фронтальной составляющей силы, приложенной к крылу в решётке:

$$R_u = j_{ma} \cdot \Gamma. \quad (8)$$

Прибавив и вычтя из выражения (4) для осевой составляющей этой силы величину $j_{mu} \cdot \Gamma$ и введя обозначение

$$F_a = j_{mu} \Gamma + t \Delta p + M \Delta \omega_a, \quad (9)$$

приходим к выражению

$$R_a = -j_{mu} \cdot \Gamma + F_a. \quad (10)$$

Из (8) и (10) следует, что суммарное усилие R , действующее на профиль в решётке, есть равнодействующая двух сил, из которых одна (G) имеет проекции

$$G_u = j_{ma} \Gamma$$

и

$$G_a = -j_{mu} \Gamma,$$

а другая (F_a) направлена по оси решётки и определяется по выражению (9).

Найдём величину и направление силы G ; величина отыскивается по формуле

$$G = \sqrt{j_{ma}^2 \cdot \Gamma^2 + j_{mu}^2 \Gamma^2} = j_m \Gamma. \quad (11)$$

Обозначая угол между направлением силы G и фронтальной линией решётки через θ , можем написать:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{G_a}{G_u} = -\frac{j_{mu}}{j_{ma}} = -\operatorname{ctg} \beta_m,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{tg} \beta_m = -1.$$

Последнее выражение есть аналитическое условие взаимной перпендикулярности направлений силы G и геометрической полусуммы плотностей тока j_m . Обращаясь к фиг. 164, можно сформулировать следующее правило: для определения направления силы G следует вектор средней геометрической плотности тока перенести на крыло и повернуть на 90° в сторону против направления циркуляции.

Сила G , пропорциональная циркуляции Γ , называется *циркуляционной силой Жуковского* или просто *силой Жуковского*. Силу F_a назовём *добавочной осевой силой*.

Полученный выше результат носит название *теоремы Жуковского* и окончательно формулируется следующим образом¹⁾: *в случае плоскопараллельного обтекания газом бесконечной решётки крыльев (профилей) равнодействующая всех сил, приложенных потоком к единице длины крыла, равна геометрической сумме циркуляционной силы Жуковского, определяемой по величине формулой*

$$G = j_m \Gamma,$$

и направленной по нормали к геометрической полусумме плотностей тока j_m , и добавочной осевой силы, равной по величине

$$F_a = j_{mu} \Gamma + t \Delta p + M \Delta \omega_a,$$

направленной по оси решётки.

Согласно теореме Жуковского фронтальная составляющая равнодействующей силы на крыле в решётке равна фронтальной составляющей циркуляционной силы Жуковского ($R_u = G_u$). Работа машин (компрессора, турбины) определяется моментом силы, приложенной к колесу, т. е. моментом фронтальной силы. Поэтому мощность колеса машины зависит от циркуляционной силы (G) и не зависит от осевой добавочной силы (F_a).

Как было доказано в § 1 главы II в случае потенциального (безвихревого) потока, т. е. в случае отсутствия потерь, циркуляция Γ по контуру $a_1 b_1 b_2 a_2$ равна циркуляции по любому контуру, охватывающему профиль, в том числе и по поверхности самого профиля.

Таким образом, в случае потенциального течения сжимаемого газа величина силы Жуковского равна произведению величины геометрической полусуммы плотностей тока на величину циркуляции вокруг крыла Γ .

Перейдём к несжимаемой жидкости, для которой имеем:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho = \text{const.}$$

¹⁾ Седов Л. И., Гидроаэродинамические силы при обтекании профилей сжимаемой жидкостью. Доклады Академии наук СССР, 1948, т. LXIII, № 6. См. также статью Г. Ю. Степанова в обзорном бюллетене авиаторостроения, № 4, 1949.

В этом случае средняя геометрическая плотность тока запишется так:

$$j_m = \rho w_m, \quad (12)$$

где w_m есть средняя геометрическая скорость. Таким образом, в случае несжимаемой жидкости геометрическая полусумма скоростей направлена по геометрической полусумме плотностей тока, и следовательно, направление геометрической полусуммы скоростей определяется углом β_m по формуле (5). Подставляя значение (12) в выражение (11), получаем:

$$G = \rho w_m \Gamma,$$

т. е. сила Жуковского в несжимаемой жидкости равна произведению плотности жидкости на величину геометрической полусуммы скоростей и на значение циркуляции. При этом, как уже указывалось, циркуляцию Γ определяют по контуру $a_1 b_1 b_2 a_2$ в случае вязкого обтекания и по любому контуру (в том числе по контуру крыла) в случае идеального обтекания.

Найдём теперь величину осевой добавочной силы F_a . Для этого выразим величину $\Delta p = p_1 - p_2$ через циркуляцию Γ .

Из уравнения Бернулли для несжимаемой вязкой жидкости имеем:

$$p_1 + \frac{\rho w_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho w_2^2}{2} + h_w,$$

где h_w — потери полного напора на 1 м³ жидкости, откуда

$$\Delta p - h_w = \frac{\rho}{2} (w_2^2 - w_1^2) = \frac{\rho}{2} [w_{2u}^2 + w_{2a}^2 - w_{1u}^2 - w_{1a}^2]$$

и так как в случае несжимаемой жидкости

$$w_{1a} = w_{2a},$$

то

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} [w_{2u}^2 - w_{1u}^2] + h_w.$$

Величину разности квадратов фронтальных составляющих скорости представим в виде

$$\frac{1}{2} (w_{2u}^2 - w_{1u}^2) = (w_{2u} - w_{1u}) \frac{w_{2u} + w_{1u}}{2} = -\Delta w_u \frac{w_{1u} + w_{2u}}{2}.$$

Из рассмотрения треугольника скорости (фиг. 166) следует:

$$\frac{w_{1u} + w_{2u}}{2} = w_{mu}.$$

После соответствующей подстановки имеем:

$$\Delta p = -\rho \Delta w_u \cdot w_{mu} + h_w,$$

или согласно (7):

$$\Delta p = -\rho \frac{\Gamma}{t} \omega_{mi} + h_w.$$

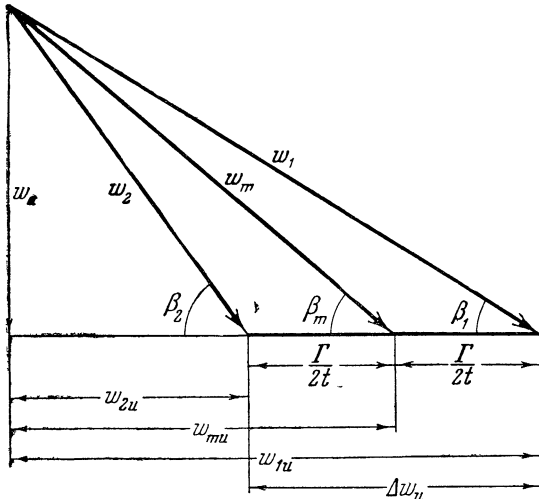
Подставляя это значение перепада давлений в выражение для F_a и замечая, что в несжимаемой жидкости

$$\Delta \omega_a = \omega_{1a} - \omega_{2a} = 0,$$

имеем:

$$F_a = \rho \omega_{mi} \cdot \Gamma + t \Delta p + M \Delta \omega_a = h_w t. \quad (13)$$

Таким образом, в случае обтекания решётки вязкой несжимаемой



Фиг. 166. Треугольник скорости в случае обтекания решётки несжимаемой жидкостью.

жидкостью получаются следующие выражения для циркуляционной силы Жуковского:

$$G = \rho \omega_m \Gamma$$

и осевой добавочной силы:

$$F_a = h_w t.$$

В случае обтекания решётки профилей идеальным потоком несжимаемой жидкостью потерь нет, т. е. осевая добавочная сила отсутствует:

$$F_a = 0,$$

и равнодействующая всех сил сводится к силе Жуковского

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}.$$

Поэтому теорема Жуковского для идеальной несжимаемой жидкости формулируется так: *при потенциальном обтекании решётки*

профилей потоком несжимаемой жидкости величина равнодействующей всех сил, приложенных к единице длины крыла в решётке, равна произведению плотности на величину геометрической полусуммы скоростей входа и выхода и на циркуляцию вокруг крыла:

$$R = \rho \omega_m \cdot \Gamma; \quad (14)$$

сила R направлена перпендикулярно к геометрической полусумме скоростей. Чтобы получить направление этой силы, нужно геометрическую полусумму повернуть на прямой угол противоположно направлению циркуляции. Эта теорема для решётки профилей была впервые получена Н. Е. Жуковским в 1912 г.

В случае идеальной сжимаемой жидкости результирующая сила направлена не по нормали к геометрической полусумме плотностей тока, однако это отклонение для не очень больших дозвуковых скоростей незначительно. Как указал Б. С. Стечкин в 1947 г. и обосновал Л. Г. Лойцянский в 1949 г.¹⁾, при дозвуковых скоростях можно пользоваться уравнением подъёмной силы в форме (14), определяя величину ρ как среднюю арифметическую из величин плотности перед и за решёткой ($\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$).

В дальнейшем рассмотрении силового воздействия потока на решётку мы ограничимся случаем несжимаемой жидкости.

До сих пор мы проектировали равнодействующую R только на направления оси и фронта решётки. Введём новые оси координат x, y . Ось x направим вдоль геометрической полусуммы скоростей w_m , а ось y — перпендикулярно к ней (фиг. 167). Проектируя равнодействующую R , циркуляционную силу Жуковского G и осевую добавочную силу F_a на оси x и y , получим:

$$R_y = G - F_a \cos \beta_m = \rho \omega_m \cdot \Gamma - h_w \cdot t \cos \beta_m, \quad (15)$$

$$R_x = F_a \sin \beta_m = h_w \cdot t \sin \beta_m. \quad (16)$$

В случае идеальной жидкости потери отсутствуют и, следовательно,

$$R_y = G = \rho \cdot \omega_m \cdot \Gamma, \quad (17)$$

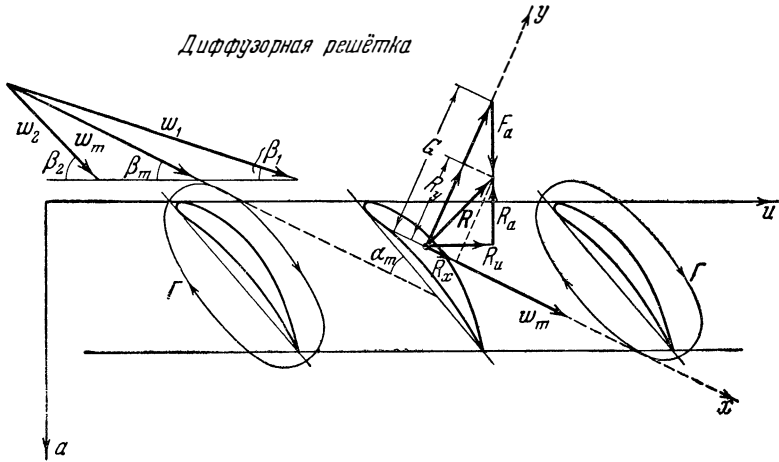
$$R_x = 0.$$

¹⁾ См. Б. С. Стечкин, Осевые компрессоры. Изд. Военно-Воздушной Академии им. Жуковского 1947. Случай дозвуковых скоростей подробно рассмотрен Л. Г. Лойцянским в статье «Обобщение формулы Жуковского на случай профиля в решётке, обтекаемой сжимаемым газом при дозвуковых скоростях». Прикладная математика и механика, т. 13. № 2, 1949.

Поэтому проекцию равнодействующей силы на направление нормали к геометрической полусумме скоростей w_m называют *подъёмной силой*, а проекцию на направление геометрической полусуммы скоростей — *лобовым сопротивлением*. Как видим, при обтекании решётки идеальной жидкостью возникает только подъёмная сила (сила сопротивления отсутствует):

$$R = R_y.$$

Вот почему теорему Жуковского для случая обтекания решётки профилей потоком идеальной несжимаемой жидкости называют



Фиг. 167. Силы, действующие на профиль в диффузорной решётке.

теоремой Жуковского о подъёмной силе профиля в решётке. В случае же обтекания решётки вязкой жидкостью согласно выражениям (15) и (16) изменяется не только величина подъёмной силы R_y по сравнению с вычисленной по теореме Жуковского (17), но появляется ещё новая сила — сила лобового сопротивления R_x .

Как следует из выражения (15), величина подъёмной силы в этом случае зависит от значения угла β_m .

Рассматривая треугольники скорости, замечаем, что при

$\beta_m > \frac{\pi}{2}$ имеем:

$$w_1 < w_2,$$

т. е. поток, проходя через решётку, увеличивает скорость; такую решётку называют *конфузорной решёткой* (фиг. 168). При

$\beta_m < \frac{\pi}{2}$:

$$w_1 > w_2,$$

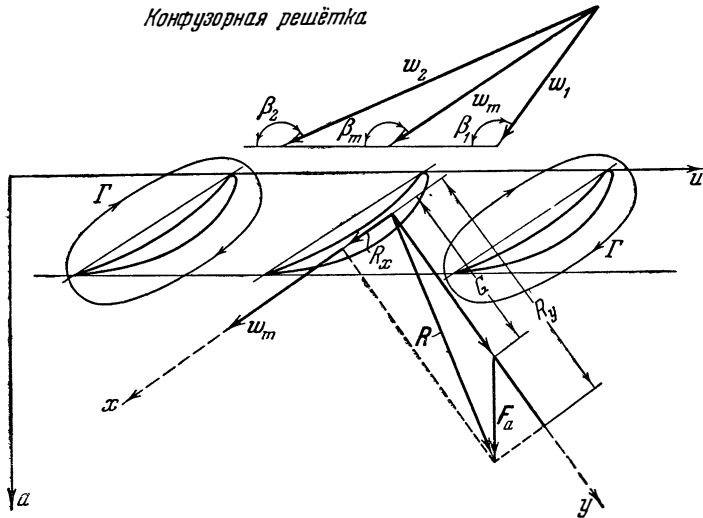
т. е. решётка оказывает на поток тормозящее действие; такая решётка называется *диффузорной* (фиг. 167). Наконец, при $\beta_m = \frac{\pi}{2}$:

$$\omega_1 = \omega_2;$$

соответствующая решётка называется *активной*.

Согласно выражению (15) в *конфузорной решётке* ($\beta_m > \frac{\pi}{2}$) *подъёмная сила больше циркуляционной силы Жуковского*: в диф-

Конфузорная решётка



Фиг. 168. Силы, действующие на профиль в конфузорной решётке.

фузорной решётке ($\beta_m < \frac{\pi}{2}$) *подъёмная сила меньше циркуляционной силы Жуковского*; в случае *активной решётки* ($\beta_m = \frac{\pi}{2}$) *подъёмная сила равна циркуляционной силе Жуковского*. Сила сопротивления в последнем случае равна осевой добавочной силе:

$$R_x = F_a.$$

Определим силовое воздействие газового потока на единичный профиль, ограничиваясь случаем изоэнтропического потока. Для этого устремим шаг t к бесконечности. В пределе получим единичный профиль. Очевидно, что если параметры на входе в решётку считать фиксированными, то при $t \rightarrow \infty$ имеем:

$$\rho_2 \rightarrow \rho_1, \quad \omega_{2u} \rightarrow \omega_{1u}, \quad \omega_{2a} \rightarrow \omega_{1a}$$

и, следовательно,

$$j_2 \rightarrow j_1 = \rho_1 \omega_1.$$

В таком случае в пределе для единичного профиля согласно (11) сила Жуковского есть

$$G = \rho_1 \omega_1 \Gamma_0 = \rho_n \omega_n \Gamma_0,$$

где индекс «н» означает, что плотность и скорость берутся в бесконечном удалении от профиля.

Прежде чем определить предельное значение осевой добавочной силы F_a , перепишем (13), используя (7) и заменяя секундный расход, приходящийся на один шаг:

$$M = \rho_1 \omega_{1a} t = \rho_2 \omega_{2a} t,$$

получим:

$$F_a = \Gamma \left[\frac{\rho_1 \omega_{1u} + \rho_2 \omega_{2u}}{2} + \frac{p_2 - p_1 + \rho_2 \omega_{2a}^2 - \rho_1 \omega_{1a}^2}{\omega_{2u} - \omega_{1u}} \right].$$

Рассматривая параметры на выходе как функцию величины Δw_u , имеем в пределе (при $\Gamma \rightarrow \Gamma_0$)¹⁾:

$$F_a = \Gamma_0 \left[\rho_2 \omega_{2u} + \frac{dp + d(\rho_2 \omega_{2a}^2)}{d\omega_{2u}} \right]. \quad (18)$$

Согласно уравнению неразрывности

$$\rho_2 \omega_{2a} = \rho_1 \omega_{1a} = \text{const},$$

и следовательно,

$$\frac{d(\rho_2 \omega_{2a}^2)}{d\omega_{2u}} = \frac{d\omega_{2a}(\rho_2 \omega_{2a})}{d\omega_{2u}} = \rho_2 \omega_{2a} \frac{d\omega_{2a}}{d\omega_{2u}}.$$

Записывая уравнение Бернулли в виде

$$\frac{\omega_{2u}^2 + \omega_{2a}^2}{2} - \frac{\omega_1^2}{2} = - \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho},$$

получим после дифференцирования по ω_{2u} :

$$- \frac{dp}{d\omega_{2u}} = \rho_2 \omega_{2u} + \rho_2 \omega_{2a} \frac{d\omega_{2a}}{d\omega_{2u}}.$$

Подставляя полученные значения производных в (18), обнаруживаем, что в пределе для единичного крыла

$$F_a = 0,$$

и следовательно, равнодействующая всех сил, приложенных к поверхности единичного профиля, равна силе Жуковского:

$$R = G = \rho_n \omega_n \Gamma_0. \quad (19)$$

Таким образом, можем сформулировать следующую теорему

¹⁾ Здесь Γ_0 — циркуляция вокруг единичного крыла (при $t \rightarrow \infty$).

Жуковского для единичного профиля: *при обтекании единичного профиля (крыла) газовым потоком равнодействующая сил, приложенных к профилю, равна произведению плотности и скорости, взятых в бесконечном удалении от профиля, на величину циркуляции Γ_0 вокруг профиля*. Для отыскания направления равнодействующей, называемой в этом случае подъёмной силой, нужно вектор скорости повернуть на 90° в сторону против направления циркуляции.

Эта важная теорема впервые была получена для несжимаемой жидкости Н. Е. Жуковским в 1906 г. В дальнейшем М. В. Келдыш и Ф. И. Франкль в 1934 г. доказали строго эту теорему для газового потока, ограничиваясь достаточно малыми числами М. Элементарный вывод теоремы Жуковского для газа был дан Л. И. Седовым¹⁾ в 1948 г.

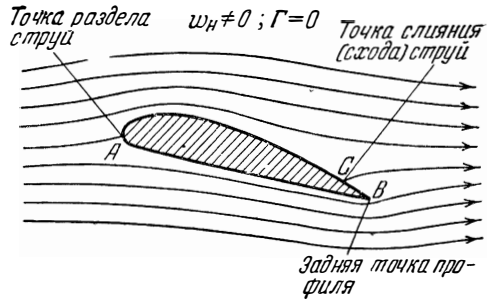
Теорема Жуковского сыграла огромную роль в развитии гидроаэродинамики; с её помощью Н. Е. Жуковский объяснил происхождение подъёмной силы самолёта и дал научное объяснение действия лопаточных машин: гребных винтов, турбин, насосов, компрессоров, установив связь между величиной подъёмной силы и значением циркуляции. Однако наличия только одной такой связи недостаточно для вычисления подъёмной силы единичного профиля или решётки профилей, так как значение циркуляции остаётся неизвестным. Необходимо иметь ещё одно условие, определяющее величину циркуляции. Такое условие было указано Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным в 1909 г.; до этого не было эффективного математического метода решения задачи обтекания крыла, т. е. по существу не было теоретической аэродинамики крыла.

С целью выяснения этого условия рассмотрим обтекание потоком несжимаемой жидкости профиля, имеющего острую заднюю кромку, наличие которой характерно для современных профилей. Предположим сначала, что циркуляция скорости отсутствует ($\Gamma = 0$), т. е. нет подъёмной силы. Получающаяся в этом гипотетическом случае картина так называемого *бесциркуляционного обтекания профиля* может быть построена известными методами теоретической гидродинамики.

Картина бесциркуляционного обтекания профиля обладает следующими основными особенностями. Набегающий поток разделяется на две части, обтекающие соответственно верхнюю и нижнюю поверхности профиля (фиг. 169). Точка *A*, в которой струи разделяются, имеет нулевую скорость и называется *передней критической точкой*, или *точкой раздела струй*. Обойдя профиль, струи вновь сходятся в некоторой точке *C*, называемой *точкой слияния струй*, или *задней критической точкой*.

¹⁾ См. сноску на стр. 353.

Изменение угла атаки приводит к изменению положения передней и задней критических точек. Например, в случае, изображённом на фиг. 169, при увеличении угла атаки передняя критическая точка движется по нижней поверхности, приближаясь к задней кромке профиля, а задняя критическая точка приближается к лобовой части профиля; уменьшение угла атаки приводит к перемещению точки разветвления струй в сторону к носу, а точки слияния струй — в хвостовую часть профиля.

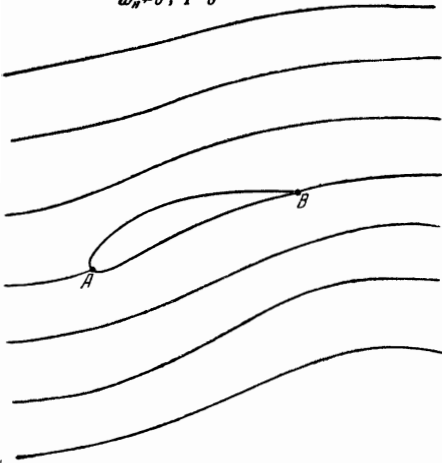


Фиг. 169. Бесциркуляционное обтекание профиля.

В общем случае, как было показано ранее, ввиду невозможности обтекания острой задней кромки такое течение сопровождается отрывом потока от поверхности профиля. Только при некотором частном значении угла атаки (обычно отрицательном)

точка схода струй совпадает с задней кромкой профиля, т. е. получается безотрывное бесциркуляционное течение (фиг. 170); соответствующий угол атаки α_0 называется *углом нулевой подъемной силы*.

$$\omega_H \neq 0, \Gamma = 0$$



Фиг. 170. Обтекание профиля при угле атаки α_0 (угле нулевой подъемной силы).

Рассмотрим теперь другой крайний случай обтекания крыла — *чисто циркуляционное обтекание*. Под чисто циркуляционным течением будем понимать течение, обусловленное только наличием циркуляции вокруг профиля при отсутствии набегающего потока

$$\omega_H = 0, \Gamma \neq 0.$$

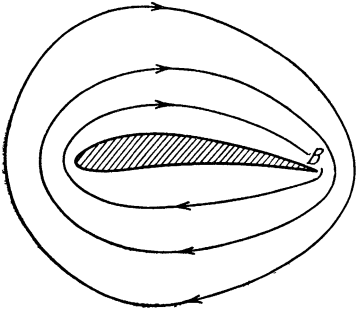
Примером чисто циркуляционного течения является рас-

смотренное в главе II круговое течение, поле скоростей которого вызвано одиночным вихрем. В случае чисто циркуляционного течения (фиг. 171) отсутствуют передняя и задняя критические точки, и линии тока представляют собой замкнутые кривые, огибающие

профиль. Такое течение независимо от величины циркуляции требует наличия бесконечной скорости в точке, лежащей на задней кромке профиля, и следовательно, так же как бесциркуляционное течение, не может быть реализовано без отрыва потока.

Общий случай плоскопараллельного обтекания крыла может быть получен наложением двух выше рассмотренных течений:

$$\omega_H = 0; \Gamma \neq 0$$



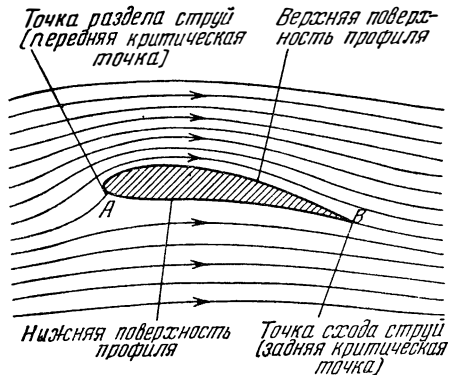
Фиг. 171. Чисто циркуляционное обтекание профиля.

Очевидно, что при некотором вполне определённом значении циркуляции вокруг крыла Γ задняя критическая точка совпадает с задней острой кромкой профиля (фиг. 172). Это является единственным случаем, когда циркуляционное течение может быть физически реализовано безотрывным образом. При всех других значениях циркуляции требуется обтекание задней кромки, что, как уже неоднократно указывалось, невозможно без отрыва потока.

Это условие, впервые высказанное Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным, называется постулатом Жуковского-Чаплыгина и может быть сформулировано следующим образом: при безотрывном обтекании профиля вокруг него возникает циркуляция Γ такой

бесциркуляционного и чисто циркуляционного. Как можно убедиться из построения картины обтекания, в результате наложения на бесциркуляционное течение (фиг. 169) чисто циркуляционного течения (фиг. 171) при положительном значении циркуляции ($\Gamma > 0$) задняя критическая точка сдвигается к хвостовой, а при отрицательном ($\Gamma < 0$) — к лобовой части профиля¹⁾.

Задавая величину Γ , мы однозначным образом определяем положение задней критической точки при данном направлении бесциркуляционного течения, т. е. направлении скорости вдалеке от профиля.



Фиг. 172. Обтекание профиля с циркуляцией.

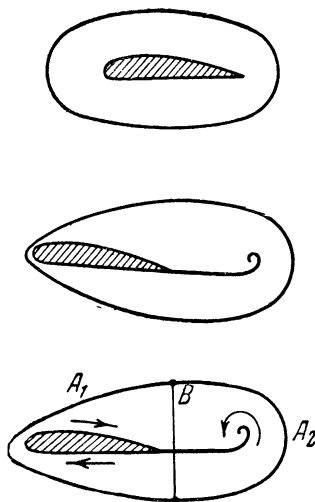
¹⁾ Напоминаем, что положительным считается вращение по часовой стрелке.

величины, при которой задняя острая кромка является точкой схода струй. Постулат Жуковского-Чаплыгина даёт возможность вычислить величину циркуляции вокруг профиля, а следовательно, при помощи теоремы Жуковского (15) и подъёмную силу крыла.

Рассмотрим физическую схему обтекания крыла, при которой появляется подъёмная сила, т. е. сила давления жидкости на крыло, направленная перпендикулярно к скорости невозмущённого потока. Как мы видели, в потоке около крыла возникает циркуляция, в результате наложения которой на набегающий поток скорости над крылом становятся больше, а под крылом меньше скорости невозмущённого потока, вследствие чего давление над крылом понижается, а под крылом повышается; этот перепад давления и даёт подъёмную силу. Возникновение циркуляции жидкости вокруг крыла в свою очередь объясняется следующими причинами. В начальный момент обтекание крыла является бесциркуляционным, но при этом в области между точкой схода струй (на верхней поверхности крыла) и задней острой кромкой крыла получается застойная зона потока. Жидкая поверхность раздела (граница между застойной зоной и потоком, стекающим с задней кромки), как показывают наблюдения, сворачивается в вихрь, который увлекается потоком. Однако в набегающем потоке не было завихренности, следовательно, циркуляция по контуру, охватывающему крыло и вихрь (фиг. 173), равна нулю. Если же этот контур расщечь линией, отделяющей крыло от вихря, то в каждом из новых двух контуров циркуляция не равна нулю. Очевидно, что эти циркуляции должны быть равны по величине, но противоположны по направлению.

Итак, начальный вихрь, срывающийся с задней кромки крыла, вызывает возникновение циркуляции вокруг крыла, которая и порождает подъёмную силу. На фотографии обтекания крыла (фиг. 174) видны как начальный вихрь, так и циркуляционное течение около крыла.

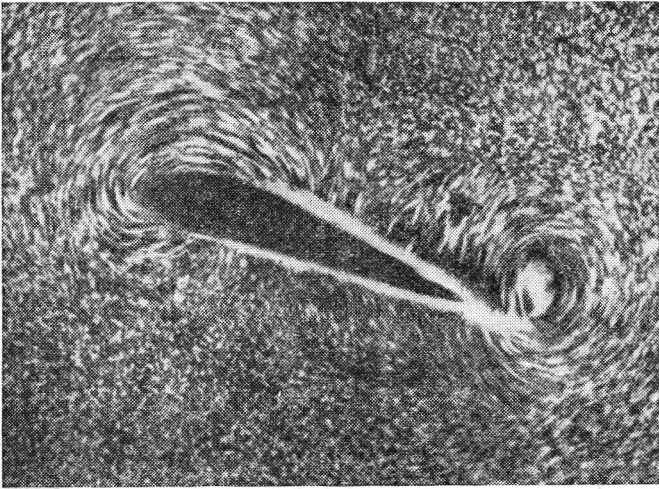
Заметим, что рассмотренный выше частный случай безотрывного бесциркуляционного обтекания (фиг. 170) представляет собой пример выполнения условия Жуковского-Чаплыгина для режима



Фиг. 173. Схема возникновения циркуляции под действием начального вихря.

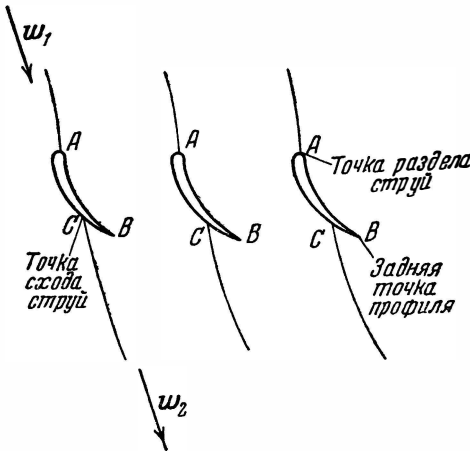
$$\Gamma = 0.$$

Такое безотрывное бесциркуляционное течение (при $\Gamma = 0$) есть единственно возможный случай, при котором бесциркуляционное



Фиг. 174. Фотография начального вихря.

течение реализуется в действительности; в прочих случаях оно является лишь мысленной частью истинного течения, включающего также и циркуляционный поток.

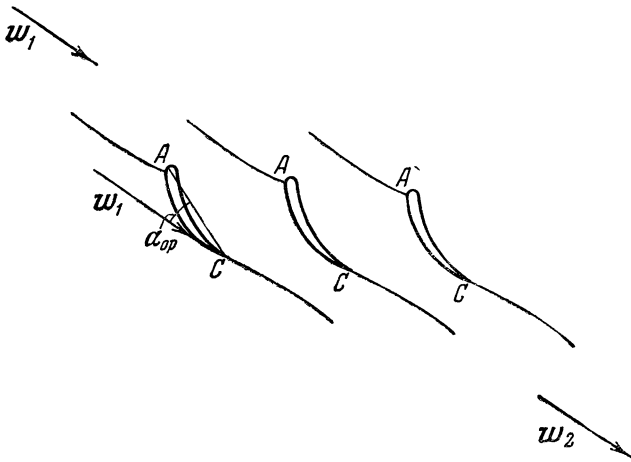


Фиг. 175. Бесциркуляционное обтекание решётки профилей.

Обратимся к рассмотрению обтекания несжимаемой жидкостью прямолинейной решётки, составленной из профилей, имеющих острую заднюю кромку. Бесциркуляционное обтекание решётки (при отсутствии циркуляции вокруг профилей, составляющих решётку) представлено на фиг. 175; направление такого течения в решётке не изменяется. Так же как и для случая единичного крыла, можно найти такое направление

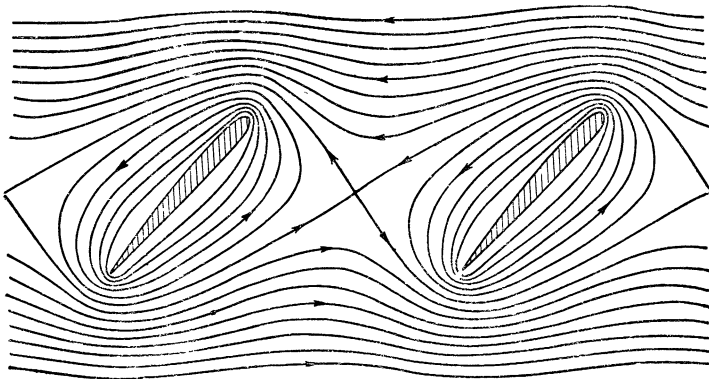
бесциркуляционного течения, при котором острая кромка является точкой схода струй; соответствующий угол атаки обозначим α_{0p}

(фиг. 176), а угол между бесциркуляционным направлением и фронтом решётки обозначим $\beta_{ор}$. Чисто циркуляционное обте-



Фиг. 176. Обтекание решётки профилей на пулевом угле атаки.

вание решётки профилей представлено на фиг. 177; так же как и в случае единичного профиля, оно не может быть осуществлено при наличии острых кромок.

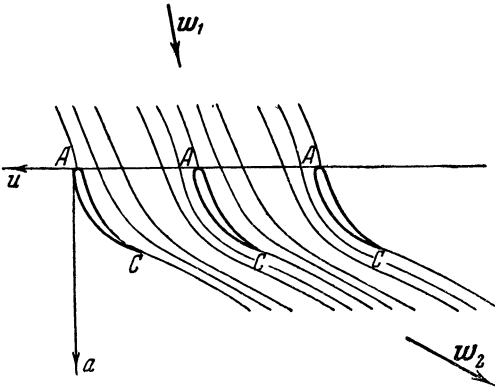


Фиг. 177. Чисто циркуляционное обтекание решётки профилей.

В отличие от единичного профиля при чисто циркуляционном обтекании решётки жидкость вдалеке от неё уже не является неподвижной; для определения скорости этого движения на бесконечном удалении перед и за решёткой достаточно заменить решётку

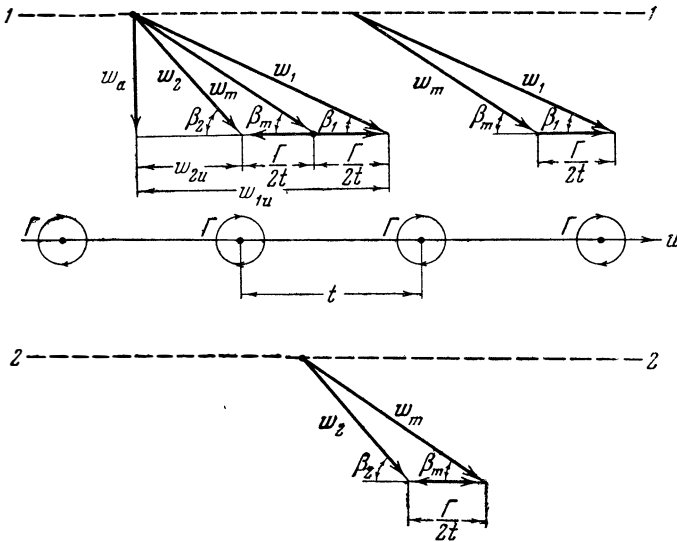
профилей цепочкой точечных вихрей, имеющих тот же шаг t и то же значение циркуляции вокруг каждого вихря Γ , что и у профиля в решётке. Как было уже показано в § 2 главы II, в этом случае жидкость на бесконечности перед и за решёткой движется с одинаковыми скоростями w_i в противоположные стороны параллельно фронту решётки; величина скорости w_i определяется по формулам (17) главы II

$$w_i = \frac{\Gamma}{2t}.$$



Фиг. 178. Обтекание решётки профилей с циркуляцией.

Для получения общего случая обтекания решётки с циркуляцией сложим два течения — бесциркуляционное и чисто циркуляционное (фиг. 178). Для определения скоростей



Фиг. 179. Сложение двух течений—чисто циркуляционного и бесциркуляционного—в решётке профилей.

далеко впереди и за решёткой построим два векторных треугольника скоростей перед и за решёткой (фиг. 179). Как следует из

рассмотрения этих треугольников, скорости перед решёткой и за решёткой различны по величине и по направлению. Если построить оба треугольника скорости совместно (фиг. 179), то легко заметить, что скорость бесциркуляционного течения определяется как геометрическая полусумма скоростей перед и за решёткой, т. е. так называемая средняя геометрическая скорость.

Применяя постулат Жуковского-Чаплыгина о сходе струй с задней острой кромки профиля в решётке, получаем дополнительное условие, с помощью которого может быть однозначно определена величина циркуляции Γ вокруг профиля в решётке при заданной по направлению и величине средней геометрической скорости ω_m . На постулате Жуковского-Чаплыгина основываются существующие математические методы определения циркуляции, а следовательно, и подъёмной силы как для единичного профиля, так и для решётки профилей; с помощью этих методов удаётся найти и распределение циркуляции и подъёмной силы по размаху крыла. Эти методы составляют содержание теоретической аэродинамики крыла и решётки крыльев, основные результаты которой излагаются ниже.

Аэродинамическую силу, возникающую на крыловом профиле при обтекании его потоком вязкой жидкости, обычно раскладывают на две составляющие: подъёмную силу R_y и лобовое сопротивление R_x . Для удобства анализа и пользования данными экспериментов вводят безразмерные коэффициенты подъёмной силы C_y и лобового сопротивления C_x , деля значения сил на произведение площади крыла на скоростной напор потока. В случае изолированного крыла характерной является скорость невозмущённого потока (на бесконечности) ω_n . Поэтому

$$C_y = \frac{R_y}{S \frac{\rho \omega_n^2}{2}}, \quad (20)$$

$$C_x = \frac{R_x}{S \frac{\rho \omega_n^2}{2}}, \quad (21)$$

где $S = l \cdot b$ — площадь крыла, равная произведению длины размаха на хорду. Зная величины этих коэффициентов, можно найти подъёмную силу и лобовое сопротивление из очевидных равенств

$$R_y = C_y S \rho \frac{\omega_n^2}{2}, \quad (22)$$

$$R_x = C_x S \rho \frac{\omega_n^2}{2}. \quad (23)$$

Отношение подъёмной силы к силе лобового сопротивления называется качеством крыла K :

$$K = \frac{R_y}{R_x} = \frac{C_y}{C_x}.$$

Обратную величину, т. е. отношение лобового сопротивления к подъёмной силе, называют обратным качеством и обозначают:

$$\mu = \frac{1}{K} = \frac{R_x}{R_y} = \frac{C_x}{C_y}.$$

Заметим, что в случае идеальной жидкости

$$R_x = 0, \quad C_x = 0, \quad \mu = 0;$$

силовое воздействие на профиль определяется при этом только значением коэффициента подъёмной силы C_y .

В случае обтекания решётки профилей несжимаемой жидкостью характерной скоростью является геометрическая полусумма скоростей перед и за решёткой; коэффициенты подъёмной силы и лобового сопротивления и обратное качество профиля в решётке определяются следующим образом:

$$C_y = \frac{R_y}{S\rho \frac{\omega_m^2}{2}},$$

$$C_x = \frac{R_x}{S\rho \frac{\omega_m^2}{2}},$$

$$\mu = \frac{C_x}{C_y} = \frac{R_x}{R_y}.$$

Подставляя значения подъёмной силы (15) и лобового сопротивления (16) профиля в решётке в выражения для коэффициентов C_y и C_x , получим:

$$C_y = \frac{2\Gamma}{b\omega_m} - C_x \operatorname{ctg} \beta_m, \quad (24)$$

$$C_x = \frac{h_w}{\omega_m^2} \sin \beta_m. \quad (25)$$

Здесь положено $l = 1$, т. е. $S = b$, где b — хорда профиля; $\tau = \frac{b}{t}$.

Если ввести гидравлические коэффициенты сопротивления решётки, определяемые по геометрической полусумме ω_m ско-

ростей или по скорости входа:

$$\zeta_m = \frac{h_w}{\frac{\omega_m^2}{\rho \frac{1}{2}}}, \quad (26)$$

$$\zeta_1 = \frac{h_w}{\frac{\omega_1^2}{\rho \frac{1}{2}}}, \quad (27)$$

то можно согласно (25) записать выражение для коэффициента лобового сопротивления в следующем виде:

$$C_x = \frac{\zeta_m}{\tau} \sin \beta_m = \frac{\zeta_1}{\tau} \frac{\sin^3 \beta_m}{\sin^2 \beta_1}.$$

Выразим циркуляцию Γ в формуле (24) с помощью (17):

$$C_y = \frac{2\Delta\omega_u}{\tau\omega_m} - C_x \operatorname{ctg} \beta_m, \quad (28)$$

откуда

$$\frac{\Delta\omega_u}{\omega_m} = \frac{\tau}{2} C_y (1 + \mu \operatorname{ctg} \beta_m). \quad (29)$$

Закрутка потока в решётке определяется равенством

$$\frac{\Delta\omega_u}{\omega_m} = \frac{\omega_1}{\omega_m} \cos \beta_1 - \frac{\omega_2}{\omega_m} \cos \beta_2.$$

Из треугольника скорости (фиг. 166) следует:

$$\frac{\omega_1}{\omega_m} = \frac{\sin \beta_m}{\sin \beta_1},$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_m} = \frac{\sin \beta_m}{\sin \beta_2},$$

поэтому

$$\frac{\Delta\omega_u}{\omega_m} = \sin \beta_m (\operatorname{ctg} \beta_1 - \operatorname{ctg} \beta_2). \quad (30)$$

Подставляя последнее выражение в (28), имеем:

$$C_y = \frac{2}{\tau} \sin \beta_m (\operatorname{ctg} \beta_1 - \operatorname{ctg} \beta_2) - C_x \operatorname{ctg} \beta_m. \quad (31)$$

Полагая в приведённых выражениях

$$C_x = 0,$$

$$\mu = 0,$$

получим следующие формулы для случая обтекания решётки идеальной несжимаемой жидкостью:

$$C_y = \frac{2\Gamma}{b\omega_m} = \frac{2\Delta\omega_u}{\tau\omega_m}, \quad (32)$$

или

$$C_y = \frac{2}{\tau} \sin \beta_m (\operatorname{ctg} \beta_1 - \operatorname{ctg} \beta_2) \quad (33)$$

и

$$\frac{\Delta w_u}{w_m} = \frac{\tau}{2} C_y. \quad (34)$$

Обычно ввиду малости величины μ формулой (32) пользуются и в случае обтекания решётки профилей вязкой жидкостью.

§ 3. Обтекание крыла потоком несжимаемой жидкости

Как известно из гидродинамики¹⁾, в идеальной жидкости величина циркуляции для единичного крыла, определяемая из условия Жуковского-Чаплыгина, пропорциональна скорости набегающего потока, хорде крыла и синусу угла между направлением нулевой подъёмной силы и направлением набегающего потока (фиг. 163):

$$\Gamma = m_u b \cdot w_H \sin (\alpha - \alpha_0), \quad (35)$$

где m_u — коэффициент пропорциональности, зависящий только от формы профиля, α_0 — угол нулевой подъёмной силы, т. е. безотрывного бесциркуляционного обтекания. В случае пластинки

$$m_u = \pi. \quad (36)$$

Коэффициент подъёмной силы согласно (19), (20) и (35) равен:

$$C_y = \frac{2\Gamma}{bw_H} = 2m_u \sin (\alpha - \alpha_0).$$

Так как обычно применяемые углы атаки невелики, то можно положить:

$$\sin (\alpha - \alpha_0) \cong \alpha - \alpha_0;$$

отсюда

$$C_y = 2m_u (\alpha - \alpha_0);$$

вводя так называемый аэродинамический угол атаки

$$\alpha_A = \alpha - \alpha_0,$$

т. е. угол между направлением скорости на бесконечности и направлением нулевой подъёмной силы (фиг. 163), имеем:

$$C_y = 2m_u \alpha_A,$$

¹⁾ Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Гостехиздат, 1950.

или после дифференцирования:

$$\frac{dC_y}{d\alpha} = 2m_u,$$

и следовательно,

$$C_y = \frac{dC_y}{d\alpha} \alpha_A = \frac{dC_y}{d\alpha} (\alpha - \alpha_0).$$

Для плоской пластинки согласно (36)

$$\frac{dC_y}{d\alpha} = 2\pi. \quad (37)$$

У симметричных профилей хорда совпадает с осью симметрии, вследствие чего угол нулевой подъемной силы равен нулю:

$$\alpha_0 = 0,$$

поэтому коэффициент подъемной силы плоской пластины равен:

$$C_y = 2\pi\alpha.$$

Введём понятие *эквивалентной пластинки*, т. е. пластинки, дающей ту же подъемную силу, что и данный профиль при равном угле атаки.

Для того чтобы это условие соблюдалось, в частности при нулевой подъемной силе, необходимо, чтобы пластинка была параллельна направлению нулевой подъемной силы профиля (фиг. 163). Длина (хорда) эквивалентной пластинки b^* определится из условия

$$2\pi b^* = 2m_u b,$$

откуда

$$m_u = \frac{1}{2} \frac{dC_y}{d\alpha} = \pi \frac{b^*}{b}; \quad (38)$$

выражение для коэффициента подъемной силы можно соответственно записать в таком виде:

$$C_y = 2\pi \frac{b^*}{b} \alpha_A = 2\pi \frac{b^*}{b} (\alpha - \alpha_0).$$

Вводя безразмерную длину эквивалентной пластинки

$$\bar{b}^* = \frac{b^*}{b},$$

получим:

$$C_y = 2\pi \bar{b}^* \alpha_A = 2\pi \bar{b}^* (\alpha - \alpha_0).$$

Аэродинамической хордой профиля называют длину эквивалентной пластинки; она откладывается по направлению нулевой подъемной силы.

Таким образом, определение коэффициента подъёмной силы профиля можно свести к отысканию величины и направления аэродинамической хорды профиля.

Существуют расчётные методы, по которым можно найти для любого заданного профиля не только величины m_u , α_0 и C_y , но также и распределение скорости (и давления) по поверхности профиля¹⁾. Эти методы основаны на решении задачи способом последовательных приближений и требуют довольно громоздких расчётов.

Задача существенно упрощается для так называемых теоретических профилей, получаемых в результате некоторого математического преобразования. Впервые семейства теоретических профилей были созданы Н. Е. Жуковским в 1910 г. Аэродинамическая хорда, а следовательно, и коэффициент подъёмной силы теоретического профиля определяются в процессе его построения. Для приближённого вычисления коэффициента подъёмной силы произвольного профиля подбирают соответствующий ему теоретический профиль, исходя из условий равенства относительной толщины и относительной кривизны. Пользуясь данными по профилю Жуковского, можно получить следующую приближённую формулу для определения величины $\frac{dC_y}{d\alpha}$ произвольного профиля:

$$\frac{dC_y}{d\alpha} = 2\pi (1 + 0,77c) \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{f}}{2}\right)^2}. \quad (39)$$

В этой формуле²⁾ один из множителей учитывает кривизну профиля, а другой множитель — его толщину. Направление нулевой подъёмной силы может быть с достаточной точностью определено как параллельное прямой, проходящей через заднюю кромку профиля и точку пересечения осевой дуги с нормалью, восставленной в середине хорды.

До сих пор мы изучали свойства профиля крыла в случае плоскопараллельного течения жидкости, т. е. занимались теорией крыла бесконечного размаха, а теперь остановимся на основных вопросах теории крыла конечного размаха³⁾. Как уже неоднократно говорилось, бесконечное крыло воздействует на обтекающий его поток жидкости, как бесконечная вихревая нить. Иначе говоря, можно считать, что в крыло как бы помещён так называемый присоединённый вихрь. Как известно из гидро-

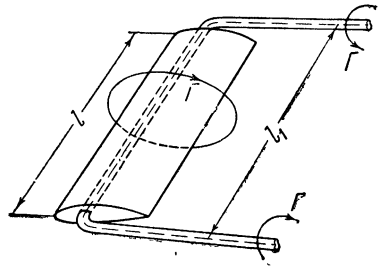
¹⁾ Серебрянский Я. М., Обтекание крыловых профилей произвольной формы. Инженерный сборник, 1944, т. 3, вып. 1.

²⁾ См. Аэродинамика, под ред. В. Ф. Дюренда, т. II, Оборонгиз, М. — Л., 1939.

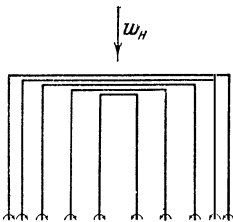
³⁾ См. Юрьев Б. Н., Экспериментальная аэродинамика, ч. II, Оборонгиз, 1938.

динамики, вихрь может оканчиваться только на границах потока или является замкнутым. Поэтому присоединённый вихрь не может внезапно оборваться на торцах крыла конечного размаха (фиг. 180); его свободные концы, называемые вихревыми усами, выходят за пределы размаха l и, будучи подхвачены общим течением жидкости, вытягиваются по линиям тока в бесконечность.

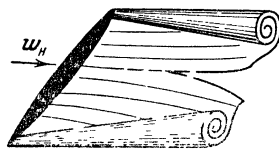
Если циркуляция вокруг крыла постоянна, то такое крыло конечного размаха можно заменить П-образным вихрем. В действительности циркуляция по крылу конечного размаха обычно изменяется, и в общем случае крыло можно заменить системой из бесконечного числа П-образных вихрей, образующих непрерывную вихревую пелену (фиг. 181), которая, как показывают исследования, неустойчива и за крылом сворачивается в два вихревых уса (фиг. 182). У крыла прямоугольной формы вихревые усы сбегают главным образом с концов, т. е. такое крыло может быть заменено приближённо одним П-образным вихрем с постоянной циркуляцией.



Фиг. 180. Аэродинамическая схема крыла конечного размаха с П-образным вихрем постоянной циркуляции.



Фиг. 181. Схема П-образных вихрей для крыла с переменной циркуляцией по размаху.



Фиг. 182. Схема сворачивания вихревой пелены за крылом в два вихревых уса.

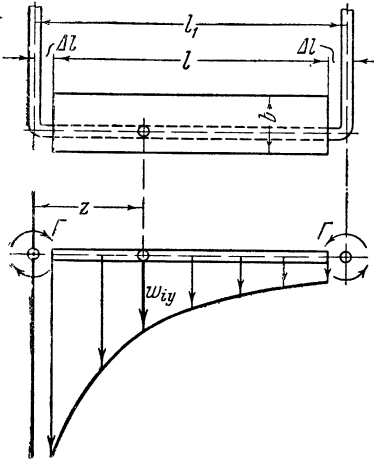
Опыты прекрасно подтверждают описанную гидродинамическую схему крыла конечного размаха. Принимая во внимание действие сбегających с концов крыла вихрей, удаётся определить влияние размаха крыла на его аэродинамические свойства.

Рассмотрим простейшую схему крыла с П-образным вихрем (фиг. 183). Расстояние между вихревыми усами несколько больше размаха крыла ($l_1 > l$); расстояние от оси вихревого

уса до края крыла равно:

$$\Delta l = \frac{l_1 - l}{2}.$$

Для оценки влияния вихревых усов на точки, лежащие на присоединённом вихревом шнуре, проведём через него плоскость, перпендикулярную к скорости полёта w_n , и определим скорости, которые индуцируют в этой плоскости вихревые усы.



Фиг. 183. Индуктивные скорости, вызванные усом П-образного вихря.

В теории крыла конечного размаха имеет значение только одна составляющая индуктивной скорости, перпендикулярная к направлению полёта и к оси присоединённого вихря w_y . В главе II было показано, что скорость, индуцируемая бесконечным вихрем, равна:

$$w_y = -\frac{\Gamma}{2\pi z},$$

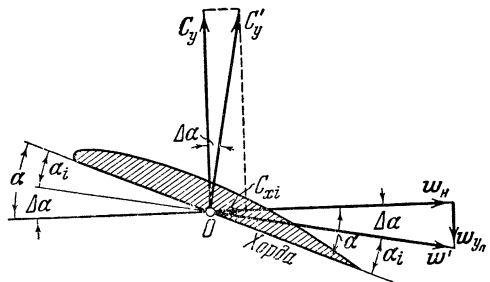
где z — расстояние от вихревого уса, отсчитываемое в данном случае по оси присоединённого вихря. Знак минус поставлен потому, что скорость w_y на фиг. 183 направлена вниз.

Однако мы имеем дело не с бесконечным вихрем, а с вихревым усом, который является полувихрем, так как уходит от края крыла в бесконечность только в одну сторону (по потоку); скорость, индуцируемая полувихрем в плоскости, близкой к его окончанию, в два раза меньше, чем в случае бесконечного вихря, т. е. в нашем случае:

$$w_{iy} = -\frac{\Gamma}{4\pi z}.$$

Вычислим среднюю по размаху крыла индуктивную скорость, называемую скоростью скоса потока:

$$w_{y0} = \frac{2}{l} \int_{\Delta l}^{l+\Delta l} w_y dz.$$



Фиг. 184. Скос потока за крылом конечного размаха.

Здесь множитель 2 взят для учёта воздействия двух вихревых усов. Выражая индуктивную скорость через циркуляцию, получим:

$$\omega_{y0} = -2 \cdot \frac{1}{l} \cdot \int_{\Delta l}^{l+\Delta l} \frac{\Gamma}{4\pi z} dz = -\frac{\Gamma}{2\pi l} \int_{\Delta l}^{l+\Delta l} \frac{dz}{z} = -\frac{\Gamma}{2\pi l} \ln \frac{l+\Delta l}{\Delta l}.$$

В соответствии с принятым обозначением имеем:

$$\omega_{y0} = -\frac{\Gamma}{2\pi l} \cdot \ln \frac{l_1+l}{l_1-l}.$$

Величина $\varepsilon = \ln \frac{l_1+l}{l_1-l}$ есть коэффициент самоиндукции крыла; на основании теории и опытов можно положить:

$$l_1 \approx 1,04l,$$

т. е.

$$\varepsilon \approx 4;$$

отсюда

$$\omega_{y0} = -\frac{\varepsilon \cdot \Gamma}{2\pi l} = -\frac{2\Gamma}{\pi l}.$$

Прибегая к полученному ранее соотношению

$$C_y = \frac{2\Gamma}{b\omega_H},$$

можно выразить скорость скоса через конструктивные параметры крыла:

$$\omega_{y0} = -\frac{C_y}{\pi} \cdot \frac{b}{l} \omega_H = -\frac{C_y}{\pi\lambda} \omega_H;$$

величина

$$\lambda = \frac{l}{b}$$

называется относительным размахом или удлинением крыла.

Угол скоса потока $\Delta\alpha$, который вызывается вихревыми усами, можно определить из условия (фиг. 184):

$$\operatorname{tg} \Delta\alpha = -\frac{\omega_{y0}}{\omega_H};$$

здесь принято, что $\Delta\alpha > 0$ при $\omega_{y0} < 0$. Ввиду малости угла $\Delta\alpha$ ¹⁾ можно положить:

$$\begin{aligned} \omega_H &\approx \omega', \\ \operatorname{tg} \Delta\alpha &\approx \Delta\alpha, \end{aligned}$$

1) Обычно $\Delta\alpha$ равен нескольким градусам.

где $\Delta\alpha$ взят в радианах. Выражая величину ω_{y_0} через коэффициент подъёмной силы, получим следующую основную формулу теории крыла конечного размаха:

$$\Delta\alpha = \frac{C_y}{\pi\lambda}.$$

Переходя от измерения в радианах к измерению в градусах, имеем:

$$\Delta\alpha^\circ = \frac{360}{2\pi} \cdot \Delta\alpha = 18,23 \cdot \frac{C_y}{l}.$$

Если крыло стоит в потоке под углом атаки α , то истинный (аэродинамический) угол атаки равен:

$$\alpha_i = \alpha - \Delta\alpha.$$

В случае крыла бесконечного размаха ($\lambda = \infty$) угол скоса равен нулю ($\Delta\alpha = 0$), т. е. истинный угол атаки равен кажущемуся (α). Чем меньше относительный размах крыла λ , тем больше угол скоса потока, т. е. тем меньше истинный угол атаки.

В связи со скосом потока на угол $\Delta\alpha$ подъёмная сила крыла повернётся на тот же угол, так как её направление перпендикулярно к истинному направлению потока. Проекция подъёмной силы крыла конечного размаха¹⁾ на направление невозмущённого потока представляет собой силу сопротивления:

$$R_{xi} = R'_y \cdot \sin \Delta\alpha.$$

Переходя к безразмерным величинам и учитывая малость угла скоса ($\sin \Delta\alpha \approx \Delta\alpha$), получаем формулу так называемого коэффициента индуктивного сопротивления крыла конечного размаха

$$C_{xi} = C_y \cdot \Delta\alpha = \frac{C_y^2}{\pi\lambda}.$$

Таким образом, влияние конечности крыла сказывается в появлении особого рода (индуктивного) сопротивления даже в случае обтекания крыла идеальной жидкостью.

Коэффициент индуктивного сопротивления зависит только от величин C_y и λ , т. е. не зависит непосредственно от формы профиля. Ввиду того, что коэффициент подъёмной силы согласно формуле (35) пропорционален аэродинамическому углу атаки, коэффициент индуктивного сопротивления пропорционален квадрату угла атаки.

Мы изложили приближённую теорию крыла конечного размаха в идеальной жидкости, основанную на замене крыла

¹⁾ Ввиду того, что углы скоса малы, подъёмная сила при скосе потока почти не меняется ($C'_y \cong C_y$).

П-образным вихрем. Формулы более строгой теории получаются в следующем виде:

$$\Delta\alpha = \frac{C_y}{\pi\lambda} (1 + \tau),$$

$$C_{xi} = \frac{C_y^2}{\pi\lambda} (1 + \delta).$$

Поправки τ и δ зависят от размаха и формы крыла в плане¹⁾. Ниже приводится таблица поправок для прямоугольного крыла, вычисленная Глауэртом:

Таблица VII

$\frac{\lambda}{\frac{dC_{y\infty}}{d\alpha}}$	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75
λ при $\frac{dC_{y\infty}}{d\alpha} = 2\pi$	3,14	4,72	6,28	7,87	9,42	10,98
τ	0,10	0,14	0,17	0,20	0,22	0,24
δ	0,019	0,034	0,049	0,063	0,076	0,088

В случае крыла эллиптической формы в плане поправки равны нулю ($\tau = 0$, $\delta = 0$).

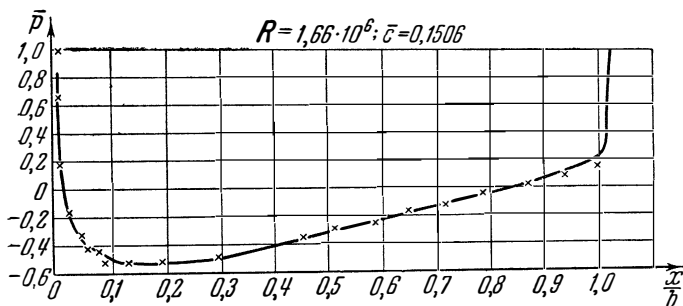
До сих пор мы рассматривали обтекание крыла идеальной жидкостью. Изложим некоторые соображения о влиянии вязкости. Вязкость жидкости вносит изменения в картину течения и приводит к различию между выводами теории потенциального обтекания крыла и экспериментальными данными. Влияние вязкости в случае хорошо обтекаемых тел сказывается лишь в тонком пограничном слое, вне которого движение можно считать потенциальным, т. е. безвихревым.

В главе VI рассмотрено подробно обтекание с трением плоской пластины, расположенной параллельно направлению потока; в этом случае давление в потоке практически не изменяется; при обтекании же крыла давление около его поверхности существенно изменяется. Исходя из этого, всё течение вблизи крыла следует разделить на два основных участка: *конфузорный участок*,

¹⁾ См. более подробное изложение теории крыла конечного размаха в книге Ю рье ва Б. Н., Экспериментальная аэродинамика, ч. II, Оборонгиз, 1938.

в котором скорость возрастает, а давление соответственно падает, т. е. градиент давления отрицателен ($\frac{dp}{dx} < 0$); *диффузорный участок*, в котором скорость падает, а давление возрастает, т. е. градиент давления положителен ($\frac{dp}{dx} > 0$).

К конфузорному участку относятся нижняя поверхность и передняя часть верхней поверхности крыла (до точки минимума давлений — p_{\min}). К диффузорному участку относится задняя часть верхней поверхности (от точки минимума давления до задней кромки). В конфузорном участке течение совершается в сторону падения давления, и поэтому не возникает опасности отрыва пограничного слоя от поверхности крыла. В диффузорном участке



Фиг. 185. Сравнение экспериментальной и теоретической эпюры давления для симметричного профиля Жуковского с относительной толщиной $\bar{c} = 0,1506$ при нулевом угле атаки (кривая — расчёт, крестики — эксперимент).

движение направлено в сторону роста давлений, что, как указывалось в главе VI, при больших градиентах давления приводит к возможности *отрыва пограничного слоя*.

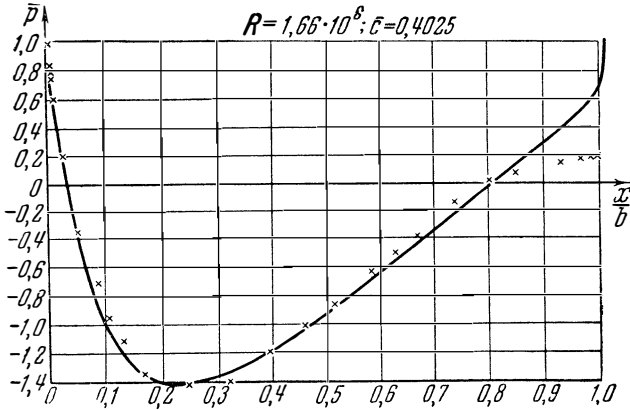
Эти соображения подтверждаются многочисленными экспериментами с диффузорами, конфузорами и крыловыми профилями.

На фиг. 185 и 186 производится сравнение эпюры безразмерных величин давления ($\bar{p} = \frac{P - P_H}{0,5\rho v_{\infty}^2}$) по поверхности, полученных из

эксперимента, с данными теории потенциального обтекания на нулевом угле атаки для двух симметричных профилей Жуковского, имеющих относительные толщины: $\bar{c} = 0,1506$ и $\bar{c} = 0,4025$.

Как видим, разница между теоретическими и экспериментальными данными в распределении давления имеется только в кормовой части профиля, причём она увеличивается с толщиной профиля. Этот результат справедлив не только при нулевом угле, но также и при малых углах атаки.

С увеличением угла атаки усиливается диффузорность течения на верхней поверхности, что увеличивает расхождение между экспериментом и теорией. На больших (закритических) углах атаки возникает отрыв пограничного слоя от верхней поверхности крыла; это приводит к резкому падению коэффициента подъёмной силы C_y и возрастанию коэффициента лобового сопротивления C_x , причём наблюдается существенное различие между данными эксперимента и теории потенциального обтекания крылового профиля.



Фиг. 186. Сравнение экспериментальной и теоретической эпюр давления для симметричного профиля Жуковского с относительной толщиной $\bar{c} = 0,4025$ при нулевом угле атаки (кривая—расчёт, крестики—эксперимент).

Влияние вязкости сказывается в нарушении теоремы Жуковского о направлении равнодействующей сил давления, так как появляется составляющая, направленная параллельно набегающему потоку против движения крыла; она называется сопротивлением давления и обозначается R_{xn} , величину $C_{xn} = \frac{R_{xn}}{S\rho \frac{\omega_H^2}{2}}$

будем соответственно называть коэффициентом сопротивления давления. Кроме сопротивления давления, на профиль, как уже указывалось, действуют касательные силы поверхностного трения.

Общая сила профильного сопротивления $R_{x \text{ пр}}$ состоит из сопротивления давления и сопротивления трения:

$$R_{x \text{ пр}} = R_{xn} + R_{xf}.$$

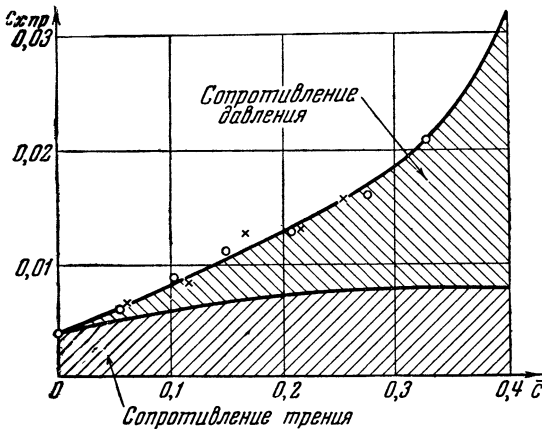
Коэффициент профильного сопротивления равен:

$$C_{x \text{ пр}} = \frac{R_{x \text{ пр}}}{S\rho \frac{\omega_H^2}{2}} = C_{xf} + C_{xn}.$$

Здесь в отличие от коэффициента трения пластины C_f коэффициент сопротивления трения профиля обозначается C_{xf} . Иногда ещё вводят понятие сопротивления формы. Под коэффициентом сопротивления формы понимают разность между коэффициентом профильного сопротивления и коэффициентом трения плоской пластины, имеющей ту же поверхность, что и данное крыло¹⁾:

$$C_{x \text{ формы}} = C_{x \text{ пр}} - 2C_f = C_{x0} + (C_{xf} - 2C_f).$$

Для иллюстрации соотношения между сопротивлением давления и сопротивлением трения на фиг. 187 приведены результаты



Фиг. 187. Соотношение между сопротивлением трения и сопротивлением давления в зависимости от относительной толщины профиля \bar{c} для симметричного профиля Жуковского по данным продувки при нулевом угле атаки.

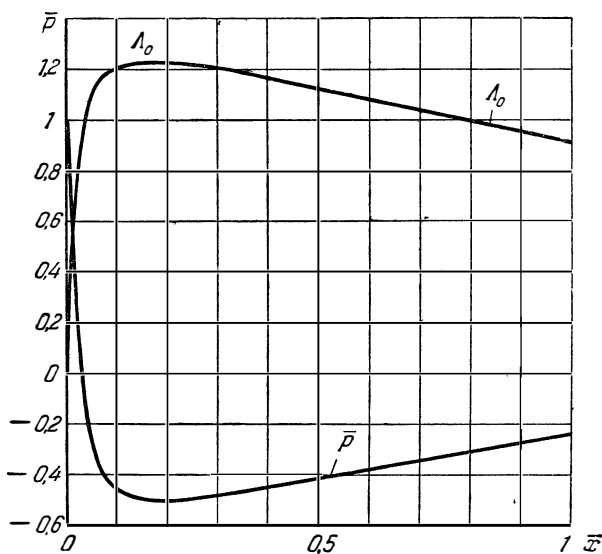
экспериментальных исследований на нулевом угле атаки серии из семи симметричных профилей Жуковского с относительной толщиной: $\bar{c} = 0,05; 0,10; 0,15; 0,21; 0,27; 0,33; 0,40$.

Как видим, у тонких профилей подавляющую часть профильного сопротивления составляет сопротивление трения; например, в случае $\bar{c} = 0,1$ на долю трения падает 75% профильного сопротивления. С увеличением относительной толщины профиля за счёт возрастания градиента давления в диффузорной части крыла растёт общее профильное сопротивление и уменьшается доля сопротивления трения; при $\bar{c} > 0,25$ сопротивление давления

¹⁾ Здесь множитель 2 при C_f учитывает трение на двух сторонах пластины.

преобладает над сопротивлением трения; при $\bar{c} = 0,4$ первое составляет $\sim 70\%$ общего профильного сопротивления.

Рассчитаем коэффициент сопротивления трения симметричного профиля Жуковского с относительной толщиной $\bar{c} = 0,1506$ при нулевом угле атаки. Экспериментальная эпюра давления для этого профиля приведена на фиг. 185 при $R = 1,66 \cdot 10^6$. Напом-



Фиг. 188. Эпюра давления вдоль спрямлённой образующей профиля и распределение относительной скорости.

ним, что при расчёте пограничного слоя координата x выбирается вдоль образующей профиля, а координата y — перпендикулярно к ней. Поэтому, прежде чем перейти к расчёту пограничного слоя, необходимо перестроить эпюру давления вдоль спрямлённой образующей профиля. Эта эпюра давления и распределение безразмерной скорости $\Lambda_0 = \frac{W_0}{W_\infty}$ вдоль спрямлённой образующей,

где w_∞ — скорость невозмущённого потока, приведены на фиг. 188¹⁾. Согласно главе VI расчёт пограничного слоя при наличии градиента давления для несжимаемой жидкости сводится к решению

¹⁾ Величину Λ_0 не следует смешивать с величиной Λ , с которой мы имеем дело в главе VI. О построении профилей Жуковского см., например, Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, часть I, изд. 4-е, Гостехиздат, 1948.

уравнения

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + (2\delta^{**} + \delta^*) \frac{1}{W_0} \frac{dW_0}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho_0 W_0^2},$$

где

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{w}{W_0} \left(1 - \frac{w}{W_0}\right) dy \quad \text{и} \quad \delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{w}{W_0}\right) dy$$

— соответственно толщины потери импульса и вытеснения. Это уравнение можно свести к интегральному соотношению

$$\delta_i^{**} = \int_0^x \left[\frac{\tau_w}{\rho_0 W_0^2} - (2\delta_{i-1}^{**} + \delta_{i-1}^*) \frac{1}{W_0} \frac{dW_0}{dx} \right] dx,$$

которое решается методом последовательных приближений. При выборе первого приближения для изменения δ^{**} и δ^* вдоль профиля следует учитывать, что при отрицательном градиенте давления (конфузорная часть) нарастание пограничного слоя происходит менее интенсивно, а при положительном градиенте давления (диффузорная часть) более интенсивно, чем в случае обтекания пластины. Однако расчёт методом последовательных приближений громоздок и неудобен. Для практических целей Л. Г. Лойцянский¹⁾, а также Л. Е. Калихманом²⁾ предложен упрощённый метод, в котором для ламинарного пограничного слоя используется соотношение

$$R\bar{\delta}^{**} = \frac{0,437}{\Lambda_0^{5,75}} \int_0^1 \Lambda_0^{4,75} d\bar{x},$$

а для полностью турбулентного слоя соотношение

$$R^{**} = \frac{\rho w_0 \delta^{**}}{\mu} = \frac{1,25}{\xi^2} R \frac{\int_0^x \Lambda_0^4 d\bar{x}}{\Lambda_0^3}.$$

В случае, когда на профиле имеется вначале ламинарный $0 < \bar{x} < \bar{x}_0$, а затем турбулентный пограничный слой ($\bar{x}_0 < \bar{x} < 1$), толщина потери импульса определяется по комбинированной формуле

¹⁾ Лойцянский Л. Г., Приближённый метод расчёта турбулентного пограничного слоя на профиле. Прикладная математика и механика, вып. 6, 1945.

²⁾ Калихман Л. Е., Газодинамическая теория теплопередачи. Прикладная математика и механика № 4, 1946.

($\delta_T^{**} = \delta_{II}^{**}$ в точке перехода)

$$R^{**} = R_{II}^{**} \frac{\bar{x}}{x=x_0} + \frac{1,25}{\xi^2} R \frac{\int_{x=x_0}^{\bar{x}} \Lambda_0^4 dx}{\Lambda_0^3},$$

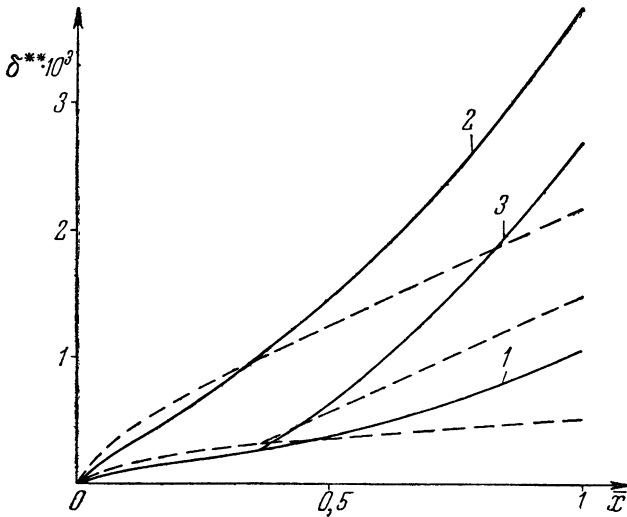
где

$$R_{II}^{**} = \frac{\rho \omega_0 \delta_{II}^{**}}{\mu}.$$

Значение δ^{**} и величина ξ определяются формулой (20) главы VI

$$R^{**} = 0,288 e^{x\xi} \left(1 - \frac{2}{x\xi} \right) = \frac{1,25}{\xi^2} R \frac{\int_0^{\bar{x}} \Lambda_0^4 d\bar{x}}{\Lambda_0^3}.$$

Изменение δ^{**} вдоль профиля для ламинарного и турбулентного режимов течения изображено на фиг. 189. Кроме того, на этой



Фиг. 189. Изменение толщины потери импульса вдоль профиля.

фигуре приведено изменение δ^{**} , рассчитанное сначала для ламинарного режима ($0 < \bar{x} < 0,35$), а затем при $0,35 < \bar{x} < 1$ для турбулентного режима¹⁾. Для сопоставления на этом графике пунктирными линиями нанесены соответствующие значения $\bar{\delta}^{**}$

1) В точке $\bar{x} = 0,35$ имеем: $R^{**} = 600$, что соответствует критическому числу R для перехода ламинарного слоя в турбулентный.

в случае обтекания пластины. Как видно, при наличии градиента давления в конфузорной части профиля возрастание δ^{**} меньше, а в диффузорной части больше, чем в случае пластины.

Зная изменение δ^{**} и $x\xi$ вдоль профиля, подсчитываем суммарный коэффициент трения $C_f = \int_0^1 c_f d\bar{x} = 2 \int_0^1 \frac{\tau_w}{\rho W_\infty^2} d\bar{x}$ для ламинарного режима по формуле

$$C_f = \frac{0,418}{R} \int_0^1 \frac{\Lambda_0}{\delta^{**}} d\bar{x},$$

так как для поля скоростей:

$$\frac{w}{W_0} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3$$

имеем:

$$\tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu_w W_0 \frac{3}{2\delta} = 0,209 \mu_w W_0 \frac{1}{\delta^{**}},$$

а для турбулентного режима по формуле

$$C_f = 2 \int_0^1 \frac{\Lambda_0^2}{\xi^2} d\bar{x},$$

так как согласно (89) главы VI

$$\tau_w = \frac{\rho W_0^2}{\xi^2}.$$

Приведённые расчёты показали, что для ламинарного режима $C_f = 0,001$, для чисто турбулентного режима $C_f = 0,0049$, для смешанного $C_f = 0,0036$.

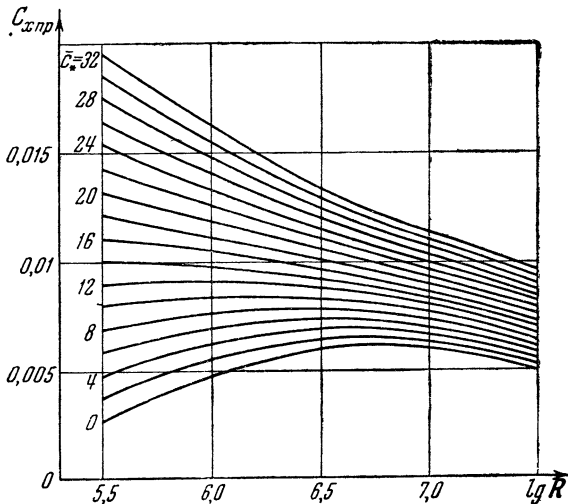
Согласно графику фиг. 187 коэффициент трения при относительной толщине профиля $\bar{c} = 0,1506$ равен $C_f = 0,007$. Это значение совпадает с удвоенным значением C_f (для обеих сторон профиля) для смешанного режима течения.

В случае профиля большой толщины градиент давления становится настолько большим, что возникает отрыв пограничного слоя в диффузорной части крыла, причём увеличение относительной толщины приводит к перемещению точки отрыва по направлению к носу профиля.

Эксперименты показывают, что коэффициент профильного сопротивления крыла C_x пр зависит как от геометрических характеристик профиля так и от значения числа R . Например, у тонкого симметричного профиля ($\bar{c} = 0,06$) при нулевом угле атаки, как известно из опытов на малых значениях числа R , профильное сопротивление почти равно сопротивлению трения пластины с полностью ламинарным пограничным слоем; при увеличении

числа R профильное сопротивление приближается к сопротивлению трения пластины с полностью турбулентным пограничным слоем.

В результате обработки большого количества экспериментальных материалов удалось получить кривые (фиг. 190), которые дают с достаточной для практики точностью величину минимального значения $C_{x\text{ пр}}$ в функции числа R и обобщённого гео-



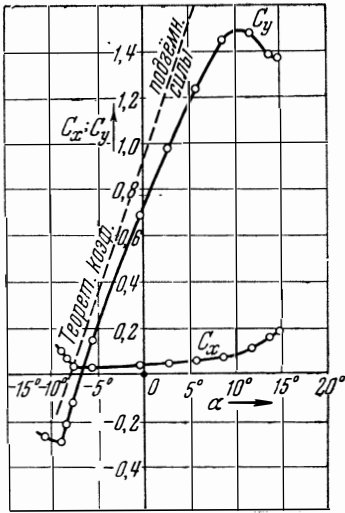
Фиг. 190. Зависимость коэффициента профильного сопротивления крылового профиля $C_{x\text{ пр}}$ от числа R и от обобщённого параметра $\bar{c}_* = (\bar{c} + 0,17\bar{f}) \cdot 100$.

метрического параметра, учитывающего толщину и кривизну профиля:

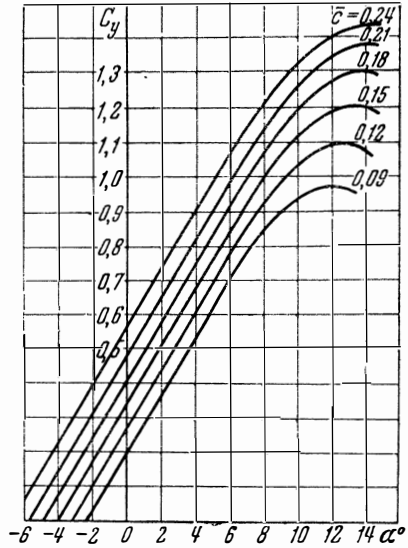
$$c_* = (c + 0,17\bar{f})100.$$

Перейдём к вопросу о влиянии вязкости на подъёмную силу. Типичная экспериментальная кривая $C_y(\alpha)$ профиля изображена на фиг. 191. На фиг. 192 представлены кривые $C_y(\alpha)$ для серии винтовых профилей различной толщины.

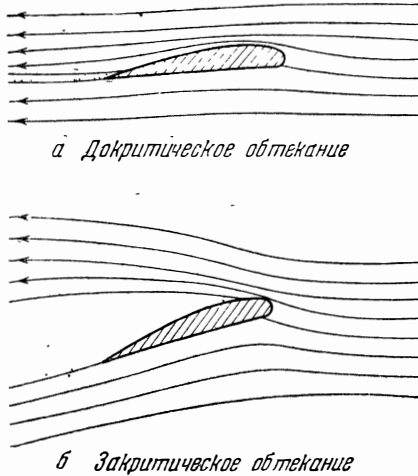
В начале экспериментальной кривой $C_y(\alpha)$ имеется значительный прямолинейный участок, как это получалось и в потенциальном обтекании; при критическом значении угла атаки $\alpha_{кр}$ коэффициент подъёмной силы достигает максимума ($C_y = C_{y\text{ max}}$), после чего наблюдается падение величины C_y с увеличением угла атаки. Резкое отклонение зависимости $C_y(\alpha)$ от линейной при больших углах атаки вызывается отрывом пограничного слоя, который с увеличением угла атаки распространяется на всё большую часть верхней поверхности профиля (фиг. 193).



Фиг. 191. Экспериментальная кривая $C_y(\alpha)$ для единичного профиля.



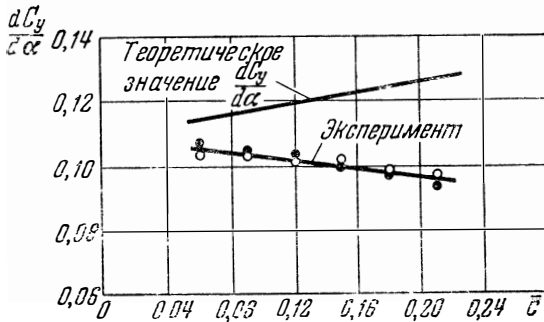
Фиг. 192. Зависимость коэффициента подъемной силы от угла атаки для серии винтовых профилей.



Фиг. 193. Схема обтекания профиля при малых (а) и закритических (б) углах атаки.

Прямолинейная часть характеристики, определяемая двумя параметрами: углом нулевой подъёмной силы α_0 и наклоном прямой по отношению к оси абсцисс, т. е. величиной $\frac{dC_y}{d\alpha}$, зависит главным образом от основных геометрических характеристик профиля, т. е. величин \bar{f} и c .

Экспериментальные значения $\frac{dC_y}{d\alpha}$ получаются меньше вычисленных по теории потенциального обтекания. На фиг. 194 представлен график величины $\frac{dC_y}{d\alpha}$, полученной из эксперимента, и



Фиг. 194. Зависимость величины $\frac{dC_y}{d\alpha}$ от относительной толщины профиля.

той же величины, вычисленной теоретически, для профиля *NACA 22* в зависимости от относительной толщины профиля (α измеряется в градусах). Чем толще профиль, тем сильнее различие между данными эксперимента и теории. Для обычных крыловых профилей можно приближённо принять:

$$\frac{dC_y}{d\alpha} \approx 0,1,$$

где α выражен в градусах. Истинное значение угла нулевой подъёмной силы всегда меньше теоретического. В частности, для теоретических профилей Жуковского по данным расчёта

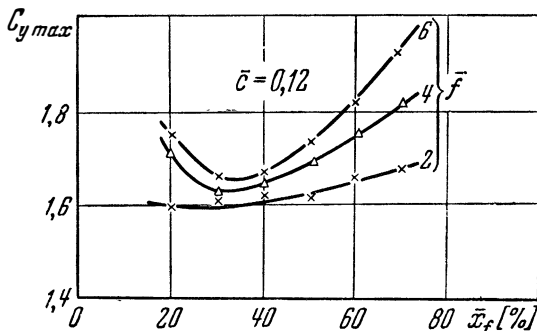
$$\left| \frac{\alpha_0^0}{\bar{f}^0 / c_0} \right| = 1,15;$$

по опытным же данным, которые относятся как к профилям Жуковского, так и к обычным крыловым профилям,

$$\left| \frac{\alpha_0^0}{\bar{f}^0 / c_0} \right| = 0,9 \div 1,0.$$

Меньшие значения соответствуют профилям, у которых место максимальной кривизны расположено ближе к носу. Величина $C_{y \max}$ в сильной мере зависит от значения числа R и степени турбулентности набегающего потока. На основании обработки большого числа экспериментов можно утверждать следующее¹⁾:

1) Для профилей тонких ($\bar{c} \leq 4\%$) и средней толщины ($\bar{c} \leq 12\%$) с малой вогнутостью ($\bar{f} \leq 3\%$) увеличение числа R приводит к возрастанию $C_{y \max}$. Аналогичное влияние оказывает увеличение турбулентности при постоянном значении числа R .



Фиг. 195. Зависимость максимального значения коэффициента подъемной силы $C_{y \max}$ от \bar{x}_f для профиля с относительной толщиной $\bar{c} = 0,12$ при разных значениях кривизны профиля $\bar{f}\%$.

2) Для профилей средней толщины и средней вогнутости ($\bar{f} \geq 6\%$) величина $C_{y \max}$ слабо изменяется с изменением значения R при малой турбулентности потока. При большой турбулентности кривая $C_{y \max}(R)$ поднимается вверх.

3) Для толстых профилей ($\bar{c} > 12\%$) с большой вогнутостью ($\bar{f} > 6\%$) возрастание числа R , как и увеличение турбулентности, сопровождается уменьшением $C_{y \max}$.

Значительное влияние на величину $C_{y \max}$ оказывают геометрические параметры \bar{x}_f и \bar{x}_c и форма носика профиля. На фиг. 195 представлены кривые $C_{y \max}(\bar{x}_f)$ для профиля 12% толщины при разных значениях $\bar{f}\%$.

Утолщение носика профиля вызывает сначала некоторое возрастание $C_{y \max}$, а затем резкое его падение. Заострение носика приводит к выглаживанию кривой в окрестности $C_{y \max}$ при некотором снижении величины последнего.

¹⁾ Справочник авиаконструктора, ЦАГИ, М., 1937.

§ 4. Обтекание крыла дозвуковым потоком газа

При малых значениях скорости газового потока ($M < 0,3-0,5$) величина скорости не сказывается на безразмерной картине распределения давления, т. е. сжимаемость газа не влияет на характер обтекания профиля. При более высоких значениях скорости набегающего потока увеличение скорости приводит к изменению эпюры давления, причём большие разрежения растут быстрее, чем малые, однако характер кривой давления в этой области остаётся тем же.

Увеличению разрежения соответствует рост местных значений скорости на профиле; в точке минимального давления p_{\min} скорость достигает максимального значения. При некотором значении числа M набегающего потока минимальное давление становится критическим¹⁾:

$$p_{\min} = p_{кр} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} p_0,$$

где p_0 есть полное давление набегающего потока; в точке $p_{кр}$ скорость потока равна местной скорости звука

$$M = 1.$$

Число M набегающего потока, при котором где-либо на профиле возникает звуковая скорость, называется критическим: $M_{кр}$. При дальнейшем возрастании числа M набегающего потока, т. е. при

$$M_n > M_{кр},$$

около поверхности крыла возникает зона течения, где имеются сверхзвуковые скорости, в связи с чем течение приобретает новые качества; величина $M_{кр}$ является границей двух основных режимов обтекания профиля при дозвуковой скорости набегающего потока: докритического ($M_n < M_{кр}$) и закритического ($M_n > M_{кр}$).

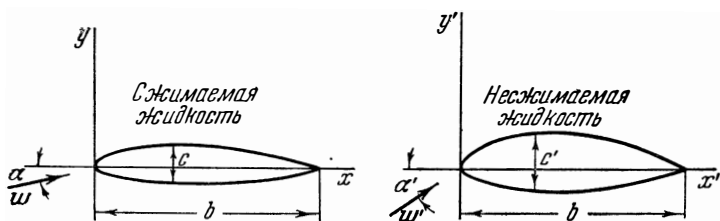
Для докритического режима характерно отсутствие сверхзвуковых скоростей во всей области течения. Анализ уравнений газовой динамики позволил Л. Прандтлю дать в случае слабо изогнутых и тонких профилей приближённый метод учёта сжимаемости для докритического режима. Этот метод заключается в том, что вместо рассмотрения обтекания газом заданного профиля рассматривается обтекание несжимаемой жидкостью некоторого эквивалентного профиля, полученного деформацией заданного профиля и всей области течения путём увеличения всех

¹⁾ Настоящее значение p_{\min} можно получить из формулы (68) главы I, полагая в этой формуле $M=1$.

поперечных размеров в $\frac{1}{\sqrt{1-M^2}}$ раз (фиг. 196)¹⁾. Деформация профиля оказывается столь незначительной, что для определения коэффициента подъёмной силы C_y достаточно учесть изменение только угла атаки, который в эквивалентном течении несжимаемой жидкости получается больше в $\frac{1}{\sqrt{1-M^2}}$ раз:

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\sqrt{1-M^2}}, \quad (40)$$

где α —фактический угол атаки в газовом течении, α' —угол атаки в эквивалентном течении несжимаемой жидкости. При



Фиг. 196. Схема перехода от профиля в потоке сжимаемого газа к эквивалентному профилю в несжимаемой жидкости.

этом предполагается, что оба угла атаки достаточно малы, и отсчёт для удобства ведут от направления нулевой подъёмной силы. Очевидно, что угол нулевой подъёмной силы у симметричного профиля всегда равен нулю, т. е. не зависит от скорости набегающего потока и от числа M набегающего потока; с достаточной для практики точностью можно считать, что величина угла нулевой подъёмной силы у малоизогнутых авиационных профилей не зависит от значения числа M . В газовом течении и в эквивалентном течении несжимаемой жидкости (при соблюдении условия $M_n < M_{кр}$) значения коэффициента подъёмной силы должны быть одинаковы:

$$C_y = C'_y,$$

но так как при отсчёте угла атаки от направления нулевой подъёмной силы

$$C_y = \left(\frac{dC_y}{d\alpha} \right) \cdot \alpha,$$

$$C'_y = \left(\frac{dC_y}{d\alpha} \right)' \cdot \alpha',$$

¹⁾ См. Фабрикант Н. Я., Аэродинамика, ч. I, Гостехиздат, М., 1949.

то с учётом (40) получаем:

$$\left(\frac{dC_y}{d\alpha}\right) = \frac{\left(\frac{dC_y}{d\alpha}\right)'}{\sqrt{1-M^2}}. \quad (41)$$

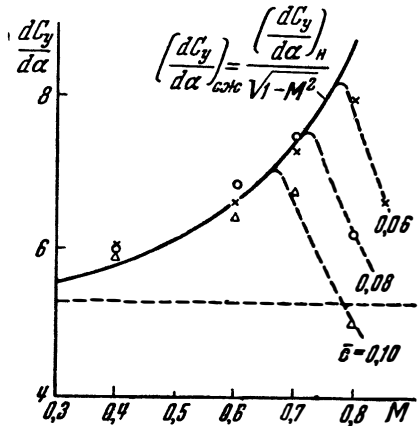
Отсюда вытекает, что при одинаковых углах атаки в газе и в несжимаемой жидкости справедливо соотношение

$$\frac{C_y}{C_y'} = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \quad \text{или} \quad C_y = C_y' \frac{1}{\sqrt{1-M^2}}.$$

Следовательно, для получения величины C_y при заданных значениях числа M набегающего потока и угла атаки α достаточно коэффициент подъёмной силы, взятый из продувок данного профиля на малых скоростях при том же угле атаки, помножить на величину $\frac{1}{\sqrt{1-M^2}}$.

На фиг. 197 построена кривая, соответствующая уравнению (41), и нанесены экспериментальные точки для крыльев разной относительной толщины (δ — в радианах). Эксперимент¹⁾ даёт хорошее совпадение с теоретической кривой вплоть до критического значения числа M , тем большего, чем тоньше профиль. При дальнейшем возрастании числа M обтекание становится закритическим и наблюдается резкое падение величины

$\frac{dC_y}{d\alpha}$. Таким образом, для учёта суммарного влияния сжимаемости на подъёмную силу профиля в докритической области можно с достаточной для практики точностью пользоваться формулами приближённой теории. Существует и более точная теория докритического обтекания изолированного профиля плоскопараллельным потенциальным потоком газа, разработанная С. А. Христиановичем в 1939 г.²⁾ В основу этой теории положены результаты, полученные С. А. Чаплыгиным ещё в 1902 г. в его знаменитой работе «О газовых струях», где доказана возможность сведения задачи течения газа к некоторому течению несжимаемой



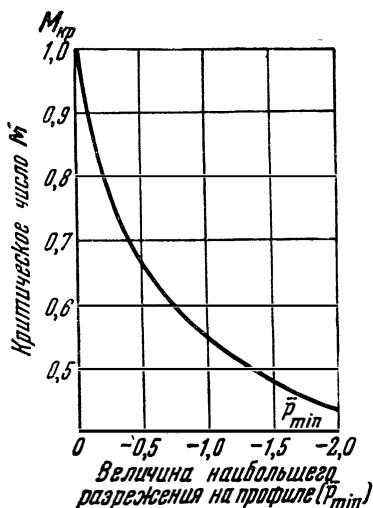
Фиг. 197. Влияние числа M на величину $\frac{dC_y}{d\alpha}$ для крылового профиля (сплошная линия — теория, кружки, крестики, треугольники — эксперимент).

¹⁾ Справочник авиаконструктора, ЦАГИ, М., 1937.

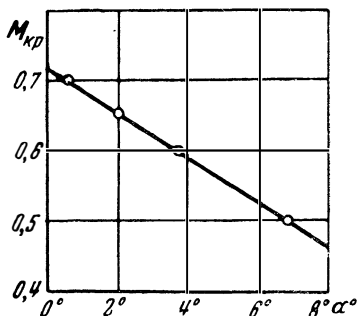
²⁾ Христианович С. А., Обтекание тел газом при больших дозвуковых скоростях. Труды ЦАГИ, вып. 481, М., 1940.

жидкости. Теория С. А. Христиановича позволяет определить не только значения C_y , но и распределение давления по профилю в функции от числа M набегающего потока. Располагая эпюрой давления, полученной из продувки профиля на малых скоростях, можно по методу С. А. Христиановича найти эпюру давления и скорости для любой докритической скорости и тем самым определить значение $M_{кр}$ для этого профиля.

В работе С. А. Христиановича вычислена приближённая универсальная зависимость величины $M_{кр}$ от значения \bar{p}_{min} , соответствующего



Фиг. 198. Зависимость критического числа M от минимального давления на профиле \bar{p}_{min} (по С. А. Христиановичу).



Фиг. 199. Зависимость критического числа M для симметричного профиля от угла атаки.

обтеканию профиля несжимаемой жидкостью (фиг. 198); эта зависимость, хорошо подтверждаемая данными эксперимента, позволяет определять величину $M_{кр}$ по эпюре давлений, снятой при малых скоростях.

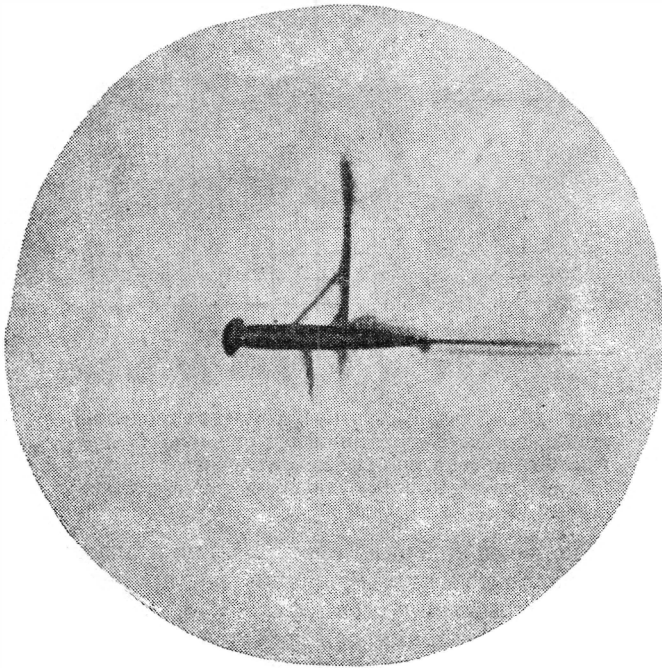
Заметим, что наряду с теорией С. А. Христиановича имеются различные приближённые методы, позволяющие оценить влияние сжимаемости на распределение давления по профилю¹⁾.

Значение $M_{кр}$ зависит от тех же факторов, что и величина \bar{p}_{min} , т. е. от конфигурации профиля и угла атаки. Тонким и слабо изогнутым профилям соответствуют большие значения $M_{кр}$. Как установлено на основании экспериментов²⁾ с обычными авиационными профилями, уменьшение толщины профиля на 5%

¹⁾ Н у ж и н С. Г., Об обтекании тел газом при больших дозвуковых скоростях. Прикладная математика и механика, 1945, т. 10, вып. 5—6.

²⁾ Л е в и н с о н Я. И., Аэродинамика больших скоростей, Оборонгиз, 1950.

приводит к повышению $M_{кр}$ на величину от 0,03 до 0,05, а уменьшение кривизны $\bar{f} = \frac{f}{b}$ от 5% до нуля вызывает повышение $M_{кр}$ примерно на величину от 0,1 до 0,12. Выгодно располагать места наибольшей кривизны и наибольшей толщины на расстоянии 0,4—0,5 хорды от носика профиля; при этом получаются максимальные значения $M_{кр}$. Существенное влияние на величину $M_{кр}$ имеет форма носика профиля. Наличие острого носика при большом угле атаки приводит к пикообразной форме кривой разрежения и резко снижает величину $M_{кр}$. Увеличение угла атаки приводит к увеличению разрежения на верхней поверхности профиля и, следовательно, к уменьшению величины

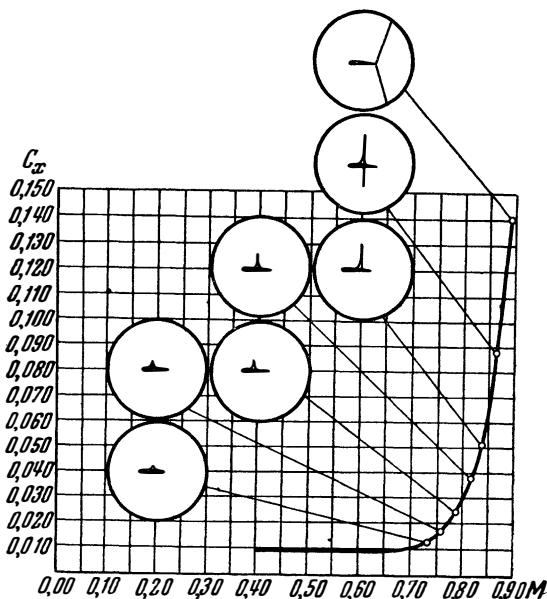


Фиг. 200. Картина околозвукового обтекания единичного профиля.

$M_{кр}$; это обстоятельство иллюстрируется результатами продувки симметричного профиля 12% толщины с расположением наибольшей толщины на расстоянии 0,3 хорды от носика (фиг. 199): при нулевом угле атаки значение $M_{кр}$ превышает 0,7, при угле атаки $\alpha = 8^\circ$ значение $M_{кр}$ падает до 0,46.

При $M_n > M_{кр}$, как указывалось, образуется зона сверхзвуковой скорости, которая завершается скачками уплотнения. Это хорошо видно на фиг. 200, где представлена фотография соот-

ветствующей картины обтекания авиационного профиля, полученная В. С. Татаренчиком¹⁾. За системой скачков на фиг. 200 виден отрыв потока от крыла. Наличие скачков и отрыва приводит к возрастанию лобового сопротивления профиля (фиг. 201),



Фиг. 201. Зависимость коэффициента сопротивления симметричного профиля от числа M набегающего потока при нулевом угле атаки (в кружках изображены соответствующие схемы скачков).

уменьшению подъёмной силы (фиг. 202) и резкому изменению в характере распределения давления по профилю; последнее обстоятельство иллюстрируется фиг. 203, где значительная деформация кривой давления наблюдается, начиная с $M = 0,64$.

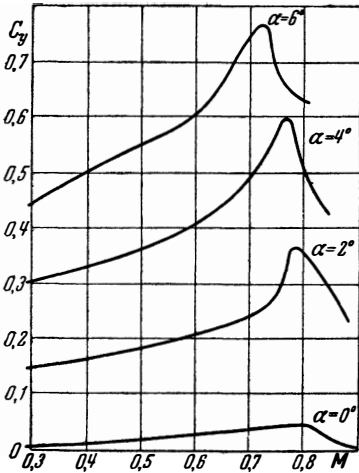
Заметим, что число M_x , при котором начинается резкое возрастание C_x , и число M_y , соответствующее началу падения C_y , неодинаковы; это объясняется различной природой влияния скачков уплотнения на лобовое сопротивление и подъёмную силу. Очевидно, что оба эти числа больше критического:

$$M_x > M_{кр},$$

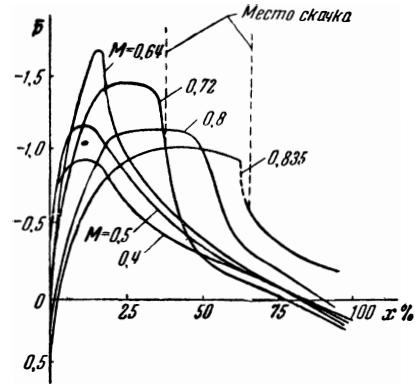
$$M_y > M_{кр}.$$

¹⁾ См. книгу Я. И. Левинсона, указанную в предыдущей ссылке.

При увеличении числа M_H в набегающем потоке (в области $M_H > M_{HP}$) сверхзвуковая зона расширяется и система скачков уплотнения продвигается к задней кромке профиля. При этом сопротивление профиля (фиг. 201)



Фиг. 202. Зависимость коэффициента подъёмной силы профиля от числа M при различных углах атаки.



Фиг. 203. Эпюры давления на верхней поверхности авиационного профиля при различных значениях числа M (на большом угле атаки).

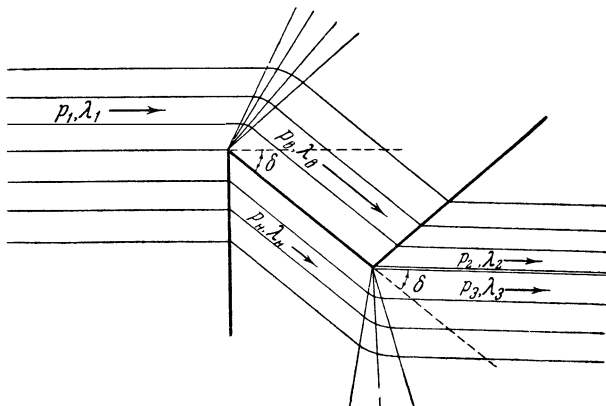
круто растёт. При $M_H > 1$ образуется сверхзвуковое обтекание профиля, на котором мы остановимся ниже.

§ 5. Сверхзвуковое обтекание крыла

Сначала рассмотрим плоскую неподвижную пластинку, на которую набегают плоский равномерный сверхзвуковой поток газа. Пусть пластинка наклонена под углом δ к направлению набегающего потока (фиг. 204). Обтекание такой пластинки можно полностью рассчитать, пользуясь теорией косых скачков уплотнения и теорией обтекания внешнего тупого угла. При этом считают, что поток за пластинкой снова принимает направление набегающего потока. Обозначим коэффициент скорости потока, набегающего на пластинку, через λ_1 , давление в этом потоке — через p_1 . Коэффициент скорости потока, текущего вдоль верхней стороны пластинки, обозначим через λ_B , а давление в этом потоке — через p_B . Для потока, сбегającego с верхней стороны пластинки, обозначим эти параметры через λ_2 и p_2 . Для потока, текущего вдоль нижней стороны пластинки, соответствующие параметры обозначим через λ_H , p_H и λ_3 , p_3 .

При обтекании верхней стороны пластинки у передней кромки поток поворачивается на угол δ и становится параллельным направлению пластинки, т. е. возникает картина, совершенно

аналогичная обтеканию внешнего тупого угла. Величины λ_B и p_B можно определить по формулам, приведённым в § 3 главы IV. Для расчёта удобно пользоваться таблицей приложения I в конце книги. У задней кромки поток должен снова повернуться на угол δ в обратном направлении, т. е. возникает косой скачок уплотнения, так как получается картина, аналогичная обтеканию клина с углом δ при вершине. Величины λ_2 и p_2 определяются по формулам для косого скачка уплотнения, приведённым в третьей главе. Ясно, что $\lambda_B > \lambda_1$, $p_B < p_1$ и $\lambda_2 < \lambda_B$, $p_2 > p_B$.



Фиг. 204. Схема сверхзвукового обтекания пластинки.

При обтекании нижней стороны пластинки у передней кромки образуется косой скачок уплотнения, пройдя через который поток повернётся на угол δ . Величины λ_n и p_n можно определить по формулам для косого скачка уплотнения. У задней кромки поток повернётся на угол δ в обратном направлении. Величины λ_3 и p_3 определяются по формулам обтекания внешнего тупого угла. Здесь $\lambda_n < \lambda_1$, $p_n > p_1$ и $\lambda_3 > \lambda_n$, $p_3 < p_n$.

Давление в потоке, сбегавшем с верхней стороны пластинки, должно быть равно давлению в потоке, сбегавшем с нижней стороны:

$$p_2 = p_3.$$

Скорости этих двух потоков могут быть различными по величине, но направление их одинаково. Таким образом, λ_2 может быть не равно λ_3 ¹⁾.

¹⁾ Более точное исследование показывает, что направление потока, сбегавшего с пластинки, не совпадает с направлением набегающего потока. Это направление определяется из условия равенства давлений и одинаковости направления скоростей в потоках, сбегавших с верхней и нижней сторон пластинки. Однако отклонение потока пластинкой очень невелико и при $M_1 < 3$ не превышает 1° , так что в практических расчётах можно пользоваться изложенной здесь схемой.

Сила R , действующая на пластинку, равна $(p_n - p_v)F$, где F — площадь пластинки. Поэтому подъёмная сила плоской пластинки определяется формулой

$$R_y = (p_n - p_v) F \cos \delta,$$

а лобовое сопротивление — формулой

$$R_x = (p_n - p_v) F \sin \delta.$$

Изложенная схема расчёта обтекания плоской пластинки становится непригодной в следующих двух случаях.

Во-первых, если угол атаки $\delta > \delta_{\text{пр}}$ для заданного числа M набегающего потока; в этом случае при обтекании верхней стороны пластинки происходит срыв потока. Этот случай имеет малое практическое значение, так как для чисел $M < 10$ углы атаки до 25° меньше предельного угла. Только при очень больших числах M практически встречающиеся углы атаки могут оказаться большими, чем $\delta_{\text{пр}}$.

Во-вторых, если угол атаки δ окажется больше, чем максимальный угол отклонения потока в косом скачке уплотнения ω_{max} для заданного числа M набегающего потока (глава III, фиг. 36); при $\delta > \omega_{\text{max}}$ перед нижней стороной пластинки образуется отделившийся скачок уплотнения с криволинейным фронтом. Расчёт такого течения является очень сложной задачей. Случай, когда $\delta > \omega_{\text{max}}$, может иметь место при не очень больших числах M , например для $M = 1,5$ при $\delta > 12^\circ$.

Важно отметить, что при $M < 6,4$ всегда $\omega_{\text{max}} < \delta_{\text{пр}}$, и поэтому причиной неприменимости изложенной схемы расчёта является образование перед пластинкой отделившегося криволинейного скачка уплотнения, а при очень больших числах M , наоборот, $\delta_{\text{пр}} < \omega_{\text{max}}$, и причиной неприменимости расчётной схемы является срыв потока при обтекании верхней стороны пластинки (см. фиг. 55).

Пример. Определим коэффициенты подъёмной силы и лобового сопротивления плоской пластинки, обтекаемой под углом атаки $\delta = 10^\circ$ сверхзвуковым потоком воздуха при числе $M = 2,5$.

Относя подъёмную силу и сопротивление к скоростному напору, получим:

$$C_y = \frac{R_y}{\frac{\rho_1 \omega_1^2}{2} F} = \frac{p_n - p_v}{\frac{\rho_1 \omega_1^2}{2}} \cos \delta,$$

$$C_x = \frac{R_x}{\frac{\rho_1 \omega_1^2}{2} F} = \frac{p_n - p_v}{\frac{\rho_1 \omega_1^2}{2}} \sin \delta.$$

Эти формулы удобно преобразовать следующим образом. Выразим плотность через давление и температуру из уравнения состояния

$$\rho_1 = \frac{p_1}{gRT_1}.$$

Скорость выразим через число M и скорость звука

$$\omega_1 = M_1 \cdot a_1$$

или, так как

$$a_1 = \sqrt{kgRT_1},$$

то

$$\omega_1 = M_1 \sqrt{kgRT_1}.$$

Подставляя выражения для ρ_1 и ω_1 в формулы для C_y и C_x , найдём:

$$C_y = \frac{2}{kM_1^2} \left(\frac{p_H}{p_1} - \frac{p_B}{p_1} \right) \cos \delta$$

$$C_x = \frac{2}{kM_1^2} \left(\frac{p_H}{p_1} - \frac{p_B}{p_1} \right) \sin \delta.$$

Из таблицы приложения I в конце книги находим, что числу $M_1 = 2,5$ отвечает фиктивный угол поворота потока $\delta_1 \cong 39^\circ$. Следовательно, после поворота потока при обтекании верхней стороны пластинки угол поворота станет равным $\delta_2 = \delta_1 + \delta = 49^\circ$. Значению $\delta_1 = 39^\circ$ отвечает отношение давлений $\frac{p_1}{p_0} = 0,059$, значению

$\delta_2 = 49^\circ$ — отношение давлений $\frac{p_B}{p_0} = 0,029$. Отсюда получаем:

$$\frac{p_B}{p_1} = \frac{0,029}{0,059} = 0,49.$$

При обтекании нижней стороны пластинки поток проходит через косой скачок уплотнения. Следовательно, статические давления перед и за скачком связаны соотношением

$$\frac{p_H}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 \sin^2 \alpha - \frac{k-1}{k+1}.$$

По графику на фиг. 36 (гл. III) находим, что углу $\delta = 10^\circ$ и числу $M_1 = 2,5$ соответствует угол наклона скачка $\alpha = 32^\circ$. Таким образом, принимая для воздуха $k = 1,4$, получим:

$$\frac{p_H}{p_1} = \frac{7}{6} \cdot 2,5^2 \cdot \sin^2 32^\circ - \frac{1}{6} = 1,88.$$

Подставляя найденные значения $\frac{P_B}{P_1}$ и $\frac{P_H}{P_1}$ в формулы для C_y и C_x , имеем:

$$C_y = \frac{2}{1,4 \cdot 2,5^2} (1,88 - 0,49) \cos 10^\circ = 0,316,$$

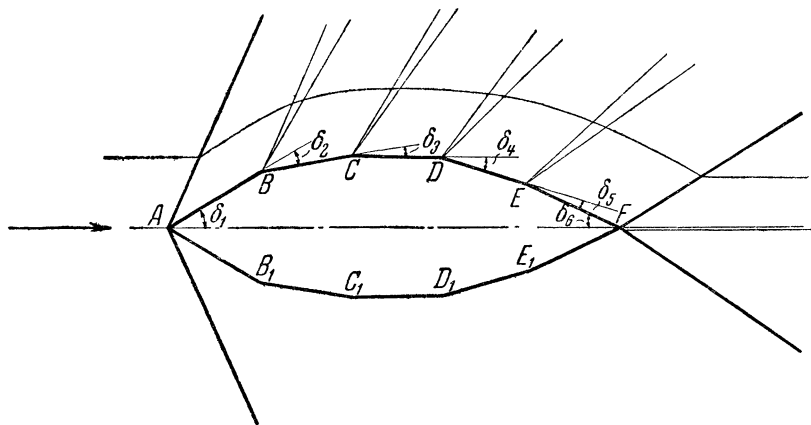
$$C_x = \frac{2}{1,4 \cdot 2,5^2} (1,88 - 0,49) \sin 10^\circ = 0,056.$$

Для малых углов атаки существуют приближённые формулы для расчёта коэффициентов сопротивления и подъёмной силы плоской пластинки. Мы приведём их здесь без вывода (δ берётся в радианах):

$$C_x = \frac{4\delta^2}{\sqrt{M^2 - 1}},$$

$$C_y = \frac{4\delta}{\sqrt{M^2 - 1}}.$$

При углах атаки $\delta < 15^\circ$ расчёт по этим формулам даёт удовлетворительное совпадение с более точным расчётом, выполнен-



Фиг. 205. Схема сверхзвукового симметричного обтекания профиля, составленного из прямолинейных отрезков.

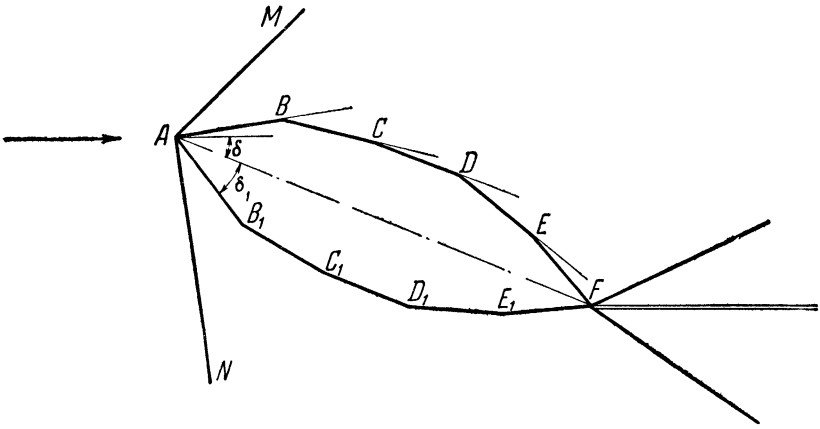
ным по изложенному в этом параграфе методу. В нашем примере расчёт по приближённым формулам даёт следующие значения:

$$C_y = 0,306, \quad C_x = 0,0535.$$

Теория косых скачков уплотнения и теория обтекания внешнего тупого угла позволяют рассчитать обтекание любого профиля, контур которого составлен из прямолинейных отрезков.

Рассмотрим, например, изображённый на фиг. 205 симметричный профиль под нулевым углом атаки. В силу симметрии

достаточно рассмотреть лишь обтекание верхней стороны профиля. У передней кромки профиля в точке A возникает косой скачок уплотнения, так как поток набегаёт на клин с углом $2\delta_1$ при вершине. Пройдя через этот косой скачок, поток поворачивается на угол δ_1 и становится параллельным отрезку AB . Статическое давление и скорость в потоке вдоль отрезка AB можно определить по формулам для косого скачка уплотнения. Далее поток обтекает последовательность внешних тупых углов ABC , BCE , CDE и т. д. Обтекая угол ABC , поток поворачивается на угол δ_2 и становится параллельным отрезку BC ; обтекая угол BCE , поток поворачивается на угол δ_3 и становится парал-



Фиг. 206. Схема сверхзвукового несимметричного обтекания профиля, составленного из прямолинейных отрезков.

лельным отрезку CD . Далее поток последовательно поворачивается на углы δ_4 и δ_5 , становясь каждый раз параллельным соответствующему прямолинейному отрезку профиля. Давление и скорость в потоках вдоль каждого из прямолинейных отрезков профиля, начиная с отрезка BC , можно рассчитать, используя теорию обтекания внешнего тупого угла. У задней кромки профиля в точке F снова образуется косой скачок уплотнения, пройдя через который поток отклоняется на угол δ_6 в обратном направлении и приобретает направление, приблизительно параллельное набегающему потоку.

Нетрудно рассчитать обтекание такого же профиля под ненулевым углом атаки. Пусть, например, профиль наклонён под углом δ к направлению набегающего потока (фиг. 206). Тогда при обтекании верхней стороны профиля поток набегаёт на клин с углом $\delta_1 - \delta$, а при обтекании нижней стороны — на клин с углом $\delta_1 + \delta$. У передней кромки в точке A образуется два

косых скачка уплотнения — AM и AN . Пройдя через скачок AM при обтекании верхней стороны профиля, поток станет параллельным отрезку AB . Пройдя через скачок AN при обтекании нижней стороны, поток становится параллельным отрезку AB_1 . Далее вдоль верхней стороны поток обтекает последовательность внешних тупых углов ABC , BCD и т. д., а вдоль нижней стороны — последовательность тупых углов AB_1C_1 , $B_1C_1D_1$ и т. д. Давление и скорость в потоках вдоль отрезков AB и AB_1 определяются по формулам для косых скачков уплотнения, так как скорость набегающего потока задана, а углы поворота потока известны ($\delta_1 - \delta$ для верхней стороны и $\delta_1 + \delta$ — для нижней стороны). Давление и скорости вдоль остальных отрезков профиля определяются из теории обтекания внешнего тупого угла. У задней кромки профиля в точке F образуются снова два косых скачка уплотнения. За этими скачками поток, сбегающий как с верхней, так и с нижней стороны профиля, становится параллельным набегающему потоку. Зная давление на каждом из прямолинейных отрезков профиля на верхней и нижней сторонах его, можно определить коэффициенты подъёмной силы и лобового сопротивления для такого профиля.

Заметим, что изложенная схема расчёта обтекания сверхзвуковым потоком профиля, составленного из прямолинейных отрезков, применима лишь при таких углах атаки δ , при которых угол $\delta_1 + \delta$ остаётся меньше предельного угла отклонения ω_{\max} для заданной скорости набегающего потока. Если $\delta_1 + \delta > \omega_{\max}$, то перед профилем образуется отделившийся скачок уплотнения с криволинейным фронтом. Расчёт обтекания тела при наличии отделившегося криволинейного скачка уплотнения составляет, как уже указывалось, одну из труднейших задач газовой динамики.

Расчёт обтекания профиля рассматриваемой формы значительно осложняется также и в том случае, когда прямолинейная характеристика, выходящая из точки B (фиг. 205 и 206), встречает фронт косога скачка уплотнения и, «отразившись» от него, снова попадает на профиль. Такой случай мы здесь рассматривать не будем.

Ввиду сложности задачи сверхзвукового обтекания криволинейного профиля мы на ней не останавливаемся.

В заключение на фиг. 207 приведены оптические фотографии сверхзвукового обтекания в аэродинамической трубе ромбовидных профилей разной толщины при нулевом угле атаки. На каждой из этих фотографий отчётливо видны скачки уплотнения у носика профиля, пучки характеристик у верхнего и нижнего выпуклых углов профиля и характеристики, отходящие от неровностей на стенках аэродинамической трубы, по наклону которых можно судить о скорости потока в трубе.

§ 6. Обтекание решётки крыльев потоком несжимаемой жидкости

Величина циркуляции для профиля, установленного в решётке, обтекаемой идеальной несжимаемой жидкостью, определяется из того же выражения, что и для единичного профиля, но только вместо скорости набегающего потока, как это делалось в случае изолированного крыла, следует подставить геометрическую полусумму скоростей перед и за решёткой w_m , т. е. скорость бесциркуляционной части течения; угол атаки α_m определяется как угол между хордой профиля и геометрической полусуммой w_m скоростей перед и за решёткой (фиг. 158).

Таким образом, мы можем написать:

$$\Gamma_p = m_p \cdot b \cdot w_m \cdot \sin(\alpha_m - \alpha_{0p}),$$

где m_p — коэффициент пропорциональности, зависящий от формы профиля и параметров решётки, α_{0p} — угол между направлением нулевой подъёмной силы и хордой профиля.

Подставляя это значение циркуляции в (32), получим:

$$C_{yp} = 2m_p \cdot \sin(\alpha_m - \alpha_{0p}).$$

В случаях малых углов, обычно применяемых на практике, можно положить:

$$\sin(\alpha_m - \alpha_{0p}) \cong \alpha_m - \alpha_{0p},$$

и следовательно,

$$C_{yp} = 2m_p (\alpha_m - \alpha_{0p}).$$

Дифференцируя последнее выражение, имеем:

$$\frac{dC_{yp}}{d\alpha} = 2m_p,$$

т. е.

$$C_{yp} = \frac{dC_{yp}}{d\alpha} (\alpha_m - \alpha_{0p})$$

или

$$C_{yp} = \frac{dC_y}{d\alpha} \alpha_{Ap},$$

где

$$\alpha_{Ap} = \alpha_m - \alpha_{0p}.$$

Заметим, что если в случае изолированного крыла величина $\frac{dC_y}{d\alpha}$ и угол нулевой подъёмной силы α_0 зависят только от формы профиля, то в случае решётки эти величины зависят, кроме

того, и от параметров решётки: густоты $\tau = \frac{b}{t}$ и установочного угла β_r .

Очевидно, что при стремлении шага решётки к бесконечности ($\tau \rightarrow 0$) значения m_p и α_{0p} стремятся соответственно к значениям m_n и α_0 изолированного профиля. Изменение величины $\frac{dC_y}{d\alpha}$ и угла бесциркуляционного обтекания α_0 при переходе от изолированного профиля к решётке, составленной из таких же профилей, можно оценить с помощью параметров κ и δ , полагая

$$\kappa = \frac{\left(\frac{dC_y}{d\alpha}\right)_p}{\left(\frac{dC_y}{d\alpha}\right)_n} = \frac{m_p}{m_n} \quad (42)$$

и

$$\delta = \alpha_{0p} - \alpha_{0n}, \quad (43)$$

где индекс «р» соответствует профилю в решётке, а индекс «и» — профилю изолированному (единичному). В дальнейшем для простоты записи мы индекс «и» будем опускать.

Величины κ и δ являются функциями параметров решётки: густоты и геометрического угла установки; при стремлении τ к нулю κ стремится к единице, а δ — к нулю. Нахождение этих функций в аналитическом виде для произвольных профилей в широком диапазоне густот является чрезвычайно сложной математической задачей. В настоящее время известно точное решение только для решёток, составленных из плоских пластин.

Приближённые выражения для κ и δ в виде явных функций от геометрических параметров решётки для произвольного профиля были впервые даны Н. Е. Кочиным¹⁾, но лишь для малых густот, т. е. редких решёток. Попытка распространить это решение на случай обычных практических густот приводит к очень сложным выкладкам.

В настоящее время в СССР разработаны теоретические методы построения обтекания решётки профилей произвольной формы при любых значениях параметров решётки, позволяющие получить функции κ и δ для заданного профиля в численном виде²⁾. Эта задача может быть также решена методом электрогидродинамической аналогии (сокращённо ЭГДА), основанным на аналогии исходных дифференциальных уравнений электрического поля и потенциального потока несжимаемой жидкости;

¹⁾ Кочин Н. Е., Влияние шага решётки на её гидродинамические характеристики. Прикладная математика и механика, 1941, т. 5, вып. 2.

²⁾ См., например, Самойлович Г. С., Расчёт гидродинамических решёток. Прикладная математика и механика, т. XIV, вып. 2.

он позволяет с помощью соответствующих электрических измерений получить численное решение задачи потенциального обтекания произвольной решётки.

Впервые этот метод был применён к решению плоской задачи обтекания решётки идеальной несжимаемой жидкостью Л. А. Симоновым¹⁾.

Применение указанных громоздких методов является необходимым, если требуется определить распределение скорости и давления по профилю в решётке.

Для отыскания суммарных характеристик χ и δ можно подменить решётку заданных профилей решёткой теоретических профилей, имеющих те же значения относительной толщины, относительной кривизны, шага и установочного угла; расчёт же решётки, составленной из теоретических профилей, не представляет особого труда.

Известен, например, метод построения решётки теоретических профилей Э. Л. Блоха²⁾, полученный в результате обобщения на случай решётки преобразования С. А. Чаплыгина, предложенного последним для построения изолированного профиля.

Метод Э. Л. Блоха позволяет рассчитать величины χ и δ , характеризующие работу профиля в решётке, а также найти распределение скорости и давления по контуру профиля.

Предложенное Е. И. Умновым усовершенствование и упрощение расчётного метода Блоха позволяет построить серию графиков, в которых величины χ и δ представлены в функции толщины \bar{c} и кривизны \bar{f} профиля во всём диапазоне практически встречающихся значений густоты и установочного угла решётки³⁾.

Ввиду того, что практические значения угла атаки малы, можно для профиля в решётке (как это делалось и для единичного профиля) воспользоваться линейной зависимостью коэффициента подъёмной силы от угла атаки; при этом получаем следующее выражение для отношения коэффициентов подъёмной силы:

$$\frac{C_{yP}}{C_y} = \chi - \frac{\alpha^* - \alpha_0}{\alpha - \alpha_0} (\chi - 1) = \chi - \frac{\chi \delta}{\alpha - \alpha_0},$$

где α^* — угол, при котором прямые $C_y(\alpha)$ для решётки и единичного крыла пересекаются, т. е. при $\alpha = \alpha^*$:

$$C_{yP} = C_y.$$

1) См. его работу в научных записках Харьковского механико-машиностроительного института, т. VI, Харьков, 1940.

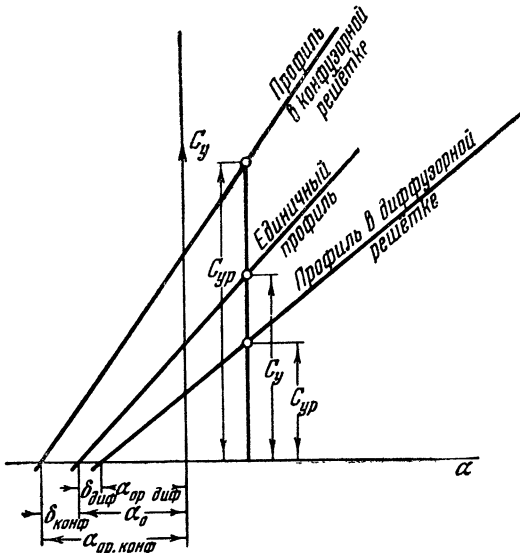
2) Блох Э. Л., Исследование плоской решётки, составленной из теоретических профилей конечной толщины. М., 1947 (Труды ЦАГИ, вып. 611).

3) Умно в Е. И., Потенциальное обтекание несжимаемой жидкостью решётки из теоретических профилей. Оборонгиз, 1952.

В случае $\delta = 0$

$$\frac{C_{yр}}{C_y} = \kappa.$$

Для большинства конфузорных решёток имеют место $\delta < 0$ и $\kappa > 1$, поэтому коэффициент подъёмной силы конфузорной решётки больше, чем у единичного профиля. В случае диффузорной решётки обычно $\delta > 0$ (фиг. 206), следовательно, в практическом диапазоне углов атаки при любом значении κ коэффициент подъёмной силы в диффузорной решётке меньше, чем у единичного профиля.



Фиг. 208. Зависимость $C_y(\alpha)$ для единичного профиля и профилей в конфузорной и диффузорной решётках.

Установим зависимость между углами входа и выхода и величинами m_p и $\alpha_{0р}$.

Из треугольника скорости (фиг. 166) имеем:

$$\text{ctg } \beta_m = \frac{\Gamma}{2l} + \omega_2 \cos \beta_2 = \frac{\Gamma}{2t\omega_m \sin \beta_m} + \text{ctg } \beta_2. \quad (44)$$

Если значение циркуляции выразить согласно (32), то первый член правой части выражения (44) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\Gamma}{2t\omega_m \sin \beta_m} = \frac{C_y \tau}{4 \sin \beta_m} = \frac{2m_p \sin \alpha_A}{4 \sin \beta_m} \tau.$$

На фиг. 161 имеем:

$$\alpha_A = \alpha_m - \alpha_{0p} = \beta_{0p} - \beta_m,$$

где β_{0p} есть угол между направлением нулевой подъёмной силы и фронтальной линией решётки; отсюда

$$\sin \alpha_A = \sin (\beta_{0p} - \beta_m) = \sin \beta_{0p} \cdot \cos \beta_m - \cos \beta_{0p} \cdot \sin \beta_m.$$

После элементарных преобразований получаем:

$$\frac{\Gamma}{2t\omega_m \cdot \sin \beta_m} = \frac{m_p \tau}{2} (\sin \beta_{0p} \cdot \operatorname{ctg} \beta_m - \cos \beta_{0p}).$$

Подставляя это выражение вместо первого члена в правую часть уравнения (44) и разрешая последнее относительно $\operatorname{ctg} \beta_m$, имеем:

$$\operatorname{ctg} \beta_m = \frac{\operatorname{ctg} \beta_2 - \frac{m_p \tau}{2} \cos \beta_{0p}}{1 - \frac{m_p \tau}{2} \sin \beta_{0p}}.$$

Сопоставляя данное выражение с (5), приходим к следующей зависимости между углами входа и выхода:

$$\operatorname{ctg} \beta_2 = A \operatorname{ctg} \beta_1 + B, \quad (45)$$

где A и B — постоянные для заданной решётки профилией величины:

$$A = \frac{1 - \frac{m_p}{2} \tau \sin \beta_{0p}}{1 + \frac{m_p}{2} \tau \sin \beta_{0p}}, \quad (46)$$

$$B = \frac{2 \frac{m_p}{2} \tau \cos \beta_{0p}}{1 + \frac{m_p}{2} \tau \sin \beta_{0p}}. \quad (47)$$

Здесь

$$2m_p = \left(\frac{dC_y}{d\alpha} \right)_p.$$

Таким образом, между котангенсами углов входа и выхода существует линейная зависимость, коэффициенты которой определяются значениями $\frac{dC_y}{d\alpha}$ и α_{0p} , или, что то же, \varkappa и δ .

Величина A с возрастанием густоты уменьшается, поэтому, начиная с некоторой густоты τ , первым членом в правой части выражения (45) можно пренебречь, т. е. при больших значениях τ угол выхода перестаёт зависеть от угла входа, становясь для данных значений параметров решётки постоянной величиной

$$\operatorname{ctg} \beta_2 \cong B = \operatorname{const};$$

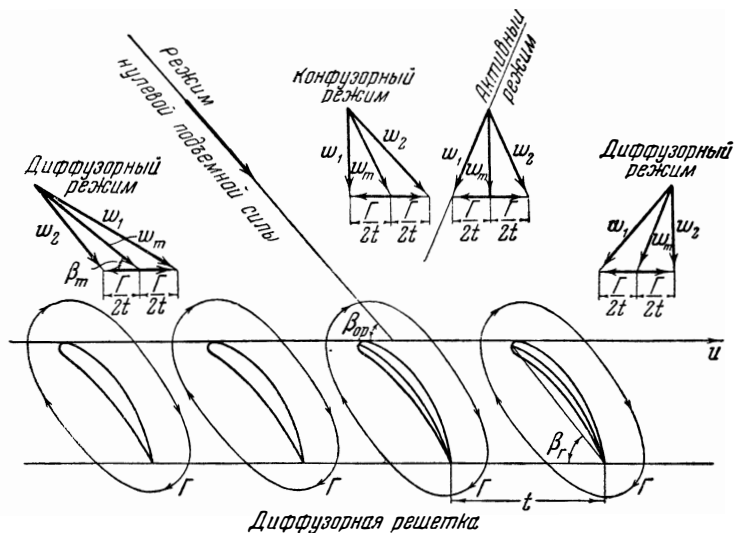
при этом течение на выходе определяется только выходной частью межлопаточного канала, т. е. не зависит от условий на входе. Если соблюдается условие постоянства угла выхода

$$\beta_2 = \text{const},$$

то направление потока на выходе совпадает с направлением нулевой подъёмной силы

$$\beta_2 = \beta_{0p},$$

так как при этом $\beta_1 = \beta_2$, т. е. поток в решётке не отклоняется.



Фиг. 209. Различные режимы обтекания диффузорной решётки.

Рассмотрим обтекание решётки в широком диапазоне изменений угла входа β_1 . Такая задача обычно возникает при исследовании нерасчётных условий работы колеса и направляющих аппаратов.

Обратимся сначала к решётке, для которой угол нулевой подъёмной силы меньше прямого (фиг. 209):

$$\beta_{0p} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Как видно из треугольника скорости, во всём диапазоне положительных аэродинамических углов атаки ($\alpha_A = \beta_{0p} - \beta_m > 0$) скорость выхода меньше скорости входа ($w_2 < w_1$), т. е. давление на выходе больше, чем на входе ($p_2 > p_1$). Такой режим обтекания решётки называют *диффузорным*.

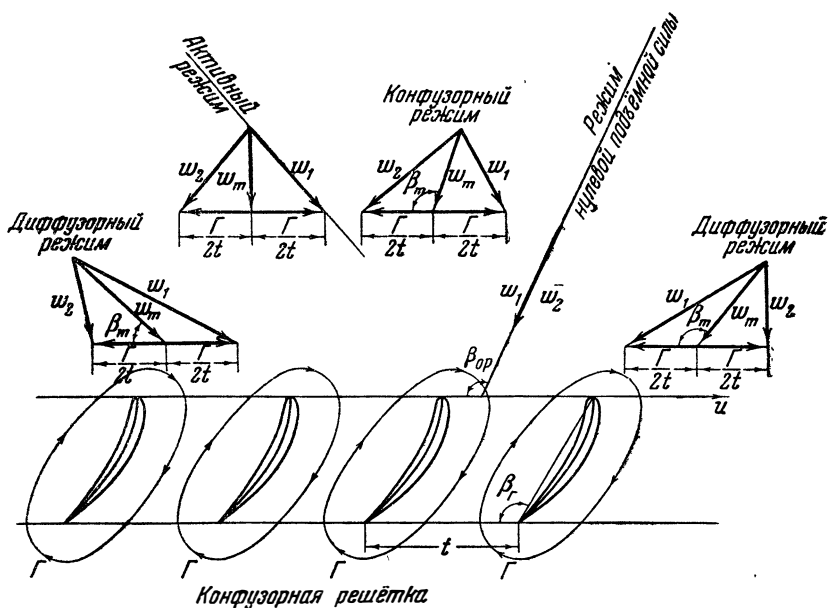
Увеличивая угол входа β_1 , мы пройдем через режим нулевой подъемной силы $\beta_m = \beta_1 = \beta_2$, при котором $w_1 = w_2$, $p_1 = p_2$. При дальнейшем увеличении угла β_1 , или, что то же, увеличении угла β_m , вновь возникает циркуляция, но уже противоположного направления (фиг. 209). В этой области отрицательных углов атаки

$$\beta_{0p} < \beta_m < \frac{\pi}{2},$$

т. е.

$$\beta_{0p} < \beta_1 < \beta_{1 \text{ акт}},$$

поток, проходящий через решётку, ускоряется, и давление па-



Фиг. 210. Различные режимы обтекания конфузорной решётки.

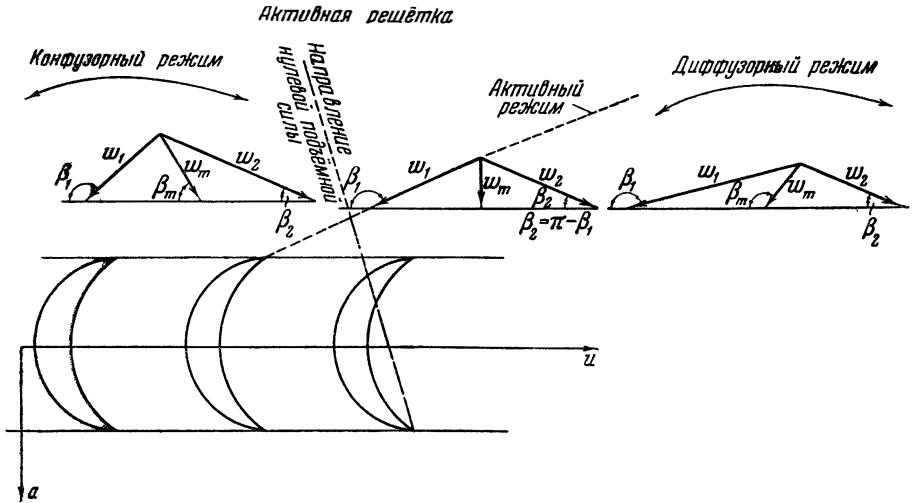
дает; такой режим называют *конфузорным*. При значении $\beta_m = \frac{\pi}{2}$ скорости выхода и входа равны ($w_2 = w_1$) и, следовательно, $p_1 = p_2$; этот режим обтекания решётки называют *активным*. При диапазоне углов входа

$$\beta_{1 \text{ акт}} < \beta_1 < \pi, \text{ т. е. } \frac{\pi}{2} < \beta_m < \pi,$$

снова имеет место диффузорный режим обтекания решётки. Аналогичный анализ режимов обтекания решётки можно провести

для случая $\beta_{0p} > \frac{\pi}{2}$ (фиг. 210) и для решётки с основным режимом $\beta_m = \frac{\pi}{2}$ (фиг. 211).

При основном режиме обтекания, на который рассчитывается решётка, профили находятся под положительными углами



Фиг. 211. Различные режимы обтекания активной решётки.

атаки ¹⁾; по характеру расчётного режима решётки делятся на:

1) диффузорные (фиг. 209), у которых

$$\beta_{0p} \leq \frac{\pi}{2};$$

2) конфузорные (фиг. 210), у которых

$$\beta_{0p} > \frac{\pi}{2};$$

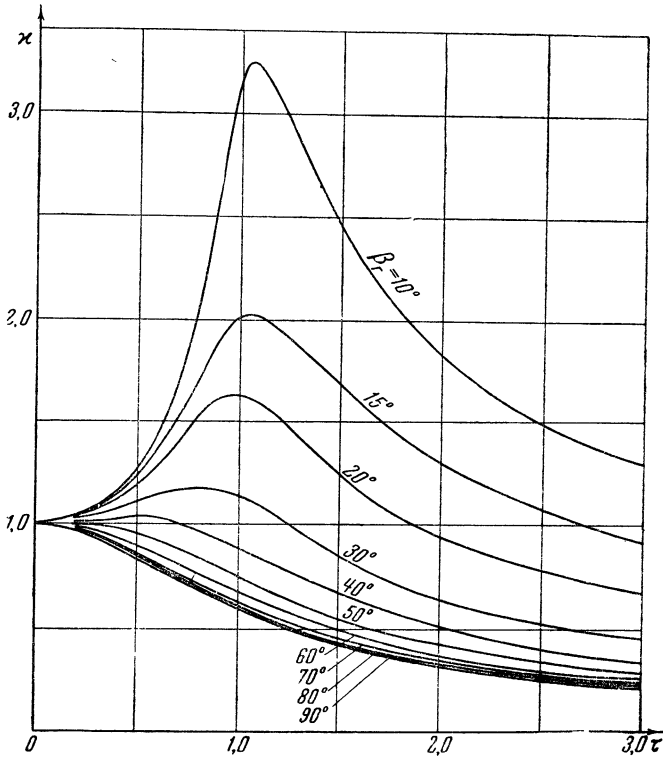
3) активные (фиг. 211), у которых

$$\beta_m = \frac{\pi}{2}, \text{ т. е. } \beta_2 = \pi - \beta_1.$$

Однако, как следует из проведённого выше анализа, при нерасчётных условиях характер течения через данную решётку может измениться (например, диффузорная решётка при отрицательных углах атаки α_A работает на конфузорном режиме и т. д.).

¹⁾ В реальной (вязкой) жидкости значительное отклонение от расчётного угла атаки $\alpha_A = \alpha_m - \alpha_{0p}$ обычно приводит к большим потерям.

Разберём в качестве примера обтекание решётки плоских пластин в широком диапазоне изменения густоты τ и установочного угла β_r . Мы уже указывали, что в этом случае имеется точное решение. Результаты этого решения в виде кривых $\kappa(\tau)$ при различных значениях установочного угла β_r представлены на фиг. 212.



Фиг. 212. Зависимость параметра κ от густоты $\tau = \frac{b}{t}$ для решётки пластины.

Заметим, что впервые задача обтекания решёток плоских пластин была решена С. А. Чаплыгиным в 1912 г.; затем более простое решение получил Н. Е. Жуковский в 1915 г.

Очевидно, что в случае решётки плоских пластин направление нулевой подъёмной силы совпадает с направлением пластин:

$$\beta_r = \beta_{0p}.$$

Так как для единичной пластины согласно (30) имеем:

$$\frac{dC_y}{d\alpha} = 2\pi,$$

то для решётки пластин

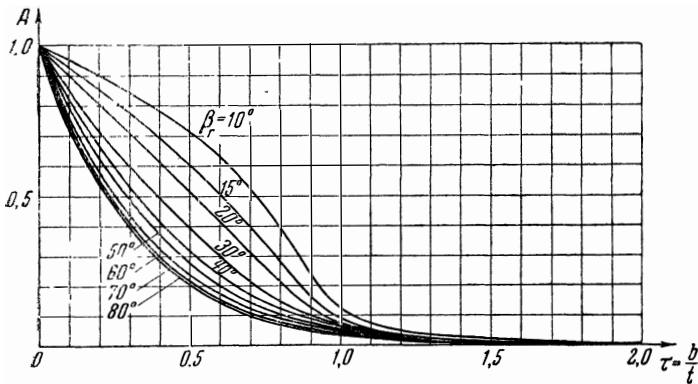
$$2m_p = \left(\frac{dC_y}{a^*} \right)_p = 2\pi\kappa.$$

Выражения для коэффициентов A и B , определяющих зависимость угла выхода от угла входа, запишутся поэтому следующим образом:

$$A = \frac{1 - \frac{\pi}{2} \kappa \tau \sin \beta_r}{1 + \frac{\pi}{2} \kappa \tau \sin \beta_r}, \quad (48)$$

$$B = \frac{\pi \kappa \tau \cos \beta_r}{1 + \frac{\pi}{2} \kappa \tau \sin \beta_r}, \quad (49)$$

На фиг. 213 и 214 представлены кривые функций A и B для решётки плоских пластин в зависимости от густоты τ , при



Фиг. 213. Коэффициент A для решётки пластин.

различных углах установки β_r . Как следует из рассмотрения этих графиков, величина A при $\tau > 1$ становится порядка $A < 0,1$, величина же B асимптотически приближается к $\text{ctg } \beta_r$ и при $\tau \geq 1,2$ может считаться постоянной.

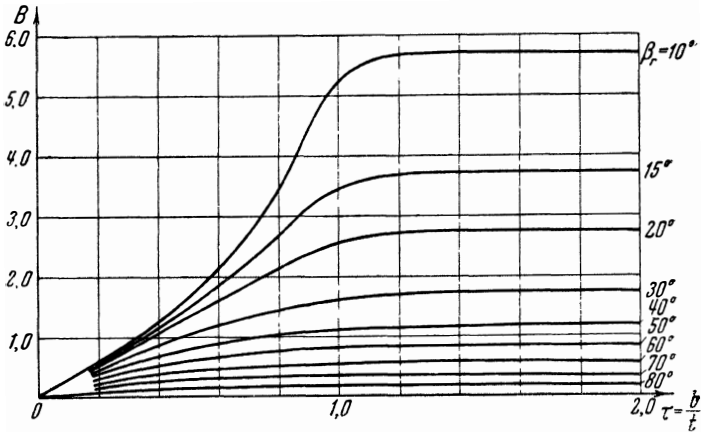
По величинам A и B в качестве примера вычислены и нанесены на фиг. 215 значения так называемого угла отставания ϑ , т. е. угла между направлением потока на выходе и направлением пластин:

$$\vartheta = \beta_r - \beta_2;$$

для данного примера угол β_2 определяется по формуле (45), $\beta_r = 60^\circ$. Как видим, с увеличением густоты угол отставания быстро уменьшается; например, в случае $\beta_1 = 30^\circ$ угол отставания

для густоты $\tau = 0,5$ составляет $\vartheta = 11^\circ$, а при значении $\tau = 1$ — всего только $\vartheta = 2^\circ$.

Введём понятие *эквивалентной решётки пластин*, т. е. решётки пластин, имеющей ту же подъёмную силу при той же скорости w_m (по величине и по направлению) и том же шаге t , что и решётка заданных профилей. Пластины эквивалентной решётки



Фиг. 214. Коэффициент B для решётки пластин.

должны быть параллельны направлению нулевой подъёмной силы решётки заданных профилей:

$$\beta_r = \beta_{0p},$$

где β_r — установочный угол эквивалентной решётки пластин, β_{0p} — угол между направлением нулевой подъёмной силы и фронтом заданной решётки. Длину пластины b^* , называемую аэродинамической хордой профиля в решётке, определяем из условия равенства подъёмных сил:

$$C_{y \text{ пр}} b^* = C_{y p} b, \tag{50}$$

где $C_{y \text{ пр}}$ — коэффициент подъёмной силы пластины в решётке. В таком случае

$$2\pi \kappa b^* = 2m_p b$$

и, следовательно,

$$b^* = b \frac{m_p}{\pi \kappa}. \tag{51}$$

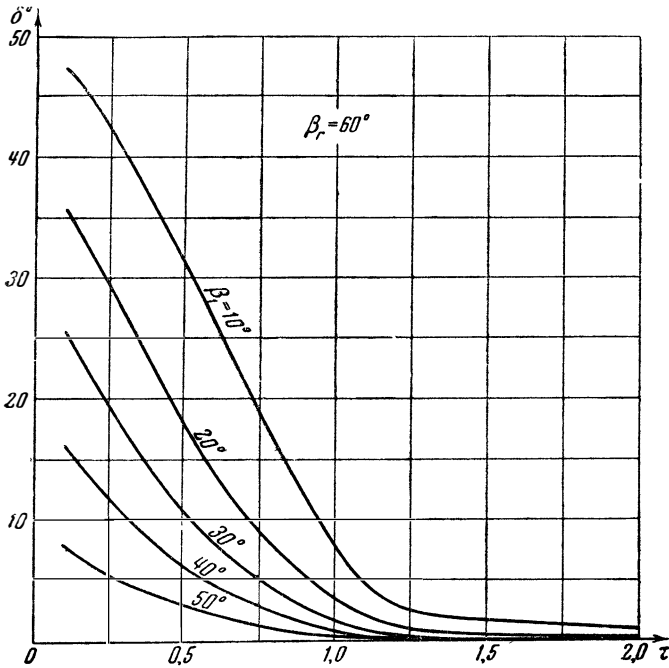
Поделив обе части последнего выражения на шаг решётки t , получим:

$$m_p = \frac{\tau^*}{\tau} \pi \kappa. \tag{52}$$

Если известна эквивалентная решётка пластин, то по формуле (52) может быть определён основной параметр решётки профилей:

$$\left(\frac{dC_y}{d\alpha}\right)_p = 2m_p.$$

Такая задача решается методом электрогидродинамической аналогии, где по данным электрических измерений определяется



Фиг. 215. Зависимость угла отставания δ от густоты τ для решётки пластин.

как угол нулевой подъёмной силы α_{0p} , так и длина пластин эквивалентной решётки. Располагая значением угла α_{0p} и величиной m_p , можно найти эквивалентную решётку пластин; её густота вычисляется по формуле (52):

$$\tau^* \chi_{II} = \tau \frac{m_p}{2\pi} = \tau \chi,$$

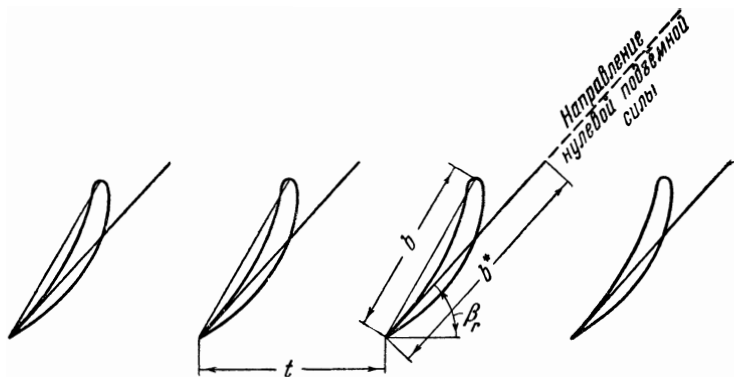
где χ_{II} — значение χ для решётки пластин; угол установки находится из условия

$$\beta_r = \beta_{0p}.$$

На фиг. 216 представлены решётка профилей и эквивалентная ей решётка пластин.

Зная параметры эквивалентной решётки пластин и пользуясь графиками фиг. 213 и 214, можно определить коэффициенты A и B для заданной решётки профилей.

Кроме того, эквивалентная решётка пластин позволяет легко пересчитывать распределение давления по профилю в решётке на любое заданное значение циркуляции Γ , если известно распределение давления при нулевом значении циркуляции ($\Gamma = 0$). Однако для последней задачи более эффективным оказывается применение эквивалентной решётки круговых цилиндров.



Фиг. 216. Схема замены решётки профилей эквивалентной решёткой пластин.

В заключение заметим, что для грубых прикидочных расчётов для решёток малой густоты, пользуясь тем, что обычно величина ϑ невелика, можно принять:

$$\beta_{\Pi} = \beta_{\Gamma} - \alpha_0,$$

и, полагая приближённо длину пластинки эквивалентной решётки равной длине эквивалентной пластины для изолированного профиля

$$b_p^* \cong b^*,$$

отыскать эквивалентную решётку пластин, а следовательно, и величину κ .

Если для единичного профиля, составляющего решётку, неизвестна величина эквивалентной пластины, то она может быть приближённо определена по заданной относительной толщине \bar{c} и относительной кривизне f с помощью формул (38) и (39), из которых имеем:

$$b^* = b(1 + 0,77 \cdot \bar{c}) \sqrt{1 + \left(\frac{f}{2}\right)^2}. \quad (53)$$

Как уже отмечалось, влияние вязкости при обтекании решётки сказывается не только в появлении добавочной осевой силы, но и в уменьшении величины циркуляции Γ , что приводит к уменьшению окружного усилия. Введём коэффициент циркуляции, равный отношению фактической циркуляции Γ к циркуляции в идеальной жидкости $\Gamma_{ид}$ при тех же направлении и скорости набегающего потока:

$$\beta_1 = \beta_{1 \text{ ид}}, \quad \omega_1 = \omega_{1 \text{ ид}}.$$

Из (7) получаем:

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_{ид}} = \frac{\Delta\omega_u}{\Delta\omega_{u \text{ ид}}}.$$

Заменяя значение угла выхода в идеальной несжимаемой жидкости согласно (45), имеем:

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_{ид}} = \frac{\text{ctg } \beta_1 - \text{ctg } \beta_2}{(1-A) \text{ctg } \beta_1 - B}.$$

Как следует из последнего выражения, для определения величины $\frac{\Gamma}{\Gamma_{ид}}$ должна быть известна эквивалентная решётка пластин.

Уменьшение циркуляции за счёт влияния вязкости приводит к изменению углов β_2 и β_m в реальном течении по сравнению с идеальным течением.

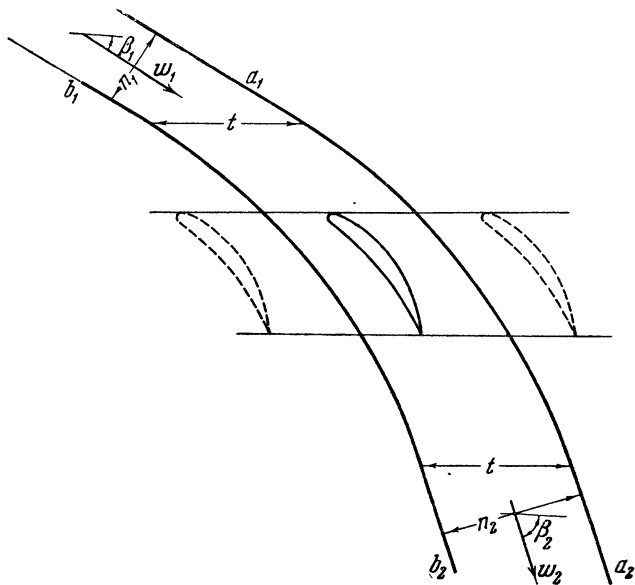
Таким образом, в течениях реальной и идеальной жидкостей при одинаковых значениях угла входа β_1 имеют место разные значения угла геометрической полусуммы скоростей β_m . Однако эта поправка столь незначительна, что обычно сравнение теоретических и экспериментальных результатов проводят при одном и том же значении угла β_m .

Прежде чем перейти к рассмотрению результатов эксперимента с конфузорными и диффузорными решётками, остановимся более подробно на характере течения в каждой из таких решёток. Выше мы уже отмечали, что течение вблизи верхней поверхности изолированного крыла можно разделить на конфузорный и диффузорный участки. В начальном конфузорном участке поток ускоряется и давление падает до своего минимального значения p_{\min} ; затем начинается диффузорный участок, в котором происходит увеличение давления. Следует отметить, что в случае единичного крыла конфузорный и диффузорный участки имеют только местный характер, так как давления в невозмущённом потоке перед и за крылом одинаковы. Главная особенность решётки состоит в том, что перед и за профилем, находящимся в решётке, существуют разные давления.

Проведя поверхности тока a_1a_2 и b_1b_2 с двух сторон профиля на расстоянии шага (фиг. 217), можно заметить, что обтекание

профиля в решётке эквивалентно обтеканию профиля в некотором криволинейном диффузорном или конфузорном канале, в то время как обтекание единичного профиля происходит как бы в прямолинейном канале.

Естественно, что диффузорность или соответственно конфузорность течения, вызванная соседними профилями, существенно влияет на распределение давления по данному профилю. На фиг. 218 представлено вычисленное Е. И. Умновым распределение давления по верхней поверхности профиля в случае потенциального

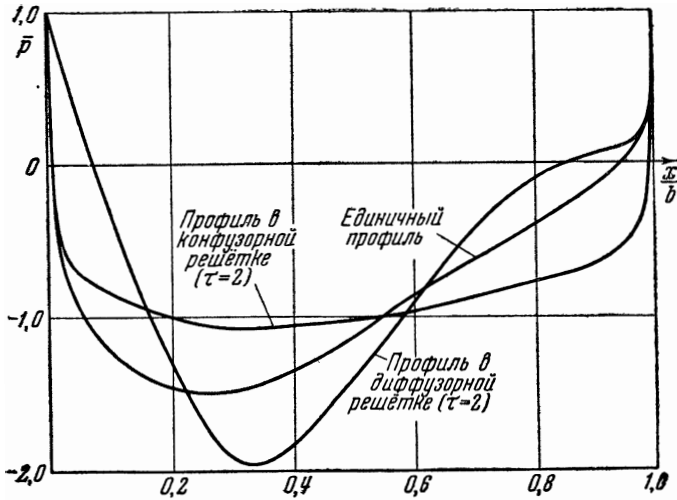


Фиг. 217. Схема течения жидкости около профиля в решётке.

обтекания для единичного профиля и для того же профиля в конфузорной и диффузорной решётках с одинаковыми значениями густоты и установочного угла при угле атаки в решётке, равном углу атаки единичного профиля ($\alpha_m = \alpha$). Как видим, в конфузорной решётке происходит сильное уменьшение положительного градиента давления в задней части профиля; в диффузорной решётке положительный градиент давления в задней части профиля резко возрастает. Такой характер обтекания профиля в решётке, эквивалентный обтеканию в канале переменного сечения, приводит к тому, что характеристики профиля в конфузорной и диффузорной решётках существенно различны. Создаются условия, которые при обтекании профиля вязкой жидкостью в ускоряющемся потоке препятствуют отрыву пограничного слоя, а в замедляющемся потоке

способствуют более раннему отрыву. Эти обстоятельства и приводят к большим потерям полного напора и сравнительно малым значениям $C_{y\max}$ в диффузорной решётке.

Существует другой подход к анализу течения жидкости через решётку, заключающийся в том, что решётка рассматривается как ряд межлопаточных каналов, образованных линиями тока, подходящими к носикам профилей, верхней и нижней



Фиг. 218. Сравнение теоретических эпюр давления для единого профиля и того же профиля в диффузорной и конфузорной решётках.

поверхностями двух соседних профилей и линиями тока, сходящими с задних кромок профилей (фиг. 219). Если в первом приближении пренебречь дополнительным сужением проходного сечения за счёт толщины профиля, то, очевидно, характер течения в таком канале определяется отношением площади на выходе F_2 к площади на входе F_1 :

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{t \sin \beta_2}{t \sin \beta_1} = \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1} = \frac{w_1}{w_2}.$$

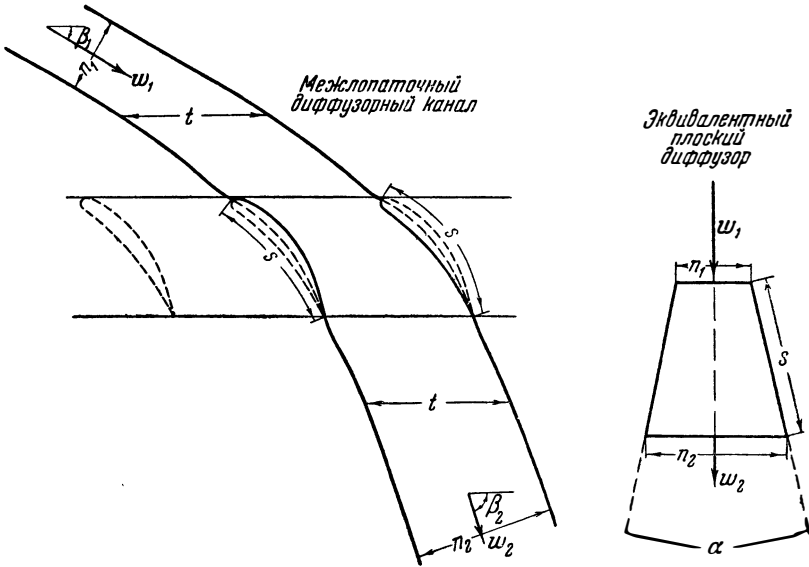
Если $\frac{F_2}{F_1} > 1$, то межлопаточный канал является диффузорным; при $\frac{F_2}{F_1} < 1$ имеем конфузорный канал.

Для качественной характеристики таких диффузорных межлопаточных каналов введём понятие об эквивалентном прямом диффузоре, боковая сторона которого равна длине осевой дуги профиля, а площади входного и выходного сечений равны соот-

ветствующим площадям в решётке¹⁾. В таком случае центральный угол эквивалентного диффузора α плоской решётки определится следующим образом:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{n_2 - n_1}{2s} = \frac{t(\sin \beta_2 - \sin \beta_1)}{2s},$$

где s — длина осевой дуги профиля. Для несильно изогнутых



Фиг. 219. Схема замены межлопаточного диффузорного канала эквивалентным прямым диффузором.

профилей можно положить $s = b$, и следовательно,

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \beta_2 - \sin \beta_1}{2\tau}.$$

Применяемые на практике углы диффузора малы, поэтому можно принять:

$$\alpha\tau \approx \sin \beta_2 - \sin \beta_1.$$

Часто совершенство прямолинейного диффузора оценивается с помощью так называемого коэффициента полезного действия диффузора, под которым понимается отношение фактического

¹⁾ См. Холщевников К. В., Выбор параметров и расчёт осевого компрессора. Оборонгиз, М, 1949.

перепада давлений к перепаду давлений в идеальной жидкости при одних и тех же значениях скорости ω_1 и ω_2 :

$$\eta_{p.d} = \frac{p_2 - p_1}{(p_2 - p_1)_{ид}};$$

согласно уравнению Бернулли

$$\eta_{p.d} = 1 - \frac{h_w}{\frac{\rho}{2} (\omega_1^2 - \omega_2^2)}, \quad (54)$$

где

$$h_w = p_1 - p_2 + \frac{\rho \omega_1^2}{2} - \frac{\rho \omega_2^2}{2}$$

— потери полного давления. Разделив числитель и знаменатель дроби, стоящей в правой части выражения (54), на $\frac{\rho \omega_1^2}{2}$, получим согласно (27) и фиг. 166:

$$\eta_{p.d} = 1 - \frac{\zeta_1 \sin^2 \beta_2}{\sin^2 \beta_2 - \sin^2 \beta_1},$$

а разделив на величину $\frac{\rho \omega_m^2}{2}$, соответственно:

$$\eta_{p.d} = 1 - \frac{\zeta_m \sin^2 \beta_1 \cdot \sin^2 \beta_2}{\sin^2 \beta_m (\sin^2 \beta_2 - \sin^2 \beta_1)}.$$

Выразим коэффициент полезного действия диффузорной решётки через качество профиля в решётке μ .

Для этого запишем выражение для $\eta_{p.d}$ в следующем виде:

$$\eta_{p.d} = \frac{p_2 - p_1}{(p_2 - p_1)_{ид}} = \frac{p_2 - p_1}{p_2 - p_1 + h_w}$$

или согласно (4) и (13) в условиях несжимаемой жидкости ($\Delta \omega_a = 0$):

$$\eta_{p.d} = \frac{R_a}{R_a - h_{wt}} = \frac{R_a}{R_a - F_a}.$$

Проектируя составляющие равнодействующей R_y и R_x на ось решётки (фиг. 167), имеем:

$$R_a = -R_y \cos \beta_m + R_x \sin \beta_m.$$

Подставляя это значение R_a в полученное выше выражение для $\eta_{p.d}$ и заменяя F_a согласно (16), будем иметь:

$$\eta_{p.d} = \frac{1 - \mu \operatorname{tg} \beta_m}{1 + \mu \operatorname{ctg} \beta_m};$$

при этом мы воспользовались выражением для обратного качества профиля:

$$\mu = \frac{R_x}{R_y}.$$

Для оценки степени совершенства конфузурной решётки вводится понятие коэффициента полезного действия конфузурной решётки $\eta_{p.k}$; под последним понимается отношение фактического приращения скоростного напора в решётке к приращению скоростного напора в потоке идеальной жидкости при одном и том же перепаде статических давлений:

$$\eta_{p.k} = \frac{\frac{\rho \omega_2^2}{2} - \frac{\rho \omega_1^2}{2}}{\left(\frac{\rho \omega_2^2}{2} - \frac{\rho \omega_1^2}{2} \right)_{ид}} = \frac{\frac{\rho \omega}{2} - \frac{\rho \omega_1^2}{2}}{\frac{\rho \omega_2^2}{2} - \frac{\rho \omega_1^2}{2} + h_w} \quad (55)$$

Разделив числитель и знаменатель последнего выражения на скоростной напор набегающего потока, получим:

$$\eta_{p.k} = \frac{\sin^2 \beta_1 - \sin^2 \beta_2}{\sin^2 \beta_1 - (1 - \zeta_1) \sin^2 \beta_2}.$$

С другой стороны, согласно уравнению Бернулли

$$\eta_{p.k} = \frac{p_2 - p_1 + h_w}{p_2 - p_1}$$

и на основании (4) и (13)

$$\eta_{p.k} = \frac{R_a - F_a}{R_a}.$$

В случае конфузурной решётки (фиг. 65) также

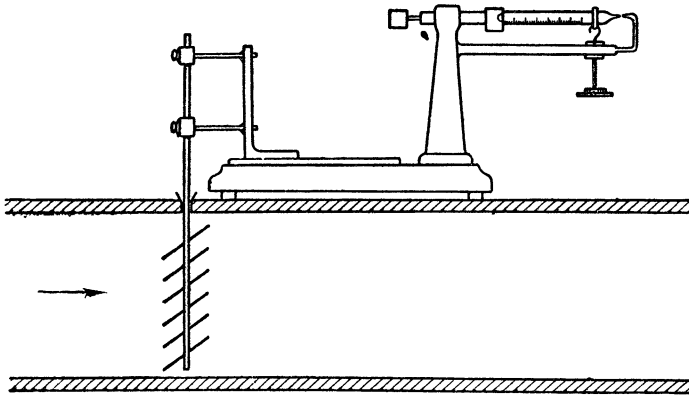
$$R_a = -R_y \cos \beta_m + R_x \sin \beta_m,$$

отсюда из (16) после элементарных преобразований получаем:

$$\eta_{p.k} = \frac{1 + \mu \operatorname{ctg} \beta_m}{1 - \mu \operatorname{tg} \beta_m}.$$

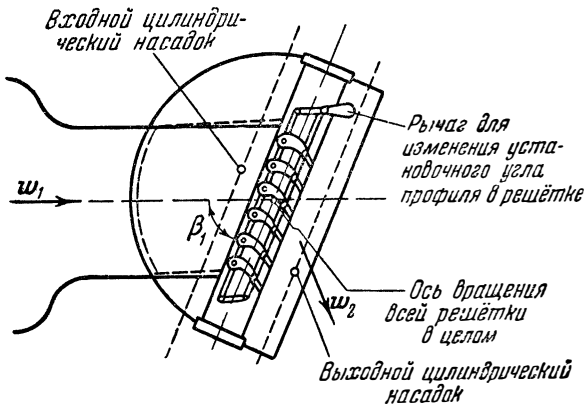
Остановимся на результатах экспериментального исследования решёток на малых скоростях. Впервые экспериментальное исследование решётки, которая была составлена из пластин, произвёл Н. Е. Жуковский в 1902 г. в лаборатории Московского государственного университета. На фиг. 220 изображена схема экспериментальной установки. Испытуемая решётка пластин соединялась с аэродинамическими весами, по показаниям которых определялся коэффициент подъёмной силы пластины в решётке. При дальнейшем развитии эксперимента взвешивание решётки почти никогда не применялось ввиду методического несовершенства такого эксперимента. Экспериментальная установка для продувки плоских решёток, позволяющая изменять угол входа β_1 и установочный угол профилей, представлена на фиг. 221. При эксперименте производится измерение скоростей и углов соответственно перед и за решёткой и разности полных напоров. Величины C_y и C_x определяются по формулам (25), (30) и (34).

Рассмотрим результаты экспериментального исследования конфузорных решёток¹⁾. На фиг. 222 представлено распределение давления на сильно изогнутом турбинном профиле при



Фиг. 220. Схема экспериментальной установки Н. Е. Жуковского для исследования решёток пластин (1902 г.).

одном и том же угле притекания $\pi - \beta_1 = 70^\circ$ и при разных густотах решётки, в том числе при $\tau = 0$ (изолированный про-



Фиг. 221. Схема экспериментальной установки для исследования решёток профилей.

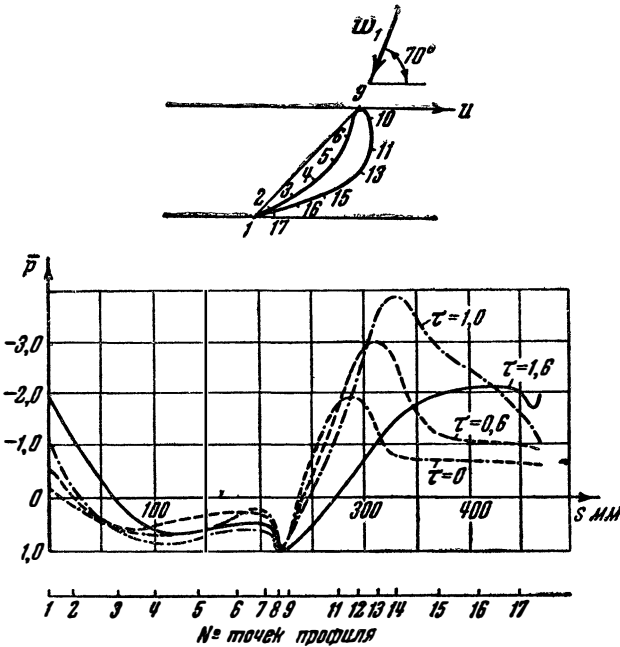
филь); по оси абсцисс отложена длина дуги s , отсчитываемая от хвостика профиля (профиль обходится по часовой стрелке);

¹⁾ См. Повх И. Л., Исследование лопаток турбомашин на статических воздушных установках. Котлотурбостроение, № 2, Машгиз, 1948; и его же статью: «О влиянии шага на аэродинамические характеристики турбинных профилей в решётке». Котлотурбостроение № 6, Машгиз, 1948.

по оси ординат откладываются величины ¹⁾ $\bar{p} = \frac{P - P_m}{\frac{\rho \omega_m^2}{2}}$. Судя по

перегибу кривой распределения давления, в случае изолированного крыла ($\tau = 0$) происходит более ранний отрыв потока.

С увеличением густоты точка перегиба смещается вниз по потоку, что свидетельствует о более позднем отрыве. При густоте $\tau = 1$ кривая распределения давлений уже не имеет точки перегиба; при ещё большей густоте исчезает пикообразный



Фиг. 222. Распределение давления по сильно изогнутому профилю в конфузорной решётке при различных густотах.

характер кривой и диффузорный участок занимает незначительную часть профиля (см. сплошную кривую на фиг. 222 при $\tau = 1,6$).

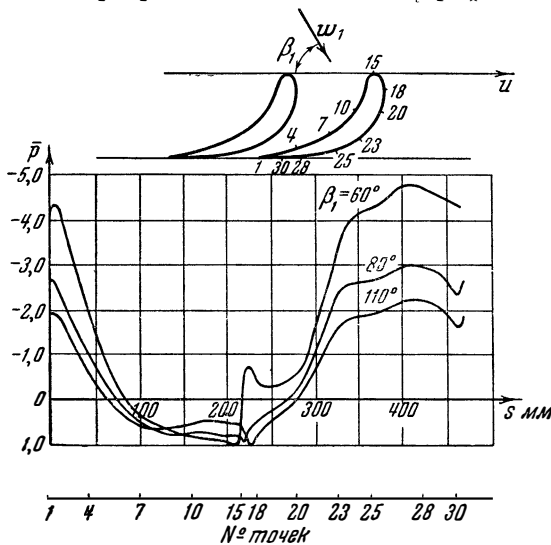
Такое резкое влияние густоты на характер течения объясняется сильной кривизной профиля, приводящей в редкой решётке к весьма раннему отрыву потока. Кривые распределе-

¹⁾ Здесь P_m — статическое давление, соответствующее скорости ω_m

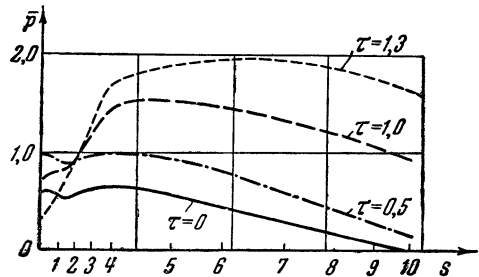
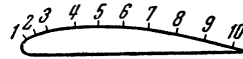
$$\left(P_m = P_1 + \frac{\rho \omega_1^2}{2} - \frac{\rho \omega_m^2}{2} \right).$$

ния давления для решётки из авиационных профилей (фиг. 223), имеющих незначительную кривизну, не показывают столь резкого изменения в характере обтекания, хотя и здесь увеличение густоты решётки ведёт к уменьшению диффузорного участка. Можно заметить, что влияние густоты решётки на распределение давления по профилю при сохранении угла α_m аналогично влиянию угла атаки для изолированного профиля.

Зависимость распределения давлений по профилю от угла входа β_1 для одной и той же решётки представлена на фиг. 224. Как видим, с увеличением угла входа разрежение на спинке профиля уменьшается.



Фиг. 224. Зависимость распределения давлений в решётке от угла входа.



Фиг. 223. Распределение давления по авиационному крыловому профилю в конфузорной решётке при различных густотах.

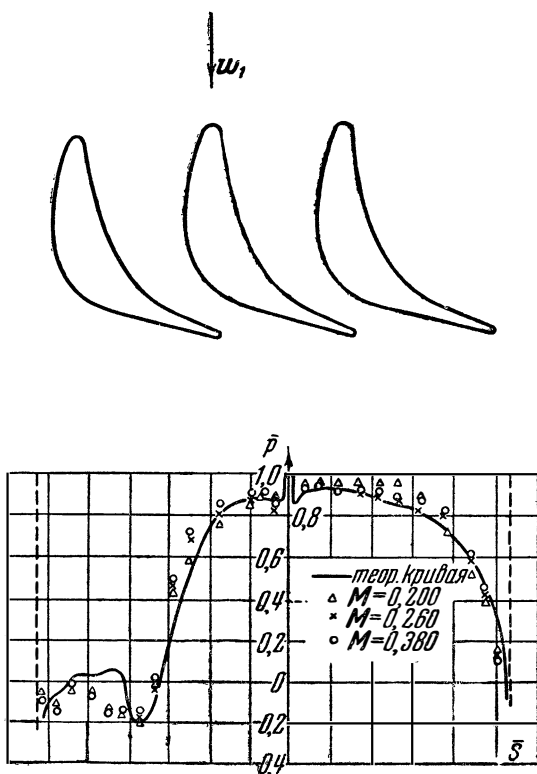
Экспериментальное распределение давлений для конфузорной решётки с осевым входом (соплового аппарата) даёт удовлетворительное совпадение с теоретической кривой потенциального обтекания¹⁾ (фиг. 225).

Расчёт потерь полного давления в решётке и распределения статического давления и скорости по поверхности профиля и в просветах между профилями следовало бы производить с использованием теории пограничного слоя, подобно тому как это делается при расчёте течения в трубе или

¹⁾ Самойлович Г. С., Расчёт гидродинамических решёток. Прикладная математика и механика, т. XIV, вып. 2, 1950.

вдоль пластины. Однако из-за влияния на пограничный слой существенных градиентов давления, имеющих место в решётке, такой расчёт представляет собой сложную задачу, на которой мы здесь не останавливаемся.

Обратимся к рассмотрению характеризующих решётку суммарных величин. На фиг. 226 представлены кривые $C_y(\beta_1)$ для



Фиг. 225. Сравнение экспериментального и теоретического распределений давления по профилю в конфузурной решётке.

конфузурной решётки с сильно искривлёнными профилями при установочном угле профиля в решётке $\beta_2 = 134^\circ$, по данным продувки.

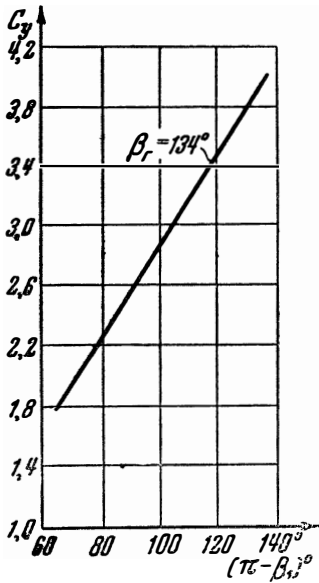
Важно отметить, что в решётке сильно искривлённых профилей получаются весьма высокие значения коэффициента подъёмной силы ($C_y \approx 4$), тогда как у обычных изолированных авиационных крыльев величина C_y не превышает значения 1,2—1,5. Сравнение

с данными продувок индивидуального профиля приводит к очень большим значениям коэффициента решётки (фиг. 227):

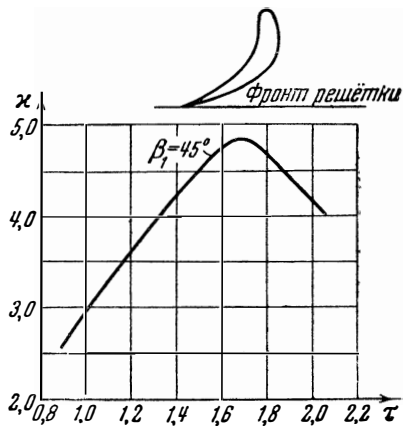
$$\kappa = \frac{\left(\frac{dC_y}{d\alpha}\right)_p}{\left(\frac{dC_y}{d\alpha}\right)_н}$$

В случае слабо искривлённых профилей значения C_y в конфузорной решётке получаются меньшими, однако и здесь прямолинейная зависимость $C_y(\alpha)$ сохраняется до больших значений угла атаки α .

На фиг. 228 даны кривые зависимости коэффициента полезности



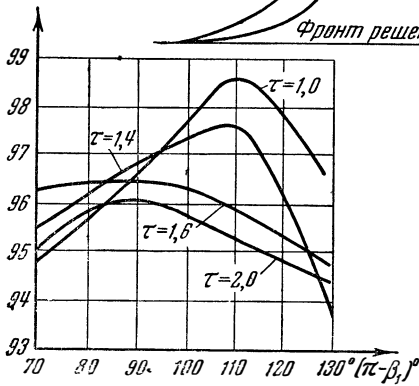
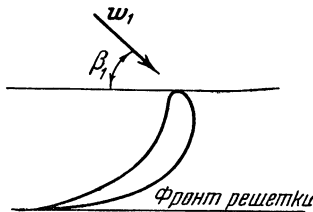
Фиг. 226. Экспериментальная зависимость коэффициента подъёмной силы C_y от угла входа для конфузорной решётки при установочном угле $\beta_1 = 134^\circ$.



Фиг. 227. Экспериментальная зависимость параметра κ от густоты τ решётки для сильно изогнутого профиля.

действия конфузорной решётки $\eta_{р.к}$ от угла входа при различных значениях густоты и одном и том же установочном угле $\beta_1 = 46^\circ$ для сильно искривлённого профиля. Максимальное значение $\eta_{р.к}$, а следовательно, минимальные потери при значениях густоты $\tau = 1$ и $\tau = 1,4$ соответствуют случаю, когда скорость направлена по касательной к осевой дуге профиля в носике ($\alpha_1 = 0$). Следует отметить, что при дальнейшем увеличении густоты потери возрастают, пикообразный характер кривой $\eta_{р.к}(\beta_1)$ сглаживается и максимум кривой перемещается в сторону меньших углов притекания. Выше, при рассмотрении

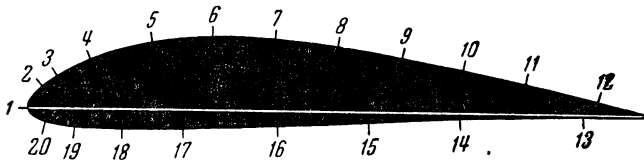
потенциального обтекания решётки, выяснилось, что при густотах порядка $\tau \geq 1-1,2$ угол выхода не зависит от угла входа; данные эксперимента подтверждают этот вывод.



Фиг. 228. Зависимость коэффициента полезного действия конфузорной решётки от угла входа для различных густот.

влияние угла установки профиля в решётке β_r на протекание кривой $C_y(\alpha)$ невелико. Эксперименты с диффузорными и конфузорными решётками позволяют сделать следующее заключение о работе профиля в решётке:

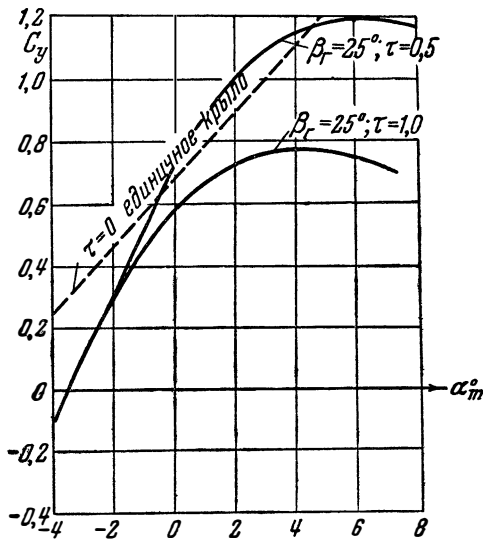
Перейдём к описанию результатов эксперимента с диффузорными решётками. Исследование крылового профиля¹⁾ (фиг. 229) в диффузорной решётке при разных густотах представлено на фиг. 230. Сравнивая кривую $C_y(\alpha)$ для единичного профиля ($\tau = 0$) с такой же кривой для профиля в диффузорной решётке для двух значений густоты ($\tau = 0,5, \tau = 1$), замечаем, что в последнем случае падение величин C_y начнется при значительно меньших углах атаки (фиг. 230): диффузорный характер течения в решётке вызывает более ранний отрыв пограничного слоя, чем на индивидуальном профиле. Как показывают опыты,



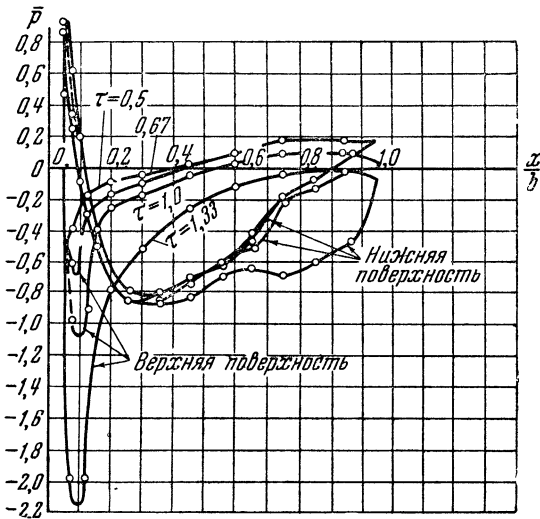
Фиг. 229. Авиационный крыловой профиль.

1) Абсолютное значение угла нулевой подъёмной силы в конфузорной решётке обычно больше, а в диффузорной решётке меньше, чем у изолированного профиля.

¹⁾ Сборник статей по осевым компрессорам турбореактивных двигателей. Обзоры и переводы Министерства авиационной промышленности № 39, 1949.



Фиг. 230. Сравнение значений коэффициента подъемной силы для единичного профиля и профиля в диффузорной решётке при относительных густотах $\tau = 0,5$ и $\tau = 1,0$.

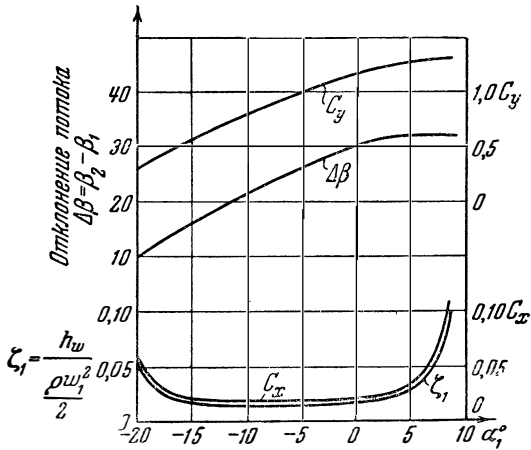


Фиг. 231. Экспериментальное распределение давления по профилю в диффузорной решётке при различных густотах.

2) Угол наклона прямолинейной части кривой $C_y(\alpha)$ в конфузорной решётке обычно больше, а в диффузорной решётке меньше, чем у изолированного профиля.

3) Критический угол атаки $\alpha_{кр}$, соответствующий максимальному значению C_y , в конфузорной решётке больше, а в диффузорной решётке меньше, чем у изолированного профиля.

Распределение давления по профилю в диффузорной решётке при различных густотах представлено на фиг. 231; мы видим,



Фиг. 232. Типичные результаты продувки диффузорной решётки.

что увеличение густоты приводит к возрастанию градиента давления на диффузорном участке профиля. Значительное число экспериментов с диффузорными решётками, составленными из профилей различной кривизны с параболической осевой дугой, которые образованы из одного исходного симметричного профиля 10% толщины, позволило получить некоторые количественные соотношения¹⁾.

Типичные данные продувки одного из вариантов такой решётки представлены на фиг. 232; здесь величины C_y , C_x , ζ_1 и угол отклонения потока в решётке $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$ даны в зависимости от угла атаки на входе в решётку α_1 (угла между направлением набегающего на решётку потока и направлением касательной к осевой дуге в носике профиля). Мы замечаем, что при изменении входного угла атаки от нуля до -10° величины C_x и ζ_1 сохраняют

¹⁾ Холщевников К. В., Выбор параметров и расчёт осевого компрессора. Оборонгиз, М., 1949. Приводимые ниже соотношения, полученные для одного исходного профиля, имеют ограниченное применение, так как свойства решётки зависят от формы профиля.

постоянное (минимальное) значение, при угле атаки на входе $\alpha_1 = 6^\circ$ потери начинают резко возрастать, а величина C_y достигает максимального значения.

Результаты эксперимента могут быть обобщены, если условно ввести так называемый *номинальный режим*, при котором отклонение потока составляет 80% от максимально возможного в данной решётке. Условимся все величины, относящиеся к номинальному режиму, обозначать звёздочкой (*), в частности

$$\Delta\beta^* = 0,8 \cdot \Delta\beta_{\max}.$$

Как показывают эксперименты, номинальный режим является границей, до которой примерно справедлива линейная зависимость угла отклонения $\Delta\beta$ и коэффициента подъёмной силы C_y от входного угла атаки α_1 . Номинальный режим близок к режиму максимального качества профиля, так как потери здесь ещё невелики, а значение C_y уже довольно большое.

На фиг. 233 изображена зависимость отклонения потока $\Delta\beta^*$ от угла выхода β_2^* на номинальном режиме для различных значений густоты, полученная из большого числа экспериментов при разных установочных углах и кривизнах профиля:

На фиг. 234 приведены кривые значений коэффициента подъёмной силы C_y в зависимости от угла β_m для номинальных режимов при различных значениях густоты τ .

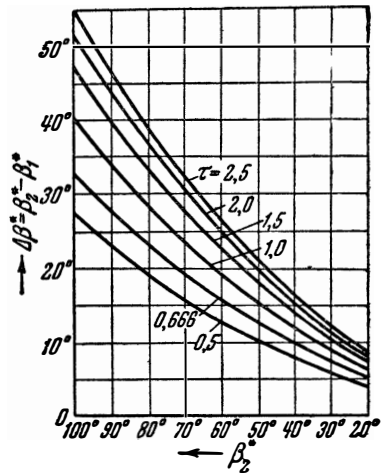
Представленные на фиг. 233 кривые отклонения потока для номинального режима могут быть выражены в диапазоне углов выхода $50^\circ \leq \beta_2 \leq 90^\circ$ следующей эмпирической формулой:

$$\operatorname{ctg} \beta_1^* - \operatorname{ctg} \beta_2^* = \frac{1,5}{1 + 1,5 \frac{t}{b}} = \frac{1,5}{1 + 1,5 t} \quad (56)$$

или

$$\operatorname{ctg} \beta_2^* = \operatorname{ctg} \beta_1^* - \frac{1,5}{1 + 1,5 t}.$$

Как мы уже упоминали, поток на выходе из решётки не следует по касательной к осевой дуге профиля, а несколько отстаёт

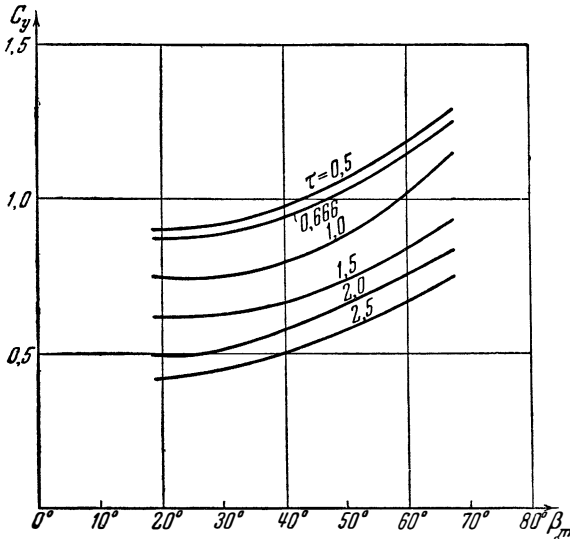


Фиг. 233. Зависимость угла отклонения потока в диффузорной решётке от угла выхода для номинального режима.

от этого направления. В случае номинального режима существует следующая эмпирическая зависимость между углом отставания потока $\vartheta = \varphi_2 - \beta_2$ и параметрами решётки:

$$\vartheta^* = \frac{m\theta}{\sqrt{\tau}}, \quad (57)$$

где m —некоторый коэффициент, зависящий от формы профиля,



Фиг. 234. Зависимость C_y от β_m для номинального режима обтекания диффузорной решётки.

а θ —угол изгиба профиля. Как показывает эксперимент для углов выхода

$$50^\circ \leq \beta_2^\circ \leq 90^\circ,$$

коэффициент m может быть выражен следующим образом в зависимости от положения максимальной кривизны на осевой дуге профиля:

$$m = 0,92 \bar{x}_f^2 + 0,1 \frac{90^\circ - \beta_2^{*\circ}}{50^\circ}. \quad (58)$$

Из выражения (57) с учётом (58) можно в случае номинального режима вывести формулу для угла выхода:

$$\beta_2^{*\circ} = \frac{\varphi_2^\circ - \sqrt{\tau} (0,92 \bar{x}_f^2 + 0,18) \theta^\circ}{1 - 0,1 \sqrt{\tau} \frac{\theta^\circ}{50^\circ}}. \quad (59)$$

Таким образом, если заданы геометрические параметры решётки, то из последнего выражения можно определить угол выхода потока на номинальном режиме. Как было показано в § 1,

$$\theta = \vartheta + \Delta\beta - \alpha_1.$$

Исключая угол изгиба профиля θ из выражения (57), получим для номинального режима:

$$\vartheta^* = \frac{m\sqrt{\bar{t}}(\Delta\beta - \alpha_1)}{1 - m\sqrt{\bar{t}}}. \quad (60)$$

Введём понятия относительного отклонения $\overline{\Delta\beta}$ и относительного угла атаки на входе $\overline{\alpha_1}$:

$$\overline{\Delta\beta} = \frac{\Delta\beta}{\Delta\beta^*}, \quad \overline{\alpha_1} = \frac{\alpha_1 - \alpha_1^*}{\Delta\beta^*}.$$

Экспериментальная зависимость между величинами $\overline{\alpha_1}$ и $\overline{\Delta\beta}$, представленная на фиг. 235, является для испытанных решёток универсальной. Если, например, задан угол входа α_1 и необходимо определить остальные параметры обтекания, то это можно сделать, перейдя к указанным выше относительным величинам.

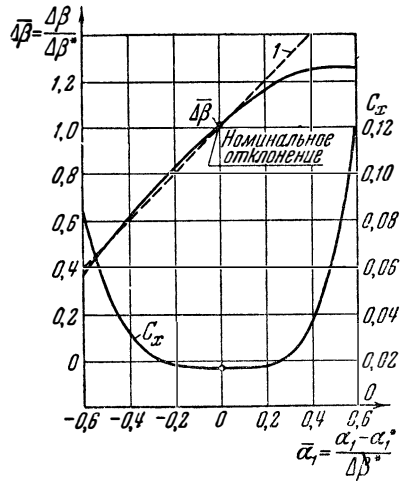
Для этого по заданным геометрическим параметрам решётки из формулы (59) определяем угол β_2^* и из фиг. 233 — значение $\Delta\beta^*$; величину α_1^* находим из очевидной формулы

$$\alpha_1^* = \varphi_1 + \Delta\beta^* - \beta_2^*,$$

затем вычисляем относительный входной угол атаки $\overline{\alpha_1}$ и из фиг. 235 получаем значение $\overline{\Delta\beta}$; помножив последнее на величину $\Delta\beta^*$, отыскиваем значения $\Delta\beta$ и

$$\beta_2 = \beta_1 + \Delta\beta;$$

из этого же графика находим величину C_x ; соответствующее значение C_y может быть определено по формуле (31).



Фиг. 235. Универсальная характеристика диффузорных решёток, составленных из профилей с параболической осевой дугой при $c = 0,1$.

§ 7. Обтекание решётки крыльев дозвуковым потоком газа

Остановимся прежде всего на некоторых общих свойствах обтекания газом решётки профилей. Расход газа в канале, как было показано в главе IV, не может превосходить некоторой предельной величины, соответствующей критической скорости в узком сечении канала. Это обстоятельство накладывает некоторые ограничения на возможные значения параметров газового потока перед и за решёткой.

Рассмотрим сначала с этой точки зрения решётку, составленную из бесконечно тонких профилей. Найдём максимальный расход газа, исходя из значений параметров на входе в решётку (фиг. 161). Секундный массовый расход газа, приходящийся на один шаг решётки, равен:

$$M = \rho_1 \omega_1 t \cdot \sin \beta_1;$$

максимальный расход при заданном угле входа в решётку β_1 составляет:

$$M_{\text{кр ид}} = \rho_{\text{кр 1}} a_{\text{кр 1}} t \cdot \sin \beta_1,$$

т. е. такой же, как в обычном прямолинейном сопле с критическим сечением:

$$F_{\text{кр}} = n_1 = t \cdot \sin \beta_1.$$

Величину $M_{\text{кр ид}}$ будем называть идеальным критическим расходом. Максимальное значение идеального критического расхода достигается при осевом входе потока ($\beta_1 = 90^\circ$):

$$M_{\text{max ид}} = \rho_{\text{кр 1}} a_{\text{кр 1}} \cdot t. \quad (61)$$

Предположим, что все потери в решётке сосредоточены в пространстве между сечениями 1—1 и 2—2 и учитываются величиной коэффициента давления

$$\sigma = \frac{p_{02}}{p_{01}}.$$

Так как мы рассматриваем только теплоизолированные процессы, то в этом случае

$$\begin{aligned} T_{01} &= T_{02}, \\ \omega_{\text{кр 1}} &= \omega_{\text{кр 2}} = a_{\text{кр}}. \end{aligned} \quad (62)$$

Из уравнения состояния следует:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \frac{\rho_{\text{кр 2}}}{\rho_{\text{кр 1}}},$$

т. е.

$$\frac{\rho_{\text{кр 2}}}{\rho_{\text{кр 1}}} = \sigma. \quad (63)$$

Пусть задана величина расхода в решётке:

$$M \leq M_{\max \text{ ид.}}$$

Определим диапазон возможных значений параметров потока на выходе из решётки, соответствующих заданному расходу. Из уравнения неразрывности имеем:

$$M = \rho_2 \cdot \omega_2 \cdot n_2,$$

где $n_2 = t \cdot \sin \beta_2$ — нормальное сечение струи на выходе из решётки.

Будем уменьшать значение угла β_2 ; при этом нормальное сечение на выходе n_2 также уменьшается, а плотность тока $\rho_2 \omega_2$ увеличивается. Однако при некотором значении угла ($\beta_2 \text{ min}^1$) скорость за решёткой достигает критической величины:

$$\omega_2 = a_{\text{кр} 2};$$

дальнейшее уменьшение угла β_2 нельзя осуществить, так как плотность тока уже достигла своего максимального значения. В рассматриваемом случае имеем:

$$M = \rho_{\text{кр} 2} a_{\text{кр} 2} t \cdot \sin \beta_2 \text{ min},$$

или согласно (62) и (63):

$$M = \sigma \rho_{\text{кр} 1} a_{\text{кр} 1} t \cdot \sin \beta_2 \text{ min},$$

откуда

$$\sin \beta_2 \text{ min} = \frac{M}{\sigma \rho_{\text{кр} 1} a_{\text{кр} 1} \cdot t} = \frac{M}{\sigma M_{\max \text{ ид.}}}.$$

Выражая расход через параметры на входе:

$$M = \rho_1 \omega_1 t \sin \beta_1,$$

имеем:

$$\sin \beta_2 \text{ min} = \frac{q(\lambda_1) \sin \beta_1}{\sigma}$$

где

$$q = \frac{\rho_1 \cdot \omega_1}{\rho_{\text{кр} 1} \cdot a_{\text{кр} 1}}$$

согласно (106) главы V есть следующая функция коэффициента скорости:

$$q(\lambda) = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \lambda \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (64)$$

Проводя аналогичные рассуждения в случае увеличения угла β_2 , можно получить второе максимальное его значение $\beta_2 \text{ max}$, соответствующее также условию образования критической ско-

1) Обзорный бюллетень авиамоторостроения, 1949. № 4.

рости на выходе из решётки ¹⁾:

$$\beta_{2 \max} = \pi - \beta_{2 \min}.$$

Если заданный расход является критическим, т. е.

$$M = M_{\text{кр}} = \rho_{\text{кр}} t \cdot a_{\text{кр}} t \sin \beta_1,$$

что осуществляется при

$$M_1 = 1,$$

то получим следующие выражения для предельных углов выхода:

$$\sin \beta_{2 \min} = \frac{\sin \beta_1}{\sigma},$$

$$\beta_{2 \max} = \pi - \beta_{2 \min};$$

при этом на режиме

$$\sin \beta_1 = \sigma$$

существует только одно значение угла выхода $\beta_2 = \frac{\pi}{2}$, т. е. на этом режиме критический расход может быть осуществлён только при осевом выходе потока из решётки. Для больших значений угла входа β_1 , т. е. соответствующих неравенству

$$\sin \beta_1 > \sigma, \quad (65)$$

критический расход в сечении перед решёткой

$$M_{\text{кр}} = \rho_{\text{кр}} t \cdot a_{\text{кр}} t \sin \beta_1$$

уже не может быть реализован, так как, если на меньших углах входа потери компенсировались увеличением выходного сечения (за счёт поворота потока), то при

$$\sin \beta_1 = \sigma$$

это сечение достигло своего максимума ($\beta_2 = \frac{\pi}{2}$):

$$n_{2 \max} = t.$$

Таким образом, при углах входа, отвечающих условию (65), величина максимального расхода определяется сечением на выходе и не зависит от направления потока на входе в решётку:

$$M_{\text{max ист}} = \rho_{\text{кр}} 2a_{\text{кр}} t = \sigma \rho_{\text{кр}} t a_{\text{кр}} t$$

или согласно (61):

$$M_{\text{max ист}} = \sigma M_{\text{max ид}}. \quad (66)$$

Уменьшение истинного максимального расхода по сравнению с максимальным расходом при изэнтропическом течении приводит к ограничению возможных значений числа M_1 .

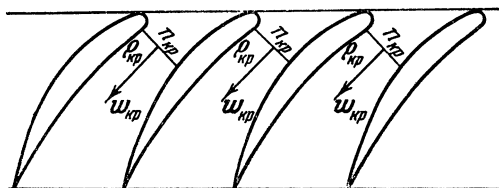
¹⁾ Речь идёт о возможности поворота потока на выходе из решётки в двух направлениях ($\beta_2 > \beta_1$ и $\beta_2 < \beta_1$) с одинаковыми сечениями.

Максимальному расходу отвечает выражение

$$\frac{\rho_{\max} w_{\max}}{\rho_{\text{кр}} a_{\text{кр}1}} = q(\lambda_{\max}) = \frac{\sigma}{\sin \beta_1}. \quad (67)$$

Здесь индексом max обозначены параметры потока на входе при максимальном расходе и заданном направлении.

Как известно из главы IV, уравнение $q(\lambda) = \text{const}$ имеет два решения: одно — дозвуковое ($\lambda_d < 1$), другое — сверхзвуковое



Фиг. 236. К определению критического режима обтекания решётки.

($\lambda_c > 1$). Это означает, что при данном направлении потока на входе возможны дозвуковые течения со скоростями

$$\lambda_1 \leq \lambda_d.$$

и сверхзвуковые течения со скоростями

$$\lambda_1 \geq \lambda_c.$$

В случае решётки, состоящей из профилей конечной толщины, значение λ_1 может также ограничиваться условиями в узком сечении межлопаточного канала. Предположим, например, что направление скорости в самом узком месте межлопаточного канала не зависит от направления набегающего потока, т. е. будем считать постоянной ширину наиболее узкого сечения $n_{\text{кр}}$ (фиг. 236).

Согласно сказанному ранее

$$M_{1\max} = n_{\text{кр}} \sigma_1 \rho_{\text{кр}} a_{\text{кр}1},$$

где $\sigma_1 = \frac{p_{0\text{кр}}}{p_{01}}$ учитывает потери на участке межлопаточного канала от входа до узкого сечения.

Для определения возможных значений коэффициента скорости следует по аналогии с предыдущим решить уравнение

$$q(\lambda_{\max}) = \frac{\bar{n}_{\text{кр}} \sigma_1}{\sin \beta_1}, \quad (68)$$

где $\bar{n}_{\text{кр}} = \frac{n_{\text{кр}}}{t}$ — относительная ширина узкого сечения.

Обратимся к построению треугольников скорости на входе и выходе. Напишем уравнение неразрывности

$$\rho_1 w_1 \sin \beta_1 = \rho_2 w_2 \sin \beta_2$$

или

$$j_{1a} = j_{2a},$$

где \mathbf{j} — вектор плотности тока ($\mathbf{j} = \rho \mathbf{w}$), направленный по касательной к линии тока, т. е. параллельный вектору скорости. Максимальное значение плотности тока

$$j_{\max} = \rho_{\text{кр}} a_{\text{кр}}.$$

Из треугольника плотности тока легко можно получить и треугольник скорости, если знать соответственные значения плотности ρ_1 и ρ_2 .

В случае несжимаемой жидкости $\rho_1 = \rho_2 = \text{const}$, т. е. уравнение неразрывности записывается в виде равенства осевых проекций скорости:

$$w_{1a} = w'_{2a}.$$

Построение треугольника скоростей в случае обтекания решётки газовым потоком может быть упрощено, если ввести понятие безразмерной плотности тока, под которой понимают отношение истинной плотности тока к максимальному значению плотности тока в набегающем на решётку потоке:

$$\bar{j} = \frac{j}{j_{\max 1}} = \frac{\rho w}{\rho_{\text{кр} 1} a_{\text{кр} 1}}.$$

Отсюда на входе в решётку

$$\bar{j}_1 = \frac{\rho_1 w_1}{\rho_{\text{кр} 1} a_{\text{кр} 1}} = q(\lambda_1),$$

на выходе из решётки

$$\bar{j}_2 = \frac{\rho_2 w_2}{\rho_{\text{кр} 1} a_{\text{кр} 1}} = \sigma q(\lambda_2).$$

В таком случае уравнение неразрывности можно записать в следующем безразмерном виде:

$$\bar{j}_{1a} = \bar{j}_{2a},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{j}_{1a} &= \bar{j}_1 \sin \beta_1 = q(\lambda_1) \sin \beta_1, \\ \bar{j}_{2a} &= \bar{j}_2 \sin \beta_2 = \sigma q(\lambda_2) \sin \beta_2. \end{aligned}$$

Построим кривые

$$\bar{j}_{1a} = q(\lambda_1) \sin \beta_1 = \text{const}$$

в полярной системе координат с радиусом-вектором λ_1 и полярным углом β_1 ¹⁾ (фиг. 237).

¹⁾ См. сноску на стр. 433.

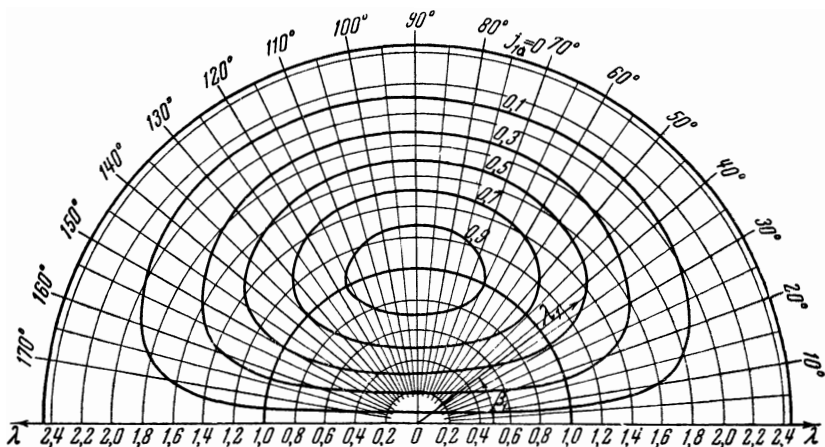
Если провести по заданным величинам λ_1 и β_1 вектор безразмерной скорости на входе в решётку и по кривой постоянного значения \bar{j}_{1a} , проходящей через конец вектора скорости, определить значение $q(\lambda_1) \sin \beta_1$, то, используя равенство

$$q(\lambda_2) \sin \beta_2 = \frac{q(\lambda_1) \sin \beta_1}{\sigma},$$

можно найти соответствующую кривую

$$q(\lambda_2) \sin \beta_2 = \text{const},$$

которая является геометрическим местом точек концов векторов



Фиг. 237. Кривые постоянных значений j_{1a} в полярной системе координат (λ, β) .

скорости на выходе из решётки для заданных условий входа и заданной величины потерь. В изоэнтропическом потоке

$$\sigma = 1,$$

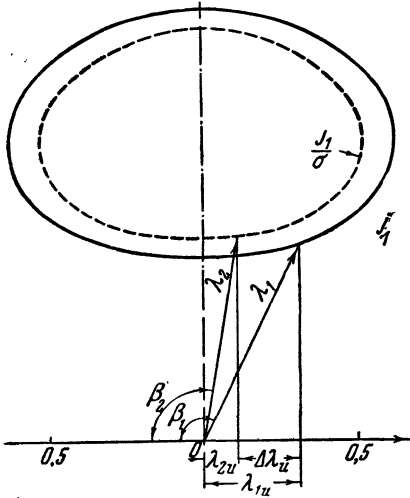
и следовательно, задача построения треугольника упрощается, так как концы векторов скорости входа и выхода лежат на одной и той же кривой $j_{1a} = \text{const}$.

На фиг. 238 представлен пример графического определения выходных параметров решётки с помощью фиг. 237 по заданным параметрам λ_{1u} , β_1 , безразмерной величине закрутки $\Delta\lambda_u = \frac{\Delta w_u}{a_{кр}}$ и коэффициенту давления σ .

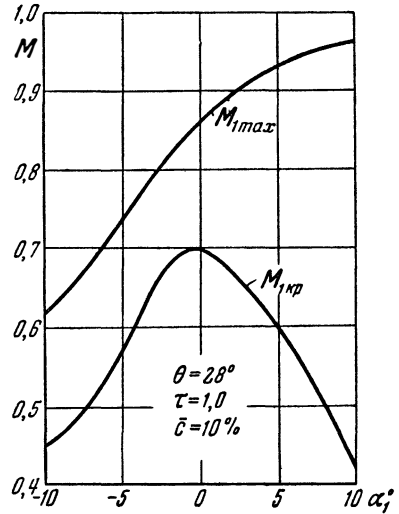
Построив по величинам λ_1 и β_1 вектор входной скорости, находим соответствующую кривую $j_1 = \text{const}$, проходящую через конец этого вектора, и, таким образом, определяем численное значение j_1 . Далее опускаем нормаль из конца вектора λ_1 на

полярную ось, являющуюся фронтом решётки, и откладываем по этой оси заданную величину $\Delta\lambda_u$. Точка пересечения перпендикуляра, восстановленного к полярной оси в конце отрезка $\Delta\lambda_u$, с кривой $\frac{j_1}{\sigma} = \text{const}$ и будет концом вектора λ_2 . Остаётся снять с графика значение параметров потока на выходе из решётки λ_2 и β_2 .

Перейдём теперь к оценке влияния сжимаемости газа на аэродинамические свойства решётки профилей.



Фиг. 238. К графическому расчёту параметров потока в решётке.



Фиг. 239. Зависимость значений $M_{1 \max}$ и $M_{1 \text{кр}}$ от угла атаки α_1 для типичной диффузорной решётки.

Дозвуковое обтекание решётки, как и рассмотренное выше дозвуковое обтекание единичного профиля, разделяется на докритическое и закритическое. Очевидно, что значение $M_{1 \text{кр}}$, соответствующее критической скорости набегающего потока, зависит в конечном счёте от величины наибольшего разрежения на профиле p_{\min} . В первом приближении теоретическая зависимость $M_{1 \text{кр}}(p_{\min})$, где p_{\min} отвечает потоку несжимаемой жидкости, может быть принята для решётки такой же, как и для единичного крыла. Экспериментальная кривая зависимости $M_{1 \text{кр}}$ от входного угла атаки для типичной диффузорной решётки представлена на фиг. 239.

Следует отметить, что в случае решётки наблюдается гораздо большее влияние толщины пограничного слоя на величину $M_{1 \text{кр}}$, чем в случае единичного крыла. Это объясняется тем, что в решётке при околозвуковых скоростях очень малое изменение поперечного сечения ведёт к заметному изменению числа M .

При докритических скоростях можно, как и в случае единичного профиля, обтекание газом данной решётки заменить обтеканием несжимаемой жидкостью некоторой эквивалентной решётки. Возможны два способа построения эквивалентной решётки, вытекающие из анализа уравнений газовой динамики¹⁾. Ввиду простоты физического обоснования этих способов опишем их, не прибегая к анализу уравнений. Остановимся сначала на наиболее простом случае — решётке симметричных профилей с нулевым выносом и нулевым углом атаки. Поступая с каждым профилем в решётке, как с изолированным профилем, т. е. увеличивая его поперечные размеры в $\frac{1}{\sqrt{1-M_H^2}}$ раз, получим эквивалентную решётку того же шага t , но составленную из профилей большей относительной толщины:

$$\bar{c}' = \frac{\bar{c}}{\sqrt{1-M_H^2}}.$$

Тот же эффект можно получить путём перехода к более тесной решётке без деформации профилей, для чего следует изменить в $\sqrt{1-M_H^2}$ раз расстояние между профилями, отсчитываемое по направлению нормали к набегающему потоку.

В случае симметричных профилей с нулевым выносом и нулевым углом атаки этот же результат даёт соответствующее изменение шага решётки:

$$t' = t \cdot \sqrt{1-M_H^2}.$$

Оба указанных способа построения эквивалентной решётки, изображённые на фиг. 240, вполне равноценны в случае, если толщина профиля мала по сравнению с шагом решётки. Заместим, что второй способ удобнее для анализа и расчётов, так как сам профиль в нём остаётся неизменным. Остановимся теперь на обтекании решётки с несимметричными профилями и отличными от нуля значениями выноса и угла атаки, ограничиваясь, однако, случаем тонких профилей и малых углов атаки. Введём новое понятие — *аэродинамический шаг решётки* h , равный расстоянию между двумя прямыми, проведёнными через соответственные точки соседних профилей параллельно геометрической полусумме скоростей входа и выхода (w_m). Применяя второй способ построения, мы получим эквивалентную решётку (фиг. 241), состоящую из тех же профилей, но с меньшим аэродинамическим шагом:

$$h' = h \sqrt{1-M_m^2};$$

¹⁾ Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, 1950.

здесь величина M_m проще всего вычисляется по известной переходной формуле

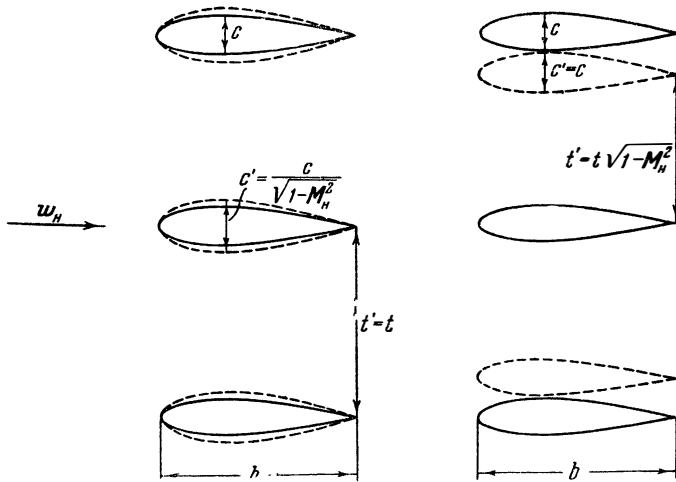
$$M_m^2 = \frac{\frac{2}{k+1} \lambda_m^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_m^2}$$

где

$$\lambda_m = \frac{w_m}{a_{кр}},$$

$$a_{кр} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} gRT_0}.$$

Изменение аэродинамического шага приводит к изменению геометрических параметров решётки. Обозначая все параметры,



Фиг. 240. Схема к двум способам построения эквивалентной решётки симметричных профилей при нулевом угле атаки.

относящиеся к эквивалентной решётке в потоке несжимаемой жидкости, значком ', найдём из треугольников B_0B_1D и $B_0B_1'D$ (фиг. 241):

$$\operatorname{tg} (\beta'_r - \alpha_p) = \frac{B_1'D}{B_0D} = \frac{h'}{B_0D},$$

$$\operatorname{tg} (\beta_r - \alpha_p) = \frac{B_1D}{B_0D} = \frac{h}{B_0D}$$

откуда

$$\operatorname{tg} (\beta'_r - \alpha_p) = \frac{h'}{h} \cdot \operatorname{tg} (\beta_r - \alpha_p)$$

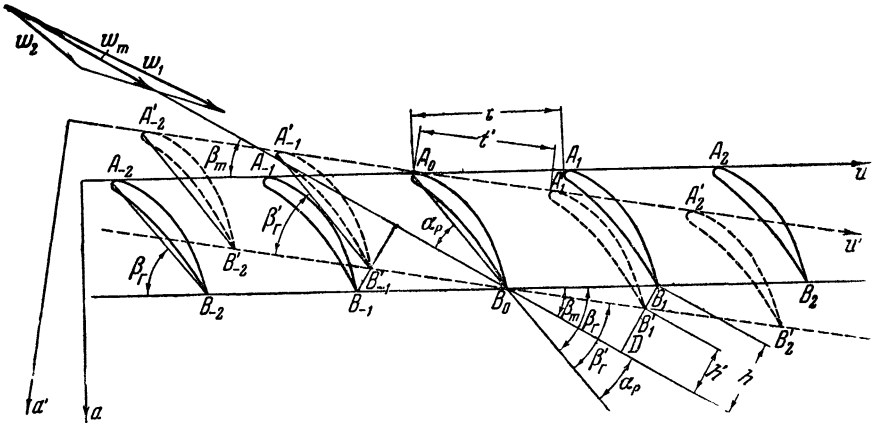
и, следовательно

$$\operatorname{tg}(\beta'_r - \alpha_p) = \sqrt{1 - M_m^2} \cdot \operatorname{tg}(\beta_r - \alpha_p)$$

или

$$\operatorname{tg}(\beta'_r - \alpha_p) = \sqrt{1 - M_m^2} \cdot \operatorname{tg} \beta_m,$$

где β_m — угол между направлением скорости w_m и фронтом решётки. Определив из последнего выражения установочный угол



Фиг. 241. Исходная решётка профилей в газе и эквивалентная ей решётка в несжимаемой жидкости.

эквивалентной решётки β'_r , находим её шаг t' из следующей очевидной формулы:

$$t' = \frac{h'}{h} t \frac{\sin(\beta_r - \alpha_p)}{\sin(\beta'_r - \alpha_p)};$$

разделив обе части этого выражения на хорду профиля, которая по условию построения не меняется, получим густоту эквивалентной решётки:

$$\tau' = \tau \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \beta_m \cdot M_m^2}.$$

Зная геометрические параметры эквивалентной решётки, определяем угол атаки в обтекании её несжимаемой жидкостью, при котором коэффициент подъёмной силы имеет такое же значение, как и в исходной решётке, для чего используем соотношение, приведённое выше для изолированного профиля:

$$\alpha'_p = \frac{\alpha_p}{\sqrt{1 - M_m^2}}.$$

Основываясь на линейной зависимости между углом атаки и коэффициентом подъёмной силы, можно, как и в случае единичного профиля, вместо расчёта изменения угла атаки при $C_y = \text{const}$ определить изменение C_y при $\alpha = \text{const}$, если использовать следующее приведённое в § 4 выражение:

$$C_y(\beta_r, \tau, \alpha_p) = \frac{C'_y(\beta'_r, \tau', \alpha_p)}{\sqrt{1 - M_m^2}}.$$

Определим, например коэффициент подъёмной силы для решётки пластин с параметрами

$$\beta_r = 60^\circ, \quad \tau = 1,20$$

при обтекании её потоком газа со средней геометрической скоростью, соответствующей числу $M_m = 0,5$, и углом атаки $\alpha_p = 10^\circ$ ($\beta_m = 50^\circ$).

Сначала находим эквивалентную решётку пластин. Из полученных выше выражений имеем для эквивалентной решётки:

$$\begin{aligned} \text{tg}(\beta'_r - \alpha_p) &= \text{tg} \beta_m \cdot \sqrt{1 - M_m^2} = 1,03, \\ \tau' &= \tau \cdot \sqrt{1 - M_m^2 \sin^2 \beta_m} = 0,922\tau, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \beta'_r &= 56^\circ, \\ \tau' &= 1,11. \end{aligned}$$

По этим параметрам решётки пластин с помощью кривых $\kappa(\tau, \beta_r)$ (фиг. 212) находим соответствующую величину $\kappa = 0,69$. Следовательно, искомое значение коэффициента подъёмной силы

$$C_y = \frac{2\pi \cdot \kappa \cdot a_p}{\sqrt{1 - M_m^2}} = 0,875.$$

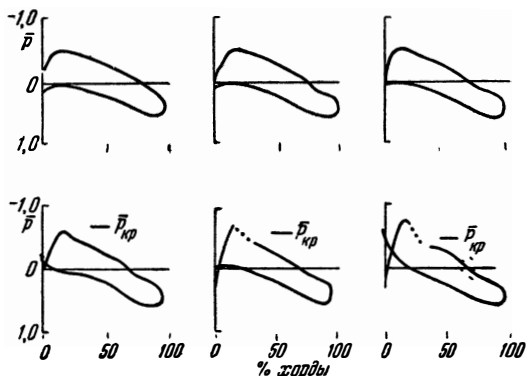
Величина C_y для исходной решётки пластин при том же угле атаки $\alpha_p = 10^\circ$ в случае несжимаемой жидкости равна:

$$C_y = 0,75.$$

Таким образом, в данном случае влияние сжимаемости сказывается в увеличении C_y на 14%. Напомним, что изложенные соображения относятся только к докритическому обтеканию решётки.

На режиме $M_1 > M_{кр}$ в решётке образуется сверхзвуковая зона, завершаемая системой скачков, которая получается гораздо сложнее, чем у единичного профиля за счёт отражения скачков от соседних профилей. На фиг. 242 представлены последовательные оптические снимки спектров обтекания диффузорной решётки, полученные при значениях числа M_1 от 0,6 до 0,7. При $M_1 = 0,6$

имеем докритическое обтекание, т. е. сверхзвуковые скорости отсутствуют во всей области течения. С увеличением числа M_1 скорость непосредственно за носиком лопатки становится сверхзвуковой и потом скачком переходит в дозвуковую; кроме того, замечен отрыв пограничного слоя. Дальнейшее увеличение скорости набегающего потока приводит к расширению области сверхзвуковых течений: наблюдаются отражение скачков от соседней лопатки и отрыв пограничного слоя. При достижении в набегающем потоке значения $M_1 = 0,7$ сверхзвуковос течение занимает



Фиг. 243. Последовательное изменение эпюры давления для профиля в решётке ($\tau = 1,5$, $\alpha_1 = 14,9^\circ$) при увеличении числа M .

всё межлопаточное пространство, т. е. ещё при дозвуковой скорости набегающего потока наблюдается целиком сверхзвуковое обтекание профиля в решётке; характерно, что в последнем случае уже нет отрыва пограничного слоя.

Эпюры безразмерных давлений, снятые на профиле в диффузорной решётке при неизменном направлении набегающего потока и при разных значениях числа M_1 на входе в решётку, представлены ¹⁾ на фиг. 243; разность давлений выражена в долях скоростного напора на входе в решётку:

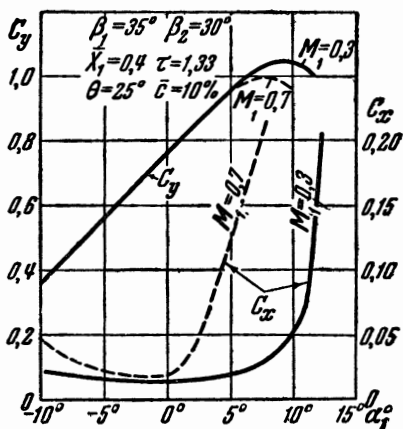
$$\bar{p} = \frac{p - p_1}{\frac{\rho \omega_1^2}{2}} = \frac{p}{\frac{k}{2} M_1^2} - 1$$

При $|\bar{p}_{\min}| < |\bar{p}_{кр}|$ распределение давления носит непрерывный характер. С увеличением числа M_1 набегающего потока разрежение на профиле увеличивается. При $|\bar{p}_{\min}| > |\bar{p}_{кр}|$ уже

¹⁾ Обзорный бюллетень авиамоторостроения, 1948, № 7.

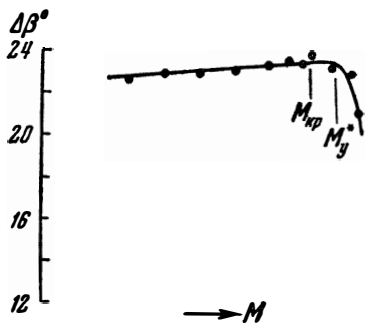
наблюдаются изломы эпюры давлений, что свидетельствует о наличии сверхзвуковой зоны и системы скачков.

Скачки и отрыв потока приводят к резкому возрастанию потерь и уменьшению подъёмной силы решётки. Это видно из экспериментальных зависимостей $C_x(\alpha_1)$, полученных для значений $M_1 = 0,3$ и $M_1 = 0,7$ (фиг. 244¹⁾). При нулевом угле атаки сверхзвуковая зона незначительна, и потери почти не зависят от числа M . С увеличением угла атаки разрежение на профиле растёт, что приводит к сильному увеличению сверхзвуковой зоны



Фиг. 244. Сравнение экспериментальных зависимостей $C_x(\alpha_1)$, $C_y(\alpha_1)$ для диффузорной решётки при $M_1 = 0,7$ и $M_1 = 0,3$.

и появлению отрыва, т. е. существенному возрастанию коэффициента сопротивления на режиме $M_1 = 0,7$ по сравнению



Фиг. 245. Зависимость угла отклонения потока в решётке от значения числа M .

с режимом $M_1 = 0,3$. Как и для единичного профиля, значение числа $M_1 = M_y^*$, начиная с которого наблюдается падение коэффициента подъёмной силы и соответственно уменьшение поворота потока в решётке, несколько превосходит величину $M_{кр}$ (фиг. 245). При $M_1 > M_y^*$ происходит резкое увеличение потерь; при некотором значении $M_1 = M_{1 \max}$, которое может быть найдено из уравнения (68), достигается максимально возможная скорость обтекания решётки на данном угле атаки.

Производя в уравнении (68) замену

$$\beta_1 = \varphi_1 - \alpha_1,$$

имеем:

$$q(\lambda) = \frac{\sigma_1 \bar{n}_{кр}}{\sin(\varphi_1 - \alpha_1)}. \quad (69)$$

1) Обзорный бюллетень авиамоторостроения, 1948, № 9.

Для данной решётки $\bar{n}_{кр}$ задаётся как геометрический параметр межлопаточного канала; считая σ_1 в первом приближении не зависящим от угла атаки, замечаем, что с увеличением угла атаки величина $M_{1\max}$ должна увеличиваться. На фиг. 246 представлена экспериментальная кривая $M_{1\max}$, полученная для диффузорной решётки, которая подтверждает это заключение.

Из определения имеем:

$$\frac{\bar{n}_{кр}}{\sin \beta_1} = \frac{n_{кр}}{t \sin \beta_1} = \frac{F_{кр}}{F_1},$$

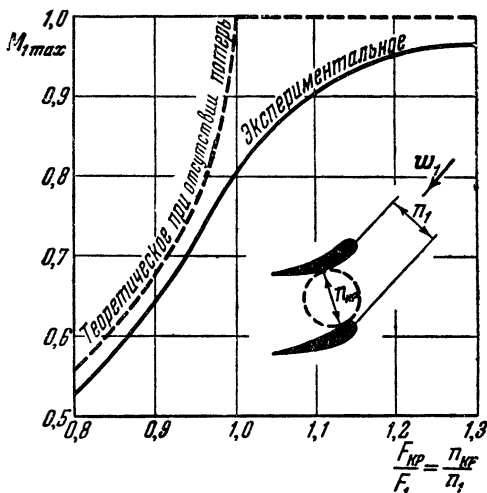
где $F_{кр}$ — площадь узкого сечения, F_1 — площадь нормального сечения потока на входе в межлопаточный канал (фиг. 246). Перепишем выражение (68) в виде

$$q(\lambda_{\max}) = \sigma_1 \cdot \frac{F_{кр}}{F_1}.$$

Изображённая на фиг. 246 экспериментальная кривая¹⁾ соответствует этой зависимости. На этом же графике нанесена теоретическая кривая для изоэнтропического движения, т. е. в предположении отсутствия потерь ($\sigma = 1$) и равномерном поле скоростей. При $\frac{F_{кр}}{F_1} > 1$ узкое сечение в межлопаточном канале отсутствует и наличие кризиса ($M_{\max} < 1$) определяется уже только потерями. Заметим, что в этом случае выражение (68) несправедливо, и величину M_{\max} следует определять из уравнения

$$q(\lambda_{\max}) = \sigma \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1}. \quad (70)$$

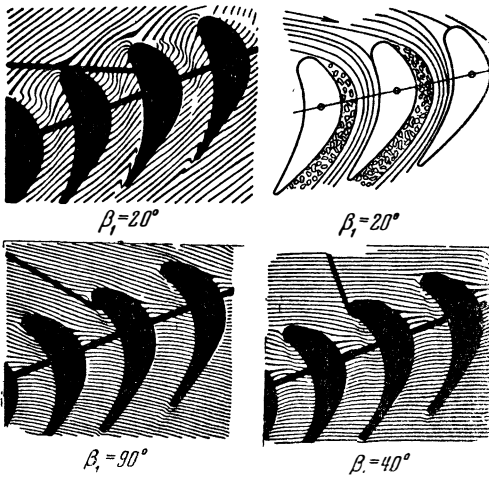
До сих пор мы рассматривали результаты экспериментального исследования диффузорных решёток, имеющих применение в осевых компрессорах. Перейдём к конфузорным решёткам, встречающимся в осевых турбинах. На фиг. 247 изображены снимки обтекания турбинных решёток при углах притекания



Фиг. 246. Зависимость максимального значения числа M от степени сужения струи в решётке.

¹⁾ Холщевников К. В., Выбор параметров и расчёт осевого компрессора. Оборонгиз, 1949.

$\beta_1 = 20, 40, 90^\circ$, полученные с помощью интерферометра¹⁾. В отличие от обычных оптических снимков, дающих только каче-



Фиг. 247. Снимки обтекания турбинных решёток, полученные с помощью интерферометра.

ственную картину, интерференционный снимок позволяет определять количественные параметры. Однако и без обработки указанных снимков можно по излому интерференционных полос обнаружить отрыв потока и границу застойной области. На фиг. 247, полученной для $\beta_1 = 20^\circ$, виден интенсивный отрыв потока, который примерно в два раза уменьшает сечение межлопаточного канала в средней его части; это приводит к гораздо более раннему появлению местной критической скорости, т. е. к заметному уменьшению $M_{1кр}$.

В случае турбинных решёток давление удобно выражать в скоростных напорах потока на выходе из решётки:

$$\frac{p - p_2}{\frac{\rho_2 w_2^2}{2}} = \frac{p - p_1}{\frac{\rho_1 w_1^2}{2}},$$

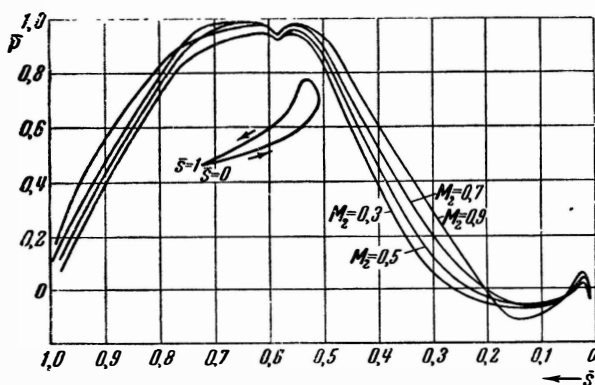
или в следующем виде:

$$\bar{p} = \frac{p - p_2}{p_{01} - p_2}.$$

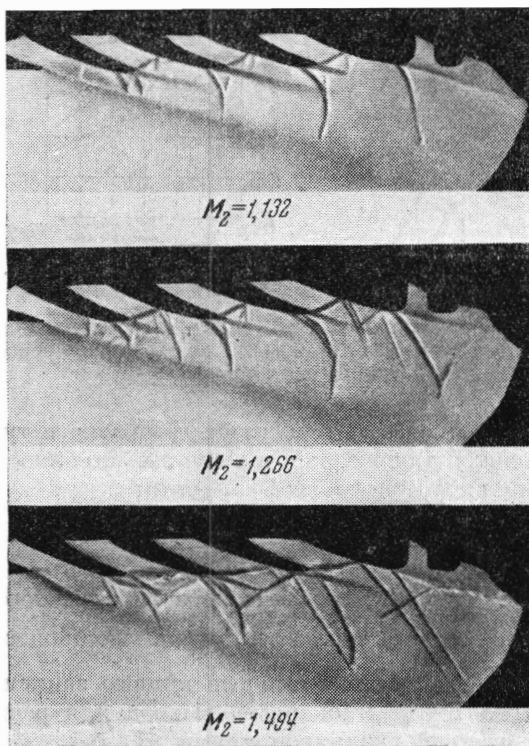
При снятии распределения давлений по конфузурной решётке, составленной из турбинных профилей, для значений M_2 от 0,3 до 0,9 (фиг. 248) кривые давления, полученные Н. Д. Сенниченко, оказались плавными, что указывает на отсутствие скачков и соответственно на малые потери в канале. Таким образом, при почти критическом перепаде давлений нигде на профиле ещё нет местных звуковых и сверхзвуковых скоростей.

Большие перепады давления срабатываются в сопловых (направляющих) аппаратах турбины, зачастую имеющих на выходе сверхзвуковую скорость. На фиг. 249 представлены оптические снимки потока на выходе из сопловой решётки, полученные

¹⁾ Обзорный бюллетень авиамоторостроения, 1947, № 12.



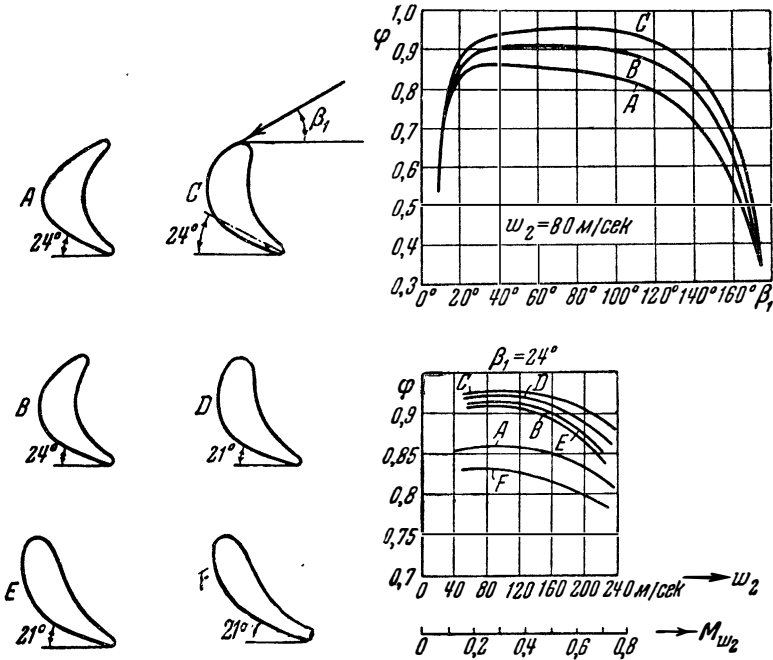
Фиг. 248. Распределение давления по профилю в конфузорной решётке при различных значениях чисел M_2 , полученное Н. Д. Сениченко.



Фиг. 249. Снимки потока на выходе решётки.

М. Е. Дейчем¹⁾ при числах M на выходе: $M_2 = 1,132, 1,266$ и $1,494$. На снимках отчётливо видны скачки уплотнения.

Происходящее на выходе из решёток расширение потока, т. е. так называемое расширение в косом срезе при сверхзвуковых скоростях, будет более подробно рассмотрено ниже.



Фиг. 250. Экспериментальная зависимость скоростного коэффициента φ от угла входа и скорости выхода для диффузорных решёток с различными профилями.

Количественный учёт потерь газового потока в турбинной решётке производится так же, как и в соплах Лавалья (см. гл. VII), путём введения скоростного коэффициента:

$$\varphi = \frac{\omega}{\omega_{ид}},$$

где индекс «ид» означает скорость изоэнтропического истечения.

Заметим, что в случае теплоизолированного процесса $\varphi = \frac{\lambda}{\lambda_{ид}}$.

На фиг. 250 даны экспериментальные кривые зависимости величины φ от угла входа и скорости выхода для решёток, составленных из профилей различной формы.

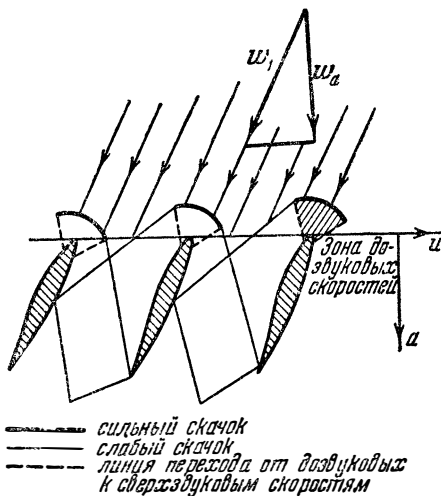
¹⁾ Обзорный бюллетень авиамоторостроения. 1949, № 5.

§ 8. Сверхзвуковое обтекание решётки крыльев

При обтекании решёток, составленных из обычных профилей с тупым носиком, перед каждым профилем образуется криволинейная ударная волна (фиг. 251), за которой располагается зона дозвуковых скоростей. Однако дальше скорость вновь увеличивается так, что при обтекании профиля в решётке почти всюду на его поверхности получаются сверхзвуковые скорости¹⁾. В густой решётке отдельные ударные волны, образующиеся перед каждым профилем, могут слиться в одну ударную волну периодического характера. Такие ударные волны вызывают значительные потери. Поэтому решётки для сверхзвуковых потоков составляют из сверхзвуковых профилей с острой передней кромкой, не вызывающей криволинейной волны. Напомним, что в сверхзвуковых течениях возмущения передаются только в области, ограниченные характеристиками, причём нормальная к характеристике составляющая скорости всегда равна местной скорости звука (фиг. 252).

При анализе сверхзвукового обтекания решёток ограничимся наиболее простым случаем, при котором осевая составляющая скорости перед решёткой является сверхзвуковой ($w_{1a} > a$). Как нетрудно видеть из фиг. 252, в этом случае характеристики направлены внутрь решётки, т. е. отсутствует интерференция между решёткой и набегающим потоком, и поэтому достаточно рассматривать течение только в межлопаточных каналах.

В качестве примера остановимся на сверхзвуковом обтекании решётки пластин²⁾. На фиг. 253 представлено обтекание решётки пластин при $\lambda_{1,w} = 1,83$ и угле атаки $\alpha_1 = 10^\circ$. Профили раздвинуты настолько, что волны, распространяющиеся от

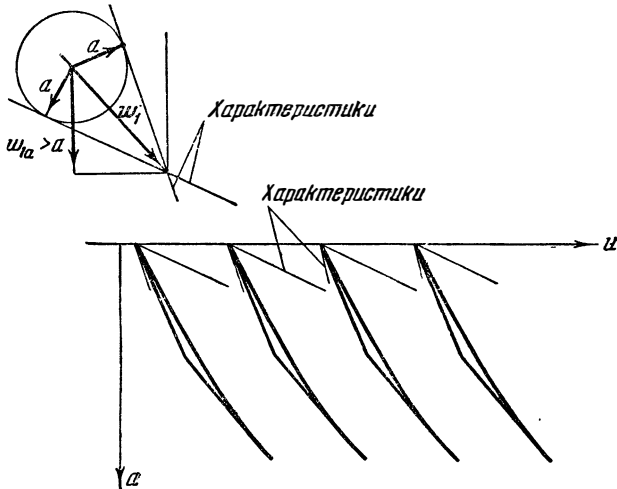


Фиг. 251. Примерная схема сверхзвукового обтекания решётки профилей с тупой передней кромкой.

¹⁾ Обзорный бюллетень авиамоторостроения, 1947, № 12.

²⁾ См. там же.

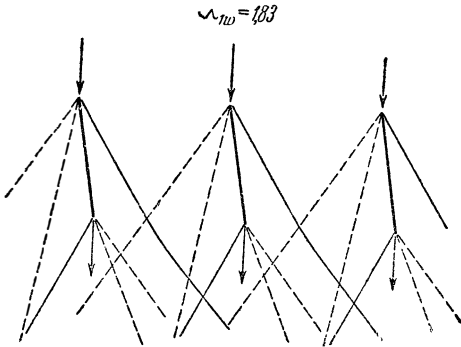
каждого профиля, не попадают на соседний профиль. Тем самым устраняется интерференция между профилями, т. е. они обте-



Фиг. 252. Схема обтекания решётки при сверхзвуковой осевой составляющей скорости.

каются как единичные профили. Это даёт возможность опреде-

лять параметры потока в решётке по данным, относящимся к единичному профилю. Интерференция между волнами, отходящими от каждого профиля, начинается после среза решётки и приводит к изменению направления потока за решёткой.



Фиг. 253. Схема сверхзвукового обтекания решётки пластин при

$$\lambda_{1w} = 1,83, \quad \alpha_1 = 10^\circ.$$

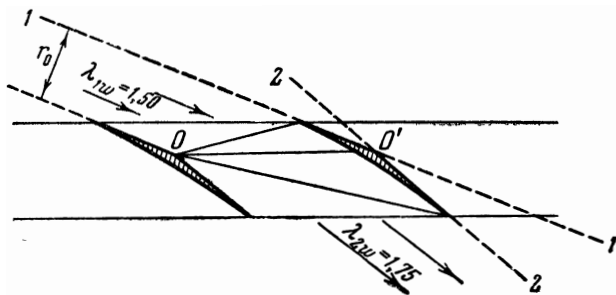
ния. Для этого используем теорию сверхзвукового течения около тупого угла (гл. IV). Зная угол поворота потока и число

по данным, относящимся к единичному профилю. Интерференция между волнами, отходящими от каждого профиля, начинается после среза решётки и приводит к изменению направления потока за решёткой.

Остановимся теперь на задаче построения сверхзвуковой решётки по известным параметрам течения¹⁾. Сначала рассмотрим такие решётки, которые обеспечивают поворот потока без нарушения изотропности течения, т. е. без волнового сопротивления.

¹⁾ См. сноску на стр. 449.

M_1 в набегающем потоке, мы можем найти число M_2 после поворота и изменение давления $\frac{P_2}{P_1}$. По числам M_1 и M_2 строим соответствующие характеристики и проводим на расстоянии r_0 две линии тока, каждая из которых состоит из двух отрезков



Фиг. 254. Схема сверхзвуковой конфузурной решётки, не имеющей волнового сопротивления.

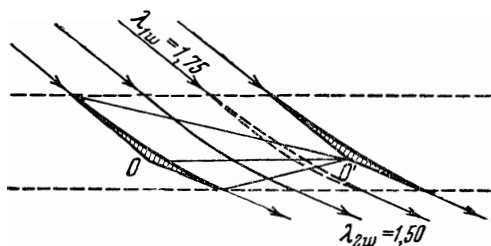
прямых и криволинейного участка (фиг. 254), определяемого по уравнению (29) главы IV. Продолжим прямолинейные отрезки 1—1 и 2—2, являющиеся касательными в точках 1 и 2 к криволинейному участку линии тока, до их пересечения в точке O' .

В результате построения мы получили некоторый профиль с бесконечно тонкими передней и задней кромками, не вызывающий никаких возмущений в потоке.

Повторяя аналогичный приём построения применительно к точке O' , получаем второй профиль решётки, идентичный первому, и затем все остальные профили. Такая решётка не имеет волнового сопротивления.

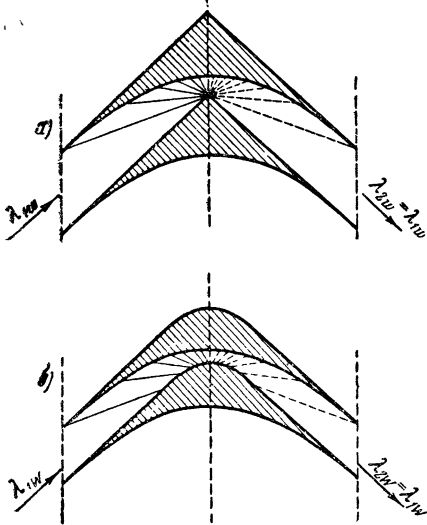
Обращая течение, нетрудно конфузурную решётку превратить в диффузурную (фиг. 255), однако в последнем случае область потока, где происходит сжатие газа, может оказаться местом образования скачков уплотнения и волновых потерь.

Используя течение сжатия около тупого угла (обращённое течение расширения), построим некоторый участок криволинейного канала с плавным уменьшением скорости и давле-



Фиг. 255. Диффузурная решётка, полученная обращением течения в конфузурной решётке (фиг. 254).

нием p после поворота потока. Если теперь добавить симметричный второй участок, в котором осуществляется течение расширения

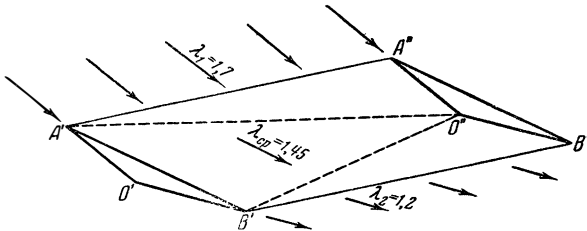


Фиг. 256 Схема активной сверхзвуковой решётки без волнового сопротивления.

от давления p до первоначального давления p_1 , то мы получим криволинейный активный канал, а следовательно, сможем построить активную решётку профилей (256, а). При этом предполагается, что течение сжатия идёт без потерь, хотя в действительности это мало вероятно.

Аналогичным образом можно построить решётку, каждый профиль которой образован двумя линиями тока; при этом поверхность профиля имеет криволинейную, а не ломаную форму (фиг. 256, б).

Можно представить себе сверхзвуковые решётки, в которых сжатие газа происходит в скачках уплотнения, например диффузорную решётку со сжатием газа в косых скачках. Для этого применим профили в форме



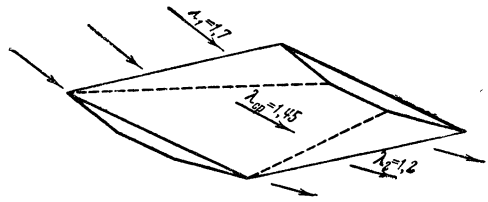
Фиг. 257 Сверхзвуковая решётка из треугольников, обладающая волновым сопротивлением.

предельного для косого скачка при данном значении M_1 , т. е. получаем обтекание клина с косым скачком уплотнения.

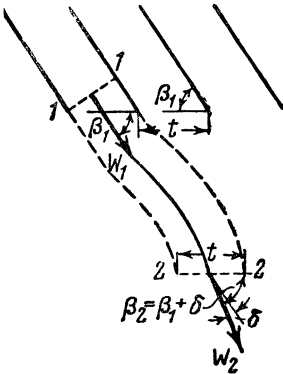
Правее линии скачка уплотнения $A'O'$ осуществляется равномерное течение газа параллельно стенке $A'B'$ со скоростью $\lambda_{ср} < \lambda_1$ и давлением $p_{ср} > p_1$. За точкой B' частицы газа попа-

дают в область повышенного давления ($p_2 > p_{cp}$), в связи с чем возникает второй скачок уплотнения $B'O''$, в котором поток снова изменяет своё направление. Вершину следующего профиля решётки помещают в точку пересечения скачков O'' , а грани $O''B''$ и $O'B'$ проводят параллельно направлению потока после второго скачка. Таким образом, треугольные профили $A'B'O'$ и $A''B''O''$ располагаются параллельно.

Продолжая процесс построения аналогичным образом, получим решётку, в которой изменение параметров потока происходит только внутри межлопаточного канала. Эта решётка обладает волновым сопротивлением, определяемым по известным формулам для потерь полного давления в системе из двух косых скачков. Заметим, что аналогичным построением можно получить решётку, состоящую из трапеций (фиг. 258), которая имеет большую плотность, чем решётка из треугольников (фиг. 257).



Фиг. 258. Сверхзвуковая решётка из трапеций, обладающая волновым сопротивлением.



Фиг. 259. К расчёту расширения газа в косом срезе решётки пластин.

Мы рассматривали чисто сверхзвуковые решётки. Однако для сопловых аппаратов турбин применяются и такие конфузурные решётки, в межлопаточных каналах которых имеются участки как дозвуковых, так и сверхзвуковых скоростей. Поток набегаёт на такую решётку с малой дозвуковой скоростью, а на выходе из решётки становится сверхзвуковым.

Обычно в таких решётках предусматривается расширение в косом срезе, расчёт которого в случае решётки излагается ниже.

В отличие от изоэнтропического истечения из косого среза индивидуального сопла, рассмотренного в главе IV, в случае косого среза в сопловой решётке возникают дополнительные потери энергии в некоторой системе скачков уплотнения. Эти скачки получаются из-за дополнительной деформации струй, которая вызывается тем, что поток по выходе из решётки должен сплошь заполнить всё зарешёточное пространство.

Удачный и простой метод расчёта косого среза дан Г. Ю. Степановым для случая решётки пластин (фиг. 259); остановимся

на этом методе, придерживаясь изложения автора. В сечении $1-1$, перпендикулярном к пластинам, скорость газа ω_1 , давление p_1 и плотность ρ_1 равны критическим. Сечение $2-2$ расположим параллельно фронту решётки и на таком расстоянии от неё, чтобы поле скоростей и давлений можно было считать однородным. Выделим часть потока жидкости, ограниченную выбранными сечениями, частью пластины и двумя конгруэнтными линиями тока, и применим к ней три основных уравнения: сохранения массы, импульса и энергии.

В соответствии с уравнением неразрывности расход газа через сечение $1-1$ должен быть равен расходу через сечение $2-2$:

$$\rho_1 \omega_1 t \sin \beta_1 = \rho_2 \omega_2 t \sin (\beta_1 + \delta). \quad (71)$$

Учитывая, что в идеальном газе силы трения отсутствуют, и применяя уравнение импульсов в проекции на направление пластин, найдём:

$$\rho_1 \omega_1^2 t \sin \beta_1 + p_1 t \sin \beta_1 = \rho_2 \omega_2^2 t \sin (\beta_1 + \delta) \cos \delta + p_2 t \sin \beta_1. \quad (72)$$

Из уравнения энергии следует, что в любом энергетически изолированном процессе, каким, в частности, является и рассматриваемый процесс, температура торможения сохраняется постоянной:

$$T_{01} = T_{02},$$

или по уравнению теплосодержаний

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{k-1}{k} \frac{\omega_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{k-1}{k} \frac{\omega_2^2}{2}. \quad (73)$$

Написанные уравнения (71) — (73) позволяют найти три неизвестные: ρ_2 , ω_2 и δ , как функции критических параметров состояния газа в узком сечении, величин β_1 , p_2 и показателя адиабаты k .

Из уравнения (71) имеем:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\omega_2 \sin (\beta_1 + \delta)}{\omega_1 \sin \beta_1}. \quad (74)$$

Из уравнений (72) и (74) следует:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho_1 \omega_1^2} + 1 \right) \frac{1}{\cos \delta}, \quad (75)$$

или, так как при критическом режиме имеет место соотношение

$$\frac{p_1}{\rho_1 \omega_1^2} = \frac{1}{k},$$

то получаем:

$$\lambda_2 = \frac{w_2}{w_1} = \frac{k+1 - \frac{p_2}{p_1}}{k \cos \delta}. \quad (76)$$

Далее из уравнений (73) и (74) находим:

$$\frac{k+1}{2k} = \frac{1}{k} \frac{p_2}{p_1} \frac{w_2}{w_1} \frac{\sin(\beta_1 + \delta)}{\sin \beta_1} + \frac{k-1}{2k} \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^2;$$

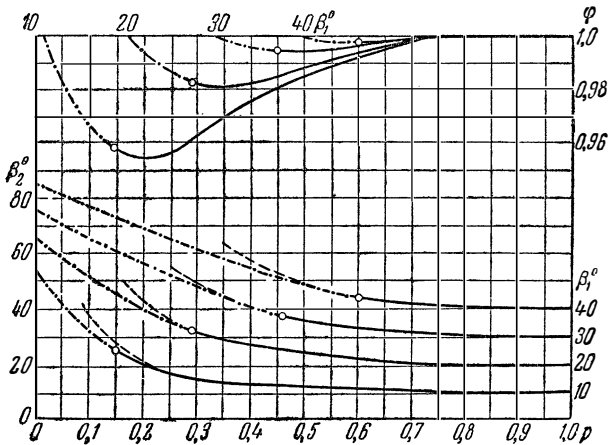
используя (76), приходим к квадратному уравнению, связывающему $\frac{p_2}{p_1} = \bar{p}$ и $\text{tg } \delta$:

$$\text{tg}^2 \delta + \frac{2k}{k-1} \frac{\bar{p} \text{ctg } \beta_1}{k+1-\bar{p}} \text{tg } \delta - \frac{k+1}{k-1} \left(\frac{1-\bar{p}}{k+1-\bar{p}}\right)^2 = 0, \quad (77)$$

откуда

$$\text{tg } \delta = \frac{\sqrt{\left(\frac{k}{k-1} \bar{p} \text{ctg } \beta_1\right)^2 + \frac{k+1}{k-1} (1-\bar{p})^2} - \frac{k}{k-1} \bar{p} \text{ctg } \beta_1}{k+1-\bar{p}}. \quad (78)$$

Отрицательный корень отброшен, как не удовлетворяющий усло-



Фиг. 260. Угол выхода потока $\beta_2 = \beta_1 + \delta$ и скоростной коэффициент φ в косом срезе решётки пластин. — — — приближённая формула (79), — — — область нереальных режимов, о — $M_2 \sin \beta_2 = 1$.

вию $\delta = 0$ при $\bar{p} = 1$. Приближённо при малых величинах δ

$$\delta \approx \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{(1-\bar{p})^2}{\bar{p}(1+k-\bar{p})} \cdot \text{tg } \beta_1. \quad (79)$$

Скоростной коэффициент φ определяется с помощью уравнения (76) как отношение действительной скорости к теоретиче-

ской, которую имел бы газ в случае идеального адиабатического расширения:

$$\varphi = \frac{\omega_2}{\omega_{2 \text{ ид}}} = \frac{\frac{k+1-p}{k \cos \delta}}{\sqrt{\frac{k+1}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_{01}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}}, \quad (80)$$

где p_{01} — полное давление газа в сечении $1-1$.

Результаты вычислений угла выхода потока $\beta_2 = \beta_1 + \delta$ и скоростного коэффициента φ по полученным формулам для нескольких величин углов β_1 и $k = 1,4$ приведены на фиг. 260. Отметим, что приближённую формулу (79) можно считать достаточно точной при $\delta \leq 10^\circ$.

Скоростной коэффициент оказывается близким к единице, чем оправдывается пренебрежение потерями (в системе скачков) при разработке приближённых методов расчёта расширения газа в косом срезе.

Согласно (76) и (77) проекция скорости ω_2 на ось решётки может стать больше скорости звука a_2 . Вычисления показывают, что отношение $\frac{p_{01}}{p_{02}}$ и энтропия S достигают максимума при равенстве осевой проекции скорости величине скорости звука:

$$\omega_2 \cdot \sin \beta_2 = a_2$$

или

$$M_2 \cdot \sin \beta_2 = 1;$$

этот режим истечения, отмеченный на фиг. 260 кружками, следует считать предельным для расширения в косом срезе; при этом режиме характеристики в сечении $2-2$ параллельны фронту решетки, и, следовательно, дальнейшее уменьшение давления не может сказаться на процессе расширения в косом срезе решётки. Если бы согласно (76) и (77) при $M_2 \cdot \sin \beta_2 > 1$ осуществлялось дальнейшее расширение газа, то имел бы место скачок разрежения, параллельный фронту решётки, который удовлетворяет уравнениям (71) — (73), но такой скачок невозможен по физическим соображениям.

ГЛАВА IX

ЭЛЕМЕНТЫ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ КОМПРЕССОРОВ И ТУРБИН

§ 1. Основные типы лопаточных турбомашин и их элементы

Существуют две группы лопаточных турбомашин: турбомашин, отводящие энергию от потока жидкости или газа, и турбомашин, подводящие энергию к потоку; к первой группе относятся турбины и ветряки, ко второй — различного рода нагнетательные машины: насосы, воздуходувки, вентиляторы, компрессоры, авиационные и судовые винты.

В зависимости от рода жидкости или газа турбомашин делятся на гидравлические, паровые, газовые, воздушные.

Всякая турбомашин состоит из вращающихся элементов — рабочих колёс, в которых осуществляется техническая работа и изменяются полное давление и теплосодержание жидкости или газа, и неподвижных аппаратов, служащих лишь для изменения величины и направления скорости потока. В зависимости от местоположения различают *входные* направляющие аппараты, расположенные перед первым рабочим колесом, *выходные* (спрямляющие) аппараты, помещаемые за последним рабочим колесом, и *промежуточные* аппараты, установленные между рабочими колёсами.

Рабочее колесо представляет собой вращающийся лопаточный венец, т. е. совокупность некоторого числа совершенно одинаковых лопаток, равномерно и идентично расположенных на центральном теле вращения, называемом втулкой венца.

Если в лопаточной машин имеется одно рабочее колесо, то она называется *одноступенчатой*; при наличии в машин нескольких последовательно установленных рабочих колёс она именуется *многоступенчатой*. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением одноступенчатых машин.

Неподвижный аппарат турбомашин часто представляет собой лопаточный венец, напоминающий по своей форме венец рабочего колеса и укрепляемый на неподвижном корпусе турбомашин. Однако встречаются и безлопаточные неподвижные

аппараты (входная улитка гидротурбины, безлопаточный выходной диффузор центробежного компрессора и т. д.).

Входной — направляющий — аппарат обычно предназначается для преобразования давления в скоростной напор и придания потоку перед первым рабочим колесом нужного направления, т. е. закрутки потока; поэтому течение газа в направляющем аппарате является конфузорным.

Выходной — спрямляющий — аппарат используется для ликвидации закрутки и торможения потока, выходящего из последнего рабочего колеса; при этом абсолютная скорость газа уменьшается, а статическое давление растёт, т. е. спрямляющий аппарат является диффузором.

Промежуточные аппараты служат одновременно для спрямления потока после предыдущего колеса и придания ему должного направления перед последующим колесом; промежуточные аппараты могут быть диффузорными, конфузорными и активными. Если соседние рабочие колёса турбомашин имеют противоположные направления вращения, то можно обойтись и без промежуточных аппаратов. Часто встречаются машины с неполным набором неподвижных аппаратов; например, в осевых вентиляторах и компрессорах обычно не бывает входного направляющего аппарата; в одноступенчатых турбинах, как правило, нет выходного спрямляющего аппарата; ветряки и воздушные винты состоят только из рабочих колёс, т. е. вовсе не имеют неподвижных аппаратов.

Основное свойство турбины можно выразить следующим неравенством:

$$p_{0с} < p_{0н},$$

т. е. отношение полного давления за турбиной ($p_{0с}$) к полному давлению перед турбиной ($p_{0н}$), называемое *степенью уменьшения полного давления*, всегда меньше единицы:

$$\pi_{0т} = \frac{p_{0с}}{p_{0н}} < 1.$$

При этом в турбине всегда уменьшается и температура торможения:

$$T_{0с} < T_{0н}.$$

Обычно уменьшение полного давления в турбине сопровождается падением статического давления.

Встречаются турбины, в которых статическое давление падает только в сопловом аппарате¹⁾, где оно преобразуется в скоростной напор, а в рабочем колесе остаётся неизменным;

¹⁾ Так обычно называют входной направляющий аппарат турбины.

такие турбины называются *активными*. Если в активной турбине имеется спрямляющий аппарат, то в нём статическое давление обычно даже увеличивается. Итак, в активной турбине сопловой венец — конфузорный, венец рабочего колеса — активный, венец спрямляющего аппарата, как правило, — диффузорный. В реактивной турбине статическое давление уменьшается как в сопловом аппарате, так и в рабочем колесе, т. е. здесь венцы соплового аппарата и колеса являются конфузорными, и только венец спрямляющего аппарата может быть диффузорным.

Ввиду того, что диффузорные каналы являются источниками более значительных потерь, чем конфузорные, в турбинах часто стремятся обойтись без спрямляющего аппарата; для этого подбирают параметры соплового аппарата и колеса так, чтобы поток на выходе из колеса не имел закрутки, т. е. чтобы вращательная составляющая скорости потока за колесом равнялась нулю. Иногда турбины подразделяются на турбины скорости и турбины давления; в первых используется главным образом кинетическая энергия набегающего потока (например, ветряки), во вторых срабатываются большие перепады давления (например, паровые турбины).

Основная особенность нагнетательных машин может быть выражена следующим образом:

$$p_{0н} < p_{0с};$$

величина

$$\pi_{0н} = \frac{p_{0с}}{p_{0н}},$$

называемая *степенью повышения полного давления*, в этих машинах всегда больше единицы. В неохлаждаемом компрессоре температура торможения также растёт:

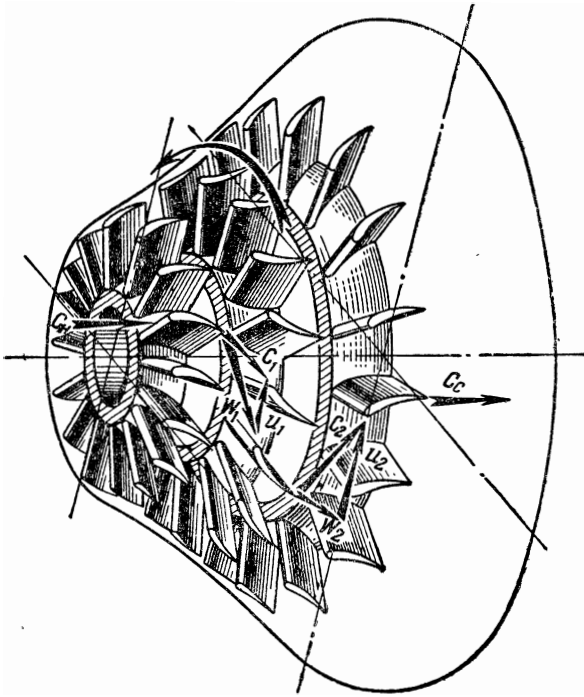
$$T_{0с} > T_{0н}.$$

В компрессоре повышение полного давления сопровождается увеличением статического давления, однако венец входного аппарата является конфузорным, поэтому увеличение статического давления обычно осуществляется в венцах рабочего колеса и выходного аппарата.

Применение активного и особенно конфузорного рабочего колеса в компрессоре невыгодно, так как получающийся при этом очень большой прирост статического давления в выходном аппарате является источником значительных диффузорных потерь. Для того чтобы избежать больших диффузорных потерь, ограничивают прирост полного давления в одной ступени компрессора; этим объясняется тот известный факт, что при прочих равных условиях возможная степень изменения полного

давления в ступени компрессора гораздо меньше, чем в ступени турбины.

Течение газа через ступень (фиг. 261) определяется параметрами потока в характерных сечениях ступени: на входе в ступень (сечение «н»), в зазоре между венцами входного аппарата и рабочего колеса (сечение 1), в зазоре между венцами рабо-



Фиг. 261. Ступень компрессора.

чего колеса и спрямляющего аппарата (сечение 2) и на выходе из ступени (сечение «с»).

Встречаются *осевые, радиальные, диагональные и комбинированные* ступени турбомашин. В осевой машине (фиг. 262) частицы газа движутся по поверхностям, близким к цилиндрическим, т. е. радиальные составляющие скорости весьма малы. В *радиальной* турбомашине (фиг. 263) поток имеет весьма малые осевые составляющие скорости, т. е. частицы газа движутся почти в перпендикулярных к оси машины плоскостях. При наличии в потоке радиальных и осевых составляющих скорости одного порядка частицы газа движутся по наклонным к оси колеса поверхностям; машины соответствующей схемы называются

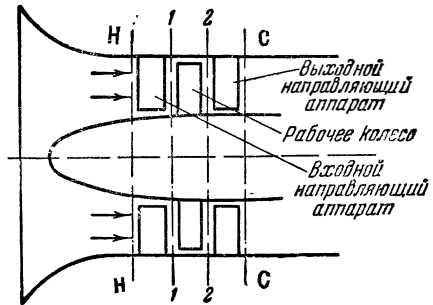
диагональными. Если при переходе от одного характерного сечения ступени к другому направление потока в плоскости, проходящей через ось машины, существенно изменяется, то ступень называют *комбинированной*.

Рассечём ступень турбомашины двумя близкими поверхностями тока, являющимися поверхностями вращения с образующими $1-2$ и $1'-2'$ (фиг. 264). В пространстве, заключённом между этими двумя поверхностями, расположится элементарная ступень лопаточной машины, которая состоит из элементарных лопаточных венцов рабочего колеса и направляющих аппаратов.

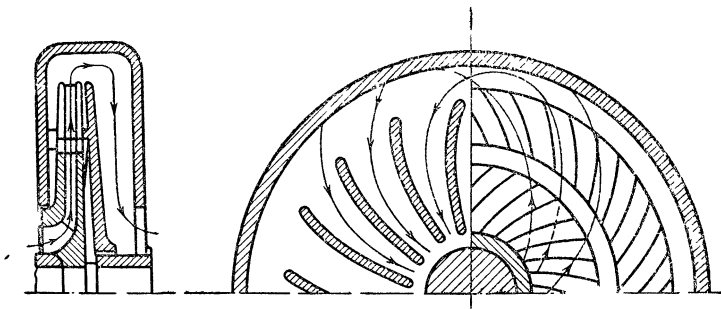
В зависимости от соотношения между радиусами венцов при входе и выходе элементарные венцы рабочего колеса разделяются на центробежные

($\frac{r_2}{r_1} > 1$), центростремительные ($\frac{r_2}{r_1} < 1$) и постоянного радиуса ($\frac{r_2}{r_1} = 1$).

Кроме того, элементарные венцы различаются по направлению составляющей скорости в плоскости, проходящей через ось

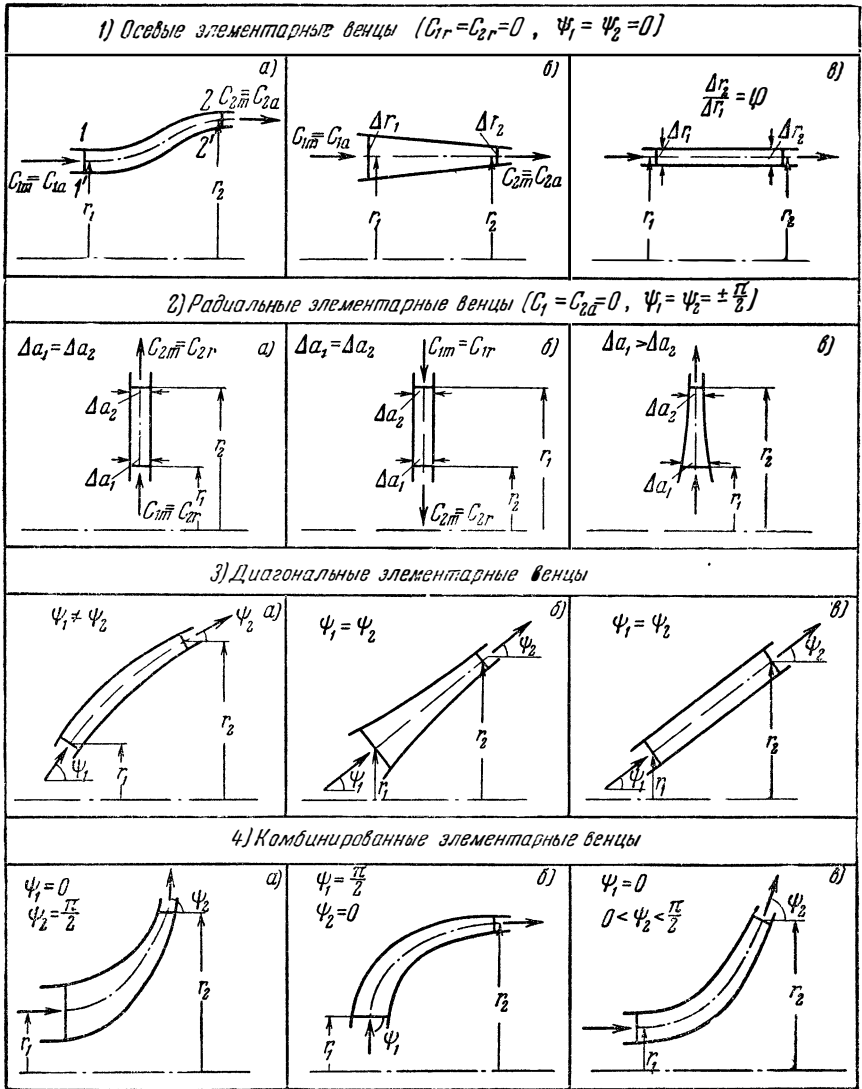


Фиг. 262. Схема ступени осевого компрессора.



Фиг. 263. Схема ступени центробежного компрессора.

машины на входе и выходе (меридиональной составляющей), определяемому углом ψ между вектором составляющей скорости и осью машины; положительным считают такой угол, при котором составляющая скорости направлена в сторону возрастающего радиуса.



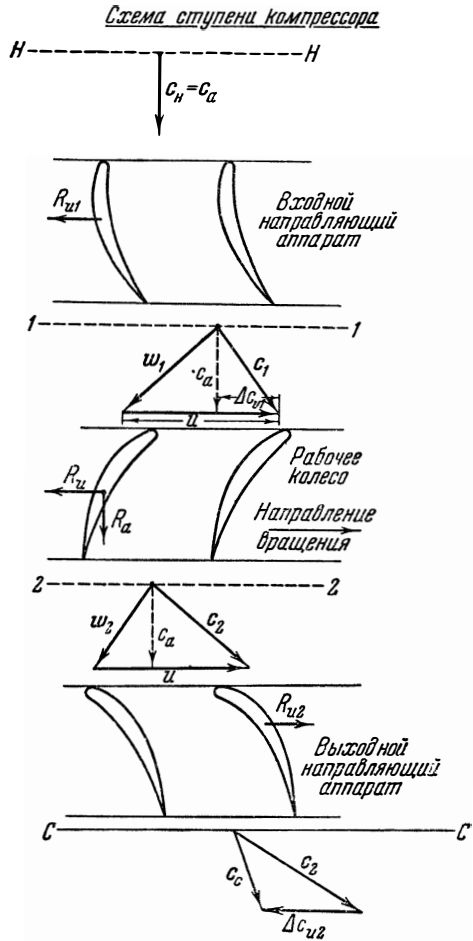
Фиг. 264. Основные случаи элементарных венцов. 1—осевые элементарные венцы: а—осевой венец, б—осевой венец с цилиндрической средней поверхностью, в—цилиндрический венец; 2—радиальные элементарные венцы: а—центробежный венец постоянной ширины, б—центростремительный венец постоянной ширины, в—центробежный венец переменной ширины; 3—диагональные элементарные венцы: а—криволинейная средняя поверхность, б—коническая средняя поверхность, в—конический венец; 4—комбинированные элементарные венцы: а—осе-радиальный центробежный венец, б—радиально-осевой центробежный венец, в—осе-диагональный центробежный венец.

Когда меридиональная составляющая скорости на входе и выходе направлена параллельно оси машины ($\psi_1 = \psi_2 = 0$), венец называют *осевым*; если при этом $r_1 = r_2$ и $\Delta r_1 = \Delta r_2$, то венец является *цилиндрическим*.

При $|\psi_1| = |\psi_2| = \frac{\pi}{2}$ имеем радиальный венец. Встречаются также венцы, имеющие разные углы потока при входе и выходе, равные или нулю или $\pm \frac{\pi}{2}$. Такие венцы называются *радиально-осевыми* или *осе-радиальными* в зависимости от значений углов ψ_1 и ψ_2 . Так, например, центробежный осе-радиальный венец ($\frac{r_2}{r_1} > 1$, $\psi_1 = 0$) применяется в рабочем колесе центробежного компрессора поршневого авиамотора.

Если значения углов ψ_1 и ψ_2 не равны нулю или $\pm \frac{\pi}{2}$, а имеют промежуточные значения, то венец называют *диагональным*. Диагональный венец, у которого $\psi_1 = \psi_2$, называют коническим венцом. Существуют венцы осе-диагональные, диагонально-радиальные и т. д.

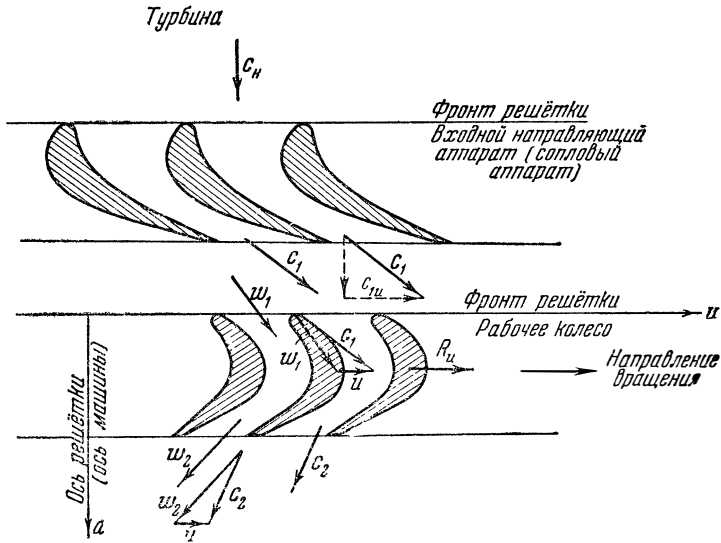
Меридиональные сечения некоторых типов элементарных лопаточных венцов представлены на фиг. 264. Цилиндрический элементарный венец можно превратить в прямолинейную решётку, развернув его на плоскость; для того чтобы обтекание всех профилей было одинаковым (как в лопаточном венце), решётка должна состоять из бесконечного числа профилей. Пример



Фиг. 265. Развёртка на плоскость элементарной ступени осевого компрессора с цилиндрической средней поверхностью

такой развёртки элементарной цилиндрической ступени турбины и компрессора представлен на фиг. 265 и 266.

В случае радиального элементарного венна течение происходит в плоскости и поэтому не требуется никакой развёртки для изображения такого течения.



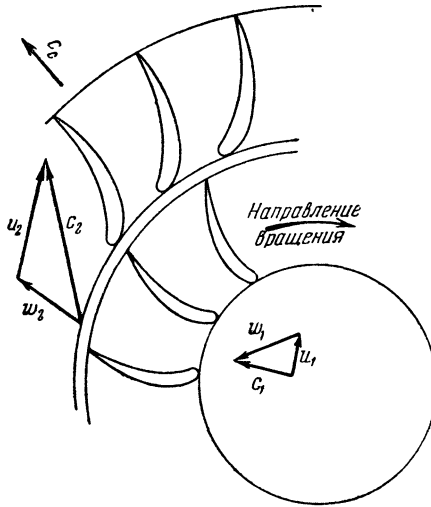
Фиг. 266. Развёртка на плоскость элементарной ступени осевой турбины с цилиндрической средней поверхностью.

На фиг. 267 и 268 представлены радиальные элементарные ступени центробежного компрессора и центростремительной турбины.

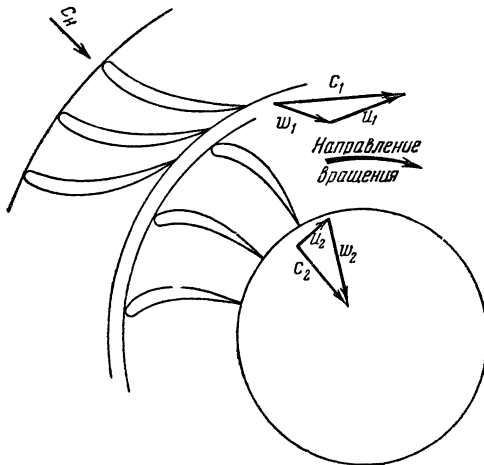
Если во всех характерных сечениях турбомашины скорость потока меньше местной скорости звука, то такая ступень называется *дозвуковой* даже и в тех случаях, когда местные скорости в межлопаточных каналах превосходят скорость звука.

Наличие в одном или нескольких характерных сечениях ступени сверхзвуковых скоростей потока является признаком *сверхзвуковой* ступени.

Обычно в ступени турбомашин теплообмен между газовым потоком и внешней средой либо вовсе отсутствует, либо незначителен; поэтому в дальнейшем мы рассматриваем только адиабатические течения газа в турбомашинах, т. е. принимаем во внимание лишь гидравлические потери и пренебрегаем тепловыми потерями.



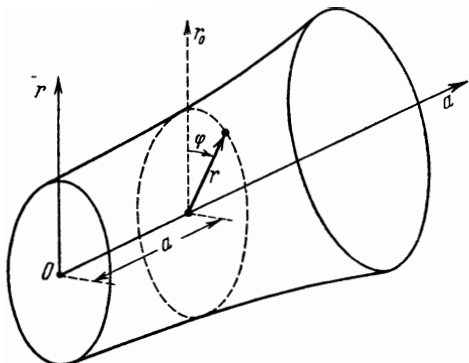
Фиг. 267. Элементарная ступень радиального центробежного компрессора.



Фиг. 268. Элементарная ступень радиальной центробежной турбины.

§ 2. Связь между параметрами газа в абсолютном и относительном движениях

Любая точка потока в турбомашине определяется с помощью цилиндрической системы координат a, φ, r (фиг. 269). Ось a совпадает с осью вращения колеса и направлена по потоку, ось r направлена по радиусу от оси колеса, угол φ отсчитывается от некоторого начального положения r_0 .



Фиг. 269. Цилиндрическая система координат турбомашин.

Мы будем различать в каждой точке потока две скорости: *абсолютную скорость* c и *относительную скорость* w ; под первой понимается скорость движения частицы в неподвижной системе координат, связанной с кожухом или направляющими аппаратами; под второй пони-

мается скорость по отношению к вращающейся системе координат, связанной с рабочим колесом.

Обычно вектор скорости проектируют на три взаимно перпендикулярных направления и получают составляющие скорости: осевую c_a , окружную c_u и радиальную c_r . Осевое направление параллельно оси машины, радиальное идёт по радиусу, а окружное совпадает с направлением окружной скорости в данной точке (фиг. 270).

Вводя в рассмотрение угол между вектором скорости и положительным направлением оси u , который мы для вектора абсолютной скорости обозначим α , а для вектора относительной скорости β , получим следующее выражение для окружной составляющей скорости:

$$c_u = c \cos \alpha,$$

$$w_u = w \cos \beta.$$

Окружную составляющую абсолютной скорости часто называют *закруткой потока*. Различают положительную — по вращению — и отрицательную — против вращения — закрутки потока.

Через оси координат u, a, r проведём три координатные плоскости. Плоскость, проходящая через оси r и a , называется *меридиональной*, плоскость, проходящая через оси r и u и перпендикулярная к оси машины, — *радиальной*, плоскость, проходящая через оси u и a , — *касательной*.

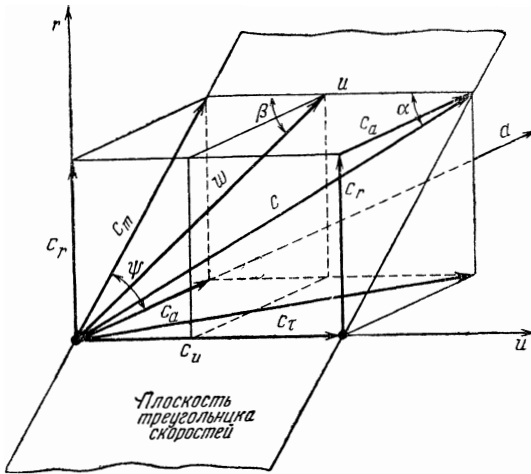
Кроме проекций скорости на оси, используются также проекции скорости на координатные плоскости: меридиональную, радиальную и касательную (фиг. 270).

Меридиональные составляющие абсолютной и относительной скоростей определяются из равенств

$$c_m = c \sin \alpha,$$

$$\omega_m = \omega \sin \beta.$$

Меридиональная скорость равна геометрической сумме радиальной и осевой составляющих скорости. Последние могут



Фиг. 270. Составляющие скорости по координатным осям и координатным плоскостям.

быть определены, если известен угол ψ между направлением меридиональной скорости и осью машины a (фиг. 270):

$$c_r = c_m \sin \psi = c \sin \alpha \sin \psi,$$

$$c_a = c_m \cos \psi = c \sin \alpha \cos \psi.$$

В дальнейшем вектор скорости мы будем определять по трём его проекциям на оси a , u и r или по меридиональной и окружной скоростям и углу ψ .

В общем случае величина абсолютной скорости и все её проекции суть функции координат точки и времени, т. е.

$$c = c(a, \varphi, r, t),$$

$$c_a = c_a(a, \varphi, r, t),$$

$$c_u = c_u(a, \varphi, r, t),$$

$$c_r = c_r(a, \varphi, r, t).$$

В дальнейшем задачу о движении газа через турбомашину мы ограничим только случаем стационарных движений; в таком случае угловая скорость колеса должна быть постоянной ($\omega = \text{const}$); кроме того, будем предполагать, что параметры потока не зависят от угла φ :

$$\begin{aligned}c &= c(a, r), \\c_a &= c_a(a, r), \\c_u &= c_u(a, r), \\c_r &= c_r(a, r).\end{aligned}$$

Тогда и относительная скорость w и все её составляющие также будут функциями только a и r :

$$\begin{aligned}w &= w(a, r), \\w_a &= w_a(a, r), \\w_u &= w_u(a, r), \\w_r &= w_r(a, r).\end{aligned}$$

Перейдём к установлению связи между относительной и абсолютной скоростями. Согласно известной теореме кинематики абсолютная скорость равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей.

В рассматриваемом случае переносной скоростью является окружная скорость, равная по величине

$$u = \omega r$$

и направленная перпендикулярно к меридиональной плоскости. Поэтому проекции абсолютной и относительной скоростей на меридиональную плоскость равны между собой:

$$c_m = w_m;$$

отсюда следует, что

$$\begin{aligned}c_r &= w_r, \\c_a &= w_a;\end{aligned}$$

их проекции на ось u связаны равенством

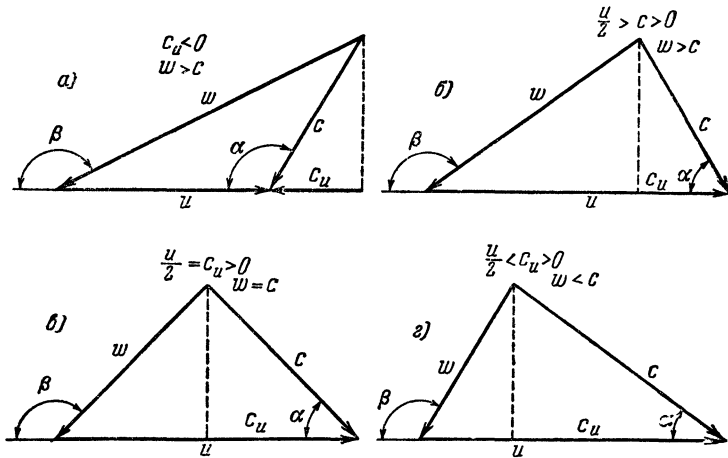
$$c_u = w_u + u. \quad (1)$$

Векторный треугольник, составленный абсолютной, относительной и переносной (окружной) скоростями, называют треугольником скорости в данной точке потока, а плоскость, проходящую через этот треугольник, — плоскостью треугольника скорости; эта плоскость перпендикулярна к меридиональной плоскости и составляет угол ψ с направлением оси турбомашины.

Величина и направление относительной скорости зависят от закрутки потока и величины окружной скорости.

В случае отрицательной закрутки (фиг. 271) потока имеем $w > c$. Если положительная закрутка отвечает условию $c_u < 0,5u$, то относительная скорость больше абсолютной; при $c_u = 0,5u$ имеем равенство скоростей: $w = c$; при $c_u > 0,5u$ относительная скорость становится меньше абсолютной $w < c$.

В теории турбомашин обычно пользуются безразмерными скоростями потока. Различают два основных способа вычисления



Фиг. 271. Различные случаи закрутки потока: а—против вращений, б—по вращению при $c_u < \frac{u}{2}$, в—то же при $c_u = \frac{u}{2}$,

г—то же при $c_u > \frac{u}{2}$.

безразмерных скоростей. В первом случае величины относительной и абсолютной скоростей относят или к окружной скорости в данной точке потока, или к окружной скорости некоторой характерной точки рабочего колеса. Такая безразмерная скорость определяет характер течения в гидравлической лопаточной машине при бескавитационном режиме и в газовой лопаточной машине при малых дозвуковых скоростях, т. е. является критерием подобия.

При достаточно больших скоростях в газовых лопаточных машинах в качестве безразмерной скорости используют число M или коэффициент скорости λ .

Остановимся сначала на первом виде безразмерной скорости. Условимся отношение скорости потока к окружной скорости в данной точке обозначать прямой чертой, а отношение скорости к окружной скорости характерной точки рабочего колеса — допол-

нительно индексом k :

$$\bar{c} = \frac{c}{u}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{u},$$

$$\bar{c}_k = \frac{c}{u_k}, \quad \bar{\omega}_k = \frac{\omega}{u_k}.$$

Если ввести также безразмерную координату точки

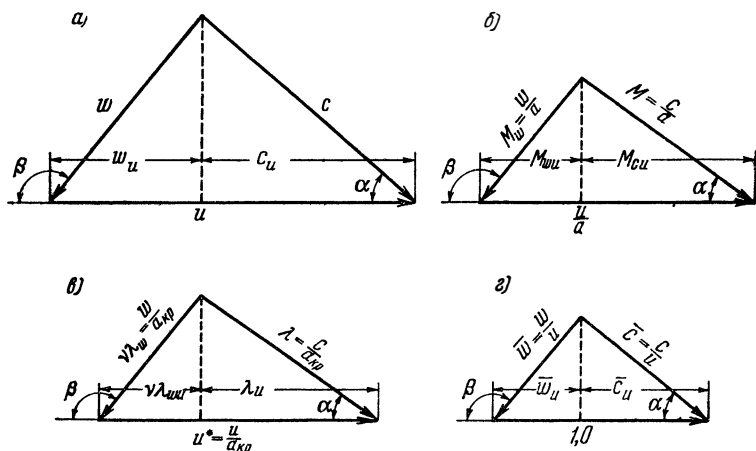
$$\bar{r} = \frac{r}{r_k},$$

где r_k есть радиус какой-либо характерной точки рабочего колеса, то получим:

$$\bar{c}_k = \bar{r} \bar{c},$$

$$\bar{\omega}_k = \bar{r} \bar{\omega}.$$

Применяя к треугольнику скоростей (фиг. 272, а) теорему синус-



Фиг. 272. Размерный и безразмерные треугольники скорости: а—размерный треугольник скорости, б—треугольник чисел M , в—треугольник коэффициентов скорости λ , г—треугольник скорости потока, отнесённой к окружной скорости колеса.

сов, можем написать:

$$c = \frac{\sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)},$$

$$\bar{\omega} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)}.$$

Используя последние равенства, легко получить следующие выражения для безразмерных составляющих скорости:

$$\begin{aligned}\bar{c}_m = \bar{w}_m &= \frac{\sin \beta \sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)}, \\ \bar{c}_a = \bar{w}_a &= \frac{\sin \alpha \sin \beta \cos \psi}{\sin (\beta - \alpha)}, \\ \bar{c}_r = \bar{w}_r &= \frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \psi}{\sin (\beta - \alpha)}.\end{aligned}$$

Таким образом, три угла α , β и ψ целиком и однозначно определяют величины безразмерных скоростей и их составляющих; равенство безразмерных скоростей и их составляющих означает подобие треугольников скорости. Зная безразмерные скорости, легко определить и характерные углы α , β и ψ по следующим очевидным формулам:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= \frac{\bar{c}_m}{c_u}, \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{\bar{c}_m}{c_u - 1} = \frac{\bar{w}_m}{w_u}, \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{\bar{c}_r}{c_a} = \frac{\bar{w}_r}{w_a},\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= \frac{\bar{c}_{km}}{c_{ku}}, \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{\bar{c}_{km}}{c_{ku} - r}, \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{\bar{c}_{kr}}{c_{ka}}.\end{aligned}$$

Перейдём к рассмотрению безразмерных газодинамических параметров потока. По определению числа M имеем для абсолютной скорости

$$M = \frac{c}{a_c}$$

и для относительной скорости

$$M_w = \frac{w}{a_w}.$$

Очевидно, что параметры потока: статическое давление, термодинамическая температура и плотность газа, а следовательно,

и скорость звука в потоке, не зависят от системы координат, т. е. являются одними и теми же в абсолютном и в относительном движениях:

$$\begin{aligned} p_c &= p_w = p, \\ T_c &= T_w = T, \\ \rho_c &= \rho_w = \rho, \\ a_c &= a_w = a. \end{aligned}$$

Поэтому отношение чисел M пропорционально отношению скоростей

$$\frac{M_w}{M} = \frac{w}{c},$$

откуда

$$\frac{M_w}{M} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Под числами M для составляющих скорости понимаются величины

$$M_u = \frac{c_u}{a},$$

$$M_m = \frac{c_m}{a}$$

и соответственно

$$M_{wu} = \frac{w_u}{a},$$

$$M_{wm} = \frac{w_m}{a}.$$

Разделив все стороны треугольника скоростей (фиг. 272, а) на величину скорости звука a в данной точке потока, получаем безразмерный треугольник скоростей в числах M (фиг. 272, б).

Из этого треугольника скоростей имеем следующую связь между числами M в относительном и абсолютном движениях:

$$M_{wm} = M_m,$$

$$M_{wu} = M_u - \frac{u}{a},$$

или

$$M_w = M_c \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

где

$$\beta = \arctg \frac{M_m}{M_u - \frac{u}{a}}.$$

Наличие безразмерной окружной скорости $\frac{u}{a}$ весьма затрудняет практическое использование этих формул, так как предварительно необходимо знать распределение скоростей звука в потоке.

Более удобно выразить окружную скорость в долях критической скорости абсолютного движения, величина которой в большинстве турбомашин является постоянной в каждом характерном сечении ступени.

Поделив все стороны треугольника скорости (фиг. 272, а) на величину критической скорости в абсолютном движении $a_{кр}$, получим подобный треугольник (фиг. 272, б) со сторонами

$$\frac{c}{a_{кр}} = \lambda,$$

$$\frac{w}{a_{кр}} = \frac{w}{a_{кр} w} \frac{a_{кр} w}{a_{кр}} = \lambda_w \frac{a_{кр} w}{a_{кр}},$$

$$\frac{u}{a_{кр}} = u^*.$$

Под коэффициентами составляющих скорости понимаются величины

$$\lambda_u = \frac{cu}{a_{кр}},$$

$$\lambda_m = \frac{cm}{a_{кр}}$$

и соответственно

$$\lambda_{wu} = \frac{wu}{a_{кр} w},$$

$$\lambda_{wm} = \frac{wm}{a_{кр} w} = \frac{cm}{a_{кр} w} = \lambda_m \frac{a_{кр}}{a_{кр} w}.$$

Следует отметить, что в отличие от теории косо го скачка уплотнения здесь при вычислении коэффициента составляющей скорости величина критической скорости определяется не по составляющей скорости, а по полной скорости (c или w).

Отношение критических скоростей пропорционально корню квадратному из отношения соответствующих температур торможения:

$$\nu = \frac{a_{кр} w}{a_{кр}} = \sqrt{\frac{T_{0w}}{T_0}}.$$

Величина температуры торможения зависит от скорости набегающего потока; этим и объясняется существенное различие

между величинами температуры торможения и критической скорости в относительном и абсолютном движениях:

$$T_{0w} = T + \frac{k-1}{2kgR} \omega^2,$$

$$T_0 = T + \frac{k-1}{2kgR} c^2.$$

Из последних двух равенств имеем:

$$\frac{T_{0w}}{T_0} = 1 + \frac{k-1}{2kgRT_0} (\omega^2 - c^2);$$

вводя максимальную скорость газа в абсолютном движении:

$$\frac{2kgRT_0}{k-1} = c_{\max}^2 = \frac{k+1}{k-1} a_{\text{кр}}^2,$$

получаем:

$$\frac{T_{0w}}{T_0} = 1 + \frac{\omega^2 - c^2}{c_{\max}^2} = 1 + \frac{k-1}{k+1} \frac{\omega^2 - c^2}{a_{\text{кр}}^2}.$$

Здесь

$$\omega^2 = \omega_m^2 + \omega_u^2,$$

$$c^2 = c_m^2 + c_u^2,$$

$$\omega_m = c_m,$$

откуда

$$\frac{T_{0w}}{T_0} = 1 - \frac{\omega_u^2 - c_u^2}{c_{\max}^2} = 1 + \frac{k-1}{k+1} \frac{\omega_u^2 - c_u^2}{a_{\text{кр}}^2}.$$

Из треугольника скорости имеем:

$$\omega_u^2 - c_u^2 = (c_u - u)^2 - c_u^2 = u^2 - 2uc_u;$$

отсюда

$$\frac{T_{0w}}{T_0} = 1 + \frac{k-1}{k+1} u^{*2} - 2 \frac{k-1}{k+1} u^* \lambda_u,$$

$$\nu = \frac{a_{w \text{ кр}}}{a_{\text{кр}}} = \sqrt{1 + \frac{k-1}{k+1} u^{*2} - 2 \frac{k-1}{k+1} u^* \lambda_u}. \quad (2)$$

При меридиональном направлении потока ($\lambda_u = 0$)

$$\nu = \sqrt{1 + \frac{k-1}{k+1} u^{*2}}.$$

Можно выразить величину ν и через углы α и β или через величину \bar{c}_u :

$$\nu = \sqrt{1 + \frac{k-1}{k+1} u^{*2} \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin^2 (\beta - \alpha)}} = \sqrt{1 + \frac{k-1}{k+1} u^{*2} (1 - 2\bar{c}_u)},$$

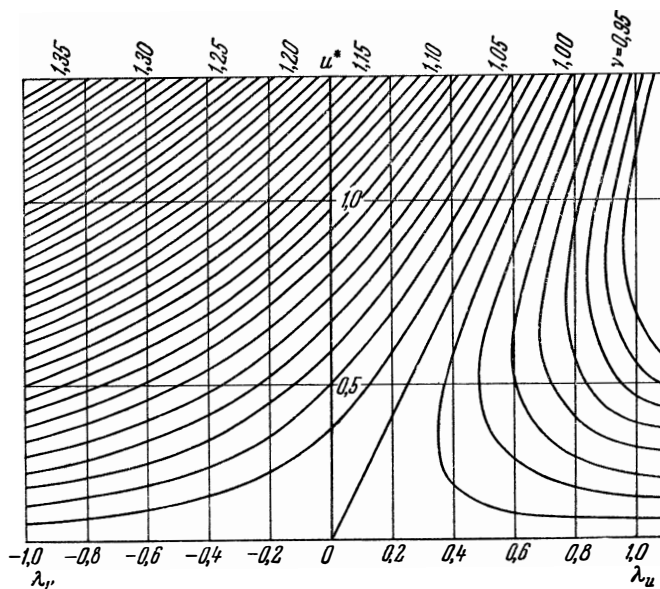
Для воздуха имеем:

$$\nu = \sqrt{1 + \frac{u^{*2}}{6} - \frac{u^*}{3} \lambda_u}$$

и при меридиональном направлении абсолютной скорости

$$\nu = \sqrt{1 + \frac{u^{*2}}{6}}.$$

Кривые постоянных значений ν для воздуха представлены на фиг. 273.



Фиг. 273. График зависимости отношения критической скорости в относительном движении к критической скорости в абсолютном движении $\nu = \frac{a_{кр} w}{a_{кр}}$ от безразмерной окружной скорости u^* и коэффициента закрутки потока λ_u .

По оси ординат отложена величина безразмерной окружной скорости, а по оси абсцисс — коэффициент окружной составляющей скорости. Положительная ось абсцисс соответствует положительной закрутке потока, т. е. закрутке по вращению.

Нетрудно видеть, что кривые постоянных значений ν — гиперболы, имеющие асимптотами ось абсцисс и прямую:

$$u^* = 2\lambda_u;$$

на этой прямой:

$$\nu = 1,$$

т. е. температуры торможения в абсолютном и относительном движениях одинаковы, так как треугольник скоростей становится равнобедренным (фиг. 271, в):

$$\begin{aligned}\omega &= c, \\ \bar{c}_u &= 0,5.\end{aligned}$$

Прямая $u^* = 2\lambda_u$ разделяет всю совокупность значений u^* , λ_u на область, лежащую справа от этой прямой, в которой $\nu < 1$, т. е. температура торможения в относительном движении ниже, чем в абсолютном движении, и на область значений u^* и λ_u , лежащую слева от этой прямой, в которой $\nu > 1$ и соответственно температура торможения в относительном движении больше, чем в абсолютном движении.

Зная величину ν , определяем отношение других параметров в изоэнтропически заторможенном потоке:

$$\begin{aligned}\frac{T_{0w}}{T_0} &= \nu^2, \\ \frac{\gamma_{w \text{ кр}}}{\gamma_0} &= \frac{\gamma_{0w}}{\gamma_0} = \nu^{\frac{2}{k-1}}, \\ \frac{p_{0w}}{p_0} &= \nu^{\frac{2k}{k-1}}, \\ \frac{\gamma_{w \text{ кр}} a_{w \text{ кр}}}{\gamma_{\text{кр}} a_{\text{кр}}} &= \nu^{\frac{k+1}{k-1}}.\end{aligned}$$

Для воздуха ($k = 1,4$)

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_{w \text{ кр}}}{\gamma_{\text{кр}}} &= \nu^5, \\ \frac{p_{0w}}{p_0} &= \nu^7, \\ \frac{\gamma_{w \text{ кр}} a_{w \text{ кр}}}{\gamma_{\text{кр}} a_{\text{кр}}} &= \nu^6.\end{aligned}$$

Если скорость потока и окружную скорость отнести к максимальной скорости газа в данной точке:

$$\begin{aligned}\Lambda &= \frac{c}{c_{\text{max}}} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \lambda, \\ U &= \frac{u}{c_{\text{max}}} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} u^*,\end{aligned}$$

то выражение для ν принимает универсальный вид, не зависящий от природы газа:

$$\nu = \sqrt{1 + U^2 - 2U\Lambda_u}.$$

Это обстоятельство позволяет воспользоваться графиком зависимости $\nu(u^*, \lambda_u)$, вычисленным для воздуха (фиг. 273), при определении величины ν в любом газе.

Определим зависимость величины коэффициента относительной скорости λ_w от параметров абсолютного потока.

Из соотношения

$$c^2 + u^2 - 2uc \cos \alpha - w^2 = 0,$$

справедливого для любого треугольника скорости, после деления его слагаемых на квадрат критической скорости в данной точке потока имеем:

$$\lambda^2 + u^{*2} - 2u^* \lambda_u - \frac{w^2}{a_w^2 \text{кр}} \cdot \frac{a_w^2 \text{кр}}{a_{\text{кр}}^2} = 0,$$

откуда согласно (2) получаем следующее выражение для коэффициента относительной скорости:

$$\lambda_w = \sqrt{\frac{\lambda^2 + u^{*2} - 2u^* \lambda_u}{1 + \frac{k-1}{k+1} u^{*2} - 2 \frac{k-1}{k+1} u^* \lambda_u}} \quad (3)$$

или

$$\lambda_w = \sqrt{\frac{k+1}{k-1} + \frac{\lambda^2 - \frac{k+1}{k-1}}{\nu}}$$

и соответственно

$$\Lambda_w = \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2 - 1}{\nu^2}}.$$

При $\nu = 1$ имеем $\lambda_w = \lambda$ и $w = c$.

В случае меридионального направления абсолютного потока ($\lambda_u = 0$):

$$\lambda_w = \sqrt{\frac{\lambda^2 + u^{*2}}{1 + \frac{k-1}{k+1} u^{*2}}}.$$

Это уравнение удобно представить в виде

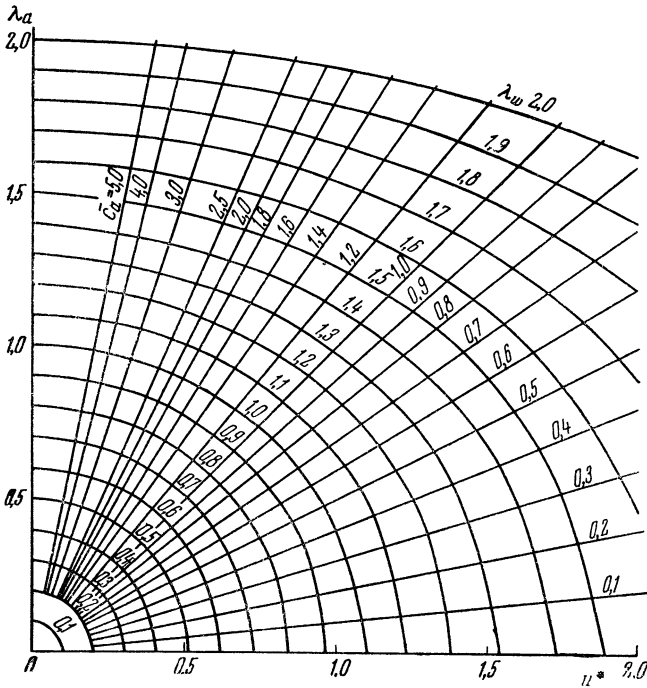
$$\frac{\lambda^2}{\lambda_w^2} + u^{*2} \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_w^2}{\lambda_w^2} = 1. \quad (4)$$

Таким образом, линии равных значений коэффициента относительной скорости $\lambda_w = \text{const}$ в случае меридионального направления абсолютного потока суть эллипсы с полуосями

$$\lambda_w \quad \text{и} \quad \frac{\lambda_w}{\sqrt{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_w^2}}$$

в отличие от линий равных значений самих величин относительных скоростей $w = \text{const}$, которые являются дугами окружности (фиг. 274).

Полученное выражение коэффициента относительной скорости λ_w позволяет проанализировать различные совокупности треугольников скорости. Можно, например, пользуясь формулой (3), найти совокупность значений безразмерной окружной



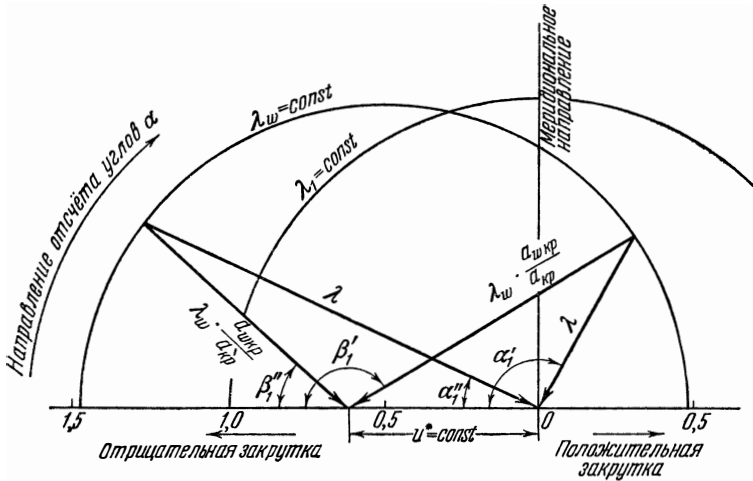
Фиг. 274. Кривые постоянных значений коэффициента относительной скорости λ_w в случае меридионального направления абсолютной скорости ($\lambda_u = 0$).

скорости u^* , коэффициента абсолютной скорости λ и коэффициента закрутки потока λ_u , удовлетворяющих условию

$$\lambda_w \leq \lambda_w \text{ max.}$$

Для большей наглядности введём полярную диаграмму (фиг. 275) с радиусом-вектором λ и полярным углом α . Если безразмерную окружную скорость $u^* = \frac{u}{\alpha_{\text{кр}}}$ откладывать по оси абсцисс к полюсу диаграммы, то треугольник безразмерных

значений скорости, составленный из u^* , λ и λ_w , определяется только одной точкой, противоположной оси абсцисс.

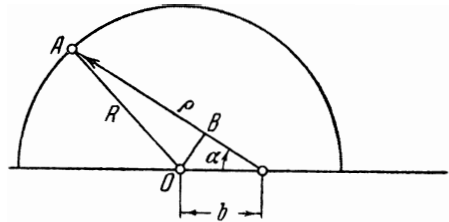


Фиг. 275. Полярная диаграмма коэффициентов скорости в абсолютном движении и относительном движении при заданном значении безразмерной окружной скорости u^* .

Разрешая (3) относительно λ , получаем зависимость λ от угла α и значения λ_w

$$\lambda = u^* \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_w^2 \right) \cos \alpha \pm \sqrt{\left[1 - \frac{k-1}{k+1} u^{*2} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_w^2 \right) \right] \lambda_w^2 - u^{*2} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_w^2 \right)^2 \sin^2 \alpha}. \quad (5)$$

Полагая в последнем уравнении $\lambda_w = \text{const}$ получаем в полярной системе координат уравнение кривой, которая является геометрическим местом вершин треугольников скорости, обладающих тем свойством, что все они имеют одно и то же значение коэффициента относительной скорости λ_w .



Фиг. 276. Вспомогательная полярная диаграмма.

Нетрудно убедиться, что эти кривые являются полуокружностями. Для этого напишем уравнение окружности радиуса R в полярной системе координат ρ, α (фиг. 276) с центром k на полярной оси на расстоянии b влево от полюса.

Из рассмотрения треугольника OAB следует:

$$R^2 = (\rho - b \cos \alpha)^2 + b^2 \sin^2 \alpha,$$

откуда мы получаем уравнение окружности

$$\rho = b \cos \alpha \pm \sqrt{R^2 - b^2 \sin^2 \alpha}.$$

Сравнение последнего выражения с (5) показывает, что кривые постоянных значений λ_w представляют собой окружности радиусов

$$R = \lambda_w \sqrt{1 - \frac{k-1}{k+1} u^{*2} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_w^2\right)} \quad (6)$$

с центрами в точках, лежащих на полярной оси слева от полюса на расстояниях

$$b = u^* \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_w^2\right). \quad (7)$$

Полагая в выражении (5) $\lambda_w = 1$, получим окружность, разделяющую всю область возможных значений относительной скорости на дозвуковую (внутри окружности) и сверхзвуковую (вне окружности). Уравнение этой окружности будет:

$$\lambda = \frac{2u^*}{k+1} \cos \alpha \pm \sqrt{\left(1 - 2 \frac{k-1}{(k+1)^2} u^{*2}\right) - \frac{4u^*}{(k+1)^2} \sin^2 \alpha}.$$

Согласно сказанному выше радиус окружности

$$R = \sqrt{1 - 2 \frac{k-1}{(k+1)^2} u^{*2}},$$

а центр окружности находится влево от полюса на расстоянии

$$b = \frac{2u^*}{k+1};$$

для воздуха ($k = 1,4$):

$$R = \sqrt{1 - \frac{5}{36} u^{*2}}, \quad b = \frac{5}{6} u^*.$$

С увеличением окружной безразмерной скорости u^* уменьшается согласно (6) возможная область дозвуковых значений относительной скорости, перемещаясь при этом в сторону положительных закруток абсолютного потока. При значении

$$u^* = \sqrt{\frac{k+1}{2}},$$

соответствующем условию $b = R$, всей области дозвуковых относительных скоростей отвечают только положительные закрутки потока.

Дозвуковые скорости при отрицательной закрутке абсолютного потока возможны только при условии

$$u^* = \frac{u}{a_{кр}} < \sqrt{\frac{k+1}{2}},$$

что, учитывая равенство

$$a_{кр} = a_0 \sqrt{\frac{2}{k+1}},$$

можно записать и так:

$$u < a_0.$$

При дальнейшем увеличении окружной скорости, т. е. при $u^* > \sqrt{\frac{k+1}{2}}$, имеем: $b > R$, и, как легко видеть из выражения (5), не при всех значениях угла α соблюдается естественное требование вещественности величины λ , т. е. положительности подкоренного выражения. Это означает, что область дозвуковых скоростей дополнительно справа ограничивается прямой

$$\alpha = \arcsin \sqrt{1 - \frac{k+1}{2} \left(1 - \frac{k+1}{2u^{*2}}\right)},$$

уравнение которой получено из условия $R^2 = b^2 \sin^2 \alpha$.

При дальнейшем увеличении окружной скорости область дозвуковых относительных скоростей уменьшается уже не только за счёт уменьшения радиуса R , но за счёт уменьшения угла α прямой, дополнительно ограничивающей указанную область.

Наконец, при

$$u^* = \frac{k+1}{\sqrt{2(k-1)}}$$

чему соответствует

$$u^2 = \frac{k+1}{k-1} a_0^2,$$

величина R равна нулю, т. е. при значениях окружной скорости

$$u > \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} a_0$$

невозможно осуществить дозвуковую относительную скорость.

Для воздуха при $T^\circ = 288^\circ \text{ abs}$, $a_0 = 340 \text{ м/сек}$ получаем следующее условие существования дозвуковой относительной скорости:

$$u < 588 \text{ м/сек.}$$

§ 3. Относительное движение единичной струйки газа в рабочем колесе

Исследование течения газа в венцах входных и выходных направляющих аппаратов можно производить в неподвижной системе координат, используя выведенные в главе I уравнения элементарной струйки газа.

Для изучения потока в венце рабочего колеса удобнее перейти к относительному движению, т. е. к системе координат, вращающейся вместе с колесом.

Как известно, все закономерности механики тела для неподвижной системы координат можно перенести на подвижную систему координат, если дополнительно приложить к телу силы инерции переносного движения и кориолисовы силы инерции частиц тела.

В случае рабочего колеса переносным движением является вращательное движение с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси колеса.

Поэтому сила инерции переносного движения для элементарной частицы газа массы Δm есть центробежная сила

$$\Delta J_{ц} = \frac{\Delta m u^2}{r} = \Delta m \omega^2 r,$$

направленная вдоль радиуса от оси колеса.

Кориолисова сила инерции для частицы газа равна по величине

$$\Delta J_{к} = 2\Delta m \omega \omega \sin(\widehat{\omega, \omega}),$$

лежит в плоскости, перпендикулярной к оси машины, и направлена перпендикулярно к относительной скорости. При написании уравнения теплосодержания в относительном движении следует учесть работу инерционных сил, которые в относительном движении нужно рассматривать как некоторые внешние силы.

Работа центробежных сил равна:

$$\Delta m \omega^2 \int_{r_1}^{r_2} r dr = \frac{\Delta m}{2} (u_2^2 - u_1^2).$$

Работа кориолисовых сил инерции равна нулю, так как эти силы всегда перпендикулярны к направлению относительной скорости. Техническая работа L в относительном движении отсутствует, так как рабочее колесо в относительной системе координат неподвижно.

Предполагая, что теплообмен в элементарной струйке отсутствует, т. е. процесс является адиабатическим, получим следующее уравнение теплосодержания для 1 кг газа в относитель-

ном движении:

$$(i_2 - i_1) \frac{1}{A} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g}. \quad (8)$$

Введём в уравнение теплосодержания температуру торможения в относительном движении:

$$T_{0w} = T + A \frac{w^2}{2gc_p};$$

при $c_p = \text{const}$, принимая во внимание (8), имеем:

$$T_{02w} - T_{01w} = \frac{A}{2gc_p} (u_2^2 - u_1^2)$$

или

$$T_{02w} - T_{01w} = \frac{Au_1^2}{1gc_p} \left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right]. \quad (9)$$

Обозначая

$$T_{02w} - T_{01w} = \Delta T_{0w},$$

$$\left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right] = \Omega,$$

найдем:

$$\Delta T_{0w} = \frac{Au_1^2}{2gc_p} \Omega = \frac{u_1^2}{2} \frac{kgR}{k-1} \Omega. \quad (10)$$

Если $\Omega > 0$, расстояние от оси колеса до струйки увеличивается ($r_2 > r_1$); при отрицательном значении $\Omega < 0$ происходит центростремительное течение ($r_2 < r_1$); нулевое значение Ω соответствует цилиндрическому течению, т. е. случаю, когда элементарные струйки расположены на цилиндрических поверхностях

$$r_2 = r_1 = \text{const.}$$

Таким образом, изменение температуры торможения в относительном движении пропорционально работе центробежных сил, т. е. приросту квадрата окружной скорости. В случае положительного значения Ω происходит возрастание температуры торможения газа в относительном движении ($\Delta T_{0w} > 0$); обратное явление наблюдается при отрицательном значении Ω , т. е. центростремительном течении газа ($\Delta T_{0w} < 0$); в цилиндрическом потоке ($\Omega = 0$) температура торможения в относительном движении остаётся неизменной:

$$T_{0w} = \text{const.}$$

Для воздуха согласно (10) имеем следующую приближённую формулу ($k = 1,4$; $R = 29,27$):

$$\Delta T_{0w} \approx \frac{u_1^2}{2000} \Omega.$$

Пусть

$$u_1 = 200 \text{ м/сек},$$

$$\frac{r_2}{r_1} = 2,5;$$

в этом случае

$$\Omega = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 1 = 5,25$$

и

$$\Delta T_{0w} = \frac{40\,000}{2000} \cdot 5,25 = 105^\circ.$$

Для центростремительной струйки при

$$u_1 = 300 \text{ м/сек},$$

$$\frac{r_2}{r_1} = 0,5$$

имеем:

$$\Omega = -0,75$$

и

$$\Delta T_{0w} = T_{02w} - T_{01w} = \frac{90\,000}{2000} (-0,75) = -34^\circ.$$

Заметим, что температура лопатки рабочего колеса определяется температурой торможения газа в относительном движении. Представим уравнения теплосодержания (9) в безразмерном виде, относя приращение температуры торможения в относительном движении к температуре заторможенного газа T_{01} при входе в колесо

$$\frac{T_{02w} - T_{01w}}{T_{01}} = \frac{\Delta T_{0w}}{T_{01}} = \frac{u_1^2}{2 \frac{kgR}{k-1} T_{01}} \Omega,$$

или

$$\frac{\Delta T_{0w}}{T_{01}} = \frac{k-1}{k+1} u_1^{*2} \Omega = U_1^{*2} \Omega,$$

где

$$u_1^* = \frac{u_1}{a_{кр 1}},$$

$$U_1^* = \frac{u_1}{c_{1max}}.$$

Максимальное понижение температуры торможения в относительном движении может быть получено при $r_2 = 0$, т. е. при $\Omega = -1$; оно составит:

$$\left(\frac{T_{01w} - T_{02w}}{T_{01}}\right)_{\max} = \frac{k-1}{k+1} u_1^{*2} = U_1^{*2}.$$

Введём в рассмотрение степень изменения температуры торможения в относительном движении:

$$\theta_{0w} = \frac{T_{02w}}{T_{01w}}.$$

Из уравнения теплосодержания (10) имеем:

$$T_{02w} - T_{01w} = \frac{k-1}{k+1} u_1^{*2} T_{01} \Omega,$$

откуда

$$\theta_{0w} = 1 + \frac{k-1}{k+1} \frac{u_1^{*2}}{v_1^2} \Omega = 1 + \frac{U_1^{*2}}{v_1^2} \Omega, \quad (11)$$

где согласно (2)

$$v_1^2 = \frac{T_{01w}}{T_{01}} = 1 + \frac{k-1}{k+1} u_1^{*2} - 2 \frac{k-1}{k+1} u_1^* \lambda_{1u} = 1 + U_1^{*2} - 2U_1^* \lambda_{1u}.$$

При меридиональном входе потока в колесо в абсолютном движении ($\lambda_{1u} = 0$) выражение для θ_{0w} упрощается и принимает вид

$$\theta_{0w} = 1 + \frac{U_1^{*2}}{1 + U_1^{*2}} \Omega = 1 + \frac{u_1^{*2}}{\frac{k+1}{k-1} + u_1^{*2}} \Omega.$$

Для воздуха в этом случае имеем:

$$\theta_{0w} = 1 + \frac{u_1^{*2}}{6 + u_1^{*2}} \Omega.$$

Чем больше Ω , тем больше энергии подводится к потоку; принципиально величина θ_{0w} ничем не ограничена, т. е. возможно сколь угодно значительное увеличение энергии газа в относительном движении.

В цилиндрическом течении ($\Omega = 0$) работа центробежных сил равна нулю ($\theta_{0w} = 1$), так как направление движения нормально к направлению центробежной силы.

В центростремительной струйке ($\Omega < 0$): $\theta_{0w} < 1$, т. е. полная энергия газового потока в относительном движении уменьшается; при некотором значении радиуса струйки r температура торможения в относительном движении обращается в нуль, т. е. весь первоначальный запас энергии газа в относительном движении, пропорциональный величине T_{01w} , затрачен на продвижение частиц газа в поле центробежных сил. Это минимально возмож-

ное значение радиуса $\left(\frac{r}{r_1}\right)_{\min}$ находится из условия $\theta_{0w} = 0$.

Согласно (11) в этом случае получаем:

$$\Omega = -\frac{v_1^2}{U_1^{*2}} = -\frac{k+1}{k-1} \frac{v_1^2}{u_1^{*2}},$$

откуда

$$\frac{r_{\min}}{r_1} = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{U_1^{*2}}} = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{u_1^{*2}} \frac{k+1}{k-1}}. \quad (12)$$

Следует отметить, что ограничение степени уменьшения радиуса в центростремительной струйке существует только в том случае, когда величина температуры торможения при входе в колесо не превосходит максимально возможного понижения температуры торможения в относительном движении. Это же условие можно получить из требования вещественности величины минимального радиуса, приводящего согласно выражению (12) к следующему неравенству:

$$\frac{k+1}{k-1} \frac{v_1^2}{u_1^{*2}} < 1,$$

которое можно переписать и так:

$$\lambda_{1u} > \frac{1}{2u_1^*} \frac{k+1}{k-1},$$

или, относя скорость закрутки к местной окружной скорости u_1 ,

$$\bar{c}_{1u} > \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{1}{u_1^{*2}}.$$

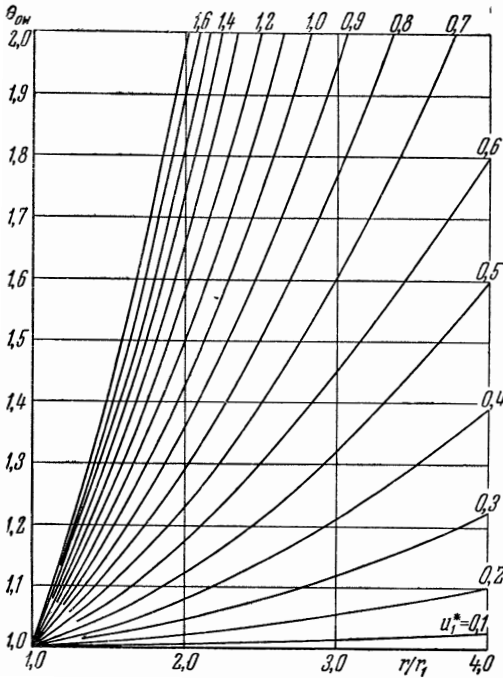
Таким образом, только при наличии достаточно большой положительной закрутки при входе в колесо, удовлетворяющей полученным выше неравенствам, можно говорить о наличии ограничения в возможном уменьшении первоначального радиуса струйки.

Заметим, что в некоторых случаях при существенном понижении температуры газа (например, в центростремительном течении) может начаться процесс конденсации газа, на рассмотрение которого мы не останавливаемся.

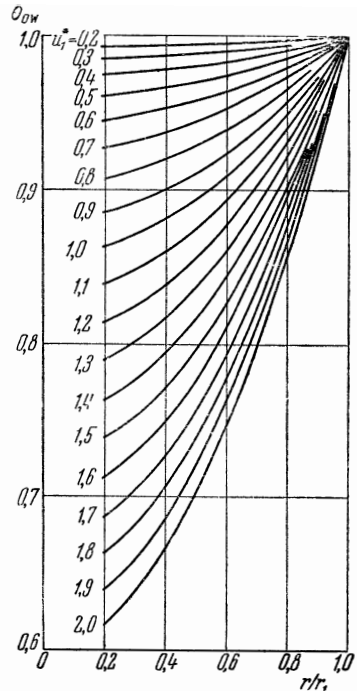
Кривые степени изменения температуры торможения в относительном движении θ_{0w} для случая меридионального входа в колесо в зависимости от отношения текущего радиуса частицы газа r к начальному радиусу r_1 , при разных значениях безразмерной окружной скорости u_1^* на входе в колесо для воздуха представлены на фиг. 277 и 278.

При наличии закрутки в абсолютном движении перед колесом единый график для θ_{0w} построить невозможно, так как сте-

пень повышения температуры торможения в относительном потоке зависит согласно выражению (11) не только от окружной скорости, но и от закрутки.



Фиг. 277. Зависимость степени повышения температуры торможения в относительном движении θ_{0w} от радиальности $\left(\frac{r}{r_1} > 1\right)$ для различных значений безразмерной окружной скорости на входе.



Фиг. 278. Зависимость степени понижения температуры торможения в относительном движении θ_{0w} от радиальности $\left(\frac{r}{r_1} < 1\right)$ для различных значений безразмерной окружной скорости на входе.

В этом общем случае удобно ввести следующий безразмерный параметр:

$$b = \frac{U_1^{*2}}{v_1^2} = \frac{k-1}{k+1} \frac{u_1^{*2}}{v_1^2}. \quad (13)$$

Подставляя сюда вместо v_1 выражение (2), имеем:

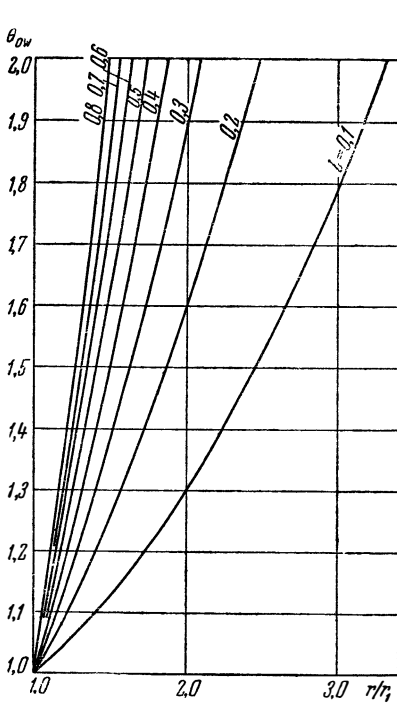
$$\frac{1}{b} = \frac{1}{U_1^{*2}} + 1 - 2 \frac{\lambda_1 u}{U_1^*} = \frac{k+1}{k-1} \frac{1}{u_1^{*2}} + 1 - 2 \frac{\lambda_1 u}{u_1^*}.$$

На фиг. 279 и 280 представлено θ_{0w} в зависимости от r/r_1 для различных значений параметра b при $k=1,4$.

Область значений $r/r_1 < 1$ соответствует центростремительной струйке, а область $r/r_1 > 1$ — струйке, удаляющейся от оси колеса. В случае

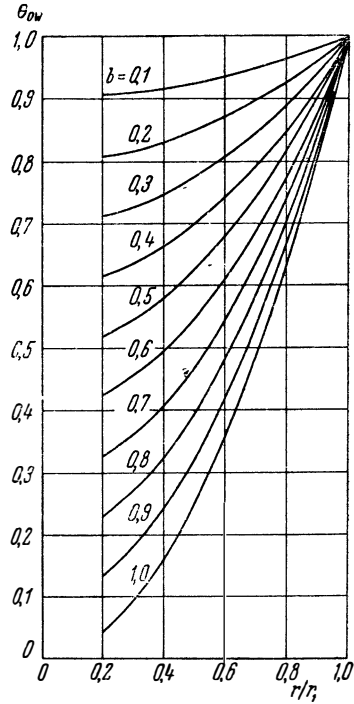
$$\frac{r}{r_1} = \sqrt{1 - \frac{k+1}{k-1} \frac{v_1^2}{u_1^{*2}}} = \sqrt{1 - \frac{1}{b}}$$

имеем минимально возможное значение r/r_1 ; при этом кривые $\theta_{0w}(r/r_1, b)$ пересекают ось абсцисс. Все кривые проходят через



Фиг. 279. Зависимость степени повышения температуры торможения в относительном движении θ_{0w} от радиальности ($\frac{r}{r_1} > 1$) для различных значений параметра

$$b = \frac{u_1^{*2}}{6 + u_1^{*2} - 2u_1^* \lambda_{1u}}$$



Фиг. 280. Зависимость степени понижения температуры торможения в относительном движении θ_{0w} от радиальности ($\frac{r}{r_1} < 1$) для различных значений параметра

$$b = \frac{u_1^{*2}}{6 + u_1^{*2} - 2u_1^* \lambda_{1u}}$$

точку $\theta_{0w} = 1$ и $r/r_1 = 1$, соответствующую цилиндрическому течению.

Если течение в элементарной струйке является изоэнтропическим, то степень изменения полного давления в относитель-

ном движении может быть определена из пропорции идеальной адиабаты:

$$\frac{p_{0w}}{p_{01w}} = \left(\frac{T_{0w}}{T_{01w}} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

или

$$\pi_{0w} = \theta_{0w}^{\frac{k}{k-1}}.$$

Заменяя величину θ_{0w} согласно выражению (11), получим:

$$\pi_{0w} = (1 + b\Omega)^{\frac{k}{k-1}}, \quad (14)$$

где b вычисляется по выражению (13).

Подставляя в (14) выражения (13) и (9), имеем:

$$\pi_{0w} = \frac{p_{0w}}{p_{01w}} = \left\{ 1 + \frac{u_1^{*2}}{\frac{k-1}{k} + u_1^{*2} - 2u_1^* \lambda_{1u}} \left[\left(\frac{r}{r_1} \right)^2 - 1 \right] \right\}^{\frac{k}{k-1}}. \quad (15)$$

При меридиональном входе в рабочее колесо

$$\pi_{0w} = \frac{p_{0w}}{p_{01w}} = \left[1 + \frac{u_1^{*2}}{\frac{k-1}{k} + u_1^{*2}} \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{k}{k-1}}. \quad (16)$$

Для воздуха $k = 1,4$ находим в общем случае

$$\pi_{0w} = \left[1 + \frac{u_1^{*2}}{6 + u_1^{*2} - 2u_1^* \lambda_{1u}} \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 - 1 \right]^{3,5}$$

и в случае меридионального входа

$$\pi_{0w} = \left[1 + \frac{u_1^{*2}}{6 + u_1^{*2}} \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 - 1 \right]^{3,5}.$$

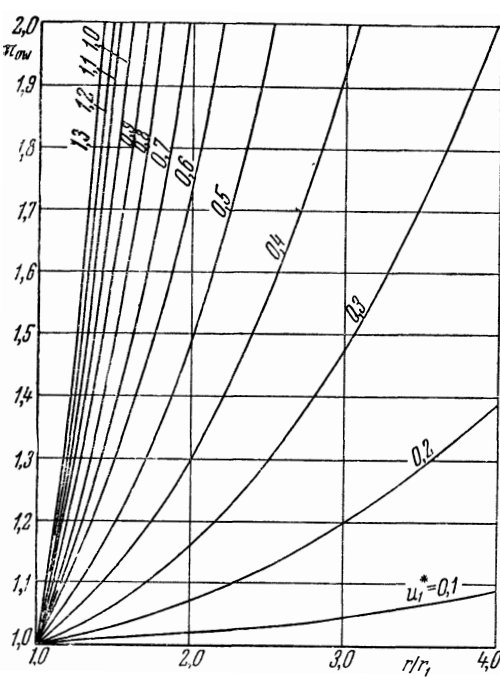
При меридиональном входе величина π_{0w} согласно (16) зависит только от безразмерной окружной скорости и относительного радиуса рассматриваемой точки; соответствующие кривые зависимости π_{0w} от r/r_1 для различных значений u_1^* приведены на фиг. 281 и 282.

Полученные выше выражения для величины π_{0w} справедливы только в случае отсутствия потерь, т. е. при изэнтропическом течении газа в струйке. В реальном течении газа имеются потери, которые приводят к уменьшению полного давления по

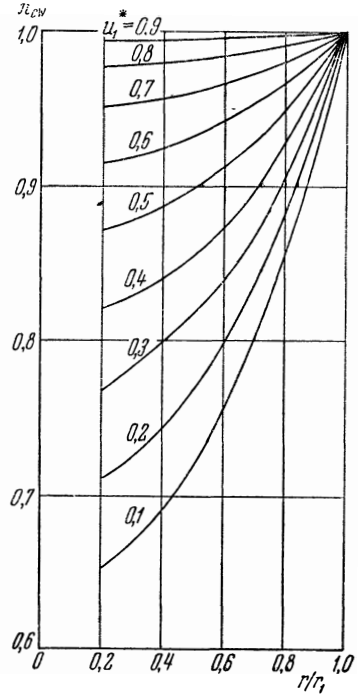
сравнению со случаем изоэнтروпического течения. Отношение соответствующих величин полного давления, характеризующее отклонение от изоэнтропического процесса, назовём коэффициентом изоэнтропичности:

$$m = \frac{P_{0w}}{P_{0w \text{ из}}}$$

Начальное давление P_{01w} в двух сравниваемых процессах



Фиг. 281. Зависимость изоэнтропической степени повышения полного давления π_{0w} в относительном движении от радиальности ($\frac{r}{r_1} > 1$) для различных значений безразмерной окружной скорости на входе u_1^* .



Фиг. 282. Зависимость изоэнтропической степени понижения полного давления π_{0w} в относительном движении от радиальности ($\frac{r}{r_1} < 1$) для различных значений безразмерной окружной скорости на входе u_1^* .

(действительном и изоэнтропическом) одинаково, поэтому

$$m = \frac{P_{0w}}{P_{0w \text{ из}}} = \frac{\frac{P_{0w}}{P_{01w}}}{\frac{P_{0w \text{ из}}}{P_{01w}}} = \frac{\pi_{0w}}{\pi_{0w \text{ из}}} \quad \text{или} \quad m = \frac{\pi_{0w}}{\frac{k}{\theta_{0w} - 1}}$$

Подставляя в последнее выражение величину θ_{0w} из (11), имеем:

$$m = \frac{\pi_{0w}}{[1 + b\Omega]^{\frac{k}{k-1}}} \quad (17)$$

или в развёрнутом виде:

$$m = \frac{\pi_{0w}}{\left[1 + \frac{u_1^{*2}}{\frac{k+1}{k-1} + u_1^{*2} - 2u_1^* \lambda_{1u}} \left(r_1^2 - 1 \right) \right]^{\frac{k}{k-1}}}. \quad (18)$$

При нулевой окружной скорости (для неподвижного венца)

$$m = \frac{P_{02w}}{P_{01w}} = \sigma,$$

т. е. коэффициент изоэнтропичности совпадает с уже ранее введённым коэффициентом восстановления полного давления σ ; последнее равенство справедливо и в частном случае элементарного вращающегося венца при цилиндрическом течении. Действительно при $r = r_1 = \text{const}$ знаменатель правой части выражения (18) обращается в единицу, т. е. имеем:

$$m = \frac{P_{02w}}{P_{01w}} = \sigma.$$

Рассмотрим уравнение неразрывности для элементарной струйки в относительном движении:

$$\gamma_1 \Delta F_1 \omega_1 = \gamma \Delta F \omega,$$

где ΔF — площадь поперечного сечения элементарной струйки. Преобразуем это уравнение к безразмерному виду:

$$\frac{\Delta F_1}{\Delta F} \cdot \frac{\gamma_1 \omega_1}{\gamma_{1 \text{ кр}} a_{1 \text{ кр}} w} = \frac{\gamma \omega}{\gamma_{\text{кр}} w a_{\text{кр}} w} \cdot \frac{\gamma_{\text{кр}} w a_{\text{кр}} w}{\gamma_{1 \text{ кр}} a_{1 \text{ кр}} w}.$$

Согласно уравнению состояния имеем:

$$\frac{\gamma_{\text{кр}} w}{\gamma_{1 \text{ кр}} w} = \frac{P_{0w}}{T_{0w}} \frac{T_{01w}}{P_{01w}} = \frac{\pi_{0w}}{\theta_{0w}}.$$

Учитывая, что

$$\frac{a_{\text{кр}} w}{a_{1 \text{ кр}} w} = \sqrt{\theta_{0w}},$$

$$\frac{\gamma \omega}{\gamma_{\text{кр}} w a_{\text{кр}} w} = q(\lambda_w),$$

получаем:

$$q(\lambda_{1w}) = \frac{\pi_{0w}}{\sqrt{\theta_{0w}}} f q(\lambda_w);$$

здесь

$$f = \frac{\Delta F}{\Delta F_1}.$$

Вводя обозначение

$$\frac{\pi_{0w}}{\sqrt{\theta_{0w}}} = \chi_w,$$

запишем уравнение неразрывности так:

$$q(\lambda_{1w}) = \chi_w f q(\lambda_w).$$

В случае изоэнтропического процесса

$$\pi_{0w} = \theta_{0w}^{\frac{k}{k-1}}$$

и

$$\chi_w = \theta_{0w}^{\frac{k+1}{2(k-1)}},$$

где величина θ_{0w} вычисляется по формуле (11). Для воздуха

$$\chi_w = \theta_{0w}^3.$$

В общем случае неизоэнтропического процесса

$$\pi_{0w} = m \theta_{0w}^{\frac{k}{k-1}}$$

и, следовательно,

$$\chi_w = m \theta_{0w}^{\frac{k+1}{2(k-1)}}.$$

Таким образом, уравнение неразрывности при наличии потерь, т. е. в самом общем виде, выглядит следующим образом:

$$q(\lambda_{1w}) = m \theta_{0w}^{\frac{k+1}{2(k-1)}} f q(\lambda_w),$$

где θ_{0w} есть функция радиуса данного сечения и начальных условий и определяется из выражения (11). Полагая $\omega = 0$, имеем:

$$m = \sigma,$$

$$\theta_{0w} = 1,0$$

и, следовательно, получим обычное уравнение неразрывности элементарной струйки при отсутствии вращения

$$q(\lambda_{1w}) = \sigma f q(\lambda_w).$$

Это же уравнение получается и при вращении для струйки в цилиндрическом течении, так как в этом случае

$$\theta_{0w} = 1,0$$

$$m = \sigma.$$

Таким образом, при изоэнтропическом цилиндрическом течении нет никакого принципиального различия между относительным

и абсолютным движением; это обстоятельство позволяет заменить изучение потока в элементарных сечениях вращающегося цилиндрического рабочего колеса изучением обтекания геометрически подобного неподвижного венца при условии, что скорости в абсолютном движении для неподвижного венца и в относительном движении для вращающегося венца равны по величине и направлению. Отличие между относительным движением во вращающемся и абсолютным движением в неподвижном элементарном венце наблюдается только при коэффициенте радиальности, не равном нулю.

Рассмотрим в качестве примера дозвуковое изоэнтропическое течение в элементарной струйке для этих двух случаев движения ($\lambda_1 = \lambda_{1w} < 1$). Для струйки в неподвижном венце уравнение неразрывности выглядит так:

$$q(\lambda) = \frac{q(\lambda_1)}{f},$$

для струйки во вращающемся венце:

$$q(\lambda_w) = \frac{q(\lambda_{1w})}{\frac{k+1}{f\theta_{0w}^{2(k-1)}}$$

где θ_{0w} — заданная согласно (11) функция относительного радиуса r/r_1 .

Уменьшение поперечного сечения струйки ведёт к увеличению коэффициента скорости. При некотором минимальном значении безразмерной площади в неподвижном венце имеем:

$$f = q(\lambda_1),$$

т. е. скорость течения равна скорости звука:

$$\begin{aligned} q(\lambda) &= 1, \\ \lambda &= 1. \end{aligned}$$

Во вращающемся венце при заданной степени радиальности критический режим находится из условия

$$\frac{k+1}{f\theta_{0w}^{2(k-1)}} = q(\lambda_{1w});$$

в этом месте величина

$$\frac{k+1}{f\theta_{0w}^{2(k-1)}}$$

достигает минимума.

Таким образом, скорость определяется не только изменением площади сечения, но и изменением величины θ_{0w} . Течение в неподвижном венце управляется только одним воздействием —

геометрическим, т. е. изменением площади сечения; при течении во вращающемся венце, кроме геометрического воздействия, имеется ещё и механическое воздействие — работа центробежных сил.

При положительной работе центробежных сил ($r > r_1$, $\theta_{0w} > 1$) происходит как бы дополнительное уширение канала, при отрицательной работе центробежных сил ($r < r_1$, $\theta_{0w} < 1$) — как бы дополнительное сужение канала; в последнем случае при некотором приросте радиуса может наступить критический режим даже в несужающемся канале. Если во вращающемся венце площадь проходного сечения не изменяется:

$$\Delta F = \Delta F_1 = \text{const},$$

т. е.

$$f = \frac{\Delta F}{\Delta F_1} = 1.$$

то

$$q(\lambda_w) = \frac{q(\lambda_{1w})}{\theta_{0w}^{\frac{2}{k-1}}}. \quad (19)$$

В этом случае струйка газа находится только под воздействием работы центробежных сил.

При дозвуковой относительной скорости газа на входе в венец и при увеличивающемся радиусе струйки температура торможения возрастает и согласно (19) величина $q(\lambda_w)$ падает, что ведёт к уменьшению числа M в относительном движении.

Если начальная относительная скорость больше скорости звука ($\lambda_{1w} > 1$), то при тех же условиях значение числа M в струйке увеличивается.

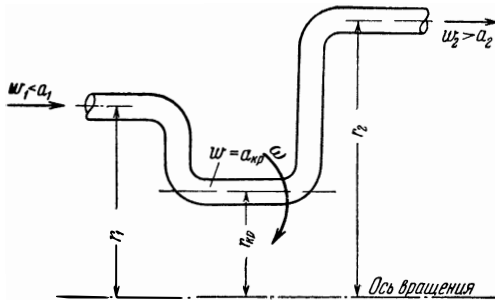
Итак, во вращающемся венце с постоянным поперечным сечением при движении частиц газа от оси колеса ($r > r_1$) скорость движения газа по своей величине всегда удаляется от скорости звука. Обратная картина наблюдается при центростремительном течении газа во вращающемся венце. Из сказанного выше следует, что, имея трубку с постоянной площадью проходного сечения, принципиально возможно при вращении её вокруг некоторой оси осуществить как сверхзвуковое сопло, так и сверхзвуковой диффузор.

Схему сверхзвукового сопла можно представить себе принципиально в виде некоторой вращающейся цилиндрической трубки, имеющей сначала центростремительную, а затем центробежную часть (фиг. 283). Величину критического радиуса (при $q(\lambda_w) = 1$) находим из соотношения (19), которое согласно (11) приводит

к следующей формуле:

$$\frac{r}{r_1} = \sqrt{1 - \frac{\left[1 - q \frac{2(k-1)}{k \pm 1} (\lambda_{1w})\right] \frac{k+1}{k-1} v_1^2}{u_1^2}}$$

При этом величины r_1 и λ_{1w} считаются заданными, а величина максимального выходного радиуса в центробежной части трубки определяется потребным значением сверхзвуковой скорости (λ_{2w}).



Фиг. 283. Принципиальная схема вращающейся сверхзвуковой трубы постоянного сечения.

Аналогичным образом можно представить себе принципиальное осуществление вращающегося сверхзвукового диффузора с постоянной площадью проходного сечения. В этом случае величина λ_{1w} больше единицы, в сечении критического радиуса имеем критическую скорость и на выходе из центробежной части струйки может быть получена заданная величина дозвуковой скорости.

§ 4. Основные соотношения между параметрами газового потока в элементарной ступени турбомшины

Остановимся на соотношении параметров потока на входе в элементарный венец рабочего колеса и на выходе из него, т. е. в сечениях 1—1 и 2—2. Малое расстояние между поверхностями тока позволяет пренебречь изменениями параметров потока в поперечном сечении элементарной ступени. Заметим, что связь между параметрами потока при входе и выходе из элементарных венцов неподвижных аппаратов может быть получена по соответствующим формулам для рабочего колеса путём перехода к нулевой окружной скорости.

Введём следующие обозначения для отношений параметров потока перед и за элементарным венцом рабочего колеса:

$$\frac{P_2}{P_1} = \pi_K,$$

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \pi_{0K},$$

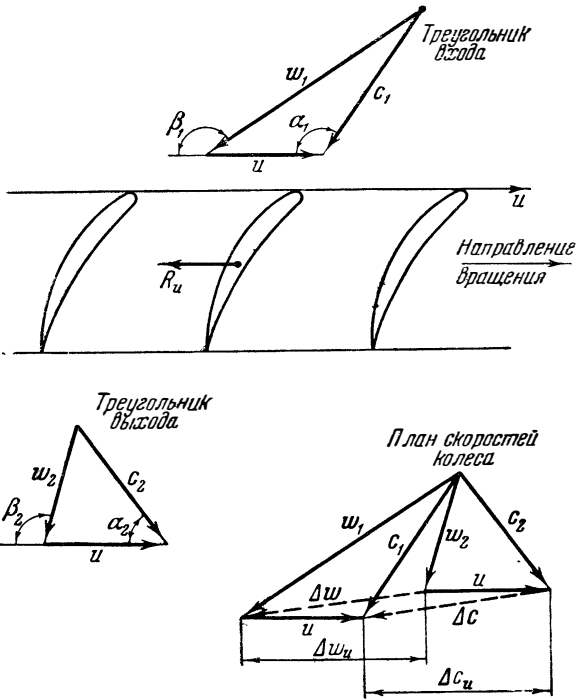
$$\frac{T_2}{T_1} = \theta_K,$$

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \theta_{0K}.$$

Отношение площади радиального сечения на выходе из венца к соответствующей площади на входе обозначим:

$$\frac{\Delta F_2}{\Delta F_1} = \frac{r_2 \Delta r_2}{r_1 \Delta r_1} = f_\gamma.$$

Здесь под r_1 и r_2 понимаются расстояния от оси вращения до середины элементарного венца соответственно перед и за ко-

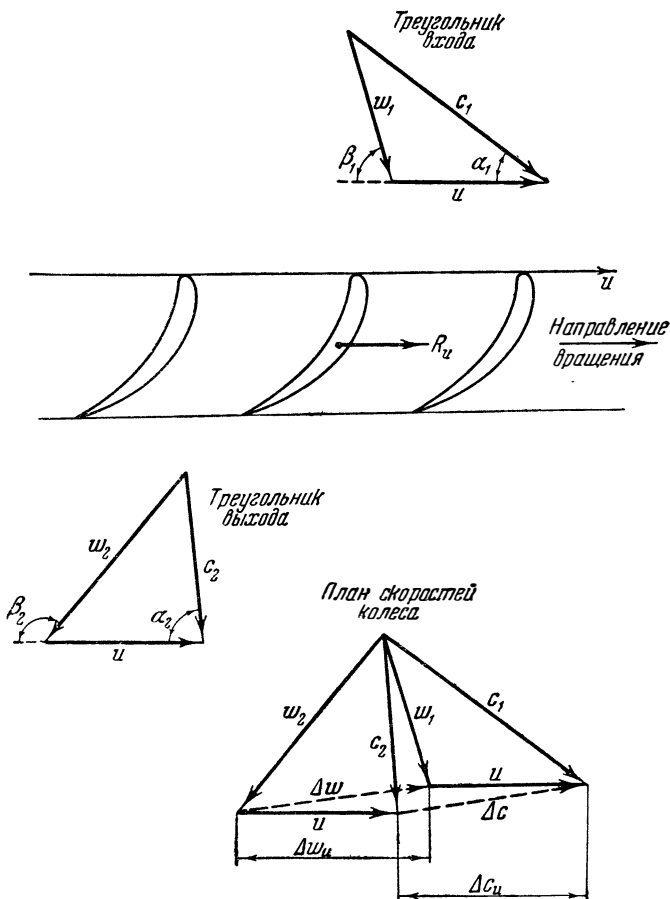


Фиг. 284. План скоростей цилиндрического рабочего колеса компрессора.

лесом, а Δr_1 и Δr_2 суть радиальные расстояния между поверхностями тока, ограничивающими элементарную ступень (фиг. 264).

Установим основные соотношения между кинематикой потока при входе и выходе из ступени и изменением параметров потока в венце.

Для суждения об изменении скоростей удобно треугольники скоростей при входе и выходе из ступени построить из одного



Фиг. 285. План скоростей цилиндрического колеса турбины.

полюса. Такая фигура называется планом скоростей рабочего колеса. Типичные планы скоростей колеса компрессора и колеса турбины представлены соответственно на фиг. 284 и 285.

Если из этого же полюса построить скорости при входе и выходе из ступени, то получится план скоростей ступени.

В общем случае треугольники при входе и выходе из венца находятся в разных плоскостях; при построении плана скоростей колеса эти треугольники совмещают в плоскости чертежа.

При входе в колесо скорость абсолютного движения имеет меридиональную составляющую c_{1m} , направленную под углом ψ_1 к оси турбомашины, и окружную составляющую c_{1u} ; при выходе из рабочего колеса соответственные величины обозначаются: c_{2m} , ψ_2 и c_{2u} .

Определим сначала зависимость между окружными составляющими скорости. С этой целью воспользуемся уравнением моментов количества движения, согласно которому момент сил M_K относительно оси машины, приложенных газовым потоком к лопаткам элементарного рабочего колеса, отнесённый к 1 кг газа, равен:

$$M_K = -\frac{1}{g}(c_{2u}r_2 - c_{1u}r_1).$$

Работа равна произведению момента сил на угловую скорость венца:

$$L = M_K \omega.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} L &= -\frac{\omega}{g}(c_{2u}r_2 - c_{1u}r_1) = \\ &= -\frac{1}{g}(c_{2u}u_2 - c_{1u}u_1) = \frac{1}{g}(c_{1u}u_1 - c_{2u}u_2). \end{aligned} \quad (20)$$

Это уравнение называется уравнением Эйлера.

Согласно определению циркуляции скорости имеем при входе в венец

$$\Gamma_1 = 2\pi r_1 c_{1u}$$

и соответственно при выходе

$$\Gamma_2 = 2\pi r_2 c_{2u}.$$

Следовательно, уравнение Эйлера можно записать и в следующем виде:

$$L = \frac{\omega}{2\pi g}(\Gamma_1 - \Gamma_2). \quad (21)$$

На основании (1) его можно записать и так:

$$L = \frac{1}{g}(\omega_{1u}u_1 - \omega_{2u}u_2) + \frac{1}{g}(u_1^2 - u_2^2). \quad (22)$$

В турбине работа газа L положительна, так как происходит отвод энергии от газового потока. В компрессоре осуществляется подвод энергии к газовому потоку, т. е. работа L отрицательна.

Поэтому согласно выражению (20) в случае турбины наибольшие значения L могут быть достигнуты при положительной закрутке потока на входе в венец ($c_{1u} > 0$) и отрицательной закрутке потока на выходе ($c_{2u} < 0$).

В случае рабочего колеса компрессора наблюдается обратная картина: для подвода наибольшей работы к газу поток перед колесом должен иметь отрицательную закрутку, а поток на выходе — положительную закрутку; в цилиндрической ступени

$$u_1 = u_2 = u$$

и, следовательно, согласно (20) и (22)

$$L = \frac{u}{g} (c_{1u} - c_{2u}) = \frac{u}{g} (\omega_{1u} - \omega_{2u}).$$

Обозначим изменение абсолютной скорости в венце через Δc , изменение относительной скорости — через $\Delta \omega$; проекции этих величин на ось u соответственно равны разности окружных проекций абсолютных и относительных скоростей:

$$\begin{aligned} \Delta c_u &= c_{1u} - c_{2u} = c_1 \cos \alpha_1 - c_2 \cos \alpha_2, \\ \Delta \omega_u &= \omega_{1u} - \omega_{2u} = \omega_1 \cos \beta_1 - \omega_2 \cos \beta_2. \end{aligned}$$

В таком случае для цилиндрического элементарного венца имеем

$$L = \frac{u}{g} \Delta c_u = \frac{u}{g} \Delta \omega_u.$$

В общем случае элементарной ступени при меридиональном входе в колесо ($c_{1u} = 0$):

$$L = - \frac{c_{2u} u_2}{g},$$

при меридиональном выходе из колеса ($c_{2u} = 0$):

$$L = \frac{c_{1u} u_1}{g}.$$

В соответствии с указанным выше правилом знаков имеем в цилиндрическом колесе турбины:

$$\Delta c_u = \Delta \omega_u > 0, \text{ т. е. } c_{1u} > c_{2u},$$

в цилиндрическом колесе компрессора:

$$\Delta c_u = \Delta \omega_u < 0, \text{ т. е. } c_{1u} < c_{2u}.$$

При меридиональном входе ($c_{1u} = 0$) в турбине

$$c_{2u} < 0,$$

в компрессоре

$$c_{2u} > 0.$$

При меридиональном выходе закрутка на входе должна быть положительной ($c_{1u} > 0$) для турбины и отрицательной ($c_{1u} < 0$) для компрессора.

При наличии в относительном движении незакрученного потока турбинное колесо может быть только центробежным

($r_2/r_1 < 1$), а компрессорное — только центробежным ($r_2/r_1 > 1$), что следует из равенства (22).

Запишем уравнение Эйлера в безразмерном виде, поделив работу 1 кг газа на отношение квадрата окружной скорости (при входе или выходе) к ускорению силы тяжести:

$$\frac{L}{\frac{u_1^2}{g}} = \bar{L}_1 = \bar{c}_{1u} - \bar{c}_{2u} \frac{r_2^2}{r_1^2}, \quad (23)$$

$$\frac{L}{\frac{u_2^2}{g}} = \bar{L}_2 = \bar{c}_{1u} \frac{r_1^2}{r_2^2} - \bar{c}_{2u}. \quad (24)$$

Здесь c есть отношение скорости потока к местной окружной скорости.

Для компрессора обычно применяют величину \bar{L}_1 , а для турбин — \bar{L}_2 . В случае цилиндрического рабочего колеса ($u_1 = u_2$)

$$\bar{L}_1 = \bar{L}_2 = \bar{L}_1 = \Delta c_u = \Delta \bar{w}_u.$$

При меридиональном входе в рабочее колесо компрессора в абсолютном движении и меридиональном выходе в относительном движении на основании (1) и (22) имеем:

$$c_{1u} = 0, \quad c_{2u} = u_2,$$

т. е.

$$\bar{c}_{1u} = 0 \quad \text{и} \quad \bar{c}_{2u} = 1,$$

и следовательно, согласно (24)

$$|\bar{L}_2| = 1,$$

т. е.

$$L = \frac{u_2^2}{g}.$$

Такую ступень компрессора назовём эталонной; треугольник скоростей эталонной ступени представлен на фиг. 286.

Абсолютная величина \bar{L}_2 показывает, какую долю от работы эталонной ступени составляет работа в данной ступени компрессора при той же окружной скорости на выходе u_2 .

В эталонной ступени турбины имеется меридиональный вход относительного потока и меридиональный выход абсолютного потока из рабочего колеса. В такой ступени (фиг. 287)

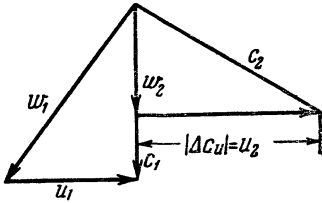
$$c_{1u} = u, \quad c_{2u} = 0,$$

т. е.

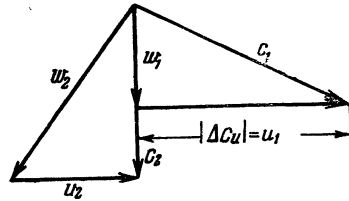
$$\bar{L}_1 = 1.$$

следовательно, \bar{L}_1 показывает, какую долю от работы эталонной ступени составляет работа данной ступени турбины при той же окружной скорости на входе u_1 .

Как уже указывалось ранее, мы ограничиваемся рассмотрением адиабатических, т. е. теплоизолированных процессов в турбомашине; в этом случае для определения работы 1 кг газа можно также воспользоваться уравнением теплосодержания (15)



Фиг. 286. План скоростей рабочего колеса эталонной элементарной ступени компрессора.



Фиг. 287. План скоростей рабочего колеса эталонной элементарной ступени турбины.

главы I, применяя его к сечениям перед и за рабочим колесом:

$$L = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g} + \frac{i_1 - i_2}{A}.$$

Переходя к полным теплосодержаниям, имеем:

$$L = \frac{i_{01} - i_{02}}{A} = \frac{c_p}{A} (T_{01} - T_{02});$$

здесь

$$i_0 = i + A \frac{c^2}{2g}.$$

Отсюда получаем:

$$L = \frac{i_{01}}{A} \left(1 - \frac{T_{02}}{T_{01}} \right).$$

В турбине $T_{01} > T_{02}$, т. е. работа газового потока положительна. В компрессоре $T_{01} < T_{02}$, т. е. работа отрицательна.

Придадим уравнению теплосодержания несколько иной вид, заменив полное теплосодержание на входе кинетической энергией 1 кг газа, имеющего максимальную скорость в абсолютном движении перед колесом:

$$L = \frac{c_{1\max}^2}{2g} \left(1 - \frac{T_{02}}{T_{01}} \right) = \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{a_{кр1}^2}{g} \left(1 - \frac{T_{02}}{T_{01}} \right). \quad (25)$$

Если работу 1 кг газа отнести к полной энергии 1 кг газа на

входе в ступень, равной

$$\frac{i_{01}}{A} = \frac{c_p}{A} T_{01} = \frac{c_{1\max}^2}{2g},$$

то получим безразмерную работу:

$$K = \frac{L}{\frac{i_{01}}{A}} = 1 - \frac{T_{02}}{T_{01}}; \quad (26)$$

в турбине $K < 1$, в компрессоре $K > 1$.

Из уравнений (23), (24) и (26) находим линейную зависимость между безразмерной работой и величиной \bar{L} :

$$K = \bar{L}_1^2 \frac{(k-1)}{k+1} u_1^{*2} = \bar{L}_2 \frac{2(k-1)}{k+1} \frac{u_2^2}{a_{\text{кр1}}^2}.$$

Отсюда получаем выражение для степени повышения температуры торможения:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1 - K = 1 - \frac{2(k-1)}{k+1} \bar{L}_1 u_1^{*2}.$$

В случае цилиндрического колеса

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1 - \frac{2\Delta\bar{c}_u(k-1)}{k+1} u_1^{*2}.$$

При заданном значении \bar{L} степень повышения температуры торможения изменяется пропорционально квадрату безразмерной окружной скорости.

Найдём соотношение между коэффициентами окружной составляющей скорости перед и за колесом: λ_{1u} и λ_{2u} , приравняв выражения для работы 1 кг газа, полученные из уравнения Эйлера (20) и уравнения теплосодержания (25):

$$\frac{k+1}{k-1} \frac{a_{\text{кр1}}^2}{2} \left(1 - \frac{T_{02}}{T_{01}} \right) = c_{1u} u_1 - c_{2u} u_2.$$

Поделив обе части последнего равенства на квадрат критической скорости в абсолютном движении перед колесом и учитывая равенства

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{a_{\text{кр1}}} &= u_1^*, \\ \frac{c_{2u}}{a_{\text{кр1}}} &= \frac{c_{2u}}{a_{\text{кр2}}} \cdot \frac{a_{\text{кр2}}}{a_{\text{кр1}}} = \lambda_{2u} \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}, \end{aligned} \quad (27)$$

и

$$\frac{u_2}{a_{\text{кр1}}} = \frac{u_1}{a_{\text{кр1}}} \cdot \frac{r_2}{r_1} = u_1^* \frac{r_2}{r_1},$$

приходим к следующему соотношению:

$$\lambda_{2u} = \frac{\lambda_{1u}}{\frac{r_2}{r_1} \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}} - \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{\left(1 - \frac{T_{02}}{T_{01}}\right)}{\frac{r_2}{r_1} u_1^* \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}}. \quad (28)$$

Для безразмерных скоростей $\Lambda = \frac{c}{c_{\max}}$ имеем:

$$\Lambda_{2u} = \frac{\Lambda_{1u}}{\frac{r_2}{r_1} \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}} - \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{T_{02}}{T_{01}}}{\frac{r_2}{r_1} U_1^* \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}}.$$

Уравнение (28) назовём общим уравнением безразмерной закрутки потока в элементарном лопаточном венце рабочего колеса. Изменение температуры торможения в относительном движении

$$\frac{T_{02w}}{T_{01w}} = \frac{T_{02w}}{T_{02}} \cdot \frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} \frac{T_{02}}{T_{01}},$$

где согласно (2)

$$\sqrt{2}^2 = 1 + \frac{k-1}{k+1} \frac{u_2^2}{a_{1\text{кр}}^2} - 2 \frac{k-1}{k+1} \frac{u_2}{a_{1\text{кр}}} \lambda_{2u}.$$

Заменяя в последнем выражении коэффициент закрутки потока при выходе λ_{2u} , на основании (28) найдём:

$$\sqrt{2}^2 = \frac{k-1}{k+1} \frac{u_2^2}{a_{1\text{кр}}^2} - 2 \frac{k-1}{k+1} \frac{u_2}{a_{1\text{кр}}} \lambda_{1u} \frac{r_1}{r_2} \sqrt{\frac{T_{01}}{T_{02}}} + \frac{T_{01}}{T_{02}},$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{T_{02w}}{T_{01w}} &= \frac{1 - 2 \frac{k-1}{k+1} u_1^* \lambda_{1u} + \frac{k-1}{k+1} u_1^{*2} - \frac{k-1}{k+1} u_1^{*2} + \frac{k-1}{k+1} \frac{u_2^2}{a_{1\text{кр}}^2} \frac{T_{02}}{T_{01}}}{\sqrt{1}^2} = \\ &= \frac{\sqrt{1}^2 + \frac{k-1}{k+1} u_1^{*2} \left[\frac{1}{u_1^{*2}} \frac{u_2^2}{a_{1\text{кр}}^2} \frac{T_{02}}{T_{01}} - 1 \right]}{\sqrt{1}^2} \end{aligned}$$

и далее:

$$\frac{T_{02w}}{T_{01w}} = 1 + \frac{k-1}{k+1} \frac{u_1^{*2}}{\sqrt{1}^2} \left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 1 \right].$$

Итак, другим путём нами получено известное уже выражение (11) для степени повышения температуры торможения в относительном движении.

В центробежном колесе ($r_2/r_1 > 1$) происходит рост температуры торможения в относительном движении, а в центростремительном колесе ($r_2/r_1 < 1$)—её падение; это изменение зависит от окружной скорости, закрутки потока при входе в рабочее колесо и степени радиальности потока (r_2/r_1) и не зависит от закрутки потока при выходе.

В цилиндрической ступени ($r_2/r_1 = 1$) температура торможения в относительном движении остаётся постоянной.

Перейдём к определению зависимости между меридиональными составляющими скорости, используя уравнение неразрывности для элементарного венца рабочего колеса:

$$\gamma_1 c_{1m} \Delta F_{1n} = \gamma_2 c_{2m} \Delta F_{2n}.$$

Здесь ΔF_n — площадь поперечного сечения элементарной струи, нормального к меридиональной скорости:

$$\Delta F_n = 2\pi r \Delta r \frac{1}{\cos \psi}.$$

Вставляя в уравнение неразрывности значение c_m :

$$c_m = c \sin \alpha,$$

получим:

$$\Delta F_{1n} \gamma_1 c_1 \sin \alpha_1 = \Delta F_{2n} \gamma_2 c_2 \sin \alpha_2$$

или

$$\frac{\gamma_1 c_1}{\gamma_{1кр} a_{1кр}} \Delta F_{1n} \sin \alpha_1 = \frac{\gamma_2 c_2}{\gamma_{2кр} a_{2кр}} \cdot \frac{\gamma_{2кр} a_{2кр}}{\gamma_{1кр} a_{1кр}} \Delta F_{2n} \sin \alpha_2.$$

Отношение плотности тока к критическому значению плотности тока есть, как известно, универсальная функция коэффициента скорости

$$\frac{\gamma_1 c_1}{\gamma_{1кр} a_{1кр}} = q(\lambda_1),$$

$$\frac{\gamma_2 c_2}{\gamma_{2кр} a_{2кр}} = q(\lambda_2).$$

Согласно уравнению состояния имеем:

$$\frac{\gamma_{2кр}}{\gamma_{1кр}} = \frac{\gamma_{02}}{\gamma_{01}} = \frac{p_{02}}{p_{01}} \cdot \frac{T_{01}}{T_{02}};$$

отсюда

$$\Delta F_{1n} q(\lambda_1) \sin \alpha_1 = \frac{p_{02}}{\sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}} \Delta F_{2n} q(\lambda_2) \sin \alpha_2.$$

Здесь использована зависимость

$$\frac{a_{2\text{кр}}}{a_{1\text{кр}}} = \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}},$$

и если ввести обозначения

$$f_n = \frac{\Delta F_{2n}}{\Delta F_{1n}},$$

$$\chi = \frac{p_{02}}{p_{01}} \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}},$$

то уравнение неразрывности можно записать в следующем безразмерном виде:

$$q(\lambda_1) \sin \alpha_1 = f_n \chi q(\lambda_2) \sin \alpha_2,$$

где

$$q(\lambda) = \frac{\gamma^c}{\gamma_{\text{кр}} a_{\text{кр}}} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda.$$

Значения функции $q(\lambda)$ приведены в таблице приложения II и на графике в конце книги.

В случае неподвижного венца имеем:

$$T_{02} = T_{01},$$

$$\chi = \frac{p_{02}}{p_{01}} = \sigma.$$

Если, кроме того, площади элементарной струйки на входе и выходе одинаковы, т. е. $f_n = 1$, то мы имеем уравнение неразрывности для течения сжимаемого газа через плоскую решётку профилей, полученное в главе VIII:

$$q(\lambda_1) \sin \alpha_1 = \sigma q(\lambda_2) \sin \alpha_2.$$

Так как решение этого уравнения в аналитическом виде затруднительно, то его обычно решают графически. Для этого в плоскости треугольника скорости строим декартову систему координат λ_m и λ_u и полярную систему координат λ и α .

Наносим кривые постоянных значений

$$q(\lambda) \sin \alpha = \text{const};$$

величина

$$q(\lambda) \sin \alpha = \frac{\gamma^c \sin \alpha \Delta F_n}{\gamma_{\text{кр}} a_{\text{кр}} \Delta F_n}$$

есть отношение фактического расхода через элементарную струйку к максимальному местному расходу, получающемуся при

критической скорости и при условии, что полная скорость потока направлена по нормали к площадке ΔF_w т. е. $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Это отношение называется местным безразмерным расходом и обозначается

$$q_a = q(\lambda) \sin \alpha.$$

Критический расход

$$\Delta F_n \gamma_{кр} a_{кр}$$

в общем случае течения газа через элементарный лопаточный венец изменяется, поэтому, несмотря на постоянство расхода газа вдоль струйки тока, местный безразмерный расход не сохраняет постоянной величины.

Пользуясь величиной q_a , можем уравнение неразрывности элементарного венца колеса записать в следующем виде:

$$q_{1a} = f_n \chi q_{2a}.$$

Если, например, известен коэффициент закрутки потока при выходе из колеса λ_{2u} и задан местный безразмерный расход при входе в колесо

$$q_{1a} = q(\lambda_1) \sin \alpha_1,$$

то, определив величину

$$q_{2a} = q(\lambda_2) \sin \alpha_2 = \frac{q_{1a}}{f_n \chi},$$

по заданным значениям χ и f_n находим искомую точку конца вектора безразмерной скорости λ_2 как пересечение кривой $q_a = \text{const}$ с заданной прямой $\lambda_{2u} = \text{const}$ и отсюда определяем значения λ_{2m} и α_2 . На фиг. 237 представлены кривые $q_a = \text{const}$, вычисленные для воздуха ($k=1, 4$). Область возможных значений безразмерной скорости λ ограничена окружностью, радиус которой равен максимальному значению коэффициента скорости:

$$\lambda_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}};$$

для воздуха

$$\lambda_{\max} = \sqrt{6} = 2,45.$$

Вся область возможных значений коэффициента скорости разделяется в свою очередь окружностью единичного радиуса на области дозвуковых и сверхзвуковых скоростей. Определив величину λ_{2m} , находим коэффициенты радиальной и окружной составляющих скорости

$$\lambda_{2r} = \lambda_{2m} \sin \psi.$$

Таким образом если заданы в элементарном колесе степень изменения температуры торможения T_{02} / T_{01} и степень изменения

полного давления $\pi_{0k} = p_{02} / p_{01}$, то можно, пользуясь уравнением закрутки и уравнением неразрывности, определить коэффициент скорости λ_2 и угол α_2 , обеспечивающие заданное изменение параметров газа в рабочем колесе при известной величине местного безразмерного расхода на входе в рабочее колесо. Определив же необходимые параметры потока в абсолютном движении, нетрудно, пользуясь формулами, приведёнными в § 2, перейти к параметрам потока в относительном движении.

§ 5. Коэффициент полезного действия элементарной ступени компрессора

Для оценки степени газодинамического совершенства элементарной ступени компрессора удобно применить два способа. В первом способе сравнивается фактическая величина затраченной работы L с работой в некотором идеальном процессе повышения полного давления при одной и той же начальной температуре заторможенного потока $T_{0н}$ и соответственно одинаковых значениях полного давления перед и за ступенью: $p_{0н}$ и $p_{0с}$. Отношение этих работ называется коэффициентом полезного действия ступени компрессора

$$\eta = \frac{L_{ид}}{L}. \quad (29)$$

Величина затраченной работы L может быть определена из уравнения теплосодержания

$$L = \frac{c_p}{A} (T_{0с} - T_{0н}) = \frac{c_p}{A} T_{0н} \left(\frac{T_{0с}}{T_{0н}} - 1 \right) = \frac{k}{k-1} RT_{0н} \left(\frac{T_{0с}}{T_{0н}} - 1 \right), \quad (30)$$

или из уравнения Эйлера (20)¹⁾

$$L = \frac{1}{g} (c_{2u} u_2 - c_{1u} u_1),$$

или, наконец, из очевидного соотношения

$$L = \frac{N}{G},$$

где G — секундный расход газа через ступень, а N — мощность, затрачиваемая на вращение рабочего колеса, т. е. общая мощность, приложенная к валу компрессора, за вычетом мощности, идущей на преодоление трения в подшипниках.

Величины $L_{ид}$ определяются в зависимости от характера принятого идеального цикла.

¹⁾ Здесь и в дальнейшем под L мы будем понимать абсолютную величину работы.

Применяя уравнение теплосодержания к данному идеальному процессу, имеем:

$$L_{\text{ид}} = \frac{c_p}{A} (T_{0c \text{ ид}} - T_{0н}) = \frac{c_p}{A} \left(\frac{T_{0c \text{ ид}}}{T_{0н}} - 1 \right). \quad (31)$$

и, следовательно,

$$\eta = \frac{T_{0c \text{ ид}} - T_{0н}}{T_{0c} - T_{0н}} = \frac{\Delta T_{0\text{ид}}}{\Delta T_0}$$

или

$$\eta = \frac{\frac{T_{0c \text{ ид}}}{T_{0н}} - 1}{\frac{T_{0c}}{T_{0н}} - 1} = \frac{\theta_{0\text{ид}} - 1}{\theta_0 - 1},$$

где под θ_0 понимается отношение температур торможения в ступени.

Напомним, что так как мы рассматриваем адиабатические, т. е. теплоизолированные, процессы, то изменение температуры торможения происходит только в колесе:

$$T_{0н} = T_{01}, \quad T_{0c} = T_{02}, \\ T_{0c} - T_{0н} = T_{02} - T_{01}, \quad \Delta T_0 = \Delta T_{0к}.$$

Следовательно, степень повышения температуры торможения в ра-

бочем колесе $\theta_{0к} = \frac{T_{02}}{T_{01}}$ равно степени повышения температуры

торможения в ступени $\theta_0 = \frac{T_{0c}}{T_{0н}}$, т. е.

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_{0c}}{T_{0н}}$$

или

$$\theta_{0к} = \theta_0.$$

При адиабатическом процессе за идеальный цикл принимают изоэнтропический (идеальный адиабатический) процесс и коэффициент полезного действия называют *адиабатическим*. Обозначая в дальнейшем параметры потока в идеальном адиабатическом процессе индексом «ад», согласно определению коэффициента полезного действия имеем:

$$\eta_{\text{ад}} = \frac{L_{\text{ад}}}{L} = \frac{\Delta T_{0\text{ад}}}{\Delta T_0} = \frac{\theta_{0\text{ад}} - 1}{\theta_0 - 1}. \quad (32)$$

Во втором способе оценки газодинамического совершенства компрессора сравнивается фактическая величина полного давления p_{0c} с той величиной полного давления $p_{0c \text{ ид}}$, которая получилась бы

в некотором идеальном процессе при одной и той же подведённой работе и при одинаковых начальных параметрах потока $p_{0н}$ и $T_{0н}$.

Так же как и при определении коэффициента полезного действия, при такой оценке идеальным считают изэнтропический процесс; величину

$$m_{ст} = \frac{P_{0с}}{P_{0с\ из}}$$

можно назвать коэффициентом изэнтропичности ступени.

Согласно уравнению идеальной адиабаты

$$\frac{P_{0с\ из}}{P_{0н}} = \left(\frac{T_{0с}}{T_{0н}} \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

следовательно,

$$\frac{P_{0с}}{P_{0н}} = \pi_0 = m_{ст} \left(\frac{T_{0с}}{T_{0н}} \right)^{\frac{k}{k-1}} = m_{ст} \theta_0^{\frac{k}{k-1}} \quad (33)$$

или

$$m_{ст} = \frac{\frac{P_{0с}}{P_{0н}}}{\left(\frac{T_{0с}}{T_{0н}} \right)^{\frac{k}{k-1}}} = \frac{\pi_0}{\theta_0^{\frac{k}{k-1}}} = \frac{\pi_0}{\pi_{0\ из}}.$$

Иными словами, коэффициент изэнтропичности $m_{ст}$ показывает недобор в повышении полного давления в реальной ступени по сравнению с идеальным процессом при одной и той же степени увеличения температуры торможения θ_0 .

Остановимся сначала на адиабатическом коэффициенте полезного действия. Выражение для изэнтропической работы может быть получено, если с помощью пропорций идеальной адиабаты в уравнении теплосодержания (30) заменить отношение температур торможения отношением полных давлений:

$$L_{ад} = \frac{c_p T_{0н}}{A} \left[\left(\frac{P_{0с}}{P_{0н}} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] = \frac{k}{k-1} RT_{0н} \left[\pi_0^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]. \quad (34)$$

Это выражение уже встречалось выше. Для воздуха ($c_p = 0,24$; $k = 1,4$) имеем:

$$L_{ад} = 102,5 T_{0н} [\pi_0^{0,286} - 1].$$

Кривые зависимости

$$\frac{L_{ад}}{RT_{0н}} = \frac{k}{k-1} \left(\pi_0^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right)$$

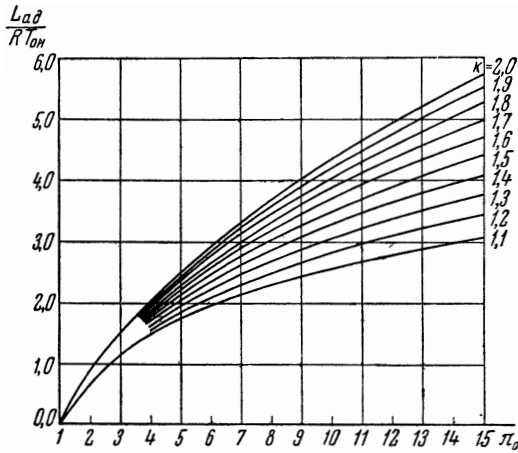
для различных значений k представлены на фиг. 288.

Отношение адиабатической работы $L_{ад}$ к величине u_2^2/g называют относительным адиабатическим напором или коэффициентом адиабатического напора:

$$\bar{L}_{2 ад} = \frac{L_{ад}}{\frac{u_2^2}{g}}$$

Согласно (32) получаем следующее соотношение:

$$\bar{L}_{2 ад} = \eta_{ад} \bar{L}_2.$$



Фиг. 288. Зависимость величины $\frac{L_{ад}}{RT_{он}}$ от степени повышения полного давления для различных значений $k = \frac{c_p}{c_v}$.

Представляя согласно (34) адиабатическую работу в виде

$$L_{ад} = \frac{c_1^2 \max}{2g} (\pi_0^{\frac{k-1}{k}} - 1),$$

имеем:

$$\bar{L}_{2 ад} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{u_2^2}{c_1^2 \max}} \cdot (\pi_0^{\frac{k-1}{k}} - 1) = \frac{k+1}{2(k-1)} \cdot \frac{1}{\frac{u_2^2}{a_1^2_{кр}}} (\pi_0^{\frac{k-1}{k}} - 1),$$

откуда получаем:

$$\pi_0 = \left(1 + \frac{2(k-1)}{k+1} \frac{u_2^2}{a_1^2_{кр}} \bar{L}_{2 ад} \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Для воздуха ($k = 1,4$)

$$\pi_0 = \left(1 + \frac{1}{3} \frac{u_2^2}{a_{1кр}^2} \bar{L}_{2ад} \right)^{3,5}.$$

На фиг. 289 представлена зависимость степени повышения полного давления в ступени воздушного компрессора от коэффициента напора и безразмерной окружной скорости.

Выражение для адиабатической работы можно представить в следующем виде:

$$L_{ад} = \frac{k}{k-1} \frac{P_{0н}}{\gamma_{0н}} \left[\left(1 + \frac{\Delta p_0}{P_{0н}} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right].$$

При небольших значениях π_0 величина $\Delta p_0 / p_{0н}$ мала, и, ограничиваясь двумя членами разложения в биномиальный ряд величины $(1 + \Delta p_0 / p_{0н})$, получаем следующее выражение для адиабатической работы:

$$L_{ад} = \frac{\Delta p_0}{\gamma_{0н}},$$

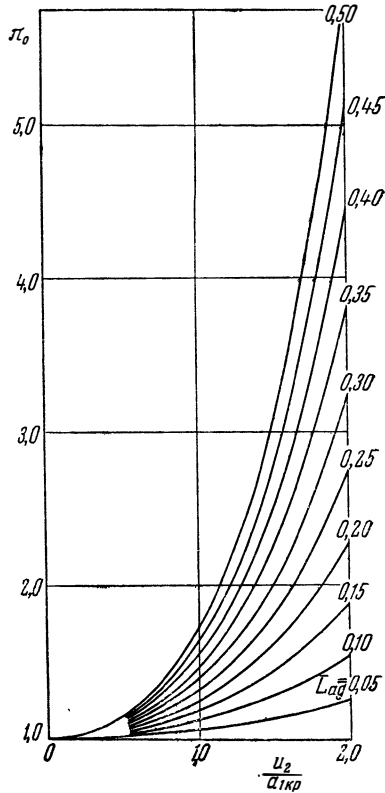
т. е. при небольших значениях π_0 адиабатическая работа в газе может определяться так же, как и в несжимаемой жидкости.

Согласно (32) адиабатический коэффициент полезного действия равен:

$$\eta_{ад} = \frac{\pi^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\theta_0 - 1} = \frac{\left(\frac{P_{0с}}{P_{0н}} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1}, \quad (35)$$

откуда имеем следующее выражение для степени повышения температуры торможения:

$$\theta_0 = \frac{\pi_0^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\eta_{ад}} + 1. \quad (36)$$

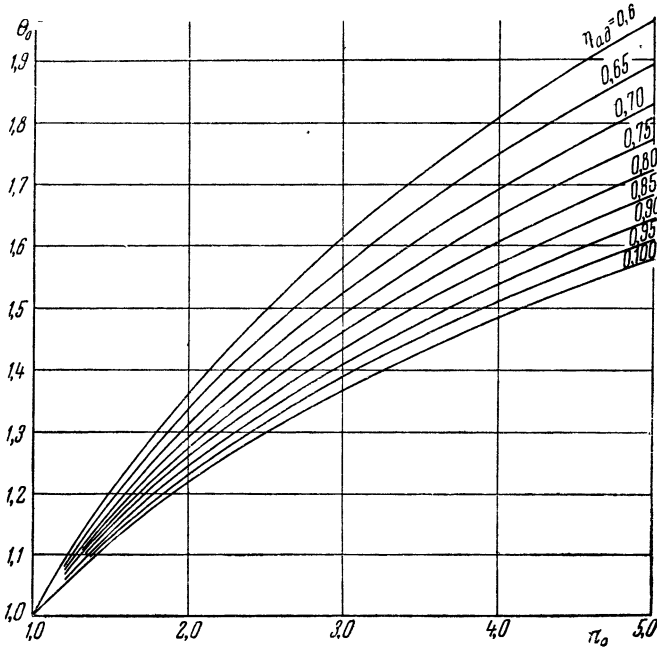


Фиг. 289. Зависимость степени повышения полного давления от безразмерной окружной скорости $\frac{u_2}{a_{1кр}}$ для различных значений коэффициента адиабатического напора $\bar{L}_{ад} = \frac{L_{ад}}{\frac{u_2^2}{g}}$.

Эта зависимость представлена графически на фиг. 290. При $\eta_{ад} = 1$ получаем обычную пропорцию идеальной адиабаты

$$\theta_0 = \pi_0^{\frac{k-1}{k}}.$$

Выразим адиабатический коэффициент полезного действия



Фиг. 290. Зависимость степени повышения температуры торможения θ_0 от степени повышения полного давления π_0 при различных значениях адиабатического коэффициента полезного действия компрессора $\eta_{ад}$.

через коэффициент изоэнтропичности $m_{ст}$. Согласно (33) и (35) имеем:

$$\eta_{ад} = \frac{\pi_0^{\frac{k-1}{k}} \theta_0 - 1}{\theta_0 - 1} \tag{37}$$

или

$$\eta_{ад} = \frac{\pi_0^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\left(\frac{\pi_0}{m_{ст}}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1} \tag{38}$$

Выясним физический смысл коэффициента изоэнтропичности. По определению можем написать:

$$m_{\text{ст}} = \frac{\frac{P_{0c}}{P_{0н}}}{\frac{P_{0c \text{ из}}}{P_{0н}}} = \frac{\frac{P_{0c}}{P_{02}} \cdot \frac{P_{02}}{P_{01}} \cdot \frac{P_{01}}{P_{0н}}}{\frac{P_{0c \text{ из}}}{P_{02 \text{ из}}} \cdot \frac{P_{02 \text{ из}}}{P_{01 \text{ из}}} \cdot \frac{P_{01 \text{ из}}}{P_{0н}}}.$$

При изоэнтропическом процессе полное давление потока в неподвижных аппаратах не изменяется:

$$P_{0c \text{ из}} = P_{02 \text{ из}},$$

$$P_{01 \text{ из}} = P_{0н}.$$

Наличие потерь в аппаратах приводит к уменьшению полного давления:

$$\sigma_1 = \frac{P_{01}}{P_{0н}},$$

$$\sigma_2 = \frac{P_{0c}}{P_{02}}.$$

Эти величины имеют обычный гидравлический смысл и могут быть определены путём замеров полного давления при входе в аппарат и перепада полных давлений:

$$\sigma_1 = 1 - \frac{P_{0н} - P_{01}}{P_{0н}},$$

$$\sigma_2 = 1 - \frac{P_{02} - P_{0c}}{P_{02}}.$$

Величину

$$m_{\text{к}} = \frac{\frac{P_{02}}{P_{01}}}{\left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right)_{\text{из}}}$$

назовём *коэффициентом изоэнтропичности рабочего колеса*.

Введённые три коэффициента σ_1 , σ_2 и $m_{\text{к}}$ определяют *общий коэффициент изоэнтропичности ступени*:

$$m_{\text{ст}} = \sigma_1 \sigma_2 m_{\text{к}}.$$

Согласно уравнению идеальной адиабаты, написанному для колеса, имеем:

$$\pi_{0к} = \frac{P_{02}}{P_{01}} = m_{\text{к}} \left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right)_{\text{из}} = m_{\text{к}} \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (39)$$

Перейдём к параметрам потока в относительном движении. Как уже указывалось в § 2, переход от параметров в абсолютном движении к параметрам в относительном движении совершается по идеальной адиабате:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{\frac{P_{02}}{P_{02w}} P_{02w}}{\frac{P_{01}}{P_{01w}} P_{01w}} = \frac{\left(\frac{T_{02}}{T_{02w}}\right)^{\frac{k}{k-1}} P_{02w}}{\left(\frac{T_{01}}{T_{01w}}\right)^{\frac{k}{k-1}} P_{01w}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^{\frac{k}{k-1}} \frac{P_{02w}}{\left(\frac{T_{02w}}{T_{01w}}\right)^{\frac{k}{k-1}}}.$$

Сопоставляя это выражение с (39), получаем:

$$m_K = \frac{\frac{P_{02w}}{P_{01w}}}{\left(\frac{T_{02w}}{T_{01w}}\right)^{\frac{k}{k-1}}}.$$

Таким образом, коэффициент изэнтропичности имеет одинаковый вид в параметрах абсолютного и относительного движений.

В § 3 была получена формула для отношения температур торможения в относительном движении

$$\frac{T_{02w}}{T_{01w}} = 1 + \frac{k-1}{k+1} \frac{u_1^{*2}}{v_1^2} \left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 1 \right].$$

Следовательно, в общем случае коэффициент изэнтропичности рабочего колеса равен:

$$m_K = \frac{\frac{P_{02w}}{P_{01w}}}{\left\{ 1 + \frac{k-1}{k+1} \frac{u_1^{*2}}{v_1^2} \left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 1 \right] \right\}^{\frac{k}{k-1}}}. \quad (40)$$

В цилиндрическом рабочем колесе ($r_2 = r_1$) температура торможения в относительном движении остаётся постоянной величиной, откуда

$$m_K = \frac{P_{02K}}{P_{01w}},$$

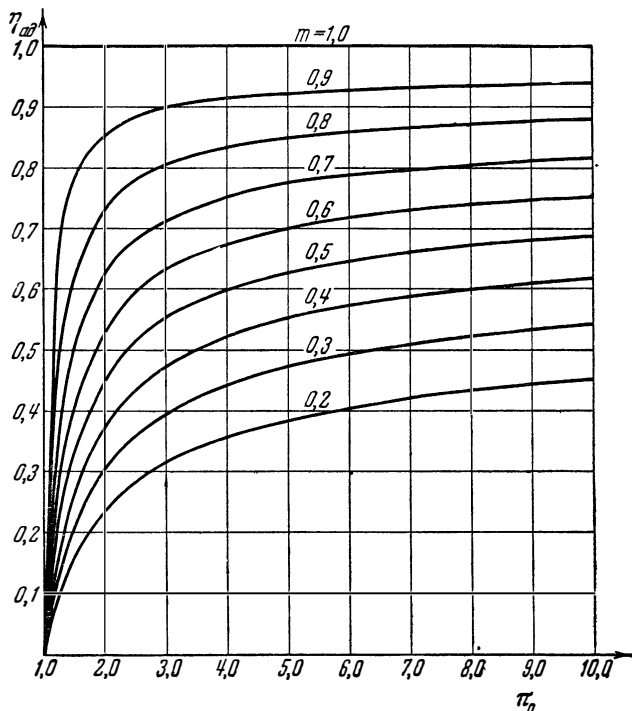
т. е. в этом случае коэффициент изэнтропичности рабочего колеса равен коэффициенту полного давления:

$$m_K = \sigma_K,$$

отсюда

$$m_{ст} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_K.$$

На фиг. 291 представлена зависимость адиабатического коэффициента полезного действия ступени компрессора от степени повышения полного давления в ступени π_0 для разных значений коэффициента изоэнтропичности m ; кривые фиг. 291 показывают, что с увеличением степени повышения полного давления ступени заданное значение адиабатического коэффициента



Фиг. 291. Зависимость коэффициента полезного действия элементарной ступени компрессора от степени повышения полного давления при различных значениях коэффициента изоэнтропичности m .

полезного действия достигается при меньших величинах коэффициента изоэнтропичности ступени, т. е. при бóльших потерях в ступени.

Устремляя в выражении (38) степень повышения полного давления к бесконечности, находим, что адиабатический коэффициент полезного действия ступени компрессора не может превосходить значения

$$\eta_{ад} < m_{ст}^{\frac{k-1}{k}}.$$

Используя выражения (37) и (38), находим следующие условия достижения заданной величины адиабатического коэффициента полезного действия ступени:

$$m_{ст} \geq \frac{[1 + (\theta_0 - 1)\eta_{ад}]^{\frac{k}{k-1}}}{\theta_0^{\frac{k}{k-1}}}$$

или

$$m_{ст} \geq \frac{\pi_0^{\frac{k}{k-1}} \eta_{ад}^{\frac{k}{k-1}}}{\left[\pi_0^{\frac{k-1}{k}} - 1 + \eta_{ад} \right]^{\frac{k}{k-1}}}.$$

Приравнявая адиабатический коэффициент полезного действия нулю, находим следующее минимальное значение коэффициента изэнтропичности ступени:

$$m_{ст \min} > \frac{1}{\theta_0^{\frac{k}{k-1}}} = \left(\frac{T_{01}}{T_{02}} \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Условию $\eta_{ад} > 0$ согласно (33) соответствует степень повышения полного давления в ступени компрессора π_0 больше единицы.

Степень повышения полного давления в колесе должна быть больше, чем в ступени:

$$\pi_{ок} = \frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_{0н}}{P_{01}} \cdot \frac{P_{02}}{P_{0с}} \cdot \frac{P_{0с}}{P_{0н}} = \pi_0 \sigma_1 \sigma_2.$$

Адиабатический коэффициент полезного действия колеса согласно (35) равен:

$$\eta_{ад. к} = \frac{(\pi_{ок})^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1} = \frac{\left(\frac{\pi_0}{\sigma_1 \sigma_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1}.$$

Повышение температуры торможения в ступени такое же, как и в рабочем колесе, следовательно,

$$\frac{\eta_{ад. к}}{\eta_{ад}} = \frac{\left(\frac{\pi_0}{\sigma_1 \sigma_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\pi_0^{\frac{k-1}{k}} - 1};$$

Как и следовало ожидать, адиабатический коэффициент полезного действия рабочего колеса больше адиабатического коэффициента полезного действия целой ступени.

С помощью кривых зависимости повышения температуры торможения от повышения полного давления и адиабатического коэффициента полезного действия (фиг. 290) можно определить коэффициент полезного действия рабочего колеса по заданным параметрам ступени: π_0 , $\eta_{ад}$, σ_1 и σ_2 или коэффициент полезного действия ступени по заданным параметрам рабочего колеса $\pi_{0к}$ и $\eta_{ад.к}$ и величинам σ_1 и σ_2 .

Пусть, например, $\pi_{0к} = 1,4$, $\eta_{ад.к} = 0,84$, $\sigma_1 \sigma_2 = 0,98$ и требуется определить адиабатический коэффициент полезного действия ступени. Сначала находим степень повышения полного давления ступени:

$$\pi_0 = \sigma_1 \sigma_2 \pi_{0к} = 0,98 \cdot 1,4 = 1,37.$$

Затем по заданным величинам $\pi_{0к}$ и $\eta_{ад.к}$ находим степень повышения температуры торможения $\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1,12$ и адиабатический коэффициент полезного действия ступени $\eta_{ад} = 0,78$ (фиг. 290). Обычно потери в аппаратах задаются коэффициентом гидравлического сопротивления ζ . Так, например, для выходного направляющего аппарата имеем:

$$\zeta_2 = \frac{P_{02} - P_{0c}}{\frac{\rho_2 c_2^2}{2}}.$$

Последнее можно записать и так:

$$\zeta_2 = (1 - \sigma_2) \frac{P_{02}}{\frac{\rho_2 c_2^2}{2}} = \frac{2P_{02}(1 - \sigma_2)}{\rho_{02} \rho_{02} c_2^2},$$

или согласно формулам (43) и (73) главы I получим:

$$\zeta_2 = \frac{1 - \sigma_2}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda_2^2} \cdot \frac{k+1}{k}.$$

Таким образом, если дана величина ζ_2 , то коэффициент полного давления σ_2 может быть определён по значению коэффициента абсолютной скорости потока λ_2 перед аппаратом:

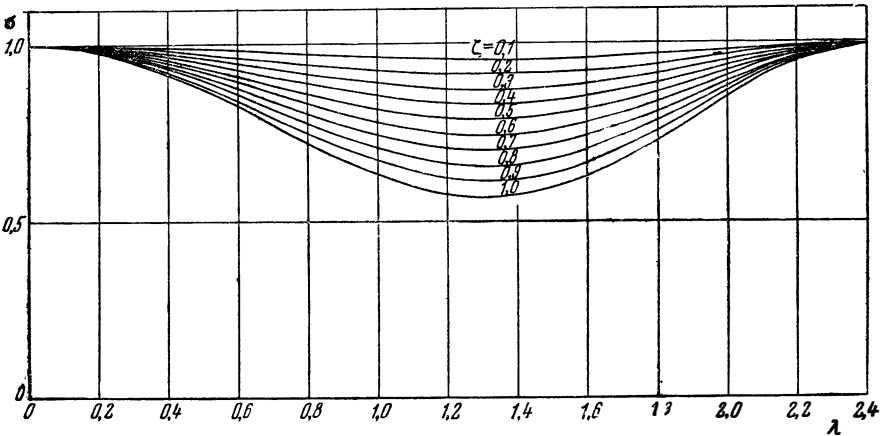
$$\sigma_2 = 1 - \frac{k}{k+1} \zeta_2 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda_2^2;$$

при $\lambda_2 \ll 1$ получаем уже известную приближённую формулу из главы VII

$$\sigma_2 \approx 1 - \frac{k}{k+1} \zeta_2 \lambda_2^2.$$

Точная зависимость σ от λ для различных значений ζ представлена на фиг. 292.

Рассмотрим ещё одну важную характеристику элементарной ступени компрессора — *степень реактивности рабочего колеса*. Мы уже указывали, что основное назначение рабочего колеса компрессора состоит в увеличении полного давления путём подвода энергии к газовому потоку. Однако подвод энергии может осуществляться как за счёт увеличения скоростного напора, так и статического давления. Так как обычно ком-



Фиг. 292. Зависимость коэффициента полного давления σ от коэффициента скорости λ набегающего потока для различных значений коэффициента сопротивления ζ .

прессоры предназначаются для повышения полного давления газового потока, главным образом за счёт статического давления, то задачей выходного направляющего аппарата является преобразование скоростного напора потока в давление; поэтому выходной аппарат часто называют диффузором.

Степень диффузорности выходного направляющего аппарата зависит от того, за счёт какой части энергии увеличивается полное давление потока в рабочем колесе.

Степень реактивности рабочего колеса ρ_k характеризует долю работы, идущую на увеличение статического давления в колесе, и численно равна отношению работы проталкивания в колесе к общей величине затраченной работы:

$$\rho_k = \frac{\int_{(1)}^{(2)} \frac{dp}{\gamma}}{L}. \quad (41)$$

Согласно уравнению Бернулли для абсолютного движения в

рабочем колесе имеем:

$$-L = \int_{(1)}^{(2)} \frac{dp}{\gamma} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} + L_{\text{тр. к.}}$$

Остановимся на идеальной степени реактивности рабочего колеса, т. е. степени реактивности в изоэнтропическом течении. В этом случае по уравнению Бернулли имеем:

$$\rho_{\text{к}} = \frac{\int_{(1)}^{(2)} \frac{dp}{\gamma}}{L} = 1 - \frac{c_2^2 - c_1^2}{2gL}. \quad (42)$$

Вводя в рассмотрение меридиональные и окружные составляющие скорости, получим:

$$\rho_{\text{к}} = 1 - \frac{c_{2u}^2 - c_{1u}^2}{2gL} - \frac{c_{2m}^2 - c_{1m}^2}{2gL}.$$

Нулевая степень реактивности соответствует равенству статических давлений перед и за рабочим колесом. В этом случае вся энергия, подведённая к рабочему колесу, израсходована на увеличение кинетической энергии потока. Такое колесо называют активным рабочим колесом.

Если абсолютные скорости при входе и выходе из колеса равны: $c_1 = c_2$, то степень реактивности равна единице, т. е. вся энергия, подведённая к рабочему колесу, израсходована на увеличение статического давления.

Отрицательная степень реактивности означает, что в колесе произошло падение статического давления; при этом приращение кинетической энергии превосходит затраченную работу.

Если меридиональные составляющие скорости остаются постоянными $c_{1m} = c_{2m}$, то

$$\rho_{\text{к}} = 1 - \frac{c_{2u}^2 - c_{1u}^2}{2gL}.$$

Если, кроме того, течение в колесе является цилиндрическим ($r_1 = r_2$), то затраченная работа на основании формулы (20) равна

$$L = \frac{u}{g} (c_{2u} - c_{1u})$$

и степень реактивности колеса выражается следующим образом¹⁾:

$$\rho_{\text{к}} = 1 - \frac{c_{2u} + c_{1u}}{2u} = 1 - \frac{c_{1u}}{u} - \frac{1}{2} \frac{\Delta c_u}{u}. \quad (43)$$

¹⁾ Здесь под Δc_u понимается разность окружных составляющих скорости $\Delta c_u = c_{2u} - c_{1u}$.

Заменяя в выражении (42) для степени реактивности колеса затраченную работу L по формуле (30)

$$L = \frac{c_1^2 \max}{2g} \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1 \right),$$

имеем:

$$\rho_K = 1 - \frac{\frac{T_{02}}{T_{01}} \lambda_2^2 - \lambda_1^2}{\frac{k+1}{k-1} \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1 \right)}. \quad (44)$$

Разрешая последнее уравнение относительно $\frac{T_{02}}{T_{01}}$, получаем следующую зависимость степени повышения температуры торможения от степени реактивности и коэффициентов абсолютной скорости перед и за колесом:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{(k+1)(1-\rho_K) - \lambda_1^2(k-1)}{(k+1)(1-\rho_K) - \lambda_2^2(k-1)}. \quad (45)$$

§ 6. Коэффициент полезного действия элементарной ступени турбины

С энергетической точки зрения все турбины можно разделить на два основных типа: с использованием энергии выходящего потока и с потерей энергии выходящего потока. К первому типу относится, например, турбина турбореактивного двигателя, так как в нём энергия выходящей струи создаёт тягу двигателя. Последняя ступень стационарной паровой турбины, в которой не используется энергия выходящего пара, может служить примером турбины второго типа.

Для каждого из указанных типов турбин вводятся свои безразмерные коэффициенты, характеризующие их газодинамическое совершенство.

Рассмотрим сначала ступень турбины первого типа. В такой ступени турбины, так же как и в ступени компрессора, удобны два способа оценки её газодинамического совершенства.

В первом способе сравнивается фактическая работа, снимаемая с вала турбины, с той работой, которую можно было бы снять при данном перепаде полных давлений в некотором идеальном термодинамическом процессе. Отношение этих работ называется коэффициентом полезного действия ступени турбины:

$$\eta = \frac{L}{L_{ид}}.$$

Очевидно, что $L_{ид} > L$ и $\eta < 1$. Величина отведённой от потока работы L может быть определена из уравнения тепло-

содержания

$$L = \frac{c_p}{A} (T_{0н} - T_{0с})$$

или из уравнения Эйлера

$$L = \frac{1}{g} (c_{1u} u_1 - c_{2u} u_2).$$

Применяя уравнение теплосодержания к выбранному идеальному процессу, получим:

$$L_{ид} = \frac{c_p}{A} (T_{0н} - T_{0с ид}),$$

и следовательно,

$$\eta = \frac{T_{0н} - T_{0с}}{T_{0н} - T_{0с ид}} = \frac{\Delta T_0}{\Delta T_{0 ид}}$$

или

$$\eta = \frac{1 - \frac{T_{0с}}{T_{0н}}}{1 - \frac{T_{0с ид}}{T_{0н}}} = \frac{1 - \theta_0}{1 - \theta_{0 ид}}.$$

В качестве идеального принимают обычно изоэнтروпический процесс и коэффициент полезного действия называют адиабатическим¹⁾:

$$\eta_{ад} = \frac{L}{L_{ад}}.$$

При втором способе оценки газодинамического совершенства ступени турбины сравнивается фактическое полное давление за турбиной $p_{0с}$ с тем полным давлением $p_{0с из}$, которое получилось бы в изоэнтропическом процессе при одинаковых мощностях на валу турбины, т. е. при одинаковых значениях температуры торможения за турбиной $T_{0с}$ и начальных параметров $p_{0н}$ и $T_{0н}$.
Отношение

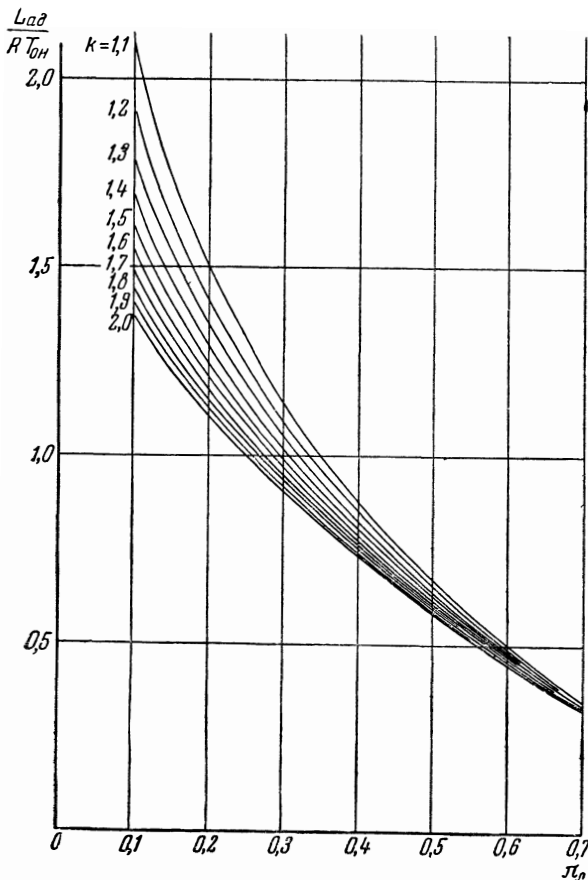
$$\frac{p_{0с}}{p_{0с из}} = m_{ст} = \frac{\frac{p_{0с}}{p_{0н}}}{\frac{p_{0с из}}{p_{0н}}} = \frac{\pi_0}{\pi_{0 из}}$$

назовём коэффициентом изоэнтропичности ступени турбины.

¹⁾ Иногда этот коэффициент полезного действия называют относительным внутренним.

Перейдём к рассмотрению адиабатического коэффициента полезного действия. Как было показано в предыдущем параграфе,

$$L_{ад} = \frac{c_p T_{0н}}{A} \left[1 - \left(\frac{p_{0с}}{p_{0н}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] = \frac{k}{k-1} RT_{0н} \left[1 - \pi_0^{\frac{k-1}{k}} \right].$$



Фиг. 293. Зависимость величины $\frac{L_{ад}}{RT_{0н}}$ от степени понижения

полного давления для различных значений $k = \frac{c_p}{c_v}$.

или для воздуха:

$$L_{ад} = 102,5 T_{0н} [1 - \pi_0^{0,286}].$$

Кривые зависимости величины

$$\frac{k}{k-1} \left(1 - \pi_0^{\frac{k-1}{k}} \right) = \frac{L_{ад}}{RT_{0н}}$$

от степени понижения полного давления в ступени турбины для различных значений k представлены на фиг. 293.

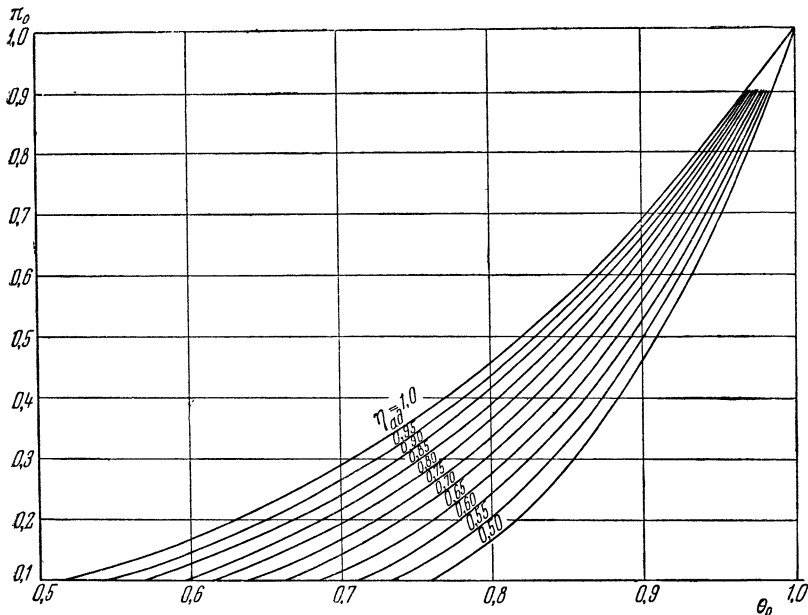
Подставляя значение адиабатической работы в выражение для коэффициента полезного действия, получим:

$$\eta_{\text{ад}} = \frac{1 - \frac{T_{02}}{T_{01}}}{1 - \left(\frac{P_{0c}}{P_{0н}}\right)^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{1 - \theta_n}{1 - \pi_0^{\frac{k-1}{k}}}, \quad (46)$$

откуда степень понижения температуры торможения в турбине равна:

$$\theta_0 = 1 - \eta_{\text{ад}} \left(1 - \pi_0^{\frac{k-1}{k}}\right). \quad (47)$$

Последняя зависимость для воздуха ($k = 1,4$) представлена



Фиг. 294. Зависимость степени понижения температуры торможения θ_0 от степени понижения полного давления π_0 в ступени турбины для различных значений адиабатического коэффициента полезного действия $\eta_{\text{ад}}$.

графически на фиг. 294. При $\eta_{\text{ад}} = 1$ получаем обычную пропорцию идеальной адиабаты

$$\theta_0 = \pi_0^{\frac{k-1}{k}}.$$

Пользуясь уравнением действительного процесса в ступени турбины

$$\left(\frac{P_{0c}}{P_{0H}} \right) = m_{ст} \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

приходим к следующему выражению:

$$\eta_{ад} = \frac{1 - \theta_0}{1 - m_{ст} \frac{1 - \theta_0}{\theta_0^{\frac{k-1}{k}}}}, \quad (48)$$

или

$$\eta_{ад} = \frac{1 - \frac{\pi_0^{\frac{k-1}{k}}}{m_{ст}^{\frac{k-1}{k}}}}{1 - \pi_0^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{1 - \left(\frac{\pi_0}{m_{ст}} \right)^{\frac{k-1}{k}}}{1 - \pi_0^{\frac{k-1}{k}}}. \quad (49)$$

В предыдущем параграфе выведено равенство

$$m_{ст} = \sigma_1 \sigma_2 m_{к},$$

где

$$m_{к} = \frac{\frac{P_{02w}}{P_{01w}}}{\left(\frac{T_{02w}}{T_{01w}} \right)^{\frac{k}{k-1}}}.$$

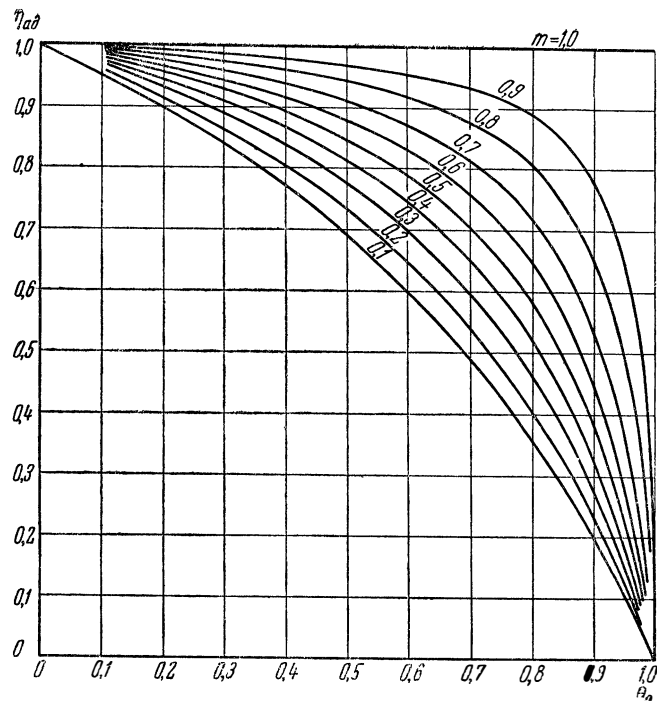
В случае цилиндрического рабочего колеса имеем:

$$m_{к} = \frac{P_{02w}}{P_{01w}} = \sigma_{к}.$$

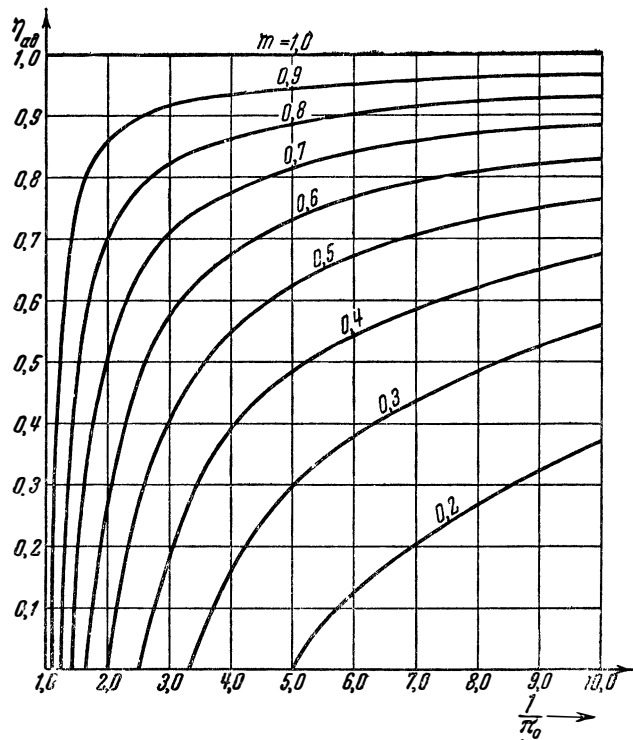
Зависимости адиабатического коэффициента полезного действия от степени понижения температуры торможения и степени понижения полного давления для различных значений коэффициента изоэнтропичности представлены на фиг. 295 и 296.

При малых значениях θ_0 (или π_0), т. е. при больших перепадах давления в турбине, гидравлические потери относительно слабее сказываются на величине $\eta_{ад}$, чем при малых перепадах давления.

Так же как и в случае компрессора, можно ввести в рассмотрение коэффициент полезного действия рабочего колеса турбины, который численно равен коэффициенту полезного действия ступени при отсутствии потерь в направляющих аппаратах.



Фиг. 295. Зависимость адиабатического коэффициента полезного действия элементарной ступени турбины от степени понижения температуры торможения для различных значений коэффициента изэнтропичности.



Фиг. 296. Зависимость адиабатического коэффициента полезного действия элементарной ступени турбины от степени понижения полного давления при различных значениях коэффициента изэнтропичности.

Понижение полного давления в колесе

$$\pi_{0к} = \frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_{0с}}{P_{0н}} \cdot \frac{P_{02}}{P_{0с}} \cdot \frac{P_{0н}}{P_{01}} = \frac{\pi_0}{\sigma_1 \sigma_2},$$

следовательно,

$$\eta_{ад. к} = \frac{1 - \theta_0}{1 - \pi_{0к}^{\frac{k}{k-1}}} = \frac{1 - \theta_0}{1 - \left(\frac{\pi_0}{\sigma_1 \sigma_2} \right)^{\frac{k}{k-1}}}. \quad (50)$$

Сравнивая выражения (46) и (50), получаем:

$$\frac{\eta_{ад. к}}{\eta_{ад. ст}} = \frac{1 - \pi_0^{\frac{k-1}{k}}}{1 - \left(\frac{\pi_0}{\sigma_1 \sigma_2} \right)^{\frac{k-1}{k}}},$$

т. е., как и следовало ожидать, коэффициент полезного действия колеса больше коэффициента полезного действия ступени.

Исходя из равенства степеней понижения температуры торможения в рабочем колесе и в целой ступени, можно с помощью кривой зависимости степени понижения температуры торможения от степени понижения полного давления и адиабатического коэффициента полезного действия (фиг. 294) определить коэффициент полезного действия рабочего колеса по значениям π_0 , $\eta_{ад. к}$, σ_1 и σ_2 или коэффициент полезного действия ступени по $\pi_{0к}$, $\eta_{ад. к}$, σ_1 и σ_2 .

В предыдущем параграфе мы уже останавливались на определении величины σ по заданным значениям коэффициента потерь ζ и коэффициента скорости λ (фиг. 292). Однако в практике турбиностроения обычно потери учитываются с помощью скоростных коэффициентов направляющих аппаратов (φ) и рабочих колёс (ψ).

Каждый из этих коэффициентов определяется как соответствующее отношение действительной скорости истечения из решётки к скорости изэнтропического истечения:

$$\varphi = \frac{\lambda}{\lambda_{ид}}.$$

В § 1 главы VII было получено соотношение между коэффициентом полного давления σ и скоростным коэффициентом

$$\sigma = \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{\lambda^2}{\varphi^2}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \lambda^2} \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

представленное на графике фиг. 125.

Работа, отводимая рабочим колесом от газового потока, получается как за счёт уменьшения давления, так и за счёт уменьшения кинетической энергии потока газа:

$$L = \int_2^1 \frac{dp}{\gamma} + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g} - L_{\text{тр}}. \quad (51)$$

Степень реактивности колеса турбины ρ_K характеризует долю работы проталкивания в общей суммарной работе L , отводимой колесом от потока:

$$\rho_K = \frac{\int_2^1 \frac{dp}{\gamma}}{L}.$$

Предполагая, что действительный процесс может быть описан некоторой политропой $\frac{p}{\gamma^n} = \text{const}$ ¹⁾, получим следующее выражение для степени реактивности через начальное и конечное давления в колесе:

$$\rho_K = \frac{\int_2^1 \frac{dp}{\gamma}}{L} = \frac{n_K}{n_K - 1} RT_1 \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{n_K - 1}{n_K}} \right] \frac{1}{L}. \quad (52)$$

Пользуясь понятием степени реактивности, можно уравнение Бернулли записать в следующем виде:

$$1 = \rho_K + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2gL} - \frac{L_{\text{тр}}}{L},$$

откуда имеем следующее выражение степени реактивности через скорости абсолютного движения:

$$\rho_K = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2gL} + 1 + \frac{L_{\text{тр}}}{L}.$$

В дальнейшем будем рассматривать только идеальную степень реактивности, т. е. степень реактивности, вычисляемую в предположении изоэнтропичности течения. В этом случае

$$\rho_K = \frac{k}{k-1} RT_1 \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \cdot \frac{1}{L}$$

и

$$\rho_K = 1 + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2gL} = 1 - \frac{c_1^2 - c_2^2}{2gL}.$$

¹⁾ Здесь величина показателя политропы n отлична от показателя политропы n_0 для заторможенных параметров газового потока.

Здесь скорость c_2 отличается от истинной скорости за колесом, так как соответствует не действительному, а идеальному процессу.

Используя равенство (30), можно степень реактивности выразить через коэффициент абсолютной скорости и степень понижения температуры торможения

$$\rho_K = 1 - \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2 \frac{T_{02}}{T_{01}}}{\frac{k+1}{k-1} \left(1 - \frac{T_{02}}{T_{01}} \right)}. \quad (53)$$

Из последнего выражения получаем зависимость степени понижения температуры торможения от степени реактивности:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{(k+1)(1-\rho_K) - (k-1)\lambda_1^2}{(k+1)(1-\rho_K) - (k-1)\lambda_2^2}. \quad (54)$$

Если степень реактивности равна нулю, то значение статического давления при входе и выходе из колеса равно:

$$p_1 = p_2,$$

т. е. вся работа газа в рабочем колесе совершается только за счёт уменьшения его кинетической энергии. Такое рабочее колесо называют активным рабочим колесом.

Колесо, в котором степень реактивности отлична от нуля, называют реактивным. При значении степени реактивности, равной единице, имеем:

$$c_1 = c_2,$$

т. е. в этом случае работа газа в рабочем колесе совершается только за счёт уменьшения давления.

При отрицательном значении степени реактивности давление за колесом турбины больше, чем перед колесом:

$$p_2 > p_1.$$

В случае, если меридиональные составляющие скорости перед и за колесом равны, имеем:

$$\rho_K = 1 - \frac{c_{1u}^2 - c_{2u}^2}{2gL}. \quad (55)$$

Если течение газа в колесе является цилиндрическим ($r_1 = r_2$), то выражение для степени реактивности колеса упрощается:

$$\rho_K = 1 - \frac{c_{1u} + c_{2u}}{2u} = 1 - \frac{c_{1u}}{u} - \frac{1}{2} \frac{\Delta c_u}{u}. \quad (56)$$

Перейдём теперь к способу оценки совершенства турбин в которых не используется энергия выходящего потока.

Пусть, например, для ступени такой турбины, состоящей из входного направляющего аппарата, рабочего колеса и спрямляющего аппарата, заданы коэффициенты, характеризующие потери в соответственных её элементах: σ_1 , m_K и σ_2 , и пусть известен коэффициент скорости на срезе турбины $-\lambda_c$.

Из уравнения теплосодержания

$$L = \frac{k}{k-1} RT_{0H} \left[1 - \frac{T_{0c}}{T_{0H}} \right],$$

где

$$\frac{T_{0c}}{T_{0H}} = \left(\frac{P_{0c}}{P_{0H}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \frac{1}{m_{ст}^{\frac{k}{k-1}}};$$

таким образом, имеем:

$$L = \frac{k}{k-1} RT_{0H} \left[1 - \left(\frac{P_{0c}}{P_{0H}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \frac{1}{m_{ст}^{\frac{k}{k-1}}} \right]; \quad (57)$$

здесь

$$m_{ст} = \sigma_1 \sigma_2 m_K,$$

$$P_{0c} = \frac{P_c}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_c^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}}.$$

За спрямляющим аппаратом находится срез турбины, поэтому при дозвуковом истечении из спрямляющего аппарата статическое давление равно давлению окружающего пространства P_a , отсюда

$$P_{0c} = \frac{P_a}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_c^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}}$$

и, следовательно,

$$L = \frac{k}{k-1} RT_{01} \left[1 - \left(\frac{P_a}{P_{0H}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \frac{1}{m_{ст}^{\frac{k}{k-1}} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_c^2 \right)} \right]. \quad (58)$$

Работа одного килограмма газа в этих условиях может быть увеличена, если осуществить дальнейшее торможение потока после спрямляющего аппарата путём постановки, например, специального безлопаточного кольцевого диффузора.

Увеличение работы достигается, конечно, только в том случае, если потери в этом диффузоре не слишком велики. При наличии чрезмерно больших потерь в диффузоре возможно даже уменьшение работы.

Пусть диффузор осуществляет торможение потока от значения коэффициента λ_c до некоторого значения $\lambda_d < \lambda_c$ и коэффициент полного давления при этом составляет σ_d . Статическое давление на срезе диффузора равно p_a , и выражение для работы ступени при наличии диффузора — L_d примет следующий вид:

$$L_d = \frac{k}{k-1} RT_{0H} \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_{0H}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \frac{1}{m_{ст}^{\frac{k-1}{k}} \sigma_d^{\frac{k-1}{k}} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_d^2 \right)} \right]. \quad (59)$$

Сравнивая работы при наличии диффузора (L_d) и без него (L), замечаем, что установка диффузора только тогда даёт увеличение работы, если коэффициент давления в нём удовлетворяет условию

$$\sigma_d > \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_c^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_d^2} \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

При полном торможении ($\lambda_d \approx 0$) это условие принимает следующий вид:

$$\sigma_d > \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_c^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Если

$$\sigma_d < \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_c^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_d^2} \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

то нет смысла применять диффузор, так как он приводит к уменьшению работы ступени.

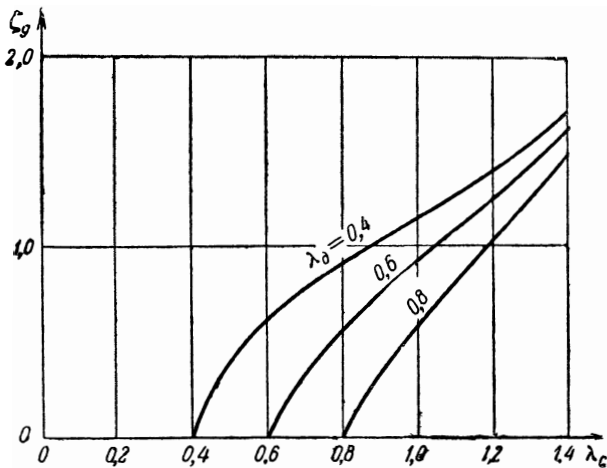
Заменяя σ_d коэффициентом сопротивления диффузора ζ (см. § 5), можем условие эффективности диффузора переписать в следующем виде:

$$\zeta_d \leq \frac{k+1}{k\lambda_c^2} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_c^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}} - \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_c^2}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_d^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}} \right].$$

В случае полного торможения потока в диффузоре ($\lambda_d \approx 0$) имеем:

$$\zeta_d \leq \frac{k+1}{k\lambda_c^2} \frac{1 - \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_c^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_c^2\right)^{\frac{1}{k-1}}}.$$

Кривые зависимости максимального допустимого значения ζ_d для воздуха ($k=1,4$) от коэффициента скорости за спрямляющим аппаратом λ_c для разных значений коэффициентов скорости при выходе из диффузора представлены на фиг. 297.



Фиг. 297. Зависимость максимально допускаемого значения коэффициента сопротивления диффузора от коэффициента скорости за спрямляющим аппаратом элементарной турбины для различных значений коэффициента скорости на выходе из диффузора — λ_d .

Максимально возможная работа получается при изоэнтальпическом процессе в турбине и полном торможении потока в диффузоре.

Полагая в (59) $m = \sigma_d = 1$ и $\lambda_d \approx 0$, получим следующее выражение для максимально возможной работы при заданных параметрах заторможенного потока на входе в ступень $p_{0н}, T_{0н}$, заданной величине статического давления p_a и температуре T_a в пространстве, окружающем турбину:

$$L_{\max} = \frac{k}{k-1} RT_{0н} \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_{0н}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] = \frac{k}{k-1} RT_{0н} \left(1 - \frac{T_a}{T_{0н}} \right). \quad (60)$$

Долю, составляемую максимальной работой от полной энергии потока на входе в турбину, назовём коэффициентом возможного использования энергии потока

$$K = \frac{L_{\max}}{\frac{c_p}{A} T_{0H}} = 1 - \left(\frac{P_a}{P_{0H}} \right)^{\frac{k-1}{k}} = 1 - \frac{T_a}{T_{0H}} = \frac{c_p (T_{0H} - T_a)}{c_p T_{0H}}.$$

Здесь T_a — термодинамическая температура потока на срезе турбины. Величину $c_p (T_{0H} - T_a)$ называют обычно располагаемым теплоперепадом. Поэтому коэффициент K можно назвать относительным располагаемым теплоперепадом.

Таким образом, коэффициент возможного использования энергии, или относительный располагаемый теплоперепад, зависит только от заданных параметров потока при входе в турбину и параметров газа в среде, куда будет выходить поток из турбины, и не может служить характеристикой степени совершенства турбины.

Для определения степени совершенства ступени турбины при работе её в качестве привода (без использования энергии потока газа на выходе) вводится коэффициент мощности, под которым понимается отношение фактической работы L , передаваемой на вал турбины, к максимальному значению работы L_{\max} .

Согласно определению имеем:

$$\eta_{\text{пр}} = \frac{L}{L_{\max}} = \frac{1 - \left(\frac{P_a}{P_{0H}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \frac{1}{m_{\text{ст}}^{\frac{k-1}{k}} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{\text{с}}^2 \right)}}{1 - \left(\frac{P_a}{P_{0H}} \right)^{\frac{k-1}{k}}}, \quad (61)$$

или при наличии диффузора на выходе из турбины:

$$\eta_{\text{пр}} = \frac{L_{\text{д}}}{L_{\max}} = \frac{1 - \left(\frac{P_a}{P_{0H}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \frac{1}{m_{\text{ст}}^{\frac{k-1}{k}} \sigma_{\text{д}}^{\frac{k-1}{k}} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{\text{д}}^2 \right)}}{1 - \left(\frac{P_a}{P_{0H}} \right)^{\frac{k-1}{k}}}. \quad (62)$$

Сравнивая последнее выражение с формулой (49), замечаем, что коэффициент мощности численно равен адиабатическому коэффициенту полезного действия такой ступени турбины, у кото-

рой степень уменьшения полного давления равна отношению статического давления на выходе к полному давлению на входе, а коэффициент изоэнтропичности равен:

$$m_{\text{эф}} = m_{\text{ст.д}} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{\text{д}}^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Используя это свойство, можно с помощью уже ранее приведённого графика фиг. 296 определить значение коэффициента мощности.

Работа на валу турбины, а следовательно, и коэффициент мощности зависят от работы сил трения и потери кинетической энергии выходящей струи. Это легко видеть, если написать уравнение Бернулли для абсолютного движения

$$L = \int_{\text{д}}^{\text{н}} \frac{dp}{\gamma} + \frac{c_{\text{н}}^2}{2g} - \frac{c_{\text{д}}^2}{2g} - L_{\text{тр}}.$$

Определим адиабатический коэффициент полезного действия ступени турбины, включая в понятие ступени и выходной диффузор:

$$\eta_{\text{ад}} = \frac{1 - \left(\frac{p_{0\text{д}}}{p_{0\text{н}}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \frac{1}{m_{\text{ст.д}}^{\frac{k}{k-1}}}}{1 - \left(\frac{p_{0\text{д}}}{p_{0\text{н}}} \right)^{\frac{k-1}{k}}}. \quad (63)$$

Здесь $p_{0\text{д}}$ — полное давление на срезе турбины, $m_{\text{ст.д}}$ — коэффициент изоэнтропичности; он отыскивается по формуле

$$m_{\text{ст.д}} = \sigma_1 \sigma_2 m_{\text{к.д.}}$$

Сравнивая выражения (62) и (63) и учитывая равенство

$$p_{0\text{д}} = \frac{p_{\text{а}}}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{\text{д}}^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}},$$

получим:

$$\eta_{\text{шр}} = \frac{1 - \left(\frac{p_{\text{а}}}{p_{0\text{н}}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \frac{1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{\text{д}}^2}}{1 - \left(\frac{p_{\text{а}}}{p_{0\text{н}}} \right)^{\frac{k-1}{k}}} \cdot \eta_{\text{ад}}. \quad (64)$$

Первый множитель учитывает потери, связанные с выходной скоростью, а второй характеризует степень газодинамического совершенства ступени.

Если происходит почти полное торможение потока, т. е. скорость при выходе из турбины может быть принята равной нулю ($\lambda_d \approx 0$), то потерь, связанных с выходной скоростью, нет, и, как следует из (64),

$$\eta_{пр} = \eta_{ад}.$$

В случае изэнтропического процесса в турбине

$$\eta_{ад} = 1;$$

тогда коэффициент мощности зависит только от выходных потерь:

$$\eta_{пр} = \frac{\left[1 - \left(\frac{P_a}{P_{0H}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \frac{1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_d^2} \right]}{1 - \left(\frac{P_a}{P_{0H}} \right)^{\frac{k-1}{k}}}.$$

§ 7. Элементарная ступень компрессора

При рассмотрении элементарной ступени компрессора различают две основные задачи:

а) проектирование элементарной ступени по заданным величинам степени повышения полного давления, объёмного расхода газа и адиабатического коэффициента полезного действия;

б) получение характеристики *данной элементарной ступени*, т. е. нахождение зависимости степени повышения полного давления и коэффициента полезного действия от объёмного расхода газа (или осевой скорости на входе в ступень) при фиксированной величине окружной скорости.

Проектирование элементарной ступени в свою очередь состоит из двух частей: определения параметров газового потока в межвенцовых зазорах ступени (в абсолютном и относительном движениях) и профилирования меридионального сечения проточной части ступени и лопаток элементарных венцов направляющих аппаратов и колеса.

Остановимся сначала на определении параметров потока в межвенцовых зазорах ступени. Вопросы профилирования элементарных венцов будут рассмотрены ниже (§ 9) в общем виде, безотносительно к тому, принадлежат ли элементарные венцы ступени компрессора или турбины.

Обычно при проектировании элементарной ступени компрессора заданными величинами являются: степень повышения пол-

ного давления π_0 , скорость при входе в ступень c_n , имеющая всегда меридиональное направление, и угол между направлением этой скорости и осью компрессора ψ_n , адиабатический коэффициент полезного действия ступени, окружная скорость входных кромок лопаток элементарного рабочего колеса u_1 и температура торможения при входе в ступень, которая в силу адиабатичности процесса равна температуре торможения перед колесом ($T_{0н} = T_{01}$). Так как задачей компрессора является повышение не только полного, но и статического давления в газовом потоке, то должна быть задана также либо необходимая степень повышения статического давления $\pi = \frac{P_c}{P_n}$, либо величина скорости

на выходе из ступени c_c ; при этом предполагается, что скорость на выходе c_c имеет меридиональное направление и задан угол ψ_c между вектором c_c и осью компрессора.

Таким образом, при проектировании элементарной ступени компрессора заданными являются параметры потока перед венцом входного направляющего аппарата и за венцом выходного направляющего аппарата; определению и выбору подлежат только параметры потока в межвенцовых зазорах ступени, т. е. на входе и выходе из элементарного рабочего колеса.

В этих двух сечениях четыре основных газодинамических параметра

$$\lambda_{1u}, \lambda_{1m}, \lambda_{2u} \text{ и } \lambda_{2m},$$

отношение элементарных площадей нормальных сечений $f_n = \frac{\Delta F_{2n}}{\Delta F_{1n}}$ и степень изменения радиуса струйки $\frac{r_2}{r_1}$ связаны между собой двумя уравнениями: общим уравнением закрутки потока (28) и безразмерным уравнением неразрывности.

Уравнение закрутки (28) в случае ступени компрессора удобно записать в следующем виде:

$$\frac{r_2}{r_1} \lambda_{2u} = \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{T_{02}-1}{T_{01}} \frac{1}{u_1^* \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}} + \frac{\lambda_{1u}}{\sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}}; \quad (65)$$

для воздуха ($k = 1,4$) имеем:

$$\frac{r_2}{r_1} \lambda_{2u} = \frac{3 \left(\frac{T_{02}-1}{T_{01}} \right)}{u_1^* \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}} + \frac{\lambda_{1u}}{\sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}}. \quad (66)$$

Степень повышения температуры торможения, входящая в уравнение закрутки, определяется согласно формуле (36) по степени

повышения полного давления в ступени π_0 и заданному значению адиабатического коэффициента полезного действия:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1 + \frac{\pi_0^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\eta_{ад}}$$

График этой функции был представлен на фиг. 290.

Пользуясь последним выражением, можно представить закрутку как явную функцию задаваемых при расчёте величин π_0 и $\eta_{ад}$:

$$\frac{r_2}{r_1} \lambda_{2u} = \left[\frac{(k+1) \left(\pi_0^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right)}{2(k-1) \eta_{ад} u_1^*} + \lambda_{1u} \right] \frac{\sqrt{\eta_{ад}}}{\sqrt{\eta_{ад} + \pi_0^{\frac{k-1}{k}} - 1}}$$

В случае меридионального входа ($\lambda_{1u} = 0$) выражение упрощается:

$$\frac{r_2}{r_1} \lambda_{2u} = \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{\left(\pi_0^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right)}{u_1^* \sqrt{\eta_{ад} + \pi_0^{\frac{k-1}{k}} - 1}}, \quad (67)$$

или

$$\frac{r_2}{r_1} \lambda_{2u} = \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{\left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1 \right)}{u_1^* \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}}. \quad (68)$$

В случае меридионального выхода потока ($\lambda_{2u} = 0$) выражение для необходимой предварительной закрутки потока λ_{1u} принимает, как это видно из (65), вид

$$\lambda_{1u} = - \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1}{u_1^*} \quad (69)$$

или соответственно

$$\lambda_{1u} = - \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{\pi_0^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\eta_{ад} u_1^*}. \quad (70)$$

Безразмерному уравнению неразрывности можно придать следующую форму:

$$q(\lambda_2) \sin \alpha_2 = \frac{q(\lambda_1) \sin \alpha_1}{f_n \lambda}; \quad (71)$$

здесь

$$f_n = \frac{\Delta F_{2n}}{\Delta F_{1n}}$$

есть отношение сечений элементарной струйки, нормальных к соответствующим направлениям меридиональных скоростей, а величина

$$\chi = \frac{\pi_{0k}}{\sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}}$$

учитывает изменение параметров газа в колесе.

Степень повышения полного давления в рабочем колесе π_{0k} , входящая в уравнение неразрывности, определяется изменением полного давления в неподвижных аппаратах

$$\pi_{0k} = \frac{\pi_0}{\sigma_1 \sigma_2}$$

или адиабатическим коэффициентом полезного действия рабочего колеса

$$\pi_{0k} = \left[\eta_{\text{ад. к}} \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1 \right) + 1 \right]^{\frac{k}{k-1}}. \quad (72)$$

На фиг. 298 приведён вспомогательный график для определения функции χ .

Безразмерный расход на входе в колесо $q(\lambda_1) \sin \alpha_1$ может быть определён по заданной скорости входа потока в ступень c_H :

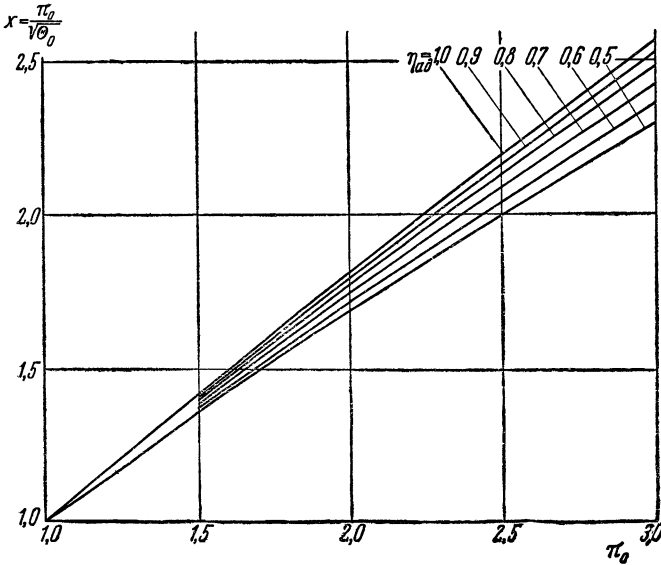
$$q(\lambda_H) = \sigma_1 q(\lambda_1) \sin \alpha_1 \frac{\Delta F_{1n}}{\Delta F_{Hn}},$$

где σ_1 — коэффициент полного давления во входном направляющем аппарате, ΔF_{Hn} — площадь сечения на входе в ступень, перпендикулярного входной скорости.

Как уже указывалось в § 3, аналитическое решение уравнения (71) относительно коэффициента меридиональной скорости λ_m затруднительно, поэтому применяется графический метод решения с помощью кривых постоянного значения $q_\alpha = q(\lambda) \sin \alpha$ (фиг. 237).

Как видим, задание степени повышения полного давления, адиабатического коэффициента полезного действия, входной меридиональной скорости и окружной скорости на входе в рабочее колесо не определяет единственным образом параметры потока в межвенцовых зазорах элементарной ступени компрессора. Изменение закрутки потока на входе в рабочее колесо и отношения $\frac{r_2}{r_1}$ приводит согласно уравнению (65) к изменению закрутки потока на выходе из колеса. Изменение же площадей проходных сечений на входе и выходе из элементарных венцов ступени приводит согласно уравнению неразрывности (71) к изменению меридиональной составляющей скорости, а следовательно и полной скорости.

Таким образом, можно построить большое количество треугольников скорости, которые удовлетворяют заданным выше параметрам ступени. Наложение ограничений прочностного и конструктивного характера (ограничение максимальной величины $\frac{r_2}{r_1}$ при заданном значении u_1 , ограничение в изменении площади проходного сечения ΔF_n , отсутствие входного или выходного



Фиг. 298. Зависимость величины $\chi = \frac{\pi_0}{\sqrt{\theta_0}}$ от степени повышения полного давления для различных значений адiabатического коэффициента полезного действия.

направляющих аппаратов) уменьшает первоначальное многообразие возможных решений. Однако учёт этих ограничений обычно ещё не делает однозначным выбор параметров потока в межвенцовых зазорах ступени.

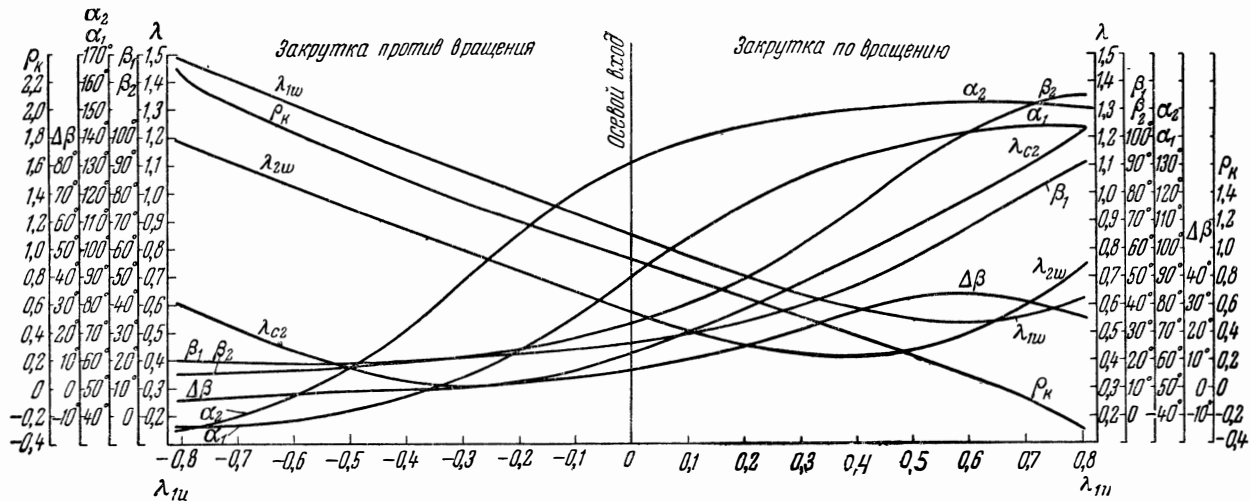
Для иллюстрации этого на фиг. 299 представлены значения основных параметров для различных треугольников скорости в ступени, рассчитанные на одно и то же задание

$$\pi_0 = 1,3, \quad c_n = c_a = 125 \text{ м/сек},$$

$$u_1 = 250 \text{ м/сек}, \quad T_0 = 288^\circ$$

при следующих ограничениях:

$$\frac{r_2}{r_1} = 1, \quad \Delta F_{1n} = \Delta F_{2n} = \Delta F_{3n},$$



Фиг. 299. Зависимость значений основных параметров цилиндрической элементарной ступени компрессора от закрутки потока на входе в колесо при $\eta_{a\kappa}=1,0$, $\tau_0=1,3$, $c_{aH}=125$ м/сек, $u=250$ м/сек, $T_{0H}=288^\circ$.

т. е. при цилиндрическом течении в ступени. В этом случае все возможные ступени имеют одно и то же изменение окружной составляющей скорости в колесе

$$\Delta \bar{c}_u = \Delta \bar{\omega}_u = \bar{L} = 0,47.$$

Для простоты расчётов принято $\tau_{ад} = 1$.

Соответствующие треугольники скорости (фиг. 300) различаются значениями закрутки потока на входе в рабочее колесо. Случай осевого входа, т. е. нулевой предварительной закрутки потока, представлен на фиг. 300, а. При закрутке против вращения увеличивается относительная скорость на входе в колесо ω_1 и уменьшаются угол поворота потока в колесе и абсолютная скорость перед выходным направляющим аппаратом c_2 . При этом происходит увеличение угла α_2 , что приводит к уменьшению поворота потока в выходном направляющем аппарате (при отсутствии закрутки на выходе из ступени). При некотором значении отрицательной закрутки потока во входном направляющем аппарате угол α_2 за колесом становится прямым (фиг. 300, б); в этом случае ступень должна состоять только из входного направляющего аппарата и рабочего колеса. При достаточно большой отрицательной закрутке перед колесом в случае сверхзвуковой относительной скорости в колесе необходимое изменение окружной составляющей скорости потока может получиться только за счёт перехода от сверхзвуковой относительной скорости к дозвуковой, т. е. за счёт скачка уплотнения без поворота потока в относительном движении (фиг. 300, в). При дальнейшем увеличении закрутки появляется даже необходимость в повороте относительного потока в рабочем колесе против вращения (фиг. 300, г), т. е. угол поворота в колесе становится отрицательным:

$$\beta_2 - \beta_1 = \Delta\beta < 0.$$

Поворот потока во входном направляющем аппарате по вращению (фиг. 300, д) приводит к уменьшению относительной скорости на входе в колесо при одновременном увеличении c_2 и уменьшении угла α_2 , что в свою очередь ведёт к увеличению необходимого поворота потока в выходном направляющем аппарате. При некотором значении положительной закрутки потока коэффициент относительной скорости достигает минимального значения; дальнейшее увеличение закрутки потока уже приводит к увеличению коэффициента относительной скорости на входе (фиг. 300, е). Следует отметить, что уменьшение относительной скорости на входе сопровождается увеличением относительной скорости на выходе из колеса. При некотором значении закрутки эти скорости становятся одинаковыми:

$$\omega_1 = \omega_2,$$

т. е. ступень имеет активное рабочее колесо (фиг. 300, *ж*). При дальнейшем увеличении положительной закрутки течение в рабочем колесе становится конфузорным:

$$\omega_2 > \omega_1.$$

Вычисляя степень реактивности рабочего колеса в рассмотренных выше ступенях:

$$\rho_K = 1 - \frac{c_2^2 - c_1^2}{2gL} = 1 - \frac{c_2^2 - c_1^2}{2u\Delta c_u},$$

замечаем, что при увеличении поворота потока во входном направляющем аппарате в сторону, противоположную вращению колеса, степень реактивности увеличится, достигая при осевом входе величины $\rho_K = 0,86$.

При закрутке потока перед рабочим колесом по вращению степень реактивности уменьшается, достигая нулевого значения при активном рабочем колесе (фиг. 300, *ж*). Дальнейшее увеличение положительной закрутки потока приводит к отрицательному значению степени реактивности, что соответствует, как уже указывалось, падению статического давления в колесе.

Рассмотренный выше пример относится только к частному случаю цилиндрической элементарной ступени.

В общем случае элементарной ступени многообразие пригодных треугольников скорости увеличивается за счёт возможности изменения величин

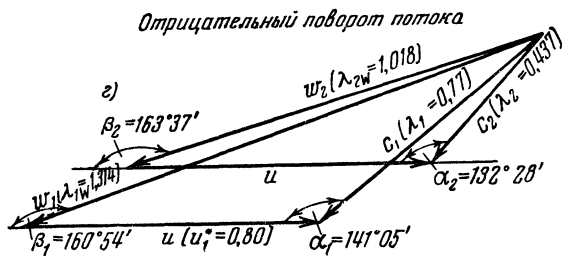
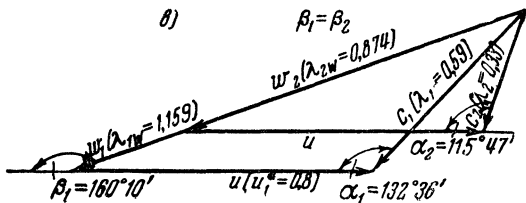
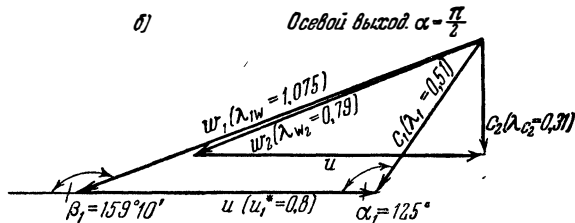
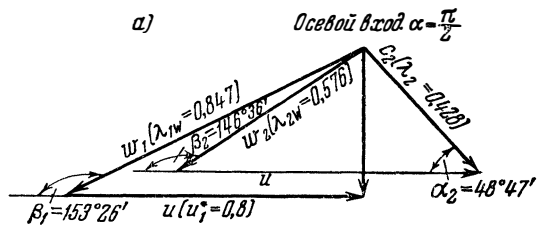
$$\frac{r_2}{r_1} \text{ и } f_n = \frac{\Delta F_{2n}}{\Delta F_{1n}}.$$

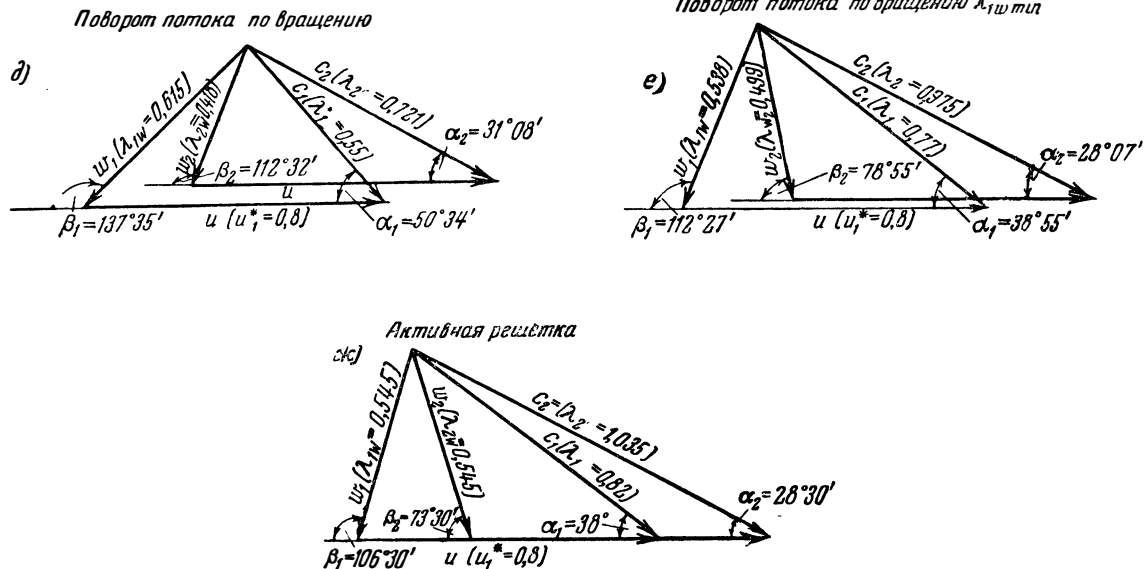
Определив значения параметров потока в межвенцовых зазорах ступени, можно перейти к профилированию элементарных решёток направляющих аппаратов и рабочего колеса, выполняя эту задачу так, чтобы обеспечить получение нужных значений параметров.

Если бы мы имели дело с изоэнтропическими течениями газа, т. е. с отсутствием потерь, то все треугольники скорости, удовлетворяющие уравнениям закрутки и неразрывности, были бы совершенно равноценны.

Задача профилирования в этом случае состояла бы только в том, чтобы обеспечить необходимое направление потока, что, как известно, при достаточно большой густоте кольцевой решётки может быть всегда получено. Однако действительное течение в ступени компрессора сопряжено с наличием потерь, т. е. не является изоэнтропическим. Величина потерь зависит от значения числа M набегающего на венец потока и степени диффузорности венца.

Из всего многообразия возможных параметров потока в межвенцовых зазорах элементарной ступени, определяемых по задан-





Фиг. 300. Различные планы скорости рабочего колеса элементарной цилиндрической ступени компрессора при $\eta_{ад} = 1,0$, $\pi_0 = 1,3$, $c_{ан} = 125$ м/сек, $u = 250$ м/сек, $T_{011} = 288^\circ$.
 а — осевой вход в рабочее колесо ($c_{1u} = 0$); б — закрутка потока против вращения, осевой выход из рабочего колеса в абсолютном движении ($c_{2u} = 0$); в — закрутка потока против вращения, прямолинейное движение относительного потока в рабочем колесе ($\beta_2 = \beta_1$) при сверхзвуковой относительной скорости на входе ($\lambda_{1w} > 1$) и дозвуковой на выходе; г — закрутка потока против вращения, угол поворота потока в колесе $\beta_1 - \beta_2 = \Delta\beta < 0$; д — закрутка потока по вращению; е — закрутка потока по вращению при минимальном значении коэффициента относительной скорости на входе в колесо; жс — закрутка потока против вращения, активное рабочее колесо ($\lambda_{1w} = \lambda_{2w}$; $\beta_1 = \pi - \beta_2$).

ным величинам расхода и степени повышения температуры торможения, следует выбрать такую совокупность параметров, при которой суммарные потери в ступени минимальны, т. е. величина адиабатического коэффициента полезного действия максимальна.

Этой совокупности параметров потока в межвенцовых зазорах соответствуют так называемые оптимальные треугольники скорости, для выбора которых нужно располагать обширными экспериментальными данными о потерях в элементарных неподвижных и вращающихся венцах различной конфигурации.

Однако и не располагая этими данными, можно высказать ряд общих соображений о выборе параметров потока в межвенцовых зазорах элементарной ступени компрессора. Так, например, учитывая конфузорный характер течения во входном направляющем аппарате, можно в первом приближении пренебречь потерями в нём.

Суммарные потери, связанные с диффузорностью потока в колесе и спрямляющем аппарате, получаются наименьшими, если общее увеличение статического давления распределено более или менее равномерно между этими двумя венцами. Ниже будет показано, что, например, для случая цилиндрической ступени при небольших числах M набегающего на венцы потока максимальное значение коэффициента полезного действия ступени имеет место в том случае, когда работа проталкивания в рабочем колесе равна работе проталкивания в венце выходного направляющего аппарата; степень реактивности рабочего колеса в этом случае равна половине: $\rho_K = 0,5$. Следует, однако, отметить, что применение половинной степени реактивности в рабочем колесе вовсе не обязательно в общем случае ступени компрессора.

Не всегда можно выполнить указанное выше требование об увеличении статического давления как в колесе, так и в аппарате. Например, если нужно получить максимальную степень повышения полного давления, то при изэнтропическом течении в цилиндрической ступени должна быть максимальная и окружная составляющая усилия, приложенного к лопатке, которая пропорциональна величине

$$\Delta\lambda_{wu} = \lambda_{2wu} - \lambda_{1wu}.$$

Из фиг. 237 видно, что максимум величины $\Delta\lambda_{wu}$ при фиксированном значении безразмерного расхода в относительном движении q_{*w} достигается при условии

$$\beta_2 = \pi - \beta_1, \quad \lambda_{2w} = \lambda_{1w}.$$

В цилиндрической ступени это отвечает случаю активного рабочего колеса:

$$\omega_1 = \omega_2,$$

$$\rho_K = 0.$$

Для уменьшения диффузорных потерь в ступени нужно выбрать такие треугольники скорости, чтобы значения чисел M_{1w} (в относительном движении перед венцом рабочего колеса) и M_2 (перед спрямляющим аппаратом) были возможно меньше.

Если во всех характерных сечениях ступени (перед и за всеми венцами) значения скорости (абсолютной для неподвижных венцов и относительной для вращающегося венца) не превосходят местной скорости звука, то такая ступень называется дозвуковой. Несоблюдение этого условия хотя бы в одном характерном сечении является признаком сверхзвуковой ступени. Следует подчеркнуть, что с этой точки зрения считается дозвуковой и такая ступень, в межлопаточных пространствах которой имеются местные сверхзвуковые зоны, но в характерных сечениях скорости являются дозвуковыми. При выборе схемы ступени компрессора следует прежде всего выяснить возможность получения заданной степени повышения полного давления при заданных величинах окружной и осевой скоростей, в случае использования дозвуковой ступени.

Если допустить наличие сверхзвуковых скоростей только в абсолютном движении за входным направляющим аппаратом ($M_c > 1$) или сверхзвуковых относительных скоростей на выходе из рабочего колеса ($M_{2w} > 1$), то при этом, судя по имеющимся экспериментальным характеристикам сверхзвуковых сопел, потери могут достигать такого же порядка, как и в дозвуковой ступени.

Обратимся к анализу возможных параметров ступени при соблюдении условий

$$\lambda_{1w} \leq 1, \quad \lambda_2 \leq 1.$$

Следует отметить, что при наличии ограничения в величине $\frac{r_2}{r_1}$ эти два требования являются противоречивыми. В самом деле, при большой окружной скорости для получения дозвуковой относительной скорости $\lambda_{1w} < 1$ требуется положительная закрутка потока (в сторону вращения). Для уменьшения же величины λ_2 следует уменьшать коэффициент окружной составляющей скорости λ_{2u} , что согласно выражению (65) при относительно большой степени повышения полного давления приводит к необходимости закручивать поток перед рабочим колесом против вращения последнего ($\lambda_{1u} < 0$).

В § 2 была получена зависимость (3) между коэффициентом закрутки λ_{1u} , коэффициентом меридиональной составляющей абсолютной скорости λ_{1m} и местной безразмерной окружной скоростью:

$$\lambda_{1m}^2 + \lambda_{1u}^2 - \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{1u}^2\right) 2u_1^* \lambda_{1u} + u_1^{*2} - \lambda_{1w}^2 \left(1 + \frac{k-1}{k+1} u_1^{*2}\right) = 0, \quad (73)$$

где $\lambda_{1m}^2 + \lambda_{1u}^2 = \lambda_1^2$.

Полагая в этом уравнении $\lambda_{1w} = 1$ и считая для простоты, что во входном направляющем аппарате не изменяется величина меридиональной составляющей скорости ($\lambda_{1m} = \lambda_{1n}$), получим следующее выражение для необходимого коэффициента закрутки потока перед рабочим колесом:

$$\lambda_{1u} = \frac{2u_1^*}{k+1} \pm \sqrt{1 - \lambda_n^2 - \frac{2(k-1)}{(k+1)^2} u_1^{*2}}. \quad (74)$$

Перейдём к рассмотрению параметров потока на выходе из колеса. Согласно уравнению закрутки (28) имеем:

$$\lambda_{2u} = \lambda_2 \cos \alpha_2 = \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1}{\frac{r_2}{r_1} u_1^* \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}} + \frac{\lambda_{1u}}{\frac{r_2}{r_1} \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}},$$

или на основании (67)

$$\frac{r_2}{r_1} \lambda_{2u} = \frac{r_2}{r_1} \lambda_2 \cos \alpha_2 = \left[\frac{k+1}{2(k-1)} \frac{\pi_0^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\eta_{ад} u_1^*} + \lambda_{1u} \right] \frac{\sqrt{\eta_{ад}}}{\sqrt{\eta_{ад} + \pi_0^{\frac{k-1}{k}} - 1}}.$$

В одной ступени компрессора можно получить любую наперёд заданную степень повышения полного давления при дозвуковой скорости абсолютного потока на выходе из колеса ($\lambda_2 < 1$) и при любом значении угла α_2 , если только величина $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$ не имеет ограничения.

Величину $\left(\frac{r_2}{r_1}\right) u_1^*$ можно представить так:

$$\frac{r_2}{r_1} u_1^* = \frac{r_2}{r_1} \frac{u_1}{a_{1кр}} = \frac{u_2}{a_{1кр}}.$$

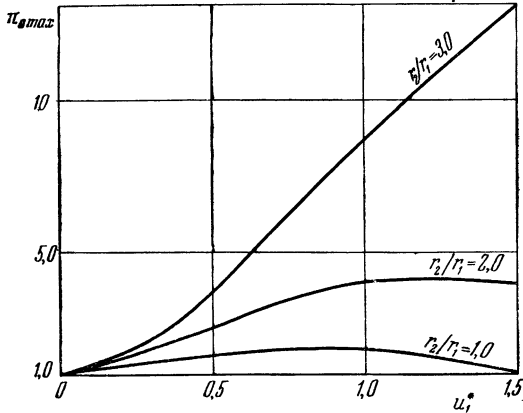
Большие значения $\frac{r_2}{r_1}$ могут привести к неосуществимым по соображениям прочности окружным скоростям рабочего колеса. Кроме того, увеличение $\frac{r_2}{r_1}$ приводит к увеличению поперечных размеров компрессора, что может оказаться нежелательным, особенно в транспортных установках.

Если величина $\frac{r_2}{r_1}$ ограничена, то при условии $\lambda_2 < 1$ получается ограниченная степень повышения температуры торможения (и степень повышения полного давления). Это ограничение ещё усугубляется необходимостью положительной закрутки потока при входе в рабочее колесо. Разрешая уравнение (65) относи-

тельно $\sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}$, имеем:

$$\sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}} = \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{r_2}{r_1} u_1^* \lambda_{2u} \pm \sqrt{\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 \frac{r_2^2}{r_1^2} u_1^{*2} \lambda_{2u}^2 - \frac{2(k-1)}{k+1} u_1^* \lambda_{1u} + 1}. \quad (75)$$

Полагая $\lambda_2 = 1$ и подставляя наименьшее значение λ_{1u} из формулы (74), получаем следующее выражение для максималь-



Фиг. 301. Зависимость максимального значения степени повышения полного давления в элементарной дозвуковой ступени компрессора от безразмерной окружной скорости на входе для различных значений отношения r_2/r_1 при $\eta_{ад} = 0,9$.

ного значения степени повышения температуры торможения в дозвуковой ступени:

$$\left(\sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}\right)_{\max} = \frac{k-1}{k+1} \frac{r_2}{r_1} u_1^* \cos \alpha_2 + \sqrt{\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 \frac{r_2^2}{r_1^2} u_1^{*2} \cos^2 \alpha_2 - \frac{2(k-1)}{k+1} u_1^* (\lambda_{1u})_{\min} + 1}.$$

При этом согласно (72) максимальное значение степени повышения полного давления в дозвуковой ступени равно:

$$\pi_{0\max} = \left[1 + \eta_{ад} \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1\right)\right]_{\max}^{\frac{k}{k-1}}.$$

На фиг. 301 представлена зависимость величины $\pi_{0\max}$ от безразмерной окружной скорости u_1^* при $\lambda_H = 0,8$, $\alpha_2 = 45^\circ$, $\eta_{ад} = 0,9$ для различных значений $\frac{r_2}{r_1}$.

Не всегда возможно ограничиться использованием дозвуковой ступени. При больших меридиональных скоростях на входе в ступень и одновременно больших окружных скоростях осуществление дозвуковой скорости относительного движения перед колесом весьма затруднительно; стремление к увеличению степени повышения полного давления в одной ступени при фиксированных значениях u_1 , $\frac{r_2}{r_1}$ и α_2 также приводит к необходимости осуществления сверхзвуковых скоростей в межвенцовых зазорах.

Повышение π_0 путём перехода от дозвуковой ступени к сверхзвуковой может быть достигнуто при одних и тех же значениях u_1 , $\frac{r_2}{r_1}$ и α_2 за счёт применения отрицательной закрутки вместо положительной, что даёт сверхзвуковую скорость относительного потока на входе в рабочее колесо ($\lambda_{1w} > 1$) или за счёт применения сверхзвуковой абсолютной скорости на выходе из рабочего колеса $\lambda_2 > 1$ при сохранении дозвуковой относительной скорости перед рабочим колесом.

Для значительного повышения π_0 , особенно в случае одновременного увеличения меридиональной скорости на входе в ступень, может оказаться необходимым переход к сверхзвуковым скоростям одновременно на входе в рабочее колесо и спрямляющий аппарат ($\lambda_{1w} > 1$, $\lambda_2 > 1$).

Как следует из выражения (75), работа, подводимая рабочим колесом к газу, а следовательно, и степень повышения полного давления при фиксированных значениях $\frac{r_2}{r_1}$ и u_1^* тем больше, чем больше абсолютные значения коэффициентов окружных составляющих скорости λ_{2u} и λ_{1u} ; при этом предполагается, что закрутка на входе отрицательна и на выходе положительна. Выражение

$$\lambda_{1u} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1} - \lambda_{1w}^2}$$

даёт максимальную закрутку потока перед колесом в зависимости от коэффициента скорости перед ступенью при постоянной меридиональной скорости в венце входного направляющего аппарата.

Максимальная закрутка потока на выходе из колеса определяется максимальной скоростью газа

$$\lambda_{2u \max} = \lambda_{2 \max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}.$$

Подставляя максимальные значения λ_{1u} и λ_{2u} в (75), получим выражение для максимального значения степени повышения

температуры торможения при заданных значениях u_1^* , $\frac{r_2}{r_1}$ и λ_H :

$$\left(\sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}\right)_{\max} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \cdot \frac{r_2}{r_1} u_1^* + \\ + \sqrt{\frac{k-1}{k+1} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 u_1^{*2} + \frac{2(k-1) \sqrt{\frac{k+1}{k-1} - \lambda_H^2}}{k+1} u_1^* + 1}.$$

В соответствии с этим максимальная степень повышения полного давления есть следующая функция адиабатического коэффициента полезного действия ступени:

$$\pi_{0 \max} = \left\{ 1 + \eta_{\text{ад}} \left[\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)_{\max} - 1 \right] \right\}^{\frac{k}{k-1}}.$$

Полученная максимальная степень повышения полного давления в элементарной ступени компрессора является преувеличенной, так как основана на предположениях о равенстве бесконечности чисел M на выходе из направляющего аппарата и рабочего колеса ($M_1 = M_2 = \infty$) и равенстве нулю угла входа потока в венд спрямляющего аппарата ($\alpha_2 = 0$).

В качестве примера на фиг. 302 представлены кривые повышения полного давления $\pi_{0 \max}$ в элементарной ступени в зависимости от u_1^* при $\alpha_2 = 45^\circ$, $\frac{r_2}{r_1} = 1$, $\lambda_H = 0,6$, $\eta_{\text{ад}} = 0,9$ и при условии $M_1 = M_2$ в предположении постоянства меридиональной составляющей скорости во входном аппарате. Вычисления сделаны для трёх значений числа $M_1 = M_2 = 4, 3, 2$.

На этом же графике нанесены максимальные степени повышения полного давления для дозвуковой ступени ($M_{1w} = M_2 = 1$).

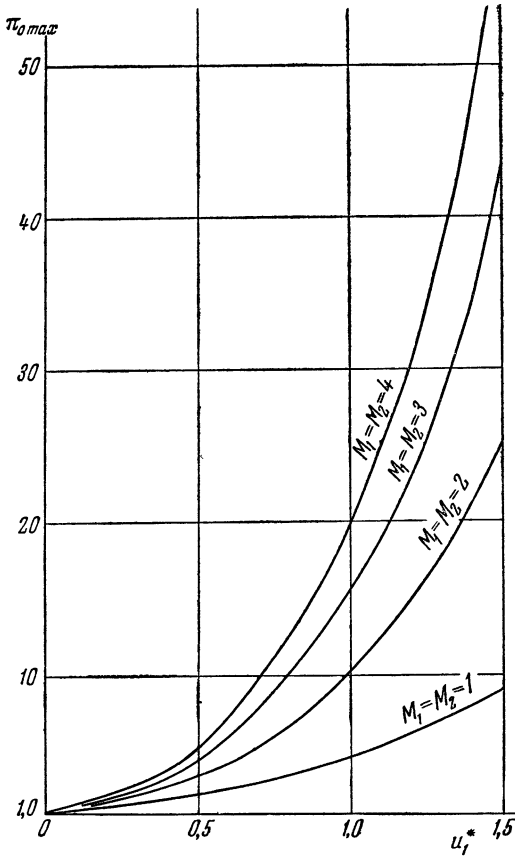
Как видим, ограничение в величинах M_{1w} и M_2 приводит к существенному уменьшению значения $\pi_{0 \max}$.

Рассмотрим свойства элементарной ступени, состоящей из рабочего колеса и выходного (спрямляющего) аппарата, т. е. без закрутки потока перед рабочим колесом ($\lambda_{1u} = 0$). В этом случае выражение (73) даёт:

$$\lambda_{1w}^2 = \frac{\lambda_H^2 + u_1^{*2}}{1 + \frac{k-1}{k+1} u_1^{*2}}.$$

Полагая $\lambda_{1w} = 1$, получаем следующее соотношение между окружной и меридиональной скоростями, обеспечивающее дозвуковой вход в рабочее колесо:

$$\lambda_H^2 + \frac{2}{k+1} u_1^{*2} = 1.$$



Фиг. 302. Зависимость максимального значения степени повышения полного давления в элементарной осевой ступени от безразмерной окружной скорости при

$$\alpha_2 = 45^\circ, \quad \frac{r_2}{r_1} = 1, \quad \lambda_H = 0,6, \quad \eta_{ад} = 0,9$$

для различных значений числа M за входным направляющим аппаратом и перед спрямляющим аппаратом ($M_1 = M_2$).

Общее уравнение закрутки (65) в случае меридионального входа ($\lambda_{1u} = 0$) имеет вид

$$\lambda_{2u} = \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{\frac{T_{02}-1}{T_{01}}}{\frac{r_2}{r_1} u_1^* \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}}.$$

Учитывая равенство

$$\frac{r_2}{r_1} u_1^* = \frac{u_2}{a_{1\text{кр}}}$$

найдем:

$$\lambda_{2u} = \lambda_2 \cos \alpha_2 = \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{\frac{T_{02}-1}{T_{01}}}{\frac{u_2}{a_{1\text{кр}}} \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}}, \quad \text{или} \quad \frac{u_2}{a_{1\text{кр}}} \lambda_{2u} = \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{\frac{T_{02}-1}{T_{01}}}{\sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}}.$$

Таким образом, в случае меридионального входа в колесо закрутка потока λ_{2u} зависит только от безразмерной окружной скорости на выходе $\frac{u_2}{a_{1\text{кр}}}$ и не зависит ни от степени радиаль-

ности $\frac{r_2}{r_1}$, ни от значения меридиональной скорости на входе в ступень. Поэтому максимальное значение степени повышения полного давления в ступени элементарного компрессора зависит только от числа M_2 , угла α_2 и безразмерной окружной скорости u_2^* . В самом деле,

$$\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)_{\max} = \left[\frac{u_2}{a_{1\text{кр}}} \frac{\lambda_{2u}}{\frac{k+1}{k-1}} + \sqrt{1 + \frac{u_2^2}{a_{1\text{кр}}^2} \frac{\lambda_{2u}^2}{\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2}} \right]^2,$$

откуда

$$\pi_0 \max =$$

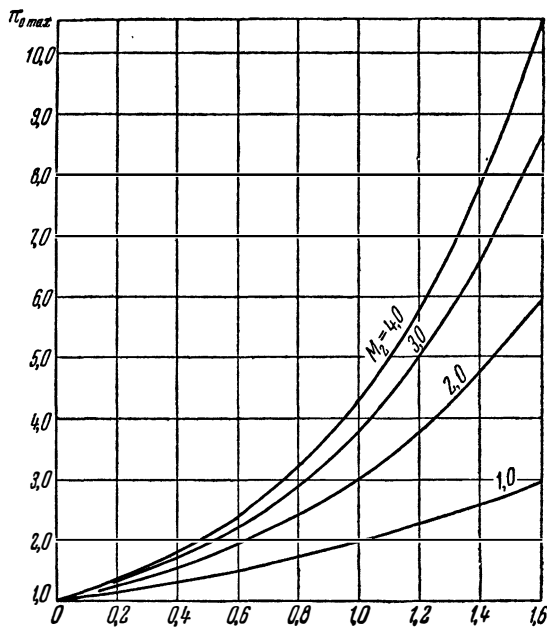
$$= \left\{ 1 + \left[\left(\frac{k-1}{k+1} \frac{u_2}{a_{1\text{кр}}} \lambda_2 \cos \alpha_2 + \sqrt{\left(\frac{k-1}{k+1} \right)^2 \frac{u_2^2}{a_{1\text{кр}}^2} \lambda_2^2 \cos^2 \alpha_2 + 1} \right) - 1 \right] \eta_{\text{ад}} \right\}^{\frac{k}{k-1}}.$$

Зависимость $\pi_0 \max$ от $\frac{u_2}{a_{1\text{кр}}}$ при $\eta_{\text{ад}} = 0,8$ и $\alpha_2 = 45^\circ$ для значений чисел $M_2 = 1, 2, 3, 4$ представлена на фиг. 303.

Легко видеть из (65), что закрутку потока на выходе из колеса в общем случае можно представить как сумму закрутки потока при меридиональном входе $(\lambda_{2u})_m$ и величины, пропорциональной закрутке на входе:

$$\lambda_{2u} = (\lambda_{2u})_m + \frac{\lambda_{1u}}{\frac{r_2}{r_1} \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}}.$$

Если отсутствует закрутка потока на выходе из колеса ($\lambda_{2u} = 0$), то ступень состоит только из входного направляющего аппарата и рабочего колеса.



Фиг. 303. Зависимость максимального значения степени повышения полного давления в элементарной ступени компрессора от безразмерной окружной скорости на выходе из колеса при меридиональном входе потока в колесо для различных значений M_2 , при $\alpha_2 = 45^\circ$ и $\eta_{ад} = 0,9$.

Полагая в уравнении закрутки (65) $\lambda_{2u} = 0$, получаем следующее выражение для закрутки потока перед входом в рабочее колесо:

$$\lambda_{1u} = - \frac{k+1}{2(k-1)u_1^*} \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1 \right).$$

При такой схеме ступени входной направляющий аппарат должен закручивать поток против вращения рабочего колеса, что, как известно, приводит к большим значениям числа M_{1w} , соответствующим относительной скорости на входе в колесо. Подводимая к газу работа при $\lambda_{2u} = 0$ определяется только закруткой потока на входе в ступень (λ_{1u}) и окружной скоростью передних кромок рабочего колеса u_1^* и не зависит от параметров

потока на выходе из рабочего колеса:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1 - \lambda_{1u} \frac{2(k-1)u_1^*}{k+1}. \quad (76)$$

Максимальное значение степени повышения полного давления в такой ступени получается при максимальной закрутке потока. Последняя же определяется величиной коэффициента меридиональной скорости при входе в ступень λ_H . Если на выходе из аппарата сохраняется то же значение меридиональной скорости $\lambda_H = \lambda_{1m}$, то максимальная начальная закрутка при максимальной скорости газа на выходе из направляющего аппарата есть

$$\lambda_{1u \max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1} - \lambda_H^2}. \quad (77)$$

Если ограничимся некоторым предельным значением коэффициента скорости в направляющем аппарате $\lambda_{1 \text{ пр}}$, то получим следующее выражение для максимальной закрутки потока:

$$\lambda_{1u \max} = \sqrt{\lambda_{1 \text{ пр}}^2 - \lambda_H^2}. \quad (78)$$

В случае идеального цилиндрического венца входного направляющего аппарата уравнение неразрывности может быть записано в следующем виде:

$$q(\lambda_H) = q(\lambda_1) \sin \alpha_1,$$

откуда

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_1} = \sqrt{1 - \left[\frac{q(\lambda_H)}{q(\lambda_1)} \right]^2}, \\ \lambda_{1u} &= \lambda_1 \cos \alpha_1 = \lambda_1 \sqrt{1 - \frac{q^2(\lambda_H)}{q^2(\lambda_1)}}. \end{aligned} \quad (79)$$

Рассматривая выражение (79) как некоторую функцию от независимой переменной λ_1 при заданном значении $q(\lambda_H)$ и используя выражение (106) главы V для $q(\lambda_1)$, решаем задачу на максимум и находим значение λ_1 , соответствующее максимальной закрутке в направляющем аппарате ($\lambda_{1u \max}$):

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{k+1}{k-1} - \frac{2}{k-1} q_H^2 \frac{k-1}{k+1}},$$

откуда получается следующее выражение для максимальной закрутки потока в цилиндрическом входном аппарате при заданном значении коэффициента скорости на входе в ступень¹⁾:

$$\lambda_{1u \max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \sqrt{1 - q_H^2 \frac{k-1}{k+1}}, \quad (80)$$

¹⁾ Эта величина может быть легко определена графически (по фиг. 237) путём нахождения точки пересечения с осью абсцисс (λ_u) касательной к кривой $q_u = \text{const}$, параллельной оси ординат.

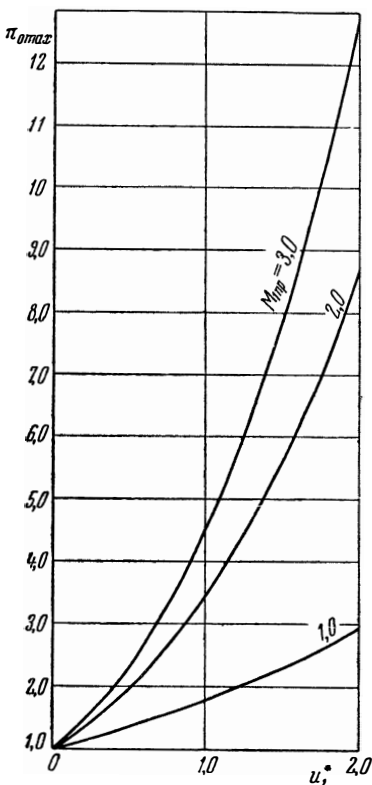
где

$$q_n = q(\lambda_n).$$

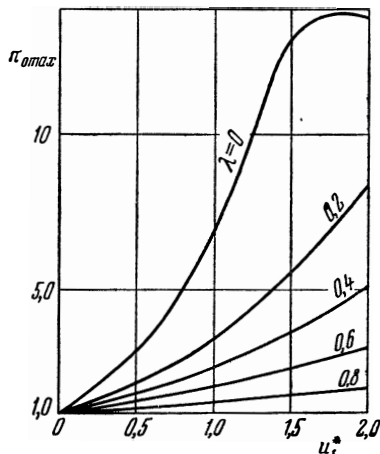
С помощью выражений (76) и (80) можно определить максимальное значение степени повышения полного давления $\pi_{0 \max}$ в ступени с осевым выходом потока из рабочего колеса.

На фиг. 304 представлена зависимость $\pi_{0 \max}$ от безразмерной окружной скорости на входе в колесо u_1^* для различных значений коэффициента скорости $M_{1 \text{пр}}$ при $\lambda_{1m} = \lambda_n$.

На фиг. 305 приведена зависимость $\pi_{0 \max}(u_1^*)$ для цилиндрического входного аппарата при $\lambda_n = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$. В обоих указан-



Фиг. 304. Зависимость степени повышения полного давления в элементарной ступени компрессора с осевым выходом из колеса в абсолютном движении ($c_{2u} = 0$) от безразмерной окружной скорости при постоянстве меридиональной составляющей скорости во входном направляющем аппарате ($c_n = c_{1m}$) для различных значений $M_{1 \text{пр}}$ на выходе из аппарата.



Фиг. 305. Зависимость степени повышения полного давления в элементарной ступени компрессора с осевым выходом из колеса в абсолютном движении ($c_{2u} = 0$) и с цилиндрическим входным направляющим аппаратом от безразмерной окружной скорости для различных значений λ_n , при $\eta_{ад} = 0,9$.

ных случаях происходит существенное уменьшение величины $\pi_{0 \max}$ с увеличением коэффициента скорости на входе в ступень λ_n ,

что объясняется уменьшением возможной закрутки в аппарате $\lambda_{1н}$.

Рассмотрим более подробно элементарную ступень осевого компрессора в случае, когда средняя поверхность тока в ступени является круговым цилиндром, т. е. степень радиальности во всех венцах ступени равна единице.

Пусть площади проходных сечений элементарных венцов подбираются из условия постоянства осевой скорости в характерных сечениях.

В несжимаемой жидкости, а также при малых скоростях в сжимаемом газе постоянство осевой скорости соблюдается при одинаковых проходных сечениях, но тогда в рассматриваемом типе ступени не только средняя, но и все поверхности тока являются цилиндрическими. При постоянстве осевой скорости концы векторов в треугольниках скорости лежат на одной прямой, параллельной направлению окружной скорости, что существенно упрощает анализ работы такой ступени.

Ограничимся сначала случаем малых скоростей, при которых влиянием сжимаемости газа можно практически пренебречь. В § 4 было получено выражение для идеальной работы в этом случае:

$$L_{ид} = \frac{\Delta p_0}{\gamma},$$

где величина

$$\Delta p_0 = p_{0с} - p_{0н}$$

может быть представлена так:

$$\Delta p_0 = p_{02} - p_{01} - (p_{0н} - p_{01}) - (p_{02} - p_{0с}),$$

или

$$\Delta p_0 = \Delta p_{0к} - \Delta p_{01} - \Delta p_{02}.$$

Обозначая потери полного напора во входном и выходном аппаратах соответственно через

$$h_1 = \Delta p_{01} = p_{0н} - p_{01},$$

$$h_2 = \Delta p_{02} = p_{02} - p_{0с},$$

получим:

$$L_{ид} = \frac{\Delta p_{0к} - h_1 - h_2}{\gamma}.$$

Применяя уравнение Бернулли к относительному движению в рабочем колесе, имеем:

$$h_{вк} + p_2 + \frac{\gamma \omega_2^2}{2g} = p_1 + \frac{\gamma}{2g} \omega_1^2,$$

где $h_{\text{вк}}$ — потери полного давления в венце колеса. Подставляя разность статических давлений

$$p_2 - p_1 = \frac{\gamma w_1^2}{2g} - \frac{\gamma}{2g} w_2^2 - h_{\text{вк}}$$

в выражение для разности полных давлений в абсолютном движении, будем иметь:

$$\Delta p_{0\text{к}} = \left(p_2 + \frac{\gamma}{2g} c_2^2 \right) - \left(p_1 + \frac{\gamma}{2g} c_1^2 \right) = \frac{\gamma}{2g} [(c_2^2 - c_1^2) - (w_2^2 - w_1^2)] - h_{\text{вк}},$$

и так как по условию

$$c_{2a} = c_{1a} = w_{1a} = w_{2a},$$

то можно написать:

$$\Delta p_{0\text{к}} = \frac{\gamma}{2g} [(c_{2u}^2 - c_{1u}^2) - (w_{2u}^2 - w_{1u}^2)] - h_{\text{вк}}.$$

Из плана скоростей колеса имеем:

$$\Delta c_u = \Delta w_u,$$

$$c_{1u} - w_{1u} = u,$$

$$c_{2u} - w_{2u} = u.$$

Окончательно имеем:

$$\Delta p_{0\text{к}} = \frac{\gamma}{g} \Delta c_u u - h_{\text{вк}},$$

и следовательно,

$$L_{\text{ид}} = \frac{1}{g} \Delta c_u u - \frac{h_{\text{вк}}}{\gamma} - \frac{h_1}{\gamma} - \frac{h_2}{\gamma}$$

или

$$L_{\text{ид}} = L - \frac{h_{\text{вк}}}{\gamma} - \frac{h_1}{\gamma} - \frac{h_2}{\gamma},$$

т. е. идеальная работа $L_{\text{ид}}$ равна разности между фактически подведённой работой L и потерями в венцах элементарной ступени.

Коэффициент полезного действия ступени выразится так:

$$\eta = 1 - \frac{h_{\text{вк}} + h_1 + h_2}{\gamma L}$$

или

$$\eta = 1 - \frac{h_{\text{вк}} + h_1 + h_2}{\frac{\gamma}{g} u \Delta c_u}. \quad (81)$$

Откидывая потери в аппаратах, получаем выражение для коэффициента полезного действия элементарного рабочего колеса

$$\eta_{\text{К}} = 1 - \frac{h_{\text{вК}}}{\frac{\gamma}{g} u \Delta c_u}$$

и

$$\eta_{\text{К}} = 1 - \frac{h_{\text{вК}}}{\frac{\gamma}{g} u \Delta w_u};$$

следовательно,

$$\eta = \eta_{\text{К}} - \frac{h_1 + h_2}{\frac{\gamma}{g} u \Delta c_u}.$$

Согласно (24) и (29) главы VIII имеем:

$$h_{\text{вК}} = \frac{C_x \frac{b}{t} \frac{\gamma}{g} \omega_m^2}{2 \sin \beta_m},$$

$$\Delta w_u = \omega_m \frac{b}{t} \frac{C_y}{2} (1 + \mu_{\text{К}} \operatorname{ctg} \beta_m),$$

следовательно,

$$\frac{h_{\text{вК}}}{\frac{\gamma}{g} u \Delta w_u} = \frac{\mu_{\text{К}} \omega_m}{\sin \beta_m (1 + \mu_{\text{К}} \operatorname{ctg} \beta_m) u},$$

и так как

$$\omega_m = \frac{w_a}{\sin \beta_m} = \frac{c_a}{\sin \beta_m},$$

то

$$\frac{h_{\text{вК}}}{\frac{\gamma}{g} u \Delta w_u} = \frac{\mu_{\text{К}} \bar{c}_a}{\sin^2 \beta_m (1 + \mu_{\text{К}} \operatorname{ctg} \beta_m)}. \quad (82)$$

Из рассмотрения плана скоростей для колеса (фиг. 306) следует:

$$\sin^2 \beta_m = \frac{\bar{c}_a^2}{c_a^2 + \left(1 - \bar{c}_{1u} - \frac{\Delta \bar{c}_u}{2}\right)^2}.$$

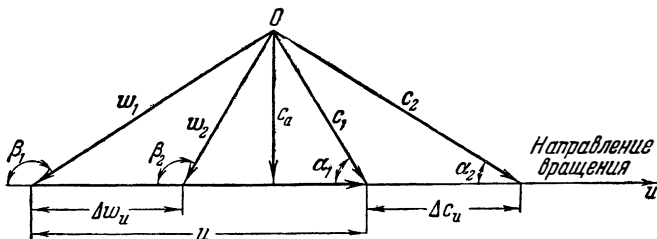
Пренебрегая ввиду малости величины μ (обычно $\mu \approx 0,05 \div 0,02$) произведением $\mu \operatorname{ctg} \beta_m$ по сравнению с единицей, получаем:

$$\frac{h_{\text{вК}}}{\frac{\gamma}{g} u \Delta w_u} = \frac{\mu_{\text{К}}}{c_a} \left[\bar{c}_a^2 + \left(1 - \bar{c}_{1u} - \frac{\Delta \bar{c}_u}{2}\right)^2 \right],$$

откуда

$$\eta_{\text{к}} = 1 - \frac{\nu_{\text{к}}}{c_a} \left[\bar{c}_a^2 + \left(1 - \bar{c}_{1u} - \frac{\Delta \bar{c}_u}{2} \right)^2 \right]. \quad (83)$$

Если воспользоваться данными продувки решёток профилей для определения величины $\nu_{\text{к}}$ в зависимости от параметров треугольника скорости колеса, то можно решить задачу о наилучшем треугольнике скорости колеса, который при задан-



Фиг. 306. План скоростей колеса осевого компрессора.

ных величинах $\Delta \bar{c}_u$ и \bar{c}_a даст наибольшее значение коэффициента полезного действия, а следовательно, и относительного напора:

$$\bar{H} = \eta_{\text{к}} \Delta \bar{c}_u.$$

Примем в первом приближении $\nu_{\text{к}} = \text{const}$ и для определения оптимального значения безразмерной закрутки потока \bar{c}_{1u} приравняем нулю производную:

$$\frac{d\eta_{\text{к}}}{d\bar{c}_{1u}} = \frac{\nu_{\text{к}}}{c_a} \left[2 \left(1 - \bar{c}_{1u} - \frac{\Delta \bar{c}_u}{2} \right) \right] = 0,$$

откуда получим:

$$\bar{c}_{1u \text{ опт}} = 1 - \frac{\Delta \bar{c}_u}{2}.$$

Величина $\Delta \bar{c}_u$ обычно не превышает значений 0,3—0,4, поэтому выгодна закрутка по вращению колеса ($\bar{c}_{1u \text{ опт}} > 0$).

Согласно (42) степень реактивности рабочего колеса в случае несжимаемой жидкости выразится так:

$$\rho_{\text{к}} = \frac{P_{2 \text{ нд}} - P_1}{\gamma L} = \frac{\Delta p_{\text{к. нд}}}{g} = \frac{\gamma}{g} u \Delta c_u,$$

здесь прирост статического давления при отсутствии потерь может быть выражен так:

$$\Delta p_{\text{к. нд}} = \frac{\gamma}{2g} (\omega_1^2 - \omega_2^2).$$

Таким образом,

$$\rho_K = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2u \Delta c_u}. \quad (84)$$

Из плана скоростей колеса (фиг. 306) следует:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= (u - c_{1u})^2 + c_a^2, \\ \omega_2^2 &= (u - c_{1u} - \Delta c_u)^2 + c_a^2, \end{aligned}$$

откуда

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 = 2u \Delta c_u - 2c_{1u} \Delta c_u - \Delta c_u^2. \quad (85)$$

Из (83) и (86) имеем:

$$\rho_K = 1 - \left(\bar{c}_{1u} + \frac{1}{2} \Delta \bar{c}_u \right) = 1 - \frac{\bar{c}_{1u} + \bar{c}_{2u}}{2}. \quad (86)$$

В формулу (83) для коэффициента полезного действия колеса можно ввести степень реактивности колеса, если в ней согласно (86) произвести следующую замену:

$$\bar{c}_{1u} + \frac{1}{2} \Delta \bar{c}_u = 1 - \rho_K.$$

Тогда получим:

$$\eta_K = 1 - \frac{\mu_K}{c_a} [\bar{c}_a + \rho_K^2] = 1 - \mu_K \left[\bar{c}_a + \frac{\rho_K^2}{c_a} \right]. \quad (87)$$

Как видно из этого выражения, максимальное значение коэффициента полезного действия колеса достигается при $\rho_K = 0$, т. е. в активном колесе.

Этот результат может быть также получен подстановкой оптимального значения закрутки на входе в колесо $c_{1 \text{ опт}}$ в выражение для степени реактивности.

В активном канале гидравлические потери сопряжены главным образом с поворотом потока.

Пренебрегая потерями в конфузормом элементарном венце направляющего аппарата, т. е. полагая $h_1 = 0$, получим согласно (81) следующее выражение для коэффициента полезного действия ступени:

$$\eta = \eta_K - \frac{h_2}{\frac{\gamma}{g} u \Delta c_u} = \eta_K - \frac{h_2}{\frac{\gamma}{g} u |\Delta c_u|_2 \frac{\Delta c_u}{|\Delta c_u|_2}}. \quad (88)$$

Здесь $|\Delta c_u|_2$ есть абсолютная величина закрутки потока в спрямляющем аппарате $\Delta c_{2u} = c_{cu} - c_{2u}$. Как следует из плана скоростей рабочего колеса, в случае осевого выхода потока из ступени

$$(\Delta c_u)_2 = \Delta c_u + c_{1u}.$$

Таким образом, при осевом входе и осевом выходе изменение закрутки в колесе равно по величине изменению закрутки в спрямляющем аппарате.

Положительная закрутка при входе в колесо увеличивает закрутку в спрямляющем аппарате, а отрицательная закрутка ($c_{1u} < 0$) уменьшает закрутку в спрямляющем аппарате (по сравнению с осевым входом потока).

Как уже указывалось выше при равных по величине и противоположных по знаку закрутках на входе в колесо и в самом колесе имеем:

$$c_{1u} = -\Delta c_u.$$

Необходимость в раскрутке потока отпадает, т. е. поток в абсолютном движении выходит из рабочего колеса с осевым направлением.

Однородной ступенью в многоступенчатом осевом компрессоре называют такую ступень, в которой условия перед колесом совпадают с условиями за выходным направляющим аппаратом.

Как следует из рассмотрения треугольников скорости (фиг. 307), в этом случае

$$c_{1u} = c_{cu}$$

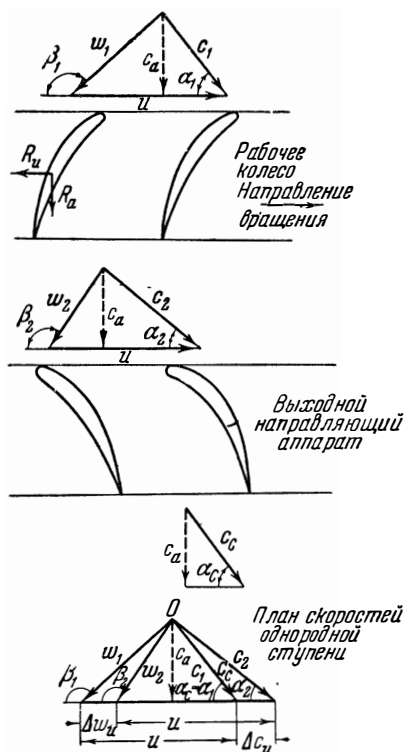
и, следовательно, в однородной ступени изменение закрутки потока в колесе всегда равно по абсолютной величине изменению закрутки потока в следующем за ним неподвижном венце:

$$|\Delta c_u| = |\Delta c_u|_2.$$

Качество лопатки элементарного венца направляющего аппарата обозначим:

$$\mu_2 = \frac{c_{x2}}{c_{y2}}.$$

Угол между геометрической полусуммой скоростей входа и выхода из аппарата и фронтом решётки обозначим α_{m2} ; тогда по аналогии с решёткой рабочего колеса можем согласно фор-



Фиг. 307. Схема однородной ступени осевого компрессора.

муле (82) написать:

$$\frac{h_2}{g} u (\Delta c_u)_2 \frac{\Delta c_u}{(\Delta c_u)_2} = \frac{\mu_2 \bar{c}_a}{\sin^2 \alpha_{2m} (1 + \mu_2 \operatorname{ctg} \alpha_{2m}) \frac{\Delta \bar{c}_u}{(\Delta \bar{c}_u)_2}}. \quad (89)$$

Из треугольника скоростей выходного направляющего аппарата (фиг. 306) имеем:

$$\sin^2 \alpha_{2m} = \frac{\bar{c}_a^2}{\bar{c}_a^2 + \left(\bar{c}_{cu} + \frac{(\Delta \bar{c}_u)_2}{2} \right)^2}. \quad (90)$$

Пренебрегая величиной $\mu_2 \operatorname{ctg} \alpha_{2m}$ по сравнению с единицей согласно (88), (89) и (90), получаем:

$$\eta = 1 - \frac{\mu}{\bar{c}_a} \left[\bar{c}_a^2 + \left(1 - \bar{c}_{1u} - \frac{\Delta \bar{c}_u}{2} \right)^2 \right] - \\ - \frac{\mu_2}{\bar{c}_a} \left[\bar{c}_a^2 + \left(\bar{c}_{cu} + \frac{\Delta \bar{c}_{2u}}{2} \right)^2 \right] \frac{(\Delta \bar{c}_u)_2}{\Delta \bar{c}_u}.$$

Считая величину μ одинаковой для решёток колеса и выходного направляющего аппарата, в случае однородной ступени $[\Delta c_u = (\Delta \bar{c}_u)_2]$ находим:

$$\eta = 1 - \frac{\mu}{\bar{c}_a} \left[2\bar{c}_a^2 + \left(1 - \bar{c}_{1u} - \frac{\Delta \bar{c}_u}{2} \right)^2 + \left(\bar{c}_{1u} + \frac{\Delta \bar{c}_u}{2} \right)^2 \right],$$

или согласно (43)

$$\eta = 1 - \frac{\mu}{\bar{c}_a} [2\bar{c}_a^2 + \rho_K^2 + (1 - \rho_K)^2]. \quad (91)$$

Предполагая, как и при выше проведённом анализе коэффициента полезного действия колеса, величину μ постоянной ($\mu = \text{const}$), приходим к следующему уравнению для оптимальной степени реактивности колеса при заданном значении \bar{c}_a :

$$\frac{\partial \eta}{\partial \rho_K} = 2 [\rho_K - (1 - \rho_K)] = 0,$$

откуда

$$\rho_{K, \text{ опт}} = 0,5,$$

и следовательно, согласно формуле (86) оптимальная величина загрузки составляет:

$$c_{1u \text{ опт}} = \frac{1 - \Delta \bar{c}_u}{2}.$$

Подставляя оптимальное значение степени реактивности в (91), выводим зависимость максимального коэффициента полезного действия ступени от осевой скорости:

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{\mu}{\bar{c}_a} (2\bar{c}_a^2 + 0,5).$$

Будем теперь считать постоянными величины окружные составляющие скорости c_{1u} и c_{2u} , что ведёт к постоянству и степени реактивности рабочего колеса ρ_K , и проанализируем влияние величины безразмерной осевой скорости при входе в ступень на значение коэффициента полезного действия.

Как следует из плана скоростей, при изменении \bar{c}_a (фиг. 306) изменяются как углы входа и выхода потока из элементарных венцов ступени, так и величины соответствующих скоростей. Это приводит к изменению потерь в венцах и коэффициента полезного действия ступени.

При определении потерь следует учитывать изменение качества профиля μ .

Полагая приближённо $\mu = \text{const}$, определим оптимальное значение \bar{c}_a опт, соответствующее максимуму коэффициента полезного действия однородной ступени.

Приравнивая нулю производную выражения (91) по \bar{c}_a , имеем:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \bar{c}_a} = 2 - \frac{\rho_K^2 + (1 - \rho_K)^2}{\bar{c}_a^2} = 0,$$

откуда

$$\bar{c}_{a \text{ опт}} = \sqrt{\frac{\rho_K^2 + (1 - \rho_K)^2}{2}}.$$

При оптимальном значении степени реактивности $\rho_K = 0,5$ максимум коэффициента полезного действия ступени имеет место на режиме $\bar{c}_a = 0,5$.

Подставляя в (91) значения $\rho_K = 0,5$ и $\bar{c}_a = 0,5$, получаем следующее выражение для абсолютного максимума коэффициента полезного действия элементарной однородной ступени:

$$\eta_{\max} = 1 - 2\mu.$$

Итак, при $\mu = \text{const}$ в случае однородной элементарной ступени еоблюдается условие

$$\eta \leq 1 - 2\mu.$$

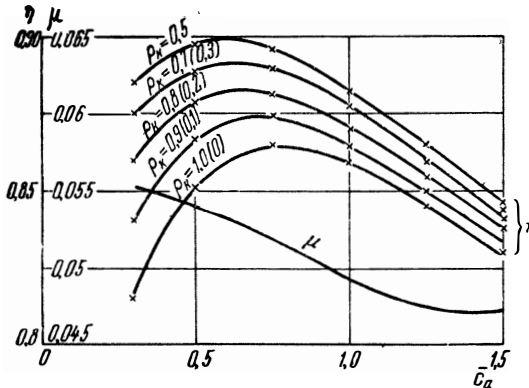
Так, например, для $\mu = 0,03$, чему соответствует решётка хорошего качества, имеем:

$$\eta \leq 94\%.$$

Если $\mu = 0,05$, то коэффициент полезного действия ступени ограничен значением

$$\eta \leq 90\%.$$

Используя данные продувки плоских решёток при небольших скоростях воздушного потока можно построить¹⁾ зависимость коэффициента полезного действия ступени от безразмерной



Фиг. 308. Зависимость коэффициента полезного действия элементарной цилиндрической ступени и обратного качества профиля в решётке $\mu = \frac{C_x}{C_y}$ по данным продувки решёток от безразмерной осевой скорости \bar{c}_a для различных значений реактивности рабочего колеса.

осевой скорости \bar{c}_a для различных значений степени реактивности рабочего колеса ρ_k (фиг. 307).

Определение коэффициента полезного действия облегчалось тем обстоятельством, что качество профиля согласно данным эксперимента с плоскими решётками практически зависит только от коэффициента осевой скорости \bar{c}_a и не зависит от степени реактивности рабочего колеса. Экспериментальная зависимость $\mu(\bar{c}_a)$ представлена на фиг. 308.

Кривые коэффициента полезного действия, построенные по экспериментальным данным, удовлетворительно согласуются с результатами теоретического анализа, проведенного в предположении постоянства величины μ . В опытах абсолютный максимум коэффициента полезного действия получен при оптимальной теоретической степени реактивности $\rho_k = 0,5$ и при несколько отличном от оптимального теоретического значения безразмерной скорости $\bar{c}_a = 0,57$ (вместо $\bar{c}_{a \text{ теор}} = 0,5$).

¹⁾ Холщевников К. В., Выбор параметров и расчёт осевого компрессора. Оборонгиз, 1949.

При $\rho_k \neq 0,5$ оптимальное значение \bar{c}_a увеличивается с ростом ρ_k ; например, при $\rho_k = 1$ имеем $\bar{c}_{a \text{ опт}} = 0,7$.

При увеличении окружной скорости рабочего колеса и соответственно осевой скорости входа в осевую элементарную ступень, когда уже нельзя пренебрегать сжимаемостью газа, требование постоянства меридиональной составляющей скорости в характерных сечениях ступени ведёт к необходимости изменения элементарных площадей проходных сечений по уравнению неразрывности:

$$F_2 = \frac{g(\lambda_1) \sin \alpha_1}{\chi g(\lambda_2) \sin \alpha_2} F_1.$$

При этом течение через венец определяется не только углами, но и коэффициентами скорости λ . Само понятие однородной ступени становится уже нестрогим, ибо при выполнении условий

$$\begin{aligned} c_1 &= c_c, \\ \alpha_1 &= \alpha_c, \end{aligned}$$

коэффициенты скорости λ_1 и λ_c отличаются из-за подогрева воздуха:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_c} = \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}.$$

Постоянство осевой скорости

$$c_{1a} = c_{1a} = c_{2a} = c_{ca}$$

приводит к следующим соотношениям между коэффициентами осевой скорости:

$$\begin{aligned} \lambda_{1a} &= \lambda_{1a}, \\ \lambda_{1a} &= \lambda_{2a} \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}, \\ \lambda_{2a} &= \lambda_{ca}. \end{aligned} \quad (92)$$

Кроме того,

$$\lambda_2^2 = \lambda_{2a}^2 + \lambda_{2u}^2. \quad (93)$$

Соотношения (92) и (93) необходимо учитывать при определении степени повышения температуры торможения в ступени по выражению (65).

Задавая величину λ_2 , можно определить степень повышения полного давления в зависимости от окружной скорости рабочего колеса, скорости входа и закрутки во входном аппарате.

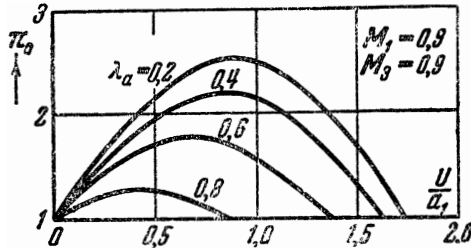
Определим степень повышения полного давления изоэнтропической дозвуковой элементарной ступени осевого компрессора

при постоянстве осевой скорости и при степени реактивности $\rho_k = 0,5$, $M_{1u} \leq 0,9$, $M_2 \leq 0,9$; в случае $\rho_k = 0,5$:

$$\omega_{1u} = -c_{2u},$$

$$c_{1u} = -\omega_{2u}.$$

Результаты расчёта представлены на фиг. 309 в виде зависимостей π_0 от безразмерной окружной скорости $\frac{u}{a_1}$ для различных значений λ_a . Как следует из этого графика, в дозвуковой осевой ступени при половинной степени реактивности получаются



Фиг. 309. Зависимость максимального повышения полного давления от окружной скорости в дозвуковой ступени осевого компрессора при $\rho_k = 0,5$.

весьма небольшие степени повышения полного давления при достаточно больших значениях коэффициента осевой скорости на входе в ступень.

Переход к другой степени реактивности рабочего колеса позволяет в дозвуковой ступени получить большие значения степени повышения полного давления.

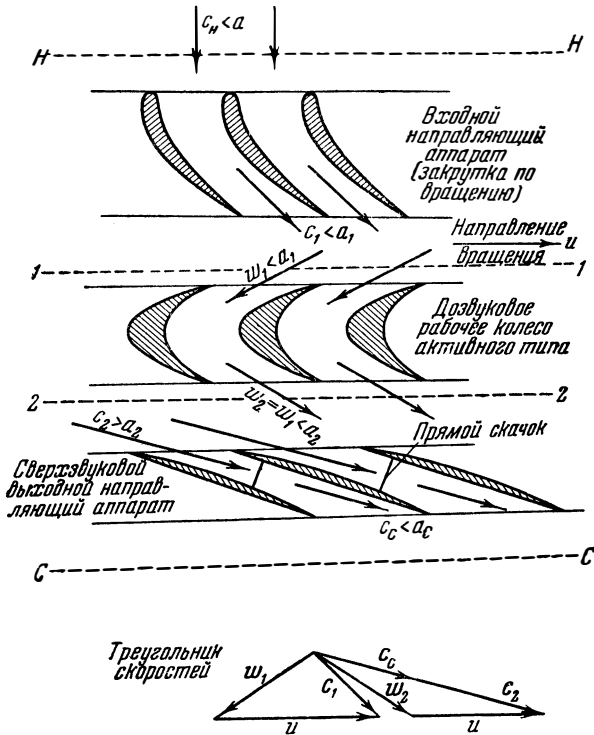
Дальнейшее увеличение π_0 в рамках дозвуковой ступени может быть достигнуто путём увеличения радиальности рабочего колеса, т. е. путём отказа от цилиндрической схемы ступени ($\frac{r_2}{r_1} = 1$).

Единственный путь получения высокой степени повышения полного давления в цилиндрической ступени заключается в переходе к сверхзвуковым скоростям в характерных сечениях ступени.

Рассмотрим в качестве примеров элементарной сверхзвуковой цилиндрической ступени следующие две схемы.

А. Схема ступени с нулевой реактивностью, дозвуковой относительной скоростью в рабочем колесе активного типа ($\omega_1 = \omega_2 < a_1$) и сверхзвуковой абсолютной скоростью после колеса ($c_2 > a_2$), переходящей прямым скачком уплотнения в дозвуковую в выходном направляющем аппарате.

Б. Схема со сверхзвуковой относительной скоростью на входе ($\omega_1 > a_1$), переходящей в колесе прямым скачком уплотнения в дозвуковую скорость, причём поток в колесе не меняет первоначального направления. Абсолютная скорость после колеса является дозвуковой ($c_2 < a_2$). Такая ступень характеризуется большим положительным значением степени реактивности.



Фиг. 310. Схема А ступени сверхзвукового осевого компрессора с дозвуковым относительным потоком в колесе.

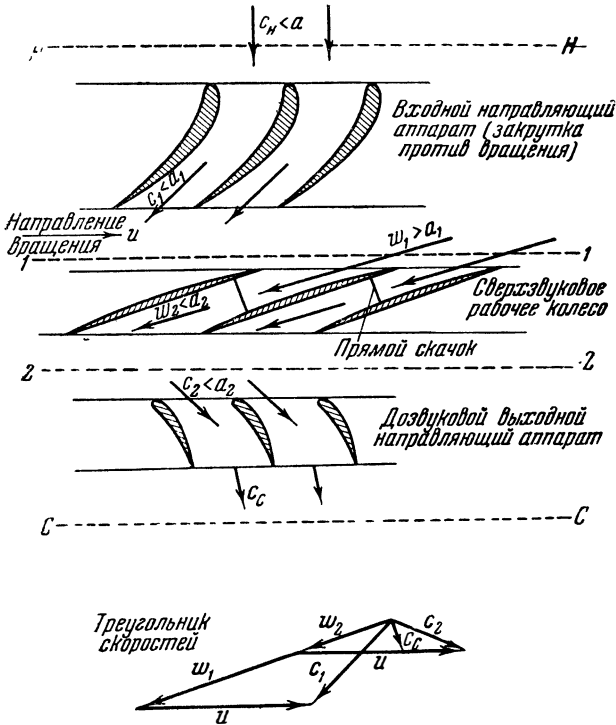
Типичные треугольники скорости этих двух схем представлены на фиг. 310 и 311. В обеих схемах сверхзвуковая скорость имеется только в одном из элементов проточной части и переход от сверхзвуковой скорости к дозвуковой осуществляется в прямом скачке уплотнения. В схеме А поток в колесе при дозвуковой относительной скорости разгоняется до сверхзвуковой абсолютной скорости, и скачок происходит в абсолютном движении после колеса в каналах выходного направляющего аппарата, вызывая лишь восстановление статического давления. В схеме Б относительная скорость на входе в рабочее колесо сверх-

звуковая, и скачок происходит в относительном движении в межлопаточных каналах рабочего колеса, создавая фронтальное усилие.

При течении сжимаемого газа через решётку без изменения направления, т. е. при $\beta_1 = \beta_2$, выражение для фронтального усилия имеет вид

$$R_u = M (\omega_{1u} - \omega_{2u}) = M \cos \beta_1 (\omega_1 - \omega_2),$$

т. е. фронтальное усилие может возникнуть только при неоди-



Фиг. 311. Схема Б ступени сверхзвукового осевого компрессора со сверхзвуковым относительным потоком в колесе.

наковых значениях скорости на входе и выходе. Уравнение неразрывности для цилиндрического рабочего колеса при $\beta_1 = \beta_2$ запишется так:

$$\rho_1 \omega_1 = \rho_2 \omega_2$$

или

$$j_1 = j_2.$$

Но ранее уже было показано, что в дозвуковых течениях с ростом скорости плотность тока j увеличивается, а в сверхзвуковых — уменьшается; поэтому одновременное выполнение условий

$$\begin{aligned}\omega_1 &\neq \omega_2, \\ j_1 &= j_2\end{aligned}$$

возможно только при переходе через скорость звука, т. е. при $\omega_1 > a_1$, $\omega_2 < a_2$ или наоборот.

Исходя из определения схем, можно выяснить в зависимости от значений окружной скорости и осевой скорости входа на ступень те диапазоны входных и выходных углов, при которых осуществима каждая схема. В случае схемы А, предусматривающей дозвуковой вход на активное рабочее колесо, минимальная закрутка потока по вращению c_{1u} и максимальное значение угла входа в абсолютном движении α_1 определяются из условия $\omega_1 < a_1$, что подробно было уже разобрано выше. Дальнейшее увеличение закрутки на входе в колесо приводит к уменьшению скорости входа ω_1 , а так как $\omega_2 = \omega_1$, то и скорости выхода; из треугольника скорости видно, что при этом абсолютная скорость на выходе c_2 тоже уменьшает своё значение.

Значение максимальной закрутки и соответственно минимального угла $\alpha_{1\min}$ можно найти, исходя из требования $c_2 > a_2$.

Схема Б осуществляется в случае сверхзвуковой скорости в относительном движении на входе в колесо: $\omega_1 > a_1$. Выполнение этого условия при $u < a_1$ требует закрутки против вращения ($c_{1u} < 0$). Минимальная для схемы Б абсолютная величина закрутки потока на входе в рабочее колесо получается на режиме

$$M_{1w} \leq 1,$$

при котором могут быть использованы результаты § 2. Исходя из необходимости осуществления дозвуковой скорости на выходе из колеса ($M_2 \leq 1$), получаем ограничения для значений окружной скорости и осевой скорости входа в ступень (в зависимости от угла α_1).

Остановимся ещё на трёх схемах сверхзвукового компрессора, полагая осевую скорость постоянной.

В. С дозвуковым потоком в рабочем колесе и сверхзвуковым потоком в выходном направляющем аппарате.

Г. Со сверхзвуковым потоком в рабочем колесе при дозвуковой осевой составляющей скорости и сверхзвуковым потоком в направляющем аппарате.

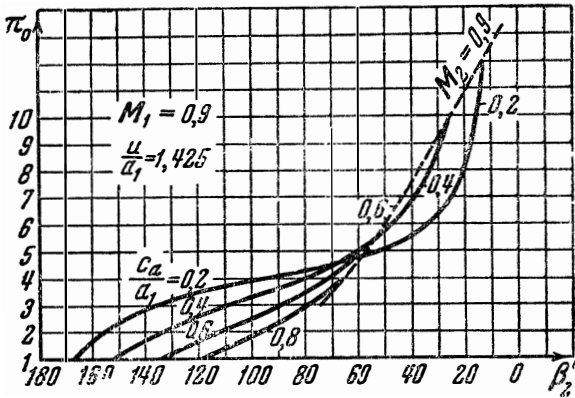
Д. Со сверхзвуковой осевой скоростью и сверхзвуковым потоком в рабочем колесе и выходном направляющем аппарате.

Рассмотренная выше схема А является частным случаем схемы В с активным рабочим колесом.

На фиг. 312 даны величины степени повышения давления π_c для схемы В при изоэнтропическом течении (без потерь) и условиях

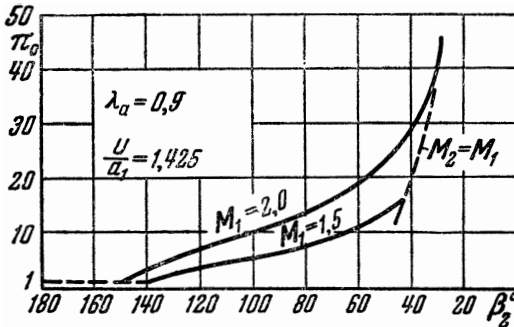
$$M_{1w} = 0,9, \quad \frac{u}{a_1} = 1,425$$

при различных значениях осевой скорости; под величиной a_1 на



Фиг. 312. Зависимость степени повышения полного давления от угла выхода потока при различных осевых скоростях для схемы В.

фиг. 312 понимается скорость звука, соответствующая параметрам торможения перед колесом. Результаты расчёта схемы Г

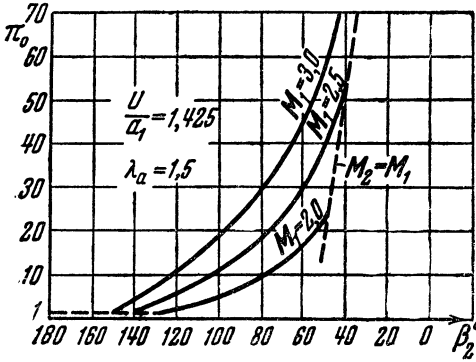


Фиг. 313. Зависимость степени повышения полного давления от угла выхода потока при различных осевых скоростях для схемы Г (дозвуковой осевой поток).

для изоэнтропического течения для чисел $M_{1w} = 2$ и $M_{1w} = 1,5$ приведены на фиг. 313 и свидетельствуют о том, насколько могут быть значительными степени повышения полного давления

при сверхзвуковых режимах. Ещё большие величины получаются в случае сверхзвуковой осевой скорости (фиг. 314).

Остановимся теперь на элементарной ступени центробежного компрессора, имеющего осе-радиальное рабочее колесо с осевым входным (направляющим) аппаратом и радиальным выходным (спрямляющим) аппаратом (диффузором).



Фиг. 314. Зависимость степени повышения полного давления от угла выхода потока при различных осевых скоростях для схемы Г (сверхзвуковой осевой поток).

При достаточно большом числе лопаток относительное течение газа на выходе из колеса направлено вдоль выходных кромок лопаток.

В радиальной части колеса используются как прямые радиальные лопатки, так и криволинейные лопатки.

Последние бывают загнутыми вперёд (по вращению): $\beta_1 < \frac{\pi}{2}$ и назад (против вращения): $\beta_1 > \frac{\pi}{2}$.

При достаточно большом числе прямых лопаток относительное течение газа на выходе из колеса имеет радиальное направление

$$\omega_{2u} = 0;$$

в этом случае

$$c_{2u} = \omega_{2u} + u_2 = u_2,$$

$$\lambda_{2u} = \frac{u_2}{a_{1кр}} \sqrt{\frac{T_{01}}{T_{02}}},$$

откуда на основании (65):

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1 = \frac{2(k-1)}{k+1} \left[\frac{u_2^2}{a_{1кр}^2} - \frac{u_2}{a_{1кр}} \frac{r_1}{r_2} \lambda_{1u} \right] = \frac{2(k-1)}{k+1} \left[\frac{u_2^2}{a_{1кр}^2} - u_1^* \lambda_{1u} \right]. \quad (94)$$

Таким образом, в колесе с радиальным выходом потока в относительном движении степень повышения температуры торможения не зависит от относительной скорости на выходе из колеса, а определяется только закруткой потока на входе и степенью радиальности колеса.

Зависимость степени повышения полного давления от безразмерной окружной скорости $\frac{u_2}{a_{1кр}}$, вычисленная в предположении $\eta_{ад} = 80\%$ при различных значениях произведения $u_1^* \lambda_{1u}$ для случая

осевого входа, представлена на фиг. 315. Угол входа потока в диффузор α_2 в данном случае ($c_{2u} = u_2$) определяется величиной окружной скорости:

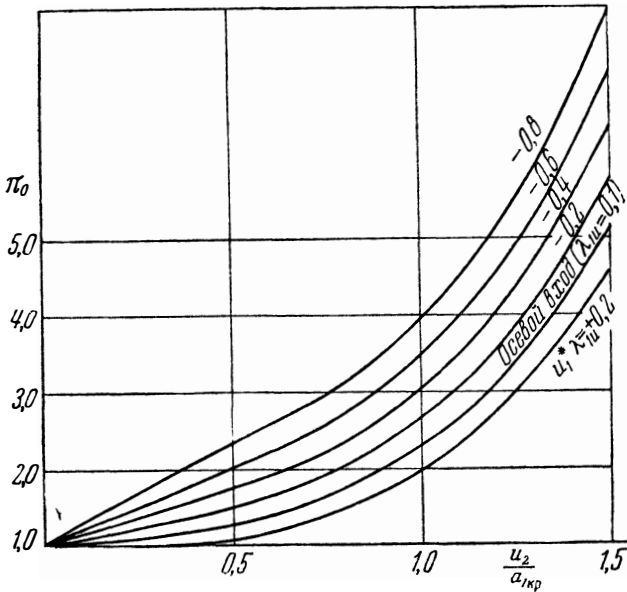
$$\cos \alpha_2 = \frac{c_{2u}}{c_2} = \frac{u_2}{c_2} = \frac{u_2^*}{\lambda_2} = \frac{u_2}{a_{1кр}} \frac{1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{T_{01}}{T_{02}}}$$

Минимальное значение α_2 , равное нулю, соответствует нулевой радиальной скорости ($c_{2u} = c_2$), а максимальное значение

$\alpha_{2 \max} =$

$$= \arccos \frac{u_2}{c_{2 \max}} = \arccos \left(u_2^* \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \right) = \arccos \left(\frac{u_2}{a_{2кр}} \sqrt{\frac{k-1}{k+1} \frac{T_{01}}{T_{02}}} \right)$$

соответствует максимальной величине абсолютной скорости газа на выходе из колеса.



Фиг. 315. Зависимость степени повышения полного давления в элементарной радиальной ступени от безразмерной окружной скорости на выходе из колеса при радиальном выходе потока в относительном движении ($\omega_{2u} = 0$) для различных значений $u_1^* \lambda_{1u}$ и $\eta_{ад} = 0,8$.

Таким образом, возможное значение угла α_2 при прямых лопатках колеса лежит в следующих пределах:

$$0 < \alpha_2 < \arccos \left(u_2^* \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \right).$$

Для воздуха имеем:

$$0 < \alpha_2 < \arccos \frac{u_2^*}{\sqrt{6}}.$$

Ограничиваясь случаем постоянства меридиональных скоростей в характерных сечениях ступени ($c_H = c_{1a} = c_{2r}$), имеем:

$$\lambda_H = \lambda_{1a} = \lambda_{2r} \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}},$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\lambda_{2u}^2 + \lambda_H^2 \frac{T_{01}}{T_{02}}}.$$

При осевом входе согласно (65):

$$\lambda_{2u} = \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1}{\frac{u_2}{a_{1\text{кр}}} \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}}.$$

Разрешая последние два уравнения относительно $\frac{T_{02}}{T_{01}}$, можно установить зависимость степени повышения температуры торможения от коэффициентов скорости на входе и выходе из колеса.

Полагая $\lambda_2 = 1$ и $k = 1,4$, получаем следующее выражение максимального значения $\frac{T_{02}}{T_{01}}$ при дозвуковом выходе и осевом входе воздуха в рабочее колесо:

$$\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)_{\max} = \left(1 + \frac{1}{18} \frac{u_2^2}{a_{1\text{кр}}^2}\right) + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{18} \frac{u_2^2}{a_{1\text{кр}}^2}\right)^2 - \frac{1}{9} \lambda_H^2 \frac{u_2^2}{a_{1\text{кр}}^2} - 1}.$$

Соответствующий угол выхода потока α_2 определяется выражением

$$\alpha_2 = \arcsin \frac{\lambda_{2r}}{\lambda_2} = \arcsin \frac{\lambda_H}{\left(\sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}\right)_{\max}}.$$

При рабочем колесе с большим числом прямых лопаток, обеспечивающих радиальный выход в относительном движении, будем иметь:

$$\lambda_{2u} = u_2^* = \frac{u_2}{a_{1\text{кр}}} \sqrt{\frac{T_{01}}{T_{02}}},$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{u_2^2}{a_{1\text{кр}}^2} + \lambda_H^2} \sqrt{\frac{T_{01}}{T_{02}}},$$

$$\alpha_2 = \arcsin \frac{\lambda_{2r}}{\lambda_2} = \frac{\lambda_H}{\sqrt{\frac{u_2^2}{a_{1\text{кр}}^2} + \lambda_H^2}}.$$

В случае осевого входа и радиального выхода в относительном движении согласно (94) имеем следующее выражение для сте-

пени повышения температуры торможения:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = 2 \frac{k-1}{k+1} \frac{u_2^2}{a_{1кр}^2} + 1.$$

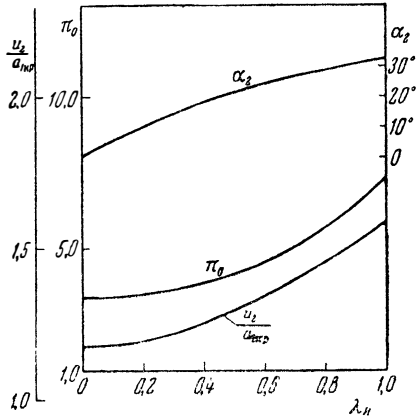
Увеличение окружной скорости при постоянном значении меридиональной скорости ведёт к возрастанию скорости на выходе из колеса c_2 , однако из-за одновременного роста температуры торможения коэффициент скорости λ_2 увеличивается медленнее, чем скорость c_2 .

Зависимость коэффициента скорости на выходе λ_2 от безразмерной окружной скорости $\frac{u_2}{a_{1кр}}$ и коэффициента осевой скорости на входе в ступени с осевой входом выглядит так:

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{(k+1)(u_2^2 + c_H^2)}{2(k-1)u_2^2 + (k+1)a_{1кр}^2}}.$$

Выражение (94) позволяет определить максимально возможную степень повышения температуры торможения в рассматриваемой схеме ступени компрессора в зависимости от коэффициента осевой скорости λ_H при различных ограничениях коэффициента скорости λ_2 ; здесь только не учтено возможное ограничение в числе M_w на входе.

Возможные значения π_0 при $\eta_{ад} = 0,8$ и $\lambda_2 = 1$ в функции λ_H даны на фиг. 316; здесь же приведены кривые соответствующих значений α_2 и $\frac{u_2}{a_{1кр}}$. Применяя лопатки, загнутые вперёд (по вращению колеса), можно достигнуть увеличения степени повышения полного давления при неизменной окружной скорости.



Фиг. 316. Зависимость степени повышения полного давления, угла потока перед выходным диффузором и значения безразмерной окружной скорости $\frac{u_2}{a_{1кр}}$ от коэффициента скорости на входе в колесо для элементарной осе-радиальной ступени при постоянстве меридиональных скоростей в случае осевого входа и радиального выхода относительного потока. $\lambda_2 = 1$ и $\eta_{ад} = 0,8$.

§ 8. Элементарная ступень турбины

При проектировании турбины различают ступени с использованием и с потерей энергии выходящего потока.

Остановимся сначала на ступени первого типа. В этом случае задаётся работа L или соответствующий ей теплоперепад:

$$\Delta T_0 = T_{0н} - T_{0с} = \frac{A}{c_p} L.$$

Переходя к безразмерным величинам, можно воспользоваться безразмерной работой

$$K = \frac{L}{c_p T_{01}} = \frac{\Delta T_0}{T_{01}} = 1 - \frac{T_{02}}{T_{01}}$$

или степенью понижения температуры торможения

$$\theta_0 = \frac{T_{02}}{T_{01}} = 1 - \frac{L}{\frac{c_p}{A} T_{01}} = 1 - K.$$

Определим параметры потока в характерных сечениях ступени, при которых реализуется заданный теплоперепад. Коэффициенты окружных составляющих абсолютной скорости перед и за колесом связаны между собой уравнением закрутки (28), которое в случае ступени турбины удобнее записывать так:

$$\lambda_{1u} = \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{1 - \frac{T_{02}}{T_{01}}}{u_1^*} + \frac{r_2}{r_1} \lambda_{2u} \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}. \quad (95)$$

Таким образом, окружные составляющие скорости зависят только от степени понижения температуры торможения при заданных значениях u_1^* и $\frac{r_2}{r_1}$.

Вводя в уравнение закрутки (95) безразмерную работу, получим:

$$\lambda_{1u} = \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{K}{u_1^*} + \frac{r_2}{r_1} \lambda_{2u} \sqrt{1-K}. \quad (96)$$

При меридиональном выходе потока ($\lambda_{2u} = 0$)

$$\lambda_{1u} = \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{K}{u_1^*}$$

или

$$\Lambda_{1u} = \frac{K}{2U_1^*},$$

т. е.

$$\lambda_{1u} u_1^* = \frac{k+1}{2(k-1)} K, \quad (97)$$

и

$$\Lambda_{1u} U_1^* = \frac{K'}{2}. \quad (98)$$

Величина K — существенно положительная, следовательно, в слу-

чае меридионального выхода из колеса закрутка потока перед колесом может быть только положительной. Закрутка на входе в колесо в общем случае может быть представлена так:

$$\lambda_{1u} = \lambda'_{1u} + \frac{r_2}{r_1} \lambda_{2u} \sqrt{\theta_0};$$

здесь

$$\lambda'_{1u} = \frac{k+1}{2} \frac{K}{(k-1) u_1^*}$$

есть закрутка при меридиональном выходе из рабочего колеса.

Как видим, при положительной закрутке потока на выходе из колеса необходимая закрутка потока во входном направляющем аппарате увеличивается, а при отрицательной выходной закрутке—уменьшается. При отсутствии входного направляющего аппарата, т. е. при меридиональном входе потока в рабочее колесо ($\lambda_{1u} = 0$), имеем следующее выражение для закрутки потока на выходе из колеса:

$$\lambda_{2u} = -\frac{k+1}{2} \frac{K}{(k-1) \frac{r_2}{r_1} u_1^* \sqrt{1-K}},$$

или

$$\lambda_{2u} = -\frac{k+1}{2} \frac{a_1 \text{ нр} K}{(k-1) u_2 \sqrt{1-K}}.$$

Для определения полной скорости нужно ещё найти меридиональные составляющие скорости. Последние связаны между собой уравнением неразрывности.

Во входном направляющем аппарате имеем:

$$\Delta F_{\text{нн}} q(\lambda_{\text{н}}) = \sigma_1 \Delta F_{\text{н1}} q(\lambda_1), \quad (99)$$

в рабочем колесе

$$\Delta F_{\text{н1}} q(\lambda_1) = \chi \Delta F_{\text{н2}} q(\lambda_2), \quad (100)$$

в выходном спрямляющем аппарате

$$\Delta F_{\text{н2}} q(\lambda_2) = \sigma_2 \Delta F_{\text{нс}} q(\lambda_c). \quad (101)$$

Здесь σ_1 и σ_2 —коэффициенты полного давления соответственно направляющего и спрямляющего аппаратов, $\chi = \frac{\pi_{0\text{н}}}{\sqrt{\theta_0}}$, $\Delta F_{\text{н}}$ —площадь проходного сечения элементарной кольцевой струйки.

Зависимость функции χ от безразмерной работы K представлена на фиг. 317 для различных значений адиабатического коэффициента полезного действия колеса, а на фиг. 318— для различных значений коэффициента изоэнтропичности колеса.

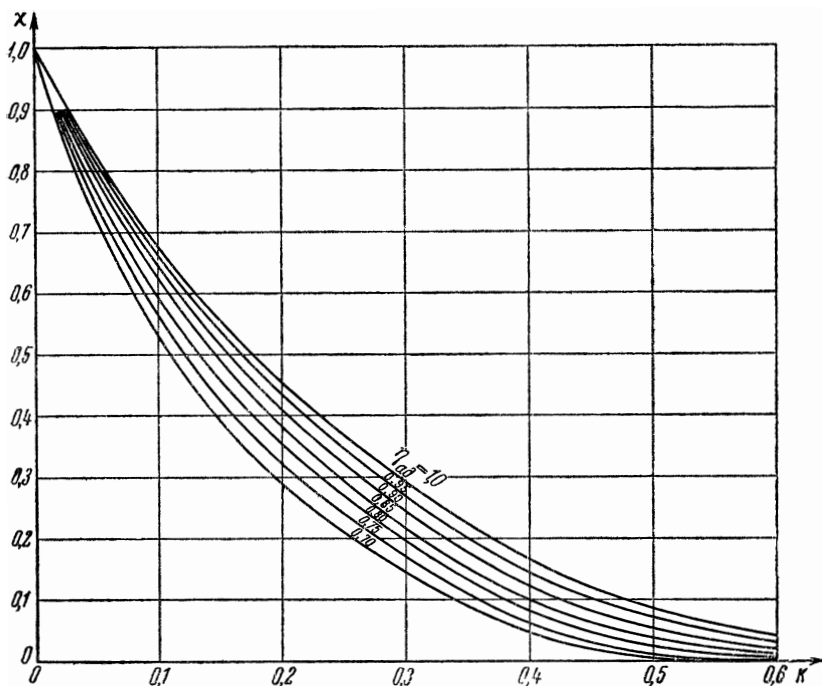
Если вместо проходного сечения ΔF_n , перпендикулярного к направлению полной скорости, ввести сечение ΔF_m , перпендикулярное к меридиональной составляющей скорости, то уравнения (99), (100) и (101) записываются следующим образом:

$$\Delta F_{mH} q(\lambda_H) = \sigma_1 \Delta F_{m1} q(\lambda_1) \sin \alpha_1, \quad (102)$$

$$\Delta F_{m1} q(\lambda_1) \sin \alpha_1 = \chi \Delta F_{m2} q(\lambda_2) \sin \alpha_2, \quad (103)$$

$$\Delta F_{m2} q(\lambda_2) \sin \alpha_2 = \Delta F_{mC} q(\lambda_C). \quad (104)$$

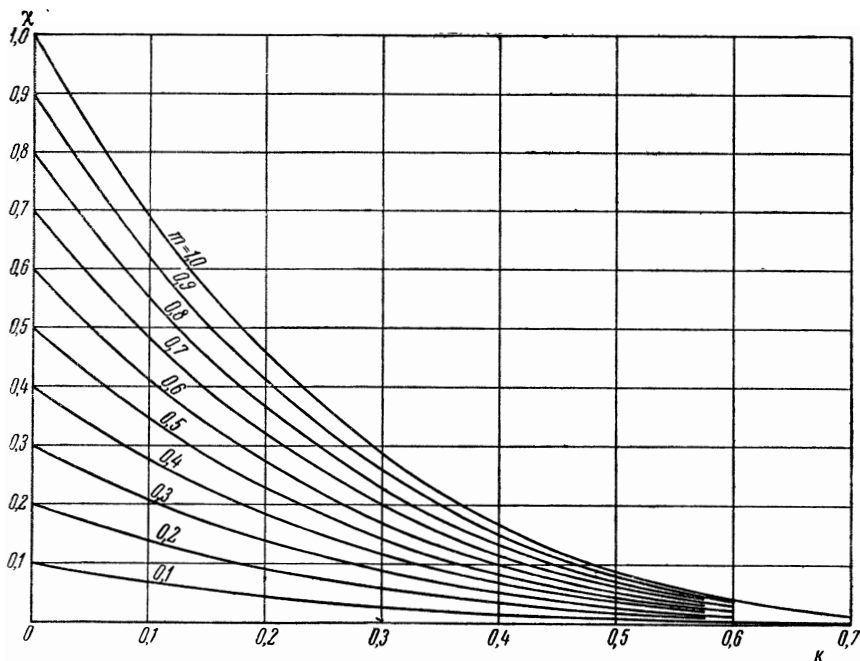
При этом предполагаются меридиональный вход потока в ступень



Фиг. 317. Зависимость функции $\gamma = \frac{\pi_0}{\sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}}$ от безразмерной работы K при различных значениях адиабатического коэффициента полезного действия $\left(k = \frac{4}{3}\right)$.

$\left(\alpha_H = \frac{\pi}{2}\right)$ и меридиональный выход потока из ступени. Располагая значениями коэффициентов окружных составляющих скорости λ_{1u} и λ_{2u} и пользуясь уравнениями неразрывности (102), (103) и (104), можно решить следующие две основные задачи.

В первой задаче известными являются величины площадей ΔF_m или их отношения (например, в случае цилиндрической ступени $\Delta F_{mн} = \Delta F_{m1} = \Delta F_{m2} = \Delta F_{мс}$) и подлежат определению коэффициенты скорости и углы в характерных сечениях ступени. Эта



Фиг. 318. Зависимость функции $\chi = \frac{\tau_0}{\sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}}$ от безразмерной работы K при

различных значениях коэффициента изэнтропичности $\left(k = \frac{4}{3}\right)$.

задача решается графическим путём с помощью кривых постоянного значения

$$q(\lambda) \sin \alpha.$$

Во второй, наиболее распространённой задаче известны соотношения между меридиональными составляющими скорости в характерных сечениях или величины коэффициента полной скорости и угла потока и подлежат определению соответствующие проходные сечения. В последнем случае уравнение неразрывности позволяет решить задачу без графических построений; следует отметить, что во второй задаче величины коэффициентов скорости и её составляющих зависят от безразмерной работы K , но не зависят от коэффициента полезного действия.

Только при определении проходных площадей нужно знать потери в аппаратах и коэффициент полезного действия колеса или коэффициент изоэнтропичности.

Параметры потока в характерных сечениях элементарной ступени при заданной величине коэффициента работы K зависят от закрутки потока при входе в рабочее колесо, окружной скорости и степени радиальности. В качестве примера определим параметры потока в элементарной ступени осевой турбины при степени радиальности $\frac{r_2}{r_1} = 1$, работе $L = 26\,000$ кгм/кг и параметрах газового потока на входе

$$T_{0н} = 1100^\circ \text{ абс}, \quad k = \frac{4}{3}, \quad R = 29,4, \\ \lambda_n = 0,3, \quad u_1 = 394 \text{ м/сек.}$$

Коэффициент работы равен:

$$K = \frac{L}{\frac{k}{k-1} RT_{01}} = \frac{26\,000}{4 \cdot 29,4 \cdot 1100} = 0,2.$$

Степень понижения температуры торможения

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1 - K = 0,8,$$

критическая скорость перед колесом

$$a_{кр1} = a_{кр.н} = 18,1 \sqrt{1100} = 600 \text{ м/сек},$$

следовательно,

$$u_1^* = \frac{u_1}{a_{кр1}} = \frac{394}{600} = 0,65.$$

Подставляя в уравнение закрутки (95) величины K , u_1^* и k , получим:

$$\lambda_{2u} = 1,12\lambda_{1u} - 1,21.$$

При постоянстве осевой скорости

$$c_n = c_{1a} = c_{2a} = c_c$$

имеем:

$$\lambda_n = \lambda_{1a} = \lambda_{2a} \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}} = \lambda_c \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}},$$

и, следовательно,

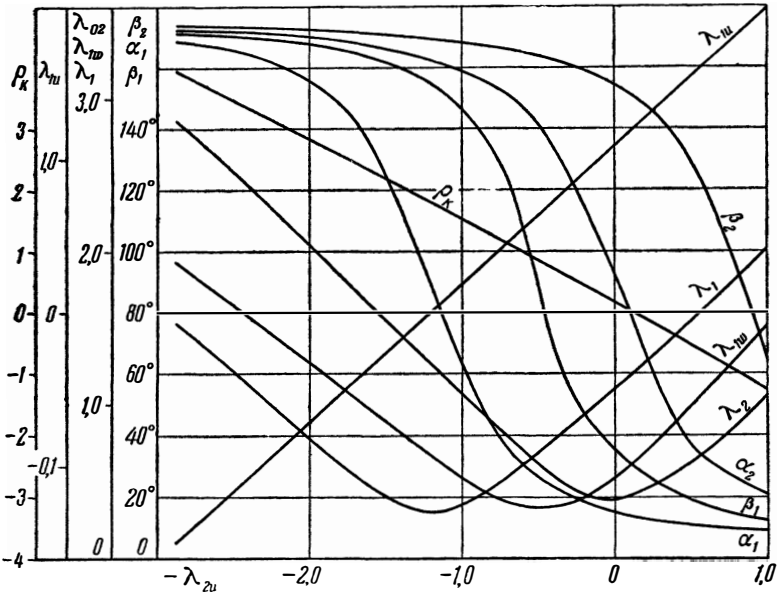
$$\lambda_1^2 = \lambda_{1u}^2 + \lambda_{1a}^2 = \lambda_{1u}^2 + \lambda_n^2, \\ \lambda_2^2 = \lambda_{2u}^2 + \lambda_{2a}^2 = \lambda_{2u}^2 + \lambda_n^2 \frac{T_{01}}{T_{02}}.$$

Подставляя численные значения, находим:

$$\lambda_1^2 = \lambda_{1u}^2 + 0,09, \\ \lambda_2^2 = \lambda_{2u}^2 + 0,112.$$

Зависимость параметров потока на входе и выходе из колеса от коэффициента закрутки потока на выходе из колеса для разобранного примера представлена на фиг. 319.

При максимальной закрутке потока на входе в колесо, соответствующей углу выхода потока из соплового аппарата $\alpha = 10^\circ 30'$, величина λ_1 достигает максимума ($\lambda_1 = 2,02$). Получающееся в этом случае разрежение за сопловым аппаратом столь велико, что течение в рабочем колесе становится диффузорным, а степень реактивности решётки рабочего колеса отрицательной ($\rho_R = -1,25$);



Фиг. 319. Зависимость параметров потока на входе и выходе из колеса турбины от коэффициента закрутки потока на выходе из колеса λ_{2u} ($K=0,2$; $\frac{r_2}{r_1}=1$, $u_1=394$ м/сек, $T_{01}=1100^\circ$ абс, $c_{1a}=c_{2a}$, $k=\frac{4}{3}$, $R=29,4$).

поток на выходе имеет положительную закрутку при угле $\alpha_2 = 20^\circ$ и коэффициенте скорости $\lambda_2 = 1,1$. С уменьшением закрутки разрежение за сопловым аппаратом падает, что приводит к увеличению степени реактивности рабочего колеса и уменьшению закрутки потока за ним. При $\alpha_1 = 33^\circ$ степень реактивности обращается в нуль (колесо становится активным) и имеется очень малая закрутка на выходе: $\lambda_{2u} = 0,12$.

При дальнейшем уменьшении закрутки на входе в колесо до величины, соответствующей степени реактивности $\rho_R = 0,2$, выход из колеса становится осевым. Если продолжать уменьшение

закрутки на входе в колесо, то появится отрицательная закрутка на выходе из колеса. При осевом входе в колесо, т. е. при отсутствии соплowego аппарата ($\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$), угол выхода потока $\alpha_2 = 162^\circ 40'$, а степень реактивности достигает значения $\rho_{\text{к}} = 1,84$. Переход к отрицательной закрутке перед колесом ведёт к дальнейшему увеличению степени реактивности рабочего колеса, уменьшению угла поворота потока в рабочем колесе и увеличению числа M на выходе из колеса.

Следует отметить, что при большой отрицательной закрутке на входе имеют место малые углы поворота потока в колесе. Так, при закрутке $\lambda_{1\text{в}} = -1$ поворот потока в колесе составляет всего $\Delta\beta = 3^\circ 30'$.

Таким образом, в случае идеальной ступени можно при различных значениях параметров потока в характерных сечениях получать одну и ту же величину коэффициента работы и неизменную степень уменьшения полного давления в турбине

$$\pi_{0\text{ид}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^{\frac{k}{k-1}} = (1 - K)^{\frac{k}{k-1}}.$$

В рассматриваемом примере

$$\pi_{0\text{ид}} = \left(\frac{P_{0\text{с}}}{P_{0\text{н}}} \right)_{\text{ид}} = 0,84^4 = 0,41.$$

В реальной ступени имеются потери, и необходимая степень понижения полного давления является функцией коэффициента изэнтропичности:

$$\pi_0 = m_{\text{ст}} \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^{\frac{k}{k-1}} = m_{\text{ст}} (1 - K)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Величина $m_{\text{ст}}$ учитывает потери в венцах входного направляющего аппарата, рабочего колеса и спрямляющего аппарата:

$$m_{\text{ст}} = \sigma_1 m_{\text{к}} \sigma_2,$$

которые в каждом из указанных венцов зависят от угла поворота потока и коэффициента скорости на входе и выходе из венца.

При некотором сочетании параметров потока в характерных сечениях суммарные потери минимальны, т. е. коэффициент изэнтропичности ступени $m_{\text{ст}}$ и адиабатический коэффициент полезного действия достигают максимального значения, соответствующая схема ступени является оптимальной. Располагая зависимостью потерь от угла поворота в решётке, можно найти зависимость адиабатического коэффициента полезного действия от закрутки потока на выходе и таким образом определить оптимальные параметры ступени для заданных безразмерных значений работы и окружной скорости.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением ступеней с меридиональным выходом потока из рабочего колеса ($c_{2u} = 0$).

Выгодность таких ступеней обусловлена отсутствием спрямляющего аппарата, диффузорные потери в котором могут быть особенно велики по сравнению с потерями в конфузорных венцах рабочего колеса и соплового аппарата. В этом случае согласно (97) имеем:

$$\lambda_{1u} = \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{K}{u_1^*}, \quad (105)$$

т. е. при заданном значении безразмерной работы закрутка потока однозначно определяется безразмерной окружной скоростью, что позволяет выразить параметры потока в характерных сечениях ступени в зависимости от безразмерных значений окружной скорости и работы.

Угол выхода потока из направляющего аппарата равен:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\lambda_{1a}}{\lambda_{1u}} = \frac{2(k-1)}{k+1} \frac{u_1^* \lambda_{1a}}{K}, \quad (106)$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{2}{K} U_1^* \lambda_{1a}.$$

Выразим теперь угол входа потока на лопатки рабочего колеса:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\lambda_{1a}}{\lambda_{1u} - u_1^*} = \frac{u_1^* \lambda_{1a}}{\frac{k+1}{2(k-1)} K - u_1^{*2}}. \quad (107)$$

Выразим отношение температур торможения в относительном и абсолютном движениях согласно (2) и (105):

$$\frac{T_{01w}}{T_{01}} = \gamma_1^2 = 1 + \frac{k-1}{k+1} u_1^{*2} - K, \quad (108)$$

или

$$\frac{T_{01w}}{T_{01}} = 1 + U_1^{*2} - K.$$

Из (3) и (108) получим следующее выражение для коэффициента относительной скорости при входе в колесо:

$$\lambda_{1w}^2 = \frac{\lambda_1^2 + u_1^{*2} - \frac{k+1}{k-1} K}{1 + \frac{k-1}{k+1} u_1^{*2} - K};$$

так как

$$\lambda_1^2 = \lambda_{1u}^2 + \lambda_{1a}^2 = \frac{(k+1)^2}{4(k-1)^2} \cdot \frac{K^2}{u_1^{*2}} + \lambda_{1a}^2,$$

то

$$\lambda_{1w}^2 = \frac{k+1}{k-1} \frac{u_1^{*4} - \frac{k+1}{k-1} K u_1^{*2} + \frac{1}{4} \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 K^2 + \lambda_{1a}^2 u_1^{*2}}{u_1^{*4} + \frac{k+1}{k-1} (1-K) u_1^{*2}} \quad (109)$$

или

$$\Lambda_{1w}^2 = \frac{U_1^{*4} - K U_1^{*2} + \frac{1}{4} K^2 + \Lambda_{1a}^2 U_1^{*2}}{U_1^{*4} + (1-K) U_1^{*2}}. \quad (110)$$

Угол выхода из колеса

$$\operatorname{tg} \beta_2 = -\frac{c_{2a}}{u_2} = -\frac{\lambda_{2a}}{\frac{u_2}{a_{2\text{кр}}}}.$$

В случае постоянства среднего радиуса ($r_2 = r_1$) и равенства осевых скоростей находим: $\operatorname{tg} \beta_2 = -\frac{\lambda_{1a}}{u_1^*}$. Соотношение между температурой торможения в относительном и абсолютном движениях на выходе из рабочего колеса согласно (3) при $c_{2u} = 0$ имеет следующий вид:

$$\frac{T_{02w}}{T_{02}} = 1 + \frac{k-1}{k+1} \frac{u_2^2}{a_{2\text{кр}}^2} = 1 + \frac{k-1}{k+1} \frac{u_2^2}{a_{1\text{кр}}^2} \frac{a_{1\text{кр}}^2}{a_{2\text{кр}}^2}.$$

Заменяя отношение квадратов критических скоростей отношением соответственных температур торможения получаем:

$$\frac{T_{02w}}{T_{02}} = v_2^2 = 1 + \frac{k-1}{k+1} \frac{u_2^2}{a_{1\text{кр}}^2} \frac{1}{1-K} \frac{u_2^2}{a_{1\text{кр}}^2}, \quad (111)$$

или

$$v_2^2 = 1 + \frac{u_2^2}{c_{1\text{max}}^2} \frac{1}{1-K},$$

где

$$\frac{u_2}{a_{1\text{кр}}} = \frac{r_2}{r_1} U_1^* \quad \text{и} \quad \frac{u_2}{c_{1\text{max}}} = \frac{r_2}{r_1} U_1^*.$$

Вычислим относительную скорость на выходе из колеса

$$\omega_2^2 = c_{2a}^2 + u_2^2$$

с учётом (111); приходим к следующему выражению для коэффициента относительной скорости:

$$\lambda_{2w}^2 = \frac{\lambda_{2a}^2 + \frac{u_2^2}{(1-K) a_{1\text{кр}}^2}}{1 + \frac{k-1}{k+1} \frac{u_2^2}{(1-K) a_{1\text{кр}}^2}},$$

или

$$\lambda_{2w}^2 = \frac{k+1}{k-1} \frac{u_2^{*2} + \lambda_{2a}^2}{u_2^{*2} + \frac{k+1}{k-1}}.$$

С изменением окружной скорости при заданном значении коэффициента работы изменяется степень реактивности рабочего колеса (см. § 6):

$$\rho_K = 1 - \frac{c_1^2 - c_2^2}{2gL}.$$

В рассматриваемом случае меридионального выхода из колеса

$$\rho_K = 1 - \frac{c_{1u}^2 + c_{1a}^2 - c_{2a}^2}{2gL}.$$

Последнее равенство можно записать и в безразмерных величинах:

$$\rho_K = 1 - \frac{\lambda_{1u}^2 + \lambda_{1a}^2 - \lambda_{2a}^2 \frac{T_{02}}{T_{01}}}{\frac{k+1}{k-1} \left(1 - \frac{T_{02}}{T_{01}}\right)}.$$

При равенстве осевых скоростей до и после рабочего колеса выражение степени реактивности упрощается:

$$\rho_K = 1 - \frac{\lambda_{1u}^2}{\frac{k+1}{k-1} K},$$

или согласно (105):

$$\rho_K = 1 - \frac{1}{4} \frac{k+1}{k-1} \frac{K}{u_1^{*2}}.$$

В случае равенства осевых составляющих скоростей, задаваясь значением безразмерной работы и степенью реактивности рабочего колеса, находим из последнего выражения необходимое значение безразмерной окружной скорости

$$u_1^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \sqrt{\frac{K}{1-\rho_K}} \quad \text{или} \quad U_1^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K}{1-\rho_K}} \quad (112)$$

и из приведенных выше формул — параметры потока в характерных сечениях. Так, например, при нулевом значении степени реактивности (активное рабочее колесо) имеем безразмерную окружную скорость

$$u_1^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \sqrt{K}$$

или

$$U_1^* = \frac{1}{2} \sqrt{K}$$

и коэффициент закрутки потока

$$\lambda_{1u} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \sqrt{K}.$$

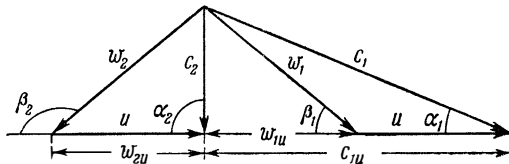
Из этого выражения получается следующее значение относительной закрутки потока в сопловом аппарате:

$$c_{1u} = \frac{c_{1u}}{u_1} = \frac{\lambda_{1u}}{u_1^*} = 2,$$

или часто употребляемая в турбостроении величина

$$x = \frac{u_1}{c_1} = \frac{\cos \alpha_1}{2}.$$

Последнее соотношение может быть получено и непосредственно из треугольника скорости активного рабочего колеса при постоянстве осевых скоростей (фиг. 320).



Фиг. 320. Треугольник скорости активного рабочего колеса при равенстве осевых скоростей на входе и выходе и осевом выходе потока из колеса.

Подставляя значение окружной скорости (112) в уравнения (106), (107) и (108), получаем следующие выражения для угла выхода α_1 потока из направляющего аппарата:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \frac{\lambda_{1a}}{\sqrt{K(1-\rho_K)}} = \frac{\lambda_{1a}}{\sqrt{K(1-\rho_K)}},$$

угла входа потока на лопатки рабочего колеса:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\lambda_{1a}}{\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \sqrt{K}} \frac{\sqrt{1-\rho_K}}{0,5-\rho_K},$$

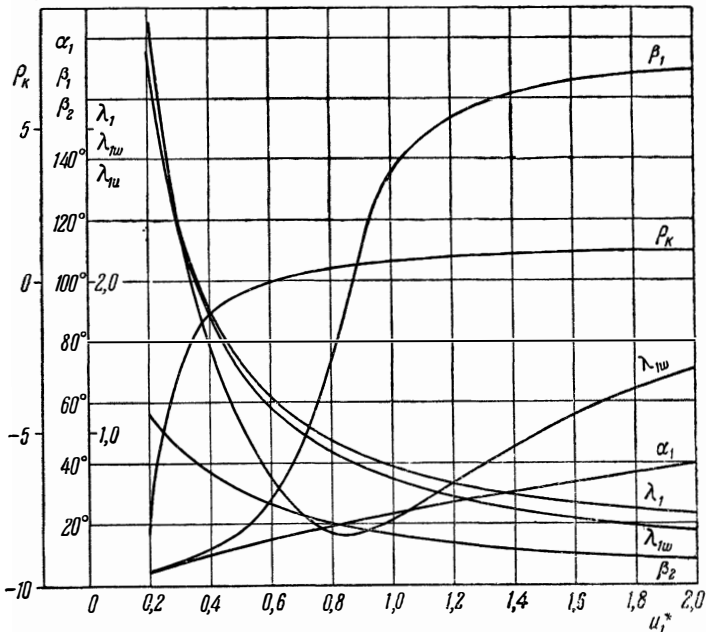
отношения температур торможения в относительном и абсолютном движениях (при $k=1,4$):

$$\frac{T_{01w}}{T_{01}} = \gamma_1^2 = 1 - \frac{0,75-\rho_K}{1-\rho_K} K.$$

Если степень реактивности рабочего колеса ρ_K не является заданной, то величина коэффициента закрутки потока в сопловом аппарате или безразмерная окружная скорость должна выбираться так, чтобы потери в двух венцах, составляющих рассма-

триваемую ступень, были бы минимальны. С этой целью следует варьировать, например, окружную скорость, определить значения параметров потока в характерных сечениях ступени.

На фиг. 321 представлены результаты такого расчёта для рассмотренного уже выше примера ($K = 0,2$, $k = \frac{4}{3}$). Располагая углом поворота потока в сопловом аппарате и величиной коэффициента скорости на выходе из него λ_1 , можно по опытным величинам φ определить согласно формуле (2) главы VII коэффициент полного давления в сопловом аппарате.



Фиг. 321. Зависимость параметров потока на входе и выходе из колеса турбины от безразмерной окружной скорости u_1^* при осевом выходе потока из рабочего колеса и равенстве осевых скоростей на входе и выходе из колеса ($K = 0,2$, $\frac{r_2}{r_1} = 1$).

По величине же угла поворота потока в рабочем колесе и значениям коэффициента относительной скорости при входе и выходе из колеса можно, пользуясь экспериментальными кривыми ψ , найти коэффициент изоэнтропичности колеса m_k .

Располагая величиной коэффициента изоэнтропичности ступени

$$m_{ст} = \sigma_1 m_k,$$

определяем значение адиабатического коэффициента полезного действия в зависимости от окружной скорости и находим оптимальное значение безразмерной окружной скорости, соответствующее максимальному значению адиабатического коэффициента полезного действия.

Следует отметить, что коэффициенты скоростей газа в характерных сечениях ступени турбины в отличие от ступени компрессора определяются безразмерной работой колеса, т. е. не зависят от потерь в венцах. Согласно (95) с ростом окружной скорости необходимая закрутка потока на входе в рабочее колесо падает и, следовательно, потери в сопловом аппарате уменьшаются; это связано с уменьшением коэффициента относительной скорости и угла поворота потока в рабочем колесе.

При некотором значении окружной скорости коэффициент относительной скорости λ_{1w} достигает минимального значения.

Для определения последнего приравняем нулю производную выражения (109) по u_1^* , или, что то же, выражения (110) по U_1^* , получим следующее уравнение:

$$U_1^{*4} - \frac{K^2}{2(1-\Lambda_{1a}^2)} U_1^{*2} - \frac{K^2(1-K)}{4(1-\Lambda_{1a}^2)} = 0,$$

из которого выводится следующая зависимость безразмерной окружной скорости от безразмерной работы и коэффициента осевой скорости при входе в колесо:

$$U_1^{*2} = \frac{K}{4(1-\Lambda_{1a}^2)} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4(1-K)(1-\Lambda_{1a}^2)}{K^2}} \right]. \quad (113)$$

Подставляя это значение окружной скорости в (109), находим минимальное значение коэффициента относительной скорости.

Следует отметить, что минимум относительной скорости ω_1 не совпадает с минимумом коэффициента относительной скорости λ_{1w} , так как последний зависит не только от величины ω_1 , но и от значения температуры торможения в относительном движении, определяемого по выражению (111).

Минимальное значение относительной скорости получается в случае меридионального входа потока в относительном движении в рабочее колесо, т. е. при выполнении равенств

$$c_{1u} = u_1 \quad (114)$$

или

$$\lambda_{1u} = u_1^*.$$

Подставляя последнее равенство в (97), получаем следующее выражение для коэффициента закрутки и безразмерной окруж-

ной скорости, соответствующих минимуму относительной скорости на входе в колесо:

$$\lambda_{1u} = u_1^* = \sqrt{\frac{k-1}{k-1}} \sqrt{\frac{K}{2}},$$

или

$$\Lambda_{1u} = U_1^* = \sqrt{\frac{K}{2}}.$$

Подставляя значение закрутки (114) в выражение степени реактивности для случая $c_{1a} = c_{2a}$; $c_{2u} = 0$; $r_2 = r_1$, имеем:

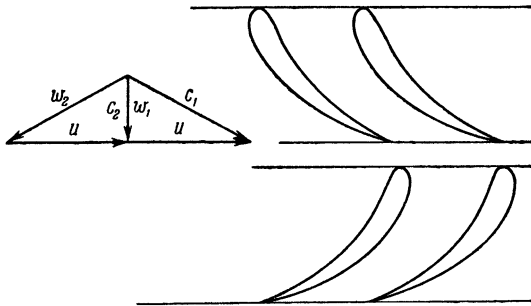
$$\rho_K = 1 - \frac{c_{1u}^2}{2\zeta L} = 1 - \frac{c_{1u}}{2u_1} = 0,5.$$

Таким образом, минимум относительной скорости соответствует половинной степени реактивности, которая имеет место при

$$c_1 = \omega_2,$$

$$\omega_1 = c_2,$$

т. е. при равенстве треугольников скорости соплового аппарата и рабочего колеса. Последнее означает, что решётка рабочего



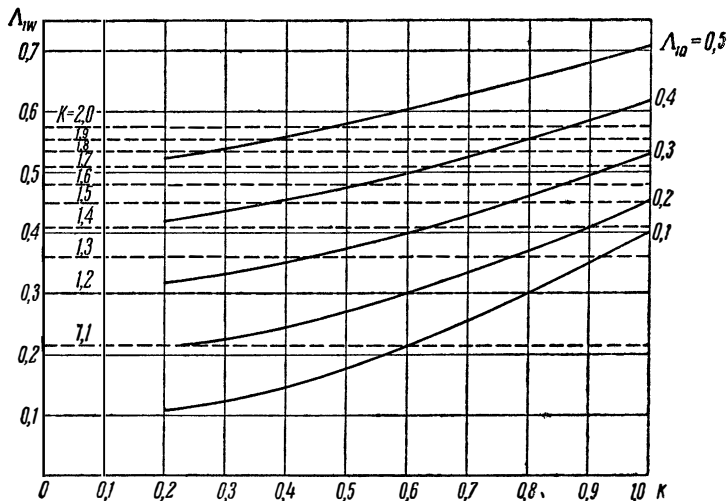
Фиг. 322. Решётка соплового аппарата и рабочего колеса элементарной ступени турбины при значении степени реактивности $\rho_K = 0,5$ (при постоянстве осевых скоростей и для $\frac{r_2}{r_1} = 1$).

колеса является зеркальным отображением решётки соплового аппарата относительно оси машины (фиг. 322).

Располагая значением безразмерной окружной скорости U_1^* (113), при котором для заданных безразмерной работы K и безразмерной осевой скорости на входе в колесо Λ_{1a} безразмерная

относительная скорость Λ_{1w} достигает минимума, можно построить кривые, приведённые на фиг. 323. По оси абсцисс отложены значения K , а по оси ординат — минимальная величина коэффициента относительной скорости при входе в колесо Λ_{1a} для разных значений Λ_{1a} .

На этом же графике нанесены линии постоянных значений $\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}$ для различных величин $k = \frac{c_p}{c_v}$. Начиная с некоторого значения K , зависящего от величины осевой скорости, мини-



Фиг. 323. Зависимость максимального значения $\Lambda_{1w} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \lambda_{01w}$ от безразмерной работы K для различных значений коэффициента осевой скорости $\Lambda_{1a} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \lambda_{1a}$. Пунктиром нанесены величины $\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}$, соответствующие числу $M_{1w} = 1$ для различных значений $k = \frac{c_p}{c_v}$.

мальное значение Λ_{1w} превосходит величину $\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}$, т. е. коэффициент относительной скорости Λ_{1w} больше единицы.

Величину K , при которой минимальное значение коэффициента относительной скорости равно единице

$$(\Lambda_{1w})_{\min} = 1,$$

назовём *критической безразмерной работой*.

Элементарные ступени турбины, имеющие меридиональный выход потока из рабочего колеса, можно подразделить на ступени с докритическим и закритическим значениями безразмерной работы.

В первом случае принципиально возможен дозвуковой вход потока на лопатки рабочего колеса в относительном движении, во втором случае такая возможность отсутствует.

Получение минимального значения коэффициента относительной скорости λ_{1w} связано с необходимостью иметь достаточно большую окружную скорость лопаток рабочего колеса. На фиг. 324 представлена зависимость безразмерной окружной скорости $U_1^* = \frac{u_1}{c_{1 \max}}$, соответствующей этому условию, от безразмерной работы

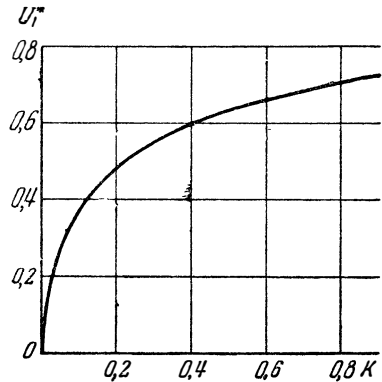
$$K = \frac{L}{c_p T_{01}}$$

при $\lambda_{1a} = 0,2$.

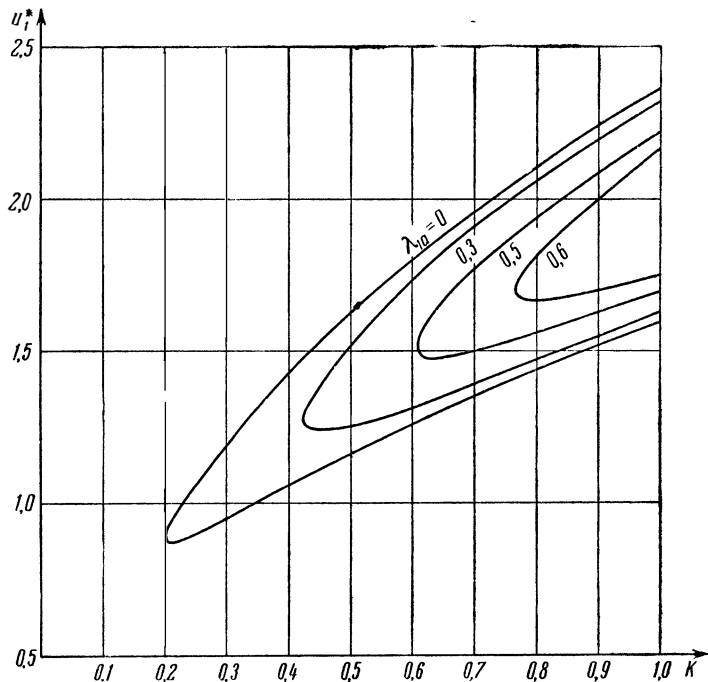
Полагая в выражении (109) $\lambda_{1w} = 1$, находим необходимые значения окружной скорости.

Соответствующие кривые, рассчитанные для $k = \frac{4}{3}$, при различных значениях коэффициента осевой скорости λ_{1a} представлены на фиг. 325.

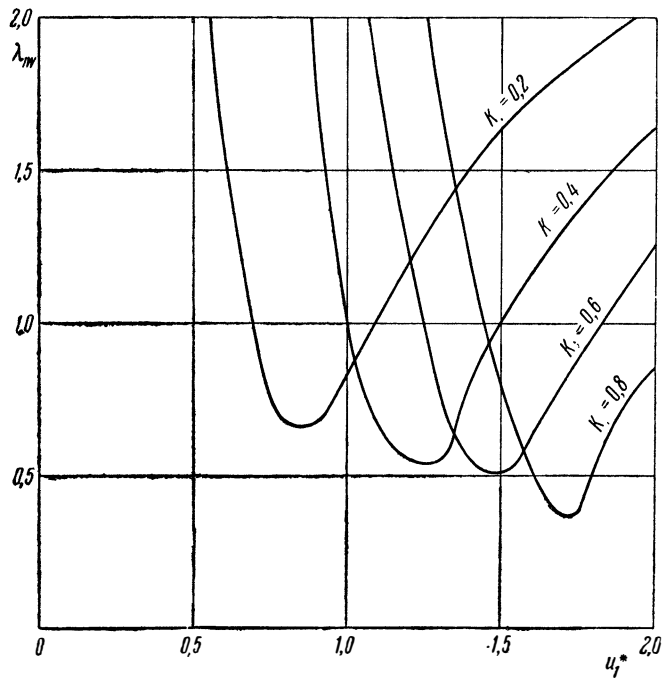
Если окружная скорость меньше, чем требуется по фиг. 325, то неизбежно появление сверхзвуковой относительной скорости на входе. Это иллюстрируется представленными на фиг. 326 кривыми зависимости коэффициента относительной скорости от безразмерной окружной скорости для различных значений безразмерной работы при $\lambda_{1a} = 0,3$ и $k = \frac{4}{3}$. Таким образом, как и в элементарной ступени компрессора, невозможность осуществления достаточно больших окружных скоростей приводит к сверхзвуковым скоростям потока на входе в лопаточные венцы. Разница в этом смысле между элементарными ступенями компрессора и турбины заключается в том, что в компрессоре при меридиональном входе и недостаточной окружной скорости на выходных кромках из рабочего колеса сверхзвуковая скорость возникает на входе в спрямляющий аппарат, в турбине же с меридиональным выходом потока из колеса при недостаточной окружной



Фиг. 324. Зависимость безразмерной окружной скорости u_1^* от безразмерной работы K при $\lambda_{1a} = 0,2$ и $M_{1w} = 1$.



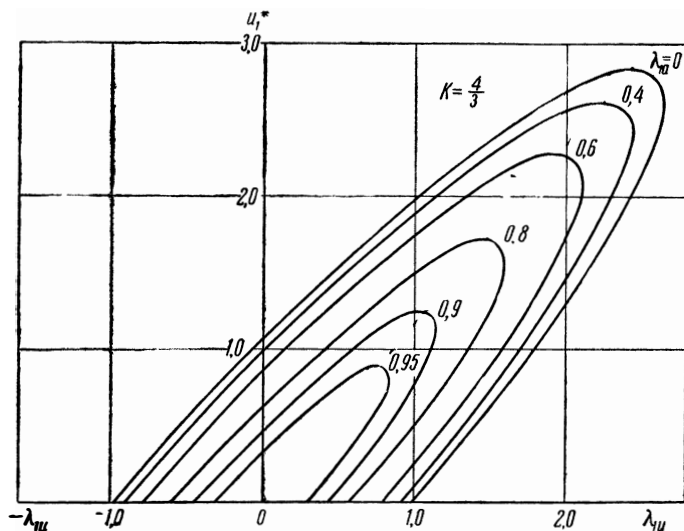
Фиг. 325. Зависимость безразмерной окружной скорости u_1^* от безразмерной работы K при $\lambda_{1w}=1$ для различных значений осевой скорости ($k = \frac{4}{3}$).



Фиг. 326. Зависимость λ_{1w} от u_1^* для различных значений K при $k = \frac{4}{3}$ и $\lambda_{1a} = 0,3$.

скорости входных кромок рабочего колеса сверхзвуковая скорость возникает на входе в рабочее колесо.

Если отказаться от меридионального выхода потока из рабочего колеса, то при любой заданной окружной скорости путём подбора соответствующей закрутки потока в сопловом аппарате можно обеспечить дозвуковой вход потока на лопатки рабочего колеса.



Фиг. 327. Связь между коэффициентом закрутки потока на входе в колесо и коэффициентами окружной и осевой скоростей при $\lambda_{1w}=1$ для $k=1,4$.

Для определения максимально возможной закрутки потока при условии дозвукового входа обратимся к выражению (73) и, полагая в нём значение коэффициента относительной скорости $\lambda_{1w}=1$, получим следующее квадратное уравнение:

$$\lambda_{1u}^2 + 2 \frac{k-1}{k+1} u_1^* \lambda_{1u} - 2u_1^* \lambda_{1a} + \lambda_{1a}^2 + u_1^{*2} - \frac{k-1}{k+1} u_1^{*2} - 1 = 0,$$

решая которое, находим:

$$\lambda_{1u} = \frac{2}{k+1} u_1^* \pm \sqrt{(1 - \lambda_{1a}^2) - \frac{2(k-1)}{(k+1)^2} u_1^{*2}}. \quad (115)$$

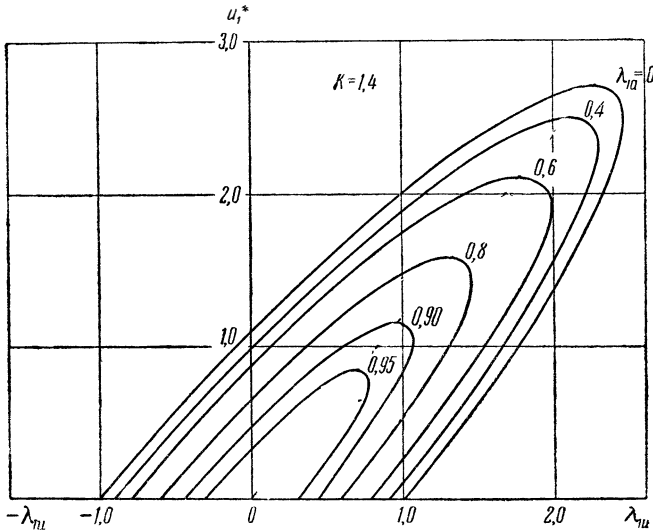
Зависимость безразмерной окружной скорости от величины λ_{1u} для разных значений коэффициента осевой скорости при $\lambda_{1w}=1$ представлена на фиг. 327 для $k=\frac{4}{3}$ и на фиг. 328 для $k=1,4$.

Определив по выражению (115) максимальную закрутку потока в сопловом аппарате, при которой для заданной безразмерной

окружной скорости входных кромок рабочего колеса осуществляется дозвуковой вход, определяем из уравнения (95) величину закрутки потока на выходе из колеса, необходимую для получения заданной безразмерной работы при заданной степени радиальности:

$$\frac{r_2}{r_1} \lambda_{2u} = \frac{\lambda_{1u}}{\sqrt{1-K}} - \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{K}{u_1^* \sqrt{1-K}}.$$

Следует отметить, что при малой безразмерной окружной скорости u_1^* и при значительной безразмерной работе необходимая величина λ_{2u} может оказаться столь большой, что скорость



Фиг. 328. Связь между коэффициентом закрутки на входе в колесо и коэффициентами окружной и осевой скоростей

$$\text{при } \lambda_{1w} = 1 \text{ для } k = \frac{4}{3}.$$

на выходе из колеса станет сверхзвуковой, и тогда, избавившись от сверхзвуковой скорости на входе в колесо, мы получим сверхзвуковую скорость на входе в спрямляющий аппарат.

Перейдём к рассмотрению одноступенчатой турбины, в которой не используется энергия выходящего газового потока. При расчёте такой ступени задаются параметрами потока на входе и статическим давлением или термодинамической температурой на выходном срезе турбины. Подлежат определению параметры в характерных сечениях элементарной ступени, обеспечивающие получение максимального значения безразмерной работы K .

Ограничимся только случаем идеальной ступени. В § 6 уже указывалось, что максимальное значение безразмерной работы

в этом случае получается при полном торможении потока на выходном срезе турбины

$$K_{\max} = 1 - \left(\frac{P_c}{P_{\text{он}}} \right)^{\frac{k-1}{k}} = 1 - \frac{T_c}{T_{\text{он}}}.$$

При неполном торможении потока работа уменьшается:

$$K = 1 - \frac{T_{\text{ос}}}{T_{\text{он}}} = 1 - \frac{T_c}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_c^2 \right) T_{\text{он}}} = 1 - \left(\frac{P_c}{P_{\text{он}}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \frac{1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_c^2};$$

здесь λ_c — коэффициент скорости на срезе турбины. В обычной ступени, состоящей из соплового аппарата и рабочего колеса (без спрямляющего аппарата), безразмерная работа зависит от закрутки потока на выходе из рабочего колеса, которая увеличивает выходную скорость, что ведёт к росту доли неиспользуемой энергии потока.

Очевидно, максимальная работа получается в этом случае при меридиональном выходе потока из рабочего колеса. Предполагая постоянство меридиональных составляющих скорости до и после рабочего колеса, имеем:

$$\lambda_{2a} = \lambda_{ca} = \lambda_{1a} \left(\frac{T_{\text{он}}}{T_{\text{ос}}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (116)$$

С другой стороны, в случае меридионального выхода из колеса

$$\frac{T_c}{T_{\text{ос}}} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{ca}^2,$$

откуда на основании (116) получаем:

$$\frac{T_{\text{ос}}}{T_{\text{он}}} = \frac{T_c}{T_{\text{он}}} + \frac{k-1}{k+1} \lambda_{1a}^2;$$

при постоянстве осевой скорости это приводит к следующему выражению для максимальной безразмерной работы, соответствующей осевому выходу потока из колеса:

$$K = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{1a}^2 - \frac{T_c}{T_{\text{он}}}. \quad (117)$$

Закрутка потока на входе при $\lambda_{2u} = 0$ определяется в зависимости от окружной скорости согласно (96):

$$\lambda_{1u} u_1^* = \frac{1}{2} \frac{k+1}{k-1} K.$$

Подставляя в последнее выражение равенство (117), получим:

$$\lambda_{1u} u_1^* = \frac{1}{2} \left[\frac{k+1}{k-1} \left(1 - \frac{T_c}{T_{\text{OH}}} \right) - \lambda_{1a}^2 \right].$$

Для заданной степени реактивности колеса согласно (112) имеем:

$$u_1^* = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\frac{k+1}{k-1} \left(1 - \frac{T_c}{T_{\text{OH}}} \right) - \lambda_{1a}^2}}{\sqrt{1 - \rho_R}},$$

$$\lambda_{1u} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1} \left(1 - \frac{T_c}{T_{\text{OH}}} \right) - \lambda_{1a}^2} \sqrt{1 - \rho_R}.$$

Поделив одно из этих равенств на другое, получаем зависимость оптимального отношения окружной скорости к закрутке потока от степени реактивности рабочего колеса:

$$\frac{u_1^*}{\lambda_{1u}} = \frac{u}{c_{1u}} = \frac{1}{2(1 - \rho_R)}.$$

Обычно в турбиностроении окружную скорость относят к скорости c_1 ; в таком случае имеем:

$$\frac{u}{c_1} = x = \frac{\cos \alpha_1}{2(1 - \rho_R)}.$$

При степени реактивности $\rho_R = 0,5$ получаем:

$$\frac{u}{c_1} = \cos \alpha_1.$$

При активном колесе ($\rho_R = 0$):

$$\frac{u}{c_1} = \frac{1}{2} \cos \alpha_1.$$

При наличии выходного спрямляющего аппарата скорость на срезе имеет меридиональное направление, и следовательно, независимо от соблюдения приведённых соотношений в идеальной ступени получается максимальное значение безразмерной работы.

Однако в реальной ступени установка выходного спрямляющего аппарата, течение в котором имеет диффузорный характер, приводит к существенному увеличению потерь, а следовательно, и к уменьшению работы отводимой турбиной от газового потока.

§ 9. Профилирование элементарного венца

Задача профилирования элементарной ступени лопаточной машины состоит в том, чтобы подобрать такую форму проточной части, которая обеспечивает получение заданных параметров потока (например, степени увеличения полного давления в компрессоре

или степени уменьшения температуры торможения в турбине) при определённом значении коэффициента полезного действия, т. е. при известных потерях в элементах ступени. Эти условия должны быть выполнены при выбранных значениях расхода газа и окружной скорости рабочего колеса.

Для построения характеристики ступени важно решить и вторую основную задачу: по заданной форме элементарного венца и известным значениям параметров потока на входе в него определить параметры потока на выходе и потери в венце.

Первую задачу называют обратной, а вторую — прямой задачей аэродинамики.

Элементарная ступень состоит из лопаточных элементарных венцов и безлопаточных направляющих аппаратов. Очертания элементарного лопаточного венца определяются формой кольцевого канала, ограничивающего венец, и профилем, числом и взаимным расположением лопаток. Совокупность одинаковых элементарных лопаток, находящихся в кольцевом канале, называют элементарной кольцевой решёткой.

Кольцевой элементарный канал ограничен двумя поверхностями вращения, расположенными друг относительно друга на столь малом расстоянии, что изменением параметров потока при радиальном переходе от одной поверхности к другой можно пренебречь. Кольцевой элементарный канал полностью определяется формой меридионального сечения и его расположением относительно оси турбомшины. В дальнейшем кольцевой канал мы будем задавать формой средней поверхности, т. е. поверхности вращения, образованной средней линией меридионального сечения канала и текущей высотой последнего — Δn , отсчитываемой по нормали к средней поверхности.

В свою очередь кольцевая решётка определяется шагом решётки, профилем и установочным углом лопатки. Под профилем лопатки понимается фигура, которая получается при рассечении элементарной лопатки средней поверхностью кольцевого канала.

Профиль лопатки в кольцевой решётке характеризуется теми же геометрическими параметрами, как и крыловой профиль в прямой решётке: средней дужкой (средней линией) профиля, т. е. геометрическим местом точек, равно удалённых от противоположных сторон профиля; максимальной относительной кривизной дужки \bar{f} и её расположением; максимальной относительной толщиной профиля \bar{c} и её положением; углом изгиба профиля θ , т. е. углом между касательными к средней линии, проведёнными в носике и задней точке профиля; хордой профиля, т. е. отрезком прямой, соединяющим крайние точки средней линии профиля; установочным углом (между прямолинейной хордой профиля и осью u).

Кроме этого, иногда удобно пользоваться так называемой криволинейной хордой b_k , под которой понимается отрезок кривой наименьшей длины, лежащей на средней поверхности профиля и соединяющей крайние точки средней линии профиля.

Взаимное расположение профилей определяется расстоянием между сходственными точками двух соседних профилей, отсчитываемым по дуге круга с центром на оси венца. Шаг t кольцевой решётки определяется отношением

$$t = \frac{2\pi r}{z},$$

где z — число лопаток, r — соответственный радиус элементарного венца.

При входе в венец

$$t_1 = \frac{2\pi r_1}{z},$$

следовательно,

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Под средним шагом кольцевой решётки понимают величину шага на среднем радиусе кольцевого канала:

$$t_{\text{ср}} = \frac{\pi(r_1 + r_2)}{z}.$$

Отношение криволинейной хорды к среднему шагу называется густотой кольцевой решётки:

$$\tau = \frac{b_k}{t_{\text{ср}}} = \frac{b_k}{\pi(r_1 + r_2)} z.$$

Понимая под относительной криволинейной хордой \bar{b}_k величину

$$\bar{b}_k = \frac{b_k}{2\pi r_1},$$

получим:

$$\tau = \frac{b_k}{t_{\text{ср}}} = \frac{\bar{b}_k}{1 + \frac{r_2}{r_1}} z.$$

Рассмотрим течение газа через неподвижные входные и выходные аппараты ступени. Пусть входное сечение аппарата обозначено $1-1$, а выходное сечение $2-2$. Неподвижные аппараты ступени разделяются на лопаточные и безлопаточные. Остановимся сначала на безлопаточном аппарате, т. е. элементарном

кольцевом канале. Уравнение неразрывности в таком аппарате имеет следующий вид:

$$c_{1m} \gamma_1 \Delta F_{1m} = c_m \gamma \Delta F_m;$$

здесь ΔF_m — площадь поперечного сечения кольцевого канала, нормального к направлению меридиональной составляющей скорости.

Обозначая через Δn расстояние между поверхностями вращения, ограничивающими кольцевой канал, отсчитываемое по нормали к средней поверхности канала, имеем:

$$\Delta F_m = 2\pi r \Delta n,$$

отсюда

$$c_{1m} \gamma_1 = c_m \gamma \Delta \bar{n} \bar{r}$$

или

$$c_1 \gamma_1 \sin \alpha_1 = c \gamma \sin \alpha \Delta \bar{n} \bar{r},$$

где $\bar{r} = \frac{r}{r_1}$ — относительный радиус средней линии меридионального сечения, $\Delta \bar{n} = \frac{\Delta n}{\Delta n_1}$ — относительная высота канала.

Уравнение неразрывности можно записать в обычном безразмерном виде

$$q(\lambda_1) \sin \alpha_1 = \sigma q(\lambda) \sin \alpha \Delta \bar{n} \bar{r} \quad (118)$$

или

$$q_x(\lambda_1) = \sigma \Delta \bar{n} \bar{r} q_x(\lambda),$$

где $\sigma = p_0 / p_{01}$ характеризует потери на участке кольцевого канала от входа до текущего сечения. Вторым уравнением, определяющим течение газа в безлопаточном кольцевом канале, если пренебречь силой трения, является условие постоянства моментов количества движения

$$c_u r - c_{1u} r_1 = 0,$$

которое можно записать и так:

$$c_u = \frac{c_{1u}}{\bar{r}},$$

или

$$\lambda_u = \frac{\lambda_{1u}}{\bar{r}},$$

откуда

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{\lambda_u^2}{\lambda^2}} = \sqrt{1 - \frac{\lambda_{1u}^2}{\lambda^2 \bar{r}^2}}.$$

Подставляя последнее выражение в уравнение неразрывности (118), получим следующую зависимость между коэффициентом полной скорости λ и геометрическими параметрами кольцевого канала:

$$q_a(\lambda_1) = \Delta \bar{n} \bar{r} q(\lambda) \sigma \sqrt{1 - \frac{\lambda_{1u}^2}{\lambda^2 r^2}}. \quad (119)$$

Заменяя в этом уравнении $q(\lambda)$ с помощью выражения (106) главы V, приходим к развёрнутому виду уравнения движения в кольцевом канале:

$$\lambda_{1m} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2\right)^{\frac{1}{k-1}} = \sigma \Delta \bar{n} \sqrt{\lambda^2 \bar{r}^2 - \lambda_{1u}^2} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}},$$

или

$$\lambda_{1m} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2\right)^{\frac{1}{k-1}} = \sigma \Delta \bar{n} \bar{r} \lambda_m \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (120)$$

Если поток при входе в канал не имеет закрутки ($\lambda_{1u} = 0$), то зависимость (119) упрощается:

$$q(\lambda_1) = \sigma \Delta \bar{n} \bar{r} q(\lambda),$$

или

$$\lambda_1 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2\right)^{\frac{1}{k-1}} = \sigma \Delta \bar{n} \bar{r} \lambda \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Задавая желаемую закономерность изменения коэффициента скорости вдоль линии тока $\lambda(S)$ и форму средней линии меридионального сечения кольцевого канала, можно определить удовлетворяющий этим условиям закон изменения относительной ширины кольцевого канала $\Delta \bar{n}$. Решение существенно упрощается, если задаться распределением не полной, а меридиональной составляющей скорости.

В качестве примера рассмотрим течение в кольцевом элементарном канале с постоянной величиной меридиональной составляющей скорости:

$$c_m = c_{1m} = \text{const},$$

т. е.

$$\lambda_m = \lambda_{1m} = \text{const}.$$

Согласно (120) имеем следующее выражение для относительной ширины кольцевого элементарного канала при постоянстве коэффициента меридиональной составляющей скорости λ_m и заданной

величине закрутки потока на входе в канал (λ_{1u}):

$$\Delta \bar{n} = \frac{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_m^2 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{1u}^2\right)^{\frac{1}{k-1}}}{\bar{\sigma} r \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_m^2 - \frac{k-1}{k+1} \frac{\lambda_{1u}^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}}.$$

Основной недостаток безлопаточных кольцевых каналов в машинах с положительным коэффициентом радиальности ($r_2/r_1 > 1$) состоит в том, что получение необходимой закрутки потока всегда связано с более или менее значительным радиальным перетеканием газа; это приводит к большим радиальным размерам. Кроме того, получение любой заданной закрутки в безлопаточном аппарате возможно только в том случае, если при входе в него уже имеется некоторая начальная закрутка.

Поэтому для закрутки потока более целесообразно пользоваться лопаточным направляющим аппаратом. При профилировании лопаточного венца мы считаем заданными форму меридионального сечения элементарного кольцевого канала и величины r_1 и r_2 , определяющие положения этого сечения относительно оси турбомшины. Таким образом, остаётся по заданным параметрам потока при входе и выходе из венца выбрать профиль лопатки, число лопаток и их взаимное расположение в венце.

Отметим, что задача построения кольцевой решётки, удовлетворяющей указанным условиям, т. е. дающей по заданным параметрам на входе в неё (коэффициенту скорости λ_1 и углам α_1 и ψ_1 между вектором скорости c_1 и направлениями осей u и a) определённые значения параметров при выходе λ_2 , α_2 и ψ_2 , не имеет однозначного решения.

Можно указать бесчисленное множество различных решёток, отличающихся густотой, кривизной, средней линией профиля, относительной толщиной профиля и углом атаки при входе, но дающих отклонения потока на один и тот же заданный угол.

Например, на фиг. 329 представлены прямолинейные решётки из различных теоретических профилей¹⁾ с относительной толщиной $\bar{c} = 0,1$, построенные по теории идеальной несжимаемой жидкости для одних и тех же значений входного ($\alpha_1 = 32^\circ 12'$) и выходного ($\alpha_2 = 52^\circ 39'$) углов.

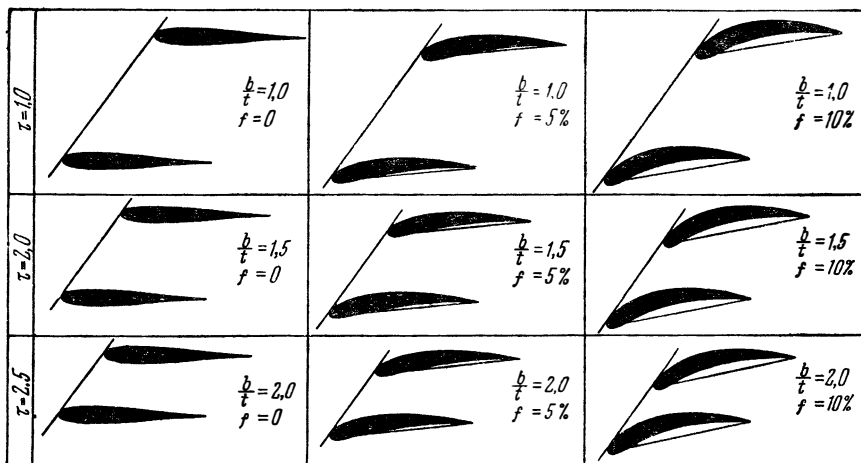
Естественно, что наложение различных ограничений суживает возможный диапазон решёток, удовлетворяющих заданному режиму. Эти ограничения могут быть конструктивного или гидравлического характера. К первым относятся, например, ограничения

¹⁾ Умнов Е. И., Потенциальное обтекание несжимаемой жидкостью решёток из теоретических профилей. М., Оборонгиз, 1952.

в относительной толщине профиля, осевых габаритах лопаточного венца и числе лопаток. Ко вторым относится, например, требование, чтобы потери в данном лопаточном венце не превосходили некоторой наперед заданной величины или даже были минимально возможными.

В результате большого числа экспериментальных исследований по плоским решёткам (конфузорным и диффузорным) получены данные, позволяющие удовлетворительно решать эту задачу при не очень больших дозвуковых скоростях набегающего потока.

Один из методов нахождения параметров оптимальной диффузорной плоской решётки был изложен в § 6 главы VIII.



Фиг. 329. Плоские решётки профилей с различной густотой, кривизной и установочным углом при одних и тех же значениях углов входа и выхода потока идеальной несжимаемой жидкости.

Отсутствие достаточных экспериментальных данных по кольцевым решёткам не даёт возможности в настоящее время создать соответствующий метод подбора параметров кольцевой решётки с произвольным меридиональным сечением кольцевого канала и в широком диапазоне чисел M потока, набегающего на лопаточный венец. Однако для качественного анализа обтекания неподвижного элементарного лопаточного венца можно применить приближённый метод, в котором вместо фактического двухмерного обтекания газом элементарной кольцевой решётки рассматривается одномерный поток газа в изолированном межлопаточном канале, образованном двумя соседними лопатками и двумя стенками (или поверхностями тока) кольцевого канала, что равносильно замене истинного межлопаточного канала прямолинейным (выпрямленным) плоским каналом постоянной высоты; длина и закон изме-

нения площади поперечного сечения по длине у исходного межлопаточного канала и эквивалентного плоского канала должны быть соответственно одни и те же.

Если кривизна межлопаточного канала не очень велика, то при равных значениях чисел M и R на входе в исходный и эквивалентный каналы гидравлические потери и распределение параметров газового потока по длине в обоих каналах приблизительно одинаковы. Безразмерная текущая ширина плоского канала равна безразмерной площади соответствующего поперечного сечения исходного канала

$$\frac{x}{x_1} = \frac{\Delta F}{\Delta F_1}$$

или

$$\bar{x} = \bar{f},$$

где x_1 и ΔF_1 — соответственно ширина плоского и площадь сечения исходного каналов в их начальных сечениях. В случае цилиндрического кольцевого канала безразмерные ширины обоих каналов — исходного и эквивалентного — одинаковы.

В зависимости от отношения значений коэффициентов скорости на входе λ_1 и выходе λ_2 все лопаточные венцы разделяются на конфузурные ($\lambda_2 > \lambda_1$), диффузорные ($\lambda_2 < \lambda_1$) и активные ($\lambda_2 = \lambda_1$).

Конфузорные венцы употребляются для входных направляющих аппаратов турбины и компрессора и для рабочих колёс турбины. Выходные лопаточные аппараты ступени компрессора и турбины и рабочее колесо компрессора имеют диффузорные венцы. Активный венец находит применение в рабочем колесе ступени активной турбины.

Степень конфузурности лопаточного венца характеризуется обычно отношением площадей поперечного сечения на входе и выходе: $\frac{\Delta F_1}{\Delta F_2}$. Обратная величина $\frac{\Delta F_2}{\Delta F_1}$ используется для оценки степени диффузорности венца.

Сводя течение в лопаточных каналах к прямолинейному одномерному, мы принципиально не можем учесть гидравлических потерь, связанных с поворотом потока в этих каналах.

Как показывают многочисленные эксперименты, в конфузурных каналах потери относительно невелики, и возможно осуществление весьма больших поджатий: например, в соплах аэродинамических труб осуществляется поджатие до 25 ($\Delta F_1 = 25 \cdot \Delta F_2$).

В диффузорных каналах потери могут быть очень значительными и получение заданного увеличения поперечного сечения канала без больших потерь возможно лишь при достаточной длине, т. е. малых углах расширения канала.

Как уже указывалось ранее (§ 1—2 гл. VII), такое большое различие между конфузорными и диффузорными каналами определяется влиянием пограничного слоя, свойства которого при положительном (диффузор) и отрицательном (конфузор) градиентах давления существенно различаются.

Осуществление диффузорных лопаточных венцов с достаточно малыми потерями является поэтому наиболее трудной задачей. Если заданы параметры потока при входе и выходе из венца, то известно отношение площадей при входе и выходе из канала.

Площадь при входе в межлопаточный канал

$$\Delta F_1 = \Delta n_1 t_1 \sin \alpha_1,$$

соответственно при выходе

$$\Delta F_2 = \Delta n_2 t_2 \sin \alpha_2,$$

следовательно, отношение площадей

$$\frac{\Delta F_2}{\Delta F_1} = \frac{\Delta n_2 r_2 \sin \alpha_2}{\Delta n_1 r_1 \sin \alpha_1}.$$

При расчёте диффузорного лопаточного венца всегда задаётся необходимая степень расширения эквивалентного диффузора.

Исследование плоских диффузоров с прямолинейной осью при малых дозвуковых скоростях потока показывает, что потери при заданном значении $\frac{\Delta F_2}{\Delta F_1}$ зависят как от длины диффузора, так и от формы боковых стенок¹⁾.

Степень расширения и длина диффузора определяют средний угол раскрытия диффузора α , образованный отрезками прямых соединяющих крайние точки входного и выходного сечений плоского диффузора:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{x_2 - x_1}{2l_d} = \frac{x_2 - 1}{2 \frac{l_d}{x_1}},$$

где l_d — длина оси диффузора. Переходя к параметрам межлопаточного канала, имеем:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{\Delta F_2}{\Delta F_1} - 1}{2 \frac{s_R}{t_1 \sin \alpha_1}}.$$

¹⁾ См. § 2 гл. VI.

В случае цилиндрического элементарного кольцевого канала

$$\begin{aligned}r_1 &= r_2, \\t_1 &= t_2, \\ \Delta n_1 &= \Delta n_2,\end{aligned}$$

откуда

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1}{2 \frac{s_k}{t}}$$

или приближённо (при малых углах раскрытия диффузора)

$$\alpha \approx \frac{\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1}{\frac{s_k}{t}}.$$

Для слабо искривлённых профилей в последнем выражении среднюю линию канала можно заменить хордой b ; в этом случае получаем известную формулу для угла раскрытия эквивалентного плоского диффузора плоской решётки:

$$\alpha = \frac{\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1}{\frac{b}{t}}.$$

При любых формах стенок и степени расширения диффузора существует оптимальный угол раскрытия $\alpha_{\text{опт}}$, при котором потери имеют минимум.

Если для заданной степени расширения лопаточного венца известен оптимальный угол раскрытия эквивалентного плоского диффузора $\alpha_{\text{опт}}$, то из приведённой формулы может быть определён шаг при входе t_1 в соответствующую кольцевую решётку. Разрешая уравнение относительно t_1 и пользуясь малостью величины оптимального угла раскрытия $\alpha_{\text{опт}}$, получим:

$$t_1 = \frac{\alpha_{\text{опт}} s_k}{\frac{r_2}{r_1} \frac{\Delta n_2}{\Delta n_1} \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1}.$$

В случае слабо искривлённых профилей длину средней линии межлопаточного канала можно принять равной длине криволинейной хорды профиля $s_k \cong b_k$ и, следовательно, густота кольцевой решётки по входу

$$\theta = \frac{b_k}{t_1} = \frac{\frac{r_2}{r_1} \frac{\Delta n_2}{\Delta n_1} \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1}{\alpha_{\text{опт}}},$$

число элементарных лопаток

$$z = \frac{2\pi r_1}{t_1}.$$

Естественно, что величина t_1 должна быть уточнена таким образом, чтобы z было целым числом. Для получения сравнительно малого оптимального угла раскрытия при больших расширениях канала необходима значительная густота кольцевой решётки, которая может быть осуществлена выбором достаточно большой хорды профиля b_n или большого числа лопаток z . Однако увеличение хорды профиля приводит к возрастанию осевых габаритов венца, а количество лопаток ограничено возможностью их конструктивного размещения в венце. Поэтому практически угол эквивалентного плоского диффузора может оказаться значительно больше оптимального. Уменьшение потерь в этом случае достигается выбором такого распределения проходных сечений по длине, которое даёт наиболее благоприятное распределение давлений.

Зная распределение ширин по длине межлопаточного канала и располагая средней линией, можно построить элементарную кольцевую решётку.

При определении оптимального угла раскрытия диффузора в случае больших дозвуковых скоростей следует учитывать, что с увеличением числа M оптимальный угол раскрытия диффузора уменьшается¹⁾.

Неподвижные аппараты могут быть как лопаточными, так и безлопаточными; в рабочем колесе используются только лопаточные венцы. Правда, касательные силы трения на стенках безлопаточного венца дают некоторую окружную составляющую, однако она столь незначительна, что делает невозможным применение безлопаточного диффузора в качестве рабочего колеса.

Остановимся на вопросах, связанных с профилированием вращающегося элементарного венца. Рассматривая относительное течение газа в венце, следует учесть воздействие на поток, кроме сил давления и трения, силы инерции, т. е. центробежной силы.

Наличие этой силы приводит, как уже указывалось в § 3, к повышению температуры торможения в относительном движении, что не позволяет в общем случае свести обтекание вращающегося элементарного венца к обычной внешней задаче газовой динамики и препятствует непосредственному применению результатов продувки неподвижных элементарных кольцевых решёток к расчёту рабочего колеса.

Только в частном случае цилиндрического течения, когда работа центробежных сил равна нулю, обтекание вращающейся элементарной кольцевой решётки в относительном движении сводится к обтеканию неподвижной кольцевой решётки при той же относительной скорости. По этой причине для расчёта цилин-

¹⁾ См. § 2 гл. VI, а также цитируемую в этом параграфе работу К. С. Спилларда.

дрического венца рабочего колеса с успехом пользуются результатами продувок неподвижных венцов, которые в этом случае моделируются плоскими решётками.

При рассмотрении основ профилирования нецилиндрического вращающегося венца будем считать заданной, как и в случае неподвижного венца, среднюю линию меридионального сечения кольцевого канала. Положим сначала, что лопатки бесконечно тонкие и число их столь велико, что траектория частицы в относительном движении практически совпадает с контуром лопатки.

Одномерный характер течения в случае бесконечного числа лопаток позволяет применить основные уравнения элементарной струйки. Уравнение неразрывности в относительном движении имеет вид

$$q(\lambda_{1w}) = q(\lambda_w) f \frac{\pi_{0w}}{V \theta_{0w}}.$$

Оно даёт возможность найти распределение скоростей вдоль заданного элементарного межлопаточного канала или определить необходимое изменение площади проходного сечения межлопаточного канала по заданному распределению скорости или давления вдоль оси канала s . При этом должны быть известны: закон изменения относительного радиуса по длине канала $\frac{r}{r_1}(s)$ и значение угловой скорости ω .

Ограничиваясь случаем изоэнтропического течения, можно записать уравнение неразрывности в следующем виде:

$$q(\lambda_{1w}) = q(\lambda_w) f \theta_{0w}^{\frac{k+1}{2(k-1)}};$$

здесь попрежнему

$$\theta_{0w} = \frac{T_{0w}}{T_{01w}} = 1 + \frac{u_1^{*2}}{v_2^2} \frac{k-1}{k+1} \left[\left(\frac{r}{r_1} \right)^2 - 1 \right].$$

Для воздуха ($k = 1,4$) имеем:

$$q(\lambda_{1w}) = q(\lambda_w) \theta_{0w}^3 f.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи одномерного течения газа в межлопаточных каналах вращающегося венца при заданном законе изменения площади проходного сечения.

Уравнение неразрывности удобнее переписать в следующем виде:

$$q(\lambda_w) = \frac{q(\lambda_{1w})}{f(s) \theta_{0w}^3}.$$

Величина θ_{0w} задана, поскольку известна кривая $s = s(r/r_1)$. Таким образом, распределение значений числа M по каналу полностью определяется характером изменения площади.

Случай $f(s) = \text{const}$ уже рассматривался в § 2. Остановимся на течении в расширяющемся канале, т. е. положим $f(s) > 1$.

Во вращающемся венце с положительной степенью радиальности ($r/r_1 > 1$) при дозвуковом относительном входе значение коэффициента скорости падает более интенсивно, чем в неподвижном венце. Во вращающемся венце с отрицательной степенью радиальности вследствие снижения температуры торможения ($\theta_{0w} < 1$) падение коэффициента скорости при заданном расширении канала идёт менее интенсивно, чем в неподвижном венце. Вообще же, если в канале вращающегося венца при увеличении площади поперечного сечения в f раз происходит уменьшение коэффициента скорости от значения λ_1 до λ_2 , то в неподвижном венце такое же изменение коэффициента скорости требует увеличения площади в $f\theta_{0w}^3$ раз. Можно так подобрать степень радиальности или угловую скорость, чтобы выполнялось условие

$$f\theta_{0w}^3 = 1;$$

тогда значение коэффициента скорости на всей длине межлопаточного канала не изменяется ($\lambda_1 = \lambda = \text{const}$), несмотря на изменение площади проходного сечения межлопаточного канала.

При некотором соотношении между степенью расширения и степенью радиальности канала увеличение площади сечения во вращающемся венце может сопровождаться даже возрастанием коэффициента скорости.

Сужение межлопаточного канала во вращающемся венце ведёт при положительной радиальности к замедленному, а при отрицательной радиальности к более быстрому росту коэффициента скорости, чем в неподвижном венце. При определённом сочетании сужения и радиальности можно добиться не только постоянства, но даже уменьшения коэффициента скорости в межлопаточном канале вращающегося венца.

Все полученные выводы справедливы для дозвукового течения в канале; нетрудно таким же образом охарактеризовать основные свойства сверхзвукового течения газа в канале вращающегося венца.

Рассмотрим теперь движение газа с постоянной относительной скоростью.

В цилиндрическом венце постоянству коэффициента скорости соответствует постоянство самой скорости. В общем же случае вращающегося венца изменение температуры торможения в относительном движении приводит к тому, что в потоке с постоянной скоростью коэффициент скорости возрастает при отрицательной степени радиальности и уменьшается при положительной

степени радиальности. Это вытекает из выражения для коэффициента скорости в относительном движении при $\omega = \text{const}$:

$$\lambda_w = \frac{\lambda_{1w}}{\sqrt{\theta_{0w}}}.$$

Подставляя это выражение в уравнение неразрывности, получим закон изменения площади сечения межлопаточного канала, удовлетворяющий условию постоянства относительной скорости ($\omega = \text{const}$):

$$f = \frac{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{1w}^2\right)^{\frac{1}{k-1}}}{\left(\theta_{0w} - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{1w}^2\right)^{\frac{1}{k-1}}}.$$

При цилиндрическом течении $\theta_{0w} = 1$ и, следовательно, $f = 1$.

До сих пор мы рассматривали относительное движение в рабочем колесе, имеющем бесконечное число весьма тонких лопаток, т. е. столь большое число лопаток, при котором можно считать, что траектория частиц газового потока в межлопаточных каналах в среднем совпадает с контуром лопатки и соответственно направление потока при выходе из колеса (в относительном движении) совпадает с задней кромкой. Так как в этом случае движение частиц газа совпадает с контуром лопаток, то очевидно, что траектория частиц не будет зависеть от угловой скорости вращения элементарного венца.

Когда число лопаток невелико, даже в случае неподвижного венца наблюдается несовпадение между направлением потока на выходе из него и направлением задних кромок лопаток. Угол между этими двумя направлениями обычно называют углом отставания потока. Чем меньше число лопаток, т. е. чем меньше густота решётки, тем больше угол отставания потока.

Если радиальный венец неподвижен, состоит из прямых радиальных лопаток и поток при входе в венец имеет радиальное направление, то очевидно, что лопатки не нарушают течения и на выходе из решётки сохраняется радиальное направление потока, т. е. независимо от числа лопаток угол отставания $\delta = 0$.

Пусть теперь венец вращается с угловой скоростью ω 1/сек, а вход потока на лопатки в относительном движении попрежнему радиальный; этого можно достичь при закрутке на выходе:

$$c_{1u} = u_1.$$

В отличие от движения газа через неподвижную решётку которое совершается только под воздействием лопаток, относи-

тельное движение газа через вращающуюся решётку происходит и под воздействием сил инерции — кориолисовой и центробежной.

Под действием кориолисовой силы инерции, приходящейся на единицу массы

$$J_K = 2\omega_r \omega = 2\omega_r \frac{u}{r},$$

в рассматриваемом примере траектория движения отклоняется от первоначального радиального направления в сторону, обратную направлению вращения. Это приводит к тому, что среднее направление потока при выходе из решётки отличается от радиального на некоторый угол отставания δ . Чем больше число лопаток при данном отношении r_2/r_1 , тем меньше величина этого угла δ . Если число лопаток $z = \infty$, то $\delta = 0$.

При отсутствии лопаток, т. е. при $z = 0$, относительное движение происходит только под воздействием инерционных сил. Пренебрегая силами трения в дисках, имеем в этом случае в абсолютном движении

$$c_{1u}r_1 - c_{2u}r_2 = 0,$$

откуда

$$c_{2u} = c_{1u} \frac{r_1}{r_2}.$$

В нашем примере

$$c_{1u} = u_1,$$

следовательно,

$$c_{2u} = u_1 \frac{r_1}{r_2}$$

и

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{u_2 - c_{2u}}{c_{2a}}.$$

Окружная составляющая в относительном движении будет:

$$\omega_{2u} = c_{2u} - u_2 = u_1 \frac{r_1}{r_2} - u_2 = u_1 \left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{r_2}{r_1} \right).$$

Таким образом, чем больше угловая скорость венца ω , тем поток сильнее отходит от первоначального радиального направления.

Наличие радиальных лопаток уменьшает эту закрутку, ликвидируя её совсем при бесконечно большом числе лопаток.

Отставание потока в относительном движении приводит к уменьшению затрачиваемой работы компрессора. Это учитывается коэффициентом μ , который равен отношению фактической закрутки потока к закрутке, получающейся при бесконечно большом числе лопаток ($z = \infty$).

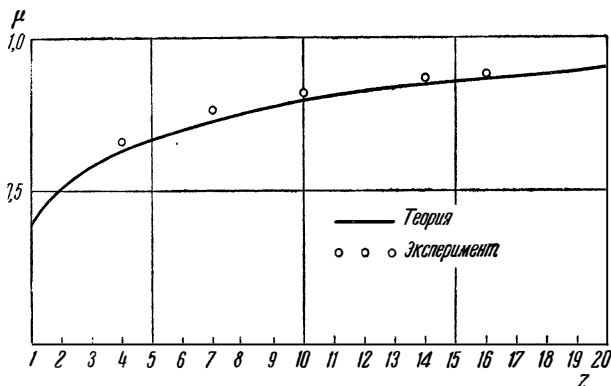
В случае прямых радиальных лопаток при $z = \infty$ поток в относительном движении выходит в радиальном направлении, т. е.

$$(c_{2u})_{z=\infty} = u_2.$$

Следовательно, для колёс с радиальными лопатками имеем:

$$\mu = \frac{c_{2u}}{(c_{2u})_{\infty}} = \frac{c_{2u}}{u_2} = \bar{c}_{2u}.$$

На фиг. 330 представлена теоретическая зависимость μ для



Фиг. 330. Зависимость коэффициента μ от числа лопаток для радиальной решётки с прямыми лопатками.

прямых лопаток от числа лопаток при $r_1/r_2 = 0$. На этом же графике нанесены экспериментальные данные, полученные В. И. Дмитриевским¹⁾.

§ 10. Течение газа в межвенцовых зазорах ступени турбомашины

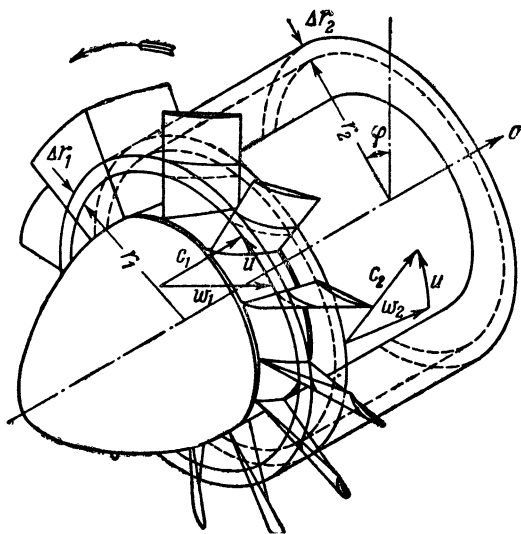
Обратимся к пространственным течениям газа в межвенцовых зазорах ступени турбомашины и на входе и выходе из ступени. Границами потока являются две твёрдые поверхности вращения — внутренняя поверхность корпуса и поверхность втулки машины, которые находятся на конечном расстоянии друг от друга; поэтому здесь, в отличие от элементарной ступени — параметры, определяющие поток в данном сечении, зависят от радиуса r . Будем предполагать, что все параметры потока зависят только от координат a и r и не зависят от угла φ . Такое течение газа в турбомашине называют осесимметричным. Независимость радиальной

¹⁾ Дмитриевский В. И. и Холщевников К. В., Нагнетатели и наддув авиационных двигателей, Оборонгиз, 1939.

составляющей скорости от угла φ означает, что все поверхности тока суть поверхности вращения (фиг. 331).

Скорость движения газа в межвенцовом зазоре разложим на меридиональную и окружную составляющие c_m и c_u .

Для составления уравнений движения в неподвижной системе координат применим к элементарной частице газа принцип Даламбера: если к действующим на элементарную частицу газа силам добавить силы инерции, то такая система сил будет находиться



Фиг. 331. Пространственная схема потока в колесе осевого компрессора.

в равновесии. Все силы, действующие на элементарную частицу газа, разделяются на поверхностные и массовые. Поверхностные силы разделяются на нормальные силы давления и касательные силы трения. Абсолютное движение частицы газа можно представить как результирующее двух движений: относительного в меридиональной плоскости и переносного, причем скорость переносного движения равна $c_u = r \, d\varphi/dt$, где φ есть угловая координата частицы.

В относительном (меридиональном) движении газа ускорение частицы можно разложить на два ускорения: центростремительное, направленное по нормали к образующей поверхности тока и равное $\frac{c_m^2}{R_m}$, где R_m есть радиус кривизны образующей, и касательное ускорение, направленное по касательной к образующей поверхности тока и равное $\frac{dc_m}{dt}$. Элементарные — центробежная

и касательная—силы инерции имеют направления, противоположные направлениям соответствующих ускорений, и равны:

$$\Delta I_1 = \frac{\Delta m c_m^2}{R_m},$$

$$\Delta I_2 = \Delta m \frac{dc_m}{dt};$$

здесь Δm — масса элементарной частицы газа.

В переносном движении элементарные центробежная и касательная силы инерции соответственно равны:

$$\Delta I_3 = \Delta m \frac{c_u}{r},$$

$$\Delta I_4 = \Delta m \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

При составлении согласно принципу Даламбера уравнения равновесия сил, приложенных к газовой частице, и сил инерции силами трения и силами веса пренебрежем, т. е. сохраним только силы давления и силы инерции.

Проектируя все силы на направление, перпендикулярное меридиональной плоскости (ось « u »), имеем:

$$-\Delta I_4 + p\Delta F_m - \left(p + \frac{\partial p}{\partial \varphi} \Delta\varphi \right) \Delta F_m = 0.$$

Здесь ΔI_4 — проекция элементарной силы инерции в абсолютном движении на окружное направление, равная

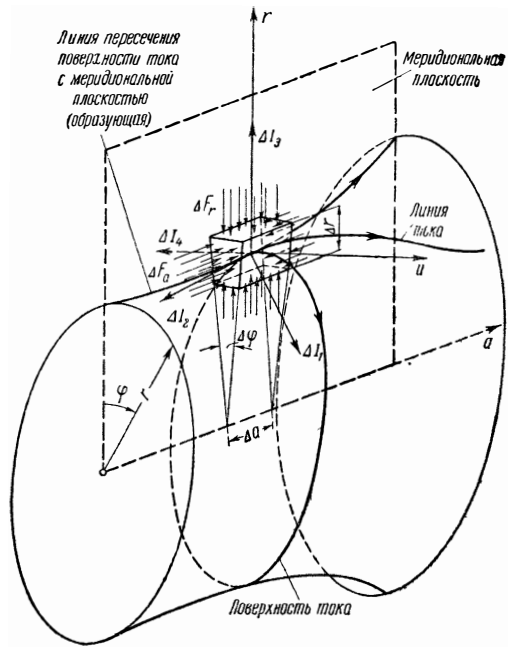
$$\Delta I_4 = \Delta I_4' + \Delta I_k,$$

где ΔI_k — кориолисова сила инерции — выразится так:

$$\Delta I_k = 2\omega_{\text{пер}} c_m \sin \Psi \Delta m = 2 \frac{c_u}{r} c_r \Delta m,$$

т. е.

$$\Delta I_4 = \Delta m \left(\frac{dc_u}{dt} - \frac{c_u c_r}{r} + 2 \frac{c_u c_r}{r} \right) = \Delta m \frac{dc_u}{dt} + \Delta m \frac{c_u}{r} c_r,$$



Фиг. 332. К выводу уравнения движения элементарной частицы газа в межвенцовом зазоре.

ΔF_m —площадь сечения элементарной частицы элементарной плоскостью.

В случае, когда p не зависит от φ :

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$$

и, следовательно

$$\Delta I_4 = 0,$$

т. е.

$$\frac{dc_u}{dt} + \frac{c_u c_r}{r} = 0.$$

Полагая $c_r = dr/dt \neq 0$, после интегрирования находим:

$$c_r \cdot r = \text{const.}$$

При $c_r = 0$ имеем:

$$\frac{dc_u}{dt} = 0,$$

т. е.

$$c_u = \text{const.}$$

Проектируя силы на оси r и a (фиг. 333), получим соответственно:

$$-\Delta I_2 \sin \Psi + \Delta I_3 - \Delta I_1 \sin (2\pi - \gamma) - \frac{\partial p}{\partial r} \Delta r \Delta F_r = 0, \quad (121)$$

$$-\Delta I_2 \cos \Psi + \Delta I_1 \cos (2\pi - \gamma) - \frac{\partial p}{\partial a} \Delta a \Delta F_a = 0. \quad (122)$$

Здесь γ —угол между осью a и нормалью к образующей, направляемой всегда к центру кривизны.

Условимся поверхность тока называть вогнутой, если нормаль к её образующей направлена от оси машины, и выпуклой, если нормаль направлена к оси машины. Для вогнутой поверхности тока имеем:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + \Psi,$$

для выпуклой поверхности:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \Psi.$$

Подставляя выражение для сил инерции ΔI_3 и ΔI_1 в (121) и учитывая равенство:

$$\Delta m = \rho \Delta r \Delta F_r,$$

получим:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{c_u^2}{r} + \frac{c_m^2}{R_m} \sin \gamma + \frac{dc_m}{dt} \sin \Psi. \quad (123)$$

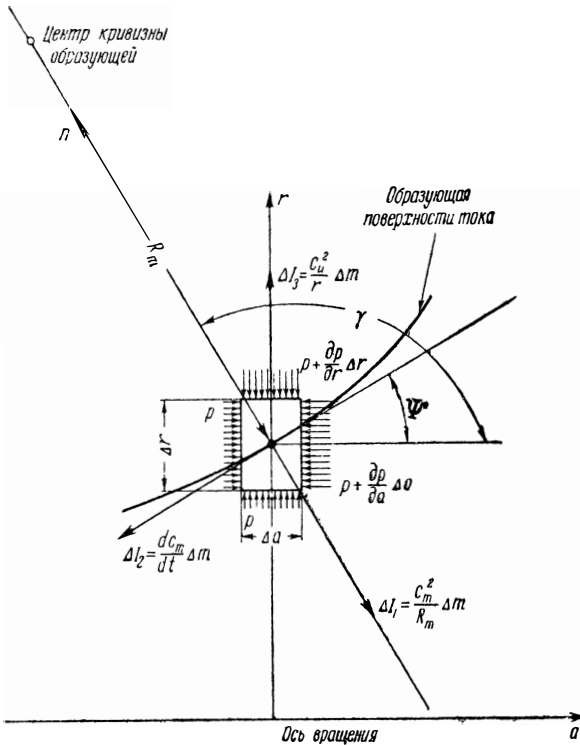
Представляя Δt в виде

$$\Delta t = \rho \Delta a \Delta F_a,$$

после аналогичных преобразований уравнения (122) будем иметь:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a} = \frac{dc_m}{dt} \cos \Psi + \frac{c_m^2}{R_m} \cos \gamma. \quad (124)$$

Уравнения движения в проекциях на радиальное направление



Фиг. 333. К выводу уравнений движения в осях a и r .

(123) и на направление оси машины (124) суть уравнения Эйлера, написанные в цилиндрической системе координат для случая, когда поверхности тока являются поверхностями вращения. Так как

$$\frac{dc_m}{dt} = \frac{dc_m}{ds_m} \frac{ds_m}{dt} = c_m \frac{dc_m}{ds_m},$$

где s_m — дуга образующей поверхности тока, то эти уравнения

можно записать и так:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dc_m}{ds_m} c_m \sin \Psi + \frac{c_m^2}{R_m} \sin \gamma - \frac{c_u^2}{r}, \quad (125)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a} = \frac{dc_m}{ds_m} c_m \cos \Psi + \frac{c_m^2}{R_m} \cos \gamma \quad (126)$$

или

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dc_m}{ds_m} c_r + \frac{c_m^2}{R_m} \sin \gamma - \frac{c_u^2}{r}, \quad (127)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a} = \frac{dc_m}{ds_m} c_a + \frac{c_m^2}{R_m} \cos \gamma. \quad (128)$$

Полагая в (127) и (128) $R_m = \infty$, получаем следующие уравнения движения для конического течения, т. е. для случая, когда все поверхности тока суть круговые конусы:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = c_r \frac{dc_m}{ds_m} - \frac{c_u^2}{r}, \quad (129)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a} = c_a \frac{dc_m}{ds_m}. \quad (130)$$

Отметим, что в точках перегиба образующей поверхности тока ($R_m = \infty$) уравнения движения принимают такой же вид, как и при коническом течении. Частными случаями конического течения являются цилиндрическое и радиальное течения.

В первом случае поверхностями тока являются круговые цилиндры, а во втором случае — плоскости, нормальные к оси вращения машины.

В случае изоэнтропического движения уравнение неразрывности для элементарной струйки может быть представлено так:

$$q(\lambda) \sin \alpha \Delta F_n = \text{const},$$

где ΔF_n — текущее значение площади сечения элементарной струйки тока, перпендикулярного направлению меридиональной составляющей скорости, а λ — текущее значение коэффициента полной скорости.

При цилиндрическом осесимметричном течении

$$\Delta F_n = r \Delta \varphi \Delta r = \text{const},$$

и, следовательно, уравнение неразрывности принимает вид:

$$q(\lambda) \sin \alpha = \text{const};$$

его можно записать и так:

$$\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{\lambda^2 - \lambda_u^2} = \text{const}.$$

При цилиндрическом осесимметричном течении на данной поверхности тока ($r = \text{const}$):

$$c_u = \text{const}$$

и, следовательно,

$$\lambda_u = \text{const}.$$

Сопоставляя это условие с уравнением неразрывности, заключаем, что при изоэнтропическом цилиндрическом осесимметричном течении газа в межвенцовом зазоре на данной поверхности тока коэффициент скорости λ , а следовательно, давление p и все остальные параметры потока остаются постоянными. Иначе говоря, в рассматриваемом случае течения параметры потока зависят только от радиуса.

Полагая в уравнениях (129) и (130):

$$c_r = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial a} = 0,$$

получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{c_u^2}{r}, \quad (131)$$

выражающее зависимость параметров потока от радиуса.

Следует заметить, что полученные выше соотношения для цилиндрического движения справедливы только при отсутствии скачков. При наличии скачка эти соотношения пригодны лишь в областях слева и справа от поверхности разрыва. Так как условие постоянства окружной составляющей скорости сохраняется и при наличии скачка, то поверхность скачка есть радиальная плоскость, а скачок при наличии закрутки является косым.

В случае радиального течения ($c_a = 0$, $\Psi = \pm \frac{\pi}{2}$) уравнения (129) и (130) приобретают следующий вид:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = c_r \frac{dc_m}{ds_m} - \frac{c_u^2}{r},$$

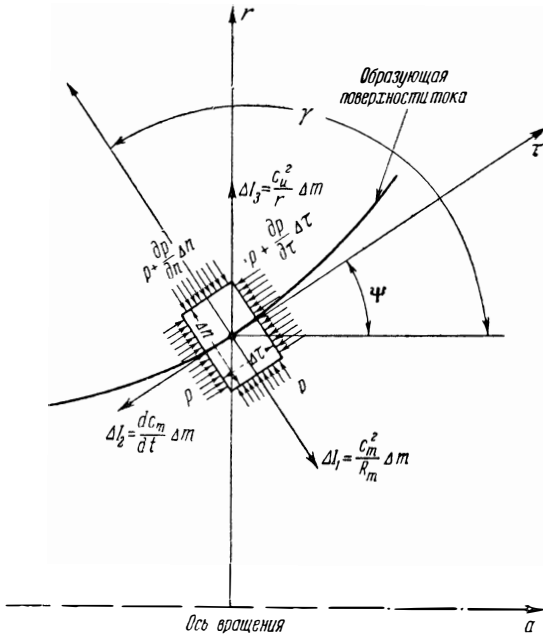
$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a} = 0,$$

т. е. радиальное течение описывается одним уравнением движения

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = c_r \frac{dc_m}{ds_m} - \frac{c_u^2}{r}. \quad (132)$$

Перейдем к уравнениям движения в так называемой натуральной системе координат, т. е. в системе координат, связанной

с поверхностями тока. Одну ось направим по касательной к образующей поверхности тока, а другую—по нормали к ней (фиг. 334). За положительное направление первой оси, называемой касательной и обозначаемой τ , примем направление движения газа, а за положительное направление второй оси, называемой нормалью и обозначаемой n , примем направление к центру кривизны образующей. Если образующая прямолинейна, то за



Фиг. 334. К выводу уравнений движения в натуральной системе координат (оси n и τ).

положительное направление оси n принимаем направление от оси вращения. Как уже указывалось, в случае осесимметричного течения достаточно рассмотреть движение только в меридиональной плоскости.

Проектируя все силы (давления и инерционные) на оси n и τ , имеем соответственно:

$$-\Delta I_1 + \Delta I_3 \sin \gamma - \frac{\partial p}{\partial n} \Delta n \Delta F_n = 0,$$

$$-\Delta I_2 + \Delta I_3 \sin \psi - \frac{\partial p}{\partial \tau} \Delta \tau \Delta F_\tau = 0.$$

Здесь ΔF_n и ΔF_τ — элементарные площади боковых поверхностей.

нормальных соответственно осям n и τ . Выражая Δm :

$$\Delta m = \rho \Delta F_n \Delta n = \rho \Delta F_\tau \Delta \tau,$$

и подставляя значения инерционных сил, получим после элементарных преобразований уравнения движения в проекциях на нормальную и касательную оси:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{c_m^2}{R_m} + \frac{c_u^2}{r} \sin \gamma, \quad (133)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \tau} = -\frac{dc_m}{dt} + \frac{c_u^2}{r} \sin \psi. \quad (134)$$

Заменяя $\frac{dc_m}{dt} = c_m \frac{dc_m}{ds_m}$ и имея в виду, что направление τ совпадает с направлением s_m , уравнение движения (134) записываем в следующем виде:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{c_u^2}{r} \sin \psi - c_m \frac{dc_m}{ds_m}. \quad (135)$$

Для конических течений ($R_m = \infty$) уравнение движения (133) выглядит так:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{c_u^2}{r} \cos \psi. \quad (136)$$

При цилиндрическом течении ($\psi = 0$) ось n совпадает с осью r , и это уравнение движения имеет вид (131). При радиальном течении ($\psi = \pm \frac{\pi}{2}$) ось n совпадает с осью a , ось τ — с осью r , $c_m = c_r$ и уравнение движения (135) принимает форму (132).

В уравнениях движения газа в межвенцовых зазорах как в осях a , r , так и в натуральных осях τ , n кроме искомым и задаваемых кинематических параметров потока, входят ещё статическое давление и плотность, т. е. величины, определяемые в свою очередь кинематикой потока. Выразим плотность и статическое давление через скорость потока, пользуясь известными соотношениями

$$p = p_0 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad (137)$$

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (138)$$

Дифференцируя по радиусу уравнение (137), получим:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{k}{k+1} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{\partial \lambda^2}{\partial r} p_0 + \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \frac{\partial p_0}{\partial r},$$

откуда согласно (138) имеем:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{k}{k+1} \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial \lambda^2}{\partial r} + \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right) \frac{\partial p_0}{\partial r}. \quad (139)$$

Помножив и разделив второй член правой части на p_0 и используя уравнение состояния

$$\frac{p_0}{\rho_0} = g RT_0,$$

переписываем выражение (139) так:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{kg RT_0}{k+1} \frac{\partial \lambda^2}{\partial r} + g RT_0 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right) \frac{1}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial r},$$

или

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{a_{кр}^2}{2} \left[\frac{k+1}{k} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right) \frac{\partial (\ln p_0)}{\partial r} - \frac{\partial \lambda^2}{\partial r} \right]. \quad (140)$$

Если полный напор постоянен, то

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{a_{кр}^2}{2} \frac{\partial \lambda^2}{\partial r}. \quad (141)$$

Очевидно, для получения величин $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}$, $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \tau}$ и т. д. достаточно в выражении (140) поставить вместо r соответствующую букву.

В случае несжимаемой жидкости:

$$p_0 = p + \frac{\rho c^2}{2},$$

откуда

$$p = p_0 - \frac{\rho c^2}{2},$$

или в дифференциальной форме:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{\partial c^2}{\partial r}; \quad (142)$$

при постоянном полном давлении

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{1}{2} \frac{\partial c^2}{\partial r}.$$

Согласно (140) уравнения движения газа (127) и (128) принимают следующий вид:

$$\frac{d\lambda_m}{ds_m} \lambda_r + \frac{\lambda_m^2}{R_m} \sin \gamma - \frac{\lambda_u^2}{r} - \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda^2}{\partial r} = -\frac{k+1}{2k} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right) \frac{\partial (\ln p_0)}{\partial r}, \quad (143)$$

$$\frac{d\lambda_m}{ds_m} \lambda_a + \frac{\lambda_m^2}{R_m} \cos \gamma - \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda^2}{\partial a} = -\frac{k+1}{2k} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right) \frac{\partial (\ln p_0)}{\partial a}. \quad (144)$$

При изоэнтропическом изменении состояния газа вдоль струйки в межвенцовом зазоре полное давление должно быть постоянным, т. е. $\frac{\partial p_0}{\partial \tau} = 0$; таким образом, p_0 может изменяться только по нормали к поверхности тока, откуда следует:

$$\frac{\partial p_0}{\partial n} = \frac{dp_0}{dn}.$$

В соответствии с этим и согласно (140) уравнения движения (133) и (134) принимают вид:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \lambda^2}{\partial n} + \frac{\lambda_u^2}{r} \sin \gamma - \frac{\lambda_m^2}{R_m} = \frac{k+1}{2k} \left[1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right] \frac{d(\ln p_0)}{dn}, \quad (145)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \lambda^2}{\partial \tau} + \frac{\lambda_u^2}{r} \sin \psi - \frac{d\lambda_m}{d\tau} \lambda_m = 0. \quad (146)$$

Уравнения (143) и (144) или (145) и (146) являются уравнениями движения газа в кольцевом канале, ограниченном двумя поверхностями вращения; совместное их решение позволяет получить распределение параметров газа во всём объёме кольцевого канала.

Применительно к турбомашинам такая задача ставится, например, при анализе течения в безлопаточном (кольцевом) диффузоре.

При обычно встречающихся малых расстояниях между двумя соседними венцами можно пренебречь изменением параметров в межвенцовом зазоре вдоль поверхности тока, если предполагать, что меридиональная проекция задних кромок лопаток совпадает с трансверсалью¹⁾ линий тока; в этом случае

$$\frac{\partial \lambda}{\partial n} = \frac{d\lambda}{dn}.$$

Если, например, линии тока представляют собой пучок прямых, проходящих через полюс P , то трансверсалью является окружность с центром в точке P (см. ниже фиг. 337); при этом течение в межвенцовом зазоре определяется только уравнением движения в проекции на нормаль (145), которое переписываем в следующем виде:

$$\frac{1}{2} \frac{d\lambda^2}{dn} + \frac{\lambda_u^2}{r} \sin \gamma - \frac{\lambda_m^2}{R_m} = \frac{k+1}{2k} \left[1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right] \frac{d(\ln p_0)}{dn}. \quad (147)$$

Полное давление за входным направляющим аппаратом:

$$p_{01} = \sigma_1 p_{0н}.$$

¹⁾ Трансверсалью называется кривая, нормальная во всех точках пересечения к кривым данного семейства.

Обычно полагают, что на входе полное давление есть постоянная величина:

$$p_{0н} = \text{const.}$$

В таком случае в межвенцовом зазоре за входным аппаратом имеем:

$$\frac{1}{2} \frac{d\lambda_1^2}{dn} + \frac{\lambda_{1u}^2}{r} \sin \gamma_1 - \frac{\lambda_{1m}^2}{R_m} = \frac{k+1}{2k} \left[1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2 \right] \frac{d(\ln \sigma_1)}{dn}, \quad (148)$$

или согласно (103) главы I:

$$\frac{1}{2} \frac{d\lambda_1^2}{dn} + \frac{\lambda_{1u}^2}{r} \sin \gamma_1 - \frac{\lambda_{1m}^2}{R_m} = -\frac{k+1}{2kAR} \left[1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2 \right] \frac{dS}{dn},$$

где S — энтропия, а R — универсальная газовая постоянная. Следует отметить, что, несмотря на наличие в уравнении (148) коэффициента σ_1 , это уравнение попрежнему является уравнением движения для газа, лишённого вязкости, так как величина σ_1 учитывает лишь влияние потерь, происшедших ранее, на распределение полных давлений в данном характерном сечении ступени.

Ограничиваясь в дальнейшем только случаем постоянства потерь по сечению во входном направляющем аппарате, получим следующее уравнение движения за ним:

$$\frac{1}{2} \frac{d\lambda_1^2}{dn} + \frac{\lambda_{1u}^2}{r} \sin \gamma_1 - \frac{\lambda_{1m}^2}{R_m} = 0, \quad (149)$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{d\lambda_{1u}^2}{dn} + \frac{\lambda_{1u}^2}{r} \sin \gamma_1 + \frac{1}{2} \frac{d\lambda_{1m}^2}{dn} - \frac{\lambda_{1m}^2}{R_m} = 0. \quad (150)$$

При $p_{01} = \text{const}$ уравнение движения за рабочим колесом можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \frac{d\lambda_2^2}{dn} + \frac{\lambda_{2u}^2}{r} \sin \gamma_2 - \frac{\lambda_{2m}^2}{R_m} = \frac{k+1}{2k} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2 \right) \frac{d(\ln \pi_{0k})}{dn}. \quad (151)$$

Заменяя степень изменения полного давления в рабочем колесе через степень изменения температуры торможения и коэффициент изоэнтропичности:

$$\pi_{0к} = \frac{p_{02}}{p_{01}} = m_{\kappa} \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

имеем:

$$\ln \pi_{0к} = \frac{k}{k-1} \ln m_{\kappa}^{\frac{k-1}{k}} + \frac{k}{k-1} \ln \frac{T_{02}}{T_{01}},$$

и следовательно,

$$\frac{1}{2} \frac{d\lambda_2^2}{dn} + \frac{\lambda_{2u}^2}{r} \sin \gamma_2 - \frac{\lambda_{2m}^2}{R_m} = \frac{k+1}{2(k-1)} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2 \right) \frac{d \left(\ln m_{\kappa}^{\frac{k-1}{k}} \frac{T_{02}}{T_{01}} \right)}{dn}. \quad (152)$$

Последнее уравнение можно записать и в безразмерных скоростях:

$$\frac{d\Lambda_{\frac{3}{2}}^2}{dn} + 2 \frac{\Lambda_{\frac{3}{2}u}^2}{r} \sin \gamma_2 - 2 \frac{\Lambda_{\frac{3}{2}m}^2}{R_m} = (1 - \Lambda_{\frac{3}{2}}^2) \frac{d \left(\ln m_{\kappa}^{\frac{k-1}{k}} \frac{T_{02}}{T_{01}} \right)}{dn}, \quad (153)$$

или

$$\frac{d\Lambda_{\frac{3}{2}}^2}{dn} + 2 \frac{\Lambda_{\frac{3}{2}u}^2}{r} \sin \gamma_2 - 2 \frac{\Lambda_{\frac{3}{2}m}^2}{R_m} = (1 - \Lambda_{\frac{3}{2}}^2) \frac{d \left(\ln m_{\kappa}^{\frac{k-1}{k}} \right)}{dn} + (1 - \Lambda_{\frac{3}{2}}^2) \frac{d \left(\ln \frac{T_{02}}{T_{01}} \right)}{dn}. \quad (154)$$

При постоянстве коэффициента изэнтропичности по сечению рабочего колеса, т. е. при постоянстве потерь, имеем:

$$\frac{d\Lambda_{\frac{3}{2}}^2}{dn} + 2 \frac{\Lambda_{\frac{3}{2}u}^2}{r} \sin \gamma_2 - 2 \frac{\Lambda_{\frac{3}{2}m}^2}{R_m} = (1 - \Lambda_{\frac{3}{2}}^2) \frac{d \left(\ln \frac{T_{02}}{T_{01}} \right)}{dn}. \quad (155)$$

В рабочем колесе компрессора случаю $m_{\kappa} = \text{const}$ соответствует следующая зависимость для адиабатического коэффициента полезного действия:

$$\eta_{\text{ад } \kappa} = \frac{\frac{T_{02}}{T_{01}} m_{\kappa}^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1}. \quad (156)$$

Задавая распределение степени повышения температуры торможения, мы тем самым с помощью (156) задаём распределение адиабатического коэффициента полезного действия, отвечающее формуле (155). В рабочем колесе турбины случаю $m_{\kappa} = \text{const}$ отвечает следующая формула для адиабатического коэффициента полезного действия:

$$\eta_{\text{ад}} = \frac{1 - \frac{T_{02}}{T_{01}}}{1 - \frac{T_{02}}{T_{01}} m_{\kappa}^{\frac{k-1}{k}}}. \quad (157)$$

Выражая степень изменения температуры торможения через работу (см. § 3)

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1 - \frac{L}{\frac{c_{1\text{max}}^2}{2g}},$$

получим:

$$\frac{d \left(\ln \frac{T_{02}}{T_{01}} \right)}{dn} = \frac{-\frac{2g}{c_{1\max}^2}}{1 - \frac{2gL}{c_{1\max}^2}} \frac{dL}{dn},$$

и так как $\Lambda_2 = \frac{c_2}{c_{2\max}}$,

$$\frac{d\Lambda_2^2}{dn} = \frac{d}{dn} \left(\frac{c_2^2}{c_{2\max}^2} \right) = \frac{1}{c_{2\max}^2} \left[\frac{dc_2^2}{dn} - c_2^2 \frac{d \left(\ln \frac{T_{02}}{T_{01}} \right)}{dn} \right],$$

то уравнение движения за рабочим колесом (155) при постоянстве потерь записывается в следующем виде:

$$\frac{dc_2^2}{dn} + 2 \frac{c_{2u}^2}{r} \sin \gamma_2 - 2 \frac{c_{2m}^2}{R_m} = -2g \frac{dL}{dn}, \quad (158)$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{dc_2^2}{dn} + \frac{c_{2u}^2}{r} \sin \gamma_2 - \frac{c_{2m}^2}{R_m} = -g \frac{dL}{dn}. \quad (159)$$

В случае рабочего колеса компрессора (см. § 5) имеем:

$$m_k \frac{k-1}{k} \frac{T_{02}}{T_{01}} = \eta_{ад} \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1 \right) + 1,$$

откуда

$$\frac{d \left(\ln m_k \frac{k-1}{k} \frac{T_{02}}{T_{01}} \right)}{dn} = \frac{1}{\eta_{ад} \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1 \right) + 1} \frac{d}{dn} \left[\eta_{ад} \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1 \right) \right].$$

При постоянном значении адиабатического коэффициента полезного действия уравнение движения (153) принимает вид

$$\frac{d\Lambda_2^2}{dn} + 2 \frac{\Lambda_{2u}^2}{r} \sin \gamma_2 - 2 \frac{\Lambda_{2m}^2}{R_m} = (1 - \Lambda_2^2) \frac{\eta_{ад}}{\eta_{ад} \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1 \right) + 1} \frac{d}{dn} \frac{T_{02}}{T_{01}}. \quad (160)$$

В результате аналогичных выкладок получаем следующее уравнение движения за рабочим колесом турбины при постоянном значении адиабатического коэффициента полезного действия:

$$\frac{d\Lambda_2^2}{dn} + 2 \frac{\Lambda_{2u}^2}{r} \sin \gamma_2 - 2 \frac{\Lambda_{2m}^2}{R_m} = (1 - \Lambda_2^2) \frac{\frac{d}{dn} \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right)}{\eta_{ад} - 1 + \frac{T_{02}}{T_{01}}}. \quad (161)$$

Уравнение движения за рабочим колесом при постоянстве полного давления имеет такой же вид, как за входным аппаратом при постоянстве потерь:

$$\frac{1}{2} \frac{d\lambda_2^2}{dn} + \frac{\lambda_{2u}^2}{r} \sin \gamma_2 - \frac{\lambda_{2m}^2}{R_m} = 0. \quad (162)$$

В случае несжимаемой жидкости согласно (133) и (142) уравнение движения за рабочим колесом записывается следующим образом:

$$\frac{1}{2} \frac{dc_2^2}{dn} + \frac{c_{2u}^2}{r} \sin \gamma_2 - \frac{c_{2m}^2}{R_m} = \frac{1}{\rho_2} \frac{dp_{02}}{dn}, \quad (163)$$

но в несжимаемой жидкости

$$L = (p_{01} - p_{02}) \frac{1}{\gamma}$$

или

$$L = H \frac{1}{\gamma},$$

где напором H называется разность полных давлений. Таким образом,

$$\frac{dp_{02}}{dn} = -\gamma \frac{dL}{dn},$$

и следовательно, в несжимаемой жидкости уравнение движения за колесом (163) принимает вид

$$\frac{1}{2} \frac{dc_2^2}{dn} + \frac{c_{2u}^2}{r} \sin \gamma_2 - \frac{c_{2m}^2}{R_m} = -g \frac{dL}{dn}. \quad (164)$$

Сравнивая (159) и (164), видим, что дифференциальное уравнение движения, написанное в размерном виде, имеет одну и ту же форму для несжимаемой жидкости и сжимаемого газа.

Рассмотрим различные законы изменения параметров потока за входным направляющим аппаратом в предположении постоянства потерь по высоте лопаток, для чего воспользуемся уравнением:

$$\frac{1}{2} \frac{d\Lambda_1^2}{dn} + \frac{\Lambda_{1u}^2 \sin \gamma_1}{r} - \frac{\Lambda_{1m}^2}{R_m} = 0, \quad (165)$$

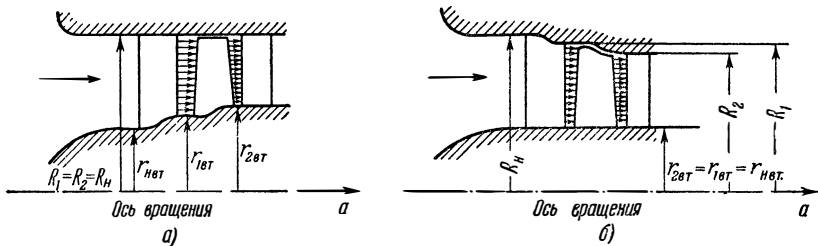
которое с учётом равенства $\Lambda_1^2 = \Lambda_{1u}^2 + \Lambda_{1m}^2$ можно записать так:

$$\frac{1}{2} \frac{d\Lambda_{1u}^2}{dn} + \frac{\Lambda_{1u}^2 \sin \gamma_1}{r} + \frac{1}{2} \frac{d\Lambda_{1m}^2}{dn} - \frac{\Lambda_{1m}^2}{R_m} = 0, \quad (166)$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{d\Lambda_1^2}{dn} + \frac{\Lambda_{1u}^2 - \Lambda_1^2}{R_m} + \frac{\Lambda_{1u}^2 \sin \gamma_1}{r} = 0. \quad (167)$$

Задачей входного направляющего аппарата является отклонение потока от первоначального меридионального направления, т. е. получение заданных величин закрутки Λ_{1u} и коэффициента скорости Λ_1 на выходе из него. В таком случае (167) можно рассматривать как уравнение для искомых функций γ и R_m ,



Фиг. 335. Ступень с цилиндрическим течением газа в межвенцовых зазорах: а—при цилиндрическом кожухе, б—при цилиндрической втулке.

характеризующих поверхности тока в межвенцовом зазоре между входным направляющим аппаратом и рабочим колесом. Из уравнения (167) получаем следующую зависимость кривизны образующей от γ_1 и задаваемых величин Λ_{1u} , Λ_1 и $\frac{d\Lambda_1^2}{dn}$:

$$\frac{1}{R_m} = \frac{\frac{1}{2} \frac{d\Lambda_1^2}{dn} + \frac{\Lambda_{1u}^2 \sin \gamma_1}{r}}{\Lambda_1^2 - \Lambda_{1u}^2} = \frac{1}{\Lambda_{1m}^2} \left(\frac{1}{2} \frac{d\Lambda_1^2}{dn} + \frac{\Lambda_{1u}^2 \sin \gamma_1}{r} \right). \quad (168)$$

Как видим, две величины γ и R_m связаны только одним уравнением (168), т. е. возможно наложение какого-либо дополнительного условия. Пусть, например, $\Lambda_1 = \text{const}$, а Λ_{1u} — заданная функция r :

$$\Lambda_{1u} = \Lambda_{1u}(r),$$

т. е. известны значения угла α_1 :

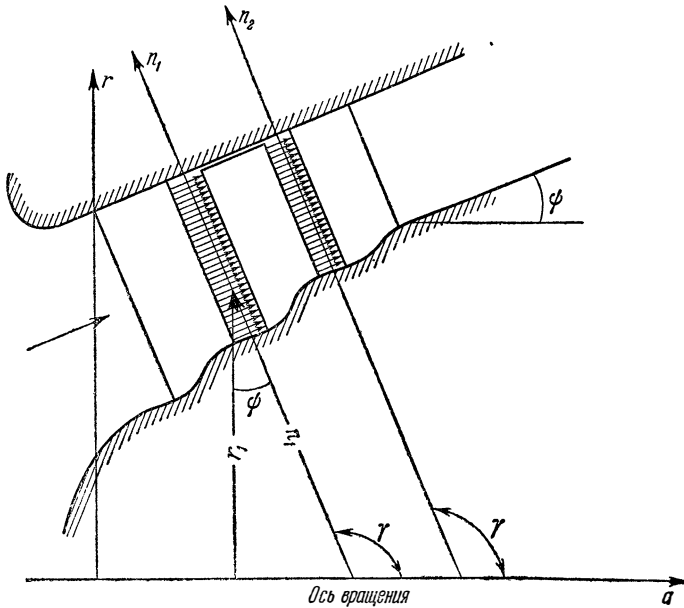
$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{\Lambda_{1u}}{\Lambda_{1m}} = \frac{\Lambda_{1u}}{\sqrt{\Lambda_1^2 - \Lambda_{1u}^2}}. \quad (169)$$

Из (168) получается следующее выражение для кривизны образующей:

$$\frac{1}{R_m} = \frac{\text{tg}^2 \alpha_1}{r} \sin \gamma_1.$$

Полагая, например, что трансверсальная линия есть прямая, т. е. все центры кривизны образующих поверхностей тока лежат на одной прямой, и подставляя последнее выражение в (169), найдём зависимость кривизны образующей от радиуса r .

В приложениях обычно рассматривается более узкая задача, когда известна форма образующих поверхностей тока, т. е. даны



Фиг. 336. Ступень с коническим течением газа в межвенцовых зазорах при $\psi = \text{const}$.

величины R_m и γ и по заданному распределению закрутки потока Λ_{1u} отыскивают по уравнению (167) необходимые значения Λ_1 или по уравнению (166) — соответствующие величины меридиональных составляющих скорости Λ_{1m} . В осевых машинах предполагают цилиндрическое течение газа в межвенцовых зазорах (фиг. 335); тогда .

$$R_m = \infty,$$

$$\gamma = \text{const} = \frac{\pi}{2},$$

т. е.

$$n = r.$$

При коническом течении газа в межвенцовых зазорах ($R_m = \infty$) в частном случае $\gamma = \text{const}$ имеем (фиг. 336): $\psi = \text{const}$.

Случай конического течения в межвенцовом зазоре с переменными значениями угла ψ , когда образующие поверхностей тока пересекаются в одной точке, представлен на фиг. 337.

Пример течения в межвенцовом зазоре с криволинейными образующими поверхностей тока изображён на фиг. 338; здесь образующими являются дуги concentрических окружностей с центром в точке O .

Рассмотрим изменение параметров потока в каждом из указанных случаев за входным направляющим аппаратом.

Начнём с последнего случая. Здесь трансверсальной линией является прямая, т. е.

$$\gamma = \text{const} = \gamma_0.$$

Радиус кривизны

$$R_m = \frac{r_0 - r}{\sin \gamma_0},$$

где r — радиус данной точки, а r_0 — расстояние от оси вращения до центра окружностей O .

Так как

$$n = \frac{r}{\sin \gamma} = \frac{r}{\sin \gamma_0},$$

то

$$dn = \frac{1}{\sin \gamma_0} dr,$$

и уравнение (167) принимает вид

$$\frac{1}{2} \frac{d\Lambda_1^2}{dr} \sin \gamma_0 - \frac{\Lambda_1^2 \sin \gamma_0}{r_0 - r} + \frac{r_0 \Lambda_1^2 u}{r(r_0 - r)} \sin \gamma_0 = 0.$$

Полагая

$$\sin \gamma_0 \neq 0,$$

имеем следующее линейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{d\Lambda_1^2}{dr} - \frac{2}{r_0 - r} \Lambda_1^2 + \frac{2r_0 \Lambda_1^2 u}{r(r_0 - r)} = 0, \quad (170)$$

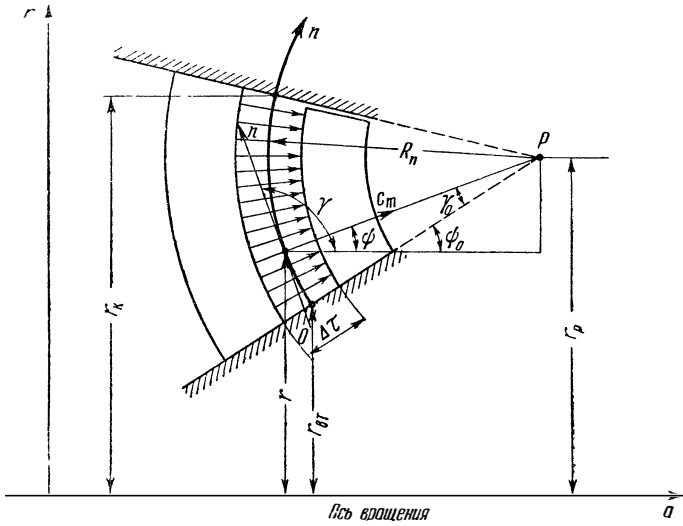
его решение можно представить в виде

$$\Lambda_1^2 = e^{-\int P(r) dr} \left[\text{const} - \int Q(r) e^{\int P(r) dr} dr \right], \quad (171)$$

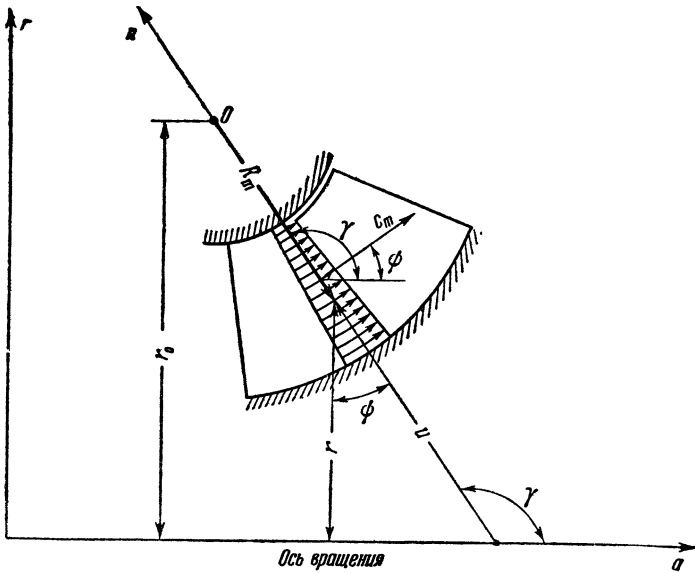
где

$$P(r) = -\frac{2}{r_0 - r},$$

$$Q(r) = \frac{2r_0 \Lambda_1^2 u}{r(r_0 - r)},$$



Фиг. 337. Коническое течение газа в межвенцовом зазоре при наличии общей точки пересечения образующих.



Фиг. 338. Течение в межвенцовом зазоре. Образующие поверхностей тока дуги концентрических окружностей.

при этом $\Lambda_{1u}(r)$ — заданная функция; таким образом, мы находим функцию $\Lambda_1(r)$, а затем с помощью выражения

$$\Lambda_{1m}^2 = \Lambda_1^2 - \Lambda_{1u}^2$$

— меридиональную скорость $\Lambda_{1m}(r)$; значение угла α_1 получается из очевидной формулы

$$\alpha_1 = \arctg \frac{\Lambda_{1u}}{\Lambda_{1m}}. \quad (172)$$

Если путём соответствующего профилирования лопаток входного направляющего аппарата обеспечить реализацию углов потока на выходе из него согласно (172), то будет получено и заданное распределение закруток $\Lambda_{1u}(r)$.

Полагая в (166) и (167) $R_m = \infty$, получаем следующее уравнение для конического течения:

$$\frac{1}{2} \frac{d\Lambda_{1u}^2}{dn} + \frac{\Lambda_{1u}^2 \sin \gamma_1}{r} + \frac{1}{2} \frac{d\Lambda_{1m}^2}{dn} = 0, \quad (173)$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{d\Lambda_1^2}{dn} + \frac{\Lambda_{1u}^2 \sin \gamma_1}{r} = 0. \quad (174)$$

Если все образующие конического течения пересекаются в одной точке (фиг. 337), то трансверсальной кривой является окружность радиуса R_n с центром в точке пересечения образующих — P . Ордината r точек этой кривой равна:

$$r = r_p - R_n \sin \psi_1, \quad (175)$$

где r_p — ордината центра окружности P (фиг. 337).

В таком случае

$$\frac{r}{\sin \gamma_1} = \frac{r_p - R_n \sin \psi_1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \psi_1\right)} = \frac{r_p - R_n \sin \psi_1}{\cos \psi_1}. \quad (176)$$

Длина дуги трансверсальной кривой

$$n = R_n \varphi_1,$$

где φ_1 — центральный угол

$$\varphi_1 = \psi_{10} - \psi_1$$

и, следовательно,

$$n = R_n (\psi_{10} - \psi_1). \quad (177)$$

Здесь ψ_0 — значение угла ψ_1 в точке начала отсчёта для длины дуги трансверсальной кривой. Дифференцируя (177), имеем:

$$dn = -R_n d\psi. \quad (178)$$

Подставляя (176) и (178) в (174), получаем:

$$-\frac{1}{2R_n} \frac{d\Lambda_1^2}{d\psi_1} + \frac{\Lambda_{1u}^2 \cos \psi_1}{r_P - R_n \sin \psi_1} = 0. \quad (179)$$

Полагая, что $\psi_1 \neq \frac{\pi}{2}$, записываем последнее выражение так:

$$-\frac{1}{2R_n \cos \psi_1} \frac{d\Lambda_1^2}{d\psi} + \frac{\Lambda_{1u}^2}{r_P - R_n \sin \psi_1} = 0. \quad (180)$$

Дифференцируя (175), имеем:

$$dr = -R_n \cos \psi_1 d\psi,$$

поэтому уравнению (180) можно придать вид

$$\frac{d\Lambda_1^2}{dr} + 2 \frac{\Lambda_{1u}^2}{r} = 0 \quad (181)$$

или

$$\frac{d\Lambda_1^2}{d\frac{r}{R_n}} + 2 \frac{\Lambda_{1u}^2}{\frac{r}{R_n}} = 0. \quad (182)$$

Разделяя переменные и интегрируя уравнения (179) и (182), находим:

$$\Lambda_1^2 = 2 \int \frac{\Lambda_{1u}^2 \cos \psi_1}{\frac{r_P}{R_n} - \sin \psi_1} d\psi + \text{const}, \quad (183)$$

$$\Lambda_1^2 = \text{const} - 2 \int \frac{\Lambda_{1u}^2}{\frac{r}{R_n}} d\left(\frac{r}{R_n}\right). \quad (184)$$

Меридиональные скорости определяем из очевидного соотношения

$$\Lambda_{1m}^2 = \Lambda_1^2 - \Lambda_{1u}^2 = \text{const} - 2 \int \frac{\Lambda_{1u}^2}{\frac{r}{R_n}} d\frac{r}{R_n} - \Lambda_{1u}^2.$$

Если закрутка потока соответствует постоянству циркуляции потока вдоль задней кромки лопаток входного аппарата, т. е.

$$\Lambda_{1u} \frac{r}{R_n} = \bar{\Gamma}_1 = \text{const} \quad (185)$$

и, следовательно,

$$\Lambda_{1u} = \frac{\bar{\Gamma}_1}{\frac{r}{R_n}},$$

то после интегрирования из (184) получим:

$$\Lambda_1^2 = \text{const} + \frac{\bar{\Gamma}_1^2}{\left(\frac{r}{R_m}\right)^2} = \text{const} + \Lambda_{1u}^2. \quad (186)$$

откуда

$$\Lambda_{1m}^2 = \Lambda_1^2 - \Lambda_{1u}^2 = \text{const}.$$

Таким образом, в случае конического течения за входным направляющим аппаратом, при закрутке потока по закону постоянства циркуляции, получаем постоянную меридиональную скорость.

В частном случае конического течения с параллельными образующими, т. е. с постоянным углом наклона ψ_0 к оси вращения, имеем:

$$r = n \cos \psi_{10} = n \sin \gamma_1;$$

отсюда

$$dn = \frac{dr}{\cos \psi_{10}};$$

тогда при $\psi_{10} \neq \frac{\pi}{2}$ уравнение (174) выглядит так:

$$\frac{d\Lambda_1^2}{dr} + 2 \frac{\Lambda_{1u}^2}{r} = 0. \quad (187)$$

Вводя относительный радиус

$$\bar{r} = \frac{r}{R}, \quad (188)$$

где R — радиус кожуха машины в данном сечении, переписываем уравнение (187) в безразмерном виде

$$\frac{d\Lambda_1^2}{d\bar{r}} + 2 \frac{\Lambda_{1u}^2}{\bar{r}} = 0 \quad (189)$$

или

$$\frac{d\Lambda_{1u}^2}{d\bar{r}} + 2 \frac{\Lambda_{1u}^2}{\bar{r}} + \frac{d\Lambda_{1m}^2}{d\bar{r}} = 0. \quad (190)$$

Представляя уравнение (190) в виде:

$$\frac{d\Lambda_{1m}^2}{d\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{d(\Lambda_{1u} \bar{r})^2}{d\bar{r}} = 0,$$

замечаем, что в данном примере, как и в случае конического течения с образующими, пересекающимися в одной точке, при постоянстве циркуляции за входным аппаратом

$$\Lambda_{1u} \bar{r} = \text{const}$$

меридиональная составляющая скорости оказывается постоянной:

$$\Lambda_{1m} = \text{const};$$

но здесь из постоянства меридиональной скорости следует и постоянство осевой скорости:

$$\Lambda_{1a} = \Lambda_{1m} \cos \psi_{10} = \text{const}.$$

При $\psi_{10} = 0$ имеем цилиндрическое течение:

$$r = n,$$

$$\Lambda_{1m} = \Lambda_{1a},$$

и уравнение движения (190) принимает вид

$$\frac{d\Lambda_{1w}^2}{d\bar{r}} + 2 \frac{\Lambda_{1w}^2}{\bar{r}} + \frac{d\Lambda_{1a}^2}{d\bar{r}} = 0, \quad (191)$$

или

$$\frac{d\Lambda_{1i}^2}{d\bar{r}} + 2 \frac{\Lambda_{1u}^2}{\bar{r}} = 0, \quad (192)$$

или также

$$\frac{d\Lambda_{1a}^2}{d\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{d(\Lambda_{1u}\bar{r})^2}{d\bar{r}} = 0. \quad (193)$$

Таким образом, всем трём рассмотренным выше случаям конического течения отвечают одни и те же уравнения окружных и меридиональных составляющих скорости. Это позволяет заменить исследование конических течений исследованием частного случая цилиндрических течений, выводы из которого могут быть распространены на общий случай конического течения.

Интегрируя уравнение (191), получаем следующее выражение для осевой скорости в зависимости от задаваемой закрутки $\Lambda_{1u}(\bar{r})$:

$$\Lambda_{1a}^2 = \text{const} - \Lambda_{1u}^2 - 2 \int \frac{\Lambda_{1u}^2}{\bar{r}} d\bar{r}. \quad (194)$$

Закрутка, соответствующая закону постоянства циркуляции

$$\Lambda_{1u}\bar{r}_1 = \text{const}$$

согласно (193), даёт постоянство осевой скорости

$$\Lambda_{1a} = \text{const}.$$

Наличие постоянной осевой скорости и закрутки потока, обратно пропорциональной радиусу, приводит к появлению боль-

ших чисел M_1 у втулки входного направляющего аппарата:

$$\Lambda_1^2 = \Lambda_{1a}^2 + \frac{\Lambda_{1Ru}^2}{r_1^2}.$$

В качестве второго примера рассмотрим такое распределение закрутки потока по радиусу направляющего аппарата, которое соответствует закону вращения твёрдого тела:

$$\Lambda_{1u} = \text{const } \bar{r}_1.$$

Принимая за характерную величину скорость закрутки на периферии Λ_{1Ru} , имеем:

$$\Lambda_{1u} = \Lambda_{1Ru} \bar{r}_1. \quad (195)$$

Подставляя выражение (195) в формулу (194), приходим к следующему закону для осевой скорости:

$$\frac{\Lambda_{1a}}{\Lambda_{1Ra}} = \sqrt{1 + 2 \text{ctg}^2 \alpha_{1R} (1 - r_1^2)}. \quad (196)$$

Из (195) и (196) находим значение полной скорости:

$$\Lambda_1^2 = \Lambda_{1Ru}^2 [2 + \text{tg}^2 \alpha_{1R} - r_1^2]. \quad (197)$$

Рассмотрим распределение по радиусу значений безразмерных относительных скоростей Λ_{1w} на входе в рабочее колесо при различных законах закрутки. Из треугольника скорости на входе в колесо имеем очевидное равенство

$$\omega_1^2 = c_1^2 + u_1^2 - 2u_1 c_{1u}; \quad (198)$$

относя величины скоростей к окружной скорости конца лопатки рабочего колеса, получим:

$$\bar{\omega}_1^2 = \bar{c}_1^2 + r_1^2 - 2\bar{c}_{1u} \bar{r}_1. \quad (199)$$

Поделив обе части (198) на максимальную скорость в относительном движении $\omega_{1 \max}$ и используя (2), приходим к следующей зависимости безразмерной относительной скорости Λ_{1w} от безразмерной скорости Λ_1 , закрутки потока Λ_{1u} , безразмерной окружной скорости $U_1^* = \frac{u_{1R}}{c_{1 \max}}$ и безразмерного радиуса данной точки $\bar{r}_1 = \frac{r_1}{R_1}$:

$$\Lambda_{1w}^2 = \frac{\Lambda_1^2 + U_{1R}^{*2} \bar{r}_1^2 - 2\Lambda_{1u} U_{1R}^* \bar{r}_1}{1 + U_{1R}^{*2} \bar{r}_1^2 - 2\Lambda_{1u} U_{1R}^* \bar{r}_1}. \quad (200)$$

В общем случае меридионального или в частном случае осевого входа ($\Lambda_{1Ru} = 0$) имеем:

$$\Lambda_{1w}^2 = \frac{\Lambda_1^2 + U_{1R}^{*2} \bar{r}_1^2}{1 + U_{1R}^{*2} \bar{r}_1^2}.$$

Производная последнего выражения по радиусу положительна, т. е. в случае осевого входа с увеличением радиуса величина Λ_{1w} монотонно возрастает. Подставляя в (200) выражения закрутки потока и скорости при постоянстве циркуляции, получаем зависимость безразмерной относительной скорости Λ_{1w} от радиуса при закрутке потока во входном аппарате по закону постоянства циркуляции:

$$\Lambda_{1w}^2 = \frac{\Lambda_{1a}^2 - 2\Lambda_{1Ru} U_{1R}^* + U_{1R}^{*2} \bar{r}_1^2 + \frac{\Lambda_{1Ru}^2}{\bar{r}_1^2}}{1 - 2\Lambda_{1Ru} U_{1R} + U_{1R}^{*2} \bar{r}_1^2}. \quad (201)$$

Здесь в отличие от случая осевого входа нет монотонного возрастания Λ_{1w} с увеличением относительного радиуса \bar{r} ; вначале Λ_{1w} убывает с возрастанием относительного радиуса, при некотором значении $\bar{r}_1 = \bar{r}_{10}$ величина Λ_{1w} достигает минимума

$$\Lambda_{1w} = \Lambda_{1w \min}$$

и при дальнейшем возрастании относительного радиуса Λ_{1w} увеличивается до наибольшего значения на периферии.

Дифференцируя (201) по \bar{r}_1^2 и приравнявая производную нулю, получаем следующее выражение для \bar{r}_{10} :

$$\bar{r}_{10}^2 = \frac{\Lambda_{1uR}}{1 - \Lambda_{1a}^2} \left[\Lambda_{1Ru} + \sqrt{\Lambda_{1Ru}^2 + \left(\frac{1}{U_{1R}^{*2}} - \frac{2}{U_{1R}^*} \Lambda_{1Ru} \right) (1 - \Lambda_{1a}^2)} \right].$$

Подставляя в (199) значения

$$\begin{aligned} \bar{c}_{1a} &= \text{const}, \\ \bar{c}_{1u} &= \frac{\bar{c}_{1Ru}}{\bar{r}_1}, \end{aligned}$$

имеем:

$$\bar{\omega}_1^2 = \bar{c}_{1a}^2 - 2\bar{c}_{1Ru} + \bar{r}_1^2 + \frac{\bar{c}_{1Ru}^2}{\bar{r}_1^2}.$$

Распределение относительных скоростей носит такой же характер, как и распределение Λ_{1w} . Приравнявая нулю производную последнего выражения, находим:

$$\bar{r}_{10} = \sqrt{\bar{c}_{1Ru}}.$$

Таким образом, при положительной закрутке потока по закону постоянства циркуляции в интервале $0 < \bar{r}_1 < \sqrt{\bar{c}_{1Ru}}$ происходит уменьшение относительной скорости, а для значений $\bar{r}_1 > \sqrt{\bar{c}_{1Ru}}$ относительная скорость ω_1 возрастает, достигая наи-

большей величины на периферии колеса. Указанный характер изменения относительной скорости виден непосредственно из треугольника скорости на входе в колесо, так как минимальное значение относительной скорости ω_1 имеет место при $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$, т. е. при закрутке, равной местной окружной скорости:

$$c_{1u} = u_1,$$

или в безразмерном виде:

$$c_{1u} = \bar{r}_1.$$

Подставляя это равенство в выражение для закрутки потока, при постоянстве циркуляции, имеем:

$$\bar{r}_{01} = \frac{\bar{c}_{1Ru}}{\bar{r}_{01}},$$

откуда

$$\bar{r}_{01} = \sqrt{\bar{c}_{1Ru}}.$$

Подставляя в (200) из (195) и (196):

$$\Lambda_{1u} = \Lambda_{1Ru} \bar{r}_1,$$

$$\Lambda_1^2 = \Lambda_{1Ru}^2 \bar{r}_1^2 + \Lambda_{1Ra}^2 [1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha_{1R} (1 - \bar{r}_1^2)],$$

получаем следующее выражение для безразмерной относительной скорости при закрутке потока во входном направляющем аппарате по закону вращения твёрдого тела, т. е. при линейном распределении закрутки по радиусу:

$$\Lambda_{1w}^2 = \frac{\Lambda_{1R}^2 + \Lambda_{1Ru}^2 + (U_{1R}^{*2} - 2\Lambda_{1Ru} U_{1R}^* - \Lambda_{1Ru}^2) \bar{r}_1^2}{1 + (U_{1R}^{*2} - 2\Lambda_{1Ru} U_{1R}^* - \Lambda_{1Ru}^2) \bar{r}_1^2}, \quad (202)$$

или

$$\Lambda_{1w}^2 = \frac{\bar{c}_{1R}^2 + \bar{c}_{1u}^2 + (1 - 2\bar{c}_{1u} - \bar{c}_{1u}^2) \bar{r}_1^2}{\frac{c_{1\max}^2}{u_{1R}^2} + (1 - 2\bar{c}_{1u}) \bar{r}_1^2}.$$

Выражая в общем случае квадрат закрутки полиномом

$$\Lambda_{1u} = \frac{A_{-n}}{\bar{r}_1^n} + \frac{A_{-(n-1)}}{\bar{r}_1^{n-1}} + \dots + \frac{A_{-1}}{\bar{r}_1} + A_0 + A_1 \bar{r}_1 + \dots + A_k \bar{r}_1^k, \quad (203)$$

или в сокращённой записи

$$\Lambda_{1u}^2 = \sum_{i=-n}^{i=k} A_i \bar{r}_1^i, \quad (204)$$

получаем после подстановки в (193) и интегрирования:

$$\Lambda_{1a}^2 = \text{const} - A(1 + 2 \ln \bar{r}_1) - \sum_{i=1}^{i=k} \left(1 + \frac{2}{i}\right) A_i \bar{r}_1^i - \sum_{i=-n}^{i=-1} \left(1 + \frac{2}{i}\right) A_i \bar{r}_1^i. \quad (205)$$

Последним выражением для распределения осевых скоростей по высоте лопатки можно воспользоваться и в том случае, когда в виде степенного ряда задаётся не квадрат закрутки (203), а сама величина закрутки:

$$\Lambda_{1u} = \sum_{i=-n}^{i=k} B_i \bar{r}_1^i. \quad (206)$$

Для этого следует только, сравнивая ряды (206) и (203), выразить коэффициенты A через B . Располагая величинами осевой скорости и закрутки, определяем угол выхода потока из направляющего аппарата α_1 и по формулам § 2 находим параметры потока в относительном движении перед рабочим колесом. Соответствующим подбором полинома (203) или (206) можно добиться желаемого распределения указанных параметров.

Однако эту задачу можно решать и более прямым образом, если предварительно так видоизменить уравнение движения, чтобы в него непосредственно входила интересующая нас величина.

Подставляя в (192) выражение

$$\Lambda_{1u} = \Lambda_1 \cos \alpha_1,$$

получаем следующее уравнение движения, в которое в явном виде входит угол α_1 :

$$\frac{d\Lambda_1^2}{d\bar{r}_1} + 2 \frac{\cos^2 \alpha_1}{\bar{r}_1} \Lambda_1^2 = 0.$$

Разделяя переменные, после интегрирования найдём распределение по высоте лопатки безразмерной скорости

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_{1R}} = e^{\int_{\bar{r}_1}^1 \frac{\cos^2 \alpha_1}{r} dr},$$

её окружной составляющей

$$\frac{\Lambda_{1u}}{\Lambda_{1uR}} = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_{1R}} e^{\int_{\bar{r}_1}^1 \frac{\cos^2 \alpha_1}{r} dr}$$

и осевой составляющей

$$\frac{\Lambda_{1a}}{\Lambda_{1aR}} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_{1R}} e^{\int_{\bar{r}_1}^1 \frac{\cos^2 \alpha_1}{\bar{r}} d\bar{r}}.$$

При постоянном значении α_1 по высоте лопатки имеем:

$$\int_{\bar{r}_1}^1 \frac{\cos^2 \alpha_1}{\bar{r}} d\bar{r} = -\cos^2 \alpha_1 \ln \bar{r}_1,$$

откуда

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_{1R}} = \frac{1}{\bar{r}_1 \cos^2 \alpha_1}.$$

Выражая с помощью (200) Λ_1^2 через относительную и окружную составляющие:

$$\Lambda_1^2 = \Lambda_{1w}^2 (1 - 2\Lambda_{1u} U_{1R}^* \bar{r}_1 + U_{1R}^{*2} \bar{r}_1^2) + 2\Lambda_{1u} U_{1R}^* \bar{r}_1 - U_{1R}^{*2} \bar{r}_1^2,$$

находим величину $\frac{d\Lambda_1^2}{d\bar{r}}$. Подставляя последнюю в (192), получаем дифференциальное уравнение, связывающее между собой Λ_{1w} и Λ_{1u} .

Задавая желаемое распределение чисел M_{1w} , или, что то же, Λ_{1w} , по высоте лопатки рабочего колеса и решая указанное дифференциальное уравнение, находим необходимую закрутку потока. Решение этого уравнения в общем случае представляет значительные трудности, однако при некоторых частных видах функции $\Lambda_{1w} = \Lambda_{1w}(\bar{r}_1)$ оно существенно упрощается.

Например, задавая $\Lambda_{1w} = \text{const}$, имеем:

$$\frac{d\Lambda_1^2}{d\bar{r}_1} = 2(1 - \Lambda_{1w}^2) U_{1R}^* \left(\bar{r}_1 \frac{d\Lambda_{1u}}{d\bar{r}_1} + \Lambda_{1u} - U_{1R}^* \bar{r}_1 \right).$$

Подставляя последнее в уравнение движения (192), приходим к дифференциальному уравнению, отвечающему условию постоянства безразмерной относительной скорости на входе в рабочее колесо:

$$a \frac{d\Lambda_{1u}}{d\bar{r}_1} + \frac{\Lambda_{1u}}{\bar{r}_1} a + \frac{\Lambda_{1u}^2}{\bar{r}_1^2} - a U_{1R}^* = 0,$$

где

$$a = U_{1R}^* (1 - \Lambda_{1w}^2).$$

С помощью подстановки

$$z = \frac{\Lambda_{1u}}{\bar{r}_1},$$

преобразовываем это уравнение к виду

$$-\frac{a \, dz}{z^2 + 2az - aU_1^*} = \frac{d\bar{r}_1}{\bar{r}_1}.$$

Интегрируя, имеем:

$$\ln \frac{\sqrt{\bar{b} + a} + \frac{\Lambda_{1u}}{\bar{r}_1}}{\sqrt{\bar{b} - a} - \frac{\Lambda_{1u}}{\bar{r}_1}} = 2\sqrt{\bar{b}} \frac{1}{a} \ln \bar{r}_1 + \ln c,$$

где $b = aU_1^* + a^2$, c — произвольная постоянная. После элементарных преобразований получаем:

$$\Lambda_{1u} = \frac{\bar{r}_1}{1 + \bar{c}\bar{r}_1^2 \frac{1}{a} \sqrt{\bar{b}}} [c (\sqrt{\bar{b} - a}) \bar{r}_1^{\frac{1}{a}} \sqrt{\bar{b}} - (\sqrt{\bar{b} + a})].$$

При длинных лопатках и $\Lambda_{1w} = \text{const}$ закрутка по высоте лопатки меняет знак.

Действительно, в верхних сечениях лопатки рабочего колеса окружные скорости велики, в корневых — малы; поэтому для выравнивания относительных скоростей по высоте лопатки необходимо в верхних сечениях уменьшать относительные скорости, что, как известно, достигается закруткой потока во входном аппарате по вращению, и, наоборот, в корневых сечениях следует увеличивать относительные скорости, что осуществляется предварительной закруткой потока против вращения.

Рассмотрим теперь случай цилиндрического течения газа за рабочим колесом ($R_m = \infty$) при постоянном значении коэффициента изоэнтропичности $m_{\text{н}}$ по высоте лопатки. Выпишем по аналогии с (155) уравнение движения

$$\frac{d\Lambda_2^2}{dr_2} + 2 \frac{\Lambda_2^2}{r_2} = (1 - \Lambda_2^2) \frac{d \left(\ln \frac{T_{02}}{T_{01}} \right)}{dr_2}; \quad (207)$$

обобщённое уравнение закрутки (28):

$$\Lambda_{2u} = \frac{r_1 \Lambda_{1u}}{r_2 \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}} - \frac{1 - \frac{T_{02}}{T_{01}}}{2 \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}} \frac{u_{2R}}{c_{1\text{max}}} \frac{1}{\bar{r}_2}, \quad (208)$$

где r_2 и r_1 — расстояние от оси вращения элементарной струйки тока в межвенцовых зазорах на входе в колесо и выходе из него, $\frac{u_{2R}}{c_{1\text{max}}} = \frac{\omega R_2}{c_{1\text{max}}}$, $\bar{r}_2 = \frac{r_2}{R_2}$; уравнение неразрывности для элементарной струйки (см. § 3)

$$\rho_1 c_{1m} \Delta F_{1m} = \rho_2 c_{2m} \Delta F_{2m} \quad (209)$$

или в безразмерном виде

$$q(\lambda_1) \sin \alpha_1 = \chi \frac{\Delta F_{2m}}{\Delta F_{1m}} q(\lambda_2) \sin \alpha_2, \quad (210)$$

$$\text{где } \chi = \frac{\pi_{0K}}{\sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}} = \sigma_K \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}.$$

В случае цилиндрического течения в межвенцовых зазорах

$$\frac{\Delta F_{2m}}{\Delta F_{1m}} = \frac{r_2}{r_1} \frac{dr_2}{dr_1} = \frac{dr_2^2}{dr_1^2},$$

$$c_{1m} = c_{1a},$$

$$c_{2m} = c_{2a},$$

поэтому уравнения неразрывности можно представить так:

$$\rho_1 c_{1a} = \rho_2 c_{2a} \frac{dr_2^2}{dr_1^2}, \quad (211)$$

или

$$q(\lambda_1) \sin \alpha_1 = \chi q(\lambda_2) \sin \alpha_2 \frac{dr_2^3}{dr_1^3}. \quad (212)$$

Итак, для определения параметров потока за рабочим колесом при заданном распределении работы по высоте лопатки и заданных параметрах на входе в колесо требуется решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений (207), (208) и (212).

Однако в трёх случаях, имеющих широкое практическое применение: в случае осевого входа, осевого выхода и в случае закрутки потока на входе в рабочее колесо по закону постоянства циркуляции, задача существенно упрощается, так как отсутствует необходимость в определении соответствия между радиусами струйки r_1 и r_2 , т. е. задача сводится к решению системы только из двух уравнений (207) и (208).

В случае осевого входа ($\Lambda_{1u} = 0$) закрутка за колесом не зависит от закрутки на входе в него и определяется согласно (208) только заданным распределением $\frac{T_{02}}{T_{01}}$:

$$\Lambda_{2u} = \frac{\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1}{2 \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}} \frac{u_{2R} r_2}{c_1 \max}}}. \quad (213)$$

В случае осевого выхода ($\Lambda_{2u} = 0$) задаваемое распределение работы целиком определяет закрутку потока на входе:

$$\Lambda_{1u} = \frac{1 - \frac{T_{02}}{T_{01}}}{U_{1R}^* r_1}, \quad (214)$$

где

$$U_{1R}^* = \frac{\omega R_1}{c_{1\max}},$$

$$\bar{r}_1 = \frac{r_1}{R_1}.$$

Если закрутка на входе осуществляется по закону постоянства циркуляции

$$\Lambda_{1u} \bar{r}_1 = \text{const},$$

то закрутка на выходе согласно (208) определяется только распределением степени изменения температуры торможения

$$\Lambda_{2u} = \frac{\text{const}}{\bar{r}_2 \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}} - \frac{1 - \frac{T_{02}}{T_{01}}}{2 \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}} \frac{u_{2R}}{c_{1\max}} \bar{r}_2. \quad (215)$$

Остановимся подробнее на каждом из этих случаев. Степень с осевым входом потока в рабочее колесо применяется главным образом в компрессорах.

При осевом входе и при постоянстве работы по высоте лопатки ($T_{02}/T_{01} = \text{const}$) закрутка потока на выходе согласно (213) равна:

$$\Lambda_{2u} = \frac{\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1}{2 \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}} \frac{u_{2R}}{c_{1\max}} \cdot \frac{1}{\bar{r}_2} = \frac{\text{const}}{\bar{r}_2}, \quad (216)$$

т. е. удовлетворяет закону постоянства циркуляции в потоке за рабочим колесом:

$$\Lambda_{2u} r_2 = \text{const}.$$

Записывая уравнение (207) в виде

$$\frac{d\Lambda_{2a}^2}{dr_2} + \frac{1}{r_2^2} \frac{d(\Lambda_{2u} r_2)^2}{dr_2} = (1 - \Lambda_2^2) \frac{d\left(\ln \frac{T_{02}}{T_{01}}\right)}{dr_2}, \quad (217)$$

получаем:

$$\frac{d\Lambda_{2a}^2}{dr_2} = 0,$$

откуда

$$\Lambda_{2a} = \text{const}. \quad (218)$$

Таким образом, при постоянстве работы в случае осевого входа имеем в потоке за рабочим колесом постоянство циркуляции и осевой скорости по высоте лопатки. Постоянство осевой скорости и циркуляции приводит к увеличению скорости, а при

постоянной температуре торможения за колесом и к увеличению числа M_2 по направлению к втулке. У втулки число M_2 достигает наибольшего значения. Одновременно с увеличением числа M_2 происходит уменьшение угла α_2 , значение которого достигает минимального значения у втулки; это приводит к необходимости большого поворота потока в привтулочном сечении, расположенного за рабочим колесом спрямляющего аппарата.

Оба указанных обстоятельства — большие значения числа M_2 и малые значения угла α_2 у втулки рабочего колеса — ограничивают величину подведенной работы в рабочем колесе компрессора и отведенной работы в рабочем колесе турбины.

Согласно (216) и (218) при постоянстве скорости и циркуляции имеем следующее выражение для безразмерной скорости:

$$\Lambda_2^2 = \Lambda_{2a}^2 + \frac{\Lambda_{2Ru}^2}{\bar{r}_2^2} = \Lambda_{2Ru}^2 \left(\operatorname{ctg}^2 \alpha_{2R} + \frac{1}{\bar{r}_2^2} \right), \quad (219)$$

где

$$\Lambda_{2Ru}^2 = \frac{\left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1 \right)^2}{4 \frac{T_{02}}{T_{01}} \frac{u_{2R}^2}{c_1^2 \max}}, \quad (220)$$

и угла:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{2R}}{\bar{r}_2}.$$

Если, например, считать заданными коэффициент осевой скорости и относительный радиус втулки колеса $\bar{r}_{2 \text{ вт}}$, то из (216) заключаем, что чем больше окружная скорость конца выходной кромки рабочего колеса, тем при меньшем значении коэффициента скорости Λ_2 возможно получить заданное значение степени повышения температуры торможения.

Если же считать заданным максимальное число Λ_2 (например, $\Lambda_2 = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}$ — соответствующее значению числа $M_2 = 1$), то, как видно из (219), чем больше окружная скорость, тем большее значение $\frac{T_{02}}{T_{01}}$ можно получить при заданных величинах коэффициента осевой скорости Λ_{2a} и относительного радиуса втулки колеса $\bar{r}_{2 \text{ вт}}$. В компрессоре обычно задаются окружной скоростью рабочего колеса, степенью повышения температуры торможения и весовым секундным расходом газа через данную ступень. При большой относительной втулке на выходе из рабочего колеса ($\bar{r}_{2 \text{ вт}}$) площадь проходного сечения мала, что приводит к большим значениям осевой скорости Λ_{2a} .

С другой стороны, согласно (216) увеличение втулки при заданном значении $\frac{T_2}{T_1}$ требует уменьшения окружной составляющей скорости.

При малой втулке за колесом получаются малая осевая и большая окружная составляющие скорости у втулки.

Отсюда нетрудно заключить, что имеется такое значение относительного радиуса втулки $r_{2\text{ вт}}$, при котором величина

$$\Lambda_{2\text{ вт}}^2 = \Lambda_{2a}^2 + \Lambda_{2u\text{ вт}}^2$$

при данных значениях $\frac{T_{02}}{T_{01}}$, G кг/сек и U_2^* достигает минимума.

Переходим к общему случаю осевого входа с переменной работой по высоте лопатки. Подставляя выражение для закрутки потока (213) в уравнение движения (207), получаем следующее линейное дифференциальное уравнение первого порядка, связывающее между собой коэффициент скорости за рабочим колесом и степень изменения температуры торможения:

$$\frac{d\Lambda_2^2}{dr_2} + \frac{d\left(\ln \frac{T_{02}}{T_{01}}\right)}{dr_2} \Lambda_2^2 + \frac{\left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1\right)^2}{2 \frac{T_{02}}{T_{01}} \frac{u_2^2 R}{c_{1\text{ max}}^2} r_2^3} - \frac{d\left(\ln \frac{T_{02}}{T_{01}}\right)}{dr_2} = 0; \quad (221)$$

его решение записывается в следующем виде:

$$\Lambda_2^2 = e^{-\int P(r_2) dr_2} \left[\text{const} - \int Q(r_2) e^{\int P(r_2) dr_2} dr_2 \right], \quad (222)$$

где

$$P(r_2) = \frac{d\left(\ln \frac{T_{02}}{T_{01}}\right)}{dr_2}, \quad (223)$$

$$Q(r_2) = \frac{\left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1\right)^2}{2 \frac{T_{02}}{T_{01}} \frac{u_2^2 R}{c_{1\text{ max}}^2} r_2^3} - \frac{d\left(\ln \frac{T_{02}}{T_{01}}\right)}{dr_2}. \quad (224)$$

Подставляя (223) и (224) в (222), после элементарных выкладок имеем:

$$\Lambda_2^2 = 1 + \frac{\text{const}}{\frac{T_{02}}{T_{01}}} - \frac{1}{2 \frac{T_{02}}{T_{01}} \frac{u_2^2 R}{c_{1\text{ max}}^2}} \int \frac{\left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1\right)^2}{r_2^3} dr_2. \quad (225)$$

Таким образом, если задано распределение степени изменения температуры торможения за рабочим колесом в функции от радиуса, то, пользуясь формулой (225), можно найти распределение коэффициентов скорости Λ_2 .

Определив из (213) значение коэффициента окружной составляющей скорости, получим угол

$$\alpha_2 = \arccos \frac{\Lambda_{2u}}{\Lambda_2}$$

и коэффициент осевой составляющей скорости

$$\Lambda_{2a} = \Lambda_2 \sin \alpha_2.$$

Если

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \text{const},$$

то

$$\int \frac{\left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1\right)^2}{r_2^3} d\bar{r}_2 = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1\right)^2 \int \frac{d\bar{r}_2}{r_2^3} = -\frac{\left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1\right)^2}{2r_2^2},$$

тогда согласно (225)

$$\Lambda_2^2 = 1 + \frac{\text{const}}{\frac{T_{02}}{T_{01}}} + \frac{\left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1\right)^2}{4 \frac{T_{02}}{T_{01}} \frac{u_2^2 R}{c_{1\text{max}}^2}} \frac{1}{r_2^2},$$

т. е.

$$\Lambda_2^2 = D_1 + \frac{D_2}{r_2^2}, \quad (226)$$

где D_1 и D_2 — некоторые постоянные величины. Выражение (226) совпадает с ранее полученной зависимостью (219) скорости на выходе из колеса от радиуса в случае постоянства работы по высоте лопатки.

Используя дифференциальное уравнение (221), можно решать и обратную задачу: задавая распределение Λ_2 по высоте лопатки, найти соответствующее распределение $\frac{T_{02}}{T_{01}}$. Не проводя общего анализа, остановимся на случае постоянства числа M_2 по высоте лопатки, т. е.

$$\Lambda_2 = \text{const},$$

при этом дифференциальное уравнение (221) принимает вид

$$(\Lambda_2^2 - 1) \frac{d\left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1\right)}{\left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1\right)^2} = -\frac{1}{2 \frac{u_2^2 R}{c_{1\text{max}}^2}} \frac{d\bar{r}_2}{r_2^3}. \quad (227)$$

После интегрирования приходим к следующему распределению безразмерной работы по высоте лопатки при $M_2 = \text{const}$:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1} = \text{const} - \frac{1}{(\Lambda_2^2 - 1) \frac{u_2^2 R}{c_{1\text{max}}^2}}. \quad (228)$$

Рассмотрим теперь осевой выход из рабочего колеса, изменяемый главным образом в одноступенчатых турбинах или в последней ступени многоступенчатой турбины.

При постоянстве работы $\left(\frac{T_{02}}{T_{01}} = \text{const}\right)$ закрутка на входе согласно (214) равна:

$$\Lambda_{1u} = \frac{1 - \frac{T_{02}}{T_{01}}}{U_{1R}^* \bar{r}_1} = \frac{\text{const}}{\bar{r}_1},$$

т. е.

$$\Lambda_{1u} \bar{r}_1 = \text{const},$$

что означает постоянство циркуляции по высоте лопатки за входным направляющим аппаратом. Этот случай уже подробно рассмотрен выше.

При осевом выходе потока из рабочего колеса и при постоянстве работы по высоте лопатки согласно (207) имеем:

$$\frac{d\Lambda_2^2}{dr_2} = 0,$$

т. е.

$$\Lambda_2 = \text{const}.$$

Таким образом, постоянной работе по высоте лопатки при осевом выходе соответствуют закрутка потока на входе в колесо по закону постоянства циркуляции и постоянная скорость на выходе из рабочего колеса.

Полагая в уравнении (207) $\Lambda_{2u} = 0$, получаем следующее дифференциальное соотношение между коэффициентом скорости и степенью изменения температуры торможения:

$$\frac{d\Lambda_2^2}{1 - \Lambda_2^2} = d \left(\ln \frac{T_{02}}{T_{01}} \right).$$

После интегрирования получаем:

$$\Lambda_2^2 = 1 - \frac{\text{const}}{\frac{T_{02}}{T_{01}}}.$$

Подставляя выражение для закрутки на входе (214) в уравнение движения за входным направляющим аппаратом (189), имеем:

$$\frac{d\Lambda_1^2}{d\bar{r}_1} + \frac{2 \left(1 - \frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^2}{U_{1R}^{*2} \bar{r}_1^3} = 0,$$

откуда приходим к следующему выражению для коэффициента скорости за входным аппаратом:

$$\Lambda_1^2 = \frac{2}{U_1^{*2}} \int \frac{\left(1 - \frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^2}{r_1^3} dr_1 + \text{const.}$$

Располагая величинами Λ_1 и Λ_{1u} , находим осевую скорость и угол α_1 .

При наличии закрутки потока на входе и выходе и постоянства циркуляции перед рабочим колесом закрутка потока на выходе определяется формулой (215), которую переписываем так:

$$\Lambda_{2u} = \frac{\text{const} - \frac{T_{02}}{T_{01}}}{2 \frac{u_2 R}{c_{1\max}} \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}} r_2}}. \quad (229)$$

При постоянстве работы $\left(\frac{T_{02}}{T_{01}} = \text{const}\right)$:

$$\Lambda_{2u} = \frac{\text{const}}{r_2},$$

что означает постоянство циркуляции и на выходе из рабочего колеса; этот случай (с постоянством осевой скорости на выходе из колеса) подробно рассмотрен выше.

Метод проектирования лопаток осевых машин с постоянством циркуляции по радиусу, обеспечивающим постоянство работы по высоте лопатки и цилиндрический характер течения газа в межвенцовых зазорах, был впервые разработан Н. Е. Жуковским в 1912 г. применительно к воздушному винту и тогда же был использован его учениками при проектировании вентиляторов для аэродинамических труб.

Такие винты и вентиляторы получили по инициалам создателя название винтов и вентиляторов типа «НЕЖ». В дальнейшем этот принцип проектирования лопастей был распространён учениками Н. Е. Жуковского—В. П. Ветчинкиным, К. А. Ушаковым и К. К. Баулиным на промышленные вентиляторы и компрессоры, а в настоящее время находит широкое применение и в проектировании турбин с длинными лопатками¹⁾.

Для анализа течения на выходе из колеса при закрутке потока на входе в колесо по закону постоянства циркуляции, но при переменной работе по высоте лопатки, подставляем в уравнение движения (207) выражение закрутки (229), предварительно

¹⁾ Уваров В. В., Профилирование длинных лопаток газовых и паровых турбин. Оборонгиз, М., 1945.

обозначив постоянную, входящую в числитель правой части, через N , т. е. положив

$$\Lambda_{2u} = \frac{N - \frac{T_{02}}{T_{01}}}{2 \frac{u_2 R}{c_{1\max}} \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}} \bar{r}_2}}.$$

В результате получаем следующее дифференциальное уравнение относительно Λ_2 :

$$\frac{d\Lambda_2^2}{d\bar{r}_2} + \frac{d\left(\ln \frac{T_{02}}{T_{01}}\right)}{d\bar{r}_2} \Lambda_2^2 + \frac{\left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - N\right)^2}{2 \frac{T_{02}}{T_{01}} \frac{u_2^2 R}{c_{1\max}^2} \bar{r}_2^3} - \frac{d\left(\ln \frac{T_{02}}{T_{01}}\right)}{d\bar{r}_2} = 0. \quad (230)$$

Сравнивая (230) с (221), замечаем, что различие заключается только в том, что в числителе третьего члена левой части уравнения (230) вместо единицы стоит некоторая постоянная величина N ; это позволяет по аналогии с (225) написать следующее решение уравнения (230):

$$\Lambda_2^2 = 1 + \frac{\text{const}}{\frac{T_{02}}{T_{01}}} - \frac{1}{2 \frac{T_{02}}{T_{01}} \frac{u_2^2 R}{c_{1\max}^2}} \int \frac{\left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - N\right)^2}{\bar{r}_2^3} d\bar{r}_2. \quad (231)$$

Условие постоянства числа M_2 за колесом можно по аналогии с (228) записать в следующем виде:

$$\frac{1}{\frac{T_{02}}{T_{01}} - N} = \text{const} - \frac{1}{(\Lambda_2^2 - 1) \frac{u_2^2 R}{c_{1\max}^2} \bar{r}_2^2}. \quad (232)$$

Если известны параметры потока на входе и выходе из лопаточного венца, то для нахождения функции

$$r_2 = r_2(r_1), \quad (233)$$

характеризующей перетекание струй в рабочем колесе с цилиндрической поверхности тока одного радиуса (перед венцом) на цилиндрическую поверхность тока другого радиуса (за венцом), необходимо составить уравнение неразрывности. Во входном направляющем аппарате имеем:

$$\rho_H c_{Ha} \pi (R_H^2 - r_H^2) = 2\pi \int_{r_1}^{R_1} \rho_1 c_{1a} r_1 dr_1,$$

или в безразмерном виде:

$$q (\lambda_{Ha}) (1 - \bar{r}_H^2) \frac{R_H^2}{R_1^2} = 2 \int_{\bar{r}_1}^1 \sigma_1 q (\lambda_1) \sin \alpha_1 \bar{r}_1 d\bar{r}_1. \quad (234)$$

Здесь

$$\lambda = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \Lambda,$$

$$\bar{r}_H = \frac{r_H}{R_H},$$

$$\bar{r}_1 = \frac{r_1}{R_1}.$$

При постоянстве потерь по высоте лопатки

$$\frac{q(\lambda_{Ha}) (1 - \bar{r}_H^2) \left(\frac{R_H}{R_1}\right)^2}{2\sigma_1} = \int_{\bar{r}_1}^1 q(\lambda_1) \sin \alpha_1 \bar{r}_1 d\bar{r}_1. \quad (235)$$

Из определения $q(\lambda)$ следует:

$$\begin{aligned} q(\lambda) \sin \alpha &= \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \sin \alpha = \\ &= \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda_a \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_a^2 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_u^2\right)^{\frac{1}{k-1}} = \\ &= \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda_a \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_a^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \left[1 - \frac{\frac{k-1}{k+1} \lambda_u^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_a^2}\right]^{\frac{1}{k-1}} = \\ &= q(\lambda_a) \left[1 - \frac{\frac{k-1}{k+1} \lambda_u^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_a^2}\right]^{\frac{1}{k-1}}. \end{aligned} \quad (236)$$

Подставляя последнее в (235), получаем:

$$\frac{q(\lambda_{Ha}) (1 - \bar{r}_H^2) \left(\frac{R_H}{R_1}\right)^2}{2\sigma_1} = \int_{\bar{r}_1}^1 q(\lambda_{1a}) \left[1 - \frac{\frac{k-1}{k+1} \lambda_{1u}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{1a}^2}\right]^{\frac{1}{k-1}} \bar{r}_1 d\bar{r}_1.$$

При закрутке потока в направляющем аппарате по закону постоянства циркуляции имеем:

$$\frac{\frac{k-1}{k+1} \lambda_{1u}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{1a}^2} = \frac{\Lambda_{1u}^2}{1 - \Lambda_{1a}^2} = \frac{1}{r_1^2} \frac{\Lambda_1^2 R u}{1 - \Lambda_{1a}^2},$$

$$q(\lambda_{1a}) = \text{const.}$$

Обозначая

$$y_1 = \frac{\Lambda_1^2 R u}{1 - \Lambda_{1a}^2} = \frac{\lambda_1^2 R u}{k-1 - \lambda_{1a}^2} = \text{const.}$$

записываем уравнение неразрывности при постоянстве циркуляции в следующем виде:

$$\frac{q(\lambda_{Ha})}{q(\lambda_{1a})} \frac{1 - \bar{r}_H^2}{2\sigma_1} \left(\frac{R_H}{R_1}\right)^2 = \int_{\bar{r}_1}^1 \left(1 - \frac{y_1}{\bar{r}_1^2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \bar{r}_1 \bar{d}\bar{r}_1. \quad (237)$$

При значениях

$$\frac{c_p}{c_v} = k = \frac{N+1}{N}, \quad (238)$$

где N — целое число, интеграл, стоящий в правой части равенства

$$B = \int \left(1 - \frac{y}{\bar{r}^2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \bar{r} \bar{d}\bar{r},$$

выражается через сумму интегралов типа $\int x^n dx$.

Например, при $k = \frac{4}{3}$

$$\begin{aligned} B &= \int \left(1 - \frac{y}{\bar{r}^2}\right)^3 \bar{r} \bar{d}\bar{r} = \int \left(\bar{r} - \frac{3y}{\bar{r}} + \frac{3y^2}{\bar{r}^3} - \frac{y^3}{\bar{r}^5}\right) \bar{d}\bar{r} = \\ &= \frac{\bar{r}^2}{2} - 3y \ln \bar{r} - \frac{6y^2}{\bar{r}^2} + \frac{4y^3}{\bar{r}^4}. \end{aligned}$$

Если $k = \frac{c_p}{c_v}$ не удовлетворяет условию (238), то вычисление интеграла B представляет известные трудности. Для воздуха ($k = 1,4$)

$$B = \int \left(1 - \frac{y}{\bar{r}^2}\right)^{2,5} \bar{r} \bar{d}\bar{r}.$$

Подстановкой

$$x^2 = 1 - \frac{y}{\bar{r}^2}$$

приводим этот интеграл к виду

$$B = y \int \frac{x^6}{(1-x^2)^2} dx.$$

Окончательно имеем:

$$B = y \left\{ \frac{2x^5 - 5x^4 + 5x^2}{4(1-x^2)} - \frac{1}{2} \ln_*(1-x^2) \right\},$$

Составим уравнение неразрывности для сечения на входе в ступень и за рабочим колесом:

$$\rho_{\text{H}} c_{\text{H}} \pi (R_{\text{H}}^2 - r_{\text{H}}^2) = 2\pi \int_{r_2}^{R_2} c_{2a} \rho_2 r_2 dr_2;$$

в безразмерном виде это уравнение представится так:

$$\frac{q(\lambda_{\text{H}a})(1 - \bar{r}_{\text{H}}^2)}{2} \frac{R_{\text{H}}^2}{R_2^2} = \int_{\bar{r}_2}^1 \frac{p_{02}}{p_{0\text{H}}} q(\lambda_2) \sin \alpha_2 \bar{r}_2 d\bar{r}_2. \quad (239)$$

При постоянстве полного давления и адиабатического коэффициента полезного действия по высоте лопатки

$$\frac{q(\lambda_{\text{H}a})(1 - \bar{r}_{\text{H}}^2) \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}}{2 \frac{p_{02}}{p_{0\text{H}}}} \frac{R_{\text{H}}^2}{R_2^2} = \int_{\bar{r}_2}^1 q(\lambda_2) \sin \alpha_2 \bar{r}_2 d\bar{r}_2. \quad (240)$$

Если за колесом, кроме постоянства полного давления, имеется ещё и постоянство циркуляции, то согласно (237) уравнение неразрывности (240) записывается в следующем виде:

$$\frac{q(\lambda_{\text{H}a})(1 - \bar{r}_{\text{H}}^2) \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}}{q(\lambda_{2a})} \frac{R_{\text{H}}^2}{R_2^2} = \int_{\bar{r}_2}^1 \left(1 - \frac{y_2}{r_2^2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \bar{r}_2 d\bar{r}_2. \quad (241)$$

где

$$y_2 = \frac{\lambda_2 Ru}{1 - \lambda_{2a}} = \frac{\lambda_2 Ru}{k+1 - \lambda_{2a}} = \text{const.}$$

В несжимаемой жидкости уравнение неразрывности для входного аппарата выглядит так:

$$\frac{c_{\text{H}a}(1 - \bar{r}_{\text{H}})}{2} \frac{R_{\text{H}}^2}{R_1^2} = \int_{\bar{r}_1}^1 c_{1a} \bar{r}_1 d\bar{r}_1,$$

а для колеса

$$\frac{c_{\text{H}a}}{2} (1 - \bar{r}_{\text{H}}^2) \frac{R_{\text{H}}^2}{R_2^2} = \int_{\bar{r}_2}^1 c_{2a} \bar{r}_2 d\bar{r}_2.$$

При постоянстве циркуляции осевая составляющая скорости также постоянна, отсюда во входном аппарате:

$$c_{\text{H}a} \frac{1 - \bar{r}_{\text{H}}^2}{2} \frac{R_{\text{H}}^2}{R_2} = \frac{1 - \bar{r}_1^2}{2} c_{1a}$$

и далее

$$\frac{1 - \bar{r}_1^2}{1 - \bar{r}_H^2} = \frac{c_{Ha}}{c_{1a}} \frac{R_H^2}{R_1^2} = \text{const.} \quad (242)$$

В случае цилиндрического кожуха ($R_H = R_1$)

$$\frac{1 - \bar{r}_1^2}{1 - \bar{r}_H^2} = \frac{c_{Ha}}{c_{1a}} = \text{const.} \quad (243)$$

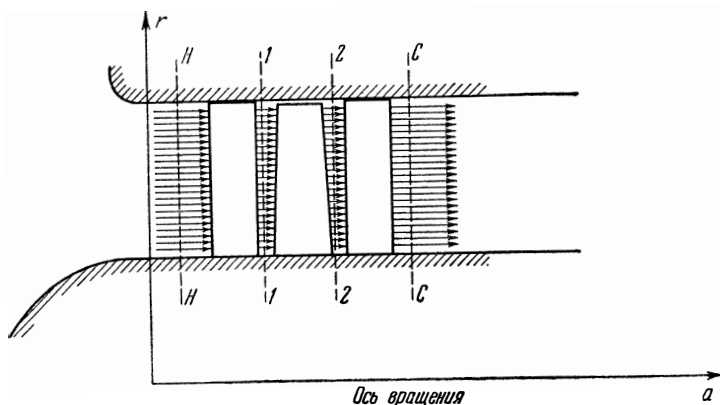
По аналогии за колесом имеем:

$$\frac{1 - \bar{r}_2^2}{1 - \bar{r}_1^2} = \frac{c_{1a}}{c_{2a}} \frac{R_1^2}{R_2^2} = \text{const.}, \quad (244)$$

и в случае цилиндрического кожуха ($R_1 = R_2$)

$$\frac{1 - \bar{r}_2^2}{1 - \bar{r}_1^2} = \frac{c_{1a}}{c_{2a}} = \text{const.} \quad (245)$$

При анализе пространственного течения в межвенцовых зазорах ступени возможна и такая постановка задачи, при которой соответствие радиусов уже не является искомым, а задаётся заранее.



Фиг. 339. Цилиндрическая ступень. Стрелки на фигуре изображают меридиональные проекции линий тока.

Остановимся на одном примере такой задачи — на цилиндрической ступени турбомшины (фиг. 339). В этом случае должны иметься цилиндрическая втулка ($r_{H, \text{вт}} = r_{1\text{вт}} = r_{2\text{вт}} = r_{C \text{вт}}$) и цилиндрический кожух ($R_H = R_1 = R_2 = R_C$), и во всём пространстве течения выполняются условия

$$r_H = r_1 = r_2 = r_C. \quad (246)$$

В несжимаемой жидкости из уравнения неразрывности, написанного для элементарной струйки, следует, что осевые скорости вдоль ступени не изменяются:

$$c_{на} = c_{1a} = c_{2a}. \quad (247)$$

Если на входе в ступень поле осевых скоростей равномерное, то из выражения (247) следует, что скорость не изменяется и по высоте лопатки:

$$c_{на} = c_{1a} = c_{2a} = \text{const}. \quad (248)$$

Подставляя это условие в уравнение движения за входным аппаратом

$$\frac{dc_{1a}^2}{dr_1} + \frac{1}{r_1^2} \frac{d(c_{1u}r_1)^2}{dr_1} = 0,$$

получаем:

$$\frac{1}{r_1^2} \frac{d(c_{1u}r_1)^2}{dr_1} = 0,$$

т. е.

$$c_{1u} r_1 = \text{const},$$

что означает постоянство циркуляции в потоке за входным аппаратом.

Обращаясь к течению за колесом, записываем уравнение движения в общем случае переменной работы по высоте лопатки:

$$\frac{dc_{2a}^2}{dr_2} + \frac{1}{2r_2^2} \frac{d(c_{2u}r_2)^2}{dr_2} = -g \frac{dL}{dr_2}. \quad (249)$$

Из уравнения Эйлера следует:

$$L = \frac{1}{g} (c_{1u}u_1 - c_{2u}u_2).$$

Дифференцируя, имеем:

$$\begin{aligned} -g \frac{dL}{dr_2} &= \frac{d(c_{2u}u_2)}{dr_2} - \frac{d(c_{1u}u_1)}{dr_2} = \\ &= \frac{\omega d(r_2 c_{2u})}{dr_2} - \frac{\omega d(c_{1u}r_1)}{dr_2}. \end{aligned} \quad (250)$$

Подставляя (248) и (250) в (249), получим уравнение движения за рабочим колесом в следующем виде:

$$\frac{dr_2}{r_2} + \frac{dc_{2u}}{c_{2u}} = \frac{\omega d(r_2 c_{2u})}{c_{2u}^2}. \quad (251)$$

Решая это уравнение с помощью интегрирующего множителя

$$\frac{c_{2u}}{2(\omega r_2 - c_{2u})}, \quad (252)$$

приходим к общему решению:

$$r_2 c_{2u} = \text{const}, \quad (253)$$

т. е. к постоянству циркуляции не только перед, но и за колесом. Это означает постоянство работы по высоте лопатки рабочего колеса.

Таким образом, в цилиндрической ступени турбомашин при несжимаемой жидкости имеет место постоянство циркуляции в межвенцовых зазорах ступени и постоянство работы по радиусу.

При постоянстве циркуляции вдоль лопатки степень реактивности колеса по радиусу изменяется:

$$\rho_R = 1 - \frac{\bar{c}_{1u} + \bar{c}_{2u}}{2} = 1 - \frac{c_{1u}r + c_{2u}r}{2r^2\omega} = 1 - \frac{\text{const}}{2r^2}. \quad (254)$$

Если значение степени реактивности на периферии ($r = R$) обозначить ρ_{RK} и ввести относительный радиус $\bar{r} = \frac{r}{R}$, то выражение (254) можно переписать так:

$$\rho = 1 - \frac{1 - \rho_{RK}}{\bar{r}^2}.$$

При значении $\rho_{RK} = 1$ постоянство циркуляции совпадает с постоянством степени реактивности. При $\rho_{RK} \neq 1$, как это показано на фиг. 340, степень реактивности по радиусу изменяется в зависимости от относительного радиуса \bar{r} .

При

$$\omega r_2 = c_{2u} \quad (255)$$

интегрирующий множитель (252) обращается в бесконечность, т. е. общее решение (253) уравнения (251) становится несправедливым. В этом случае имеется особое решение (255), соответствующее переменной циркуляции на выходе из колеса, что приводит в свою очередь к непостоянству работы по высоте лопатки:

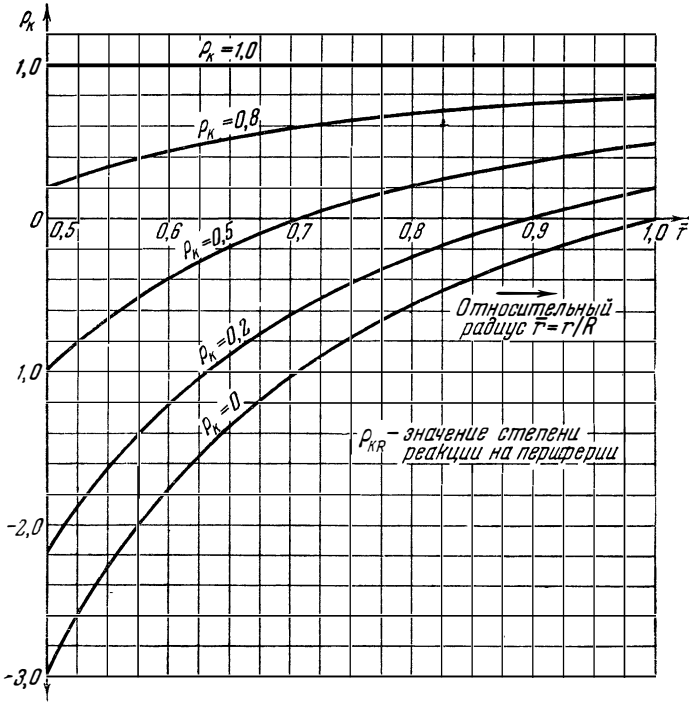
$$L = \frac{1}{g} (c_{1u}u_1 - c_{2u}u_2) = \frac{1}{g} (\text{const} - u_2^2).$$

Следует отметить, что при осевом входе и условии (255) распределение работы в цилиндрической ступени соответствует постоянству по высоте лопатки отношения работы к величине $\frac{u^2}{g}$, где u — местная окружная скорость:

$$\bar{L}_r = \frac{L_r}{\frac{u^2}{g}} = 1,$$

т. е. в этом случае все элементарные ступени являются эталонными ступенями.

Обратимся теперь к цилиндрической ступени в потоке сжимаемого газа. Остановимся, например, на входном направляю-



Фиг. 340. Изменение степени реактивности по высоте лопатки компрессора для разных значений степени реактивности на периферии ($\Gamma = \text{const}$).

щем аппарате. В этом случае уравнение движения выглядит так:

$$\frac{d\Lambda_1^2}{dr_1} + 2 \frac{\Lambda_1^2 u}{r_1} = 0. \tag{256}$$

Условие цилиндричности течения через аппарат имеет вид

$$\frac{c_{1a}}{c_{1a}} = \frac{\rho_{II}}{\rho_I}.$$

Ограничиваясь изоэнтропическим течением, можно последнее соотношение записать и так:

$$\frac{\Lambda_{1a}}{\Lambda_{IIa}} = \frac{(1 - \Lambda_{IIa}^2)^{\frac{1}{k-1}}}{(1 - \Lambda_I^2)^{\frac{1}{k-1}}},$$

откуда

$$\Lambda_{1a}^2 = \Lambda_n^2 \frac{(1 - \Lambda_{na}^2)^{\frac{2}{k-1}}}{(1 - \Lambda_1^2)^{\frac{2}{k-1}}} \quad (257)$$

Переписывая уравнение движения (256) в виде

$$\frac{d\Lambda_1^2}{dr_1} + \frac{2}{r_1} (\Lambda_1^2 - \Lambda_{1a}^2) = 0$$

и подставляя значение Λ_{1a} по формуле (257), получим после разделения переменных

$$\frac{(1 - \Lambda_1^2)^{\frac{2}{k-1}} d\Lambda_1^2}{\Lambda_1^2 (1 - \Lambda_1^2)^{\frac{2}{k-1}} - b} = \frac{dr}{r};$$

интегрируя, будем иметь:

$$r = \text{const} \cdot e^{\int \frac{(1 - \Lambda_1^2)^{\frac{2}{k-1}}}{\Lambda_1^2 (1 - \Lambda_1^2)^{\frac{2}{k-1}} - b} d\Lambda_1^2},$$

где

$$b = \Lambda_{na}^2 (1 - \Lambda_{na}^2)^{\frac{2}{k-1}} = \text{const}.$$

Найдя распределение по радиусу безразмерных скоростей, определяем из (257) осевые, а затем и окружные составляющие скоростей и величины углов α_1 .

Цилиндрическое течение газа через входной направляющий аппарат и рабочее колесо характеризуется следующим условием:

$$r_n = r_1 = r_2.$$

Уравнение неразрывности, написанное в этом случае для сечения на входе в ступень и сечения за рабочим колесом, есть

$$\rho_2 c_2 a = \rho_n c_n$$

или в безразмерном виде (см. § 3):

$$q(\lambda_n) = \frac{p_{02}}{p_{0n}} q(\lambda_2) \sin \alpha_2 \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}$$

Заменяя коэффициенты скорости

$$\Lambda = \frac{k-1}{k+1} \lambda,$$

переписываем уравнение неразрывности в следующем виде:

$$\Lambda_H (1 - \Lambda_H^2)^{\frac{1}{k-1}} = \Lambda_{2a} (1 - \Lambda_2^2)^{\frac{1}{k-1}} \frac{\frac{P_{02}}{P_{0H}}}{\sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}},$$

откуда

$$\Lambda_{2a} = \frac{\Lambda_H (1 - \Lambda_H^2)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}}{(1 - \Lambda_2^2)^{\frac{1}{k-1}} \frac{P_{02}}{P_{0H}}}.$$

Используя соотношение

$$\frac{P_{02}}{P_{0H}} = m_H \sigma_1 \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

где σ_1 и m_H — коэффициенты изэнтропичности соответственно входного аппарата и рабочего колеса, получаем в случае цилиндрического течения в ступени при постоянстве потерь по радиусу:

$$\Lambda_{2a}^2 = \frac{\text{const}}{(1 - \Lambda_2^2)^{\frac{2}{k-1}}} \frac{1}{\left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}.$$

Подставляя последнее выражение в уравнение цилиндрического движения за рабочим колесом (207), найдём:

$$\frac{d\Lambda_2^2}{dr_2} + \frac{2}{r_2} \left[\Lambda_2^2 - \frac{\text{const}}{(1 - \Lambda_2^2)^{\frac{2}{k-1}}} \frac{1}{\left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}} \right] = (1 - \Lambda_2^2) \frac{d \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right)}{dr_2}.$$

С другой стороны, согласно уравнению закрутки (208) при цилиндрическом течении ($r_1 = r_2$)

$$\Lambda_{2u}^2 = \frac{\left(2 \frac{u_2 R}{c_{1\max}} \Lambda_{2u} r_2 - 1 + \frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^2}{4 \frac{u_2 R}{c_{1\max}^2} r_2^2 \frac{T_{02}}{T_{01}}}.$$

Здесь Λ_{1u} удовлетворяет условию цилиндричности течения во входном направляющем аппарате и далее

$$\Lambda_2^2 = \frac{\text{const}}{(1-\lambda_2^2)^{k-1}} \frac{1}{\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}} + \frac{\left(2 \frac{u_2 R}{c_{1\max}} \Lambda_{1u}^- r_2 - 1 + \frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^2}{4 \frac{u_2 R}{c_{1\max}} r_2^2 \frac{T_{02}}{T_{01}}}$$

Подставляя последнее выражение в (207), получаем дифференциальное уравнение для распределения степени изменения температур торможения $\frac{T_{02}}{T_{01}}$ по высоте лопатки, после решения которого находим все остальные параметры потока за колесом.

В случае осевого входа ($\Lambda_{1u} = 0$) уравнение цилиндрического течения через колесо несколько упрощается, однако, и не решая его, легко показать, что при этом невозможно осуществить в рабочем колесе постоянного по радиусу подвода или отвода работы.

В самом деле, как было показано ранее, при цилиндрическом течении за колесом постоянство работы означает и постоянство осевой составляющей безразмерной скорости Λ_{2a} , что противоречит условию цилиндричности течения через ступень ($r_1 = r_2$).

При проектировании осевых турбомашин, особенно осевых компрессоров, часто применяют лопатки рабочего колеса с постоянной степенью реактивности ρ_R по радиусу.

Выразим коэффициент относительной скорости через степень реактивности. Поделив числитель и знаменатель правой части (200) на U_{1R}^{*2} , получим следующее выражение для безразмерной относительной скорости:

$$\Lambda_{1w}^2 = \frac{\bar{c}_{1u}^2 + \bar{c}_{1a}^2 - 2\bar{c}_{1u}\bar{r}_1 + \bar{r}_1^2}{U_{1R}^{*2} - 2\bar{c}_{1u}\bar{r}_1 + \bar{r}_1^2}$$

Здесь черта сверху обозначает, что скорость или её составляющая отнесена к окружной скорости конца лопатки рабочего колеса. При равенстве осевых скоростей на входе и выходе из колеса в случае $r_1 = r_2$ степень реактивности рабочего колеса компрессора можно представить в следующем виде:

$$\rho_R = 1 - \frac{\bar{c}_{1u}}{r_1} - 0,5 \frac{\bar{L}}{r_1},$$

откуда

$$\bar{c}_{1u} = (1 - \rho_R) \bar{r}_1 - 0,5 \bar{L},$$

$$\bar{L} = \frac{L}{\frac{u_R^2}{g}}$$

Подставляя последнее в выражение для квадрата безразмерной относительной скорости, получим:

$$\Lambda_{1w}^2 = \frac{\bar{c}_{1a}^2 + 0,25\bar{L} + \bar{L} \rho_{R1} + \rho_{R1}^2}{\frac{1}{U_{1R}^{*2}} + \bar{L} \rho_{R1} + (2\rho_{R1} - 1)\bar{r}_1^2}.$$

При значении степени реактивности

$$\rho_{R1} = 0,5$$

имеем:

$$\Lambda_{1w}^2 = \frac{2\bar{c}_{1a}^2 + 0,5\bar{L} + \bar{L}\bar{r}_1 + 0,5\bar{r}_1^2}{\frac{2}{U_{1R}^{*2}} + \bar{L}\bar{r}_1}.$$

Как следует из последних формул, распределение чисел M_w при входе в рабочее колесо при постоянстве степени реактивности по радиусу оказывается более равномерным, чем при постоянстве циркуляции; то же относится и к числам M в абсолютном движении за колесом.

Рассмотрим более подробно условие постоянства реактивности в случае несжимаемой жидкости при отсутствии потерь.

С этой целью введём явным образом значение степени реактивности в уравнения движения в межвенцовых зазорах. По определению степени реактивности

$$\rho_{R1} = \frac{\int_1^2 \frac{dp}{\gamma}}{L} = 1 - \frac{c_2^2 - c_1^2}{2gL}; \quad (258)$$

в случае несжимаемой жидкости

$$\rho_{R1} = \frac{p_2 - p_1}{\gamma L}.$$

Из выражения (258) получаем:

$$c_2^2 - c_1^2 = (1 - \rho_{R1}) 2gL.$$

Однако

$$c_2^2 - c_1^2 = c_{2u}^2 - c_{1u}^2 + c_{2a}^2 - c_{1a}^2, \quad (259)$$

поэтому

$$c_{2u}^2 - c_{1u}^2 = (1 - \rho_{R1}) 2gL - (c_{2a}^2 - c_{1a}^2). \quad (260)$$

Напишем уравнения движения перед колесом

$$\frac{1}{2} \frac{dc_{1u}^2}{dr} + \frac{1}{2} \frac{dc_{1a}^2}{dr} + \frac{c_{1u}^2}{r} = 0$$

и за колесом

$$\frac{1}{2} \frac{dc_{2u}^2}{dr} + \frac{1}{2} \frac{dc_{2a}^2}{dr} + \frac{c_{2u}^2}{r} = g \frac{dL}{dr}.$$

Вычтя одно из другого, будем иметь:

$$\frac{1}{2} \frac{d(c_{2u}^2 - c_{1u}^2)}{dr} + \frac{1}{2} \frac{d(c_{2a}^2 - c_{1a}^2)}{dr} + \frac{c_{2u}^2 - c_{1u}^2}{r} = g \frac{dL}{dr}. \quad (261)$$

Строго говоря, полученное уравнение справедливо только в случае цилиндрического течения, когда радиусы соосных цилиндрических поверхностей тока до и после колеса одинаковы ($r_1 = r_2$). В общем же случае рассматриваемого нами течения

$$r_1 \neq r_2.$$

Однако если разница между r_1 и r_2 практически невелика, то можно считать уравнение (261) справедливым и для некоторых других случаев течения.

Заменяя в уравнении (261) разность квадратов окружных составляющих скорости по (260), получим уравнение движения, в которое в явном виде входит степень реактивности:

$$(1 - \rho_K) \frac{2L}{r} - \frac{c_{2a}^2 - c_{1a}^2}{r \cdot g} = \frac{d(\rho_K L)}{dr}. \quad (262)$$

Исследуем два случая рабочего колеса с постоянной степенью реактивности по высоте лопатки¹⁾:

1-й случай. Постоянная степень реактивности и работа:

$$\rho_K = \text{const}, \quad L = \text{const}. \quad (263)$$

В этом случае уравнение (262) примет вид

$$c_{2a}^2 - c_{1a}^2 = 2gL(1 - \rho_K) = \text{const}, \quad (264)$$

т. е.

$$c_{2a}^2 - c_{1a}^2 = \text{const}.$$

Заметим, что при

$$c_{2a} = c_{1a}$$

из выражения (264) получается: $\rho_K = 1$.

Определим закрутку потока, соответствующую условию (263). Для этого выражение (264) подставим в уравнение (260):

$$c_{2u}^2 - c_{1u}^2 = (1 - \rho_K) 2gL - (1 - \rho_K) 2gL = 0; \quad (265)$$

отсюда

$$c_{2u} = -c_{1u}. \quad (266)$$

¹⁾ Холщевников К. В., Выбор параметров и расчёт осевого компрессора. Оборонгиз, М., 1949.

При этом мы отбрасываем тривиальное решение уравнения (265)

$$c_{2u} = c_{1u},$$

так как в этом случае работа равна нулю:

$$L = \frac{u}{g} (c_{1u} - c_{2u}) = 0.$$

Из условия постоянства работы согласно (266) имеем:

$$gL = u (c_{1u} - c_{2u}) = 2\omega r c_{1u} = \text{const},$$

т. е. закрутка потока до и после колеса соответствует закону постоянства циркуляции:

$$|c_{1u}| = |c_{2u}| = \frac{\text{const}}{r}.$$

Проходное сечение колеса может быть определено при этом по формулам, полученным для случая постоянной циркуляции перед и за колесом.

2-й случай. Постоянство степени реактивности при закрутке потока перед и за колесом по закону вращения твёрдого тела:

$$\rho_K = \text{const},$$

$$c_{1u} = \text{const} \cdot r,$$

$$c_{2u} = \text{const} \cdot r.$$

В этом случае

$$L = \frac{1}{g} u \Delta c_u = \text{const} \cdot r^2. \quad (267)$$

Подставляя значение работы (267) и степени реактивности в уравнение движения (262), получим:

$$\frac{c_{2a}^2 - c_{1a}^2}{2g} = L (1 - 2\rho_K) = \text{const} r^2 (1 - 2\rho_K).$$

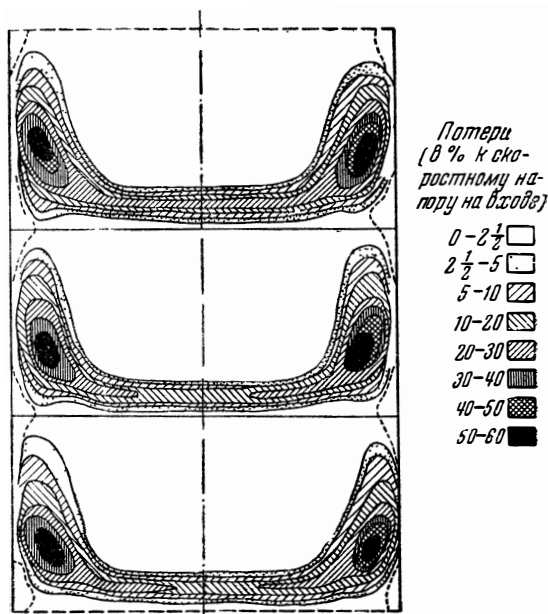
Таким образом, при осуществлении закрутки по закону вращения твёрдого тела возможно любое значение степени реактивности; соответствующее распределение осевых скоростей найдётся из последнего уравнения, а проходное сечение колеса — из уравнения неразрывности.

В заключение настоящего параграфа остановимся на потерях, происходящих в венце осевой машины.

Определяя коэффициент полезного действия элементарной ступени, мы учитывали только так называемые профильные потери, образующиеся при плоском обтекании решётки профилей, и соответственно получили профильный коэффициент полезного действия ступени.

Обычно при экспериментальном исследовании решётки профили находятся между двумя параллельными плоскостями, ограничивающими поток; на этих плоскостях образуется погра-

ничный слой, который вызывает поперечное перетекание жидкости в межлопаточном канале, приводящее к значительным потерям энергии. На фиг. 341 наглядно показано распределение потерь на выходе из диффузорной решётки; в данном случае дополнительные потери, связанные с трёхмерным характером потока, составляют в среднем по сечению 6% от скоростного



Фиг. 341. Распределение потерь по размаху лопатки в выходном сечении диффузорной решётки.

напора на входе, в то время как профильные потери составляют всего 2% от скоростного напора. Доля этих дополнительных потерь увеличивается с уменьшением высоты лопаток.

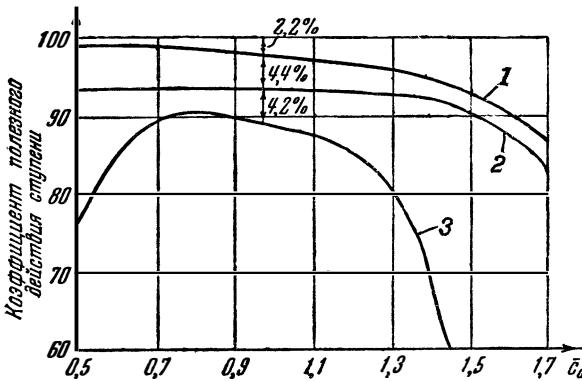
В реальной ступени, кроме потерь от поперечного перетекания, существуют ещё особые потери, связанные с утечкой жидкости через радиальный зазор между лопатками рабочего колеса и неподвижным кожухом и тем обстоятельством, что каждый последующий венец работает в потоке, возмущённом предыдущим венцом.

На фиг. 342 представлены экспериментальные кривые коэффициента полезного действия ступени дозвукового компрессора, в зависимости от \bar{c}_a , позволяющие судить об удельной роли различных потерь. Так, при коэффициенте полезного действия ступени около 90% приблизительно 4% составляют профильные потери, 2% дают потери на трение в кольцевом канале и 4%

составляют так называемые вторичные потери, связанные со взаимодействием элементарных решёток (в том числе и с радиальным перетеканием). Если все потери распределить равномерно по длине лопатки рабочего колеса, то их можно учесть некоторым увеличением значения C_x элементарной решётки. Для радиальных зазоров, не превышающих 1—2% длины лопатки, и осевых зазоров порядка от 20 до 50% хорды можно эффективное значение C_x элементарной решётки определять по формуле

$$C_{x \text{ э}} = C_{x \text{ пр}} + C_{xa} + C_{xt},$$

где $C_{x \text{ пр}}$ — коэффициент сопротивления крыла в плоской решётке



Фиг. 342. Зависимость коэффициента полезного действия колеса от безразмерной осевой скорости c_a . 1—включает потери в кольцевом канале, 2—включает также вторичные потери, 3—включает, кроме того, профильные потери.

(коэффициент «профильного» сопротивления), C_{xa} — коэффициент сопротивления трения в кольцевых каналах. C_{xt} — коэффициент, учитывающий все прочие потери, в том числе и потери на перетекание. Коэффициент $C_{x \text{ пр}}$ может быть взят из данных продувки плоских решёток, а последние два коэффициента — из следующих эмпирических формул:

$$C_{xa} = 0,02 \frac{t}{h}, \quad C_{xt} = 0,018 C_y^2,$$

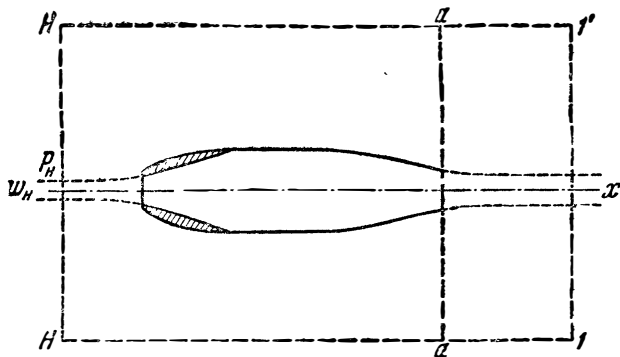
где h — высота лопатки.

В заключение отметим, что рассмотренные выше потери вызывают не только уменьшение коэффициента полезного действия, но также и уменьшение прироста полного давления.

Г Л А В А X
РЕАКТИВНАЯ СИЛА. ВОЗДУШНО-РЕАКТИВНЫЕ
ДВИГАТЕЛИ

§ 1. Расчёт реактивной силы (тяги)

Полёт реактивного аппарата осуществляется под действием реактивной силы, или, как её часто называют, реактивной тяги, которую сообщает ему струя выходящих газов. Для нахождения величины реактивной силы P нет необходимости рассматривать



Фиг. 343. Контур для определения реактивной силы.

детально распределение давления по внутренним и наружным стенкам реактивного аппарата. Реактивную силу можно определить в конечном виде с помощью теоремы об изменении количества движения.

Совершая полёт, тело производит возмущение в окружающей среде. Всегда можно выделить некоторую, достаточно большую, например цилиндрическую, область, границы которой выходят за пределы возмущённой части потока (фиг. 343). На боковых границах этой области давление и скорость потока (считаем двигатель неподвижным, а воздух — движущимся со скоростью полёта) равны их значениям на бесконечности перед двигателем.

Пусть ось x совпадает с направлением полёта и является осью симметрии двигателя; спроектируем на ось x силы, действующие на двигатель и на поверхность выделенного контура. Так как силы давления в жидкости нормальны к поверхности, то проекции на ось x сил, действующих на боковые поверхности контура, обращаются в нуль. Поэтому уравнение Эйлера [см. (90) главы I] запишется так:

$$\int_0^{\infty} p_n dF - \int_0^{\infty} p_1 dF + P = \int_0^{\infty} (\omega_1 - \omega_n) dm_b + \int_0^{m_r} \omega_1 dm_r.$$

Здесь площади, на которые распространяются интегралы, и область интегрирования первого члена правой части бесконечны. Сила P берётся со знаком $+$ потому, что при выводе формулы (90) главы I предполагалось, что машина получает от газа работу, а здесь реактивный двигатель сообщает работу газу; $m_b = \frac{G_b}{g}$ — секундная масса воздуха, втекающая в контур через сечение F ; $m_r = \frac{G_r}{g}$ — дополнительная секундная масса горючего, которая подаётся в двигатель.

Если взять левую торцевую поверхность далеко перед двигателем, то давление на ней постоянно и равно атмосферному (p_n), а скорость потока равна скорости полёта (ω_n). Кроме того, можно допустить, что в поперечном направлении уже на некотором конечном расстоянии от поверхности двигателя поток является невозмущённым и площадь F , на которую распространяются интегралы левой части, считать конечной; точно так же конечной будет и область интегрирования в первом члене правой части. Тогда следует написать:

$$p_n F - \int_0^F p_1 \cdot dF + P = \int_0^{m_b} (\omega_n - \omega) \cdot dm_b + \int_0^{m_r} \omega_1 \cdot dm_r.$$

В большом числе случаев возмущение, вызываемое летящим телом, настолько незначительно, что в плоскости среза сопла a (вне струи выхлопных газов) давление обтекающего потока мало отличается от давления на бесконечности (p_n). Тогда силы давления на передней и задней торцевых поверхностях контура уравниваются везде, кроме участка, соответствующего поперечному сечению выхлопной струи (F_a). Скорости потока во всех элементарных струйках, кроме проходящих через двигатель, одинаковы (здесь мы пренебрегаем влиянием трения, вихревых и волновых потерь на наружной поверхности двигателя). Следовательно, изменение количества движения полу-

чается только в струе, протекающей сквозь двигатель. Тогда уравнение Эйлера принимает следующий вид:

$$(p_{\text{н}} - p_{\text{а}}) \cdot F_{\text{а}} + P = \frac{G_{\text{в}}}{g} (\omega_{\text{а}} - \omega_{\text{н}}) + \frac{G_{\text{г}}}{g} \cdot \omega_{\text{а}},$$

откуда получается основная формула для реактивной силы

$$P = \frac{G_{\text{в}}}{g} (\omega_{\text{а}} - \omega_{\text{н}}) + \frac{G_{\text{г}}}{g} \cdot \omega_{\text{а}} + (p_{\text{а}} - p_{\text{н}}) \cdot F_{\text{а}}. \quad (1)$$

В этих выражениях $\frac{G_{\text{в}}}{g}$ — секундная масса воздуха, всасываемого в двигатель, $\omega_{\text{а}}$ — средняя скорость истечения.

Следует подчеркнуть, что полученное соотношение справедливо только в том случае, если скорость и давление в плоскости *a* (за исключением участка рабочей струи) равны в точности их значениям на бесконечности перед двигателем. Кроме того, мы здесь пренебрегаем внешним лобовым сопротивлением двигателя, которое всегда может быть учтено отдельно.

На расчётном режиме работы реактивного двигателя давление в выхлопной струе равно давлению окружающей воздуха ($p_{\text{а}} = p_{\text{н}}$); в этом случае реактивная тяга равна изменению количества движения газа, прошедшего через двигатель:

$$P = \frac{G_{\text{в}}}{g} (\omega_{\text{а}} - \omega_{\text{н}}) + \frac{G_{\text{г}}}{g} \cdot \omega_{\text{а}}. \quad (2)$$

Однако в воздушно-реактивных двигателях второй член правой части мал и им часто пренебрегают¹⁾, т. е. принимают для воздушно-реактивных двигателей в расчётном случае²⁾:

$$P = \frac{G_{\text{в}}}{g} (\omega_{\text{а}} - \omega_{\text{н}}). \quad (3)$$

Тяга жидкостного реактивного двигателя, в котором не используется атмосферный воздух, определяется для расчётного режима по формуле

$$P = \frac{G_{\text{г}} + G_0}{g} \omega_{\text{а}} \quad (4)$$

или на нерасчётном режиме

$$P = \frac{G_{\text{г}} + G_0}{g} \cdot \omega_{\text{а}} + (p_{\text{а}} - p_{\text{н}}) \cdot F_{\text{а}}. \quad (5)$$

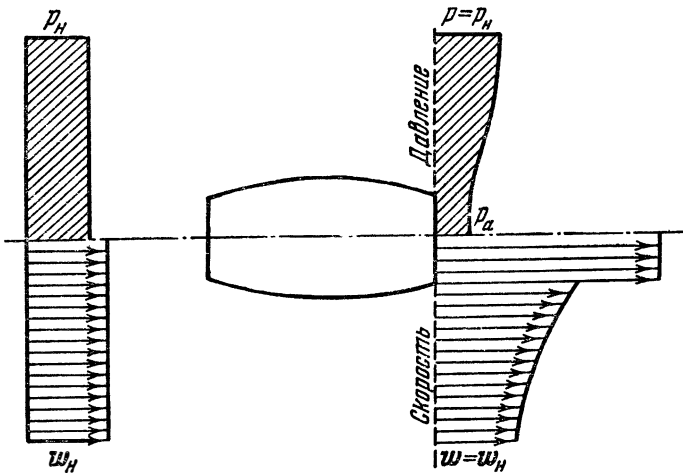
Здесь G_0 — секундный весовой расход окислителя.

1) Весовая доля горючего в воздухе, проходящем через двигатель, не превышает одного-пяти процентов: $G_{\text{г}} \approx (0,01 \div 0,05) \cdot G_{\text{в}}$.

2) Следует особо подчеркнуть, что величина $\omega_{\text{н}}$ есть скорость полёта, а отнюдь не скорость во входном отверстии двигателя.

Рассмотрим теперь влияние на реактивную силу непостоянства давлений в плоскости выходного среза двигателя. Построим эпюру давления и скорости на срезе сопла (фиг. 344). Для простоты остановимся на случае дозвукового истечения. Можно, например, представить себе такое обтекание двигателя, при котором давление вблизи выходного среза понижено, за счёт чего местная скорость во внешнем потоке увеличивается. Давление внутри дозвуковой выхлопной струи является примерно таким же, как и на её границе.

Для подсчёта реактивной силы воспользуемся основным свойством неравномерных (по величинам полного давления)



Фиг. 344. Распределение давления и скорости потока у выходного среза сопла.

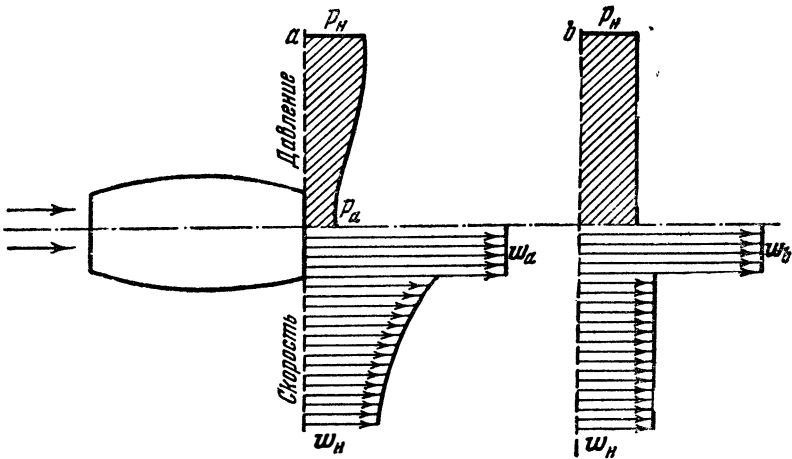
потоков, заключающимся в том, что неравномерность в распределении скорости исчезает очень медленно, а давление выравнивается быстро.

Так, например, неравномерность в поле давления, возникающая при повороте потока, выравнивается на расстоянии 1,5—2 диаметров прямой трубы за местом поворота, скорость же выравнивается на расстоянии 20—30 диаметров. Этим свойством можно воспользоваться при подсчёте тяги. Из опытов известно, что если плоскость b отстоит от среза сопла на расстоянии ab , больше одного диаметра среза (фиг. 345), то поле давлений уже равномерно. Таким образом, несколько отойдя от среза сопла, мы попадаем в плоскость постоянного давления ($p_b = p_n$), в связи с чем можем определить реактивную тягу

по формуле (3):

$$P = \frac{G_B}{g} (\omega_b - \omega_H).$$

Остаётся только найти величину скорости ω_b , которую имеет рабочая струя в плоскости b (фиг. 345). Для этого при дозвуковом истечении можно воспользоваться уравнением Бернулли, не учитывая гидравлических и тепловых потерь, ибо, как указывалось, участок струи, заключённый между плоскостями a и b , мал.



Фиг. 345. Картина распределения давления и скорости за двигателем.

Рассмотрим в качестве примера случай не слишком большой дозвуковой скорости ($M \ll 1$). Тогда по уравнению Бернулли

$$p_a + \rho_a \cdot \frac{\omega_a^2}{2} = p_H + \rho_a \cdot \frac{\omega_b^2}{2}.$$

При такой скорости разность давлений ($p_a - p_H$) бывает невелика, вследствие чего мы и приняли плотность газа неизменной.

Итак,

$$p_a - p_H = \rho_a \frac{\omega_b^2 - \omega_a^2}{2},$$

откуда

$$\omega_b = \omega_a \cdot \sqrt{\frac{p_a - p_H}{\rho_a \frac{\omega_a^2}{2}} + 1}.$$

В большинстве случаев при дозвуковой скорости на срезе сопла устанавливается давление, очень близкое к атмосферному,

и тогда полагают $\omega_b = \omega_a$. При сверхзвуковом истечении между плоскостями a и b могут образоваться скачки уплотнения. В этом случае расчёт поправки несколько усложняется, но также вполне доступен.

§ 2. Реактивная сила на нерасчётном режиме

В § 1 главы IV было показано, что скорость истечения из сверхзвукового сопла определяется отношением площади выходного отверстия к площади критического отверстия и не зависит от давлений перед и за соплом.

Давление в сверхзвуковой струе, вытекающей из сопла (p_a), является функцией от полного давления перед соплом (p_{0c}) и коэффициента скорости (или числа M) в выходном отверстии сопла¹⁾:

$$p_a = p_{0c} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_a^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Поэтому, как уже указывалось, при сверхзвуковом истечении давление на срезе сопла в общем случае не равно атмосферному:

$$p_a \neq p_H,$$

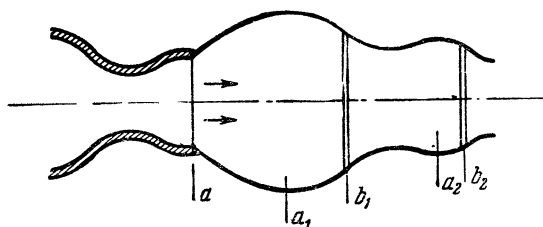
и лишь в частном случае расчётного режима эти давления одинаковы:

$$p_a = p_H.$$

Рассмотрим приближённую картину сверхзвукового истечения с избытком давления ($p_a > p_H$). На значительном удалении от сопла давления в струе и в атмосфере должны уравниваться. В связи с этим давление в струе по мере удаления от выходного отверстия сопла постепенно уменьшается, скорость газа возрастает и поперечное сечение сверхзвуковой струи увеличивается (фиг. 346). Опыт показывает, что при этом происходит перерасширение струи, т. е. в некотором наиболее широком сечении струи (a_1) устанавливается давление ниже атмосферного ($p_{a_1} < p_H$). После этого струя начинает сужаться, так как давление должно приблизиться к атмосферному, а скорость соответственно уменьшается; но торможение сверхзвукового потока приводит к возникновению скачка уплотнения; таким образом в некотором сечении струи b_1 скорость становится дозвуковой, а давление выше атмосферного. Затем давление вновь уменьшается, сближаясь с атмосферным; соответствующий рост дозвуковой скорости приводит к сужению струи. При достаточно большом избытке давле-

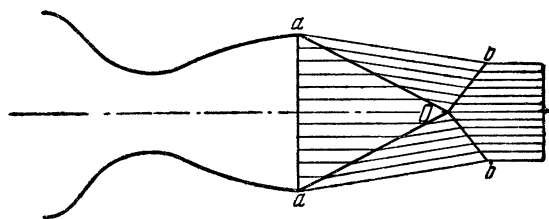
¹⁾ Рассматривается идеальный случай, т. е. имеется в виду отсутствие потерь в сопле.

ния скорость вновь достигает критического, а затем и сверхзвукового значения, т. е. появляется второй сверхзвуковой участок, на котором струя расширяется. В результате второго перерасширения ($p_{a_2} < p_H$) и последующего увеличения давления возникает второй скачок уплотнения b_2 . Естественно, что вследствие потерь в первом скачке второе перерасширение струи



Фиг. 346. Сверхзвуковое истечение с избытком давления.

и второй скачок уплотнения получаются слабее первых. Таким образом, постепенно струя рассеивает свою энергию, превращаясь в конце концов в обычную дозвуковую струю. При небольшом избытке давления на срезе сопла также получают колебания скорости и давления вдоль оси струи, но без скачков уплотнения.

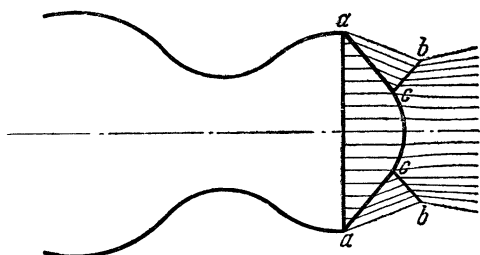


Фиг. 347. Схема истечения из плоскопараллельного сопла Лавала на режиме перерасширения.

Сверхзвуковое истечение из сопла в том случае, когда на срезе господствует давление ниже окружающего, осуществляется посредством сложной системы скачков. Рассмотрим, например, плоскопараллельную струю газа¹⁾ вытекающую в среду большего давления (фиг. 347). От краёв сопла отходят косые скачки уплотнения, встречающиеся на оси струи в точке O . Элементарные струйки газа, пересекая фронт косога скачка ($a - O$), переходят в область

1) Речь идёт о сопле, поперечное сечение которого имеет форму вытянутого прямоугольника. Сверхзвуковое истечение из осесимметричного сопла менее изучено, и мы его рассматривать не будем.

атмосферного давления $p_n > p_a$. Отклонение струек от первоначального направления, происходящее при скачке, должно было бы привести к их столкновению на оси симметрии. В действительности происходит второй поворот струек, возвращающий их к первоначальному направлению, но это приводит к возникновению второй группы скачков (Ob). Естественно, что если в областях aOb господствует атмосферное давление, то правее линий $O-b$ (фиг. 347) получится давление выше атмосферного. Поэтому за второй группой скачков устанавливается такой же режим, как при истечении с избытком давления ($p_a > p_n$). Чем меньше давление p_a на срезе сопла, тем больше получится угол между фронтом косога скачка и направлением потока; при этом увели-



Фиг. 348. Мостообразный скачок при нерасчётном истечении из сопла Лавали.

чивается угол, на который должен повернуться поток во второй группе скачков Ob . Одновременно уменьшается скорость потока за первой группой скачков (в области aOb), поэтому в конце концов наступает такой режим, при котором нужный угол поворота (ω) потока не может быть осуществлён в скачках Ob : $\omega > \omega_{\max}$. С этого момента

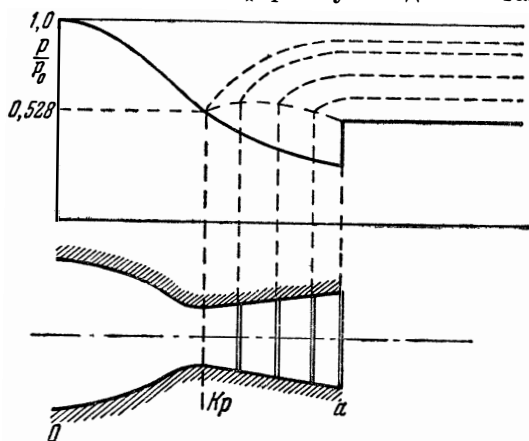
в центральной части струи образуется ударная волна, а вся схема скачков принимает мостообразную форму (фиг. 348). С увеличением противодавления участок ударной волны $c-c$ увеличивается. При большом противодавлении сверхзвуковое истечение оказывается невозможным, и скачки давления перемещаются внутрь сопла, т. е. осуществляются в меньшем сечении, на меньшей скорости для данного сверхзвукового течения. В таком случае выходная часть сопла за фронтом скачка работает как обыкновенный дозвуковой диффузор.

С падением давления в камере скачок всё ближе подходит к критическому сечению, одновременно становясь более слабым. Приблизившись вплотную к критическому сечению, скачок исчезнет, сверхзвуковое сопло при этом превратится в трубку Вентури (фиг. 349).

Местоположение плоскости скачка определяется отношением давления в камере (перед соплом) к давлению в той среде, куда истекает газ. Следует отметить, что режимы, при которых скачки получаются внутри сверхзвукового сопла, встречаются в двигателях редко. Обычно газ расширяется до выходного сечения сопла и вытекает со сверхзвуковой скоростью.

Остановимся на работе двигателя в нерасчётных условиях.

При работе двигателя на расчётном режиме давление в плоскости выходного среза сопла как в рабочей струе, так и во внешнем потоке равно атмосферному. Однако такое условие



Фиг. 349. Кривые давлений при скачке уплотнения внутри сопла Лавала.

выполняется лишь при одном значении скорости истечения, когда справедливо равенство (4) главы IV:

$$f_a = \frac{F_a}{F_{кр}} = \frac{1}{\lambda_a} \cdot \left(\frac{\frac{2}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_a^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

С изменением скорости полёта изменяется и коэффициент скорости истечения. По этой причине неизменное выходное сечение становится не соответствующим расчётному режиму. Можно выделить две области нерасчётных условий: первая — при недостаточной, вторая — при слишком большой площади выходного отверстия сопла.

В первом случае на срезе сопла Лавала поддерживается постоянное значение скорости истечения, соответствующее $\lambda_a (f_a)$ (такое же, как на расчётном режиме). Давление на срезе при этом выше атмосферного, ибо выходное сечение меньше расчётного, вследствие чего газ в сопле расширяется неполностью. Величина давления на срезе равна:

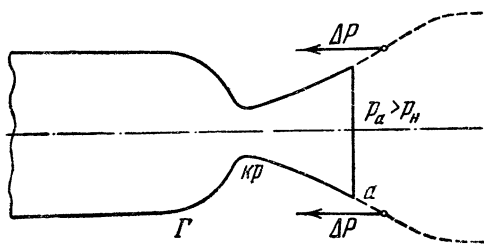
$$p_a = p_{0a} \cdot \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \lambda_a^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Чем меньше безразмерная площадь выходного отверстия (f_a), тем ниже коэффициент скорости (λ_a) и, следовательно, тем выше давление на срезе (p_a). Выходя из сопла, струя, как описано

выше, продолжает расширяться в атмосфере, а скорость потока растёт. На фиг. 350 показаны границы области в струе, внутри которых среднее давление остаётся избыточным.

Если достроить сопло до расчётных размеров, то из-за того, что внутри дополнительной части сопла господствует повышенное давление, получится прирост тяги ΔP . Следовательно, при недостаточной площади выходного отверстия тяга двигателя

меньше, нежели на расчётном режиме.



Фиг. 350. Истечение из сопла с избытком давления.

Другая область работы сопла Лавалья отвечает тому случаю, когда площадь выходного отверстия превосходит расчётную, т. е. когда величина полного давления недостаточна для того, чтобы получить на выходе атмосферное давление. На этом режиме

сопло Лавалья заполнено сверхзвуковым потоком до самого среза, а давление на срезе получается ниже атмосферного, т. е. сопло работает с перерасширением. При выходе струи в атмосферу в ней устанавливается, как было показано, сложная система скачков уплотнения, которая поддерживает разрежение на срезе сопла.

Работа на режиме перерасширения станет невозможна, если на выходе из сопла должно получиться давление ниже некоторого минимального:

$$P_a < P_{a_{\min}}$$

В таком случае, как указывалось прежде, скачок уплотнения переместится внутрь сопла Лавалья, давление на срезе сравняется с атмосферным и скорость истечения станет дозвуковой. Этот режим работы, как уже упоминалось, в двигателях почти никогда не встречается и практического значения не имеет.

Иначе говоря, при недостатке давления, т. е. при слишком широком сопле, скорость на выходе обычно такая же, как и на расчётном режиме, а давление здесь согласно приведённой формуле ниже атмосферного; при этом в выходной части сопла Лавалья получается участок вакуума, на котором к стенкам приложена сила ΔP , направленная по потоку (фиг. 351). Итак, на режиме перерасширения реактивная тяга ниже расчётной. Для увеличения тяги выгодно отбросить участок перерасширения, укоротив сопло до расчётных размеров.

Таким образом, во всех случаях отклонения от расчётного режима истечения при $\rho_{0a} = \text{const}$ реактивная сила меньше,

нежели на расчётном режиме. В формуле (1) для реактивной тяги

$$P = \frac{G_B}{g} (\omega_a - \omega_n) + \frac{G_r}{g} \cdot \omega_a + (p_a - p_n) \cdot F_a$$

на режиме перерасширения третий член отрицателен ($p_a < p_n$), а первые два члена больше, чем на расчётном режиме (из-за увеличения ω_a); на режиме избытка давления ($p_a > p_n$) третий член положителен, а первые два члена вследствие уменьшения ω_a меньше, чем на расчётном режиме.

Вычисления показывают, что некоторый отход от расчётных условий не влечёт за собой значительного уменьшения реактивной тяги. Получается это потому, что изменение третьего члена в формуле тяги компенсируется в значительной мере изменением первых двух членов. По этой причине в тех случаях, когда выходное сечение сопла больше, чем сечение камеры сгорания, в целях снижения лобового сопротивления можно без особого ущерба для тяги укоротить сопло, приняв $F_a = F_r$, т. е. работая на нерасчётном режиме. Можно доказать теоретически, на чём мы

здесь не останавливаемся, что величина $\frac{P}{F_a}$ достигает максимума

при условии, когда скорость истечения в точности равна скорости полёта ($\omega_a = \omega_n$), а давление на выходном срезе значительно выше расчётного ($p_a > p_n$); но на таком режиме тяга образуется только за счёт избытка давления на срезе сопла:

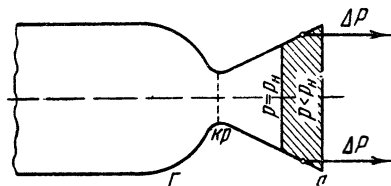
$$P = (p_a - p_n) \cdot F_a.$$

Выше установлено, что при постоянных значениях полного давления и температуры торможения в двигателе наибольшая тяга получается на расчётном режиме истечения.

Естественно, что в случае нерегулируемого выхлопного сопла, т. е. сопла с постоянными сечениями, тяга возрастает при увеличении полного давления, так как при этом давление на срезе сопла растёт, а коэффициент скорости истечения не изменяется.

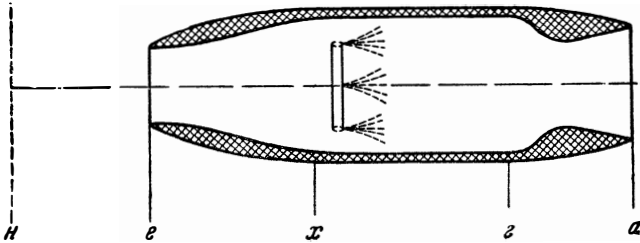
§ 3. Прямоточный воздушно-реактивный двигатель

Прямоточный воздушно-реактивный двигатель (фиг. 352) работает за счёт скоростного наддува. Во входном участке двигателя происходит преобразование скоростного напора набегающего потока в давление, т. е. динамическое сжатие воздуха. В камере сгорания подводится тепло, и образующаяся смесь сжатого



Фиг. 351. Истечение из сопла с перерасширением.

воздуха с продуктами сгорания нагревается. В выходном сопле нагретые газы расширяются; здесь давление преобразуется в скоростной напор.

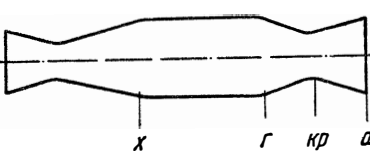


Фиг. 352. Схема прямоточного воздушно-реактивного двигателя: ϵ —входное сечение, x —начальное сечение камеры сгорания, $г$ —конечное сечение камеры сгорания, a —выходное сечение сопла.

Если давление в выходном отверстии равно атмосферному, то согласно равенству (3) реактивная сила равна приросту количества движения секундной массы газа

$$P = \frac{G}{g} (\omega_a - \omega_n). \quad (6)$$

Экономичность двигателя характеризуется *удельным импульсом*, т. е. отношением реактивной силы к секунднему расходу горючего:



Фиг. 353. Принципиальная схема прямоточного воздушно-реактивного двигателя для сверхзвуковой скорости.

$$J = \frac{P}{G_T}. \quad (7)$$

Основы теории прямоточного воздушно-реактивного двигателя даны впервые Б. С. Стечкиным в 1929 г.¹⁾

Наиболее совершенный цикл работы прямоточного воздушно-реактивного двигателя был бы получен в том случае, если бы сжатие воздуха на участке $n-x$ (фиг. 353) осуществлялось по идеальной адиабате и скорость потока была бы доведена до нуля, подвод тепла в камере сгорания $x-g$ приходил бы при постоянном давлении, после чего выхлопная смесь расширялась бы в сопле $г-a$ до атмосферного давления также по идеальной адиабате. Прямоточный воздушно-реактивный двигатель, работающий по указанному совершенному циклу, мы назовём *идеальным*.

¹⁾ Стечкин Б. С., Теория воздушного реактивного двигателя техника Воздушного Флота, 1929, № 2.

Прежде чем перейти к исследованию двигателя этого типа, выразим все основные величины, характеризующие поток газа, через коэффициент скорости:

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2, \quad (8)$$

где T_0 — температура адиабатически заторможенного газа:

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}},$$

где p_0 и ρ_0 — давление и плотность в идеально заторможенном газе (p_0 — полное давление), k — показатель идеальной адиабаты. Напомним расчётные формулы для критической скорости

$$a_{кр} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} gRT_0} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \frac{p_0}{\rho_0}}$$

и числа M

$$M^2 = \frac{\frac{2}{k+1} \lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}.$$

Эти зависимости справедливы лишь в случае пригодности уравнения состояния идеального газа и при условии постоянства теплоёмкости.

Рассмотрим теперь основные особенности идеального прямооточного двигателя, работающего на расчётном режиме, т. е. при $p_a = p_H$.

Полное давление в камере сгорания может быть найдено из уравнения Бернулли, которое интегрируется в этом случае с помощью идеальной адиабаты:

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_H}{\rho_H} \left[\left(\frac{p_0}{p_H} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] = \frac{w_H^2}{2}.$$

Скорость истечения найдётся из аналогичного выражения

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_H}{\rho_a} \left[\left(\frac{p_0}{p_H} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] = \frac{w_a^2}{2}.$$

Отсюда мы получаем основное соотношение

$$\rho_H \cdot \frac{w_H^2}{2} = \rho_a \cdot \frac{w_a^2}{2}.$$

Итак, в идеальном прямоточном воздушно-реактивном двигателе скоростной напор потока в выхлопном отверстии равен скоростному напору полёта.

Используя те же равенства, получим для идеального двигателя ($\rho_{0x} = \rho_{0г}$, $p_a = p_n$) ещё один важный результат:

$$\lambda_a = \lambda_n, \quad (9)$$

т. е. коэффициенты скорости в выходном отверстии идеального двигателя и в набегающем невозмущённом потоке равны. Отсюда вытекает также и равенство чисел M полёта и истечения:

$$M_a = M_n. \quad (10)$$

Соотношения (9) и (10) справедливы для идеального двигателя как при дозвуковой, так и при сверхзвуковой скорости полёта.

В реальном двигателе в связи с потерями давления во входном и выходном участках и в камере сгорания скоростной напор на выхлопе ниже скоростного напора полёта:

$$\rho_a \cdot \frac{\omega_a^2}{2} < \rho_n \cdot \frac{\omega_n^2}{2}.$$

По этой же причине число M и коэффициент скорости в выходном отверстии имеют меньшие значения, чем в набегающем потоке:

$$M_a < M_n, \quad \lambda_a < \lambda_n.$$

Таким образом, увеличение скорости истечения по сравнению со скоростью полёта получается не в результате увеличения скоростного напора в двигателе, а за счёт уменьшения плотности газа при подогреве.

Соотношение (9) приводят к простой расчётной формуле для скорости истечения в идеальном двигателе:

$$\omega_a = \omega_n \cdot \sqrt{\frac{\rho_n}{\rho_a}} = \omega_n \cdot \frac{a_{кр. г}}{a_{кр. х}},$$

где $a_{кр. г}$, $a_{кр. х}$ — критическая скорость газа соответственно после и до подогрева. Из этой формулы следует, что отношение скорости истечения к скорости полёта для идеального двигателя пропорционально корню квадратному из отношения температур торможения, взятых в конце и начале камеры сгорания:

$$\frac{\omega_a}{\omega_n} = \sqrt{\frac{T_{0г}}{T_{0х}}}. \quad (11)$$

Следует подчеркнуть при этом, что температура торможения в начале камеры сгорания может быть подсчитана по фор-

муле (8) как функция температуры в атмосфере и коэффициента скорости полёта

$$\frac{T_{\text{н}}}{T_{0\text{x}}} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \lambda_{\text{н}}^2,$$

а температура торможения в конце камеры сгорания определяется расходом горючего в двигателе и расходом воздуха:

$$G_{\text{г}} = \frac{c_p \cdot G_{\text{в}}}{\varphi \cdot H_u} \cdot (T_{0\text{г}} - T_{0\text{x}}),$$

где H_u — теплотворная способность горючего, φ — коэффициент полноты сгорания.

Приведённых формул вполне достаточно для расчёта реактивной силы и удельного импульса идеального прямооточного воздушно-реактивного двигателя.

Интересна одна особенность прямооточного воздушно-реактивного двигателя: если сохранять неизменной температуру в камере сгорания, то величина реактивной тяги

$$P = \frac{G}{g} (\omega_a - \omega_{\text{н}}) = \frac{G}{g} \omega_{\text{п}} \left(\sqrt{\frac{T_{0\text{г}}}{T_{0\text{x}}}} - 1 \right)$$

вначале возрастает с увеличением скорости полёта, а затем, пройдя через максимум, начинает убывать и при некотором значении скорости падает до нуля. Объясняется это тем, что увеличение скорости полёта вызывает рост температуры торможения в начале камеры ($T_{0\text{x}}$), но при этом для сохранения неизменной температуры торможения в конце камеры приходится уменьшать подвод тепла. В том случае, когда температура торможения в набегающем потоке становится равной предельно допустимой температуре в двигателе ($T_{0\text{x}} = T_{0\text{г}}$), подвод тепла приходится прекратить. При этом величина тяги падает до нуля. Из формулы (8) получается следующее условие исчезновения тяги как для дозвукового, так и для сверхзвукового идеального двигателя:

$$\frac{T_{\text{н}}}{T_{0\text{x}}} = \frac{T_{\text{н}}}{T_{0\text{г}}} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{0\text{н}}^2,$$

откуда коэффициент скорости полёта, при которой идеальный двигатель перестаёт развивать тягу, равен:

$$\lambda_{0\text{н}} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1} \left(1 - \frac{T_{\text{н}}}{T_{0\text{г}}} \right)}.$$

В отличие от реактивной силы удельный импульс идеального двигателя, как показывают расчёты по приведённым формулам, обращается в нуль только при бесконечно большой скорости

полёта $\left(\lambda_n^2 = \frac{k+1}{k-1}\right)$. Это объясняется тем, что в точке, соответствующей исчезновению реактивной силы, расход горючего также равен нулю.

Обнаруженные особенности идеального двигателя имеют лишь сравнительное значение, поскольку реальный двигатель может значительно отличаться от него. Протекание воздуха в реальном двигателе сопровождается потерями давления, в связи с чем в действительности реактивная сила и удельный импульс всегда меньше, чем при идеальном цикле. Снижение реактивной силы вызывается тем, что падение давления, а следовательно, и плотности воздуха в двигателе сопровождается уменьшением как скорости истечения, так и суммарного расхода воздуха.

Если учесть потери давления коэффициентом $\sigma = \frac{p_{0a}}{p_{0n}}$, выражающим отношение истинного полного давления на выходе к идеальному, то коэффициент скорости истечения для двигателя, работающего на расчётном режиме, можно связать с коэффициентом скорости полёта, основываясь на равенстве давлений ($p_a = p_n$):

$$\sigma \cdot \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \lambda_n^2\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \lambda_n^2\right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (12)$$

Иначе говоря, при заданных значениях скорости полёта w_n , давления в атмосфере и температуры в камере сгорания T_T скорость истечения зависит только от полного давления газов в выходном сопле.

Введём в рассмотрение коэффициент потери скорости в двигателе:

$$\Delta\lambda = \lambda_n - \lambda_a = f(\sigma, \lambda_n).$$

Как показывают расчёты, величина $\Delta\lambda$ составляет обычно не более 15% от значения коэффициента скорости полёта (даже в тех случаях, когда на очень большой сверхзвуковой скорости полёта истинное давление в двигателе из-за волнового сопротивления бывает в 8—10 раз ниже идеального, т. е. получается $\sigma = 0,1 \div 0,12$). Расчётные формулы для идеальной тяги $P_{ид}$ были даны выше. Для вычисления истинной тяги P нужно дополнительно определить коэффициент давления σ и, зная его величину, найти коэффициент скорости истечения λ_a .

Полный коэффициент давления, характеризующий данный двигатель в целом, может быть представлен как произведение частных коэффициентов, каждый из которых является функцией потерь давления в отдельном элементе двигателя:

$$\sigma = \sigma_{сн} \sigma_{д} \sigma_{x} \sigma_{г} \sigma_{с};$$

здесь $\sigma_{\text{сн}} = \frac{P_{01}}{P_{0\text{H}}}$ — отношение истинного полного давления после преобразования сверхзвуковой скорости в дозвуковую к давлению идеального торможения, $\sigma_{\text{д}} = \frac{P_{0\text{д}}}{P_{01}}$ — коэффициент, учитывающий падение полного давления внутри диффузора; $\sigma_{\text{х}} = \frac{P_{0\text{х}}}{P_{0\text{д}}}$ — коэффициент, учитывающий падение полного давления в камере сгорания до начала участка подогрева воздуха; $\sigma_{\text{х}}$ вычисляется с учётом гидравлических сопротивлений во входных устройствах камеры сгорания (регистры, экраны, форсунки, завихрители и др.), которые обычно обтекаются ещё неподогретым воздухом; $\sigma_{\text{г}} = \frac{P_{0\text{г}}}{P_{0\text{х}}}$ — коэффициент, учитывающий падение полного давления, связанное с подогревом газа в камере сгорания; $\sigma_{\text{с}} = \frac{P_{0\text{а}}}{P_{0\text{г}}}$ — коэффициент, характеризующий падение полного давления за счёт потерь в выходном сопле двигателя.

В рассмотренном идеальном цикле работы прямого воздушно-реактивного двигателя процессы сжатия воздуха во входном диффузоре, как и процессы расширения в выходном сопле, предполагались изэнтропическими.

Расширение газа при переходе от состояния покоя к движению со сверхзвуковой скоростью можно осуществить с очень малыми потерями давления, т. е. практически по идеальной адиабате; для этого следует лишь подобрать достаточно плавную форму сопла Лавалья. Наоборот, сжатие воздуха за счёт уменьшения скорости от сверхзвукового её значения до нулевого не удаётся произвести без больших потерь энергии. Переход от сверхзвуковой скорости к дозвуковой всегда осуществляется скачками и сопровождается резким повышением давления, температуры, плотности и энтропии газа.

Перед входным отверстием воздушно-реактивного двигателя с диффузором простейшего *дозвукового* типа (фиг. 352) при $M_{\text{н}} > 1$ получается прямой скачок уплотнения. На фиг. 133, где представлена фотография обтекания воздухом полого тела при значении $M = 2$, отчётливо виден прямой скачок уплотнения в центральной части головной ударной волны, как раз перед входным отверстием тела.

На основании изложенного можно считать, что восстановление давления в воздушно-реактивном двигателе с простым диффузором при сверхзвуковом полёте отвечает не идеальной адиабате, а ударной адиабате.

Исследуем работу воздушно-реактивного двигателя с простым диффузором, т. е. будем считать, что перед входом струи воздуха в прямооточный воздушно-реактивный двигатель в ней

происходит прямой скачок уплотнения при скорости потока, равной скорости полёта. Всеми другими потерями (кроме ударных) в ориентировочных расчётах можно пренебречь, так как уже при скорости полёта, превосходящей в полтора раза скорость звука, потери в дозвуковом тракте двигателя и выходном сопле значительно меньше, чем в прямом скачке уплотнения.

Будем считать, что в диффузоре двигателя происходит полное торможение потока, т. е. скоростью газа в камере сгорания можно пренебречь:

$$\omega_x \approx 0;$$

$$\omega_r \approx 0.$$

Гидравлическим сопротивлением диффузора пренебрежём.

Тогда повышение давления в дозвуковой части входного участка (за областью скачка) происходит по идеальной адиабате и с учётом уравнения (23) главы III может быть представлено так:

$$\frac{p_1}{p_{0x}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{1}{\lambda_H^2} \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Уменьшение полного давления за счёт потерь в прямом скачке уплотнения в сравнении с идеальным процессом учитывается соответствующим значением коэффициента давления по выражению (24) главы III:

$$\sigma_{пр} = \frac{p_{0x}}{p_{0н}} = \lambda_H^2 \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_H^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\lambda_H^2}} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Температура торможения в данном случае ввиду отсутствия теплообмена подчиняется тому же закону (8), что и в идеальном процессе. Плотность заторможенного воздуха определяется формулой (25) главы III:

$$\frac{\rho_{0x}}{\rho_H} = \frac{\lambda_H^2}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{1}{\lambda_H^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}}.$$

При бесконечно большой скорости полёта, как указывалось выше, коэффициент скорости имеет предельное значение:

$\lambda_H^2 = \frac{k+1}{k-1}$, чему соответствует следующее максимально возможное

повышение плотности газа при торможении струи:

$$\left| \frac{\rho_{0x}}{\rho_n} \right|_{\max} = \frac{\frac{k+1}{k-1}}{\left[1 - \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{k-1}}};$$

при $k = 1,4$ имеем: $\rho_{0x} = 6,45 \rho_n$.

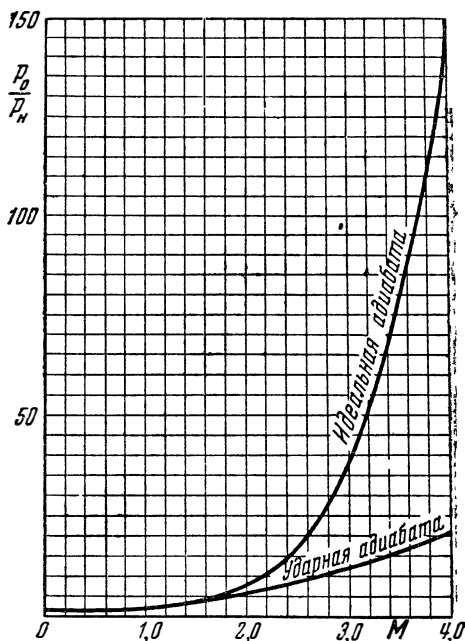
Итак, в прямоточном реактивном двигателе с простым диффузором плотность воздуха никогда не превосходит более чем в 6,5 раза плотность окружающего атмосферного воздуха, хотя давление торможения при неограниченном увеличении скорости полёта стремится к бесконечно большой величине. В отличие от этого в идеальном двигателе плотность воздуха в камере сгорания принципиально может возрастать до бесконечности, так же как и давление.

Кривая зависимости давления заторможенного воздуха ($k = 1,4$) от числа M_n полёта приведена на фиг. 354, на которой для сравнения дана также кривая полного давления, получаемого в идеальном случае¹⁾.

Поскольку скорость воздуха в камере сгорания двигателя сравнительно невелика, подвод тепла к потоку не может вызвать существенного падения полного давления. Гидравлические потери в устройствах камеры сгорания по сравнению с потерями в скачке уплотнения также относительно малы. Поэтому полное давление в диффузоре, камере сгорания и сопле двигателя изменяется незначительно. Принимаем:

$$\sigma_x \cdot \sigma_r \cdot \sigma_c = 0,9.$$

¹⁾ Здесь, как и в дальнейшем, для большей наглядности интересующие нас характеристики представляются в функции числа M , хотя расчёты удобнее вести с помощью коэффициента скорости. Соответствующий переход от λ к M производится посредством формулы (47) главы I.



Фиг. 354. Зависимость давления торможения от числа M .

Существенно изменяются температура торможения ($T_{0г} > T_{0х}$), плотность воздуха и критическая скорость:

$$\frac{\rho_{0г}}{\rho_{0х}} \approx \frac{T_{0х}}{T_{0г}}, \quad \frac{a_{кр. г}}{a_{кр. х}} = \sqrt{\frac{T_{0г}}{T_{0х}}}.$$

Рассмотрим теперь истечение газа из двигателя через выходное сопло Лавала. Выше было показано, что максимальное значение реактивной силы получается в расчётном сопле Лавала, т. е. когда в нём происходит полное расширение газа до атмосферного давления на выходном срезе. В этом случае для отыскания коэффициента скорости истечения можно использовать зависимость (12), которая даёт λ_a как функцию λ_n . Ввиду наличия потерь коэффициент скорости истечения в реальном двигателе в отличие от идеального меньше коэффициента скорости полёта ($\lambda_a < \lambda_n$). Скорость истечения из двигателя получается как произведение её коэффициента на критическую скорость подогретого газа:

$$\omega_a = \lambda_a \cdot a_{кр. г}.$$

Вследствие того, что рассматривается сверхзвуковой режим работы двигателя, весовой расход воздуха целесообразно определять по формуле (9) главы IV:

$$G = 0,4 \cdot \frac{p_{0a} \cdot F_{кр}}{\sqrt{T_{0a}}} \text{ кг/сек.}$$

При расчёте идеального двигателя ($G = G_{ид}$) следует полагать

$$p_{0a} = p_{0н} = \frac{p_n}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \lambda_n^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}.$$

В реальном двигателе, очевидно, имеет место

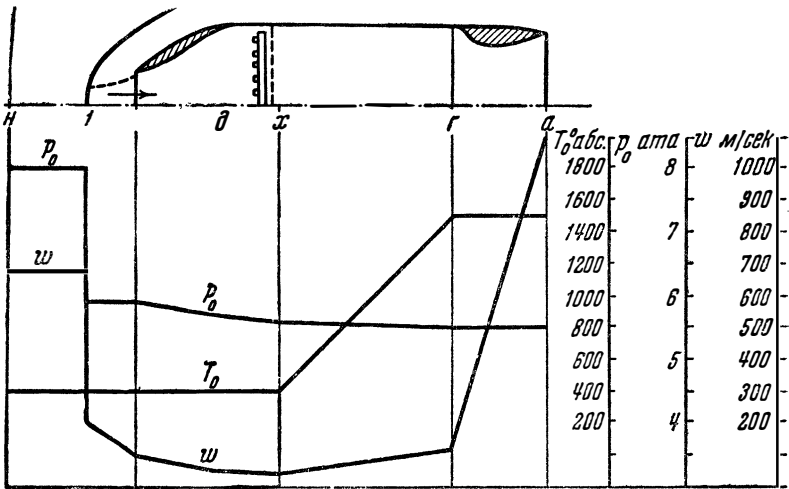
$$G = \sigma \cdot G_{ид}.$$

Подставляя полученные результаты непосредственно в равенства (6) и (7), определяем реактивную силу и удельный импульс реального прямоточного воздушно-реактивного двигателя с простым диффузором.

Примерное распределение величин скорости, полного давления и температуры торможения по длине прямоточного двигателя с простым диффузором при $M_n = 2$ и $T_{0г} = 1500^\circ \text{ абс}$ приведено на фиг. 355. Температура торможения в прямоточном двигателе изменяется только в камере сгорания. Полное давление резко падает в головном скачке уплотнения, остаётся неизменным в области идеального торможения между скачком и входом в диффузор и несколько уменьшается в диффузоре, камере сго-

рания и выходном сопле. Скорость газа резко уменьшается в скачке уплотнения, затем последовательно падает перед входом в двигатель и в диффузоре, потом увеличивается за счёт подогрева в камере горения двигателя и доводится в выходном сопле до значения, большего, чем в набегающем потоке ($w_a > w_H$).

По кривым температуры торможения, полного давления и скорости нетрудно вычислить плотность газа, термодинамическую температуру и статическое давление в любом характерном сечении двигателя.



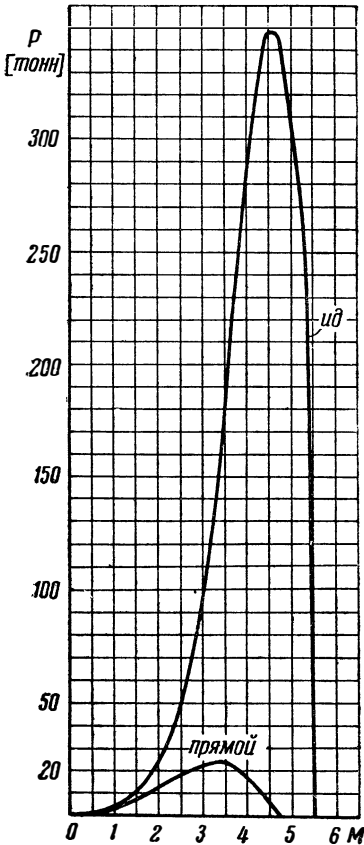
Фиг. 355. Распределение величин скорости, полного давления и температуры торможения по длине прямооточного воздушно-реактивного двигателя при $M_H = 2$ и $T_{0Г} = 1500^\circ$ абс.

На фиг. 356 и 357 показана зависимость тяги и удельного импульса прямооточного воздушного реактивного двигателя на расчётном режиме от числа M , соответствующего скорости полёта, при двух схемах диффузора: идеальном и простом (с прямым скачком); площадь критического сечения выходного сопла принята равной $F_{кр} = 0,5 \text{ м}^2$.

Огромная разница реактивных тяг у двигателей с идеальным и простым диффузором объясняется прежде всего тем, что весовой расход в двигателе с идеальным диффузором значительно выше, так как в нём за счёт меньших потерь имеет место большая плотность воздуха.

Удельный импульс не зависит от весового расхода воздуха, поэтому в идеальной схеме он больше только за счёт более высокого значения скорости истечения. Применяя сверхзвуковой диффузор с рациональной системой скачков, содержащей один

или несколько косых скачков уплотнения, можно при прочих равных условиях существенно увеличить полное давление в двигателе. Тяга и экономичность

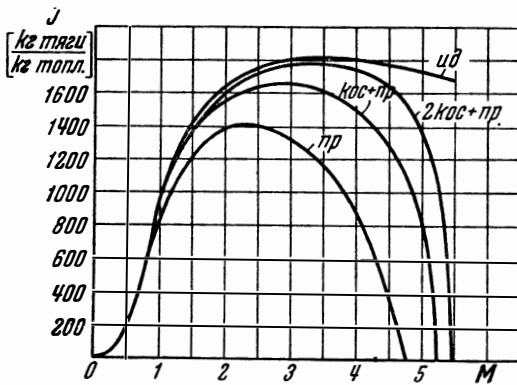


Фиг. 356. Зависимость тяги прямого воздушного реактивного двигателя ($T_{0r} = 2000^\circ \text{ абс}$, $F_{кр} = 0,5 \text{ м}^2$) от числа M (полёт у земли) при идеальном и прямом диффузорах

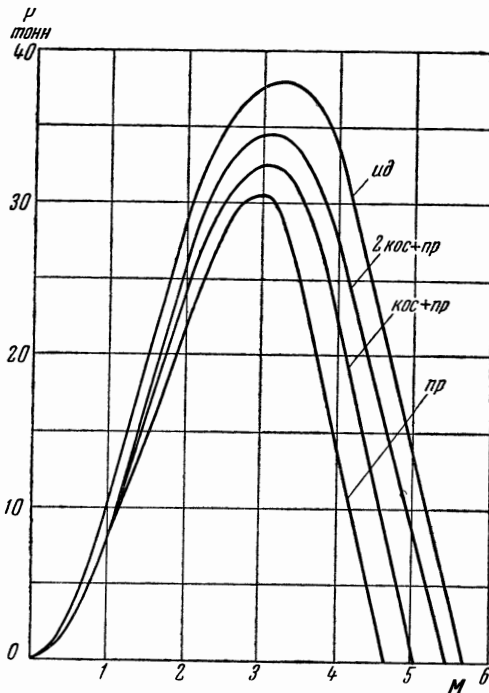
двигателя с таким же поперечным сечением набегающей струи и при той же температуре в камере горения, что и в указанных выше реальных двигателях. Нетрудно видеть, что в отличие от идеального у реального двигателя реактивная сила и удельный импульс обращаются в нуль на одном и том же режиме, а именно, когда скорость истечения становится равной скорости полёта. Этот

Кривые зависимости тяги и удельного импульса прямого воздушного реактивного двигателя от числа M полёта при различных схемах входного диффузора приведены на фиг. 358 и 357. Двигатели сравниваются здесь при одинаковых поперечных сечениях струи воздуха, набегающего на диффузор ($F_n = 0,5 \text{ м}^2$) со скоростью невозмущённого потока, так как в случае сверхзвукового диффузора такое сопоставление является более характерным. Прочие условия приняты такими же, как при расчёте кривых на фиг. 356. Ниже всего проходят кривые, соответствующие случаю простого диффузора, выше идут кривые для двигателя с двухскачковым сверхзвуковым диффузором (один косой с последующим прямым), ещё выше расположены кривые для случая сверхзвукового диффузора с тремя скачками (два косых с последующим прямым). В расчёте сверхзвуковых диффузоров предполагалось, что при всех значениях скорости полёта осуществляется оптимальная система скачков.

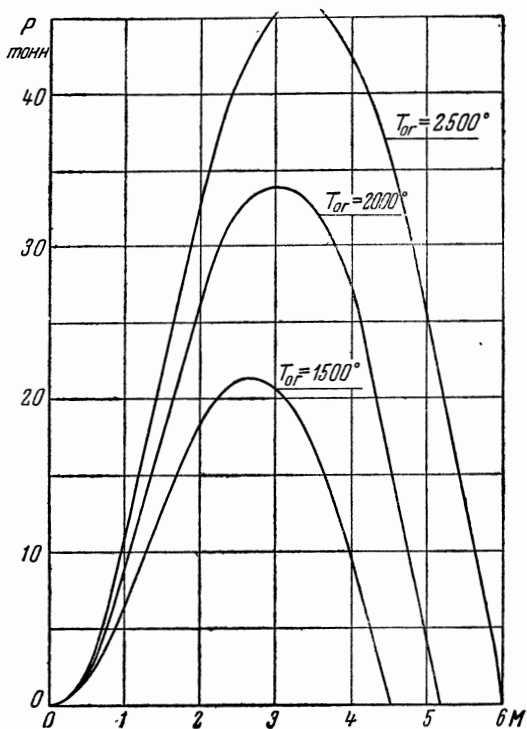
Кроме рассмотренных кривых, на фиг. 358 и 357 приведены для сравнения кривые тяги и удельного импульса идеального двигателя



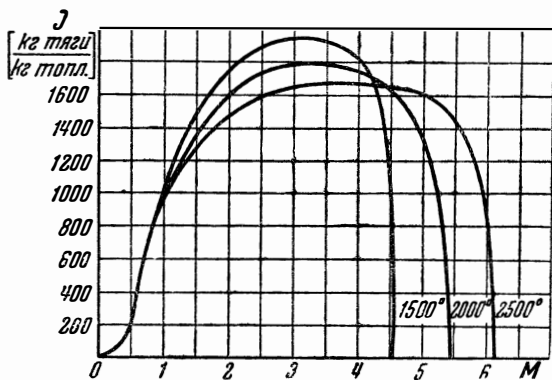
Фиг. 357. Зависимость удельного импульса прямогочного воздушно-реактивного двигателя ($T_{г0}=2000^\circ \text{ abs}$) от числа M (полёт у земли) при различных схемах входного диффузора.



Фиг. 358. Зависимость тяги прямогочного воздушно-реактивного двигателя ($T_{0г}=2000^\circ \text{ abs}$, $F_H=0,5 \text{ м}^2$) от числа M полёта при различных схемах входного диффузора.



Фиг. 359. Зависимость тяги прямоточного воздушно-реактивного двигателя ($F_H = 0,5 \text{ м}^2$) от числа M (полёт у земли) при различных температурах в камере сгорания в случае трёхскачкового входного диффузора.



Фиг. 360. Зависимость удельного импульса прямоточного воздушно-реактивного двигателя от числа M (полёт у земли) при различных температурах в камере сгорания и трёхскачковом диффузоре.

режим в реальном двигателе не соответствует прекращению подогрева газа, так как некоторое количество тепла должно быть подведено для компенсации гидравлических потерь.

Изменение тяги реального двигателя с трёхскачковым оптимальным диффузором в зависимости от числа M полёта для трёх значений абсолютной температуры в камере сгорания показано на фиг. 359. Аналогичные кривые для удельных импульсов представлены на фиг. 360. Максимальное значение удельного импульса достигается на меньшей скорости, нежели максимальное значение реактивной силы. Потери в скачке уплотнения, интенсивно возрастающие с увеличением скорости полёта, сначала приводят к ухудшению экономичности воздушно-реактивного двигателя, а затем уже к существенному снижению его мощности.

Влияние температуры на максимальную величину удельного импульса, как видно из фиг. 360, невелико. Вблизи максимумов кривые протекают настолько полого, особенно для высоких температур, что экономичность двигателя на режиме максимальной реактивной силы получается не намного меньше оптимальной.

§ 4. Турбо-реактивный двигатель¹⁾

Повышение давления в прямоточном воздушно-реактивном двигателе достигается за счёт динамического сжатия воздуха перед входом в двигатель и в его диффузоре. Такой двигатель, как мы видели, эффективен только при очень большой скорости полёта и вовсе не способен развивать тягу на месте. Для получения в воздушно-реактивном двигателе достаточной тяги на старте и при умеренной скорости полёта приходится применять механическое сжатие воздуха. Воздушно-реактивный двигатель с механическим сжатием уже нашёл широкое применение в современной авиации. Наиболее распространённым типом воздушно-реактивного двигателя с механическим сжатием является турбо-реактивный двигатель (фиг. 361). В этом двигателе воздух засасывается компрессором. После сжатия в компрессоре воздух поступает в камеру сгорания, откуда смесь разогретого воздуха и продуктов горения направляется на лопатки турбины. Обычно в турбине используется только часть энергии газов (для получения механической работы, потребной на вращение компрессора). Остальная (свободная) часть энергии газов преобразуется в кинетическую энергию вытекающей струи.

В случае, если весь избыток давления, имеющийся в камере сгорания, используется на колесе турбины, двигатель перестаёт

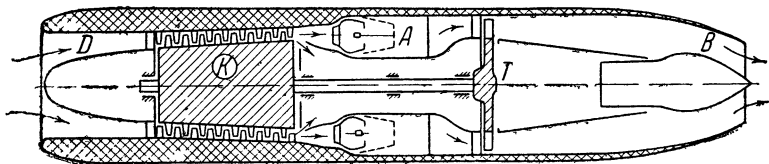
¹⁾ Подробное изложение теории турбо-реактивного двигателя см. в книге: Иноземцев Н. В., Зуев В. С., *Авиационные газотурбинные двигатели*. Оборонгиз, 1949.

развивать реактивную силу, но при этом мощность турбины превосходит мощность, потребляемую компрессором; избыток мощности можно использовать, например, для вращения авиационного винта или динамомашин.

Работа, затрачиваемая на сжатие 1 кг газа в компрессоре, как указывалось выше, равна:

$$L_{\text{к}} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{RT_{0\text{д}}}{\eta_{\text{к}}} \left[\left(\frac{p_{0\text{х}}}{p_{0\text{д}}} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right].$$

Здесь $p_{0\text{х}}$, $p_{0\text{д}}$ — полное давление соответственно за и перед компрессором; $\eta_{\text{к}}$ — коэффициент полезного действия компрессора; $T_{0\text{д}}$ — температура торможения перед компрессором.



Фиг. 361. Схема турбо-реактивного двигателя: D — диффузор, K — компрессор, T — газовая турбина, A — камера сгорания, B — выходное сопло.

Если пренебречь отводом тепла в диффузоре, то можно считать, что $T_{0\text{д}} = T_{0\text{н}}$. Условимся, как прежде, под степенью повышения давления в компрессоре понимать отношение значений полного давления газа за и перед компрессором:

$$\pi_{0\text{к}} = \frac{p_{0\text{х}}}{p_{0\text{д}}}.$$

Иногда степенью повышения давления считают отношения соответствующих значений статического давления. В случае малой скорости потока или равных значений числа M перед и за компрессором оба эти отношения практически совпадают.

Под степенью уменьшения давления в турбине будем попрежнему понимать отношение значений полного давления за и перед турбиной:

$$\pi_{0\text{т}} = \frac{p_{0\text{с}}}{p_{0\text{т}}}.$$

Величина $\varepsilon_{0\text{с}} = \pi_{0\text{к}} \cdot \pi_{0\text{т}}$ характеризует избыток давления в сопле.

Работа расширения 1 кг газа в турбине равна:

$$L_{\text{т}} = \frac{k}{k-1} \cdot R \cdot T_{0\text{с}} \cdot \eta_{\text{т}} \left[\left(\frac{p_{0\text{т}}}{p_{0\text{с}}} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right];$$

здесь T_{0c} — температура торможения за турбиной, η_T — коэффициент полезного действия турбины.

В турбо-реактивном двигателе работа турбины используется практически целиком на привод компрессора: $L_T \approx L_K$. Если пренебречь небольшими изменениями газовой постоянной и показателя адиабаты, то будем иметь:

$$\frac{T_{0д}}{\eta_K} \cdot \left(\frac{k-1}{\pi_{0K}^k} - 1 \right) = T_{0c} \cdot \eta_T \cdot \left(\frac{1}{\pi_{0T}^{\frac{k-1}{k}}} - 1 \right). \quad (13)$$

Обычно температура заторможенного газа в выходном сопле значительно выше температуры заторможенного газа в диффузоре ($T_{0c} > T_{0д}$). Тогда из равенства работ компрессора и турбины вытекает, что степень увеличения давления воздуха в компрессоре выше степени уменьшения давления в турбине ($\pi_{0K} > \frac{1}{\pi_{0T}}$), т. е. имеется избыточное давление в реактивном сопле двигателя. Итак, турбо-реактивный двигатель должен иметь:

$$\varepsilon_{0c} = \pi_{0K} \cdot \pi_{0T} > 1. \quad (14)$$

Это необходимо для того, чтобы скорость истечения из сопла w_a и соответственно реактивная тяга были достаточно велики (как на старте, так и в полёте). Турбо-реактивный двигатель развивает обычно значительную стартовую тягу (при условии $\varepsilon_{0c} > 1$).

Существенной особенностью этого типа двигателя является также его нечувствительность к изменению плотности воздуха. Плотность воздуха, поступающего в двигатель, заметно повышается с увеличением скорости полёта, благодаря чему растёт весовой расход воздуха в компрессоре¹). Мощность, потребляемая компрессором, изменяется пропорционально весовому расходу; однако последний возрастает одновременно и в турбине. Следовательно, мощность турбины увеличивается пропорционально мощности компрессора, и поэтому недостаток мощности на валу компрессора не имеет места.

Суммарная работа газа в двигателе складывается из работ расширения в турбине и в сопле²):

$$\sum L = L_T + L_{св} \text{ или } \sum L = L_K + L_{св}.$$

¹) Компрессор является объёмной машиной, поэтому с изменением плотности газа меняется весовой расход, а объёмный расход остаётся постоянным.

²) Как показано выше, в турбо-реактивном двигателе всегда выполняется равенство $L = L_K$.

Таким образом, как уже отмечалось, после использования некоторой доли энергии в турбинном колесе остальная её часть (свободная) может быть использована в выходном сопле. Отсюда получается так называемая свободная мощность

$$N_{\text{св}} = \frac{L_{\text{св}}}{75}.$$

Как известно, доля работы компрессора $\left(\frac{L_{\text{к}}}{\Sigma L}\right)$ обычно значительно больше половины, следовательно, на образование свободной мощности в турбо-реактивном двигателе тратится относительно малая часть располагаемой энергии.

Выше указывалось, что механическую работу, сообщённую одному килограмму воздуха в компрессоре, можно представить как приrost теплосодержания заторможенного газа:

$$AL_{\text{к}} = i_{0\text{х}} - i_{0\text{д}} = \Delta i_{0\text{к}}.$$

Работа в турбине получается за счёт падения полного теплосодержания:

$$AL_{\text{т}} = i_{0\text{г}} - i_{0\text{с}} = \Delta i_{0\text{т}},$$

но так как $L_{\text{к}} = L_{\text{т}}$, то

$$\Delta i_{0\text{к}} = \Delta i_{0\text{т}}.$$

Итак, изменение полного теплосодержания воздуха в компрессоре и турбине примерно одинаково.

Если считать, что теплоёмкость газа в двигателе не меняется¹⁾, то перепад температуры торможения у компрессора и турбины один и тот же:

$$\Delta T_{0\text{к}} = \Delta T_{0\text{т}}.$$

Температура в камере сгорания лимитируется жаростойкостью лопаток турбины. В современных турбо-реактивных двигателях температура за турбиной получается порядка $T_{0\text{с}} = 800 - 900^\circ \text{ абс.}$ В камере сгорания температура выше на величину перепада температуры в турбине. Для нахождения последнего подсчитаем равный ему перепад температуры в компрессоре:

$$\Delta T_{0\text{к}} = \frac{AL}{c_p} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{AR}{c_p} \cdot \frac{T_{0\text{д}}}{\gamma_{\text{к}}} \left(\pi_{0\text{к}}^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right).$$

Здесь

$$\frac{AR}{c_p} = \frac{c_p - c_v}{c_p} = \frac{k-1}{k},$$

¹⁾ В дальнейшем будем полагать $c_p = \text{const}$.

следовательно,

$$\Delta T_{0к} = \frac{T_{0д}}{\eta_{к}} \cdot \left(\pi_{0к}^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right).$$

Если бы сжатие в компрессоре осуществлялось без потерь ($\eta_{к} = 1$), то было бы:

$$\pi_{0к}^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{p_{0х}}{p_{0д}} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \left| \frac{T_{0х}}{T_{0д}} \right|_{ид}.$$

Введём обозначение для перепада температуры в идеальном случае:

$$\Delta T_{0к ид}.$$

В реальном компрессоре получим:

$$\Delta T_{0к} = \frac{\Delta T_{0к ид}}{\eta_{к}}.$$

Определение температуры за турбиной может быть произведено без учёта перепадов температуры в компрессоре и турбине, так как эти перепады равны и противоположны по знаку, следовательно, при сложении взаимно уничтожаются:

$$T_{0с} = T_{0д} + \Delta T_0.$$

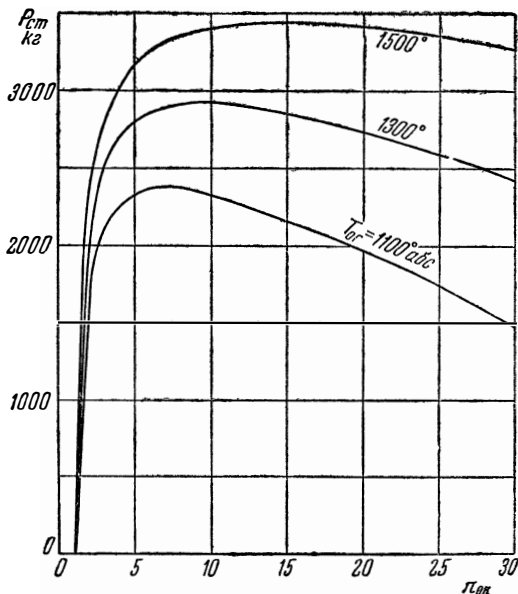
Здесь ΔT_0 — прирост температуры торможения в камере сгорания, который определяется только полнотой сгорания, родом горючего и коэффициентом избытка воздуха (если не учитывать термическую диссоциацию, которая в некоторой степени зависит от абсолютной температуры и абсолютного давления за компрессором).

В прямоточных воздушно-реактивных двигателях при увеличении скорости полёта, как было показано, происходит рост давления и температуры торможения в камере сгорания. Тяга при этом (в случае постоянства температуры горения) сначала растёт, а затем, пройдя через максимум, убывает.

В турбо-реактивных двигателях наблюдается аналогичная картина за счёт механического сжатия. С ростом давления в камере сгорания давление за турбиной увеличивается, вследствие чего возрастают скорость истечения и тяга. Однако этот процесс не беспредель. Постепенно рост тяги становится слабее; в некоторой точке тяга достигает максимума и затем падает до нуля. Дело в том, что увеличение степени повышения давления в компрессоре влечёт за собой повышение температуры газа, но при этом начальная температура в камере сгорания приближается к конечной (последняя имеет предел, зависящий от жаростойкости лопаток турбины). В связи с этим при увеличении

степени повышения давления в компрессоре приходится снижать подачу горючего в двигатель. Когда получается $T_{0x} = T_{0r}$, подачу горючего необходимо прекратить совсем, но тогда и тяга становится равной нулю. Режим $P = 0$ наступает даже несколько раньше, ибо часть тепла расходуется на покрытие внутренних потерь.

Иллюстрацией к этой особенности турбо-реактивных двигателей служит фиг. 362, на которой представлена зависимость тяги на старте ($\omega_n = 0$) от степени повышения полного давления



Фиг. 362. Зависимость стартовой тяги турбореактивного двигателя от степени повышения полного давления в компрессоре при различных температурах в камере сгорания ($G_B = 40$ кг/сек).

в компрессоре при различных значениях температуры торможения перед турбиной. В расчёте приняты стандартные атмосферные условия у земли ($T_n = 288^\circ$ абс, $\rho_n = 10330$ кг/м²) и использованы следующие известные формулы для температуры торможения за компрессором:

$$\frac{T_{0x}}{T_{0д}} = 1 + \frac{\pi_{0к}^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\eta_k}$$

(здесь следует учесть, что температура торможения перед ком-

прессором на режиме старта равна температуре в атмосфере: $T_{0д} = T_n$); для температуры торможения в выходном сопле

$$T_{0с} = T_{0д} + \Delta T_0,$$

где

$$\Delta T_0 = T_{0г} - T_{0х};$$

для полного давления перед компрессором

$$p_{0д} = \sigma_d \cdot p_{0н},$$

причём коэффициент давления во входном диффузоре можно положить $\sigma_d \cong 0,98$, а полное давление в атмосферном воздухе равно статическому ($w_n = 0$, $p_{0н} = p_n$); для полного давления за компрессором

$$p_{0х} = \pi_{0к} \cdot p_{0д};$$

для полного давления перед турбиной

$$p_{0г} = \sigma_x \cdot \sigma_r \cdot p_{0х};$$

здесь коэффициент давления в камере сгорания турбо-реактивного двигателя можно принять равным

$$\sigma_{н.с} = \sigma_x \cdot \sigma_r = 0,95;$$

для полного давления за турбиной

$$p_{0с} = \pi_{0г} \cdot p_{0г},$$

где степень уменьшения давления в турбине определяется из условия равенства работ турбины и компрессора

$$\frac{T_{0д}}{T_{0с}} \cdot \frac{\pi_{0г}^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\eta_k \cdot \eta_r} = \frac{1}{\frac{\pi_{0г}^{\frac{k-1}{k}}}{\pi_{0д}^{\frac{k-1}{k}}}} - 1. \quad (15)$$

Коэффициенты полезного действия компрессора и турбины приняты в нашем расчёте постоянными:

$$\eta_k = 0,8, \quad \eta_r = 0,9.$$

Скорость истечения определялась по известным формулам

$$\frac{p_a}{p_{0а}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_a^2\right)^{\frac{k}{k-1}},$$

$$w_a = \lambda_a \cdot a_{кр.г},$$

$$a_{кр.г} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \cdot g \cdot R T_{0а}},$$

причём потерями давления и тепла в выходном сопле мы пренебрегали ($p_{0а} = p_{0с}$, $T_{0а} = T_{0с}$) и полагали, что в выходном сопле

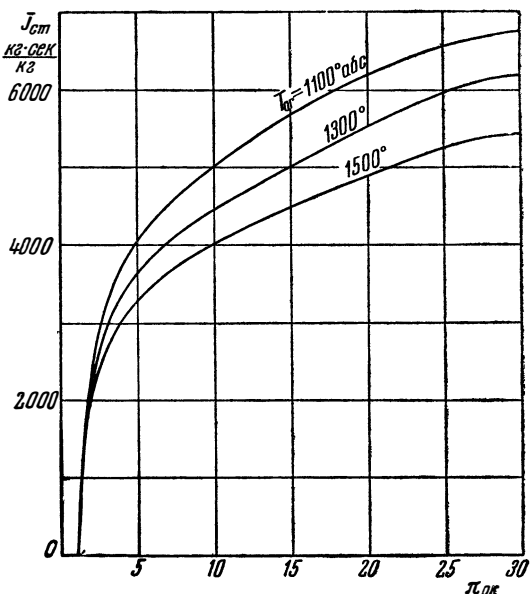
осуществляется во всех случаях расчётный режим:

$$P_a = P_H.$$

Расход топлива (G_T) определялся с помощью известного выражения

$$c_p \cdot G_B \cdot (T_{0T} - T_{0X}) = \varphi \cdot H_u \cdot G_T;$$

здесь принимались следующие значения постоянных: теплоём-



Фиг. 363. Зависимость стартового удельного импульса турбо-реактивного двигателя от степени повышения полного давления в компрессоре при различных температурах в камере сгорания.

кость $c_p = 0,24$, полнота сгорания $\varphi = 1$, теплотворная способность топлива $H_u = 10\,000$ кал/кг, расход воздуха $G_B = 40$ кг/сек.

Реактивная тяга на старте равна:

$$P_{ст} = \frac{G_B}{g} \cdot \omega_a.$$

Кривые удельного импульса на старте

$$J_{ст} = \frac{P_{ст}}{G_T}$$

для тех же режимов приведены на фиг. 363. Полученные таким

путём кривые тяги и удельного импульса, как и предсказывалось выше, имеют максимумы, которые достигаются при тем больших значениях степени повышения давления, чем выше температура перед турбиной.

Как видно, с точки зрения максимума тяги рациональны степени повышения давления в компрессоре порядка $\pi_{0к} = 6 - 10$ (чем выше температура, тем выше выгодная степень повышения давления).

С точки зрения максимума экономичности желательны значительно более высокие степени повышения давления в турбореактивном двигателе, чем с точки зрения максимума абсолютной тяги.

При газодинамическом расчёте турбореактивного двигателя на полётных режимах используются следующими соотношениями:

1) формулой для вычисления реактивной тяги на расчётном режиме ($p_a = p_n$)

$$P = \frac{G_B}{g} (\omega_a - \omega_n);$$

2) формулой для определения полного давления в набегающем потоке

$$p_{0н} = \frac{p_n}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_n^2\right)^{\frac{k}{k-1}}};$$

здесь $\lambda_n = \frac{\omega_n}{a_{кр.н}}$ — коэффициент скорости полёта, $a_{кр.н} =$

$= \sqrt{\frac{2k}{k+1} gRT_{0н}}$ — критическая скорость в потоке, набегающем на двигатель, $T_{0н}$ — температура торможения в набегающем потоке;

3) формулой для определения полного давления перед компрессором

$$p_{0д} = \sigma_{ск} \cdot \sigma_d \cdot p_{0н};$$

здесь $\sigma_{ск}$ — коэффициент давления, учитывающий волновые потери в системе скачков уплотнения, возникающих перед двигателем при сверхзвуковом полёте (при $M_n < 1$: $\sigma_{ск} = 1$), σ_d — коэффициент давления внутри входного диффузора¹⁾;

¹⁾ Следует иметь в виду, что в турбореактивном двигателе входной канал обычно является конфузуром, т. е. торможение потока осуществляется перед двигателем, а во входном канале скорость немного увеличивается. Делается это для того, чтобы обеспечить получение равномерного поля скоростей перед компрессором.

4) для определения весового расхода воздуха в двигателе

$$G_B \approx G_{\text{ст}} \cdot \frac{\gamma_{0\kappa}}{\gamma_{\text{н.ст}}},$$

где $G_{\text{в.ст}}$ — весовой расход воздуха на старте, $\gamma_{\text{н.ст}}$ — удельный вес воздуха перед компрессором в условиях старта, $\gamma_{0\kappa} = \frac{P_{0\kappa}}{RT_{0\kappa}}$ — удельный вес воздуха перед компрессором в условиях полёта¹⁾ (температура торможения перед компрессором равна температуре торможения в набегающем потоке: $T_{0\kappa} = T_{0\text{н}}$).

Все прочие параметры, характеризующие течение газа в каналах турбо-реактивного двигателя при полёте, вычисляются по тем же формулам, что и в условиях старта. Нужно только дополнительно учитывать следующее важное обстоятельство: степень повышения давления в компрессоре существенно зависит от температуры газа перед компрессором. В самом деле, по уравнению моментов количества движения (98) главы I можно найти момент сил, возникающих на колесе компрессора. Для этого нужно знать окружные составляющие скорости газа за (ω_{2u}) и перед (ω_{1u}) колесом, а также радиусы выходящей (r_2) и входящей (r_1) массы газа. Секундная работа на валу колеса, как известно, равна произведению момента сил на угловую скорость (ω), откуда получаем для 1 кг газа:

$$-L = \frac{\omega}{g} (\omega_{2u} \cdot r_2 - \omega_{1u} \cdot r_1).$$

Таким образом, работа 1 кг газа на колесе определяется кинематикой потока и угловой скоростью колеса, но не зависит от температуры и давления газа (жидкости) перед колесом. Выше было показано, что работа колеса пропорциональна разности полных теплосодержаний за и перед колесом:

$$-L = \frac{i_{02} - i_{01}}{A}.$$

Поэтому при постоянных значениях числа оборотов и объёмного расхода газа, определяемого кинематикой потока, перепад теплосодержаний на колесе не изменяется:

$$i_{02} - i_{01} = \text{const.}$$

¹⁾ Имеется в виду, что компрессор как объёмная машина при постоянных оборотах в условиях данного двигателя подаёт одно и то же объёмное количество воздуха, а удельный вес воздуха можно определять из условий полного торможения, так как скорость потока перед компрессором обычно значительно меньше скорости звука.

Следовательно, при постоянной теплоёмкости ($c_p = \text{const}$) перепад температур торможения на колесе также не изменяется:

$$\Delta T_0 = T_{02} - T_{01} = \text{const.}$$

Отсюда, пользуясь уравнением работы компрессора в форме (86) главы I, замечаем, что степень повышения давления зависит от температуры газа перед колесом:

$$\Delta T_0 = \frac{T_{01}}{\gamma_K} \left(\pi_{0K}^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) = \frac{k-1}{kR} L_K = \text{const.}$$

Пусть, например, степень повышения давления в компрессоре на старте ($T_H = T_{0H} = 288^\circ \text{ абс}$) равна π_{0K} ; при увеличении скорости полёта, влекущем за собой увеличение температуры торможения перед колесом, степень повышения давления в компрессоре падает и может быть вычислена из условия постоянства работы:

$$\pi_{0K}^{\frac{k-1}{k}} - 1 = \frac{T_H}{T_{0K}} \left(\pi_{0K \text{ ст}}^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) \cdot \gamma_{K \text{ ст}}. \quad (16)$$

Если в первом приближении пренебречь зависимостью коэффициента полезного действия компрессора от температуры на входе, то получится:

$$\pi_{0K}^{\frac{k-1}{k}} - 1 = \frac{T_H}{T_{0K}} \left(\pi_{0K \text{ ст}}^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right), \quad (17)$$

откуда с учётом равенства

$$\frac{T_H}{T_{0K}} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{\Pi}^2 = \frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M_{\Pi}^2}$$

имеем:

$$\pi_{0K}^{\frac{k-1}{k}} - 1 = \frac{\pi_{0K \text{ ст}}^{\frac{k-1}{k}} - 1}{1 + \frac{k-1}{2} M_{\Pi}^2}. \quad (18)$$

Итак, в конечном счёте из уравнения моментов количества движения вытекает, что степень повышения давления в компрессоре турбо-реактивного двигателя падает с увеличением скорости полёта. Результаты расчёта по формуле (18) при стартовой степени повышения давления $\pi_{0K \text{ ст}} = 4$ и $k = 1,4$ представлены в следующей таблице:

Таблица VIII

M_{Π}	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
π_{0K}	4	3,8	3,2	2,75	2,3	2	1,75

Пользуясь теми же исходными соотношениями, можно обнаружить зависимость степени уменьшения давления в турбине от температуры на входе. Однако ввиду того, что обычно температура перед турбиной устанавливается независимо от скорости полёта, перепад давлений в турбине также не зависит от скорости полёта.

Основное назначение турбокомпрессорного устройства в турбореактивном двигателе состоит в том, чтобы создать в выходном сопле (за турбиной) большее полное давление, чем в диффузоре (перед компрессором):

$$p_{0c} > p_{0д};$$

на основании этого должно выполняться неравенство

$$\pi_{0к} \cdot \pi_{0т} \cdot \sigma_{к.с} > 1. \quad (19)$$

Ввиду того, что с ростом скорости полёта величина $\pi_{0к}$ уменьшается, а величины $\pi_{0т}$ и $\sigma_{к.с}$ остаются практически неизменными, при некотором значении скорости полёта двигатель перестаёт удовлетворять неравенству (19).

В разобранный выше случае ($\pi_{0к ст} = 4$) при $\pi_{0т} = 0,5$ и $\sigma_{к.с} = 0,9$ это неравенство не выполняется уже при значениях $M_H = 2,5$ ($\pi_{0к} = 2$, $\pi_{0к} \cdot \pi_{0т} \cdot \sigma_{к.с} = 0,95$) и выше.

Иначе говоря, при скорости полёта в 2—2,5 раза больше скорости звука турбокомпрессорное устройство в целом перестаёт повышать давление в двигателе, т. е. становится нецелесообразным. На этих скоростях полёта работа воздушно-реактивного двигателя обеспечивается сжатием воздуха только за счёт скорости наддува, вследствие чего прямоточный двигатель становится эффективнее турбореактивного.

При дозвуковой, околосзвуковой и не очень большой сверхзвуковой скорости полёта, когда сжатие газа в компрессоре существенно преобладает над расширением в турбине, турбореактивный двигатель сохраняет все свои преимущества перед прямоточным реактивным двигателем.

Приrost полного давления в турбокомпрессорном устройстве в целом ($p_{0c} > p_{0д}$) зависит также и от температуры перед турбиной, с увеличением которой уменьшается перепад давлений на турбине. Можно получить условие, учитывающее влияние скорости полёта и температуры перед турбиной на приrost давления в турбокомпрессорном устройстве.

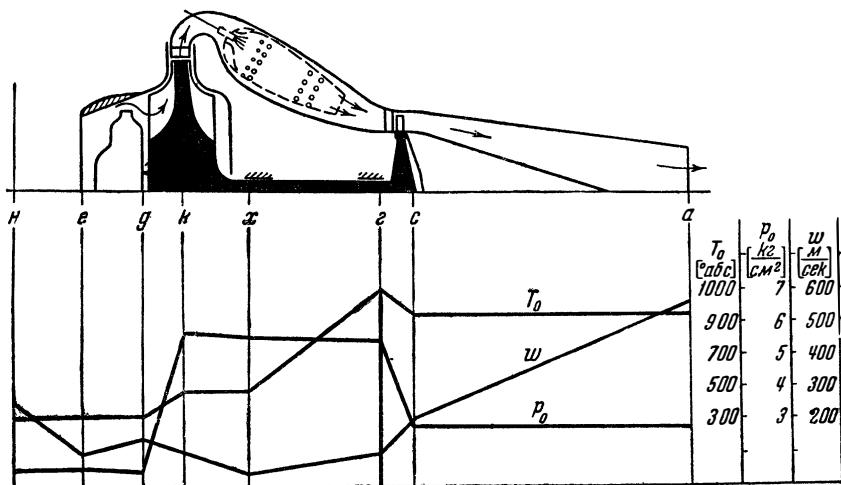
Расчёт распределения скорости, давления и других параметров газа по тракту турбореактивного двигателя производят по тем же формулам, которые применялись при расчёте прямоточного двигателя. Нужно только дополнительно учесть изменение параметров в компрессоре и турбине, для чего следует воспользоваться выражениями, приведёнными в начале данного

параграфа. Примерное распределение скорости, полного давления и температуры торможения в турбо-реактивном двигателе приведено на фиг. 364. В расчёте приняты следующие исходные данные:

- расход воздуха $G_B = 40$ кг/сек,
- скорость полёта $w_H = 250$ м/сек (900 км/час),
- степень увеличения давления в компрессоре

$$\pi_{0K} = 4,$$

- коэффициент полезного действия компрессора $\eta_K = 0,8$,



Фиг. 364. Распределение величин скорости, полного давления и температуры торможения по длине турбо-реактивного двигателя при $\pi_{0K ст} = 4$, $w_H = 900$ км/час, $T_{0Г} = 1100^\circ$ абс, $\eta_K = 0,8$, $\eta_T = 0,9$, $\sigma_D = 0,98$, $\sigma_r = 0,95$, $\sigma_c = 1$, $G_B = 40$ кг/сек.

- коэффициент полезного действия турбины $\eta_T = 0,9$,
- показатель адиабаты $k = \text{const} = 1,4$,
- температура торможения перед турбиной $T_{0Г} = 1100^\circ$ абс,
- начальное состояние воздуха взято на уровне моря:

$$T_H = 288^\circ \text{ абс}, \quad p_H = 10\,330 \text{ кг/м}^2.$$

Как видим, температура торможения возрастает в компрессоре и уменьшается в турбине на одну и ту же величину ($\Delta T_0 \cong 170^\circ$) и остаётся постоянной во всех прочих частях двигателя, кроме камеры сгорания.

В связи с подогревом воздуха перед турбиной степень изменения полного давления в последней меньше, чем в компрессоре ($\pi_{0K} = 4$, $\pi_{0Г} = 0,5$). Перед выходным соплом давление

в 2,7 раза выше атмосферного, что приводит к наличию избыточного давления ($p_a > p_n$) на срезе сопла при критическом истечении ($\lambda_a = 1$).

Из равенства мощностей турбины и компрессора следует:

$$T_{0д} \left(\pi_{0к}^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) = T_{0с} \left(\frac{1}{\pi_{0т}^{\frac{k-1}{k}}} - 1 \right) \cdot \eta_t \cdot \eta_k,$$

откуда

$$\frac{\pi_{0к}^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\left(\frac{1}{\pi_{0т}^{\frac{k-1}{k}}} - 1 \right)} = \frac{T_{0с}}{T_{0д}} \cdot \eta_t \cdot \eta_k. \quad (20)$$

Но турбокомпрессорное устройство приносит пользу только при условии, что давление за турбиной выше, чем перед компрессором, т. е. $\pi_{0к} \cdot \pi_{0т} > 1$. В этом случае должно иметь место неравенство

$$\frac{T_{0с}}{T_{0д}} \cdot \eta_t \cdot \eta_k > 1, \quad (21)$$

где

$$T_{0с} = T_{0г} - \Delta T_{0к}$$

и

$$T_{0д} = T_n \left(1 + \frac{k-1}{2} M_n^2 \right).$$

Произведя соответствующую подстановку, получим:

$$\frac{T_{0г}}{T_n} > \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_n^2}{\eta_t \cdot \eta_k} + \frac{\Delta T_{0к}}{T_n}. \quad (22)$$

Условия (21) и (22) означают, что подвод тепла в двигателе должен быть достаточен для покрытия гидравлических потерь в турбокомпрессорном устройстве. При неизменном числе оборотов и одной и той же высоте полёта для данного двигателя величина $\frac{\Delta T_{0к}}{T_n}$, как было указано выше, должна быть постоянной. Таким образом, минимальная температура на лопатках турбины, при которой турбо-реактивный двигатель будет эффективнее прямоточного воздушно-реактивного двигателя, является функцией числа M полёта, а также коэффициента полезного действия турбины и компрессора.

Лимитируя температуру в камере сгорания, мы не даём возможности турбо-реактивному двигателю работать в выгодных условиях при значениях M_n выше некоторого определённого.

С другой стороны, при заданной температуре перед турбиной приток полного давления в турбокомпрессорном устройстве получается только в том случае, если коэффициенты полезного действия турбины и компрессора имеют значения не ниже некоторого предела, определяемого неравенством (21):

$$\eta_T \cdot \eta_{К} > \frac{T_{0д}}{T_{0с}}. \quad (23)$$

Например, в турбо-реактивном двигателе с рассмотренными выше характеристиками на старте ($T_{0д} = T_n = 288^\circ \text{ абс}$, $T_{0с} = 930^\circ \text{ абс}$) имеем:

$$\eta_T \cdot \eta_{К} > 0,31,$$

а при скорости полёта 250 м/сек ($T_{0д} = 350^\circ \text{ абс}$, $T_{0с} = 930^\circ \text{ абс}$):

$$\eta_T \cdot \eta_{К} > 0,38,$$

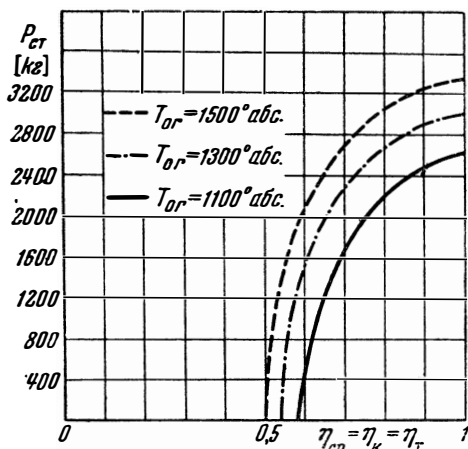
т. е. среднее значение коэффициента полезного действия не должно быть ниже

$$\eta_{ср} = \sqrt{\eta_T \cdot \eta_{К}} = 0,56 \div 0,62.$$

●существование столь высоких значений коэффициента полезного действия турбины и компрессора стало возможно лишь в последние годы в итоге больших исследовательских работ по газовой динамике компрессоров и турбин. При указанном выше минимальном значении коэффициента полезного действия вся величина избыточного давления перед турбиной (по сравнению с давлением перед компрессором) должна быть истрачена на покрытие потерь в турбокомпрессорном устройстве. На этом режиме тяга двигателя на месте равна нулю, а в полёте она получается только за счёт скоростного наддува, т. е. турбо-реактивный двигатель работает как прямоточный и турбокомпрессорное устройство является лишним грузом.

Работа турбо-реактивного двигателя с принятыми выше характеристиками ($\pi_{0к} = 4$, $G_B = 40 \text{ кг/сек}$) в условиях старта при изменении среднего значения коэффициента полезного действия турбины и компрессора для различных значений температуры торможения перед турбиной иллюстрируется кривыми фиг. 365. Как видим, изменение коэффициента полезного действия очень сильно сказывается на тяге двигателя. Такая чувствительность турбо-реактивного двигателя к изменению коэффициента полезного действия компрессора и турбины объясняется тем, что, как указывалось выше, значительная доля энергии газа расходуется

в турбокомпрессорном устройстве; энергия же струи в реактивном сопле получается как сравнительно малая разность



Фиг. 365. Зависимость стартовой тяги турбо-реактивного двигателя ($\eta_k = \eta_t$, $\pi = 4$, $G_B = 40$ кг/сек) от среднего значения коэффициента полезного действия компрессора и турбины.

полезного действия колёс и увеличению температуры торможения перед турбиной, которое требует увеличения жаростойкости турбинных лопаток.

Влияние скорости полёта на тягу турбо-реактивного двигателя при различных значениях температуры торможения перед турбиной представлено на фиг. 367. Расчёт выполнен по приведённым выше формулам для следующих условий:

а) Полёт совершается у земли ($T_H = 288^\circ \text{ abs}$, $p_H = 760 \text{ мм рт. ст.} = 10330 \text{ кг/м}^2$).

б) Расход воздуха и степень повышения давления на старте: $G_{B, \text{ст}} = 40 \text{ кг/сек}$, $\pi_{0k} = 4$.

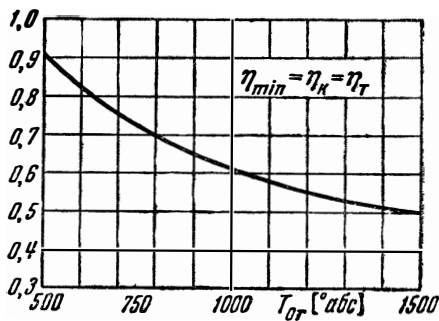
в) Коэффициент полезного действия компрессора $\eta_k = 0,8$, коэффициент полезного действия турбины $\eta_t = 0,9$.

между полной энергией и энергией, потребляемой компрессором.

Таким образом, в турбо-реактивных двигателях предъявляются чрезвычайно высокие требования к газодинамическому совершенству турбины и компрессора.

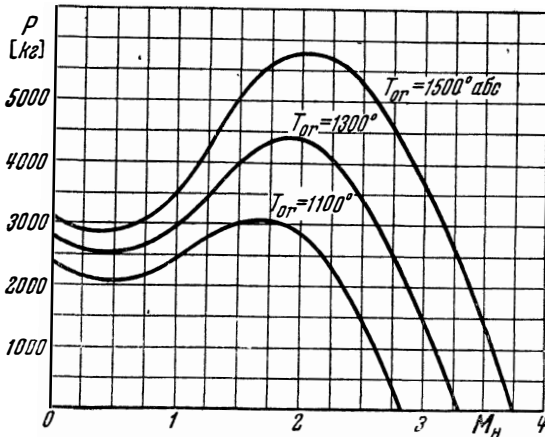
Из неравенства (23) и фиг. 366 следует, что с увеличением температуры торможения перед турбиной наименьшее допустимое значение коэффициента полезного действия компрессора и турбины снижается. Естественно, что развитие турбо-реактивного двигателя должно идти по обоим путям —

повышению коэффициента

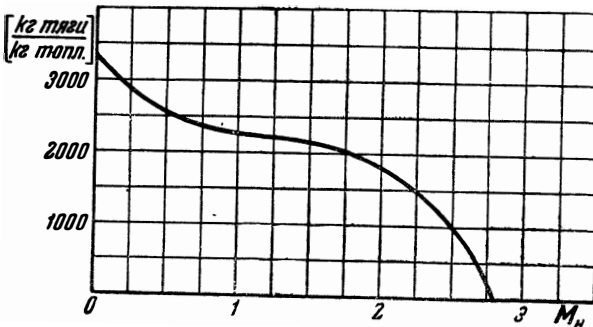


Фиг. 366. Зависимость минимального значения среднего коэффициента полезного действия турбины и компрессора от температуры в камере сгорания.

г) При сверхзвуковой скорости полёта в струе воздуха, поступающей в двигатель, происходит прямой скачок уплотнения. Остановимся на важнейших особенностях приведённых кривых.



Фиг. 367. Зависимость тяги турбо-реактивного двигателя ($\pi_{0н ст} = 4$, $\eta_n = 0,8$, $\eta_T = 0,9$) от числа M_n (полёт у земли) в случае прямого скачка уплотнения на входе при различных температурах в камере сгорания.



Фиг. 368. Зависимость, удельного импульса турбо-реактивного двигателя ($\pi_{0н ст} = 4$, $T_{0г1} = 100^\circ \text{ abs}$, $\eta_n = 0,8$, $\eta_T = 0,9$, $G_B = 40 \text{ кг/сек}$) от числа M_n (полёт у земли) в случае прямого скачка уплотнения на входе.

При малых скоростях полёта ($M_n < 0,5$) реактивная тяга с увеличением числа M_n падает (растёт вычитаемое ω_n в скобке формулы тяги). В области значений числа M от 0,5 до 1,5 ÷ 2

тяги увеличивается (под влиянием роста весового расхода, вызываемого увеличением плотности воздуха от скоростного наддува).

При значениях $M_H > 1,5 \div 2$ тяга уменьшается (вследствие уменьшения разности скоростей истечения и полёта в связи с уменьшением степени повышения давления в компрессоре и сокращением подвода тепла в камере сгорания).

При некотором значении числа M тяга падает до нуля (скорость истечения становится равной скорости полёта); на этом режиме подведённого тепла хватает только на покрытие потерь в двигателе. При дозвуковых скоростях полёта ($M_H < 1$) реактивная тяга изменяется со скоростью полёта не очень значительно; в частности, при $M_H = 1$ и старте тяги примерно одинаковы.

Удельный импульс турбо-реактивного двигателя со скоростью полёта монотонно падает, что видно из фиг. 368. Здесь приведена зависимость $J(M_H)$ только для одного значения температуры торможения перед турбиной, так как из расчётов следует, что величина температуры почти не сказывается на удельном импульсе. Отсутствие подъёма кривой удельного импульса в области $M = 0,5 \div 1,5$ объясняется тем, что увеличение расхода воздуха (которое приводит к увеличению абсолютной тяги в этом диапазоне скоростей) сопровождается пропорциональным возрастанием расхода горючего (при $T_{0r} = \text{const}$).

Тяга турбо-реактивного двигателя определяется скоростью истечения из сопла:

$$\omega_a = \lambda_a \cdot a_{\text{кр.с}},$$

где

$$\lambda_a = f_1 \left(\frac{P_{0c}}{T_H} \right), \quad a_{\text{кр.с}} = f_2 (T_{0c}).$$

Если давление за турбиной выше, чем перед компрессором, то коэффициент скорости истечения при одинаковых условиях полёта у турбореактивного двигателя выше, чем у прямооточного воздушно-реактивного двигателя. Но в последнем возможны более высокие температуры. Поэтому прямооточный воздушно-реактивный двигатель может развивать более значительные тяги даже при меньших давлениях в реактивном сопле. Однако для увеличения тяги в турбо-реактивном двигателе можно устроить за турбиной вторую камеру сгорания (так называемую форсажную камеру) с догревом газов до такой же температуры, что и в прямооточном воздушно-реактивном двигателе. В этом случае тяга турбо-реактивного двигателя существенно возрастает.

Если пренебречь потерями давления во второй камере сгорания, то коэффициент скорости истечения (λ_a) сохранит то же значение, что и без форсажной камеры. Следовательно, на старте

имеем:

$$\frac{P_{ст.ф}}{P_{ст}} = \frac{\omega_{аф}}{\omega_a} = \sqrt{\frac{T_{0ф}}{T_{0г} - \Delta T_{0к}}}. \quad (24)$$

При $T_{0ф} = 2000^\circ$ абс получим для турбо-реактивного двигателя, который был рассчитан выше:

$$P_{ст.ф} = P_{ст} \cdot \sqrt{\frac{2000}{1100 - 170}} = 1,47 \cdot P_{ст}.$$

Экономичность двигателя при работе форсажной камеры падает, так как тяга возрастает медленнее, чем расход горючего. Но с увеличением скорости полёта ухудшение экономичности, связанное с применением форсажной камеры, ослабляется. В рассмотренном примере при скорости полёта $\omega_n = 250$ м/сек скорость истечения на расчётном режиме ($p_a = p_n$) равна $\omega_a = 685$ м/сек.

Если применить форсажную камеру ($T_{0ф} = 2000^\circ$ абс), то получится:

$$\omega_{аф} = \omega_a \sqrt{\frac{2000}{1100 - 170}} = 1010 \text{ м/сек.}$$

Следовательно, тяга в полёте возрастает в отношении

$$\frac{P_{ф}}{P} = \frac{1010 - 250}{685 - 250} = 1,75.$$

Отношение удельных импульсов турбо-реактивных двигателей с форсажной камерой и без неё определится из соотношения

$$\frac{J_{ф}}{J} = \frac{P_{ф}}{P} \cdot \frac{G_r}{G_{r.ф}}, \quad (25)$$

где $\frac{P_{ф}}{P}$ определено выше,

$$\frac{G_r}{G_{r.ф}} = \frac{T_{0г} - T_{0х}}{T_{0ф} - T_{0х}}, \text{ причём } T_{0х} = T_{0н} + \Delta T_{0к}.$$

Для рассматриваемого режима ($\Delta T_{0к} = 170^\circ$, $T_{0г} = 1100^\circ$ абс; $T_{0ф} = 2000^\circ$ абс) имеем на старте ($T_{0н} = T_n = 288^\circ$ абс):

$$\frac{J_{ст.ф}}{J_{ст}} = 1,47 \cdot \frac{1100 - 458}{2000 - 458} = 0,61,$$

при скорости полёта 250 м/сек ($T_{0н} = 320^\circ$ абс)

$$\frac{J_{ф}}{J} = 1,75 \cdot \frac{1100 - 490}{2000 - 490} = 0,71.$$

Таким образом, применение форсажной камеры на турбо-реактивном двигателе даёт возможность увеличить тягу за счёт снижения экономичности двигателя.

Однако при одинаковых расходах воздуха и равных значениях температуры в форсажной камере турбо-реактивного двигателя и в прямоточном воздушно-реактивном двигателе первый имеет лучшие не только тяговые, но и экономические показатели, так как в его выходном сопле получается более высокое давление ($p_{0c} > p_{0д}$, или $\pi_{0к} \cdot \pi_{0т} \cdot \sigma_{к.с} > 1$).

§ 5. О месте приложения реактивной силы

Выясним вопрос о том, в каком месте двигателя приложена реактивная сила.

Рассмотрим сначала простейший случай — идеальный прямоточный воздушно-реактивный двигатель (фиг. 369). Пусть скорость во входном отверстии равна скорости полёта ($w_e = w_n$); тогда давление во входном отверстии равно атмосферному ($p_e = p_n$); кроме того, предположим, что двигатель работает на расчётном режиме, т. е. давление в выходном отверстии также равно атмосферному ($p_a = p_n$).

Фиг. 369. Схема прямоточного воздушно-реактивного двигателя (к определению сил, действующих на двигатель).

При малой скорости движения газа в камере сгорания давление в последней можно считать постоянным ($p_x = p_r$).

В описанном идеальном двигателе перепады давлений в диффузоре и сопле одинаковы:

$$p_x - p_e = p_r - p_a.$$

Однако ввиду того, что в сопле воздух имеет более высокую температуру, чем в диффузоре, площадь выходного отверстия двигателя должна быть больше площади входного отверстия. В самом деле, в идеальном двигателе скоростной напор в выходном отверстии равен скоростному напору набегающего потока, т. е. в рассматриваемом случае скоростному напору во входном отверстии:

$$\rho_n w_n^2 = \rho_a \cdot w_a^2,$$

но по уравнению неразрывности с учётом этого неравенства получаем:

$$\frac{F_a}{F_e} = \frac{\rho_n w_n}{\rho_a w_a} = \frac{\rho_n w_n^2}{\rho_a w_a^2} \cdot \frac{w_a}{w_n} = \frac{w_a}{w_n} = \sqrt{\frac{\rho_n}{\rho_a}}, \quad (26)$$

поэтому при подводе тепла в камере сгорания ($\rho_n > \rho_a$) имеем:

$$\frac{F_a}{F_e} > 1.$$

Итак, среднее давление, действующее на стенки диффузора и сопла, одно и то же, а проекция стенки диффузора на плоскость, перпендикулярную к оси двигателя, больше соответствующей проекции стенки сопла. Вследствие изложенного сила давления изнутри на диффузор (P_d) больше, чем на сопло (P_c); направления этих сил, как явствует из чертежа (фиг. 369), противоположны.

Если внешние очертания двигателя являются очень плавными, то давление воздуха на внешнюю поверхность двигателя весьма близко к атмосферному, т. е. силой давления на внешнюю поверхность можно пренебречь. В рассматриваемом идеальном случае реактивная сила, действующая на двигатель, сводится к разности сил, приложенных соответственно к диффузору и соплу:

$$P = P_d - P_c.$$

Для расшифровки этого равенства воспользуемся результатом, полученным в главе I (§ 5, пример 3), согласно которому величины сил, действующих на диффузор и сопло, соответственно равны:

$$P_d = \frac{\gamma_n \omega_n^2}{2g} \cdot F_x \left(1 - \frac{F_e}{F_x} \right)^2,$$

$$P_c = \frac{\gamma_a \omega_a^2}{2g} \cdot F_r \left(1 - \frac{F_a}{F_r} \right)^2.$$

Но по принятому выше

$$F_x = F_r;$$

$$\gamma_a \omega_a^2 = \gamma_n \omega_n^2;$$

отсюда

$$P = P_d - P_c = \frac{\gamma_n \omega_n^2}{2g} F_x \left[\left(1 - \frac{F_e}{F_x} \right)^2 - \left(1 - \frac{F_a}{F_x} \right)^2 \right]$$

или

$$P = \frac{\gamma_n \omega_n^2}{2g} \left[2 - \frac{F_e + F_a}{F_x} \right] [F_a - F_e].$$

Рассмотрим двигатель с малыми скоростями в камере сгорания, т. е. с площадью камеры, существенно большей, чем площади входного и выходного отверстий:

$$\frac{F_e}{F_x} \ll 1, \quad \frac{F_a}{F_x} \ll 1.$$

В этом случае мы приходим к следующей простой формуле для реактивной силы, определённой в результате вычитания силы, приложенной к соплу, из силы, приложенной к диффузору:

$$P = \frac{\gamma_{\text{II}} \omega_{\text{II}}^2}{g} (F_a - F_{\text{II}}).$$

Тот же результат можно получить непосредственно из формулы (3) для реактивной тяги с учётом выражения (26):

$$P = \frac{G}{g} (\omega_a - \omega_{\text{II}}) = \frac{\gamma_{\text{II}} \omega_{\text{II}}^2 \cdot F_{\text{II}}}{g} \left(\frac{\omega_a}{\omega_{\text{II}}} - 1 \right),$$

или

$$P = \frac{\gamma_{\text{II}} \omega_{\text{II}}^2}{g} (F_a - F_{\text{II}}). \quad (27)$$

Итак, реактивная тяга получается за счёт того, что сила давления на диффузор больше, чем на сопло. Это является следствием подогрева газа, в связи с которым площадь выходного отверстия приходится делать больше площади поперечного сечения набегающей струи.

В реальном двигателе, как указывалось выше, значения скорости и давления во входном отверстии обычно отличаются от таковых в невозмущённом набегающем потоке, что затрудняет определение реактивной силы непосредственно по разности усилий, приложенных к диффузору и соплу; кроме того, в действительности сила, действующая на внешнюю поверхность двигателя, обычно не равна нулю. Однако в любом случае можно доказать, что в прямоточном воздушно-реактивном двигателе реактивная сила является результирующей сил давления, приложенных к стенкам внутреннего и наружного обводов двигателя.

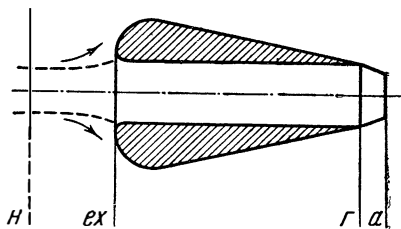
Остановимся теперь на том, как влияет на реактивную тягу величина площади входного отверстия двигателя. Из приведённого в § 1 настоящей главы вывода формулы для реактивной тяги следует, что скорость входа воздуха в двигатель не сказывается на величине реактивной силы; играют роль только скорость истечения из двигателя и скорость невозмущённого набегающего потока.

Это обстоятельство имеет следующее объяснение.

Если скорость входа воздуха в двигатель меньше скорости набегающего потока ($\omega_e < \omega_{\text{II}}$), то перед диффузором происходит торможение набегающего потока (фиг. 370), причём струйки притекают к передней кромке диффузора под большим углом атаки. Это приводит к тому, что вблизи входного отверстия на внутренней стенке диффузора появляется область повышенного статического давления (близкого по величине к полному давлению набегающего потока), а на наружной поверхности

диффузора — разрежение; чем больше входное отверстие диффузора, тем выше давление на его внутреннюю поверхность и тем больше разрежение на его наружной поверхности (углы атаки струек воздуха возрастают). Иначе говоря, при значительном торможении воздуха перед диффузором передняя стенка последнего работает как крыло при больших углах атаки.

Указанная дополнительная сила, вызванная в данном случае ($\omega_e < \omega_n$) разностью давлений на передней стенке диффузора, в точности компенсирует уменьшение силы тяги, которое должно было бы получиться за счёт сокращения поверхности диффузора по сравнению со случаем $\omega_e = \omega_n$. Заметим, что на таких режимах значительная часть силы тяги приходится на долю разрежения, возникающего на внешней поверхности диффузора. Если полностью раскрыть диффузор, т. е. сделать площадь входа равной площади камеры сгорания



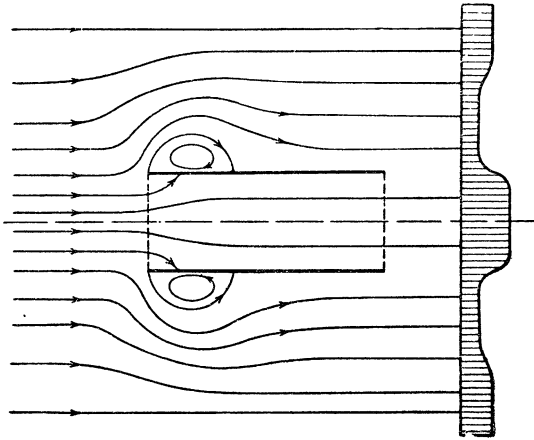
Фиг. 370. Двигатель без входного диффузора.

(фиг. 370), то тяга будет вызываться только разрежением на внешней поверхности диффузора (проекция на ось двигателя сил давления, приложенных к внутренним стенкам камеры и диффузора, в этом случае равна нулю).

Если скорость входа воздуха в двигатель больше скорости полёта ($\omega_e > \omega_n$), то перед диффузором поток ускоряется, при этом струйки притекают к передней кромке диффузора под отрицательными углами; в этом случае вблизи входного отверстия на наружной поверхности диффузора возникает повышенное давление, а на внутренней — разрежение. Такая разность давлений даёт дополнительную силу, которая направлена в сторону, противоположную по отношению к реактивной силе; эта дополнительная сила компенсирует то увеличение реактивной силы, которое в случае $\omega_e > \omega_n$ можно было бы ожидать за счёт увеличения поверхности диффузора (по сравнению со случаем $\omega_e = \omega_n$). Итак, скорость входа воздуха в двигатель не должна учитываться непосредственно в формуле реактивной силы; однако, как уже указывалось в § 2 главы VII, косвенно на величине тяги она сказывается, так как влияет на сопротивление диффузора, при росте которого падает скорость эстечения из двигателя. Так, при $\omega_e < \omega_n$ появляется дополнительное внешнее лобовое сопротивление, а при $\omega_e > \omega_n$ — дополнительные гидравлические потери внутри диффузора.

Прямоточный воздушно-реактивный двигатель, имеющий форму тонкостенной трубы (фиг. 371), вовсе не развивает тяги;

цилиндрическая форма двигателя приводит к тому, что слагающая силы давления на стенки, параллельная оси двигателя, равна нулю. Существо дела заключается в том, что за счёт срыва обтекающего трубу потока с передней её кромки возникает внешнее вихревое сопротивление, которое полностью уравновешивает реактивную тягу; эпюра скорости в следе за *трубой* в области внешнего потока имеет провалы, вызванные вихревым



Фиг. 371. Схема обтекания прямоточного воздушно-реактивного двигателя, имеющего форму тонкостенной трубы.

сопротивлением, которые компенсируют прирост скорости внутри двигателя; иначе говоря, суммарное количество движения в потоке за двигателем получается такое же, как и перед ним.

В заключение отметим, что в турбо-реактивном двигателе реактивная тяга состоит не только из результирующей сил давления, действующей на стенки двигателя, но также из силы, приложенной к турбокомпрессорному устройству и вызванной тем, что давление за турбиной превосходит давление перед компрессором; эта дополнительная сила воспринимается подпятником компрессора и передаётся через опоры подпятника на корпус двигателя.

Таблица для расчёта сверхзвуковых течений газа с непрерывным увеличением скорости ($k = 1,4$)

δ°	φ°	M	λ	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	α°	r/r_0
0°00'	0°00'	1,000	1,000	0,528	0,634	0,833	90°00'	1
0°10'	13°08'	1,026	1,022	0,512	0,620	0,826	77°02'	1,027
0°20'	16°05'	1,039	1,032	0,504	0,613	0,822	74°15'	1,041
0°30'	18°24'	1,051	1,042	0,497	0,607	0,819	72°06'	1,049
0°40'	20°25'	1,062	1,051	0,490	0,601	0,816	70°15'	1,065
0°50'	22°06'	1,073	1,060	0,484	0,596	0,813	68°44'	1,077
1°00'	23°32'	1,083	1,067	0,479	0,591	0,810	67°28'	1,087
1°30'	27°06'	1,109	1,088	0,463	0,577	0,803	64°24'	1,108
2°00'	30°00'	1,133	1,107	0,450	0,565	0,796	62°00'	1,147
2°30'	32°33'	1,155	1,125	0,464	0,553	0,789	59°57'	1,176
3°00'	34°54'	1,178	1,142	0,424	0,542	0,783	58°06'	1,205
3°30'	37°00'	1,199	1,157	0,413	0,532	0,777	56°30'	1,234
4°00'	38°52'	1,219	1,172	0,402	0,522	0,771	55°08'	1,262
4°30'	40°39'	1,238	1,186	0,392	0,513	0,766	53°51'	1,290
5°	42°18'	1,257	1,200	0,383	0,504	0,760	52°42'	1,312
6°	45°24'	1,294	1,227	0,364	0,497	0,749	50°36'	1,372
7°	48°18'	1,331	1,253	0,346	0,468	0,738	48°42'	1,437
8°	51°00'	1,367	1,277	0,330	0,452	0,728	47°00'	1,498
9°	53°28'	1,401	1,300	0,314	0,437	0,718	45°32'	1,559
10°	55°50'	1,435	1,323	0,299	0,422	0,708	44°10'	1,626
11°	58°06'	1,469	1,345	0,285	0,408	0,698	42°54'	1,690
12°	60°20'	1,504	1,367	0,271	0,393	0,688	41°40'	1,772
13°	62°24'	1,536	1,388	0,258	0,380	0,679	40°36'	1,845
14°	64°25'	1,569	1,408	0,246	0,367	0,670	39°35'	1,923
15°	66°24'	1,603	1,428	0,234	0,354	0,660	38°36'	2,005
16°	68°24'	1,639	1,448	0,222	0,341	0,650	37°36'	2,094
17°	70°18'	1,673	1,467	0,211	0,329	0,641	36°42'	2,183
18°	72°06'	1,705	1,486	0,201	0,318	0,632	35°54'	2,291
19°	73°57'	1,741	1,505	0,190	0,306	0,622	35°03'	2,394
20°	75°42'	1,775	1,523	0,181	0,295	0,613	34°18'	2,500
21°	77°27'	1,809	1,542	0,171	0,284	0,604	33°33'	2,612
22°	79°12'	1,846	1,559	0,162	0,273	0,595	32°48'	2,735
23°	80°52'	1,880	1,576	0,154	0,263	0,586	32°08'	2,858
24°	82°30'	1,914	1,594	0,146	0,253	0,576	31°30'	2,993
25°	84°10'	1,951	1,610	0,138	0,243	0,568	30°50'	3,163
26°	85°48'	1,988	1,628	0,130	0,233	0,558	30°12'	3,319
27°	87°24'	2,028	1,644	0,123	0,224	0,550	29°33'	3,476
28°	89°00'	2,063	1,660	0,116	0,215	0,541	29°00'	3,647

Продолжение

δ°	φ°	M	λ	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	α°	r/r_0
29°	90°30'	2,096	1,675	0,1100	0,207	0,532	28°30'	3,820
30°	92°00'	2,130	1,691	0,1040	0,198	0,523	28°00'	4,046
31°	93°36'	2,173	1,706	0,0980	0,190	0,515	27°24'	4,256
32°	95°05'	2,209	1,722	0,0920	0,182	0,506	26°55'	4,436
33°	96°33'	2,245	1,737	0,0867	0,174	0,497	26°27'	4,710
34°	98°03'	2,285	1,752	0,0814	0,167	0,488	25°57'	4,955
35°	99°33'	2,327	1,767	0,0764	0,159	0,480	25°27'	5,236
36°	101°00'	2,366	1,782	0,0717	0,152	0,471	25°00'	5,521
37°	102°30'	2,411	1,796	0,0672	0,145	0,462	24°30'	5,741
38°	103°57'	2,454	1,810	0,0630	0,139	0,454	24°03'	6,166
39°	105°24'	2,498	1,824	0,0590	0,132	0,446	23°36'	6,472
40°	106°48'	2,539	1,838	0,0552	0,126	0,437	23°12'	6,919
41°	108°12'	2,581	1,852	0,0514	0,120	0,428	22°48'	7,362
42°	109°36'	2,624	1,865	0,0481	0,114	0,420	22°24'	7,798
43°	111°00'	2,670	1,878	0,0450	0,109	0,412	22°00'	8,260
44°	112°21'	2,717	1,891	0,0419	0,104	0,404	21°36'	8,710
45°	113°48'	2,765	1,905	0,0388	0,098	0,395	21°12'	9,184
46°	115°12'	2,816	1,918	0,0360	0,093	0,387	20°48'	9,954
47°	116°36'	2,869	1,930	0,0334	0,088	0,379	20°24'	10,57
48°	117°54'	2,910	1,943	0,0310	0,084	0,371	20°06'	11,20
49°	119°15'	2,959	1,955	0,0288	0,079	0,363	19°45'	11,97
50°	120°36'	3,010	1,967	0,0267	0,075	0,355	19°24'	12,94
51°	121°57'	3,064	1,978	0,0249	0,071	0,348	19°03'	13,62
52°	123°18'	3,119	1,990	0,0229	0,067	0,340	18°42'	14,72
53°	124°38'	3,174	2,002	0,0211	0,063	0,332	18°22'	15,78
54°	126°00'	3,236	2,014	0,0194	0,060	0,324	18°00'	16,90
55°	127°18'	3,289	2,025	0,0178	0,056	0,316	17°42'	18,62
56°	128°36'	3,344	2,036	0,0164	0,053	0,309	17°24'	19,49
57°	129°55'	3,404	2,047	0,0151	0,050	0,302	17°05'	20,89
58°	131°15'	3,470	2,058	0,0138	0,047	0,294	16°45'	22,49
59°	132°36'	3,542	2,069	0,0126	0,044	0,286	16°24'	24,38
60°	133°54'	3,606	2,080	0,0115	0,041	0,279	16°06'	26,30
61°	135°10'	3,666	2,090	0,0105	0,039	0,272	15°50'	28,32
62°	136°30'	3,742	2,100	$0,954 \cdot 10^{-2}$	0,036	0,265	15°30'	30,55
63°	137°48'	3,814	2,111	$0,869 \cdot 10^{-2}$	0,034	0,258	15°12'	33,89
64°	139°03'	3,876	2,121	$0,784 \cdot 10^{-2}$	0,031	0,250	14°57'	36,40
65°	140°20'	3,949	2,130	$0,712 \cdot 10^{-2}$	0,029	0,244	14°40'	39,63
66°	141°36'	4,021	2,140	$0,645 \cdot 10^{-2}$	0,027	0,237	14°24'	43,15
67°	142°54'	4,124	2,150	$0,584 \cdot 10^{-2}$	0,025	0,230	14°02'	47,85

Продолжение

δ°	φ°	№	λ	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	α°	r/r_0
68°	144°12'	4,193	2,159	$0,525 \cdot 10^{-2}$	0,0235	0,223	13°48'	51,62
69°	145°27'	4,268	2,168	$0,474 \cdot 10^{-2}$	0,0219	0,217	13°33'	56,00
70°	146°42'	4,348	2,177	$0,426 \cdot 10^{-2}$	0,0203	0,210	13°18'	62,50
71°	147°57'	4,429	2,186	$0,380 \cdot 10^{-2}$	0,0187	0,204	13°03'	68,50
72°	149°12'	4,515	2,195	$0,339 \cdot 10^{-2}$	0,0172	0,197	12°48'	75,00
73°	150°30'	4,621	2,204	$0,301 \cdot 10^{-2}$	0,0158	0,190	12°30'	82,75
74°	151°42'	4,695	2,212	$0,270 \cdot 10^{-2}$	0,0146	0,184	12°18'	91,20
75°	153°00'	4,810	2,220	$0,241 \cdot 10^{-2}$	0,0135	0,179	12°00'	101,4
76°	154°15'	4,912	2,228	$0,214 \cdot 10^{-2}$	0,0124	0,173	11°45'	111,7
77°	155°30'	5,015	2,237	$0,186 \cdot 10^{-2}$	0,0112	0,166	11°30'	123,5
78°	156°45'	5,126	2,244	$0,165 \cdot 10^{-2}$	0,0103	0,160	11°15'	143,3
79°	158°00'	5,241	2,252	$0,145 \cdot 10^{-2}$	$0,940 \cdot 10^{-2}$	0,155	11°00'	154,8
80°	159°15'	5,362	2,260	$0,126 \cdot 10^{-2}$	$0,851 \cdot 10^{-2}$	0,149	10°45'	177,0
81°	160°30'	5,488	2,267	$0,112 \cdot 10^{-2}$	$0,780 \cdot 10^{-2}$	0,144	10°30'	196,8
82°	161°42'	5,593	2,274	$0,971 \cdot 10^{-3}$	$0,705 \cdot 10^{-2}$	0,138	10°18'	219,8
83°	162°57'	5,731	2,282	$0,836 \cdot 10^{-3}$	$0,633 \cdot 10^{-2}$	0,132	10°03'	247,0
84°	164°12'	5,875	2,289	$0,722 \cdot 10^{-3}$	$0,570 \cdot 10^{-2}$	0,127	9°48'	279,3
85°	165°27'	6,028	2,296	$0,631 \cdot 10^{-3}$	$0,518 \cdot 10^{-2}$	0,122	9°33'	316,2
86°	166°42'	6,188	2,302	$0,545 \cdot 10^{-3}$	$0,466 \cdot 10^{-2}$	0,117	9°18'	361,0
87°	167°54'	6,321	2,309	$0,460 \cdot 10^{-3}$	$0,413 \cdot 10^{-2}$	0,111	9°06'	409,0
88°	169°06'	6,464	2,315	$0,398 \cdot 10^{-3}$	$0,373 \cdot 10^{-2}$	0,107	8°54'	466,0
89°	170°21'	6,649	2,321	$0,340 \cdot 10^{-3}$	$0,333 \cdot 10^{-2}$	0,102	8°39'	537,0
90°	171°36'	6,845	2,328	$0,285 \cdot 10^{-3}$	$0,294 \cdot 10^{-2}$	0,097	8°24'	631,0
91°	172°48'	7,013	2,334	$0,236 \cdot 10^{-3}$	$0,257 \cdot 10^{-2}$	0,092	8°12'	724,5
92°	174°00'	7,184	2,340	$0,197 \cdot 10^{-3}$	$0,226 \cdot 10^{-2}$	0,087	8°00'	841,2
93°	175°15'	7,413	2,345	$0,168 \cdot 10^{-3}$	$0,202 \cdot 10^{-2}$	0,083	7°45'	977,0
94°	176°27'	7,610	2,350	$0,139 \cdot 10^{-3}$	$0,176 \cdot 10^{-2}$	0,079	7°33'	1135
95°	177°40'	7,837	2,356	$0,114 \cdot 10^{-3}$	$0,153 \cdot 10^{-2}$	0,075	7°20'	1334
96°	178°54'	8,091	2,361	$0,954 \cdot 10^{-4}$	$0,134 \cdot 10^{-2}$	0,071	7°06'	1478
97°	179°06'	8,326	2,366	$0,778 \cdot 10^{-4}$	$0,116 \cdot 10^{-2}$	0,067	6°54'	1622
98°	181°21'	8,636	2,371	$0,628 \cdot 10^{-4}$	$0,996 \cdot 10^{-3}$	0,063	6°39'	2240
99°	182°34'	8,928	2,376	$0,502 \cdot 10^{-4}$	$0,849 \cdot 10^{-3}$	0,059	6°26'	2680
100°	183°48'	9,259	2,380	$0,403 \cdot 10^{-4}$	$0,726 \cdot 10^{-3}$	0,055	6°12'	3092
101°	185°00'	9,569	2,385	$0,321 \cdot 10^{-4}$	$0,617 \cdot 10^{-3}$	0,052	6°00'	3890
102°	186°12'	9,891	2,389	$0,257 \cdot 10^{-4}$	$0,526 \cdot 10^{-3}$	0,049	5°48'	4730
103°	187°24'	10,245	2,393	$0,202 \cdot 10^{-4}$	$0,444 \cdot 10^{-3}$	0,046	5°36'	6080
104°	188°36'	10,626	2,397	$0,156 \cdot 10^{-4}$	$0,368 \cdot 10^{-3}$	0,042	5°24'	7440
105°	189°48'	11,037	2,401	$0,118 \cdot 10^{-4}$	$0,302 \cdot 10^{-3}$	0,039	5°12'	9360
130°27'	220°27'	∞	2,449	0	0	0	0°00'	∞

$k = 1.4$

Таблица газодинамических функций

λ	τ	π	ϵ	q	y	f	r	M
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000	0,0000
0,01	1,0000	0,9999	0,9999	0,0158	0,0158	1,0000	0,9999	0,0091
0,02	0,9999	0,9998	0,9998	0,0315	0,0316	1,0002	0,9996	0,0183
0,03	0,9999	0,9995	0,9997	0,0473	0,0473	1,0006	0,9989	0,0274
0,04	0,9997	0,9990	0,9993	0,0631	0,0631	1,0009	0,9981	0,0365
0,05	0,9996	0,9986	0,9990	0,0788	0,0789	1,0015	0,9971	0,0457
0,06	0,9994	0,9979	0,9985	0,0945	0,0947	1,0021	0,9958	0,0548
0,07	0,9992	0,9971	0,9979	0,1102	0,1105	1,0028	0,9943	0,0639
0,08	0,9989	0,9963	0,9974	0,1259	0,1263	1,0038	0,9925	0,0731
0,09	0,9987	0,9953	0,9967	0,1415	0,1422	1,0047	0,9906	0,0822
0,10	0,9983	0,9942	0,9959	0,1571	0,1580	1,0058	0,9885	0,0914
0,11	0,9980	0,9929	0,9949	0,1726	0,1739	1,0070	0,9860	0,1005
0,12	0,9976	0,9916	0,9940	0,1882	0,1897	1,0083	0,9834	0,1097
0,13	0,9972	0,9901	0,9929	0,2036	0,2056	1,0100	0,9806	0,1190
0,14	0,9967	0,9886	0,9918	0,2190	0,2216	1,0113	0,9776	0,1280
0,15	0,9963	0,9870	0,9907	0,2344	0,2375	1,0129	0,9744	0,1372
0,16	0,9957	0,9851	0,9893	0,2497	0,2535	1,0147	0,9709	0,1460
0,17	0,9952	0,9832	0,9880	0,2649	0,2695	1,0165	0,9673	0,1560
0,18	0,9946	0,9812	0,9866	0,2801	0,2855	1,0185	0,9634	0,1650
0,19	0,9940	0,9791	0,9850	0,2952	0,3015	1,0206	0,9594	0,1740
0,20	0,9933	0,9768	0,9834	0,3102	0,3176	1,0227	0,9551	0,1830
0,21	0,9927	0,9745	0,9817	0,3252	0,3337	1,0250	0,9507	0,1920
0,22	0,9919	0,9720	0,9799	0,3401	0,3499	1,0274	0,9461	0,2020
0,23	0,9912	0,9695	0,9781	0,3549	0,3660	1,0298	0,9414	0,2109
0,24	0,9904	0,9668	0,9762	0,3696	0,3823	1,0315	0,9373	0,2202

$k = 1,4$

Продолжение

λ	τ	π	ε	q	y	f	r	M
0,25	0,9896	0,9640	0,9742	0,3842	0,3985	1,0350	0,9314	0,2290
0,26	0,9887	0,9611	0,9721	0,3987	0,4148	1,0378	0,9261	0,2387
0,27	0,9879	0,9581	0,9699	0,4131	0,4311	1,0406	0,9207	0,2480
0,28	0,9869	0,9550	0,9677	0,4274	0,4475	1,0435	0,9152	0,2573
0,29	0,9860	0,9518	0,9653	0,4416	0,4640	1,0465	0,9095	0,2670
0,30	0,9850	0,9485	0,9630	0,4557	0,4804	1,0496	0,9037	0,2760
0,31	0,9840	0,9451	0,9605	0,4697	0,4970	1,0528	0,8977	0,2850
0,32	0,9829	0,9415	0,9579	0,4835	0,5135	1,0559	0,8917	0,2947
0,33	0,9819	0,9379	0,9552	0,4972	0,5302	1,0593	0,8854	0,3040
0,34	0,9807	0,9342	0,9525	0,5109	0,5469	1,0626	0,8791	0,3134
0,35	0,9796	0,9303	0,9497	0,5243	0,5636	1,0661	0,8727	0,3228
0,36	0,9784	0,9265	0,9469	0,5377	0,5804	1,0696	0,8662	0,3322
0,37	0,9772	0,9224	0,9439	0,5509	0,5973	1,0732	0,8595	0,3417
0,38	0,9759	0,9183	0,9409	0,5640	0,6142	1,0768	0,8528	0,3511
0,39	0,9747	0,9141	0,9378	0,5769	0,6312	1,0805	0,8460	0,3606
0,40	0,9733	0,9097	0,9346	0,5897	0,6482	1,0842	0,8391	0,3701
0,41	0,9720	0,9053	0,9314	0,6024	0,6654	1,0880	0,8321	0,3796
0,42	0,9706	0,9008	0,9281	0,6149	0,6826	1,0918	0,8251	0,3892
0,43	0,9692	0,8962	0,9247	0,6272	0,6998	1,0957	0,8179	0,3987
0,44	0,9677	0,8915	0,9212	0,6394	0,7172	1,0996	0,8108	0,4083
0,45	0,9663	0,8868	0,9178	0,6515	0,7346	1,1036	0,8035	0,4179
0,46	0,9647	0,8819	0,9142	0,6633	0,7521	1,1076	0,7963	0,4275
0,47	0,9632	0,8770	0,9105	0,6750	0,7697	1,1116	0,7889	0,4372
0,48	0,9616	0,8719	0,9067	0,6865	0,7874	1,1156	0,7816	0,4468
0,49	0,9600	0,8668	0,9029	0,6979	0,8052	1,1197	0,7741	0,4565

λ	τ	π	ε	η	γ	f	r	M
0,50	0,9583	0,8616	0,8991	0,7091	0,8230	1,1239	0,7666	0,4663
0,51	0,9567	0,8563	0,8951	0,7201	0,8409	1,1279	0,7592	0,4760
0,52	0,9549	0,8509	0,8911	0,7309	0,8590	1,1320	0,7517	0,4858
0,53	0,9532	0,8455	0,8871	0,7416	0,8771	1,1362	0,7442	0,4956
0,54	0,9514	0,8400	0,8829	0,7520	0,8953	1,1403	0,7366	0,5054
0,55	0,9496	0,8344	0,8787	0,7623	0,9136	1,1445	0,7290	0,5152
0,56	0,9477	0,8287	0,8744	0,7724	0,9321	1,1486	0,7215	0,5251
0,57	0,9459	0,8230	0,8701	0,7823	0,9506	1,1528	0,7139	0,5350
0,58	0,9439	0,8172	0,8657	0,7920	0,9692	1,1569	0,7064	0,5450
0,59	0,9420	0,8112	0,8612	0,8015	0,9880	1,1610	0,6987	0,5549
0,60	0,9400	0,8053	0,8567	0,8109	1,0069	1,1651	0,6912	0,5649
0,61	0,9380	0,7992	0,8521	0,8198	1,0258	1,1691	0,6836	0,5750
0,62	0,9359	0,7932	0,8475	0,8288	1,0449	1,1733	0,6760	0,5850
0,63	0,9339	0,7870	0,8428	0,8375	1,0641	1,1772	0,6685	0,5951
0,64	0,9317	0,7808	0,8380	0,8459	1,0842	1,1812	0,6610	0,6053
0,65	0,9296	0,7745	0,8332	0,8543	1,1030	1,1852	0,6535	0,6154
0,66	0,9274	0,7681	0,8283	0,8623	1,1226	1,1891	0,6460	0,6256
0,67	0,9252	0,7617	0,8233	0,8701	1,1423	1,1929	0,6386	0,6359
0,68	0,9229	0,7553	0,8183	0,8778	1,1622	1,1967	0,6311	0,6461
0,69	0,9207	0,7488	0,8133	0,8852	1,1822	1,2005	0,6237	0,6565
0,70	0,9183	0,7422	0,8082	0,8924	1,2024	1,2042	0,6163	0,6668
0,71	0,9160	0,7356	0,8030	0,8993	1,2227	1,2078	0,6090	0,6772
0,72	0,9136	0,7289	0,7978	0,9061	1,2431	1,2114	0,6017	0,6876
0,73	0,9112	0,7221	0,7925	0,9126	1,2637	1,2148	0,5944	0,6981
0,74	0,9087	0,7154	0,7872	0,9189	1,2845	1,2183	0,5872	0,7086

$k=1,4$

Продолжение

λ	τ	π	ε	q	y	f	r	M
0,75	0,9063	0,7086	0,7819	0,9250	1,3054	1,2216	0,5800	0,7192
0,76	0,9037	0,7017	0,7764	0,9308	1,3265	1,2249	0,5729	0,7298
0,77	0,9012	0,6948	0,7710	0,9364	1,3478	1,2280	0,5658	0,7404
0,78	0,8986	0,6878	0,7655	0,9418	1,3692	1,2311	0,5587	0,7511
0,79	0,8960	0,6809	0,7599	0,9469	1,3908	1,2341	0,5517	0,7619
0,80	0,8933	0,6738	0,7543	0,9518	1,4126	1,2370	0,5447	0,7727
0,81	0,8907	0,6668	0,7486	0,9565	1,4346	1,2398	0,5378	0,7835
0,82	0,8879	0,6597	0,7429	0,9610	1,4567	1,2425	0,5309	0,7944
0,83	0,8852	0,6526	0,7372	0,9652	1,4790	1,2451	0,5241	0,8053
0,84	0,8824	0,6454	0,7314	0,9691	1,5016	1,2475	0,5174	0,8163
0,85	0,8796	0,6382	0,7256	0,9729	1,5243	1,2498	0,5107	0,8274
0,86	0,8767	0,6310	0,7197	0,9764	1,5473	1,2520	0,5040	0,8384
0,87	0,8739	0,6238	0,7138	0,9796	1,5704	1,2541	0,4974	0,8496
0,88	0,8709	0,6165	0,7079	0,9826	1,5938	1,2560	0,4908	0,8608
0,89	0,8680	0,6092	0,7019	0,9854	1,6174	1,2579	0,4843	0,8721
0,90	0,8650	0,6019	0,6959	0,9879	1,6412	1,2595	0,4779	0,8833
0,91	0,8620	0,5946	0,6898	0,9902	1,6652	1,2611	0,4715	0,8947
0,92	0,8589	0,5873	0,6838	0,9923	1,6895	1,2625	0,4652	0,9062
0,93	0,8559	0,5800	0,6776	0,9941	1,7140	1,2637	0,4589	0,9177
0,94	0,8527	0,5726	0,6715	0,9957	1,7388	1,2648	0,4527	0,9292
0,95	0,8496	0,5653	0,6653	0,9970	1,7638	1,2658	0,4466	0,9409
0,96	0,8464	0,5579	0,6591	0,9981	1,7891	1,2666	0,4405	0,9526
0,97	0,8432	0,5505	0,6528	0,9989	1,8146	1,2671	0,4344	0,9644
0,98	0,8399	0,5431	0,6466	0,9953	1,8404	1,2676	0,4285	0,9761
0,99	0,8367	0,5357	0,6403	0,9999	1,8665	1,2678	0,4225	0,9880

$k = 1,4$

Продолжение

716

λ	τ	π	ϵ	q	y	f	r	M
1,00	0,8333	0,5283	0,6340	1,0000	1,8929	1,2679	0,4167	1,0000
1,01	0,8300	0,5209	0,6276	0,9999	1,9195	1,2678	0,4109	1,0120
1,02	0,8266	0,5135	0,6212	0,9995	1,9464	1,2675	0,4051	1,0241
1,03	0,8232	0,5061	0,6148	0,9989	1,9737	1,2671	0,3994	1,0363
1,04	0,8197	0,4987	0,6084	0,9980	2,0013	1,2664	0,3938	1,0486
1,05	0,8163	0,4913	0,6019	0,9969	2,0291	1,2655	0,3882	1,0609
1,06	0,8127	0,4840	0,5955	0,9957	2,0573	1,2646	0,3827	1,0733
1,07	0,8092	0,4766	0,5890	0,9941	2,0858	1,2633	0,3773	1,0858
1,08	0,8056	0,4693	0,5826	0,9924	2,1147	1,2620	0,3719	1,0985
1,09	0,8020	0,4619	0,5760	0,9903	2,1439	1,2602	0,3665	1,1111
1,10	0,7983	0,4546	0,5694	0,9880	2,1734	1,2584	0,3613	1,1239
1,11	0,7947	0,4473	0,5629	0,9856	2,2034	1,2564	0,3560	1,1367
1,12	0,7909	0,4400	0,5564	0,9829	2,2337	1,2543	0,3508	1,1496
1,13	0,7872	0,4328	0,5498	0,9800	2,2643	1,2519	0,3457	1,1627
1,14	0,7834	0,4255	0,5432	0,9768	2,2954	1,2491	0,3407	1,1758
1,15	0,7796	0,4184	0,5366	0,9735	2,3269	1,2463	0,3357	1,1890
1,16	0,7757	0,4111	0,5300	0,9698	2,3588	1,2432	0,3307	1,2023
1,17	0,7719	0,4040	0,5234	0,9659	2,3911	1,2398	0,3258	1,2157
1,18	0,7679	0,3969	0,5168	0,9620	2,4238	1,2364	0,3210	1,2292
1,19	0,7640	0,3898	0,5102	0,9577	2,4570	1,2326	0,3162	1,2428
1,20	0,7600	0,3827	0,5035	0,9531	2,4906	1,2286	0,3115	1,2566
1,21	0,7560	0,3757	0,4969	0,9484	2,5247	1,2244	0,3068	1,2708
1,22	0,7519	0,3687	0,4903	0,9435	2,5593	1,2200	0,3022	1,2843
1,23	0,7478	0,3617	0,4837	0,9384	2,5944	1,2154	0,2976	1,2974
1,24	0,7437	0,3548	0,4770	0,9331	2,630	1,2105	0,2931	1,3126

$k = 1,4$

Продолжение

λ	τ	π	ϵ	ϱ	γ	f	g	M
1,25	0,7396	0,3479	0,4704	0,9275	2,6660	1,2054	0,2886	1,3268
1,26	0,7354	0,3411	0,4638	0,9217	2,7026	1,2000	0,2842	1,3413
1,27	0,7312	0,3343	0,4572	0,9159	2,7398	1,1946	0,2798	1,3558
1,28	0,7269	0,3275	0,4505	0,9096	2,7775	1,1887	0,2755	1,3705
1,29	0,7227	0,3208	0,4439	0,9033	2,8158	1,1826	0,2713	1,3853
1,30	0,7183	0,3142	0,4374	0,8969	2,8547	1,1765	0,2670	1,4002
1,31	0,7140	0,3075	0,4307	0,8901	2,8941	1,1699	0,2629	1,4153
1,32	0,7096	0,3010	0,4241	0,8831	2,9343	1,1632	0,2574	1,4305
1,33	0,7052	0,2945	0,4176	0,8761	2,9750	1,1562	0,2547	1,4458
1,34	0,7007	0,2880	0,4110	0,8688	3,0164	1,1490	0,2507	1,4613
1,35	0,6962	0,2816	0,4045	0,8614	3,0586	1,1417	0,2467	1,4769
1,36	0,6917	0,2753	0,3980	0,8538	3,1013	1,1341	0,2427	1,4927
1,37	0,6872	0,2690	0,3914	0,8459	3,1448	1,1261	0,2389	1,5087
1,38	0,6826	0,2628	0,3850	0,8380	3,1889	1,1180	0,2350	1,5248
1,39	0,6780	0,2566	0,3785	0,8299	3,2340	1,1098	0,2312	1,5410
1,40	0,6733	0,2505	0,3720	0,8216	3,2798	1,1012	0,2275	1,5575
1,41	0,6687	0,2445	0,3656	0,8131	3,3263	1,0924	0,2238	1,5741
1,42	0,6639	0,2385	0,3592	0,8046	3,3737	1,0835	0,2201	1,5909
1,43	0,6592	0,2326	0,3528	0,7958	3,4219	1,0742	0,2165	1,6078
1,44	0,6544	0,2267	0,3464	0,7869	3,4710	1,0648	0,2129	1,6250
1,45	0,6496	0,2209	0,3401	0,7778	3,5211	1,0551	0,2094	1,6423
1,46	0,6447	0,2152	0,3338	0,7687	3,5720	1,0453	0,2059	1,6598
1,47	0,6398	0,2095	0,3275	0,7593	3,6240	1,0351	0,2024	1,6776
1,48	0,6349	0,2040	0,3212	0,7499	3,6768	1,0249	0,1990	1,6955
1,49	0,6300	0,1985	0,3150	0,7404	3,7308	1,0144	0,1956	1,7137

$k = 1,4$

Продолжение

718

λ	τ	π	ε	q	y	f	r	M
1,50	0,6250	0,1930	0,3088	0,7307	3,7858	1,0037	0,1923	1,7321
1,51	0,6200	0,1876	0,3027	0,7209	3,8418	0,9927	0,1890	1,7506
1,52	0,6149	0,1824	0,2965	0,7110	3,8990	0,9816	0,1858	1,7694
1,53	0,6099	0,1771	0,2904	0,7009	3,9574	0,9703	0,1825	1,7885
1,54	0,6047	0,1720	0,2844	0,6909	4,0172	0,9590	0,1794	1,8078
1,55	0,5996	0,1669	0,2784	0,6807	4,0778	0,9472	0,1762	1,8273
1,56	0,5944	0,1619	0,2724	0,6703	4,1398	0,9353	0,1731	1,8471
1,57	0,5892	0,1570	0,2665	0,6599	4,2034	0,9233	0,1700	1,8672
1,58	0,5839	0,1522	0,2606	0,6494	4,2680	0,9111	0,1670	1,8875
1,59	0,5786	0,1474	0,2547	0,6389	4,3345	0,8988	0,1640	1,9081
1,60	0,5733	0,1427	0,2489	0,6282	4,4020	0,8861	0,1611	1,9290
1,61	0,5680	0,1381	0,2431	0,6175	4,4713	0,8734	0,1581	1,9501
1,62	0,5626	0,1336	0,2374	0,6067	4,5422	0,8604	0,1552	1,9716
1,63	0,5572	0,1291	0,2317	0,5958	4,6144	0,8474	0,1524	1,9934
1,64	0,5517	0,1248	0,2261	0,5850	4,6887	0,8343	0,1495	2,0155
1,65	0,5463	0,1205	0,2205	0,5740	4,7647	0,8210	0,1467	2,0380
1,66	0,5407	0,1163	0,2150	0,5630	4,8424	0,8075	0,1440	2,0607
1,67	0,5352	0,1121	0,2095	0,5520	4,9221	0,7939	0,1413	2,0839
1,68	0,5296	0,1081	0,2041	0,5409	5,0037	0,7802	0,1386	2,1073
1,69	0,5240	0,1041	0,1988	0,5298	5,0877	0,7664	0,1359	2,1313
1,70	0,5183	0,1003	0,1934	0,5187	5,1735	0,7524	0,1333	2,1555
1,71	0,5126	0,0965	0,1881	0,5075	5,2617	0,7383	0,1306	2,1802
1,72	0,5069	0,0928	0,1830	0,4965	5,3520	0,7243	0,1281	2,2053
1,73	0,5012	0,0891	0,1778	0,4852	5,4449	0,7100	0,1255	2,2308
1,74	0,4954	0,0856	0,1727	0,4741	5,5403	0,6957	0,1230	2,2567

ПРИЛОЖЕНИЕ II

$k = 1,4$

Продолжение

λ	τ	π	ϵ	q	y	f	r	M
1,75	0,4896	0,0821	0,1677	0,4630	5,6383	0,6813	0,1205	2,2831
1,76	0,4837	0,0787	0,1628	0,452	5,7390	0,6669	0,1181	2,3100
1,77	0,4779	0,0754	0,1578	0,4407	5,8427	0,6523	0,1156	2,3374
1,78	0,4719	0,0722	0,1530	0,4296	5,9495	0,6378	0,1132	2,3653
1,79	0,4660	0,0691	0,1482	0,4185	6,0593	0,6232	0,1108	2,3937
1,80	0,4600	0,0660	0,1435	0,4075	6,1723	0,6085	0,1085	2,4227
1,81	0,4540	0,0630	0,1389	0,3965	6,2893	0,5938	0,1062	2,4523
1,82	0,4479	0,0602	0,1343	0,3855	6,4091	0,5791	0,1039	2,4824
1,83	0,4418	0,0573	0,1298	0,3746	6,5335	0,5644	0,1016	2,5132
1,84	0,4357	0,0546	0,1253	0,3638	6,6607	0,5497	0,0994	2,5449
1,85	0,4296	0,0520	0,1210	0,3530	6,7934	0,5349	0,0971	2,5766
1,86	0,4234	0,0494	0,1167	0,3423	6,9298	0,5202	0,0949	2,6094
1,87	0,4172	0,0469	0,1124	0,3316	7,0707	0,5055	0,0928	2,6429
1,88	0,4109	0,0445	0,1083	0,3211	7,2162	0,4909	0,0906	2,6772
1,89	0,4047	0,0422	0,1042	0,3105	7,3673	0,4762	0,0885	2,7123
1,90	0,3983	0,0399	0,1002	0,3002	7,5243	0,4617	0,0864	2,7481
1,91	0,3920	0,0377	0,0962	0,2898	7,6858	0,4472	0,0843	2,7849
1,92	0,3856	0,0356	0,0923	0,2797	7,8540	0,4327	0,0823	2,8225
1,93	0,3792	0,0336	0,0885	0,2695	8,0289	0,4183	0,0803	2,8612
1,94	0,3727	0,0316	0,0848	0,2596	8,2098	0,4041	0,0782	2,9007
1,95	0,3662	0,0297	0,0812	0,2497	8,3985	0,3899	0,0763	2,9414
1,96	0,3597	0,0279	0,0776	0,2400	8,5943	0,3758	0,0743	2,9831
1,97	0,3532	0,0262	0,0741	0,2304	8,7984	0,3618	0,0724	3,0301
1,98	0,3466	0,0245	0,0707	0,2209	9,0112	0,3480	0,0704	3,0701
1,99	0,3400	0,0229	0,0674	0,2116	9,2329	0,3343	0,0685	3,1155

$k=1,4$

Продолжение

720

λ	τ	π	ε	q	y	f	r	M
2,00	0,3333	0,0214	0,0642	0,2024	9,464	0,3203	0,0668	3,1622
2,01	0,3267	0,0199	0,0610	0,1934	9,706	0,3074	0,0648	3,2104
2,02	0,3199	0,0185	0,0579	0,1845	9,961	0,2942	0,0630	3,2603
2,03	0,3132	0,0172	0,0549	0,1758	10,224	0,2811	0,0612	3,3113
2,04	0,3064	0,0159	0,0520	0,1672	10,502	0,2683	0,0594	3,3642
2,05	0,2996	0,0147	0,0491	0,1588	10,794	0,2556	0,0576	3,4190
2,06	0,2927	0,0136	0,0464	0,1507	11,102	0,2431	0,0558	3,4759
2,07	0,2859	0,0125	0,0437	0,1427	11,422	0,2309	0,0541	3,5343
2,08	0,2789	0,0115	0,0411	0,1348	11,762	0,2189	0,0524	3,5951
2,09	0,2720	0,0105	0,0386	0,1272	12,121	0,2070	0,0507	3,6583
2,10	0,2650	0,0096	0,0361	0,1198	12,500	0,1956	0,0490	3,7240
2,11	0,2580	0,0087	0,0338	0,1125	12,901	0,1843	0,0473	3,7922
2,12	0,2509	0,0079	0,0315	0,1055	13,326	0,1733	0,0457	3,8633
2,13	0,2439	0,0072	0,0294	0,0986	13,778	0,1626	0,0440	3,9376
2,14	0,2367	0,0065	0,0273	0,0921	14,259	0,1522	0,0424	4,0150
2,15	0,2296	0,0058	0,0253	0,0857	14,772	0,1420	0,0408	4,0961
2,16	0,2224	0,0052	0,0233	0,0795	15,319	0,1322	0,0393	4,1791
2,17	0,2152	0,0046	0,0215	0,0735	15,906	0,1226	0,0377	4,2702
2,18	0,2079	0,0041	0,0197	0,0678	16,537	0,1134	0,0361	4,3642
2,19	0,2006	0,0036	0,0180	0,0623	17,218	0,1045	0,0346	4,4633
2,20	0,1933	0,0032	0,0164	0,0570	17,949	0,0960	0,0331	4,5674
2,21	0,1860	0,0028	0,0149	0,0520	18,742	0,0878	0,0316	4,6778
2,22	0,1786	0,0024	0,0135	0,0472	19,607	0,0799	0,0301	4,7954
2,23	0,1712	0,0021	0,0121	0,0427	20,548	0,0724	0,0287	4,9201
2,24	0,1637	0,0018	0,0116	0,0408	22,983	0,0695	0,0255	5,0533

ПРИЛОЖЕНИЕ II

λ	τ	π	ε	q	y	f	r	M
2,25	0,1563	0,00151	0,00966	0,0343	22,712	0,0585	0,0258	5,1958
2,26	0,1487	0,00127	0,00813	0,0290	23,968	0,0496	0,0256	5,3494
2,27	0,1412	0,00106	0,00749	0,0268	25,361	0,0461	0,0229	5,5147
2,28	0,1336	0,00087	0,00652	0,0234	26,893	0,0404	0,0216	5,6940
2,29	0,1260	0,00071	0,00564	0,0204	28,669	0,0352	0,0202	5,8891
2,30	0,1183	0,00057	0,00482	0,0175	30,658	0,0302	0,0189	6,1033
2,31	0,1106	0,00045	0,00407	0,0148	32,937	0,0258	0,0175	6,3399
2,32	0,1029	0,00035	0,03400	0,0124	35,551	0,0217	0,0161	6,6008
2,33	0,0952	0,00027	0,00280	0,0103	38,606	0,0180	0,0148	6,8935
2,34	0,0874	0,00020	0,00226	0,0083	42,233	0,0146	0,0135	7,2254
2,35	0,0796	0,00014	0,00170	0,0063	46,593	0,0111	0,0122	7,6053
2,36	0,0717	$0,988 \cdot 10^{-1}$	0,00138	0,0051	51,914	0,0090	0,0109	8,0450
2,37	0,0638	$0,657 \cdot 10^{-1}$	0,00103	0,0038	58,569	0,0068	0,0096	8,5619
2,38	0,0559	$0,413 \cdot 10^{-1}$	0,00074	0,0028	67,144	0,0049	0,0084	9,1882
2,39	0,0480	$0,242 \cdot 10^{-1}$	0,00050	0,0019	78,613	0,0034	0,0071	9,9624
2,40	0,0400	$0,128 \cdot 10^{-1}$	0,00032	0,0012	94,703	0,0022	0,0059	10,957
2,41	0,0320	$0,584 \cdot 10^{-2}$	0,00018	0,0007	118,94	0,0012	0,0047	12,306
2,42	0,0239	$0,211 \cdot 10^{-2}$	$0,884 \cdot 10^{-4}$	0,0003	159,65	0,0006	0,0035	14,287
2,43	0,0158	$0,499 \cdot 10^{-3}$	$0,315 \cdot 10^{-4}$	0,0001	242,16	0,0002	0,0025	17,631
2,44	0,0077	$0,316 \cdot 10^{-3}$	$0,410 \cdot 10^{-5}$	$0,058 \cdot 10^{-4}$	499,16	$0,285 \cdot 10^{-1}$	0,0011	25,367
2,449	0	0	0	0	∞	0	0	∞

λ	τ	π	ε	q	y	f	r	M
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000	0,0000
0,01	1,0000	0,9999	0,9999	0,0159	0,0159	1,0000	1,0000	0,0093
0,02	0,9999	0,9998	0,9999	0,0318	0,0318	1,0003	0,9995	0,0185
0,03	0,9999	0,9995	0,9997	0,0476	0,0477	1,0006	0,9990	0,0278
0,04	0,9998	0,9991	0,9993	0,0635	0,0636	1,0009	0,9982	0,0371
0,05	0,9997	0,9986	0,9990	0,0793	0,0795	1,0015	0,9972	0,0463
0,06	0,9995	0,9980	0,9985	0,0952	0,0954	1,0021	0,9959	0,0556
0,07	0,9993	0,9972	0,9979	0,1110	0,1113	1,0028	0,9944	0,0649
0,08	0,9991	0,9964	0,9973	0,1267	0,1272	1,0037	0,9928	0,0742
0,09	0,9989	0,9954	0,9965	0,1425	0,1431	1,0046	0,9908	0,0834
0,10	0,9986	0,9944	0,9958	0,1582	0,1591	1,0057	0,9887	0,0927
0,11	0,9983	0,9932	0,9949	0,1738	0,1750	1,0069	0,9864	0,1020
0,12	0,9980	0,9918	0,9938	0,1894	0,1910	1,0081	0,9838	0,1113
0,13	0,9976	0,9904	0,9928	0,2052	0,2072	1,0096	0,9810	0,1206
0,14	0,9972	0,9889	0,9917	0,2205	0,2220	1,0111	0,9781	0,1299
0,15	0,9968	0,9872	0,9903	0,2360	0,2390	1,0126	0,9749	0,1392
0,16	0,9964	0,9854	0,9890	0,2514	0,2551	1,0143	0,9715	0,1485
0,17	0,9959	0,9836	0,9877	0,2667	0,2712	1,0162	0,9679	0,1578
0,18	0,9954	0,9816	0,9862	0,2820	0,2873	1,0181	0,9642	0,1672
0,19	0,9949	0,9796	0,9846	0,2972	0,3034	1,0202	0,9602	0,1765
0,20	0,9943	0,9774	0,9830	0,3123	0,3195	1,0223	0,9561	0,1858
0,21	0,9938	0,9751	0,9812	0,3273	0,3357	1,0245	0,9518	0,1952
0,22	0,9932	0,9728	0,9795	0,3423	0,3519	1,0269	0,9473	0,2045
0,23	0,9925	0,9702	0,9775	0,3571	0,3681	1,0292	0,9427	0,2139
0,24	0,9918	0,9675	0,9755	0,3719	0,3844	1,0317	0,9378	0,2233

λ	τ	π	ε	q	y	f	r	M
0,25	0,9912	0,9648	0,9734	0,3866	0,4007	1,0343	0,9329	0,2327
0,26	0,9904	0,9619	0,9712	0,4011	0,4170	1,0369	0,9277	0,2420
0,27	0,9897	0,9590	0,9690	0,4156	0,4334	1,0396	0,9224	0,2515
0,28	0,9889	0,9560	0,9667	0,4300	0,4498	1,0425	0,9170	0,2609
0,29	0,9881	0,9529	0,9644	0,4443	0,4662	1,0455	0,9114	0,2703
0,30	0,9873	0,9496	0,9619	0,4584	0,4827	1,0485	0,9057	0,2797
0,31	0,9864	0,9463	0,9594	0,4724	0,4992	1,0516	0,8999	0,2892
0,32	0,9855	0,9428	0,9567	0,4863	0,5158	1,0547	0,8940	0,2986
0,33	0,9846	0,9393	0,9540	0,5001	0,5324	1,0579	0,8879	0,3081
0,34	0,9836	0,9356	0,9512	0,5137	0,5491	1,0612	0,8817	0,3176
0,35	0,9827	0,9319	0,9484	0,5273	0,5658	1,0645	0,8754	0,3271
0,36	0,9817	0,9281	0,9455	0,5407	0,5826	1,0680	0,8690	0,3366
0,37	0,9806	0,9241	0,9424	0,5539	0,5994	1,0714	0,8625	0,3462
0,38	0,9796	0,9201	0,9393	0,5670	0,6162	1,0750	0,8560	0,3557
0,39	0,9785	0,9159	0,9361	0,5799	0,6332	1,0785	0,8493	0,3653
0,40	0,9773	0,9118	0,9329	0,5928	0,6501	1,0822	0,8425	0,3749
0,41	0,9762	0,9075	0,9296	0,6055	0,6672	1,0859	0,8357	0,3845
0,42	0,9750	0,9030	0,9262	0,6179	0,6843	1,0896	0,8288	0,3941
0,43	0,9738	0,8985	0,9227	0,6303	0,7014	1,0933	0,8218	0,4037
0,44	0,9726	0,8940	0,9192	0,6425	0,7187	1,0972	0,8148	0,4134
0,45	0,9713	0,8893	0,9156	0,6545	0,7359	1,1010	0,8078	0,4230
0,46	0,9700	0,8850	0,9123	0,6666	0,7533	1,1053	0,8006	0,4305
0,47	0,9687	0,8797	0,9081	0,6780	0,7707	1,1088	0,7934	0,4424
0,48	0,9674	0,8749	0,9044	0,6896	0,7882	1,1128	0,7862	0,4522
0,49	0,9660	0,8699	0,9005	0,7609	0,8058	1,1167	0,7790	0,4619

λ	τ	π	ε	q	y	f	r	M
0,50	0,9646	0,8648	0,8966	0,7121	0,8234	1,1207	0,7717	0,4717
0,51	0,9632	0,8596	0,8925	0,7230	0,8411	1,1246	0,7644	0,4815
0,52	0,9617	0,8544	0,8884	0,7339	0,8589	1,1287	0,7570	0,4913
0,53	0,9602	0,8491	0,8843	0,7445	0,8768	1,1327	0,7496	0,5011
0,54	0,9587	0,8436	0,8799	0,7548	0,8947	1,1365	0,7423	0,5110
0,55	0,9572	0,8382	0,8757	0,7651	0,9128	1,1406	0,7349	0,5208
0,56	0,9556	0,8327	0,8714	0,7752	0,9309	1,1447	0,7275	0,5308
0,57	0,9540	0,8271	0,8670	0,7850	0,9491	1,1487	0,7200	0,5407
0,58	0,9524	0,8214	0,8625	0,7946	0,9674	1,1526	0,7126	0,5506
0,59	0,9507	0,8156	0,8579	0,8040	0,9858	1,1565	0,7052	0,5606
0,60	0,9490	0,8098	0,8533	0,8133	1,0043	1,1605	0,6978	0,5706
0,61	0,9473	0,8040	0,8487	0,8224	1,0229	1,1645	0,6904	0,5807
0,62	0,9456	0,7980	0,8439	0,8312	1,0416	1,1684	0,6830	0,5907
0,63	0,9438	0,7921	0,8393	0,8399	1,0604	1,1724	0,6756	0,6008
0,64	0,9420	0,7860	0,8344	0,8483	1,0792	1,1762	0,6683	0,6109
0,65	0,9402	0,7798	0,8294	0,8564	1,0982	1,1799	0,6609	0,6211
0,66	0,9383	0,7737	0,8246	0,8645	1,1173	1,1838	0,6536	0,6313
0,67	0,9364	0,7674	0,8195	0,8722	1,1366	1,1874	0,6463	0,6415
0,68	0,9345	0,7612	0,8145	0,8798	1,1559	1,1911	0,6390	0,6517
0,69	0,9326	0,7548	0,8094	0,8871	1,1753	1,1947	0,6318	0,6620
0,70	0,9306	0,7483	0,8041	0,8941	1,1949	1,1981	0,6246	0,6723
0,71	0,9286	0,7419	0,7989	0,9011	1,2146	1,2017	0,6174	0,6826
0,72	0,9266	0,7354	0,7937	0,9077	1,2343	1,2051	0,6102	0,6930
0,73	0,9245	0,7289	0,7884	0,9143	1,2543	1,2086	0,6031	0,7034
0,74	0,9224	0,7223	0,7830	0,9204	1,2743	1,2118	0,5961	0,7139

λ	τ	π	ε	q	y	f	r	M
0,75	0,9203	0,7157	0,7777	0,9265	1,2945	1,2151	0,5890	0,7243
0,76	0,9182	0,7090	0,7722	0,9322	1,3148	1,2182	0,5820	0,7348
0,77	0,9160	0,7023	0,7666	0,9377	1,3353	1,2212	0,5751	0,7454
0,78	0,9138	0,6955	0,7611	0,9430	1,3559	1,2241	0,5682	0,7561
0,79	0,9116	0,6887	0,7555	0,9481	1,3766	1,2270	0,5613	0,7666
0,80	0,9094	0,6819	0,7499	0,9529	1,3975	1,2298	0,5545	0,7772
0,81	0,9071	0,6750	0,7442	0,9575	1,4185	1,2324	0,5477	0,7880
0,82	0,9048	0,6681	0,7384	0,9618	1,4397	1,2349	0,5410	0,7987
0,83	0,9024	0,6612	0,7326	0,9660	1,4610	1,2374	0,5343	0,8095
0,84	0,9001	0,6542	0,7268	0,9698	1,4825	1,2397	0,5277	0,8203
0,85	0,8977	0,6472	0,7210	0,9735	1,5042	1,2419	0,5211	0,8312
0,86	0,8953	0,6402	0,7151	0,9769	1,5260	1,2440	0,5146	0,8421
0,87	0,8928	0,6332	0,7092	0,9802	1,5479	1,2461	0,5082	0,8531
0,88	0,8903	0,6261	0,7032	0,9830	1,5701	1,2478	0,5018	0,8641
0,89	0,8878	0,6191	0,6973	0,9859	1,5924	1,2497	0,4954	0,8751
0,90	0,8853	0,6120	0,6913	0,9883	1,6149	1,2512	0,4891	0,8862
0,91	0,8827	0,6048	0,6852	0,9904	1,6376	1,2525	0,4829	0,8974
0,92	0,8801	0,5977	0,6791	0,9925	1,6605	1,2539	0,4767	0,9086
0,93	0,8775	0,5906	0,6730	0,9943	1,6835	1,2552	0,4705	0,9198
0,94	0,8749	0,5834	0,6669	0,9957	1,7068	1,2561	0,4645	0,9311
0,95	0,8722	0,5763	0,6608	0,9972	1,7302	1,2572	0,4584	0,9424
0,96	0,8695	0,5691	0,6545	0,9981	1,7539	1,2577	0,4525	0,9538
0,97	0,8667	0,5619	0,6483	0,9989	1,7778	1,2583	0,4466	0,9653
0,98	0,8640	0,5547	0,6420	0,9995	1,8018	1,2586	0,4407	0,9768
0,99	0,8612	0,5476	0,6359	1,0000	1,8261	1,2591	0,4349	0,9884

λ	τ	π	ε	q	y	f	r	M
1,00	0,8584	0,5404	0,6296	1,0000	1,8506	1,2591	0,4292	1,0000
1,01	0,8555	0,5332	0,6233	1,0000	1,8754	1,2590	0,4235	1,0117
1,02	0,8527	0,5260	0,6169	1,9995	1,9003	1,2587	0,4179	1,0234
1,03	0,8497	0,5188	0,6105	0,9989	1,9255	1,2583	0,4123	1,0352
1,04	0,8468	0,5116	0,6042	0,9981	1,9509	1,2576	0,4068	1,0471
1,05	0,8439	0,5045	0,5979	0,9972	1,9766	1,2570	0,4014	1,0590
1,06	0,8409	0,4973	0,5914	0,9958	2,0025	1,2559	0,3960	1,0710
1,07	0,8379	0,4902	0,5850	0,9944	2,0286	1,2548	0,3906	1,0830
1,08	0,8348	0,4830	0,5786	0,9926	2,0550	1,2534	0,3854	1,0951
1,09	0,8317	0,4759	0,5722	0,9907	2,0818	1,2520	0,3801	1,1073
1,10	0,8286	0,4688	0,5658	0,9886	2,1087	1,2503	0,3750	1,1196
1,11	0,8255	0,4617	0,5593	0,9862	2,1360	1,2484	0,3698	1,1319
1,12	0,8223	0,4546	0,5528	0,9835	2,1635	1,2463	0,3648	1,1443
1,13	0,8192	0,4475	0,5463	0,9806	2,1913	1,2439	0,3598	1,1567
1,14	0,8159	0,4405	0,5399	0,9777	2,2194	1,2415	0,3548	1,1693
1,15	0,8127	0,4335	0,5334	0,9744	2,2478	1,2388	0,3499	1,1819
1,16	0,8094	0,4265	0,5269	0,9709	2,2765	1,2359	0,3451	1,1946
1,17	0,8061	0,4196	0,5205	0,9674	2,3055	1,2330	0,3403	1,2073
1,18	0,8028	0,4126	0,5140	0,9634	2,3349	1,2296	0,3356	1,2202
1,19	0,7994	0,4057	0,5075	0,9593	2,3646	1,2261	0,3309	1,2331
1,20	0,7961	0,3986	0,5007	0,9545	2,3940	1,2218	0,3263	1,2461
1,21	0,7926	0,3920	0,4946	0,9506	2,4249	1,2186	0,3217	1,2592
1,22	0,7892	0,3852	0,4881	0,9459	2,4556	1,2146	0,3172	1,2723
1,23	0,7857	0,3784	0,4816	0,9410	2,4867	1,2102	0,3127	1,2856
1,24	0,7822	0,3716	0,4751	0,9357	2,5181	1,2055	0,3083	1,2990

$k = 1,33$

Продолжение

λ	τ	π	ε	q	y	f	r	M
1,25	0,7787	0,3649	0,4686	0,9305	2,5500	1,2008	0,3039	1,3124
1,26	0,7752	0,3583	0,4622	0,9252	2,5821	1,1961	0,2996	1,3259
1,27	0,7716	0,3516	0,4557	0,9193	2,6147	1,1907	0,2953	1,3396
1,28	0,7680	0,3450	0,4493	0,9135	2,6477	1,1853	0,2911	1,3533
1,29	0,7643	0,3385	0,4429	0,9075	2,6811	1,1799	0,2869	1,3671
1,30	0,7606	0,3320	0,4365	0,9014	2,7149	1,1741	0,2828	1,3820
1,31	0,7570	0,3255	0,4300	0,8949	2,7492	1,1680	0,2787	1,3950
1,32	0,7532	0,3191	0,4236	0,8883	2,7838	1,1618	0,2747	1,4091
1,33	0,7495	0,3128	0,4173	0,8816	2,8190	1,1555	0,2707	1,4234
1,34	0,7457	0,3065	0,4110	0,8749	2,8545	1,1491	0,2667	1,4377
1,35	0,7419	0,3092	0,4046	0,8677	2,8905	1,1421	0,2629	1,4521
1,36	0,7380	0,2940	0,3984	0,8606	2,9271	1,1351	0,2590	1,4667
1,37	0,7342	0,2878	0,3920	0,8531	2,9642	1,1277	0,2552	1,4814
1,38	0,7303	0,2817	0,3857	0,8455	3,0017	1,1202	0,2515	1,4960
1,39	0,7264	0,2757	0,3796	0,8381	3,0398	1,1129	0,2477	1,5110
1,40	0,7224	0,2697	0,3733	0,8303	3,0784	1,1051	0,2441	1,5290
1,41	0,7184	0,2637	0,3671	0,8221	3,1176	1,0968	0,2404	1,5412
1,42	0,7144	0,2578	0,3609	0,8140	3,1573	1,0885	0,2368	1,5564
1,43	0,7104	0,2520	0,3548	0,8060	3,1977	1,0803	0,2333	1,5719
1,44	0,7063	0,2463	0,3487	0,7976	3,2386	1,0717	0,2298	1,5875
1,45	0,7022	0,2406	0,3426	0,7891	3,2802	1,0629	0,2263	1,6031
1,46	0,6981	0,2349	0,3365	0,7805	3,3222	1,0539	0,2229	1,6188
1,47	0,6940	0,2294	0,3305	0,7718	3,3649	1,0447	0,2195	1,6349
1,48	0,6898	0,2238	0,3245	0,7629	3,4083	1,0353	0,2162	1,6510
1,49	0,6856	0,2184	0,3186	0,7540	3,4524	1,0258	0,2129	1,6672

λ	τ	π	ε	q	y	f	r	M
1,50	0,6813	0,2138	0,3126	0,7449	3,4972	1,0160	0,2097	1,6836
1,51	0,6771	0,2077	0,3067	0,7357	3,5426	1,0061	0,2064	1,7002
1,52	0,6728	0,2024	0,3009	0,7265	3,5890	0,9961	0,2032	1,7169
1,53	0,6685	0,1973	0,2951	0,7172	3,6358	0,9858	0,2001	1,7338
1,54	0,6641	0,1921	0,2893	0,7077	3,6836	0,9754	0,1970	1,7508
1,55	0,6597	0,1871	0,2836	0,6982	3,7321	0,9649	0,1939	1,7680
1,56	0,6553	0,1821	0,2779	0,6886	3,7813	0,9541	0,1909	1,7854
1,57	0,6509	0,1772	0,2722	0,6789	3,8316	0,9432	0,1879	1,8029
1,58	0,6464	0,1723	0,2666	0,6691	3,8825	0,9321	0,1849	1,8207
1,59	0,6420	0,1676	0,2610	0,6593	3,9345	0,9209	0,1820	1,8386
1,60	0,6374	0,1628	0,2554	0,6492	3,9874	0,9093	0,1791	1,8567
1,61	0,6329	0,1582	0,2500	0,6394	4,0410	0,8981	0,1762	1,8750
1,62	0,6283	0,1537	0,2446	0,6294	4,0957	0,8865	0,1734	1,8935
1,63	0,6237	0,1492	0,2392	0,6193	4,1514	0,8746	0,1706	1,9122
1,64	0,6191	0,1448	0,2338	0,6092	4,2080	0,8628	0,1678	1,9311
1,65	0,6144	0,1404	0,2286	0,5991	4,2659	0,8508	0,1651	1,9503
1,66	0,6097	0,1362	0,2233	0,5889	4,3250	0,8387	0,1623	1,9696
1,67	0,6050	0,1320	0,2181	0,5786	4,3849	0,8264	0,1597	1,9892
1,68	0,6003	0,1278	0,2130	0,5684	4,4458	0,8141	0,1570	2,0089
1,69	0,5955	0,1238	0,2079	0,5561	4,5082	0,8016	0,1544	2,0290
1,70	0,5907	0,1198	0,2029	0,5478	4,5718	0,7890	0,1519	2,0493
1,71	0,5859	0,1159	0,1979	0,5374	4,6362	0,7764	0,1493	2,0698
1,72	0,5810	0,1121	0,1929	0,5271	4,7027	0,7637	0,1468	2,0906
1,73	0,5761	0,1083	0,1881	0,5168	4,7703	0,7509	0,1443	2,1112
1,74	0,5712	0,1047	0,1833	0,5065	4,8390	0,7381	0,1418	2,1330

λ	τ	π	ε	q	y	f	r	M
1,75	0,5663	0,1011	0,1785	0,4961	4,9090	0,7250	0,1394	2,1546
1,76	0,5613	0,0975	0,1738	0,4858	4,9808	0,7120	0,1370	2,1765
1,77	0,5563	0,0941	0,1691	0,4755	5,0543	0,6990	0,1346	2,1987
1,78	0,5513	0,0907	0,1645	0,4652	5,1291	0,6858	0,1323	2,2211
1,79	0,5462	0,0874	0,1620	0,4550	5,2057	0,6727	0,1299	2,2439
1,80	0,5411	0,0842	0,1555	0,4447	5,2839	0,6595	0,1276	2,2670
1,81	0,5360	0,0810	0,1511	0,4345	5,3642	0,6462	0,1254	2,2905
1,82	0,5309	0,0779	0,1468	0,4243	5,4459	0,6329	0,1231	2,3143
1,83	0,5257	0,0749	0,1425	0,4142	5,5297	0,6197	0,1209	2,3384
1,84	0,5205	0,0720	0,1383	0,4041	5,6153	0,6063	0,1187	2,3629
1,85	0,5153	0,0691	0,1341	0,3927	5,6835	0,5930	0,1165	2,3877
1,86	0,5100	0,0663	0,1300	0,3841	5,7928	0,5797	0,1144	2,4130
1,87	0,5047	0,0636	0,1260	0,3741	5,8850	0,5664	0,1122	2,4386
1,88	0,4994	0,0609	0,1220	0,3643	5,9795	0,5531	0,1101	2,4647
1,89	0,4941	0,0583	0,1181	0,3545	6,0764	0,5398	0,1081	2,4911
1,90	0,4887	0,0558	0,1142	0,3447	6,1757	0,5266	0,1060	2,5180
1,91	0,4833	0,0534	0,1105	0,3351	6,2779	0,5134	0,1040	2,5454
1,92	0,4779	0,0510	0,1067	0,3256	6,3820	0,5002	0,1020	2,5731
1,93	0,4724	0,0487	0,1031	0,3161	6,4899	0,4871	0,1000	2,6015
1,94	0,4670	0,0465	0,0995	0,3064	6,5949	0,4740	0,0980	2,6302
1,95	0,4615	0,0443	0,0960	0,2973	6,7128	0,4609	0,0961	2,6596
1,96	0,4559	0,0422	0,0925	0,2881	6,8289	0,4480	0,0942	2,6894
1,97	0,4504	0,0402	0,0892	0,2790	6,9487	0,4352	0,0923	2,7198
1,98	0,4448	0,0382	0,0858	0,2700	7,0720	0,4224	0,0904	2,7507
1,99	0,4391	0,0363	0,0826	0,2611	7,1985	0,4097	0,0885	2,7822

λ	τ	π	ε	q	y	f	r	M
2,00	0,4335	0,0344	0,0794	0,2523	7,3288	0,3971	0,0867	2,8143
2,01	0,4278	0,0326	0,0763	0,2436	7,4635	0,3845	0,0849	2,8471
2,02	0,4221	0,0309	0,0733	0,2351	7,6020	0,3723	0,0831	2,8806
2,03	0,4164	0,0293	0,0703	0,2267	7,7448	0,3600	0,0813	2,9147
2,04	0,4106	0,0277	0,0674	0,2183	7,8923	0,3477	0,0795	2,9496
2,05	0,4048	0,0261	0,0645	0,2101	8,0444	0,3357	0,0778	2,9852
2,06	0,3990	0,0247	0,0618	0,2022	8,2016	0,3240	0,0761	3,0215
2,07	0,3931	0,0232	0,0591	0,1942	8,3639	0,3122	0,0744	3,0587
2,08	0,3873	0,0219	0,0564	0,1864	8,5323	0,3005	0,0727	3,0967
2,09	0,3814	0,0205	0,0539	0,1788	8,7059	0,2891	0,0710	3,1356
2,10	0,3754	0,0193	0,0514	0,1713	8,8854	0,2778	0,0694	3,1754
2,11	0,3695	0,0181	0,0489	0,1640	9,0725	0,2668	0,0678	3,2162
2,12	0,3635	0,0169	0,0466	0,1569	9,2652	0,2559	0,0662	3,2579
2,13	0,3574	0,0158	0,0443	0,1500	9,4829	0,2451	0,0646	3,3007
2,14	0,3514	0,0148	0,0420	0,1429	9,6737	0,2345	0,0630	3,3446
2,15	0,3453	0,0138	0,0399	0,1362	9,8903	0,2242	0,0614	3,3897
2,16	0,3392	0,0128	0,0378	0,1296	10,116	0,2140	0,0599	3,4360
2,17	0,3331	0,0119	0,0357	0,1232	10,349	0,2041	0,0583	3,4836
2,18	0,3269	0,0110	0,0338	0,1170	10,592	0,1943	0,0568	3,5324
2,19	0,3207	0,0102	0,0319	0,1109	10,847	0,1847	0,0553	3,5828
2,20	0,3145	0,0094	0,0300	0,1050	11,111	0,1755	0,0539	3,6344
2,21	0,3083	0,0087	0,0282	0,0993	11,388	0,1664	0,0524	3,6877
2,22	0,3020	0,0080	0,0266	0,0937	11,678	0,1575	0,0509	3,7428
2,23	0,2957	0,0074	0,0249	0,0883	11,980	0,1488	0,0495	3,7995
2,24	0,2894	0,0068	0,0233	0,0830	12,297	0,1404	0,0481	3,8579

$k = 1,33$

Продолжение

λ	τ	π	ε	q	y	f	r	M
2,25	0,2830	0,00620	0,0218	0,0780	12,629	0,1323	0,0467	3,9185
2,26	0,2766	0,00560	0,0204	0,0731	12,978	0,1243	0,0453	3,9811
2,27	0,2702	0,00512	0,0190	0,0684	13,345	0,1167	0,0439	4,0458
2,28	0,2638	0,00465	0,0176	0,0638	13,732	0,1092	0,0426	4,1131
2,29	0,2573	0,00421	0,0163	0,0595	14,139	0,1021	0,0412	4,1828
2,30	0,2508	0,00379	0,0151	0,0553	14,568	0,0951	0,0399	4,2551
2,31	0,2443	0,00341	0,0140	0,0512	15,023	0,0885	0,0385	4,3304
2,32	0,2377	0,00306	0,0129	0,0474	15,505	0,0821	0,0372	4,4086
2,33	0,2311	0,00273	0,0118	0,0437	16,014	0,0759	0,0360	4,4903
2,34	0,2245	0,00243	0,0108	0,0402	16,557	0,0700	0,0347	4,5756
2,35	0,2179	0,00215	0,0099	0,0369	17,136	0,0644	0,0334	4,6647
2,36	0,2112	0,00190	0,0090	0,0337	17,751	0,0590	0,0321	4,7578
2,37	0,2045	0,00167	0,0081	0,0307	18,411	0,0539	0,0309	4,8557
2,38	0,1978	0,00146	0,0074	0,0278	19,118	0,0491	0,0297	4,9586
2,39	0,1910	0,00127	0,0066	0,0252	19,876	0,0445	0,0285	5,0665
2,40	0,1842	0,00109	0,0059	0,0226	20,696	0,0402	0,0272	5,1807
2,41	0,1774	0,00095	0,0053	0,0205	21,579	0,0364	0,0261	5,3011
2,42	0,1706	0,00080	0,0047	0,0181	22,536	0,0323	0,0249	5,4288
2,43	0,1637	0,00068	0,0041	0,0160	23,581	0,0287	0,0237	5,5645
2,44	0,1568	0,00057	0,0036	0,0141	24,719	0,0254	0,0225	5,7089
2,45	0,1499	0,00048	0,0032	0,0124	26,050	0,0223	0,0214	5,8630
2,46	0,1429	0,00039	0,0027	0,0108	27,345	0,0194	0,0203	6,0288
2,47	0,1359	0,00032	0,0024	0,0093	28,863	0,0168	0,0191	6,2067
2,48	0,1289	0,00026	0,0020	0,0079	30,556	0,0144	0,0180	6,3990
2,49	0,1219	0,00021	0,0017	0,0067	32,459	0,0122	0,0169	6,6079

$k = 1,33$

Продолжение

732

λ	τ	π	ε	q	y	f	r	M
2,50	0,1148	0,000163	0,001420	0,00503	34,587	0,01030	0,01580	6,8355
2,51	0,1077	0,000126	0,001169	0,00466	37,012	0,00853	0,01480	7,0851
2,52	0,1006	$0,955 \cdot 10^{-4}$	0,000949	0,00380	36,796	0,00698	0,01370	7,3614
2,53	0,0934	$0,710 \cdot 10^{-4}$	0,000759	0,00305	43,011	0,00562	0,00373	7,6681
2,54	0,0863	$0,514 \cdot 10^{-4}$	0,000596	0,00240	46,774	0,00444	0,01160	8,0125
2,55	0,0791	$0,362 \cdot 10^{-4}$	0,000457	0,00185	51,242	0,00343	0,01050	8,4028
2,56	0,0718	$0,240 \cdot 10^{-4}$	0,000342	0,00139	56,629	0,00258	0,00952	8,8506
2,57	0,0646	$0,160 \cdot 10^{-4}$	0,000248	0,00101	63,248	0,00188	0,00850	9,3716
2,58	0,0573	$0,986 \cdot 10^{-5}$	0,000172	0,00070	71,572	0,00132	0,00748	9,9892
2,59	0,0499	$0,568 \cdot 10^{-5}$	0,000114	0,00047	82,393	0,00088	0,00648	10,7387
2,60	0,0426	$0,299 \cdot 10^{-5}$	$0,702 \cdot 10^{-4}$	0,00029	96,998	0,00054	0,00548	11,6736
2,61	0,0352	$0,139 \cdot 10^{-5}$	$0,394 \cdot 10^{-4}$	0,00016	117,79	0,00031	0,00450	12,8883
2,62	0,0278	$0,536 \cdot 10^{-6}$	$0,193 \cdot 10^{-4}$	$0,802 \cdot 10^{-4}$	149,68	$0,152 \cdot 10^{-4}$	0,00353	14,5579
2,63	0,0204	$0,153 \cdot 10^{-6}$	$0,750 \cdot 10^{-5}$	$0,313 \cdot 10^{-4}$	205,17	$0,594 \cdot 10^{-4}$	0,00257	17,0777
2,64	0,0129	$0,243 \cdot 10^{-7}$	$0,188 \cdot 10^{-5}$	$0,782 \cdot 10^{-5}$	322,26	$0,150 \cdot 10^{-4}$	0,00162	21,5366
2,65	0,0054	$0,728 \cdot 10^{-9}$	$0,135 \cdot 10^{-6}$	$0,567 \cdot 10^{-5}$	779,12	$0,108 \cdot 10^{-5}$	0,00067	33,3991
2,657	0	0	0	0	∞	0	0	∞

ПРИЛОЖЕНИЕ II

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адиабата идеальная 26, 80
— ударная 79
Аналогия электро-гидродинамическая 403, 413
Аппарат входной (направляющий) 457, 458
— выходной (спрямляющий) 457, 458
— промежуточный 457, 458
— сопловой 458
- Бернулли уравнение 23 и д.
- Венец лопаточный 457
— — активный 601
— — диагональный 463
— — диффузорный 601
— — конический 463
— — конфузорный 601
— — осевой 463
— — осе-радиальный 463
— — постоянного радиуса 461
— — радиально-осевой 463
— — центробежный 461
— — центростремительный 461
— — цилиндрический 463
- Вентилятор 457
Ветряк 457
Вихрь идеальный 363
— одиночный 53
— плоский изолированный 55
— П-образный 373
— соединённый 372
— скорости 49
— — в полярных координатах 51
— точечный изолированный 55
- Влияние вязкости на обтекание крылового профиля 377 и д.
Вогнутость профиля относительная 345
Воздуходувка 457
Волна детонационная 166 и д.
— разрежения 72
— сжатия (ударная) 71 и д.
— — прямая 76
- Волна сжатия сильная 71, 75
— — слабая 71, 74
Втулка венца 457
Вынос решётки 346
Высота скоростная 25
Вязкость 377 и д.
- Гидравлика газовая 7
Горение в газах 166 и д.
Густота решётки 347
— — кольцевой 596
- Давление полное 28
— статическое 28
Двигатель воздушно-реактивный 661 и д.
— — — — — прямоточный 671 и д.
— — — — — идеальный 672 и д.
— турбо-реактивный 685 и д.
Движение см. Течение.
Детонация 166 и д.
Диссоциация термическая 170
Диффузия примесей в струе 265
— тепла в струе 263
Диффузор 40
— эквивалентный прямой 417
Длина трубы приведённая 136
Дуга профиля осевая 344
- Жуковского сила 353, 354
— теорема 349 и д., 353, 355, 357, 360
Жуковского-Чаплыгина постулат 362
- Задача аэродинамики обратная 595
— — прямая 595
Закрутка потока 466
Запирание трубы 225
- Изменение скорости вдоль оси струи 253 и д.
Изотаха 251
Импульс удельный 672

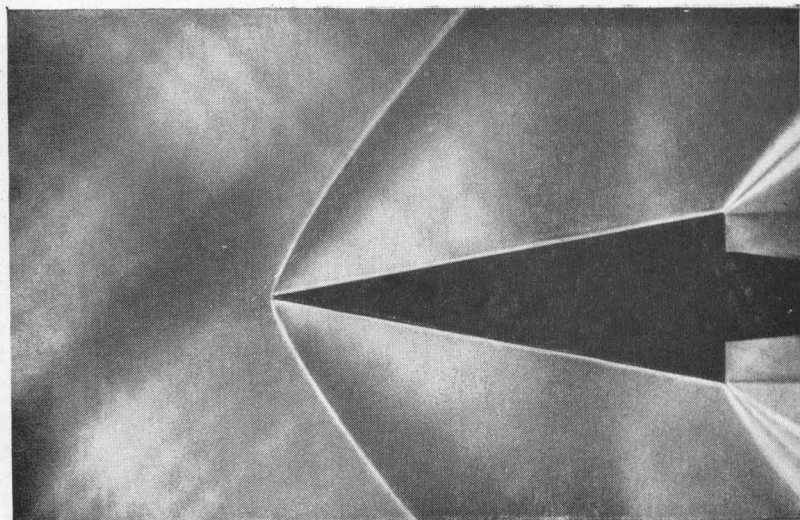
- Камера сгорания 685 и д.
 — — форсажная 702
 — смешения эжектора 307, 326 и д.
 Качество крыла 368
 — — обратное 368
 Колесо рабочее 457 и д.
 — — активное 519, 528
 — — реактивное 528
 Количество движения секундное 35
 Компрессор идеальный 32
 Концентрация избыточная приме-
 сей в струе 265
 Конфузор 107
 Коэффициент вязкости 134, 198
 — давления 29
 — живого сечения форсунки 65
 — изоэнтропичности 489
 — — рабочего колеса компрессора
 513 и д.
 — — — турбины 585
 — — ступени компрессора 509
 и д.
 — — — — общий 513 и д.
 — — — турбины 521, 580
 — мощности турбины 532
 — напора 510
 — неравномерности поля скоростей
 334
 — подъёмной силы 367
 — полезного действия адиабатиче-
 ский ступени компрессора 508
 и д.
 — — — — турбины 521
 — — — диффузора 418
 — — — решётки диффузорной 419
 — — — — конфузорной 420
 — полного давления 29
 — полноты сгорания 675
 — потери скорости в воздушно-реак-
 тивном двигателе 676
 — самоиндукции крыла 375
 — скорости 22, 471 и д.
 — сопротивления давления 379
 — — индуктивного 376
 — — лобового 367
 — — профильного 379, 384
 — — трения 380
 — — формы 380
 — трения пластины 380
 — эжекции 313, 323, 340
 Кривизна относительная профиля
 345
 Кризис тепловой 145, 171
 Критерий подобия для газовых тече-
 ний 21, 22
 Линия тока 7
 Метод электро-гидродинамической
 аналогии 403, 413
 Мощность свободная 668
 Наложение течений 57
 Напор относительный 510
 — скоростной 25
 Напряжение трения 198
 Насадок пневматический 30
 — — в сверхзвуковом потоке 98
 Насос 457
 Нормаль 616
 Обтекание внешнего тупого угла
 108 и д.
 — выпуклой кривой 124 и д.
 — клина сверхзвуковое 94
 — конуса сверхзвуковое 96
 — плоской стенки 122 и д.
 — профиля бесциркуляционное 360
 — — дозвуковое 389 и д.
 — — сверхзвуковое 395 и д.
 — — чисто циркуляционное 361
 — решётки активное 408
 — — бесциркуляционное 364
 — — диффузорное 407
 — — дозвуковое 432 и д.
 — — докритическое 438
 — — жидкостью идеальной несжи-
 маемой 402 и д.
 — — — вязкой 416
 — — — закритическое 438
 — — конфузорное 408
 — — сверхзвуковое 449 и д.
 — — чисто циркуляционное 365
 — тела с острой кромкой 56
 Ось решётки 345
 Отклонение относительное 431
 Отрыв пограничного слоя 56, 378
 Параметр геометрический эжектора
 316
 План скоростей рабочего колеса 497
 Пластинка эквивалентная 371
 Плоскость касательная 466
 — меридиональная 466
 — радиальная 466
 — треугольника скорости 468
 Плотность тока 9
 Поверхность тока 7
 Подогрев газа 141 и д.
 — критический 144
 — струи 266 и д.
 Поле скоростей 46
 — — плоского изолированного вих-
 ря 55
 Полюс струи 243
 Постулат Жуковского-Чаплыгина
 362

- Профилирование элементарного венца 594 и д.
 Профиль теоретический 372
 Процесс идеально адиабатический 27, 43, 79
 — изобарический 26
 — изотермический 14, 26
 — изохорический 26
 — изоэнтропический 113
 — необратимый 44
 — обратимый 44
 — политропический 27
 Пульсация скорости 249
 Путь смешения 205, 248
 Пучок характеристик 111
- Работа деформации 18
 — критическая безразмерная 588
 — проталкивания 18
 Размах относительный крыла 375
 Расход идеальный критический 432
 — местный безразмерный 506
 Расширение в косом срезе 448
 Режим критический 21, 102
 — нерасчётный 666 и д.
 — отбегания профиля докритический 389
 — — — закритический 389
 — — решётки активный 408
 — — — диффузорный 407
 — — — конфузорный 408
 — — — номинальный 429
 — перерасширения 670
 — расчётный 105
 Решётка профилей 345
 — — активная 358, 408
 — — диффузорная 358, 405, 415
 — — конфузорная 357, 405, 415
 — — круговая 345
 — — прямолинейная 345
 — эквивалентная пластин 412
 — — цилиндров 414
 — элементарная кольцевая 595
- Сечение живое струи на выходе из форсунки 65
 — струи переходное 243
 Сила Жуковского циркуляционная 353, 354
 — лобового сопротивления 357
 — осевая добавочная 353
 — подъёмная 357
 — реактивная 661 и д., 704 и д.
 Система координат натуральная 615
 Скачок уплотнения 71, 76, 207
 — — косой 83 и д.
 — — прямой 71 и д.
 Скорость абсолютная 466 и д.
 Скорость звука 20, 75
 — истечения 31
 — критическая 21, 221
 — — относительная 466 и д.
 — — частичная 86
 — потока средняя по площади 255
 — — — по расходу 256
 — распространения горения 173
 — предельная (максимальная) движения газа 18 и д.
 — склоа потока 374
 — эквивалентная 66
 Сложные потоки идеальной жидкости 57
 Слой пограничный 198 и д.
 — — ламинарный 203, 382
 — — турбулентный 204, 382
 Сопло геометрическое (Лавалья) 101, 153, 163
 — механическое 153, 154
 — полутепловое 163
 — простое 107
 — расходное 153
 — с косым срезом 126 и д.
 — тепловое 153, 157, 171
 Сопротивление волновое 29
 — давления 379
 — диффузора 290 и д.
 — индуктивное 376
 — лобовое 357
 — профильное 379, 384
 — сопла 283 и д.
 — тепловое 143, 158
 — трения 379
 — формы 380
 Срыв сверхзвукового потока 124
 — струй 56
 Степень повышения давления в компрессоре 33, 686
 — — полного давления 459
 — понижения давления в турбине 33
 — реактивности колеса компрессора 518
 — — — турбины 527
 — — ступени компрессора 518
 — уменьшения полного давления 458
 — ушерения диффузора 312
 Струйка элементарная (единичная) 7 и д.
 Струя горячего газа 266 и д.
 — двухфазная (с тяжёлыми примесями) 277 и д.
 — свободная турбулентная 241 и д.
 Ступень компрессора 534 и д.
 — — эталонная 500
 — турбины 573 и д.
 — турбомашин 457, 464

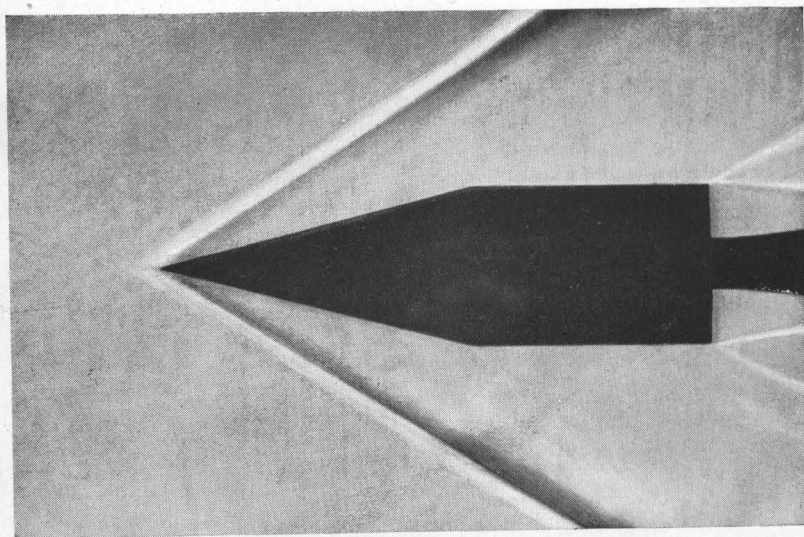
- Температура критическая 21
 — торможения 14
 — — частичного 86
 Теорема Жуковского 349 и д., 353, 355, 357, 360
 Теплоёмкость 11
 Теплоперепад располагаемый 532
 — — относительный 532
 Теплосодержание 12
 — полное 14
 Течение адиабатическое с трением 130 и д.
 — безвихревое 49
 — — циркуляционное 55
 — вихревое 49
 — дозвуковое 21
 — одномерное 130 и д.
 — сверхзвуковое 21
 Толщина вытеснения 203
 — потери импульса 203
 — профиля относительная 345
 Торможение идеальное 27
 Точка раздела струй (передняя критическая точка) 360
 — слияния струи (задняя критическая точка) 360
 Трение в трубе 130 и д.
 Треугольник скорости 468
 — — оптимальный 544
 Турбина 457
 — активная 459
 — давления 459
 — идеальная 32
 — скорости 459
 Турбомашина диагональная 460
 — комбинированная 460, 461
 — многоступенчатая 457
 — одноступенчатая 457
 — радиальная 460
 Тяга реактивная 661 и д.
- Угол атаки 348
 — — аэродинамический 370
 — — входной (угол натекания) 348
 — — — относительный 431
 — входа 348
 — выхода 348
 — заострения профиля 345
 — изгиба профиля решётки 347
 — нулевой подъёмной силы 361
 — отставания 411, 607
 — распространения слабых возмущений 91
 — схода (угол отставания) потока 348
- Угол установочный профиля в решётке 346, 348
 Удлинение крыла 375
 Уравнение Бернулли 24
 — количества движения (первое уравнение Эйлера) 35
 — моментов количества движения (второе уравнение Эйлера) 42
 — неразрывности 7
 — состояния газа 11
 — теплосодержания 12
 — Эйлера в теории турбомашин 498
 — энергии 9 и д.
 — — в покоящейся газе 18
 Ус вихревой 374
 Условия обращения воздействия 152
 — отсутствия вихрей 51
 Участок струи начальный 243
 — — основной 243
- Факел горения 275
 Формула Сатерленда 198
 Форсунка центробежная 63 и д.
 Фронт решётки 345
 Функции газодинамические 181 и д.
- Характеристика сверхзвукового потока 91
 — эжектора 322
 Хорда аэродинамическая 371
 — — в решётке 412
 — внешняя 345
 — внутренняя 344
 — криволинейная 596
- Цепочка точечных вихрей 57 и д.
 Циркуляция скорости 46, 53
- Часть симметричная данного профиля 344
 Число M 20, 471 и д.
 — — критическое 389
 — R 134, 203
 — — критическое 204
- Шаг решётки 346
 — — аэродинамический 439
 — — кольцевой 596
 — — относительный, 346
- Эжектор газовый 39, 305 и д.
 — идеальный 337
 Эйлера уравнение в теории турбомашин 498
 Энтальпия газа 12
 Энтропия 27, 42 и д.

Опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
2	4 снизу	39,85 уч.-изд. л.	40,55 уч.-изд. л.
2	3 снизу	Цена книги 11 руб. 95 к.	Цена книги 12 руб. 15 к.
582	Формула (111)	$1 + \frac{k-1}{k+1} \frac{u_2^2}{a_{1кр}^2} \frac{1}{1-K} \frac{u_2^2}{a_{1кр}^2}$	$1 + \frac{k-1}{k+1} \frac{u_2^2}{a_{1кр}^2} \frac{1}{1-K}$
611	14 сверху	$\frac{c_u}{r}$,	$\frac{c_u^2}{r}$,
611	3 снизу	$\Delta I_k = 2\omega_{пер}$	$\Delta I_k = 2\omega_{пер}$
662	12 снизу	(ω н)	($\omega_1 - \omega_n$)

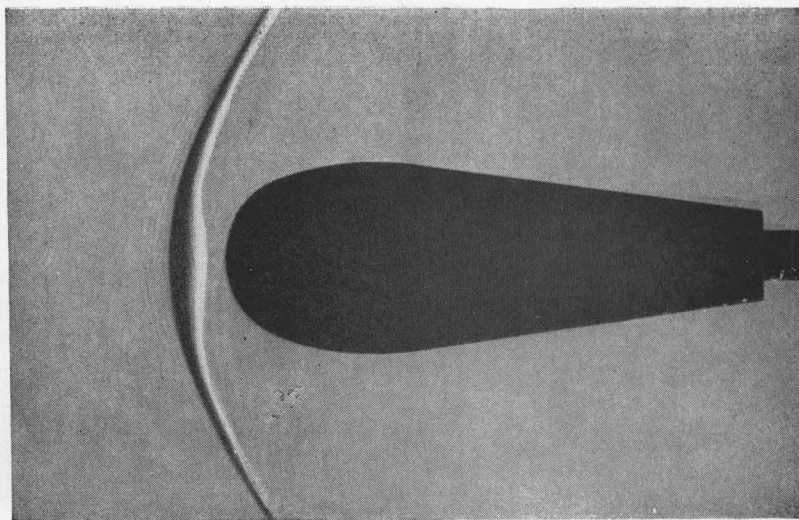


a)

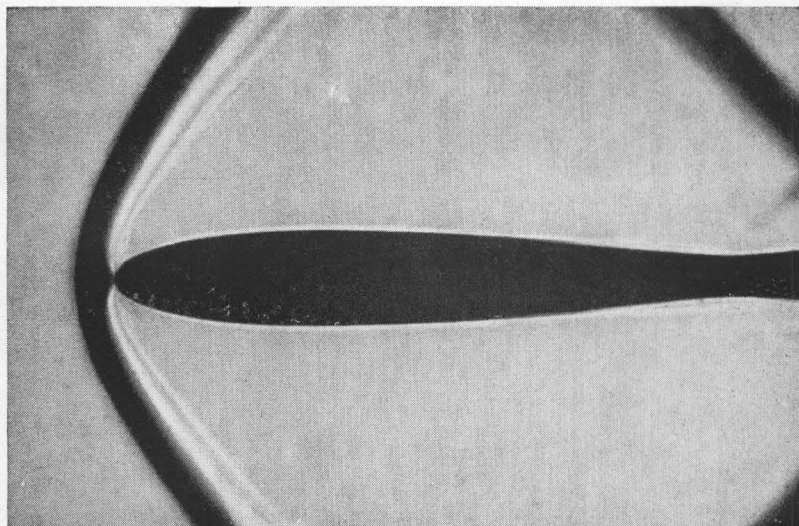


б)

Фиг. 31. Оптические фотографии косых скачков уплотнения при сверхзвуковом обтекании клина (а) и конуса (б).

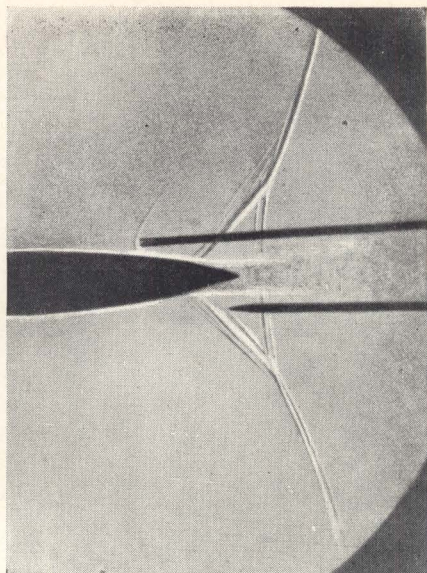


a)

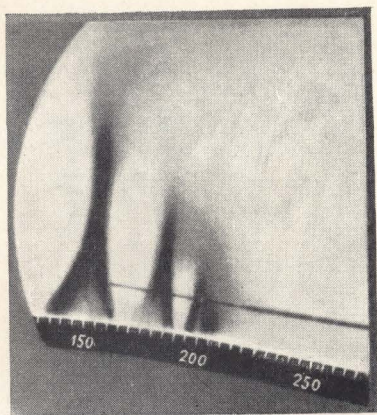


б)

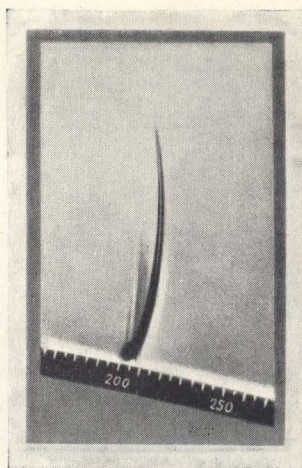
Фиг. 38. Оптические фотографии скачков уплотнения при сверхзвуковом обтекании тупоносых тел. а) тело вращения, б) крыловой профиль.



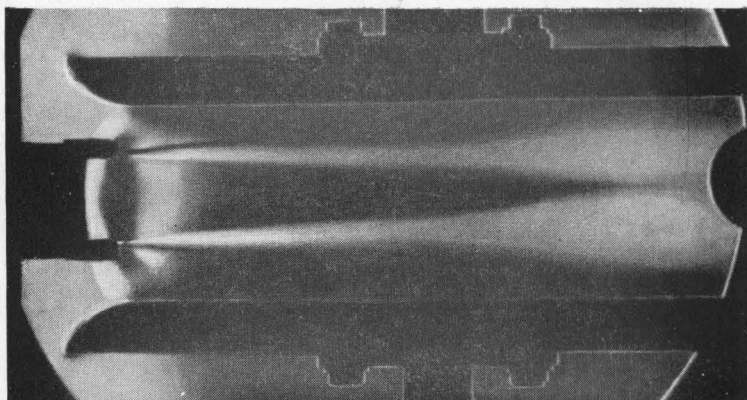
Фиг. 86. Обтекание хвостовой части крылового профиля дозвуковым потоком с образованием скачков уплотнения.



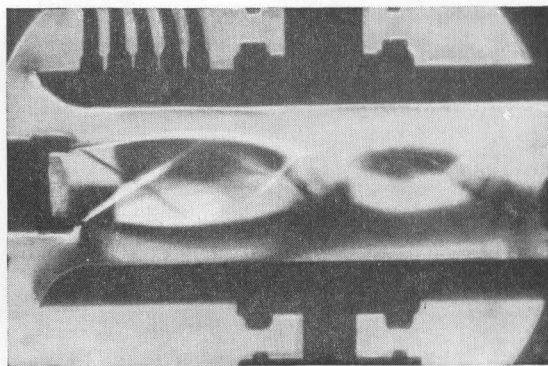
Фиг. 87. Теневая фотография скачков уплотнения при ламинарном пограничном слое.



Фиг. 88. Теневая фотография скачка уплотнения при турбулентном пограничном слое.

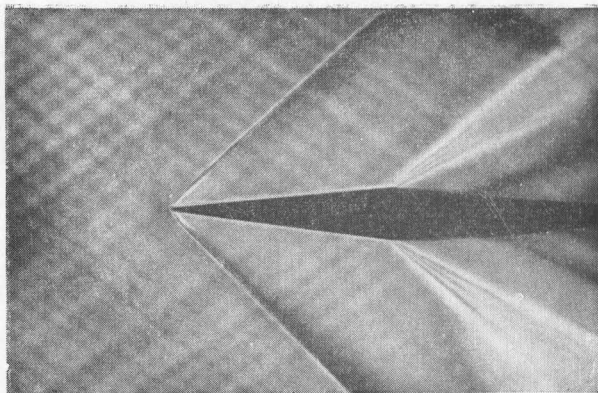


Фиг. 147. Фотография потока в камере смешения при докритическом режиме течения $\left(\frac{p_{01}}{p_{02}} = 1,5\right)$

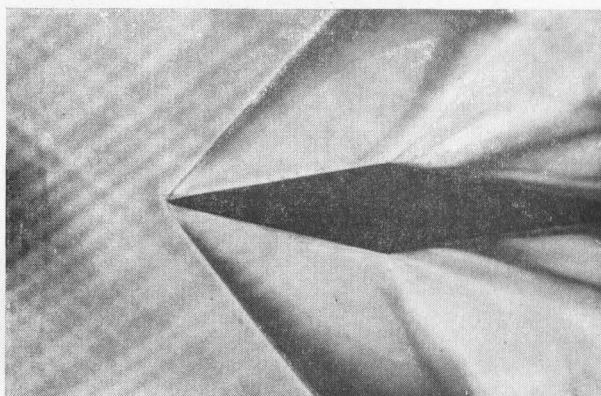


Фиг. 148. Фотография потока в камере смешения при сверхкритическом режиме течения

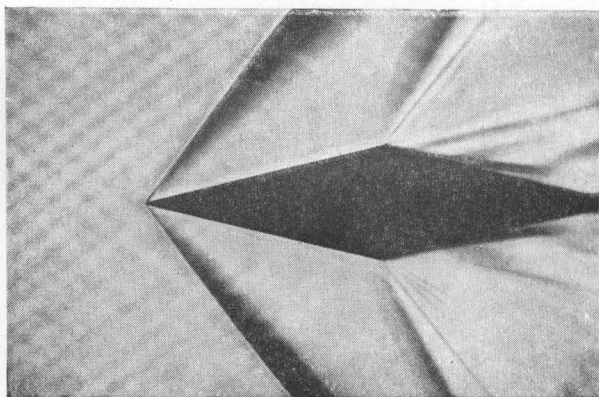
$$\left(\frac{p_{01}}{p_{02}} = 3,4\right).$$



a)

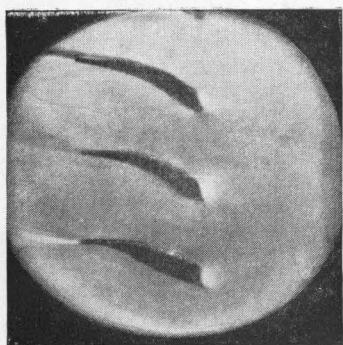


б)

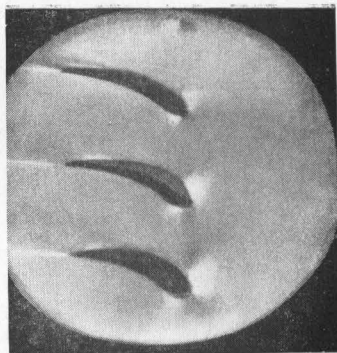


в)

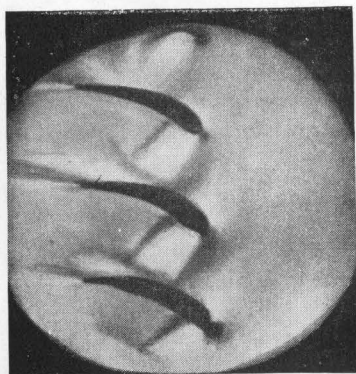
Фиг. 207. Оптическая картина сверхзвукового обтекания ромбовидного профиля на нулевом угле атаки при $M_H=1,7$. а) Полуугол при вершине ромба $\omega=7^\circ$, б) $\omega=12^\circ$, в) $\omega=14^\circ$.



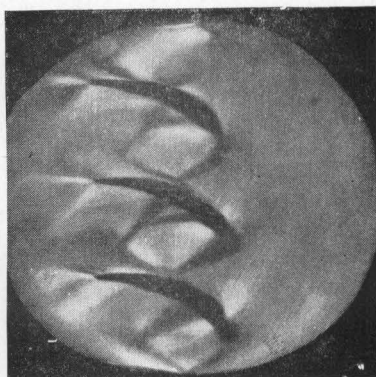
a)



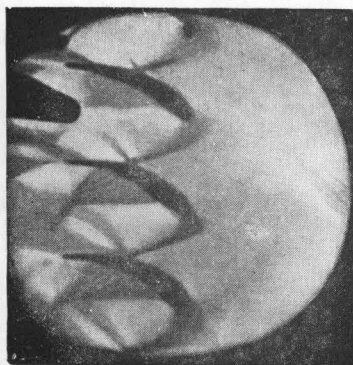
б)



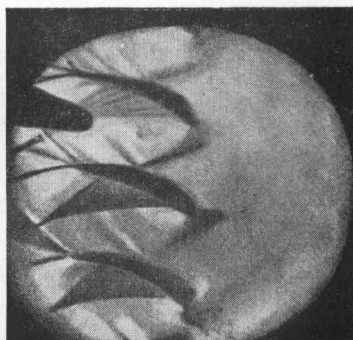
в)



г)

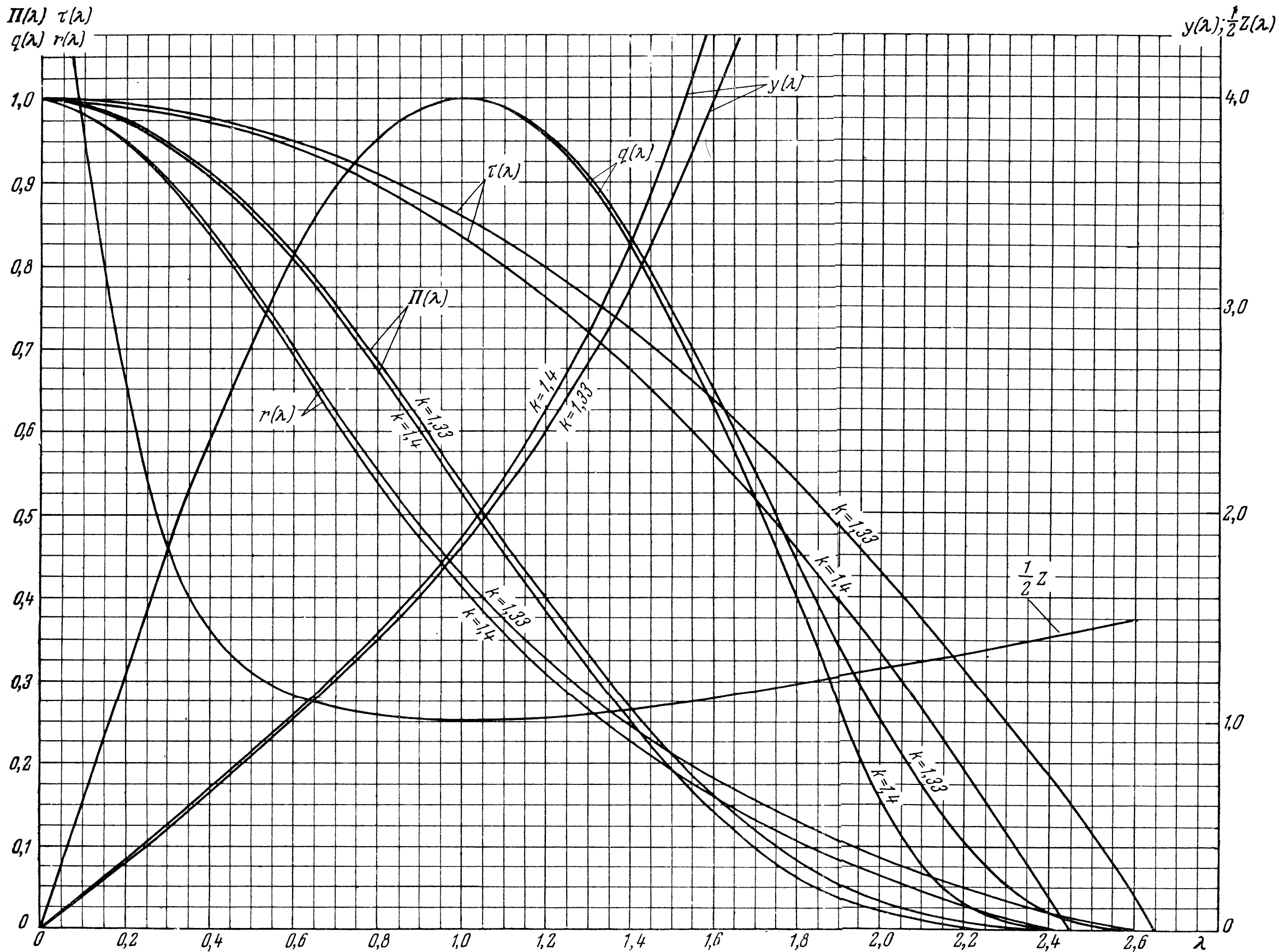


д)



е)

Фиг. 242. Последовательные снимки спектров обтекания диффузорной решётки при значениях числа M_1 набегающего потока от 0,6 до 0,7.



Графики газодинамических функций.

