В.П. МОРОЗОВ, А.С. ГАРЕВСКИЙ, Н.Г. ГОЛУБЕВА,

М.Я. ШИРОБОКОВ, В.М. СОКОЛОВ, В.В. МИТЮГОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

ГОРЬКИЙ 1980

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

Горьковский Ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. Н.И.Лобачевского

В.П.Морозов, А.С.Гаревский, Н.Г.Голубева, М.Я.Широбоков, В.М.Соколов, В.В.Митюгов

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Издание ГГУ. Горький 1980

УДК 531.19(076)

В.П.Морозов, А.С.Гаревский, Н.Г.Голубева, М.Я.Широбоков, В.М.Соколов, В.В.Митюгов. Сборник задач по статистической физике. Учебное пособие, Горький, изд.ГГУ, 1980, с.67.

В предлагаемом сборнике представлены задачи и упражнения по курсу термодинамики и статистической физики, читаемому на IУ курсе физического факультета ГГУ. Материал расположен примерно в том же порядке, что и в лекционном курсе. Каждый из разделов содержит краткое изложение теории, сводку основных формул и рецептов решения типовых задач. Большинство задач снабжены решениями и указаниями методического и математического характера.

Настоящее издание является переработанным вариантом первого. В частности, увеличено количество задач по физике твердого тела. Использованы задачи, опубликованные в научных журналах и монографиях. Пособие предназначено для студентов старших курсов физического факультета университета.

Рис.3, Библиография - 3 названия.

Рецензенты: ст.научный сотрудник ИПФ АН СССР докт.ф.м.н. Г.М.Генкин, зав.кафедрой физики физико-технического факультета ГПИ к.ф.м.н.,доцент В.А.Усков.

Темплан 1980г., поз.264.

§ I. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФАЗОВЫХ ОБЪЕМОВ. ПОДСЧЕТ ЧИСЛА КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ.

Классическая система с S степенями свободы и функцией Гамильтона $H(p,q)$ $(p=p_1,p_2 \ldots p_S;\ q=q_1 \ldots q_S)$ имеет уравнения движения $\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$; $\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}$. Решение их $p_i=p_i(t,p_0 q_0)$; $q_i=q_i(t,p_0 q_0)$, зависящее от $2S$ начальных значений координат и импульсов $p_0 q_0$, дает полную информацию о состоянии системы в любой момент времени. Все траектории замкнутой системы лежат на гиперповерхности постоянной энергии $H(p,q)=E$. Фазовое пространство имеет $2S$ измерений; на его осях откладываются S значений координат и S значений импульсов. В фазовом пространстве состояние системы изображается точкой, траектория – линией. Справедлива теорема Лиувилля: фазовый объем, занимаемый системой, при движении не меняется, т.е. $\int dp_0 dq_0=\int dp\,dq$, что эквивалентно равенству единице якобиана преобразования от координат q_0 и импульсов p_0 в начальный момент времени к координатам q и импульсам p в момент времени t, т.е.

$$\frac{\partial(pq)}{\partial(p_0 q_0)}=1$$

Система эргодична, если с течением времени любая траектория пройдет сколь угодно близко к любой заданной точке гиперповерхности постоянной энергии.

Определения:

$\tilde{\Gamma}(E)=\int\limits_{H(p,q)\le E} dp\,dq$ – объем фазового пространства, заключенный внутри гиперповерхности постоянной энергии.

$$\tilde{g}(E)=\int \delta(H(p,q)-E)\,dp\,dq=\frac{\partial\tilde{\Gamma}(E)}{\partial E}$$

$\Gamma(E)$ – число квантовых состояний с энергией, меньшей E. Для –

вычисления $\Gamma(E)$ необходимо найти энергетический спектр системы ε_n и подсчитать число состояний, для которых $\varepsilon_n \le E$. Если в задаче дискретностью энергетического спектра можно пренебречь, то $\Gamma(E)$ можно найти по формуле

$$\Gamma(E) = \tilde{\Gamma}(E)/(2\pi\hbar)^s$$ (s - число степеней свободы)

$$g(E) = \frac{\partial \Gamma(E)}{\partial E} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^s}\,\tilde{g}(E)$$ - плотность числа квантовых состояний

З А Д А Ч И

В задачах I-3 нарисовать фазовые траектории, непосредственно убедиться в справедливости теоремы Лиувилля, выяснить, является ли система эргодичной.

I. Свободная одномерная частица.

2. Одномерная частица в прямоугольной потенциальной яме. Рассмотреть случаи: а) соударение со стенкой упругое; б) соударение неупругое.

3. Одномерный гармонический осциллятор.

4. Найти $\Gamma(E)$ и $g(E)$ для частицы в одномерной потенциальной яме шириной a. Рассмотреть: а) классический случай; б) квантовый случай. Результаты сравнить.

5. Найти $\Gamma(E)$ и $g(E)$ для классического и квантового осциллятора.

6. Две классические частицы с массами m_1 и m_2 находятся в прямоугольной одномерной яме шириной a. Найти $g(E)$.

7. Классическая частица находится в объеме V. Закон дисперсии $\varepsilon = p^2/2m$. Найти $\Gamma(E)$ и $g(E)$.

8. Найти число квантовых состояний $\Gamma(E)$ для частицы, находящейся в кубе с ребром L. Закон дисперсии $\varepsilon = p^2/2m$. Полученное решение сравнить с результатом предыдущей задачи.

9. Вычислить $g(E)$ для ультрарелятивистской частицы ($\varepsilon = cp$), заключенной в объеме V.

10. Найти $\Gamma(E)$ для N классических частиц идеального газа, находящегося в объеме V. Закон дисперсии для частицы $\varepsilon = p^2/2m$.

11. Найти $\Gamma(E)$ и $g(E)$ для N классических гармонических осцилляторов одинаковой частоты.

12. Найти $\Gamma(E)$ и $g(E)$ для N частиц идеального газа с законом дисперсии $\varepsilon = cp$.

§ 2. МИКРОКАНОНИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Статистические свойства замкнутой эргодической системы описываются микроканоническим распределением

$$\rho(p,q) = \tilde{g}^{-1}\delta(H(p,q)-E), \quad \text{где}$$
$$\tilde{g} = \int \delta(H(p,q)-E)\,dp\,dq$$

Микроканоническое распределение утверждает: все состояния с данной энергией равновероятны (эта формулировка справедлива как для классических, так и для квантовых систем).

Вероятность $P(A)$ обнаружить систему в области A гиперповерхности $H(p,q)=E$ может быть найдена по формуле

$$P(A) = \frac{1}{\tilde{g}(E)} \int\limits_{p,q\in A} \delta(H(p,q)-E)\,dp\,dq = \lim_{T\to\infty} \frac{t(A)}{T},$$

где T - полное время наблюдения, $t(A)$ - время, в течение которого система находится в области A.

Энтропия замкнутой системы определяется по формуле Больцмана $S = k\sigma = k\ln\Delta\Gamma$, где $\Delta\Gamma$ - число квантовых состояний системы, k - постоянная Больцмана. Энтропия макроскопических систем может быть определена иначе: $S = k\ln g(E)$ и $S = k\ln\Gamma(E)$.

ЗАДАЧИ

1. Найти распределение по координатам $\rho(x)$ и импульсам $\rho(p)$ для классического гармонического осциллятора.

2. Две частицы находятся в одномерной потенциальной яме шириной a. Энергия системы E. Найти распределение по энергии $\rho(\varepsilon)$ для одной из частиц.

3. N частиц идеального газа находятся в объеме V и имеют энергию E. Вычислить энтропию газа. Найти распределение по энергии для одной частицы. Рассмотреть предел $E \to \infty$; $N \to \infty$; $\frac{E}{N} \to \bar{\varepsilon}$.

4. Система из N квантовых гармонических осцилляторов одинаковой частоты ω имеет энергию $E = \hbar\omega(M + \frac{N}{2})$. Найти энтропию этой системы и распределение по энергии для одного осциллятора в пределе $N \to \infty$, $\frac{M}{N} = \bar{n}$.

5. Макроскопическое состояние N частиц идеального газа в объеме V и с энергией E можно определить, если задать числа n_i частиц в каждой ячейке объемом $\omega_i = \Delta\vec{p}_i \Delta V_i$ в шестимерном пространстве одной частицы. а) Найти энтропию такого макроскопического состояния, пренебрегая обменным взаимодействием (статистика Больцмана). б) Из условия максимальности энтропии найти равновесные значения $\bar{n}_i$. в) Найти равновесную энтропию и сравнить ее с результатом задачи 3.

6. N классических одинаковых гармонических осцилляторов имеют энергию E . Найти распределение по энергии для одного осциллятора. Рассмотреть пределы $N \to \infty$, $\frac{E}{N} \to \bar{\varepsilon}$.

7. N частиц идеального газа находятся в объеме V . Происходит флуктуация, в результате которой газ стал занимать объем $V/2$. Найти вероятность такой флуктуации.

§ 3. КАНОНИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГИББСА

Для квазизамкнутых систем, помещенных в термостат, вероятность W_n обнаружить систему в n -ом квантовом состоянии определяется формулой $W_n \frac{g_T(E-\mathcal{E}_n)}{\sum\limits_n g_T(E-\mathcal{E}_n)}$ ($g_T(E_T)$ - плотность состояний термостата). Переходя здесь к пределу бесконечно большого термостата, получим каноническое распределение Гиббса

$W_n = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\mathcal{E}_n}{KT}}$, где $Z = \sum\limits_n e^{-\frac{\mathcal{E}_n}{KT}}$ - статистическая сумма.

Энергетический спектр системы $\mathcal{E}_n$ находится посредством решения стационарного уравнения Шредингера $\hat{H}\Psi_n = \mathcal{E}_n \Psi_n$. Средние значения физических величин вычисляются по формуле $\bar{f} = \sum\limits_n W_n f_{nn}$, где $f_{nn} = \int \Psi_n^* \hat{f} \Psi_n dq$ - диагональные матричные элементы оператора $\hat{f}$ в энергетическом представлении.

Операторная форма канонического распределения:

$$\hat{W} = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\hat{H}}{KT}}; \quad Z = \int \rho e^{-\frac{\hat{H}}{KT}}; \quad \bar{f} = \int \rho \hat{W} \hat{f}$$

В классике вместо W_n находится $\rho(p,q)$ - совместное распределение по координатам и импульсам системы:

$$\rho(p,q) = e^{-\frac{H(p,q)}{KT}} \Big/ \int e^{-\frac{H(p,q)}{KT}} dp\, dq, \quad Z = \int \frac{dp\, dq}{(2\pi\hbar)^s} e^{-\frac{H(p,q)}{KT}}$$

Обычно

$$H(\{\vec{p}_i\},\{\vec{r}_i\})=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2m_i}+U(\{\vec{r}_i\});$$

Поэтому распределения по координатам и импульсам в классике статистически независимы $\rho(\{\vec{p}_i\},\{\vec{r}_i\})=\rho(\{\vec{p}_i\})\,\rho(\{\vec{r}_i\})$.

$$\rho(\{\vec{p}_i\})=A\,e^{-\sum_i p_i^2/2m_i kT}\;;\quad \rho(\{\vec{r}_i\})=B\,e^{-U/kT},$$

A и B находятся из условия нормировки.

Основные термодинамические соотношения:

$dE=dQ+dR$ – закон сохранения энергии применительно к тепловым процессам. Если процесс квазистатический (обратимый), то

$dQ=TdS$ и $dE=TdS-\Lambda d\lambda$, где $E=\sum_n \mathcal{E}_n W_n$;

$$S=-k\sum_n W_n \ln W_n\;;\quad dR=-\Lambda d\lambda\;;\quad \Lambda=-\sum_n W_n\frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial\lambda},$$

(λ – внешний параметр, Λ – обобщенная сила). В дальнейшем будем предполагать, что внешний параметр – объем ($\lambda=V$), тогда обобщенная сила – давление ($\Lambda=P$), так что $dE=TdS-PdV$.

Иногда удобнее использовать другие термодинамические потенциалы:

$F=E-TS$ – свободная энергия;

$\Phi=F+PV$ – термодинамический потенциал Гиббса;

$W=E+PV$ – энтальпия.

Для них: $dF=-SdT-PdV$;

$$d\Phi=-SdT+VdP\;;\quad dW=TdS+VdP$$

Зная один из потенциалов, можно найти остальные. Наиболее удобным потенциалом является свободная энергия F , которая связана со статистической суммой простым соотношением:

$$F=-kT\ln Z$$

Зная F , можно найти $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$ и уравнение состояния

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$$

Для больцмановского идеального газа, содержащего N частиц,

$$Z_N = \frac{Z_1^N}{N!} \simeq \left(\frac{eZ_1}{N}\right)^N,$$

где Z_1 - статсумма одной молекулы, $Z_1 = \sum_k e^{-\mathcal{E}_k/KT}$

($\mathcal{E}_K$ - энергетический спектр одной частицы). Таким образом,

$$F = -KT\ln Z_N = -NKT\ln\frac{eZ_1}{N} .$$

ЗАДАЧИ

I. Вывести каноническое распределение Гиббса, полагая, что термостатом служит: а) идеальный газ с законом дисперсии $\mathcal{E} = P^2/2m$; б) система одинаковых гармонических осцилляторов.

2. Найти распределение по энергии для одной молекулы равновесного идеального газа с законом дисперсии: а) $\mathcal{E} = P^2/2m$; б) $\mathcal{E} = CP$. Решение для случая а) сравнить с результатом задачи 3 § 2. В обоих случаях найти среднюю энергию.

3. Для линейного гармонического осциллятора найти Z , F , E , S . Найти распределение по координатам и импульсам. Вычислить $\overline{X^2}$. Рассмотреть: а) классический, б) квантовый случаи.

4. Для N частиц идеального газа в объеме V и с температурой T найти статсумму, все термодинамические потенциалы, теплоемкость, уравнение состояния, распределение по энергии. Вычисления сделать для законов дисперсии: а) $\mathcal{E} = P^2/2m$, б) $\mathcal{E} = CP$.

5. Энергетический спектр частицы в кубе с ребром L

$$\mathcal{E}_{n_1 n_2 n_3} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right)$$

Найти статсумму и теплоемкость при $kT \ll \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$ и при $kT \gg \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$. Во втором случае найти давление, используя формулу $P = -\frac{1}{3L^2}\frac{\overline{\partial \mathcal{E}_{n_1 n_2 n_3}}}{\partial L}$

6. Найти теплоемкость и энтропию двухуровневой системы ($\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$) с кратностями вырождения g_1 и g_2. Построить график зависимости теплоемкости от температуры.

7. N частиц идеального газа находятся во вращающемся с частотой ω цилиндре (параметры цилиндра даны). Температура T. Найти Z, F, давление $P(\tau)$, плотность $n(\tau)$, силу, действующую на каждое основание и боковую поверхность.

8. Идеальный газ находится в цилиндре (ось цилиндра направлена вдоль оси Z) и помещен в гравитационное поле $U = mgz$. Найти те же величины, что и в предыдущей задаче.

9. Для частицы, движущейся в объеме V, найти матрицу плотности в координатном представлении, решая уравнение Блоха. Найти статсумму.

10. Найти матрицу плотности для квантового гармонического осциллятора в координатном и импульсном представлениях. Используя полученные результаты, вычислить $\overline{x^2}$ и $\overline{p^2}$.

11. Жесткий ротатор, состоящий из двух грузов массы m и соединяющего их невесомого стержня длины ℓ, помещен в тепловую среду температуры T. Найти среднюю силу натяжения стержня.

12. Рассчитать среднее взаимодействие между дипольными молекулами, находящимися на расстоянии R друг от друга. Энергия взаимодействия $U = \frac{\vec{d}_1 \vec{d}_2}{R^3} - 3\frac{(\vec{R}\vec{d}_1)(\vec{R}\vec{d}_2)}{R^5}$ много меньше kT.

13. Найти работу, совершаемую идеальным газом, и получаемое им тепло в изотермическом, изохорическом, изобарическом и адиаба-

тическом процессах. Законы дисперсии для частиц: а) $\mathcal{E} = P^2/2m$; б) $\mathcal{E} = CP$.

I4. Показать, что процесс расширения теплоизолированного идеального газа в пустоту (объем увеличивается от V_1 до V_2) необратим. Найти изменение энтропии.

I5. Показать, что изменение температуры идеального газа в процессе Джоуля-Томсона отсутствует.

I6. Доказать соотношения:

I) $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$; 2) $\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$;

3) $\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_V$; 4) $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \frac{C_P}{C_V}\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$;

5) $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$; 6) $\left(\frac{\partial W}{\partial P}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$.

I7. Найти теплоемкость газа двухатомных молекул. Учесть колебательную и вращательные степени свободы. Указание: изменением момента инерции молекулы за счет колебаний пренебречь.

I8. Над плоским бесконечным катодом имеется электронное облако. Найти распределение плотности электронов в пространстве. Заданы поверхностный заряд катода σ и плотность n_0 электронного облака вблизи него.

I9. То же, что и в предыдущей задаче, рассчитать для катода, имеющего форму бесконечного цилиндра радиуса R .

§ 4. БОЛЬШОЕ КАНОНИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГИББСА

Если система обменивается с термостатом частицами, то вероятность $W_{n,N}$ иметь системе N частиц и находиться в n -ом квантовом состоянии определяется формулой

$$W_{n,N} = \frac{1}{Z} e^{\frac{\mu N - \mathcal{E}_{n,N}}{KT}}$$

$\tilde{Z}$ - статистическая сумма большого распределения Гиббса

$$\tilde{Z} = \sum_N e^{\frac{\mu N}{kT}} \sum_n e^{-\frac{\varepsilon_{n,N}}{kT}} = \sum_N e^{\frac{\mu N}{kT}} Z_N,$$

где Z_N - статсумма канонического распределения, когда система содержит N частиц. Основные термодинамические тождества § 3 меняются следующим образом: $dE = TdS - PdV + \mu d\bar{N}$;

$$dF = -SdT - PdV + \mu d\bar{N}\,; \quad d\Phi = -SdT + VdP + \mu d\bar{N}\,;$$

$$dW = TdS + VdP + \mu d\bar{N}\,; \quad d\Omega = -SdT - PdV - \bar{N}d\mu$$

Здесь введен еще один термодинамический потенциал $\Omega = F - \mu\bar{N}$ который связан с $\tilde{Z}$ формулой

$$\Omega = -kT\ln\tilde{Z}\,.$$

Если внешние поля отсутствуют, т.е. объем является характеристикой системы, то $\Phi = \mu N$ и $\Omega = -PV$.

З А Д А Ч И

I. Непосредственным усреднением доказать:

а) $\bar{N} = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right)_T$ б) $\overline{(\Delta N)^2} = kT\left(\frac{\partial\bar{N}}{\partial\mu}\right)_T$

2. Для больцмановского идеального газа найти P_N - вероятност[ь] системе иметь N частиц. Вычислить $\overline{(\Delta N)^2}$.

3. Используя большое каноническое распределение Гиббса, найти давление идеального газа, E , F , S , химический потенциал, $\tilde{Z}$. Сравнить полученные выражения с теми, которые получаются с помощью канонического распределения.

4. Показать, что химический потенциал системы с существенно переменным числом частиц (например, фотонный газ) равен нулю. Как в этом случае найти среднее число частиц?

5. Идеальный газ содержит N молекул, заключенных в объеме V. Найти вероятность того, что в выделенной части объема v содержится n молекул. Рассмотреть предельный случай $v \to 0$; $N \to \infty$; $\frac{vN}{V} = \overline{n}$.

§ 5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНА, ФЕРМИ-ДИРАКА, БОЛЬЦМАНА

Состояние идеального газа будет определено, если указать число n_K частиц в каждом K-ом состоянии одной частицы. Средние значения $\overline{n_K}$ в зависимости от спина частицы определены формулами

$$\overline{n_K} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_K - \mu}{KT}} + 1}$$ – распределение Ферми-Дирака для частиц с полуцелым спином;

$$\overline{n_K} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_K - \mu}{KT}} - 1}$$ – распределение Бозе-Эйнштейна для частиц с целым спином.

В этих формулах ε_K – энергетический спектр одной частицы (атома, молекулы). Химический потенциал μ находится из условия нормировки $\sum_K n_K = N$ (N – полное число частиц в системе).

Если $\overline{n_K} \ll 1$ (высокие температуры и низкие плотности), распределения Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна переходят в распределение Больцмана $\overline{n_K} = e^{\frac{\mu - \varepsilon_K}{KT}}$.

Термодинамический потенциал Ω находится по формуле

$$\Omega = \mp KT \sum_K \ln\left(1 \pm e^{\frac{\mu - \varepsilon_K}{KT}}\right)$$

(верхний знак – для фермионов, нижний – для бозонов).

Если поступательное движение квазиклассично и частица имеет только спиновые внутренние степени свободы, то условие нормировки можно записать так :

$$N = \sum_{\sigma=-s}^{+s} \int \frac{dP\,dV}{(2\pi\hbar)^3} \; \frac{1}{e^{(p^2/2m + U(\vec{r},\sigma) - \mu)/kT} \pm 1}$$

($U(\vec{r},\sigma)$ - энергия частицы во внешнем поле). Отсюда плотность числа частиц с импульсом $\vec{P}$ в точке $\vec{r}$ и проекцией спина σ равна

$$n(\vec{P},\vec{r},\sigma) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \; \frac{1}{e^{(p^2/2m + U(\vec{r},\sigma) - \mu)/kT} \pm 1},$$

а в случае больцмановской статистики

$$n(\vec{P},\vec{r},\sigma) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} e^{\frac{\mu - p^2/2m - U(\vec{r},\sigma)}{kT}}$$

Суммируя по σ и интегрируя по импульсам, можно найти концентрацию $n(\vec{r})$. Например, в больцмановском случае при $U(\vec{r},\sigma)=U(\vec{r})$ получим

$$n(\vec{r}) = C e^{-\frac{U(\vec{r})}{kT}} \quad \text{- формула Больцмана.}$$

Давление $P(\vec{r})$ при наличии внешнего поля можно найти из выражения для Ω, вычисляя его для малого объема dV ($d\Omega = -P\,dV$)

$$P(\vec{r}) = \pm kT \sum_{\sigma=-s}^{+s} \int \frac{d\vec{P}}{(2\pi\hbar)^3} \ln\left(1 \pm e^{\frac{\mu - p^2/2m \mp U(\vec{r})}{kT}}\right)$$

В случае применимости статистики Больцмана эта формула дает известное соотношение между давлением и концентрацией

$$P(\vec{r}) = kT\,n(\vec{r})$$

ЗАДАЧИ

1. Для идеального газа бозонов и фермионов найти W_{n_k} - вероятность нахождения n_k частиц в K -ом квантовом состоянии. Вычислить $\overline{(n_k-\bar{n}_k)(n_{k'}-\bar{n}_{k'})}$.
2. Решить задачу 5 § 2 с учетом обменного взаимодействия, т.е. для а) фермионов, б) бозонов.
3. Найти все термодинамические функции полностью вырожденного газа фермионов с законом дисперсии: а) $\mathcal{E}=P^2/2m$; б) $\mathcal{E}=cP$.
4. Найти термодинамические функции бозонов при $T<T_0$ (T_0 - температура вырождения).
5. Найти химический потенциал больцмановского идеального газа. Вычислить первую квантовую поправку к химическому потенциалу и давлению для Бозе и Ферми-газов. В явном виде найти условия применимости статистики Больцмана.
6. Показать, что для идеального газа с законом дисперсии

$$\mathcal{E}=P^2/2m \quad ; \qquad PV=\frac{2}{3}E$$

7. Идеальный газ фермионов находится во вращающемся с частотой ω цилиндре. Найти химический потенциал, концентрацию $n(\vec{r})$ и давление $P(\vec{r})$ при $T=0$.
8. Газ фермионов находится в одномерном поле тяжести ($U=mgz$) и заключен в цилиндр с осью вдоль Z. Найти те же величины, что и в предыдущей задаче.
9. Показать, что в двумерном случае Бозе-вырождение отсутствует.
10. Найти работу и приток тепла для газа бозонов в адиабатическом, изотермическом, изохорическом и изобарическом процессах а) $T\gg T_0$; б) $T<T_0$ (T_0 - температура Бозе-конденсации).

§ 6. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Электромагнитное поле в кубе с ребром L и периодическими граничными условиями представляется как суперпозиция плоских волн, каждая из которых характеризуется волновым вектором $\vec{K}$ и поляризацией α ($\omega_{K,\alpha} = CK$). При вычислении энергии каждой плоской волне сопоставляется гармонический осциллятор, так что

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\vec{K}}\left(\hat{P}^2_{\vec{K},\alpha} + \omega^2_{\vec{K},\alpha}\, q^2_{\vec{K},\alpha}\right)$$

или в представлении вторичного квантования

$$\hat{H} = \sum_{\alpha,\vec{K}} \hbar\omega_{\alpha,\vec{K}}\left(\hat{n}_{\alpha,\vec{K}} + \frac{1}{2}\right)$$

Таким образом, энергия поля - сумма энергий отдельных осцилляторов

$$E = \sum_{\alpha,\vec{K}} \frac{\hbar\omega_{\alpha,\vec{K}}}{e^{\frac{\hbar\omega_{\alpha,\vec{K}}}{KT}} - 1}$$

От суммирования по $\vec{K}$ можно перейти к интегрированию

$$\sum_{\vec{K},\alpha} \to \int 2\,\frac{V d\vec{K}}{(2\pi)^3} \to \int \frac{V\omega^2}{\pi^2 C^3}\, d\omega \quad ,$$

где $g(\omega) = \dfrac{V\omega^2}{\pi^2 C^3}$ - плотность плоских волн с частотой ω.

$$E = \int_0^\infty \frac{h\omega}{e^{\hbar\omega/KT} - 1}\, g(\omega)\, d\omega = \frac{4\sigma}{C} V T^4$$

$$\sigma = \frac{\pi^2 K^4}{60\hbar^3 C^2} = 5{,}67\cdot 10^{-5}\ \text{г/сек}^3\ \text{град}^4$$ - постоянная Стефана-Больцмана.

Спектральная мощность излучения (формула Планка):

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar V}{\pi^2 C^3}\ \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/KT} - 1}$$

С корпускулярной точки зрения электромагнитное поле - это идеальный газ бозе-частиц- фотонов, состояния которых определяются квантовыми числами α , $\vec{K}$. Энергия фотона $\mathcal{E}_{\alpha\vec{K}}=\hbar\omega_{\alpha\vec{K}}$ импульс $\vec{P}_{\alpha\vec{K}}=\hbar K$. Среднее число фотонов в состоянии α ,$\vec{K}$ определится распределением Бозе-Эйнштейна с $\mu=0$
$\bar{n}_{\alpha\vec{K}}=\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_{\alpha\vec{K}}}{\kappa T}}-1}$. Следовательно, $E=\sum_{\alpha,\vec{K}}\hbar\omega_{\alpha\vec{K}}n_{\alpha\vec{K}}$, что совпадает с формулой, приведенной выше.

Тело, поглощающее все падающ. на него излучение, называется абсолютно черным. Для такого тела интенсивность излучения с единицы поверхности в телесный угол $d\Omega$ равна
$dJ=\frac{1}{\pi}\sigma T^4\cos\theta d\Omega$ ($d\Omega=\sin\theta d\theta d\varphi$, θ - угол между направлением излучения и нормалью к поверхности). Полная интенсивность $J=\sigma T^4$.

З А Д А Ч И

1. Найти вероятность того, что одна мода ($\vec{K}$, α) равновесного излучения содержит $n_{\vec{K}\alpha}$ фотонов. Найти энтропию этой моды и дисперсию $\overline{(\Delta n_{\vec{K}\alpha})^2}$ числа фотонов.
2. Найти среднее число фотонов N в объеме V . Вычислить $\overline{(\Delta N)^2}$.
3. Вычислить спектральную плотность энергии и все термодинамические потенциалы в одномерном и двумерном случаях.
4. Вывести закон смещения Вина длч двумерного излучения.
5. Показать, что в одномерном случае закон Вина не может быть сформулирован.
6. Показать, что для трехмерного излучения $PV=E/3$. Найти аналоги этой формулы для одномерного и двумерного случаев.

7. Считая землю равновесным черным телом, определить ее температуру. Расстояние от Солнца до Земли $R = 150 \cdot 10^6$ км, $R_c = 0{,}7 \cdot 10^6$ км, $T_c = 5700\ K$ (предполагается, что температура Земли зависит только от температуры Солнца).

8. Черное сферическое тело радиуса r окружено зачерненной с обеих сторон тонкой оболочкой радиуса R. Найти, как такой экран влияет на скорость охлаждения тела.

§ 7. СТАТИСТИКА ЭЛЕКТРОНОВ В МЕТАЛЛАХ И ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Квантовые представления Ферми и Бозе в случае выполнения неравенства $e^{(\varepsilon-\mu)/KT} \gg 1$ переходят в классическую функцию Максвелла-Больцмана $\bar{n} \approx e^{\frac{\mu-\varepsilon}{KT}}$ (невырожденный идеальный газ), т.е. критерием применения классической статистики является неравенство

$$e^{(\varepsilon-\mu)/KT} > e^{-\mu/KT} \gg 1,$$

которое после суммирования по квантовым числам сводится к виду

$$\frac{V}{N}\,\frac{(2\pi m K T)^{3/2}}{h^3} \gg 1.$$

Условием вырождения газа будет обратное неравенство

$$\frac{N}{V} \gtrsim \left(\frac{2\pi m K T}{h^2}\right)^{3/2}.$$

Электронный газ в металлах является вырожденным вплоть до температур порядка $10^3 K$.

При температуре абсолютного нуля электронный газ в металлах называют полностью вырожденным. В этом случае распределение Ферми имеет вид

$$\bar{n} \begin{cases} 1 & \text{при } \varepsilon \leqslant \mu_0 \\ 0 & \text{при } \varepsilon > \mu_0 \end{cases},$$

где μ_0 - химический потенциал газа при $T=0$ K.
Средняя энергия системы равна

$$E=\int \varepsilon g(\varepsilon)d\varepsilon .$$

Химический потенциал μ_0 определяется из условия

$$N=\int_0^{\mu_0} g(\varepsilon)d\varepsilon .$$

Плотность числа состояний $g(\varepsilon)$ зависит от зонной структуры данного кристалла. При рассмотрении слабозаполненных электронами энергетических зон удобно пользоваться представлением о распределении электронов в зоне; в случае же почти заполненных зон более полезным является представление о распределении новых квазичастиц (дырок) в зоне.

Величина $\overline{n}_{h_i}=1-\overline{n}_i=\dfrac{1}{e^{-(\varepsilon_i-\mu)/KT}+1}$.

представляет собой вероятность того, что одночастичное электронное состояние i не занято. Говорят, что i -е состояние занято квазичастицей-дыркой, у которой заряд, импульс, энергия и потенциал Ферми μ определяются следующим образом

$$e_n=+|e| , \qquad \overline{P}_n=-\overline{P} ,$$
$$\varepsilon_n=const-\varepsilon(\overline{P}) , \qquad \mu_h=const-\mu .$$

Отсюда следует, что дырки подчиняются распределению Ферми

$$\overline{n}_h=\frac{1}{e^{(\varepsilon_h-\mu_h)/KT}+1} .$$

В теории полупроводников обычно имеют дело с электронами вблизи дна зоны проводимости или дырками вблизи потолка валентной зоны. Для них в приближении эффективной массы закон дисперсии имеет простой вид

$$\mathcal{E}(\vec{p}) = E_g + \frac{p^2}{2m_e^*} \quad \text{(электроны)};$$

$$\mathcal{E}_h(\vec{p}_h) = \frac{p_h^2}{2m_h^*} \quad \text{(дырки)},$$

где энергия отсчитывается от потолка валентной зоны, E_g - ширина запрещенной зоны; m_e^* и m_h^* - эффективные массы электронов и дырок соответственно. При этом функция $g(\mathcal{E})$ пропорциональна $\sqrt{\mathcal{E}}$.

Для вычисления магнитной восприимчивости электронного газа удобно пользоваться термодинамическим потенциалом Ω . В переменных T , V, μ и H магнитный момент

$$\vec{M} = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \vec{H}}\right)_{T,V,\mu}$$

З А Д А Ч И

I. Найти скорость, импульс и энергию Ферми полностью вырожденного электронного газа ($\mathcal{E} = p^2/2m$).

2. Получить условия идеальности для электронного газа в металле и невырожденном полупроводнике. Можно ли рассматривать электронный газ меди как идеальный ($n = 8\cdot 10^{22}$ см$^{-3}$).

3. Найти среднюю энергию полностью вырожденного электронного газа в висмуте, считая что $\mathcal{E} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_g^2}{4} + \frac{\mathcal{E}_g}{2} m_{ik}^{-1} p_i p_k}$

4. Найти свободную энергию и давление полностью вырожденного электронного газа.

5. Вычислить дисперсию флуктуаций энергии в полностью вырожденном электронном газе.

6. В сплавах $Bi_{1-x}Sb_x$ при определенном x реализуется бесщелевое состояние. При этом энергия и импульс электрона связаны приближенным соотношением $\mathcal{E} = v_0 p$. Рассчитать энергию и

давление полностью вырожденного электронного газа.

7. Энергия электрона в магнитном поле H равна $\sigma\mu_Б H$ ($\sigma=\pm 1$ в зависимости от того, параллелен или антипараллелен полю спиновый магнитный момент электрона). Вычислить магнитную восприимчивость системы свободных электронов в случае полного вырождения. Найти химический потенциал. Считать, что $\mu \gg \mu_Б H$

8. Предполагая сильное вырождение $kT \ll \mu$, найти магнитную восприимчивость, обусловленную орбитальным движением электронов в слабом магнитном поле $\mu_Б H \ll kT$.

9. Плотность состояний электронов имеет вид

$$g = \begin{cases} const, & \varepsilon > 0 \\ 0, & \varepsilon < 0 \end{cases}$$

При полном числе электронов N вычислить:

а) энергию Ферми при $T=0$ К;

б) теплоемкость в случае сильного вырождения;

в) получить условие отсутствия вырождения.

10. Определить число столкновений со стенкой в электронном газе при $T=0$ К.

11. Показать, что уравнение состояния идеального Ферми-газа имеет вид $PV=\frac{2}{3}\bar{E}$. Вывести формулу сжимаемости в случае сильного вырождения. Оценить сжимаемость кристаллического натрия (плотность 0,97 г/см^3).

12. Рассчитать плотность тока насыщения термоэлектронной эмиссии из металла с работой выхода A (эффект Ричардсона).

13. Найти химический потенциал в собственном полупроводнике при $kT \ll \varepsilon_g$ (ε_g - ширина запрещенной зоны, m_e и m_h - эффективные массы электронов и дырок соответственно).

14. Найти плотность дырок в полупроводнике, содержащем в 1 см^3 N_a акцепторов с уровнями, лежащими выше края валентной зоны на E_a. Считать, что система дырок в валентной зоне невырождена, а на каждом акцепторном уровне может находиться лишь один электрон.

15. Найти химический потенциал и плотность электронов проводимости в предельных случаях низких и высоких температур, если полупроводник содержит N_d доноров в 1 см^3. Энергия донорных уровней лежит ниже дна зоны проводимости на E_d.

16. Полупроводник содержит N_d доноров и N_a акцепторов на 1 см^3 ($N_d > N_a$). Определить температурную зависимость концентрации электронов и дырок в случае, когда вырождение в зоне проводимости отсутствует и проводимость, в основном, примесная.

§ 8. ФЛУКТУАЦИИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН. МАКСИМАЛЬНАЯ РАБОТА

Для того, чтобы перевести систему, находящуюся в тепловом контакте с термостатом, из равновесного состояния в неравновесное необходимо затратить работу

$$R = T_0 \Delta S_n + \Delta (E - T_0 S + P_0 V),$$

где S_n - суммарная энтропия системы и термостата; T_0, P_0 - равновесные значения температуры и давления. Поскольку $\Delta S_n \geqslant 0$, то $R \geq \Delta (E - T_0 S + P_0 V) = R_{min}$, т.е. минимальная работа будет затрачена при обратимом ($\Delta S_n = 0$) процессе. И наоборот, если система неравновесна, то при обратимом переходе в равновесное состояние она совершает максимальную работу $|R_{max}| = |R_{min}|$.

Если на систему не действуют внешние силы ($R = 0$) и она самопроизвольно отклоняется от равновесного состояния, то вероятность флуктуации может быть вычислена по формулам

$$W \sim e^{\frac{\Delta S_n}{\kappa}} \quad \text{или} \quad W \sim e^{-\frac{R_{min}}{\kappa T_0}} .$$

Находя ΔS_n при $R=0$, получим

$$W \sim exp\left\{-\frac{1}{\kappa T_0}\left(\Delta\left(E - T_0 S + P_0 V\right)\right)\right\}$$

Предполагая, что в процессе флуктуации сама система внутренне равновесна, но не находится в равновесии с термостатом, получим, разлагая ΔE по степеням ΔS и ΔV

$$W(\Delta T, \Delta V) = 2\pi\left(-\frac{\kappa^2 T_0^3}{C_V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T\right)^{1/2} \times$$

$$\times exp\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \frac{(\Delta V)^2}{2\kappa T_0} - \frac{C_V(\Delta T)^2}{2\kappa T_0^2}\right\};$$

так что $\overline{(\Delta T)^2} = \frac{\kappa T_0^2}{C_V}$; $\overline{(\Delta V)^2} = -\kappa T_0\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$; $\overline{\Delta T \Delta V} = 0$

З А Д А Ч И

1. Найти $\overline{\Delta T \cdot \Delta P}$; $\overline{\Delta P \cdot \Delta V}$; $\overline{\Delta S \cdot \Delta V}$; $\overline{\Delta S \Delta T}$.
2. Найти дисперсию флуктуаций удельного объема $\frac{V}{N}$.
Указание: при вычислении считать число частиц N постоянным.
3. Используя результат предыдущей задачи, записать дисперсию флуктуаций плотности $\frac{N}{V}$ для идеального газа.
4. Найти предел чувствительности пружинных весов, подчиняющихся закону Гука.
5. Найти предел чувствительности газового термометра.
6. Вычислить вероятность того, что за счет случайной флуктуации вода в сосуде объемом V нагреется от температуры T_1 до T_2.

7. Определить максимальную работу, которую можно получить при соединении сосудов с двумя идеальными газами, имеющими одинаковую температуру T_0 и число частиц N, но разные объемы V_1 и V_2.

8. То же, что и в предыдущей задаче, если до соединения сосудов газы имели одинаковое давление P_0 и разные температуры T_1 и T_2.

9. Найти минимальную работу, которую необходимо произвести над идеальным газом для того, чтобы сжать его от давления P_1 до давления P_2 при постоянной температуре, равной температуре среды ($T = T_0$).

10. Найти максимальную работу, которую можно получить с помощью идеального газа при охлаждении от температуры T до температуры среды T_0 при постоянном объеме.

§ 9. НЕРАВНОВЕСНЫЕ СИСТЕМЫ

Для исследования свойств систем, выведенных из состояния равновесия внешними воздействиями, мы будем использовать метод кинетического уравнения и метод матрицы плотности.

Кинетическое уравнение Больцмана описывает временную эволюцию классической функции распределения $\rho(\vec{r},\vec{p})$ и получается из условия "несжимаемости" этой функции (теорема Лиувилля)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}\,\frac{\partial \rho}{\partial \vec{r}} + \dot{\vec{p}}\,\frac{\partial \rho}{\partial \vec{p}} = 0$$

где $\frac{\partial \rho}{\partial \vec{p}} = \vec{i}\frac{\partial \rho}{\partial p_x} + \vec{j}\frac{\partial \rho}{\partial p_y} + \vec{k}\frac{\partial \rho}{\partial p_z}$. Последнее слагаемое $\dot{\vec{p}}\,\frac{\partial \rho}{\partial \vec{p}}$ описывает изменение функции распределения за счет силовых воздействий. Их обычно разделяют на короткодействующую часть, вынося ее в интеграл столкновений $\left[\frac{\partial \rho}{\partial t}\right]_{ст.}$, и на коллективную $\vec{F}\frac{\partial \rho}{\partial \vec{p}}$, где $\vec{F}$ – сила, действующая одинаково на все частицы, находящиеся в данной области фазового пространства.

Функции распределения, мало отличающиеся от равновесной $\rho_o(\vec{r},\vec{p})$, удобно представить в виде $\rho = \rho_o + \varphi(\vec{r},\vec{p})$, а столкновения учесть феноменологически $\left[\frac{\partial \rho}{\partial t}\right]_{ст} = -\frac{\varphi}{\tau}$ (τ – время релаксации). Тогда в приближенном виде имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} + \vec{F}\frac{\partial \rho_o}{\partial \vec{p}} = -\frac{\varphi}{\tau}$$

Вычислив $\rho(\vec{r},\vec{p},t)$, затем нетрудно проследить эволюцию концентрации частиц $n(\vec{r},t) = N\int \rho(\vec{r},\vec{p},t)d\vec{p}$, макроскопической скорости $\overline{\vec{v}(\vec{r},t)} = N\int \vec{v}\rho(\vec{r},\vec{p},t)\,d\vec{p}$, плотности тока $\vec{j} = e\overline{\vec{v}}$, если речь идет об электронах, и т.д.

Если эволюция системы не может быть описана кинетическим уравнением Больцмана, используется метод матрицы плотности

$$i\hbar\frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho]$$

где H – оператор Гамильтона системы, ρ – матрица плотности. Гамильтониан H обычно представляют в виде $H = H_o + H_F$, где H_F – описывает внешнее воздействие, H_o – гамильтониан равновесной системы. При малом отклонении от равновесия $\rho = \rho_o + \Delta\rho$, $\rho_o = \frac{1}{Z}e^{-H_o/KT}$ – равновесная матрица плотности. Тогда в приближенном виде

$$i\hbar\frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial t} = [H_o, \Delta\rho] + [H_F, \rho_o]$$

Для того, чтобы избежать трудности, связанной с использованием обратимого во времени уравнения для необратимых процессов, обычно используют адиабатическое включение внешнего воздействия $H_F \to H_F e^{\delta t}$ с последующим стремлением $\delta \to 0$.

Отыскав матрицу плотности ρ, затем можно вычислить среднее значение оператора любой физической величины

$$\langle A \rangle = Sp\,(A\cdot\rho)$$

З А Д А Ч И

1. В начальный момент времени N молекул равновесного идеального газа занимают объем шара радиуса R. Затем газ начинает беспрепятственно расширяться в пустоту. Найти $\rho(\vec{r},\vec{p},t)$ и $n(\vec{r},t)$.

2. Вывести распределение Больцмана для плотности идеального газа в однородном поле тяжести из кинетического уравнения.

3. В начальный момент температура газа внутри малого шарового объема радиуса R отличается на величину ΔT от равновесного для всего газа значения T ($\Delta T \ll T$). Найти $\rho(\vec{r},\vec{p},t)$ при заданном времени релаксации τ. Сил дальнодействия нет.

4. Найти плотность тока в холодной плазме, находящейся в однородном периодическом электрическом поле $\vec{E}=\vec{E}_0 e^{i\omega t}$. Найти диэлектрическую проницаемость при наличии временной дисперсии. Указание: считать плазму электронейтральной, а положительный заряд ионов неподвижным и равномерно распределенным в пространстве.

5. Получить уравнение собственных колебаний плотности заряда в холодной бесстолкновительной плазме. Какое влияние оказывают

столкновения? Указание: от уравнения Больцмана перейти к уравнению для макроскопических величин $\vec{j}$ и n и воспользоваться уравнениями электродинамики.

6. Вычислить тензор проводимости электронного газа в металле (полупроводнике), помещенном в однородные постоянные поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ ($\vec{E} \perp \vec{H}$).

7. Найти $\sigma(\omega,k)$ и $\varepsilon(\omega,k)$ для плазмы с учетом временной и пространственной дисперсии. Вычисления провести для вырожденной и невырожденной плазмы. Рассмотреть, в частности, случаи: $k v_F \ll \omega$ (вырожденная плазма) и $k\sqrt{\frac{k_Б T}{m}} \ll \omega$ (невырожденная плазма).

8. Получить дисперсионное уравнение для плазменных волн с учетом пространственной дисперсии (см. неравенства предыдущей задачи).

9. То же самое для поперечных электромагнитных волн (ультрафиолетовая прозрачность металлов).

10. Найти $\sigma_{ik}(\omega,k)$ для электронной твердотельной плазмы, находящейся в однородном постоянном магнитном поле ($\omega \ll eH/mc$, $k v_F \ll eH/mc$). Получить дисперсионное уравнение для геликона.

11. То же самое для электронно-дырочной твердотельной плазмы с равным количеством электронов n_e и дырок n_h. Исследовать спектр магнитоплазменных волн. Какие изменения в спектре наблюдаются, если $n_e \neq n_h$?

12. Решить задачу № 4, исходя из уравнения для матрицы плотности и используя приближение вязкого трения $\hat{p}(t) = \hat{p}\, e^{-t/\tau}$ ($\hat{p}(t)$ - оператор импульса в представлении Гейзенберга).

13. Невырожденный электронный газ находится в квантующем

магнитном ($\hbar eH/mc > KT$) и перпендикулярном к нему электрическом поле $\vec{E}$ ($E \ll H$). Считая, что частота столкновений мала по сравнению с $\Omega = eH/mc$, вычислить тензор проводимости σ_{ik} . Рассмотреть, в частности, рассеяние на точечных дефектах $V = V_0 \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$, концентрация которых N .

Указание: использовать уравнение для матрицы плотности, считая рассеивающий потенциал возмущением.

I4. Из линеаризованного по внешнему однородному электрическому полю $\vec{E}$ уравнения для матрицы плотности получить кинетическое уравнение Больцмана для электронов в твердом теле при рассеянии на неподвижных примесях.

I5. Определить связь теплопроводности и проводимости (закон Видемана-Франца).

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

§ I. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФАЗОВЫХ ОБЪЕМОВ. ПОДСЧЕТ ЧИСЛА КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ

4. а) Для классической частицы $\Gamma(E)=\frac{1}{(2\pi\hbar)}\int\limits_{p_x^2/2m\leq E} dp_x dx = \frac{2a\sqrt{2mE}}{2\pi\hbar}$

$$g(E)=\frac{\partial\Gamma}{\partial E}=\frac{a\sqrt{2m}}{2\pi\hbar\sqrt{E}} \text{ или } g(E)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int\delta(p_x^2/2m-E)\,dp_x\,dx =$$

$$=\frac{a}{2\pi\hbar}\int\left(\frac{\delta(p_x-\sqrt{2mE})}{|p_x|/m}+\frac{\delta(p_x+\sqrt{2mE})}{|p_x|/m}\right)dp_x=\frac{a\sqrt{2m}}{(2\pi\hbar)\sqrt{E}}$$

б) Энергетический спектр частицы $\varepsilon_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2$. Число $\Gamma(E)$ квантовых состояний с энергией, не превышающей заданного значения E, равно максимальному числу n_{max}, для которого $\varepsilon_{n_{max}}\leq E$. Таким образом, $\Gamma(E)=n_{max}=\left[\left(\frac{2ma^2E}{\pi^2\hbar^2}\right)^{1/2}\right]$.

Скобки $[\ ]$ – знак "антье" – взятие целой части числа. Если $E\gg\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$, то знак "антье" можно опустить и $\Gamma(E)=\frac{a\sqrt{2mE}}{\pi\hbar}$, что совпадает с результатом пункта а).

5. а) Для классического осциллятора $\Gamma(E)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int dp_x\,dx$.

Геометрически этот интеграл представляет площадь эллипса с полуосями $\sqrt{2mE}$ и $\sqrt{2E/m\omega^2}$. Так что

$$\Gamma(E)=\frac{1}{2\pi\hbar}\pi\sqrt{2mE}\cdot\sqrt{2E/m\omega^2}=\frac{E}{\hbar\omega};\quad g(E)=\frac{\partial\Gamma}{\partial E}=\frac{1}{\hbar\omega}$$

б) Энергетический спектр осциллятора $\varepsilon_n=\hbar\omega(n+1/2)$ $(n=0,1,2...)$

$\Gamma(E)=n_{max}+1$, где n_{max} – максимальное число, для которого $\varepsilon_{n_{max}}\leq E$ и $n_{max}=\left[\frac{E}{\hbar\omega}-\frac{1}{2}\right]$. Следовательно $\Gamma(E)=\left[\frac{E}{\hbar\omega}+\frac{1}{2}\right]$. Если $E\gg\hbar\omega$, то знак "антье" и $1/2$ можно опустить, так что $\Gamma(E)=\frac{E}{\hbar\omega}$, что совпадает с результатом, полученным в пункте а) для классического осциллятора.

6. $$\Gamma(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int\limits_{p_1^2/2m_1 + p_2^2/2m_2 \leqslant E} dx_1\, dx_2\, dp_1\, dp_2 = \frac{a^2}{(2\pi\hbar)^2}\, 2\sqrt{m_1 m_2}\, E$$

Здесь интеграл по импульсам равен площади эллипса с полуосями $\sqrt{2m_1E}$ и $\sqrt{2m_2E}$.

7. $$g(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \delta\left(\frac{p^2}{2m} - E\right) dV\, d^3p = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \left(\frac{\delta(p - \sqrt{2mE})}{|p|/m} + \frac{\delta(p + \sqrt{2mE})}{|p|/m} \right) p^2 dp \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{2\pi V}{(2\pi\hbar)^3} (2m)^{3/2} \sqrt{E}$$

Здесь интеграл по импульсам с $\delta(p + \sqrt{2mE})$ равен нулю, т.к. p положительно.

$$\Gamma(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int\limits_{p^2/2m \leqslant E} d\vec{p}\, dV = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\, \frac{4\pi}{3} (2mE)^{3/2}$$

Интеграл по импульсам здесь есть объем шара с радиусом $\sqrt{2mE}$.

8. Энергетический спектр частицы $\varepsilon_{n_1 n_2 n_3} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$

$\Gamma(E)$ равно числу комбинаций троек чисел n_1, n_2, n_3, для которых $\varepsilon_{n_1 n_2 n_3} \leqslant E$. Если на трех взаимно перпендикулярных осях откладывать числа n_1, n_2, n_3, то каждому состоянию в таком пространстве будет соответствовать точка. Множество всех состояний образует кубическую решетку с ребром элементарной ячейки равным 1. Очевидно, что $\Gamma(E)$ равно числу узлов решетки, которые находятся внутри сферы радиуса $R = \left(\frac{2mL^2E}{\pi^2\hbar^2}\right)^{1/2}$. Если $R \gg 1$, то $\Gamma(E)$ равно числу узлов или числу элементарных ячеек внутри этой сферы, т.е. просто объему этой сферы: $\Gamma(E) = \frac{1}{8}\, \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3}\, \frac{4\pi}{3} (2mE)^{3/2}$. Множитель $1/8$ появляется потому, что числа $n_1, n_2, n_3 > 0$.

9. $$\Gamma(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int\limits_{cp \leqslant E} d\vec{p}\, dV = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int\limits_{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \leqslant \frac{E^2}{c^2}} dp_x\, dp_y\, dp_z = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\, \frac{4\pi}{3}\, \frac{E^3}{c^3}$$

Здесь интеграл по импульсам равен объему шара с радиусом E/c.

$$g(E)=\frac{\partial\Gamma}{\partial E}=\frac{4\pi VE^2}{(2\pi\hbar c)^3} \qquad g(E)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int\delta(cP-E)\,d\vec{P}\,dV=$$

$$=\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{\delta(P-E/c)}{c}\,p^2dp\sin\theta\, d\theta\, d\varphi=\frac{4\pi VE^2}{(2\pi\hbar)^3c^3}$$

10. $\Gamma(E)=\dfrac{1}{N!\,(2\pi\hbar)^{3N}}\displaystyle\int\limits_{\sum_{i=1}^{N}p_i^2/2m\leq E}\prod_i d\vec{p}_i\,dV_i$. В этой формуле $N!$ появляется в силу тождественности частиц: при перестановке частиц состояние системы не меняется. Интеграл по импульсам представляет собой объем $3N$ -мерного шара радиусом $\sqrt{2mE}$. Воспользуемся для объема n -мерного шара формулой $V_n(R)=\dfrac{\pi^{n/2}R^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$. Тогда $\Gamma(E)=\dfrac{V^N\pi^{3N/2}\,(2mE)^{3N/2}}{N!\,(2\pi\hbar)^{3N}\,\Gamma(3N/2+1)}$. При $N=1$ получим результат задачи № 7 этого параграфа.

11. $\Gamma(E)=\dfrac{1}{(2\pi\hbar)^N}\displaystyle\int\limits_{\sum_i\left(\frac{p_i^2}{2m}+\frac{m\omega^2x_i^2}{2}\right)\leq E}\prod_i dp_i\,dx_i$. Делая замену переменных $p_i=\sqrt{2m}\,p_i'$ $\quad x_i=\sqrt{2/m\omega^2}\,x_i'$, получим

$$\Gamma(E)=\frac{2^N}{\omega^N(2\pi\hbar)^N}\int\limits_{\sum_i(p_i'^2+x_i'^2)\leq E}\prod_i dp_i\,dx_i=\frac{E^N}{N!(\hbar\omega)^N}$$

Здесь интеграл есть объем $2N$ -мерного шара радиуса $\sqrt{E}$.

§ 2. МИКРОКАНОНИЧЕСКОЕ РАПРЕДЕЛЕНИЕ

1. Совместное распределение по координатам и импульсам $\rho(p,x)=\tilde{g}^{-1}\,\delta\!\left(\dfrac{p^2}{2m}+\dfrac{m\omega^2x^2}{2}-E\right)$. Из условия нормировки $\int\rho(p,x)\,dp\,dx=1$ находим $\tilde{g}=\int\delta\!\left(\dfrac{p^2}{2m}+\dfrac{m\omega^2x^2}{2}-E\right)dp\,dx=$

$$=2\pi\hbar\, g(E)=\frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(см. № 5 § 1)}$$

$$\rho(x)=\int\rho(p,x)\,dp=\frac{\omega}{2\pi}\int\delta\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2x^2}{2}-E\right)dp=$$

$$=\frac{\omega}{2\pi}\int\left(\frac{\delta\left(p-\sqrt{2m\left(E-\frac{m\omega^2x^2}{2}\right)}\right)}{|p|/m}+\frac{\delta\left(p+\sqrt{2m\left(E-\frac{m\omega^2x^2}{2}\right)}\right)}{|p|/m}\right)dp=$$

$$= \frac{\omega\sqrt{m}}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)^{1/2}}$$

Аналогично $\rho(p) = \int \rho(p,x)\,dx = \frac{1}{\pi\sqrt{2m}} \frac{1}{(E - p^2/2m)^{1/2}}$

Те же результаты можно получить иначе. Вероятность $W(dx)$ найти частицу в интервале dx равна $W(dx) = \frac{t(dx)}{T}$, где $t(dx)$ – время нахождения частицы в интервале dx, T – период. Решение уравнений движения для гармонического осциллятора дает $x = \sqrt{2E/m\omega^2}\,\sin(\omega t + \varphi)$, откуда $t(dx) = 2dt =$

$$= \frac{2\,dx}{\omega\sqrt{2E/m\omega^2}\,\cos(\omega t + \varphi)} = \frac{2\,dx}{\omega\sqrt{2E/m\omega^2}\left(1 - \frac{m\omega^2 x^2}{2E}\right)^{1/2}}$$

$$W(dx) = \frac{t(dx)}{T} = \frac{\omega}{2\pi} t(dx) = \frac{\omega\sqrt{m}}{\pi\sqrt{2}} \frac{dx}{(E - m\omega^2 x^2/2)^{1/2}} = \rho(x)\,dx$$

т.е. для $\rho(x)$ получен тот же результат, что и выше.

2. $$\rho(p_1 x_1 p_2 x_2) = \tilde{g}^{-1} \delta\left(\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} - E\right)$$

$$\tilde{g} = \int \delta\left(\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} - E\right) dp_1\, dp_2\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= (2\pi\hbar)^2 g(E) = 2\pi a^2 \sqrt{m_1 m_2}$$ (см. № 6 § I).

Для получения $\rho(\varepsilon_1)$ нужно просуммировать $\rho(p_1 x_1 p_2 x_2)$ по всем состояниям при условии, что энергия первой частицы фиксирована, т.е.

$$\rho(\varepsilon_1) = \int \rho(p_1 x_1 p_2 x_2)\, \delta\left(\frac{p_1^2}{2m_1} - \varepsilon_1\right) dp_1\, dp_2\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \tilde{g}^{-1} \int \delta\left(\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} - E\right) \delta\left(\frac{p_1^2}{2m_1} - \varepsilon_1\right) dp_1\, dp_2\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \tilde{g}^{-1} \int \delta(\varepsilon_1 + p_2^2/2m_2 - E)\, \delta(p_1^2/2m_1 - \varepsilon_1)\, dp_1\, dp_2\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \tilde{g}_1(\varepsilon_1) \cdot \tilde{g}_2(E - \varepsilon_1) / \tilde{g}(E)$$

где $\tilde{g}_1(\varepsilon_1)=\int\delta\left(\frac{p_1^2}{2m_1}-\varepsilon_1\right)dp_1dx_1=\frac{a\sqrt{2m_1}}{\sqrt{\varepsilon_1}}$ (см. № 4 § I)

$\tilde{g}_2(E-\varepsilon_1)=\int\delta\left(\frac{p_2^2}{2m_2}-E+\varepsilon_1\right)dp_2dx_2=\frac{a\sqrt{2m_2}}{\sqrt{E-\varepsilon_1}}$, следовательно

$$\rho(\varepsilon_1)=\frac{1}{\pi\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{E-\varepsilon_1}}$$

3. $\rho(\{\vec{p}_i\vec{r}_i\})=\tilde{g}_N^{-1}\,\delta\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2m}-E\right)$ из условия нормировки

$$\tilde{g}_N=\int\delta\left(\sum_i\frac{p_i^2}{2m}-E\right)\prod_i d\vec{p}_i dV_i=\frac{V^N\pi^{3N/2}(2m)^{3N/2}E^{\frac{3N}{2}-1}}{\Gamma(3N/2)}$$

$$\rho(\varepsilon_1)=\int\rho(\{\vec{p}_i\vec{r}_i\})\,\delta\left(\frac{p_1^2}{2m}-\varepsilon_1\right)\prod_i d\vec{p}_i\,dV_i=$$

$$=\tilde{g}_N^{-1}\int\delta\left(\frac{p_1^2}{2m}+\sum_{i=2}^{N}\frac{p_i^2}{2m}-E\right)\delta\left(\frac{p_1^2}{2m}-\varepsilon_1\right)\prod_i d\vec{p}_i\,dV_i=$$

$$=\tilde{g}_N^{-1}\int\delta\left(\sum_{i=2}^{N}\frac{p_i^2}{2m}-E+\varepsilon_1\right)\delta\left(\frac{p_1^2}{2m}-\varepsilon_1\right)\prod_i d\vec{p}_i\,dV_i=$$

$$=\frac{\tilde{g}_{N-1}(E-\varepsilon_1)\tilde{g}_1(\varepsilon_1)}{\tilde{g}_N(E)}=\frac{\Gamma(3N/2)}{\Gamma(3(N-1)/2)\,\Gamma(3/2)}\,\frac{\varepsilon_1^{1/2}(E-\varepsilon_1)^{\frac{3(N-1)}{2}-1}}{E^{3N/2-1}}.$$

В пределе $N\to\infty$, $E=\bar{\varepsilon}N$ воспользуемся асимптотикой

$\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)}\simeq n^{\alpha}$, т.е. $\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{3(N-1)}{2}\right)\simeq\left(\frac{3N}{2}\right)^{3/2}$

$$\frac{(E-\varepsilon_1)^{\frac{3N-3}{2}-1}}{E^{3N/2-1}}=\frac{\left(1-\frac{\varepsilon_1}{N\bar{\varepsilon}}\right)^{\frac{3(N-1)}{2}-1}}{N^{3/2}\,\bar{\varepsilon}^{3/2}}\simeq\frac{e^{-3\varepsilon_1/2\bar{\varepsilon}}}{N^{3/2}\,\bar{\varepsilon}^{3/2}},$$ так что

$$\rho(\varepsilon_1)=\frac{\varepsilon_1^{1/2}e^{-\varepsilon_1/\theta}}{\Gamma(3/2)\,\theta^{3/2}}\qquad\left(\theta=\tfrac{2}{3}\bar{\varepsilon}\right)$$

Энтропию всего газа можно найти по формуле $\sigma=\ln g(E)=$

$$=\ln\frac{\tilde{g}_N(E)}{N!(2\pi\hbar)^{3N}}=N\ln\frac{V(2\pi m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3}+\left(\frac{3N}{2}-1\right)\ln E-$$

$$-\ln N!-\ln\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)$$. При $N\to\infty$ и $E=\bar{\varepsilon}N$

$\ln N!\simeq N\ln N-N$; $\ln\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)\simeq\frac{3N}{2}\ln\frac{3N}{2}-\frac{3N}{2}$. Так что

$$\sigma=N\ln\frac{eV(2\pi m\theta)^{3/2}}{N(2\pi\hbar)^3}+\frac{3}{2}N\qquad\left(\theta=\tfrac{2}{3}\bar{\varepsilon}\right)$$

4. Энергия N квантовых осцилляторов

$E=\hbar\omega\sum\limits_{i=1}^{N}(n_i+\frac{1}{2})=\hbar\omega(M+\frac{N}{2})$, т.е. $M=\sum\limits_i n_i$. Число состояний системы $g_N(M)$ равно числу способов, которыми можно из N чисел $\{n_i\}$ образовать равную M с[illegible] элементарн[illegible] комбинаторики получим $g_N(M)=\dfrac{(N+M-1)!}{(N-1)!\,M!}$ [illegible] энергия перв[illegible] осциллятора фиксирована, т.е. задано n_1, [illegible] $-n_1=\sum\limits_{i=2}^{N} n_i$ и число состояний всей системы, когда фиксирована энергия первого осциллятора, равна $g_{N-1}(M-n_1)=\dfrac{(N+M-n_1-2)!}{(N-2)!\,(M-n_1)!}$.

Искомая вероятность $P_{n_1}=\dfrac{g_{N-1}(M-n_1)}{g_N(M)}=\dfrac{(N+M-n_1-2)!\,M!\,(M-1)!}{(N-2)!\,(M-n_1)!\,(N+M-1)!}$

Если $N\to\infty$, $\frac{M}{N}=\bar{n}_1$, то из формулы Стирлинга

$$\frac{M!}{(M-n)!}\simeq M^n;\quad \frac{(N-1)!}{(N-2)!}\simeq\frac{1}{N};\quad \frac{(N+M-n_1-2)!}{(N+M-1)!}\simeq\frac{1}{(N+M)^{n_1+1}}.$$

Поэтому $P_{n_1}=\dfrac{M^{n_1}}{N(M+N)^{n_1+1}}=\dfrac{(M/N)^{n_1}}{(1+M/N)^{n_1+1}}=\dfrac{\bar{n}_1^{n_1}}{(1+\bar{n}_1)^{n_1+1}}$

Энтропия $\sigma=\ln g_N(M)$. По формуле Стирлинга $\ln M!=M\ln M-M$

$$\ln(N+M-1)!=(N+M)\ln(N+M)-(N+M);\quad \ln(N-1)!=N\ln N-N$$

$$\sigma=N[(1+\bar{n})\ln(1+\bar{n})-\bar{n}\ln\bar{n}]$$

5. I) Макроскопическому состоянию отвечает объем в Γ-пространстве $W=\dfrac{N!}{\prod\limits_i n_i!}\prod\limits_i \omega_i^{n_i}$ или число состояний $\Delta\Gamma=\dfrac{W}{N!(2\pi\hbar)^{3N}}$;

$\sigma=\ln\Delta\Gamma=\sum\limits_i\ln\left(\dfrac{\omega_i}{(2\pi\hbar)^3}\right)^{n_i}\Big/n_i!$. Поскольку $n_i\gg1$, то

$\sigma=\sum\limits_i n_i\ln\dfrac{e\omega_i}{n_i(2\pi\hbar)^3}$ – неравновесная энтропия.

2) Равновесные значения n_i определяются из условия максимальности σ при дополнительных условиях $N=\sum\limits_i n_i$; $E=\sum\limits_i \varepsilon_i n_i$

Следовательно нужно найти безусловный экстремум функционала

$$J=\sum_i n_i\ln\frac{e\omega_i}{n_i(2\pi\hbar)^3}+\alpha\sum_i n_i-\beta\sum\varepsilon_i n_i$$

Из $\dfrac{\partial J}{\partial n_i}=0$ следует $\bar{n}_i=\dfrac{\omega_i}{(2\pi\hbar)^3}e^{\alpha-\beta\varepsilon_i}=C\,\omega_i e^{-\beta\varepsilon_i}$

Если $\mathcal{E} = p^2/2m$, то $\sum_i n_i = C\int d\vec{p}\,dV\, e^{-p^2/2m\theta} =$

$$= CV(2\pi m\theta)^{3/2} = N \to C = N/V(2\pi m\theta)^{3/2} \qquad (\beta = \tfrac{1}{\theta})$$

$$\sum_i \mathcal{E}_i n_i = C\int \frac{p^2}{2m} e^{-\frac{p^2}{2m\theta}} d\vec{p}\,dV = \frac{3}{2}N\theta = E \to \theta = \frac{2}{3}\frac{E}{N}$$

Таким образом, плотность числа частиц

$$\bar{n}(\vec{p}) = \frac{\bar{n}_i}{\omega_i} = \frac{N}{V(2\pi m\theta)^{3/2}}\, e^{-\frac{p^2}{2m\theta}}$$

3) Равновесная энтропия определится формулой

$$\mathcal{S} = \sum_i \bar{n}_i \ln \frac{e\omega_i}{(2\pi\hbar)^3 \bar{n}_i} = \int d\vec{p}\,dV\, \bar{n}(\vec{p},\vec{r}) \ln \frac{e}{(2\pi\hbar)^3 \bar{n}(\vec{p},\vec{r})} =$$

$$= N \ln \frac{eV(2\pi m\theta)^{3/2}}{N(2\pi\hbar)^3} + \frac{3}{2}N$$

6. $\rho(\mathcal{E}) = \bar{\mathcal{E}}\, e^{-\mathcal{E}/\bar{\mathcal{E}}}$

§ 3. КАНОНИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГИББСА

I. Искомая вероятность определяется формулой $W_n = \dfrac{g_T(E-\mathcal{E}_n)}{\sum_n g_T(E-\mathcal{E}_n)}$

где $g_T(E)$ - плотность числа состояний термостата.

а) $$g_T(E-\mathcal{E}_n) = \frac{V^N(2\pi m)^{3N/2}\,(E-\mathcal{E}_n)^{\frac{3N}{2}-1}}{N!(2\pi\hbar)^{3N}\,\Gamma(3N/2)}$$ (см. № 10 § I)

Поэтому $W_n = \dfrac{(E-\mathcal{E}_n)^{\frac{3N}{2}-1}}{\sum_n (E-\mathcal{E}_n)^{\frac{3N}{2}-1}}$; введем $E = \bar{\mathcal{E}}N$, тогда при

$$N\to\infty \quad W_n = \frac{(1-\mathcal{E}_n/N\bar{\mathcal{E}})^{\frac{3N}{2}-1}}{\sum_n (1-\mathcal{E}_n/N\bar{\mathcal{E}})^{3N/2-1}} \to \frac{e^{-\frac{3}{2}\mathcal{E}_n/\bar{\mathcal{E}}}}{\sum_n e^{-\frac{3}{2}\mathcal{E}_n/\bar{\mathcal{E}}}}$$

Определив $\theta = \frac{2}{3}\bar{\mathcal{E}}$, получим $W_n = \frac{1}{Z}\, e^{-\mathcal{E}_n/\theta}$

б) $g_T(E-\mathcal{E}_n) = \frac{(E-\mathcal{E}_n)^{N-1}}{(\hbar\omega)^N (N-1)!}$; $\quad W_n = \frac{(E-\mathcal{E}_n)^{N-1}}{\sum_n (E-\mathcal{E}_n)^{N-1}}$

при $N \to \infty$ и $E = \bar{\mathcal{E}} N$ получим $W_n = \frac{e^{-\mathcal{E}_n/\theta}}{\sum_n e^{-\mathcal{E}_n/\theta}} \; (\theta = \bar{\mathcal{E}})$

2. $\rho(\mathcal{E}) = \int \rho(p.q)\,\delta(H-\mathcal{E})\,dp\,dq =$

$$= A\int e^{-\frac{H(p,q)}{KT}}\,\delta(H-\mathcal{E})\,dp\,dq = Ae^{-\frac{\mathcal{E}}{KT}}\int \delta(H-\mathcal{E})\,dp\,dq =$$

$$= Ae^{-\frac{\mathcal{E}}{KT}}\,\tilde{g}(\mathcal{E}); \quad A^{-1} = \int e^{-\frac{H(p,q)}{KT}}\,dp\,dq$$

а) $A^{-1} = \int e^{-\frac{p^2}{2mKT}}\,d\vec{p}\,dV = V(2\pi mKT)^{3/2}$

$\tilde{g}(\mathcal{E}) = 2\pi V(2m)^{3/2}\mathcal{E}^{1/2}$ (см. № 7 § I)

$\rho(\mathcal{E}) = \frac{2\mathcal{E}^{1/2}}{\pi^{1/2}(KT)^{3/2}}\,e^{-\frac{\mathcal{E}}{KT}}$; $\bar{\mathcal{E}} = \int_0^\infty \mathcal{E}\,\rho(\mathcal{E})\,d\mathcal{E} = \frac{3}{2}KT$

б) $A^{-1} = \int e^{-cp/KT}\,d\vec{p}\,dV = 8\pi V(KT/c)^3$

$\tilde{g}(\mathcal{E}) = \frac{4\pi V\mathcal{E}^2}{c^3}$ (см. № 9 § I)

$\rho(\mathcal{E}) = \frac{\mathcal{E}^2}{2(KT)^3}\,e^{-\frac{\mathcal{E}}{KT}}$; $\bar{\mathcal{E}} = 3KT$

3. а) $\rho(x) = \omega\sqrt{\frac{m}{2\pi KT}}\,e^{-m\omega^2x^2/2KT}$; $\overline{x^2} = \frac{KT}{m\omega^2}$;

$$\rho(p) = \frac{1}{(2\pi mKT)^{1/2}}\,e^{-\frac{p^2}{2mKT}} \quad ;$$

$$Z = \int \frac{dp\,dx}{2\pi\hbar}\,e^{-\frac{1}{KT}\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2}\right)} = \frac{KT}{\hbar\omega}$$

б) $\mathcal{E}_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$; $Z = \sum_n e^{-\frac{\hbar\omega}{KT}(n+\frac{1}{2})} = \frac{e^{-\hbar\omega/KT2}}{1-e^{-\hbar\omega/KT}}$

Если $KT \gg \hbar\omega$, то $Z = \frac{KT}{\hbar\omega}$

$$\rho(x)=\sum_n W_n\Psi_n(x)\Psi_n^*(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\,th\frac{\hbar\omega}{2KT}\right)^{1/2}\times$$

$\times\exp\left(-x^2\frac{m\omega}{\hbar}\,th\frac{\hbar\omega}{2KT}\right)$. Здесь $\Psi_n(x)$ – собственная функция оператора энергии осциллятора

$$\Psi_n(x)\times\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)$$

При вычислении $\rho(x)$ следует воспользоваться формулой

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z/2)^n}{n!}H_n(x)H_n(y)=(1-z^2)^{-1/2}\exp\left\{\frac{2xyz-(x^2+y^2)z^2}{1-z^2}\right\}.$$

4. Для больцмановского идеального газа

$Z_N=\frac{Z_1^N}{N!}\simeq\frac{(eZ_1)^N}{N^N}$, где Z_1 – статсумма одной частицы

$$F=-KT\ln Z_N=-NKT\ln\frac{eZ_1}{N}$$

а) $$Z_1=\int\frac{d\vec{p}\,dV}{(2\pi\hbar)^3}e^{-\frac{p^2}{2mKT}}=\frac{V(2\pi mKT)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3}$$

б) $$Z_1=\int\frac{d\vec{p}\,dV}{(2\pi\hbar)^3}e^{-\frac{cp}{KT}}=\frac{8\pi V}{(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{KT}{c}\right)^3$$

в) $$\rho(\mathcal{E})=\frac{\mathcal{E}^{\frac{3N}{2}-1}}{(KT)^{3N/2}\,\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)}e^{-\frac{\mathcal{E}}{KT}}$$

8. $$Z_N=\left(\frac{eZ_1}{N}\right)^N;\quad Z_1=\int\frac{d\vec{p}\,dx\,dy\,dz}{(2\pi\hbar)^3}e^{-\frac{p^2}{2mKT}-\frac{mgz}{KT}}=$$

$$=\frac{\pi R^2(2\pi mKT)^{3/2}KT}{(2\pi\hbar)^3\,mg}\left(e^{-\frac{mgz_1}{KT}}-e^{-\frac{mgz_2}{KT}}\right)$$

$f_{z_1}=-\frac{\partial F}{\partial z_1}$; $f_{z_2}=-\frac{\partial F}{\partial z_2}$ – *силы, действующие на нижнее и* верхнее основания, $f_{бок}=-\frac{\partial F}{\partial R}$.

$$n(\vec{r}) = A e^{-\frac{mgz}{KT}} ; \int n dV = N \to A = \frac{N mg}{\pi R^2 KT (e^{-mgz_1/KT} - e^{-mgz_2/KT})}$$

Давление

$$P(\vec{r}) = KTn(\vec{r}) = \frac{N mg e^{-mgz}}{\pi R^2 (e^{-mgz_1/KT} - e^{-mgz_2/KT})}$$

9. Ненормированная матрица плотности $\hat{W}^{(H)} = e^{-\beta\hat{H}}$ $\left(\beta = \frac{1}{KT}\right)$ удовлетворяет уравнению Блоха $\frac{\partial W^{(H)}}{\partial\beta} = -\hat{H}\hat{W}^{(H)}$ с начальным условием $\hat{W}^{(H)}(\beta=0) = \hat{1}$.

В координатном представлении:

$$\frac{\partial W^{(H)}(x,x',\beta)}{\partial\beta} = \hat{H}_x W^{(H)}(x,x',\beta) ; \quad W^{(H)}(x,x',0) = \delta(x-x')$$

Для свободной частицы $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$, поэтому

$$\frac{\partial W^{(H)}(\vec{r},\vec{r}',\beta)}{\partial\beta} = +\frac{\hbar^2}{2m}\Delta W^{(H)}(\vec{r},\vec{r}',\beta); \quad \delta(\vec{r}-\vec{r}') = W^{(H)}(\vec{r},\vec{r}',0)$$

Это уравнение типа уравнения теплопроводности. Его решение:

$$W^{(H)}(\vec{r},\vec{r}',\beta) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2\beta\hbar^2}(\vec{r}-\vec{r}')^2}$$

Статсумма $Z = Sp\,\hat{W}^{(H)}$ или в нашем случае

$$Z = \int dx\,dy\,dz\; W^{(H)}(\vec{r},\vec{r},\beta) = V\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3/2}$$

10. Матрица плотности осциллятора в координатном представлении

$$\rho_{xx'} = \sum_n W_n \psi_n(x)\psi_n^*(x'), \text{ где } W_n = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega n}{KT}}}{(1-e^{-\hbar\omega/KT})}$$

$\psi_n(x)$ – собственные функции оператора энергии осциллятора (см. № 3 § 3)

$$\rho_{xx'} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\,th\frac{\hbar\omega}{2KT}\right)^{1/2} exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar\, sh\,\hbar\omega/KT}\left[(x^2+x'^2)ch\frac{\hbar\omega}{KT} - 2xx'\right]\right\}$$

$$\overline{x^2} = \int \rho_{xx}\, x^2 dx = \frac{\hbar}{2m\omega} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2KT}$$

II. Вращательная энергия ротатора $\mathcal{E}_{Bp.} = \frac{1}{2J}\left(M_1^2 + M_2^2\right)$;
$J = \frac{m\ell^2}{2}$ – момент инерции

$$Z_{Bp.} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int dM_1 dM_2\, d\varphi_1 d\varphi_2\, e^{-\frac{\mathcal{E}_{Bp.}}{KT}} = \frac{2J}{\hbar^2} KT$$

$F_{Bp.} = -KT \ln Z_{Bp.}$. Сила $f = -\frac{\partial F_{Bp.}}{\partial \ell} = \frac{2KT}{\ell}$.

I4. $\Delta S = NK \ln \frac{V_2}{V_1}$. При нахождении ΔS следует учесть, что температура начального и конечного состояний одинакова.

I5. Процесс Джоуля-Томсона протекает при постоянной энтальпии. Таким образом, нужно найти $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_W$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_W = \frac{\partial(T,W)}{\partial(p,W)} = -\left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)_T \Big/ \left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)_p = -\frac{T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T + V}{C_p} =$$

$= \frac{1}{C_p}\left(V - T\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\right)$. Учитывая уравнение состояния идеального газа $PV = NKT$, найдем $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_W = 0$.

§ 4. БОЛЬШОЕ КАНОНИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГИББСА

I. а) $N = \sum\limits_{n,N} W_{n,N} \cdot N = \sum\limits_{N} N e^{\mu N/KT} \sum\limits_{n} e^{-\mathcal{E}_{nN}/KT} =$

$$= KT\left(\frac{\partial}{\partial \mu} \ln \mathfrak{Z}\right)_T = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_T$$

б) $\overline{N^2} = \sum\limits_{n,N} N^2 W_{n,N} = \frac{(KT)^2}{\mathfrak{Z}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \sum\limits_{N,n} e^{\frac{\mu N - \mathcal{E}_{n,N}}{KT}} =$

$$= \frac{(KT)^2}{\mathfrak{Z}} \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial \mu^2} = (KT)^2 e^{\frac{\Omega}{KT}} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} e^{-\frac{\Omega}{KT}} =$$

$$= (KT)^2 e^{\Omega/KT}\left[\frac{1}{KT}\left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial \mu}\right)_T e^{-\Omega/KT} + \frac{(\overline{N})^2}{(KT)^2} e^{-\Omega/KT}\right] =$$

$$= (\overline{N})^2 + KT\left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial \mu}\right)_T ; \quad \overline{(\Delta N)^2} = \overline{N^2} - (\overline{N})^2 = KT\left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial \mu}\right)_T$$

2. $P_N = \sum_n W_{n,N} = \dfrac{e^{\frac{\mu N}{KT}} \cdot Z_N}{\sum_N e^{\mu N/KT} \cdot Z_N}$ Для больцмановского

идеального газа $Z_N = \dfrac{Z^N}{N!}$ (Z - статистическая сумма одной молекулы газа), т.е. $P_N = \dfrac{(Z\, e^{\mu/KT})^N}{N!} e^{-Ze^{\mu/KT}}$

$$\overline{N} = \sum_N N P_N = Z e^{\frac{\mu}{KT}} \quad \text{и} \quad P_N = \frac{(\overline{N})^N}{N!} e^{-\overline{N}}; \quad \overline{(\Delta N)^2} = \overline{N}$$

3. Из уравнения $\overline{N} = -\left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_T = Z(T,V) e^{\mu/KT}$ определяем ($Z(T,V)$ - статсумма одной молекулы газа;

$Z(T,V) = Z_0(T) \cdot V \left(\dfrac{2\pi\hbar}{mKT}\right)^{-3/2}$, $Z_0(T)$ - вклад в статсумму молекулы внутренних степеней свободы)

$$\mu = KT \ln \left\{ \frac{\overline{N}}{Z_0(T)\, V} \cdot \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mKT} \right)^{3/2} \right\};$$

$$\Omega = -KT\overline{N}; \qquad P = -\frac{\Omega}{V} = \frac{\overline{N} KT}{V} \quad ;$$

$$F = \Omega + \mu\overline{N} = -KT\overline{N} + \overline{N} KT \ln \left\{ \frac{\overline{N}}{Z_0(T)\, V} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mKT} \right)^{3/2} \right\};$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,\overline{N}} = -K\overline{N} + K\overline{N} \ln \left\{ \frac{\overline{N}}{Z_0(T) V} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mKT} \right)^{3/2} \right\} - \frac{\overline{N} KT}{Z(V,T)} \left(\frac{\partial Z(V,T)}{\partial T} \right)_{V,\overline{N}}$$

$E = F - TS$. Для одноатомного газа $E = \frac{3}{2} \overline{N} KT$.

4. Одно из условий теплового равновесия - минимальность свободной энергии газа как функции $\overline{N}$ (при фиксированных T и V), т.е.

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \overline{N}}\right)_{T,V} = 0 = \mu, \; \overline{N} = \sum_N N \cdot \sum_n e^{-\frac{\varepsilon_{n,N}}{KT}} \left\{ \sum_{n,N} e^{-\frac{\varepsilon_{n,N}}{KT}} \right\}^{-1}$$

§ 5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНА, ФЕРМИ-ДИРАКА, БОЛЬЦМАНА

I. $$W_{n_k} = \frac{e^{(\mu-\varepsilon_k)n_k/kT}}{1 \pm e^{(\mu-\varepsilon_k)/kT}}$$ (+ – для ферми-частиц, – – для бозе-частиц)

$$\overline{(n_k-\bar n_k)(n_{k'}-\bar n_{k'})} = \overline{(\Delta n_k)^2}\delta_{kk'} = kT\left(\frac{\partial \bar n_k}{\partial \mu}\right)_T \delta_{kk'} =$$

$$= \frac{e^{\frac{\varepsilon_k-\mu}{kT}}}{\left(e^{\frac{\varepsilon_k-\mu}{kT}} \pm 1\right)^2}\delta_{kk'}$$

2.

а) $$\Delta\Gamma = \prod_i \frac{G_i!}{n_i!\,(G_i-n_i)!}\,; \qquad G_i = \frac{\omega_i}{(2\pi\hbar)^3}$$

$$\bar n_i = G_i\,\frac{1}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/kT}+1}\,;$$

б) $$\Delta\Gamma = \prod_i \frac{(G_i+n_i-1)!}{(G_i-1)!\,n_i!}\,; \qquad \bar n_i = G_i\,\frac{1}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/kT}-1}$$

3. Энергия Ферми $\varepsilon_F = \mu$ при $T=0$ находится из уравнения:

$$N = \int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon)\,d\varepsilon\,,$$ где

$$g(\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{V}{\pi^2\hbar^3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2} & \text{в случае (а) – закон дисперсии } \varepsilon = \dfrac{p^2}{2m} \\ \dfrac{V}{\pi^2\hbar^3}\,\dfrac{\varepsilon^2}{c^3} & \text{в случае (б) – закон дисперсии } \varepsilon = cp \end{cases}$$

$$\mu = \varepsilon_F = \begin{cases} (3\pi^2)^{2/3}\,\dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{N}{V}\right)^{2/3} \\ \left(\dfrac{3N\pi^2}{V}\right)^{1/3}\hbar c \end{cases}$$

$$E = \int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon)\,\varepsilon\,d\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{3(3\pi^2)^{2/3}\,\hbar^2}{10m}\left(\dfrac{N}{V}\right)^{2/3} N \\ \dfrac{3}{4}N\hbar c\left(\dfrac{3N\pi^2}{V}\right)^{1/3} \end{cases}$$

При $T=0,\ E=F;\ \Omega=-\frac{2}{3}E=-PV;\ \Phi=F+PV=\frac{5}{3}E;$

$S=0,\ W=\Phi+ST=\Phi$

4. При $T<T_0$ $\mu=0$ и

$$E=\int_0^\infty \varepsilon\, dN_\varepsilon=0{,}128\, q\frac{m^{3/2}(KT)^{5/2}}{\hbar^3}V$$ (q - кратность спинового вырождения энергетического уровня)

$$\Omega=KT\int_0^\infty g(\varepsilon)\ln\left(1-e^{-\varepsilon/KT}\right)d\varepsilon=-\frac{2}{3}E=-PV$$

$$F=\Omega;\ S=\frac{1}{T}(E-F)=\frac{5}{3}\frac{E}{T}\quad \Phi=F-PV=-\frac{E}{3}$$

5. В случае больцмановского газа ($e^{\mu/KT}<<1$)

$$\mu_{больц.}=KT\ln\left\{\frac{N\cdot 2^{5/2}\pi^{3/2}\hbar^3}{q\,V(mKT)^{3/2}}\right\}$$

С учетом первой квантовой поправки

$$\mu=\mu_{больц.}+\Delta\mu_{квант.}=\mu_{больц.}\pm\frac{2\pi^{3/2}\hbar^3 N\,KT}{q\,V(mKT)^{3/2}};$$

$$P=\frac{NKT}{V}\left[1\pm\frac{\pi^{3/2}\ N\hbar^3}{2q\ \ V(mKT)^{3/2}}\right].$$ Здесь верхний знак относится к случаю статистики Ферми, а нижний - к Бозе-статистике. В явном виде условие применимости больцмановской статистики $e^{\mu/KT}<<1$ сводится к $\frac{2^{5/2}\pi^{3/2}\hbar^3 N}{q\,V(mKT)^{3/2}}<<1$

6. $$E=\int_0^\infty \varepsilon\, dN_\varepsilon=\frac{qVm^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty\frac{\varepsilon^{3/2}\,d\varepsilon}{\left[e^{(\varepsilon-\mu)/KT}\pm 1\right]}.$$

$$\Omega=\mp KT\int_0^\infty \ln\left(1\pm e^{\frac{\mu-\varepsilon}{KT}}\right)g_\varepsilon\, d\varepsilon$$ и после интегрирования пе

частям получим

$$\Omega = -\frac{2}{3}\frac{g V m^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3}\int_0^{\infty}\frac{\varepsilon^{3/2}\,d\varepsilon}{[e^{(\varepsilon-\mu)/KT} \pm 1]}$$

т.е. $\Omega = -\frac{2}{3}E = -PV$, $PV = \frac{2}{3}E$

7. μ находится из условия

$$N = \sum_{\sigma}\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int_{\Gamma} d\Gamma\, n(\vec{p},\vec{r},\sigma)$$, где при $T=0$

$$n(\vec{p},\vec{r},\sigma) = \theta\left(\mu - \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2}\right)$$

После интегрирования получим

$$N = \frac{16\sqrt{2}\, m^{1/2}\, \ell}{15\pi\hbar^3\omega^2}\left[\left(\mu + \frac{m\omega^2 R^2}{2}\right)^{5/2} - \mu^{5/2}\right]$$

(ℓ и R - длина и радиус цилиндра соответственно)

$$P(\vec{r}) = \frac{2KT}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3p\, \ln\left[1 + e^{\left(\mu - \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2}\right)/KT}\right]$$

Учитывая, что при $T \to 0$

$$\lim_{T\to 0} KT \ln\left[1 + e^{\left(\mu - p^2/2m + \frac{m\omega^2 r^2}{2}\right)/KT}\right] =$$

$$= \left(\mu - \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2}\right)\theta\left(\mu - \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2}\right)$$

после интегрирования по импульсу $P(\vec{r})$ сведется к

$$P(\vec{r}) = \frac{8\sqrt{2}\, m^{3/2}}{15\pi^2\hbar^3}\left(\mu + \frac{m\omega^2 r^2}{2}\right)$$

$$n(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\sum_{\sigma}\int d^3p\, n(\vec{p},\vec{r},\sigma) = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi^2\hbar^3} m^{3/2}\left(\mu + \frac{m\omega^2 r^2}{2}\right)$$

8. μ находится из уравнения:

$$N = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\sum_{\sigma} d\Gamma\, \theta\left(\mu - \frac{p^2}{2m} - mgz\right) =$$

$$= \begin{cases} \alpha\left[\mu^{5/2} - (\mu - mgh)^{5/2}\right] & \text{при } \mu > mgh \quad (а) \\ \alpha \cdot \mu^{5/2} & \text{при } \mu < mgh \quad (б) \end{cases}$$

где $\alpha = \dfrac{8\pi S\,(2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3\, mg}\ \dfrac{4}{15}$ (S – поперечное сечение цилиндра)

$$n(z) = \frac{4\sqrt{2}\, m^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} (\mu - mgz)^{3/2}\, \theta(\mu - mgz)$$

$$P(z) = \frac{8\sqrt{2}\, m^{3/2}}{15\pi^2 \hbar^3} (\mu - mgz)^{5/2}\, \theta(\mu - mgz)$$

9. В двумерном случае полное число частиц

$$N = \int_0^\infty g(\varepsilon)\, \bar{n}_\varepsilon\, d\varepsilon = \frac{2\pi m S}{h^2} \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/KT} - 1} =$$

$$= \frac{2\pi m S}{h^2} \int_0^\infty \sum_{\ell=1}^\infty e^{\frac{\ell(\mu-\varepsilon)}{KT}}\, d\varepsilon = \frac{2\pi m S K T}{h^2} \sum_{\ell=1}^\infty \frac{1}{\ell}\, e^{\frac{\mu \ell}{KT}}$$

Отсюда видно, что μ не может обратиться в нуль ни при какой конечной температуре, так что Бозе-конденсация невозможна.

§ 6. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

I. $$W_{n_{\vec{K},\alpha}} = e^{-\hbar\omega_{\vec{K}\alpha} \cdot n/KT} \left\{ \sum_{n=0}^\infty e^{-\frac{\hbar\omega_{\vec{K}\alpha} n}{KT}} \right\}^{-1} =$$

$$= \frac{e^{-\hbar\omega_{\vec{K}\alpha} \cdot n/KT}}{1 - e^{-\hbar\omega_{\vec{K}\alpha}/KT}};$$

$$\Delta n_{\vec{K}\alpha} = \frac{e^{\hbar\omega_{\vec{K}\alpha}/KT}}{\left(e^{\hbar\omega_{\vec{K}\alpha}/KT} - 1\right)^2};$$

$$S_{\vec{K},\alpha} = -\left(\frac{\partial \Omega_{\vec{K}\alpha}}{\partial T}\right)_{V,\mu} = \frac{\hbar\omega_{\vec{K}\alpha}}{T} \frac{1}{\left(e^{\hbar\omega_{\vec{K}\alpha}/KT} - 1\right)}$$

2. $$\overline{(\Delta N)^2} = \sum_{\vec{K},\alpha} \overline{\Delta n_{\vec{K},\alpha}} = \sum_{\vec{K},\alpha} \frac{e^{\hbar\omega_{\vec{K},\alpha}/KT}}{(e^{\hbar\omega_{\vec{K},\alpha}/KT}-1)^2} =$$

$$= \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^2 e^{\hbar\omega/KT} d\omega}{(e^{\hbar\omega/KT}-1)^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{KT}{\hbar c}\right)^3 V$$

$$\overline{N} = \sum_{\vec{K},\alpha} \overline{n}_{\vec{K},\alpha} = \int_0^\infty \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 d\omega}{(e^{\hbar\omega/KT}-1)} = \frac{2{,}404 V}{\pi^2}\left(\frac{KT}{\hbar c}\right)^3$$

3. В двумерном случае

$$\frac{dE_\omega}{d\omega} = \frac{S\hbar\omega^2}{\pi c^2(e^{\hbar\omega/KT}-1)}$$

$$E = \int_0^\infty dE_\omega = 2.404 \frac{S}{\pi c^2}\left(\frac{KT}{\hbar^2}\right)^3$$

При $\mu = 0$ $F = \Omega = KT\int_0^\infty \frac{S\omega}{\pi c^2} \ln\left[1 - e^{-\hbar\omega/KT}\right] d\omega = -\frac{E}{2}$

$$S = \frac{3}{2}\frac{E}{T}$$

В одномерном случае $\frac{dE_\omega}{d\omega} = \frac{\ell\hbar\omega}{\pi c(e^{\hbar\omega/KT}-1)}$

$$E = \frac{\pi\ell}{6c}\frac{(KT)^2}{\hbar} \qquad F = \Omega = -E \qquad S = \frac{2E}{T}$$

4. В двумерном случае максимум функции $\frac{dE_\omega}{d\omega}$ достигается при значении $\omega_{max} \simeq \frac{2KT}{\hbar}$, т.е. выполняется закон смещения Вина.

5. В одномерном случае максимум функции (единственный) $\frac{dE_\omega}{d\omega}$ независимо от температуры расположен при $\omega = 0$, поэтому закон смещения Вина сформулирован быть не может.

6. Для трехмерного излучения

$$\Omega = F = KT\frac{V}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty \omega^2 \ln\left[1 - e^{-\hbar\omega/KT}\right] d\omega = -\frac{4}{3}\frac{6}{c} V T^4$$

$$\left(6 = \frac{\pi^2 K^4}{60\hbar^3 c^2}\right) \qquad E = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{(e^{\hbar\omega/KT}-1)} = \frac{4 6}{c} T^4 V$$

$$P=-\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T=\frac{4\sigma}{3c}T^4$$, то есть $PV=\frac{E}{3}$.

Для двумерного излучения

$$F=\Omega=kT\frac{L^2}{\pi c^2}\int_0^\infty \omega\,\ln\left[1-e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right]d\omega=-3{,}6\,\frac{(kT)^3\ell^2}{\pi\hbar^2c^2}$$

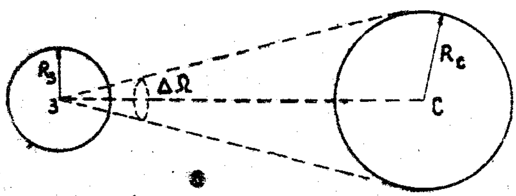
$$E=\frac{\ell^2\hbar}{\pi c^2}\int_0^\infty\frac{\omega^2\,d\omega}{(e^{\hbar\omega/kT}-1)}=-2F;\ P=\frac{E}{2V};\ PV=\frac{E}{2}$$

Для одномерного излучения

$$F=\Omega=kT\frac{\ell}{\pi c}\int_0^\infty \ln\left[1-e^{-\hbar\omega/kT}\right]d\omega=-\frac{(kT)^2\ell}{\pi\hbar c^2}\zeta(2)$$

$$E=\frac{\ell\hbar}{\pi c}\int_0^\infty\frac{\omega\,d\omega}{(e^{\hbar\omega/kT}-1)}=-F;\quad P=\frac{E}{V};\quad PV=E$$

7. В состоянии теплового равновесия поток излучения Земли (черного шара) U_1 равен потоку излучения Солнца U_2 , падающему на поверхность Земли в телесном угле $\Delta\Omega$ и поглощаемому ею.

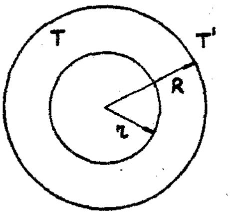


$$U_1=4\pi R_З^2\sigma T_З^4\ ;\quad U_2=\frac{\sigma T_c^4}{\pi}\Delta\Omega\,\pi R_З^2=\sigma\pi T_c^4\ \frac{R_З^2R_c^2}{R_{ЗС}^2}$$

Приравнивая U_1 и U_2 , получаем

$$T_З=4^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{R_c}{R_{ЗС}}\right)^{1/2}T_c\ \approx 280^\circ K$$

8. В состоянии теплового равновесия с излучением тела оболочка имеет температуру T' , которую можно оценить, приравнивая полные потоки



$$T' = \left(\frac{r}{R}\right)^{1/2} T \qquad (R \gg r)$$

Изменение внутренней энергии тела в единицу времени (скорость охлаждения) определяется разностью потока излучения тела U_1 и потока излучения оболочки U_2, поглощаемого телом

$$U_1 = 4\pi\sigma r^2 T^4 \qquad U_2 = 4\pi\sigma (T')^4 r^2$$

$$\frac{\partial E_{внутр}}{\partial t} = -U_1 + U_2 = -4\pi\sigma r^2 T^4 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Наличие оболочки уменьшает скорость охлаждения тела в $R^2/(R^2 - r^2)$ раз.

§ 7. СТАТИСТИКА ЭЛЕКТРОНОВ В МЕТАЛЛАХ И ПОЛУПРОВОДНИКАХ

1. $$\mu_0 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3}; \quad P_F = \sqrt{2m\mu_0}; \quad v_F = \frac{P_F}{m}$$

2. Вырожденный электронный газ в металле можно считать идеальным, если средняя кинетическая энергия электрона (по порядку величины равная химическому потенциалу $\bar{\mathcal{E}}_{кин.} \simeq \frac{\hbar^2}{m_e}\left(\frac{N_e}{V}\right)^{3/2}$) много больше потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром $U = \frac{Ze^2}{a}$, где $a \sim \left(\frac{ZV}{N_e}\right)^{1/3}$ – среднее расстояние между электроном и ядром. $\bar{\mathcal{E}}_{кин.} \gg U$, если $\frac{N_e}{V} \gg \left(\frac{e^2 m_e}{\hbar^2}\right)^3 Z^2$. В меди последнее неравенство не выполняется.

3. Симметричный тензор m^{-1}_{ik} в главных осях имеет три различных составляющих (m^{-1}_{xx}, m^{-1}_{yy} и m^{-1}_{zz}). Вводя новые переменные

$\mathcal{P}_x = \frac{m}{m_{xx}} P_x$; $\mathcal{P}_y = \frac{m}{m_{yy}} P_y$; $\mathcal{P}_z = \frac{m}{m_{zz}} P_z$ (m – масса свободного электрона), можно записать среднюю энергию в виде

$$E = \frac{8\pi V m_{xx} m_{yy} m_{zz}}{(2\pi\hbar m)^3} \int_0^{\mathcal{P}_0} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_g^2}{4} + \frac{\mathcal{E}_g}{2m}\mathcal{P}^2}\, \mathcal{P}^2 d\mathcal{P} =$$

$$= \frac{2\pi V m_{xx} m_{yy} m_{zz}\, \mathcal{E}_g (\mathcal{E}_g m)^{3/2}}{(2\pi\hbar m)^3 \sqrt{2}} \int_0^{x_0} \sqrt{1+x^2}\; x^2 dx$$

Полагая $\sqrt{1+x^2} = \mathrm{ch}\,\theta$, запишем E в виде

$$E = \frac{2\pi V m_{xx} m_{yy} m_{zz}\, \mathcal{E}_g (\mathcal{E}_g m)^{3/2}}{(2\pi\hbar m)^3 \sqrt{2}} \int_0^{\theta_0} \mathrm{ch}^2\theta\, \mathrm{sh}^2\theta\, d\theta =$$

$$= \left(\frac{\mathcal{E}_g}{2}\right)^{5/2} \frac{\pi V m_{xx} m_{yy} m_{zz}}{(\pi\hbar)^3 m^{3/2}} \left\{ \mathrm{sh}(4\theta_0) - 4\theta_0 \right\}$$

Граничный импульс Ферми $\mathcal{P}_0$ и θ_0 определяются из условия

$$N = \frac{8\pi V m_{xx} m_{yy} m_{zz}}{(2\pi\hbar)^3 m^3} \int \mathcal{P}^2 d\mathcal{P} =$$

$$= \frac{8\pi V m_{xx} m_{yy} m_{zz}}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{m\mathcal{E}_g}{2}\right)^{3/2} \int_0^{\theta_0} \mathrm{sh}^2\theta\, \mathrm{ch}\,\theta\, d\theta$$

$$\mathcal{P}_0 = \frac{2\pi\hbar m}{\sqrt[3]{m_{xx} m_{yy} m_{zz}}} \left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{1/3}$$

$$\mathrm{sh}\,\theta = \frac{2\pi\hbar m}{\sqrt[3]{m_{xx} m_{yy} m_{zz}}} \left(\frac{2}{m\mathcal{E}_g}\right)^{1/2} \left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{1/3}.$$

4. При $T=0$

$$F = E = \frac{3}{10}(3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} N$$

$$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{T=0} = \frac{1}{5}(2\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}$$

5. $$\overline{\mathcal{E}^2} = \int_0^{\mu} \mathcal{E}^2 g(\mathcal{E})\, d\mathcal{E} = \frac{3\,(3\pi^2)^{4/3}\hbar^4}{28\, m^2} \left(\frac{N}{V}\right)^{4/3}$$

$$\overline{\varepsilon} = \frac{3}{10}\left(3\pi^2\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

$$\overline{(\Delta\varepsilon)^2} = \overline{\varepsilon^2} - \overline{\varepsilon}^2 = -\frac{111}{140}\left(3\pi^2\right)^{4/3}\frac{\hbar^4}{m^2}\left(\frac{N}{V}\right)^{4/3}$$

6. Плотность состояний $g(\varepsilon) = \dfrac{8\pi V\varepsilon^2}{(2\pi\hbar)^3 v_0^3}$. Поэтому

$$E = \int_0^{\mu} \varepsilon g(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{3\hbar v_0}{4}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{1/3} N$$

7. Спиновая энергия электрона в магнитном поле равна $\pm\mu_Б H$ поэтому

$$\Omega = \frac{1}{2}\Omega_0(\mu + \mu_Б H) + \frac{1}{2}\Omega_0(\mu - \mu_Б H),$$

где $\Omega_0(\mu)$ - потенциал в отсутствие поля. При $\mu_Б H \ll \mu$ получим

$$\Omega = \Omega_0(\mu) + \frac{1}{2}\mu_Б^2 H^2 \frac{\partial^2\Omega_0(\mu)}{\partial\mu^2}$$

Откуда

$$\chi = -\frac{\mu_Б^2}{V}\frac{\partial^2\Omega_0}{\partial\mu^2} = \frac{\mu_Б^2}{V}\left(\frac{\partial N}{\partial\mu}\right)_{T,V}$$

Считая газ полностью вырожденным, получим

$$\chi = \frac{\mu_Б^2 (2m)^{3/2}\mu^{1/2}}{2\pi^2\hbar^3}$$

(для вычисления $\left(\frac{\partial N}{\partial\mu}\right)_{T,V}$ использовался ответ к задаче №I).

Химический потенциал определяется из условия:

$$N = \sum_{\vec{p},\sigma}\overline{n}_{\vec{p},\sigma} = \frac{4\pi V(2m)^{3/2}}{3(2\pi\hbar)^3}\left\{(\mu - \mu_Б H)^{3/2} + (\mu + \mu_Б H)^{3/2}\right\}$$

Учитывая, что $\mu \gg \mu_Б H$, получим

$$\mu = \mu_0 - \frac{1}{2}\frac{\mu_Б^2 H^2}{\mu_0},$$

где μ_0 - химический потенциал при $H=0$ (см. задачу № I).

8. Уровни энергии орбитального движения электрона

$$\varepsilon = p_z^2/2m + (2n+1)\mu_Б H$$

где $n = 0, 1, 2 \ldots$, p_z – импульс в направлении поля. Число состояний в интервале dp_z при заданном n есть $\frac{2VeH}{(2\pi\hbar)^3 c} dp_z$ (см. Ландау, Лифшиц "Квантовая механика"). Поэтому

$$\Omega = -KT \frac{mV\mu_Б H}{\pi^2 \hbar^3} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left\{1 + e^{\frac{\mu - p_z^2/2m - (2n+1)\mu_Б H}{KT}}\right\} dp_z$$

Сумму можно вычислить с помощью формулы суммирования Эйлера-Маклорена

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n + \tfrac{1}{2}) \approx \int_0^{\infty} F(x)\,dx + \frac{1}{24} F'(0)$$

условие применимости которой состоит в малости относительного изменения функции $F(x)$ на одном шаге $n \to n+1$. Последнее выполнимо при $\mu_Б H \ll KT$

Учитывая все это, получим

$$\Omega = 2\mu_Б H \int_0^{\infty} f(\mu - 2\mu_Б H_x)\,dx + \frac{\mu_Б H}{12} \left.\frac{\partial f(\mu - 2n\mu_Б H)}{\partial n}\right|_{n=0} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu} f(x)\,dx - \frac{(2\mu_Б H)^2}{24} \frac{\partial f(\mu)}{\partial \mu},$$

где

$$f(x) = -\frac{KTmV}{2\pi^2 \hbar^3} \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left\{\ln\left\{1 + \exp\left[\frac{x - p_z^2/2m}{KT}\right]\right\}\right\} dp_z$$

Первое слагаемое в выражении для Ω не содержит H, т.е. равен Ω_0. Таким образом

$$\Omega = \Omega_0(\mu) - \frac{1}{6} \mu_Б^2 H^2 \frac{\partial^2 \Omega_0(\mu)}{\partial \mu^2}$$

Отсюда восприимчивость χ равна одной трети восприимчивости из предыдущей задачи.

9. а) $N = \int_0^{\mu_0} g(\varepsilon)\,d\varepsilon = g\mu_0$. $\mu_0 = \frac{N}{g}$

б) Условие отсутствия вырождения: $e^{-\mu/KT} \gg 1$.

Поэтому

$$N = g\int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/KT}+1} \sim g\int_0^\infty e^{\frac{\mu-\varepsilon}{KT}} = g\,e^{\frac{\mu}{KT}}KT$$

Откуда $e^{\mu/KT} = \frac{N}{gKT}$, т.е. $N \ll gKT$

в) В случае сильного вырождения ($e^{\mu/KT} \gg 1$) имеем

$$E = \int_0^\infty \frac{g\varepsilon d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/KT}+1} = g\left\{\int_0^\mu \varepsilon d\varepsilon - \int_0^\mu \left[1 - \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/KT}+1}\right]\varepsilon d\varepsilon + \right.$$

$$\left. + \int_\mu^\infty \frac{\varepsilon d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/KT}+1}\right\} = g\left\{\frac{\mu^2}{2} + 2(KT)^2\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x+1}\right\}$$

$$E = \frac{g\mu^2}{2} + \frac{\pi^2 g}{6}(KT)^2$$

$$C_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \simeq \frac{\pi^2 g K^2 T}{3}$$

10. Число электронов в единице объема с импульсами в интервале dp, направленными под углом к нормали к стенке в интервале $d\theta$, есть

$$\frac{\bar{n}\,2\pi\sin\theta d\theta\,p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{\bar{n}(\varepsilon)\pi(2m)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}\,\sin\theta d\theta\, d\varepsilon}{(2\pi\hbar)^3}$$

Искомое число столкновений ν (отнесенное к 1 см^2 стенки) получается умножением на $v\cos\theta$ ($v = p/m$) и интегрированием по $d\theta$ от 0 до $\pi/2$ и по dp от 0 до p_0.

В результате имеем
$$\nu = \frac{3(3\pi^2)^{1/3}}{16}\frac{\hbar}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{4/3}$$

11. $E = \int_0^\infty \varepsilon\,\bar{n}(\varepsilon)\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon \qquad (g(\varepsilon) \sim \sqrt{\varepsilon})$

$$PV = -\Omega = \int_0^\infty g(\varepsilon)\ln\left(1+e^{(\mu-\varepsilon)/KT}\right)d\varepsilon =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^\infty \varepsilon\, g(\varepsilon)\,\bar{n}(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{2}{3}E$$

т.е. $PV = \frac{2}{3}E$

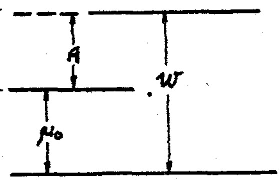
Изотермическая сжимаемость

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \frac{3V}{2}\left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T - \frac{E}{V}\right]^{-1} = -\frac{9V^2}{10E} = -\frac{3mV^{8/3}}{(3\pi)^{4/3}\hbar^2 N^{5/3}}$$

Здесь E полагалось равной энергии полностью вырожденного электронного газа.

Для натрия $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -2{,}6\cdot 10^{-8}\,\text{сек}^2\text{см}^4$

I2. W – потенциальная энергия электрона вне металла. $A = W - \mu_0$ – работа выхода с уровня Ферми. Количество электронов, вылетевших в единицу времени с единицы поверхности металла равно



$$N_t = \int\limits_{p_z > \sqrt{2mW}} dp_z \frac{p_z}{m} \int dp_x\, dp_y \frac{2}{\hbar^3\left(e^{(\varepsilon-\mu)/kT}+1\right)} =$$

$$= \frac{4\pi m kT}{(2\pi\hbar)^3} \int\limits_W^\infty d\varepsilon_z \ln\left(1 + e^{(\mu-\varepsilon_z)/kT}\right)$$

где $\varepsilon_z = \frac{p_z^2}{2m}$. Считая $\mu \sim \mu_0$ и $W - \mu_0 = A \gg kT$, получим путем разложения подинтегральной функции в ряд по малому параметру $e^{(\mu-\varepsilon_z)/kT}$

$$N_t = \frac{4\pi m (kT)^2}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\frac{A}{kT}} \; ; \quad J = eN_t$$

I3. В собственном полупроводнике концентрация дырок p равна концентрации электронов n . Используя для дырок и электронов известные законы дисперсии

$$\varepsilon_i = E_g + p^2/2m_e \quad \text{и} \quad \varepsilon_h = -p^2/2m_h$$

($\vec{p}$ – импульс квазичастицы, E_g – ширина запрещенной зоны) и считая электроны и дырки невырожденными, получим

$$n = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\int \bar{n}\, d^3p = 2e^{\frac{\mu - E_g}{KT}} \left(\frac{2\pi m_e KT}{(2\pi\hbar)^2}\right)^{3/2}$$

$$p = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\int \bar{n}\, d^3p = 2e^{-\frac{\mu}{KT}} \left(\frac{2\pi m_h KT}{(2\pi\hbar)^2}\right)^{3/2}$$

Приравнивая полученные выражения, найдем:

$$\mu = \frac{E_g}{2} + \frac{3}{4} KT \ln \frac{m_h}{m_e}$$

14. Число дырок в валентной зоне для невырожденного случая равно

$$p = 2\left(\frac{2\pi m_h KT}{(2\pi\hbar)^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{\mu}{KT}}.$$

Число электронов на акцепторных уровнях

$$n_a = \frac{N_a}{\frac{1}{2}e^{(E_a-\mu)/KT}+1}$$

Пренебрегая собственными носителями, запишем условие электронейтральности в виде

$$p = n_a$$

Отсюда

$$\mu = E_a - KT\ln\left\{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\frac{4N_a}{N_e}e^{E_g/KT}} - 1\right]\right\}.$$

где

$$N_e = 2\left(\frac{2\pi m_h KT}{(2\pi\hbar)^2}\right)^{3/2}$$

При низких температурах, когда $\frac{4N_a}{N_e}e^{\frac{E_a}{KT}} \gg 1$, имеем

$$\mu = \frac{E_a}{2} - \frac{KT}{2}\ln\frac{N_a}{N_e}$$

$$p = N_a\left(\frac{N_e}{N_a}\right)^{1/2} e^{-E_a/2KT}$$

При высоких температурах $\left(\frac{4N_a}{N_e}e^{E_a/KT}\right) \ll 1$

$$p = N_a; \quad \mu = -KT\ln\frac{N_a}{N_e}$$

15. Решение аналогично предыдущему.

16. В случае, когда вырождение в зонах отсутствует и проводимость в основном примесная, n и p могут быть получены из уравнения $np = n_i^2$, где

$$n_i^2 = 4\left(\frac{2\pi KT}{(2\pi\hbar)^2}\right)^3 (m_e m_h)^{3/2} e^{-E_g/KT}$$

и условия электронейтральности $n + N_a = p + N_d$

$$p = \sqrt{\frac{(N_d - N_a)^2}{4} + n_i^2} - \frac{N_d - N_a}{2}$$

$$n = \sqrt{\frac{(N_d - N_a)^2}{4} + n_i^2} + \frac{N_d - N_a}{2} .$$

§ 8. ФЛУКТУАЦИИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН. МАКСИМАЛЬНАЯ РАБОТА.

1. $\overline{\Delta T \Delta P} = \frac{KT^2}{C_V}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$; $\overline{\Delta V \Delta P} = -KT$;

$\overline{\Delta S \Delta V} = T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$; $\overline{\Delta S \Delta T} = KT$

2. При постоянном N найдем $\Delta \frac{V}{N} = \frac{\Delta V}{N}$. Отсюда

$$\overline{\left(\Delta\left(\frac{V}{N}\right)\right)^2} = \frac{1}{N^2}\overline{(\Delta V)^2} = -\frac{KT}{N^2}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

Из уравнения состояния $PV = NKT$ получим $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{V^2}{NKT}$

Следовательно $\overline{\left(\Delta \frac{V}{N}\right)^2} = \frac{V^2}{N^3}$

3. При постоянном N и флуктуирующем V запишем

$\Delta\left(\frac{N}{V}\right) = -\frac{N}{V^2}\Delta V$. Следовательно

$$\overline{\left(\Delta\left(\frac{N}{V}\right)\right)^2} = \frac{N^2}{V^4}\overline{(\Delta V)^2} = \frac{N}{V^2}$$

Если, напротив, считать флуктуирующим N, а V постоянным, то $\overline{\left(\Delta\left(\frac{N}{V}\right)\right)^2} = \overline{(\Delta N)^2}/V^2$. Отсюда $\overline{(\Delta N)^2} = N$, что можно получить и прямым усреднением.

4. Предел чувствительности определяется среднеквадратичным отклонением показаний прибора за счет теплового движения. Для изменения длины пружины на ΔX затрачивается минимальная работа $R_{min} = \frac{\gamma}{2}(\Delta X)^2$, поэтому вероятность такого отклонения

$$w(\Delta X) = C \exp\left\{-\frac{\gamma(\Delta X)^2}{2KT}\right\}$$

Поэтому $\overline{(\Delta X)^2} = \frac{KT}{\gamma}$. Соответствующая ошибка измерения силы:

$\Delta f = \gamma\sqrt{\overline{(\Delta X)^2}} = \sqrt{\gamma KT}$

5. $\Delta T = T\left(\frac{3}{2}N\right)^{-1/2}$

6. $R_{min} = V c_v T \ln\left(1 + \frac{T_2 - T_1}{T_1}\right)$

$$w \sim e^{-\frac{R_{min}}{KT_1}}$$

7. $R'_{max} = 3NKT_0\left[1 - \left(\frac{4V_1V_2}{(V_1+V_2)^2}\right)^{1/3}\right]$

8. $R_{max} = \frac{3}{2}NK\left\{T_1 + T_2 - 2^{5/3}\sqrt{T_1T_2}\left[\frac{T_1T_2}{(T_1+T_2)^2}\right]^{1/3}\right\}$

9. $R_{min} = NKT_0\left[\ln\frac{P_2}{P_1} + P_0\left(\frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1}\right)\right]$

где P_0 - давление среды.

10. $R_{max} = \frac{3}{2}NK(T - T_0) + \frac{3}{2}NKT\ln\frac{T_0}{T}$

§ 9. НЕРАВНОВЕСНЫЕ СИСТЕМЫ

1. Кинетическое уравнение в отсутствие соударений и внешнего воздействия имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\vec{P}}{m}\frac{\partial \rho}{\partial \vec{r}} = 0$$

При $t=0$ функция распределения отлична от нуля только для области $|\vec{r}| \leq R$

$$\rho(\vec{r},\vec{p},0) = (2\pi mkT)^{-3/2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^{-1} e^{-p^2/2mkT}$$

Поэтому решением будет функция

$$\rho(\vec{r},\vec{p},t) = \begin{cases} (2\pi mkT)^{-3/2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^{-1}\exp\left\{-\frac{p^2}{2mkT}\right\}, & \left|\vec{r}-\frac{\vec{p}}{m}t\right| \leq R \\ 0, & \left|\vec{r}-\frac{\vec{p}}{m}t\right| > R \end{cases}$$

Плотность числа частиц

$$n(\vec{r},t) = N\int\rho(\vec{r},\vec{p},t)d^3p = \frac{N}{(2\pi mkT)^{3/2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^{-1}}\int\limits_{\left|\vec{p}-\frac{\vec{r}m}{t}\right|\leq R} e^{-\frac{p^2}{2mkT}}d^3p$$

В частности, при больших t получим

$$n(\vec{r},t) = \frac{N}{(2\pi mkT)^{3/2}}\left(\frac{m}{t}\right)^3 e^{-\frac{m}{2kT}\frac{\vec{r}^2}{t^2}}$$

2. Газ однороден лишь в направлении вертикали (ось z). Поэтому в стационарном случае и без соударений

$$v_z\frac{\partial\rho}{\partial z} + mg\frac{\partial\rho}{\partial p_z} = 0$$

Ищем решение в виде $\rho = U(z)\,e^{-\frac{p^2}{2mkT}}$. Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{mgU}{2kT} = 0, \quad \text{откуда} \quad U(z) = U(0)\,e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

3. Отклонение функции распределения от равновесной в начальный момент времени отлично от нуля только в области $|\vec{r}| \leq R$

$$\varphi(\vec{r},\vec{p},0) = \rho(\vec{r},\vec{p},0) - \rho_0(\vec{r},\vec{p},0) =$$

$$= \frac{\Delta T\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^{-1}}{T(2\pi mkT)^{3/2}}\left(\frac{\vec{p}^2}{2mkT} - \frac{3}{2}\right)e^{-\frac{\vec{p}^2}{2mkT}}$$

Решение кинетического уравнения имеет вид

$$\varphi(\vec{r},\vec{p},t)=\begin{cases}\varphi(\vec{r},\vec{p},0)\,e^{-t/\tau} & \text{при } \left|\vec{r}-\frac{\vec{p}}{m}t\right|\le R\\ 0 & \text{при } \left|\vec{r}-\frac{\vec{p}}{m}t\right|>R\end{cases}$$

4. Считая поле $\vec{E}$ направленным по оси X, запишем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{e}{m}\vec{E}(t)\frac{\partial\varphi_0}{\partial v_x}=-\frac{\varphi}{\tau}$$

Умножая это уравнение на v_x и интегрируя по d^3v, найдем уравнение для плотности тока

$$\frac{\partial j_x}{\partial t}+\frac{e^2N}{m}E(t)\int v_x\frac{\partial\varphi_0}{\partial v_x}d^3v=-\frac{j_x}{\tau}$$

где $j_x=eN\int v_x\varphi(\vec{r},\vec{v},t)\,d^3v$, N – плотность числа зарядов.

Интеграл во втором слагаемом вычисляется по частям и равен единице в силу нормировки. Далее, поскольку $E(t)=E_0e^{i\omega t}$, следует искать решение в виде $j_x=j_\omega e^{i\omega t}$. Это дает

$$j_\omega=\frac{Ne^2E_0}{m(i\omega+1/\tau)}$$

Индукция $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}=\vec{E}+4\pi\vec{P}$. С другой стороны, $\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}=\vec{j}$ или для спектральных компонент $i\omega P_\omega=j_\omega$. Следовательно,

$$\varepsilon(\omega)=1-\frac{4\pi e^2N}{m(\omega^2-i\omega/\tau)}$$

5. Действуя так же, как в предыдущей задаче, получим при $\tau\to\infty$

$$\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}+\frac{e^2N}{m}\vec{E}(t)=0$$

Применяя к этому уравнению операцию div и учитывая, что $div\vec{E}=4\pi en$ и $div\vec{j}=e\frac{\partial n}{\partial t}$, где $n=N\int\varphi\,d^3v$ – отклонение числа электронов от равновесного значения, найдем

$$\frac{\partial^2n}{\partial t^2}+\frac{4\pi e^2N}{m}n=0$$

Отсюда видно, что плотность заряда осциллирует с частотой $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}}$. Если учесть конечность τ, то в правой части последнего уравнения появится $-\frac{1}{\tau}\frac{\partial n}{\partial t}$, что приведет к затуханию колебаний с декрементом $\frac{1}{\tau}$.

6. Кинетическое уравнение в линейном приближении по $\vec{E}$ имеет вид

$$e\vec{E}\frac{\partial f_0}{\partial \vec{p}} + \frac{e}{c}[\vec{v}\vec{H}]\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{p}} = -\frac{\varphi}{\tau}$$

Отметим, что в линейном приближении влияние магнитного поля отсутствует, поэтому оставлено второе слагаемое в левой части уравнения.

Решение имеет вид

$$\varphi = -\frac{e\tau\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\vec{v}}{1+\Omega^2\tau}\left(\vec{E} + \frac{e\tau}{mc}[\vec{E}\vec{H}]\right)$$

где $\Omega = \frac{eH}{mc}$ - частота вращения электрона в магнитном поле. Вычисление тока и тензора проводимости при $\Omega\tau \ll 1$ (слабое магнитное поле) и $\Omega\tau \gg 1$ (сильное магнитное поле) предоставляем для самостоятельной работы.

7. Линеаризованное по электрическому полю кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} + \frac{e}{m}\vec{E}\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = -\frac{\varphi}{\tau}$$

Пусть $\vec{E} \parallel 0z$ и имеет вид плоской волны, распространяющейся вдоль оси X. Тогда ищем решение в виде

$$\varphi(\vec{r},\vec{v},t) = \varphi_{\omega,q}(\vec{v})\, e^{i(\omega t - qx)}$$

Из кинетического уравнения следует

$$\varphi_{\omega,q}(\vec{v}) = \frac{eE_0}{m}\cdot\frac{\frac{\partial f}{\partial v_z}}{i(\omega - q v_x) + 1/\tau}$$

Спектральная амплитуда плотности тока

$$j_{\omega q} = -\frac{e^2 N E_0}{m}\int \frac{v_z \frac{\partial \rho_0}{\partial v_x} d^3 v}{i(\omega - q v_x) + \tau^{-1}}$$

При выполнении неравенств $q v_F \ll \omega$ и $q\sqrt{\frac{KT}{m}} \ll \omega$ можно вести разложение подинтегральной функции в ряд по малому параметру $\frac{q v_x}{\omega}$. В частности, для невырожденного случая, пренебрегая столкновениями, получим в первом неисчезающем по q приближении

$$j_{\omega q} = \frac{e^2 N}{i m \omega} E_0 \left(1 + \frac{2KT}{m\omega^2} q^2\right)$$

Действуя так же, как и в задаче 4 данного параграфа, найдем

$$\mathcal{E}(\omega, q) = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}\left(1 + \frac{2KT}{m\omega^2} q^2\right)$$

8. *Ищем решение с самосогласованным полем в виде продольной* волны $\varphi(\vec{r}, \vec{v}, t) = \varphi_{\omega,q}(\vec{v}) e^{i(\omega t - qx)}$; $E_x = E_0 e^{i(\omega t - qx)}$

Тогда пренебрегая столкновениями

$$\varphi_{\omega,q} + \frac{e E_0}{i m(\omega - q v_x)} \frac{\partial \rho_0}{\partial v_x} = 0$$

Проинтегрировав это уравнение по скоростям и исключив электрическое поле посредством $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi e n$ или $-iqE_0 = 4\pi e n_{\omega,q}$, найдем

$$n_{\omega,q}\left(1 + \frac{4\pi e^2 N}{q}\int \frac{\frac{\partial \rho_0}{\partial v_x} d^3 v}{\omega - q v_x}\right) = 0$$

Для того, чтобы существовало решение $n_{\omega,q} \neq 0$, необходимо приравнять нулю выражение в скобках. Пользуясь малостью параметра $\frac{q v_x}{\omega}$, как и в предыдущей задаче, получим в невырожденном случае $\omega^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m} + \frac{9KT}{m} q^2$

9. Дисперсионное уравнение для электромагнитных волн следует из уравнений Максвелла

$$\left[\frac{\omega^2}{c^2q^2}\left(\delta_{ik} - \frac{4\pi i \sigma_{ik}}{\omega}\right) - \delta_{ik} + \frac{q_i q_k}{q^2}\right] E_k = 0$$

$$\det\left|\frac{\omega^2}{c^2q^2}\left(\delta_{ik} - \frac{4\pi i \sigma_{ik}}{\omega}\right) - \delta_{ik} + \frac{q_i q_k}{q^2}\right| = 0$$

Введем $\varepsilon_{ik}(\vec{q},\omega) = \delta_{ik} - \frac{4\pi i \sigma_{ik}}{\omega}$. Для изотропной среды $\varepsilon_{ik} = \varepsilon\delta_{ik}$, где $\varepsilon(\vec{q},\omega)$ определено в задаче № 7 данного параграфа.

Пусть $\vec{q} \parallel Oz$, тогда записанный выше определитель имеет вид

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2q^2}\varepsilon(\vec{q},\omega) - 1\right)^2 \cdot \varepsilon(\vec{q},\omega) = 0$$

Если $\varepsilon(\vec{q},\omega) = 0$, то мы получаем продольные колебания, рассмотренные в предыдущей задаче. Поперечные волны, как следует из уравнений Максвелла, существуют при условии

$$\frac{\omega^2}{c^2q^2}\varepsilon(\vec{q},\omega) - 1 = 0$$

Пользуясь результатами задачи № 7 данного параграфа, найдем

$$\omega^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m} + c^2q^2$$

10. Линеаризуя кинетическое уравнение по электрическому полю ($\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - qz)}$, $\vec{E}_0 \perp \vec{q}$ и $\vec{H} \parallel Oz$, $\vec{H}$ - внешнее постоянное однородное магнитное поле) и пренебрегая столкновениями, найдем

$$i(\omega - qv_z)\varphi_{q,\omega}(\vec{v}) + \frac{e}{mc}[\vec{v}\vec{H}]\frac{\partial\varphi_{q\omega}(\vec{v})}{\partial\vec{v}} + \frac{e\vec{E}_0}{m}\frac{\partial f_0}{\partial\vec{v}} = 0$$

Решение этого уравнения выглядит так же, как решение задачи №6 данного параграфа. Следует лишь произвести замену $\tau \to [i(\omega - qv_z)]^{-1}$

Вычисляя по найденной $\varphi_{q,\omega}(\vec{v})$ ток, получим

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = -\frac{eNc}{H}, \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} \ll \sigma_{xy}$$

При вычислении проводимости мы пользовались неравенствами

$$\omega - q v_z \ll \frac{eH}{mc}$$

Подставим полученный тензор σ_{ik} в дисперсионное уравнение (см. задачу № 9). Тогда для поперечных волн

$$1 - \left[\frac{4\pi eNc\omega}{Hc^2q^2}\right]^2 = 0$$

Отметим, что мы пренебрегаем членами, содержащими σ_{xx} и σ_{yy}, и отбросили также ω^2/c^2q^2, поскольку ищется решение $\omega \sim q^2$.

Из последнего уравнения

$$\omega = \frac{cHq^2}{4\pi eN}.$$

Из уравнений Максвелла находим, что поляризация геликона круговая с вращением вектора $\vec{E}$ вместе с вращением электронов в магнитном поле.

II. Наличие дырок уменьшает σ_{xx}, так как дырки дрейфуют вместе с электронами в направлении $[\vec{E}\vec{H}]$ и создают, следовательно, ток, противоположный току электронов. При равном количестве электронов и дырок $\sigma_{xy} = 0$, а

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{iNc^2\omega}{H^2}\left(m_e^* + m_h^*\right)$$

где $N = n_e = n_h$

Пренебрегая током смещения, получим $\omega = \dfrac{H}{\sqrt{4\pi N(m_e^* + m_h^*)}}q$.

Если $n_e \neq n_h$, то появляется геликон и еще одно решение, пропорциональное $|n_e - n_h|$ и имеющее конечную частоту при $q \to 0$.

12. Линеаризованное по электрическому полю уравнение для матрицы плотности имеет вид ($\rho = \rho_0 + \rho_1$)

$$i\hbar\frac{\partial\rho_1}{\partial t} = [H_0 + V, \rho_1] + [H_F, \rho_0]$$

где $H_F = -e\vec{E}\vec{r}$ описывает взаимодействие электронов с внешним электрическим полем, V - рассеивающая часть гамильтониана

$$H_0 = \frac{p^2}{2m}$$

Решением записанного уравнения будет

$$\rho_1 = \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t} e^{\frac{i(H_0+V)(t-t')}{\hbar}}[H_F, \rho_0]\, e^{\frac{i(H_0+V)(t-t')}{\hbar}} dt'$$

Плотность тока

$$\vec{j} = e\,Sp(\vec{v}\rho_1) = \frac{e}{m}Sp(\vec{p}\rho_1) =$$

$$= \frac{e}{i}\int_{-\infty}^{t} Sp\left\{\vec{p}(t-t')[H_F, \rho_0]\right\} dt'$$

где $\vec{p}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(H_0+V)t}\,\vec{p}\,e^{-\frac{i}{\hbar}(H_0+V)t}$

Используя приближение вязкого трения, указанное в условии, и считая, что $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$, без труда получим

$$\vec{j}(t) = \frac{e^2 N\tau}{m(i\omega\tau + 1)}\vec{E}(t)$$

13. Пусть $\vec{E} \parallel OX$ и $\vec{H} \parallel OZ$. Гамильтониан электрона

$$H = \frac{\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2}{2m} - eEx + V$$

где V - потенциал хаотически расположенных центров рассеяния. Векторный потенциал можно выбрать в калибровке Ландау $\vec{A} = (0, Hx, 0)$. В сильном магнитном поле, когда электрон успеет много раз обернуться вокруг линий $\vec{H}$, прежде чем столкнуться, можно рассматривать V как возмущение.

Собственные значения и собственные функции оператора

$$H_1 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{\left(p_y - \frac{e}{c}Hx\right)^2}{2m} - eEx + \frac{p_z^2}{2m}$$

имеют вид

$$E_{n,p_y,p_z} = \hbar\Omega\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{p_z^2}{2m} + c\frac{E}{H}p_y$$

$$\Psi = exp\left\{\frac{i}{\hbar}(p_y y + p_z z)\right\} f_n(x - x_0)$$

где $f_n(x)$ - собственная функция осциллятора,

$$x_0 = \frac{\hbar c}{eH}p_y - \frac{eE}{m\Omega^2} \qquad \Omega = \frac{eH}{mc}$$

Отметим, что скорость электрона в направлении оси y помимо колебательной имеет и постоянную составляющую $c\frac{E}{H}$. Поэтому при усреднении $\langle v_y \rangle = Sp(v_y \rho)$ найдем

$$j_y = \frac{encE}{H}$$

Ток j_x появляется в результате рассеяния, что связано с изменением координаты x_0 - центра осцилляций при столкновениях. Рассеивающий потенциал V можно учитывать по теории возмущений при $j_x \ll j_y$. Соответственно матрицу плотности следует искать в виде ряда $\rho = \rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \ldots$,

где индексы указывают степень разложения по V. Далее, для вычисления необходимо отыскать ρ_2, т.к. при хаотическом расположении центров рассеяния ρ_1 не дает вклада в ток. Поэтому из уравнения для матрицы плотности следует

$$i\hbar\delta(\rho_1)_{\mu\nu} = (E_\mu - E_\nu)(\rho_1)_{\mu\nu} + V_{\mu\nu}(f_\nu - f_\mu)$$

$$i\hbar\delta(\rho_2)_{\mu\nu} = (E_\mu - E_\nu)(\rho_2)_{\mu\nu} + \sum_{\nu'}\left\{V_{\mu\nu'}(\rho_1)_{\nu'\nu} - \rho_{\mu\nu'}V_{\nu'\nu}\right\}$$

где индексы μ и ν означают различные наборы из квантовых чисел n, p_y, p_z, S ; $V_{\mu\nu}$, $\rho_{\mu\nu}$ -матричные элементы соответствующих операторов по собственным функциям оператора H, $f_\mu \delta_{\mu\nu} = (\rho_0)_{\mu\nu}$, а производная по времени $i\hbar \frac{\partial \rho_{1,2}}{\partial t} = i\hbar\delta\rho_{1,2}$, что соответствует адиабатическому включению возмущения.

Из приведенных уравнений находятся ρ_1 и ρ_2 . Соответствующие вычисления проведены Адамсом и Хольстейном (см. E.N.Adams, T. Holstein, J. Phys. Chem. Solids ,10,254,1959, см. также перевод в сборнике "Вопросы квантовой теории необратимых процессов" И.Л., 1961)

14. Решение уравнения $i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} = [H,\rho]$,

где $H = \frac{p^2}{2m} + V - e\vec{E}\vec{r}$, будем искать в приближенном виде $\rho = \rho^{(0)} + \rho^{(1)}$, $\rho^{(0)}$ - равновесная матрица плотности, $\rho^{(1)}$ - линейная по электрическому полю добавка. Тогда

$$i\hbar\delta\rho^{(1)}_{\vec{K}\vec{K}'} = \left(E^{(0)}_{\vec{K}} - E^{(0)}_{\vec{K}'}\right)\rho^{(1)}_{\vec{K}\vec{K}'} - e\vec{E}\left[\vec{r}, \rho^{(0)}\right]_{\vec{K}\vec{K}'} +$$

$$+ \sum_{\vec{K}''}\left(V_{\vec{K}\vec{K}''}\rho^{(1)}_{\vec{K}''\vec{K}'} - \rho^{(1)}_{\vec{K}\vec{K}''}V_{\vec{K}''\vec{K}'}\right),$$

где $E^{(0)}_{\vec{K}} = \frac{\hbar^2 K^2}{2m}$, матричные элементы вычислены относительно базиса $|\vec{K}\rangle = e^{i\vec{K}\vec{r}}$.

Коммутатор $\left[\vec{r}, \rho^{(0)}\right]$ имеет только диагональные матричные элементы $\left[\vec{r}, \rho^{(0)}\right]_{\vec{K}\vec{K}'} = -i\frac{\partial f_{\vec{K}}}{\partial \vec{K}}\delta_{\vec{K}\vec{K}'}$

где $f_{\vec{K}}\delta_{\vec{K}\vec{K}'} = \rho^{(0)}_{\vec{K}\vec{K}'}$, $f_{\vec{K}}$ - равновесная функция распределения.

Для $\vec{K} = \vec{K}'$ имеем

$$i\hbar\delta\rho^{(1)}_{\vec{K}\vec{K}} = ie\vec{E}\frac{\partial f_{\vec{K}}}{\partial\vec{K}} + \sum_{\vec{K}''}\left(V_{\vec{K}\vec{K}''}\rho^{(1)}_{\vec{K}''\vec{K}} - \rho^{(1)}_{\vec{K}\vec{K}''}V_{\vec{K}''\vec{K}}\right) \quad (*)$$

Если $\vec{K} \neq \vec{K}'$, то

$$(E_{\vec{K}} - E_{\vec{K}'} - i\hbar\delta)\rho^{(1)}_{\vec{K}\vec{K}'} = V_{\vec{K}\vec{K}'}\left(\rho^{(0)}_{\vec{K}\vec{K}} - \rho^{(0)}_{\vec{K}'\vec{K}'}\right) +$$

$$+ \sum_{\vec{K}''}{}' \left(\rho^{(1)}_{\vec{K}\vec{K}''} V_{\vec{K}''\vec{K}'} - V_{\vec{K}\vec{K}''}\rho^{(1)}_{\vec{K}''\vec{K}'}\right),$$

где $E_{\vec{K}} = \dfrac{\hbar^2 K^2}{2m} + V_{\vec{K}\vec{K}}$, штрих у суммы означает, что $\vec{K}'' \neq \vec{K}, \vec{K}'$. Далее будем считать, что диагональные элементы матрицы плотности $\rho^{(1)}_{\vec{K}\vec{K}}$ (ниже будем полагать $\rho^{(1)}_{\vec{K}\vec{K}} = \varphi_{\vec{K}}$ по сравнению с недиагональными $\rho_{\vec{K}\vec{K}'}$ имеют низшую степень в разложении по рассеивающему потенциалу V. Тогда в последнем уравнении сумма имеет на единицу большую степень по V, чем остальные члены. Следовательно

$$\rho^{(1)}_{\vec{K}\vec{K}'} = \frac{V_{\vec{K}\vec{K}'}(\varphi_{\vec{K}} - \varphi_{\vec{K}'})}{E_{\vec{K}} - E_{\vec{K}'} - i\hbar\delta}$$

Подставляя $\rho^{(1)}_{\vec{K}\vec{K}'}$ в уравнение (*), устремляя $\delta \to 0$ и пользуясь соотношением

$$\frac{1}{x - i\delta} = P\left(\frac{1}{x}\right) + i\pi\delta(x),$$

получим кинетическое уравнение с интегралом столкновений

$$e\vec{E}\frac{\partial f_{\vec{K}}}{\partial \vec{K}} + 2\pi\sum_{\vec{K}'}|V_{\vec{K}\vec{K}'}|^2(\varphi_{\vec{K}'} - \varphi_{\vec{K}})\delta(E_{\vec{K}} - E_{\vec{K}'}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кубо Р. Статистическая механика. М., Мир, 1967.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Статистическая физика, М., Наука, 1976.
3. Задачи по термодинамике и статистической физике. Под ред. П.Ландсберга. М., Мир, 1974.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Владимир Павлович Морозов, Анатолий Степанович Гаревский,
Нина Георгиевна Голубева, Михаил Яковлевич Широбоков,
Владимир Михайлович Соколов, Владимир Викторович Митюгов

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Учебное пособие

Редактор

Подп. к печ. I2/II-80г. Фор.бум. 60x90/I6. Бумага тип. №I.
Печать офсетная. Уч.-изд. 3,0 л. Усл.-печ. 4,4л. Заказ № 39.
Тираж 500 экз. Цена I5 коп. План I980 года.Позиция № 264.
Лаборатория множит. тех-ки ГГУ. Горький,пр. Гагарина - 23.