

МИНИСТЕРСТВО ОБОРОНЫ СССР

# ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОРАДИОЦЕПЕЙ



МИНИСТЕРСТВО ОБОРОНЫ СССР  
ВОЙСКА ПРОТИВОВОЗДУШНОЙ ОБОРОНЫ СТРАНЫ

Р. П. КАРТАШОВ, А. П. МЕДВЕДЕВ

# ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОРАДИОЦЕПЕЙ

Под редакцией члена-корреспондента АП БССР  
А. М. Широкова

*Утвержден первым заместителем  
главнокомандующего Войсками ПВО страны  
в качестве учебника для вузов ПВО*

Ордена Трудового Красного Знамени  
ВОЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МИНИСТЕРСТВА ОБОРОНЫ СССР  
МОСКВА – 1980

## ВВЕДЕНИЕ

Подобно тому, как основные законы, методы исследования и обобщения в области электротехники стали предметом специального теоретического курса «Теоретические основы электротехники» (ТОЭ), в области радиотехники сложился теоретический курс «Теоретические основы радиотехники» (ТОР). Дальнейшее развитие и дифференциация радиоэлектроники привели к выделению из этих курсов отдельных теоретических дисциплин «Теория электрорадиоцепей» (ТЭРЦ), «Теория электромагнитного поля» (ТЭМП) и др.

Курс ТЭРЦ представляет обобщение основных разделов теоретических основ электро- и радиотехники, относящихся к методам анализа и синтеза различных электро- и радиотехнических цепей. Теория электрорадиоцепей определяет методологическую основу двух обширных областей науки и техники: электротехники и радиотехники. Курс ТЭРЦ содержит общую теорию сигналов, цепей и инженерные методы их расчета, анализа и, синтеза. Он основывается на дисциплинах физики и высшей математики.

Главные задачи, решаемые в теории электрорадиоцепей, могут быть подразделены на две группы: анализ и синтез. Задачей анализа является исследование процессов, протекающих в цепи с заданной структурой при известных параметрах ее элементов. Задача синтеза заключается, наоборот, в отыскании структуры цепи и параметров ее элементов, при которых процессы в ней будут подчиняться заданным закономерностям. Синтез является значительно более сложной задачей, чем анализ.

Курс ТЭРЦ является фундаментальной дисциплиной для специалистов радиотехнического профиля. На нем основываются такие дисциплины, как «Основы радиолокации», «Радиопередающие и радиоприемные устройства», «Основы импульсной техники», «Основы автоматики» и др. Совместно с ними курс ТЭРЦ обеспечивает обучение курсантов и слушателей умелому и эффективному использованию и совершенствованию радиоэлектронных средств ПВО. Обучение по дисциплине ТЭРЦ направлено на овладение инженерными методами расчета, анализа и синтеза самых

различных электро- и радиотехнических, а также радиоэлектронных схем и систем.

Большой вклад в развитие теоретических основ электро- и радиотехники внесен многими русскими и советскими учеными. Первые труды в области электричества в России принадлежат гениальному русскому ученому М. В. Ломоносову. В развитие радиотехники выдающийся вклад сделал замечательный русский ученый, изобретатель радио А. С. Попов — преподаватель электротехники в Минном офицерском классе в Кронштадте.

Трудно переоценить вклад в развитие радиотехники в Советской России, сделанный сотрудниками Нижегородской радиолаборатории во главе с известным ученым профессором М. А. Бонч-Бруевичем. Эта лаборатория, ставшая первым нашим научно-исследовательским институтом в области радио, была организована в 1918 г. по инициативе В. И. Ленина.

К фундаментальным работам в области электро- и радиотехники, оказавшим существенное влияние на их развитие, относятся труды советских ученых, в том числе академиков Ю. Б. Кобзарева, В. А. Котельникова, В. Ф. Миткевича, Л. И. Мандельштама, Н. Д. Папалекси, членов-корреспондентов АН СССР К. А. Круга, В. И. Сифорова и др.

Значительный вклад внесли советские ученые и в развитие теоретических основ электро- и радиотехники, а вместе с этим и теории электрорадиоцепей как фундаментальных дисциплин высшей школы.

Составной частью курса ТЭРЦ является общая теория цепей. Три последних десятилетия свидетельствуют, что классическая теория цепей стала областью науки, приложение которой все дальше расширяется, отходя от ее первоначальных задач — анализа и синтеза электрорадиоцепей. Успехи радиоэлектроники, микроэлектроники и вычислительной техники сводят в настоящее время классическую теорию цепей к положению специализированного раздела более общей теории — теории систем, которая изучает все типы систем, а не только электро- и радиотехнические системы. Это вполне закономерно, так как теория цепей и теория систем различного типа имеют общую математическую основу.

Множество явлений и объектов в окружающей нас действительности могут быть представлены в виде систем. В широком смысле система — это совокупность взаимодействующих элементов произвольной природы. Обычно на систему действуют внешние воздействия или возмущения, называемые входными сигналами. В качестве реакции, т. е. отклика на это действие, система выполняет некоторые функции, появляются выходные сигналы.

Первым важным шагом в анализе системы является ее представление с помощью математической модели, математических выражений. Однако математические модели представляют физическую реальность в некоторой упрощенной, идеализированной форме. Такая идеализация, упрощение, является одной из харак-

терных черт научного метода, заключающегося в обобщении большого числа сложных фактов, явлений и приведении в соответствие им простой, понятной теории, математических соотношений. Это делает понятными многие наблюдаемые явления.

Методы теории цепей основаны на представлении системы эквивалентной цепью, состоящей из идеализированных элементов, параметры которых выражают параметры реальной системы. Такая цепь, представленная совокупностью идеализированных элементов, является идеализированной моделью реального устройства. Эквивалентная электрическая цепь может рассматриваться как одна из форм представления системы дифференциальных уравнений, описывающих реальную физическую систему. Эти уравнения, в свою очередь, могут быть легко найдены при рассмотрении и анализе эквивалентной цепи. Причем основные методы и правила нахождения этих уравнений оказываются полностью не зависимыми от типа физической системы, которая представляется цепью, будь то электрическая, механическая, акустическая или другая система. Решение уравнений цепи выражает реакцию или отклик анализируемой системы на входные воздействия при заданных начальных условиях.

Таким образом, методы теории цепей включают:

составление эквивалентной идеализированной цепи, соответствующей реальной системе или устройству;

составление, запись и решение уравнений цепи;

приведение полученных результатов в соответствие с анализируемой реальной системой.

В основе всего курса теории цепей лежит диалектический метод—единственный научный метод познания. «От живого созерцания,— говорит В. И. Ленин,— к абстрактному мышлению и от него к практике — таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности» (Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 152—153).

Теория цепей строится на основе физических законов и математических методов путем определения идеальных элементов цепи и установления основных аксиом. Аксиомами являются законы Кирхгофа, а идеализированные элементы достаточно разнообразны, чтобы обеспечить моделирование большинства реальных устройств.

Известно, что законы сохранения, т. е. постоянства какой-то величины, заняли главенствующее положение среди законов природы. Законы Кирхгофа по своей сути являются законами сохранения. Поэтому методы теории цепей, основанные на этих законах, можно применять для решения широкого по своему разнообразию круга системных задач.

Теория электрорадиоцепей — пример в значительной мере математизированной дисциплины, что является ее сильной стороной. Математические методы — важный инструмент теории цепей. Математизация технических наук позволяет глубже раскрыть процессы объективно существующей реальности. По словам Лео-

народа да Винчи, никакой достоверности нет в науках там, где нельзя приложить ни одной из математических наук, и в том, что не имеет связи с математикой. При этом, конечно, исключительно важное значение имеет указание В. И. Ленина о том, что любое математическое уравнение, описывающее то или иное явление, следует связать с реально существующим объектом, с объективной реальностью.

Познакомившись с методами теории цепей с наиболее общей точки зрения, перейдем к изучению на их основе методов анализа и синтеза электрорадиоцепей, являющихся одной из разновидностей систем. С помощью этих методов изучим особенности процессов, протекающих в электрорадиоцепях при действии различных сигналов и возмущений, познакомимся с характеристиками сигналов и особенностями их прохождения через различные цепи.

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

## 1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ХАРАКТЕРИСТИКИ И КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ И ЭЛЕМЕНТОВ ЦЕПИ

Электрической цепью называется совокупность устройств и объектов, образующих путь для электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий об электродвижущей силе (э.д.с.), токе и напряжении.

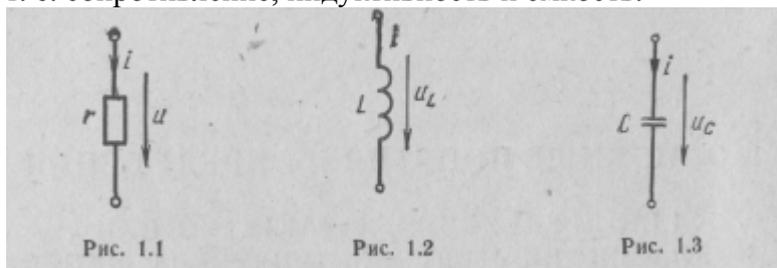
Элемент электрической цепи — отдельное устройство, входящее в состав электрической цепи, выполняющее в ней определенную функцию. К числу основных элементов электрической цепи относятся резистор, индуктивная катушка и конденсатор. Каждое из этих устройств предназначено для использования соответственно его электрического сопротивления, индуктивности и емкости.

Основной формой представления электрической цепи является графическая: с помощью схемы. Схема электрической цепи — графическое изображение цепи, содержащее условные обозначения ее элементов и показывающее их соединение.

Реальные электро- и радиотехнические цепи и устройства достаточно сложны. Чтобы облегчить изучение протекающих в них электромагнитных процессов, эти цепи заменяют эквивалентными. Теория цепей основывается на анализе и синтезе эквивалентных электрических цепей. Эквивалентная электрическая цепь — это идеализированная модель реальной электрической цепи, представленная совокупностью идеализированных элементов. Каждый из элементов этой цепи является условным идеализированным представлением элемента реальной цепи. Понятие идеализированного элемента цепи непосредственно связано с вполне определенным математическим соотношением, существующим между током и напряжением, действующим на его зажимах. В дальнейшем для простоты под терминами «электрическая цепь» и «элемент цепи» будем подразумевать эквивалентную цепь и ее идеализированный элемент.

Различают элементы пассивные и активные, линейные и нелинейные, с постоянными и переменными параметрами.

**Пассивные элементы** — это элементы электрической цепи, в которых рассеивается или накапливается энергия. К числу пассивных элементов относятся резистивный, индуктивный и емкостной элементы, т. е. сопротивление, индуктивность и емкость.



Сопротивление  $r$  — элемент цепи, в котором происходит только необратимое преобразование электрической энергии в тепловую. Напряжение и ток на его зажимах (рис. 1.1) связаны пропорциональной зависимостью:

$$u = ri; \quad r = \frac{u}{i} \quad (1.1)$$

Величина, обратная сопротивлению, называется проводимостью:

$$g = \frac{1}{r}; \quad g = \frac{i}{u} \quad (1.2)$$

Сопротивление  $r$  измеряется в омах (Ом), а проводимость  $g$  — в сименсах (См). Часто сопротивление и проводимость называют активным сопротивлением и активной проводимостью. Термин «активное» указывает на связь с активной мощностью.

Индуктивность  $L$  — элемент цепи, в магнитном поле которого происходит обратимое накопление энергии. Напряжение и ток на его зажимах (рис. 1.2) связаны через дифференцирование:

$$u_L = L \frac{di}{dt} \quad (1.3)$$

При протекании тока  $i$  через индуктивную катушку с числом витков  $\omega$  в ней возникает магнитный поток  $\Phi$ . Потокосцеплением индуктивной катушки называют сумму магнитных потоков, сцепленных с ее витками. Потокосцепление  $\Psi$  равно произведению потока на число витков:

$$\psi = \omega\Phi \quad (1.4)$$

Индуктивность  $L$  позволяет выразить потокосцепление через вызывающий его ток, ее значение определяется отношением потокосцепления к току:

$$\Psi = Li; \quad L = \frac{\Psi}{i} \quad (1.5)$$

Индуктивность измеряется в генри (Г).

Емкость  $C$ —элемент цепи, в электрическом поле которого происходит обратимое накопление энергии. Напряжение и ток на его зажимах (рис. 1.3) связаны через интегрирование:

$$u_C = \frac{1}{C} \int idt \quad (1.6)$$

На емкостном элементе накапливается заряд  $q$ , величина которого пропорциональна напряжению на зажимах элемента. Емкость  $C$  позволяет выразить заряд через напряжение, ее значение определяется отношением заряда к напряжению:

$$q = Cu_C; C = \frac{q}{u_C}. \quad (1.7)$$

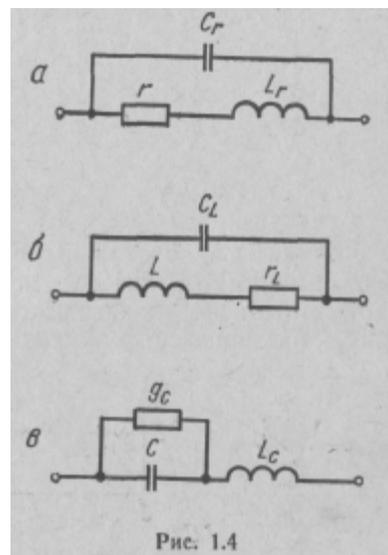
Емкость измеряется в фарадах (Ф).

Идеализированные элементы цепи — сопротивление  $r$ , индуктивность  $L$ , емкость  $C$  — отражают основные свойства и параметры соответственно резисторов, индуктивных катушек и конденсаторов. Однако резистор, например, обладает некоторой собственной емкостью и индуктивностью, значения которых зависят от его конструктивного исполнения и которые при определенных условиях необходимо учитывать. Это же относится и к индуктивной катушке, обладающей собственным сопротивлением и емкостью, учитывающими соответственно потери энергии в обмотке и сердечнике и межвитковые емкости. Для конденсаторов характерны индуктивности выводов и потери энергии в диэлектрике, что определяет, в конечном счете, его собственное сопротивление и индуктивность.

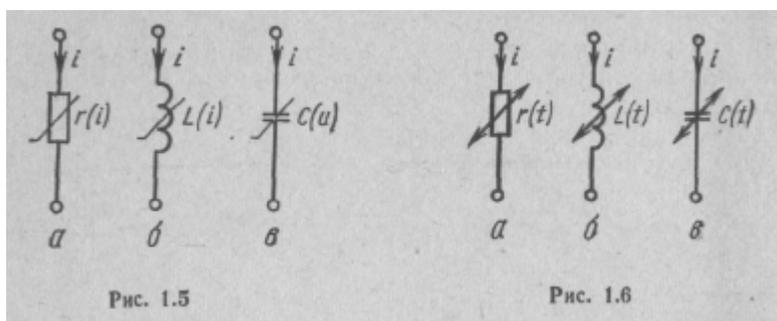
С помощью идеализированных элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$  можно составить эквивалентные схемы резисторов (рис. 1.4, а), индуктивных катушек (рис. 1.4,б) и конденсаторов (рис. 1.4,в), учитывающие их дополнительные свойства и параметры. Параметры таких схем определяют экспериментальным или расчетным путем.

Пассивные элементы могут быть линейные и нелинейные, с постоянными и с переменными параметрами. Рассмотренные выше идеализированные элементы  $r$ ,  $L$  и  $C$  являются линейными элементами с постоянными параметрами.

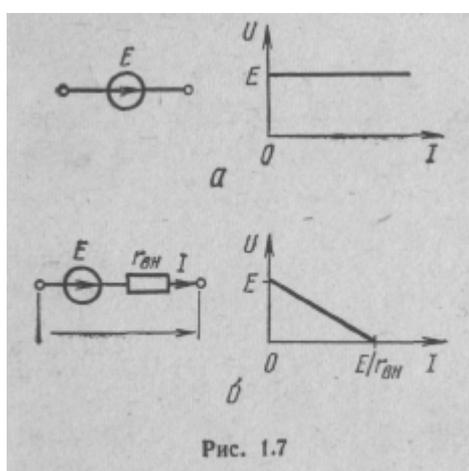
Линейными элементами называются элементы цепи, параметры которых не зависят от приложенного к ним напряжения и протекающего через них тока. Если параметры элементов зависят от значения или направления действующего напряжения и протекаю-



щего тока, то их называют нелинейными (рис. 1.5). Примерами нелинейных элементов могут служить полупроводниковые и электронные приборы, индуктивные катушки с ферромагнитным сердечником и др.



Элементы с постоянными параметрами — это линейные элементы, параметры которых не зависят от времени. Элементы цепи, параметры которых меняются во времени по определенному закону называются элементами с переменными параметрами (рис. 1.6).



**Активные элементы** — это источники энергии. Различают источники э. д. с. или напряжения и источники тока.

Источник э.д.с. — источник электрической энергии, напряжение на зажимах которого не зависит от протекающего через него тока (рис. 1.7,а). При замыкании идеального источника э.д.с. через него протекает бесконечно большой ток, так как его внутреннее сопротивление равно нулю. В реальных источниках э. д. с. ток короткого замыкания имеет конечное значение, так как такие источники характеризуются наличием конечного внутреннего сопротивления ГЕН (рис. 1.7,б).

Источник тока — источник электрической энергии, ток которого не зависит от напряжения на его зажимах (рис. 1.8, а). При разомкнутых зажимах идеального источника тока напряжение на них достигает бесконечно большого значения. В реальных источниках тока напряжение холостого хода на их зажимах имеет конечное значение, так как такие источники характеризуются конечным внутренним сопротивлением  $r_{вн} = 1/g_{вн}$  (рис. 1.8,б).

Рассмотренные источники э.д.с. и тока являются независимыми или автономными.

Зависимыми или неавтономными источниками э. д. с, (тока) называются источники электрической энергии, напряжение (ток) которых зависит от значений напряжения или тока, действующего на некоторых участках цепи (рис. 1.9),

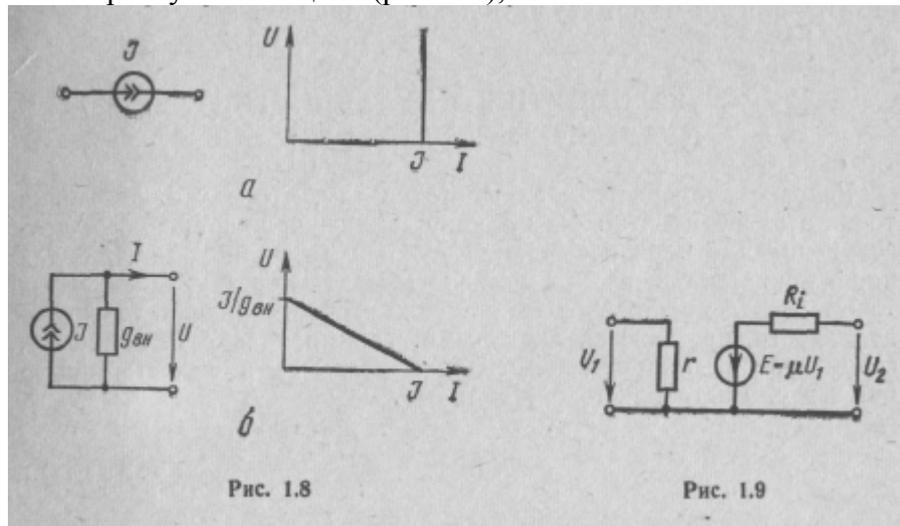


Рис. 1.8

Рис. 1.9

**Классификация электрических цепей** осуществляется в соответствии с характером элементов, из которых состоит цепь, и уравнений, которыми она описывается.

Различают цепи пассивные и активные, линейные и нелинейные, цепи с постоянными и с переменными параметрами.

Пассивная цепь — это электрическая цепь, не содержащая источников электрической энергии. Если цепь содержит хоть один источник энергии, она называется активной.

Линейная цепь не содержит нелинейных элементов. Если цепь содержит хоть один нелинейный элемент, она называется нелинейной. Если же в ее состав входят элементы с переменными параметрами, то она называется цепью с переменными параметрами или параметрической цепью. Такие цепи в общем случае описываются соответственно линейными или нелинейными дифференциальными уравнениями с постоянными или переменными коэффициентами.

Следует отметить, что, строго говоря, все реальные цепи являются нелинейными. Однако при определенной идеализации, в рамках допустимых на практике приближений, многие реальные цепи можно считать линейными. Это позволяет значительно упростить расчеты, применяя к ним теорию линейных цепей.

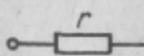
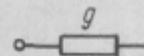
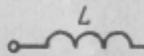
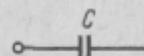
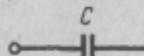
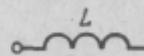
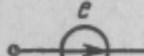
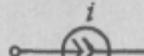
В зависимости от соотношения геометрических размеров  $l$  реальной электрической цепи и длины волны электромагнитных колебаний  $\lambda$ , воздействующих на цепь, различают цепи с сосре-

точными параметрами ( $l \ll \lambda$ ) и с распределенными параметрами ( $l \gg \lambda$ ). Четкой границы нет. В электрической цепи с сосредоточенными параметрами все сопротивления, индуктивности и емкости считаются сосредоточенными на отдельных ее участках. В электрической цепи с распределенными параметрами сопротивления, индуктивности и емкости распределены вдоль цепи. Примером такой цепи может служить длинная линия связи.

## 1.2. ПОНЯТИЕ О ДУАЛЬНОСТИ. ДУАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ЦЕПИ

Условие дуальности заключается в том, что закон изменения токов в одной цепи подобен закону изменения напряжений в другой цепи. Две цепи называются дуальными, если уравнение для напряжений одной из них можно выразить через уравнение для токов другой цепи. Элементы цепи, удовлетворяющие условию дуальности, называются дуальными. Такими являются, например, сопротивление и проводимость, индуктивность и емкость, источник э. д. с. и источник тока (табл. 1.1),

Таблица 1.1

 $u_r = ri$	 $i_g = gu$
 $u_L = L \frac{di}{dt}$	 $i_C = C \frac{du}{dt}$
 $u_C = \frac{1}{C} \int i dt$	 $i_L = \frac{1}{L} \int u dt$
 $e = E_m \cos \omega t$	 $i = I_m \cos \omega t$

При последовательном соединении элементов (рис. 1.10,а) суммируются напряжения, при параллельном (рис. 1.10,б) — токи. Поэтому последовательному соединению — дуально параллельное, и наоборот. Если, например, последовательное соединение элементов  $r$ ,  $L$ ,  $C$  заменить параллельным соединением дуальных им элементов  $g$ ,  $C$ ,  $L$ , то это и будут дуальные цепи (рис. 1.10),

Уравнение для напряжений последовательной цепи соответствует уравнению для токов параллельной цепи. Току  $i$  в первом случае соответствует напряжение  $u$  во втором случае.

Принцип дуальности часто используется при анализе и синтезе цепей, а также в технике моделирования.

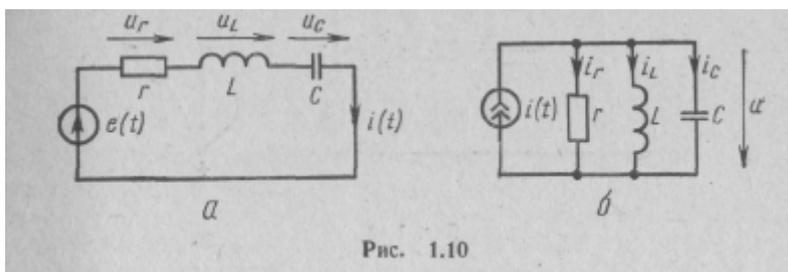


Рис. 1.10

### 1.3. ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ ЦЕПЕЙ

При расчете и анализе электрической цепи большую роль играет изучение и учет ее геометрической структуры, геометрического образа цепи. Они основаны на топологии. Топология — раз-

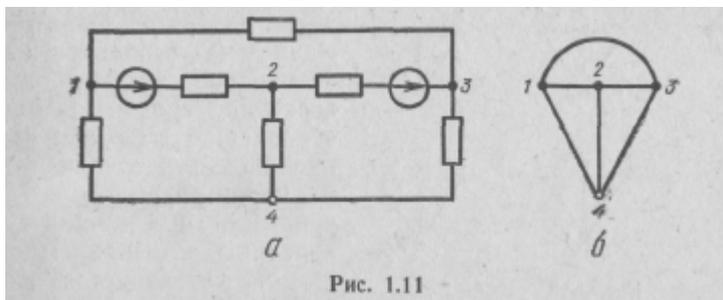


Рис. 1.11

дел математики, в котором исследуются геометрические свойства фигур, не зависящие от их размеров и прямолинейности. К числу основных геометрических топологических понятий, используемых в теории электрических цепей, относятся: ветвь, узел, контур, граф.

Ветвь — участок электрической цепи, представляющий собой последовательное соединение одного или нескольких элементов, через которые в любой момент времени протекает один и тот же ток.

Узел электрической цепи — место соединения ее ветвей. На схемах узлы изображаются точкой.

Контуром электрической цепи называют любой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям.

Топологические свойства линейной электрической цепи изучают путем замены всех ее элементов линиями. Если на схеме цепи (рис. 1.11,а) все узлы заменить точками, а ветви — линиями,

то полученный остов называется топологическим графом цепи (рис. 1.11,6). Граф цепи — это такое изображение ее схемы, на котором все узлы заменены точками, а ветви — линиями.

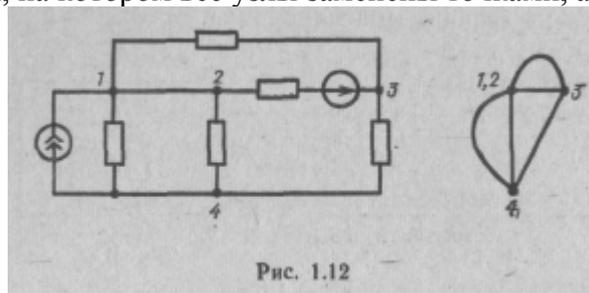


Рис. 1.12

Узел графа — точка соединения трех и более ветвей. Ветвь графа — это ветвь схемы цепи, вырожденная в линию. Ветвь графа образуется лишь из ветвей цепи, содержащих такие

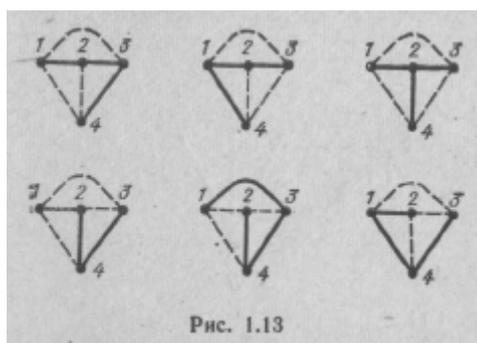


Рис. 1.13

элементы, как сопротивление, индуктивность или емкость. По ветвь цепи, содержащая лишь идеальные источники энергии, не образует ветви на графе. Обратим внимание на особенности учета источников энергии при построении графа. Перед построением графа цепи каждый идеальный источник тока заменяется разрывом его ветви, а идеальный источник э.д.с.— коротким замыканием его зажимов. Объясняется это тем, что внутреннее сопротивление этих элементов равно бесконечности или нулю соответственно, а это эквивалентно разрыву или замыканию ветви (рис. 1.12).

Важными понятиями в топологии цепей являются дерево графа и связь или хорда графа.

Дерево графа — любая совокупность ветвей графа, соединяющих все его узлы без образования контуров. Так как узлы графа можно, не образуя контуры, соединить линиями по-разному, каждому графу соответствует несколько различных деревьев, например, как это показано сплошными линиями на рис. 1.13. Число ветвей на дереве графа на единицу меньше числа соединяемых ими узлов. Число ветвей графа является важной характеристикой цепи, определяющей число ее независимых узлов. Независимыми называются все узлы схемы, которые образуют соответствующие узлы на ее графе, исключая любой один из них. Число независимых узлов равно числу ветвей на дереве графа.

Связь (хорда) графа — ветвь графа, не принадлежащая его дереву. На рис. 1.13 связи графа показаны пунктиром. При дополнении дерева графа связью (хордой) на графе образуется контур. Каждый из этих контуров не может быть образован только из элементов других контуров и называется независимым контуром. Число независимых контуров равно числу связей (хорд) на графе. Например, цепи, приведенные на рис. 1.11 и 1.12, имеют три независимых контура по числу связей графа.

Часто на ветвях графа стрелкой указывают направления. Такой граф становится направленным. Ориентация обычно соответствует принятым направлениям токов, протекающих в соответствующих ветвях цепи, или напряжений, действующих на их зажимах. Направленный граф схемы — это граф с указанием условно-положительных направлений токов или напряжений в виде отрезков со стрелками.

## 2. АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

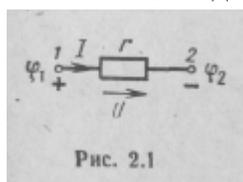
Изложение методов анализа электрических цепей начнем, с цепей постоянного тока, т. е. с цепей, в которых токи, напряжения и э.д.с. не изменяются с течением времени. Сопротивление индуктивности в таких цепях равно нулю, а емкости — бесконечности. Поэтому эти элементы можно не изображать на схемах цепей, заменив индуктивности линиями, не имеющими сопротивления, и исключив из схем ветви, содержащие емкости. Исследование таких цепей проще, чем цепей синусоидального тока. В то же время все методы анализа цепей постоянного тока можно обобщить на цепи синусоидального тока без повторения всех выводов и доказательств.

Вначале рассмотрим основные законы, лежащие в основе расчета электрических цепей, и эквивалентные преобразования схем электрических цепей, а затем — методы расчета сложных цепей и основные теоремы теории цепей.

### 2.1. ЗАКОН ОМА И ЗАКОНЫ КИРХГОФА ДЛЯ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Основными законами, лежащими в основе анализа электрических цепей, являются законы, установленные немецкими физиками Г. С. Омом (в 1827 г.) и Г. Р. Кирхгофом (в 1845 г.) для цепей постоянного тока.

**Закон Ома для участка цепи без э.д.с.** (рис. 2.1) утверждает, что ток  $I$  в участке цепи равен



отношению напряжения  $U$  на этом участке к активному сопротивлению  $r$  этого участка:

$$I = U / r \quad (2.1)$$

Введя вместо сопротивления  $r$  проводимость  $g = 1/r$ , получим

$$I = gU \quad (2.2)$$

т. е. ток  $I$  в участке цепи равен произведению напряжения  $U$  на проводимость участка  $g$ .

Электрический ток  $I$  — величина скалярная. Однако его принято характеризовать и направлением. За действительное направ-

ление тока принимают направление движения положительных зарядов. Во внешней по отношению к источнику электрической энергии части цепи ток направлен от точки с большим потенциалом к точке с меньшим потенциалом. Если действительное направление тока заранее неизвестно, то его выбирают произвольно. Такое произвольно выбранное направление тока считают положительным. Оно обычно указывается стрелкой на схеме цепи. Если действительное направление тока совпадает с произвольно выбранным положительным направлением, то считают, что ток положителен, если не совпадает — то ток отрицателен.

Под напряжением или падением напряжения на участке электрической цепи понимается разность потенциалов между крайними точками этого участка, например  $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$  (см. рис. 2.1). Напряжение, как и ток, величина скалярная. Однако напряжение также принято характеризовать направлением. Считают, что напряжение направлено от точки с большим потенциалом к точке с меньшим потенциалом. Положительное направление напряжения, выбираемое произвольно, обозначают стрелкой на схеме цепи (см. рис. 2.1) или индексами при аналитической форме записи. Например,  $U_{12}$  означает, что напряжение направлено от точки 1 к точке 2. За положительное направление напряжения обычно принимают выбранное положительное направление тока. В этом случае не возникает необходимости дополнительного указания положительного направления напряжения на схеме цепи.

**Закон Ома для замкнутой цепи**, состоящей из последовательного соединения  $n$  сопротивлений и  $m$  источников э.д.с., выражается формулой

$$I = \sum_{k=1}^m E_k \left| \sum_{S=1}^n r_S \right|, \quad (2.3)$$

т. е. ток в неразветвленной замкнутой цепи равен отношению алгебраической суммы э. д. с. к сумме всех активных сопротивлений цепи.

При алгебраическом суммировании со знаком «плюс» берутся те э. д. с., направление которых совпадает с направлением тока, а со знаком «минус» те э. д.с., направление которых не совпадает с направлением тока. В сумму сопротивлений входят как внешние сопротивления цепи, так и внутренние сопротивления источников э.д.с. Например, закон Ома для замкнутой цепи, приведенной на рис. 2.2, может быть записан в виде

$$I = (E_1 - E_2) / (r_{BH1} + r_{BH2} + r_1 + r_2)$$

Используя закон Ома, можно наглядно представить распределение потенциалов вдоль неразветвленной электрической цепи

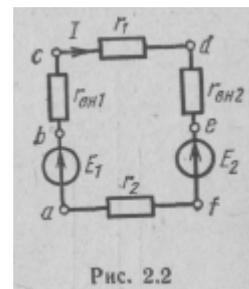


Рис. 2.2

с помощью графика, который называют потенциальной диаграммой.

В качестве примера на рис. 2.3 приведена потенциальная диаграмма электрической цепи, схема которой изображена на рис. 2.2. При построении диаграммы потенциал одной из точек, например  $\varphi_a$ , полагают равным нулю. По горизонтальной оси отклады-

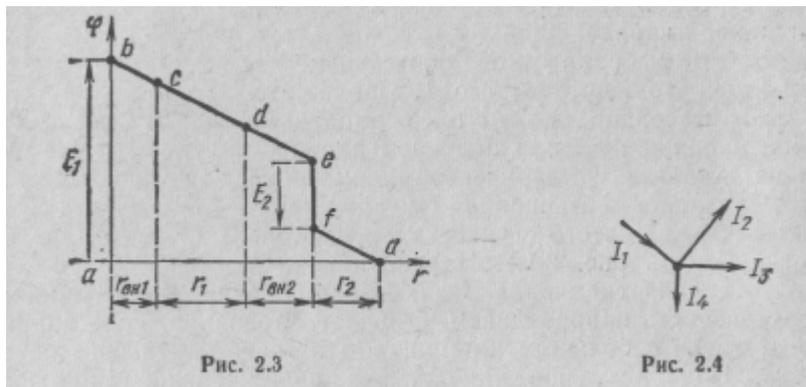


Рис. 2.3

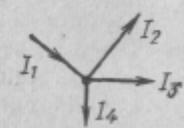


Рис. 2.4

вают величины сопротивлений, а по вертикальной — потенциалы. При переходе через источник э. д. с. по направлению, совпадающему с направлением э. д. с., потенциал возрастает на величину э. д. с. При переходе через источник э. д. с. в направлении, противоположном направлению э. д. с., потенциал уменьшается на величину э. д. с. При переходе через сопротивление в направлении, совпадающем с направлением тока, потенциал линейно убывает на величину падения напряжения. При переходе через сопротивление в направлении, противоположном направлению тока, потенциал линейно возрастает на величину падения напряжения.

**Первый закон Кирхгофа** утверждает, что алгебраическая сумма токов в узле электрической цепи равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0, \quad (2.4)$$

При этом необходимо с одинаковым знаком брать токи, притекающие к узлу, и с противоположным — утекающие от него. Например, для узла, изображенного на рис. 2.4, по первому закону Кирхгофа можно записать

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0.$$

Следует отметить, что первый закон Кирхгофа является следствием закона сохранения заряда: заряд, приходящий за какой-то интервал времени к узлу, равен заряду, уходящему за это же время от узла, т. е. электрический заряд в узле не накапливается и не расходуется. Этот закон применим не только к узлу, но и к любой части, выделенной из цепи,

**Второй закон Кирхгофа** утверждает, что алгебраическая сумма э. д. с., действующих в любом контуре произвольной разветвленной электрической цепи, равна алгебраической сумме падений напряжения на всех активных сопротивлениях этого контура:

$$\sum_{i=1}^n E_i = \sum_{k=1}^m r_k I_k, \quad (2.5)$$

Для составления этого уравнения необходимо задаться направлением обхода контура, которое обычно обозначается на схеме стрелкой. При алгебраическом суммировании э. д. с. и падений напряжения следует брать со знаком «плюс» те э. д. с. и падения напряжения, направление которых совпадает с направлением обхода, а со знаком «минус» те из них, которые направлены против. Например, для контура, изображенного на рис. 2.5, второй закон Кирхгофа можно записать в виде

$$E_1 + E_2 - E_3 = -r_1 I_1 - r_2 I_2 + r_3 I_3$$

Следует отметить, что для неразветвленной замкнутой электрической цепи выражения, записанные по второму закону Кирхгофа и закону Ома, практически совпадают.

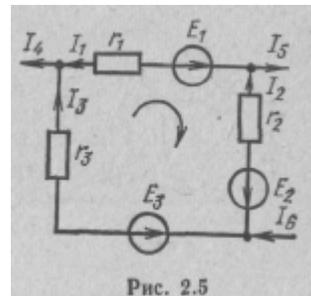


Рис. 2.5

## 2.2. БАЛАНС МОЩНОСТЕЙ В ЦЕПЯХ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Если в участке цепи с активным сопротивлением  $r$  под действием приложенного к нему напряжения  $U$  протекает ток  $I$ , то выделяемая в нем мощность будет равна

$$P=UI. \quad (2.6)$$

Учитывая, что  $U=rI$  и  $I=gU$ , получим другие выражения для этой мощности:

$$P = rI^2 = gU^2. \quad (2.7)$$

Эта мощность всегда положительна.

Если через источник э.д.с.  $E$  протекает ток  $I$ , то вырабатываемая им мощность будет равна

$$P=EI. \quad (2.8)$$

Эта мощность может быть как положительной, когда направления  $E$  и  $I$  совпадают, так и отрицательной, когда направления  $E$  и  $I$  противоположны, например в аккумуляторе во время его зарядки.

Согласно закону сохранения энергии в элементах цепи потребляется столько энергии, сколько ее отдается находящимися в ней

источниками. Поэтому алгебраическая сумма мощностей, отдаваемых всеми источниками энергии в цепи, равна сумме мощностей, потребляемых в ее элементах:

$$\sum_{i=1}^n E_i I_i = \sum_{k=1}^m r_k I_k^2, \quad (2.9)$$

Это равенство называют уравнением баланса мощностей в цепях постоянного тока.

В качестве примера запишем уравнение баланса мощностей для схемы цепи, приведенной на рис. 2.6:

$$EI = r_{BH} I^2 + rI^2. \quad (2.10)$$

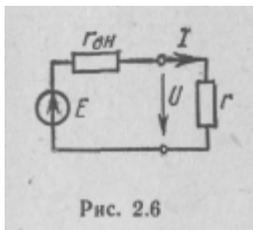


Рис. 2.6

Мощность  $EI$ , вырабатываемую источником э. д. с., часто называют полной мощностью. Мощность  $rI^2$ , потребляемую нагрузкой, называют полезной мощностью, а мощность  $r_{BH}I^2$ , расходуемую внутри источника э. д. с., — мощностью потерь. Мощность  $P$  в цепях постоянного тока измеряется в ваттах (Вт).

## 2.3. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СХЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Эквивалентным преобразованием части схемы электрической цепи называют такое преобразование, при котором токи и напряжения в непреобразованной ее части остаются прежними.

Рассмотрим некоторые эквивалентные преобразования, упрощающие расчет электрических цепей.

### 2.3.1. Преобразование схем с последовательным, параллельным и смешанным соединением сопротивлений

Произвольное число последовательно соединенных сопротивлений (рис. 2.7, а) можно заменить одним эквивалентным сопротивлением (рис. 2.7, б), величина которого равна сумме этих сопротивлений:

$$r_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n r_k, \quad (2.11)$$

Для того чтобы показать это, запишем выражение для напряжения  $U_{ab}$

$$U_{ab} = r_1 I + r_2 I + \dots + r_n I = I \sum_{k=1}^n r_k = I r_{\Sigma}$$

откуда следует справедливость выражения (2.11). При одинаковых напряжениях между точками а и б в схемах электрических

цепей, изображенных на рис. 2.7, а и 2.7, б, одинаковы и токи в подводящих проводах. Следовательно, схемы эквивалентны.

Произвольное число параллельно соединенных сопротивлений (рис. 2.8, а) можно заменить одним эквивалентным сопротивле-

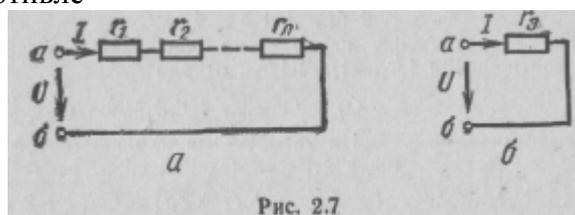


Рис. 2.7

нием (рис. 2.8,б), проводимость которого равна сумме проводимостей ветвей исходной схемы:

$$g_{\text{э}} = \sum_{k=1}^n g_k \quad \text{или} \quad g_{\text{э}} = 1 / \sum_{k=1}^n 1/r_k$$

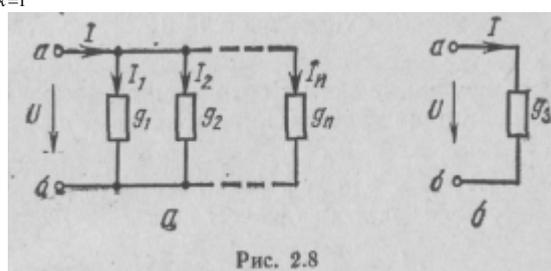


Рис. 2.8

Чтобы показать это, запишем выражение для тока в неразветвленной части цепи (рис. 2.8, б)

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + \dots + I_n = U/r_1 + U/r_2 + \dots + U/r_n = \\ &= U \sum_{k=1}^n 1/r_k = U \sum_{k=1}^n g_k = U g_{\text{э}}, \end{aligned}$$

откуда следует справедливость выражений (2.12). При одинаковых напряжениях между точками а и б в схемах электрических цепей, изображенных на рис. 2.8, а и 2.8, б, одинаковы и токи в неразветвленной части цепи. Следовательно, схемы эквивалентны.

Преобразование схем со смешанным соединением сопротивлений сводится к поочередному преобразованию схем с последовательным и параллельным соединением сопротивлений. Путем постепенного «свертывания» схемы и обратного ее «развертывания» можно найти токи во всех ветвях цепи и напряжения на всех ее участках. Рассмотрим это на примере.

Пример 2.1.

Найти напряжение  $U_4$  на сопротивлении  $r_4$  (рис. 2.9), если известно  $E=60$  В;  $r_{BH} = r_1 = 2$  Ом;  $r_2 = 4$  Ом;  $r_3 = 1$  Ом;  $r_4 = 3$  Ом.

Решение.

Эквивалентное сопротивление последовательно соединенных сопротивлений  $r_3$  и  $r_4$

$$r_{34} = r_3 + r_4 = 1 + 3 = 4 \text{ Ом.}$$

Эквивалентное сопротивление параллельно соединенных сопротивлений  $r_2$  и  $r_{34}$  найдем из соотношения  $1/r_{12} = 1/r_2 + 1/r_{34}$ , откуда

$$r_{12} = r_2 r_{34} / (r_2 + r_{34}) = 4 \cdot 4 / (4 + 4) = 2 \text{ Ом.}$$

По закону Ома для замкнутой цепи найдем ток в неразветвленной части цепи

$$I = E / (r_{BH} + r_1 + r_{12}) = 60 / (2 + 2 + 2) = 10 \text{ А.}$$

При этом падение напряжения между точками 1 и 2

$$U_{12} = I r_{12} = 10 \cdot 2 = 20 \text{ В}$$

Ток в ветви с сопротивлениями  $r_3$  и  $r_4$

$$I_{34} = U_{12} / (r_3 + r_4) = 20 / (1 + 3) = 5 \text{ А.}$$

а падение напряжения на сопротивлении  $r_4$

$$U_4 = I_{34} r_4 = 5 \cdot 3 = 15 \text{ В.}$$

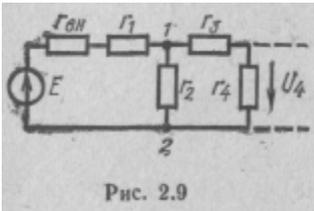


Рис. 2.9

### 2.3.2. Преобразование схем с соединением сопротивлений в виде треугольника и звезды

Взаимные эквивалентные преобразования схем с соединением сопротивлений в виде треугольника (рис. 2.10, а) и звезды (рис. 2.10, б) иногда могут привести к облегчению решения задачи по расчету цепи.

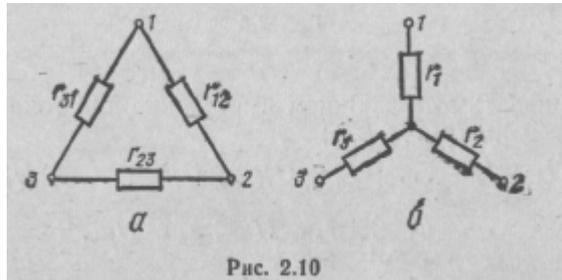


Рис. 2.10

Для эквивалентности преобразований таких схем необходимо, чтобы сопротивления между любой парой точек 1, 2, 3 в треугольнике и звезде были одинаковыми при любых сопротивлениях в непреобразованной части цепи, в том числе и при сопротивлениях, равных бесконечности.

В последнем случае будем иметь:

$$r_{31} (r_{12} + r_{23}) / (r_{12} + r_{23} + r_{31}) = r_1 + r_3; \quad (2.13)$$

$$r_{12} (r_{21} + r_{32}) / (r_{12} + r_{23} + r_{31}) = r_1 + r_2; \quad (2.14)$$

$$r_{23} (r_{12} + r_{31}) / (r_{12} + r_{23} + r_{31}) = r_2 + r_3. \quad (2.15)$$

Считая известными сопротивления сторон треугольника  $r_{12}$ ,  $r_{23}$  и  $r_{31}$ , найдем неизвестные сопротивления лучей эквивалентной звезды  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$ . Для этого из

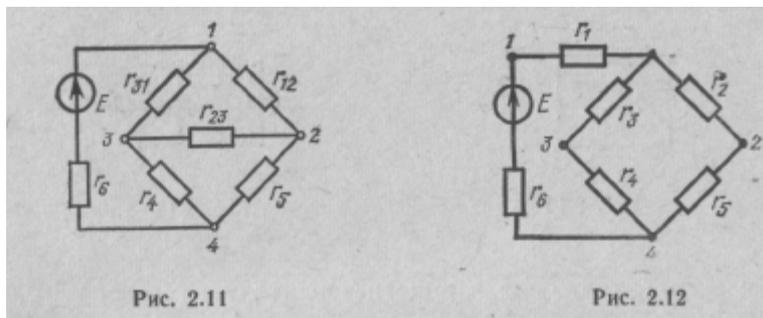
равенства (2.13) почленно вычтем равенство (2.15) и прибавим равенство (2.14). При этом получим

$$r_1 = r_{12}r_{31} / (r_{12} + r_{23} + r_{31}). \quad (2.16)$$

Аналогичным образом найдем

$$r_2 = r_{12}r_{23} / (r_{12} + r_{23} + r_{31}); r_3 = r_{23}r_{31} / (r_{12} + r_{23} + r_{31}) \quad (2.17)$$

Из полученных выражений видно, что сопротивление луча звезды равно произведению сопротивлений прилегающих сторон треугольника, деленному на сумму сопротивлений трех сторон треугольника.



Для обратного преобразования звезды в эквивалентный треугольник необходимо сопротивления сторон треугольника  $r_{12}$ ,  $r_{23}$  и  $r_{31}$  выразить через сопротивления лучей звезды  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$ . Для этого из выражений для  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$  получим

$$r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3 = r_{12}r_{23}r_{31} / (r_{12} + r_{23} + r_{31}). \quad (2.18)$$

Разделив это равенство на каждое из равенств, определяющих  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$ , найдем

$$r_{12} = r_1 + r_2 + r_1r_2 / r_3; r_{23} = r_2 + r_3 + r_2r_3 / r_1; r_{31} = r_3 + r_1 + r_1r_3 / r_2 \quad (2.19)$$

Из этих выражений видно, что сопротивление стороны треугольника равно сумме сопротивлений прилегающих лучей звезды и их произведения, деленного на сопротивление третьего луча.

### Пример 2.2.

В электрической цепи, схема которой приведена на рис. 2.11, известны э. д. с.  $E=30$  В и все сопротивления:  $r_{12}=8$  Ом;  $r_{23}=12$  Ом;  $r_{31}=12$  Ом;  $r_4=5,5$  Ом;  $r_5=7$  Ом;  $r_6=2$  Ом. Определить ток в ветви с источником э. д. с.  $E$ .

Решение.

Заменив треугольник сопротивлений  $123$  звездой сопротивлений (рис. 2.12), в соответствии с выражениями (2.16) и (2.17) найдем сопротивления звезды:

$$\begin{aligned} r_1 &= r_{12}r_{31} / (r_{12} + r_{23} + r_{31}) = 8 \cdot 12 / (8 + 12 + 12) = 3 \text{ Ом}; \\ r_2 &= r_{21}r_{23} / (r_{12} + r_{23} + r_{31}) = 8 \cdot 12 / (8 + 12 + 12) = 3 \text{ Ом}; \\ r_3 &= r_{23}r_{31} / (r_{12} + r_{23} + r_{31}) = 12 \cdot 12 / (8 + 12 + 12) = 4,5 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Сопротивление между точками 1 и 4:

$$r_{14} = r_1 + \frac{(r_2 + r_6)(r_3 + r_4)}{r_2 + r_6 + r_3 + r_4} = 3 + \frac{(3 + 7)(4,5 + 5,5)}{3 + 7 + 4,5 + 5,5} = 8 \text{ Ом}.$$

Ток в ветви с источником э. д. с.  $E$ :

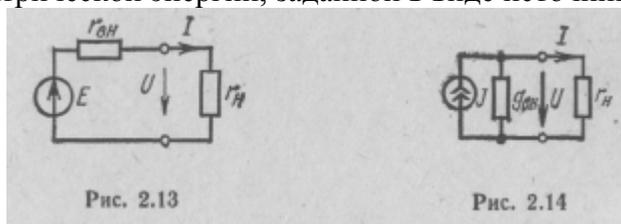
$$I = E / (r_6 + r_{14}) = 30 / (2 + 8) = 3 \text{ А}.$$

Рассмотренный пример показывает, что с помощью эквивалентных преобразований схем с соединением сопротивлений в виде треугольника и звезды иногда

от сложной электрической цепи (см. рис. 2.11) удастся перейти к простой (см. рис. 2.12), где сопротивления соединены последовательно и параллельно. Это может значительно упростить решение задачи на расчет цепи.

### 2.3.3. Преобразование схем с источниками э. д. с. и тока

При расчетах электрических цепей иногда оказывается целесообразным от схемы замещения реального источника электрической энергии, заданной в виде источника э.д.с. (рис. 2.13), пе-



рейти к схеме замещения в виде источника тока (рис. 2.14) или осуществить обратный переход. Для эквивалентной замены источников необходимо, чтобы токи и напряжения на выходе источников при заданной нагрузке остались без изменений.

Условия эквивалентности источников э.д.с. и тока найдем из выражений для токов и напряжений на выходе источников.

Для источника э.д.с. (см. рис. 2.13)

$$U = E - r_{BH} I \quad (2.20)$$

или

$$I = E / r_{BH} - U / r_{BH} \quad (2.21)$$

Для источника тока (см. рис. 2.14)

$$I = J - g_{BH} U \quad (2.22)$$

или

$$U = J / g_{BH} - I / g_{BH} \quad (2.23)$$

Из выражений (2.21) и (2.22) видно, что при замене источника э.д.с. источником тока его ток  $I$  и проводимость  $g_{BH}$  будут равны:

$$E = J / g_{BH} \text{ и } g_{BH} = 1 / r_{BH}. \quad (2.24)$$

Из выражений (2.20) и (2.23) следует, что при замене источника тока источником э.д.с. параметры источника э.д.с.  $E$  и  $r_{BH}$  будут равны:

$$E = J / g_{BH} \text{ и } r_{BH} = 1 / g_{BH}. \quad (2.25)$$

Переход от одного источника к другому может привести к облегчению решения задачи по расчету электрических цепей. Рассмотрим это на примере,

Пример 2.3.

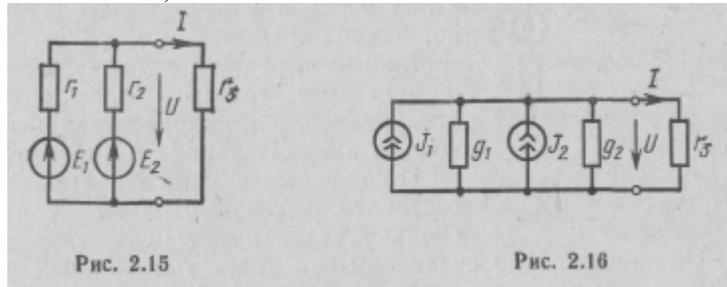
В схеме электрической цепи, изображенной на рис. 2.15, известно:  $E_1 = 6 \text{ В}$ ;  $E_2 = 3 \text{ В}$ ;  $r_1 = r_2 = r_3 = 10 \text{ Ом}$ . Найти ток в ветви с сопротивлением  $r_3$

Решение.

Перейдя от источников э. д. с. к источникам тока, получим эквивалентную схему, изображенную на рис. 2.16, где

$$J_1 = E_1/r_1 = 6/10 = 0,6 \text{ А}; g_1 = 1/r_1 = 1/10 = 0,1 \text{ См};$$

$$J_2 = E_2/r_2 = 3/10 = 0,3 \text{ А}; g_2 = 1/r_2 = 1/10 = 0,1 \text{ См}.$$

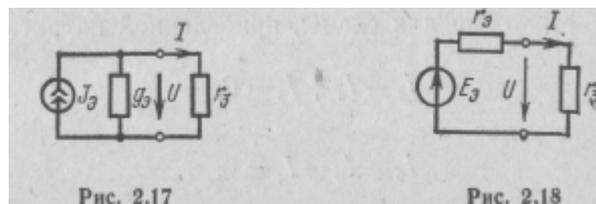


Источники тока образуют один эквивалентный источник тока (рис. 2.17), где

$$J_3 = J_1 + J_2 = 0,6 + 0,3 = 0,9 \text{ А}; g_3 = g_1 + g_2 = 0,1 + 0,1 = 0,2 \text{ См}.$$

Перейдя от источника тока (см. рис. 2.17) к источнику э. д. с., получим схему цепи (рис. 2.18), эквивалентную исходной схеме, где

$$E_3 = J_3/g_3 = 0,9/0,2 = 4,5 \text{ В}; r_3 = 1/g_3 = 1/0,2 = 5 \text{ Ом}.$$



Искомый ток в ветви с сопротивлением  $r_3$  в этой схеме

$$I_3 = E_3/(r_3 + r_3) = 4,5/(5 + 10) = 0,3 \text{ А}.$$

Рассмотренный пример показывает, что эквивалентные преобразования источников так же, как и преобразования сопротивлений, соединенных в виде звезды и треугольника, иногда позволяют перейти от сложной электрической цепи к простой, что облегчает ее расчет.

Рассмотренные в настоящем подразделе эквивалентные преобразования схем представляют собой основной метод расчета несложных цепей с одним источником энергии. Этот метод можно назвать методом эквивалентных преобразований. При расчете сложных цепей с помощью методов, рассматриваемых в последующих подразделах, часто оказывается целесообразным предварительное преобразование части схемы цепи.

## 2.4. МЕТОД УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА

Самым общим методом расчета сложных электрических цепей является метод уравнений Кирхгофа. Сущность этого метода состоит в составлении системы уравнений в соответствии с первым и вторым законами Кирхгофа и решении этой системы относительно неизвестных токов.

Если сложная электрическая цепь имеет  $y$  узлов и  $v$  ветвей, а следовательно,  $v$  неизвестных токов, то необходимо составить и решить систему  $v$  линейно независимых уравнений. Покажем, что эти уравнения можно составить по первому и второму законам Кирхгофа.

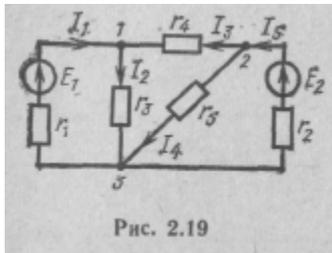


Рис. 2.19

По первому закону Кирхгофа можно составить всего столько уравнений, сколько узлов имеет цепь, т. е.  $y$  уравнений. Однако линейно независимыми будут только  $y-1$  уравнений. Это следует из того, что после сложения  $y-1$  уравнений, составленных для всех узлов, кроме одного, получим уравнение, в которое входят только токи, сходящиеся в последнем узле, так как остальные токи войдут в сумму два раза с противоположными знаками и сократятся. Это уравнение будет отличаться от уравнения для последнего узла только знаками токов. Умножим его на  $-1$ , получим уравнение для последнего узла.

Для иллюстрации этого положения составим уравнения по первому закону Кирхгофа для схемы, приведенной на рис. 2.19: для первого узла

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0; \quad (2.26)$$

для второго узла

$$I_5 - I_3 - I_4 = 0; \quad (2.27)$$

для третьего узла

$$I_2 - I_1 + I_4 - I_5 = 0. \quad (2.28)$$

Сложив выражения (2.26) и (2.27), получим

$$-I_2 + I_1 - I_4 + I_5 = 0.$$

Умножим это уравнение на  $-1$ , получим уравнение для третьего узла (2.28), т. е. уравнение для последнего узла можно получить линейными комбинациями из уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа для первых  $y-1$  узлов. Таким образом, для цепи, имеющей  $y$  узлов, по первому закону Кирхгофа можно составить  $y-1$  линейно независимых уравнений.

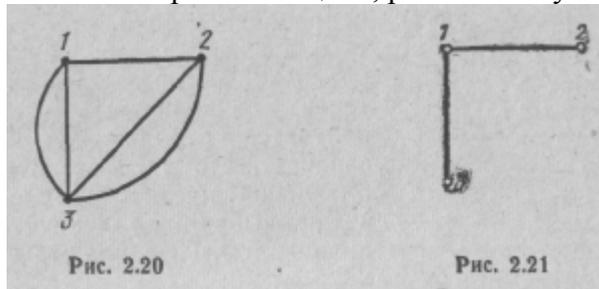
Остальные  $n = v - (y - 1)$  линейно независимые уравнения составляются по второму закону Кирхгофа.

Для того чтобы показать это, воспользуемся топологическими свойствами электрической цепи. Так как при добавлении связи графа к дереву графа схемы электрической цепи образуется один

контур, то число связей графа схемы равно числу независимых контуров электрической цепи. Если учесть, что дерево графа содержит все узлы электрической цепи, число которых равно  $y$ , а число ветвей на дереве графа на единицу меньше числа узлов, т. е. равно  $y - 1$ , то общее число ветвей в цепи будет

$$v = (y - 1) + n, \quad (2.29)$$

где  $n$  — число связей графа схемы электрической цепи, равное числу независимых контуров.



Отсюда получается выражение для определения числа связей дерева графа, а следовательно, и числа независимых контуров электрической цепи

$$n = v - (y - 1) \quad (2.30)$$

Для иллюстрации этого рассмотрим схему электрической цепи, приведенную на рис. 2.19. Граф схемы этой цепи приведен на рис. 2.20, а одно из деревьев графа схемы — на рис. 2.21. Дерево графа этой цепи содержит три узла и две ветви, т. е.  $y - 1$  ветвей. Число связей графа схемы равно трем. Так как всего ветвей на графе пять, то, следовательно, выполняется соотношение для числа связей графа схемы (2.30), а значит, и для числа независимых контуров

$$n = v - (y - 1) = 5 - (3 - 1) = 3$$

Таким образом, для цепи, имеющей  $y$  узлов и  $v$  ветвей, по второму закону Кирхгофа можно составить  $n = v - (y - 1)$  линейно независимых уравнений. При этом общее число уравнений, составленных по первому и второму законам Кирхгофа, будет равно числу ветвей, т. е. числу неизвестных токов, что позволяет найти токи во всех ветвях электрической цепи.

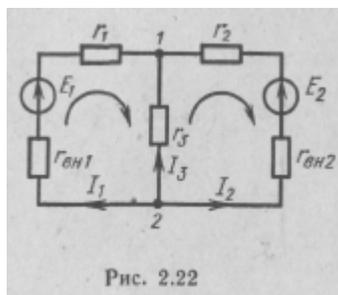
Расчет цепей с помощью законов Кирхгофа целесообразно производить в следующем порядке:

1. Определить число узлов  $y$  и число ветвей  $v$  в цепи. В соответствии с этим определить количество уравнений, которые необходимо составить по первому и второму законам Кирхгофа.
2. Обозначить на схеме цепи токи в ветвях и произвольно выбрать их положительные направления. Выбрать независимые кон-

туры цепи. Это целесообразно сделать таким образом, чтобы в каждый последующий контур входила хотя бы одна новая ветвь. Произвольно задаться направлением обхода контуров.

3. Составить  $y-1$  уравнений по первому закону Кирхгофа.

4. Составить  $n-v - (y - 1)$  уравнений по второму закону Кирхгофа. При составлении этих уравнений э. д. с. считаются положительными, если их направление совпадает с направлением обхода контуров. Падение напряжения будет положительным, если направление обхода контура совпадает с выбранным направлением тока.



5. Решить составленную систему уравнений относительно неизвестных токов. Если при этом некоторые токи получатся отрицательными, то это означает, что их действительные направления противоположны первоначально выбранным положительным направлениям. Поясним это на примере.

Пример 2.4.

В цепи, изображенной на рис. 2.22, даны ее элементы:  $E_1 = 50$  В;  $E_2 = 10$  В;  $r_{вн1} = 0,4$  Ом;  $r_{вн2} = 1,0$  Ом;  $r_1 = 3$  Ом;  $r_2 = 2$  Ом;  $r_3 = 2$  Ом. Требуется определить токи в ветвях.

Решение.

В схеме два узла и три ветви. Следовательно, по первому закону Кирхгофа необходимо составить одно уравнение, а по второму — два уравнения.

Обозначим на схеме цепи токи в ветвях и стрелками укажем их положительные направления. Выберем два независимых контура и стрелками покажем направления их обхода.

Составим уравнение по первому закону Кирхгофа для первого узла:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

Составим уравнения по второму закону Кирхгофа для выбранных независимых контуров:

$$\left. \begin{aligned} (r_1 + r_{вн1}) I_1 - r_3 I_3 &= E_1; \\ -(r_2 + r_{вн2}) I_2 + r_3 I_3 &= -E_2. \end{aligned} \right\}$$

Подставляя в последние два уравнения численные значения параметров элементов цепи и переписав первое уравнение, получим систему из трех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} I_1 + I_2 + I_3 &= 0; \\ 3,4 I_1 - 2 I_3 &= 50; \\ -3 I_2 + 2 I_3 &= -10. \end{aligned} \right\}$$

Решим эту систему, найдем:  $I_1 = 10$  А;  $I_2 = -2$  А;  $I_3 = -8$  А. Действительное направление тока  $I_1$  совпадает, а токов  $I_2$  и  $I_3$  противоположно их выбранным положительным направлениям.

Проверку правильности расчета токов можно осуществить по балансу мощностей или по выполнению законов Кирхгофа для любого из узлов и контуров цепи.

При расчете электрических цепей с помощью законов Кирхгофа источники электрической энергии можно задавать не только в виде источников э. д. с., но и в виде источников тока, которые учитываются при составлении уравнений по первому закону Кирхгофа.

Достоинством рассмотренного метода расчета сложных электрических цепей с помощью законов Кирхгофа является его общность, а недостатком — громоздкость (большое число уравнений, равное числу ветвей). Поэтому разработан ряд методов и приемов, упрощающих расчет. В последующих подразделах рассмотрим некоторые из этих методов, применимых только для линейных электрических цепей.

## 2.5. МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ

Расчет сложных электрических цепей методом контурных токов сводится к решению системы уравнений, составленных только по второму закону Кирхгофа. Этих уравнений получается только  $n = \nu - 1$ , т. е. на  $(\nu - 1)$  меньше, чем при расчете цепи методом уравнений Кирхгофа. Это облегчает расчет сложных цепей.

Сущность этого метода рассмотрим на примере расчета цепи, схема которой приведена на рис. 2.23. Система уравнений, составленных для этой цепи по первому и второму законам Кирхгофа, имеет вид:

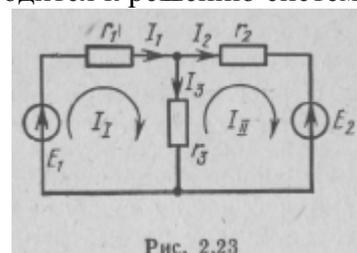


Рис. 2.23

$$\left. \begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0; \\ r_1 I_1 + r_3 I_3 &= E_1; \\ r_2 I_2 - r_3 I_3 &= -E_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Исключим из этой системы уравнений ток  $I_3$ , протекающий в ветви, входящей одновременно в два контура. Этот ток равен

$$I_3 = I_1 - I_2.$$

Подставив его в уравнения, составленные по второму закону Кирхгофа, получим:

$$\left. \begin{aligned} r_1 I_1 + r_3 (I_1 - I_2) &= E_1; \\ r_2 I_2 - r_3 (I_1 - I_2) &= -E_2 \end{aligned} \right\} \quad \text{или}$$

$$\left. \begin{aligned} (r_1 + r_3) I_1 - r_3 I_2 &= E_1; \\ -r_3 I_1 + (r_2 + r_3) I_2 &= -E_2. \end{aligned} \right\}$$

Эта система уравнений дает основание считать, что в каждом независимом контуре протекает свой, так называемый контурный ток, который независимо от других токов создает падение напряжения на тех сопротивлениях цепи, по которым он протекает. Контурные токи обычно обозначаются буквой  $I$  с римскими индексами. В рассматриваемой схеме, приведенной на рис. 2.23, направление контурных токов  $I_I$  и  $I_{II}$  показано стрелками внутри контуров. Эти токи равны токам в ветвях  $I_1$  и  $I_2$ , по которым протекает только один из контурных токов, т. е.  $I_I = I_1$  и  $I_{II} = I_2$ .

При расчете электрических цепей рассматриваемым методом кроме контурных токов вводят еще ряд понятий: контурные э. д. с., собственные и взаимные сопротивления.

Контурной э. д. с. называют алгебраическую сумму всех э. д. с. контура. При этом обход контура производят по направлению контурного тока и э. д. с. берут со знаком «плюс», если ее направление совпадает с направлением контурного тока, и со знаком «минус», если эти направления противоположны. Контурные э. д. с. обычно обозначают буквой  $E$  с римскими индексами, которые соответствуют номерам контуров.

В рассматриваемом примере контурные э. д. с.  $E_I = E_1$  и  $E_{II} = -E_2$

Собственным сопротивлением контура называют сумму всех сопротивлений, входящих в данный контур. При этом каждое сопротивление берется с положительным знаком. Собственные сопротивления контуров обозначаются буквой  $r$  с двойными индексами, соответствующими номеру контура.

В рассматриваемом примере собственные сопротивления контуров  $r_{11} = r_1 + r_3$  и  $r_{22} = r_2 + r_3$ .

Взаимными сопротивлениями контуров называют сопротивления, одновременно входящие в два разных контура. Они обозначаются буквой  $r$  с двумя индексами, первый из которых соответствует номеру рассматриваемого контура, а второй — номеру контура, имеющего общее сопротивление с рассматриваемым контуром. Взаимные сопротивления считаются положительными, если контурные токи, протекающие по этим сопротивлениям, имеют одинаковое направление, и отрицательными, если направления контурных токов противоположны.

В рассматриваемом примере взаимное сопротивление первого контура со вторым  $r_{12} = -r_3$ , а второго контура с первым  $r_{21} = -r_3$ . Отсюда видно, что  $r_{21} = -r_{12}$ , т. е. взаимные сопротивления, отличающиеся одно от другого порядком индексов, равны между собой. Это справедливо только для электрических цепей, не содержащих зависимых источников э. д. с. или тока.

С учетом введенных понятий систему уравнений (2.33) для рассматриваемого примера можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} r_{11}I_I + r_{12}I_{II} &= E_I \\ r_{21}I_I + r_{22}I_{II} &= E_{II} \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Решив эту систему уравнений, найдем контурные токи  $I_I$  и  $I_{II}$ . Если некоторые из этих токов получаются отрицательными, то их действительные направления будут противоположны первоначально принятым положительным направлениям. Зная контурные токи, можно найти токи в ветвях. Если в ветви протекает только один контурный ток, то истинный ток в ветви будет равен этому току. Токи в ветвях, по которым протекают несколько контурных токов, равны их алгебраической сумме.

В общем случае для электрической цепи, содержащей  $n$  неза- висимых контуров, система контурных уравнений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} r_{11}I_1 + r_{12}I_2 + \dots + r_{1n}I_n &= E_1; \\ r_{21}I_1 + r_{22}I_2 + \dots + r_{2n}I_n &= E_2; \\ \dots &\dots \\ r_{n1}I_1 + r_{n2}I_2 + \dots + r_{nn}I_n &= E_n. \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

где  $r_{kk}$  -собственное сопротивление  $k$ -го контура;

$r_{hj}$  — взаимное сопротивление  $k$ -го и  $j$ -го контуров;

$E_k$  — контурная э.д.с.  $k$ -го контура.

Решая эту систему уравнений с помощью определителей, найдем ток в любом  $k$ -м контуре

$$I_k = \Delta_k / \Delta; \quad (2.36)$$

где  $\Delta$  — определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель для пассивных цепей, не содержащих зависимых источников э. д. с. и тока, симметричен относительно его главной диагонали, так как для таких цепей любые взаимные сопротивления  $r_{kj}$  и  $r_{jk}$  равны между собой.

Определитель  $\Delta_k$  получается из определителя  $\Delta$  путем замены  $k$ -го столбца свободными членами:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & E_1 & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & E_2 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & E_n & \dots & r_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разлагая в выражении (2.36) определитель  $\Delta_k$  по элементам  $k$ -го столбца, получим

$$I_k = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} E_1 + \frac{\Delta_{2k}}{\Delta} E_2 + \dots + \frac{\Delta_{nk}}{\Delta} E_n = \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} E_j; \quad (2.37)$$

где  $\Delta_{jk}$  — алгебраическое дополнение определителя системы, которое получается путем вычеркивания в нем  $j$ -й строки и  $k$ -го столбца и умножения на  $(-1)^{j+k}$

При расчете электрических цепей методом контурных токов целесообразно придерживаться следующего порядка:

1. Выбрать независимые контуры цепи и указать положительные направления контурных токов в них.

2. Вычислить собственные и взаимные сопротивления контуров, а также контурные э. д. с.
3. Составить систему уравнений для контурных токов в соответствии со вторым законом Кирхгофа.
4. Решить полученную систему уравнений одним из известных методов, т. е. определить контурные токи.
5. Определить токи в ветвях. Рассмотрим это на примере.

**Пример 2.5.**

В электрической цепи, схема которой приведена на рис. 2.23, дано:  $E_1 = 6 \text{ В}$ ;  $E_2 = 3 \text{ В}$ ;  $r_1 = r_2 = r_3 = 1 \text{ Ом}$ . Требуется определить токи в ветвях.

Решение.

В схеме два независимых контура. Покажем положительные направления контурных токов  $I_I$  и  $I_{II}$  стрелками на схеме цепи. Собственные сопротивления контуров  $r_{11} = r_1 + r_3 = 1 + 1 = 2 \text{ Ом}$ ;  $r_{22} = r_2 + r_3 = 1 + 1 = 2 \text{ Ом}$ .

Взаимные сопротивления  $r_{12} = r_{21} = -r_3 = -1 \text{ Ом}$ .

Контурные э. д. с.  $E_I = E_1 = 6 \text{ В}$ ;  $E_{II} = E_2 = -3 \text{ В}$ .

Подставив эти значения в стандартную форму системы контурных уравнений (2.34), получим:

$$\left. \begin{aligned} 2I_I - I_{II} &= 6; \\ -I_I + 2I_{II} &= -3. \end{aligned} \right\}$$

Из первого уравнения  $I_{II} = 2I_I - 6$ .

Подставим это во второе уравнение, получим:

$$-I_I + 4I_I - 12 = -3; 3I_I = 12 - 3 = 9; I_I = 9/3 = 3 \text{ А};$$

$$I_{II} = 2I_I - 6 = 2 \cdot 3 - 6 = 0$$

Токи в ветвях:

$$I_1 = I_I = 3 \text{ А}; \quad I_2 = I_{II} = 0; \quad I_3 = I_I - I_{II} = 3 - 0 = 3 \text{ А}$$

Выше предполагалось, что источники энергии заданы в виде источников э.д. с. Если же по условиям задачи часть источников энергии будет задана в виде источников тока, то эти источники можно заменить согласно правилу, изложенному в подразд. 2.3, эквивалентными источниками э. д. с. или же рассчитать электрическую цепь с заданными источниками тока. В последнем случае  $N_T$  независимых контуров целесообразно выбирать таким образом, чтобы каждый из них включал один источник тока. Контурные токи в этих контурах будут равны токам источников. Остальные  $k = e - (y - 1) - N_T$  независимых контура следует выбирать таким образом, чтобы в них не входили ветви с заданными источниками тока. Для определения контурных токов в последних контурах для них составляются по второму закону Кирхгофа  $k$  уравнений.

Система контурных уравнений (2.35) может быть записана в матричной форме:

$$\|r\| \|I\| = \|E\| \quad (2.38)$$

Где  $\|r\|$  — квадратная матрица сопротивлений цепи порядка  $n$ ;  
 $\|I\|$  — матрица-столбец искомых контурных токов;  
 $\|E\|$  — матрица-столбец контурных э. д. с., причем:

$$\|r\| = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix}, \quad \|I\| = \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_N \end{vmatrix}, \quad \|E\| = \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_N \end{vmatrix}. \quad (2.39)$$

Для того чтобы решить матричное уравнение (2.38), умножим обе его части слева на обратную матрицу  $\|r\|^{-1}$ :

$$\|r\|^{-1} \|r\| \|I\| = \|r\|^{-1} \|E\|$$

Так как  $\|r\|^{-1} \|r\| = \|1\|$ , то

$$\|I\| = \|r\|^{-1} \|E\| \quad (2.40)$$

При решении несложных задач по расчету электрических цепей применять матричный метод не всегда целесообразно. Однако этот метод в общем случае имеет ряд преимуществ. Матричная форма записи более экономна в отношении занимаемого ею места и действий над нею. Такой вид записи открывает более широкие возможности для решения уравнений с помощью вычислительных машин.

В заключение следует отметить, что контурные токи в общем случае являются расчетными величинами, а реально существующими токами являются токи, протекающие в ветвях электрической цепи.

Достоинством рассмотренного метода контурных токов является меньшее число уравнений по сравнению с методом уравнений Кирхгофа и возможность формализации решения, что позволяет рассчитывать очень сложные электрические цепи с применением вычислительных машин.

## 2.6. МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ

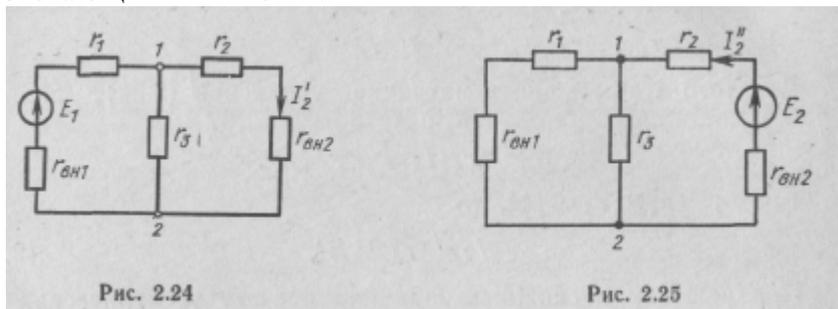
Метод наложения, применяемый для расчета электрических цепей, основан на принципе наложения, который утверждает, что ток в любой ветви линейной электрической цепи, содержащей несколько источников э. д. с., можно рассматривать как алгебраическую сумму частичных токов, созданных в этой ветви действием каждой э. д. с. в отдельности.

Справедливость этого принципа следует непосредственно из выражения (2.37)

$$I_k = \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} E_j,$$

полученного в предыдущем подразделе. Действительно, если в этом выражении положить все э.д. с., кроме  $E_1$ , равными нулю, то по-

лучим частичный ток в  $k$ -й ветви  $I'_k$ , вызванный действием только э. д. с.  $E_1$ . Если считать  $E_2 \neq 0$ , а остальные э. д. с. равными нулю, то получим частичный ток  $I''_k$ , вызванный действием только э. д. с.  $E_2$ , и т. д. Алгебраическая сумма всех частичных токов даст действительный ток, протекающий в  $k$ -й ветви.



Этот принцип применим не только к токам, но и к напряжениям, так как они линейно связаны с токами. К расчету же мощности этот принцип применить нельзя, так как мощность является не линейной, а квадратичной функцией тока или напряжения. На самом деле, если по участку цепи с сопротивлением  $r$  проходит ток  $I=I_1+I_2$ , то мощность  $P = rI^2 = r(I_1+I_2)^2 = rI_1^2 + 2rI_1I_2 + rI_2^2$ , а не  $rI_1^2 + rI_2^2$ , как следовало бы из принципа наложения.

Применение принципа наложения к расчету электрических цепей составляет содержание метода наложения. Используя этот метод, можно найти токи в ветвях без составления и решения системы уравнений, а непосредственно по закону Ома. При этом вначале находят частичные токи от действия каждого источника э. д. с. в отдельности, принимая остальные э. д. с. равными нулю и оставляя в схеме только их внутренние сопротивления, а затем— действительные токи как алгебраические суммы частичных токов.

Рассмотрим это на примере.

### Пример 2.6.

Найти ток в ветви с источником э. д. с.  $E_2$  в схеме цепи, изображенной на рис. 2.22, если  $E_1 = 50$  В;  $E_2 = 10$  В;  $r_{вн1} = 0,4$  Ом;  $r_{вн2} = 1$  Ом;  $r_1 = 3$  Ом;  $r_2 = 2$  Ом;  $r_3 = 2$  Ом.

Решение.

Приняв  $E_2 = 0$ , получим схему, приведенную на рис. 2.24. Для определения частичного тока  $I_2$ , созданного в ветви с источником э. д. с.  $E_2$ , найдем вначале напряжение между точками 1 и 2.

$$U_{12} = \frac{E_1 \frac{r_3(r_2 + r_{вн2})}{r_3 + r_2 + r_{вн2}}}{r_1 + r_{вн1} + \frac{r_3(r_2 + r_{вн2})}{r_3 + r_2 + r_{вн2}}} = \frac{50 \cdot 2(2 + 1)}{2 + 2 + 1} = \frac{100}{5} = 20 \text{ В.}$$

Частичный ток

$$I_2' = \frac{U_{12}}{r_2 + r_{BH2}} = \frac{13}{2 + 1} \approx 4,33 \text{ A.}$$

Этот ток направлен от узла 1 к узлу 2.

Приняв  $E_1 = 0$ , получим схему, приведенную на рис. 2.25. Частичный ток в рассматриваемой ветви найдем по закону Ома:

$$I_2'' = \frac{E_2}{r_2 + r_{BH2} + \frac{r_3(r_1 + r_{BH1})}{r_3 + r_1 + r_{BH1}}} = \frac{10}{2 + 1 + \frac{2(3 + 0,4)}{2 + 3 + 0,4}} \approx 2,33 \text{ A.}$$

Этот ток направлен от узла 2 к узлу 1. Действительный ток в ветви  $I_2 = I_2' - I_2'' = 4,33 - 2,33 = 2 \text{ A}$  направлен от узла 1 к узлу 2.

В заключение следует отметить, что метод наложения применим только к линейным электрическим цепям.

## 2.7. МЕТОД УЗЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Расчет сложных электрических цепей методом узловых потенциалов, или узловых напряжений, сводится к решению системы уравнений, составленных только по первому закону Кирхгофа. Из этих уравнений определяют напряжения в узлах схемы электрической цепи относительно некоторого базисного узла, потенциал которого принимают равным нулю, а токи в ветвях, соединяющих узлы, находят по закону Ома.

Сущность этого метода рассмотрим на примере электрической цепи (рис. 2.26), источники энергии которой заданы в виде источников тока.

Потенциал одного из узлов, например нулевого, зафиксируем и будем считать его равным нулю. Такой узел обычно называют базисным узлом. При этом потенциалы остальных узлов будут равны напряжениям между этими узлами и базисным узлом.

Выбрав положительные направления токов составим уравнения по первому закону Кирхгофа для незаземленных узлов:

$$\begin{aligned} J_1 &= I_1 + I_3 = (\varphi_1 - \varphi_0) g_1 + (\varphi_1 - \varphi_2) g_3; \\ J_2 &= I_2 - I_3 = (\varphi_2 - \varphi_0) g_2 - (\varphi_1 - \varphi_2) g_3, \end{aligned}$$

где  $g_1 = 1/r_1$ ;  $g_2 = 1/r_2$ ;  $g_3 = 1/r_3$ .

Учитывая, что  $\varphi_0 = 0$ , после преобразования получим:

$$\begin{aligned} J_1 &= (g_1 + g_3) \varphi_1 - g_3 \varphi_2; \\ J_2 &= -g_3 \varphi_1 + (g_2 + g_3) \varphi_2. \end{aligned}$$

Обозначив  $g_{11} = g_1 + g_3$ ;  $g_{22} = g_2 + g_3$ ;  $g_{12} = g_{21} = -g_3$

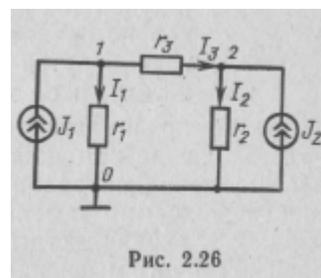


Рис. 2.26



Система уравнений узловых потенциалов (2.42) может быть записана в матричной форме:

$$\|g\| \|\varphi\| = \|J\|, \quad (2.43)$$

где

$$\|g\| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{vmatrix}; \quad \|\varphi\| = \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_n \end{vmatrix}; \quad \|J\| = \begin{vmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \dots \\ J_n \end{vmatrix}.$$

Решая это уравнение относительно матрицы  $\|\varphi\|$ , получим

$$\|\varphi\| = \|g\|^{-1} \|J\|$$

При расчете электрических цепей методом узловых потенциалов целесообразно придерживаться следующего порядка:

1. Принять потенциал одного из узлов равным нулю, т. е. заземлить один из узлов и пронумеровать по порядку остальные узлы.
2. Вычислить узловые токи.
3. Определить собственные и взаимные проводимости узлов.
4. Составить и решить систему уравнений узловых потенциалов.
5. Найти токи в ветвях. Рассмотрим это на примере.

#### Пример 2.7.

Найти токи в ветвях электрической цепи, схема которой приведена на рис. 2.27, если дано:  $E_1=50$  В;  $E_2=10$  В;  $r_{BH1}=0,4$  Ом;  $r_1=3$  Ом;  $r_{BH2}=1$  Ом;  $r_2=r_3=2$  Ом.

Решение.

Заземлим нижний узел, а верхний узел будем считать первым. Находим узловой ток верхнего узла

$$J_1 = g_1 E_1 + g_2 E_2 = \frac{E_1}{r_{BH1} + r_1} + \frac{E_2}{r_{BH2} + r_2} = \frac{50}{3 + 0,4} + \frac{10}{2 + 1} \approx 18 \text{ А.}$$

Собственная проводимость первого узла

$$g_{11} = g_1 + g_2 + g_3 = \frac{1}{r_{BH1} + r_1} + \frac{1}{r_{BH2} + r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{3 + 0,4} + \frac{1}{2 + 1} + \frac{1}{2} \approx 1,13 \text{ См.}$$

В рассматриваемом случае

$$g_{11} \varphi_1 = J_1,$$

откуда

$$\varphi_1 = J_1 / g_{11} = 18 / 1,13 \approx 16 \text{ В.}$$

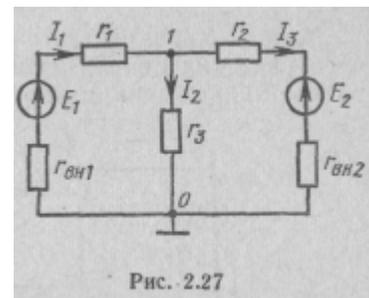


Рис. 2.27

Токи в ветвях:

$$I_1 = \frac{-\varphi_1 + E_1}{r_{BH1} + r_1} = \frac{-16 + 50}{0,4 + 3} \approx 10 \text{ A};$$

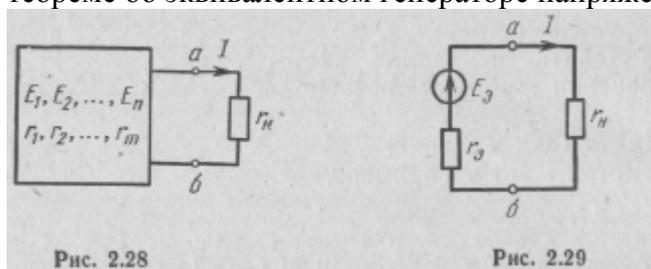
$$I_2 = \frac{\varphi_1 + E_2}{r_{BH2} + r_2} = \frac{16 - 10}{1 + 2} \approx 2 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_1}{r_3} = \frac{16}{2} = 8 \text{ A}.$$

Одним из важных свойств метода узловых потенциалов, обеспечивающих ему наиболее широкое распространение для расчета электронных схем, является то, что матрица проводимостей сложной электрической цепи может быть получена путем простого сложения элементов матриц составляющих цепей, если потенциалы соответствующих узлов равны между собой.

## 2.8. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО ГЕНЕРАТОРА

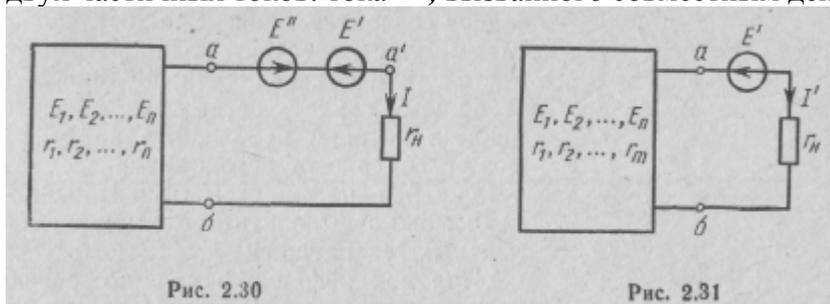
Метод эквивалентного генератора, применяемый для расчета электрических цепей, основан на теореме об эквивалентном генераторе напряжения, которая утверждает, что ток в любой ветви *ab*



(рис. 2.28) линейной электрической цепи не изменится, если остальную часть электрической цепи заменить эквивалентным источником напряжения (рис. 2.29), э. д. с. которого  $E_3$  равна напряжению на зажимах разомкнутой ветви *ab*, а внутреннее сопротивление  $r_3$  равно сопротивлению между точками разрыва *ab*, при условии, что источники э. д. с. и тока заменены их внутренними сопротивлениями.

Для доказательства этой теоремы в ветвь с сопротивлением  $r_N$  включим два идеальных противоположно направленных источника э. д. с.  $E'$  и  $E''$  (рис. 2.30), величины которых равны напряжению  $U_{ab}$  между точками *a* и *b* в режиме холостого хода, т. е. при отключенной нагрузке. Так как разность потенциалов между точками *a* и  $a'$  (см. рис. 2.30) равна нулю, то эта схема эквивалентна схеме, приведенной на рис. 2.28. Ток в ветви с сопротивлением  $r_N$  в этой схеме такой же, как и в схеме, изображенной на рис. 2.28.

Применив метод наложения, ток  $I$  в ветви с сопротивлением  $r_B$  (см. рис. 2.30) найдем как сумму двух частичных токов: тока  $I'$ , вызванного совместным действием э. д. с.  $E'$  и всех э. д. с., имею-

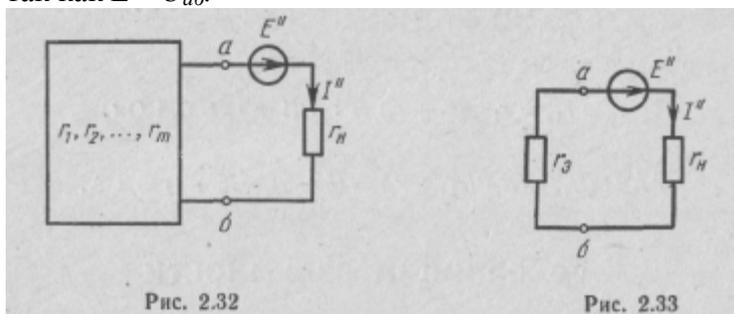


щихся в исходной цепи (рис. 2.31), и тока  $I''$ , вызванного действием оставшейся э. д. с.  $E''$  (рис. 2.32).

Первый частичный ток в схеме, приведенной на рис. 2.31,

$$I' = (U_{a\delta} - E') / r_B = 0,$$

так как  $E' = U_{a\delta}$ .



Для определения второго частичного тока схему, приведенную на рис. 2.32, представим в виде, показанном на рис. 2.33, где  $r_3$  — эквивалентное сопротивление цепи по отношению к зажимам  $ab$ .

$$\text{Для этой схемы } I'' = E'' / (r_3 + r_B).$$

Ток в ветви с сопротивлением  $r_B$  исходной цепи

$$I = I' + I'' = E'' / (r_3 + r_B) = E_3 / (r_3 + r_B),$$

где  $E_3 = U_{a\delta}$ .

Из полученного выражения для тока  $I$  следует справедливость сформулированной выше теоремы.

Заменив эквивалентный источник напряжения источником тока, получим эквивалентный источник тока, для которого можно сформулировать и доказать теорему, аналогичную теореме об эквивалентном генераторе напряжения.

Метод расчета электрических цепей, основанный на теореме об эквивалентном генераторе, особенно удобно применять тогда, когда требуется найти ток в одной из ветвей электрической цепи.

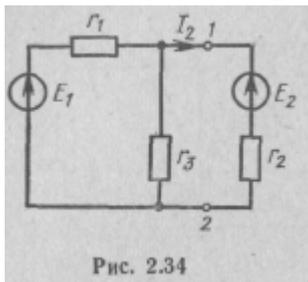


Рис. 2.34

Эта ветвь рассматривается как нагрузочное сопротивление. Вся оставшаяся схема электрической цепи рассматривается как эквивалентный генератор. В общем случае ветвь электрической цепи, в которой необходимо найти ток, может содержать источники э. д. с., а в оставшейся части схемы электрической цепи можно выделить несколько эквивалентных генераторов.

Порядок решения задач по расчету электрических цепей методом эквивалентного генератора рассмотрим на конкретном примере.

Пример 2.8.

В схеме, приведенной на рис. 2.34, найти ток  $I_2$  если известно  $E_1=10\text{ В}$ ;  $E_2=2\text{ В}$ ;  $r_1=r_2=r_3=1\text{ Ом}$ .

Решение.

Разорвем цепь в точках 1 и 2 и найдем напряжение между точками разрыва

$$E_{\text{э}} = U_{12} = \frac{E_1}{r_1 + r_3} = \frac{10}{1 + 1} = 5\text{ В}.$$

Найдем сопротивление между точками разрыва

$$r_{\text{э}} = r_{12} = r_1 r_3 / (r_1 + r_3) = 1 \cdot 1 / (1 + 1) = 0,5\text{ Ом}.$$

Найдем ток

$$I_2 = (U_{12} - E_2) / (r_{12} + r_2) = (5 - 2) / (0,5 + 1) = 2\text{ А}.$$

## 2.9. ПРИНЦИП ВЗАИМНОСТИ

Принцип взаимности утверждает, что если э. д. с.  $E$ , действуя в ветви  $ab$  сколь угодно сложной электрической цепи, не содержащей других источников э. д. с. (рис. 2.35), вызывает в ветви  $cd$  некоторый ток  $I$ , то эта же э. д. с.  $E$ , действуя в ветви  $cd$ , вызовет в ветви  $ab$  такой же ток  $I$  (рис. 2.36).

Для доказательства этого принципа воспользуемся методом контурных токов. Независимые контуры цепи выберем так, чтобы ветвь  $ab$  входила только в контур  $m$ , а ветвь  $cd$  — только в контур  $k$ . Положительные направления обхода выберем одинаковыми.

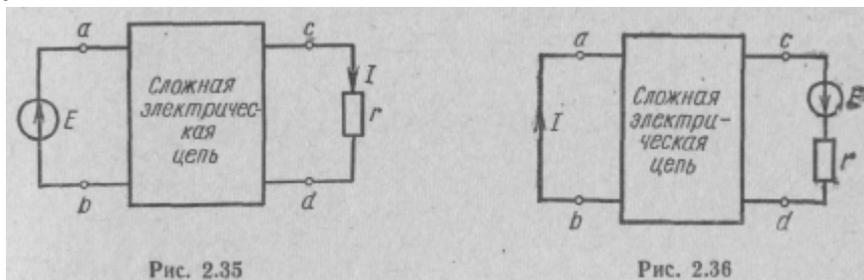
Ток в контуре  $k$  при наличии э. д. с.  $E$  только в одном контуре  $m$  согласно формуле (2.37) будет равен

$$I_m = \frac{\Delta_{mk}}{\Delta} E,$$

а ток в контуре  $m$  при наличии э. д. с.  $E$  только в одном контуре  $k$  равен

$$I_k = \frac{\Delta_{km}}{\Delta} E.$$

Вследствие равенства элементов определителей алгебраических дополнений, отличающихся только порядком индексов, алгебраические дополнения  $\Delta_{mk}$  и  $\Delta_{km}$  равны между собой. Отсюда сле-



дует равенство токов  $I_k$  и  $I_m$ , а следовательно, и справедливость принципа взаимности.

В заключение следует отметить, что принцип взаимности справедлив только для линейных пассивных цепей. В нелинейных и активных цепях он может быть несправедлив.

## 2.10. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫБОРУ ОПТИМАЛЬНОГО МЕТОДА РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ

Практика расчета позволяет сформулировать некоторые рекомендации по рациональному выбору и применению рассмотренных в настоящем разделе методов расчета цепей.

При расчете цепей с одним источником энергии, как правило, оказывается более целесообразным применение метода эквивалентных преобразований. Иногда этот метод полезно использовать в сочетании с другими методами, например для предварительных преобразований схемы цепи.

Метод уравнений Кирхгофа из-за его громоздкости целесообразно применять при количестве ветвей в схеме, не превышающем трех.

Метод контурных токов целесообразно применять для расчета таких цепей, у которых число независимых контуров не превышает число независимых узлов. Если схема содержит реальные источники тока, то при ее расчете методом контурных токов часто оказывается целесообразной предварительная замена этих источников эквивалентными источниками э. д. с.

Если число независимых узлов в схеме цепи меньше числа независимых контуров, то для ее расчета целесообразно использовать метод узловых потенциалов. При подготовке схемы цепи

к расчету этим методом все источники э.д. с. можно преобразовать в эквивалентные источники тока.

Метод наложения удобно применять тогда, когда вспомогательные схемы принимают простой вид и их расчет не представляет трудностей. При расчете схем с большим числом источников применение этого метода нецелесообразно.

Метод эквивалентного генератора целесообразно применять только тогда, когда требуется найти ток в одной ветви или напряжение между двумя узлами.

### 3. АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

#### 3.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Переменным током называют ток, который изменяется с течением времени. Это определение относится также к переменным напряжениям и э. д. с.

Значение переменного тока в рассматриваемый момент времени называют его мгновенным значением (мгновенным током). Для обозначения мгновенного тока, напряжения и э.д.с. применяют малые буквы латинского алфавита:  $i$ ,  $u$ ,  $e$ . Для того чтобы подчеркнуть, что переменный ток, напряжение и э.д.с. являются функциями времени, их иногда обозначают как  $i(t)$ ,  $u(t)$  и  $e(t)$ .

В качестве положительного направления тока принимают одно из двух возможных его направлений. Это направление выбирается произвольно. Однако после выбора этого направления считают, что если действительное направление мгновенного тока совпадает с произвольно выбранным положительным направлением, то он является положительным.

Переменные токи могут быть периодическими и непериодическими. Периодическим называют ток, мгновенные значения которого повторяются через равные промежутки времени (рис. 3.1).

Периодом переменного тока  $T$  называют наименьший промежуток времени, по истечении которого мгновенные значения периодического тока повторяются. Период измеряется в секундах (с).

Частотой переменного тока  $f$  называют величину, обратную периоду:  $f=1/T$ .

Частота показывает, какое число колебаний совершает переменный ток в течение одной секунды. Она измеряется в герцах (Гц). Один герц соответствует одному колебанию в секунду.

На практике очень большое применение находит периодический ток, являющийся синусоидальной функцией времени и называемый синусоидальным током (рис. 3.2).

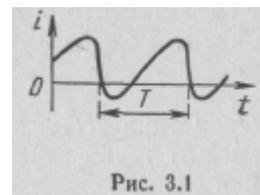


Рис. 3.1

Аналитическая запись синусоидального тока имеет вид

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi), \quad (3.1)$$

где  $I_m$  — амплитуда тока;

$\omega$  — угловая частота;

$\psi$  — начальная фаза.

Амплитуда тока  $I_m$  — это его наибольшее значение по абсолютной величине.

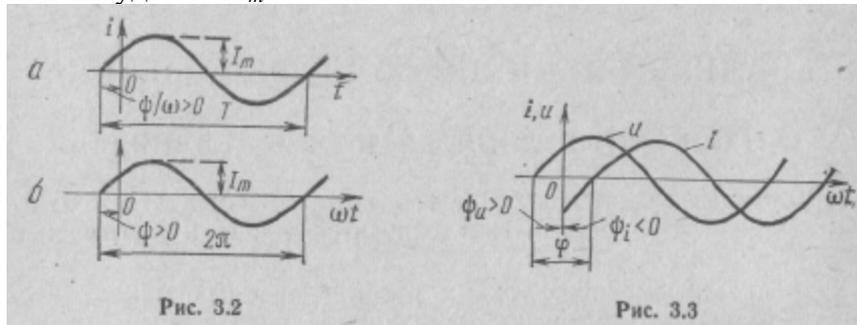


Рис. 3.2

Рис. 3.3

Угловая частота  $\omega$  — это скорость изменения фазы тока, равная частоте синусоидального тока, умноженной на  $2\pi$ :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T.$$

Фаза тока  $\theta(t)$  — это аргумент синусоидального тока, отсчитываемый от точки перехода тока через нуль к положительному значению:

$$\theta(t) = \omega t + \psi,$$

где  $\psi$  — начальная фаза — значение фазы синусоидального тока в начальный момент времени.

При графическом изображении синусоидального тока по горизонтальной оси откладывают время  $t$  (рис. 3.2, а) или фазу  $\omega t$  (рис. 3.2, б).

Если имеется несколько синусоидальных величин, изменяющихся с одинаковой частотой, начальные фазы которых неодинаковы (рис. 3.3), то говорят, что они сдвинуты одна относительно другой по фазе. Сдвиг фаз — это алгебраическая величина, равная разности начальных фаз. Например, для тока и напряжения, изображенных на рис. 3.3,  $\varphi = \psi_u - \psi_i$ . Здесь  $\varphi > 0$  — напряжение опережает по фазе ток. Если  $\varphi < 0$ , то напряжение отстает по фазе от тока. Если  $\varphi = \pi$ , то напряжение и ток находятся в противофазе. Если  $\varphi = 0$ , то напряжение и ток совпадают по фазе.

Воспользовавшись соотношением  $\sin a = \cos(a - \pi/2)$ , от формы записи тока через синус выражения (3.1) можно перейти к форме его записи через косинус:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi - \pi/2). \quad (3.2)$$

Переменный ток кроме рассмотренных выше параметров характеризуют еще его действующим и средним значениями.

Действующим значением периодического переменного тока (действующим током)  $I$  называют среднее квадратическое значение тока за период:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} . \quad (3.3)$$

Возведя обе части этого выражения в квадрат и умножив их на  $rT$ , где  $r$  — некоторое активное сопротивление, получим

$$rIT^2 = \int_0^T ri^2 dt$$

Это равенство показывает, что действующее значение периодического тока равно по величине такому постоянному току  $I$ , который в активном сопротивлении  $r$  за период  $T$  выделяет такое же количество энергии, как и данный переменный ток  $i$ .

Соотношения, аналогичные выражению (3.3), справедливы для напряжения и э. д. с.:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} ; \quad E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt} .$$

Приведенные выше соотношения справедливы для любых периодических переменных токов, напряжений и э. д. с. Для переменного тока, изменяющегося по синусоидальному закону, можно получить непосредственную зависимость его действующего значения  $I$  от амплитуды  $I_m$ . Для этого учтем, что при  $\psi=0$

$$\int_0^T i^2 dt = \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt = I_m^2 \int_0^T \frac{1}{2} (1 - 2 \cos \omega t) dt = \frac{I_m^2 T}{2}$$

Подставив это выражение в формулу (3.3), получим

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \frac{I_m^2 T}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 I_m \quad (3,4)$$

Аналогичные соотношения справедливы для синусоидальных напряжений и э. д. с.:

$$U = U_m / \sqrt{2} ; \quad E = E_m / \sqrt{2} .$$

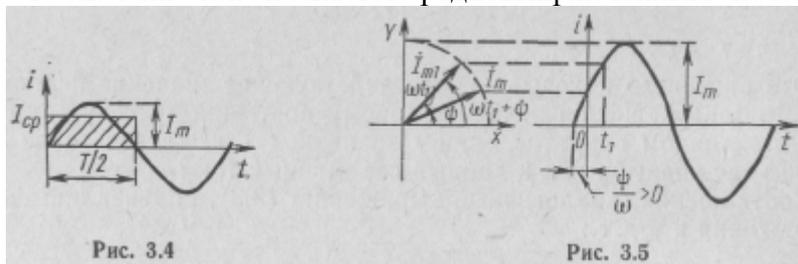
Среднее значение периодического переменного тока  $I_{cp}$  за период  $T$  определяется выражением

$$I_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt . \quad (3.5)$$

Для синусоидального тока среднее значение за период равно нулю, так как площади положительных и отрицательных полувольт тока равны между собой. Иногда среднее значение синусоидального тока определяют за время положительной полувольты тока, т. е. за половину периода (рис. 3.4):

$$I_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt = \frac{2}{T} I_m \left[ -\frac{1}{\omega} \cos \omega t \right]_0^{T/2} = \frac{4I_m}{T\omega} = \frac{4I_m}{T2\pi f} = \frac{4I_m T}{T2\pi} = \frac{2}{\pi} I_m \approx 0,637 I_m \quad (3,6)$$

Это значение тока называют средневывпрямленным значением.



Из рис. 3.4 видно, что среднее значение синусоидального тока определяется высотой прямоугольника с основанием  $T/2$ , площадь которого равна площади, ограниченной кривой тока  $i$ .

Аналогичные соотношения можно получить для средних значений напряжения и э. д. с.:

$$U_{cp} = 2U_m/\pi; \quad E_{cp} = 2E_m/\pi.$$

### 3.2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ПРОЕКЦИЯМИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВЕКТОРА. ВЕКТОРНАЯ ДИАГРАММА

Анализ цепей синусоидального тока значительно облегчается, если синусоидальные величины изображать вращающимися векторами.

Пусть имеется синусоидальный ток, изменяющийся по закону  $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi)$ .

В прямоугольной системе координат под углом  $\psi$  относительно горизонтальной оси построим вектор  $\dot{I}_m$ , величина которого в некотором масштабе равна амплитуде тока  $I_m$  (рис. 3.5). На продолжении горизонтальной оси изобразим график тока.

Проекция вектора  $\dot{I}_m$  на вертикальную ось будет равна  $i(0) = I_m \sin \psi$ , что соответствует мгновенному значению тока при  $t=0$ .

Пусть вектор  $\dot{I}_m$  с момента времени  $t=0$  начинает вращаться с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , равной угловой частоте тока, в направлении, обратном направлению вращения часовой стрелки. Через некоторое время  $t_1$  он повернется на угол  $\omega t_1$  и составит с горизонтальной осью угол  $(\omega t_1 + \psi)$ . Его проекция на вертикальную ось в этот момент времени будет равна  $i(t) = I_m \sin(\omega t_1 + \psi)$ , что соответствует мгновенному значению тока при  $t = t_1$ . Аналогичное соответствие получим и для любого момента времени  $t$ . Следовательно, проекция вектора тока  $I_m$  на вертикальную ось равна в любой момент времени мгновенному значению тока  $i$ , изменяющегося по закону синуса, т. е. вектор  $I_m$  изображает (представляет) синусоидальный ток.

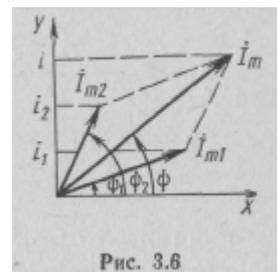


Рис. 3.6

Аналогичным образом можно показать,

что проекция вектора тока  $I_m$  на горизонтальную ось равна в любой момент времени мгновенному значению тока  $i$ , изменяющегося по закону косинуса:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi).$$

Для сложения двух синусоидальных токов одинаковой частоты  $i_1(t) = I_{m1} \sin(\omega t + \psi_1)$  и  $i_2(t) = I_{m2} \sin(\omega t + \psi_2)$  достаточно геометрически сложить изображающие их векторы  $\dot{I}_{m1}$  и  $\dot{I}_{m2}$  (рис. 3.6).

Проекция полученного при этом вектора  $\dot{I}_m$  на вертикальную ось будет равна сумме мгновенных значений токов  $i_1$  и  $i_2$ :

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = I_m \sin(\omega t + \psi),$$

так как сумма проекций векторов равна проекции суммарного вектора.

Вычитание синусоидальных токов можно заменить сложением. При этом вектор, изображающий вычитаемый ток, необходимо направить в противоположную сторону, что эквивалентно изменению начальной фазы этого тока на  $\pm\pi$ .

Совокупность векторов, изображающих синусоидальные токи, напряжения и э.д.с. одинаковой частоты в начальный момент времени, называется векторной диаграммой.

Для анализа цепей синусоидального тока во многих случаях достаточно знать лишь амплитуды синусоидальных величин и сдвиг пб фазе между ними. При этом один из векторов на векторной диаграмме можно расположить произвольно, а все остальные должны быть расположены с соответствующей ориентацией относительно исходного вектора.

### 3.3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ КОМПЛЕКСНЫХ ВЕЛИЧИН

Любое комплексное число  $\dot{A}$  можно изобразить на комплексной плоскости точкой с радиусом-вектором  $\dot{A}$  (рис. 3.7) и представить в показательной, тригонометрической и алгебраической формах записи:

$$\dot{A} = Ae^{j\alpha} = A \cos \alpha + jA \sin \alpha = a + jb, \quad (3.7)$$

где  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  — модуль комплексного числа;

$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$  аргумент комплексного числа;

$a$  — вещественная часть комплексного числа;

$b$  — мнимая часть комплексного числа.

Если  $\alpha = \omega t + \psi$ , т. е. если аргумент комплексного числа является линейной функцией времени, то комплексную функцию можно записать в виде

$$\dot{A}(t) = Ae^{j(\omega t + \psi)} = A \cos(\omega t + \psi) + jA \sin(\omega t + \psi). \quad (3.8)$$

Графическое представление комплексной функции  $\dot{A}(t)$  аналогично представлению гармонических величин вращающимися временными векторами (см. рис. 3.5).

Мнимая часть выражения (3.8) представляет собой функцию, изменяющуюся по закону синуса, а вещественная часть — функцию, изменяющуюся по закону косинуса. А так как любой гармонический процесс можно представить как в виде синусоиды, так и в виде косинусоиды, то любую гармоническую величину: ток  $i$ , напряжение  $u$  и э.д.с.  $e$  — можно представить вещественной или мнимой частью комплексной функции  $\dot{A}(t)$  (3.8), у которой модуль равен амплитуде, а аргумент — фазе синусоиды или косинусоиды. Например:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi) = \operatorname{Im} \{ I_m e^{j(\omega t + \psi)} \};$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi) = \operatorname{Re} \{ I_m e^{j(\omega t + \psi)} \}.$$

Такую запись называют комплексной или символической формой записи гармонических колебаний.

Комплексную функцию  $\dot{I}_m(t) = I_m e^{j(\omega t + \psi)}$ , у которой модуль и аргумент равны соответственно амплитуде и аргументу данного синусоидального тока, называют комплексным мгновенным синусоидальным током.

Выделим в комплексном мгновенном синусоидальном токе  $\dot{I}_m(t)$  постоянную часть и часть, зависящую от времени:

$$\dot{I}_m = I_m e^{j(\omega t + \psi)} = I_m e^{j\psi} e^{j\omega t} = \dot{I}_m e^{j\omega t}$$

Постоянную часть комплексного мгновенного синусоидального тока  $\dot{I}_m(t) = I_m e^{j\psi}$  называют комплексной амплитудой. Комплекс-

ная амплитуда представляет собой комплексное число, модуль которого равен амплитуде синусоидального тока, а аргумент — его начальной фазе.

Функцию  $e^{j\omega t}$  называют оператором вращения. Это комплексная функция, модуль которой равен единице, а аргумент линейно зависит от времени. Точка комплексной плоскости, изображающая эту функцию, непрерывно перемещается по окружности единичного

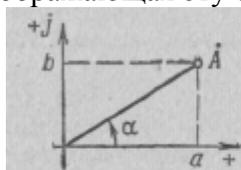


Рис. 3.7

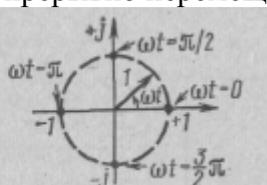


Рис. 3.8

радиуса с центром в начале координат (рис. 3.8). Это перемещение происходит с постоянной угловой скоростью  $\omega$  в направлении, обратном направлению вращения часовой стрелки, от начального положения, расположенного на вещественной оси.

Комплексную величину  $\dot{I} = Ie^{j\psi}$ , где  $I = I_m/\sqrt{2}$ , называют комплексным действующим синусоидальным током или просто комплексным током. Комплексный ток имеет такой же аргумент, как и комплексная амплитуда, а модуль меньший, чем у комплексной амплитуды, в  $\sqrt{2}$  раз.

Если известна комплексная амплитуда тока  $\dot{I}_m$  или комплексный ток  $\dot{I}$ , то оказываются известными амплитуда или действующее значение и начальная фаза тока. Тогда, предполагая известной  $\omega$ , можно записать мгновенное значение тока. Точно так же, зная мгновенное значение тока, можно записать комплексную амплитуду и комплексный ток. Поэтому говорят, что каждая из величин: комплексный ток  $\dot{I}$ , комплексная амплитуда  $\dot{I}_m$  и комплексный мгновенный синусоидальный ток  $\dot{I}_m(t)$  изображают (представляют) ток или являются изображениями тока.

**Пример 3.1.**

По известному комплексному току  $\dot{I} = (6+j8)\text{A}$  написать выражение для его мгновенного значения.

Решение.

$$I = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ A}; \quad I_m = \sqrt{2}I = 14,1 \text{ A}; \quad \psi = \text{arctg} \frac{8}{6} = 53^\circ 7'$$

следовательно,

$$i(t) = 14,1 \sin(\omega t + 53^\circ 7') \text{ A}.$$

**Пример 3.2.**

Найти комплексную амплитуду и комплексный ток, если его мгновенное значение описывается выражением  $i(t) = 14,1 \sin(\omega t + 30^\circ)$ .

Решение.

$$\dot{I}_m = 14,1 e^{j30^\circ} \text{ A}; \quad I = I_m/\sqrt{2} = 14,1/\sqrt{2} = 10 \text{ A}; \quad \dot{I} = 10 e^{j30^\circ} \text{ A}.$$

### 3.4. КОМПЛЕКСНЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ И ПРОВОДИМОСТИ. ЗАКОН ОМА И ЗАКОНЫ КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Если ко входу линейной пассивной электрической цепи, рассматриваемой как двухполюсник (рис. 3.9), приложить синусоидальное напряжение  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ , то через ее входные зажимы потечет синусоидальный ток  $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ .

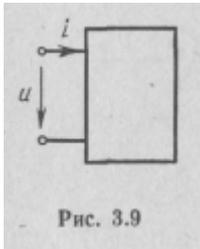


Рис. 3.9

Комплексную величину, равную отношению комплексного напряжения на зажимах данной пассивной электрической цепи или ее элемента к комплексному току в этой цепи или в этом элементе, называют комплексным электрическим сопротивлением:

$$Z = \dot{U} / \dot{I} = \dot{U}_m / \dot{I}_m \quad (3.9)$$

Подставив в это выражение  $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$  и  $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$ , получим

$$Z = z e^{j\varphi} = z \cos \varphi + j z \sin \varphi = r + jx, \quad (3.10)$$

где  $z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{r^2 + x^2}$  — полное сопротивление;

$\varphi = \psi_u - \psi_i = \arctg \frac{x}{r}$  — сдвиг фаз между напряжением и током;

$r = z \cos \varphi$  — активное сопротивление;

$x = z \sin \varphi$  — реактивное сопротивление.

Комплексную величину  $Y$ , обратную комплексному сопротивлению  $Z$ , называют комплексной проводимостью:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m} = y e^{-j\varphi} = y \cos \varphi - j y \sin \varphi = g - jb,$$

где  $y = \frac{I}{U} = \frac{I_m}{U_m} = \sqrt{g^2 + b^2}$  — полная проводимость;

$\varphi = \psi_u - \psi_i$  — сдвиг фаз между напряжением и током;

$g = y \cos \varphi$  — активная проводимость;  $b = y \sin \varphi$  — реактивная проводимость.

Комплексную проводимость  $Y$  можно представить в виде

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{r + jx} = \frac{r - jx}{(r + jx)(r - jx)} = \frac{r}{r^2 + x^2} - j \frac{x}{r^2 + x^2} = g - jb$$

где  $g = r/z^2$ ;  $b = x/z^2$

Отношения комплексных амплитуд напряжения и тока (3.9) и (3.11) выражают собой закон Ома в комплексной форме. Его можно также записать в виде

$$I_m = \dot{U}_m / Z = \dot{U}_m Y; \dot{U}_m = \dot{I}_m Z = \dot{I}_m Y, \quad (3.13)$$

т. е. комплексная амплитуда тока в цепи синусоидального тока равна комплексной амплитуде напряжения, деленной на комплексное сопротивление цепи.

Учитывая, что сложению гармонических величин соответствует сложение изображающих их комплексов, на основании первого закона Кирхгофа, справедливого для мгновенных значений

токов для узла электрической цепи  $\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0$ , получим выражение этого закона для цепи синусоидального тока в комплексной форме

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_{mk} = 0$$

т. е. алгебраическая сумма комплексных амплитуд токов в любом узле электрической цепи синусоидального тока равна нулю.

Аналогичным образом на основании второго закона Кирхгофа

для мгновенных значений э. д. с. и напряжений  $\sum_{j=1}^n e_j(t) = \sum_{k=1}^m u_k(t)$  получим выражение этого

закона для цепи синусоидального тока в комплексной форме

$$\sum_{j=1}^n \dot{E}_{mj} = \sum_{k=1}^m \dot{U}_{mk} = \sum_{l=1}^m \dot{I}_{ml} Z_l, \quad (3.15)$$

т. е. алгебраическая сумма комплексных амплитуд э. д. с. в любом контуре электрической цепи синусоидального тока равна алгебраической сумме комплексных амплитуд напряжений на элементах контура.

Из выражений для закона Ома (3.13), а также для первого (3.14) и второго (3.15) законов Кирхгофа видно, что форма записи этих законов для цепей синусоидального тока в комплексном виде аналогична форме записи этих законов для цепей постоянного тока. Поэтому все методы расчета цепей постоянного тока можно применить к расчету цепей синусоидального тока, представив все электрические величины в комплексной форме записи.

Метод расчета цепей синусоидального тока, основанный на изображении гармонических функций времени комплексными числами, называют методом комплексных амплитуд.

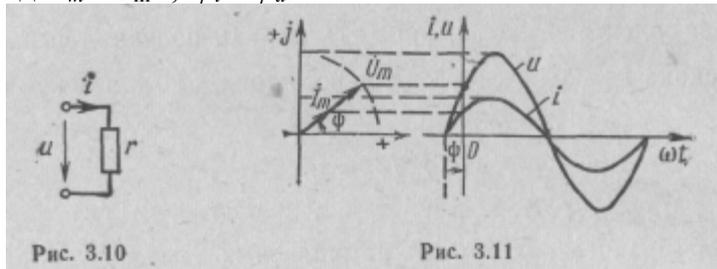
### 3.5. ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА С ОДНИМ ПАССИВНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

#### 3.5.1. Цепь синусоидального тока с активным сопротивлением $r$

Если к активному сопротивлению  $r$  (рис. 3.10) подключить синусоидальное напряжение  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ , то по цепи потечет синусоидальный ток

$$i(t) = \frac{u(t)}{r} = \frac{U_m}{r} \sin(\omega t + \psi_u) = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

где  $I_m = U_m/r$ ;  $\psi_i = \psi_u$ .



Таким образом, в цепи синусоидального тока с одним активным сопротивлением напряжение и ток совпадают по фазе, т. е. сдвиг фаз между напряжением и током  $\varphi = \psi_i - \psi_u$  равен нулю.

Векторная диаграмма и временной график напряжения и тока для рассматриваемой цепи приведены на рис. 3.11.

Комплексное сопротивление цепи

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{U_m e^{j\psi_u}}{I_m e^{j\psi_i}} = r e^{j(\psi_u - \psi_i)} = r e^{j0} = r$$

а комплексная проводимость

$$Y = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{r} = g$$

т. е. комплексное сопротивление и комплексная проводимость цепи с активным сопротивлением являются вещественными величинами и равны соответственно активному сопротивлению и активной проводимости.

В заключение следует отметить, что при переменном токе активное сопротивление проводника, определяемое как отношение активной мощности к квадрату действующего тока  $r = P/I^2$ , больше его сопротивления при постоянном токе, определяемого по формуле  $r = \rho l/S$ , где  $\rho$  — удельное сопротивление проводника,  $l$  — его длина,  $S$  — площадь поперечного сечения. Это происходит из-за

так называемого поверхностного эффекта, который заключается в том, что плотность переменного тока в поперечном сечении проводника на высоких частотах неравномерна, что эквивалентно уменьшению площади его поперечного сечения.

### 3.5.2. Цепь синусоидального тока с индуктивностью L

Если к индуктивной катушке (рис. 3.12), не имеющей активного сопротивления, приложить синусоидальное напряжение  $u(t)$ , то по ней потечет ток

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Этот ток наводит в индуктивной катушке э. д. с.

Самоиндукции  $e_L = -L \frac{di}{dt}$ , которая уравновешивает

приложенное к катушке напряжение  $u(t)$ .

На основании второго закона Кирхгофа для мгновенных значений можно записать

$$u + e_L = 0 \text{ и } u = -e_L = L \frac{di}{dt}.$$

Подставив сюда выражение для тока, после дифференцирования получим

$$u(t) = L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos(\omega t + \psi_i) = U_m \sin(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}) = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

где  $U_m = \omega L I_m$ ;  $\psi_u = \psi_i + \pi/2$ .

Следовательно, сдвиг фаз между напряжением и током в цепи с индуктивностью равен  $\varphi = \psi_u - \psi_i = \pi/2$ , т. е. ток в индуктивной катушке отстает от приложенного к ней напряжения по фазе на  $\pi/2$  (рис. 3.13).

Комплексное сопротивление цепи с индуктивностью

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{\omega L I_m e^{j(\psi_i + \pi/2)}}{I_m e^{j\psi_i}} = \omega L e^{j\pi/2} = j\omega L = jx_L$$

где  $x_L = \omega L$  — индуктивное сопротивление.

Индуктивное сопротивление  $x_L$  имеет размерность сопротивления  $[\omega L = \frac{1}{C} \text{ Ом} \cdot \text{с} = \text{Ом}.$

Физический смысл индуктивного сопротивления заключается в препятствии прохождению тока э. д. с. самоиндукции, возникающей в индуктивной катушке при прохождении по ней переменного тока и направленной навстречу приложенному к катушке напряжению. Сопротивление  $x_L = \omega L$  является линейной функцией от частоты  $\omega$  (рис. 3.14). При  $\omega=0$ , т. е. для постоянного тока, оно равно нулю. С увеличением  $\omega$  оно увеличивается.

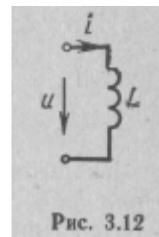
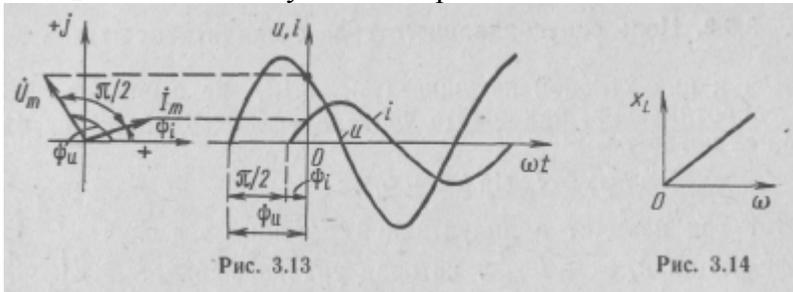


Рис. 3.12

Комплексная проводимость рассматриваемой цепи

$$Y = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L} = -jb_L, \quad (3.17)$$

где  $b_L = 1/\omega L$  — индуктивная проводимость.



Из выражений (3.16) и (3.17) видно, что комплексное сопротивление и комплексная проводимость цепи с индуктивностью являются мнимыми величинами, т. е. сопротивление и проводимость рассматриваемой цепи являются чисто реактивными.

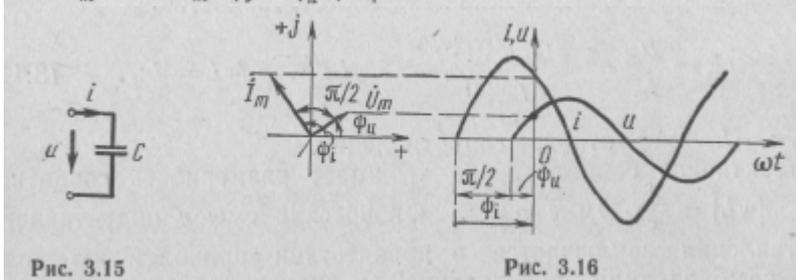
### 3.5.3. Цепь синусоидального тока с емкостью C

Если к конденсатору емкостью  $C$  (рис. 3.15) приложить синусоидальное напряжение  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$ , то в цепи потечет ток

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{dCu(t)}{dt} = -\omega CU_m \sin(\omega t + \psi_u) =$$

$$= I_m \sin(\omega t + \psi_u + \pi) = I_m \cos(\omega t + \psi_u + \pi/2) = I_m \cos(\omega t + \psi_i),$$

где  $I_m = \omega CU_m$ ;  $\psi_i = \psi_u + \pi/2$ .



Следовательно, сдвиг фаз между напряжением и током в цепи с емкостью равен  $\varphi = \psi_u - \psi_i = \pi/2$  т.е. ток, протекающий через конденсатор, опережает приложенное к нему напряжение по фазе на  $\pi/2$  (рис. 3.16).

### Комплексное сопротивление цепи с емкостью

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{U_m e^{j\psi_u}}{\omega C U_m e^{j(\psi_u + \pi/2)}} = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = -j x_c, \quad (3.18)$$

где  $b_c = 1/\omega C$  — емкостное сопротивление.

Емкостное сопротивление  $x_c$  имеет размерность сопротивления  $\left[ \frac{1}{\omega C} \right] = \frac{1}{\frac{1}{\text{с}} \cdot \frac{\text{В}}{\text{А}}} = \frac{\text{В}}{\text{А}} = \text{Ом}$ .

Физический смысл этого  $x_c = 1/\omega C$  обратно пропорционально частоте (рис. 3.17). При  $\omega = 0$ , что соответствует постоянному сопротивлению заключается в препятствии прохождению тока, оказываемом напряжением конденсатора, возникающим на его обкладках при прохождении тока, т. е. при его заряде. Сопротивление току, оно равно бесконечности, т. е. конденсатор постоянный ток не пропускает. С увеличением  $\omega$  оно уменьшается.

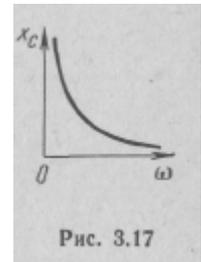


Рис. 3.17

Комплексная проводимость рассматриваемой цепи

$$Y = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m} = \frac{1}{Z} = j\omega C = j b_c, \quad (3.19)$$

где  $b_c = \omega C$  — емкостная проводимость.

Из выражений (3.18) и (3.19) видно, что комплексное сопротивление и комплексная проводимость цепи с емкостью являются мнимыми величинами, т. е. сопротивление и проводимость рассматриваемой цепи являются чисто реактивными.

## 3.6. ЦЕПЬ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ $r, L$ и $C$

Если к цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов  $r, L$  и  $C$  (рис. 3.18), приложить синусоидальное напряжение и  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ , то по ней потечет ток  $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ .

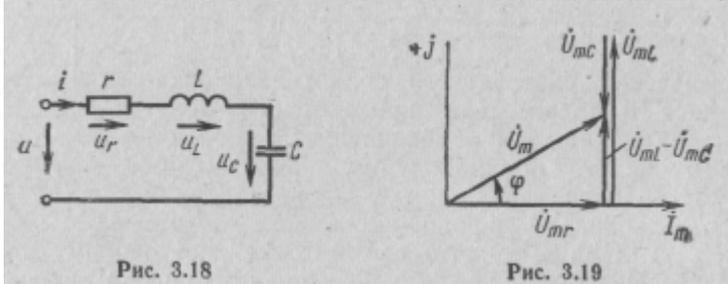
Так как напряжение на активном сопротивлении совпадает по фазе с током, на индуктивности опережает, а на емкости отстает по фазе от тока на  $\pi/2$ , то на основании второго закона Кирхгофа для мгновенных значений можно записать

$$u(t) = u_r + u_L + u_C = U_{m_r} \sin(\omega t + \psi_i) + U_{m_L} \sin(\omega t + \psi_i + \pi/2) + U_{m_C} \sin(\omega t + \psi_i - \pi/2), \quad (3.20)$$

где  $U_{m_r} = r I_m$ ;  $U_{m_L} = x_L I_m = \omega L I_m$ ;  $U_{m_C} = x_C I_m = \frac{1}{\omega C} I_m$ .

Второй закон Кирхгофа в комплексной форме для рассматриваемой цепи имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= \dot{U}_{mr} + \dot{U}_{mL} + \dot{U}_{mC} = U_{mr} e^{j\psi_i} + U_{mL} e^{j(\psi_i + \pi/2)} + \\ &+ U_{mC} e^{j(\psi_i - \pi/2)} = r I_m e^{j\psi_i} + j\omega L I_m e^{j\psi_i} - \\ &- j\frac{1}{\omega C} I_m e^{j\psi_i} = I_m \left( r + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

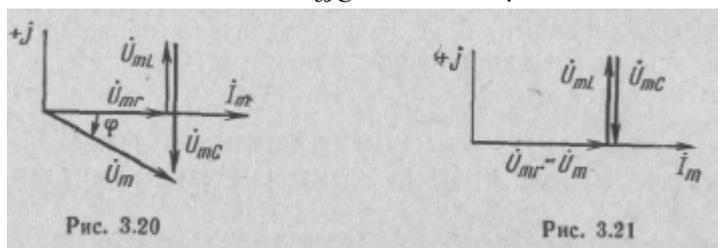


Комплексное сопротивление цепи

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{I_m} = \frac{I_m \left( r + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \right)}{I_m} = r + jx = z e^{j\varphi}, \quad (3.22)$$

где  $x = x_L - x_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ ;  $\varphi = \arctg \frac{x}{r}$ ;  $z = \sqrt{r^2 + x^2}$ .

где  $x = x_L - x_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ ;  $\varphi = \arctg \frac{x}{r}$ ;  $z = \sqrt{r^2 + x^2}$ .



Характер цепи зависит от соотношения величин индуктивного  $X_L$  и емкостного  $X_C$  сопротивлений.

При  $X_L > X_C$  сдвиг фаз между приложенным к цепи напряжением и током в цепи  $\varphi > 0$ , т. е. будет положительным (рис. 3.19). Ток в цепи отстает от приложенного к ней напряжения. Цепь носит индуктивный характер.

При  $X_L < X_C$  сдвиг фаз  $\varphi < 0$ , т. е. отрицателен (рис. 3.20). Ток в цепи опережает приложенное к ней напряжение. Цепь носит емкостной характер.

При  $X_L = X_C$  сдвиг фаз  $\varphi = 0$  (рис. 3.21). Ток в цепи совпадает с приложенным к ней напряжением. Цепь носит характер чисто активного сопротивления и по отношению ко входным зажимам эквивалентна цепи, состоящей из одного активного сопротивле-

ния  $r$ . При этом амплитуда тока в цепи  $I_m = U_m/r$  будет больше, чем в рассмотренных выше случаях, где она равна  $I_m = U_m / \sqrt{r^2 + x^2}$ .

Рассматриваемое явление в цепи синусоидального тока с последовательным соединением элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$ , при котором ее сопротивление является чисто активным, называют резонансом напряжений.

Следует отметить, что при изменении частоты  $\omega$  приложенного к цепи напряжения реактивные сопротивления  $X_L$  и  $X_C$ , являющиеся функциями частоты, будут изменяться. При этом полное сопротивление цепи и ее характер также будут изменяться. На одних частотах она будет носить индуктивный характер, на других — емкостной, а на некоторой частоте  $\omega_0$ , называемой резонансной частотой, — чисто активный характер. Эта зависимость сопротивления цепи, состоящей из последовательно включенных элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$ , от частоты будет рассмотрена в разд. 7.

Комплексная проводимость рассматриваемой цепи

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{r + jx} = \frac{r}{z^2} - j \frac{x}{z^2} = g_3 - jb_3 = ye^{-j\varphi}, \quad (3.23)$$

где  $x = X_L - X_C$ ;  $g_3 = r/z^2$ ;  $b_3 = x/z^2$ ;  $y = \sqrt{g_3^2 + b_3^2} = 1/z$ .

Из полученного выражения (3.23) следует, что рассматриваемую цепь, состоящую из последовательно соединенных элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$ , по отношению к ее входным зажимам на фиксированной частоте можно заменить эквивалентной цепью, состоящей из параллельного соединения активного сопротивления  $r' = 1/g_3 = z^2/r$  и реактивной проводимости  $b_3 = x/z^2$ . При  $x > 0$

это будет индуктивность  $L' = \frac{1}{\omega b_3} = \frac{z^2}{\omega x}$ ; при  $x < 0$  — емкость  $C' = \frac{b_3}{\omega} = \frac{x}{\omega z^2}$ ; при  $x = 0$  реактивная

проводимость  $b_3 = 0$ , т. е. будет отсутствовать, и эквивалентная цепь будет состоять только из ветви с активным сопротивлением  $r' = r$ .

### 3.7. МОЩНОСТЬ В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Произведение мгновенного значения приложенного к цепи напряжения  $u(t)$  на мгновенное значение протекающего по ней тока  $i(t)$  называют мгновенной мощностью.

Для напряжений и токов, изменяющихся по синусоидальному закону, получим

$$p(t) = u(t) i(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi).$$

Используя соотношения  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ ,  $U_m = \sqrt{2}U$ ,  $I_m = \sqrt{2}I$  и для простоты приняв  $\psi_u = 0$ , после преобразований получим

$$p(t) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi). \quad (3.24)$$

Из этого выражения видно, что мгновенная мощность в цепи синусоидального тока имеет постоянную и переменную составляющую, изменяющуюся во времени с удвоенной частотой.

Графики мгновенной мощности для трех различных значений сдвига фаз между напряжением и током приведены на рис. 3.22.

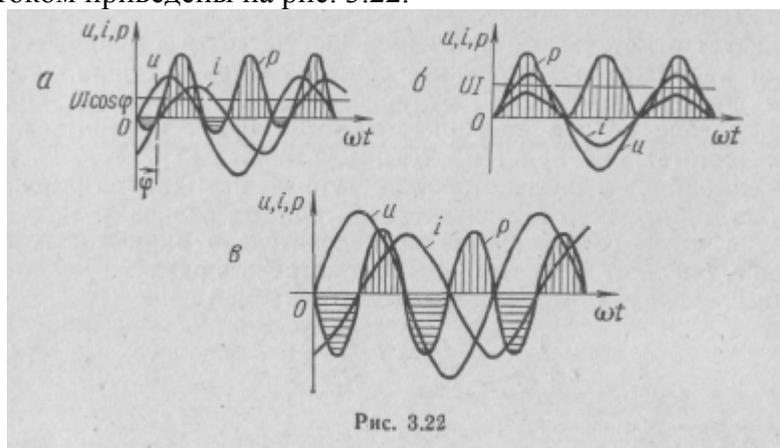


Рис. 3.22

При  $\pi/2 > \varphi > 0$  (рис. 3.22, а) мгновенная мощность изменяется по синусоидальному закону относительно прямой  $UI \cos \varphi$  с частотой, вдвое большей частоты тока и напряжения, имея положительные и отрицательные участки. Положительные значения мощности соответствуют поступлению энергии в цепь, где она частично запасается в электрических полях конденсаторов и магнитных полях индуктивных катушек и частично расходуется в цепи, выделяясь в виде тепла в активных сопротивлениях или преобразуясь в другие виды энергии (механическую, химическую и т. д.). Отрицательные значения мощности соответствуют возвращению энергии, запасенной в цепи, в источник. В рассмотренном случае энергия, поступающая от источника в цепь, больше энергии, возвращаемой из цепи к источнику, так как часть ее расходуется в цепи.

При  $\varphi=0$  (рис. 3.22, б) мгновенная мощность изменяется по синусоидальному закону относительно прямой  $UI$  также с удвоенной частотой, являясь все время положительной. Энергия в этом случае только поступает в цепь. Такая цепь по отношению к ее входным зажимам эквивалентна цепи, содержащей только активные сопротивления. Если же в цепи при  $\varphi=0$  имеются конденсаторы и индуктивные катушки, например при резонансе напряжений, то между ними происходит взаимный обмен энергией без возвращения к источнику.

При  $\varphi=\pi/2$  (рис. 3.22, в) мгновенная мощность изменяется по гармоническому закону относительно оси времени также с удвоенной частотой. Положительные и отрицательные участки мощности равны между собой. Следовательно, в этом случае вся энергия,

поступившая в цепь, возвращается обратно в источник. Такая цепь содержит лишь идеальные элементы  $L$  и  $C$ .

Среднее значение мгновенной мощности за период

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (3.25)$$

называют активной мощностью.

Для цепи синусоидального тока после подстановки в формулу (3.25) выражения для мгновенной мощности (3.24) и интегрирования получим

$$P = UI \cos \varphi, \quad (3.26)$$

т. е. активная мощность в цепи с синусоидальным током и напряжением равна произведению действующих напряжения, тока и косинуса угла сдвига фаз между напряжением и током. Она характеризует энергию, которая передается от источника к нагрузке, где она превращается в другие виды энергии. Она измеряется в ваттах (Вт). Множитель  $\cos \varphi$  называют коэффициентом мощности. Чем больше  $\cos \varphi$ , тем больше активная мощность при заданных значениях  $U$  и  $I$ . Используя соотношения (3.9) — (3.11), для активной мощности можно получить

$$P = rI^2 = gU^2,$$

где  $r$  и  $g$  — активное сопротивление и активная проводимость цепи.

Величину, равную при синусоидальном токе и напряжении произведению действующих напряжения, тока и синуса угла сдвига фаз между напряжением и током, называют реактивной мощностью:

$$Q = UI \sin \varphi. \quad (3.27)$$

Реактивная мощность характеризует энергию, которая периодически циркулирует между источником и нагрузкой. Она измеряется в вольт-амперах реактивных (вар). При  $\varphi > 0$ , т. е. при индуктивной нагрузке, реактивная мощность положительна, а при  $\varphi < 0$ , т. е. при емкостной нагрузке, отрицательна.

Используя соотношения (3.9) — (3.11), для реактивной мощности можно получить

$$Q = xI^2 = bU^2,$$

где  $x$  и  $b$  — реактивное сопротивление и реактивная проводимость цепи.

Величину, равную произведению действующих напряжения  $U$  и тока  $I$ , называют полной мощностью:

$$S = UI. \quad (3.28)$$

Полная мощность измеряется в вольт-амперах (В·А) и характеризует предельную активную мощность источника при  $\cos \varphi = 1$ .

Учитывая, что  $U = zI = I/y$ , получим

$$S = zI^2 = yU^2,$$

где  $z$  и  $y$  — полное сопротивление и полная проводимость цепи. Сложив квадраты активной (3.26) и реактивной (3.27) мощностей, получим

$$P^2 + Q^2 = U^2 I^2 = S^2 \text{ или } S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Из выражений (3.26) и (3.28) получим  $\cos\varphi = P/UI = P/S$ , т. е. коэффициент мощности  $\cos\varphi$  показывает, какую часть от полной мощности составляет активная мощность. Произведение

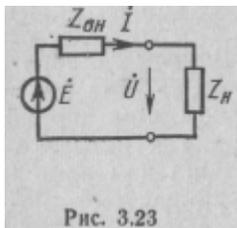


Рис. 3.23

комплексного напряжения  $\dot{U} = Ue^{j\psi_u}$  на сопряженный комплексный ток  $\dot{I} = Ie^{-j\psi_i}$  называют комплексной мощностью:

$$\begin{aligned} \tilde{S} = \dot{U}\dot{I}^* &= Ue^{j\psi_u} Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = UIe^{j\varphi} = \\ &= Se^{j\varphi} = S\cos\varphi + jS\sin\varphi = P + jQ. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Из этого выражения видно, что вещественная часть комплексной мощности является активной, а мнимая часть — реактивной мощностью. Модуль комплексной мощности является полной мощностью.

Особое обозначение комплексной мощности ( $S$ ) выбрано для того, чтобы подчеркнуть условный характер этой комплексной величины, так как от комплексной мощности нельзя перейти к ее мгновенному значению таким образом, как это делается для токов и напряжений. Эта величина вводится только для облегчения решения задач.

В заключение найдем условия передачи максимальной активной мощности от источника в нагрузку. Для этого рассмотрим цепь синусоидального тока, состоящую из источника э. д. с.  $E$  с внутренним сопротивлением  $Z_{вн} = r_{вн} + jx_{вн}$  и нагрузки  $Z_{н} = r_{н} + jx_{н}$  (рис. 3.23).

Действующий ток в рассматриваемой цепи

$$I = \frac{E}{z} = \frac{E}{\sqrt{(r_{вн} + r_{н})^2 + (x_{вн} + x_{н})^2}}. \quad (3.30)$$

Активная мощность в нагрузке

$$P_{н} = r_{н} I^2 = \frac{r_{н} E^2}{(r_{вн} + r_{н})^2 + (x_{вн} + x_{н})^2}. \quad (3.31)$$

Из этого выражения видно, что первым условием передачи максимальной активной мощности от источника в нагрузку является  $x_{н} = x_{вн}$ , т. е. равенство по величине и противоположность знаков реактивных сопротивлений источника и нагрузки. При выполнении этого условия из выражения (3.31) получим

$$P = r_{н} E^2 / (r_{вн} + r_{н})^2. \quad (3.32)$$

Взяв производную от этого выражения по  $r_n$  и приравняв ее к нулю, получим второе условие:  $r_n = r_{вн}$ , т. е. активное сопротивление нагрузки должно быть равно активному сопротивлению источника.

Таким образом, для получения максимальной активной мощности на нагрузке при заданных параметрах источника необходимо, чтобы сопротивление нагрузки было комплексно-сопряженным с внутренним сопротивлением источника, т. е. активное сопротивление нагрузки  $r_n$  должно быть равно активному сопротивлению источника  $r_{вн}$ , а реактивные сопротивления должны быть равны по величине и иметь противоположные знаки. Активная мощность на нагрузке в этом случае будет максимальной и равной  $P_{н.макс} = E^2 / 4r_{вн}$ . При этом коэффициент полезного действия будет равен

$$\eta = \frac{P_n}{P_0} = \frac{r_n I^2}{(r_n + r_{вн}) I^2} = 0,5.$$

Сопротивление нагрузки, при котором на ней получается максимальная активная мощность, называется согласованным. Режим в цепи в этом случае также называют согласованным.

### 3.8. ЦЕПЬ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ $r, L$ и $C$

Если к цепи, состоящей из параллельно соединенных элементов  $r, L$  и  $C$  (рис. 3.24), приложить синусоидальное напряжение  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ , то в ее неразветвленной части и ветвях потекут синусоидальные токи. Учитывая, что ток в ветви с активным сопротивлением  $i_r(t)$  совпадает по фазе с приложенным к ней напряжением, ток в ветви с индуктивностью  $i_L(t)$  отстает, а ток в ветви с емкостью  $i_C(t)$  опережает по фазе приложенное к этим ветвям напряжение на  $\pi/2$ , на основании первого закона Кирхгофа для мгновенных токов можно записать

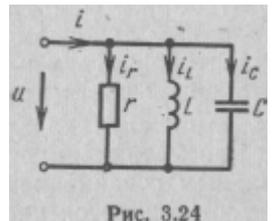


Рис. 3.24

$$i(t) = i_r + i_L + i_C = I_{mr} \sin(\omega t + \psi_u) + I_{mL} \sin(\omega t + \psi_u - \pi/2) + I_{mC} \sin(\omega t + \psi_u + \pi/2), \quad (3.33)$$

где  $I_{mr} = gU_m$ ;  $I_{mL} = b_L U_m$ ;  $I_{mC} = b_C U_m$ ;  $g = \frac{1}{r}$ ;  $b_L = \frac{1}{\omega L}$ ;  $b_C = \omega C$ .

На основании первого закона Кирхгофа в комплексной форме для рассматриваемой цепи можно записать

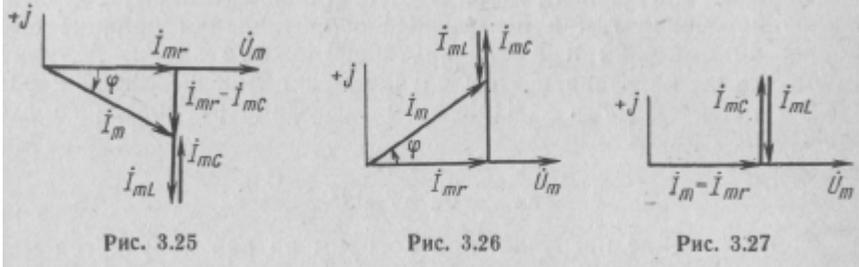
$$I_m = I_{mr} + I_{mL} + I_{mC} = I_{mr} e^{j\psi_u} + I_{mL} e^{j(\psi_u - \pi/2)} + I_{mC} e^{j(\psi_u + \pi/2)} = gU_m e^{j\psi_u} - j b_L U_m e^{j\psi_u} + j b_C U_m e^{j\psi_u} = \dot{U}_m [g - j(b_L - b_C)]. \quad (3.34)$$

### Комплексная проводимость цепи

$$Y = \frac{I_m}{U_m} = \frac{U_m [g - j(b_L - b_C)]}{U_m} = g - jb = ye^{-j\varphi}, \quad (3.35)$$

где  $b = b_L - b_C$ ;  $y = \sqrt{g^2 + b^2}$ ;  $\varphi = \arctg \frac{b}{g}$ .

Характер цепи зависит от величин индуктивной  $b_L$  и емкостной  $b_C$  проводимостей.



При  $b_L > b_C$  (рис. 3.25) сдвиг фаз между приложенным к цепи напряжением и током в ее неразветвленной части  $\varphi > 0$ , т. е. будет положительным. Ток в неразветвленной части цепи отстает от приложенного к ней напряжения. Цепь носит индуктивный характер.

При  $b_L < b_C$  (рис. 3.26)  $\varphi < 0$ , т. е. будет отрицательным. Ток в неразветвленной части цепи опережает приложенное к ней напряжение. Цепь носит емкостной характер.

При  $b_L = b_C$  (рис. 3.27)  $\varphi = 0$ . Ток в неразветвленной части цепи совпадает по фазе с приложенным к ней напряжением. Цепь носит характер чисто активного сопротивления и по отношению к входным зажимам эквивалентна цепи, состоящей из одного активного сопротивления  $r = 1/g$ . При этом амплитуда тока в неразветвленной части цепи  $I_m = gU_m$  будет меньше, чем в рассмотренных выше случаях, где она равна  $I_m = \sqrt{g^2 + b^2}U_m$ .

Рассматриваемое явление в цепи гармонического тока с параллельным соединением элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$ , при котором ее проводимость является чисто активной, называют резонансом токов.

Следует отметить, что при изменении частоты приложенного к цепи напряжения полная проводимость цепи и ее характер будут изменяться, так как реактивные проводимости  $b_L$  и  $b_C$  являются функциями частоты.

### Комплексное сопротивление рассматриваемой цепи

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{g - jb} = r_s + jx_s = ze^{j\varphi}, \quad (3.36)$$

где  $r_s = \frac{g}{y^2}$ ;  $x_s = \frac{b}{y^2}$ ;  $z = \sqrt{r_s^2 + x_s^2}$ ;  $\varphi = \arctg \frac{x_s}{r_s}$ .

Из полученного выражения следует, что рассматриваемую цепь, состоящую из параллельного соединения элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$ ,

по отношению к ее входным зажимам для фиксированной частоты можно заменить эквивалентной цепью, состоящей из последовательно соединенных активного сопротивления  $r_3 = g/y^2$  и реактивного элемента с сопротивлением  $x_3 = b/y^2$ . При  $b > 0$  это будет индуктивность, при  $b < 0$  — емкость, а при  $b = 0$  цепь будет состоять только из одного активного сопротивления.

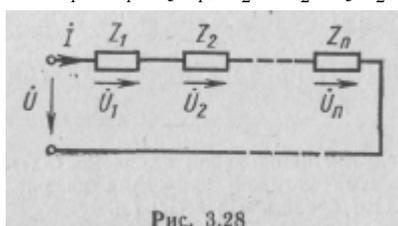
### 3.9. ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА НА ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Как уже указывалось в подразд. 3.4, вследствие того что форма записей законов Ома и Кирхгофа для цепей синусоидального тока в комплексном виде аналогична форме записи этих законов для цепей постоянного тока, все методы расчета цепей постоянного тока можно применить к расчету цепей синусоидального тока, представив все электрические величины в комплексной форме записи.

Рассмотрим порядок расчета цепей синусоидального тока при последовательном, параллельном и смешанном соединении сопротивлений, а также особенности расчета сложных цепей синусоидального тока методом комплексных амплитуд.

#### 3.9.1. Расчет цепей синусоидального тока с последовательным соединением сопротивлений

Пусть цепь состоит из  $n$  последовательно соединенных комплексных сопротивлений:  
 $Z_1 = r_1 + jx_1; Z_2 = r_2 + jx_2; \dots; Z_n = r_n + jx_n$  (рис. 3.28),



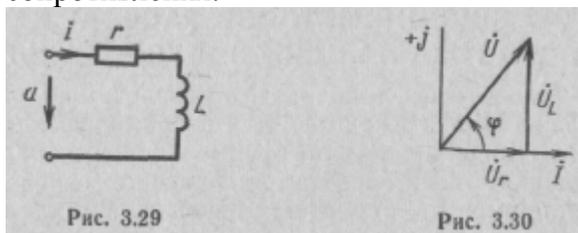
Под действием приложенного к цепи синусоидального напряжения  $U$  по ней потечет синусоидальный ток  $I$ . На основании второго закона Кирхгофа в комплексной форме для рассматриваемой цепи можно записать

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = Z_1 I + Z_2 I + \dots + Z_n I = Z_3 I,$$

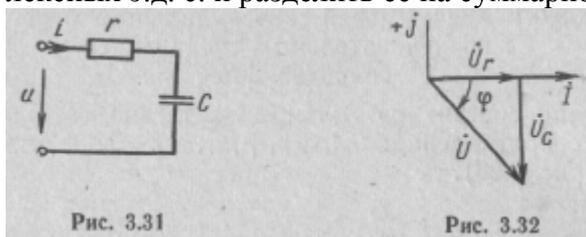
где  $Z_3 = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum_{k=1}^n Z_k = r_3 + jx_3 = z_3 e^{j\varphi_3},$

$$r_3 = \sum_{k=1}^n r_k; x_3 = \sum_{k=1}^n x_k; z_3 = \sqrt{r_3^2 + x_3^2}; \varphi_3 = \arctg \frac{x_3}{r_3}.$$

Следует отметить, что эквивалентное активное сопротивление  $z$ , равно арифметической сумме, а эквивалентное реактивное сопротивление  $x$ , равно алгебраической сумме, так как реактивные сопротивления отдельных элементов могут быть как положительными — в случае индуктивного характера сопротивления, так и отрицательными — в случае емкостного характера сопротивления.



Если в неразветвленной цепи синусоидального тока имеется несколько источников э.д.с. одинаковой частоты, то для нахождения комплексного тока в ней необходимо найти сумму комплексных э.д. с. и разделить ее на суммарное комплексное сопротивление цепи.



Рассмотрим примеры расчета неразветвленных цепей синусоидального тока.

### Пример 3.3.

Определить ток, падения напряжений на элементах и построить векторную диаграмму для цепи, схема которой приведена на рис. 3.29, если известно:  $U=120$  В;  $\varphi_u = 0$ ;  $r=6$  Ом;  $L = 25,5$  мГ;  $f=50$  Гц.

Решение.

$$x_L = \omega L = 2\pi fL = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 25,5 \cdot 10^{-3} = 8 \text{ Ом.}$$

$$Z = r + jx_L = 6 + j8 = 10e^{j53^\circ} \text{ Ом.}$$

$$I = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{120}{10e^{j53^\circ}} = 12e^{-j53^\circ} \text{ А.}$$

$$\dot{U}_r = rI = 6 \cdot 12e^{-j53^\circ} = 72e^{-j53^\circ} \text{ В.}$$

$$\dot{U}_L = jx_L I = 8 \cdot 12e^{-j53^\circ} e^{j90^\circ} = 96e^{j37^\circ} \text{ В.}$$

Векторная диаграмма приведена на рис. 3.30. Ток рассматриваемой цепи отстает по фазе от приложенного к ней напряжения на угол  $\varphi=53^\circ$ .

### Пример 3.4.

Определить ток, падения напряжений на элементах и построить векторную диаграмму для цепи, схема которой приведена на рис. 3.31, если известно:  $U=240$  В;  $\varphi_u = 0$ ;  $r=60$  Ом;  $C=40$  мкФ;  $f=50$  Гц.

Решение.

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 40 \cdot 10^{-6}} = 80 \text{ Ом.}$$

$$Z = r - jx_C = 60 - j80 = 100e^{-j53^\circ} \text{ Ом.}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{240}{100e^{-j53^\circ}} = 2,4e^{j53^\circ} \text{ А.}$$

$$\dot{U}_r = r\dot{I} = 60 \cdot 2,4e^{j53^\circ} = 144e^{j53^\circ} \text{ В.}$$

$$\dot{U}_C = -jx_C\dot{I} = 80 \cdot 2,4e^{j53^\circ} e^{-j90^\circ} = 192e^{-j37^\circ} \text{ В.}$$

Векторная диаграмма приведена на рис. 3.32. Ток в рассматриваемой цепи опережает приложенное к ней напряжение на угол  $\varphi=53^\circ$ .

### 3.9.2. Расчет цепей синусоидального тока с параллельным соединением сопротивлений

Пусть цепь состоит из  $n$  параллельно соединенных комплексных проводимостей  $Y_1 = g_1 + jb_1; Y_2 = g_2 + jb_2; \dots; Y_n = g_n + jb_n$  (рис 3.33).

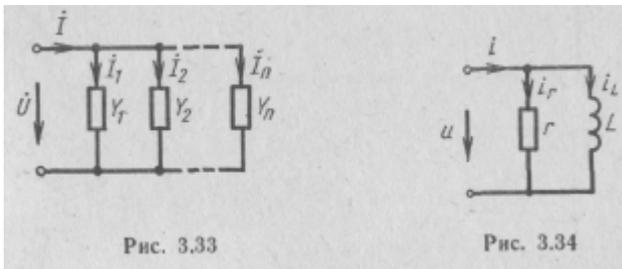


Рис. 3.33

Рис. 3.34

На основании первого закона Кирхгофа в комплексной форме для рассматриваемой цепи можно записать

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dots + \dot{I}_n = Y_1\dot{U} + Y_2\dot{U} + \dots + Y_n\dot{U} = Y_3\dot{U},$$

где  $Y_3 = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \sum_{k=1}^n Y_k = g_3 - jb_3 = y_3 e^{-j\varphi_3},$

$$g_3 = \sum_{k=1}^n g_k; b_3 = \sum_{k=1}^n b_k; y_3 = \sqrt{g_3^2 + b_3^2}; \varphi_3 = \arctg \frac{b_3}{g_3}.$$

Следует отметить, что эквивалентная активная проводимость  $g_3$  равна арифметической сумме, а эквивалентная реактивная проводимость  $b_3$  — алгебраической сумме.

Рассмотрим примеры расчета цепей синусоидального тока с параллельным соединением сопротивлений.

Пример 3.5.

Для схемы цепи, приведенной на рис. 3.34, определить ток в неразветвленной части цепи, токи в ветвях, полную, активную и реактивную мощности и

построить векторную диаграмму, если известно:  $U=120$  В;  $\psi_u = 0$ ;  $r=16,6$  Ом;  $L=40$  мГ;  $f=50$  Гц.

Решение.

$$b_L = \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{2\pi f L} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 40 \cdot 10^{-3}} = 0,08 \text{ См.}$$

$$g = \frac{1}{r} = \frac{1}{16,6} = 0,06 \text{ См.}$$

$$Y = g - jb_L = 0,06 - j0,08 = 0,1e^{-j53^\circ} \text{ См.}$$

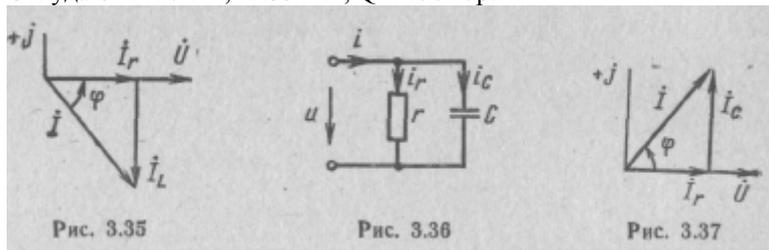
$$\dot{I} = Y\dot{U} = 0,1 \cdot 120e^{-j53^\circ} = 12e^{-j53^\circ} \text{ А.}$$

$$\dot{I}_r = g\dot{U} = 0,06 \cdot 120 = 7,2 \text{ А.}$$

$$\dot{I}_L = -jb_L\dot{U} = 0,08 \cdot 120e^{-j90^\circ} = 9,6e^{-j90^\circ} \text{ А.}$$

$$\tilde{S} = \dot{U}\dot{I}^* = 120 \cdot 12e^{j53^\circ} = 1440e^{j53^\circ} = 864 + j1150 \text{ В}\cdot\text{А.}$$

Откуда  $S=1440$  В·А;  $P=864$  Вт;  $Q=1150$  вар.



Из векторной диаграммы для рассматриваемой цепи, приведенной на рис. 3.35, видно, что ток в ветви с активной проводимостью совпадает по фазе с приложенным к ней напряжением, а ток в ветви с индуктивностью отстает по фазе от приложенного к ней напряжения на угол  $\pi/2$ . Ток в неразветвленной части цепи отстает по фазе от приложенного напряжения на угол  $\varphi=53^\circ$ , т. е. цепь носит индуктивный характер.

Пример 3.6.

Для схемы цепи, приведенной на рис. 3.36, определить ток в неразветвленной части цепи, токи в ветвях, полную, активную и реактивную мощности и построить векторную диаграмму, если известно:  $U=240$  В;  $\varphi_u=0$ ;  $r=16,6$  Ом;  $C=255$  мкФ;  $f=50$  Гц.

Решение.

$$b_C = \omega C = 2\pi f C = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 255 \cdot 10^{-6} = 0,08 \text{ См.}$$

$$g = \frac{1}{r} = \frac{1}{16,6} = 0,06 \text{ См.}$$

$$Y = g + jb_C = 0,06 + j \cdot 0,08 = 0,1e^{j53^\circ} \text{ См.}$$

$$\dot{I} = Y\dot{U} = 0,1 \cdot 240e^{j53^\circ} = 24e^{j53^\circ} \text{ А.}$$

$$\dot{I}_r = g\dot{U} = 0,06 \cdot 240 = 14,4 \text{ А.}$$

$$\dot{I}_C = jb_C\dot{U} = 0,08 \cdot 240e^{j90^\circ} = 19,2e^{j90^\circ} \text{ А.}$$

$$\tilde{S} = \dot{U}\dot{I}^* = 240 \cdot 24e^{-j53^\circ} = 5760e^{-j53^\circ} = 3460 - j4610 \text{ В}\cdot\text{А.}$$

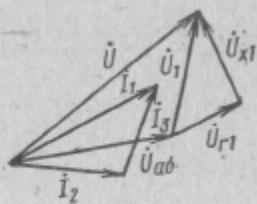
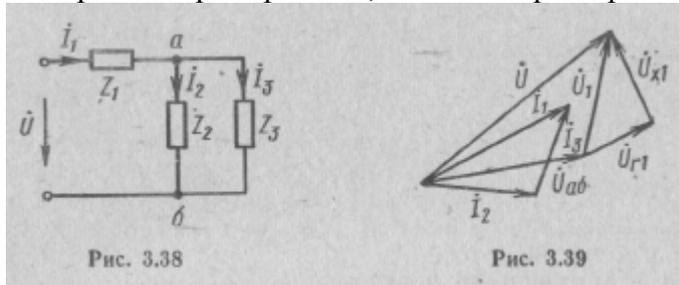
Откуда  $S=5760$  В·А;  $P=3460$  Вт;  $Q=4610$  вар.

Из векторной диаграммы для рассматриваемой цепи, приведенной на рис. 3.37, видно, что ток в ветви с активной проводимостью совпадает по фазе

с приложенным к ней напряжением, ток в ветви с емкостью опережает по фазе приложенное к ней напряжение на угол  $\pi/2$ , а ток в неразветвленной части цепи опережает по фазе приложенное к ней напряжение на угол  $\varphi = 53^\circ$ , т. е. цепь носит емкостный характер.

### 3.9.3. Расчет цепей синусоидального тока со смешанным соединением сопротивлений

Порядок расчета цепей синусоидального тока со смешанным соединением сопротивлений рассмотрим на примере цепи, схема которой приведена на рис. 3.38,



Комплексное эквивалентное сопротивление цепи

$$Z_{\text{э}} = Z_1 + Z_{a\bar{b}},$$

Где  $Z_{a\bar{b}} = Z_2 Z_3 / (Z_2 + Z_3)$ .

Комплексный ток в неразветвленной части цепи

$$\dot{I}_1 = \dot{U} / Z_{\text{э}}.$$

Комплексное напряжение на параллельном участке цепи

$$\dot{U}_{a\bar{b}} = \dot{I}_1 Z_{a\bar{b}} = \dot{I}_1 Z_2 Z_3 / (Z_2 + Z_3)$$

Комплексные токи в параллельных ветвях:

$$\dot{I}_2 = \frac{U_{a\bar{b}}}{Z_2} = \dot{I}_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3}; \dot{I}_3 = \frac{U_{a\bar{b}}}{Z_3} = \dot{I}_1 \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3}$$

Построение векторной диаграммы для цепи со смешанным соединением сопротивлений удобнее начинать с вектора напряжения на параллельном участке цепи  $U_{a\bar{b}}$ . На рис. 3.39 приведена векторная диаграмма для рассматриваемой цепи при  $Z_1 = r_1 - jx_1$ ;

$$Z_2 = r_2 - jx_2; Z_3 = r_3 - jx_3$$

### 3.9.4. Особенности расчета сложных цепей синусоидального тока

При расчете сложных цепей синусоидального тока имеет место ряд особенностей. Рассмотрим некоторые из них.

1. Если сдвиг фаз между напряжением и током в какой-либо ветви при расчете получился больше  $90^\circ$ , то направление тока

следует поменять на обратное, а фазу у тока изменить на  $180^\circ$ .

2. Баланс мощностей, вырабатываемых источниками и потребляемых нагрузками, следует подводить отдельно для активных и реактивных мощностей. При этом источник может вырабатывать энергию, если его мощность положительна, или потреблять ее, если его мощность отрицательна. Активная мощность на активных сопротивлениях положительна. Реактивная мощность на индуктивностях положительна, а на емкостях — отрицательна.

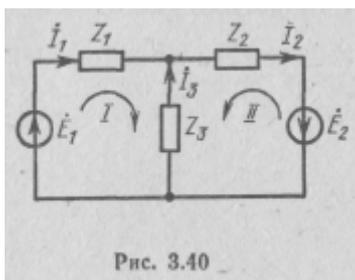


Рис. 3.40

3. При наличии индуктивных связей между индуктивными катушками можно применять только метод уравнений Кирхгофа и метод контурных токов, а метод эквивалентного генератора — только

для ветвей, не связанных индуктивно с другими ветвями. Цепи синусоидального тока  $\omega$  взаимной индуктивностью будут рассмотрены в разд. 5.

Рассмотрим пример расчета сложной цепи синусоидального тока.

### Пример 3.7.

В сложной электрической цепи (рис. 3.40) определить токи в ветвях и напряжения на сопротивлениях, построить векторную диаграмму и подвести баланс мощностей, если известны параметры цепи:  $\dot{E}_1 = 20e^{j30^\circ}$  В;  $\dot{E}_2 = 80$  В;  $Z_1 = (26 + j25)$  Ом;  $Z_2 = (26 - j5)$  Ом;  $Z_3 = j10$  Ом.

Решение.

Воспользовавшись методом контурных токов, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{E}_I &= Z_{11}\dot{I}_I + Z_{12}\dot{I}_{II}; \\ \dot{E}_{II} &= Z_{21}\dot{I}_I + Z_{22}\dot{I}_{II}, \end{aligned}$$

где  $Z_{11} = Z_1 + Z_3 = 26 + j25 - j10 = 26 + j15 = 30e^{j30^\circ}$  Ом;  
 $Z_{22} = Z_2 + Z_3 = 26 - j5 - j10 = 26 - j15 = 30e^{-j30^\circ}$  Ом;  
 $Z_{12} = Z_{21} = Z_3 = -j10$  Ом;  
 $\dot{E}_I = \dot{E}_1 = 20e^{j30^\circ}$  В;  $\dot{E}_{II} = -\dot{E}_2 = -80$  В.

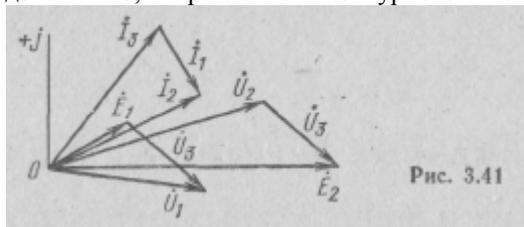
Найдем определители:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 30e^{j30^\circ} & -j10 \\ -j10 & 30e^{-j30^\circ} \end{vmatrix} = 1000; \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} \dot{E}_I & Z_{12} \\ \dot{E}_{II} & Z_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20e^{j30^\circ} & -j10 \\ -80 & 30e^{-j30^\circ} \end{vmatrix} = 1000e^{j53^\circ 7'}; \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} Z_{11} & \dot{E}_I \\ Z_{21} & \dot{E}_{II} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 30e^{j30^\circ} & 20e^{j30^\circ} \\ -j10 & -80 \end{vmatrix} = 2410e^{j205^\circ 10'}. \end{aligned}$$

Определим контурные токи:

$$\begin{aligned} \dot{I}_I &= \Delta_1 / \Delta = 1000e^{-j53^\circ 7'} / 1000 = e^{-j53^\circ 7'} \text{ А}; \\ \dot{I}_{II} &= \Delta_2 / \Delta = 2410e^{j205^\circ 10'} / 1000 = 2,41e^{j205^\circ 10'} \text{ А}. \end{aligned}$$

Определим направление полученных контурных токов по сдвигу фаз между контурными э. д. с. и соответствующими контурными токами. Так как  $\varphi_1 = \psi_{E_1} - \psi_{J_1} = 30^\circ - (-53^\circ 7') = 87^\circ 7'$  не превышает  $90^\circ$ , то, следовательно, направление контурного тока в первом контуре выбрано правильно.



$\varphi_1 = \psi_{E_{II}} - \psi_{J_{II}} = 0 - 205^\circ 10' = -205^\circ 10'$ , т. е. больше  $90^\circ$ , поэтому направление контурного тока во втором контуре следует изменить на обратное, а фазу у комплексного тока  $\dot{I}_m$  изменить на  $180^\circ$ . При этом получим

$$\dot{I}_{II} = 2,41e^{j(205^\circ 10' - 180^\circ)} = 2,41e^{j25^\circ 10'} \text{ А.}$$

Определим токи в ветвях:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_I = e^{-j53^\circ 7'} \text{ А; } \dot{I}_2 = \dot{I}_{II} = 2,41e^{j25^\circ 10'} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_{II} - \dot{I}_1 = 2,41e^{j25^\circ 10'} - e^{-j53^\circ 7'} = 2,414e^{j49^\circ} \text{ А.}$$

Подведем баланс мощностей. Мощность источников:

$$\tilde{S}_1 = \dot{E}_1 \dot{I}_1^* = 20e^{j30^\circ} \cdot 1e^{j53^\circ 7'} = (2,4 + j19,9) \text{ В} \cdot \text{А};$$

$$\tilde{S}_2 = \dot{E}_2 \dot{I}_2^* = 80 \cdot 2,41e^{j25^\circ 10'} = (174,6 - j82,2) \text{ В} \cdot \text{А};$$

$$P_{\text{ист}} = P_1 + P_2 = 2,4 + 174,6 = 177 \text{ Вт};$$

$$Q_{\text{ист}} = Q_1 + Q_2 = 19,9 - 82,2 = -62,3 \text{ вар.}$$

Мощности потребителей энергии:

$$P_{\text{потреб}} = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2 = 1 \cdot 26 + 2,41^2 \cdot 26 = 177 \text{ Вт};$$

$$Q_{\text{потреб}} = I_1^2 x_1 - I_2^2 x_2 - I_3^2 x_3 = 25 - 2,41^2 \cdot 5 - 2,41^2 \cdot 10 = -62,3 \text{ вар.}$$

Таким образом,

$$P_{\text{ист}} = P_{\text{потреб}}; \quad Q_{\text{ист}} = Q_{\text{потреб}}.$$

Найдем напряжения на сопротивлениях:

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_1 = e^{-j53^\circ 7'} \cdot 36e^{j43^\circ 50'} = 36e^{-j9^\circ 17'} \text{ В};$$

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_2 = 2,41e^{j25^\circ 10'} \cdot 26e^{-j10^\circ 55'} = 63,6e^{j14^\circ 15'} \text{ В};$$

$$\dot{U}_3 = \dot{I}_3 Z_3 = 2,414e^{j49^\circ} \cdot 10e^{-j90^\circ} = 24,14e^{-j41^\circ} \text{ В.}$$

Векторная диаграмма для рассматриваемой цепи приведена на рис. 3.41.

## 4. ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

### 4.1. ПОНЯТИЕ О МНОГОФАЗНЫХ ЦЕПЯХ И СИСТЕМАХ

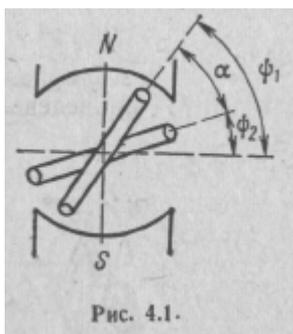
Если между полюсами постоянного магнита (рис. 4.1) поместить два жестко скрепленных между собой витка, плоскости которых образуют угол  $\alpha$ , и вращать эти витки с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , то в них будут индуцироваться э. д. с.:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= E_{m1} \sin(\omega t + \psi_1); \\ e_2 &= E_{m2} \sin(\omega t + \psi_2). \end{aligned} \right\}$$

Так как  $\psi_2 = \psi_1 - \alpha$ , то для  $e_2$  получим

$$e_2 = E_m \sin(\omega t + \psi_1 - \alpha), \quad (4.2)$$

т. е. э. д. с.  $e_2$  отстает по фазе от э. д. с.  $e_1$  на постоянный угол  $\alpha$ .



Если в одном источнике создается несколько синусоидальных э. д. с., имеющих одну и ту же частоту, но сдвинутых между собой по фазе на некоторые постоянные углы, то такой источник э. д. с. называют многофазным. Рассмотренное выше устройство является двухфазным источником э. д. с. Совокупность электрических цепей, в которых действуют синусоидальные э. д. с. одной и той же частоты, сдвинутые друг относительно друга по фазе, создаваемые общим источником электрической энергии, называют многофазной системой электрических цепей.

Совокупность синусоидальных электрических токов (напряжений, э. д. с.) одной частоты, сдвинутых друг относительно друга по фазе, действующих в многофазной системе электрических цепей, называют многофазной системой электрических токов (напряжений, э. д. с.).

Часть многофазной системы электрических цепей, в которой может протекать один из токов многофазной системы токов, называют фазой многофазной системы цепей.

Многофазную систему электрических цепей, в которой отдель-

ные фазы электрически соединены друг с другом, называют многофазной цепью. Если комплексные сопротивления составляющих фаз многофазной цепи одинаковы, то цепь называют симметричной.

Многофазную систему электрических токов (напряжений, э.д.с.), в которой отдельные электрические токи (напряжения, э. д. с.) равны по амплитуде и отстают по фазе друг относительно друга на углы, равные  $2\pi/m$ , где  $m$  — число фаз, называют симметричной многофазной системой электрических токов (напряжений, э.д. с.).

По числу фаз многофазные цепи делятся на двухфазные, трехфазные и т. д. Однофазная цепь может быть как частью многофазной цепи, так и самостоятельной цепью.

Из многофазных электрических цепей наибольшее применение на практике находят трехфазные цепи, предложенные русским ученым М. О. Доливо-Добровольским в 1891 г. В дальнейшем ограничимся рассмотрением трехфазных электрических цепей.

#### 4.2. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЛИНЕЙНЫМИ И ФАЗНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ В ТРЕХФАЗНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Источниками электрической энергии в трехфазных цепях являются трехфазные генераторы, создающие, как правило, симметричную систему э. д. с., мгновенные значения которых можно записать в виде:

$$e_1 = E_m \sin \omega t; e_2 = E_m \sin(\omega t - 120^\circ); e_3 = E_m \sin(\omega t - 240^\circ), \quad (4.3)$$

где начальная фаза э. д. с.  $e_1$  принята равной нулю. Векторная диаграмма и графики мгновенных значений этих э.д.с. приведены на рис. 4.2.

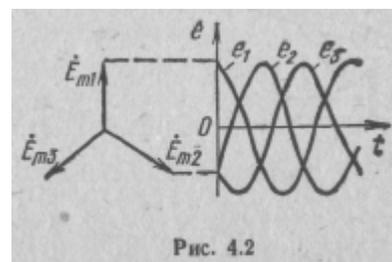


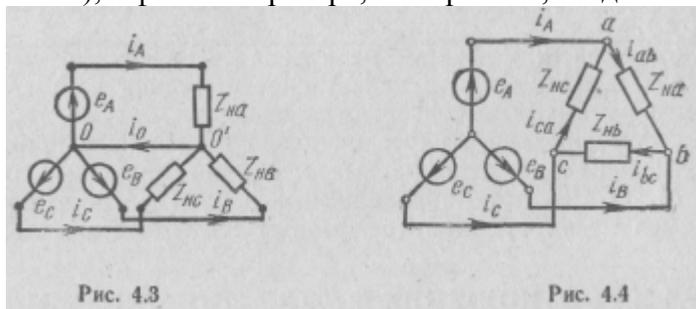
Рис. 4.2

Порядок, в котором э.д.с. проходят через одинаковые значения, например через положительные максимумы, называют последовательностью фаз или порядком чередования фаз. В показанной на рис. 4.2 системе э.д.с. положительный максимум наступает сначала в первой фазе, затем во второй, а затем в третьей. Такой порядок следования фаз называют прямым (1, 2, 3). Если на рис. 4.2 поменять местами векторы  $E_{m2}$  и  $E_{m3}$ , то порядок следования фаз будет обратным (1, 3, 2).

Следует отметить, что в трехфазных электрических цепях первую фазу обычно называют фазой **A**, вторую — фазой **B**, а третью — фазой **C**. При этом у всех электрических величин, относящихся к генератору трехфазной э.д.с., ставят индексы **A**, **B**,

С, а у всех электрических величин, относящихся к нагрузке, ставят индексы  $a, B, c$ . Начала фаз генератора обозначают большими буквами  $A, B, C$ , а концы фаз —  $X, Y, Z$ . Начала и концы фаз потребителя обычно обозначают малыми буквами соответственно  $a, B, c$  и  $x, y, z$ .

Фазы нагрузки трехфазной цепи соединяют в виде звезды (рис. 4.3) или в виде треугольника (рис. 4.4), а фазы генератора, как правило, соединяют в звезду, так как при соединении этих фаз



в треугольник возможно возникновение так называемых уравнительных токов в обмотках (фазах) генератора. Эти токи не будут возникать только тогда, когда суммарная э. д. с. фаз генератора будет равна нулю, что возможно только при полной симметрии э. д. с. фаз генератора. Для этого необходимо выполнить обмотки фаз генератора совершенно одинаковыми, что практически невозможно. Поэтому при соединении фаз генератора в треугольник внутри него возникает некоторая суммарная э. д. с., отличная от нуля. А так как сопротивления обмоток обычно малы, то даже при небольшой величине суммарной э. д. с. в обмотках генератора величина тока будет значительной.

Трехфазный генератор соединяется с нагрузкой четырьмя ли-нейными проводами (см. рис. 4.3) либо тремя (см. рис. 4.4). Общие точки генераторов  $O$  и потребителей  $O'$  называют нулевыми (нейтральными) точками. Провод, соединяющий эти точки, называют нулевым или нейтральным проводом.

Напряжения между нейтральными точками и зажимами фаз, а также токи в фазах генераторов и потребителей называют фазными. Напряжения между линейными проводами, а также токи в этих проводах называют линейными.

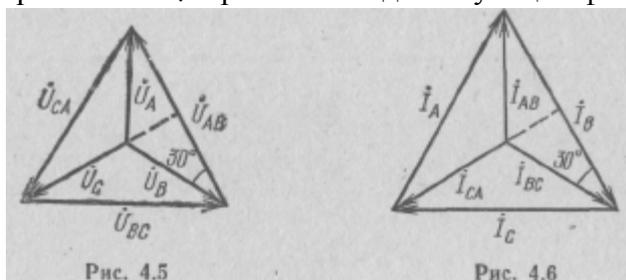
Для установления зависимостей между линейными и фазными напряжениями в симметричной трехфазной цепи при соединении фаз нагрузки звездой рассмотрим векторную диаграмму, приведенную на рис. 4.5. Так как система симметрична, то действующие напряжения:

$$U_A = U_B = U_C = U_{\phi}; U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_{л}. \quad (4.4)$$

Из векторной диаграммы видно, что

$$\frac{1}{2}U_{\text{л}} = U_{\text{ф}} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}U_{\text{ф}} \text{ или } U_{\text{л}} = \sqrt{3}U_{\text{ф}} \quad (4.5)$$

т. е. в симметричной трехфазной цепи при соединении фаз звездой действующие линейные напряжения в  $\sqrt{3}$  раз больше действующих фазных напряжений. Благодаря этому в четырехпро-



водной трехфазной электрической цепи имеется возможность дать потребителям два различных напряжения — линейное или фазное. Из рис. 4.3 видно, что в симметричной трехфазной цепи при соединении фаз нагрузки звездой фазные токи равны линейным, т. е.

$$I_{\text{ф}} = I_{\text{л}} \quad (4.6)$$

При этом сумма комплексных токов равна нулю:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0,$$

так как система токов является симметричной. Поэтому ток в нулевом проводе  $I_0$  равен нулю, т. е. цепь может быть трехпроводной.

Для установления зависимостей между линейными и фазными величинами в симметричной трехфазной цепи при соединении фаз нагрузки треугольником воспользуемся схемой цепи, приведенной на рис. 4.4, из которой видно, что при рассматриваемом соединении фаз нагрузки линейные напряжения равны фазным:

$$U_{\text{л}} = U_{\text{ф}}. \quad (4.7)$$

Для установления зависимостей между линейными и фазными токами применим первый закон Кирхгофа к точкам  $a$ ,  $b$ ,  $c$  рассматриваемой схемы:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}, \quad (4.8)$$

где  $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$  — комплексные токи в линейных проводах;

$\dot{I}_{ab}, \dot{I}_{bc}, \dot{I}_{ca}$  — комплексные токи в фазах треугольника нагрузки. Для симметричной системы фазных и линейных токов уравнениям (4.8) соответствует векторная диаграмма, приведенная на рис. 4.6, из которой видно, что

$$\frac{1}{2}I_{\text{л}} = I_{\text{ф}} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}I_{\text{ф}}$$

откуда

$$I_{\text{л}} = \sqrt{3}I_{\phi}. \quad (4.9)$$

т. е. в симметричной трехфазной цепи при соединении фаз нагрузки треугольником линейный ток в  $\sqrt{3}$  раз больше фазного.

### 4.3. МОЩНОСТЬ ТРЕХФАЗНОЙ ЦЕПИ

Активная мощность трехфазной цепи равна сумме активных мощностей фаз:

$$P = P_A + P_B + P_C = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C \quad P, \quad (4.10)$$

где  $U$  и  $I$  — действующие напряжение и ток в фазах;

$\varphi$  — сдвиг фаз между напряжениями и токами в фазах. В симметричной трехфазной цепи суммарная активная мощность равна утроенной активной мощности одной фазы:

$$P = 3P_{\phi} = 3U_{\phi}I_{\phi}\cos\varphi_{\phi}. \quad (4.11)$$

Если фазы нагрузки соединены звездой, то, учитывая соотношения (4.5) и (4.6), получим

$$P = 3 \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}} I_{\text{л}} \cos \varphi_{\phi} = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi_{\phi} \quad P$$

Если фазы нагрузки соединены треугольником, то, учитывая выражения (4.7) и (4.9), получим

$$P = 3U_{\text{л}} \frac{I_{\text{л}}}{\sqrt{3}} \cos \varphi_{\phi} = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi_{\phi}.$$

Таким образом, в симметричной трехфазной цепи независимо от схемы соединения фаз нагрузки активная мощность определяется одним и тем же выражением

$$P = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi_{\phi} \quad (4.12)$$

где  $\varphi_{\phi}$  — сдвиг фаз между фазными напряжениями и токами.

Реактивной мощностью трехфазной цепи принято считать сумму реактивных мощностей фаз:

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = U_A I_A \sin \varphi_A + U_B I_B \sin \varphi_B + U_C I_C \sin \varphi_C \quad Q. \quad (4.13)$$

В симметричной трехфазной цепи суммарная реактивная мощность равна утроенной реактивной мощности одной фазы:

$$Q = 3Q_{\phi} = 3U_{\phi}I_{\phi}\sin\varphi_{\phi} = \sqrt{3}U_{\text{л}}I_{\text{л}}\sin\varphi_{\phi}. \quad (4.14)$$

Полная мощность трехфазной цепи определяется выражением

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad (4.15)$$

где  $P$  и  $Q$  — активная и реактивная мощности цепи.

Для симметричной трехфазной цепи полная мощность

$$S = 3U_{\phi}I_{\phi} = \sqrt{3}U_{\text{л}}I_{\text{л}} \quad (4.16)$$

Мгновенная мощность трехфазной цепи равна сумме мгновенных мощностей фаз. Можно показать [20], что в симметричной трехфазной цепи эта мощность постоянна и равна активной мощности.

Многофазные цепи, в которых мгновенная мощность постоянна, называют уравновешенными.

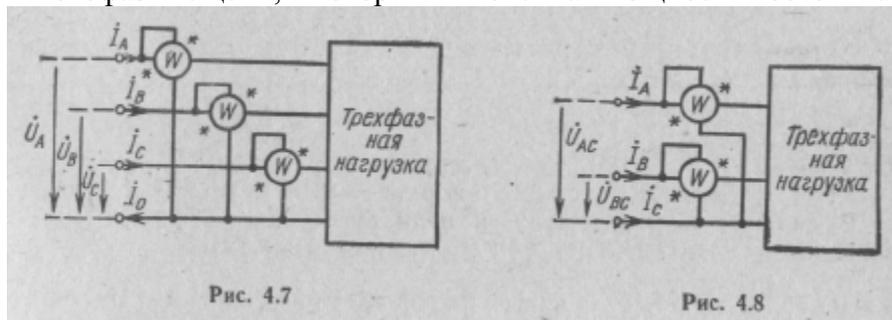


Рис. 4.7

Рис. 4.8

Для измерения активной мощности в несимметричной трехфазной цепи с нейтральным проводом необходимы три ваттметра (рис. 4.7). Суммарная активная мощность такой цепи равна сумме показаний трех ваттметров.

При отсутствии нейтрального провода активная мощность может быть измерена с помощью двух ваттметров (рис. 4.8). Чтобы показать это, преобразуем выражение комплексной мощности трехфазной цепи

$$\tilde{S} = \dot{U}_A \dot{I}_A + \dot{U}_B \dot{I}_B + \dot{U}_C \dot{I}_C.$$

Исключив из этого выражения  $\dot{I}_C = -\dot{I}_A - \dot{I}_B$ , получим

$$\tilde{S} = (\dot{U}_A - \dot{U}_C) \dot{I}_A + (\dot{U}_B - \dot{U}_C) \dot{I}_B = \dot{U}_{AC} \dot{I}_A + \dot{U}_{BC} \dot{I}_B.$$

В соответствии с этим выражением при измерении активной мощности двумя ваттметрами к одному из них подводится напряжение  $U_{AC}$  и ток  $I_A$ , а ко второму — напряжение  $U_{BC}$  и ток  $I_B$ . Показания ваттметров складываются алгебраически. При этом следует иметь в виду, что если стрелка одного ваттметра отклоняется по шкале в противоположную сторону, то следует изменить на обратное направление напряжения или тока через этот ваттметр. Его показание берут со знаком «минус».

В симметричной трехфазной цепи с нейтральным проводом суммарную активную мощность на нагрузке можно измерить одним ваттметром (рис. 4.9), умножив его показание на три.

Для измерения активной мощности в симметричной трехфазной цепи при отсутствии нейтральной точки можно воспользоваться схемой, приведенной на рис. 4.10, где параллельная цепь

ваттметра и два добавочных сопротивления  $r_d$ , равные по величине сопротивлению параллельной цепи ваттметра, образуют искусственную нейтральную точку  $O$ ,

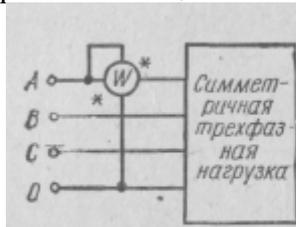


Рис. 4.9

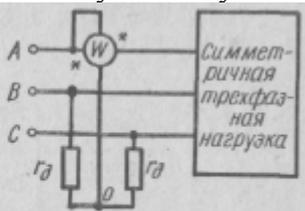


Рис. 4.10

#### 4.4. РАСЧЕТ ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ

Наиболее простым является расчет симметричной трехфазной электрической цепи при соединении фаз источника и нагрузки звездой (см. рис. 4.3). В этом случае расчет трехфазной цепи сводится по существу к расчету одной фазы, т. е. к расчету однофазной цепи. Так как потенциал нулевых точек источника и потребителя  $0$  и  $0'$  (см. рис. 4.3) в симметричной цепи равны между собой, то сопротивление линейного нейтрального провода можно не учитывать. При этом каждую из фаз можно представить в виде однофазной электрической цепи, схема которой приведена на рис. 4.11, где  $e$  — э.д.с. фазного источника,  $Z_{вн}$ ,  $Z_H$  и  $Z_L$  — внутреннее сопротивление источника э.д.с., сопротивление нагрузки и сопротивление линейного провода,  $u$  и  $u_H$  — напряжения на зажимах источника э. д. с. и на нагрузке.

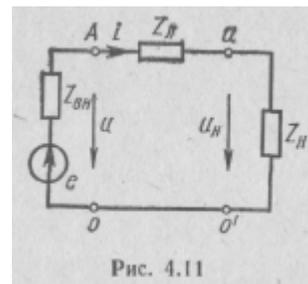


Рис. 4.11

В задачах на расчет цепи обычно заданными являются величины э. д. с. источников и величины всех сопротивлений, а неизвестными — токи и напряжения на отдельных участках цепи. Расчет цепи удобнее вести с помощью закона Ома в комплексной форме.

При этом для рассматриваемой цепи получим

$$\dot{I} = \dot{E} / Z_{\Sigma} \quad (4.17)$$

где  $Z_{\Sigma} = Z_{вн} + Z_H + Z_L$ ;  $\dot{U} = \dot{E} - \dot{I}Z_{вн}$ ;  $\dot{U}_H = \dot{I}Z_H$ .

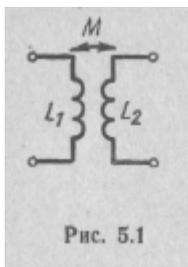
Если в симметричной трехфазной цепи фазы нагрузки соединены в треугольник, то при расчете таких цепей целесообразно сначала преобразовать треугольник сопротивлений в звезду, а затем вести расчет,

При расчете несимметричных трехфазных цепей можно использовать общие методы расчета сложных цепей синусоидального тока, рассмотренные в разд. 3. Однако на практике для расчета таких цепей часто используют так называемый метод симметричных составляющих [20].

## 5. ЦЕПИ СО ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ

### 5.1. ИНДУКТИВНАЯ СВЯЗЬ. СТЕПЕНЬ СВЯЗИ И КОЭФФИЦИЕНТ СВЯЗИ

Электрические цепи, процессы в которых влияют друг на друга посредством общего магнитного поля или общего электрического поля, называют связанными цепями. Связь электрических цепей посредством магнитного поля называют индуктивной связью.



Рассмотрим две индуктивно связанные катушки (рис. 5.1). Если к первой подключить переменное напряжение, то по ней будет проходить переменный ток  $i_1$ . Этот ток создает магнитное поле, которое будет пересекать витки первой катушки и частично витки второй катушки. При этом в первой катушке будет наводиться э.д.с. самоиндукции

$$e_{11} = -L_1 \frac{di_1}{dt}. \quad (5.1)$$

а во второй катушке — э.д.с. взаимной индукции

$$e_{21} = -M \frac{di_1}{dt} \quad (5.2)$$

где  $M$  — взаимная индуктивность.

Взаимной индуктивностью или коэффициентом взаимной индукции называют скалярную величину, равную отношению потокосцепления взаимной индукции одного элемента электрической цепи к току в другом элементе, обуславливающему это потокосцепление:

$$M = \psi_{12} / i_2 = \psi_{21} / i_1,$$

где  $\psi_{12}$  — потокосцепление первой индуктивной катушки, обусловленное током во второй катушке;

$\psi_{21}$  — потокосцепление второй катушки, обусловленное током в первой катушке.

Так же как и индуктивность  $L$ , взаимная индуктивность  $M$  измеряется в генри (Г).

Если соединить между собой зажимы второй катушки, то по ней под действием э. д. с. взаимной индукции  $e_2$  будет проходить ток  $i_2$ . Этот ток создает свой магнитный поток, который будет пересекать витки второй катушки и частично витки первой катушки. При этом во второй катушке будет наводиться э. д. с. самоиндукции

$$e_{22} = -L \frac{di_2}{dt}, \quad (5.3)$$

а в первой катушке – э. д. с. взаимной индукции

$$e_{12} = -M \frac{di_2}{dt} \quad (5.4)$$

Отношение э. д. с. взаимной индукции к э. д. с. самоиндукции, созданных одним током, называют степенью связи:

$$k_{21} = e_{21} / e_{11} = M / L_1; k = e_{12} / e_{22} = M / L_2 k, \quad (5.5)$$

где  $k_{21}$  — степень связи второй катушки с первой;

$k_{12}$  — степень связи первой катушки со второй.

Физически степень индуктивной связи показывает, какая часть магнитного потока одной катушки при отсутствии тока во второй, проходит через витки второй катушки.

Среднее геометрическое из степеней связи называют коэффициентом связи:

$$k = \sqrt{k_{21} k_{12}} = M / \sqrt{L_1 L_2}. \quad (5.6)$$

Коэффициент связи всегда меньше единицы. Для приближения его к единице необходимо витки одной из катушек плотно наложить на витки второй катушки.

## 5.2. СОГЛАСНОЕ И ВСТРЕЧНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ ИНДУКТИВНЫХ КАТУШЕК

Под словом «включение» понимают не электрическое соединение индуктивных катушек, а взаимодействие их магнитных потоков. Различают согласное и встречное включение катушек.

Согласным называют такое включение катушек, при котором их магнитные потоки, создающие э. д. с. самоиндукции и взаимной индукции, имеют одинаковое направление. При этом результирующие э.д. с., наводимые в катушках, равны сумме их э.д.с. самоиндукции и взаимной индукции:  $e_1 = e_{11} + e_{12}$  и  $e_2 = e_{22} + e_{21}$ .

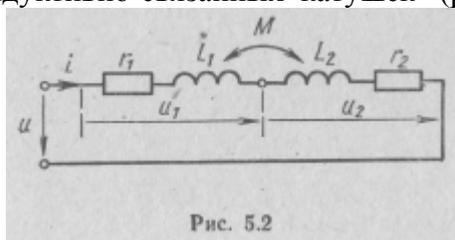
Встречным называют такое включение катушек, при котором их магнитные потоки, создающие э.д. с. самоиндукции и взаимной индукции, направлены встречно. При этом результирующие э.д.с., наводимые в катушках, равны разности э.д. с. самоиндукции и взаимной индукции:  $e_1 = e_{11} - e_{12}$  и  $e_2 = e_{22} - e_{21}$ .

Для того чтобы различать на схемах согласное и встречное включение катушек, их зажимам условились приписывать полярность, обозначая одноименные зажимы звездочками или точками.

Одноименными называют такие зажимы, когда при одинаковых направлениях токов относительно них катушки оказываются включенными согласно.

### 5.3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ИНДУКТИВНО-СВЯЗАННЫХ КАТУШЕК

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из двух последовательно соединенных индуктивно-связанных катушек (рис. 5.2).



В соответствии со вторым-законом Кирхгофа для мгновенных значений можно записать

$$u = u_1 + u_2,$$

где  $u_1 = ir_1 - e_1 = ir_1 - (e_{11} \pm e_{12}) = ir_1 + L_1 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt};$   
 $u_2 = ir_2 - e_2 = ir_2 - (e_{22} \pm e_{21}) = ir_2 + L_2 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt}.$

Знак «плюс» перед слагаемыми  $e_{12}$ ,  $e_{21}$  и  $M \frac{di}{dt}$  — для согласного включения катушек, знак «минус» — для встречного включения.

Если к рассматриваемой цепи приложено синусоидальное напряжение, то для комплексных тока и напряжений получим

$$\begin{aligned} \dot{U} &= r_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} \pm j\omega M \dot{I} + r_2 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} \pm j\omega M \dot{I} = Z_3 \dot{I} = \\ &= (r_3 + jx_3) \dot{I}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

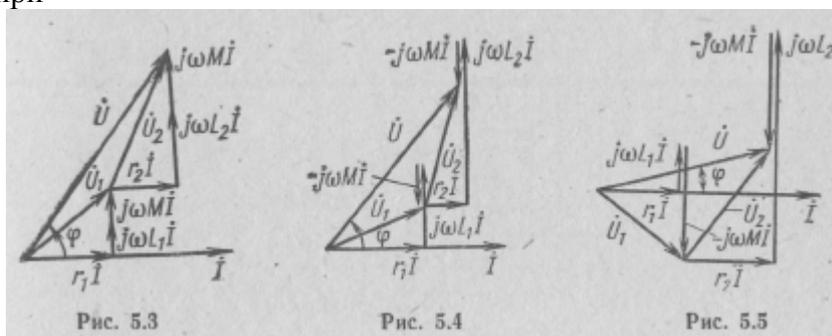
где  $r_3 = r_1 + r_2$ ;  $x_3 = \omega L_3$ ;  $L_3 = L_1 + L_2 \pm 2M$ .

При согласном включении катушек эквивалентная индуктивность  $L_{3,c} = L_1 + L_2 + 2M$ , при встречном включении  $L_{3,c} = L_1 + L_2 - 2M$ , т. е. эквивалентная индуктивность зависит от способа включения катушек. При согласном включении она больше на  $2M$ , а при встречном включении — меньше на  $2M$  эквивалентной индуктивности катушек без индуктивной связи.

Это свойство цепи с последовательным соединением индуктивно связанных катушек используется в вариометре — устройстве, позволяющем плавно изменять индуктивность. Вариометр состоит из двух последовательно соединенных индуктивных кату-

шек, одна из которых находится внутри другой и может вращаться таким образом, чтобы угол между осями катушек изменялся в пределах от 0 до 180°.

Изменяя способ включения катушек, можно экспериментально определить взаимную индуктивность  $M$  между ними. При этом измеряют эквивалентную индуктивность при согласном и при



встречном включении. Решая совместно уравнения  $L_{\text{с.с}} = L_1 + L_2 + 2M$  и

$L_{\text{с.в}} = L_1 + L_2 - 2M$ , получим

$$M = (L_{\text{с.с}} - L_{\text{с.в}}) / 4. \quad (5.8)$$

Векторная диаграмма для рассматриваемой цепи при согласном включении катушек приведена на рис. 5.3, а при встречном включении – на рис. 5.4.

Взаимная индуктивность  $M$  может быть больше одной из индуктивностей катушек. В этом случае при встречном включении катушек в катушке, индуктивность  $L$  которой меньше взаимной индуктивности  $M$ , ток будет опережать напряжение на этой катушке (рис. 5.5), т. е. катушка будет вести себя как емкость. Это явление называют емкостным эффектом. Однако в целом цепь будет носить индуктивный характер.

#### 5.4. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ИНДУКТИВНО-СВЯЗАННЫХ КАТУШЕК

Если к цепи, состоящей из параллельного соединения индуктивно-связанных катушек (рис. 5.6), приложено синусоидальное напряжение, то на основании второго закона Кирхгофа в комплексной форме для нее можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= r_1 I_1 + j\omega L_1 I_1 \pm j\omega M I_2; \\ \dot{U} &= r_2 I_2 + j\omega L_2 I_2 \pm j\omega M I_1. \end{aligned} \right\}$$

В этих уравнениях знак «плюс» у последних слагаемых соответствует согласному включению катушек, а знак «минус» — встречному включению.

Обозначив  $Z_1 = r_1 + j\omega L_1$ ;  $Z_2 = r_2 + j\omega L_2$  и  $Z_M = r_M + j\omega L_M$ , из выражения (5.9) получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= Z_1 \dot{I}_1 \pm Z_M \dot{I}_2 \\ \dot{U} &= \pm Z_M \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

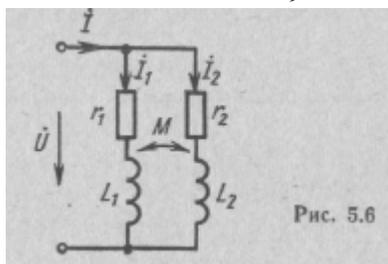


Рис. 5.6

Решая эту систему методом определителей, получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_1 \pm Z_M & \\ \pm Z_M & Z_2 \end{vmatrix} = Z_1 Z_2 - Z_M^2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dot{U} \pm Z_M & \\ \dot{U} & Z_2 \end{vmatrix} = \dot{U} (Z_2 \mp Z_M);$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} Z_1 & \dot{U} \\ \pm Z_M & \dot{U} \end{vmatrix} = \dot{U} (Z_1 \mp Z_M);$$

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\dot{U} (Z_2 \mp Z_M)}{Z_1 Z_2 - Z_M^2}; \quad I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\dot{U} (Z_1 \mp Z_M)}{Z_1 Z_2 - Z_M^2}.$$

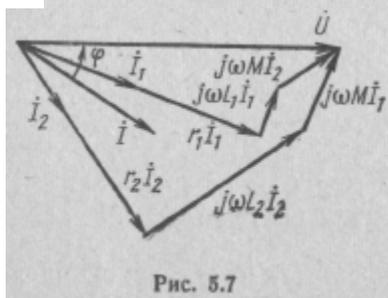


Рис. 5.7

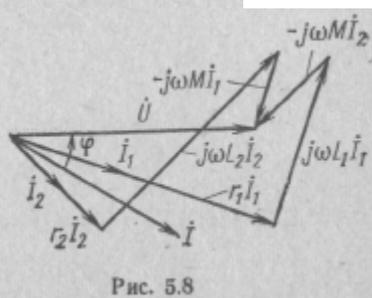


Рис. 5.8

На основании первого закона Кирхгофа в комплексной форме для комплексного тока в неразветвленной части цепи получим

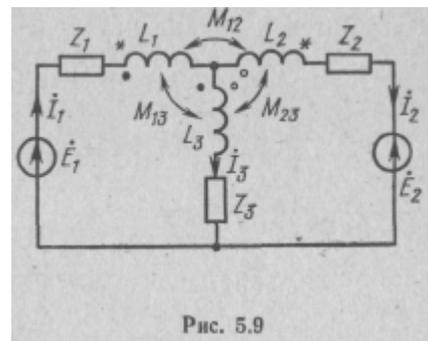
$$I = I_1 + I_2 = \frac{Z_1 + Z_2 \mp 2Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \dot{U}.$$

Векторная диаграмма для рассматриваемой цепи при согласном включении катушек приведена на рис. 5.7, а при встречном включении — на рис. 5.8,

Следует отметить, что при параллельном соединении индуктивно-связанных катушек также возможен емкостной эффект.

### 5.5. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА СЛОЖНЫХ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА СО ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИЕЙ

Так как токи в ветвях с индуктивными связями зависят не только от э.д. с. источников ветвей и потенциалов узлов, к которым ветви присоединены, но и от токов в других индуктивно-связанных ветвях, то к расчету сложных цепей синусоидального тока со взаимной индукцией нельзя применить метод узловых потенциалов. Для расчетов токов в ветвях, имеющих индуктивные связи с другими ветвями цепи, также нельзя применить метод эквивалентного генератора. Поэтому для расчета сложных цепей синусоидального тока со взаимной индукцией применяют метод уравнений Кирхгофа и метод контурных токов.



В качестве примера составим систему уравнений для цепи, содержащей три индуктивно-связанные катушки (рис. 5.9). Одноименные зажимы катушек попарно отмечены различными условными знаками. В соответствии с этими знаками и выбранными на схеме направлениями токов определяем знаки взаимных индуктивностей:  $M_{12} < 0$ ;  $M_{13} > 0$ ;  $M_{23} > 0$ .

Уравнения, составленные по законам Кирхгофа, для рассматриваемой схемы имеют вид:

$$\begin{aligned}
 i_1 - i_2 - i_3 &= 0; \\
 Z_1 i_1 + j\omega L_1 i_1 - j\omega M_{12} i_2 + j\omega M_{13} i_3 + j\omega L_3 i_3 + j\omega M_{13} i_1 + \\
 &+ j\omega M_{23} i_2 + Z_3 i_3 = \dot{E}_1; \\
 Z_2 i_2 + j\omega L_2 i_2 - j\omega M_{12} i_1 + j\omega M_{23} i_3 - j\omega L_3 i_3 - j\omega M_{12} i_1 - \\
 &- j\omega M_{23} i_2 - Z_3 i_3 = -\dot{E}_2.
 \end{aligned}$$

Определив из первого уравнения  $i_3 = i_1 - i_2$  и подставив его во второе и третье уравнения, после преобразования получим:

$$\begin{aligned}
 Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2 &= \dot{E}_1; \\
 Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2 &= -\dot{E}_2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{где } Z_{11} &= Z_1 + Z_3 + j\omega(L_1 + L_3 + 2M_{13}); \\ Z_{22} &= Z_2 + Z_3 + j\omega(L_2 + L_3 + 2M_{23}); \\ Z_{12} = Z_{21} &= -Z_3 - j\omega(L_3 + M_{12} + M_{13} - M_{23}). \end{aligned}$$

Решив полученные уравнения, можно определить токи в ветвях и напряжения на элементах цепи.

## 5.6. ТРАНСФОРМАТОР БЕЗ МАГНИТОПРОВОДА

Трансформатором называют статическое электромагнитное устройство, имеющее две или большее число индуктивно связанных обмоток и предназначенное для преобразования посредством электромагнитной индукции одной или нескольких систем переменного тока в одну или несколько других систем переменного тока.

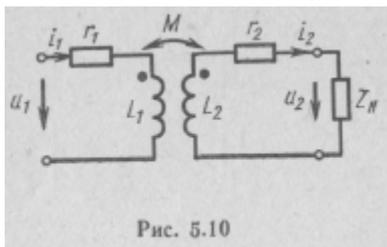


Рис. 5.10

Рассмотрим двухобмоточный трансформатор без магнитопровода (рис. 5.10). Такие трансформаторы применяются в основном на высоких частотах. Обмотку трансформатора, к которой подключается источник энергии, называют первичной.

Обмотку, к которой подключается потребитель энергии, называют вторичной.

Направление магнитных потоков в обмотках трансформатора в соответствии с правилом Ленца всегда соответствует их встречному включению. Поэтому на основании второго закона Кирхгофа для мгновенных значений первичной и вторичной цепей трансформатора можно записать:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_1}{dt}; \\ 0 &= r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + u_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Эти уравнения называют уравнениями трансформатора.

Если к первичной обмотке трансформатора приложено синусоидальное напряжение, то его уравнения в комплексной форме будут иметь вид:

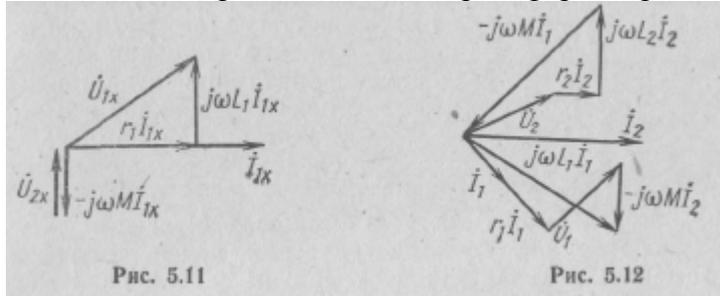
$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= r_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2; \\ 0 &= r_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 + \dot{U}_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

В зависимости от сопротивления нагрузки трансформатора  $Z_H$  различают три режима его работы: режим холостого хода ( $Z_H = \infty$ ), режим нагрузки ( $Z_H \neq 0$ ) и режим короткого замыкания ( $Z_H = 0$ ),

В режиме холостого хода уравнения трансформатора имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{1x} &= r_1 \dot{I}_{1x} + j\omega L_1 \dot{I}_{1x}; \\ 0 &= \dot{U}_{2x} - j\omega M \dot{I}_{1x}. \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Векторная диаграмма трансформатора в этом режиме приведена на рис. 5.11. Так как в этом режиме ток во вторичной обмотке трансформатора отсутствует, то эта обмотка не оказывает



влияния на физические процессы, происходящие в первичной обмотке. При этом первичная обмотка эквивалентна электрической цепи, состоящей из последовательно включенных активного сопротивления  $r_1$  и индуктивности  $L_1$ .

В режиме нагрузки уравнения трансформатора определяются соотношениями (5.12), а векторная диаграмма для индуктивного характера нагрузки приведена на рис. 5.12. Построение такой диаграммы удобнее начинать с вектора тока  $\dot{I}_2$ , расположив его горизонтально.

В рассматриваемом режиме ток вторичной обмотки оказывает существенное влияние на ток в первичной обмотке. При одном и том же напряжении, приложенном к первичной обмотке, увеличение тока во вторичной обмотке приводит к увеличению тока в первичной обмотке. Это объясняется встречным включением обмоток, при котором общий магнитный поток в первичной обмотке равен разности магнитных потоков, созданных в ней током первичной и вторичной обмоток. Магнитный поток, созданный током вторичной обмотки, уменьшает общий магнитный поток первичной обмотки, что приводит к уменьшению суммарной э. д. с., индуцируемой в ней, и к увеличению тока в первичной обмотке до такой его величины, при которой суммарная э. д. с., индуцируемая в первичной обмотке, совместно с падением напряжения на ее активном сопротивлении уравновесят приложенное к первичной обмотке напряжение. Влияние тока вторичной обмотки на первичную эквивалентно изменению общего сопротивления первичной обмотки. В нее из вторичной обмотки как бы вносится дополнительно реактивное и активное сопротивления, характер и вели-

чина которых зависят от характера и величины тока вторичной обмотки, что определяется параметрами трансформатора и нагрузкой. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в разд. 9.

**В режиме короткого замыкания** (при замкнутых накоротко вторичных зажимах трансформатора)

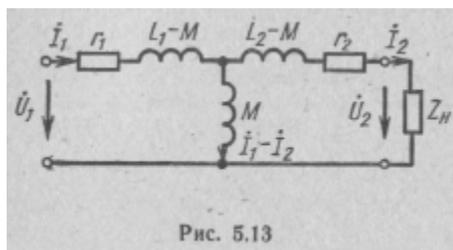


Рис. 5.13

уравнения трансформатора и физические процессы в нем будут в основном такими же, как и в режиме нагрузки, за исключением того, что в этом режиме будет равно нулю напряжение на нагрузке  $u_2$ . Особенностью этого режима является то, что даже при малых величинах напряжения, приложенного к первичной обмотке, ток во вторичной обмотке, а как следствие встречного включения обмоток и ток в первичной обмотке из-за отсутствия сопротивления нагрузки могут достигать больших значений.

Для удобства расчета электрических цепей трансформатор можно заменить эквивалентной схемой, не содержащей индуктивных связей. Для получения такой схемы преобразуем уравнения трансформатора (5.12). Добавляя и вычитая  $j\omega MI_1$  в уравнении для первичной цепи и  $j\omega MI_2$  в уравнении для вторичной цепи, получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= r_1 \dot{I}_1 + j\omega(L_1 - M) \dot{I}_1 + j\omega M(\dot{I}_1 - \dot{I}_2); \\ 0 &= \dot{U}_2 + r_2 \dot{I}_2 + j\omega(L_2 - M) \dot{I}_2 - j\omega M(\dot{I}_1 - \dot{I}_2). \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Этим уравнениям соответствует эквивалентная схема трансформатора, приведенная на рис. 5.13.

В этой схеме индуктивные связи отсутствуют. Может оказаться, что одна из разностей  $L - M$  будет отрицательной. Тогда элемент  $L - M$  можно заменить емкостью, величина которой зависит от частоты.

В теории электрических цепей в дополнение к введенным ранее идеальным двухполюсным элементам  $r$ ,  $L$  и  $C$  вводят четырехполюсный элемент — идеальный трансформатор.

Идеальным называют трансформатор, обмотки которого имеют бесконечно большие индуктивности и не имеют активных сопротивлений, а коэффициент связи равен единице:

$$k = M / \sqrt{L_1 L_2} = 1. \quad (5.15)$$

Для идеального трансформатора уравнения (5.12) можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 &= j\omega M \dot{I}_1 - j\omega L_2 \dot{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Если ко вторичной обмотке трансформатора подключено сопротивление нагрузки  $Z_H$ , то для напряжения на ней можно записать  $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_H$ . Используя это равенство совместно с соотношениями (5.15) и (5.16), можно найти отношения:

$$\dot{I}_2 / \dot{I}_1 = j\omega \sqrt{L_1 L_2} / (j\omega L_2 + Z_H); \quad (5.17)$$

$$\dot{U}_2 / \dot{U}_1 = \sqrt{L_2 / L_1}. \quad (5.18)$$

Так как индуктивности обмоток трансформатора пропорциональны квадратам чисел их витков, то, считая, что при  $L_1 \rightarrow \infty$  и  $L_2 \rightarrow \infty$  отношение  $L_1 / L_2$  является конечной величиной, равной  $w_1^2 / w_2^2$ , из соотношения (5.18) получим

$$\dot{U}_2 / \dot{U}_1 = \sqrt{L_2 / L_1} = w_2 / w_1 = 1/n, \quad (5.19)$$

где  $n = w_1 / w_2$  — коэффициент трансформации.

Если сопротивление  $Z_H$  является конечной величиной, то при  $L_2 \rightarrow \infty$  этим сопротивлением в выражении (5.17) можно пренебречь. При этом получим

$$\dot{I}_2 / \dot{I}_1 = \sqrt{L_1 / L_2} = w_1 / w_2 = n. \quad (5.20)$$

Используя соотношения (5.19) и (5.20) для входного сопротивления идеальной трансформатора, нагруженного сопротивлением  $Z_H$ , будем иметь

$$Z_{вх} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 = n^2 \dot{U}_2 / \dot{I}_2 = n^2 Z_H. \quad (5.21)$$

Из этого выражения видно, что идеальный трансформатор изменяет полное сопротивление нагрузки в  $n^2$  раз без изменения аргумента сопротивления. Это свойство трансформатора используют для согласования нагрузки с внутренним сопротивлением источника.

В заключение следует отметить, что идеальный трансформатор является чисто теоретической моделью, осуществить которую практически невозможно. Однако свойствами, близкими к его свойствам, обладает трансформатор с магнитопроводом при достаточно большом числе витков его обмоток.

## 6. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПЕЙ

### 6.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ФУНКЦИИ ЦЕПИ

Основным методом расчета цепей синусоидального тока является метод комплексных амплитуд. В его основе лежит представление синусоидальных функций через экспоненциальные функции мнимой частоты  $f\omega$ :

$$f(t) = A_m \cos(\omega t + \psi) \triangleq A_m e^{j(\omega t + \psi)} = \dot{A}_m e^{j\omega t}$$

или

$$f(t) = A_m \cos(\omega t + \psi) = \frac{1}{2} A_m [e^{j(\omega t + \psi)} + e^{-j(\omega t + \psi)}] =$$
$$= \frac{\dot{A}_m}{2} e^{j\omega t} + \frac{\dot{A}_m}{2} e^{-j\omega t}.$$

Применение экспоненциальной функции делает возможным ввести понятие комплексной функции цепи, имеющей исключительно большое значение в теории цепей. Понятие комплексной функции используется для описания линейных цепей, не содержащих независимые источники энергии.

В самом общем случае сигнал на выходе (реакция) такой цепи  $X_{\text{ВЫХ}}$  и сигнал на ее входе (воздействие)  $X_{\text{ВХ}}$  связаны линейным дифференциальным уравнением вида

$$a_m \frac{d^m X_{\text{ВЫХ}}}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} X_{\text{ВЫХ}}}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dX_{\text{ВЫХ}}}{dt} + a_0 =$$
$$= b_n \frac{d^n X_{\text{ВХ}}}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} X_{\text{ВХ}}}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dX_{\text{ВХ}}}{dt} + b_0, \quad (6.1)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_m; b_0, b_1, \dots, b_n$  — вещественные коэффициенты, зависящие лишь от параметров цепи и ее схемы. Представим воздействие в виде экспоненты

$$x_{\text{вх}} \triangleq \dot{X}_{\text{вх}} e^{j\omega t}. \quad (6.2)$$

Реакция линейной цепи в установившемся режиме, т. е. спустя достаточно большой промежуток времени после появления воздействия, имеет всегда тот же вид, что и воздействие, т. е.

$$x_{\text{вых}} \triangleq \dot{X}_{\text{вых}} e^{j\omega t} \quad (6.3)$$

Эти величины представляют токи или напряжения, действующие на участках цепи.

Так как дифференцирование экспоненты эквивалентно ее умножению на  $f\omega$ , после подстановки выражений (6.2) и (6.3) в формулу (6.1) получим

$$[a_m(j\omega)^m + a_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + a_1j\omega + a_0] \dot{X}_{\text{вых}} e^{j\omega t} = [b_n(j\omega)^n + b_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + b_1j\omega + b_0] \dot{X}_{\text{вх}} e^{j\omega t}. \quad (6.4)$$

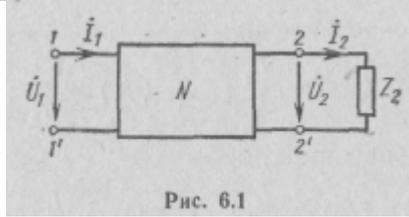


Рис. 6.1

Комплексной функцией цепи называется отношение реакции цепи к воздействию, заданному в виде экспоненциальной функции мнимой частоты  $f\omega$ :

$$K(j\omega) = \frac{\dot{X}_{\text{вых}} e^{j\omega t}}{\dot{X}_{\text{вх}} e^{j\omega t}} = \frac{\dot{X}_{\text{вых}}}{\dot{X}_{\text{вх}}} = \frac{b_n(j\omega)^n + b_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + b_1j\omega + b_0}{a_m(j\omega)^m + a_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + a_1j\omega + a_0} = \frac{N(j\omega)}{M(j\omega)}. \quad (6.5)$$

Порядок цепи и ее комплексной функции определяется наивысшей степенью при  $f\omega$  в знаменателе выражения (6.5).

С помощью комплексной функции легко найти изображение выходного сигнала как произведение

$$\dot{X}_{\text{вых}} = K(j\omega) \dot{X}_{\text{вх}}.$$

В зависимости от того, рассматривается реакция цепи со стороны точек приложения воздействия или же на других ее участках, комплексные функции цепи разделяют на две группы: входные и передаточные.

Пусть на входных зажимах 1—1' пассивной линейной цепи (рис. 6.1) действуют напряжение  $u_1 \hat{=} \dot{U}_1 e^{j\omega t}$  и ток  $i_1 \hat{=} \dot{I}_1 e^{j\omega t}$ . Выделим в схеме элемент  $Z_2$ , на зажимах которого 2—2' действуют напряжение  $u_2 \hat{=} \dot{U}_2 e^{j\omega t}$  и ток  $i_2 \hat{=} \dot{I}_2 e^{j\omega t}$ .

Входной функцией цепи называется отношение изображений тока и напряжения, действующих на входных зажимах. В зависимости от того, какая величина является воздействием, различают входное сопротивление и входную проводимость:

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}; Y_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} = \frac{1}{Z_{\text{вх}}(j\omega)}. \quad (6.7)$$

Передаточной функцией цепи называется отношение изображений токов и напряжений, действующих на разных парах зажимов. В зависимости от того, что является воздействием, различают:

комплексные передаточные функции или коэффициенты передачи по напряжению и по току:

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}; K_I(j\omega) = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}; \quad (6.8)$$

передаточные сопротивления:

$$Z_{21}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}; Z_{12}(j\omega) = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}; \quad (6.9)$$

передаточные проводимости:

$$Y_{21}(j\omega) = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}; Y_{12}(j\omega) = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}.$$

**6.2. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПАРАМЕТРАМИ ЦЕПИ  
И ЕЕ КОМПЛЕКСНЫМИ ФУНКЦИЯМИ**

Чтобы установить связь между параметрами цепи и ее входными и передаточными комплексными функциями, рассмотрим схему (рис. 6.2).

Пусть к входным зажимам  $k - k'$  пассивной линейной цепи, не содержащей внутренние независимые источники энергии, подключен источник сигнала с э.д. с.  $E_k$  и внутренним сопротивлением  $Z_{вн}$ . При этом на входе цепи действуют напряжение  $U_k$  и ток  $I_k$ , а на выходе, т. е. на любом интересующем нас ее элементе  $Z$ , — напряжение  $U$ ; и ток  $I$ . Найдём соотношения между этими напряжениями и токами. Для этого запишем систему уравнений по методу контурных токов, выбирая  $k$ -й и  $l$ -й контуры внешними:

$Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + \dots + Z_{1k}I_k + \dots + Z_{1n}I_n = 0;$	}	(6.11)
$Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + \dots + Z_{2k}I_k + \dots + Z_{2n}I_n = 0;$		
$\dots$		
$Z_{k1}I_1 + Z_{k2}I_2 + \dots + (Z'_{kk} + Z_{вн})I_k + \dots + Z_{kn}I_n = E_k;$		
$\dots$		
$Z_{n1}I_1 + Z_{n2}I_2 + \dots + Z_{nk}I_k + \dots + Z_{nn}I_n = 0.$		

Здесь  $Z_{jj}$  и  $Z_{jk}$  — контурные сопротивления;  $Z'_{kk}$  — сумма сопротивлений элементов той части  $k$ -го контура, которая входит в состав рассматриваемой цепи и не включает внутреннее сопро-

тивление  $Z_{BH}$  источника;  $Z'_{kk} + Z_{BH} = Z_{kk}$  — контурное сопротивление  $k$ -го контура;  $\dot{I}_I, \dot{I}_{II}, \dots, \dot{I}_n$  — контурные токи.

Исключим параметры источника сигнала из системы уравнений (6.11).

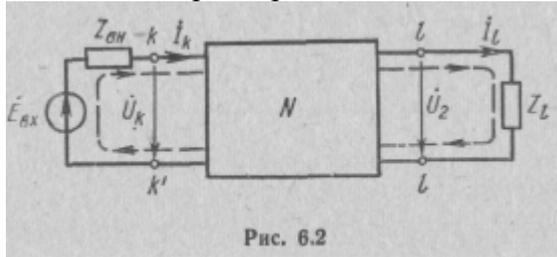


Рис. 6.2

Так как

$$\dot{U}_k = \dot{E}_{ex} - Z_{ex} \dot{I}_k, \quad (6.12)$$

эту систему перепишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} \dot{I}_I + Z_{12} \dot{I}_{II} + \dots + Z_{1k} \dot{I}_k + \dots + Z_{1n} \dot{I}_n &= 0; \\ Z_{21} \dot{I}_I + Z_{22} \dot{I}_{II} + \dots + Z_{2k} \dot{I}_k + \dots + Z_{2n} \dot{I}_n &= 0; \\ \dots &\dots \\ Z_{k1} \dot{I}_I + Z_{k2} \dot{I}_{II} + \dots + Z'_{kk} \dot{I}_k + \dots + Z_{kn} \dot{I}_n &= \dot{U}_k; \\ \dots &\dots \\ Z_{n1} \dot{I}_I + Z_{n2} \dot{I}_{II} + \dots + Z_{nk} \dot{I}_k + \dots + Z_{nn} \dot{I}_n &= 0. \end{aligned} \right\} (6.13)$$

Ее решение по правилу Крамера относительно выходного тока с последующим разложением определителя  $\Delta_l$  по  $l$ -му столбцу дает

$$\dot{I}_l = \frac{\Delta_l}{\Delta} = \frac{\Delta_{kl}}{\Delta} \dot{U}_k, \quad (6.14)$$

где  $\Delta$  — определитель системы;

$\Delta_l$  — определитель, получающийся из  $\Delta$  заменой столбца, составленного из коэффициентов  $Z_{kl}$  при неизвестном  $\dot{I}_l$ , столбцом, составленным из свободных членов;

$\Delta_{kl}$  — алгебраическое дополнение элемента  $Z_{kl}$ . Аналогично получим решение системы относительно тока на входе

$$\dot{I}_k = \frac{\Delta_k}{\Delta} = \frac{\Delta_{kk}}{\Delta} \dot{U}_k, \quad (6.15)$$

Входные и передаточные функции цепи находим в виде отношения определителей системы (6.13), составленной по методу контурных токов:

$$Y_{kk}(j\omega) = \frac{1}{Z_{kk}(j\omega)} = \frac{\dot{I}_k}{\dot{U}_k} = \frac{\Delta_{kk}}{\Delta}; \quad (6.16)$$

$$Y_{lk}(j\omega) = \frac{\dot{I}_l}{\dot{U}_k} = \frac{\Delta_{kl}}{\Delta}; \quad Z_{lk}(j\omega) = \frac{\dot{U}_l}{\dot{I}_k} = \frac{\Delta_{kl}}{\Delta_{kk}}; \quad (6.17)$$

$$K_{Ulk}(j\omega) = \frac{\dot{U}_l}{\dot{U}_k} = Z_l \frac{\Delta_{kl}}{\Delta}; \quad K_{Ilk}(j\omega) = \frac{\dot{I}_l}{\dot{I}_k} = \frac{\Delta_{kl}}{\Delta_{kk}}. \quad (6.18)$$

Чтобы выяснить особенности полученных функций, рассмотрим более подробно определители  $\Delta$ ,  $\Delta_{kl}$ ,  $\Delta_{kk}$ .

Общее выражение для определителя  $n$ -го порядка системы уравнений (6.13) имеет вид<sup>1</sup>

$$\Delta = \sum (-1)^q Z_{1\alpha} Z_{2\beta} \dots Z_{nv}$$

Определитель  $\Delta$ , таким образом, представляет сумму  $n!$  произведений. Каждое из этих произведений содержит  $n$  множителей. Каждый из множителей является элементом определителя и есть не что иное, как соответствующее контурное сопротивление рассматриваемой цепи.

Любое контурное сопротивление, как и сопротивление любой ветви в линейной цепи с конечным числом элементов, в общем случае является рациональной функцией мнимой частоты  $f\omega$ :

$$Z_{q\mu} = r_{q\mu} + j\omega L_{q\mu} + \frac{1}{j\omega C_{q\mu}} = \frac{(j\omega)^2 L_{q\mu} + j\omega r_{q\mu} + C_{q\mu}^{-1}}{j\omega}. \quad (6.19)$$

где  $q = 1, 2, \dots, n$ ;  $\mu = 1, 2, \dots, n$ .

Так как произведения, суммы, разности и отношения рациональных функций есть также рациональные функции, то и определитель  $\Delta$  — рациональная функция. То же самое можно сказать и об определителях  $\Delta_{kl}$ ,  $\Delta_{kk}$ , которые отличаются от  $\Delta$  лишь на единицу меньшим порядком.

Таким образом, убеждаемся, что как входные, так и передаточные комплексные функции цепи являются рациональными функциями переменной  $f\omega$  и в общем виде могут быть представлены в виде рациональной дроби (6.5) с вещественными коэффициентами. Важно отметить, что все коэффициенты числителя и знаменателя этой дроби вещественные, так как они зависят лишь от схемы цепи и определяются параметрами ее элементов:

$$r_{q\mu}, L_{q\mu}, C_{q\mu}.$$

Системные функции цепи полностью определяются схемой и параметрами цепи и совершенно не зависят от параметров и схемы источника входного сигнала.

<sup>1</sup> Здесь  $\alpha, \beta, \dots, \nu$  пробегает все возможные  $n!$  перестановки из чисел  $1, 2, \dots, n$ ; знак перед каждым членом определителя (т. е. перед каждым слагаемым) определяется числом  $q$  инверсий в каждой перестановке.

Соотношения (6.11) — (6.18) получены методом контурных токов. К аналогичным выражениям и сделанным выводам можно прийти, используя также дуальный метод — метод узловых напряжений.

Действительно, пусть в схеме (см. рис. 6.2) независимые узлы выбраны так, что  $\dot{U}_k$  и  $\dot{U}_l$  — узловые напряжения. Тогда можно записать систему узловых уравнений:

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1k} & \dots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2k} & \dots & Y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{k1} & Y_{k2} & \dots & Y_{kk} & \dots & Y_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{nk} & \dots & Y_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dots \\ \dot{U}_k \\ \dots \\ \dot{U}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ Y_{en} \dot{E}_{ex} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

Здесь  $Y_{jj}$  и  $Y_{jk}$  — узловые проводимости;  $Y'_{kk}$  — сумма проводимостей ветвей, подходящих к-му узлу и принадлежащих рассматриваемой цепи, взятая без учета источника входного сигнала;  $(Y'_{kk} + Y_{en}) = Y_{kk}$  — узловая проводимость  $k$ -го узла;  $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dots, \dot{U}_n$  — узловые напряжения.

Учитывая, что

$$\dot{I}_k = Y_{en} \dot{E}_{ex} - Y_{en} \dot{U}_k, \quad (6.21)$$

исключаем параметры источника сигнала из системы уравнений (6.20):

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1k} & \dots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2k} & \dots & Y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{k1} & Y_{k2} & \dots & Y'_{kk} & \dots & Y_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{nk} & \dots & Y_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dots \\ \dot{U}_k \\ \dots \\ \dot{U}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dot{I}_k \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

Решая полученную систему относительно  $\dot{U}_l$  и  $\dot{U}_k$  с помощью соотношений (6.7) — (6.10) находим функции цепи через определители системы (6.22), составленной по методу узловых напряжений:

$$Z_{kk}(j\omega) = \frac{1}{Y_{kk}(j\omega)} = \frac{\dot{U}_k}{\dot{I}_k} = \frac{\Delta_{kk}}{\Delta}; \quad (6.23)$$

$$Z_{lk}(j\omega) = \frac{\dot{U}_l}{\dot{I}_k} = \frac{\Delta_{kl}}{\Delta}; \quad Y_{lk}(j\omega) = \frac{\dot{I}_l}{\dot{U}_k} = Y_l \frac{\Delta_{kl}}{\Delta_{kk}}; \quad (6.24)$$

$$K_{Ulk}(j\omega) = \frac{\dot{U}_l}{\dot{U}_k} = \frac{\Delta_{kl}}{\Delta_{kk}}; \quad K_{Ilk}(j\omega) = \frac{\dot{I}_l}{\dot{I}_k} = Y_l \frac{\Delta_{kl}}{\Delta}. \quad (6.25)$$

Так как узловые проводимости

$$Y_{q\mu} = g_{q\mu} + j\omega C_{q\mu} + \frac{1}{j\omega L_{q\mu}} = \frac{(j\omega)^2 C_{q\mu} + j\omega g_{q\mu} + L_{q\mu}^{-1}}{j\omega} \quad (6.26)$$

имеют те же свойства, что и контурные сопротивления (6.19), можно прийти к уже сформулированным выше выводам относительно свойств системных функций цепи.

Сравнивая полученные для системных функций выражения (6.16) — (6.18) и (6.23) — (6.26), нужно отметить, что входящие в них определители соответствуют уравнениям, составленным по разным методам. В первом случае они соответствуют матрице контурных сопротивлений (МКС), а во втором — матрице узловых проводимостей (МУП).

Важно заметить, что в любых случаях для входных функций

$$Y_{kk}(j\omega) = 1/Z_{kk}(j\omega) \quad (6.27)$$

а для передаточных функций

$$Y_{lk}(j\omega) \neq 1/Z_{lk}(j\omega), \quad (6.28)$$

так как

$$Y_{lk}(j\omega) = \left( \frac{\Delta_{kl}}{\Delta} \right)_{\text{МКС}}, \quad \text{но} \quad Z_{lk}(j\omega) = \left( \frac{\Delta_{kl}}{\Delta} \right)_{\text{МУП}} \quad (6.29)$$

Для описания цепи, например, системой контурных или узловых уравнений используются такие ее параметры, как контурные сопротивления или узловые проводимости. Они определяются значениями сопротивлений элементов, входящих в состав цепи. Эти параметры зависят и от выбора независимых переменных, взятых в качестве определяющих (контурные токи, узловые напряжения), и соответствующих им основных топологических элементов цепи (независимые контуры, узлы), а также от того, какая из возможных совокупностей этих величин и элементов принята для описания данной цепи. Учитывая это обстоятельство, такие параметры называют первичными.

Комплексные функции цепи относятся к числу ее вторичных параметров. Вторичные параметры не зависят от выбора определяющих величин, выбора независимых контуров или узлов,

### 6.3. КОМПЛЕКСНЫЕ ФУНКЦИИ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПИ

Комплексные функции цепи представляют отношения комплексных токов и напряжений, действующих на входе и выходе цепи при синусоидальном воздействии. Как и любые комплексные числа, эти функции можно выразить в показательной или алгебраической форме через модуль и аргумент или через вещественную и мнимую части:

$$K(j\omega) = \frac{\dot{X}_{\text{вых}}}{\dot{X}_{\text{вх}}} = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega). \quad (6.30)$$

Здесь

$$K(\omega) = \text{mod } K(j\omega) = \sqrt{[R(\omega)]^2 + [X(\omega)]^2}; \quad (6.31)$$

$$\varphi(\omega) = \arg K(j\omega) = \arctg \frac{X(\omega)}{R(\omega)}; \quad (6.32)$$

$$R(\omega) = \text{Re } K(j\omega) = K(\omega) \cos \varphi(\omega); \quad (6.33)$$

$$X(\omega) = \text{Im } K(j\omega) = K(\omega) \sin \varphi(\omega). \quad (6.34)$$

Зависимость модуля  $K(\omega)$  комплексной функции цепи от частоты называется ее амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ). Величина  $K(\omega)$  определяет отношение амплитуды реакции цепи к амплитуде воздействия.

Зависимость аргумента  $\varphi(\omega)$  комплексной функции цепи от частоты называется ее фазочастотной характеристикой (ФЧХ). Величина  $\varphi(\omega)$  определяет сдвиг по фазе реакции цепи относительно воздействия.

Зависимость вещественной части  $R(\omega)$  от частоты называется вещественной частотной характеристикой (ВЧХ) цепи, а зависимость мнимой части  $X(\omega)$  — ее мнимой частотной характеристикой (МЧХ).

Частотные характеристики описывают свойства цепи при воздействии синусоидальных сигналов. С их помощью можно определить реакцию цепи на заданное воздействие любой частоты, а также судить о важных особенностях и возможностях использования цепи. Например, АЧХ, приведенная на рис. 6.3, характеризует цепь, обладающую свойством пропускать сигналы только в диапазоне частот от  $\omega_{c1}$  до  $\omega_{c2}$ . Такую цепь используют как полосовой фильтр. С помощью приведенной АЧХ можно оценить такие ее качественные показатели, как равномерность характеристик в полосе пропускания (диапазон частот от  $\omega_{c1}$  до  $\omega_{c2}$ ), затухание в полосе непропускания (частоты менее  $\omega_{c1}$  и более  $\omega_{c2}$ ), крутизна характеристик на границах полосы пропускания. Кроме того, можно количественно определить граничные частоты  $\omega_{c1}$  и  $\omega_{c2}$ , полосу пропускания  $\Pi = \omega_{c2} - \omega_{c1}$  и др.

Комплексная функция цепи  $K(\omega)$  объединяет АЧХ и ФЧХ и поэтому часто называется амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ). Построение АФХ можно сделать как в декартовой, так и в полярной системе координат (рис. 6.4). Откладывая по координатным осям значения  $R(\omega)$  и  $jX(\omega)$  или в полярной системе  $K(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ , можно при каждом конкретном значении  $\omega$  найти положение вектора  $K(j\omega)$ . Так как его компоненты  $R(\omega)$ ,  $X(\omega)$ ,  $K(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  в общем случае являются функциями частоты, то с изменением  $\omega$  положение вектора  $K(j\omega)$  будет меняться. При

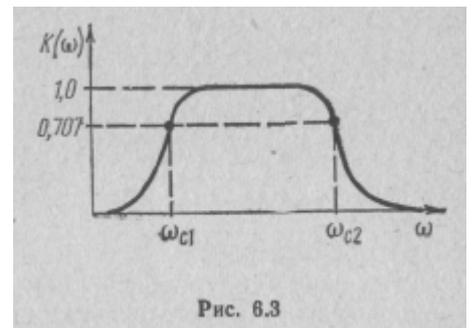
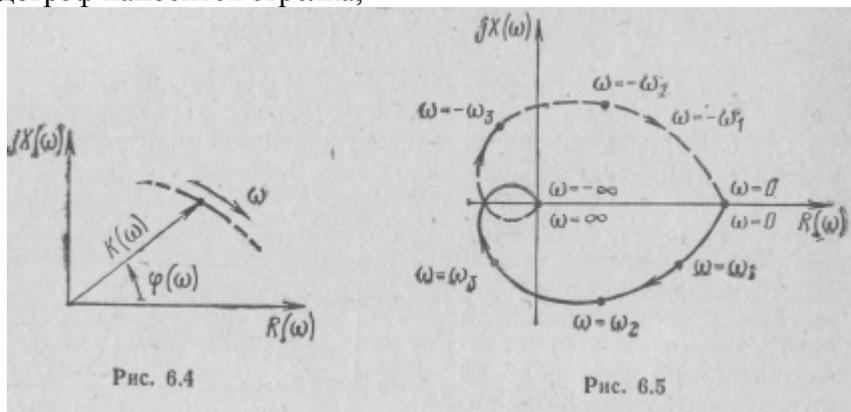


Рис. 6.3

этом будут изменяться как его модуль, так и аргумент. При изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  (или в более общем случае от  $-\infty$  до  $+\infty$ ) конец вектора опишет траекторию, называемую частотным годографом, которая и представляет амплитудно-фазовую характеристику цепи (рис. 6.5). На годограф наносится стрелка,



показывающая направление изменения частоты, а также указываются точки, соответствующие конкретным значениям частоты  $\omega$ . Годографы удобны для исследования устойчивости систем с обратной связью.

Для комплексных коэффициентов передачи  $K(j\omega)$  кроме алгебраической и показательной формы записи (6.30) часто, например в теории электрических фильтров, используется иная форма записи — экспоненциальная:

$$K(j\omega) = e^{\gamma(j\omega)} = e^{[\alpha(\omega) + j\beta(\omega)]}, \quad (6.35)$$

где

$$\gamma(j\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega). \quad (6.36)$$

Логарифмируя в (6.35) левую и правую части:

$$\begin{aligned} \ln K(j\omega) &= \ln K(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \ln K(\omega) + j\varphi(\omega) = \\ &= \ln e^{[\alpha(\omega) + j\beta(\omega)]} = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) = \gamma(j\omega), \end{aligned} \quad (6.37)$$

приходим к логарифмической частотной характеристике

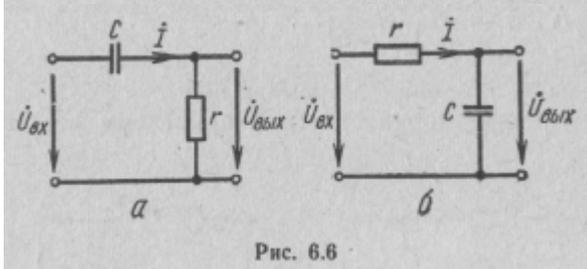
$$\alpha(\omega) = \ln K(\omega). \quad (6.38)$$

Функция  $\alpha(\omega)$  называется логарифмической амплитудно-частотной характеристикой (ЛАЧХ), а  $\beta(\omega)$  остается равной  $\varphi(\omega)$  и является фазо-частотной характеристикой.

Преимущества ЛАЧХ наиболее полно проявляются при решении задач со сложными схемами и в задачах аппроксимации характеристик.

Величины  $\gamma, \alpha$  и  $\beta$  являются безразмерными;  $\alpha$  измеряется в неперах (Нп), беллах (Б) или децибеллах (дБ):

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\omega) &= \ln K(\omega) \text{ (Нп);} \\ \alpha(\omega) &= 2 \lg K(\omega) = 0,8686 \ln K(\omega) \text{ (Б);} \\ \alpha(\omega) &= 20 \lg K(\omega) = 8,686 \ln K(\omega) \text{ (дБ);} \\ 1 \text{ Нп} &= 0,8686 \text{ Б} = 8,686 \text{ дБ; } 1 \text{ дБ} = 0,1 \text{ Б} = 0,115 \text{ Нп.} \end{aligned} \right\} (6.39)$$



Все указанные разновидности частотных характеристик могут быть легко измерены экспериментально. Соотношения частотных характеристик сведены в табл. 6.1.

АЧХ	$K(\omega) = \text{mod } K(j\omega) = \sqrt{[R(\omega)]^2 + [X(\omega)]^2}$
ФЧХ	$\varphi(\omega) = \text{arg } K(j\omega) = \text{arctg } \frac{X(\omega)}{R(\omega)}$
ВЧХ	$R(\omega) = \text{Re } K(j\omega) = K(\omega) \cos \varphi(\omega)$
МЧХ	$X(\omega) = \text{Im } K(j\omega) = K(\omega) \sin \varphi(\omega)$
ЛАЧХ	$\alpha = \ln K(\omega) \text{ (Нп)}$ $\alpha(\omega) = 20 \lg(K(\omega)) \text{ (дБ)}$

Рассмотрим в качестве примеров частотные характеристики простейших  $rC$ - и  $rL$ -цепей первого порядка (рис. 6.6 и 6.7), нашедших самое широкое применение в радиоэлектронике, системах связи, автоматического регулирования и т. д. В зависимости от назначения и соотношения параметров элементов они используются в качестве фильтров нижних и верхних частот, переходных, корректирующих, дифференцирующих и интегрирующих цепочек.

Комплексную передаточную функцию по напряжению  $rC$ -схемы (рис. 6.6, а) найдем как отношения:

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{вых}}}{\dot{U}_{\text{вх}}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{r\dot{i}}{Z\dot{i}} = \frac{r}{r + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} =$$

$$= \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg } \omega\tau\right)}; \quad (6.40)$$

$$K(\omega) = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}; \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg } \omega\tau. \quad (6.41)$$

Здесь  $\tau=rC$  — постоянная времени цепи. Соответствующие характеристики приведены на рис. 6.8.

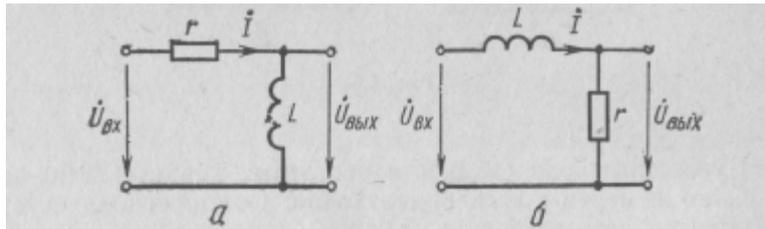


Рис. 6.7

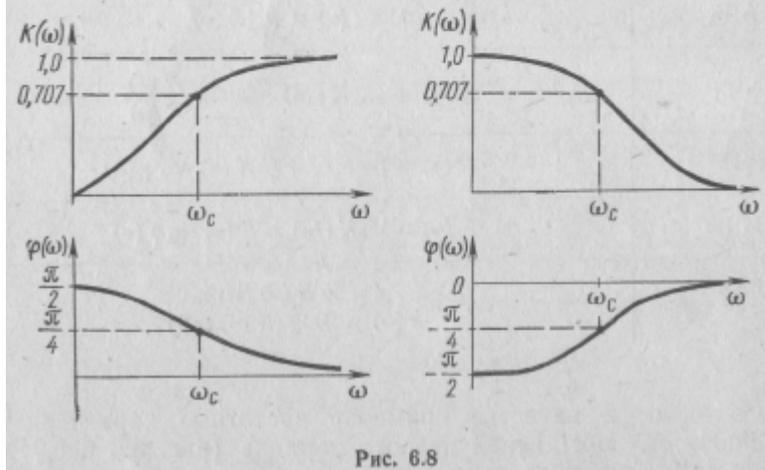


Рис. 6.8

Представляя комплексную функцию (6.40) в алгебраической форме

$$K_U(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2} + j \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} = R(\omega) + jX(\omega), \quad (6.42)$$

получаем ВЧХ и МЧХ (рис. 6.9):

$$R(\omega) = \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2}; X(\omega) = \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (6.43)$$

Построение частотного годографа или АФХ цепи можно сделать в системе координат  $R(\omega)$  и  $X(\omega)$  или  $K(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ , откладывая значение этих функций при каждом конкретном значении

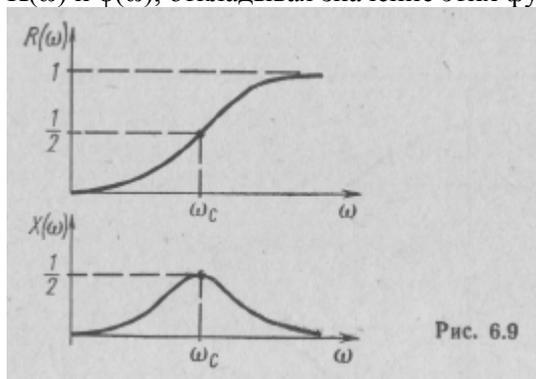


Рис. 6.9

частоты  $\omega$ , взятом в диапазоне от  $-\infty$  до  $+\infty$ . В рассматриваемом случае годограф представляет окружность (рис. 6.10,а).

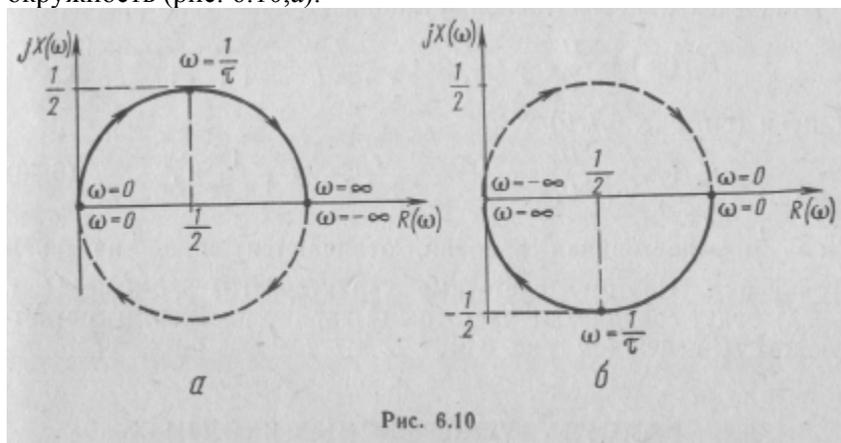


Рис. 6.10

Комплексную передаточную функцию гС-схемы '(рис. 6.6,б)' находим аналогично:

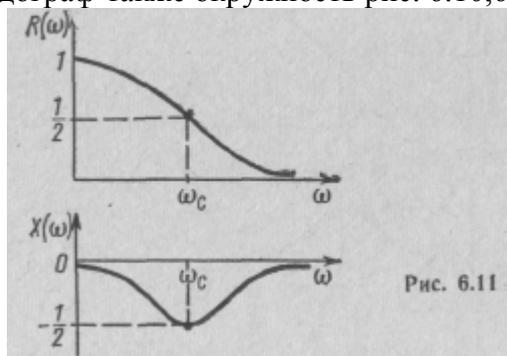
$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1/j\omega C}{Z} = \frac{1}{1 + j\omega rC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} e^{-j \arctg \omega\tau} = \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2} - j \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (6.44)$$

Здесь

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \omega\tau; \quad (6.45)$$

$$R(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2}; \quad X(\omega) = -\frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}. \quad (6.46)$$

Графики частотных характеристик приведены на рис. 6.11. В данном случае частотный годограф-также окружность рис. 6.10,6).



Обращаясь теперь к схемам рис. 6.7, заметим, что выражения для комплексной передаточной функции rL-цепи (см. рис. 6.7, а)

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{j\omega LI}{ZI} = \frac{j\omega L}{r + j\omega L} = \frac{j\omega\tau}{r + j\omega\tau} \quad (6.49)$$

и rL-цепи (см. рис. 6.7,б)

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{rI}{ZI} = \frac{r}{r + j\omega L} = \frac{1}{r + j\omega\tau} \quad (6.48)$$

где  $\tau = \frac{L}{r}$  - постоянная времени, отличаются лишь значением постоянной  $\tau$ . Поэтому частотные характеристики rL-цепей (см. рис. 6.7) будут совпадать с частотными характеристиками соответствующих rC-цепей (см. рис. 6.6).

#### 6.4. СВОЙСТВА КОМПЛЕКСНЫХ ВХОДНЫХ И ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

Комплексные функции цепи — это рациональные функции с вещественными коэффициентами (вещественные рациональные функции). Отсюда непосредственно следует, что они обладают свойством сопряженной симметрии:

$$K(-j\omega) = \dot{K}(j\omega), \quad (6.49)$$

т. е. значения комплексной функции цепи при сопряженных частотах являются сопряженными. Действительно, как следует из выражения (6.5):

$$K(j\omega) = \frac{(b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots) + j(b_1\omega - b_3\omega^3 + \dots)}{(a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots) + j(a_1\omega - a_3\omega^3 + \dots)}; \quad (6.50)$$

$$K(-j\omega) = \frac{(b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots) - j(b_1\omega - b_3\omega^3 + \dots)}{(a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots) - j(a_1\omega - a_3\omega^3 + \dots)} = \\ = \overline{K(j\omega)}. \quad (6.51)$$

Исходя из этих выражений, приходим к выводу о четности вещественной части  $R(\omega)$  и модуля  $K(\omega)$  комплексной функции линейной цепи, а также о нечетности ее мнимой части  $X(\omega)$  и аргумента  $\varphi(\omega)$ :

$$\operatorname{Re} K(j\omega) = \operatorname{Re} K(-j\omega); \quad (6.52)$$

$$\operatorname{Im} K(j\omega) = -\operatorname{Im} K(-j\omega); \quad (6.53)$$

$$|K(j\omega)| = |K(-j\omega)|; \quad (6.54)$$

$$\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega). \quad (6.55)$$

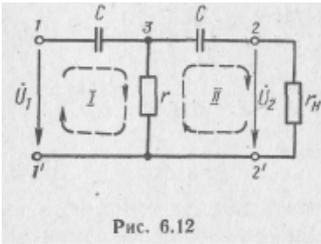
Для входных и некоторых передаточных комплексных функций цепи характерно, что между их компонентами существуют определенные связи. Тогда комплексная функция может быть найдена, если известен один из ее компонентов. Это особенно важно при решении задач синтеза. Такие функции называются функциями минимальной фазы, а соответствующие им цепи — минимально фазовыми. Связь между компонентами функций минимальной фазы является следствием известного из теории функций комплексного переменного положения, по которому вещественная и мнимая части функции, аналитической в правой полуплоскости комплексного переменного и на мнимой оси  $j\omega$ , связаны между собой преобразованием Гильберта.

К числу минимально фазовых относится широкий класс линейных цепей. При их проектировании нельзя произвольно задавать АЧХ и ФЧХ во всем диапазоне частот. Свойства комплексных функций широко используются при решении задач синтеза.

## 6.5. РАСЧЕТ КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ ЦЕПИ С ПОМОЩЬЮ МАТРИЦ ЕЕ КОНТУРНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ И УЗЛОВЫХ ПРОВОДИМОСТЕЙ

Расчет комплексных функций цепи удобно проводить методом контурных токов или узловых напряжений. Выбор метода в каждом конкретном случае определяется числом уравнений в системе. Перед расчетом выделяются точки приложения входной величины и действия выходной величины (см. рис. 6.2),

**Расчет методом контурных токов** сводится к нахождению матрицы контурных



сопротивлений схемы и определению с ее помощью требуемых функций цепи. При составлении матрицы контурных сопротивлений учитываются все элементы, за исключением внутреннего сопротивления источника входного сигнала.

При расчете этим методом выбор независимых контуров удобно сделать так, чтобы точки действия входной и выходной величин входили в состав внешних контуров (см. рис. 6.2). В этом случае расчет комплексных функций цепи проводится по формулам (6.16) — (6.18), сведенным в табл. 6.2.

Таблица 6.2	
<p>Метод контурных токов</p>	$Y_{kk} = \frac{1}{Z_{kk}} = \frac{\Delta_{kk}}{\Delta}$ $Y_{lk} = \frac{\Delta_{kl}}{\Delta}; Z_{lk} = Z_l \frac{\Delta_{kl}}{\Delta_{kk}}$ $K_{Ulk} = Z_l \frac{\Delta_{kl}}{\Delta}; K_{Ilk} = \frac{\Delta_{kl}}{\Delta_{kk}}$

**Пример 6.1.**

Рассчитать комплексную передаточную функцию по напряжению и соответствующие ей АЧХ и ФЧХ Т-образной rC-цепи (рис. 6.12).

Решение.

1. Матрица контурных сопротивлений схемы:

$$\|Z\| = \begin{vmatrix} (1/j\omega C + r) & -r \\ -r & (1/j\omega C + r + r_n) \end{vmatrix}$$

2. Передаточная функция по напряжению в соответствии с формулой (6.18)

$$K_U(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = Z_2 \frac{\Delta_{12}}{\Delta} = r_n \frac{\Delta_{12}}{\Delta}$$

Так как

$$\Delta = (1/j\omega C + r) (1/j\omega C + r + r_n) - r^2 =$$

$$= \frac{1}{C^2} \left[ \tau\tau_n + \frac{2\tau + \tau_n}{j\omega} + \frac{1}{(j\omega)^2} \right] = \frac{(j\omega)^2 \tau\tau_n + j\omega (2\tau + \tau_n) + 1}{(j\omega)^2 C^2};$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{(1+2)} (-r) = r_n$$

где  $\tau = rC$  и  $\tau_H = r_H C$ , получаем

$$K_U(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 \tau \tau_H}{(j\omega)^2 \tau \tau_H + j\omega(2\tau + \tau_H) + 1} = \frac{-\omega^2 \tau \tau_H}{(-\omega^2 \tau \tau_H + 1) + j\omega(2\tau + \tau_H)} =$$

$$= \frac{\omega^2 \tau \tau_H}{\sqrt{\omega^4 \tau^2 \tau_H^2 + \omega^2(4\tau^2 + 2\tau \tau_H + \tau_H^2) + 1}} e^{j\left[\pi + \operatorname{arctg} \frac{\omega(2\tau + \tau_H)}{\omega^2 \tau \tau_H - 1}\right]}$$

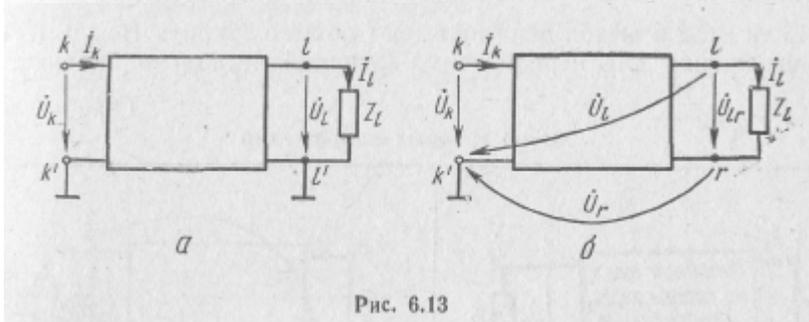


Рис. 6.13

### 3. Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики.

$$K_U(\omega) = \frac{\omega^2 \tau \tau_H}{\sqrt{\omega^4 \tau^2 \tau_H^2 + \omega^2(4\tau^2 + 2\tau \tau_H + \tau_H^2) + 1}}$$

$$\varphi(\omega) = \pi + \operatorname{arctg} \frac{\omega(2\tau + \tau_H)}{\omega^2 \tau \tau_H - 1}$$

Расчет методом узловых напряжений сводится к нахождению матрицы узловых проводимостей схемы и определению с ее помощью требуемых функций цепи. При составлении матрицы узловых проводимостей учитываются все элементы схемы, за исключением внутреннего сопротивления источника входного сигнала.

Если напряжения на входе и выходе цепи выбраны в качестве узловых, т. е. один из входных и один из выходных ее полюсов являются общими и выбраны в качестве базисного узла (рис. 6.13,а), то расчет функций цепи проводится по формулам (6.23)-(6.25).

#### Пример 6.2.

Рассчитать комплексную передаточную функцию по напряжению и соответствующие ей АЧХ и ФЧХ Т-образной гС-цепи (см. рис. 6.12). Решение. 1. Матрица узловых проводимостей схемы:

$$\|Y\| = \begin{vmatrix} j\omega C & 0 & -j\omega C \\ 0 & (j\omega C + 1/r_H) & -j\omega C \\ -j\omega C & -j\omega C & (2j\omega C + 1/r) \end{vmatrix}$$

2. Передаточная функция по напряжению в соответствии с формулой (6.25):

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = K_{U21}(j\omega) = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2 \tau \tau_H + j\omega(2\tau + \tau_H) + 1}$$

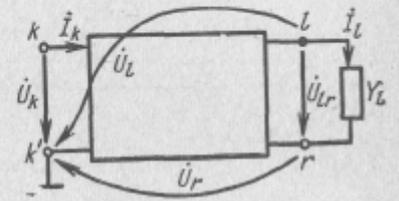
ТАК КАК

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (-1)^{(1+1)} (j\omega C + 1/r_H) (2j\omega C + 1/r) - (j\omega C)^2 = \\ &= \frac{C^2}{\tau_H \tau} [(j\omega)^2 \tau \tau_H + j\omega (2\tau + \tau_H) + 1]; \\ \Delta_{12} &= - (-1)^{(1+2)} (j\omega C)^2 = (j\omega C)^2. \end{aligned}$$

Полученный результат и дальнейший ход расчета совпадают с уже сделанным в примере 6.1.

Если вход и выход цепи не имеют общего зажима (рис. 6.13,6), то выражения для передаточных функций несколько изменяются

Таблица 6.3

Метод узловых напряжений	
	
$Y_{lr} = Y_l \frac{\Delta_{kl}}{\Delta_{kk}}; \quad K_{Ulr} = \frac{\Delta_{kl}}{\Delta_{kk}}$ $Z_{lr} = \frac{\Delta_{kl}}{\Delta}; \quad K_{Ilr} = Y_l \frac{\Delta_{kl}}{\Delta}$	$Y_{lk} = Y_l \frac{\Delta_{k(l+r)}}{\Delta_{kk}}; \quad K_{Ulk} = \frac{\Delta_{k(l+r)}}{\Delta_{kk}}$ $Z_{lk} = \frac{\Delta_{k(l+r)}}{\Delta}; \quad K_{Ilk} = Y_l \frac{\Delta_{k(l+r)}}{\Delta}$

(табл. 6.3). Действительно, в отличие от выражений (6.23) — (6.25) в этом случае получим:

$$Z_{lr}(j\omega) = \frac{U_{lr}}{I_k} = \frac{U_l - U_r}{I_k} = \frac{\Delta_{kl} - \Delta_{kr}}{\Delta} = \frac{\Delta_{k(l+r)}}{\Delta}; \quad (6.56)$$

$$Y_{lk}(j\omega) = \frac{I_l}{U_k} = Y_l \frac{U_l - U_r}{U_k} = Y_l \frac{\Delta_{kl} - \Delta_{kr}}{\Delta_{kk}} = Y_l \frac{\Delta_{k(l+r)}}{\Delta_{kk}}; \quad (6.57)$$

$$K_{Ulk}(j\omega) = \frac{U_{lr}}{U_k} = \frac{U_l - U_r}{U_k} = \frac{\Delta_{kl} - \Delta_{kr}}{\Delta_{kk}} = \frac{\Delta_{k(l+r)}}{\Delta_{kk}}; \quad (6.58)$$

$$K_{Ilk}(j\omega) = \frac{I_l}{I_k} = Y_l \frac{U_l - U_r}{I} = Y_l \frac{\Delta_{kl} - \Delta_{kr}}{\Delta} = Y_l \frac{\Delta_{k(l+r)}}{\Delta}. \quad (6.59)$$

Здесь  $\Delta_{k(l+r)}$  — суммарное алгебраическое дополнение матрицы узловых проводимостей схемы.

В нем одиночный индекс  $k$  указывает на номер вычеркиваемой строки. Первый индекс  $l$  в скобках указывает на номер столбца, элементы которого пере-

носятся со следующим за этим индексом знаком « + » в столбец 2, номер которого соответствует второму индексу в скобках. Знак суммарного алгебраического дополнения определяется множителем  $(-1)^k$  в степени, равной сумме одиночного индекса и первого из двух индексов, взятых в скобки:  $(-1)^{(k+l)}$ ,

**Пример 6.3.**

Рассчитать комплексную передаточную проводимость  $Y_{пер}(j\omega) = \dot{I}_H / \dot{U}_1$  измерительной мостовой схемы (рис. 6.14).

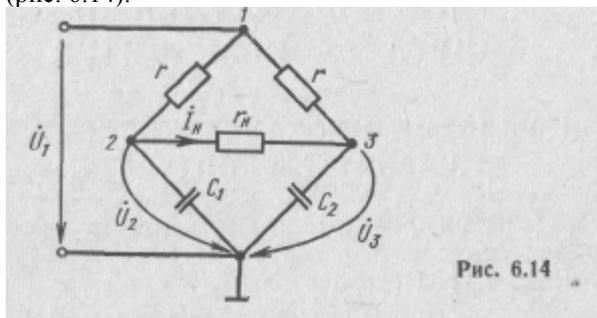


Рис. 6.14

Решение.

1. Матрица узловых проводимостей схемы:

$$\|Y\| = \begin{vmatrix} 2/r & -1/r & -1/r \\ -1/r & (1/r + 1/r_H + j\omega C_1) & -1/r_H \\ -1/r & -1/r_H & (1/r + 1/r_H + j\omega C_2) \end{vmatrix}.$$

2. Передаточная проводимость в соответствии с выражением (6.57):

$$\begin{aligned} Y_{пер}(j\omega) &= \frac{\dot{I}_H}{\dot{U}_1} = Y_H \frac{\Delta_{1(2+3)}}{\Delta_{11}} = \frac{1}{r_H} \frac{\Delta_{1(2+3)}}{\Delta_{11}} = \\ &= \frac{j\omega(C_2 - C_1)}{(j\omega)^2 C_1 C_2 r r_H + j\omega(C_1 + C_2)(r_H + r) + r_H/r + 2} = \\ &= \frac{j\omega(C_2 - C_1)}{(-\omega^2 C_1 C_2 r r_H + r_H/r + 2) + j\omega(C_1 + C_2)(r_H + r)} = \\ &= \frac{\omega(C_2 - C_1)}{\sqrt{(-\omega^2 C_1 C_2 r r_H + r_H/r + 2)^2 + \omega^2(C_1 + C_2)^2(r_H + r)^2}} \times \\ &\quad \times e^{j\left[\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\omega(C_1 + C_2)(r_H + r)}{-\omega^2 C_1 C_2 r r_H + r_H/r + 2}\right]}. \end{aligned}$$

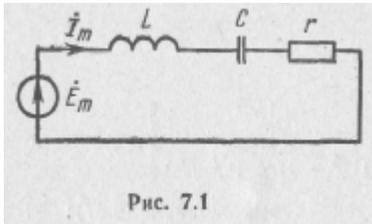
так как

$$\begin{aligned} \Delta_{1(2+3)} &= (-1)^{(1+2)} \begin{vmatrix} -1/r & [-1/r_H + (1/r + 1/r_H + j\omega C_1)] \\ -1/r & [(1/r + 1/r_H + j\omega C_2) - 1/r_H] \end{vmatrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} -1/r & (1/r + j\omega C_1) \\ -1/r & (1/r + j\omega C_2) \end{vmatrix} = \frac{j\omega(C_2 - C_1)}{r}; \\ \Delta_{11} &= (-1)^{(1+1)} [(1/r + 1/r_H + j\omega C_1)(1/r + 1/r_H + j\omega C_2) - 1/r_H^2] = \\ &= (j\omega)^2 C_1 C_2 + j\omega(C_1 + C_2)(1/r + 1/r_H) + 1/r(1/r + 2/r_H). \end{aligned}$$

## 7. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

### 7.1. УСЛОВИЕ РЕЗОНАНСА И ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ КОНТУРА

Последовательным колебательным контуром называют цепь, состоящую из последовательного соединения индуктивности  $L$  и емкости  $C$  (рис. 7.1). Потери в элементах контура учитываются



сопротивлением  $r$ . В таком контуре может возникать резонанс напряжений, т. е. явление, при котором на реактивных элементах контура появляются напряжения, значительно превышающие напряжения, действующие на входе контура. Это является следствием того, что при резонансе реактивное сопротивление

последовательного контура оказывается равным нулю:

$$X_0 = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0. \quad (7.1)$$

Это равенство и является условием резонанса напряжений. Резонансом называется явление, при котором сопротивление контура становится чисто активным. При этом ток в контуре достигает своего максимального значения, чем и объясняется возрастание напряжений на его элементах. Частота, при которой реактивное сопротивление контура равно нулю, т. е. выполняется условие резонанса напряжений,

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (7.2)$$

называется резонансной частотой контура. Резонансная частота последовательного контура полностью определяется параметрами его реактивных элементов.

Когда частота сигнала совпадает с частотой резонанса ( $\omega = \omega_0$ ), говорят, что контур настроен на частоту сигнала. Если же

$\omega \neq \omega_0$ , то контур расстроен. Расстройка контура тем сильнее, чем больше его реактивное сопротивление  $x$ , и равна нулю, если  $x = 0$ . При резонансе реактивные сопротивления индуктивности и емкости контура равны между собой:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}.$$

Сопротивление индуктивности или емкости контура при резонансе называется волновым или характеристическим сопротивлением контура

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad (7.3)$$

Учитывая выражение (7.2), получим

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (7.4)$$

Волновое сопротивление является одним из важных параметров контура. Оно не зависит от частоты и определяется только параметрами его реактивных элементов. Для радиотехнических контуров характерны значения  $\rho \approx 100 \div 500$  Ом.

Сопротивление последовательного колебательного контура при резонансе минимально и равно активному сопротивлению контура. Действительно, с учетом формулы (7.1), находим

$$Z = r + jx_0 = r + j\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right) = r. \quad (7.5)$$

Поэтому ток, протекающий в контуре при резонансе, максимален и ограничивается лишь активным сопротивлением контура:

$$\dot{I}_m = \dot{E}_m / Z = \dot{E}_m / r. \quad (7.6)$$

Напряжения на реактивных элементах контура при резонансе равны по амплитуде и обратны по фазе (рис. 7.2):

$$\dot{U}_{mL0} = j\omega_0 L \dot{I}_m = j \frac{\omega_0 L}{r} \dot{E}_m = \frac{\rho}{r} \dot{E}_m e^{j\frac{\pi}{2}}; \quad (7.7)$$

$$\dot{U}_{mC0} = \frac{1}{j\omega_0 C} \dot{I}_m = -j \frac{1}{\omega_0 r C} \dot{E}_m = \frac{\rho}{r} \dot{E}_m e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (7.8)$$

По своему значению они тем выше, чем больше волновое сопротивление контура  $\rho$ . Если  $\rho > r$ , то напряжения на реактивных элементах при резонансе значительно превышают напряжение источника.

Отношение напряжения на реактивном элементе контура (индуктивности или емкости) при резонансе к напряжению, действу-

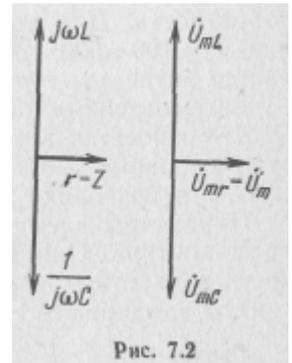


Рис. 7.2

шему на входе контура, определяет эффективность или качество контура и называется его добротностью

$$Q = \frac{U_{mL0}}{E_m} = \frac{U_{mC0}}{E_m} = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{1}{\omega_0 r C} = \frac{\rho}{r} \quad (7.9)$$

Величина, обратная добротности, носит название затухания контура

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{r}{\rho} \quad (7.10)$$

Чем меньше активное сопротивление контура, тем выше его добротность. Для радиотехнических контуров характерны значения  $Q \approx 100 \div 500$  Ом. Добротность контура практически ограничивается активным сопротивлением индуктивной катушки.

Рассмотренные параметры колебательного контура:  $\omega_0$ ,  $f_0$ ,  $T_0$ ,  $\rho$ ,  $Q$ ,  $d$  — относятся к числу вторичных параметров. Они характеризуют основные свойства контура без учета конкретных значений  $L$ ,  $C$ ,  $r$  и позволяют сравнить различные колебательные контуры.

Параметры элементов  $L$ ,  $C$ ,  $r$  являются первичными параметрами контура. Они характеризуют данный контур как совокупность конкретных элементов и позволяют отличить его от других контуров, например с такими же  $\omega_0$ ,  $\rho$ ,  $Q$ .

### Пример 7.1.

Найти резонансную частоту последовательного колебательного контура и напряжение на его емкости при резонансе, если напряжение входного сигнала  $U_m = 10$  мВ, а параметры элементов;  $r = 5$  Ом;  $L = 1$  мГ;  $C = 360$  пФ.

Решение.

1. Резонансная частота контура:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{10^{-3} \cdot 360 \cdot 10^{-12}}} = 266 \cdot 10^3 \text{ Гц} = 226 \text{ кГц}$$

2. Добротность контура:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{2\pi \cdot 266 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{5} = 334$$

3. Напряжение на емкости:

$$U_{mC0} = QU_m = 334 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 3,34 \text{ В}$$

Физику процессов в колебательном контуре удобно рассмотреть на основе анализа энергетических соотношений. Пусть при резонансе в контуре протекает ток

$$i(t) = I_m \cos \omega_0 t.$$

Тогда на емкости действует напряжение

$$U_C(t) = U_{mc} \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = U_{mc} \sin \omega_0 t$$

Энергия, запасаемая в магнитном поле катушки индуктивности,

$$w_L = \frac{Li^2}{2} = LI^2 \cos^2 \omega_0 t = W_{L\max} \cos^2 \omega_0 t. \quad (7.11)$$

Энергия, запасаемая в электрическом поле конденсатора:

$$w_C = \frac{Cu^2}{2} = CU_C^2 \sin^2 \omega_0 t = W_{C \max} \sin^2 \omega_0 t. \quad (7.12)$$

Так как при резонансе  $x_0 = 0$ , то

$$\begin{aligned} x_0 I^2 &= \omega_0 L I^2 - \frac{I^2 \omega_0 C}{\omega_0 C \omega_0 C} = \omega_0 L I^2 - \omega_0 C U_C^2 = \\ &= \omega_0 (W_{L \max} - W_{C \max}) = 0, \end{aligned}$$

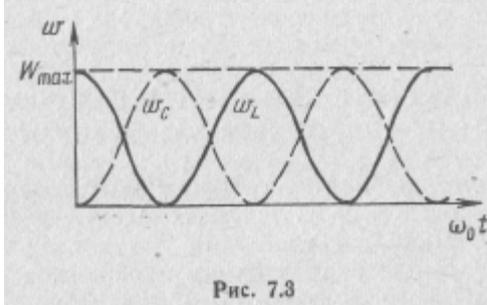


Рис. 7.3

т. е.

$$W_{L \max} = W_{C \max} = W_{\max}. \quad (7.13)$$

При резонансе максимум энергии, накапливаемой в индуктивности, равен максимуму энергии, накапливаемой в емкости. Полная энергия, накопленная в контуре при резонансе в любой момент времени, равна сумме

$$\begin{aligned} w_L + w_C &= W_{\max} (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t) = \\ &= W_{\max} = W_{L \max} = W_{C \max}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Отсюда следует вывод, что при резонансе суммарная энергия, запасенная в контуре, остается неизменной: происходит лишь непрерывное периодическое перераспределение (колебание) энергии, запасенной в индуктивности и емкости (рис. 7.3). В момент когда энергия магнитного поля индуктивности достигает максимума, энергия электрического поля емкости равна нулю, и наоборот; происходит обмен энергией между индуктивностью и емкостью. Источник энергии входного сигнала служит для компенсации потерь в активном сопротивлении контура. Он необходим для возбуждения и поддержания колебаний в контуре. От источника в любой отрезок времени потребляется столько энергии, сколько ее за это время превращается в тепло в активном сопротивлении контура.

С помощью полученных энергетических соотношений можно определить качество, или добротность, контура.

$$Q = \frac{\omega_0 L}{r} \frac{I^2}{I^2} = \omega_0 \frac{W_{\max}}{P} = 2\pi \frac{W_{\max}}{T_0 P} = 2\pi \frac{W_{\max}}{W_r}, \quad (7.15)$$

где  $P = rI^2$  — активная мощность, рассеиваемая в контуре;

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \text{— период колебаний при резонансе.}$$

Добротность  $Q$  определяет отношение энергии, запасенной в контуре при резонансе, к энергии потерь в нем. Энергетическое определение добротности является наиболее общим определением для колебательного контура любого вида.

## 7.2. КОМПЛЕКСНЫЕ ВХОДНЫЕ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ; ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Для анализа и описания частотно-избирательных свойств колебательных контуров используются комплексные входные и передаточные функции. Наиболее удобными для последовательных контуров являются комплексная входная проводимость  $Y(j\omega)$  и комплексные передаточные функции по напряжению  $K_U(j\omega)$ . Компоненты этих функций определяют частотные и резонансные характеристики контура.

Понятия частотных и резонансных характеристик взаимно связаны, так же как ток и напряжения в контуре связаны с его комплексными функциями. Если частотными характеристиками контура являются зависимости компонентов комплексных функций от частоты, то резонансными характеристиками называют зависимость амплитуды тока в контуре или напряжения на его элементах от частоты.

Комплексная входная проводимость последовательного колебательного контура (см. рис. 7.1) легко рассчитывается через его вторичные параметры:

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{1}{Z(j\omega)} = \frac{1}{r + jx} = \frac{1}{r \left(1 + j \frac{x}{r}\right)} = \frac{1}{r \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]} = \\ &= \frac{1}{r \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} e^{-j \arctg Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \\ &= Y(\omega) e^{-j\varphi(\omega)}, \end{aligned} \quad (7.16)$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \frac{1}{r} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \frac{\omega_0 L}{r} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega \omega_0 LC}\right) = \\ &= Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Более удобное выражение получаем после нормирования, отнеся  $Y(j\omega)$  к его значению при  $\omega = \omega_0$ .

$$Y_n(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{Y(j\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} e^{-j \arctg Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{Y(j\omega)}{Y(j\omega_0)} e^{-j\varphi(\omega)} \quad (7.18)$$

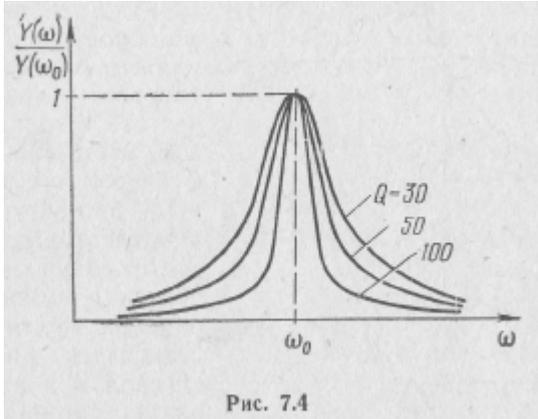


Рис. 7.4

Комплексная проводимость контура непосредственно определяет ток в нем, так как

$$I_m(j\omega) = Y(j\omega) \dot{E}_m = Y(\omega) E_m e^{-j(\tau\omega)} e^{j\psi u} = I(\omega) e^{-j\varphi(\omega)} e^{j\psi u}. \quad (7.19)$$

Зависимость полной проводимости последовательного контура  $Y(\omega)$  от частоты называется его амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ). Более удобной является нормированная амплитудно-частотная характеристика, совпадающая с нормированной резонансной характеристикой:

$$\frac{Y(\omega)}{Y(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} = \frac{I_m(\omega)}{I_m(\omega_0)}. \quad (7.20)$$

Увеличению добротности контура соответствуют более острые резонансные кривые или усиление его частотно-избирательных свойств (рис. 7.4). При большой добротности резонансные кривые симметричны относительно точки резонанса.

Зависимость аргумента тока в контуре или его проводимости от частоты  $\omega$  называется фазо-частотной характеристикой (ФЧХ)

$$\varphi(\omega) = \arctg Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad (7.21)$$

Фазо-частотная характеристика последовательного колебательного контура приведена на рис. 7.5. Из нее следует, что на частотах ниже резонансной контур имеет емкостной характер, при резонансе — резистивный, а на частотах выше резонансной — индуктивный.

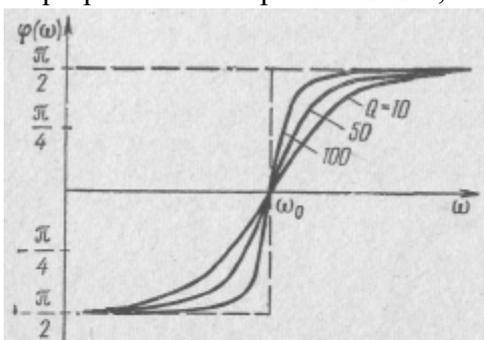


Рис. 7.5

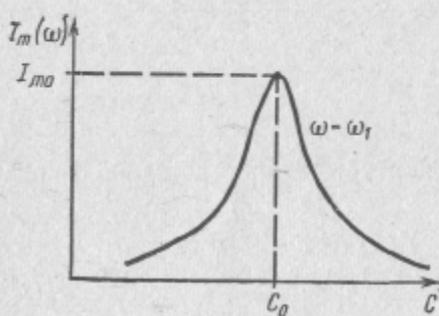


Рис. 7.6

Достичь резонанса в контуре можно не только изменением частоты сигнала (при неизменных параметрах контура), но и настройкой самого контура путем изменения его емкости или индуктивности (при неизменной частоте источника). Обычно для настройки контура изменяется его емкость, для чего в контур включается конденсатор переменной емкости. При определенном значении емкости  $C_0$  резонансная частота контура  $\omega_0$ , становится равной частоте сигнала  $\omega$  и в контуре возникает резонанс. Зависимость амплитуды тока в контуре от значения его емкости  $C$  или индуктивности  $L$  (рис. 7.6) при заданной частоте источника называют настроечной характеристикой контура. Вблизи резонанса настроечные кривые практически совпадают с резонансными.

В радиотехнике особенно часто применяются колебательные контуры высокой добротности. При этом наибольший интерес представляет режим контура в диапазоне частот, близких к резонансной. В этом случае при исследовании частотных характеристик колебательного контура в качестве независимой переменной удобно использовать величину, характеризующую расстройку контура, т. е. степень отклонения его резонансной частоты  $\omega_0$  от частоты сигнала  $\omega$ . Такая замена переменных

позволяет придать расчетным формулам более общий и удобный вид.

Разность между частотой сигнала и резонансной частотой контура

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 \quad (7.22)$$

называют абсолютной расстройкой. Она может быть как положительной ( $\omega > \omega_0$ ), так и отрицательной ( $\omega < \omega_0$ ).

Отношение абсолютной расстройки к резонансной частоте

$$\delta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \quad (7.23)$$

называется относительной расстройкой.

Отклонения режима контура от резонансного определяются двумя причинами: изменением частоты источника и изменением параметров контура. С помощью абсолютной и относительной расстроек оценивают отклонения режима, обусловленные изменением частоты. Отклонения, обусловленные обеими причинами, оценивают с помощью обобщенного критерия — отношения реактивного сопротивления контура к активному, равного  $\nu$  в соответствии с выражением (7.17)

$$\xi = \frac{x}{r} = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = Q\nu = \operatorname{tg}\varphi \quad (7.24)$$

и называемого обобщенной расстройкой. Зависимость обобщенной расстройки от частоты сигнала оценивается фактором расстройки

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \quad (7.25)$$

При малых расстройках в области частот, близких к резонансной ( $\omega \approx \omega_0$ ),

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0\omega} = \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega_0\omega} \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}$$

так как  $\omega + \omega_0 \approx 2\omega$ . Поэтому вблизи резонанса

$$\nu \approx 2\delta = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \quad (7.26)$$

и

$$\xi = Q\nu \approx 2Q\delta. \quad (7.27)$$

Относительная и обобщенная расстройки, как и фактор расстройки, — безразмерные величины. Все виды расстроек при резонансе ( $\omega = \omega_0$ ) равны нулю.

Относительная ошибка при расчетах по приближенной формуле (7.27) имеет значение

$$\zeta = -\frac{\Delta\omega}{2\omega_0} = -\frac{\delta}{2} \quad (7.28)$$

#### Пример 7.2.

На последовательный колебательный контур с параметрами:  $L=400$  мкГ;  $C=100$  пФ;  $r=5$  Ом — поступает сигнал с частотой  $f=0,8$  МГц. Определить абсолютную, относительную и обобщенную расстройки контура.

Решение.

1. Резонансная частота контура

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{-12}}} = 5 \cdot 10^6 \text{ рад/с}$$

2. Добротность контура:

$$Q = \frac{1}{\omega_0 r C} = \frac{1}{5 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 100 \cdot 10^{-12}} = 400$$

3. Расстройки контура:

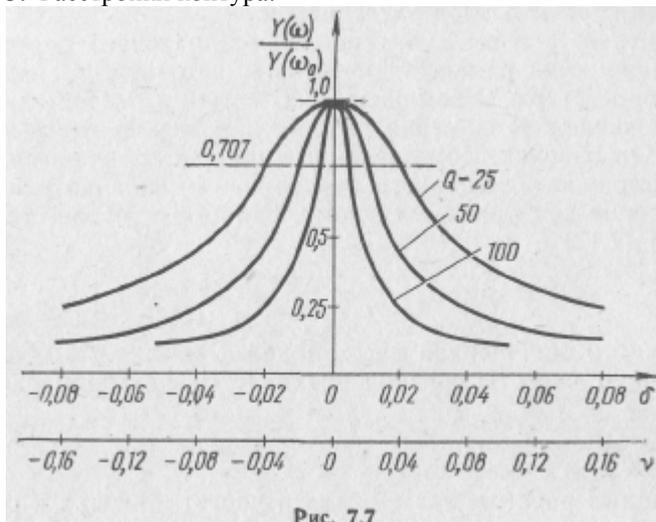


Рис. 7.7

абсолютная

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = 2\pi f - \omega_0 = 2\pi \cdot 0,8 \cdot 10^6 - 5 \cdot 10^6 = 0,026 \cdot 10^6 \text{ рад/с;}$$

относительная

$$\delta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{0,026 \cdot 10^6}{5 \cdot 10^6} = 0,0052 = 0,52\%$$

обобщенная

$$\xi = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \approx 2Q\delta = 2 \cdot 400 \cdot 0,0052 = 4,16$$

Подставляя выражения (7.24) — (7.27) в формулы (7.20), (7.21), получим выражения нормированных частотных характеристик контура в функции расстройки:

$$\frac{Y(\omega)}{Y(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1+Q\nu^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \quad (7.29)$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg } Q\nu = \text{arctg } \xi \quad (7.30)$$

или то же для области малых расстроек:

$$\frac{Y(\omega)}{Y(\omega_0)} \approx \frac{1}{\sqrt{1+(2Q\delta)^2}} \quad (7.31)$$

$$\varphi(\omega) \approx \text{arctg } 2Q\delta, \quad (7.32)$$

Соответствующие этим выражениям графики приведены на рис. 7.7 и 7.8. Частотные характеристики являются симметричными

кривыми. Кривые, построенные по приближенным формулам, дают хорошее совпадение для малых расстройк, когда  $\delta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \leq 10\%$ , что вполне достаточно для описания частот-

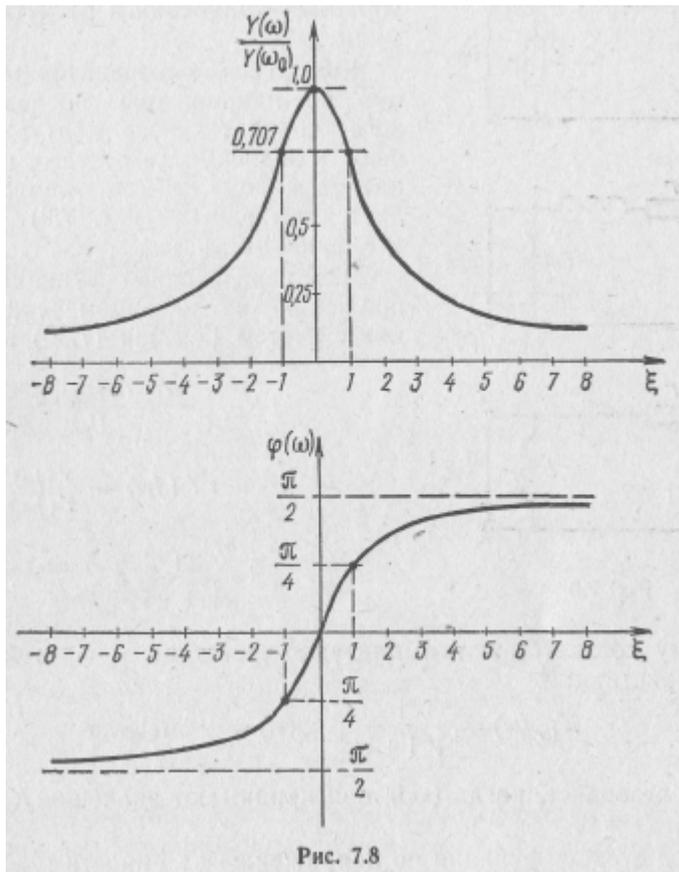


Рис. 7.8

но-избирательных свойств радиотехнических колебательных контуров.

Частотные характеристики, построенные для последовательных контуров в функции относительной расстройки  $\delta$  или фактора расстройки  $\nu$ , совпадают, когда добротности контуров одинаковы. Если в качестве независимой переменной выбрать обобщенную расстройку, то частотные характеристики, построенные для любого последовательного колебательного контура, полностью совпадут. Такие зависимости (см. рис. 7.8) называют обобщенными частотными характеристиками. Они описывают частотно-избирательные свойства всех без исключения колебательных контуров данного типа.

Обобщенные характеристики не позволяют непосредственно

оценить влияние параметров контура на форму его резонансных кривых, но они очень удобны при сравнении контуров разного типа, например последовательных с параллельными или с системой связанных контуров и т. п. Использование обобщенной расстройки упрощает уравнения и расчетные формулы.

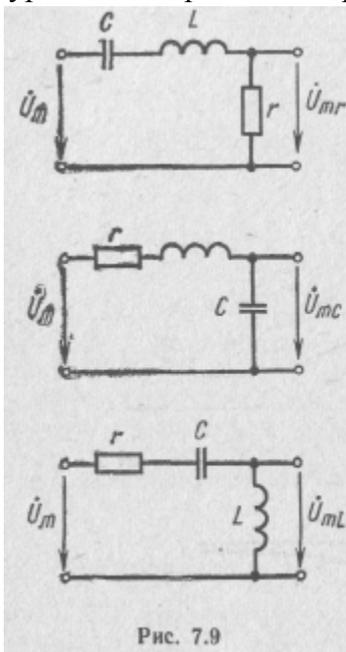


Рис. 7.9

Комплексные передаточные функции по напряжению последовательного колебательного контура различают в зависимости от того, напряжение на каком из его элементов является выходным (рис. 7.9). Найдем эти функции.

Для передаточной функции по напряжению на активном сопротивлении с учетом (7.29) и (7.30) получаем

$$\begin{aligned}
 K_{Ur}(j\omega) &= \frac{U_{mr}}{U_m} = \\
 &= \frac{rI_m}{U_m} = rY(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{Y(j\omega_0)} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} e^{-j \operatorname{arctg} \xi}. \quad (7.33)
 \end{aligned}$$

Этому соответствуют амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики:

$$K_{Ur}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}; \quad \varphi_r(\omega) = -\operatorname{arctg} \xi. \quad (7.34)$$

При резонансе, когда  $\xi=0$ , они принимают значения:  $K_{Ur}(\omega_0)=1$ ;  $\varphi_r(\omega_0)=0$ .

Передаточная функция по напряжению на емкости

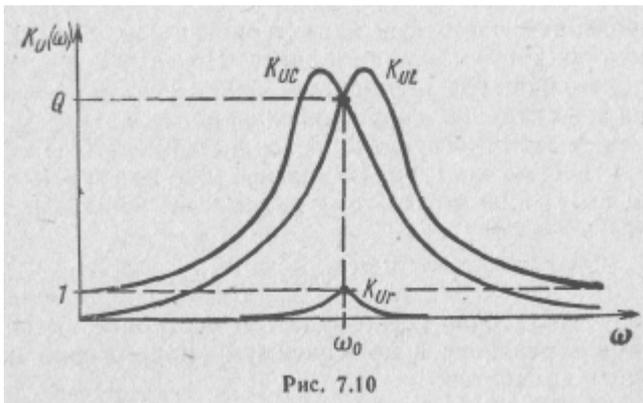
$$\begin{aligned}
 K_{Uc}(j\omega) &= \frac{U_{mc}}{U_m} = \frac{1}{j\omega C} \frac{I_m}{U_m} = \frac{1}{j\omega C} Y(j\omega) = \\
 &= \frac{1}{j\omega r C} \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} e^{-j \operatorname{arctg} \xi} = \frac{1}{j\omega_0 r C} \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} e^{-j \operatorname{arctg} \xi} = \\
 &= \frac{Q}{\sqrt{1+\xi^2}} \frac{\omega_0}{\omega} e^{j \operatorname{arctg} (\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \xi)}. \quad (7.35)
 \end{aligned}$$

Ей соответствуют частотные характеристики:

$$K_{Uc}(\omega) = \frac{Q}{\sqrt{1+\xi^2}} \frac{\omega_0}{\omega}; \quad \varphi_c(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \xi. \quad (7.36)$$

Их значения при резонансе:

$$K_{UC}(\omega) = Q; \varphi_C(\omega) = -\frac{\pi}{2}.$$



Для передаточной функции по напряжению на индуктивности находим

$$K_{UL}(j\omega) = \frac{U_{mL}}{U_m} = j\omega L \frac{I_m}{U_m} = j\omega L Y(j\omega) = \frac{j\omega L}{r\sqrt{1+\xi^2}} e^{-j \arctg \xi} =$$

$$= \frac{j\omega_c L}{r\sqrt{1+\xi^2}} \frac{\omega}{\omega_0} e^{-j \arctg \xi} = \frac{Q}{\sqrt{1+\xi^2}} \frac{\omega}{\omega_0} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \arctg \xi\right)}. \quad (7.37)$$

Частотные характеристики в этом случае:

$$K_{UL}(\omega) = \frac{Q}{\sqrt{1+\xi^2}} \frac{\omega_0}{\omega}; \varphi_L(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg \xi. \quad (7.38)$$

При резонансе они имеют значения  $K_{UL}(\omega_0) = Q$  и  $\varphi(\omega_0) = \pi/2$ . Графики соответствующих характеристик приведены на рис. 7.10. Численно передаточные функции, или коэффициенты передачи по напряжению, показывают, во сколько раз напряжение на соответствующем элементе больше напряжения, действующего на входе контура. Из полученных соотношений, в частности, следует, что при резонансе напряжения на реактивных элементах в  $Q$  раз превышают входное напряжение, а напряжение на активном сопротивлении равно ему.

Интересно, что напряжения на реактивных элементах достигают своего максимального значения в стороне от резонанса. Исследования функций  $K_{UC}(\omega)$  и  $K_{UL}(\omega)$  на экстремум показывают, что максимума они достигают на частотах:

$$\omega_L = \omega_0 \sqrt{\frac{2Q^2}{2Q^2-1}} \text{ и } \omega_L = \omega_0 \sqrt{\frac{2Q^2-1}{2Q^2}}. \quad (7.39)$$

Максимальные значения этих функций одинаковы:

$$K_{UC\max} = K_{UL\max} = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}}.$$

Из приведенных частотных характеристик (см. рис. 7.10) лишь  $K_{ur}(\omega)$  имеет экстремум при резонансе. Поэтому о настройке последовательного контура в резонанс можно судить по максимуму напряжения на активном сопротивлении или тока в нем. Степень смещения  $\omega_L$  и  $\omega_C$  относительно резонансной частоты определяется добротностью контура. Например, уже при  $Q=10$  получаем  $\omega_L = 1,01 \omega_0$ , а  $\omega_C = 0,99 \omega_0$ . Поэтому для высокодобротных контуров можно считать

$$\omega_L \approx \omega_C \approx \omega_0 \text{ и } K_{UC\max} \approx K_{UL\max} \approx 1$$

что позволяет достаточно точно судить о настройке высокодобротных контуров в резонанс и по максимуму напряжения на любом из реактивных элементов.

Из всех комплексных коэффициентов передачи последовательного контура практический интерес представляет передаточная функция по напряжению на емкости  $K_{uc}(\omega)$ . Объясняется это тем что в реальном контуре его активное сопротивление определяется активным сопротивлением индуктивной катушки, в частности провода, который на ней намотан. Измерить же напряжение на индуктивности практически нельзя, так как активное сопротивление катушки нельзя отделить от ее индуктивности. Обычно выходное, напряжение в последовательном контуре снимается с емкости.

### 7.3. ПОЛОСА ПРОПУСКАНИЯ, ПОНЯТИЕ ОБ ИЗБИРАТЕЛЬНОСТИ, КОЭФФИЦИЕНТ ПРЯМОУГОЛЬНОСТИ

Сигнал занимает определенную полосу частот, т. е. наряду с основной частотой он имеет составляющие и на дополнительных частотах. Колебательный контур должен пропускать всю занимаемую сигналом полосу частот.

Полоса пропускания колебательного контура, как и любой другой частотно-избирательной системы, — понятие условное. Полосы пропускания последовательного колебательного контура называется диапазон частот вблизи резонанса, на границах которой амплитуда тока в контуре снижается до уровня:  $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$  своей максимального значения. Это соответствует уменьшению вдвое мощности, выделяемой в контуре. Полоса пропускания включает в себя частоты от нижней граничной  $\omega_1$  до верхней граничной  $\omega_2$  (рис. 7.11,а). Различают абсолютную и относительную полосы пропускания.

Разность граничных частот

$$\Pi = \omega_2 - \omega_1 \quad (7.40)$$

называется абсолютной полосой пропускания.

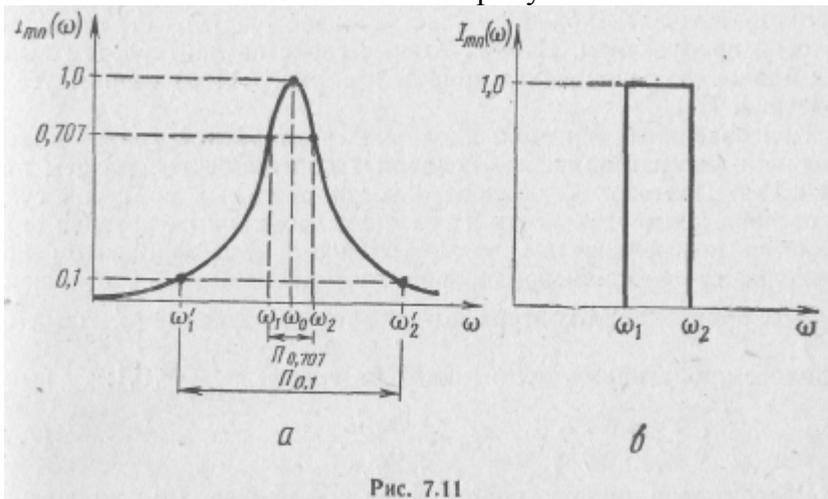


Рис. 7.11

Отношение разности граничных частот к резонансной частоте:

$$\Pi_0 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{\Pi}{\omega_0}$$

называется относительной полосой пропускания.

Для нахождения граничных частот подставим в уравнение резонансной кривой (7.29)

значение относительного тока, равное  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$I_{mn}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (7.42)$$

Отсюда следует, что границам полосы пропускания соответствует обобщенная расстройка

$$\xi_{1,2} = Q \left( \frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} \right) = \pm 1, \text{ т. е. } \omega_1^2 \pm \omega_0 \omega_1 d - \omega_0^2 = 0$$

Решение этого уравнения дает выражения для граничных частот:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left[ \mp \frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left( \frac{1}{2Q} \right)^2} \right] \quad (7.43)$$

и для полосы пропускания контура:

$$\Pi = \omega_2 - \omega_1 = \omega_0 d = \frac{\omega_0}{Q} \quad (7.44)$$

$$\Pi = \omega_2 - \omega_1 = \omega_0 d = \frac{\omega_0}{Q} \quad (7.45)$$

Таким образом, полоса пропускания колебательного контура определяется его добротностью и обратно пропорциональна ей. Чтобы изменить полосу пропускания контура, необходимо изменить его добротность.

Избирательностью колебательного контура называется его способность выделять колебания в диапазоне частот, ограниченном полосой пропускания. Избирательные свойства контура тем выше, чем ближе его резонансная кривая (см. рис. 7.11,а) к прямоугольной (рис. 7.11,б).

Колебательный контур с идеальной резонансной кривой прямоугольной формы полностью подавляет колебания вне полосы пропускания. Поэтому об избирательности реальных контуров судят по степени прямоугольности их резонансных кривых, которая определяется коэффициентом прямоугольности. Коэффициентом прямоугольности резонансной кривой контура называется отношение полосы пропускания контура, отсчитанной на уровне  $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$ , к полосе пропускания, отсчитанной на уровне  $\frac{1}{10} = 0,1$ :

$$K_{\Pi} = \frac{\Pi_{0,707}}{\Pi_{0,1}}. \quad (7.46)$$

Рассчитывая полосу пропускания на уровне 0,1 аналогично выражениям (7.42) — (7.45), убеждаемся, что для последовательного колебательного контура коэффициент прямоугольности является постоянной величиной, не зависящей от его параметров:

$$K_{\Pi} = \frac{\Pi_{0,707}}{\Pi_{0,1}} = \frac{d}{10d} = 0,1. \quad (7.47)$$

Коэффициент прямоугольности одинаков для всех последовательных контуров и не зависит от их добротности. Так как в идеальном случае  $K_{\Pi} \rightarrow 1$ , можно заключить, что избирательность последовательного контура невысока. Это ограничивает применение резонансных контуров такого типа.

### Пример 7.3.

Последовательный колебательный контур настроен на частоту  $f_0=1$  МГц. Определить добротность, при которой этот контур пропустит полосу частот  $\Pi=10$  кГц.

Решение.

Известно, что  $\Pi = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$  или  $\Pi = \frac{f_0}{Q}$  Гц. Поэтому

$$Q = \frac{f_0}{\Pi} = \frac{10^6}{10 \cdot 10^3} = 100$$

### Пример 7.4.

Последовательно в контур с активным сопротивлением  $r=5$  Ом подключено добавочное активное сопротивление  $r_d = 2$  Ом. Как изменится полоса пропускания контура?

Решение.

1. Добротность и полоса пропускания контура до включения:

$$Q = \rho / r; \Pi_0 = 1 / Q.$$

2, Добротность и полоса пропускания контура после включения:

$$Q' = \rho / (r + r_D); \Pi'_0 = \frac{r + r_D}{\rho}.$$

3. Полоса пропускания изменится в

$$\frac{\Pi'_0}{\Pi_0} = \frac{r + r_D}{r} = \frac{5 + 2}{5} = 1,4 \text{ раз.}$$

#### 7.4. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ КОНТУРОВ

Одним из основных применений последовательного колебательного контура в радиоустройствах является его использование в качестве избирательной резонансной системы. Примером может

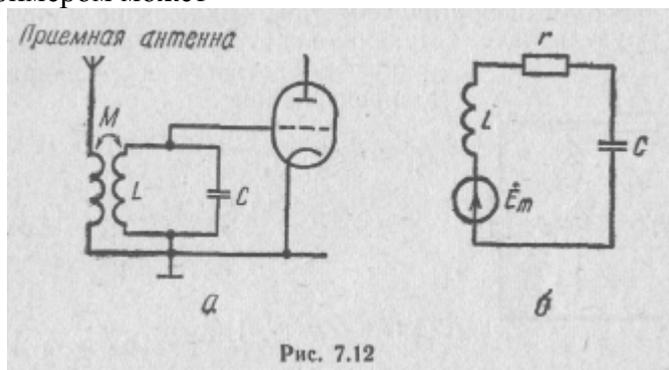


Рис. 7.12

служить входная цепь радиоприемного устройства (рис. 7.12, а). Выходной сигнал в ней снимается с емкости, а входной наводится в контуре за счет магнитной связи с антенной. При этом э. д. с. входного сигнала оказывается включенной последовательно с элементами контура (рис. 7.12, б). Поэтому данный контур является последовательным.

Входное сопротивление усилительного каскада является нагрузкой по отношению к контуру и шунтирует выход контура. Учитывая внутреннее сопротивление источника сигнала  $r_{ист}$ , можно составить эквивалентную схему (рис. 7.13,а). Заменив в ней параллельное соединение емкости C и сопротивления нагрузки  $r_n$  на эквивалентное ей последовательное соединение емкости  $C_3$  и вносимого сопротивления нагрузки  $r_{н.вн}$ , получим эквивалентный последовательный контур (рис. 7.13,б). В нем

$$r_{н.вн} - jx_{C_3} = \frac{r_n x_C^2}{r_n^2 + x_C^2} - j \frac{r_n^2 x_C}{r_n^2 + x_C^2},$$

где

$$x_{C_3} = \frac{1}{\omega C_3} \text{ и } x_C = \frac{1}{\omega C}$$

Обычно выбирают  $r_H \gg x_C$ . Поэтому  $x_{C_3} \approx x_C$ , т. е.  $C_3 \approx C_1$ . Чем больше значение  $r_H$ , тем меньше шунтируется выход контура и тем

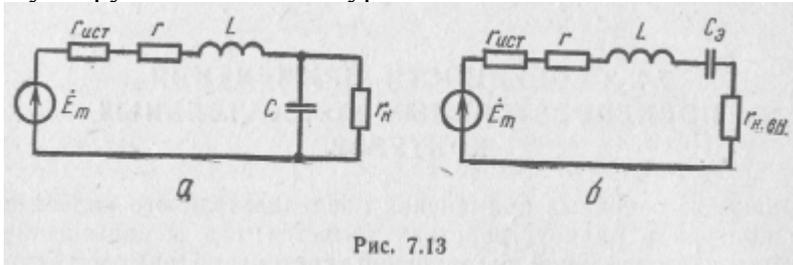


Рис. 7.13

меньше вносимое сопротивление  $r_{н.вн}$ . Включение сопротивлений  $r_{ист}$  и  $r_{н.вн}$  увеличивает затухание контура, снижая его эквивалентную добротность и расширяя полосу пропускания:

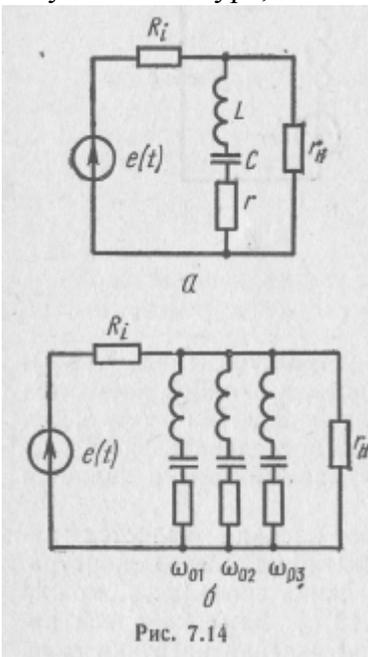


Рис. 7.14

$$d_3 = \frac{1}{Q_3} = \frac{r + r_{ист} + r_{н.вн}}{\rho} = \frac{r}{\rho} + \frac{r_{ист} + r_{н.вн}}{\rho} = \frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_{вн}} = \Pi_0 + \Pi'_0, \quad (7.48)$$

где  $Q = \frac{\rho}{r}$ ;  $Q_{вн} = \frac{\rho}{r_{ист} + r_{н.вн}}$  и  $Q_3 =$

$$= \frac{1}{\frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_{вн}}} - \text{соответственно собственная, внешняя и эквивалентная,}$$

или нагруженная, добротность.

В результате снижаются избирательные свойства контура. Чтобы этого не происходило, последовательный колебательный контур должен работать от источника с малым внутренним сопротивлением и на нагрузку, практически не шунтирующую его выход, т. е. вносящую в контур слабые потери.

Колебательный контур является нагрузкой для источника сигнала. При настройке в резонанс в нагрузку будет передана максимальная

мощность сигнала при условии  $r_{ист} = r + r_{н.вн}$ .

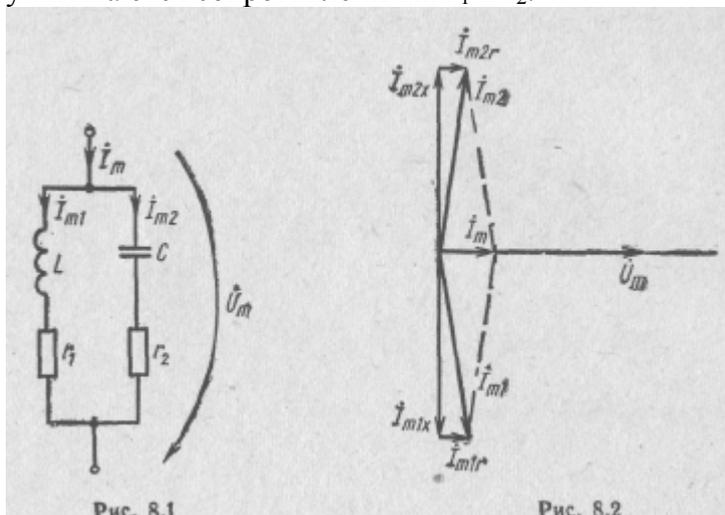
Другим примером применения последовательного колебательного контура может служить схема фильтрации, в которой

контур шунтирует нагрузку на частоте подавляемой гармоники (рис. 7.14, а). Для этого он настраивается на частоту данной гармоники. Шунтирование тем более эффективно, чем меньше активное сопротивление контура по сравнению с сопротивлением нагрузки на данной частоте. Для подавления ряда гармоник параллельно нагрузке включаются несколько резонансных контуров (рис. 7.14,б), каждый из которых настраивается на частоту соответствующей гармоники. Подобные схемы широко используются и в электротехнических силовых устройствах в качестве фильтров. В приведенных на рис. 7.14 схемах колебательный контур включается параллельно нагрузке и работает более эффективно от источника с большим внутренним сопротивлением.

## 8. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

### 8.1. УСЛОВИЕ РЕЗОНАНСА И РЕЗОНАНСНАЯ ЧАСТОТА

Параллельным колебательным контуром называется цепь, состоящая из параллельного соединения ветви с индуктивностью и ветви с емкостью (рис. 8.1). Потери в этих ветвях учитываются сопротивлениями  $r_1$  и  $r_2$ .



В параллельном колебательном контуре может возникнуть резонанс токов, т. е. явление, при котором токи в реактивных элементах значительно превышают ток, потребляемый контуром от источника.

Это является следствием того, что при резонансе сдвиг фаз между токами  $\dot{I}_{m1}$  и  $\dot{I}_{m2}$  в параллельных ветвях контура близок к  $180^\circ$  (в идеальном контуре с  $r_1 = r_2 = 0$  сдвиг фаз равен  $180^\circ$ ). Поэтому результирующий ток  $\dot{I}_m$  оказывается по величине очень мал (рис. 8.2),

Резонанс токов наступает, когда реактивные составляющие этих токов взаимно компенсируются, а ток  $\dot{I}_m$ , потребляемый контуром, совпадает по фазе с действующим на контуре напряжением  $\dot{U}_m$ . Сопротивление параллельного контура при резонансе становится активным.

Реактивные составляющие токов  $\dot{I}_{m1}$  и  $\dot{I}_{m2}$  прямо пропорциональны реактивным проводимостям  $b_L$  и  $b_C$  ветвей контура. Поэтому условием резонанса токов в параллельном колебательном контуре является равенство нулю<sup>1</sup> его реактивной проводимости:

$$b_p = b_{Lp} + b_{Cp} = 0. \quad (8.1)$$

Здесь  $b_p, b_{Lp}, b_{Cp}$  — реактивные проводимости контура и его ветвей при резонансе ( $\omega = \omega_0$ ).

Выражая реактивные проводимости ветвей через их реактаные сопротивления, из выражения (8.1) получим

$$\frac{x_{Lp}}{r_1^2 + x_{Lp}^2} + \frac{x_{Cp}}{r_2^2 + x_{Cp}^2} = \frac{-\omega_p L}{r_1^2 + (\omega_p L)^2} + \frac{1}{(\omega_p C)^2 \left[ r_2^2 + \left( \frac{1}{\omega_p C} \right)^2 \right]} = 0.$$

Отсюда, учитывая выражения (7.2) и (7.4), находим резонансную частоту параллельного контура

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{\frac{r_1^2 - p^2}{r_2^2 - p^2}}. \quad (8.2)$$

Анализируя полученное выражение, приходим к выводу, что резонанс токов в параллельном контуре возможен, если  $r_1$  и  $r_2 > p$  или  $r_1$  и  $r_2 < p$ .

Резонансная частота параллельного контура в общем случае отличается от  $\omega_0$ . Однако в высокочастотных радиотехнических контурах

$$\omega_p \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8.3)$$

Ниже ограничимся рассмотрением лишь высокочастотных параллельных контуров, для которых условие резонанса токов практически совпадает с условием резонанса напряжений в последовательных колебательных контурах.

## 8.2. КОМПЛЕКСНЫЕ ВХОДНЫЕ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ; ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Для описания частотно-избирательных свойств параллельного контура (см. рис. 8.1) наиболее удобны его комплексное входное сопротивление  $Z(j\omega)$  и комплексные передаточные функции по току  $K_I(j\omega)$ . Компоненты этих функций определяют входные и передаточные частотные и резонансные характеристики контура.

**Комплексное входное** сопротивление является основной характеристикой параллельного контура:

$$Z_3(j\omega) = \frac{1}{Y_3(j\omega)} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(r_1 + j\omega L) \left( r_2 + \frac{1}{j\omega C} \right)}{(r_1 + r_2) + j(\omega L - 1/\omega C)}.$$

Пренебрегая из-за малости произведением  $r_1 r_2$  в числителе и обозначив полное активное сопротивление контура  $r = r_1 + r_2$ , находим

$$Z_3(j\omega) = \frac{L}{rC} \frac{1}{1 + j(\omega L - 1/\omega C) \frac{1}{r}} = \frac{\rho^2}{r} \frac{1}{1 + j\xi} = \frac{Q^2 r}{1 + j\xi}, \quad (8.4)$$

где  $Q = \rho / r = \omega_0 / r = 1 / \omega_0 C r$  — добротность параллельного контура;

$$\xi = x / r = \frac{1}{r} (\omega L - 1 / \omega C) = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = Q\nu \text{ — его обобщенная расстройка.}$$

Для высокодобротных параллельных колебательных контуров значения  $\rho$ ,  $Q$ ,  $\xi$ ,  $\nu$ ,  $\delta$ ,  $\omega_0$  совпадают с их значениями для последовательных контуров.

При резонансе, когда  $\xi=0$ , эквивалентное сопротивление параллельного колебательного контура имеет резистивный характер:

$$Z_3(j\omega_0) = Z_{30} = \frac{1}{rC} = \frac{\rho^2}{r} = Q\rho = Q^2 r = R_{30} \quad (8.5)$$

и в  $Q^2$  раз больше активного сопротивления  $r$ .

Таким образом, для комплексного входного сопротивления контура получаем

$$Z_3(j\omega) = \frac{R_{30}}{1 + j\xi} = \frac{R_{30}}{\sqrt{1 + \xi^2}} e^{-j \arctg \xi} = Z_3(\omega) e^{j\varphi_3(\omega)} \quad (8.6)$$

или после нормирования

$$\frac{Z_3(j\omega)}{Z_3(j\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} e^{-j \arctg \xi} = Z_{3n}(\omega) e^{j\varphi_3(\omega)}. \quad (8.7)$$

Зависимость модуля входного сопротивления параллельного колебательного контура от частоты называется его амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)

$$Z_3(\omega) = \frac{R_{30}}{\sqrt{1 + \xi^2}}; \quad \frac{Z_3(\omega)}{Z_3(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} = Z_{3n}(\omega). \quad (8.8)$$

Зависимость аргумента входного сопротивления контура от частоты называется его фазо-частотной характеристикой (ФЧХ)

$$\varphi_s(\omega) = -\arctg \xi. \quad (8.9)$$

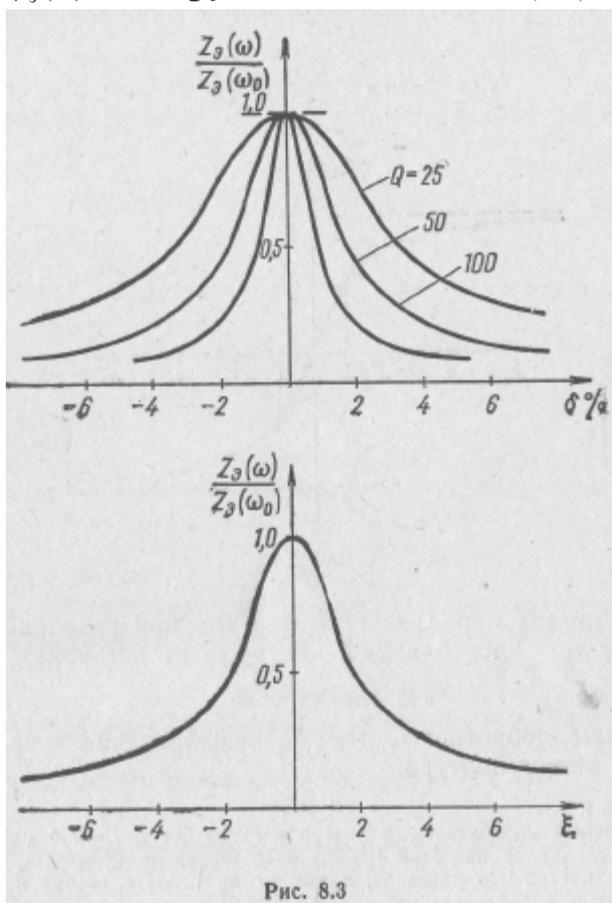


Рис. 8.3

Нормированные АЧХ параллельного (рис. 8.3) и последовательного (см. рис. 7.7 и 7.8) контуров совпадают, а их фазо-частотные характеристики  $\varphi_s(\omega)$  отличаются лишь знаком (рис. 7.8 и 8.4). В отличие от последовательного контура параллельный контур на частотах ниже резонансной носит индуктивный характер, а на частотах выше резонансной — емкостной.

Анализ полученных соотношений и характеристик показывает, что при резонансе ( $\xi=0$ ) ток, потребляемый контуром, очень мал:

$$I_{m0} = \frac{U_{m0}}{R_{s0}} = \frac{U_{m0}}{Q^2 r} \quad (8.10)$$

В то же время, так как

$$z_1 \approx \omega_0 L = \rho \text{ и } z_2 \approx \frac{1}{\omega_0 C} = \rho \text{ т.е. } z_1 \approx z_2 \approx \rho$$

ток  $I_{mL0}$  в ветви с индуктивностью равен току  $I_{mC0}$  в ветви с емкостью

$$I_{mL0} = I_{mC0} = \frac{U_{m0}}{\rho} = \frac{U_{m0}}{Qr} = I_{mk0}. \quad (8.10)$$

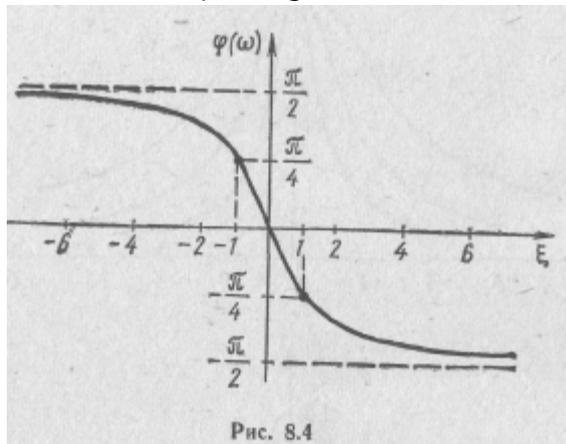


Рис. 8.4

Токи в ветвях параллельного контура при резонансе в  $Q$  раз превышают ток, потребляемый контуром от источника:

$$I_{mk0} = QI_{m0}. \quad (8.12)$$

Чем выше добротность, тем больше значение тока, циркулирующего в ветвях контура.

### Пример 8.1.

Параллельный колебательный контур с  $r=10$  Ом и  $L=230$  мкГ подключен к источнику сигнала с частотой  $f_0=465$  кГц. Определить емкость, при которой контур будет настроен в резонанс, и амплитуду токов в ветвях при резонансе если при резонансе действует напряжение 120 В.

Решение.

1. Так как  $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ , контур будет настроен в резонанс при

$$C = \frac{1}{(2\pi f_0)^2} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot 465^2 \cdot 10^6 \cdot 230 \cdot 10^{-6}} = 509 \cdot 10^{-12} = 500 \text{ пФ.}$$

2. Добротность контура:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{2\pi \cdot 465 \cdot 10^3 \cdot 230 \cdot 10^{-6}}{10} = 67,2$$

3. Ток, потребляемый контуром от источника;

$$I_{m0} = \frac{U_{m0}}{Q^2 r} = \frac{120}{67,2^2 \cdot 10} = 2,66 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 266 \text{ мА}$$

4. Ток в ветвях контура при резонансе:

$$I_{mk0} = QI_{m0} = 67,2 \cdot 2,66 = 179 \text{ мА}$$

В реальных радиотехнических цепях параллельный контур работает от источника с конечным внутренним сопротивлением, например в анодной цепи радиолампы. Эквивалентные схемы такого включения контура приведены на рис. 8.5. В таких схемах нали-

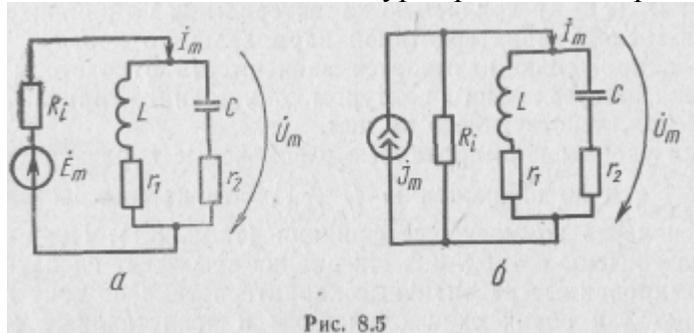


Рис. 8.5

чие конечного внутреннего сопротивления источника  $R_i$  не позволяет обеспечить режим работы контура с заданным током или заданным напряжением. Значения тока, потребляемого контуром, и напряжения на нем в этих цепях связаны между собой и оказывают взаимное влияние.

Поэтому на практике для описания частотно-избирательных свойств параллельного контура нашли применение его частотные и резонансные характеристики с учетом внутреннего сопротивления источника  $R_i$ . Практический интерес для расчетов представляют эквивалентные схемы двух видов: с источником э. д. с. (рис. 8.5, а) и с источником тока (рис. 8.5, б). Установим связь между комплексными функциями этих схем.

Таблица 8.1	
Схема с источником э. д. с.	Схема с источником тока
$Y(j\omega) = \frac{\dot{I}_m}{\dot{E}_m} = \frac{1}{R_i + Z_3(j\omega)}$	$Z(j\omega) = \frac{\dot{U}_m}{\dot{J}_m} = \frac{R_i Z_3(j\omega)}{R_i + Z_3(j\omega)}$
$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_m}{\dot{E}_m} = \frac{\dot{I}_m Z_3(j\omega)}{\dot{E}_m} = Z_3(j\omega) Y(j\omega)$	$K_I(j\omega) = \frac{\dot{I}_m}{\dot{J}_m} = \frac{R_i}{R_i + Z_3(j\omega)}$

Выражения для комплексных функций обеих Схем легко установить, они приведены в табл. 8.1. Модули и аргументы этих функций являются разновидностями АЧХ и ФЧХ исследуемых це-

пей. Все приведенные функции определяются эквивалентным сопротивлением контура  $Z_3(j)$  и внутренним сопротивлением источника  $R_i$ .

В зависимости от режима работы контура, т. е. от того, что является выходной величиной (ток, потребляемый от источника, или напряжение, действующее на контуре), различают два вида резонансных характеристик:  $I_m(\omega)$ —резонансную характеристику по току;  $U_m(\omega)$  — резонансную характеристику по напряжению.

Резонансной характеристикой параллельного контура по току или по напряжению называется зависимость от частоты амплитуды тока, потребляемого контуром от источника, или амплитуды напряжения, действующего на нем.

Очень удобны нормированные резонансные характеристики: по току  $\frac{I_m(\omega)}{I_m(\omega_0)}$  и по напряжению  $\frac{U_m(\omega)}{U_m(\omega_0)}$ . Эти характеристики определяются через комплексные функции (табл.

8.1). Нужные соотношения сведены в табл. 8.2. Их анализ позволяет сделать вывод, что нормированные резонансные характеристики по току и по напряжению для обеих схем одинаковы и представляют собой не что иное, как их нормированные входные и передаточные комплексные функции.

Таблица 8.2

Схема с источником э. д. с.	Схема с источником тока
$\frac{I(j\omega)}{I(j\omega_0)} = \frac{Y(j\omega)}{Y(j\omega_0)} = \frac{R_i + Z_3(j\omega_0)}{R_i + Z_3(j\omega)}$	$\frac{I(j\omega)}{I(j\omega_0)} = \frac{K_I(j\omega)}{K_I(j\omega_0)} = \frac{R_i + Z_3(j\omega_0)}{R_i + Z_3(j\omega)}$
$\frac{U(j\omega)}{U(j\omega_0)} = \frac{K_U(j\omega)}{K_U(j\omega_0)} = \frac{Z_3(j\omega)}{Z_3(j\omega_0)} \frac{I(j\omega)}{I(j\omega_0)}$	$\frac{U(j\omega)}{U(j\omega_0)} = \frac{Z(j\omega)}{Z(j\omega_0)} = \frac{Z_3(j\omega)}{Z_3(j\omega_0)} \frac{I(j\omega)}{I(j\omega_0)}$

**Резонансные характеристики по току** получим, учитывая, что  $I_{mn}(j\omega) = \frac{I_m(j\omega)}{I_m(j\omega_0)} = \frac{Y(j\omega)}{Y(j\omega_0)}$ .

Для этого сначала найдем входную проводимость цепи (см. рис. 8.5, а) с учетом выражения (8.6),

$$\begin{aligned}
 Y(j\omega) &= \frac{1}{R_i + Z_3(j\omega)} = \frac{1}{R_i + \frac{R_{30}}{1 + j\xi}} = \frac{1 + j\xi}{(R_i + R_{30}) + j\xi R_i} = \\
 &= \frac{1 + j\xi}{(R_i + R_{30})(1 + j\xi_3)} = \frac{1}{R_i + R_{30}} \sqrt{\frac{1 + \xi^2}{1 + \xi_3^2}} e^{j(\arctg \xi - \arctg \xi_3)} = \\
 &= Y(\omega) e^{-j\varphi(\omega)}. \quad (8.13)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\xi_3 = \xi \frac{R_i}{R_i + R_{30}} = \nu Q \frac{R_i}{R_i + R_{30}} = \nu Q_3 \quad (8.14)$$

эквивалентная обобщенная расстройка;

$$Q_3 = Q \frac{R_i}{R_i + R_{30}} = Q \frac{g_{30}}{g_i + g_{30}} = \frac{\rho}{r + \rho^2/R_i} = \frac{g}{g_{30} + g_i} \quad (8.15)$$

эквивалентная добротность параллельного контура ( $g=1/\rho$ ).

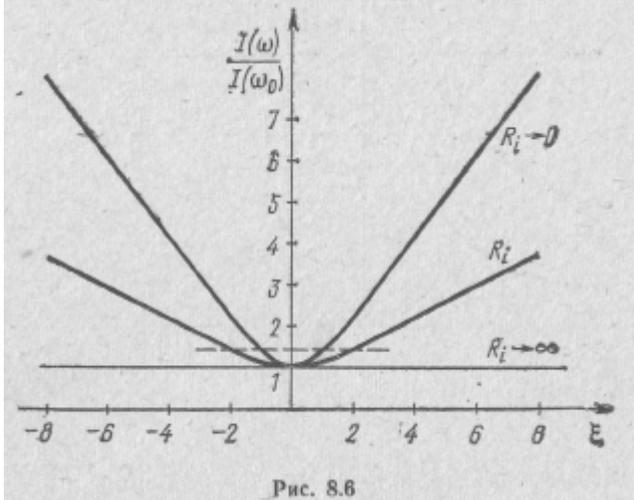


Рис. 8.6

Эквивалентная добротность  $Q_3$  учитывает влияние внутреннего сопротивления источника на резонансные свойства колебательной системы.

После нормирования из формулы (8.13) находим

$$\frac{Y(j\omega)}{Y(j\omega_0)} = \sqrt{\frac{1 + \xi^2}{1 + \xi_3^2}} e^{j(\arctg \xi - \arctg \xi_3)} = \frac{I_m(j\omega)}{I_m(j\omega_0)} \quad (8.16)$$

Модуль этого выражения представляет нормированную резонансную характеристику параллельного контура по току:

$$\frac{I_m(\omega)}{I_m(\omega_0)} = \sqrt{\frac{1 + \xi^2}{1 + \xi_3^2}} = \sqrt{\frac{1 + \xi^2}{1 + \xi^2 \left(\frac{R_i}{R_i + R_{30}}\right)^2}} \quad (8.17)$$

Резонансные кривые по току (рис. 8.6) тем острее, чем меньше внутреннее сопротивление источника. Объясняется это тем, что при малом внутреннем сопротивлении источника параллельный контур работает практически в режиме заданного напряжения. При этом ток, потребляемый от источника, определяется в основном эквивалентным сопротивлением  $Z_3(j\omega)$ , а напряжение на контуре изменяется слабо. При большом  $R_i$ , полное сопротивление цепи дополняется внутренним сопротивлением источника и параллельный контур работает практически в режиме заданного тока. Ток, потребляемый контуром в этом случае, определяется в основ-

ном сопротивлением  $R_i$ , слабо зависит от сопротивления контура  $Z_0(j\omega)$  и поэтому остается почти неизменным. В этом случае говорят о дополняющем действии внутреннего сопротивления  $R_i$  источника сигнала на контур.

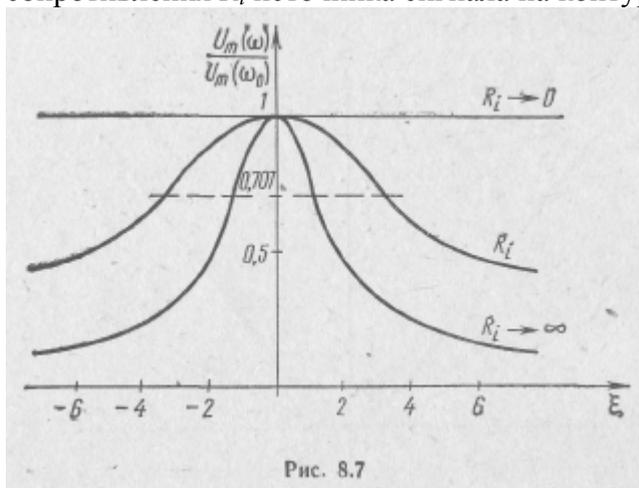


Рис. 8.7

**Резонансные характеристики по напряжению** находим с помощью выражений (8.6), (8.13) и соотношений, приведенных в табл. 8.1:

$$U_m(j\omega) = K_U(j\omega) \dot{E}_m = Z_0(j\omega) Y(j\omega) \dot{E}_m = \frac{R_{\text{Э0}}}{R_i + R_{\text{Э0}}} \cdot \frac{E_m}{\sqrt{1 + \xi^2}} e^{-j \arctg \xi} e^{j\psi_u}$$

Отсюда

$$U_m(\omega) = \frac{R_{\text{Э0}}}{R_i + R_{\text{Э0}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} E_m = K_U(\omega) E_m \quad (8.18)$$

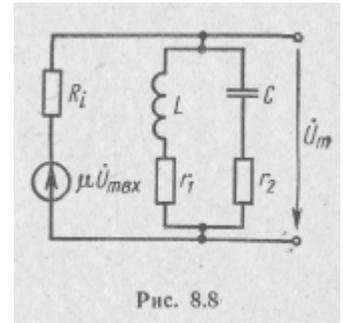
или после нормирования

$$\frac{U_m(\omega)}{U_m(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2 \left(\frac{R_i}{R_i + R_{\text{Э0}}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \quad (8.19)$$

В отличие от резонансных кривых по току резонансные кривые по напряжению параллельного контура тем острее, чем больше внутреннее сопротивление  $R_i$  источника (рис. 8.7). Это объясняется шунтирующим действием сопротивления  $R_i$  на контур. Будучи включенным параллельно контуру, оно снижает эквивалентную добротность  $Q$ , и делает резонансные кривые более пологими. Чем меньше  $R_i$  по сравнению с  $R_{\text{Э0}}$ , тем меньше напряжение на контуре зависит от его входного сопротивления  $Z_0(\omega)$ , тем сильнее сопротивление источника шунтирует контур.

Из резонансных характеристик (см. рис. 8.6 и 8.7) следует, что о настройке параллельного колебательного контура в резонанс можно судить по минимуму потребляемого им тока и по максимуму действующего на нем напряжения.

Следует заметить, что напряжение на параллельном контуре (8.18) всегда меньше э. д. с. источника сигнала. Этим, в частности, он отличается от последовательного контура, на выходе которого при резонансе действует напряжение, значительно превышающее э. д. с. источника. Параллельный резонансный контур в отличие от последовательного не может быть использован как усилитель колебаний.



### Пример 8.2.

С помощью эквивалентной схемы (рис. 8.8) лампового усилителя высокочастотного сигнала определить его коэффициент усиления и напряжение на выходе, если известны параметры контура:  $L=120 \text{ мкГ}$ ;  $Q=100$ ;  $f_0=1,5 \text{ МГц}$ ; электронной лампы:  $R = 800 \text{ кОм}$ ;  $S = 2 \text{ ма/В}$ ;  $\mu=1600$  и амплитуда выходного сигнала  $U_{m \text{ вх}}=30 \text{ мкВ}$ .

Решение.

1. Эквивалентное сопротивление параллельного контура при резонансе:

$$R_{\text{э0}} = Q\rho = 2\pi f_0 LQ = 2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^6 \cdot 120 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 113 \text{ кОм}$$

2. Амплитуда эквивалентной э. д. с. источника в схеме:

$$E_m = \mu U_{m \text{ вх}} = 1600 \cdot 30 \cdot 10^{-6} = 48 \cdot 10^{-3} = 48 \text{ мВ}$$

3. Резонансная характеристика по напряжению (рис. 8.9, а):

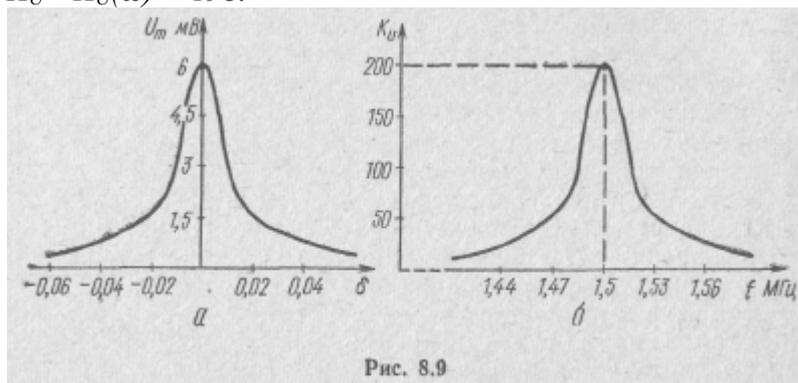
$$\begin{aligned}
 U_m(\omega) &= \frac{R_{\text{э0}}}{R_l + R_{\text{э0}}} \cdot \frac{E_m}{\sqrt{1 + \xi^2 \left( \frac{R_l}{R_l + R_{\text{э0}}} \right)^2}} \approx \\
 &\approx \frac{R_{\text{э0}}}{R_l + R_{\text{э0}}} \cdot \frac{E_m}{\sqrt{1 + (2Q\xi)^2 \left( \frac{R_l}{R_l + R_{\text{э0}}} \right)^2}} = \\
 &= \frac{113}{800 + 113} \cdot \frac{48}{\sqrt{1 + 4 \cdot 10^4 \xi^2 \left( \frac{800}{800 + 113} \right)^2}} = \frac{5,94}{\sqrt{1 + \xi^2 \cdot 3,07 \cdot 10^4}} \text{ мВ.}
 \end{aligned}$$

При резонансе на выходе каскада действует напряжение  $U_m = U_m(\omega) = 5,94 \text{ мВ}$ .

4. Коэффициент усиления каскада в функции частоты (рис. 8.9,б):

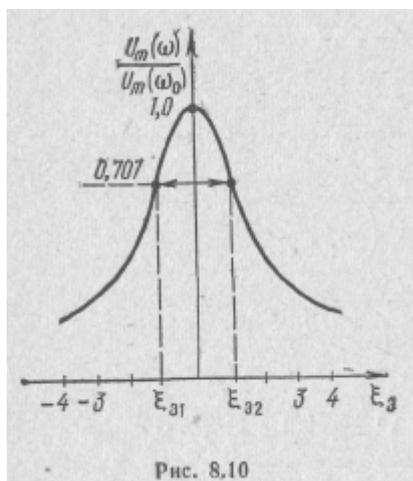
$$K_U(\omega) = \frac{U_m(\omega)}{U_{m \text{ вх}}} = \frac{1}{30 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{5,94}{\sqrt{1 + \xi^2 \cdot 3,07 \cdot 10^4}} \cdot 10^{-3} = \frac{198}{\sqrt{1 + \xi^2 \cdot 3,07 \cdot 10^4}}$$

При резонансе коэффициент усиления по напряжению  
 $K_U = K_U(\omega) = 198$ .



### 8.3. ПОЛОСА ПРОПУСКАНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТ ПРЯМОУГОЛЬНОСТИ

Главным назначением параллельного резонансного контура является выделение на контуре колебаний напряжения в определенной полосе частот. Поэтому основой для определения его полосы пропускания является резонансная кривая по напряжению. Полосой пропускания параллельного колебательного контура называется интервал частот вблизи резонанса, на границах которого амплитуда напряжения на контуре снижается до уровня  $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$



своего максимального значения (рис. 8.10).

Для нахождения граничных частот подставим в уравнение (8.19) значение этого уровня:

$$\frac{U_m(\omega)}{U_m(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (8.20)$$

Отсюда следует, что границам полосы пропускания соответствует эквивалентная обобщенная расстройка  $\xi_{3,1,2} = \mp 1$ . Далее аналогично выражениям (7.42)

— (7.47) получаем сходные выражения:

$$\Pi = \omega_0 d_3 = \omega_0 / Q_3, \quad (8.21)$$

$$\Pi_0 = d_3 = 1 / Q_3. \quad (8.22)$$

Полоса пропускания параллельного контура определяется его эквивалентной добротностью  $Q_3$  и, следовательно, зависит не только от собственной добротности контура  $Q$ , но и от внутреннего сопротивления  $R_i$  источника. Чтобы расширить полосу пропускания, необходимо уменьшить эквивалентную добротность контура. Как следует, например, из формулы (8.15), это возможно двумя пу-

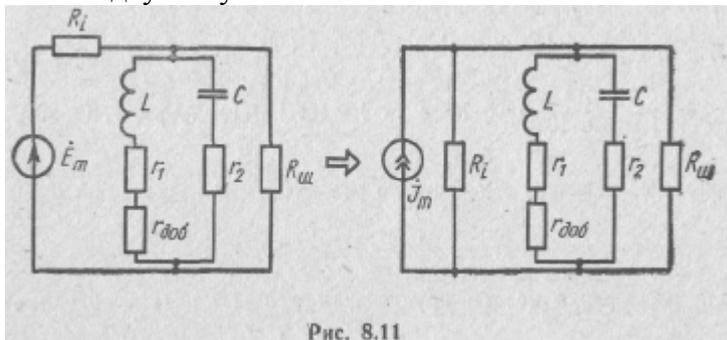


Рис. 8.11

тями (рис. 8.11): увеличением активного сопротивления  $z$  включением в ветви контура добавочного сопротивления  $r_{доб}$  и дополнительным шунтированием контура сопротивлением  $R_{ш} = 1/g_{ш}$ :

Включение в ветви контура добавочного сопротивления приводит к снижению его добротности:

$$Q = \frac{\rho}{r_1 + r_2 + r_{доб}}$$

Дополнительное шунтирование контура уменьшает общее ее сопротивление, шунтирующее контур:

$$R_z = \frac{R_i R_{ш}}{R_i + R_{ш}} = \frac{1}{g_i + g_{ш}} = \frac{1}{1/R_i + 1/R_{ш}}$$

В итоге исходя из выражения (8.15) находим

$$Q_3 = \frac{\rho}{r + \rho^2/R_i + \rho^2/R_{ш}} = \frac{b}{g_{30} + g_i + g_{ш}}, \quad (8.23)$$

где  $r = r_1 + r_2 + r_{доб}$

Отсюда выражение для полосы пропускания

$$\Pi_0 = \frac{1}{Q_3} = \frac{r}{\rho} + \frac{\rho}{R_i} + \frac{\rho}{R_{ш}} \quad (8.24)$$

В нем дополнительные слагаемые учитывают влияние сопротивлений  $R_i$  и  $R_{ш}$  на ширину полосы пропускания.

Коэффициент прямоугольности параллельного колебательного контура численно равен коэффициенту прямоугольности последовательного контура:

$$K_{П} = \frac{\Pi_{0,707}}{\Pi_1} = \frac{d_3}{10d_3} = \frac{Q_3}{10Q_3} = 0,1 \quad (8.25)$$

Это свидетельствует о том, что их избирательные свойства одинаковы.

**Пример 8.3.**

Рассчитать полосу пропускания параллельного контура в схеме (см. рис. 8.8, пример 8.2) и определить значение шунтирующего сопротивления  $R_{ш}$ , необходимого для расширения этой полосы в 1,5 раза.

Решение.

1. Полоса пропускания контура в схеме:

$$\Pi = f_0/Q_{\Sigma} = \frac{f_0(R_L + R_{\Sigma 0})}{QR_L} = \frac{f_0(R_L + \rho Q)}{QR_L} = \frac{f_0}{QR_L}(R_L + 2\pi f_0 LQ) = \frac{1,5 \cdot 10^6}{100 \cdot 800 \cdot 10^3} (800 \cdot 10^3 + 2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^6 \cdot 120 \cdot 10^{-6} \cdot 100) = 17,12 \text{ кГц.}$$

2. В соответствии с (8.24) включение  $R_{ш}$  увеличивает относительную полосу пропускания на величину  $\rho/R_{ш}$ , что по условию задачи составляет  $0,5\Pi_0$ . Отсюда

$$0,5\Pi_0 = \frac{\rho}{R_{ш}}$$

т. е. для расширения полосы пропускания в  $k=1,5$  раза необходимо выбрать

$$R_{ш} = \frac{\rho}{(k-1)\Pi_0} = \frac{f_0 \rho}{(k-1)\Pi}$$

или

$$R_{ш} = \frac{f_0 \rho}{0,5\Pi} = \frac{f_0 \cdot 2\pi f_0 L}{0,5\Pi} = \frac{1,5 \cdot 10^6 \cdot 2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^6 \cdot 120 \cdot 10^{-6}}{0,5 \cdot 17,12 \cdot 10^3} = 197,3 \text{ кОм.}$$

### 8.4. СЛОЖНЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ КОНТУРЫ

Если хотя бы в одной из ветвей простого параллельного колебательного контура (см. рис. 8.1) включить две разнородные реактивности (рис. 8.12), то полученные схемы приобретают важные

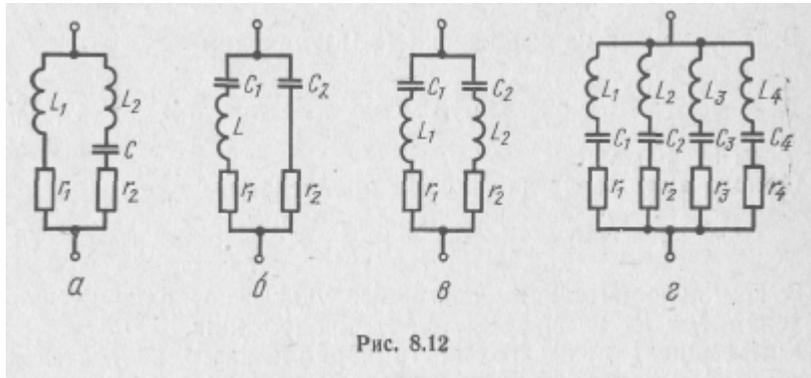


Рис. 8.12

для их практического применения свойства. Такие схемы называются сложными параллельными колебательными контурами II вида (рис. 8.12,а), III вида (рис. 8.12,б) и IV вида (рис.8.1.2, в)•

Они позволяют согласовать эквивалентное сопротивление контура с сопротивлением нагрузки, уменьшить эффект шунтирования контура, а также обладают свойством подавления дополнительных частот. Обратимся к наиболее общей схеме (рис. 8.12, в) для анализа особенностей таких контуров.

Подставляя в условие резонанса токов (8.1) значения реактивных сопротивлений ветвей контура и пренебрегая в случае высоко-добротных контуров сопротивлениями  $r_1$  и  $r_2$ , получим

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \approx 0 \text{ или } x_1 \approx -x_2, \quad (8.26)$$

т. е.

$$\omega_p L_1 - \frac{1}{\omega_p C_1} \approx -\omega_p L_2 + \frac{1}{\omega_p C_2}.$$

Отсюда следует, что резонансная частота сложного параллельного колебательного контура определяется его эквивалентной индуктивностью  $L = L_1 + L_2 = L_3$  и эквивалентной емкостью

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = C_3,$$

$$\omega_p \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8.27)$$

Аналогично определяются и его волновое сопротивление, добротность, затухание:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{LC}}; Q = \frac{\rho}{r} = \frac{1}{d} \text{ где } r = r_1 + r_2.$$

Эквивалентную индуктивность, емкость, активное сопротивление сложного параллельного контура можно определить путем последовательного обхода его ветвей.

Так как при резонансе реактивная проводимость контура  $b = b_1 + b_2$  равна нулю, то его эквивалентное сопротивление при резонансе имеет активный характер и определяется суммой активных проводимостей ветвей:

$$R_{30} = \frac{1}{g_1 + g_2},$$

где

$$g_1 = \frac{r_1}{r_1^2 + x_1^2}; g_2 = \frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2}.$$

Отсюда, учитывая выражение (8.26) и пренебрегая  $r_1^2$  и  $r_2^2$  из-за малости, находим

$$\begin{aligned} R_{30} &= \frac{x_1^2}{r} = \frac{x_2^2}{r} = \frac{1}{r} \left( \omega_0 L_1 - \frac{1}{\omega_0 C_1} \right)^2 = \\ &= \frac{(\omega_0 L)^2}{r} \left( \frac{L_1}{L} - \frac{1}{\omega_0^2 C_1 L} \right)^2 = \left( \frac{\omega_0 L}{r} \right)^2 \left( \frac{L_1}{L} - \frac{C}{C_1} \right)^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$R_{30} = (m_L - m_C)^2 Q^2 r, \quad (8.28)$$

где  $m_L = \frac{L_1}{L} = \frac{L_1}{L_1 + L_2}$  -коэффициент включения индуктивности;

$m_C = \frac{C_1}{C} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$  -коэффициент включения емкости.

Эквивалентное сопротивление сложного параллельного колебательного контура при резонансе зависит от коэффициентов включения  $m_L$  и  $m_C$  и может быть значительно меньшим, чем у простого параллельного контура.

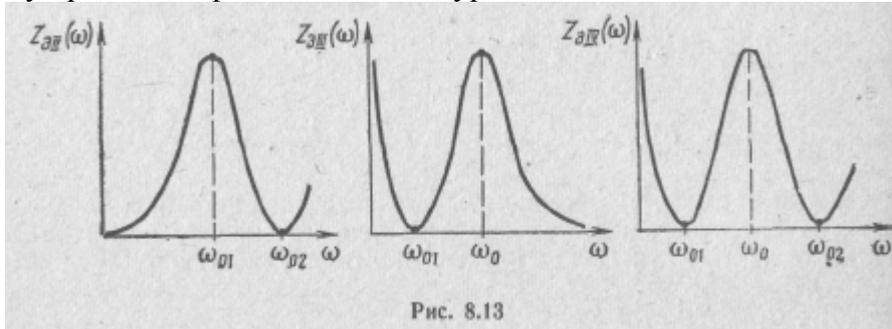


Рис. 8.13

Коэффициенты включения  $m_L$  и  $m_C$  могут быть в пределах  $0 \leq m \leq 1$ . Это позволяет в широких пределах менять эквивалентное сопротивление сложного контура, не изменяя его вторичные параметры  $Q$ ,  $\rho$ ,  $\omega_0$ , что имеет важное практическое значение.

В схемах контуров II и III вида коэффициенты  $m_L$  и  $m_C$  соответственно равны нулю.

Анализируя схемы сложных параллельных колебательных контуров, можно выявить в них возможность дополнительных резонансов, которые возникают в параллельных ветвях контура, содержащих последовательное соединение разнородных реактивностей  $L$  и  $C$ . Частоты дополнительных резонансов определяются параметрами этих ветвей:

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m_L}{m_C} LC}} = \omega_0 \sqrt{\frac{m_L}{m_C}} \quad (8.29)$$

$$\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-m_L)L \frac{C}{1-m_C}}} = \omega_0 \sqrt{\frac{1-m_C}{1-m_L}} \quad (8.30)$$

На этих частотах сопротивление соответствующей ветви, а, следовательно, и всего контура резко снижается (рис. 8.13). При этом напряжение на контуре падает практически до нуля. Поэтому сигналы на частотах дополнительных резонансов контуром не выделяются, а, наоборот, подавляются. Это используется для фильтрации гармоник — гармонических колебаний с кратными частотами.

Для подавления ряда гармоник применяются многорезонансные контуры, содержащие несколько параллельных ветвей, настроенных на частоты, которые необходимо подавить (см. рис. 8.12,г).

#### Пример 8.4.

Сложный параллельный колебательный контур II вида подключен к источнику сигнала с низким внутренним сопротивлением  $R_i = 2$  кОм (рис. 8.14). Найти коэффициент включения, при котором на частоте резонанса в контур будет передана максимально возможная мощность, т. е. будет обеспечен режим согласования. Параметры контура:  $Q=150$ ;  $\rho = 2,5$  кОм.

Решение.

1. Для согласования необходимо выполнить условие передачи максимально возможной мощности:

$$R_i = R_{\text{э0}} = (m_L - m_C)^2 Q^2 r = (m_L - m_C)^2 Q \rho.$$

2. Так как в данной схеме  $m_C = 0$ , то заданное условие будет выполняться, если

$$R_i = m_L^2 Q \rho$$

Отсюда

$$m_L = \sqrt{\frac{R_i}{Q \rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^3}{150 \cdot 2,5 \cdot 10^3}} = 0,073$$

$$\text{или } L_1 = m_L L = 0,073L; L_2 = (1 - m_L)L = 0,927L.$$

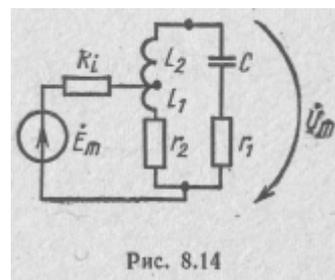


Рис. 8.14

### 8.5. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ КОНТУРОВ

Основным назначением параллельных колебательных контуров является обеспечение частотной избирательности. В радиотехнических устройствах они применяются для выделения колебаний, занимающих определенную частоту или полосу частот. Примерами могут служить различные избирательные усилители на электронных лампах и транзисторах, входные каскады радиоприемников, смесителей частоты, автогенераторы гармонических колебаний и др.

Чаще параллельный колебательный контур включается параллельно нагрузке и источнику (рис. 8.15). При этом выходное напряжение снимается с контура, а его частотно-избирательные свойства описываются резонансными характеристиками по напряжению. Нагрузка и внутреннее сопротивление источника в такой схеме шунтируют колебательный контур, снижая его эквивалентную добротность и расширяя полосу пропускания. Учет влияния сопротивления нагрузки  $r_n$  на контур аналогичен учету сопротивления  $R_{\text{ш}}$  в схеме (см. рис. 8.11). Чтобы снизить шунтирующее действие нагрузки и источника в такой схеме, необходимо, чтобы

значения их сопротивлений были достаточно высокими. Этому удовлетворяют, например, схемы на электронных лампах. Однако в транзисторных схемах, характеризующихся, как правило, низ-

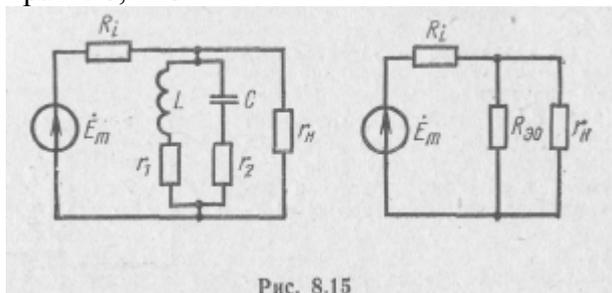


Рис. 8.15

кими внутренними сопротивлениями, эффективное использование простого параллельного контура из-за сильного шунтирования практически невозможно. В этих случаях используются сложные параллельные контуры (рис. 8.16). Соответствующий выбор коэффициентов включения позволяет значительно снизить эквивалентное сопротивление сложного параллельного колебательного контура относительно точек подключения и избежать его шунтирования. Параллельный контур используется и в схеме с последовательным включением нагрузки и источника сигнала (рис. 8.17). При этом выходной сигнал пропорционален току, потребляемому контуром, а частотно-избирательные свойства схемы описываются резонансными характеристиками по току. Использование параллельного колебательного контура между источником и нагрузкой

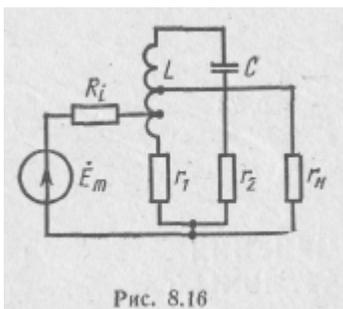


Рис. 8.16

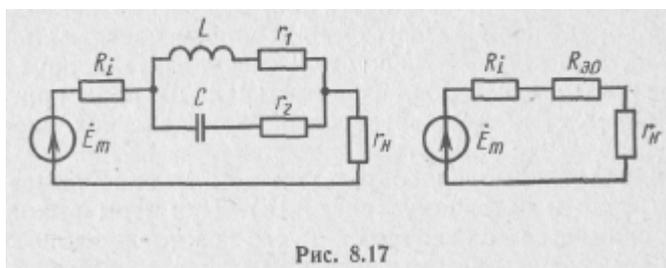


Рис. 8.17

эффективно, если внутреннее сопротивление источника и включенной последовательно с ним нагрузки мало. Эквивалентная добротность контура в таких схемах невелика. Основой для определения полосы пропускания в схеме с последовательным включением контура являются резонансные кри-

вые по току (рис. 8.18). Полоса пропускания параллельного контура по току рассчитывается как интервал частот вблизи резонанса, на границах которого ток, потребляемый контуром, увеличивается в  $\sqrt{2} \approx 1,41$  раза от своего минимального значения при резонансе.

Примером последовательного включения параллельного колебательного контура является фильтр-пробка на входе радиоприемника (рис. 8.19,а). Контур в этой схеме задерживает сигналы с частотами в пределах полосы пропускания по току, так как в этом интервале частот его эквивалентное сопротивление наибольшее. Для подавления нескольких сигналов на разных частотах последовательно включаются соответственно несколько параллельных контуров (рис. 8.19, б), настроенных на подавляемые частоты,

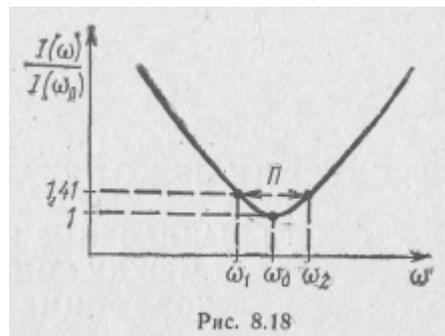


Рис. 8.18

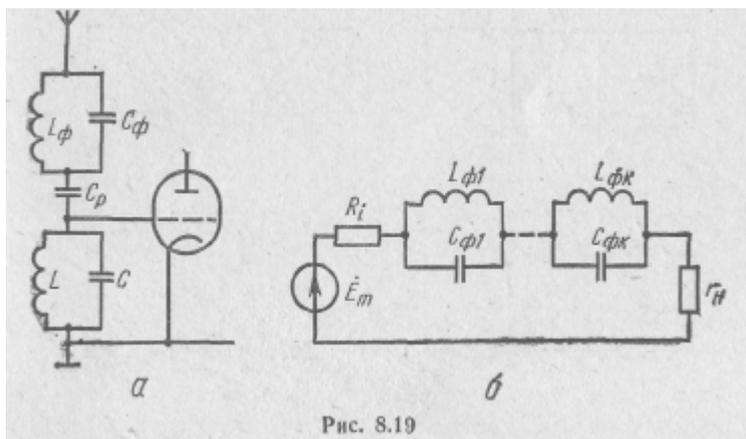


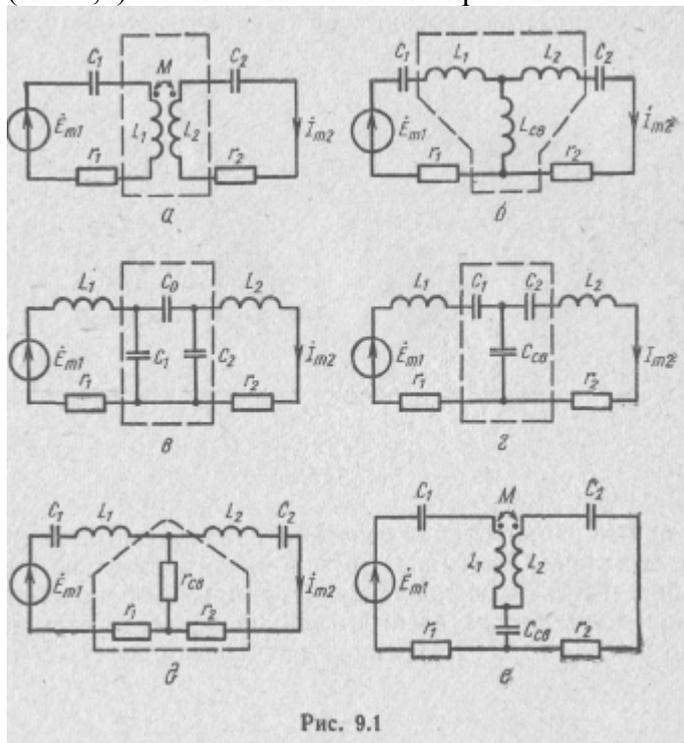
Рис. 8.19

Если при параллельном включении параллельный контур служит для выделения сигналов, то при последовательном включении, наоборот, для их подавления. Параллельный колебательный контур, как и последовательный, широко используется также в электрических фильтрах различного назначения.

## 9. СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ КОНТУРЫ

### 9.1. НАЗНАЧЕНИЕ И ВИДЫ СВЯЗИ МЕЖДУ КОНТУРАМИ. КОЭФФИЦИЕНТ СВЯЗИ

Частотно-избирательные свойства одиночных колебательных контуров невысоки ( $K_p=0,1$ ). Более высокая избирательность



достигается в системе связанных колебательных контуров. Простейшей является система из двух связанных контуров (рис. 9.1 и 9.2), анализом которой и ограничимся ниже. Колебательные

контуры являются связанными, если процессы, протекающие в них, влияют один на другой.

Контур, к которому подключают источник сигнала, называется первичным, а контур, с которого снимается выходной сигнал, — вторичным. По отношению к колебательному контуру источник

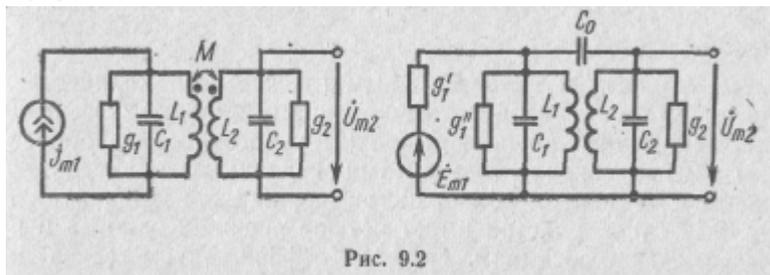


Рис. 9.2

может быть включен последовательно или параллельно. В зависимости от этого различают схемы последовательного (см. рис. 9.1) и параллельного (см. рис. 9.2) питания. В первом случае источник сигнала удобно представлять источником э.д.с., а во втором — источником тока.

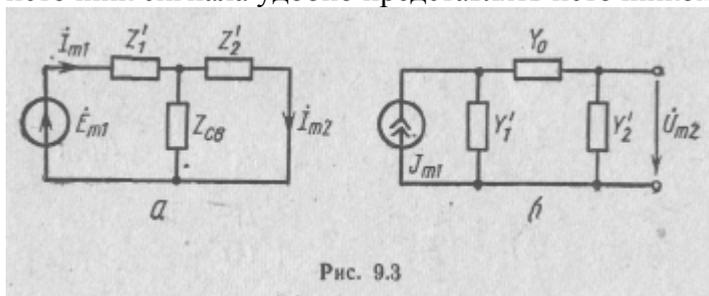


Рис. 9.3

Наиболее распространенным видом связи является индуктивная связь, осуществляемая путем взаимной индукции (рис. 9.1,а). К числу других видов связи относятся кондуктивная (рис. 9.1,б), емкостная (рис. 9.1,в, г), резистивная (рис. 9.1,д), комбинированная (рис. 9.1, е).

Любую систему связанных контуров можно представить Т- или П-образной эквивалентной обобщенной схемой (рис. 9.3). Эти схемы дуальны и могут быть взаимно преобразованы одна в другую. В Т-схеме (рис. 9.3,а) сопротивления  $Z_1'$  и  $Z_2'$  представляют комплексные сопротивления первого и второго контура без учета сопротивления  $Z_{св}$  ветви, общей для обоих контуров. В П-схеме (рис. 9.3, б) проводимости  $Y_1'$  и  $Y_2'$  представляют комплексные проводимости первого и второго контура без учета проводимости  $Y_0$  ветви, связывающей оба контура.

Связь между контурами характеризуют сопротивлением связи  $Z_{CB}$ . Сопротивлением связи называется сопротивление, общее для обоих контуров. Эта величина легко находится из Т-образной эквивалентной схемы. Для расчета сопротивления связи в П-схемах их нужно предварительно преобразовать в эквивалентную Т-схему. Однако при достаточно слабой связи для таких схем можно считать  $Z_{CB} \approx \frac{1}{Y_0}$ .

Более удобным и универсальным параметром количественной оценки любого вида связи между контурами является коэффициент связи. Для его определения выделяют участок схемы, образованный элементом связи и элементами связанных контуров, одноименными с элементом связи, например, как показано пунктиром на рис. 9.1. Такой участок имеет четыре внешних зажима и называется четырехполюсником связи. Коэффициентом связи называется среднее геометрическое значение модулей передаточных функций по напряжению четырехполюсника связи в прямом и обратном направлениях:

$$K = \sqrt{K_{U12}K_{U21}}. \quad (9.1)$$

Для индуктивной связи с помощью схем рис. 9.1, а, 9.3, а получаем:

$$\begin{aligned} K_{U12} &= \frac{Z_{CB}}{Z'_1 + Z_{CB}} = \frac{j\omega M}{j\omega(L_1 - M) + j\omega M} = \frac{M}{L_1} = K_{U12}^* \\ K_{U21} &= \frac{Z_{CB}}{Z'_2 + Z_{CB}} = \frac{j\omega M}{j\omega(L_2 - M) + j\omega M} = \frac{M}{L_2} = K_{U21}^* \\ K &= \sqrt{K_{U12}K_{U21}} = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

В общем случае при реактивном сопротивлении связи для коэффициента связи можно записать

$$K = \frac{x_{CB}}{\sqrt{x_1x_2}}, \quad (9.3)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — реактивные сопротивления элементов первого и второго контуров, одноименных с элементами связи.

Коэффициент связи не может быть больше единицы. Его значения находятся в пределах  $0 \leq K \leq 1$ . Так как в радиотехнике наибольший интерес представляют режимы контура вблизи резонанса, когда индуктивное и емкостное сопротивления его элементов  $xL \approx xC \approx \rho$ , выражение (9.3) можно переписать:

$$K = \frac{x_{CB}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}. \quad (9.4)$$

На практике пользуются следующей условной оценкой связи между контурами: очень слабая связь ( $K \leq 0,01$ ), слабая связь ( $0,01 \leq K \leq 0,05$ ), сильная связь ( $0,05 \leq K \leq 0,90$ ), очень сильная связь ( $0,90 \leq K \leq 1$ ).

Системы связанных колебательных контуров чаще работают при слабой связи. Связь между контурами обычно осуществляют через реактивность. Резистивная связь используется, когда требуется, чтобы сопротивление связи не зависело от частоты.

Пример 9.1.

Определить емкость конденсатора связи в схеме с внутренней емкостной связью (пи. рис. 9.1,г), если  $C_1 = C_2 = 100$  пФ, а коэффициент связи равен 0,1. Решение. Из формулы (9.3) следует:

$$K = \frac{x_{св}}{\sqrt{x_1 x_2}} = \sqrt{\frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_{св})(C_2 + C_{св})}}$$

или

$$C_{св}^2 + (C_1 + C_2) C_{св} + C_1 C_2 \left(1 - \frac{1}{K^2}\right) = 0,$$

т. е.

$$C_{св}^2 + 200 C_{св} - 99 \cdot 10^4 = 0,$$

откуда

$$C_{св} = -100 \pm \sqrt{10^4 + 99 \cdot 10^4} = -100 \pm 1000 \text{ пФ.}$$

Так как физический смысл имеют лишь положительные значения емкости  $C_{св}$ , то  $C_{св} = 900$  пФ.

## 9.2. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СХЕМЫ И КОМПЛЕКСНЫЕ ФУНКЦИИ СИСТЕМЫ ДВУХ СВЯЗАННЫХ КОНТУРОВ

Для анализа процессов в системе из двух связанных контуров обратимся к методу вносимых сопротивлений, являющемуся разновидностью метода преобразований цепи. Суть этого метода заключается в эквивалентной замене системы связанных контуров одноконтурной схемой, анализ которой не представляет трудности. Такую замену делают следующим образом:

одним из известных методов определяют токи в обоих контурах;

полученным выражениям приводят в соответствие две эквивалентные схемы (на базе тока в первом и на базе тока во втором контуре).

Название методу дают компоненты комплексных сопротивлений получаемых эквивалентных схем.

Для составления системы уравнений, описывающих систему связанных контуров, обратимся к Т-образной обобщенной схеме

(рис. 9.3, а), для которой справедливы контурные уравнения<sup>1</sup>:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 \dot{I}_{m1} - Z_{св} \dot{I}_{m2} &= \dot{E}_{m1}; \\ -Z_{св} \dot{I}_{m1} + Z_2 \dot{I}_{m2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

Здесь

$$Z_1 = Z'_1 + Z_{св} = r_1 + jx_1 = r_1 \left( 1 + j \frac{x_1}{r_1} \right) = r_1 (1 + j\tilde{\xi}_1); \quad (9.6)$$

$$Z_2 = Z'_2 + Z_{св} = r_2 + jx_2 = r_2 \left( 1 + j \frac{x_2}{r_2} \right) = r_2 (1 + j\tilde{\xi}_2) \quad (9.7)$$

сумма сопротивлений элементов первого и второго контуров соответственно.

Решение этой системы уравнений дает токи в связанных контурах:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{m1} &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \dot{E}_{m1} = \frac{Z_2 \dot{E}_{m1}}{Z_1 Z_2 - Z_{св}^2} = \frac{\dot{E}_{m1}}{Z_1 - Z_{св}^2 / Z_2} = \\ &= \frac{\dot{E}_{m1}}{Z_1 + Z_{1вн}} = \frac{\dot{E}_{m1}}{Z_{1э}}; \end{aligned} \quad (9.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_{m2} &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \dot{E}_{m1} = \frac{Z_{св} \dot{E}_{m1}}{Z_1 Z_2 - Z_{св}^2} = \frac{Z_{св} / Z_1}{Z_2 - Z_{св}^2 / Z_1} \dot{E}_{m1} = \\ &= \frac{\dot{E}_{m2}}{Z_2 + Z_{2вн}} = \frac{\dot{E}_{m2}}{Z_{2э}}; \end{aligned} \quad (9.9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Z_{1э} &= Z_1 + Z_{1вн} = r_{1э} + jx_{1э}; \\ Z_{2э} &= Z_2 + Z_{2вн} = r_{2э} + jx_{2э}. \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

эквивалентные сопротивления первого и второго контуров;

$$\left. \begin{aligned} Z_{1вн} &= -\frac{Z_{св}^2}{Z_2} = r_{1вн} + jx_{1вн}; \\ Z_{2вн} &= -\frac{Z_{св}^2}{Z_1} = r_{2вн} + jx_{2вн}. \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

<sup>1</sup> Для схемы, например, с индуктивной связью (см. рис. 9.1, а):

$$\begin{aligned} Z_1 &= r_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = r_1 + j \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) = \\ &= r_1 + jx_1 = r_1 (1 + j\tilde{\xi}_1); \\ Z_2 &= r_2 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} = r_2 + j \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) = \\ &= r_2 + jx_2 = r_2 (1 + j\tilde{\xi}_2); \\ Z_{св} &= j\omega M = jx_{св}. \end{aligned}$$

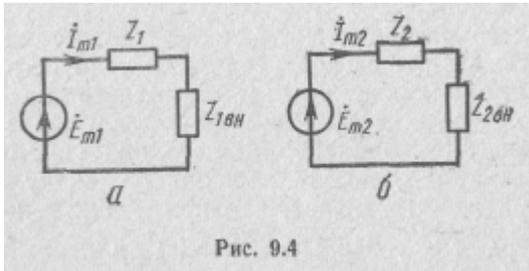
вносимые сопротивления;

$$\dot{E}_{m2} = \frac{Z_{CB}}{Z_1} \dot{E}_{m1} \quad (9.12)$$

э. д. с., наводимая во втором контуре.

Ток во втором контуре можно выразить через ток в первом контуре с помощью выражений (9.8) и (9.9):

$$i_{m2} = \frac{Z_{CB}}{Z_2} i_{m1} \quad (9.13)$$



Выражениям (9.8) и (9.9) соответствуют одноконтурные схемы (рис. 9.4). Схема (рис. 9.4,а), в которой ток определяется выражением (9.8) и равен току в первом контуре, называется эквивалентной схемой системы связанных контуров на базе тока в первом контуре. Схема (рис. 9.4,б), в которой ток в соответствии с формулой (9.9) равен току во втором контуре, называется эквивалентной схемой на базе тока во втором контуре. С помощью этих схем токи в контурах определяются непосредственно по закону Ома.

Рассмотрим параметры эквивалентных схем для наиболее часто встречающегося на практике случая, когда  $r_{CB} = 0$ , т. е.

$$Z_{CB} = jx_{CB} \quad (9.14)$$

Из формулы (9.11) с учетом выражений (9.6) и (9.7) получаем:

$$\left. \begin{aligned} Z_{1вн} &= -\frac{Z_{CB}^2}{Z_2} = \frac{x_{CB}^2}{r_2 + jx_2} = r_2 \left(\frac{x_{CB}}{z_2}\right)^2 - jx_2 \left(\frac{x_{CB}}{z_2}\right)^2 = \\ &= r_{1вн} + jx_{1вн}, \\ Z_{2вн} &= -\frac{Z_{CB}^2}{Z_1} = \frac{x_{CB}^2}{r_1 + jx_1} = r_1 \left(\frac{x_{CB}}{z_1}\right)^2 - jx_1 \left(\frac{x_{CB}}{z_1}\right)^2 = \\ &= r_{2вн} + jx_{2вн}. \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

где

$$r_{1вн} = r_2 \left(\frac{x_{CB}}{z_2}\right)^2 \text{ и } r_{2вн} = r_1 \left(\frac{x_{CB}}{z_1}\right)^2 \quad (9.16)$$

активные составляющие вносимых сопротивлений;

$$Z_{1BH} = -x_2 \left( \frac{x_{CB}}{Z_2} \right)^2 \text{ и } Z_{2BH} = -x_1 \left( \frac{x_{CB}}{Z_1} \right)^2 \quad (9.17)$$

реактивные составляющие вносимых сопротивлений.

Вносимые сопротивления учитывают взаимное влияние связанных контуров друг на друга. Сопротивления  $Z_{1BH}$  и  $Z_{2BH}$  учитывают влияние соответственно второго контура на первый и первого — на второй. Сопротивление  $r_{1BH}$  в первой эквивалентной схеме (см. рис. 9.4,а) учитывает потери во втором контуре. Сопротивление  $r_{2BH}$  во второй эквивалентной схеме (рис. 9.4, б) учитывает потери в первом контуре.

Реактивные сопротивления  $x_{1BH}$  и  $x_{2BH}$  представляют реактивность, вносимую в один из контуров за счет другого, и таким образом учитывают влияние расстройки одного из контуров на другой. Значения этих сопротивлений всегда обратны по знаку реактивности контура, влияние которого они учитывают. Например, сопротивление  $x_{1BH}$  всегда обратно по знаку реактивности второго контура  $x_2$ . Это значит, что при индуктивной расстройке второго контура ( $x_2 > 0$  и  $\xi_2 = \frac{x_2}{r_2} > 0$ ) в первый контур вносится емкостная расстройка, так как при

этом  $x_{1BH} = -x_2 \left( \frac{x_{CB}}{Z_2} \right)^2 < 0$  и  $\xi_{1BH} = \frac{x_{1BH}}{r_1} < 0$ , и наоборот.

Таким образом, для эквивалентных сопротивлений каждого из контуров на основании выражений (9.8) — (9.17) можно записать:

$$\left. \begin{aligned} Z_{1\varepsilon} &= (r_1 + r_{1BH}) + j(x_1 + x_{1BH}) = \left[ r_1 + r_2 \left( \frac{x_{CB}}{Z_2} \right)^2 \right] + \\ &\quad + j \left[ x_1 - x_2 \left( \frac{x_{CB}}{Z_2} \right)^2 \right] = r_{1\varepsilon} + jx_{1\varepsilon}; \\ Z_{2\varepsilon} &= (r_2 + r_{2BH}) + j(x_2 + x_{2BH}) = \left[ r_2 + r_1 \left( \frac{x_{CB}}{Z_1} \right)^2 \right] + \\ &\quad + j \left[ x_2 - x_1 \left( \frac{x_{CB}}{Z_1} \right)^2 \right] = r_{2\varepsilon} + jx_{2\varepsilon}, \end{aligned} \right\} \quad (9.18)$$

Выражения (9.8), (9.9) для токов в контурах можно представить и иначе, выразив токи через комплексные входные и передаточные функции системы:

$$\dot{I}_{m1} = \frac{1}{Z_{1\varepsilon}} \dot{E}_{m1} = Y_{вх1} \dot{E}_{m1}; \quad (9.19)$$

$$\dot{I}_{m2} = \frac{1}{Z_{2\varepsilon}} \dot{E}_{m2} = Y_{вх2} \dot{E}_{m2} = \frac{1}{Z_{2\varepsilon}} \frac{Z_{CB}}{Z_1} \dot{E}_{m1} = Y_{z1} \dot{E}_{m1}. \quad (9.20)$$

Здесь входные комплексные проводимости:

$$Y_{вх1} = \frac{\dot{E}_{m1}}{\dot{I}_{m1}} = \frac{1}{Z_{1\varepsilon}} \text{ и } Y_{вх2} = \frac{\dot{E}_{m2}}{\dot{I}_{m2}} = \frac{1}{Z_{2\varepsilon}}; \quad (9.21)$$

комплексная передаточная проводимость:

$$Y_{z1} = \frac{\dot{I}_{m2}}{\dot{E}_{m1}} = \frac{Z_{CB}}{Z_{2\varepsilon} Z_1} = \frac{Z_{CB}}{Z_1 Z_2 - Z_{CB}^2}. \quad (9.22)$$

Соотношения (9.5) — (9.22) получены для Т-образной обобщенной схемы. Для дуальной ей П-схемы легко получить дуальные выражения и прийти к выводам, аналогичным для случая Т-схем.

В качестве примера найдем передаточное сопротивление для П-образной обобщенной схемы (см. рис. 9.3,6), используя ее матрицу узловых проводи-мостей:

$$\|Y\| = \begin{vmatrix} (Y_1' + Y_0) & -Y_0 \\ -Y_0 & (Y_2' + Y_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1 & -Y_0 \\ -Y_0 & Y_2 \end{vmatrix}.$$

Как следует из выражения (6.24),

$$Z_{21} = \frac{U_{m2}}{J_{m2}} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} = \frac{Y_0}{Y_1 Y_2 - Y_0^2} \approx \frac{Y_{св}}{Y_1 Y_2 - Y_{св}^2}. \quad (9.23)$$

### 9.3. РЕЗОНАНСЫ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ КОНТУРОВ. ЧАСТНЫЕ И СЛОЖНЫЕ РЕЗОНАНСЫ

Резонансом в системе связанных колебательных контуров называется явление, при котором наступает максимум амплитуды любого из токов в контурах или напряжений на элементах контуров.

В системе связанных идеальных колебательных контуров (без потерь) амплитуда колебаний стремится к бесконечности. При этом максимум амплитуды наступает одновременно для всех величин: токов в обоих контурах, напряжений на всех элементах. Условием резонанса в этом случае, как следует из выражений (9.8) и (9.9), является равенство нулю определителя  $\Delta$  системы уравнений (9.5). Это равенство возможно при отсутствии потерь в схеме. При  $\Delta = 0$  амплитуды обоих токов  $I_{m1}$  и  $I_{m2}$  делаются бесконечно большими.

При наличии потерь в контурах амплитуды токов в них имеют максимумы при разных значениях частоты. В таких случаях трудно говорить о резонансе во всей системе на какой-то частоте. Однако при малом затухании частоты максимумов практически совпадают. Поэтому при наличии затухания приближенно можно считать, что резонанс наступает во всей системе, когда наступает максимум амплитуды тока в любом из контуров. При решении практических задач иногда пользуются и другими приближенными определениями резонанса в системе, например: равенство нулю реактивной части комплексного сопротивления эквивалентного контура. Этому также приближенно соответствуют максимумы токов в обоих контурах.

Ограничимся рассмотрением высокодобротных контуров с малым затуханием. Из соотношений (9.8), (9.9) и (9.18) следует, что в системе возникают резонансы при выполнении любого из условий:

$$x_{13} = x_1 - x_2 \left( \frac{x_{св}}{x_2} \right)^2 = 0 \quad (9.24)$$

или

$$x_{2s} = x_2 - x_1 \left( \frac{x_{CB}}{Z_2} \right)^2 = 0. \quad (9.25)$$

Кроме того, каждое из этих условий выполняется, если  $x_1 = x_2 = 0$ , (9.26)

что также соответствует резонансу. При этих условиях токи в контурах, и в частности во втором контуре, принимают максимальные значения.

При настройке системы контуров в резонанс, если частота источника задана, эти условия могут быть выполнены разными путями: изменением реактивных параметров первого контура, второго контура или обоих контуров. Дополнительно, подбором сопротивления "связи между контурами, можно обеспечить наибольшее значение максимума амплитуды тока во втором контуре, достигаемого при резонансе, что следует непосредственно из выражений (9.9), (9.12) и (9.18).

В соответствии с этим в системе различают: частные резонансы (первый, второй и основной, или индивидуальный) и сложные резонансы (первый, второй и полный).

Настройкой системы связанных контуров в резонанс при заданной частоте сигнала называется подбор значений их параметров, обеспечивающих выполнение условий резонанса, и в частности достижение максимального значения тока во вторичном контуре. При настройке на частный резонанс выполнение условий резонанса достигается подбором значений параметров отдельно того или иного контура либо обоих контуров. Настройка на сложный резонанс осуществляется после настройки на один из частных резонансов путем подбора связи между контурами. При этом дополнительно к условиям резонанса выполняются и условия передачи максимально возможной мощности из первого контура во второй.

**Первый частный резонанс** в системе связанных контуров достигается изменением реактивных параметров первого контура. Параметры второго контура и глубина связи при этом остаются неизменными:

$$x_1 = \text{var}; x_2 = \text{const}; x_{CB} = \text{const}.$$

Резонанс достигается при выполнении условия (9.24), когда

$$x_1 = x_2 \left( \frac{x_{CB}}{Z_2} \right)^2 = -x_{1BH} \quad (9.27)$$

что и является условием первого частного резонанса.

Максимум вторичного тока находим из соотношения (9.13) с учетом выражений (9.8), (9.11) и (9.24):

$$I_{m2M1} = \frac{x_{CB}}{Z_2} \left[ \frac{E_{m1}}{r1 + r2 \left( \frac{x_{CB}}{Z_2} \right)^2} \right] \quad (9.28)$$

Примером использования первого частного резонанса служит настройка выходного колебательного контура генератора сигналов высокой частоты (ГСВЧ), индуктивно связанного с емкостной нагрузкой, например с антенной (рис. 9.5).

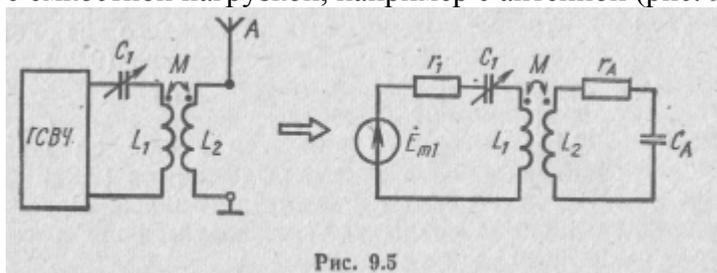


Рис. 9.5

Второй частный резонанс достигается изменением реактивных параметров второго контура. Параметры первого контура и глубина связи остаются неизменными:

$$x_1 = \text{const}; x_2 = \text{var}; x_{CB} = \text{const}.$$

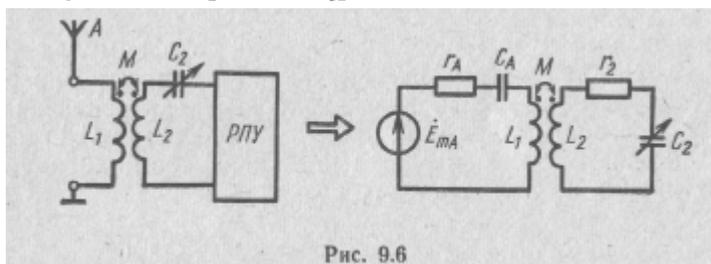


Рис. 9.6

Резонанс достигается при выполнении условия (9.25), когда

$$x_2 = x_1 \left( \frac{x_{CB}}{Z_1} \right)^2 = -x_{2BH}, \quad (9.29)$$

что и является условием второго частного резонанса.

Максимум вторичного тока в этом случае находим из выражения (9.9) с учетом формул (9.12), (9.18) и (9.25):

$$I_{m2 M2} = \frac{x_{CB} E_{m1}}{z_1 \left[ r_2 + r_1 \left( \frac{x_{CB}}{z_1} \right)^2 \right]} = \frac{x_{CB} E_{m1}}{z_1 r_{2\partial}}. \quad (9.30)$$

Примером использования второго частного резонанса служит настройка входного колебательного контура радиоприемного устройства (РПУ), индуктивно связанного с антенной (рис. 9.6). Первым контуром здесь является антенна, а вторым — перестраиваемый входной контур приемника.

**Основной или индивидуальный резонанс** достигается, если оба контура, будучи взяты раздельно, при отсутствии связи между ними индивидуально настроены в резонанс:

$$x_1 = \text{var}; x_2 = \text{var}; x_{CB} = 0.$$

При этом реактивные сопротивления каждого из контуров в отдельности равны нулю и выполняется условие (9.26) или

$$x_1 = -x_{1BH} = x_2 = -x_{2BH} = 0. \quad (9.31)$$

т. е. при основном резонансе оказываются также одновременно выполненными и условия обоих частных резонансов (9.27) и (9.29). Равенство (9.31) есть условие основного резонанса. Практически индивидуальная настройка контуров производится при очень слабой связи между ними.

Значение амплитуды вторичного тока при основном резонансе получаем из выражения (9.28) или (9.30), учитывая формулу (9.31):

$$I_{m2M} = \frac{x_{CB} E_{m1}}{r_2 r_{1\varnothing}} = \frac{x_{CB} E_{m1}}{r_2 [r_1 + r_2 (x_{CB}/z_2)^2]} = \frac{x_{CB} E_{m1}}{r_1 r_2 + x_{CB}^2} = \frac{x_{CB} E_{m1}}{r_1 r_{2\varnothing}}. \quad (9.32)$$

Сравнивая амплитуды вторичного тока в формулах (9.28), (9.30) и (9.32) при частных резонансах, отметим, что при основном резонансе амплитуда значительно превосходит значения, достигаемые при частных резонансах. Поэтому обычно стремятся настроить на частоту сигнала каждый из контуров индивидуально, если конструкция всей системы это позволяет.

### Пример 9.2.

Известны параметры двух индуктивно связанных колебательных контуров (см. рис. 9.1,а):  $r_1 = 15 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 100 \text{ Ом}$ ;  $L_1 = 250 \text{ мкГ}$ ;  $L_2 = 300 \text{ мкГ}$ ;  $C_2 = 1150 \text{ пФ}$ . При такой емкости  $C_1$  будет выполнено условие первого частного резонанса, если частота сигнала  $f = 0,6 \text{ МГц}$ , а коэффициент связи  $K = 16,5\%$ ?

Решение.

1. Из условия первого частного резонанса (9.27)

$$x_1 = x_2 \left( \frac{x_{CB}}{Z_2} \right)^2 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}$$

Поэтому

$$\frac{1}{\omega C_1} = \omega L_1 - x_2 \left( \frac{x_{CB}}{z_2} \right)^2 \quad \text{или} \quad C_1 = \frac{1}{\omega \left[ \omega L_1 - x_2 \left( \frac{x_{CB}}{z_2} \right)^2 \right]}$$

2. Вычисляем нужные величины:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0,6 \cdot 10^6 = 3,77 \cdot 10^6 \text{ рад/с};$$

$$\omega L_1 = 3,77 \cdot 10^6 \cdot 250 \cdot 10^{-6} = 942 \text{ Ом};$$

$$x_2 = \omega L_2 - 1/\omega C_2 = 3,77 \cdot 10^6 \cdot 300 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{3,77 \cdot 10^6 \cdot 1150 \cdot 10^{-12}} = 900 \text{ Ом};$$

$$x_{CB} = K \sqrt{\omega L_1 \cdot \omega L_2} = 16,5 \cdot 10^{-2} \sqrt{(3,77 \cdot 10^6)^2 \cdot 250 \cdot 10^{-6} \cdot 300 \cdot 10^{-6}} = 170 \text{ Ом};$$

$$z_2 = \sqrt{r_2^2 + x_2^2} = \sqrt{100^2 + 900^2} = 905 \text{ Ом}.$$

3. Вычисляем требуемое значение емкости  $C_1$ :

$$C_1 = \frac{1}{3,77 \cdot 10^9 \left[ 942 - 900 \left( \frac{170}{905} \right)^2 \right]} = 292 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} = 292 \text{ пФ.}$$

Анализируя выражения для амплитуды вторичного тока при частных резонансах в формулах (9.28), (9.30) и (9.32), легко сделать вывод, что при соответствующем подборе сопротивления связи  $x_{CB}$  можно увеличить достигаемый максимум тока  $I_{m2}$ .

Режим системы, при котором выполнено условие одного из частных резонансов и подобрана наиболее выгодная связь между контурами, называется сложным резонансом.

**Первый сложный резонанс** достигается после настройки системы на первый частный резонанс путем подбора оптимальной связи. Обращаясь к выражению (9.28) и исследуя функцию  $I_{m2M1} = f(x_{CB})$  на экстремум, находим условие первого сложного резонанса:

$$\frac{\partial I_{m2M1}}{\partial x_{CB}} = E_{m1} \frac{r_1 z_2 + \frac{r_2 x_{CB}^2}{z_2} - 2 \frac{r_2 x_{CB}^2}{z_2}}{\left[ r_1 z_2 + \frac{r_2 x_{CB}^2}{z_2} \right]^2} = 0,$$

т. е.,

$$r_1 = r_2 \left( \frac{x_{CB}}{z_2} \right)^2 = r_{1вн*} \quad (9.33)$$

Этому условию соответствует оптимальная связь с

$$x_{свопт1} = z_2 \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}. \quad (9.34)$$

Подставляя ее значение в формулу (9.28), получаем значение вторичного тока, достигаемое при подборе наиболее выгодной связи:

$$I_{m2MM} = \frac{E_{m1}}{2\sqrt{r_1 r_2}} = y_{21MM} E_{m1} \quad (9.35)$$

Здесь

$$y_{21MM} = \frac{1}{2\sqrt{r_1 r_2}} - \quad (9.35)$$

модуль передаточной проводимости системы, настроенной на сложный резонанс.

Такое же значение вторичного тока будет получено, если первоначально предположить, что система контуров настроена на второй частный резонанс. Разница будет лишь в требуемой оптимальной связи.

**Второй сложный резонанс** достигается после настройки системы на второй частный резонанс подбором оптимальной связи.

Обращаясь к выражению (9.30) и исследуя на экстремум функцию  $I_{m2M2} = f(x_{CB})$ , находим условие второго сложного резонанса:

$$\frac{\partial I_{m2M2}}{\partial x_{CB}} = E_{m1} \frac{r_2 z_1 + \frac{r_1 x_{CB}^2}{z_1} - 2 \frac{r_1 x_{CB}^2}{z_1}}{\left[ r_2 z_1 + \frac{r_1 x_{CB}^2}{z_1} \right]^2} = 0,$$

т. е.

$$r_2 = r_1 \left( \frac{x_{CB}}{z_1} \right)^2 = r_{2opt}, \quad (9.37)$$

чему соответствует оптимальная связь с

$$x_{СВОПТ2} = z_1 \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} \quad (9.38)$$

Подстановка выражения (9.38) в формулу (9.30) приводит к равенству (9.35).

При настройке на первый или второй сложный резонанс изменение  $x_{CB}$  нарушает условие соответствующего частного резонанса (9.27) или (9.29). Поэтому после изменения  $x_{CB}$  контуры подстраивают для восстановления этого условия, после чего связь изменяется и т. д. Таким образом, методом последовательных приближений достигается максимально возможное значение вторичного тока, хотя это и усложняет настройку.

**Полный резонанс** в системе связанных контуров достигается после ее настройки на основной резонанс путем дальнейшего подбора оптимальной связи. При этом наибольшее значение вторичного тока будет достигнуто, когда

$$\frac{\partial I_{m2M}}{\partial x_{CB}} = E_{m1} \frac{r_1 r_2 + x_{CB}^2 - 2 x_{CB}^2}{[r_1 r_2 + x_{CB}^2]^2} = 0,$$

т. е.

$$r_2 = \frac{x_{CB}^2}{r_1} = r_1 \left( \frac{x_{CB}}{z_1} \right)^2 = r_{2opt}, \quad (9.39)$$

что соответствует условию полного резонанса и оптимальной связи:

$$x_{СВОПТ} = r_1 r_1. \quad (9.40)$$

Подставляя это значение сопротивления связи в формулу (9.32), также приходим к выражению (9.35). Таким образом, при всех сложных резонансах достигается одно и то же максимально возможное значение вторичного тока  $I_{m2MM}$ .

Полным резонансом называется разновидность сложного резонанса, при котором каждый из контуров настроен индивидуально. Настройка на полный резонанс проста. Она не требует последовательных приближений, так как условие основного резонанса (9.31) не зависит от величины  $x_{CB}$ .

Сравнение формул сопротивлений связи (9.34), (9.38) и (9.40), при которых достигается тот или иной сложный резонанс, показывает, что для получения наибольшего значения вторичного тока  $I_{m2MM}$  при полном резонансе требуется наименьшая связь:

$$x_{\text{СВОПТ}} < x_{\text{СВОПТ1}}, \text{ так как } x_{\text{СВОПТ}} / x_{\text{СВОПТ1}} = r_2 / z_2 < 1$$

$$x_{\text{СВОПТ}} < x_{\text{СВОПТ2}}, \text{ так как } x_{\text{СВОПТ}} / x_{\text{СВОПТ2}} = r_1 / z_1 < 1$$

Сложные резонансы достигаются при одновременном выполнении двух условий: частного резонанса (9.27), (9.29) или (9.31) и оптимальной связи (9.34), (9.38) или (9.40). Учитывая это, условия сложного резонанса можно выразить в более общей форме:

$$Z_{\text{вн1}} = \dot{Z}_1 \text{ или } Z_{\text{вн2}} = \dot{Z}_2. \quad (9.41)$$

Эти условия одновременно являются и условиями передачи максимума активной мощности из первого контура во второй.

Активное сопротивление второго контура  $r_2$  обычно представляет сумму собственного сопротивления контура  $r_{K2}$  и сопротивления нагрузки  $r_H$ , причем  $r_{K2} \ll r_H$ . Поэтому  $r_2 \approx r_H$  а мощность, выделяемая во втором контуре, представляет активную мощность в нагрузке  $P_H \approx r_H I_2^2 \approx P_{H \max} = r_2 I_{2MM}^2$ . При сложных резонансах в нагрузке выделяется наибольшая активная мощность

$$P_{H \max} \approx P_{2 \max} = r_2 I_{2MM}^2 = E_1^2 / 4r \quad (9.42)$$

Этому соответствует КПД, равный 50%. Мощность, отдаваемая источником сигнала в таком режиме, потребляется поровну в активных сопротивлениях первого и второго контуров.

Наименьшее возможное значение сопротивления связи (9.40), при котором обеспечивается максимум вторичного тока, называется оптимальным. Степень отклонения связи от оптимальной оценивается с помощью фактора связи:

$$A = \frac{x_{\text{СВ}}}{x_{\text{СВОПТ}}} = \frac{x_{\text{СВ}}}{\sqrt{r_1 r_2}}. \quad (9.43)$$

Фактор связи можно выразить через коэффициент связи, учитывая выражения (9.4) и (9.40):

$$A \approx \frac{K \sqrt{P_1 P_2}}{x_{\text{св. опт}}} = K \sqrt{\frac{P_1 P_2}{r_1 r_2}} = K \sqrt{Q_1 Q_2} = \frac{K}{\sqrt{d_1 d_2}}. \quad (9.44)$$

Связь называется оптимальной, если  $A = 1$ . Ей соответствует оптимальный коэффициент связи

$$K_{\text{опт}} = \frac{1}{\sqrt{Q_1 Q_2}} = \sqrt{d_1 d_2}. \quad (9.45)$$

При идентичных контурах ( $Q_1 = Q_2 = Q$ )

$$A \approx KQ; K_{\text{опт}} = \frac{1}{Q} = d. \quad (9.46)$$

Оптимальный коэффициент связи тем меньше, чем больше добротность контуров. Для радиотехнических контуров  $Q=100\div 500$  и коэффициенты связи обычно исчисляются единицами или долями процента,

**Пример 9.3.**

Антенный контур  $L_1, C_a, r_a$  индуктивно связан с входным контуром радиоприемника  $L_2, C_2, r_2$  (см. рис. 9.6). Оба контура настроены на частоту сигнала  $f_0=2,5$  МГц. В антенном контуре наводится э. д. с.  $E_{m a}=100$  мкВ. Параметры контуров:  $r_1=10$  Ом;  $L_1 = 200$  мкГ;  $r_2=20$  Ом;  $L_2=400$  мкГ. Определить напряжение на емкости  $C_2$  при настройке системы на полный резонанс и коэффициент связи, который для этого требуется.

Решение.

1. Требуемый коэффициент связи:

$$K = K_{\text{опт}} = \frac{1}{\sqrt{Q_1 Q_2}} = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{r_1 r_2}{L_1 L_2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi \cdot 2,5 \cdot 10^6} \sqrt{\frac{10 \cdot 20}{200 \cdot 10^{-6} \cdot 400 \cdot 10^{-6}}} = 0,318 \cdot 10^{-2} = 0,318\%$$

2. Амплитуда тока во вторичном контуре и напряжение на емкости  $C_2$ :

$$I_{m2} = I_{m2 \text{ ММ}} = \frac{E_{m1}}{2 \sqrt{r_1 r_2}} = \frac{100}{2 \sqrt{10 \cdot 20}} = 3,54 \text{ мкА};$$

$$U_{mC2} = \frac{1}{\omega_0 C_2} I_{m2 \text{ ММ}} = \rho I_{m2 \text{ ММ}} = \omega_0 L_2 I_{m2 \text{ ММ}} =$$

$$= 2\pi \cdot 2,5 \cdot 10^6 \cdot 400 \cdot 10^{-6} \cdot 3,54 \cdot 10^{-6} = 22,2 \text{ мВ}.$$

#### 9.4. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ КОНТУРОВ

Обычно при изучении частотно-избирательных свойств системы связанных колебательных контуров, когда вторичный ток  $\dot{I}_{m2}$  является выходной и э. д. с.  $\dot{E}_{m1}$  — входной величиной (см. рис. 9.1, а), используют Т-образную схему замещения (см. рис. 9.3, а), а свойства системы характеризуют передаточной проводимостью  $Y_{21}$ . Если же выходной величиной служит напряжение  $\dot{U}_{m2}$  на вторичном контуре, а входной — ток источника  $\dot{I}_{m1}$  (см. рис. 9.2), то пользуются П-образной схемой замещения (см. рис. 9.3,б), а систему характеризуют передаточным сопротивлением  $Z_{21}$ .

Передаточную проводимость обобщенной Т-схемы находим из выражения (9.22), учитывая формулы (9.6), (9.7), (9.11), (9.36) и (9.43):

$$Y_{21} = \frac{\dot{I}_{m2}}{\dot{E}_{m1}} = \frac{Z_{CB}}{Z_1 Z_2 - Z_{CB}^2} = \frac{jx_{CB}}{r_1 r_2 (1 + j\xi_1)(1 + j\xi_2) + x_{CB}^2} = \frac{j2Ay_{21MM}}{1 + A_2 - \xi_1 \xi_2 + j(\xi_1 + \xi_2)}. \quad (9.47)$$

При полном резонансе ( $\xi_1 = \xi_2 = 0; A = 1$ ) она имеет значение

$$Y_{21MM} = jY_{21MM} \quad (9.48)$$

Нормируя по этой величине передаточную проводимость системы, получаем

$$\frac{Y_{21}}{Y_{21MM}} = \frac{I_{m2}}{I_{m2MM}} = \frac{2A}{1 + A^2 - \xi_1 \xi_2 + j(\xi_1 + \xi_2)}. \quad (9.49)$$

Модуль этой функции представляет нормированную обобщенную АЧХ системы связанных контуров, совпадающую с ее нормированной резонансной характеристикой:

$$I_{m2n} = \frac{I_{m2}}{I_{m2MM}} = \frac{2A}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi_1 \xi_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2}} = f(\xi; A). \quad (9.50)$$

В случае идентичных контуров  $|\xi_1| = |\xi_2|$  и

$$I_{m2n} = \frac{I_{m2}}{I_{m2MM}} = \frac{2A}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}} = f(\xi; A). \quad (9.51)$$

Передаточное сопротивление обобщенной П-схемы находим из формулы (9.23):

$$Z_{21} = \frac{Y_{CB}}{Y_1 Y_2 - Y_{CB}^2} = \frac{-jb_{CB}}{g_1 g_2 (1 - j\xi_1)(1 - j\xi_2) + b_{CB}^2}, \quad (9.52)$$

где  $Y_{CB} = -jb_{CB}$ :

$$Y_1 = g_1 - jb_1 = \frac{r_1}{z_1^2} - j\frac{x_1}{z_1^2} = \frac{r_1}{z_1^2} (1 - j\xi_1) = g_1 (1 - j\xi_1);$$

$$Y_2 = g_2 - jb_2 = g_2 (1 - j\xi_2).$$

При основном резонансе, когда  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ , функция (9.52) имеет максимум, если

$$\left. \frac{\partial Z_{21}}{\partial b_{CB}} \right|_{\xi_1 = \xi_2 = 0} = 0, \text{ т. е. при}$$

$$b_{CB} = b_{CB.ОПТ} = \sqrt{g_1 g_2}. \quad (9.53)$$

Подставляя выражение (9.53) в формулу (9.52), при  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ , получаем значение передаточного сопротивления при резонансе

$$Z_{21MM} = \frac{1}{j2\sqrt{g_1 g_2}} \quad (9.54)$$

Нормируя по этой величине передаточное сопротивление системы, находим

$$\frac{Z_{21}}{Z_{21MM}} = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{U}_{m2MM}} = \frac{2A}{1 + A^2 - \xi_1 \xi_2 - j(\xi_1 + \xi_2)} = f(\xi_1, \xi_2, A), \quad (9.55)$$

где

$$A = \frac{b_{CB}}{b_{CB.ОПТ}} = \frac{b_{CB}}{\sqrt{g_1 g_2}} \quad (9.56)$$

фактор связи.

Модуль этой функции представляет нормированную обобщенную АЧХ (резонансную характеристику) системы и, как следует из формулы (9.50), совпадает с нормированной резонансной характеристикой Т-схемы:

$$U_{m2n} = \frac{U_{m2}}{U_{m2MM}} = \frac{2A}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi_1 \xi_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2}} = f(\xi_1; \xi_2; A). \quad (9.57)$$

Формулы (9.49) и (9.55) являются наиболее общим выражением частотных характеристик системы связанных колебательных контуров. С их помощью характеристики системы выражаются через обобщенные расстройки  $\xi_1 = f(\omega; L_1; C_1)$  и  $\xi_2 = f(\omega; L_2; C_2)$ , которые в свою очередь могут быть определены как через частоту  $\omega$  при заданных первичных параметрах контуров, так и через первичные параметры контуров при заданной частоте  $\omega$ . Эти формулы позволяют анализировать как резонансные, так и настроенные кривые системы независимо от того, состоит она из одинаковых или из разных контуров, настроенных одинаково или по-разному.

Нормированные обобщенные АЧХ, определяемые формулами (9.50) и (9.57), при каждом значении постоянной  $L$  представляют поверхность второго порядка в системе координат  $I_{m2n}$  или  $U_{m2n}$ ,  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Эти функции стремятся к нулю как при  $\xi_1 \rightarrow 0$ , так и при  $\xi_2 \rightarrow 0$ . Плоскость с координатами  $\xi_1$  и  $\xi_2$  называется плоскостью расстроек. При изменении фактора связи  $A$  обобщенные АЧХ образуют над плоскостью расстроек семейство поверхностей, характер которых зависит от значения  $A$ .

Для изучения этих поверхностей пользуются методом сечений. Его суть в том, что исследование поверхности производится путем изучения кривых, образованных при пересечении поверхности плоскостями, нормальными или параллельными плоскости расстроек.

При первом способе, рассекая поверхность  $I_{m2n} = f(\xi_1; \xi_2; A)$  плоскостью, нормальной плоскости расстроек, получаем каждый раз след сечения, характер которого зависит от положения секущей плоскости (рис. 9.7). Положение секущей плоскости полностью определяется взаимосвязью расстроек  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , т. е. зависит от соотношения параметров контуров.

При заданной частоте сигнала  $\omega$  изменения  $\xi_1$  и  $\xi_2$  определяются изменением параметров контуров. Тогда, например, случай  $\xi_1 = \text{var}$ ,  $\xi_2 = \text{const}$  (рис. 9.7, а) соответствует настройке на первый частный резонанс, а случай  $\xi_1 = \text{const}$ ;  $\xi_2 = \text{var}$  (рис. 9.7, б) — настройке на второй частный резонанс. Следы сечений при этом являются настроенными кривыми.

При неизменных параметрах колебательных контуров изменения  $\xi_1$  и  $\xi_2$  определяются изменением частоты  $\omega$ . Тогда след сечения, получающийся, например, в случае  $\xi_1 = \xi_2 = \xi = \text{var}$  (рис. 9.7, в), представляет резонансную кривую системы идентичных связанных контуров, а следы сечений в случаях  $\xi_1 \neq \xi_2$ , когда  $\xi_1 = \text{var}$ ,  $\xi_2 = \text{var}$  (рис. 9.7, г), — резонансные кривые системы неидентичных контуров.

При втором способе исследования поверхности обобщенной АЧХ она рассекается на определенных уровнях, например при  $I_{m2n} = 0,1; 0,2; \dots; 0,9$ , плоскостями, параллельными плоскости расстроек. Фиксация получаемых следов сечений приводит к топографическим диаграммам (рис. 9.8, 9.9). Каждой поверхности с определенным значением  $A$  соответствует своя топографическая диаграмма. С помощью таких диаграмм можно построить резонансные кривые системы связанных контуров.

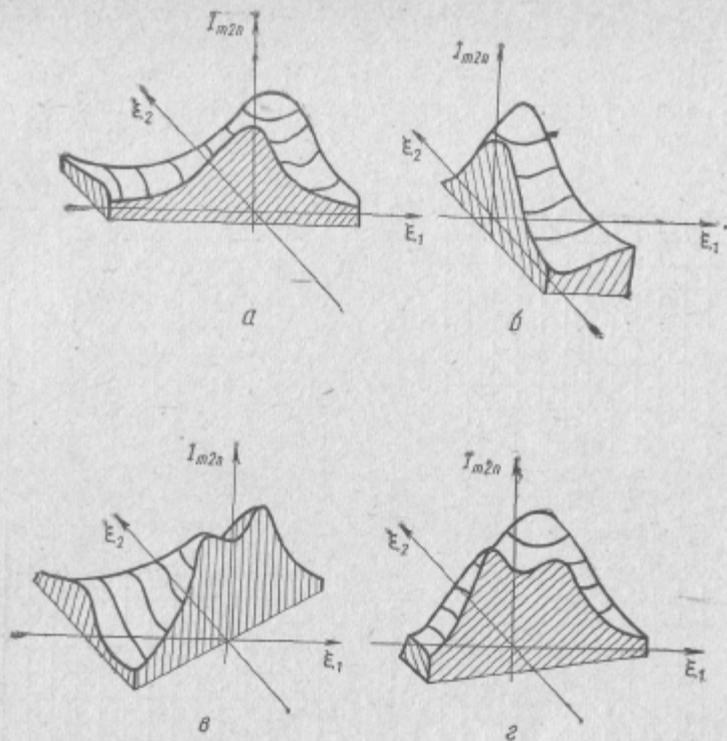


Рис. 9.7

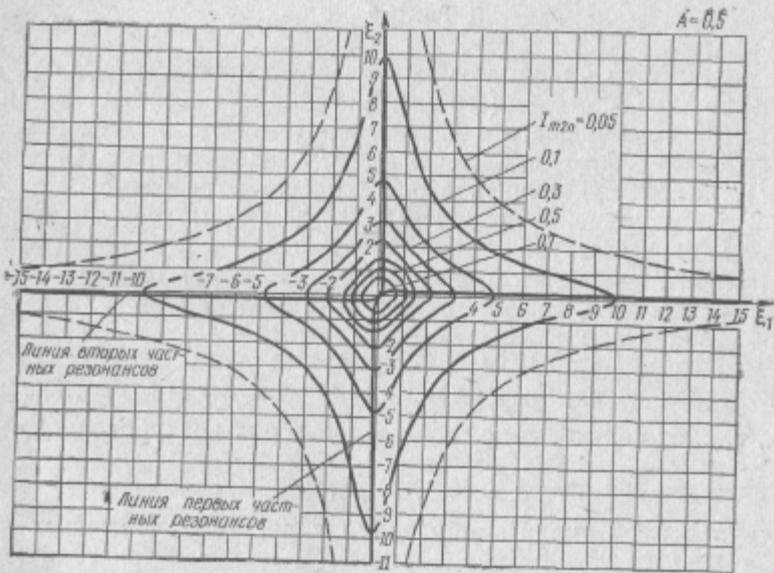


Рис. 9.8

нансные и настроечные кривые для данной системы связанных, контуров.

Участки топографической диаграммы, на которых линии равного уровня сгущаются, соответствуют более крутым участкам исследуемой поверхности, и наоборот. Точки на диаграмме, в ко-

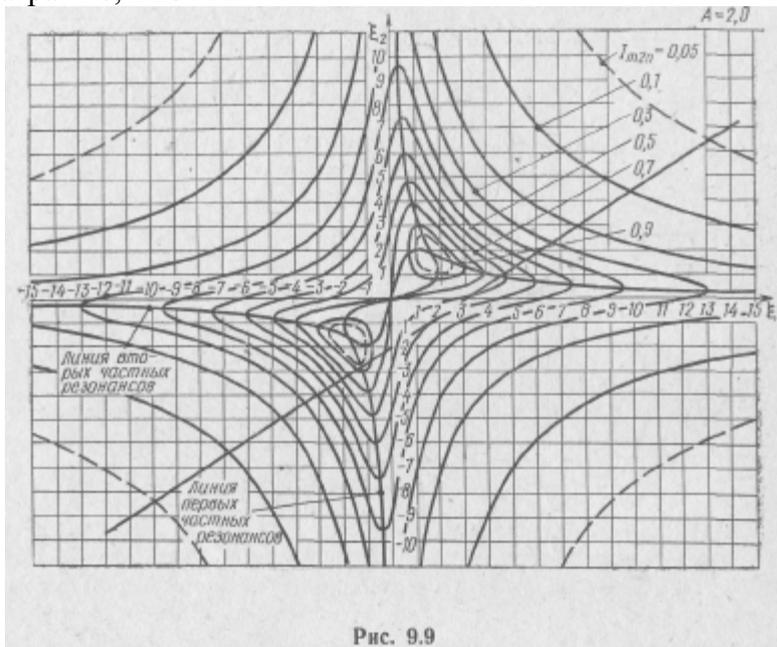


Рис. 9.9

торых достигается максимальное значение аппликаты  $I_{m2n}$  при перемещении вдоль оси  $\xi_1$  ( $\xi_1 = \text{var}$ ;  $\xi_2 = \text{const}$ ), соединены линией, называемой линией первого частного резонанса. Аналогичная линия, но соответствующая перемещению вдоль оси  $\xi_2$  ( $\xi_1 = \text{const}$ ;  $\xi_2 = \text{var}$ ), называется линией второго частного резонанса.

При любых изменениях расстройки  $\xi_1$  и  $\xi_2$  максимум вторичного тока соответствует точкам на линиях частных резонансов. Наибольшее значение этого максимума указывает точки сложного резонанса. Частоты, соответствующие точкам на этих линиях, являются резонансными частотами системы.

Резонансные и настроечные характеристики системы связанных контуров по своей форме и виду зависят от соотношения  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , т. е. от соотношения параметров обоих контуров

$$Q_1 = \frac{\rho_1}{r_1} \quad \text{и} \quad Q_2 = \frac{\rho_2}{r_2}, \quad \omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad \text{и} \quad \omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$$

Для простоты анализа обратимся к системе идентичных контуров ( $Q_1 = Q_2 = Q$ ;  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ ), частотные характеристики которых  $I_{m2n} = f(\xi; A)$  описываются выражением (9.51). Эта функция

при каждом значении  $A$  представляет кривую в плоскости координат  $I_{m2n}$  и  $\xi$ . Исследуем ее на экстремум:

$$\frac{dI_{m2n}}{d\xi} = 2A \frac{d}{d\xi} [(1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2]^{-\frac{1}{2}} = 0,$$

т. е.

$$-\frac{1}{2} [(1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2]^{-\frac{3}{2}} \cdot [-2(1 + A^2 - \xi^2)2\xi + 8\xi] = 0, \quad (9.58)$$

откуда

$$\xi(1 - A^2 - \xi^2) = 0.$$

Корни полученного уравнения представляют три значения обобщенной расстройки, соответствующие точкам экстремума:

$$\xi_0 = 0; \xi_{1,2} = \mp \sqrt{A^2 - 1}. \quad (9.59)$$

Этим значениям соответствуют частоты, которые можно выразить через  $\xi_0$  и  $\xi_{1,2}$  с помощью формулы (7.27):

$$\xi = Qv \approx 2Q\delta = 2Q \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}, \text{ т.е. } \omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q} \xi\right). \quad (9.60)$$

В результате получаем частоты экстремумов:

$$\omega_{p0} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad (9.61)$$

$$\omega_{p1,2} = \omega_0 \left(1 \mp \frac{1}{2Q} \sqrt{A^2 - 1}\right) = \omega_0 \left(1 \mp \frac{1}{2} \sqrt{K^2 - d^2}\right). \quad (9.62)$$

Частота  $\omega_{p0}$  соответствует собственной резонансной частоте контуров  $\omega_0$ . Частоты  $\omega_{p1,2}$  сдвинуты в обе стороны от  $\omega_0$  на величину  $\frac{1}{2Q} \sqrt{A^2 - 1} = \frac{1}{2} \sqrt{K^2 - d^2}$  называются частотами связи. С уменьшением связи частоты связи сближаются, и при  $A=1$  совпадают с частотой  $\omega_0$ . Анализ полученных выражений показывает, что число экстремумов на резонансной кривой зависит от значения фактора связи  $A$ .

**При  $A < 1$ ,** когда связь между контурами слабее оптимальной, имеется лишь один экстремум при  $\xi_0 = 0$ , так как  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — в этом случае мнимые величины и не имеют физического смысла. Этому экстремуму соответствует резонанс в системе на частоте  $\omega_{p0} = \omega_0$ . Вторичный ток в формуле (9.51) при резонансе не достигает своего максимально возможного значения (рис. 9.10), так как

$$I_{m2n} \Big|_{\xi=\xi_0=0} = \frac{2A}{1+A^2} < 1 \quad (9.63)$$

В случае  $A < 1$  в системе достигаются лишь частные резонансы.

При  $A = 1$ , когда связь оптимальная, имеется также лишь один экстремум при  $\xi_0 = \xi_1 = \xi_2 = 0$ . Ему соответствует резонанс на частоте  $\omega_{p0} = \omega_0$ . В отличие от предыдущего случая вторичный ток

при оптимальной связи достигает своего максимально возможного значения:

$$I_{m2n} |_{\xi-\xi_0=0} = \frac{2A}{1+A^2} = 1. \quad (9.64)$$

В случае  $A = 1$  в системе достигается полный резонанс. Связь с  $A = 1$  называется также критической связью.

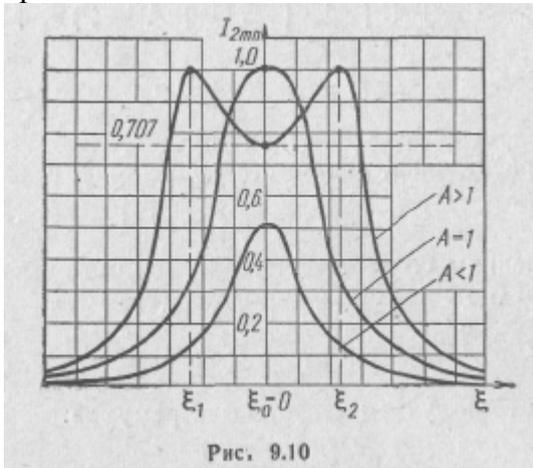


Рис. 9.10

При  $A > 1$ , когда связь сильнее оптимальной (критической), на резонансных характеристиках имеются три экстремума (см. рис. 9.10), из них два максимума при  $\xi_{1,2} = \mp \sqrt{A^2 - 1}$  и один

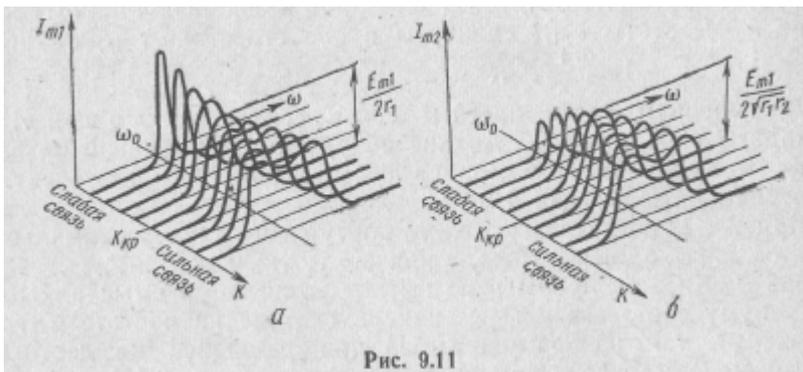


Рис. 9.11

минимум или впадина при  $\xi_0 = 0$ . Максимальным значениям вторичного тока соответствуют две точки резонанса на частотах связи  $\omega_{p1,2}$ . Вторичный ток в этих точках достигает своего максимально возможного значения:

$$I_{m2n} |_{\xi=\xi_{1,2}} = \frac{2A}{\sqrt{(1+A^2-A^2+1)^2 + 4A^2-4}} = 1, \quad (9.65)$$

Этому соответствует настройка системы на первый или второй сложный резонанс. При  $A \leq 1$  резонансные кривые — одnogорбые, а при  $A > 1$  — двугорбые. С увеличением фактора связи  $A$  точки максимумов (точки резонанса) раздвигаются, но ординаты максимумов остаются неизменными. С раздвижением горбов впадина между ними становится глубже. На рис. 9.11,а показана зависимость формы резонансной кривой вторичного тока  $I_{m2n}(\omega)$  от коэффициента связи. Для сравнения на рис. 9.11,б приведена аналогичная зависимость резонансной кривой первичного тока.

## 9.5. ПОЛОСА ПРОПУСКАНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТ ПРЯМОУГОЛЬНОСТИ

Полосой пропускания системы связанных колебательных контуров называется интервал частот, в пределах которого значение тока во втором контуре не снижается ниже уровня  $1/\sqrt{2}$  своего максимального значения. Ширина полосы пропускания зависит от глубины связи: чем больше фактор связи  $A$ , тем шире полоса пропускания (см. рис. 9.10). Ширину полосы пропускания системы можно регулировать изменением связи. Однако это возможно в ограниченных пределах. Наиболее широкой полоса пропускания будет, когда впадина резонансной кривой достигнет уровня  $1/\sqrt{2}$ , т. е. когда

$$I_{m2n} |_{\xi=0} = \frac{2A}{1+A^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ или } A^2 - 2\sqrt{2}A + 1 = 0.$$

Этому соответствует значение  $A = 1 + \sqrt{2} \approx 2,41$ . При  $A > 2,41$  полоса пропускания системы разрывается на части, так как впадина резонансной кривой опускается ниже указанного уровня. Установим пределы, в которых может находиться полоса пропускания системы двух связанных идентичных колебательных контуров.

**При  $A < 1$**  максимальное значение вторичного тока  $I_{m2n} < 1$ . С учетом выражения (9.63) значения расстроек  $\xi_{ГР}$ , соответствующие границам полосы пропускания, найдем из равенства

$$I_{m2n}(A; \xi_{ГР}) = \frac{2A}{\sqrt{(1+A^2-\xi_{ГР}^2)^2 + 4\xi_{ГР}^2}} = \frac{2A}{1+A^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (9.66)$$

Это равенство приводит к биквадратному уравнению  $\xi_{ГР}^4 + \xi_{ГР}^2 \cdot 2(1-A^2) - (1+A^2)^2 = 0$ , решением которого является

$$\xi_{ГР1,2} = \mp \sqrt{-(1-A^2) \pm \sqrt{2(1+A^4)}}. \quad (9.67)$$

Здесь знак «минус» под радикалом приводит к мнимым значениям  $\xi_{ГР}$ , лишенным физического смысла, и не должен учитываться.

ваться. С помощью выражения (9.60) находим, что значениям  $\xi_{гр}$  соответствуют граничные частоты

$$\omega_{гр1,2} \approx \omega_0 \left( 1 + \frac{1}{2Q} \xi_{гр1,2} \right) \quad (9.68)$$

и полоса пропускания

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \frac{1}{\omega_0} (\omega_{гр2} - \omega_{гр1}) \approx \frac{1}{2Q} (\xi_{гр2} - \xi_{гр1}) = \\ &= \frac{1}{Q} \sqrt{-(1-A^2) + \sqrt{2(1+A^2)}}. \end{aligned} \quad (9.69)$$

При очень слабой связи ( $K \leq 0,01$ ), когда  $A = KQ \leq 0,01Q$ ,

$$\Pi_0 \approx \frac{0,64}{Q} \quad (9.70)$$

При  $A > 1$  максимальное значение вторичного тока  $I_{m2n} = 1$  и граничные значения обобщенных расстройк  $\xi_{гр}$  можно найти из равенства

$$I_{m2n}(A; \xi_{гр}) = \frac{2A}{\sqrt{(1+A^2-\xi_{гр}^2)^2 + 4\xi_{гр}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (9.71)$$

Ему соответствует уравнение  $(\xi^2 + 1 - A^2) = 4A^2$ , из которого следует

$$\xi_{гр1,2} = \pm \sqrt{A^2 \pm 2A - 1}. \quad (9.72)$$

Здесь знак «минус» под радикалом соответствует границам разрыва полосы пропускания при  $A = 2,41$ .

Отсюда аналогично выражению (9.69) находим

$$\Pi_0 \approx \frac{1}{2Q} (\xi_{гр2} - \xi_{гр1}) = \frac{1}{Q} \sqrt{A^2 + 2A - 1}. \quad (9.73)$$

Максимальное значение полосы пропускания системы, соответствующее  $A = 2,41$ , составляет

$$\Pi_0 \approx \frac{3,1}{Q}. \quad (9.74)$$

Таким образом, в зависимости от значения фактора связи  $A$  полоса пропускания системы связанных контуров может изменяться по ширине в пределах от 0,64 до 3,1 полосы пропускания одиночного колебательного контура. Это ценное свойство системы связанных контуров широко используется на практике. Еще более расширить полосу пропускания системы можно путем искусственного уменьшения добротности контуров  $Q$ , внося в них дополнительные потери, например шунтирования одного из контуров активным сопротивлением.

Аналогично рассчитывается полоса пропускания системы на уровне  $0,1 I_{m2n}$  и коэффициент прямоугольности  $K_{пр} = \frac{\Pi_{0,707}}{\Pi_{0,1}}$ , ха-

растеризующий ее избирательность. В результате получим: при очень слабой связи ( $A \leq 0,01Q$ )  $K_{\Pi} \frac{0,64Q}{3 \cdot Q} = 0,213$ ; при критической связи ( $A=1$ )  $K_{\Pi} \frac{1,41Q}{4,44Q} = 0,318$ ; при максимально допустимой связи ( $A = 2,41$ )  $K_{\Pi} \frac{1,41Q}{7,28Q} = 0,426$ . Полученные результаты указывают, что избирательность системы двух связанных контуров гораздо выше, чем одиночных колебательных контуров.

## 9.6. ПОНЯТИЕ О МНОГОСВЯЗАННЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ КОНТУРАХ

Многосвязанными называют системы из трех и более связанных колебательных контуров. С их помощью удастся еще более повысить избирательность резонансной системы. Избирательность

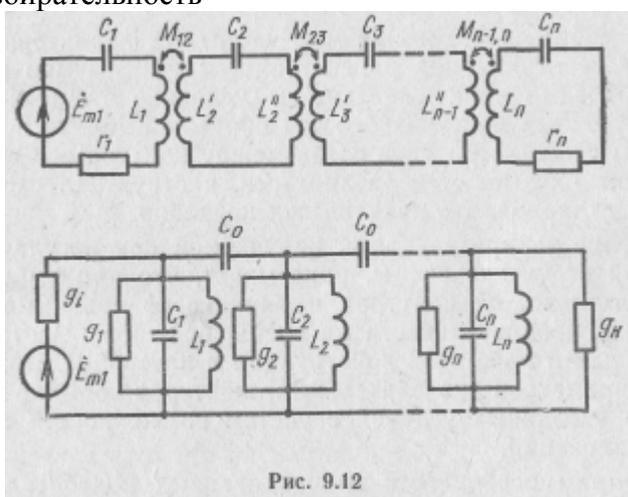


Рис. 9.12

тем выше, чем больше число связанных контуров в системе. Наиболее распространенными видами связи являются индуктивная и емкостная (рис. 9.12).

Резонансные явления в многосвязанных контурах усложняются с увеличением числа связанных контуров. Число независимых переменных, позволяющих описать систему, определяет число ее степеней свободы и количество резонансных частот. Расчет колебательных систем с многими степенями свободы с принципиальной стороны несложен. Однако с ростом числа степеней свободы выкладки становятся очень громоздкими, и для сложных систем их практически удается провести только с помощью электронных вычислительных машин.

Частотные характеристики системы связанных контуров имеют несколько максимумов по числу резонансных частот. В общем

случае эти максимумы различаются по величине, что приводит к неравномерности частотных характеристик в полосе пропускания и снижению избирательности системы. Исследование частотно-избирательных свойств многосвязанных контуров показывает, что наибольшая избирательность в них достигается, если потери во всех промежуточных контурах отсутствуют.

Контур без потерь, из которых должна состоять высокоизбирательная система, практически осуществить нельзя. Тем не менее, если промежуточные контуры имеют достаточно высокую добротность, влияние потерь на избирательность системы сильно снижается. Этим влиянием можно практически пренебречь, если относительная полоса пропускания системы и добротность промежуточных контуров связаны соотношением  $Q\Pi_0 > 15 \div 20$ .

Однако повышение добротности промежуточных контуров еще не обеспечивает полного выравнивания частотных характеристик и связанную с этим возможность получить наибольшую избирательность системы.

Чтобы добиться равномерности частотных характеристик, т. е. чтобы обеспечить на них равенство всех максимумов и минимумов, необходимо дополнительно к условию отсутствия потерь в промежуточных контурах особым образом выбрать и остальные параметры схемы. При этом связь между контурами или реактивности в них оказываются различными, а структура схемы становится нерегулярной, что практически неудобно.

Сравнение избирательности, получаемой при регулярной и нерегулярной структуре схемы, показывает, что при выборе одинаковых реактивностей контуров и одинаковой связи между ними проигрыш в избирательности не очень большой. Часто он окупается большей простотой конструкции и настройки всей системы. Выбор параметров колебательных контуров обычно делается исходя из указанных условий с учетом возможностей их практической реализации.

Рассмотрим особенности многосвязанных колебательных контуров на примере системы из трех связанных контуров регулярной структуры. Анализ ее частотных характеристик показывает, что на них число экстремумов зависит от фактора связи  $A$ . При  $A \leq 1/\sqrt{2}$  имеется лишь один экстремум, которому соответствует резонанс в системе и одногорбая резонансная кривая. При  $A > 1/\sqrt{2}$  резонансная кривая становится трехгорбой (рис. 9.13). Ординаты всех горбов и впадин одинаковы. С увеличением фактора связи глубина впадин растет, а горбы раздвигаются. При  $A > 2,173$  полоса пропускания имеет разрывы. Значение  $A = 2,173$  определяет максимально допустимую связь, которой соответствует наибольшая полоса пропускания

$$\Pi_0 = \frac{3,35}{Q} \quad (9.75)$$

и коэффициент прямоугольности

$$K_{\Pi} = \frac{\Pi 0,707}{\Pi 0,1} = \frac{3,35}{5,25} = 0,64$$

Для сравнения на рис. 9.14 показаны резонансные характеристики системы четырех связанных контуров регулярной структуры при отсутствии потерь в промежуточных контурах, При

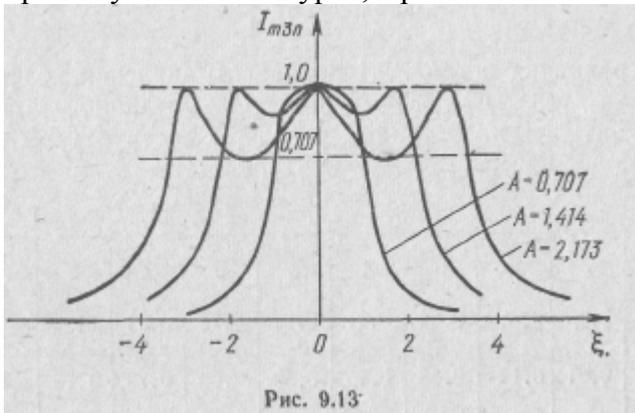


Рис. 9.13

$1/\sqrt{3} < A \leq 1$  кривые трехгорбые, а при  $A > 1$ —четырегорбые. Максимально допустимая связь в этом случае определяется значением  $A \approx 2,414$ ,

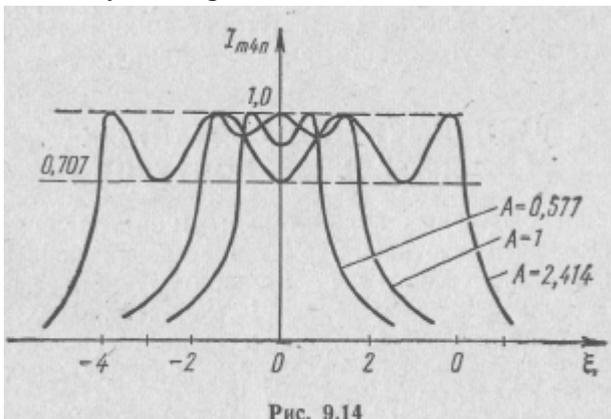


Рис. 9.14

Существенной особенностью системы связанных контуров в отличие от одиночного колебательного контура является не только более высокая избирательность, но и ее зависимость от параметров схемы. Наиболее высокая избирательность получается при максимальном факторе связи. С уменьшением  $A$  полоса пропускания сужается, а коэффициент прямоугольности уменьшается. Во

всех случаях рост числа связанных контуров в системе приводит к улучшению ее избирательных свойств.

Для количественной оценки частотной избирательности высокоизбирательных систем, которыми являются многосвязанные колебательные контуры, более удобным является коэффициент прямоугольности<sup>TM</sup>, рассчитанный как отношение полосы пропускания на уровне 0,707 к полосе пропускания на уровне 0,01:

$$K_{П0,01}^{0,707} = \frac{П_{0,707}}{П_{0,01}}$$

Для сравнения в табл. 9.1 приведены значения коэффициентов прямоугольности  $K_{П0,1}^{0,707}$  и  $K_{П0,01}^{0,707}$  для различного числа  $n$  связанных контуров в системе с регулярной структурой и отсутствием потерь в промежуточных контурах.

Таблица 9.1

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$K_{П0,1}^{0,707}$	0,1	0,427	0,64	0,81	0,89	0,95	0,98	0,99	$\approx 1,00$	$\approx 1,00$
$K_{П0,01}^{0,707}$	0,01	0,14	0,33	0,46	0,59	0,66	0,73	0,78	0,81	0,84

Часто для оценки частотной избирательности резонансных систем пользуются понятием коэффициента прямоугольности, взятого как величина, обратная коэффициенту (9.76). При этом максимальной избирательности соответствует минимальное значение коэффициента прямоугольности, равное единице.

## 9.7. ПРИМЕНЕНИЕ СВЯЗАННЫХ 9.8. КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ КОНТУРОВ

Применение связанных колебательных контуров определяется особенностями их частотных характеристик, их конструктивного исполнения и практического использования. Наиболее важным их назначением является обеспечение высокой избирательности различных радиоприемных устройств при заданной полосе пропускания. В связи с этим системы связанных колебательных контуров чаще называют полосовыми фильтрами.

При использовании связанных колебательных контуров добиваются симметричности их частотных характеристик, что достигается, например, при идентичных контурах. Несимметричность частотных характеристик приводит к сильным искажениям сигнала, что недопустимо.

Следует отметить, что даже при одинаковых контурах и связях между ними конструкция многоконтурных полосовых фильт-

ров получается громоздкой и сложной в регулировке. Поэтому, с одной стороны, системы связанных контуров в основном применяются при фиксированной настройке, для работы в заданном диапазоне частот, а с другой стороны, применение более чем трех-четырех связанных контуров в системе встречается довольно редко и оказывается оправданным при повышенных требованиях к из-

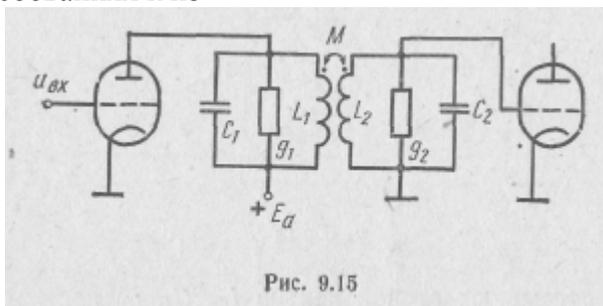


Рис. 9.15

бирательности, например в многоканальных системах проводной связи. На практике известно применение в системах связи полосовых фильтров, содержащих до 11 связанных колебательных контуров.

В радиоприемных устройствах связанные контуры применяются в многоконтурных входных устройствах, в каскадах усиления промежуточной частоты, в частотных детекторах.

Многоконтурные входные устройства обеспечивают выполнение повышенных требований селекции помех до входа первого усилительного каскада приемника. С их помощью получается узкая полоса пропускания входной цепи при высокой избирательности. Перестраиваемое многоконтурное входное устройство усложняется из-за использования многосекционных конденсаторов переменной емкости и переменных индуктивностей. Поэтому при большом числе контуров в системе требуемый диапазон перекрывается набором полосовых фильтров путем их переключения.

Назначением тракта промежуточной частоты в радиоприемных устройствах является обеспечение основной избирательности и основного усиления до входа детектора. На рис. 9.15 приведен пример схемы двухконтурного каскада усилителя сигналов промежуточной частоты (УСПЧ). Благодаря высокой избирательности подобные усилители стали основным типом УСПЧ связных и вещательных радиоприемников.

В частотных детекторах выходное напряжение зависит от частоты входного сигнала. Они используются для детектирования частотно-модулированных (ЧМ) сигналов, а также в системах автоподстройки частоты (АПЧ). На рис. 9.16 показана схема частотного детектора со связанными контурами, нашедшая широкое применение в приемниках ЧМ сигналов и системах АПЧ.

В числе других применений системы связанных контуров можно отметить частотомер или волномер. В таком устройстве, чтобы определить частоту колебаний в контуре  $L_1, C_1$ , с ним

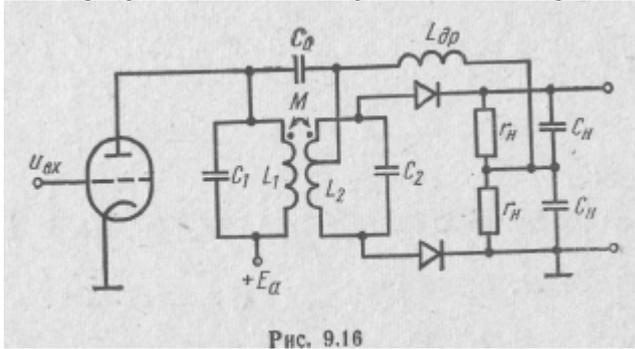


Рис. 9.16

индуктивно связывают второй контур  $L_2, C_2, z_2$ , настройкой которого на индикаторе фиксируют максимальное значение тока  $I_{m2}$ . Это соответствует второму частному резонансу. Точность измерения получается тем выше, чем слабее связь между контурами.

## 10. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

### 10.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

По числу внешних зажимов цепи можно разбить на двухполюсники, трехполюсники, четырехполюсники, многополюсники.

Четырехполюсником называют часть электрической цепи, имеющую две пары внешних зажимов, через которые она подключается

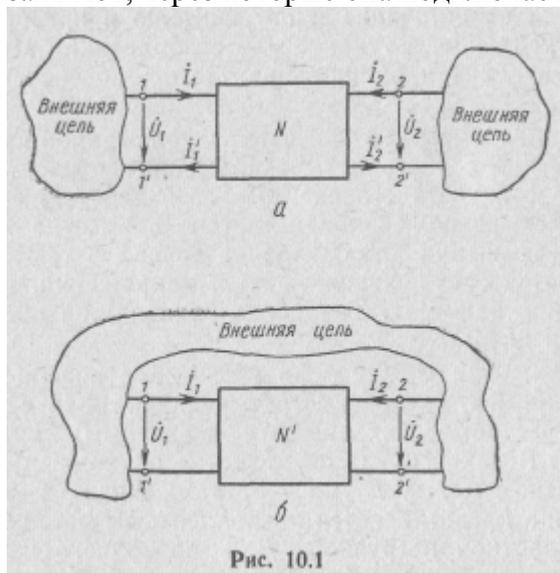


Рис. 10.1

к остальной ее части (рис. 10.1). Одну из пар зажимов (1—1'), обычно считают входными, а другую (2—2') — выходными.

Четырехполюсники разбивают на группы по разным признакам. Различают линейные и нелинейные, пассивные и активные, взаимные и невзаимные, симметричные и несимметричные четырехполюсники.

Линейными называют четырехполюсники, не содержащие нелинейных элементов. Четырехполюсник является нелинейным, если в его состав входит хотя бы один нелинейный элемент. Ниже

мы ограничимся рассмотрением лишь линейных четырехполюсников.

Пассивными называют четырехполюсники, не содержащие источников энергии. Четырехполюсник является активным, если он содержит хотя бы один источник. В зависимости от того, какие источники энергии: автономные (неуправляемые) или неавтономные (управляемые) — входят в его состав, различают автономные и неавтономные активные четырехполюсники. Активный четырехполюсник, содержащий наряду с автономными источниками хотя бы один неавтономный, относят к числу неавтономных. Примером неавтономных четырехполюсников являются транзисторы, электронные лампы.

Взаимными называют четырехполюсники, удовлетворяющие принципу взаимности, и невзаимными — в обратном случае. Обычно все линейные пассивные четырехполюсники — взаимны.

Симметричными часто называют четырехполюсники, схема которых симметрична относительно вертикали, проведенной через ее середину.

Основным назначением четырехполюсника является передача электроэнергии от источника к потребителю и преобразование ее параметров: усиление, затухание или стабилизация амплитуды колебаний; разделение и смешивание частот; обеспечение фазовых сдвигов и др.

Основными задачами теории четырехполюсников являются описание и изучение свойств четырехполюсника относительно внешних зажимов без учета его схемных особенностей, а также анализ работы четырехполюсника в системе совместно с внешними цепями. Для решения этих задач в теории четырехполюсников рассматриваются соотношения токов и напряжений, действующих на его внешних зажимах. Такой способ является общепринятым, но не единственным.

Четырехполюсник может быть соединен с внешней цепью по-разному. Например, соединение четырехполюсника с двумя независимыми участками (входным и выходным) внешней цепи (рис. 10.1,а). В такой схеме он является проходным, т. е. промежуточным звеном между двумя участками внешней цепи. Первый участок обычно представляется эквивалентным источником, а второй — эквивалентной нагрузкой. Для проходного четырехполюсника всегда справедливы равенства прямых и обратных токов на входе 1—1' и выходе 2—2':

$$\dot{I}_1 = \dot{I}'_1 \text{ и } \dot{I}_2 = \dot{I}'_2.$$

Схемы включения четырехполюсников, в которых выполняются эти равенства, называются регулярными, а в которых не выполняются — нерегулярными.

В тех случаях, когда четырехполюсник соединен с единой внешней цепью (рис. 10.1,б), соединение может оказаться как ре-

гулярным, так и нерегулярным. Известен ряд теорем и критериев, позволяющих судить о регулярности соединения.

Методы теории четырехполюсников распространяются только на регулярные соединения. В регулярных схемах включения для описания четырехполюсника достаточно установить соотношения между двумя токами и двумя напряжениями, действующими на его зажимах. Эти соотношения можно полностью описать системой из двух независимых уравнений. В этих уравнениях, называемых уравнениями четырехполюсника, любые две переменные из четырех ( $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{I}_1, \dot{I}_2$ ) можно считать независимыми. Выбирая по-разному пару независимых величин, систему уравнений четырехполюсника можно записать в шести разных формах — по числу сочетаний из четырех элементов по два. Каждая из шести возможных форм характеризуется своими коэффициентами. Шесть систем коэффициентов, соответствующие шести системам уравнений четырехполюсника, называются его общепринятыми или обычными параметрами.

В теории четырехполюсников являются общепринятыми условно положительные направления напряжений и токов, показанные на рис. 10.2.

### 10.2. УРАВНЕНИЯ, ПАРАМЕТРЫ И СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Пусть к зажимам 1—1' четырехполюсника, содержащего как пассивные, так и активные элементы, подключен источник э. д. с,  $\dot{E}_{BX}$  с внутренним сопротивлением  $Z_{вн}$ , а к выходным зажимам

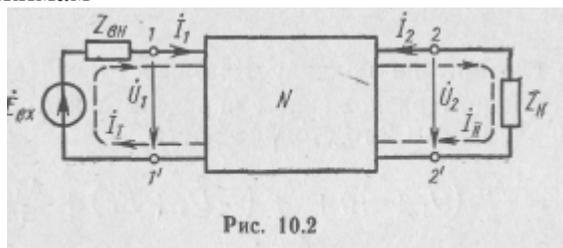


Рис. 10.2

2—2' — нагрузка  $Z_N$  (см. рис. 10.2). Найдем соотношения напряжений  $\dot{U}_1, \dot{U}_2$  и токов  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ . Для этого запишем для рассматриваемой схемы систему уравнений по методу контурных токов:

$$\begin{vmatrix} (Z'_{11} + Z_{вн}) & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & (Z'_{22} + Z_N) & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dots \\ \dot{I}_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \dots \\ \dot{E}_N \end{vmatrix} \quad (10.1)$$

Здесь  $Z_{jk}$  — контурные сопротивления;  $\dot{I}_I, \dot{I}_{II}, \dots, \dot{I}_N$  и  $\dot{E}_I, \dot{E}_{II}, \dots, \dot{E}_N$  — контурные токи и э.д.с.;  $N = n$  — число независимых контуров в схеме. Заметим, что

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} &= Z_{вн} + Z'_{11}; & Z_{22} &= Z_{н} + Z'_{22}; \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}_I; & \dot{I}_2 &= -\dot{I}_{II}; \\ \dot{E}_1 &= \dot{E}_{вх} + \dot{E}'_1 = Z_{вн}\dot{I}_1 + \dot{U}_1 + \dot{E}'_1; \\ \dot{U}_2 &= -Z_{н}\dot{I}_2, \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

где  $Z'_{11}$  — сумма сопротивлений элементов той части I контура, которая входит в состав четырехполюсника, но не включает внутреннее сопротивление  $Z_{вн}$  источника входного сигнала;

$Z'_{22}$  — сумма сопротивлений элементов II контура без учета сопротивления нагрузки  $Z_{н}$ .

Учитывая формулы (10.2), систему контурных уравнений (10.1) можно переписать, исключив из нее параметры источника сигнала и нагрузки:

$$\begin{vmatrix} Z'_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z'_{22} & \dots & Z_{2n} \\ Z_{31} & Z_{32} & \dots & Z_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ -\dot{I}_2 \\ \dot{I}_{III} \\ \dots \\ \dot{I}_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}_1 + \dot{E}'_1 \\ -\dot{U}_2 + \dot{E}_{II} \\ \dot{E}_{III} \\ \dots \\ \dot{E}_N \end{vmatrix} \quad (10.3)$$

Решение системы по правилу Крамера относительно токов  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$  с последующим разложением определителя  $\Delta_1$  по элементам 1-го, а  $\Delta_2$  по элементам 2-го столбца дает:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} (\dot{U}_1 + \dot{E}'_1) + \frac{\Delta_{21}}{\Delta} (-\dot{U}_2 + \dot{E}_{II}) + \frac{\Delta_{31}}{\Delta} \dot{E}_{III} + \\ &\quad + \dots + \frac{\Delta_{n1}}{\Delta} \dot{E}_N; \\ -\dot{I}_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} (\dot{U}_1 + \dot{E}'_1) + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} (-\dot{U}_2 + \dot{E}_{II}) + \frac{\Delta_{32}}{\Delta} \dot{E}_{III} + \\ &\quad + \dots + \frac{\Delta_{n2}}{\Delta} \dot{E}_N. \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

Здесь  $\Delta$ ,  $\Delta_1$  и  $\Delta_{jk}$  — определители и алгебраические дополнения матрицы контурных сопротивлений четырехполюсника, составленной без учета внешних цепей.

Сделав следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} I_{10} &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \dot{E}'_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \dot{E}'_2 + \frac{\Delta_{31}}{\Delta} \dot{E}'_3 + \dots + \frac{\Delta_{n1}}{\Delta} \dot{E}'_n; \\ I_{20} &= -\frac{\Delta_{12}}{\Delta} \dot{E}'_1 - \frac{\Delta_{22}}{\Delta} \dot{E}'_2 - \frac{\Delta_{32}}{\Delta} \dot{E}'_3 - \dots - \frac{\Delta_{n2}}{\Delta} \dot{E}'_n; \end{aligned} \right\} (10.5)$$

$$Y_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}; Y_{12} = -\frac{\Delta_{21}}{\Delta}; Y_{21} = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta}; Y_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta}, \quad (10.6)$$

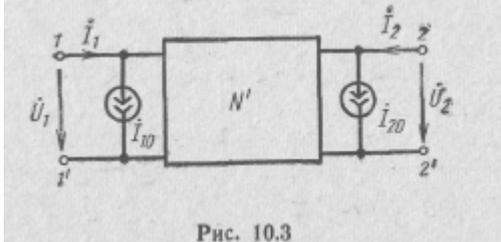


Рис. 10.3

уравнения четырехполюсника (10.4) можно записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{I}_{10} \\ \dot{I}_{20} \end{bmatrix}. \quad (10.7)$$

Заметим, что определители  $\Delta$  и  $\Delta_{jk}$  в формулах (10.6), а следовательно, и все  $Y$ -коэффициенты в выражении (10.7) являются функцией лишь схемы четырехполюсника и не зависят от параметров внешних цепей и действующих напряжений и токов. Поэтому коэффициенты (10.6) называются параметрами четырехполюсника. Системе уравнений, в которой в качестве независимых переменных выбраны напряжения  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$ , соответствуют его  $Y$ -параметры.

В полученных уравнениях присутствуют токи  $\dot{I}_{10}$  и  $\dot{I}_{20}$ , значения которых определяются контурными э. д. с., т. е. независимыми источниками энергии, имеющимися в четырехполюснике. Эти токи равны нулю, если такие источники отсутствуют. Появление составляющих (10.5) в уравнениях характерно для всех автономных активных четырехполюсников. Расчет таких четырехполюсников отличается лишь необходимостью учета дополнительных составляющих  $\dot{I}_{10}$  и  $\dot{I}_{20}$ , как это показано, например, на схеме рис. 10.3.

На ней через  $N'$  обозначен четырехполюсник, не содержащий независимых источников энергии, действие которых заменено источниками тока  $\dot{I}_{10}$  и  $\dot{I}_{20}$ .

Ниже ограничимся лишь рассмотрением четырехполюсников, не содержащих независимых источников э. д. с. и тока. В этих случаях  $\dot{I}_{10} = \dot{I}_{20} = 0$  и уравнения четырехполюсника упрощаются:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}. \quad (10.8)$$

Здесь и в выражении (10.7)

$$\|Y\| = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \Delta_{11} & -\Delta_{21} \\ -\Delta_{12} & \Delta_{22} \end{vmatrix} \quad (10.9)$$

матрица Y-параметров четырехполюсника, элементы которой определяются равенством (10.6). Эти параметры называют также параметрами короткого замыкания, так как они могут быть найдены

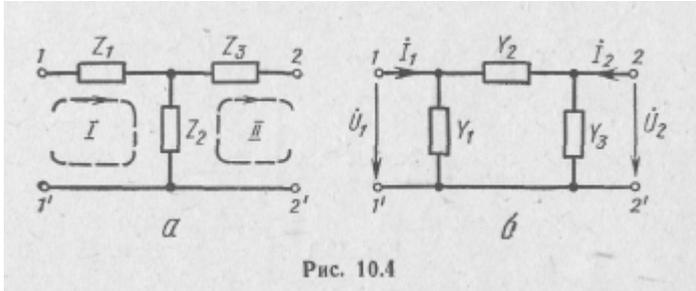


Рис. 10.4

из опыта короткого замыкания на одной из сторон четырехполюсника:

$$\left. \begin{aligned} Y_{11} &= \frac{i_1}{\dot{U}_1} \Big|_{\dot{U}_2=0}; & Y_{12} &= \frac{i_1}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{U}_1=0}; \\ Y_{21} &= \frac{i_2}{\dot{U}_1} \Big|_{\dot{U}_2=0}; & Y_{22} &= \frac{i_2}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{U}_1=0} \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

в чем легко убедиться с помощью уравнений (10.8),

**Пример 10.1.**

Рассчитать Y-параметры четырехполюсников (рис. 10.4).

Решение.

Для схемы рис. 10.4, а с использованием матрицы контурных сопротивлений:

1. Выбрав независимые контуры (на схеме показаны пунктиром) таким образом, чтобы первый и второй контуры замыкались соответственно через зажимы 1—1' и 2—2' четырехполюсника, составляем матрицу контурных сопротивлений (МКС) и находим нужные определители:

$$\|Z\|_{\text{МКС}} = \begin{vmatrix} Z_1 + Z_2 & -Z_2 \\ -Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = Z_1(Z_2 + Z_3) + Z_2Z_3; \Delta_{11} = Z_2 + Z_3; \Delta_{12} = \Delta_{21} = -Z_2; \Delta_{22} = Z_1 + Z_2$$

2. Y-параметры рассчитываем с помощью выражений (10.6):

$$Y_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{1}{Z_1 + \frac{Z_2Z_3}{Z_2 + Z_3}}; \quad Y_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta} = \frac{1}{Z_2 + \frac{Z_1Z_2}{Z_1 + Z_2}};$$

$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{-\Delta_{12}}{\Delta} = \frac{-\Delta_{21}}{\Delta} = \frac{-Z_2}{Z_1(Z_2 + Z_3) + Z_2Z_3}.$$

Для схемы рис. 10.4, б с помощью опытов короткого замыкания:

1. Замыкая накоротко зажимы 2—2', с помощью уравнений (10.10) находим

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = Y_1 + Y_3; \quad Y_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = -Y_2.$$

2. Аналогично, замкнув зажимы 1—1', получим

$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{\dot{U}_1=0} = -Y_2; \quad Y_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{\dot{U}_1=0} = Y_2 + Y_3.$$

Как известно, для цепей, удовлетворяющих принципу взаимности,  $\Delta_{jk} = \Delta_{kj}$ . Поэтому для всех взаимных четырехполюсников  $YZ$  —  $ZY$  и для их описания достаточно трех параметров. Если же дополнительно к этому  $Y_{12} = Y_{21}$ , то четырехполюсник называется электрически симметричным. Для его описания достаточно лишь двух параметров. Электрическая симметрия может не соответствовать геометрической или топологической симметрии, но последняя обязательно приводит к первой.

Если в качестве независимых переменных выбрать токи  $I_1$  и  $I_2$ , то полученным уравнениям соответствуют  $Z$ -параметры. Их можно найти, решив уравнения (10.8) относительно напряжений:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|Y|} \begin{pmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Здесь  $|Y| = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$  — определитель матрицы  $Y$ -параметров.

Таким образом,

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}, \quad (10.12)$$

где

$$|Z| = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} = |Y|^{-1} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}\Delta_{21}} \begin{vmatrix} \Delta_{22} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{11} \end{vmatrix}$$

матрица  $Z$ -параметров четырехполюсника. Она обратна матрице  $Y$ -параметров.

Преобразовав выражение в знаменателе по известной формуле

$$\Delta_{jj}\Delta_{kk} - \Delta_{jk}\Delta_{kj} = \Delta\Delta_{jj,kk}$$

где  $\Delta_{jj,kk}$  — двойное алгебраическое дополнение, получаемое из определителя  $\Delta$ , и вычеркнув две строки и два столбца с номерами  $j$  и  $k$ , получим

$$|Z| = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta_{11,22}} \begin{vmatrix} \Delta_{22} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{11} \end{vmatrix}. \quad (10.13)$$

Значения Z-параметров, так же как и Y-параметров, являются функцией лишь схемы четырехполюсника. Эти параметры известны под названием параметров холостого хода, так как они могут быть определены из опыта холостого хода на одной из сторон четырехполюсника:

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} &= \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \Big|_{I_2=0}; & Z_{12} &= \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \Big|_{I_1=0}; \\ Z_{21} &= \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \Big|_{I_2=0}; & Z_{22} &= \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \Big|_{I_1=0}. \end{aligned} \right\} \quad (10.14)$$

Для взаимных четырехполюсников  $Z_{12} = Z_{21}$ .

Системы Y- и Z-параметров дуальны. Совместно они образуют группу иммитансных (Immittance) параметров. Смысл каждого из них легко выяснить из формул (10.10) и (10.14).

Например,  $Y_{11}$  и  $Y_{22}$  — комплексные входные проводимости четырехполюсника относительно зажимов 1—1' и 2—2' соответственно в режиме короткого замыкания на противоположной стороне, а  $Y_{21}$  и  $Y_{12}$  — комплексные передаточные проводимости в этих режимах. Выражения (10.9) и (10.13) для Y- и Z-параметров найдены из контурных уравнений (10.3) и представляют отношения алгебраических дополнений и определителя матрицы контурных сопротивлений. Используя принцип дуальности, получим аналогичные формулы на основе метода узловых напряжений, который дуален методу контурных токов. При этом учтем, что в схеме (см. рис. 10.2) I и II контурам дуальны 1-й и 2-й независимые узлы (зажимы 1 и 2), а контурным токам  $\dot{I}_I = \dot{I}_1$  и  $\dot{I}_{II} = -\dot{I}_2$  дуальны узловые напряжения  $\dot{U}_2$  и  $\dot{U}_1$ . Дуальный случай соответствует четырехполюснику, у которого зажимы 1'-2' общие, так как только тогда оба напряжения  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$  могут быть узловыми. Учитывая это, запишем соотношения, дуальные выражениям (10.9) и (10.13):

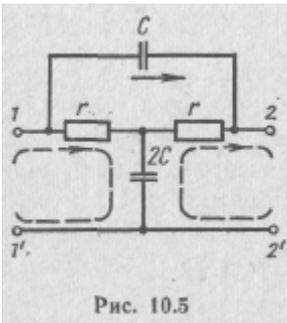


Рис. 10.5

Здесь в отличие от выражений (10.9) и (10.13) алгебраические дополнения и определитель относятся уже к матрице узловых проводимостей четырехполюсника.

$$\|Z\| = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{vmatrix}; \quad (10.15)$$

$$\|Y\| = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta_{11, 22}} \begin{vmatrix} \Delta_{22} & -\Delta_{21} \\ -\Delta_{12} & \Delta_{11} \end{vmatrix}. \quad (10.16)$$

Здесь в отличие от выражений (10.9) и (10.13) алгебраические дополнения и определитель относятся уже к матрице узловых проводимостей четырехполюсника.

### Пример 10.2.

Рассчитать Y-параметры четырехполюсника (рис. 10.5).

Решение.

1. Выбрав в качестве независимых 1, 2 и 3-й узлы, составляем матрицу узловых проводимостей схемы и находим нужные определители:

$$\|Y\| = \begin{vmatrix} (1/r + j\omega C) & -j\omega C & -1/r \\ -j\omega C & (1/r + j\omega C) & -1/r \\ -1/r & -1/r & 2(1/r + j\omega C) \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{11} = \Delta_{22} = 2(1/r + j\omega C)^2 - \frac{1}{r^2} = \frac{2(j\omega Cr)^2 + 4j\omega Cr + 1}{r^2};$$

$$\Delta_{12} = \Delta_{21} = 2j\omega C(1/r + j\omega C) + 1/r^2 = \frac{2(j\omega Cr)^2 + 2j\omega Cr + 1}{r^2};$$

$$\Delta_{11,22} = 2(1/r + j\omega C) = \frac{2(j\omega Cr + 1)}{r}.$$

2. Y-параметры четырехполюсника рассчитываем с помощью формулы (10.16);

$$Y_{11} = Y_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{11,22}} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{11,22}} = \frac{2(j\omega Cr)^2 + 4j\omega Cr + 1}{2r(j\omega Cr + 1)};$$

$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{-\Delta_{21}}{\Delta_{11,22}} = \frac{-\Delta_{12}}{\Delta_{11,22}} = -\frac{2(j\omega Cr)^2 + 2j\omega Cr + 1}{2r(j\omega Cr + 1)}.$$

Выбирая в качестве независимых переменных напряжение и ток на выходе или входе четырехполюсника ( $\dot{U}_2, -\dot{I}_2$  или  $\dot{U}_1, \dot{I}_1$ ), исходя из выражений (10.8), получим еще две системы уравнений:

$$\begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ -\dot{I}_1 \end{vmatrix}, \quad (10.17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \frac{-Y_{22}}{Y_{21}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{I}_1=0}; & A_{12} &= -\frac{1}{Y_{21}} = \frac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2} \Big|_{\dot{U}_1=0}; \\ A_{21} &= \frac{|Y|}{-Y_{21}} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{I}_1=0}; & A_{22} &= \frac{-Y_{11}}{Y_{21}} = \frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2} \Big|_{\dot{U}_1=0}. \end{aligned} \right\} \quad (10.18)$$

и

$$\left. \begin{aligned} B_{11} &= \frac{-Y_{11}}{Y_{12}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \Big|_{\dot{I}_1=0}; & B_{12} &= -\frac{1}{Y_{12}} = \frac{\dot{U}_2}{-\dot{I}_1} \Big|_{\dot{U}_1=0}; \\ B_{21} &= \frac{|Y|}{-Y_{12}} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \Big|_{\dot{I}_1=0}; & B_{22} &= \frac{-Y_{22}}{Y_{12}} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \Big|_{\dot{U}_1=0}. \end{aligned} \right\} \quad (10.19)$$

Коэффициенты  $A$  и  $B$  в этих уравнениях по смыслу представляют комплексные передаточные функции четырехполюсника по напряжению и току в режиме холостого хода или короткого замыкания и называются его параметрами передачи,

Для взаимных четырехполюсников  $Y_{12}=Y_{21}$  и

$$\left. \begin{aligned} |A| &= A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1; \\ |B| &= B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (10.20)$$

Таблица 10.1

	Z	Y	A	B	H	G
Z	$Z_{11}$ $Z_{21}$	$\frac{Y_{12}}{ Y }$ $\frac{Y_{21}}{ Y }$	$\frac{ A }{A_{21}}$ $\frac{ A }{A_{31}}$	$\frac{B_{22}}{B_{21}}$ $\frac{ B }{B_{21}}$	$\frac{ H }{H_{22}}$ $\frac{H_{21}}{H_{22}}$	$1$ $\frac{G_{12}}{G_{11}}$
Y	$Z_{12}$ $Z_{22}$	$\frac{Y_{11}}{ Y }$ $\frac{Y_{22}}{ Y }$	$\frac{ A }{A_{12}}$ $\frac{ A }{A_{22}}$	$\frac{B_{11}}{B_{12}}$ $\frac{ B }{B_{12}}$	$1$ $\frac{H_{12}}{H_{11}}$	$\frac{G_{11}}{G_{11}}$ $\frac{G_{22}}{G_{22}}$
A	$Z_{11}$ $Z_{21}$ $Z_{31}$	$Y_{11}$ $Y_{21}$	$\frac{ A }{A_{11}}$ $\frac{ A }{A_{21}}$ $\frac{ A }{A_{31}}$	$\frac{B_{11}}{B_{11}}$ $\frac{ B }{B_{11}}$ $\frac{ B }{B_{11}}$	$1$ $\frac{H_{11}}{H_{11}}$ $\frac{ H }{H_{11}}$	$\frac{G_{11}}{G_{11}}$ $\frac{G_{21}}{G_{21}}$ $\frac{G_{31}}{G_{31}}$
B	$Z_{12}$ $Z_{22}$ $Z_{32}$	$\frac{Y_{12}}{ Y }$ $\frac{Y_{22}}{ Y }$ $\frac{Y_{32}}{ Y }$	$\frac{ A }{A_{12}}$ $\frac{ A }{A_{22}}$ $\frac{ A }{A_{32}}$	$\frac{B_{12}}{B_{12}}$ $\frac{ B }{B_{12}}$ $\frac{ B }{B_{12}}$	$1$ $\frac{H_{12}}{H_{12}}$ $\frac{ H }{H_{12}}$	$\frac{G_{12}}{G_{12}}$ $\frac{G_{22}}{G_{22}}$ $\frac{G_{32}}{G_{32}}$
H	$Z_{11}$ $Z_{21}$ $Z_{31}$	$Y_{11}$ $Y_{21}$	$\frac{ A }{A_{11}}$ $\frac{ A }{A_{21}}$ $\frac{ A }{A_{31}}$	$\frac{B_{11}}{B_{11}}$ $\frac{ B }{B_{11}}$ $\frac{ B }{B_{11}}$	$1$ $\frac{H_{11}}{H_{11}}$ $\frac{ H }{H_{11}}$	$\frac{G_{11}}{G_{11}}$ $\frac{G_{21}}{G_{21}}$ $\frac{G_{31}}{G_{31}}$
G	$Z_{12}$ $Z_{22}$ $Z_{32}$	$\frac{Y_{12}}{ Y }$ $\frac{Y_{22}}{ Y }$ $\frac{Y_{32}}{ Y }$	$\frac{ A }{A_{12}}$ $\frac{ A }{A_{22}}$ $\frac{ A }{A_{32}}$	$\frac{B_{12}}{B_{12}}$ $\frac{ B }{B_{12}}$ $\frac{ B }{B_{12}}$	$1$ $\frac{H_{12}}{H_{12}}$ $\frac{ H }{H_{12}}$	$\frac{G_{12}}{G_{12}}$ $\frac{G_{22}}{G_{22}}$ $\frac{G_{32}}{G_{32}}$

Если же напряжение  $\dot{U}_1$  и ток  $\dot{I}_2$  выразить через  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}_1$  или наоборот, то соответственно получим:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}. \quad (10.21)$$

Коэффициенты  $H$  и  $G$  в этих уравнениях по смыслу являются комплексными входными и передаточными функциями четырехполюсника в соответствующих режимах и составляют группу гибридных или смешанных параметров.

Системы  $H$ - и  $G$ -параметров дуальны. Для взаимных четырехполюсников, так как  $Y_{21} = Y_{12}$ ,  $H_{12} = -H_{21}$ ;  $G_{12} = -G_{21}$ . (10.22)

Системы параметров в формулах (10.11), (10.18) и (10.19) выражены через  $Y$ -параметры. Аналогично можно выразить каждую систему параметров четырехполюсника через любую другую, получив при этом формулы пересчета (табл. 10.1). Соотношения для взаимных и для симметричных четырехполюсников сведены в табл. 10.2.

Таблица 10.2

Четырехполюсник		
	взаимный	симметричный
$Z$	$Z_{12} = Z_{21}$	$Z_{11} = Z_{22}$
$Y$	$Y_{12} = Y_{21}$	$Y_{11} = Y_{22}$
$A$	$ A  = 1$	$A_{11} = A_{22}$
$B$	$ B  = 1$	$B_{11} = B_{22}$
$H$	$H_{12} = -H_{21}$	$ H  = 1$
$G$	$G_{12} = -G_{21}$	$ G  = 1$

Кроме полученных шести систем параметров часто используют еще одну — систему односторонних параметров, т. е. измеренных на одной из сторон четырехполюсника. Она представляет комбинацию иммитансных параметров:

$$\left. \begin{aligned} Z_{1x} = \frac{1}{Y_{1x}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \Big|_{\dot{I}_2=0} = Z_{11}; \quad Z_{1k} = \frac{1}{Y_{1k}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \Big|_{\dot{U}_2=0} = \frac{1}{Y_{11}}; \\ Z_{2x} = \frac{1}{Y_{2x}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \Big|_{\dot{I}_1=0} = Z_{22}; \quad Z_{2k} = \frac{1}{Y_{2k}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \Big|_{\dot{U}_1=0} = \frac{1}{Y_{22}}. \end{aligned} \right\} \quad (10.23)$$

Все измерения, нужные для определения этих параметров, производятся на одной из сторон четырехполюсника. Это особенно удобно, когда геометрические размеры цепи велики, например в линии связи. Первый индекс в принятых обозначениях указывает сторону, на которой производятся измерения, а второй — режим другой стороны: холостой ход или короткое замыкание.

Для симметричных четырехполюсников

$$\left. \begin{aligned} Z_{1X} = Z_{2X} = Z_X; \\ Z_{1K} = Z_{2K} = Z_K. \end{aligned} \right\} \quad (10.24)$$

Из четырех параметров, приведенных в формулах (10.23), лишь три являются независимыми, так как существует соотношение, связывающее их между собой:

$$\frac{Z_{1X}}{Z_{1K}} = \frac{Z_{2X}}{Z_{2K}} \quad (10.25)$$

Оно вытекает из равенства  $Z_{11}Y_{11} = \frac{Z_{11}Y_{11}}{|Z|} = Z_{22}Y_{22}$ , которое следует из формул табл. 10.1.

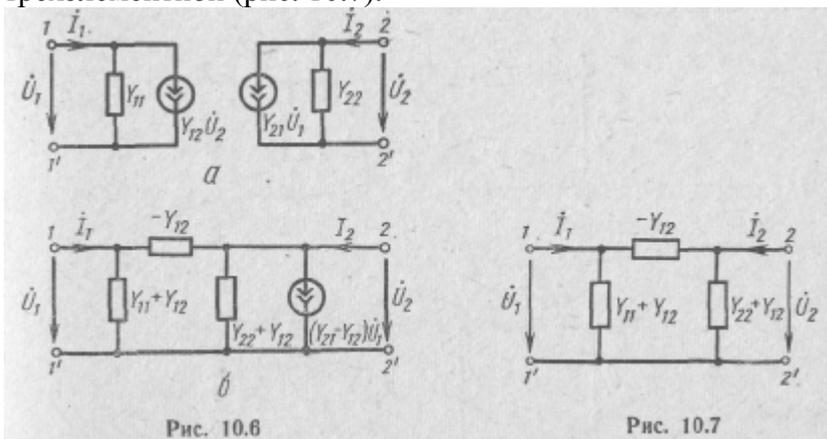
Поэтому односторонних параметров достаточно лишь для описания взаимных четырехполюсников.

Таким образом, линейные соотношения между напряжениями и токами на зажимах четырехполюсника характеризуются шестью разными способами с помощью  $Y$ - и  $Z$ -,  $A$ - и  $B$ -,  $H$ - и  $G$ -параметров. Эти параметры называются обычными или общепринятыми. При решении конкретных задач оказывается удобной и применяется та или иная система параметров или их комбинация. Па-пример, при расчете транзисторных схем широко применяются  $Y$ -и  $H$ -параметры. Для многих четырехполюсников существуют не все виды обычных параметров или даже их вообще не существует. Значения рассмотренных параметров четырехполюсника определяются лишь его схемой, но зависят от выбора тех или иных величин в качестве независимых переменных, что и определяет различия между системами этих параметров. Поэтому они относятся к числу первичных параметров четырехполюсника. По смыслу все общепринятые параметры четырехполюсника представляют его комплексные входные или передаточные функции в режимах короткого замыкания или холостого хода, т. е. без учета цепей, к которым он подключается.

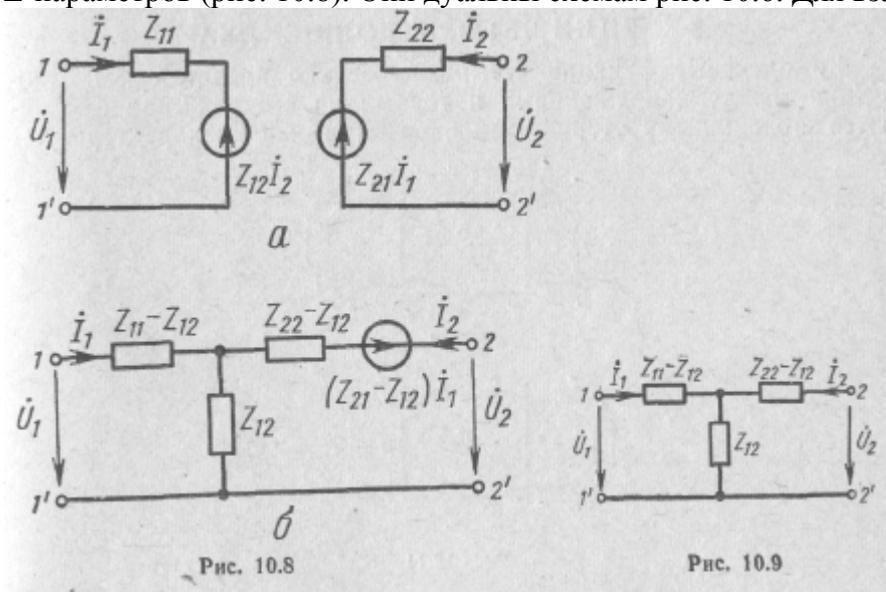
Каждой из систем уравнений четырехполюсника можно привести в соответствие эквивалентные схемы, схемы замещения или модели четырехполюсника, соотношения напряжений и токов на зажимах которых описываются данной системой уравнений. Наибольшее применение получили эквивалентные схемы на базе иммитансных и гибридных параметров.

Обращаясь к уравнениям (10.8) в  $Y$ -форме, легко убедиться, что они справедливы для схем рис. 10.6. Они относятся к простейшим  $\Pi$ -образным эквивалентным схемам четырехполюсника и состоят из четырех элементов, по числу  $Y$ -параметров. Особенностью

приведенных схем является наличие зависимых, неавтономных источников энергии. Для взаимных четырехполюсников ( $Y_{12} = Y_{21}$ ) эквивалентная схема упрощается, становясь трехэлементной (рис. 10.7).

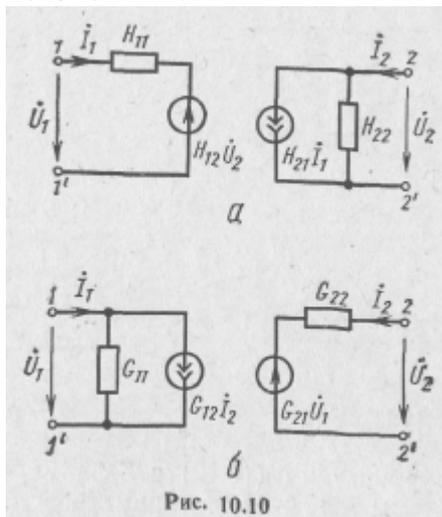


Обращаясь к уравнениям (10.12) в Z-форме, можно построить эквивалентные схемы на базе Z-параметров (рис. 10.8). Они дуальны схемам рис. 10.6. Для взаимных четырехполюсников



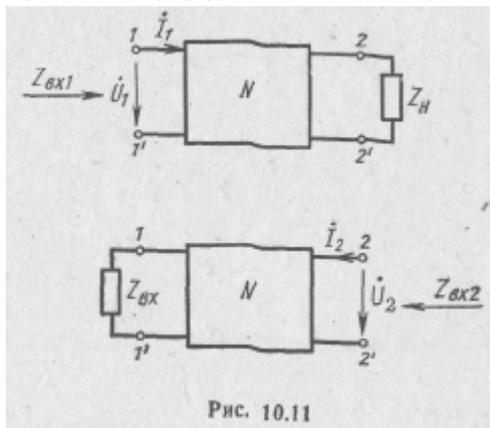
( $Z_{12} = Z_{21}$ ) получим трехэлементную T-образную схему замещения (рис. 10.9). Аналогично можно получить эквивалентные схемы на базе H- и G-параметров (рис. 10.10).

Все схемы замещения эквивалентны одна другой и являются лишь разными формами эквивалентного представления данного четырехполюсника. При замене Четырехполюсника эквивалентной схемой распределение напряжений и токов во внешней цепи остается неизменным.



### 10.3. КОМПЛЕКСНЫЕ ВХОДНЫЕ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Комплексные функции четырехполюсника представляют отношения между напряжениями и токами на его зажимах и являются его важными вторичными Параметрами. Они характеризуют



четырехполюсник в любом режиме работы, не накладывая ограничений на параметры внешних цепей.

К входным комплексным функциям четырехполюсника (рис. 10.11) относятся:

входная проводимость и обратная ей величина — входное сопротивление:

$$Y_{вх1} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} = Y_{вх}; \quad Z_{вх1} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_{вх}; \quad (10.26)$$

выходная проводимость и обратная ей величина — выходное сопротивление:

$$Y_{вх2} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} = Y_{вых}; \quad Z_{вх2} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = Z_{вых} \quad (10.27)$$

Обращаясь к уравнениям четырехполюсника (10.8), заметим, что

$$\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2; \quad (10.28)$$

$$\dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 = -Y_H\dot{U}_2, \text{ т. е. } Y_{21} + \dot{U}_1 + (Y_{22} + Y_H)\dot{U}_2 = 0. \quad (10.29)$$

Выразив  $\dot{U}_2$  из уравнения (10.29) и подставив его в выражение (10.28), найдем

$$Y_{вх1} = Y_{вх} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} = Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22} + Y_H} \text{ или } Z_{вх1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_H} \quad (10.29)$$

Аналогично (предполагая  $E_{вх} = 0$ ) получим

$$Y_{вх2} = Y_{вых} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} = Y_{22} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{11} + Y_{вн}} \\ \text{или } Z_{вых} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + Z_{вн}}. \quad (10.31)$$

К числу комплексных передаточных функций четырехполюсника относятся: передаточные функции или коэффициенты передачи по напряжению и по току:

$$\dot{K}_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_2}{A_{11}\dot{U}_2 - A_{12}\dot{I}_2} = \frac{1}{A_{11} + A_{12}Y_H} = \frac{-Y_{21}}{Y_{22} + Y_H} \quad (10.32)$$

и

$$\dot{K}_I = \frac{-\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{-\dot{I}_2}{A_{21}\dot{U}_2 - A_{22}\dot{I}_2} = \frac{1}{A_{21}Z_H + A_{22}} = \frac{Z_{21}}{Z_{22} + Z_H}; \quad (10.33)$$

рабочий коэффициент передачи по напряжению, учитывающий как сопротивление нагрузки, так и внутреннее сопротивление источника.

$$\dot{K}_{Uраб} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{E}_{вх}} = \frac{\dot{U}_2}{Z_{вн}\dot{U}_1 Y_{вх} + \dot{U}_1} = \frac{\dot{K}_U}{1 + Z_{вн}Y_{вх}} = \\ = \frac{-Y_{21}}{\left(1 + \frac{Y_{вх}}{Y_{вн}}\right)(Y_{22} + Y_H)}; \quad (10.34)$$

Передаточная проводимость и передаточное сопротивление:

$$Y_{\text{ПЕР}} = \frac{-\dot{I}_2}{\dot{U}_1} = Y_H \dot{K}_U \text{ и } Z_{\text{ПЕР}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} = Z_H \dot{K}_I \quad (10.35)$$

В табл. 10.3 сведены формулы, необходимые для расчета комплексных функций четырехполюсника через его Y- и Z-параметры, а также через определители матрицы его контурных сопротивлений (МКС) и определители матрицы его узловых проводимостей (МУП). Они получены с учетом формул (10.9), (10.13), (10.15) и (10.16).

Таблица 10.3

Функция	Y; Z	МКС	МУП
$Y_{\text{вх}} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}$	$Y_{11} - \frac{Y_{12} Y_{21}}{Y_{22} + Y_H}$	$\frac{\Delta_{11} + Z_H \Delta_{11, 22}}{\Delta + Z_H \Delta_{22}}$	$\frac{\Delta + Y_H \Delta_{22}}{\Delta_{11} + Y_H \Delta_{11, 22}}$
$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}$	$Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{22} + Z_H}$	$\frac{\Delta + Z_H \Delta_{22}}{\Delta_{11} + Z_H \Delta_{11, 22}}$	$\frac{\Delta_{11} + Y_H \Delta_{11, 22}}{\Delta + Y_H \Delta_{22}}$
$Y_{\text{вых}} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}$	$Y_{22} - \frac{Y_{12} Y_{21}}{Y_{11} + Y_{\text{ВН}}}$	$\frac{\Delta_{22} + Z_{\text{ВН}} \Delta_{11, 22}}{\Delta + Z_{\text{ВН}} \Delta_{11}}$	$\frac{\Delta + Y_{\text{ВН}} \Delta_{11}}{\Delta_{22} + Y_{\text{ВН}} \Delta_{11, 22}}$
$Z_{\text{вых}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$	$Z_{22} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{11} + Z_{\text{ВН}}}$	$\frac{\Delta + Z_{\text{ВН}} \Delta_{11}}{\Delta_{22} + Z_{\text{ВН}} \Delta_{11, 22}}$	$\frac{\Delta_{22} + Y_{\text{ВН}} \Delta_{11, 22}}{\Delta + Y_{\text{ВН}} \Delta_{11}}$
$\dot{K}_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$	$\frac{-Y_{21}}{Y_{22} + Y_H}$	$\frac{Z_H \Delta_{12}}{\Delta + Z_H \Delta_{22}}$	$\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11} + Y_H \Delta_{11, 22}}$
$\dot{K}_I = \frac{-\dot{I}_2}{\dot{I}_1}$	$\frac{Z_{21}}{Z_{22} + Z_H}$	$\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11} + Z_H \Delta_{11, 22}}$	$\frac{Y_H \Delta_{12}}{\Delta + Y_H \Delta_{22}}$
$Y_{\text{пер}} = \frac{-\dot{I}_2}{\dot{U}_1}$	$\frac{-Y_H Y_{21}}{Y_{22} + Y_H}$	$\frac{\Delta_{12}}{\Delta + Z_H \Delta_{22}}$	$\frac{Y_H \Delta_{12}}{\Delta_{11} + Y_H \Delta_{11, 22}}$
$Z_{\text{пер}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}$	$\frac{Z_H Z_{21}}{Z_{22} + Z_H}$	$\frac{Z_H \Delta_{12}}{\Delta_{11} + Z_H \Delta_{11, 22}}$	$\frac{\Delta_{12}}{\Delta + Y_H \Delta_{22}}$

**Пример 10.3.**

Найти комплексные функции гиригатора<sup>1</sup> (рис. 10.12), нагруженного на сопротивление  $Z_H$ .

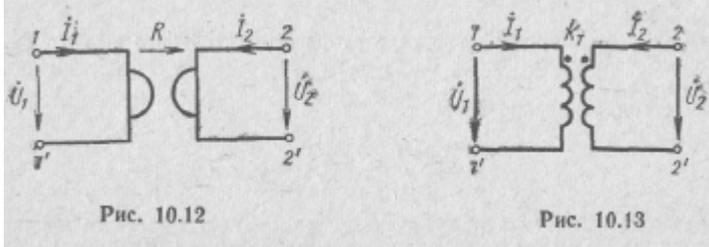
<sup>1</sup> Гиригатор — элемент, широко используемый в современном анализе и синтезе цепей. Он применяется в микроволновых и твердотельных системах и может быть практически создан на электронных схемах или за счет использования различных физических эффектов, таких, как эффект Холла в полупроводниках или эффект Фарадея в ферритах. Гиригатор характеризуется направлением гиригации (стрелкой) и коэффициентом гиригации  $R$ , имеющим размерность сопротивления. Гиригатором называется линейный пассивный взаимный четырехполюсник, для которого  $Z_{11}=Z_{22}=0$ , а  $Z_{21}=-Z_{12}=R$ .

Решение.

1. Входное сопротивление нагруженного гиратора

$$Z_{BX1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_H} = \frac{R^2}{Z_H} \quad (10.36)$$

обратно пропорционально сопротивлению нагрузки. Гиратор преобразует сопротивление нагрузки как по значению, так и по характеру.



Если на выходе гиратора подключить емкость  $C_H$ , то на его вход она трансформируется в индуктивность, численно равную при  $R=1$  значению этой емкости, и наоборот. Действительно, при  $Z_H = 1/j\omega C_H$

$$Z_{BX} = j\omega C_H = j\omega L_{\mathcal{G}} \text{ т. е. } L_{\mathcal{G}} = C_H.$$

Это используется для создания индуктивностей без индуктивных катушек, что особенно важно при разработке устройств, масса и габариты которых имеют решающее значение, например интегральных схем, в которых применение индуктивных катушек крайне затруднительно.

2. Комплексные передаточные функции гиратора:

$$\dot{K}_U = \frac{-Y_{21}}{Y_{22} + Y_H} = \frac{Z_H}{R}; \dot{K}_I = \frac{-Z_{21}}{Z_{22} + Z_H} = \frac{R}{Z_H} \quad (10.37)$$

Ток на входе гиратора пропорционален напряжению на выходе и не зависит от напряжения на входе, а ток на выходе, наоборот, пропорционален напряжению на входе и не зависит от напряжения на его выходе:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{Z_H \dot{K}_1} = \frac{\dot{U}_2}{R}; \dot{I}_2 = -Y_H \dot{K}_U \dot{U}_1 = -\frac{\dot{U}_1}{R}$$

**Пример 10.4.**

Найти комплексные функции идеального трансформатора<sup>1</sup> (рис. 10.13), нагруженного на сопротивление  $Z_H$ .  
Решение. 1. Входное сопротивление нагруженного трансформатора

$$Z_{BX} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{k_T \dot{U}_2}{-\frac{1}{k_T} \dot{I}_2} = k_T^2 \left( -\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right) = k_T^2 Z_H \quad (10.38)$$

<sup>1</sup> Уравнение идеального трансформатора в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_T & 0 \\ 0 & 1/k_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix},$$

где  $|A| = \begin{bmatrix} k_T & 0 \\ 0 & 1/k_T \end{bmatrix}$ .

прямо пропорционально сопротивлению нагрузки. Трансформатор преобразует лишь значение сопротивления нагрузки.

2. Комплексные передаточные функции трансформатора:

$$\dot{K}_U = \frac{1}{A_{11} + A_{12}Y_H} = \frac{1}{k_T}; \dot{K}_I = \frac{1}{A_{21}Z_H + Y_{22}} \quad (10.39)$$

Напряжение и ток на его выходе прямо пропорциональны соответственно напряжению и току на входе.

Пример 10.5.

Найти входное сопротивление конвертора отрицательного иммитанса (КОИ)<sup>1</sup>, нагруженного на сопротивление  $Z_H$ . Решение. Входное сопротивление КОИ

$$Z_{BX} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{k\dot{U}_2}{k\dot{I}_2} = -Z_H$$

равно значению сопротивления нагрузки, взятому с обратным знаком. КОИ меняет знак (т. е. характер) сопротивления нагрузки. Он также позволяет создать цепи с любой реактивностью без использования индуктивных катушек. Так, при  $Z_H = j\omega L_H$  получим

$$Z_{BX} = -j\omega L_H = \frac{\omega L_H}{j} = \frac{1}{j\omega_3 C_3}$$

#### 10.4. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Анализ линий связи, линий задержки, фильтров и других сложных четырехполюсников часто основан на их представлении в виде каскадного соединения ряда простых четырехполюсников. Для описания таких схем оказывается удобным использование характеристических параметров. Характеристические параметры объединяют два вида функций: характеристические сопротивления  $Z_{C1}$  и  $Z_{C2}$ , характеризующие четырехполюсник с одной стороны (1—1' или 2—2'), и характеристический коэффициент передачи  $u$ , характеризующий соотношение напряжений и токов на входе и выходе четырехполюсника, т. е. его свойства передачи.

Характеристические параметры используются для описания взаимных четырехполюсников. Можно эти параметры определить и для невзаимного четырехполюсника, но в таких случаях характеристические параметры не применяются.

Рассмотрим четырехполюсник, показанный на рис. 10.2. Наиболее благоприятным режимом передачи сигнала через него яв-

<sup>1</sup> Конвертором отрицательного иммитанса называется четырехполюсник, описываемый уравнениями:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{pmatrix} = \|A\| \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{pmatrix},$$

где  $\|A\| = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$ .

ляется согласованный режим работы, когда  $Z_{\text{вн}} = Z_{\text{вх}}$  и  $Z_{\text{вн}} = Z_{\text{вх}}$ .

Первое условие обеспечивает согласование на входе, а второе — согласование на выходе. При выполнении этих условий полная мощность в нагрузке достигает своего максимума и, что более важно, отсутствуют искажения сигнала. Входные сопротивления  $Z_{\text{вх}}$  и  $Z_{\text{вн}}$  являются функцией сопротивлений  $Z_{\text{H}}$  и  $Z_{\text{ВН}}$  соответственно.

Характеристическими сопротивлениями называются такие сопротивления, которые, будучи взяты в качестве  $Z_{\text{H}}$  и  $Z_{\text{ВН}}$ , обеспечивают выполнение условий согласования:

$$\left. \begin{aligned} Z_{\text{C1}} &= Z_{\text{вх}} = Z_{\text{вн}} \\ Z_{\text{C2}} &= Z_{\text{вн}} = Z_{\text{вх}} \end{aligned} \right\} \quad (10.41)$$

Подставляя выражения (10.30) и (10.31) в эти равенства, с помощью формул, приведенных в табл. 10.1, найдем

$$Z_{\text{C1}} = \sqrt{\frac{Z_{11}}{Y_{11}}} \quad \text{и} \quad Z_{\text{C2}} = \sqrt{\frac{Z_{22}}{Y_{22}}} \quad (10.42)$$

или с учетом формулы (10.23)

$$Z_{\text{C1}} = \sqrt{Z_{1X} Z_{1K}} \quad \text{и} \quad Z_{\text{C2}} = \sqrt{Z_{2X} Z_{2K}} \quad (10.43)$$

Для симметричных четырехполюсников

$$Z_{\text{C1}} = Z_{\text{C2}} = Z_{\text{C}} = \sqrt{Z_{\text{X}} Z_{\text{K}}} \quad (10.44)$$

Характеристическое сопротивление  $Z_{\text{C}}$  является средним геометрическим сопротивлений  $Z_{\text{X}}$  и  $Z_{\text{K}}$ .

Во всех формулах для  $Z_{\text{C1}}$  и  $Z_{\text{C2}}$  перед корнем взят знак «плюс», так как они являются сопротивлениями пассивных цепей и поэтому не могут иметь отрицательную вещественную часть.

Таким образом, если внутреннее сопротивление источника сигнала и сопротивление нагрузки выбрать равными соответствующим характеристическим сопротивлениям четырехполюсника, то он будет работать в согласованном режиме.

**Характеристический коэффициент передачи**  $\gamma$  четырехполюсника определяют с помощью соотношения, записанного аналогично выражению (6.35) в экспоненциальной форме:

$$e^{-2\gamma} = \frac{\dot{U}_2(-\dot{I}_2)}{\dot{U}_1 \dot{I}_1} = \dot{K}_U \dot{K}_I \quad (10.45)$$

Подставляя в него выражения (10.32) и (10.33), после логарифмирования получим

$$\gamma = \frac{1}{2} \ln \left[ -\frac{1}{Y_{21} Z_{21}} (Y_{22} + Y_{\text{H}})(Z_{22} + Y_{\text{H}}) \right] \quad (10.46)$$

В согласованном режиме, когда  $Z_H = Z_{C2} = \sqrt{Z_{22}/Y_{22}}$ ,

$$\gamma = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{Z_{11}Y_{11}} + 1}{\sqrt{Z_{11}Y_{11}} - 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{Z_{22}Y_{22}} + 1}{\sqrt{Z_{22}Y_{22}} - 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{Z_{1K}/Z_{1X}}}{1 - \sqrt{Z_{1K}/Z_{1X}}} \quad (10.47)$$

так как

$$(Y_{22} - Y_H)(Z_{22} + Z_H) = (Y_{22} - \sqrt{Y_{22}/Z_{22}})(Z_{22} + \sqrt{Z_{22}/Y_{22}}) = (\sqrt{Z_{22}Y_{22}} + 1)^2,$$

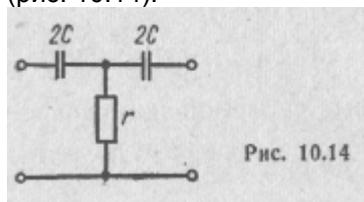
$$-Y_{21}Z_{21} = \frac{Y_{21}^2}{|Y|} = \frac{Y_{11}Y_{22} - |Y|}{|Y|} = \frac{Y_{11}Y_{22}}{|Y|} - 1 = Z_{22}Y_{22} - 1 = Z_{11}Y_{11} - 1$$

Используя формулы, по которым логарифмы выражаются через гиперболические функции<sup>1</sup>, можно записать

$$\gamma = \operatorname{arcth} \sqrt{Z_{11}Y_{11}} = \operatorname{arcth} \sqrt{Z_{22}Y_{22}} \quad (10.48)$$

### Пример 10.6

Найти характеристические параметры Т-образной симметричной схемы (рис. 10.14).



Решение.

Для Т-схемы находим

$$Z_{11} = \frac{1}{2} Z_1 + Z_2; Y_{11} = \frac{1}{Z_1} \cdot \frac{1 + Z_1/2Z_2}{1 + Z_1/4Z_2}$$

Поэтому

$$Z_C = \sqrt{\frac{Z_{11}}{Y_{11}}} = \sqrt{Z_1 Z_2} \sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}. \quad (10.49)$$

В согласованном режиме

$$\gamma = \operatorname{arcth} \sqrt{Z_{11}Y_{11}} = \operatorname{arcth} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1} \frac{(1 + Z_1/2Z_2)^2}{1 + Z_1/4Z_2}} =$$

$$= \operatorname{arcth} \frac{Z_1 + 2Z_2}{\sqrt{Z_1(Z_1 + 4Z_2)}} = \ln \frac{1 + \sqrt{Z_1/(Z_1 + 4Z_2)}}{1 - \sqrt{Z_1/(Z_1 + 4Z_2)}}. \quad (10.50)$$

<sup>1</sup> Главные значения обратных гиперболических функций выражаются через логарифмы формулами:

$$\operatorname{arth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}; \operatorname{arzh} z = \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}$$

Характеристический коэффициент передачи в общем случае является комплексным числом и имеет вещественную и мнимую части;

$$\gamma = \alpha + j\beta. \quad (10.51)$$

Здесь  $\alpha$  — собственное затухание четырехполюсника,  $\beta$  — коэффициент фазы.

Чтобы выяснить смысл этих компонентов, выразим комплексные передаточные функции четырехполюсника через его характеристические параметры. Из формулы (10.45) следует

$$\dot{K}_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \sqrt{\frac{Z_{C2}}{Z_{C1}}} e^{-\gamma} \quad \text{и} \quad \dot{K}_I = \frac{-\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \sqrt{\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}} e^{-\gamma} \quad (10.52)$$

так как в согласованном режиме

$$\dot{U}_1 = Z_{C1} \dot{I}_1, \quad \dot{U}_2 = -Z_{C2} \dot{I}_2$$

и

$$e^{-2\gamma} = \frac{\dot{U}_2 (-\dot{I}_2)}{\dot{U}_1 \dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \cdot \frac{Z_{C1}}{Z_{C2}} \cdot \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \dot{K}_U^2 \frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \dot{K}_U &= \sqrt{\frac{Z_{C2}}{Z_{C1}}} e^{\frac{1}{2} j(\varphi_{C2} - \varphi_{C1})} e^{-(\alpha + j\beta)} = \\ &= \sqrt{\frac{Z_{C2}}{Z_{C1}}} e^{-\alpha} \cdot e^{-j\left(\beta + \frac{\varphi_{C1} - \varphi_{C2}}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (10.53)$$

Выражение для  $K$ , можно получить в аналогичном виде.

Отсюда следует, что отношение амплитуд напряжения (тока) на выходе и входе четырехполюсника определяется его собственным затуханием  $\alpha$  и соотношением модулей характеристических сопротивлений. Сдвиг фаз между напряжениями (токами) на выходе и входе определяется коэффициентом фазы четырехполюсника  $\beta$  и полуразностью аргументов его характеристических сопротивлений.

В симметричных четырехполюсниках  $Z_{C1} = Z_{C2}$ , т. е. отношения амплитуд напряжений и токов на выходе и входе и их фазовые сдвиги полностью определяются соответственно коэффициентами  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\dot{K}_U = \dot{K}_I = e^{-\gamma} = e^{-(\alpha + j\beta)}. \quad (10.54)$$

Недостатком характеристических параметров, снижающим в ряде случаев их ценность, является наличие в полученных выражениях корня квадратного. Характеристические сопротивления, представленные иррациональными выражениями, не могут быть реализованы конечным числом элементов. Цепи, состоящие из конечного числа элементов, всегда имеют сопротивление, выражаемое рациональной функцией, Поэтому решение задач синтеза с по-

мощью характеристических параметров возможно лишь приближенно.

Используя характеристические параметры, уравнения четырехполосника можно записать в виде, удобном для описания цепей с распределенными параметрами. Для этого следует  $A$ -параметры выразить через характеристические параметры.

С помощью формул преобразования (табл. 10.1) находим:

$$Z_{C1} = \sqrt{\frac{Z_{11}}{Y_{11}}} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}}; Z_{C2} = \sqrt{\frac{Z_{22}}{Y_{22}}} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{21}A_{11}}}; \quad (10.55)$$

$$\gamma = \operatorname{arcth} \sqrt{Z_{11}Y_{11}} = \operatorname{arcth} \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}}; \text{ т. е. } \operatorname{cth} \gamma = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}}. \quad (10.56)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \sqrt{\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}} \operatorname{ch} \gamma; & A_{12} &= \sqrt{Z_{C1}Z_{C2}} \operatorname{sh} \gamma; \\ A_{21} &= \frac{1}{\sqrt{Z_{C1}Z_{C2}}} \operatorname{sh} \gamma; & A_{22} &= \sqrt{\frac{Z_{C2}}{Z_{C1}}} \operatorname{ch} \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (10.57)$$

Используя уравнения четырехполосника (10.17) в Л-форме, с помощью выражений (10.57) получаем уравнения четырехполосника в гиперболических функциях:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \sqrt{\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}} (\dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma + Z_{C2} \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma); \\ \dot{I}_1 &= \sqrt{\frac{Z_{C2}}{Z_{C1}}} (\dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma + \frac{1}{Z_{C2}} \dot{U}_2 \operatorname{sh} \gamma). \end{aligned} \right\} \quad (10.58)$$

Уравнения такого вида играют важную роль при анализе процессов в длинных однородных линиях.

## 10.5. ПАРАМЕТРЫ РАССЕЯНИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Общепринятые параметры четырехполосника в целом ряде случаев являются неудобными. Многие схемы не могут быть описаны с их помощью. С другой стороны, на частотах выше 100—200 МГц осуществление холостого хода и короткого замыкания при измерениях параметров четырехполосника вызывает серьезные трудности. Этим недостаткам лишен волновой подход к описанию четырехполосников. Сейчас он приобретает особый интерес для анализа транзисторных схем на сверхвысоких частотах (СВЧ). В его основе лежат соотношения так называемых падающих и отраженных волн напряжений, токов или мощностей.

По аналогии с явлением отражения электромагнитных волн от поверхностей раздела сред параметры, описывающие отражение и поглощение потоков мощности на зажимах многополосника, называют волновыми параметрами или параметрами рассеяния. Их удается измерить до частот порядка 12 ГГц.

С параметрами рассеяния связаны две важные операции: нормирование величин и определение переменных рассеяния. Нормирование напряжений и токов, действующих, например, на зажимах двухполюсника, соответствует включению идеального нормирующего трансформатора с коэффициентом трансформации  $k_T = \frac{1}{\sqrt{R_0}}$

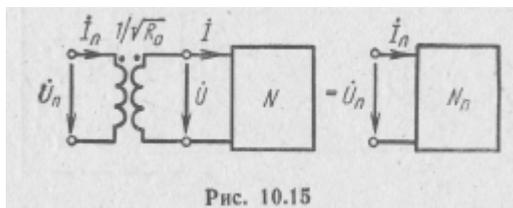


Рис. 10.15

как это показано на рис. 10.15. Оно осуществляется следующим способом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_n &= \frac{\dot{U}}{\sqrt{R_0}}; \dot{i}_n = \sqrt{R_0} \dot{i}; \\ Z_n &= \frac{\dot{U}_n}{\dot{i}_n} = \frac{\dot{U}}{\dot{i}} \cdot \frac{1}{R_0} = \frac{Z}{R_0}, \text{ т. е. } Z_n = \frac{Z}{R_0}, \end{aligned} \right\} (10.59)$$

где  $R_0$  — базисное сопротивление или сопротивление нормирования. Значение этого сопротивления может быть выбрано произвольным, однако обычно выбирается с учетом параметров внешней цепи, например равным внутреннему сопротивлению источника или волновому сопротивлению соединительного волновода, что упрощает расчеты.

**Переменные рассеяния** представляют линейные комбинации нормированных напряжений и токов и определяются как их полусумма и полуразность:

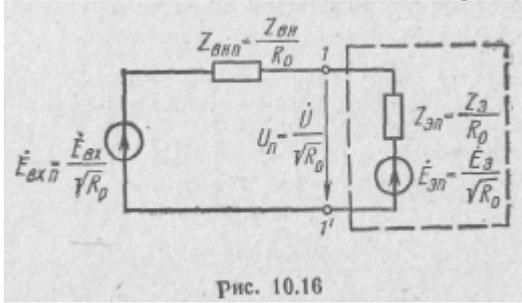
$$\left. \begin{aligned} \dot{A} = \dot{U}_{\text{пад}} &\hat{=} \frac{1}{2} (\dot{U}_n + \dot{i}_n) = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{U}}{\sqrt{R_0}} + \sqrt{R_0} \dot{i} \right); \\ \dot{B} = \dot{U}_{\text{отр}} &\hat{=} \frac{1}{2} (\dot{U}_n - \dot{i}_n) = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{U}}{\sqrt{R_0}} - \sqrt{R_0} \dot{i} \right). \end{aligned} \right\} (10.60)$$

Эти величины называют соответственно падающей и отраженной волнами нормированного напряжения. Следует заметить, что квадрат их модуля имеет размерность мощности.

Складывая и вычитая переменные рассеяния, можно выразить напряжение и ток, действующие в цепи:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \sqrt{R_0} (\dot{U}_{\text{пад}} + \dot{U}_{\text{отр}}); \dot{U}_n = \dot{U}_{\text{пад}} + \dot{U}_{\text{отр}}; \\ \dot{i} &= \frac{1}{\sqrt{R_0}} (\dot{U}_{\text{пад}} - \dot{U}_{\text{отр}}); \dot{i}_n = \dot{U}_{\text{пад}} - \dot{U}_{\text{отр}}. \end{aligned} \right\} (10.61)$$

Падающую волну  $\dot{A} = \dot{U}_{\text{ПАД}}$  на входе произвольного двухполосника можно всегда выразить через параметры источника э. д. с.  $E_{\text{вх}}$  с внутренним активным сопротивлением  $Z_{\text{ВН}}=R_0$ , считая его подключенным к зажимам двухполосника. Представляя двухполос-



ник эквивалентным генератором с внутренним сопротивлением  $Z_э$ , э.д. с.  $E_э$ , (рис. 10.16), получаем

$$\dot{I}_n = \frac{\dot{E}_{\text{ВХн}} - \dot{E}_{\text{Эн}}}{Z_{\text{ВХн}} + Z_{\text{Эн}}}; \dot{U}_n = \frac{(\dot{E}_{\text{ВХн}} - \dot{E}_{\text{Эн}})Z_{\text{Эн}}}{Z_{\text{ВХн}} + Z_{\text{Эн}}} - \dot{E}_{\text{Эн}},$$

Отсюда находим

$$\dot{U}_{\text{ПАД}} = \frac{1}{2}(\dot{U}_n + \dot{I}_n) = \frac{1}{2} \frac{\dot{E}_{\text{ВХн}}(Z_{\text{Эн}} + 1) + \dot{E}_{\text{Эн}}(Z_{\text{ВХн}} - 1)}{Z_{\text{ВХн}} + Z_{\text{Эн}}}$$

Если выбрать  $Z_{\text{ВХн}} = 1$  т. е.  $Z_{\text{ВН}} = R_0$ , то

$$\dot{U}_{\text{ПАД}} = \frac{1}{2} \dot{E}_{\text{ВХн}} \Big|_{Z_{\text{ВХн}}=1} \quad (10.62)$$

Таким образом, если к двухполоснику подключить источник с внутренним сопротивлением  $Z_{\text{ВН}}=R_0$ , то падающая волна  $\dot{A} = \dot{U}_{\text{ПАД}}$ , на его зажимах будет равна половине нормированной э.д.с. источника и совершенно не будет зависеть от параметров двухполосника.

Максимально возможная активная мощность, которая может быть передана от этого источника в двухполосник, в соответствии с теоремой о максимально передаваемой мощности

$$P_{\text{max}} = \frac{E_{\text{вх}}^2}{4R_0} = \left| \frac{\dot{E}_{\text{вхн}}}{2} \right|^2 = |\dot{U}_{\text{пад}}|^2 = U_{\text{пад}}^2, \quad (10.63)$$

т. е. равна квадрату модуля падающей волны.

Мощность, рассеиваемую в пассивной цепи, можно выразить через переменные рассеяния:

$$P = \text{Re} [\dot{U}_n \dot{I}_n] = \text{Re} [\dot{U}_n \dot{I}_n] = \text{Re} [(\dot{U}_{\text{пад}} + \dot{U}_{\text{отр}}) \times (\dot{U}_{\text{пад}} - \dot{U}_{\text{отр}})] = \dot{U}_{\text{пад}} \dot{U}_{\text{пад}}^* - \dot{U}_{\text{отр}} \dot{U}_{\text{отр}}^* = U_{\text{пад}}^2 - U_{\text{отр}}^2 = P_{\text{пад}} - P_{\text{отр}}, \quad (10.64)$$

так как

$$\operatorname{Re}[\dot{U}_{\text{пад}} \dot{U}_{\text{отр}} - \dot{U}_{\text{отр}} \dot{U}_{\text{пад}}] = 0.$$

Рассеиваемая в цепи мощность выражается разностью двух составляющих: падающей и отраженной мощности. Когда  $P_{\text{отр}}=0$ , отражение отсутствует и цепь потребляет всю максимально возможную мощность  $P = P_{\text{пад}} = U_{\text{пад}}^2$ .

Для описания двухполюсника достаточно одного параметра. Отношение отраженной волны нормированного напряжения на зажимах двухполюсника к падающей волне называется его коэффициентом рассеяния или отражения:

$$S \triangleq \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{U}_{\text{пад}}} = \frac{\frac{1}{2} (\dot{U}_n - \dot{I}_n)}{\frac{1}{2} (\dot{U}_n + \dot{I}_n)} = \frac{Z_{\text{вхн}} - 1}{Z_{\text{вхн}} + 1} = \frac{Z_{\text{вх}} - R_0}{Z_{\text{вх}} + R_0}, \quad (10.65)$$

где  $Z_{\text{вхн}} = \frac{\dot{U}_n}{\dot{I}_n} = \frac{Z_{\text{вх}}}{R_0}$  - нормированное входное или внутреннее сопротивление двухполюсника.

**Коэффициент отражения двухполюсника** является мерой отклонения значения его входного сопротивления от оптимального, которое определяется условием передачи максимума мощности от источника с внутренним активным сопротивлением  $R_0$  в данный двухполюсник.

Для четырехполюсника характерно наличие двух систем переменных рассеяния:  $\dot{U}_{1\text{пад}}$  и  $\dot{U}_{1\text{отр}}$  на первичной стороне и  $\dot{U}_{2\text{пад}}$ , и  $\dot{U}_{2\text{отр}}$  на вторичной (рис. 10.17):

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{1\text{пад}} &\triangleq \frac{1}{2} (\dot{U}_{1n} + \dot{I}_{1n}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{U}_1}{\sqrt{R_{01}}} + \sqrt{R_{01}} \dot{I}_1 \right); \\ \dot{U}_{1\text{отр}} &\triangleq \frac{1}{2} (\dot{U}_{1n} - \dot{I}_{1n}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{U}_1}{\sqrt{R_{01}}} - \sqrt{R_{01}} \dot{I}_1 \right); \end{aligned} \right\} \quad (10.66)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{2\text{пад}} &\triangleq \frac{1}{2} (\dot{U}_{2n} + \dot{I}_{2n}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{U}_2}{\sqrt{R_{02}}} + \sqrt{R_{02}} \dot{I}_2 \right); \\ \dot{U}_{2\text{отр}} &\triangleq \frac{1}{2} (\dot{U}_{2n} - \dot{I}_{2n}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{U}_2}{\sqrt{R_{02}}} - \sqrt{R_{02}} \dot{I}_2 \right); \end{aligned} \right\} \quad (10.67)$$

где  $R_{01}, R_{02}$  — сопротивления нормирования.

Если в качестве независимых переменных выбрать падающие волны, а в качестве зависимых — отраженные, то для четырехполюсника можно записать систему волновых уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{1\text{отр}} &= S_{11} \dot{U}_{1\text{пад}} + S_{12} \dot{U}_{2\text{пад}}; \\ \dot{U}_{2\text{отр}} &= S_{21} \dot{U}_{1\text{пад}} + S_{22} \dot{U}_{2\text{пад}} \end{aligned} \quad \text{ИЛИ} \quad \begin{vmatrix} \dot{U}_{1\text{отр}} \\ \dot{U}_{2\text{отр}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{U}_{1\text{пад}} \\ \dot{U}_{2\text{пад}} \end{vmatrix}, \quad (10.68)$$

где

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= \left. \frac{\dot{U}_{1\text{отр}}}{\dot{U}_{1\text{пад}}} \right|_{\dot{U}_{2\text{пад}}=0}; & S_{12} &= \left. \frac{\dot{U}_{1\text{отр}}}{\dot{U}_{2\text{пад}}} \right|_{\dot{U}_{1\text{пад}}=0}; \\ S_{21} &= \left. \frac{\dot{U}_{2\text{отр}}}{\dot{U}_{1\text{пад}}} \right|_{\dot{U}_{2\text{пад}}=0}; & S_{22} &= \left. \frac{\dot{U}_{2\text{отр}}}{\dot{U}_{2\text{пад}}} \right|_{\dot{U}_{1\text{пад}}=0}. \end{aligned} \right\} \quad (10.69)$$

Здесь  $\|S\| = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$  — матрица рассеяния четырехполюсника, элементы которой являются

его параметрами рассеяния,

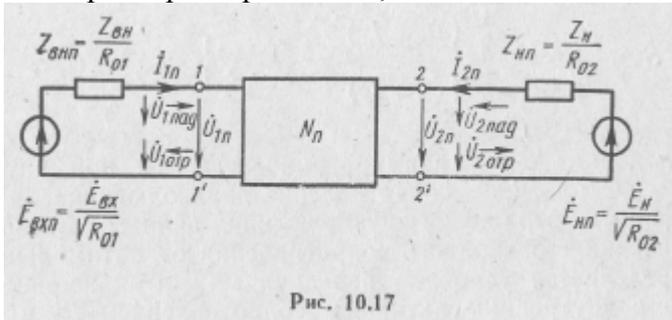


Рис. 10.17

Физический смысл S-параметров ясен из формул (10.69). Исходя из него, параметры получили названия:

- $S_{11}$  — коэффициент отражения на входе;
- $S_{21}$  — коэффициент прямой передачи;
- $S_{12}$  — коэффициент обратной передачи;
- $S_{22}$  — коэффициент отражения на выходе.

Так как нормирующие сопротивления  $R_{01}$  и  $R_{02}$  могут быть выбраны произвольно, то матрица рассеяния для данного четырехполюсника не является единственной. Поэтому для описания четырехполюсника необходимо знать его матрицу рассеяния  $\|S\|$  и систему выбранных базисных величин  $R_{01}$  и  $R_{02}$ .

Параметры рассеяния четырехполюсника легко определить из формул (10.69). Для этого уясним смысл условий  $\dot{U}_{1\text{пад}} = 0$  и  $\dot{U}_{2\text{пад}} = 0$ . Рассматривая четырехполюсник на рис. 10.17 относительно зажимов 1—1' как двухполюсник, с помощью выражения (10.62) устанавливаем, что равенству  $\dot{U}_{1\text{пад}} = 0$  соответствует условие согласования на входе  $Z_{BHn} = 1$  при  $\dot{E}_{BX} = 0$ . Отмечая, что на вторичной стороне падающая волна  $\dot{U}_{2\text{пад}}$  по отношению к двухполюснику, которым является нагрузка, представляет отраженную волну, аналогично установим, что равенству  $\dot{U}_{2\text{пад}}$  соответствует условие согласования на выходе  $Z_{Hn} = 1$  при  $\dot{E}_H = 0$ .

**Коэффициенты отражения четырехполюсника** находим, используя формулы (10.66) и (10.67):

$$S_{11} = \frac{\dot{U}_1 \text{отр}}{\dot{U}_1 \text{пад}} \Big|_{\dot{U}_2 \text{пад}=0} = \frac{\frac{1}{2} (\dot{U}_{1n} - \dot{I}_{1n})}{\frac{1}{2} (\dot{U}_{1n} + \dot{I}_{1n})} \Big|_{\dot{U}_2 \text{пад}=0} = \frac{Z_{\text{BX } 1n} - 1}{Z_{\text{BX } 1n} + 1} \Big|_{Z_{\text{Hn}}=1}, \quad (10.70)$$

Здесь  $Z_{\text{BX } 1n} = \frac{\dot{Z}_{\text{BX } 1}}{R_{01}} = \frac{\dot{U}_{1n}}{\dot{I}_{1n}} \Big|_{Z_{\text{Hn}}=1}$  — входное сопротивление нормированного

четырёхполюсника, нагруженного на единичное сопротивление, т. е. в режиме согласования на выходе.

Нормирование четырехполюсника осуществляется включением с обеих его сторон нормирующих трансформаторов с коэффициентами трансформации  $k_{T1} = \frac{1}{\sqrt{R_{01}}}$  и  $k_{T2} = \frac{1}{\sqrt{R_{02}}}$

если их внешние обмотки считать первичными.

Аналогично

$$S_{22} = \frac{\dot{U}_2 \text{отр}}{\dot{U}_2 \text{пад}} \Big|_{\dot{U}_1 \text{пад}=0} = \frac{\frac{1}{2} (\dot{U}_{2n} - \dot{I}_{2n})}{\frac{1}{2} (\dot{U}_{2n} + \dot{I}_{2n})} \Big|_{\dot{U}_1 \text{пад}=0} = \frac{Z_{\text{BX } 2n} - 1}{Z_{\text{BX } 2n} + 1} \Big|_{Z_{\text{Hn}}=1}, \quad (10.71)$$

где  $Z_{\text{BX } 2n} = \frac{\dot{Z}_{\text{BX } 2}}{R_{02}} = \frac{\dot{U}_{2n}}{\dot{I}_{2n}} \Big|_{Z_{\text{Hn}}=1}$  - выходное сопротивление нормированного четырехполюсника,

нагруженного со стороны 1—1' на единичное сопротивление, т. е. в режиме согласования на входе.

Коэффициент отражения  $S_{ji}$  на  $j$ -й стороне четырехполюсника— это мера отклонения ее режима от оптимального, который определяется условием потребления максимума мощности от источника с внутренним сопротивлением, равным ее базисному сопротивлению  $R_{0j}$ , если на противоположной  $i$ -й стороне четырехполюсник нагружен на соответствующее ей базисное сопротивление  $R_{0i}$ .

**Коэффициенты передачи четырехполюсника** находим с помощью выражения (10.69). Для этого в схеме рис. 10.17 сначала примем  $\dot{E}_H = 0$  и  $Z_{\text{Hn}} = 1$ , что соответствует условию согласования на выходе  $\dot{U}_{2\text{пад}} = 0$ . В этом случае в соответствии с равенством  $\dot{U}_{2\text{пад}} + \dot{U}_{2\text{отр}} = \dot{U}_{2n}$  получим

$$\dot{U}_{2\text{отр}} = \dot{U}_{2n}. \quad (10.72)$$

Формула (10.69) для  $S_{21}$  не содержит  $\dot{U}_{1\text{отр}}$ . Поэтому коэффициент  $S_{21}$  может быть найден при произвольном значении  $\dot{U}_{1\text{отр}}$ .

В рассматриваемом случае, учитывая (10.61) и (10.70), находим

$$\dot{U}_{1\text{пад}} + \dot{U}_{1\text{отр}} = \dot{U}_{1\text{пад}} + S_{11}\dot{U}_{1\text{пад}} = \dot{U}_{1\text{пад}} + \frac{Z_{\text{вх}1n} - 1}{Z_{\text{вх}1n} + 1} \dot{U}_{1\text{пад}} = \dot{U}_{1n} = \frac{Z_{\text{вх}1n}}{Z_{\text{вн}n} + Z_{\text{вх}1n}} \dot{E}_{\text{вх}n},$$

откуда

$$\dot{U}_{1\text{пад}} = \frac{\dot{E}_{\text{вх}n}}{2} = \frac{Z_{\text{вх}1n} + 1}{Z_{\text{вх}1n} + Z_{\text{вн}n}} \cdot \quad (10.73)$$

Удобно выбрать  $\dot{U}_{1\text{отр}} = 0$ , что в нашей схеме возможно при  $Z_{\text{вн}n} = Z_{\text{вх}n1} = 1$ , чему соответствует  $\dot{U}_{1\text{пад}} = \frac{1}{2} \dot{E}_{\text{вх}n} \Big|_{Z_{\text{вн}n}=1}$ .

Для определения коэффициента  $S_{21}$  падающую волну  $\dot{U}_{1\text{пад}}$  выбирают такой, какой она была бы в режиме согласования на входе ( $Z_{\text{вн}n} = 1$ ). т. е. в соответствии с равенством (10.62):

$$\dot{U}_{1\text{пад}} \hat{=} \frac{1}{2} \dot{E}_{\text{вх}n} \Big|_{Z_{\text{вн}n}=1}. \quad (10.74)$$

Определив  $\dot{U}_{2\text{отр}}$  и  $\dot{U}_{2\text{пад}}$ , после подстановки выражений (10.72) и (10.74) в формулу (10.69) получим

$$S_{21} = \frac{2\dot{U}_{2n}}{\dot{E}_{\text{вх}n}} \Big|_{\substack{Z_{\text{вн}n}=1 \\ Z_{\text{вн}n}=1}} = 2 \sqrt{\frac{R_{01}}{R_{02}}} \cdot \frac{\dot{U}_2}{\dot{E}_{\text{вх}}} \Big|_{\substack{Z_{\text{вн}}=R_{01} \\ Z_{\text{н}}=R_{02}}}. \quad (10.75)$$

Совершенно аналогично при  $\dot{U}_{1\text{пад}}=0$ , чему соответствует  $\dot{E}_{\text{вх}}=0$  и  $Z_{\text{вх}n}=1$ , находят коэффициент обратной передачи:

$$S_{12} = \frac{2\dot{U}_{1n}}{\dot{E}_{\text{вн}n}} \Big|_{\substack{Z_{\text{вн}n}=1 \\ Z_{\text{вн}n}=1}} = 2 \sqrt{\frac{R_{02}}{R_{01}}} \cdot \frac{\dot{U}_1}{\dot{E}_{\text{н}}} \Big|_{\substack{Z_{\text{вн}}=R_{01} \\ Z_{\text{н}}=R_{02}}}. \quad (10.76)$$

Сравнивая полученные выражения для волновых коэффициентов передачи  $S_{21}$  и  $S_{12}$  с формулой (10.34), можно установить, что каждый из них равен удвоенному нормированному рабочему коэффициенту передачи четырехполюсника по напряжению в прямом или обратном направлении при условии  $Z_{\text{вн}} = r_{\text{вн}} = R_{01}$  и  $Z_{\text{н}} = r_{\text{н}} = R_{02}$ .

В общем случае волновой коэффициент передачи  $S_{ji}$  четырехполюсника  $N$  — это удвоенная передаточная функция по напряжению нормированного четырехполюсника  $N_n$ , дополненного единичным активным сопротивлением с одной стороны и нагруженного таким же сопротивлением с другой стороны (рис. 10.18), т. е. в режиме согласования на входе и выходе. Нормированный четырехполюсник становится дополненным, если подключить последовательно каждому из его входов единич-

ное активное сопротивление (рис. 10.19). Параметры рассеяния представляют, по сути, параметры короткого замыкания нормированного и дополненного четырехполюсника. Но характеризуют

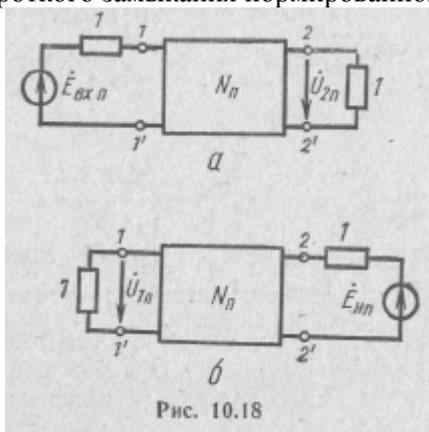


Рис. 10.18

они данный четырехполюсник без предварительного нормирования и дополнения.

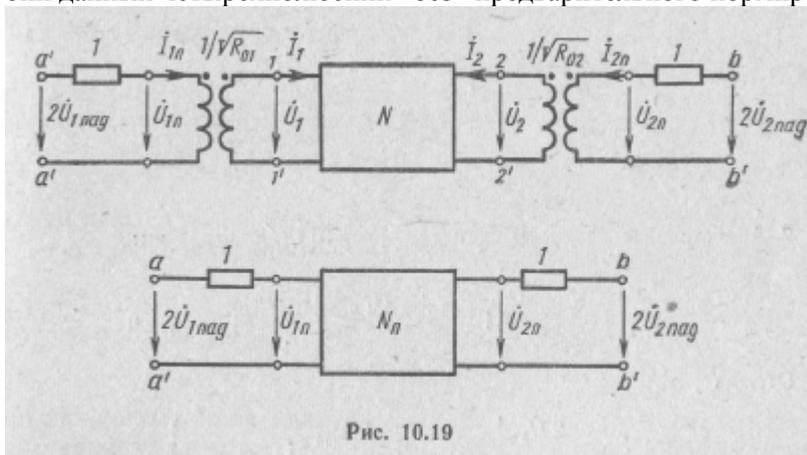


Рис. 10.19

**Пример 10.7.**

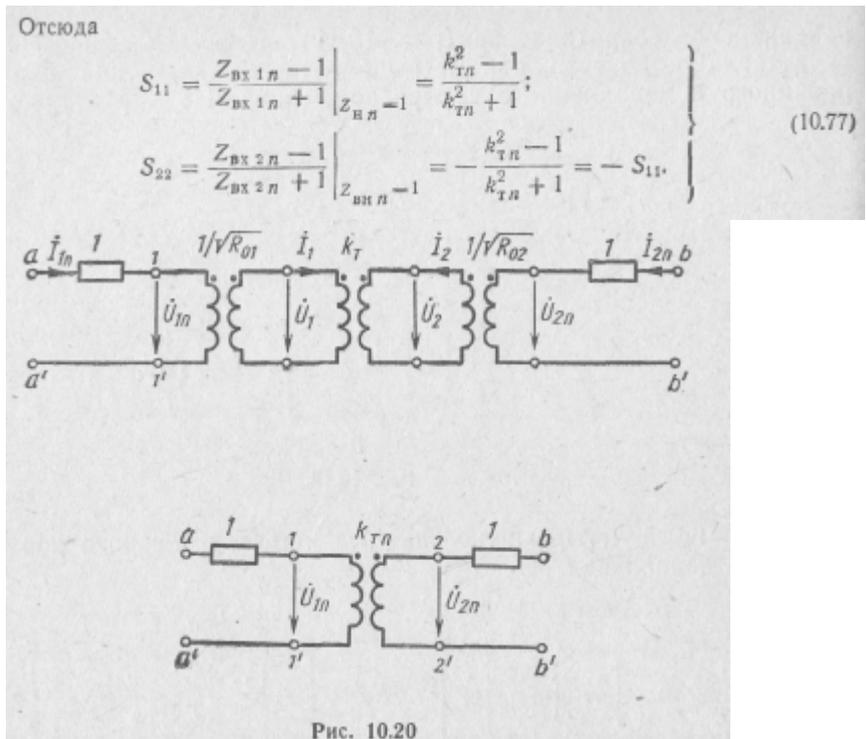
Найти матрицу рассеяния идеального трансформатора. Решение.

1. Поочередно замыкая зажимы нормированного и дополненного идеального трансформатора (рис. 10.20), находим:

$$Z_{BX1n} = \frac{\dot{U}_{1n}}{\dot{I}_{1n}} = \frac{R_{02}}{R_{01}} k_T^2 = k_{Tn}^2$$

$$Z_{BX2n} = \frac{\dot{U}_{2n}}{\dot{I}_{2n}} = \frac{R_{01}}{R_{02}} \frac{1}{k_T^2} = \frac{1}{k_T^2}$$

где  $k_{Tn} = \sqrt{\frac{R_{02}}{R_{01}}} k_T$  — нормированный коэффициент трансформации.



2. Аналогично с помощью схем (см. рис. 10.18) определяем:  
Отсюда

$$\left. \begin{aligned} S_{21} &= \frac{2 \dot{U}_{2n}}{\dot{E}_{вх\ n}} \Big|_{\substack{Z_{вн\ n} = 1 \\ Z_{вн\ n} = 1}} = \frac{2 k_{\tau n}}{k_{\tau n}^2 + 1}; \\ S_{12} &= \frac{2 \dot{U}_{1n}}{\dot{E}_{вн\ n}} \Big|_{\substack{Z_{вн\ n} = 1 \\ Z_{вн\ n} = 1}} = \frac{2 k_{\tau n}}{k_{\tau n}^2 + 1} = S_{21}. \end{aligned} \right\} (10.78)$$

Все S-параметры безразмерны. Для взаимных четырехполосников выполняется равенство  $S_{21}=S_{12}$  указывающее на равенство условий передачи в обоих направлениях, т. е. взаимный четырехполосник является обратимым,

**Свойства матрицы** рассеяния четырехполюсника установим, используя соотношения (10.64) и (10.68). С их помощью активную мощность, рассеиваемую в четырехполюснике, выразим как

$$\begin{aligned}
 P &= \dot{U}_{1\text{пад}} \dot{U}_{1\text{пад}}^* - \dot{U}_{1\text{отр}} \dot{U}_{1\text{отр}}^* + \dot{U}_{2\text{пад}} \dot{U}_{2\text{пад}}^* - \dot{U}_{2\text{отр}} \dot{U}_{2\text{отр}}^* = \\
 &= \|\dot{U}_{\text{пад}}\|_t \|\dot{U}_{\text{пад}}\| - \|\dot{U}_{\text{отр}}\|_t \|\dot{U}_{\text{отр}}\| = \|\dot{U}_{\text{пад}}\|_t \|\dot{U}_{\text{пад}}\| - \\
 &\quad - (\|\dot{S}\|_t \|\dot{U}_{\text{пад}}\|)_t \|S\| \|\dot{U}_{\text{пад}}\| = \|\dot{U}_{\text{пад}}\|_t \|\dot{U}_{\text{пад}}\| - \\
 &\quad - \|\dot{U}_{\text{пад}}\|_t \|\dot{S}\|_t \|S\| \|\dot{U}_{\text{пад}}\| = \|\dot{U}_{\text{пад}}\|_t ( \|1\| - \|\dot{S}\|_t \|S\| ) \|\dot{U}_{\text{пад}}\|,
 \end{aligned}$$

т. е.

$$P = \|\dot{U}_{\text{пад}}\|_t ( \|1\| - \|\dot{S}\|_t \|S\| ) \|\dot{U}_{\text{пад}}\|. \quad (10.79)$$

Для всех пассивных четырехполюсников характерно, что рассеиваемая в них мощность  $P$  всегда положительна. В соответствии с выражением (10.79) это возможно, если матрица  $(\|1\| - \|\dot{S}\|_t \|S\|)$  является Эрмитовой и положительно полуопределенной, что справедливо для всех пассивных цепей. Используя это свойство матриц рассеяния пассивных четырехполюсников, можно доказать, что она существует исключительно для всех пассивных цепей.

Определив главные миноры первого порядка для Эрмитовой матрицы  $(\|1\| - \|\dot{S}\|_t \|S\|)$ ,

установим, что для пассивного четырехполюсника всегда

$$\left. \begin{aligned}
 1 - |S_{11}|^2 - |S_{21}|^2 &\geq 0; \\
 1 - |S_{12}|^2 - |S_{22}|^2 &\geq 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (10.80)$$

В четырехполюсниках без потерь, например в реактивных четырехполюсниках,  $P=0$  при любых ненулевых значениях  $\dot{U}_{2\text{пад}}$  и  $\dot{U}_{2\text{отр}}$ . Этому соответствует равенство

$$\|\dot{S}\|_t \|S\| = \|1\| \quad (10.81)$$

или

$$\left\| \begin{array}{cc} |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 & \dot{S}_{11}^* S_{12} + \dot{S}_{21}^* S_{22} \\ \dot{S}_{12}^* S_{11} + \dot{S}_{22}^* S_{12} & |S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|,$$

что свидетельствует о том, что матрица рассеяния четырехполюсника без потерь является унитарной.

<sup>1</sup> Как известно, Эрмитова матрица является положительно полуопределенной, если, и только если, все ее главные миноры (в том числе определитель матрицы) будут неотрицательны.

Равенству (10.81) одновременно соответствуют:

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1; \quad (10.81a)$$

$$|S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 = 1; \quad (10.81б)$$

$$\dot{S}_{11}S_{12} + \dot{S}_{21}S_{22} = 0; \quad (10.81в)$$

$$\dot{S}_{12}S_{21} + \dot{S}_{22}S_{12} = 0. \quad (10.81г)$$

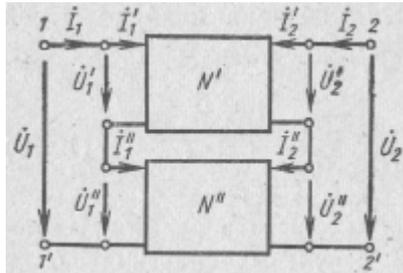
Отсюда, в частности, следует, что в четырехполюсниках без потерь невозможна полностью односторонняя передача энергии, т. е. равенство нулю одного из коэффициентов:  $S_{21}$  или  $S_{12}$ . Действительно, если, например,  $S_{12}=0$ , то параметр  $S_{21}$  или  $S_{22}$  в (10.81в) также должен быть равен нулю. Но из формулы (10.81б) следует, что при  $S_{22}=0$  будет  $S_{12}=1$ , а случай  $S_{21}=0$  при  $S_{12}=0$  нас не интересует. Таким образом, ни один из четырехполюсников без потерь не может быть полностью необратимым. Однако  $|S_{12}|$  может быть гораздо меньше, чем  $|S_{21}|$ .

## 10.6. СЛОЖНЫЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

Сложными или составными называют четырехполюсники, которые можно представить в виде соединения нескольких более простых четырехполюсников, параметры которых можно определить более просто. Если известны параметры составляющих четырехполюсников, то через них можно выразить и найти параметры составного сложного четырехполюсника.

Различают пять основных способов соединения четырехполюсников: последовательное, параллельное, последовательно-параллельное, параллельно-последовательное и каскадное. Установим соотношения между параметрами составного и составляющих четырехполюсников в каждом случае.

Последовательное соединение (рис. 10.21) характеризуется соотношениями:



$$\begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}'_1 + \dot{U}''_1 \\ \dot{U}'_2 + \dot{U}''_2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{I}'_1 \\ \dot{I}'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{I}''_1 \\ \dot{I}''_2 \end{vmatrix}. \quad (10.82)$$

Поэтому

$$\begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_{11}Z_{12} \\ Z_{21}Z_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} Z'_{11}Z'_{12} \\ Z'_{21}Z'_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Z''_{11}Z''_{12} \\ Z''_{21}Z''_{22} \end{vmatrix} \right\} \begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{vmatrix},$$

т. е.

$$\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} \\ Z'_{21} & Z'_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Z''_{11} & Z''_{12} \\ Z''_{21} & Z''_{22} \end{vmatrix}. \quad (10.83)$$

При последовательном соединении матрица Z-параметров сложного четырехполюсника равна сумме матриц Z-параметров составляющих его простых четырехполюсников.

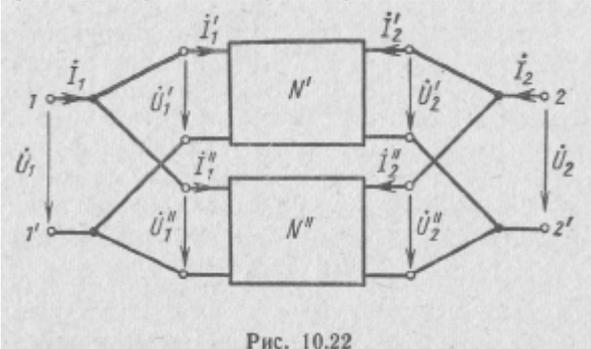


Рис. 10.22

Параллельное соединение (рис. 10.22) характеризуется соотношениями:

$$\begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{I}'_1 \\ \dot{I}'_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{I}''_1 \\ \dot{I}''_2 \end{vmatrix}. \quad (10.84)$$

Поэтому

$$\begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} \\ Y'_{21} & Y'_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Y''_{11} & Y''_{12} \\ Y''_{21} & Y''_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{vmatrix},$$

т. е.

$$\|Y\| = \|Y'\| + \|Y''\|. \quad (10.85)$$

При параллельном соединении матрица Y-параметров сложного четырехполюсника равна сумме матриц Y-параметров составляющих четырехполюсников.

Последовательно-параллельное соединение (рис. 10.23) характеризуется, как легко убедиться, тем, что матрица H-параметров сложного четырехполюсника равна сумме H-матриц составляющих четырехполюсников:

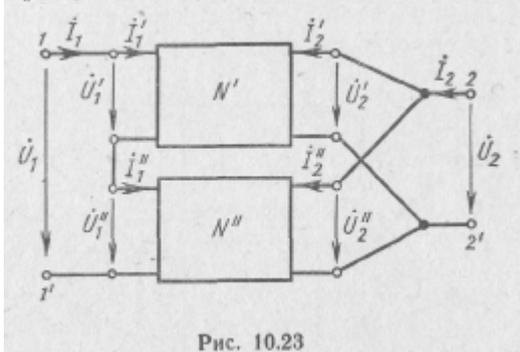
$$\|H\| = \|H'\| + \|H''\| \quad (10.86)$$

Параллельно-последовательное соединение (рис. 10.24) дуально последовательно-параллельному. Нетрудно убедиться, что при нем G-матрица сложного четырехполюсника равна сумме G-матриц составляющих четырехполюсников:

$$\|G\| = \|G'\| + \|G''\| \quad (10.87)$$

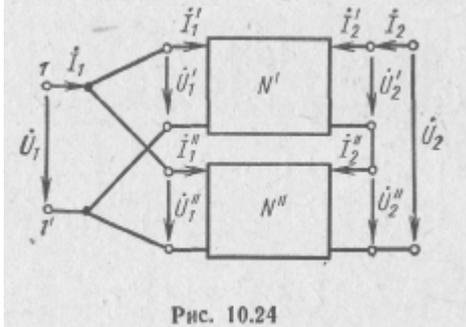
Каскадное соединение (рис. 10.25) характеризуется соотношениями:

$$\begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \dot{U}'_2 \\ -\dot{I}'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{I}''_1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \dot{U}''_2 \\ -\dot{I}''_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{vmatrix}. \quad (10.88)$$



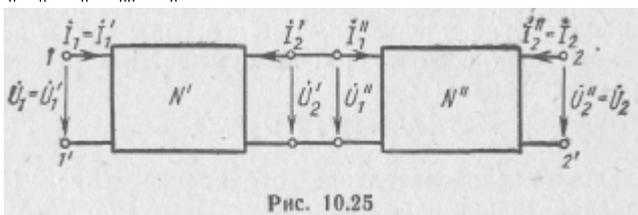
Поэтому

$$\begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A''_{11} & A''_{12} \\ A''_{21} & A''_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{vmatrix},$$



т. е.,

$$\|A\| = \|A'\| \|A''\| \quad (10.89)$$



При каскадном соединении матрица А-параметров сложного четырехполюсника равна произведению А-матриц составляющих четырехполюсников. Перемножение матриц нужно производить

в порядке, соответствующем соединению четырехполюсников, так как оно не подчиняется переместительному закону.

Большое практическое значение имеет каскадное согласованное соединение  $n$  четырехполюсников с характеристическими коэффициентами передачи  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  и характеристическими со-

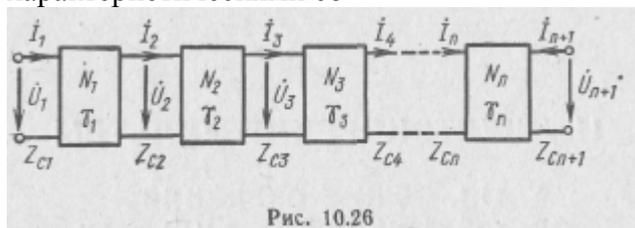


Рис. 10.26

противлениями соответственно  $Z_{C1}$  и  $Z_{C2}$ ,  $Z_{C2}$  и  $Z_{C3}, \dots, Z_{Cn}$  и  $Z_{Cn+1}$  (рис. 10.26). Оно основано на согласовании характеристических сопротивлений четырехполюсников, заключающемся в том, что входное сопротивление относительно каждой пары зажимов любого четырехполюсника равно характеристическому. В приведенной схеме нагрузка  $Z_{Cn+1}$  согласована с выходным характеристическим сопротивлением  $Z_{Cn}$   $n$ -го четырехполюсника, его входное сопротивление равно характеристическому  $Z_{Cn}$ , при этом оно служит согласованной нагрузкой для  $(n-1)$ -го четырехполюсника и т. д. В итоге входное сопротивление первого четырехполюсника также равно характеристическому  $Z_{C1}$ .

Применительно к схеме рис. 10.26 в соответствии с формулой (ю.52)

$$\frac{U_{n+1}}{U_1} = \sqrt{\frac{Z_{Cn+1}}{Z_{C1}}} e^{-\gamma}, \quad (10.90)$$

где

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n. \quad (10.91)$$

Отсюда следует, что каскадное согласованное соединение  $n$  четырехполюсников может рассматриваться как один четырехполюсник, характеристические сопротивления которого равны входному характеристическому сопротивлению первого и выходному характеристическому сопротивлению последнего четырехполюсника. Характеристический коэффициент передачи результирующего четырехполюсника равен алгебраической сумме характеристических коэффициентов передачи каскадно соединенных четырехполюсников.

## 11. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

### 11.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРАХ

Электрическим фильтром называют четырехполюсник, через который электрические колебания одних частот проходят с малым затуханием, а других частот — с большим затуханием. Диапазон частот, в пределах которого затухание не превышает некоторой

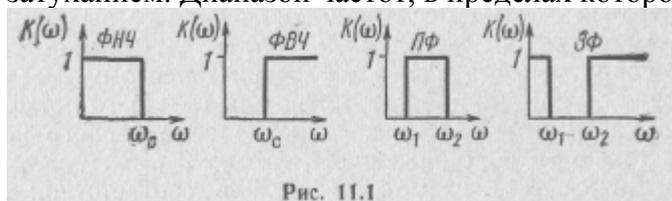


Рис. 11.1

установленной величины, называют полосой пропускания, а диапазон частот, где затухание не меньше некоторой заданной величины, называют полосой задерживания.

В зависимости от расположения полос пропускания и задерживания электрические фильтры разделяют на фильтры нижних частот (ФНЧ), фильтры верхних частот (ФВЧ), полосовые фильтры (ПФ) и заграждающие фильтры (ЗФ). Амплитудно-частотные характеристики идеальных фильтров перечисленных типов приведены на рис. 11.1.

Электрические фильтры находят широкое применение в электротехнических и радиотехнических устройствах для разделения электрических колебаний по частоте, т. е. для частотной селекции сигналов. Частотное разделение каналов связи с помощью электрических фильтров, состоящих из индуктивных катушек и конденсаторов, впервые осуществил русский военный связист капитан Г. Г. Игнатьев в 1880 г. для одновременной передачи телефонных и телеграфных сигналов по одному проводу.

В настоящее время в практике проектирования электрических фильтров находят применение разнообразные методы их расчета основными из которых являются методы расчета по характери-

стическим или рабочим параметрам. В разработку теории и методов расчета электрических фильтров, особенно по рабочим параметрам, большой вклад внесли советские ученые В. Н. Листов, А. Ф. Белецкий, С. С. Коган, Э. В. Зелях и др.

Ранее других были разработаны теория и методы расчета электрических фильтров по характеристическим параметрам, которые находят применение и в настоящее время. Электрические фильтры,

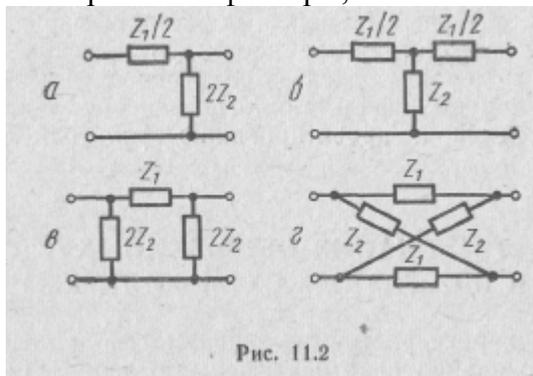


Рис. 11.2

спроектированные по этому методу, представляют собой каскадное согласованное включение реактивных Г-, Т- и П-образных или мостовых четырехполюсников (рис. 11.2). Фильтры, состоящие из Г-, Т- и П-образных звеньев, называют лестничными или цепочечными, а фильтры, состоящие из мостовых четырехполюсников, называют мостовыми. Так как при каскадном согласованном включении четырехполюсников их характеристические затухания и фазы складываются, то оказывается достаточным более подробно рассмотреть только отдельные типовые звенья фильтров. В дальнейшем ограничимся рассмотрением характеристических параметров Г-, П-образных и мостовых звеньев. Более детальное рассмотрение методик проектирования электрических фильтров как по характеристическим, так и по рабочим параметрам изложено, например, в [9, 11].

Необходимость разработки методик расчета фильтров по рабочим параметрам обусловлена тем, что их нагрузкой, как правило, является заданное постоянное активное сопротивление, при котором практически невозможно обеспечить согласованный режим в заданных полосах пропускания. При этом расчет фильтров значительно усложняется.

В последние годы при проектировании электрических фильтров начали широко применять общую теорию синтеза электрических цепей. При этом используются как характеристические, так и рабочие параметры фильтров, хотя в этом и нет особой необходимости, так как можно осуществить синтез фильтра по его заданной амплитудно-частотной или фазо-частотной характеристике.

Наряду с традиционными пассивными фильтрами, состоящими

из индуктивных катушек и конденсаторов, находят применение электромеханические, магнитострикционные, пьезоэлектрические (кварцевые) фильтры и фильтры типа  $rC$ . В последнее время в связи с развитием микроэлектроники стали широко применяться активные  $rC$ -фильтры.

Теории и обоснованию методик расчета различных типов фильтров посвящено очень большое количество работ. Так, например, только в [13] имеется библиография более 2000 работ, посвященных синтезу активных  $rC$ -цепей. В настоящем разделе ограничимся кратким рассмотрением характеристических параметров Т-, П-образных и мостовых звеньев реактивных фильтров и общих сведений о кварцевых фильтрах. Применение теории синтеза электрических цепей к проектированию фильтров рассмотрено в разд. 20.

## 11.2. АНАЛИЗ ОБОБЩЕННЫХ Т- И П-ОБРАЗНЫХ СХЕМ ФИЛЬТРОВ

Рассмотрим характеристические параметры и условия пропускания и задерживания реактивных симметричных Т- и П-образных схем фильтров (рис. 11.2,б и в). Для удобства анализа сопротивления плеч принято обозначать для Т-образного звена

$\frac{1}{2}Z_1$  а для П-образного звена —  $Z_1$  и  $2Z_2$ .

### 11.2.1. Характеристическое сопротивление

Так как рассматриваемые схемы являются симметричными четырехполюсниками, то для определения их характеристических сопротивлений воспользуемся выражением (10.44):

$$Z_c = \sqrt{Z_x Z_k}$$

где  $Z_x$  и  $Z_k$  — сопротивления холостого хода и короткого замыкания.

Из схемы Г-образного звена (см. рис. 11.2,б) найдем:

$$Z_x = \frac{1}{2}Z_1 + Z_2; Z_k = Z_1 \left( \frac{1}{4}Z_1 + Z_2 \right) / \left( \frac{1}{2}Z_1 + Z_2 \right)$$

Подставив это в выражение для  $Z_c$ , получим

$$Z_{cT} = \sqrt{Z_1 Z_2} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{Z_1}{Z_2}}. \quad (11.1)$$

Для П-образной схемы (см. рис. 11.2,в):

$$Z_x = 2Z_2 (Z_1 + 2Z_2) / (Z_1 + 4Z_2); Z_k = 2Z_1 Z_2 / (Z_1 + 2Z_2) \text{ и}$$

$$Z_{cП} = \sqrt{Z_1 Z_2} / \sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{Z_1}{Z_2}}. \quad (11.2)$$

### 11.2.2. Характеристическая постоянная передачи

Для определения характеристической постоянной передачи  $\gamma_c = \alpha_c + j\beta_c$  рассматриваемых схем воспользуемся выражением (10.57) и зависимостями между параметрами четырехполюсника (табл. 10.1), из которых найдем

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \gamma_c &= A_{11} \quad \text{или} \quad \gamma_c = \operatorname{arch} A_{11}; \\ A_{11} &= \sqrt{Z_x / (Z_x - Z_k)}. \end{aligned}$$

Подставив в последнее выражение найденные выше сопротивления  $Z_x$  и  $Z_k$ , для обеих рассматриваемых схем получим одно и то же выражение  $A_{11} = 1 + Z_1 / 2Z_2$ . При этом будем иметь

$$\operatorname{ch} \gamma_c = 1 + Z_1 / 2Z_2 \quad \text{или} \quad \gamma_c = \operatorname{arch} (1 + Z_1 / 2Z_2). \quad (11.3)$$

При анализе фильтров вместо  $\operatorname{ch} \gamma_c$  иногда удобнее пользоваться  $\operatorname{sh} \frac{\gamma_c}{2}$ . Для этого воспользуемся известным из тригонометрии выражением

$$\operatorname{sh} \frac{\gamma_c}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \gamma_c - 1}{2}}$$

Учитывая (11.3), получим

$$\operatorname{sh} \frac{\gamma_c}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} \quad \text{или} \quad \gamma_c = 2 \operatorname{arsh} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}. \quad (11.4)$$

### 11.2.3. Полосы пропускания и задерживания

Полосой пропускания чисто реактивного фильтра называют интервал частот, в пределах которого характеристическое затухание  $\alpha_c$  равно нулю, а полосой задерживания — интервал частот, где это затухание отлично от нуля. Иногда эти полосы называют характеристическими, чтобы отличить их от соответствующих полос, определение которых дано в начале раздела.

Учитывая, что  $\operatorname{ch} jx = \cos x$ , для полосы пропускания, в пределах которой  $\alpha_c = 0$ , будем иметь  $\operatorname{ch} \gamma_c = \operatorname{ch} j\beta_c = \cos \beta_c = 1 + Z_1 / 2Z_2$

Имея в виду, что  $\cos x$  может изменяться в пределах  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , получим

$$-1 \leq 1 + Z_1 / 2Z_2 \leq 1 \quad \text{или} \quad -1 \leq Z_1 / 4Z_2 \leq 1. \quad (11.5)$$

Это неравенство определяет условия полосы пропускания. Его иногда называют условием «прозрачности». Из этого неравенства следует, что в полосе пропускания сопротивления  $Z_1$  и  $Z_2$  должны

быть чисто реактивными и противоположными по знаку ( $x_c$  или  $x_L$ ), причем  $Z_1 \leq 4Z_2$ .  
Условиями полосы задерживания являются:

$$Z_1/4Z_2 \leq -1 \text{ и } Z_1/4Z_2 \geq 0, \quad (11.6)$$

т. е. полоса задерживания будет в случае, если сопротивления плеч  $Z_1$  и  $Z_2$  имеют одинаковые знаки, или в случае если эти сопротивления имеют разные знаки, но  $Z_1 > 4Z_2$ .

Полученные неравенства (11.5) и (11.6) можно использовать для нахождения полос пропускания и задерживания графическим методом. Для этого необходимо построить на одном графике частотные зависимости сопротивлений  $Z_1$  и  $4Z_2$ .

Найдем выражения для расчета характеристических коэффициентов затухания и фазы в полосах пропускания и задерживания.

В полосе пропускания  $\alpha_c = 0$  и  $\beta_c = 0$ .

Подставив это значение  $\gamma_c$  в выражение (11.4), получим

$$\operatorname{sh} j \frac{\beta_c}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} = j \sin \frac{\beta_c}{2},$$

откуда

$$\sin \frac{\beta_c}{2} = \pm \frac{1}{2j} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}$$

или

$$\beta_c = \pm 2 \arcsin \frac{1}{2j} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}. \quad (11.7)$$

В полосе задерживания  $\gamma_c = \alpha_c + j\beta_c$ .

Подставив это выражение в формулу (11.4), получим

$$\operatorname{sh} \frac{\gamma_c}{2} = \operatorname{sh} \left( \frac{\alpha_c}{2} + j \frac{\beta_c}{2} \right) = \operatorname{sh} \frac{\alpha_c}{2} \operatorname{ch} j \frac{\beta_c}{2} + \operatorname{ch} \frac{\alpha_c}{2} \operatorname{sh} j \frac{\beta_c}{2} =$$

$$= \operatorname{sh} \frac{\alpha_c}{2} \cos \frac{\beta_c}{2} + j \operatorname{ch} \frac{\alpha_c}{2} \sin \frac{\beta_c}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}. \quad (11.8)$$

В большинстве случаев сопротивления  $Z_1$  и  $Z_2$  являются реактивными сопротивлениями противоположного знака. При этом

$$\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} = \sqrt{-\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right|} = j \sqrt{\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right|},$$

следовательно,

$$\operatorname{sh} \frac{\alpha_c}{2} \cos \frac{\beta_c}{2} + j \operatorname{ch} \frac{\alpha_c}{2} \sin \frac{\beta_c}{2} = j \frac{1}{2} \sqrt{\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right|}. \quad (11.9)$$

Отсюда видно, что в полосе задерживания должно выполняться равенство

$$\operatorname{sh} \frac{\alpha_c}{2} \cos \frac{\beta_c}{2} = 0,$$

Так как в рассматриваемой полосе  $\alpha_c \neq 0$ , то из последнего равенства следует, что

$$\cos \frac{\beta_c}{2} = 0 \text{ или } \frac{\beta_c}{2} = \pm \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$\beta_c = \pm \pi. \quad (11.10)$$

Подставив это значение  $\beta_c$  в выражение (11.9), получим

$$\operatorname{ch} \frac{\alpha_c}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right|} \text{ или } \alpha_c = 2 \operatorname{arch} \frac{1}{2} \sqrt{\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right|}. \quad (11.11)$$

Таким образом, в полосе задерживания  $\beta_c$  является постоянной величиной, равной  $\pm \pi$ , а  $\alpha_c$  определяется выражением (11.11).

### 11.3. ФИЛЬТРЫ НИЖНИХ ЧАСТОТ

Рассмотрим Т- и П-образные схемы (рис. 11.3), являющиеся наиболее простыми фильтрами нижних частот. Сопротивления продольных и поперечных плеч в обеих схемах равны:

$$Z_1 = j\omega L \text{ и } Z_2 = 1/j\omega L.$$

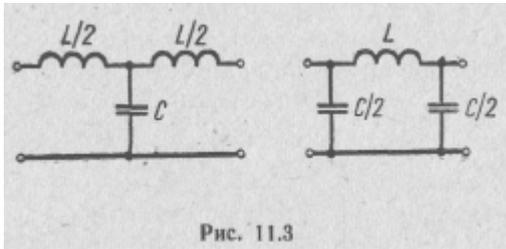


Рис. 11.3

Работу рассматриваемых фильтров исходя из физических соображений можно пояснить следующим образом. Сопротивление продольных плеч, состоящих из индуктивностей, на низких частотах мало, а на высоких — велико, а сопротивление поперечных плеч, состоящих из емкостей, наоборот, на низких частотах велико, а на высоких — мало. Поэтому колебания низких частот сравнительно свободно проходят на выход фильтров через продольные индуктивные плечи, имеющие малое сопротивление, и почти не шунтируются поперечными емкостными плечами, имеющими большое сопротивление. Колебания высоких частот плохо проходят через продольные индуктивные плечи, имеющие здесь большое сопротивление. Кроме того, на этих частотах они сильно шунтируются поперечными емкостными плечами, имеющими здесь малое сопротивление.

Рассмотрим характеристические параметры фильтров нижних частот. При этом будем считать, что звенья фильтров нагружены на характеристическое сопротивление  $Z_c$ , т. е. работают в согласованном режиме.

Полосы пропускания и задерживания и частоту, лежащую на границе этих полос и называемую частотой, среза  $\omega_c$ , найдем из условия пропускания фильтра (11.5). Подставив в выражение (11.5) значения сопротивлений  $Z_1$  и  $Z_2$ , получим

$$-1 \leq \frac{j\omega L}{4/j\omega C} \leq 0 \text{ или } -4 \leq -\omega^2 LC \leq 0.$$

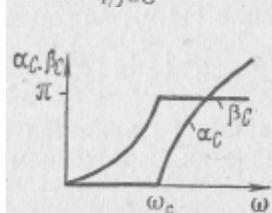


Рис. 11.4

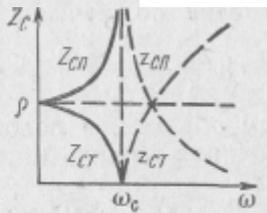


Рис. 11.5

Разделив последнее неравенство на  $-\omega L$ , получим

$$\frac{4}{LC} \geq \omega^2 \geq 0 \text{ или } 0 \leq \omega \leq \frac{2}{\sqrt{LC}}.$$

Из последнего неравенства видно, что частота среза фильтра нижних частот

$$\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}} \quad (11.12)$$

а полоса пропускания лежит в пределах  $0 \leq \omega \leq \omega_c$ , т. е. ограничена частотами 0 и  $\omega_c$

Характеристическое затухание и фаза в полосе пропускания рассматриваемых фильтров будут равны:

$$\alpha_c = 0; \quad (11.13)$$

$$\beta_c = 2 \arcsin \frac{\omega}{\omega_c}. \quad (11.14)$$

В справедливости последнего выражения можно убедиться, подставив значения  $Z_1$  и  $Z_2$  в формулу (11.7).

Учитывая выражения (11.10) и (11.11), в полосе задерживания получим:

$$\alpha_c = 2 \operatorname{arch} \frac{\omega}{\omega_c}. \quad (11.15)$$

$$\beta_c = +\pi. \quad (11.16)$$

Графики характеристических затухания и фазы для рассматриваемых фильтров приведены на рис. 11.4.

Для определения характеристических сопротивлений Т- и П-об-

разных схем рассматриваемых фильтров подставим  $Z_1$  и  $Z_2$  в формулы (11.1) и (П.2). При этом получим:

$$Z_{CT} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \quad \text{и} \quad Z_{СП} = \sqrt{\frac{L}{C}} / \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \quad (11.17)$$

Обозначив  $\rho = \sqrt{L/C}$ , которое называют номинальным характеристическим сопротивлением, будем иметь:

$$Z_{CT} = \rho \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \quad \text{и} \quad Z_{СП} = \rho / \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \quad (11.18)$$

Графики  $Z_{CT}$  и  $Z_{СП}$  приведены на рис. 11.5.

В полосе пропускания эти сопротивления вещественны и положительны. В полосе задерживания они мнимые, т. е. чисто реактивные, причем  $Z_{CT}$ —индуктивное, а  $Z_{СП}$ —емкостное.

Из приведенных зависимостей видно, что обеспечить согласованный режим, при котором фильтр должен быть нагружен на сопротивление, равное характеристическому, для всех частот не представляется возможным. В этом и заключается ограниченность методов расчета фильтров по характеристическим параметрам.

При ориентировочных расчетах фильтров нижних частот по характеристическим параметрам задают активное сопротивление нагрузки  $r_H$  и полосу пропускания фильтра.

Характеристическое сопротивление фильтра  $\rho$  выбирают равным активному сопротивлению нагрузки  $r_H$ , а полосу пропускания —равной частоте среза фильтра  $\omega_c$ , т. е. принимают

$$\rho = r_H = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{и} \quad \omega_c = 2 / \sqrt{LC}.$$

Из этих соотношений находят величины  $L$  и  $C$ :

$L = 2r_H / \omega_c$  и  $C = 2 / 2r_H$ . При этом фильтр будет согласован только на частоте  $\omega = 0$ .

#### **11.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧАСТОТЫ. ФИЛЬТРЫ ВЕРХНИХ ЧАСТОТ. ПОЛОСОВЫЕ И ЗАГРАЖДАЮЩИЕ ФИЛЬТРЫ**

Характеристические параметры фильтров верхних частот, полосовых и заграждающих фильтров можно найти таким же образом, как это было сделано для фильтров нижних частот. Однако, воспользовавшись так называемым методом преобразования частоты, можно получить эти параметры по известным параметрам фильтров нижних частот, а расчет этих фильтров свести к расчету фильтра нижних частот, который в этом случае называют низкочастотным аналогом или прототипом.

В самом общем виде сущность метода преобразования частоты сводится к замене частоты  $\omega$  некоторой функцией этой частоты

$F(\omega)$ , которая выбирается таким образом, чтобы было возможно по известным характеристикам фильтров нижних частот получить характеристики фильтров других типов. Рассмотрим это более конкретно.

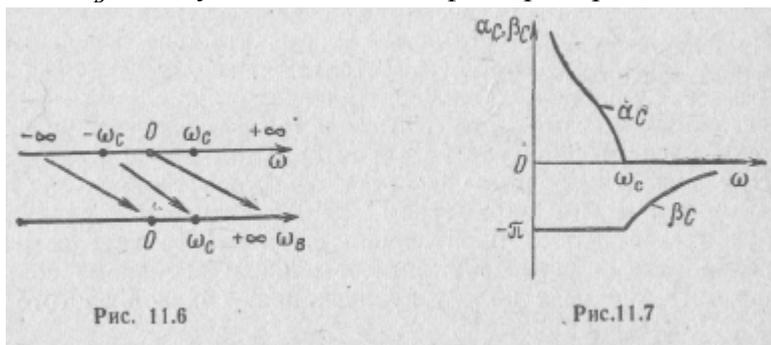
#### 11.4.1. Преобразование фильтра нижних частот в фильтр верхних частот

Для преобразования фильтра нижних частот в фильтр верхних частот производят замену:

$$\omega = \omega_c^2 / \omega_B, \quad (11.19)$$

где  $\omega_c$  — частота среза;

$\omega_B$  — текущая частота для фильтра верхних частот.



При этом отрицательная полуось частоты  $\omega$  (рис. 11.6) переходит в положительную полуось  $\omega_B$ , причем  $\omega_B = \infty$  соответствует точка  $\omega_B = 0$ , точке  $\omega = -\omega_c$  — точка  $\omega_B = \omega_c$ , точке  $\omega = 0$   $\omega_B = \infty$ , а полоса пропускания у фильтра верхних частот будет находиться в пределах  $\omega_c \leq \omega_B \leq \infty$ .

Для получения характеристических параметров фильтра верхних частот необходимо в расчетных формулах для фильтра нижних частот (11.13) — (11.18) произвести замену (11.19).

При этом характеристическое затухание и фаза фильтра верхних частот в полосе пропускания будут равны:

$$\alpha_c = 2 \operatorname{arch} \frac{\omega_c}{\omega_B}; \beta_c = -\pi$$

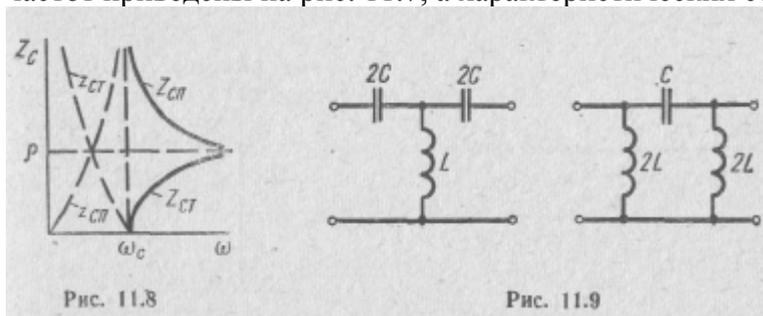
а в полосе задерживания:

$$\alpha_c = 2 \operatorname{arch} \frac{\omega_c}{\omega_B}; \beta_c = -\pi$$

Для характеристических сопротивлений фильтра верхних частот получим:

$$Z_{CT} = \rho \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega_B^2}} \quad \text{и} \quad Z_{CП} = \rho / \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega_B^2}}.$$

Графики частотных зависимостей характеристического затухания и фазы фильтра верхних частот приведены на рис. 11.7, а характеристических сопротивлений — на рис. 11.8.



Произведя замену (11.19) в выражениях для сопротивлений плеч фильтра нижних частот, получим:

$$Z_1 = j\omega L = -j \frac{\omega_c^2}{\omega_b} L = \frac{1}{j\omega_b C_b};$$

$$Z_2 = \frac{1}{j\omega C} = j \frac{\omega_b}{\omega_c^2 C} = j\omega_b L_b,$$

где  $C_b = 1/\omega_c^2 L$  и  $L_b = 1/\omega_c^2 C$ .

Таким образом, при преобразовании фильтра нижних частот в фильтр верхних частот необходимо каждую индуктивность ФНЧ  $L$  заменить емкостью  $C_b$ , а каждую емкость ФНЧ  $C$  — индуктивностью  $L_b$ . При этом частоты среза  $\omega_c$  ФПЧ и ФВЧ будут одинаковыми. Т- и П-образные схемы фильтров верхних частот приведены на рис. 11.9.

#### 11.4.2. Преобразование фильтра нижних частот в полосовой фильтр

При преобразовании фильтра нижних частот в полосовой фильтр производят замену

$$\omega = \frac{\omega_{\Pi}^2 - \omega_0^2}{\omega_{\Pi}} \quad (11.20)$$

где

$\omega_{\Pi}$  — текущая частота для полосового фильтра;

$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$  — центральная частота полосового фильтра;

$\omega_1$  и  $\omega_2$  — частоты среза полосового фильтра.

При этом вся ось частоты  $\omega$  переходит в положительную полуось  $\omega_{\Pi}$  (рис. 11.10).

Аналогично предыдущему можно найти характеристические параметры полосового фильтра и его схему. Графики частотных зависимостей характеристического затухания и фазы полосового

фильтра приведены на рис. 11.11, характеристического сопротивления— на рис. 11.12, а Т- и П-образные схемы фильтра — на рис. 11.13. Из последнего рисунка видно, что при переходе от

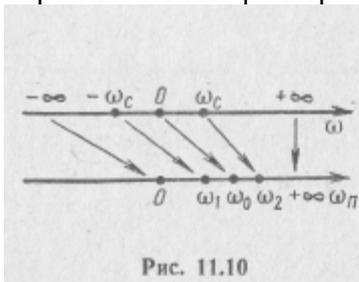


Рис. 11.10

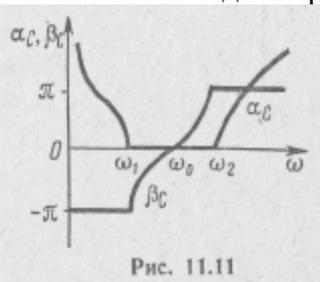


Рис. 11.11

фильтра нижних частот к полосовому фильтру последовательно с каждой индуктивностью ФНЧ  $L_1$  включается емкость  $C_1$ , а па-

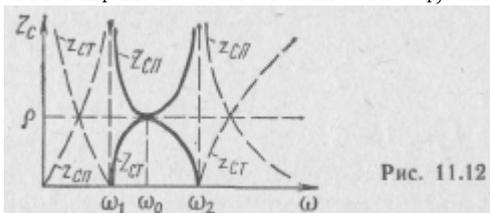


Рис. 11.12

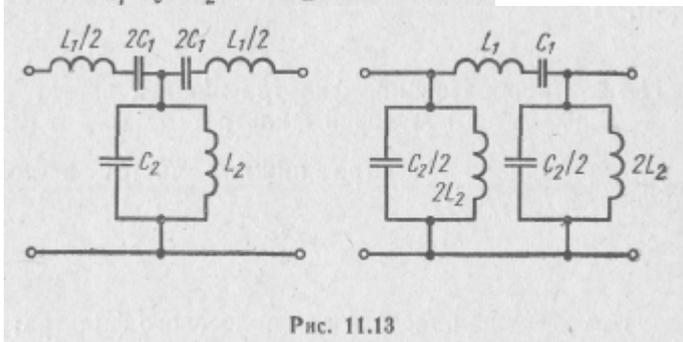


Рис. 11.13

раллельно с каждой емкостью ФНЧ  $C_2$  — индуктивность  $L_2$ . Можно показать, что

$$C_1 = 1/\omega_0^2 L_1, \text{ а } L_2 = 1/\omega_0^2 C_2,$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = 1/\sqrt{L_1 C_1} = 1/\sqrt{L_2 C_2}$ .

### 11.4.3. Преобразование фильтра нижних частот в заграждающий фильтр

При преобразовании фильтра нижних частот в заграждающий фильтр производят замену:

$$\omega = \frac{\omega_3 \omega_c^2}{\omega_0^2 - \omega_3^2}, \quad (11.21)$$

где  $\omega_3$  — текущая частота заграждающего фильтра;  
 $\omega_c$  — частота среза фильтра нижних частот;  
 $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$  — центральная частота заграждающего фильтра;  
 $\omega_1$  и  $\omega_2$  — частоты среза заграждающего фильтра,

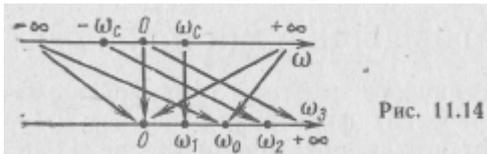


Рис. 11.14

Преобразование частот  $\omega$  в частоты  $\omega_3$  показано на рис. 11.14.

Аналогично предыдущему можно показать, что при переходе от фильтра нижних частот к заграждающему фильтру необходимо

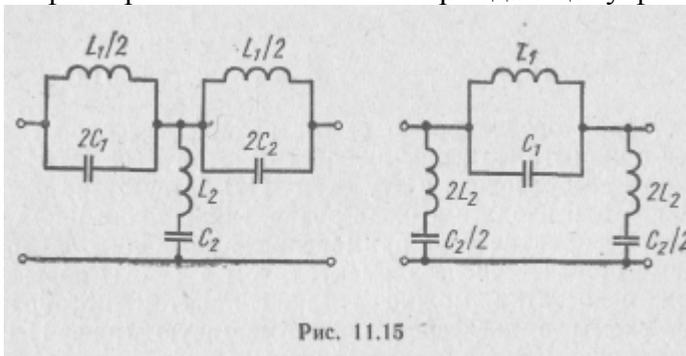


Рис. 11.15

вместо каждой индуктивности ФНЧ  $L$  включить параллельный колебательный контур с индуктивностью  $L_1 = \omega_c^2 L / \omega_0^2$  и емкостью  $C_1 = 1 / L \omega_c^2$ , а вместо каждой емкости ФНЧ  $C$  — последовательный колебательный контур с индуктивностью  $L_2 = 1 / C \omega_c^2$  и емкостью  $C_2 = C \omega_c^2 / \omega_0^2$ , где  $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = 1 / \sqrt{L_1 C_1} = 1 / \sqrt{L_2 C_2}$  (рис. 11.15).

Графики частотных зависимостей характеристического затухания и фазы заграждающего фильтра приведены на рис. 11.16, а характеристического сопротивления — на рис. 11.17.

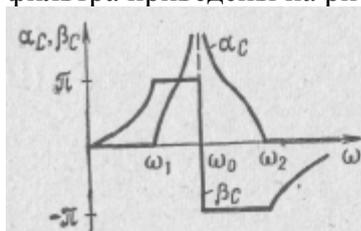


Рис. 11.16

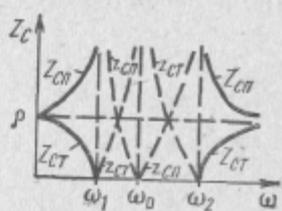


Рис. 11.17

## 11.5. АНАЛИЗ ОБОБЩЕННОЙ МОСТОВОЙ СХЕМЫ ФИЛЬТРА

Схема симметричного мостового четырехполюсника, используемого в электрических фильтрах, приведена на рис. 11.2, з. Ее часто изображают в виде, показанном на рис. 11.18, где для упрощения рисунка два плеча заменены пунктирными линиями.

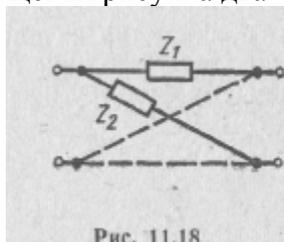


Рис. 11.18

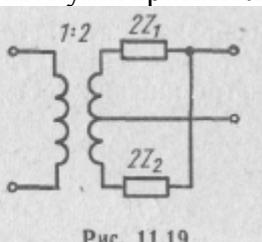


Рис. 11.19

Характерной особенностью симметричной мостовой схемы является ее общность, так как любой симметричный четырехполюсник можно преобразовать в эту схему [47]. Отсутствие в мостовой схеме общей для входа и выхода заземленной точки иногда может затруднить ее практическое применение. Кроме того, в этой схеме необходимо большее число элементов, чем в Т- и П-образных схемах. Эти недостатки можно устранить путем преобразования мостовой схемы в дифференциально-мостовую (рис. 11.19) [47], что иногда оказывается целесообразным в кварцевых фильтрах из-за относительно высокой стоимости кварцевых резонаторов.

Ограничимся рассмотрением характеристических параметров симметричной мостовой схемы, приведенной на рис. 11.18.

Для определения характеристической постоянной передачи удобно воспользоваться формулой гиперболического тангенса по «ловинного аргумента

$$\operatorname{th} \frac{\gamma_c}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \gamma_c - 1}{\operatorname{ch} \gamma_c + 1}}$$

Учитывая, что для симметричного четырехполюсника справедливы соотношения  $\operatorname{ch} \gamma_C = A_{11}$  и

$$A_{11} = \sqrt{Z_x / (Z_x - Z_k)} \quad (\text{разд. 11.2})$$

и что сопротивления холостого хода и короткого замыкания для рассматриваемой схемы равны:

$$Z_x = (Z_1 + Z_2)/2 \quad \text{и} \quad Z_k = 2Z_1Z_2 / (Z_1 + Z_2),$$

получим

$$\operatorname{th} \frac{\gamma_C}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}$$

или

$$\gamma_C = \alpha_C + j\beta_C = 2 \operatorname{arth} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}. \quad (11.22)$$

Учитывая, что гиперболический тангенс чисто мнимой величины является мнимой величиной, из полученного выражения можно сделать вывод, что условием полосы пропускания является неравенство

$$Z_1 / Z_2 \leq 0. \quad (11.23)$$

Из этого неравенства следует, что полоса пропускания рассматриваемого фильтра будет на частотах, где сопротивления  $Z_1$  и  $Z_2$  будут чисто реактивными и противоположными по знаку, а полоса задерживания — на частотах, где эти сопротивления имеют одинаковые знаки.

Для определения характеристического сопротивления воспользуемся соотношением  $Z_C = \sqrt{Z_x Z_k}$  (10.44), справедливым для любого симметричного четырехполюсника, и найденными выше  $Z_x$  и  $Z_k$ . При этом получим

$$Z_C = \sqrt{Z_1 Z_2}. \quad (11.24)$$

Из этого выражения видно, что в полосе пропускания рассматриваемого фильтра, где  $Z_1$  и  $Z_2$  чисто реактивны и противоположны по знаку,  $Z_C$  чисто активно, а в полосе задерживания — реактивно.

## 11.6. ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

Пьезоэлектрическими или кварцевыми фильтрами называют фильтры, в состав которых входят пьезоэлектрические резонаторы. Обладая высокой селективностью и стабильностью, эти фильтры находят широкое применение в качестве узкополосных фильтров. Ограничимся рассмотрением схемы замещения и частотных характеристик пьезоэлектрического резонатора и анализом мостовой схемы полосового пьезоэлектрического фильтра. Более детально как эти, так и другие вопросы, относящиеся к пьезоэлектрическим фильтрам, изложены, например, в [12].

### 11.6.1. Схема замещения и частотные характеристики пьезоэлектрического резонатора

Пьезоэлектрический резонатор состоит из пьезоэлектрической пластины с электродами и держателя. В качестве пьезоэлектрических пластин используются главным образом пластины, вырезанные из природных кристаллов кварца или синтетических пьезоэлектрических кристаллов.

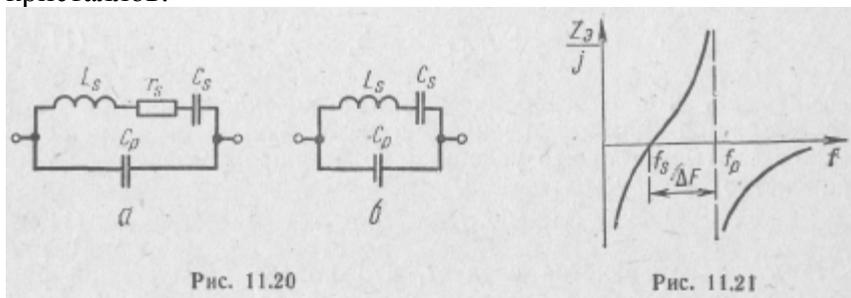


Рис. 11.20

Рис. 11.21

При подключении к электродам пьезоэлектрического резонатора электрического напряжения его пластина сжимается или растягивается, т. е. в ней возникают механические колебания (обратный пьезоэлектрический эффект). Эти колебания создают на поверхностях пластины электрические заряды (прямой пьезоэлектрический эффект), которые уравнивают приложенное к резонатору напряжение. При этом пьезоэлектрический резонатор можно представить схемой замещения, показанной на рис. 11.20, а. Емкость  $C_s$  этой схемы называют динамической емкостью, а емкость  $C_p$  — статической. Последняя представляет собой емкость конденсатора, образованного электродами и пьезоэлектрической пластиной в качестве диэлектрика. Активное сопротивление  $r_s$  характеризует необратимые потери энергии в резонаторе. Эти потери оцениваются величиной добротности резонатора  $Q = \sqrt{\frac{L_s}{C_s}} / r_s$ .

В применяемых на практике пьезоэлектрических резонаторах индуктивность  $L_s$  имеет большую величину (от единиц до нескольких сотен генри), а величины емкостей  $C_s$  и  $C_p$  обычно малы ( $C_s$  — доли или единицы пикофард, а  $C_p$  — единицы или десятки пикофард). При этом добротность  $Q$  оказывается очень высокой ( $10^4$ — $10^6$ ), а величина  $r_s$  находится в пределах от нескольких десятков или сотен до нескольких тысяч ом.

Учитывая высокую добротность пьезоэлектрического резонатора, в его схеме замещения в первом приближении можно пренебречь сопротивлением  $r_s$  (рис. 11.20, б). При этом экви-

валентное сопротивление резонатора будет чисто реактивным:

$$Z_s = \frac{\left(j\omega L_s + \frac{1}{j\omega C_s}\right) \frac{1}{j\omega C_p}}{j\omega L_s + \frac{1}{j\omega C_s} + \frac{1}{j\omega C_p}} = \frac{1}{j2\pi f C_p} \cdot \frac{f^2 - f_s^2}{f^2 - f_p^2}, \quad (11.25)$$

где  $f_s = 1/2\pi\sqrt{L_s C_s}$  — частота последовательного (основного) резонанса;

$f_p = 1/2\pi\sqrt{L_s C_p}$  — частота параллельного резонанса;

$C_s = C_s C_p / (C_s + C_p)$  — эквивалентная емкость.

График зависимости  $Z_s/j$  показан на рис. 11.21.

Полосу частот  $\Delta F = f_p - f_s$  называют резонансным промежутком пьезоэлектрического резонатора. Величину этого промежутка можно регулировать путем подключения параллельно резонатору дополнительной емкости  $C_n$ . При этом  $C_s$  будет увеличиваться, а частота  $f_p$  и резонансный промежуток будут уменьшаться.

### 11.6.2. Анализ мостовой схемы полосового пьезоэлектрического фильтра

Простейшая мостовая схема пьезоэлектрического фильтра содержит в одной паре плеч пьезоэлектрические резонаторы, а в другой — конденсаторы (рис. 11.22, а). На рис. 11.22, б показана схема замещения при  $r=0$ . Для этой схемы

$$Z_1 = \frac{1}{j2\pi f C_1} \frac{f^2 - f_s^2}{f^2 - f_p^2} \text{ и } Z_2 = \frac{1}{j\omega C_2} = \frac{1}{j2\pi C_2} \frac{1}{f},$$

где  $f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_s C_s}}$ ;  $f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_s C_p}}$ ;  $C_s = \frac{C_1 C_s}{C_1 + C_s}$  и  $C_1 = C_p + C_n$ .

После подстановки  $Z_1$  и  $Z_2$  в формулу (11.22) получим выражение для характеристической постоянной передачи рассматриваемого фильтра

$$\gamma_c = 2 \operatorname{arth} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \sqrt{\frac{f^2 - f_s^2}{f^2 - f_p^2}}. \quad (11.26)$$

Графики зависимостей  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $\alpha_c$  для трех значений  $m = \sqrt{C_2/C_1}$  показаны на рис. 11.23. Из этого рисунка видно, что при  $m \neq 1$  на некоторых частотах, обозначенных  $f_\infty$ , будут иметь место полюсы затухания, где затухание будет бесконечно большим. Ширина характеристической полосы пропускания  $\Delta F = f_p - f_s$ .

Учитывая выражение (11.24), для характеристического сопротивления рассматриваемого фильтра получим

$$Z_c = \frac{1}{j2\pi f \sqrt{C_1 C_2}} \sqrt{\frac{f^2 - f_s^2}{f^2 - f_p^2}}. \quad (11.27)$$

График зависимости  $Z_c$  от частоты показан на рис. 11.24. Из этого рисунка видно, что характеристическое сопротивление рассматриваемого фильтра в полосе пропускания чисто активно,

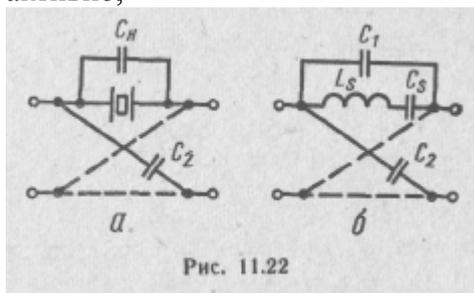


Рис. 11.22

а в полосе задерживания — чисто реактивно. На частоте  $f_0 = \sqrt{f_s f_p}$  график  $Z_c$  имеет перегиб. Характеристическое сопротивление на этой частоте называют номинальным. Для определе-

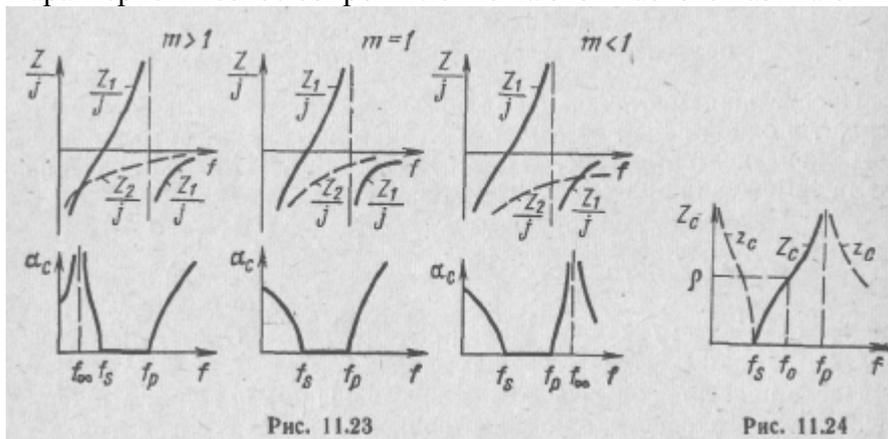


Рис. 11.23

Рис. 11.24

ния величины этого сопротивления подставим в формулу (11.27)  $f = f_0 = \sqrt{f_s f_p}$ . При этом получим

$$\rho = 1/2\pi f_p \sqrt{C_2 C_1}.$$

При ориентировочном расчете полосового пьезоэлектрического фильтра по характеристическим параметрам обычно задаются величинами  $f_s$ ,  $\Delta F$ ,  $r_H$  и  $f_\infty$ .

Вначале рассчитывают параметр  $m$ , который определяет положение полюса затухания, находящегося при  $z_1 = z_2$ . Подставив  $f = f_\infty$  в  $z_1$  и  $z_2$  получим

$$\frac{z_1(f_\infty)}{z_2(f_\infty)} = \frac{(f_\infty^2 - f_s^2) C_2}{(f_\infty^2 - f_p^2) C_1} = 1,$$

откуда

$$\frac{C_2}{C_1} = m^2 = \frac{f_\infty^2 - f_p^2}{f_\infty^2 - f_s^2} \text{ или } m = \sqrt{\frac{f_\infty^2 - f_p^2}{f_\infty^2 - f_s^2}}.$$

После этого составляют систему уравнений;

$$\left. \begin{aligned} f_s &= \frac{1}{2\pi \sqrt{L_s C_s}}; f_p = f_s + \Delta F = 1/2\pi \sqrt{L_s \frac{C_s C_1}{C_s + C_1}}; \\ r_H = \rho &= 1/2\pi f_p \sqrt{C_1 C_2}; m^2 = C_2/C_1, \end{aligned} \right\}$$

решив которую, находят:

$$\begin{aligned} L_s &= m f_p r_H / 2\pi (f_p^2 - f_s^2); C_1 = 1/2\pi f_p m r_H; \\ C_s &= (f_p^2 - f_s^2) / 2\pi m f_s^2 f_p r_H; C_2 = m^2 C_1. \end{aligned}$$

По найденным значениям  $L_s$  и  $C_s$  определяют геометрические размеры пьезоэлектрической пластины [12].

## 12. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ АКТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

### 12.1. ПОНЯТИЕ О ЛИНЕЙНЫХ АКТИВНЫХ ЦЕПЯХ

Цепи с электронными приборами (электронными лампами, транзисторами и т. п.) характеризуются важным свойством усиливать мощность сигнала, что невозможно осуществить в цепях, содержащих лишь пассивные элементы и источники энергии. На этом свойстве и основана работа самых разнообразных электронных схем. В состав таких схем входят автономные источники энергии (источники питания). Они служат для создания рабочих режимов электронных приборов и являются источниками дополнительной мощности, необходимой для формирования выходного сигнала. Рассматривая усилительные свойства электронных схем, не учитывают энергию, затрачиваемую этими источниками, так как основной интерес представляют напряжения и токи на частоте сигнала и их соотношения.

Процесс усиления состоит в том, что элемент, обладающий усилительными свойствами, преобразует энергию источника питания в энергию сигнала. Входной сигнал лишь управляет этим преобразованием.

Электронные приборы сами по себе не содержат источников энергии, но в рабочем режиме могут быть представлены эквивалентной схемой, содержащей управляемые источники энергии. Такое представление является удобной моделью и дает основания отнести цепи с электронными приборами к числу активных. Так как при анализе электронных схем в режиме усиления источники питания не учитываются, то под активными цепями в теории электронных схем часто подразумевают цепи, содержащие лишь управляемые источники энергии, т. е. цепи, характеризующиеся свойством усиления сигналов.

Электронные приборы являются нелинейными элементами. Но при малых сигналах их характеристики в районе рабочей точки могут быть линеаризованы, т. е. заменены отрезками прямых. Это позволяет распространить на расчет таких схем хорошо разработанные методы анализа линейных цепей.

Линейными активными цепями обычно называют электронные

схемы в режиме малых сигналов, когда характеристики электронных приборов считают линейными. Теория таких схем имеет большое значение в радиоэлектронике.

## 12.2. АНАЛИЗ С ПОМОЩЬЮ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ СХЕМ

Один из распространенных методов анализа линейных активных цепей основан на использовании эквивалентных схем электронных приборов. При их построении используют два подхода.

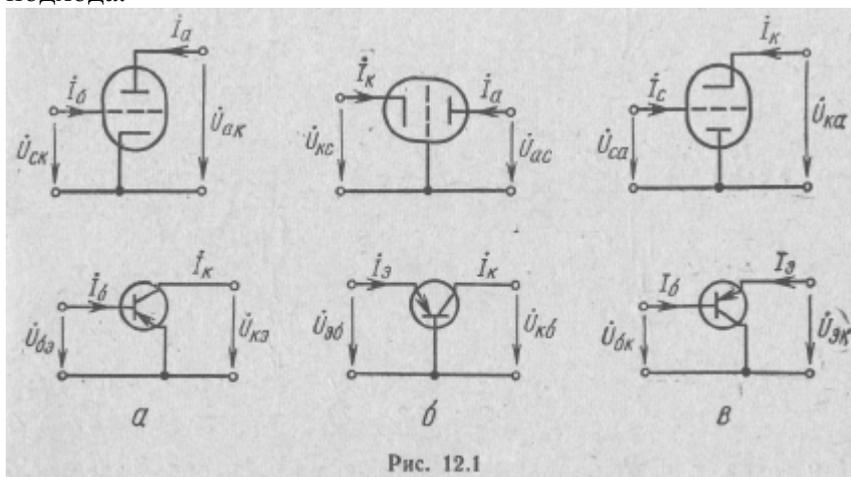


Рис. 12.1

Один из них основан на представлении электронного прибора в виде четырехполюсника. Рассматривая, например, электронную лампу или транзистор как четырехполюсник (рис. 12.1), определяют его параметры в той или иной системе, а затем используют удобную схему замещения четырехполюсника (рис. 10.6—10.10). Такой подход не требует рассмотрения внутренних физических процессов прибора. Другой подход основан на учете процессов, протекающих внутри электронного прибора. Это позволяет более полно учесть особенности структуры, свойств и технологии прибора, их влияние на внешние характеристики и возможности применения. На рис. 12.2 показаны наиболее распространенные низкочастотные эквивалентные схемы электронной лампы и транзистора, содержащие зависимый источник э. д. с. или зависимый источник тока. Они построены на основе физических параметров:

$S$ ,  $R_i$  и  $\mu=R_iS$  (крутизна, внутреннее сопротивление и коэффициент усиления электронной лампы);

$r_э$ ,  $r_б$ ,  $r_к$  (активные сопротивления эмиттера, базы и коллектора транзистора соответственно);

$\alpha$  (коэффициент усиления транзистора по току в схеме с общей базой — рис. 12.1,6). На высоких частотах такие схемы усложняются.

Эквивалентные схемы электронных приборов не удовлетворяют принципу взаимности. Для них характерно наличие формально введенных зависимых источников энергии. Это является удобным способом представления невзаимных свойств прибора. Значения э. д. с. и тока этих источников зависят от управляющих напряже-

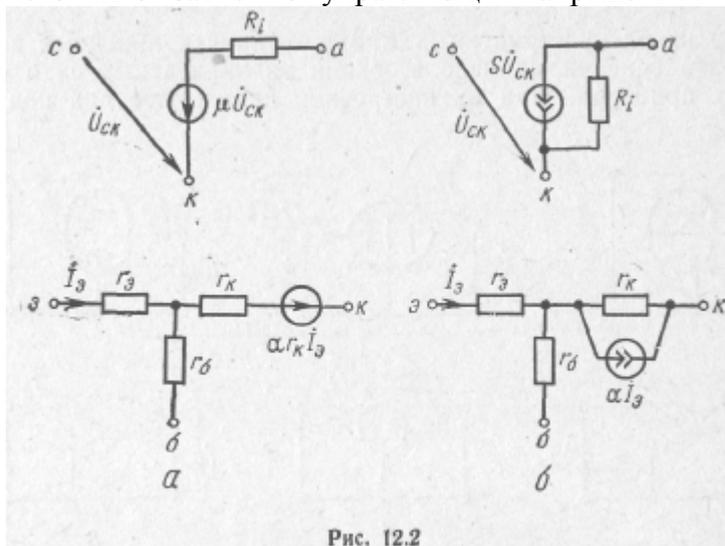


Рис. 12.2

ний и токов, т. е. от напряжений и токов на электродах электронного прибора. Э.д. с. и токи зависимых источников выражаются произведением управляющего напряжения (тока) и управляющего параметра. Например, в схеме рис. 12.2,а э.д.с. зависимого источника  $\dot{E} = \alpha r_K \dot{I}_3$  равна произведению управляющего тока  $\dot{I}_3$  и управляющего параметра  $\alpha r_K$ . В схеме рис. 12.2,б ток зависимого источника  $\dot{I} = S \dot{U}_{CK}$  представляет собой произведение управляющего напряжения  $\dot{U}_{CK}$  и управляющего параметра  $S$ .

Нужно заметить, что эквивалентные схемы электронного прибора, как и любого невзаимного четырехполюсника, можно построить и без использования зависимых источников энергии. Для учета его невзаимных свойств при этом используется пассивный элемент — гиратор (см. рис. 10.12). Такие эквивалентные схемы не содержат источников энергии. Тем не менее их относят к числу активных цепей, так как они характеризуются свойством усиливать мощность сигнала на выходе.

При анализе активных цепей с помощью эквивалентных схем все электронные приборы замещаются эквивалентными им схемами. Анализ полученной в результате этого цепи ведется обычными методами. К числу его особенностей относится учет зависимых источников энергии. При записи уравнений цепи напряжения и токи, управляющие зависимыми источниками, выражаются че-

рез токи и напряжения, выбранные в качестве независимых переменных: контурные токи, узловые напряжения. Например, в эквивалентной схеме транзисторного усилителя (рис. 12.3,б) значение управляющего тока  $\dot{I}_3$  можно выразить через узловое напряжение

$$\dot{U}_3 : \dot{I}_3 = \frac{-\dot{U}_3}{r_3 + R_3}. \quad \text{Тогда ток зависимого источника}$$

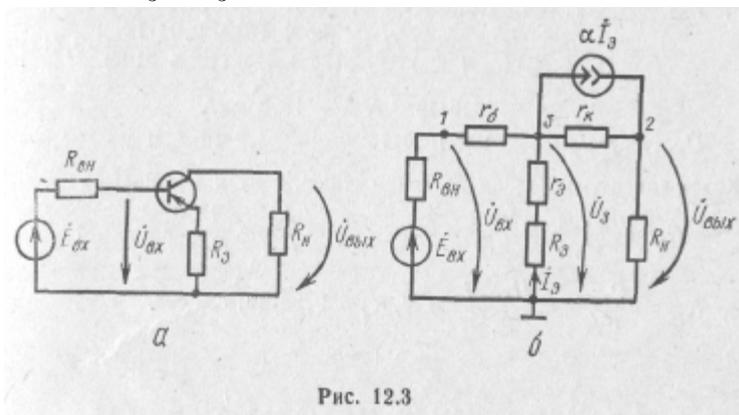


Рис. 12.3

$\dot{I} = \alpha \dot{I}_3 = \frac{-\alpha}{r_3 + R_3} \dot{U}_3$ , где  $(-\dot{U}_3)$  — управляющее узловое напряжение, а  $\frac{\alpha}{r_3 + R_3}$  управляющий параметр.

Пример 12.1.

Рассчитать транзисторный усилитель низкой частоты (рис. 12.3, а), если известны физические параметры транзистора  $r_3=25$  Ом;  $r_б=500$  Ом;  $r_к = 10^6$  Ом;  $\alpha=0,98$  и элементов схемы:  $R_{вн} = 1$  КОМ;  $\dot{E}_{вх}=10$  мВ;  $R_3=470$  Ом;  $R_н=5,1$  КОМ.

Решение.

1. Заменяв транзистор его эквивалентной схемой (см. рис. 12.2,б), получаем эквивалентную схему усилителя (см. рис. 12.3,б).

2. Выбрав в качестве определяющей величины узловое напряжение  $\dot{U}_3$ , составляем уравнение методом узловых напряжений

$$\left( \frac{1}{R_{вн} + r_б} + \frac{1}{r_3 + R_3} + \frac{1}{r_к + R_н} \right) \dot{U}_3 = \frac{\dot{E}_{вх}}{R_{вн} + r_б} - \frac{\alpha r_к \dot{I}_3}{r_к + R_н}.$$

3. Выразив управляющий ток  $\dot{I}_3$  через независимую переменную  $\dot{U}_3$

$$\dot{I}_3 = -\frac{\dot{U}_3}{r_3 + R_3}, \quad \text{получаем}$$

$$\left[ \frac{1}{R_{вн} + r_б} + \frac{1}{r_3 + R_3} + \frac{1}{r_к + R_н} - \frac{\alpha r_к}{(r_3 + R_3)(r_к + R_н)} \right] \dot{U}_3 = \frac{\dot{E}_{вх}}{R_{вн} + r_б}.$$

т. е.

$$\left[ \frac{1}{1000 + 500} + \frac{1}{25 + 470} + \frac{1}{10^6 + 5100} - \frac{0,98 \cdot 10^6}{(25 + 470)(10^6 + 5100)} \right] \dot{U}_3 =$$

$$= \frac{\dot{E}_{вх}}{1000 + 500}.$$

Отсюда

$$\dot{U}_3 = 0.941 \dot{E}_{BX} = 9,41 \text{ мВ.}$$

4. Рассчитываем токи и напряжения на входе и выходе усилителя:

$$i_{BX} = \frac{\dot{E}_{BX} - \dot{U}_3}{R_{BH} + r_6} = \frac{(10 - 9,41) \cdot 10^{-3}}{10^3 + 500} = 0,393 \cdot 10^{-6} \text{ А} = 0,393 \text{ мкА};$$

$$\dot{U}_{BX} = \dot{E}_{BX} - R_{BH} i_{BX} = 10 \cdot 10^{-3} - 10^3 \cdot 0,393 \cdot 10^{-6} = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ В} = 9,6 \text{ мВ};$$

$$i_H = \frac{r_3 + R_3 - \alpha r_k}{(r_3 + R_3)(r_k + R_H)} \dot{U}_3 = \frac{25 + 470 - 0,98 \cdot 10^6}{(25 + 470)(10^3 + 5100)} \cdot 9,41 \cdot 10^{-3} =$$

$$= -18,6 \cdot 10^{-6} \text{ А} = -18,6 \text{ мкА};$$

$$\dot{U}_{ВЫХ} = R_H i_H = -5100 \cdot 18,6 \cdot 10^{-6} = -94,9 \cdot 10^{-3} \text{ В} = -94,9 \text{ мВ.}$$

5. Коэффициенты усиления по напряжению, току и мощности:

$$K_U = \frac{U_{ВЫХ}}{U_{BX}} = \frac{94,9}{9,6} = 9,88; \quad K_I = \frac{i_H}{i_{BX}} = \frac{18,6}{0,393} = 47,3;$$

$$K_P = \frac{P_{ВЫХ}}{P_{ВХ}} = \frac{U_{ВЫХ} i_H}{U_{BX} i_{BX}} = K_U K_I = 9,88 \cdot 47,3 = 467.$$

### 12.3. МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА

Матричный анализ электронных схем основан на применении теории четырехполосников (метод четырехполосника) и обобщенных методов определяющих величин (узловых напряжений, контурных токов).

В основе анализа методами теории четырехполосников лежит представление электронной схемы в виде сложного четырехполосника, который состоит из соединения более простых, параметры которых известны или легко определяются. Исследуя способ соединения простых четырехполосников и используя соответствующие правила (10.82)-(10.89), находят параметры электронной схемы как сложного четырехполосника. Затем с помощью найденных параметров сложного четырехполосника рассчитывают все необходимые функции и характеристики электронной схемы по формулам табл. 10.3, известным из теории четырехполосников.

В общем случае электронная схема может быть представлена не одним, а несколькими различными видами соединения простых четырехполосников. Такие соединения называют неоднородными. Основной особенностью расчета сложных четырехполосников, представленных неоднородным соединением, является необходимость переходов от одной системы параметров к другой, например с помощью табл. 10.1. Это затрудняет расчеты.

Анализ методом четырехполосника применим лишь к регулярным соединениям, т. е. при условии выполнения равенства (10.1). Это ограничивает его применение, особенно когда электронную схему вообще нельзя представить регулярным соединением.

В качестве примера рассмотрим схему транзисторного усилителя (рис. 12.4, а). Ее можно представить соединением трех простых четырехполюсников  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$  (рис. 12.4, б), каждый из которых (рис. 12.4, в) характеризуется, например, соответствующей матрицей Y-параметров:  $\|Y^I\|$ ,  $\|Y^{II}\|$  и  $\|Y^{III}\|$ . Заметим, что четы-

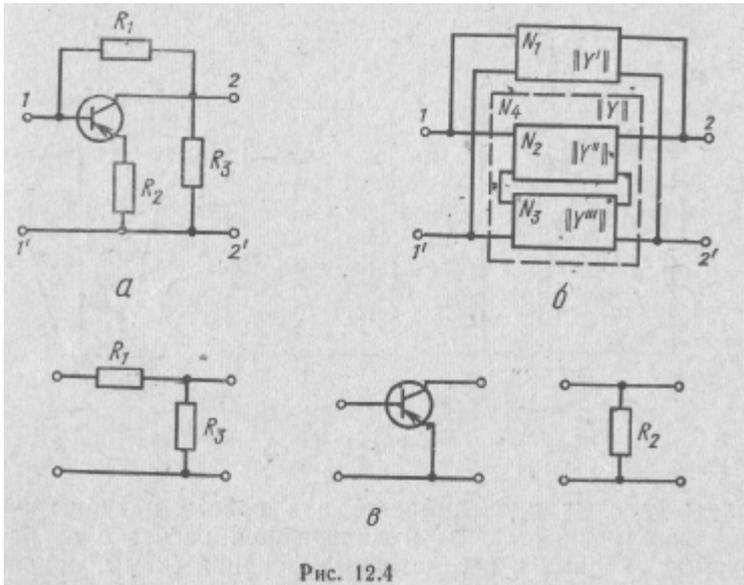


Рис. 12.4

рехполюсники  $N_2$  и  $N_3$  соединены последовательно, образуя более сложный четырехполюсник  $N_4$ , показанный пунктиром. Его параметры можно получить в соответствии с формулой (10.83), суммируя матрицы Z-параметров четырехполюсников  $N_2$  и  $N_3$ :

$$\|Z^{IV}\| = \|Z^{II}\| + \|Z^{III}\|$$

но для этого необходимо предварительно рассчитать эти матрицы с помощью матриц  $\|Y^{II}\|$ ,  $\|Y^{III}\|$  и формул пересчета (табл. 10.1). Четырехполюсники  $N_1$  и  $N_4$  соединены параллельно, образуя четырехполюсник  $N$ , которым представлен усилитель. Его матрицу Y-параметров можно найти в соответствии с выражением (10.85), суммируя матрицы Y-параметров четырехполюсников  $N_1$  и  $N_4$

$$\|Y\| = \|Y^I\| + \|Y^{IV}\| ,$$

но для этого необходимо матрицу  $\|Y^{IV}\|$  предварительно пересчитать в  $\|Z^{IV}\|$ . Получив матрицу Y-параметров усилителя, с помощью соответствующих формул (табл. 10.3) рассчитываем нужные входные и передаточные функции,

**Обобщенные методы определяющих величин** лишены недостатков, свойственных методу четырехполюсника. Обобщения, характерные для них, относятся к методике составления матрицы узловых проводимостей и матрицы контурных сопротивлений. Наибольшее распространение для электронных схем получил обобщенный метод узловых напряжений. В его основе лежит составление

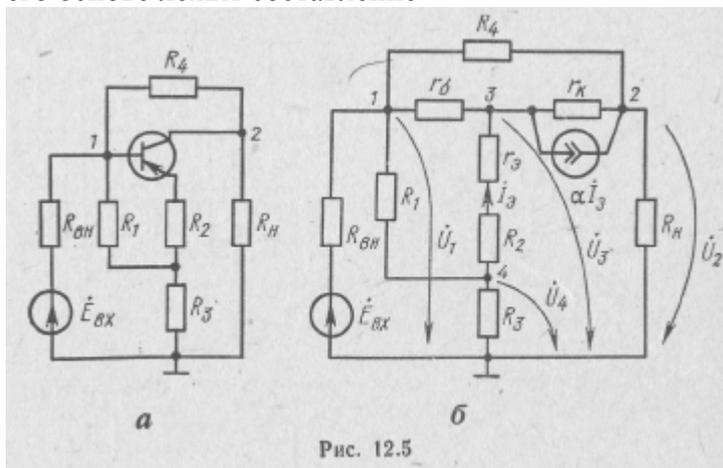


Рис. 12.5

матрицы узловых проводимостей или просто матрицы проводимостей электронной схемы и дальнейший расчет с ее помощью требуемых входных и передаточных функций схемы, например по формулам табл. 6.3.

Основной особенностью анализа таким методом является учет электронных приборов и других многополюсных элементов линейной активной цепи (транзистор, операционный усилитель, гиратор и т. д.) при составлении ее матрицы проводимостей. Электронные приборы, как и любые многополюсные элементы, можно представить эквивалентными схемами с зависимыми источниками или матрицей параметров. В первом случае нужно знать правила учета зависимых источников, а во втором — матрицы параметров.

Учет зависимых источников при составлении матрицы проводимостей электронной схемы рассмотрим на примере транзисторного усилителя (рис. 12.5,а), эквивалентная схема которого приведена на рис. 12.5,б. Для этого вначале выразим значение управляющего тока зависимого источника через узловые напряжения:

$$i = \alpha i_3 = \frac{\alpha}{r_3 + R_2} (\dot{U}_4 - \dot{U}_3) = \frac{\alpha}{r_3 + R_2} \dot{U}_4 - \frac{\alpha}{r_3 + R_2} \dot{U}_3. \quad (12.1)$$

Здесь  $\frac{\alpha}{r_3 + R_2}$  -управляющий параметр, а  $\dot{U}_4$  и  $(-\dot{U}_3)$  — управляющие узловые напряжения.

Наличие зависимых источников в схеме при записи уравнений методом узловых напряжений окажет влияние, очевидно, лишь на

узловые токи (правую часть уравнений). Действительно, для рассматриваемой схемы с учетом формулы (12.1) получим

$$\|Y^*\| \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{E}_{вх}/R_{вн} \\ \frac{\alpha}{r_9 + R_2} \dot{U}_4 - \frac{\alpha}{r_9 + R_2} \dot{U}_3 \\ \frac{-\alpha}{r_9 + R_2} \dot{U}_4 + \frac{\alpha}{r_9 + R_2} \dot{U}_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{E}_{вх}/R_{вн} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha}{r_9 + R_2} \dot{U}_4 - \frac{\alpha}{r_9 + R_2} \dot{U}_3 \\ \frac{-\alpha}{r_9 + R_2} \dot{U}_4 + \frac{\alpha}{r_9 + R_2} \dot{U}_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \|j\| + \|j'\|, \quad (12.2)$$

Здесь

$$Y^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{R_{вн}} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{r_6} & -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{r_6} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_4} + \frac{1}{r_k} + \frac{1}{R_н} & -\frac{1}{r_k} & 0 \\ -\frac{1}{r_6} & -\frac{1}{r_k} & \frac{1}{r_6} + \frac{1}{r_9 + R_2} + \frac{1}{r_k} & -\frac{1}{r_9 + R_2} \\ -\frac{1}{R_1} & 0 & -\frac{1}{r_9 + R_2} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{r_9 + R_2} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (12.3)$$

матрица узловых проводимостей электронной схемы, составленная без учета зависимых источников;

$\|j\|$  — матрица узловых токов, определяемых независимыми источниками;

$\|j'\|$  — матрица узловых токов, определяемых зависимыми источниками.

Выражение (12.2) можно записать иначе, перенося матрицу  $\|Y^*\|$  в левую часть и приводя подобные члены:

$$\|Y\| \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{E}_{вх}/R_{вн} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \|j\|, \quad (12.4)$$

где

	1	2	3	4
1	$\frac{1}{R_{\text{вн}}} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{r_6}$	$-\frac{1}{R_4}$	$-\frac{1}{r_6}$	$-\frac{1}{R_1}$
2	$-\frac{1}{R_4}$	$\frac{1}{R_4} + \frac{1}{r_k} + \frac{1}{R_{\text{н}}}$	$-\frac{1}{r_k} \left[ \frac{a}{r_9 + R_2} \right]$	$\left[ \frac{a}{r_9 + R_2} \right]$
3	$-\frac{1}{r_6}$	$-\frac{1}{r_k}$	$\frac{1}{r_6} + \frac{1}{r_9 + R_2} + \frac{1}{r_k} \left[ \frac{a}{r_9 + R_2} \right]$	$-\frac{1}{r_9 + R_2} + \left[ \frac{a}{r_9 + R_2} \right]$
4	$-\frac{1}{R_1}$	0	$-\frac{1}{r_9 + R_2}$	$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{r_9 + R_2}$

(12.5)

матрица проводимостей схемы, учитывающая наличие зависимых источников.

Таким образом, получив матрицу (12.5), можем сформулировать особенности учета зависимых источников и подметить закономерность, по которой их управляющие параметры входят в матрицу проводимостей схемы.

Перед составлением матрицы проводимостей необходимо все токи и напряжения, управляющие зависимыми источниками, выразить через узловые напряжения. Учет управляющих параметров преобразованных таким образом источников осуществляется их вписыванием в матрицу проводимостей схемы, составленной без учета зависимых источников. Управляющий параметр каждого зависимого источника вписывается в эту матрицу на пересечении строк, номера которых соответствуют номерам узлов, связанных с данным источником, и столбцов, номера которых соответствуют номерам узловых напряжений, управляющих этим источником. При этом необходимо придерживаться следующего правила знаков: на пересечении q-й строки и p-го столбца управляющий параметр следует вписать со знаком «плюс», если зависимый источник по отношению к q-му узлу и его управляющий ток (напряжение) по отношению к p-му узлу направлены одинаково, и со знаком «минус» в обратном случае.

**Учет матрицы параметров** электронного прибора связан с использованием понятия неопределенной матрицы, [Познакомимся] с этим понятием на примере транзистора.

Известно представление транзистора как четырехполюсника тремя способами (см. рис. 12.1): по схеме с общим эмиттером (ОЭ), с общей базой (ОБ) и с общим коллектором (ОК). В каждой из этих схем включения транзистор, как и любой четырехполюсник, можно описать системой уравнений, например, в  $Y$ -параметрах:

в схеме с ОЭ (см. рис. 12.1,а):

$$\begin{Bmatrix} I_6 \\ I_K \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_{11э} & Y_{12э} \\ Y_{21э} & Y_{22э} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_{6э} \\ \dot{U}_{Kэ} \end{Bmatrix}; \quad \|Y_э\| = \begin{Bmatrix} Y_{11э} & Y_{12э} \\ Y_{21э} & Y_{22э} \end{Bmatrix}; \quad (12.6)$$

в схеме с ОБ (см. рис. 12.1, б):

$$\begin{Bmatrix} I_э \\ I_к \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_{11б} & Y_{12б} \\ Y_{21б} & Y_{22б} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_{эб} \\ \dot{U}_{кб} \end{Bmatrix}; \quad \|Y_б\| = \begin{Bmatrix} Y_{11б} & Y_{12б} \\ Y_{21б} & Y_{22б} \end{Bmatrix}; \quad (12.7)$$

в схеме с ОК (см. рис. 12.1, в):

$$\begin{Bmatrix} I_6 \\ I_э \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_{11к} & Y_{12к} \\ Y_{21к} & Y_{22к} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_{6к} \\ \dot{U}_{эк} \end{Bmatrix}; \quad \|Y_к\| = \begin{Bmatrix} Y_{11к} & Y_{12к} \\ Y_{21к} & Y_{22к} \end{Bmatrix}. \quad (12.8)$$

Здесь  $\|Y_э\|$ ,  $\|Y_б\|$ ,  $\|Y_к\|$  — матрицы  $Y$ -параметров транзистора в схеме с ОЭ, ОБ и ОК соответственно. Все параметры можно измерить с помощью специальных приборов или получить из справочников.

Эти матрицы характеризуют транзистор в конкретной схеме включения и отличаются одна от другой. Тем не менее между ними существует вполне определенная связь, так как они характеризуют один и тот же транзистор. Установим эту связь. Для этого рассмотрим транзистор, схема включения которого не определена (рис. 12.6).

В этом случае

$$\left. \begin{aligned} I_1 = I_6, \quad I_2 = I_K, \quad I_3 = -(I_1 + I_2); \\ \dot{U}_{6э} = \dot{U}_1 - \dot{U}_3; \quad \dot{U}_{Kэ} = \dot{U}_2 - \dot{U}_3. \end{aligned} \right\} \quad (12.9)$$

Учитывая эти соотношения, с помощью выражения (12.6) найдем:

$$\left. \begin{aligned} I_1 = Y_{11э}(\dot{U}_1 - \dot{U}_3) + Y_{12э}(\dot{U}_2 - \dot{U}_3) = Y_{11э}\dot{U}_1 + \\ + Y_{12э}\dot{U}_2 - (Y_{11э} + Y_{12э})\dot{U}_3; \\ I_2 = Y_{21э}(\dot{U}_1 - \dot{U}_3) + Y_{22э}(\dot{U}_2 - \dot{U}_3) = Y_{21э}\dot{U}_1 + \\ + Y_{22э}\dot{U}_2 - (Y_{21э} + Y_{22э})\dot{U}_3; \\ I_3 = -(Y_{11э} + Y_{21э})\dot{U}_1 - (Y_{12э} + Y_{22э})\dot{U}_2 + \\ + (Y_{11э} + Y_{12э} + Y_{21э} + Y_{22э})\dot{U}_3. \end{aligned} \right\} \quad (12.10)$$

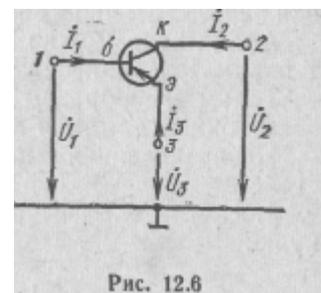


Рис. 12.6

или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11a} & Y_{12a} & -(Y_{11a} + Y_{12a}) \\ Y_{21a} & Y_{22a} & -(Y_{21a} + Y_{22a}) \\ -(Y_{11a} + Y_{21a}) & -(Y_{12a} + Y_{22a}) & (Y_{11a} + Y_{21a} + Y_{12a} + Y_{22a}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{pmatrix} = \\ = |Y|_{ind} \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{pmatrix}. \quad (12.11)$$

Здесь

$$|Y|_{ind} = \begin{pmatrix} Y_{11a} & Y_{12a} & -(Y_{11a} + Y_{12a}) \\ Y_{21a} & Y_{22a} & -(Y_{21a} + Y_{22a}) \\ -(Y_{11a} + Y_{21a}) & -(Y_{12a} + Y_{22a}) & (Y_{11a} + Y_{21a} + Y_{12a} + Y_{22a}) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{pmatrix} \quad (12.12)$$

неопределенная, или плавающая, матрица транзистора, выраженная через его  $Y$ -параметры в схеме с ОЭ.

Аналогично можно выразить неопределенную матрицу и через  $Y$ -параметры транзистора в любой из схем включения.

Таким же образом можно получить неопределенную матрицу электронной лампы и любого другого четырехполюсника.

Неопределенная матрица характеризуется рядом интересных свойств:

1. Сумма элементов в каждом ее столбце тождественно равна Нулю:

$$\sum_{k=1}^n Y_{ks} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (12.13)$$

В справедливости этого можно убедиться, сложив все три уравнения в системе (12.11) и приравняв на основании первого закона Кирхгофа сумму токов к нулю.

2. Сумма элементов в каждой строке тождественно равна нулю:

$$\sum_{s=1}^n Y_{ks} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (12.14)$$

Действительно, система уравнений (12.11) справедлива при любых значениях  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{U}_2$  и  $\dot{U}_3$ , в том числе и при  $\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = \dot{U}_3 = \dot{U}$ . Складывая в этом случае все три уравнения в системе (12.11) и приравнявая сумму токов к нулю, убеждаемся, что полученное равенство выполняется, если каждая из сумм (12.14) равна нулю,

3. Определитель неопределенной матрицы равен нулю. ГакуЮ матрицу называют особенной. Если четырехполюсник невзаимный, его неопределенная матрица несимметрична.

Если в рассматриваемой схеме (см. рис. 12.6)  $k$ -й узел объединить с базисным, то соответствующее узловое напряжение становится равным нулю:  $\dot{U}_k = 0$ , а ток  $\dot{I}_k$  не представляет интереса. Этому случаю соответствует вычеркивание  $k$ -го столбца и  $k$ -й строки в неопределенной матрице (12.12), в результате чего она становится неособенной.

Неособенная матрица, полученная из особенной вычеркиванием строки и столбца, называется укороченной или канонической. Обратный переход от укороченной к особенной матрице осуществляется дополнением укороченной матрицы  $k$ -и строкой и  $k$ -и столбцом так, чтобы суммы элементов в каждой строке и каждом столбце матрицы оказались равными нулю.

Вычеркивая в неопределенной матрице транзистора 3-й столбец и 3-ю строку, 1-й столбец и 1-ю строку или 2-й столбец и 2-ю строку, получим его матрицы Y-параметров соответственно в схемах с ОЭ, ОБ или ОК. Такой прием позволяет, в частности, легко пересчитать матрицу параметров транзистора в одной из схем включения в матрицы его параметров при включении по другим схемам,

### Пример 12.2.

Известны параметры транзистора П14, измеренные на низких частотах

в схеме с ОЭ:  $Y_{12э} = 10^{-3}$  См;  $Y_{12э} = -10^{-6}$  См;  $Y_{21э} = 30 \cdot 10^{-3}$  См;  $Y_{22э} = 25 \cdot 10^{-6}$  См. Найти его Y-параметры в схеме с ОБ.

Решение.

1. Дополняем матрицу Y-параметров транзистора 3-м столбцом и 3-й строкой так, чтобы суммы элементов в каждой строке и каждом столбце оказались равными нулю:

	б	к	э		
$\ Y_{ind}\  =$	б	$10^{-3}$	$-10^{-6}$	$\approx -10^{-3}$	1
	к	$30 \cdot 10^{-3}$	$25 \cdot 10^{-6}$	$\approx -30 \cdot 10^{-3}$	2
	э	$-31 \cdot 10^{-3}$	$-24 \cdot 10^{-6}$	$\approx 31 \cdot 10^{-3}$	3
	1	2	3		

2. Вычеркивая в полученной неопределенной матрице 1-й столбец и 1-ю строку, получаем матрицу Y-параметров в схеме с ОБ:

$$\|Y_{об}\| = \begin{matrix} & \text{к} & \text{э} \\ \begin{matrix} \text{к} \\ \text{э} \end{matrix} & \begin{vmatrix} 25 \cdot 10^{-6} & -30 \cdot 10^{-3} \\ -24 \cdot 10^{-6} & 31 \cdot 10^{-3} \end{vmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \text{э} & \text{к} \\ \begin{matrix} \text{э} \\ \text{к} \end{matrix} & \begin{vmatrix} 31 \cdot 10^{-3} & -24 \cdot 10^{-6} \\ -30 \cdot 10^{-3} & 25 \cdot 10^{-6} \end{vmatrix} \end{matrix}.$$

Каждому электроду электронного прибора в неопределенной матрице соответствует строка и столбец.

При перестановке местами узлов многополюсника в его неопределенной матрице меняются местами соответствующие столбцы и строки.

Составление матрицы проводимостей электронной схемы при наличии неопределенных матриц электронных приборов осуществляется в два этапа. Сначала записывается матрица проводимостей пассивной части схемы, а затем учитываются электронные приборы с помощью их неопределенных матриц.

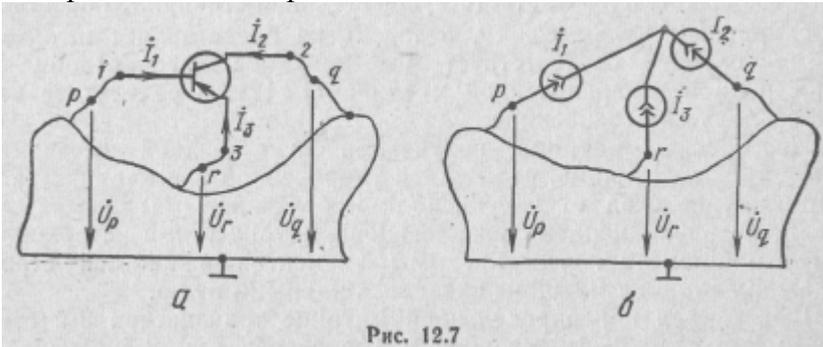


Рис. 12.7

Пусть транзистор (см. рис. 12.6) с неопределенной матрицей (12.12) включен в схему так, что его электроды 1, 2 и 3 связаны соответственно с узлами  $p$ ,  $q$  и  $r$  схемы. Тогда на его электродах будут действовать узловые напряжения (рис. 12.7, а)

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_p, \dot{U}_2 = \dot{U}_q, \dot{U}_3 = \dot{U}_r \quad (12.15)$$

и протекать токи  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{I}_2$ ,  $\dot{I}_3$ , определяемые уравнениями (12.11).

Такое соединение транзистора эквивалентно подключению к указанным узлам источников тока  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{I}_2$  и  $\dot{I}_3$  (рис. 12.7,б). Наличие этих источников при записи уравнений цепи методом узловых напряжений окажет влияние, очевидно, лишь на правые части уравнений  $p$ -го,  $q$ -го и  $r$ -го узлов, т. е. на их узловые токи. При этом токи  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{I}_2$  и  $\dot{I}_3$  войдут в правые части этих уравнений со знаком «минус», так как они направлены от узлов (см. рис. 12.7,б). Действительно, для рассматриваемой схемы (см. рис. 12.7) с учетом выражений (12.11) и (12.15) получим

$$|Y^*| |\dot{U}| = |J| - \begin{vmatrix} 0 \\ \dots \\ \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{vmatrix} = |J| - \begin{vmatrix} 0 & & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & \\ & & Y_{11}\dot{U}_p + Y_{13}\dot{U}_q + Y_{13}\dot{U}_r & & & & & & \\ & & Y_{21}\dot{U}_p + Y_{22}\dot{U}_q + Y_{23}\dot{U}_r & & & & & & \\ & & Y_{31}\dot{U}_p + Y_{32}\dot{U}_q + Y_{33}\dot{U}_r & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & & \dots & & & & \\ & & & & & 0 & & & \end{vmatrix} = \\ = |J| - |J|. \quad (12.16)$$

Здесь

	1	...	$p$	$q$	$r$	...	$n$
1	$Y_{11}$	...	$Y_{1p}$	$Y_{1q}$	$Y_{1r}$	...	$Y_{1n}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$p$	$Y_{p1}$	...	$Y_{pp}$	$Y_{pq}$	$Y_{pr}$	...	$Y_{pn}$
$\ Y^*\  = q$	$Y_{q1}$	...	$Y_{qp}$	$Y_{qq}$	$Y_{qr}$	...	$Y_{qn}$
$r$	$Y_{r1}$	...	$Y_{rp}$	$Y_{rq}$	$Y_{rr}$	...	$Y_{rn}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$n$	$Y_{n1}$	...	$Y_{np}$	$Y_{nq}$	$Y_{nr}$	...	$Y_{nn}$

(12.17)

матрица узловых проводимостей пассивной части схемы;

$\|\dot{U}\|$  — матрица узловых напряжений;

$\|J\|$  — матрица узловых токов, составленная без учета электронных приборов;

$\|J'\|$  — матрица, учитывающая влияние электронных приборов на узловые токи схемы.

Выражение (12.16) можно записать иначе, перенося матрицу  $\|J'\|$  в левую часть и приводя в ней подобные члены. Такой перенос эквивалентен изменению коэффициентов при  $\dot{U}_p$ ,  $\dot{U}_q$  и  $\dot{U}_r$  в левой части уравнений. Действительно, в результате переноса получим

$$\|Y\| \cdot \|\dot{U}\| = \|J\|. \quad (12.18)$$

где

	1	...	$p$	$q$	$r$	...	$n$
1	$Y_{11}$	...	$Y_{1p}$	$Y_{1q}$	$Y_{1r}$	...	$Y_{1n}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$p$	$Y_{p1}$	...	$Y_{pp} + Y_{11}$	$Y_{pq} + Y_{12}$	$Y_{pr} + Y_{13}$	...	$Y_{pn}$
$\ Y\  = q$	$Y_{q1}$	...	$Y_{qp} + Y_{21}$	$Y_{qq} + Y_{22}$	$Y_{qr} + Y_{23}$	...	$Y_{qn}$
$r$	$Y_{r1}$	...	$Y_{rp} + Y_{31}$	$Y_{rq} + Y_{32}$	$Y_{rr} + Y_{33}$	...	$Y_{rn}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$n$	$Y_{n1}$	...	$Y_{np}$	$Y_{nq}$	$Y_{nr}$	...	$Y_{nn}$

(12.19)

матрица проводимостей электронной схемы.

Таким образом, чтобы учесть включение транзистора или другого электронного прибора, подключенного к узлам  $p, q, r$ , нужно в матрицу узловых проводимостей пассивной части схемы на пересечении строк и столбцов с номерами  $p, q$  и  $r$  вписать элементы его неопределенной матрицы проводимостей. Аналогично учитываются все электронные приборы, входящие в состав схемы.

Чтобы установить, в какие клетки матрицы узловых проводимостей пассивной части схемы нужно вписать элементы неопределенной матрицы электронного прибора, в последней нужно обозначить строки и столбцы номерами узлов схемы, к которым подключены его электроды.

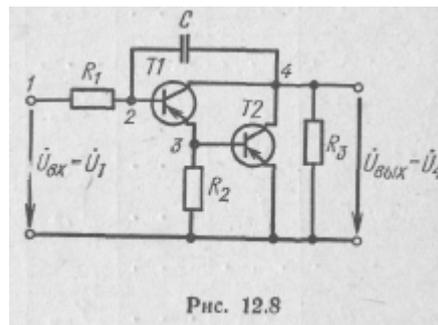


Рис. 12.8

**Пример 12.3.**

Найти передаточную функцию по напряжению транзисторного усилителя (рис. 12.8), если известны неопределенные матрицы транзисторов. Решение.

1. Составляем матрицу узловых проводимостей пассивной части схемы, т.е. без учета транзисторов:

$$\|Y^*\| = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & g_1 & -g_1 & 0 & 0 \\ 2 & -g_1 & g_1 + j\omega C & 0 & -j\omega C \\ 3 & 0 & 0 & g_2 & 0 \\ 4 & 0 & -j\omega C & 0 & g_3 + j\omega C \end{array}$$

где  $g_k = \frac{1}{R_k}$

2. Строки и столбцы неопределенных матриц транзисторов обозначим в соответствии с номерами узлов, к которым они подключены:

$$\|Y'_{ind}\| = \begin{array}{c|ccc} & 2 & 4 & 3 \\ \hline 2 & Y'_{11} & Y'_{12} & Y'_{13} \\ 4 & Y'_{21} & Y'_{22} & Y'_{23} \\ 3 & Y'_{31} & Y'_{32} & Y'_{33} \end{array}$$

	3	4	0	
$\ Y''\ _{ind} =$	4	$Y_{11}^*$	$Y_{12}^*$	$Y_{13}^*$
	3	$Y_{21}^*$	$Y_{22}^*$	$Y_{23}^*$
	0	$Y_{31}^*$	$Y_{32}^*$	$Y_{33}^*$

Строки и столбцы, соответствующие базисному узлу, вычеркиваются. (В случае  $\|Y''\|_{ind}$  следует вычеркнуть строку и столбец, соответствующие нулю.)

3. Вписывая элементы неопределенных матриц транзисторов  $\|Y^I\|_{ind}$  и  $\|Y^{II}\|_{ind}$  в соответствующие клетки матрицы  $\|Y^*\|$ , получаем матрицу проводимостей усилителя:

	1	2	3	4	
$\ Y\  =$	1	$g_1$	$-g_1$	0	0
	2	$-g_1$	$g_1 + j\omega C + Y'_{11}$	$Y'_{31}$	$-j\omega C + Y'_{12}$
	3	0	$Y'_{31}$	$g_2 + Y'_{33} + Y^*_{11}$	$Y'_{32} + Y^*_{12}$
	4	0	$-j\omega C + Y'_{21}$	$Y'_{23} + Y^*_{21}$	$g_3 + j\omega C + Y'_{22} + Y^*_{22}$

4. С помощью матрицы проводимостей усилителя по формулам (табл. 6.3) находим передаточную функцию по напряжению:

$$K_U(j\omega) = K_U = \frac{U_{вмх}}{U_{вх}} = \frac{U_4}{U_1} = \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{11}},$$

где

	1	2	3	
$\Delta_{11} =$	2	$g_1 + j\omega C + Y'_{11}$	$Y'_{13}$	$-j\omega C + Y'_{12}$
	3	$Y'_{31}$	$g_2 + Y'_{33} + Y^*_{11}$	$Y'_{32} + Y^*_{12}$
	4	$-j\omega C + Y'_{21}$	$Y'_{23} + Y^*_{21}$	$g_3 + j\omega C + Y'_{22} + Y^*_{22}$

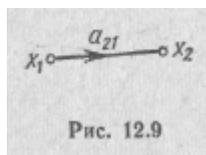
  

	1	2	3	
$\Delta_{14} =$	2	$-g_1$	$g_1 + j\omega C + Y'_{11}$	$Y'_{13}$
	3	0	$Y'_{31}$	$g_2 + Y'_{11} + Y'_{33}$
	4	0	$Y'_{21} - j\omega C$	$Y'_{21} + Y'_{23}$

алгебраические дополнения матрицы  $\|Y\|$ ,

## 12.4. СИГНАЛЬНЫЕ (НАПРАВЛЕННЫЕ) ГРАФЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

Сигнальный (направленный) граф — это графическая форма представления системы линейных уравнений цепи. В отличие от топологического графа он отображает не геометрические свойства цепи, а взаимосвязь между переменными— токами и напряжениями, действующими в ней. Сигнальный граф дает наглядную картину причинно-следственных связей между параметрами цепи и ее напряжениями и токами. Он позволяет легко проследить влияние параметров цепи на ее передаточные функции. Применение графов к анализу цепей позволяет существенно сократить объем вычислений по сравнению с непосредственным разложением определителей системы уравнений.



Сигнальный граф — это совокупность узлов и соединяющих их направленных ветвей. Каждый его узел представляет переменную, а каждая ветвь, соединяющая два узла,— функциональную зависимость между двумя переменными. Например, уравнению  $x_2 = a_{21}x_1$  соответствует простейший граф (рис. 12.9). Он содержит одну ветвь, направленную от узла  $x_1$  к узлу  $x_2$ . Кроме направления эта ветвь характеризуется передачей, равной отношению

$a_{21} = \frac{x_2}{x_1}$ . Передача ветви может быть безразмерной или иметь размерность сопротивления, проводимости.

Прохождению сигнала по ветви графа соответствует его умножение на передачу ветви. Сигнал может проходить только в направлении, указанном на ветви стрелкой.

Сигнальный граф цепи находится в однозначном соответствии с системой ее уравнений, записанной в форме «причина — следствие»:

$$x_q = \sum_{k=1}^n a_{qk}x_k + y_q \quad (q = 1, 2, \dots, n). \quad (12.20)$$

Здесь  $a_{qk}$  — коэффициенты уравнений, определяемые параметрами цепи;  $y_q$  — коэффициенты, определяемые заданными воздействиями, т.е. независимые переменные;  $x_k$  — неизвестные величины, т.е. зависимые переменные.

В качестве примера перепишем в этой форме систему контурных уравнений (10.1). Для этого в левой части каждого уравне-

ния оставим одну из переменных, а все оставшиеся члены перенесем в правую часть:

$$\left. \begin{aligned}
 I_1 &= (1 - Z_{11})I_1 - Z_{12}I_2 - \dots - Z_{1n}I_n + \dot{E}_1 = \\
 &= a_{11}I_1 + a_{12}I_2 + \dots + a_{1n}I_n + y_1; \\
 I_2 &= -Z_{21}I_1 + (1 - Z_{22})I_2 - \dots - Z_{2n}I_n + \dot{E}_2 = \\
 &= a_{21}I_1 + a_{22}I_2 + \dots + a_{2n}I_n + y_2; \\
 &\dots \dots \dots \\
 I_n &= -Z_{n1}I_1 - Z_{n2}I_2 - \dots + (1 - Z_{nn})I_n + \dot{E}_n = \\
 &= a_{n1}I_1 + a_{n2}I_2 + \dots + a_{nn}I_n + y_n.
 \end{aligned} \right\} (12.21)$$

Здесь  $a_{kk} = 1 - Z_{kk}$ ;  $a_{qk} = -Z_{qk}$ ;  $y_q = \dot{E}_q$ ;  $x_k = I_k$ .

Такие уравнения представляют выходные сигналы  $x_q$  (следствие) как сумму соответственно преобразованных входных сиг-

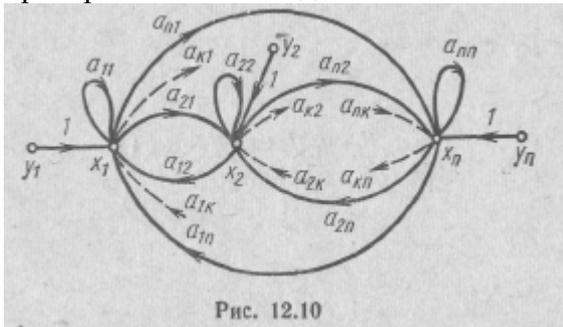


Рис. 12.10

налов  $y_q$  (причин). Выходным сигналом (реакцией) считается зависимая переменная, подлежащая определению. Все независимые переменные  $y_q$  считаются входными сигналами (воздействиями). Сигнальный граф строится в соответствии с уравнениями (12.20). Для этого каждой зависимой  $x_k$  и каждой независимой  $y_q$  переменным ставится в соответствие узел графа. Узлы располагаются произвольно и соединяются ветвями следующим образом. Если  $a_{qk} \neq 0$ , то узлы  $x_q$  и  $x_k$  соединяются ветвью с передачей  $a_{qk}$  и направлением от  $x_k$  к  $x_q$ . Кроме того, узлы  $y_q$  и  $x_q$  соединяются ветвью, направленной к  $x_q$  и имеющей единичную передачу. В результате получается граф вида, показанного на рис. 12.10-

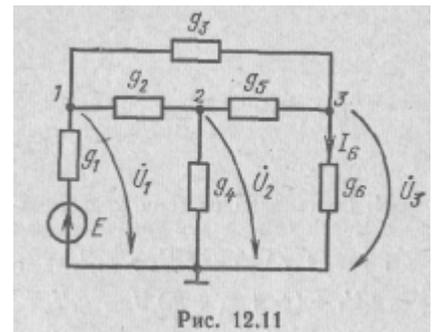
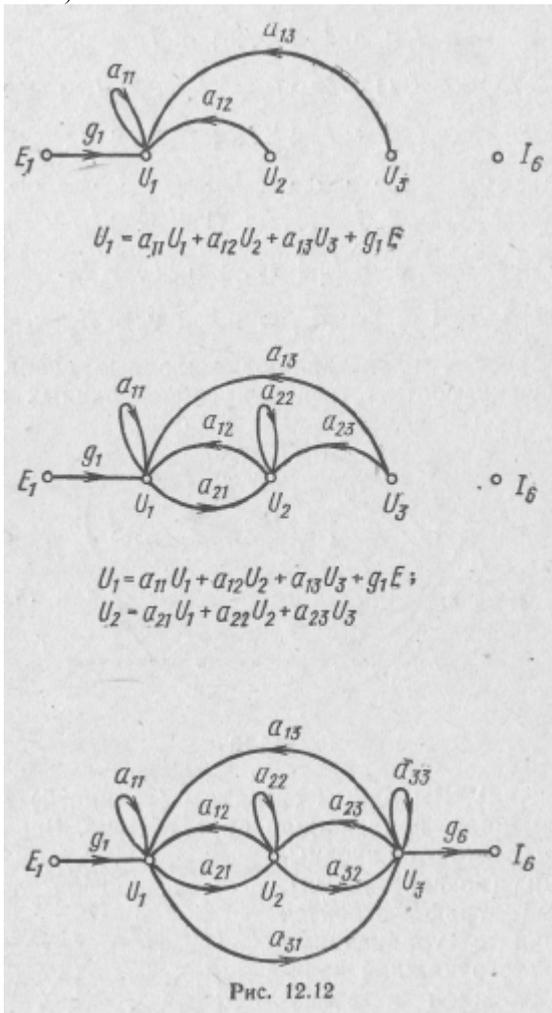


Рис. 12.11

**Пример 12.4.**

Построить сигнальный граф цепи, в которой входным сигналом является э. д. с.  $E$ , выходным — ток  $I_6$  (рис. 12.11). Решение.



1. Составляем систему уравнений цепи методом узловых напряжений и переписываем ее в форме «причина — следствие»:

$$\left. \begin{aligned} (g_1 + g_2 + g_3) U_1 - g_2 U_2 - g_3 U_3 &= g_1 E; \\ -g_2 U_1 + (g_2 + g_4 + g_6) U_2 - g_6 U_3 &= 0; \\ -g_3 U_1 - g_6 U_2 + (g_3 + g_6 + g_6) U_3 &= 0; \end{aligned} \right\} \begin{aligned} U_1 &= a_{11} U_1 + a_{12} U_2 + a_{13} U_3 + J; \\ U_2 &= a_{21} U_1 + a_{22} U_2 + a_{23} U_3; \\ U_3 &= a_{31} U_1 + a_{32} U_2 + a_{33} U_3, \end{aligned} \right\}$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 - (g_1 + g_2 + g_3); & a_{22} &= 1 - (g_2 + g_4 + g_6); & a_{33} &= 1 - (g_3 + g_6 + g_6); \\ a_{12} &= a_{21} = g_2; & a_{13} &= a_{31} = g_3; & a_{22} &= a_{23} = g_6; & J &= g_1 E, \end{aligned}$$

2, При построении сигнального графа зависимым переменным  $\dot{U}_1, \dot{U}_2$  и  $\dot{U}_3$  приводим в соответствие промежуточные узлы, входному сигналу  $J=g_1E$ —исток, выходному — сток  $I_6=g_6U_3$ . Узлы соединяем ветвями в соответствии с уравнениями цепи и принятыми обозначениями. Поэтапное построение графа показано на рис. 12.12.

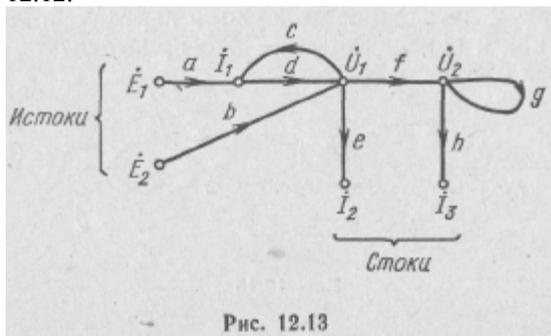


Рис. 12.13

Систему уравнений цепи можно составить поразному (методом контурных токов, узловых напряжений и т. д.). В зависимости от этого данной цепи соответствуют несколько отличающихся друг от друга сигнальных графов.

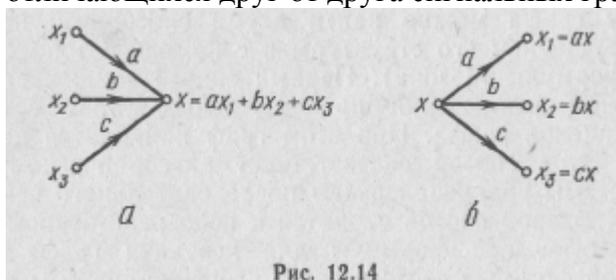


Рис. 12.14

Узлы сигнального графа разделяют на три группы: истоки, стоки и промежуточные узлы. Истоки представляют входные сигналы и связаны лишь с исходящими ветвями, например узлы  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$  (рис. 12.13). Стоки представляют выходные сигналы и связаны лишь с входящими ветвями, например узлы  $\dot{I}_2$  и  $\dot{I}_3$  (см. рис. 12.13). Все остальные узлы с входящими и исходящими ветвями называют промежуточными. Узловой сигнал равен сумме сигналов, приходящих к узлу (рис. 12.14,а), и передается по всем ветвям, исходящим из него (рис. 12.14,б). Обычно на графе выходные сигналы для удобства выделяются в отдельные узлы через ветви с единичной передачей, образуя стоки.

Важными элементами сигнального графа являются путь и контур:

**путь** — это непрерывная последовательность однонаправленных ветвей, проходящих через каждый узел не более одного раза;

**прямой путь** — это путь, связывающий исток и сток;

**контур** представляет собой любой замкнутый путь;

**петля** — это контур, содержащий только один узел.

Контур или контур и путь называются непересекающимися, если они не имеют общих узлов.

Все контуры и пути характеризуются передачей. **Передача контура**, так же как и **передача пути**, — это произведение передач ветвей, из которых они состоят.

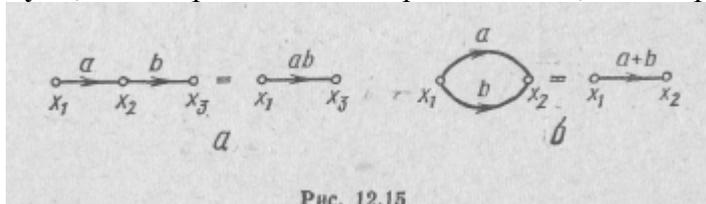


Рис. 12.15

**Передача сигнального графа** — это отношение выходного сигнала к входному. Если сигнальный граф содержит несколько истоков и несколько стоков, то он характеризуется и несколькими передачами: от каждого из истоков к каждому из стоков. Определение передачи графа является основной задачей; решаемой при расчете цепи методом сигнальных графов.

Передачу графа можно найти двумя способами: последовательным упрощением его структуры и с помощью топологической формулы (формулы Мэсона). Первый способ заключается в последовательном исключении промежуточных узлов с помощью правил упрощения графа. При этом граф приводится к простейшему виду. Этот способ соответствует алгебраическому методу решения системы уравнений путем последовательного исключения неизвестных. Второй способ сводится к непосредственному применению топологической формулы для передачи графа. Решение графа по этой формуле соответствует решению системы алгебраических уравнений, основанному на прямом разложении ее определителя.

**Правила упрощения** графа несложны; в их справедливости легко убедиться. Рассмотрим некоторые из них.

1. Передача последовательно соединенных ветвей равна произведению передач этих ветвей (рис. 12.15,а). Действительно,

$$x_2 = ax_1, x_3 = bx_2, \text{ т. е. } x_3 = abx_1. \quad (12.22)$$

2. Передача двух параллельно соединенных однонаправленных ветвей равна сумме передач этих ветвей (рис. 12.15,б). Действительно,

$$x_2 = ax_1 + bx_1 = (a + b)x_1. \quad (12.23)$$

3. Устранение простой узловой точки (рис. 12.16,а). Простой узловой точкой называется промежуточный узел графа, не связанный с петлей.

Так как  $x_4 = ax_1; x_2 = bx_4; x_3 = cx_4$ , то  
 $x_2 = abx_1; x_3 = acx_1$ . (12.24)

4. Устранение контура на пути (рис. 12.16,6):

$$x_2 = ax_1 + cx_3; x_3 = bx_2,$$

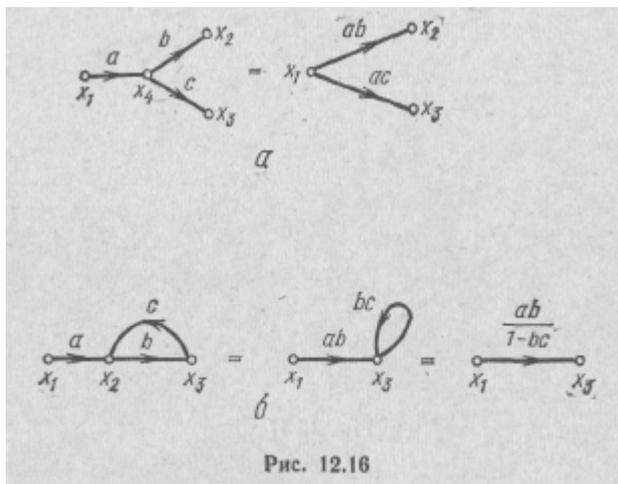


Рис. 12.16

т. е.

$$x_3 = abx_1 + bcx_3 = \frac{ab}{1-bc}x_1. \quad (12.25)$$

5. Исключение петли, связанной с узлом, от которого отходит и к которому подходит одна ветвь (рис. 12.17,а):

$$x_2 = ax_1 + cx_2; x_3 = bx_2$$

Отсюда

$$x_2 = \frac{a}{1-c}x_1 \quad (12.26)$$

6. Исключение петли, связанной с узлом, от которого отходят и к которому подходят несколько ветвей (рис. 12.17,б):

$$x_3 = ax_1 + bx_2 + cx_3 = \frac{a}{1-c}x_1 + \frac{b}{1-c}x_2. \quad (12.27)$$

**Пример, 12.5.**

С помощью сигнального графа (см. рис. 12.13) рассчитать токи  $\dot{I}_3$  и  $\dot{I}_3$ . Решение.

1. Сначала устраняем контур  $cd$  на пути (рис. 12.18, а), затем петли  $g$  и  $cd$  (рис. 12.18,б), после чего исключаем узел  $\dot{U}_2$  (рис. 12.18,в).

2. С помощью образованного после упрощения графа (см. рис. 1Й.18,в) находим

$$I_2 = eU_1; I_3 = \frac{hf}{1-g} U_1; U_1 = \frac{ad}{1-cd} \dot{E}_1 + \frac{b}{1-cd} \dot{E}_2,$$

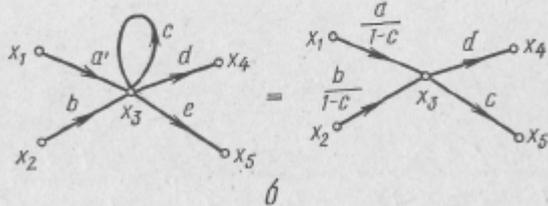
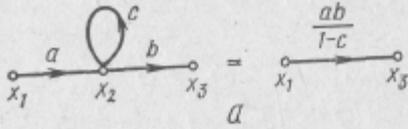


Рис. 12.17

г. е.

$$I_2 = \frac{ade}{1-cd} \dot{E}_1 + \frac{be}{1-cd} \dot{E}_2 \text{ и } I_3 = \frac{adhf}{(1-g)(1-cd)} \dot{E}_1 + \frac{bhf}{(1-g)(1-cd)} \dot{E}_2.$$

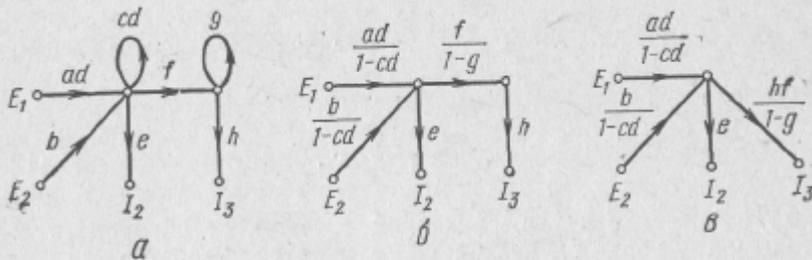


Рис. 12.18

Ценность решения с помощью подобных преобразований сигнального графа состоит в том, что в процессе решения удается выделять основные существенные части, в частности цепи обратной связи, а также выявлять влияние интересующих параметров на передачу графа. Однако правила упрощения не определяют

точный порядок и последовательность их применения. Поэтому решение задачи может пойти разными и далеко не оптимальными путями. Это снижает ценность метода.

**Топологическая формула** позволяет непосредственно рассчитать передачу  $G$  графа от данного истока к данному стоку. В соответствии с этой формулой, называемой также правилом несоприкасающихся контуров,

$$G = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \Delta_k}{\Delta}, \quad (12.28)$$

где  $P_k$  — передача  $k$ -го прямого пути от истока к стоку;

$n$  — число прямых путей;

$\Delta$  — определитель графа;

$\Delta_k$  — определитель части графа, остающейся после исключения контуров, соприкасающихся с  $k$ -м прямым путем. Определитель рассчитывается по формуле

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k, \quad (12.29)$$

где  $L_i$  — передача  $i$ -го контура;

$L_i L_j$  — произведение передач комбинаций по два несоприкасающихся контура;

$L_i L_j L_k$  — произведение передач комбинаций по три несоприкасающихся контура.

Определитель  $\Delta_n$  рассчитывается по этой же формуле (12.29), но без учета контуров, которые касаются  $k$ -го прямого пути.

Следует подчеркнуть, что топологическая формула (12.28) определяет передачу сигнального графа лишь от  $q$ -го истока к  $s$ -му стоку. Если граф содержит несколько истоков и стоков, то формула применяется последовательно для нахождения передач от каждого из истоков к соответствующему стоку, но каждый раз без учета других истоков. После этого в соответствии с принципом наложения выходные сигналы определяются как сумма сигналов, приходящих в каждый сток из всех имеющихся истоков. При этом используются значения передач графа, рассчитанные с помощью топологической формулы (12.28),

**Пример 12.6.**

Рассчитать рабочий коэффициент усиления  $\dot{K}_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{E}_{BX}}$  транзисторного усилителя (рис. 12.19, а), если

$R_{BX} = 1$  ком;  $R_H = 5,1$  ком;  $R_{oc} = 20$  ком;  $R_3 = 51$  Ом;  $r_6 = 500$  Ом;  $r_3 = 25$  Ом;  $r_k = 10^6$  Ом;  $\alpha = 0.98$ .

Решение.

1. Система узловых уравнений для эквивалентной схемы (рис. 12.19,б) в канонической форме:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{1}{R_{BH}} + \frac{1}{R_{OC}} + \frac{1}{r_6} \right) \dot{U}_1 - \frac{1}{R_{OC}} \dot{U}_2 - \frac{1}{r_6} \dot{U}_3 &= \frac{1}{R_{BH}} \dot{E}_{BX}; \\ -\frac{1}{R_{OC}} \dot{U}_1 + \left( \frac{1}{R_{OC}} + \frac{1}{R_H} + \frac{1}{r_K} \right) \dot{U}_2 - \frac{1}{r_K} \dot{U}_3 &= \alpha \dot{I}_3; \\ -\frac{1}{r_6} \dot{U}_1 - \frac{1}{r_K} \dot{U}_2 + \left( \frac{1}{r_6} + \frac{1}{r_K} + \frac{1}{r_3 + R_3} \right) \dot{U}_3 &= -\alpha \dot{I}_3; \\ \dot{I}_3 &= -\frac{1}{r_3 + R_3} \dot{U}_3 \end{aligned} \right\}$$

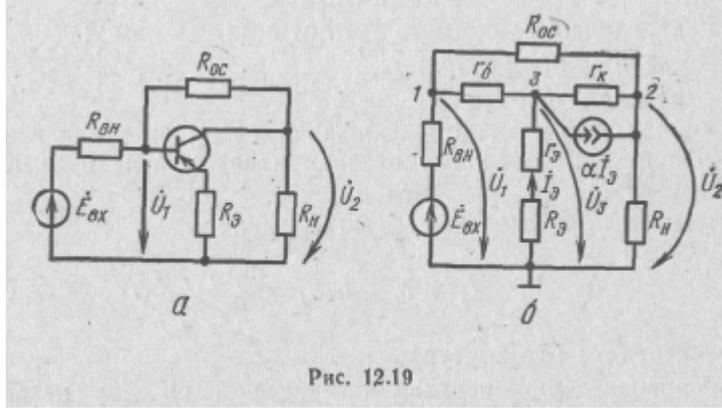


Рис. 12.19

и в форме «причина — следствие» (12.20):

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \left( 1 - \frac{1}{R_{BH}} - \frac{1}{R_{OC}} - \frac{1}{r_6} \right) \dot{U}_1 + \frac{1}{R_{OC}} \dot{U}_2 + \frac{1}{r_6} \dot{U}_3 + \frac{1}{R_{BH}} \dot{E}_{BX}; \\ \dot{U}_2 &= \frac{1}{R_{OC}} \dot{U}_1 + \left( 1 - \frac{1}{R_{OC}} - \frac{1}{R_H} - \frac{1}{r_K} \right) \dot{U}_2 + \frac{1}{r_K} \dot{U}_3 + \alpha \dot{I}_3; \\ \dot{U}_3 &= \frac{1}{r_6} \dot{U}_1 + \frac{1}{r_K} \dot{U}_2 + \left( 1 - \frac{1}{r_6} - \frac{1}{r_K} - \frac{1}{r_3 + R_3} \right) \dot{U}_3 - \alpha \dot{I}_3; \\ \dot{I}_3 &= -\frac{1}{r_3 + R_3} \dot{U}_3. \end{aligned} \right\}$$

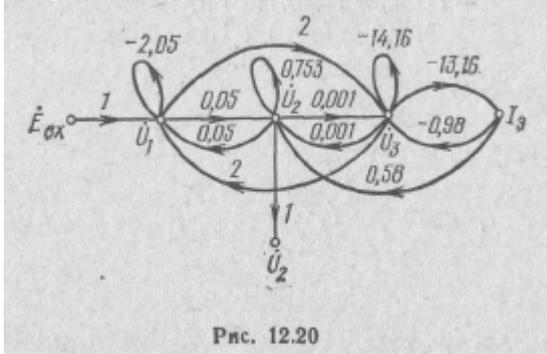
После подстановки числовых значений получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= -2,05 \dot{U}_1 + 0,05 \dot{U}_2 + 2 \dot{U}_3 + \dot{E}_{BX}; \\ \dot{U}_2 &= 0,05 \dot{U}_1 + 0,753 \dot{U}_2 + 0,001 \dot{U}_3 + 0,98 \dot{I}_3; \\ \dot{U}_3 &= 2 \dot{U}_1 + 0,001 \dot{U}_2 - 14,16 \dot{U}_3 - 0,98 \dot{I}_3; \\ \dot{I}_3 &= -13,16 \dot{U}_3. \end{aligned} \right\}$$

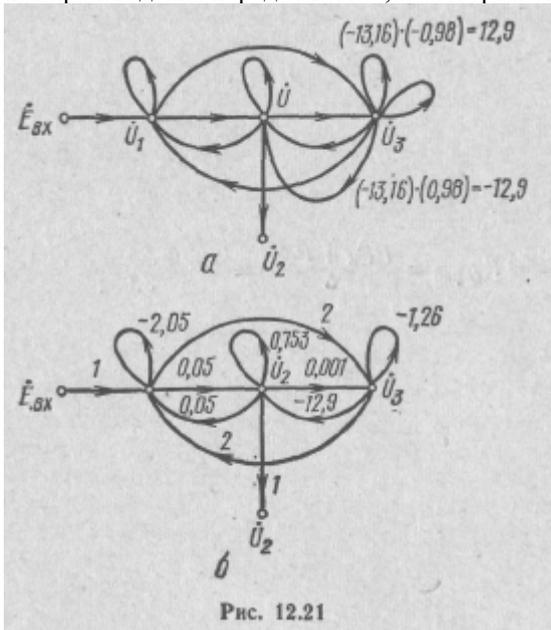
- Для построения сигнального графа выделяем источник  $\dot{E}_{BX}$ , сток  $\dot{U}_2$  и промежуточные узлы  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{U}_2$ ,  $\dot{U}_3$ ,  $\dot{I}_3$ . Все углы в соответствии с полученными уравнениями соединяем направленными ветвями (рис. 12.20).
- Перед применением топологической формулы целесообразно частично упростить сигнальный граф. Для этого устраняем простую узловую точку  $\dot{I}_3$

(рис. 12.21,а) и объединяем параллельно включенные ветви и петли (рис. 12.21,б).

4. Проанализируем полученный сигнальный граф цепи (см. рис. 12.21,б):



граф содержит два прямых пути  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 12.22, а) и восемь петель  $L_1—L_8$  (рис. 12.22,б); их передачи находим как произведение передач ветвей, из которых они состоят;



в составе контуров имеется шесть комбинаций по два непересекающихся контура ( $L_1L_2$ ,  $L_1L_3$ ,  $L_2L_3$ ,  $L_4L_3, L_5L_1$ ,  $L_7L_2$ ) и одна комбинация по три непересекающихся контура ( $L_1L_2L_3$ ); с первым прямым путем  $P_1$  не соприкасается лишь контур  $L_3$ . Контур, не соприкасающийся со вторым прямым путем  $P_2$ , отсутствует.

5. Находим определитель графа и его частей:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_6 + L_8 + L_7 + L_9) + (L_1L_2 + L_1L_3 + L_2L_3 + L_4L_3 + L_5L_1 + L_7L_2) - L_1L_2L_3 = 1 - 0,143 + 3,125 = 3,982;$$

$$\Delta_1 = 1 - L_3 = 1 + 1,26 = 2,26;$$

$$\Delta_2 = 1.$$

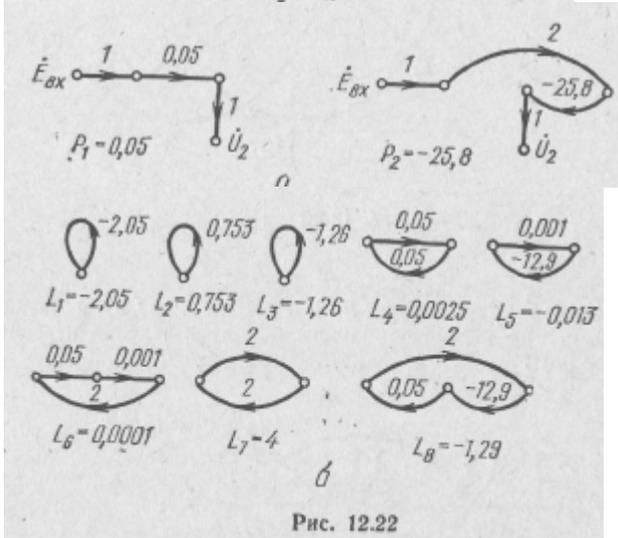


Рис. 12.22

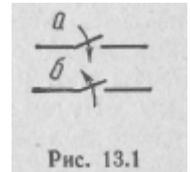
6. Рассчитываем передачу графа, численно равную рабочему коэффициенту усиления усилителя:

$$G = \frac{\dot{U}_2}{\dot{E}_{вх}} = \dot{K}_{У\text{ раб}} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{0,05 \cdot 2,26 - 25,8 \cdot 1}{3,982} = -6,45.$$

### 13. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

#### 13.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССАХ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ И КЛАССИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ИХ АНАЛИЗА

Различают два режима работы цепи: установившийся (стационарный) и неустановившийся (переходный, нестационарный). Установившимся называют такой режим, при котором токи, напряжения и э. д. с. в цепи являются или постоянными, или периодическими функциями времени. В предыдущих разделах рассматривался только этот режим.



Неустановившимся режимом или переходным процессом в электрической цепи называют электромагнитный процесс, возникающий в цепи при переходе от одного установившегося режима к другому. Этот процесс возникает в электрических цепях при подключении к ним или отключении от них источников электрической энергии, а также при скачкообразном изменении схемы цепи или параметров входящих в нее элементов.

Указанные выше операции в цепях называют коммутацией. На схемах цепей коммутацию обычно обозначают в виде ключа со стрелкой (рис. 13.1,а — замыкание, рис. 13.1,б — размыкание). Считают, что коммутация происходит в течение бесконечно малого промежутка времени, т. е. мгновенно. Момент коммутации обычно принимают за начало отсчета времени, т. е. считают, что в момент коммутации  $t=0$ . При этом момент времени, предшествующий непосредственно моменту коммутации, обозначают  $t=0-$ , а момент времени, следующий непосредственно за моментом коммутации, обозначают  $t=0+$ .

В цепях, не содержащих энергоемких элементов (индуктивностей и емкостей), новый установившийся режим, т. е. режим, при котором токи и напряжения являются либо постоянными, либо периодическими функциями времени, наступает непосредственно

за моментом коммутации. Поэтому можно считать, что в таких цепях переходные процессы отсутствуют.

В цепях с энергоемкими элементами переходные процессы продолжаются некоторое время, так как энергии электрических полей конденсаторов  $W_C = CU_C^2/2$  и магнитных полей индуктивных катушек  $W_L = Li^2/2$  вследствие закона непрерывности энергии во времени не могут изменяться скачком.

При анализе переходных процессов в электрических цепях классическим методом составляется система уравнений для мгновенных значений токов и напряжений. Эти уравнения составляются непосредственно по законам Кирхгофа или с помощью других методов расчета цепей, например метода контурных токов или метода узловых потенциалов. При этом используются соотношения между токами и напряжениями в элементах цепи:

$$\left. \begin{aligned} u_r &= ir; \quad u_L = L \frac{di}{dt}; \quad u_C = \frac{1}{C} \int idt; \\ i &= \frac{u_r}{r}; \quad i = \frac{1}{L} \int u_L dt; \quad i = C \frac{du_C}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

В полученной таким образом системе уравнений выбирается основная переменная и исключением других переменных из системы уравнений получают одно уравнение, содержащее только основную переменную. В общем случае для линейных электрических цепей с сосредоточенными параметрами, содержащих элементы  $r$ ,  $L$  и  $C$ , это уравнение является интегро-дифференциальным. Путем повторного дифференцирования этого уравнения можно получить линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, имеющее в общем случае вид

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = \\ = b_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{df(t)}{dt} + b_0 f(t), \end{aligned} \quad (13.2)$$

где  $a_k$  и  $b_k$  — постоянные коэффициенты, зависящие от схемы цепи и параметров ее элементов;

$x(t)$  — выходная величина (ток или напряжение);

$f(t)$  — внешнее воздействие на цепь (источник э.д. с. или тока).

Порядок высшей производной дифференциального уравнения определяет порядок цепи. Так, например, если этот порядок будет первым, то и цепь называют цепью первого порядка и т. д. Решение уравнения (13.2) ищется в виде

$$x(t) = x_{CB}(t) + X_{IP}(t). \quad (-3.3)$$

где  $x_{CB}(t)$  — свободная составляющая — общее решение однородного дифференциального уравнения

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = 0, \quad (13.4)$$

т. е. уравнения (13.2) без правой части;

$X_{PP}(t)$  — принужденная составляющая — частное решение уравнения (13.2) с правой частью.

Свободная составляющая  $x_{CB}(t)$  — это свободные электрические токи или напряжения. Они характеризуют процесс рассеивания или накапливания энергии энергоемкими элементами  $L$  и  $C$  и равны разности переходных и установившихся токов или напряжений.

Принужденная составляющая  $X_{PP}(t)$  характеризует процесс, возникающий в цепи под воздействием внешнего возмущения после окончания переходных процессов. Это установившиеся, т. е. постоянные или периодические, токи и напряжения, которые устанавливаются в электрической цепи после окончания переходных процессов при воздействии на цепь постоянных или периодических э. д. с. или токов.

Решение однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$x_{CB}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t} = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}, \quad (13.5)$$

где  $p_k$  — корни характеристического уравнения

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0; \quad (13.6)$$

$A_k$  — постоянные интегрирования.

Корни характеристических уравнений  $p_k$  у пассивных электрических цепей всегда либо вещественные отрицательные, либо комплексные с отрицательной вещественной частью. Физически это объясняется тем, что свободный процесс происходит за счет энергии, накопленной в элементах  $L$  или  $C$ . С течением времени эта энергия расходуется на необратимые потери (выделяется в виде тепла в активных сопротивлениях), а величина  $x_{CB}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Постоянные интегрирования  $A_k$  определяют из начальных условий — значений токов и напряжений в цепи в момент времени  $t=0+$ , т. е. в момент времени, следующий непосредственно за моментом коммутации.

Для определения начальных условий используют два закона коммутации:

$$4 i_L(0+) = i_L(0-) \text{ и } U_C(0+) = U_C(0-), \quad (13.7)$$

т. е. ток в индуктивности непосредственно после коммутации  $i_L(0+)$  равен току в этой же индуктивности непосредственно перед коммутацией  $i_L(0-)$ , а напряжение на емкости непосред-

ственно после коммутации  $U_C(0+)$  равно напряжению на этой же емкости непосредственно перед коммутацией  $U_C(0-)$ .

Невозможность скачков токов в индуктивностях  $L$  и напряжений на емкостях  $C$  при коммутации следует из закона непрерывности энергии, который утверждает, что энергия во времени не может изменяться скачком.

Начальные условия в электрических цепях могут быть нулевыми или ненулевыми. Нулевые начальные условия будут в том случае, если в момент коммутации  $U_C(0) = 0$  и  $i_L(0) = 0$ . При этом в момент времени, следующий непосредственно за моментом коммутации, ток в индуктивности  $L$  и напряжение на емкости  $C$  будут продолжать оставаться равными нулю, т. е. в момент коммутации индуктивность  $L$  равносильна разрыву цепи, а емкость  $C$  эквивалентна короткому замыканию.

Если в момент коммутации по индуктивности  $L$  протекал ток  $i_L(0)$ , а на емкости  $C$  было напряжение  $U_C(0)$ , то в цепи имеют место ненулевые начальные условия.

Следует отметить, что напряжение на индуктивности  $L$  и ток через емкость  $C$  в момент коммутации могут изменяться скачком, так как они не характеризуют энергию, запасенную в элементах  $L$  и  $C$ .

В последующих подразделах рассмотрим примеры анализа переходных процессов в электрических цепях, имеющие как самостоятельное значение, так и иллюстрирующие сущность классического метода.

### 13.2. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕРАЗВЕТВЛЕННЫХ ЦЕПЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Переходные процессы в цепях первого порядка описываются линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами, имеющими в общем случае вид

$$a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = b_1 \frac{df(t)}{dt} + b_0 f(t).$$

Принужденную составляющую  $X_{пр}(t)$  общего решения этого уравнения (13.3), являющуюся током или напряжением в установившемся режиме, определяют непосредственно из схемы цепи при  $t \rightarrow \infty$  а свободную составляющую  $x_{св}(t)$  ищут в виде

$$x_{св}(t) = A_1 e^{p_1 t}, \quad (13.8)$$

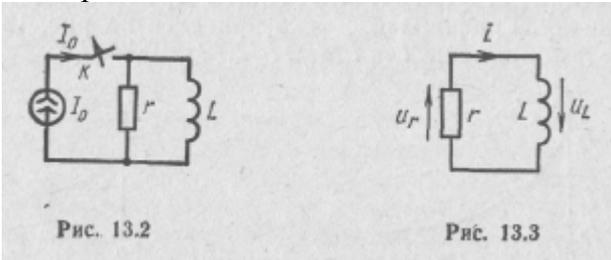
где  $p_1$  — корень характеристического уравнения  $a_1 p + a_0 = 0$ ;

$A_1$  — постоянная интегрирования, определяемая начальными условиями в цепи.

Вначале рассмотрим свободные напряжения и токи, а затем переходные процессы при подключении к цепи источников постоянного и синусоидального тока или напряжения.

### 13.2.1. Свободные напряжения и токи в неразветвленных цепях первого порядка

Методику анализа свободных напряжений и токов в неразветвленных цепях первого порядка рассмотрим на примере цепи, показанной на рис. 13.2. При размыкании ключа  $K$  в изолированном



от внешних источников электрической энергии контуре  $rL$  (рис. 13.3) за счет энергии, запасенной в магнитном поле элемента  $L$ , возникнут свободные напряжения и ток.

В соответствии со вторым законом Кирхгофа для рассматриваемого контура можно записать

$$u_L + u_r = 0.$$

Учитывая, что  $u_L = L \frac{di}{dt}$  и  $u_r = ri$ , получим

$$L \frac{di}{dt} + ri = 0. \quad (13.9)$$

Решение этого однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$i = A_1 e^{p_1 t}. \quad (13.10)$$

Из характеристического уравнения

$$Lp + r = 0$$

найдем

$$p_1 = -r/L = -1/\tau_{II}$$

где  $\tau_{II} = 1/\gamma$  — величина, имеющая размерность времени, называемая постоянной времени цепи.

Подставив  $p_1$  в формулу (13.10), получим

$$i = A_1 e^{-t/\tau_{II}} \quad (13.11)$$

Постоянную интегрирования  $A_1$  найдем из начальных условий, воспользовавшись первым законом коммутации:  $i_L(0+) = i_L(0-) = I_0$ . Подставив это в выражение (13.11), при  $t=0$  получим

$$i(0) = A_1 = I_0.$$

При этом окончательное решение уравнения (13.9) будет иметь вид

$$i = I_0 e^{-t/\tau_{ц}} \quad (13.12)$$

Из полученного выражения видно, что свободный ток в рассматриваемой цепи убывает с течением времени по экспоненциальному закону. График этого тока приведен на рис. 13.4,

При  $t = \tau_{ц}$ , ток в цепи  $i = I_0 / e \approx I_0 / 2,72 \approx 0,368 I_0$ .

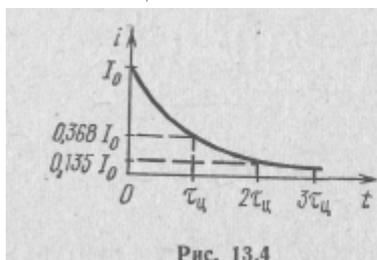


Рис. 13.4

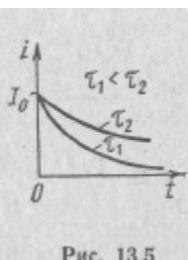


Рис. 13.5

Поэтому постоянную времени цепи  $\tau_{ц}$  можно определить как промежуток времени, по истечении которого экспоненциально убывающая величина уменьшается в  $e \approx 2,72$  раза. Она определяет длительность переходного процесса. Чем больше  $\tau_{ц}$ , тем больше длится переходный процесс (рис. 13.5).

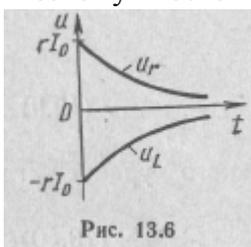


Рис. 13.6

Теоретически переходный процесс в рассматриваемой цепи длится бесконечно долго. Однако его можно считать практически законченным по истечении времени  $t = (3 \div 5)\tau_{ц}$ , когда  $i = (0,05 \div 0,007)I_0$ , т. е. когда значения тока будут составлять  $5 \div 0,7\%$  его начального значения.

Свободные напряжения на активном сопротивлении  $u_r$  и на индуктивности  $u_L$  в рассматриваемой цепи изменяются по закону, аналогичному закону ищминения тока  $i$ :

$$u_r = ri = rI_0 e^{-t/\tau_{ц}} \quad (13.13)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -rI_0 e^{-t/\tau_{ц}} \quad (13.14)$$

Графики этих напряжений приведены на рис. 13.6.

Следует отметить, что эти напряжения в момент времени  $t=0+$  изменяются скачком от нулевых значений до величины, равной  $rI_0$ . Эта величина при больших значениях  $r$  и  $I_0$  может быть очень большой, что может явиться причиной неисправностей электрических цепей, содержащих индуктивности, при их отключении от источников электрической энергии.

### 13.2.2. Переходные процессы в неразветвленных цепях первого порядка с источником постоянного напряжения

Переходные процессы в цепях первого порядка с источником постоянного напряжения могут возникнуть как при подключении источника к цепи, так и при скачкообразном изменении ее схемы или параметров ее элементов. При этом могут иметь место как нулевые, так и ненулевые начальные условия. Методику анализа переходных процессов, возникающих в неразветвленной цепи первого порядка при подключении к ней источника постоянного напряжения при нулевых начальных условиях, рассмотрим на примере цепи  $rL$  (рис. 13.7). На основании второго закона Кирхгофа для этой цепи после коммутации можно записать  $U_L + U_r = E$  или

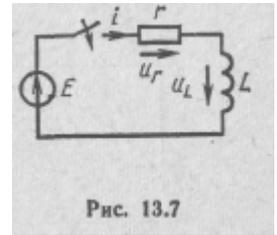


Рис. 13.7

$$L \frac{di}{dt} + ri = E, \quad (13.15)$$

Общее решение этого неоднородного уравнения ищут в виде  $i = i_{CB} + i_{ПП}$ .

Учитывая, что принужденная составляющая тока в рассматриваемой цепи  $i_{ПП} = E/r$ , а свободная составляющая определяется выражением (13.11), получим

$$i = A_1 e^{-t/\tau_{ц}} + E/r, \quad (13.16)$$

где  $\tau_{ц} = L/r$  — постоянная времени цепи.

Постоянную интегрирования  $A_1$  найдем из начальных условий  $i(0) = 0$ . Подставив это в формулу (13.16), при  $t=0$  получим  $0 = A_1 + E/r$ , откуда  $A_1 = -E/r$ . При этом окончательное решение уравнения (13.15) будет иметь вид

$$i = \frac{E}{r} (1 - e^{-t/\tau_{ц}}). \quad (13.17)$$

Напряжение на сопротивлении  $r$  изменяется по аналогичному закону

$$u_r = ri = E (1 - e^{-t/\tau_{ц}}), \quad (13.18)$$

а напряжение на индуктивности  $L$  — по закону

$$u_L = L \frac{di}{dt} = E e^{-t/\tau_{ц}}. \quad (13.19)$$

Кривые изменения  $i$ ,  $i_{CB}$ ,  $i_{ПП}$ ,  $u_L$  и  $u_r$  показаны на рис. 13.8. Из этого рисунка видно, что ток  $i$  и напряжение  $u_r$  в рассматриваемой цепи возрастают по экспоненциальному закону от нулевых значений при  $t=0$  до  $i_{ПП} = E/r$  и  $u_r = E$  при  $t = \infty$ . Напряжение  $u_L$ ,

обусловленное э. д. с. самоиндукции, в момент коммутации скачком возрастает от нулевого значения до величины, равной  $E$ , а затем уменьшается по экспоненциальному закону до нуля при  $t = \infty$ .

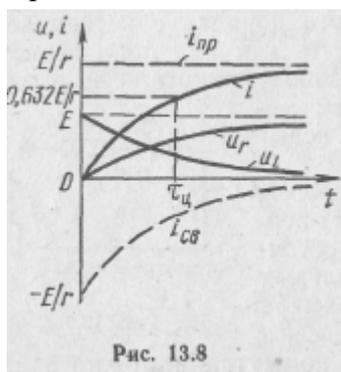


Рис. 13.8

Скорость изменения рассматриваемых токов и напряжений, а следовательно, и длительность переходных процессов зависят от постоянной времени цепи  $\tau_{ц}$ , которую в рассматриваемой цепи можно определить как промежуток времени, по истечении которого ток в цепи возрастает до  $(1 - e^{-1}) \approx 0,632$  своего установившегося значения.

Методику анализа переходных процессов, возникающих в неразветвленной цепи первого порядка при наличии в ней источников постоянного напряжения при скачкообразном изменении схемы цепи, рассмотрим на примере цепи, приведенной на рис. 13.9.

После коммутации весь ток в рассматриваемой цепи будет проходить через короткозамкнутую перемычку, минуя

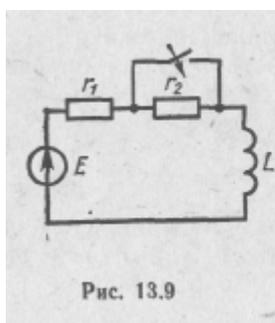


Рис. 13.9

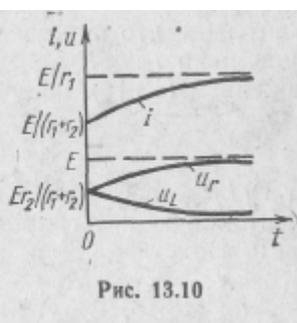


Рис. 13.10

сопротивление  $r_2$ . При этом в соответствии со вторым законом Кирхгофа для рассматриваемой цепи можно записать  $u_{r_1} + u_{L_2} = E$  или

$$r_1 i + L \frac{di}{dt} = E. \quad (13.20)$$

Учитывая, что принужденная составляющая тока в цепи  $i_{пп} = E/r_1$ , общее решение уравнения (13.20) можно записать в виде

$$i = i_{пп} + i_{св} = E/r_1 + A_1 e^{-t/\tau_{ц}}, \quad (13.21)$$

где  $\tau_{ц} = L/r_1$  — постоянная времени цепи.

Так как начальное значение тока в цепи  $i(0) = E/(r_1+r_2)$ , то из выражения (13.21) при  $t=0$  получим  $E/(r_1+r_2) = E/r_1 + A_1$

откуда  $A_1 = -Er_2 / r_1(r_1 + r_2)$ . Подставив это в формулу (13.21), получим

$$i = \frac{E}{r_1} \left( 1 - \frac{r_2}{r_1 + r_2} e^{-t/\tau_u} \right). \quad (13.22)$$

Напряжения  $u_{r_1}$  и  $u_{L_2}$  будут изменяться по законам:

$$u_{r_1} = ir_1 = E \left( 1 - \frac{r_2}{r_1 + r_2} e^{-t/\tau_u} \right); \quad (13.23)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \frac{Er_2}{r_1 + r_2} e^{-t/\tau_u}. \quad (13.24)$$

Графики тока и напряжений в рассматриваемой цепи показаны на рис. 13.10,

### 13.2.3. Переходные процессы в неразветвленных цепях первого порядка с источниками синусоидального напряжения

Особенности методики анализа переходных процессов в неразветвленных цепях первого порядка с источниками синусоидального напряжения рассмотрим на примере цепи  $rC$  при подключении ее к источнику синусоидального напряжения  $e = E_m \sin(\omega t + \psi)$  (рис. 13.11).

В соответствии со вторым законом Кирхгофа для рассматриваемой цепи можно записать  $u_r + u_C = E_m \sin(\omega t + \psi)$ . Учитывая, что  $u_r = ri = rC \frac{du_C}{dt}$ ,

получим

$$rC \frac{du_C}{dt} + u_C = E_m \sin(\omega t + \psi). \quad (13.25)$$

Свободная составляющая напряжения на емкости, являющаяся решением уравнения (13.25) без правой части, имеет вид

$$u_{C\text{св}} = A_1 e^{p_1 t}, \quad (13.26)$$

где  $p_1 = -1/rC$  — корень характеристического уравнения цепи  $rCp + 1 = 0$ .

Обозначив  $\tau_{11} = rC$ , получим

$$u_{C\text{св}} = A_1 e^{-t/\tau_{11}}. \quad (13.27)$$

Принужденная составляющая напряжения на емкости будет синусоидальной функцией времени:

$$u_{C\text{пр}} = U_m \sin(\omega t + \psi - \varphi - \pi/2), \quad (13.28)$$

где  $U_m = E_m / \omega C \sqrt{r^2 + (1/\omega C)^2}$ ;

$$\varphi = -\arctg \frac{1}{\omega Cr}.$$

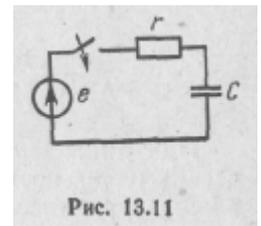


Рис. 13.11

При этом общее решение уравнения (13.25) будет иметь вид

$$u_C = A_1 e^{-t/\tau_u} + U_m \sin(\omega t + \psi - \varphi - \pi/2). \quad (13.29)$$

Постоянную интегрирования  $A_1$  найдем из начальных условий  $u_C(0)=0$ . Подставив это в выражение (13.29), при  $t=0$  получим  $A_1 + U_m \sin(\psi - \varphi - \pi/2) = 0$ , откуда  $A_1 = -U_m \sin(\psi - \varphi - \pi/2)$ .

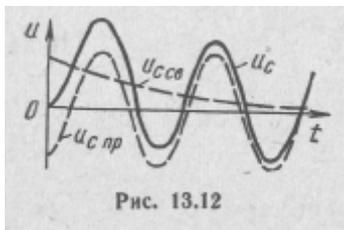


Рис. 13.12

При этом получим

$$u_C = U_m \left[ \sin(\omega t + \psi - \varphi - \pi/2) - e^{-t/\tau_u} \sin(\psi - \varphi - \pi/2) \right]. \quad (13.30)$$

Из этого выражения видно, что переходные процессы в рассматриваемой цепи зависят от начальной фазы синусоидального напряжения  $\psi$ .

При  $\psi = \varphi \pm \pi/2$  в цепи сразу наступает установившийся режим без переходного процесса.

При  $\psi = \varphi$  свободное напряжение на емкости будет максимальным (рис. 13.12), а следовательно, и переходный процесс в цепи будет более продолжительным.

### 13.3. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В РАЗВЕТВЛЕННЫХ ЦЕПЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

При анализе переходных процессов в разветвленных электрических цепях возникает необходимость в составлении дифференциальных уравнений цепи не только по второму закону Кирхгофа, как это делалось в рассмотренных выше неразветвленных цепях, но и по первому закону Кирхгофа или же в использовании общих методов расчета сложных цепей, например метода контурных токов или метода узловых потенциалов.

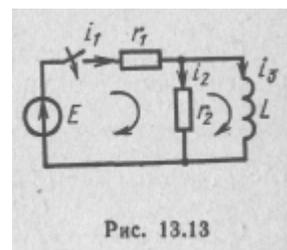


Рис. 13.13

Методику анализа переходных процессов в разветвленных цепях рассмотрим на примере цепи, схема которой приведена на рис. 13.13, при подключении к ней источника постоянного напряжения. В соответствии с первым и вторым законами Кирхгофа для рассматриваемой цепи можно записать:

$$\left. \begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0; \\ r_1 i_1 + r_2 i_2 &= E; \\ L \frac{di_3}{dt} - r_2 i_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.31)$$

Исключив из этой системы уравнений токи  $i_1$  и  $i_2$ , получим уравнение для тока  $i_3$

$$L(1 + r_1/r_2) \frac{di_3}{dt} + r_1 i_3 = E.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$i_3 = i_{3\text{пр}} + i_{3\text{св}} = i_{3\text{пр}} + A_1 e^{-t/\tau_{\text{ц}}},$$

где  $\tau_{\text{ц}} = \frac{L(1 + r_1/r_2)}{r_1} = \frac{L(r_1 + r_2)}{r_1 r_2} = \frac{L}{r_3};$   
 $r_3 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$

Из схемы цепи видно, что в установившемся режиме ветвь с сопротивлением  $r_2$  будет замыкаться накоротко ветвью с индуктивностью  $L$ . Поэтому

$$i_{3\text{пр}} = E/r \text{ и } i_3 = E/r_1 + A_1 e^{-t/\tau_{\text{ц}}}$$

Считая, что в цепи имеют место нулевые начальные условия, т. е. что  $i_3(0)=0$ , при  $t=0$  получим  $i(0) = E/r_1 + A_1 = 0$ , откуда  $A_1 = -E/r_1$ . При этом окончательно получим

$$i_3 = \frac{E}{r_1} (1 - e^{-t/\tau_{\text{ц}}}), \quad (13.32)$$

а напряжение на индуктивности и токи  $i_2$  и  $i_1$  будут равны:

$$u_L = L \frac{di_3}{dt} = \frac{Er_2}{r_1 + r_2} e^{-t/\tau_{\text{ц}}}, \quad (13.33)$$

$$i_2 = \frac{u_L}{r_2} = \frac{E}{r_1 + r_2} e^{-t/\tau_{\text{ц}}}, \quad (13.34)$$

$$i_1 = i_2 + i_3 = \frac{E}{r_1} \left(1 - \frac{r_2}{r_1 + r_2} e^{-t/\tau_{\text{ц}}}\right). \quad (13.35)$$

Графики токов в цепи показаны на рис. 13.14. Все эти токи изменяются по экспоненциальному закону, причем постоянная времени для всех ветвей цепи одна и та же.

Как из рассмотренного выше примера, так и из произведенного ранее анализа переходных процессов в неразветвленных цепях первого порядка следует, что расчет переходных процессов в цепях первого порядка можно производить без составления дифференциальных уравнений цепи, записав сразу его общее решение, имеющее вид

$$x(t) = x_{\text{пр}}(t) + A_1 e^{-t/\tau_{\text{ц}}}. \quad (13.36)$$

Так как характеристическое уравнение, из которого определяется постоянная времени цепи, не зависит от наличия в цепи внешних источников энергии, то при ее определении можно считать, что в цепи имеют место только свободные токи и напряже-

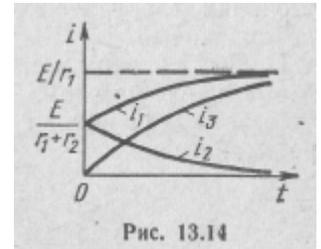


Рис. 13.14

ния, возникающие за счет энергии, запасенной в элементах  $L$  или  $C$ . При этом постоянную времени цепи можно вычислить по формуле

$$\tau_{ц} = L/r_{э} \text{ или } \tau_{ц} = r_{э}C,$$

где  $r_a$  — эквивалентное сопротивление цепи между точками, к которым подключены элементы  $L$  или  $C$ , при условии, что внешние источники электрической энергии заменены их внутренними сопротивлениями.

Пользуясь этим правилом, для рассмотренной выше разветвленной цепи можно записать  $\tau_{ц} = L/r_{э} = L(r_1 + r_2)/r_1r_2$ , что соответствует значению, полученному выше из дифференциального уравнения цепи.

### 13.4. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕРАЗВЕТВЛЕННЫХ ЦЕПЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Переходные процессы в цепях второго порядка описываются линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами, имеющим в общем случае вид

$$a_2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0x(t) = b_2 \frac{d^2f(t)}{dt^2} + b_1 \frac{df(t)}{dt} + b_0f(t). \quad (13.37)$$

Принужденную составляющую решения этого уравнения ищут в виде, подобном его правой части, а свободную составляющую в виде

$$x_{св}(t) = A_1e^{p_1t} + A_2e^{p_2t}, \quad (13.38)$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — корни характеристического уравнения цепи  $a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0$ ;

$A_1$  и  $A_2$  — постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями в цепи.

Методику анализа переходных процессов в неразветвленных цепях второго порядка рассмотрим на примере цепи, состоящей из последовательно включенных элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$ ,

#### 13.4.1. Свободные напряжения и токи в цепи $rLC$

Свободные напряжения и токи в цепи, состоящей из последовательно включенных элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$ , могут возникнуть, например, при подключении конденсатора  $C$ , предварительно заряженного до величины источника э. д. с.  $E$ , к цепи с последовательным соединением элементов  $r$  и  $L$  (рис. 13.15). В соответствии со вторым законом Кирхгофа для получившейся при этом цепи можно записать

$$u_r + u_L + u_C = 0$$

Учитывая, что  $u_r = ri$ ,  $u_L = L \frac{di}{dt}$  и  $i = C \frac{du_c}{dt}$ , получим

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + rC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0. \quad (13.39)$$

Разделив это уравнение на  $LC$ , будем иметь

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = 0. \quad (13.40)$$

Обычно вводят обозначения:

$$\delta = r/2L \text{ и } \omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

При этом уравнение (13.40) будет иметь вид

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\delta \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0. \quad (13.41)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее выражению (13.41),

$$p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0$$

имеет корни

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad (13.42)$$

а решение уравнения (13.41) имеет вид

$$u_c = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \quad (13.43)$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями:  $u_c(0) = E$  и  $i(0) = 0$ .

Подставив первое начальное условие  $u_c(0) = E$  в выражение (13.43), при  $t=0$  получим

$$E = A_1 + A_2. \quad (13.44)$$

Для того чтобы использовать второе начальное условие, запишем выражение для тока в цепи с учетом формулы (13.43):

$$i = C \frac{du_c}{dt} = C (p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}).$$

Подставив сюда  $i(0) = 0$ , при  $t=0$  получим

$$p_1 A_1 + p_2 A_2 = 0. \quad (13.45)$$

Решив систему уравнений, состоящую из выражений (13.44) и (13.45), будем иметь:-

$$A_1 = \frac{p_2 E}{p_2 - p_1} \text{ и } A_2 = -\frac{p_1 E}{p_2 - p_1}.$$

Подставив это в формулу (13.43), получим

$$u_c = \frac{E}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_2 t} - p_1 e^{p_1 t}). \quad (13.46)$$

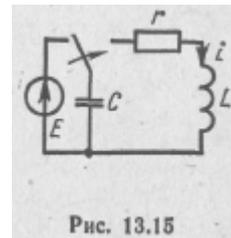


Рис. 13.15

Ток в цепи

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{C p_1 p_2 E}{p_2 - p_1} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Так как произведение корней  $p_1$  и  $p_2$  характеристического уравнения равно его свободному члену, т. е.  $p_1 p_2 = 1/LC$ , то

$$i = \frac{E}{L(p_2 - p_1)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \quad (13.47)$$

При этом напряжение на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \frac{E}{p_2 - p_1} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}). \quad (13.48)$$

Характер изменения свободного тока  $i$ , напряжений на емкости  $u_C$  и на индуктивности  $u_L$  зависит от вида корней  $p_1$  и  $p_2$ , которые определяются параметрами цепи и могут быть:

- 1) вещественными и разными, если  $\delta > \omega_0$  или  $r/2L > 1/\sqrt{LC}$ , откуда  $r > 2\rho$ , где  $\rho = \sqrt{L/C}$ ;
- 2) комплексно-сопряженными, если  $\delta < \omega_0$  или  $r < 2\rho$ ;
- 3) вещественными и равными, если  $\delta = \omega_0$  или  $r = 2\rho$ .

Рассмотрим эти возможные три случая.

1.  $r > 2\rho$ . В этом случае, как видно из выражений (13.46) — (13.48), свободные напряжения и ток являются суммами двух экспонент (рис. 13.16). Ток не меняет знака, т.е. является аperiodическим. Поэтому и рассматриваемую цепь в этом случае называют аperiodической.

2.  $r < 2\rho$ . Для получения закона изменения тока в этом случае в выражении для корней характеристического уравнения (13.42) введем обозначение  $\omega_{CB} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ .

При этом получим

$$p_{1,2} = -\delta \pm \omega_{CB}. \quad (13.49)$$

Подставив это в формулу (13.47), будем иметь

$$i = \frac{E e^{-\delta t}}{\omega_{CB} L} \frac{e^{j\omega_{CB} t} - e^{-j\omega_{CB} t}}{2j} = -\frac{E}{\omega_{CB} L} e^{-\delta t} \sin \omega_{CB} t. \quad (13.50)$$

Обозначив  $I_0 = E / \omega_{CB} L$ , получим

$$i = I_0 e^{-\delta t} \sin \omega_{CB} t. \quad (13.51)$$

Из полученного выражения, а также из графика, приведенного на рис. 13.17, видно, что свободный ток в цепи в рассматриваемом случае изменяется по закону затухающих колебаний. Поэтому и контур  $rLC$  в рассматриваемом случае называют колебательным контуром. Скорость затухания колебаний определяется экспоненциальным множителем  $e^{-\delta t}$ , где коэффициент  $\delta$  является коэффициентом затухания.

Частота колебаний свободного тока в контуре сов, называемая также собственной частотой контура, зависит от параметров контура:

$$\omega_{св} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{1/LC - r^2/4L^2} = \omega_0 \sqrt{1 - (d/2)^2}, \quad (13.52)$$

где  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  -резонансная частота;

$$d = 1/Q = r\sqrt{L/C} = r/\rho \text{ — затухание.}$$

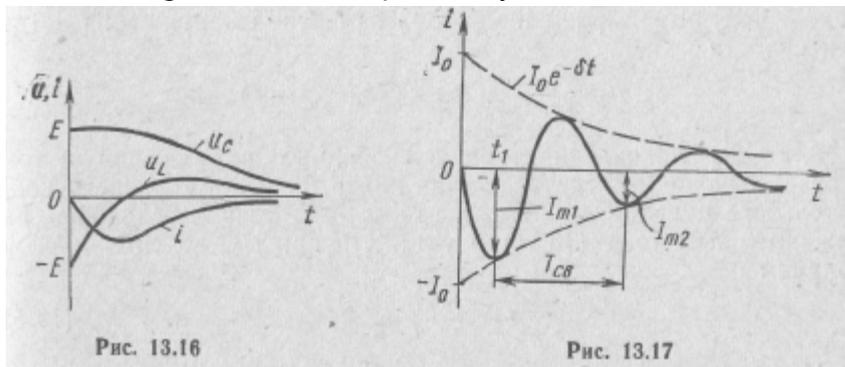


Рис. 13.16

Рис. 13.17

Затухание  $d$  контуров, применяемых на практике, обычно мало. Поэтому в большинстве случаев можно считать, что  $\omega_{св} = \omega_0$ , т. е. частота свободных колебаний контура равна его резонансной частоте.

Отношение двух следующих друг за другом максимальных значений тока одного знака (см. рис. 13.17) называют декрементом колебания:

$$\Delta = \frac{I_{m1}}{I_{m2}} = \frac{I_0 e^{-\delta t_1}}{I_0 e^{-\delta(t_1 + T_{св})}} = e^{\delta T_{св}}, \quad (13.53)$$

где  $T_{св} = 2\pi / \omega_{св}$  — период свободных колебаний.

Величину, равную натуральному логарифму от декремента колебания, называют логарифмическим декрементом колебания:

$$\mathcal{D} = \ln \Delta = \delta T_{св}. \quad (13.54)$$

Для получения закона изменения  $u_c$  в рассматриваемом случае подставим формулу (13.49) в выражение (13.46). При этом: получим

$$u_c = \frac{E}{2\omega_{св}} e^{-\delta t} [(\omega_{св} + j\delta) e^{-j\omega_{св} t} + (\omega_{св} - j\delta) e^{j\omega_{св} t}].$$

Представив  $\omega \pm j\delta$  в виде

$$\omega \pm j\delta = \sqrt{\omega_{св}^2 - \delta^2} e^{\pm j\theta} = \omega_0 e^{\pm j\theta}.$$

где  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ;  $\theta = \operatorname{arctg} \frac{\delta}{\omega_{св}}$ , получим

$$u_C = \frac{\omega_0}{\omega_{св}} E e^{-\delta t} \frac{e^{j(\omega_{св}t - \theta)} + e^{-j(\omega_{св}t - \theta)}}{2},$$

или

$$u_C = \frac{\omega_0}{\omega_{св}} E e^{-\delta t} \cos(\omega_{св}t - \theta). \quad (13.55)$$

Аналогичным образом, воспользовавшись формулой (13.48), можно получить выражение закона изменения напряжения на индуктивности

$$u_L = -\frac{\omega_0}{\omega_{св}} E e^{-\delta t} \cos(\omega_{св}t - \theta). \quad (13.56)$$

3.  $r=2r$ . Законы изменения свободных напряжений и тока в рассматриваемом случае можно найти, перейдя к пределу колебательного разряда емкости, когда  $\omega_{св} \rightarrow 0$ . Воспользовавшись выражением для тока (13.51) и учтя, что при  $\omega_{св} \rightarrow 0$   $\sin \omega_{св}t \rightarrow \omega_{св}t$ , получим

$$i = -\frac{E}{L} t e^{-\delta t}. \quad (13.57)$$

Напряжение на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = E e^{-\delta t} (\delta t - 1). \quad (13.58)$$

Напряжение на емкости можно найти из основного уравнения цепи  $u_r + u_L + u_C = 0$ :

$$u_C = -u_r - u_L = -ri - u_L.$$

Подставив сюда выражения (13.57) и (13.58) и учтя, что  $\delta = r/2L$ , получим

$$u_C = E e^{-\delta t} (1 + \delta t). \quad (13.59)$$

Графики  $u_C$ ,  $i$  и  $u_L$ , в рассматриваемом случае будут иметь такой же вид, как и в первом случае (см. рис. 13.16). Ток не меняет знака, поэтому процесс в цепи является аperiодическим. Рассматриваемый процесс в цепи называют критическим, так как он является граничным между аperiодическим и колебательным процессами. Длительность переходных процессов в этом режиме будет наименьшей. Сопротивление  $r=2r$  называют критическим сопротивлением.

### 13.4.2. Подключение цепи $rLC$ к источнику постоянного напряжения

При подключении цепи  $rLC$  к источнику постоянного напряжения (рис. 13.18) дифференциальное уравнение для напряжения на емкости будет отличаться от уравнения (13.41) тем, что в правой

части этого уравнения в рассматриваемом случае будет не нуль, а  $\omega_0^2 E$ :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\beta \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E. \quad (13.60)$$

Так как в рассматриваемом случае принужденная составляющая напряжения на емкости  $u_{Cпр} = E$ , а свободная составляющая, как и в предыдущем случае, определяется выражением (13.43), то общее решение уравнения (13.60) будет иметь вид

$$u_C = u_{Cпр} + u_{Cсв} = E + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (13.61)$$

Подставив сюда начальное значение напряжения на емкости  $u_C(0)=0$ , при  $t = 0$  получим

$$A_1 + A_2 = -E. \quad (13.62)$$

Взяв производную от выражения (13.61) и используя второе начальное условие  $i(0)=0$ , при  $t=0$  получим второе уравнение для определения постоянных интегрирования

$$p_1 A_1 + p_2 A_2 = 0. \quad (13.63)$$

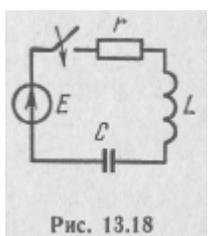


Рис. 13.18

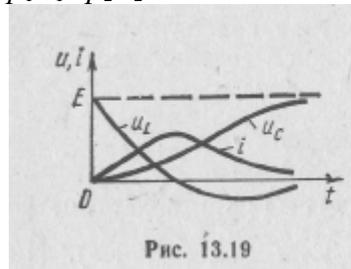


Рис. 13.19

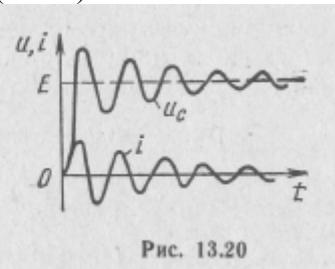


Рис. 13.20

Из системы уравнений (13.62) и (13.63) найдем:

$$A_1 = -\frac{p_2 E}{p_2 - p_1} \quad \text{и} \quad A_2 = \frac{p_1 E}{p_2 - p_1}.$$

Подставив это в формулу (13.61), получим

$$u_C = E \left( 1 - \frac{p_2}{p_2 - p_1} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \right). \quad (13.64)$$

При этом ток в цепи и напряжение на индуктивности будут изменяться по законам:

$$i = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{E}{L(p_2 - p_1)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \quad (13.65)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -\frac{E}{p_2 - p_1} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}). \quad (13.66)$$

Характер переходного процесса в рассматриваемой цепи, так же как и в предыдущем случае, будет зависеть от вида корней характеристического уравнения и может быть аperiodическим (рис. 13.19) либо колебательным (рис. 13.20). В последнем случае

напряжение на емкости может достигать величины, равной почти удвоенному значению напряжения источника, подключаемого к цепи.

### 13.4.3. Подключение цепи $rLC$ к источнику синусоидального напряжения

Если к цепи  $rLC$  (см. рис. 13.18) вместо источника постоянного напряжения  $E$  подключить источник синусоидального напряжения  $e = E_m \sin(\omega t + \psi)$ , то дифференциальное уравнение цепи (13.60) будет иметь вид

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\delta \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E_m \sin(\omega t + \psi). \quad (13.67)$$

Принужденная составляющая решения этого уравнения равна напряжению на емкости в установившемся режиме:

$$u_{C \text{ пр}} = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_C),$$

где  $U_{Cm} = E_m / \omega C \sqrt{r^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ ;  
 $\psi_C = \psi - \varphi - \pi/2$ ;  
 $\varphi = \arctg [(\omega L - 1/\omega C)/r]$ .

Ограничившись рассмотрением случая колебательного характера переходных процессов, для свободной составляющей в соответствии с выражением (13.55) можем записать

$$u_{CCB} = A e^{-\delta t} \sin(\omega_{CB} t + \theta),$$

где  $A$  и  $\theta$  — постоянные интегрирования.

При этом общее решение уравнения (13.67) будет иметь вид

$$u_C = u_{C \text{ пр}} + u_{CCB} = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_C) + A e^{-\delta t} \sin(\omega_{CB} t + \theta). \quad (13.68)$$

Ток в цепи

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \omega C U_{Cm} \cos(\omega t + \psi_C) + CA e^{-\delta t} [-\delta \sin(\omega_{CB} t + \theta) + \omega_{CB} \cos(\omega_{CB} t + \theta)].$$

Для высокодобротного контура, настроенного на частоту источника подключаемого к контуру напряжения, можно считать, что  $\omega = \omega_{CB} \approx \omega_0$ , и  $\omega = \omega_{CB} \approx \omega_0$ . При этом, пренебрегая первым слагаемым в квадратных скобках в выражении для тока, получим

$$i \approx \omega C U_{Cm} \cos(\omega t + \psi_C) + \omega C A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \theta). \quad (13.69)$$

Считая, что начальные условия в цепи являются нулевыми, из выражений (13.68) и (13.69) получим два уравнения для определения постоянных интегрирования:

$$u_C(0) = U_{Cm} \sin \psi_C + A \sin \theta = 0;$$

$$i(0) = U_{Cm} \cos \psi_C + A \cos \theta = 0,$$

из которых следует, что  $\psi_C = \theta$  и  $\psi_C = \theta$

Подставив это в формулы (13.68) и (13.69), при  $\omega = \omega_{CB}$  получим:

$$u_c = U_{cm} (1 - e^{-\delta t}) \sin(\omega t + \psi_c); \quad (13.70)$$

$$i = I_m (1 - e^{-\delta t}) \cos(\omega t + \psi_c), \quad (13.71)$$

где  $I_m = \omega C U_{cm}$ .

График напряжения на емкости для рассматриваемого случая, когда  $\omega = \omega_{CB}$ , получившего название изохронизма, показан на

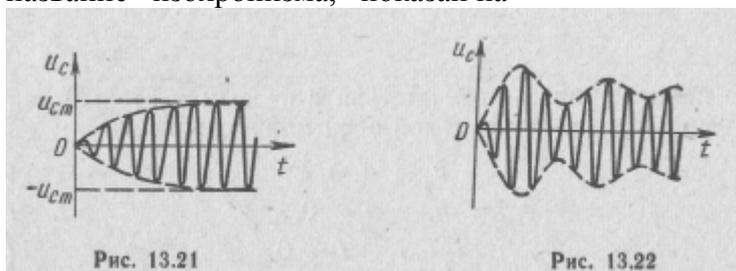


рис. 13.21. Амплитуда напряжения на емкости нарастает по закону  $1 - e^{-\delta t}$ , асимптотически приближаясь к значению, равному амплитуде этого напряжения в установившемся режиме. Аналогичным образом изменяется и амплитуда тока в цепи. Длительность переходного процесса определяется коэффициентом затухания  $\delta$ . Чем больше  $\delta$ , тем быстрее заканчивается переходный процесс. Так как

$$\delta = \frac{r}{2L} = \frac{r\omega_0}{2L\omega_0} = \frac{r\omega_0}{2\rho} = \frac{\omega_0}{2Q},$$

то чем больше добротность контура  $Q$ , тем меньше  $\delta$ , а следовательно, тем больше длительность переходного процесса в колебательном контуре, а из обратной пропорциональной зависимости между шириной полосы пропускания колебательного контура и его добротностью следует, что длительность переходного процесса в контуре обратно пропорциональна ширине его полосы пропускания.

В случае если частота  $\omega$  источника напряжения не точно совпадает с частотой свободных колебаний в контуре  $\omega_{CB}$ , напряжение на емкости и ток в цепи будут представлять собой суммы двух колебаний с разными частотами, амплитуда одного из которых убывает по экспоненциальному закону. При этом возникают биения, частота которых равна разности частот  $\omega$  и  $\omega_{CB}$  (рис. 13.22).

### 13.5. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В РАЗВЕТВЛЕННЫХ ЦЕПЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Методику анализа переходных процессов в разветвленных цепях второго порядка рассмотрим на примере цепи, схема которой приведена на рис. 13.23, при подключении к ней источника постоянного

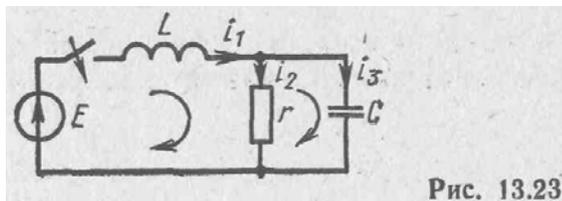


Рис. 13.23

янного напряжения. В соответствии с первым и вторым законами Кирхгофа для рассматриваемой цепи можно записать:

$$u_L + u_r = E; \quad (13.72)$$

$$u_C - u_r = 0; \quad (13.73)$$

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0. \quad (13.74)$$

Из этой системы уравнений получим одно уравнение для напряжения на емкости  $u_C$ . Сложив выражения (13.72) и (13.73) и учитывая, что  $u_L = L \frac{di_1}{dt}$ , будем иметь

$$L \frac{di_1}{dt} + u_C = E. \quad (13.75)$$

Учитывая, что  $i_2 = C \frac{du_C}{dt}$  и  $i_3 = C \frac{du_C}{dt}$ , из формулы (13.74) получим  $i_1 = \frac{u_C}{r} + C \frac{du_C}{dt}$ .

Подставив это в выражение (13.75), будем иметь

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{L}{r} \frac{du_C}{dt} + u_C = E.$$

Разделив обе части этого уравнения на  $LC$  и обозначив  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  и  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , окончательно получим

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\delta \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E. \quad (13.76)$$

Так как это уравнение аналогично уравнению для напряжения на емкости в неразветвленной цепи  $rLC$  при подключении к ней источника постоянного напряжения (13.60), а принужденные составляющие и начальные условия в цепях являются также ана-

логичными, то и решения этих уравнений будут одинаковыми (13.64):

$$u_C = E \left( 1 - \frac{p_2}{p_2 - p_1} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \right).$$

Характер переходного процесса в рассматриваемой цепи, так же как и в неразветвленной цепи  $rLC$ , зависит от вида корней характеристического уравнения и может быть как апериодическим, так и колебательным.

## 14. МЕТОД ИНТЕГРАЛА СВЕРТКИ

### 14.1. ПРИНЦИП НАЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Принцип наложения является одним из важнейших свойств линейных цепей и систем. Он является следствием линейности их уравнений. Этот принцип позволяет искать общее решение линейных уравнений как линейную комбинацию, т. е. наложение более простых частных решений. В применении к цепям он формулируется так: реакция линейной цепи на сумму воздействий равна сумме ее реакций на каждое из воздействий в отдельности.

#### Пример 4.1.

Найти ток в последовательном колебательном контуре при воздействии на его вход прямоугольного видеоимпульса (рис. 14.1, в).

Решение.

1. Заданное воздействие  $u(t)$  представим в виде наложения двух более простых функций (рис. 14.1,б):

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t).$$

Каждая из этих функций представляет ступенчатое воздействие. Функция  $u_1(t)$  соответствует включению контура в момент времени  $t=0$  на постоянное напряжение  $U_m$ , а  $u_2(t)$ —его включению в момент  $t=t_H$  на напряжение  $-U_m$ . В сумме действие этих двух напряжений эквивалентно заданному воздействию.

2. Известно, что при включении последовательного колебательного контура на постоянное напряжение  $U_m$  в нем появляется ток

$$i_1(t) = \frac{U_m}{\omega_{св} L} e^{-\delta t} \sin \omega_{св} t.$$

Если же контур включить в момент  $t=t_H$  на напряжение  $-U_m$ , то в нем появится ток

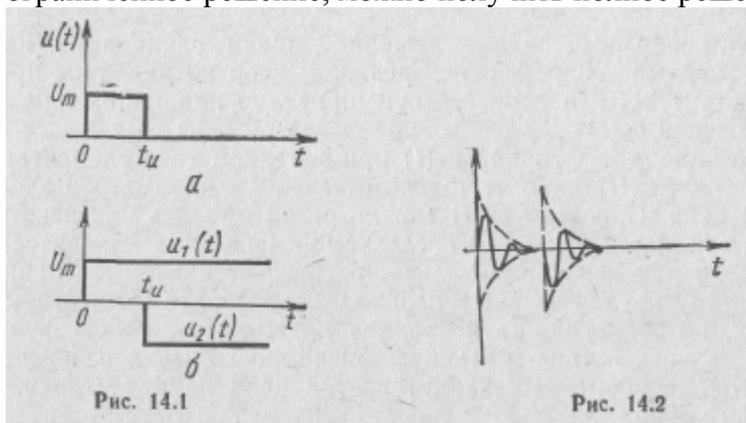
$$i_2(t) = \frac{-U_m}{\omega_{св} L} e^{-\delta(t-t_H)} \sin [\omega_{св}(t-t_H)].$$

3. Значение тока в контуре при заданном воздействии находим наложением двух частных решений (рис. 14.2):

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{U_m}{\omega_{св} L} [e^{-\delta t} \sin \omega_{св} t - e^{-\delta(t-t_H)} \sin \omega_{св}(t-t_H)].$$

Обычно при решении любой сложной задачи удается выделить наиболее благоприятный случай, т. е. случай более простой, чем

общий, приводящий к частному решению. Такое решение легко получается, но в общем случае силы не имеет. Затем, объединяя путем наложения частные случаи, к которым применимо ограниченное решение, можно получить полное решение, пригодное в общем случае.



Принцип наложения является отражением одного из общих методов научного исследования, в основе которого лежит разбиение сложной задачи на ряд более простых. Он лежит в основе многих методов расчета и анализа процессов в линейных цепях и системах. К их числу относится, например, классический временной метод анализа переходных процессов. Этим методом весь процесс рассматривается как наложение двух режимов: свободного и вынужденного, а полное решение неоднородного дифференциального уравнения — как сумма полного решения однородного и частного решения неоднородного уравнения. Другим примером является классический спектральный метод, получивший широкое применение как в теории цепей, так и в технике эксперимента. В его основе лежит применение ряда и интеграла Фурье, которые позволяют представить входной сигнал суммой простых гармонических составляющих.

В случае когда на линейную цепь действует сигнал сложной формы и требуется найти ее реакцию как временную функцию, т. е. определить характер переходного процесса или сигнала на выходе цепи, классический временной метод малоэффективен. Для решения подобных задач используется метод интеграла свертки, основанный также на принципе наложения. Идея подхода к решению задачи этим методом следующая. Допустим, что внешнее воздействие  $x(t)$  можно представить совокупностью более простых, аналитически однотипных функций  $X_k(t)$ , т.е.

$$x(t) = \sum_k x_k(t). \quad (14.1)$$

Если найти реакцию исследуемой линейной цепи  $y_k(t)$  на воздействие  $x_k(t)$ , то на основании принципа наложения можно утверждать, что реакция цепи  $y(t)$  на заданное воздействие  $x(t)$  равна сумме реакций  $y_k(t)$ , т. е.

$$y(t) = \sum_k y_k(t). \quad (14.2)$$

Таким образом, полное решение задачи распадается на два этапа: первый — определение реакции цепи на заданное простое воздействие  $x_k(t)$  и второй — суммирование или наложение частных решений  $y_k(t)$ .

Очевидно, вид функции  $y_k(t)$  при заданном типе элементарного воздействия  $x_k(t)$  зависит только от схемы и параметров электрической цепи. При этом  $y_k(t)$  можно рассматривать как некоторую временную характеристику исследуемой цепи. Она находится аналитически или экспериментально: расчетным или опытным путем.

Систему функций  $x_k(t)$  необходимо выбрать так, чтобы, во-первых, их совокупность позволяла представить любую функцию внешнего воздействия, имеющую физический смысл, и, во-вторых, определение временных характеристик цепи не представляло бы большого труда.

В качестве элементарных воздействий применяется несколько стандартных типовых сигналов. Реакция цепи на каждый из них представляет разновидности временных характеристик.

## 14.2. ТИПОВЫЕ ИМПУЛЬСНЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

При исследовании динамических свойств линейных цепей и систем в качестве типовых элементарных воздействий обычно используется единичная ступенчатая функция  $1(t)$  и дельта-функция  $\delta(t)$ .

**Единичная ступенчатая функция**  $1(t)$ , называемая также функцией Хевисайда или функцией включения (рис. 14.3, а), имеет значения:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0; \\ 1, & \text{при } t > 0 \end{cases} \quad (14.3)$$

и обычно неопределенна при  $t=0$ .

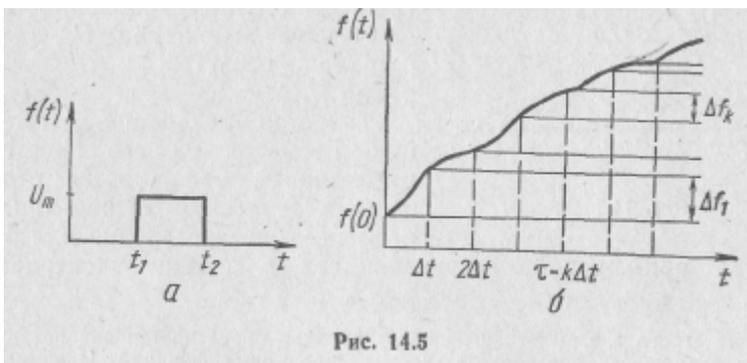
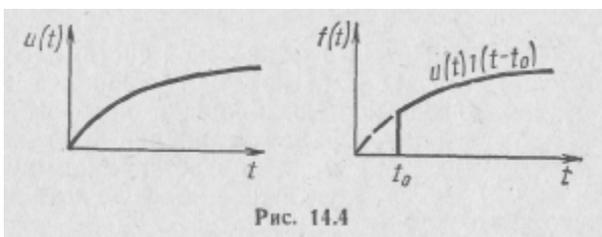
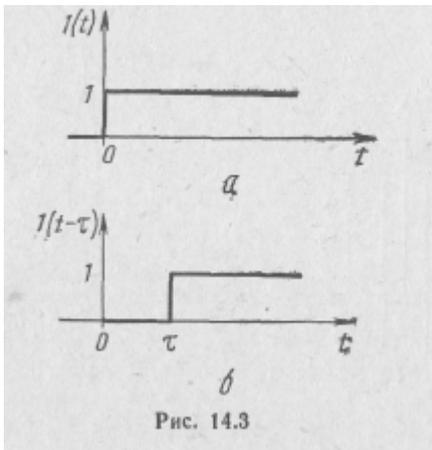
При смещении такой функции вправо по оси абсцисс на время  $\tau$  (рис. 14,3, б) ее можно выразить в виде

$$1(t - \tau) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < \tau; \\ 1, & \text{при } t > \tau. \end{cases} \quad (\text{рис. 14.4})$$

Возникновение ступенчатых сигналов весьма типично. В теории цепей они соответствуют, например, включению постоянного напряжения на вход устройства при замыкании ключа. Если цепь включается в момент  $t=t_0$  на напряжение  $u(t)$ , то это соответствует воздействию вида  $f(t)=u(t) \cdot 1(t-t_0)$  (рис. 14.4),

С помощью единичных ступенчатых функций можно представить большое число разнообразных сигналов. Например, прямоугольный импульс можно описать (рис. 14.5, а) разностью

$$f(t) = U_m [1(t - t_1) - 1(t - t_2)].$$



а более сложный сигнал — суммой  $n$  ступенчатых функций (рис. 14.5,б)

$$f(t) = f(0) \cdot 1(t) + \sum_{k=1}^n \Delta f_k \cdot 1(t - k\Delta t), \quad (14.5)$$

где

$$\Delta f_k = f(k\Delta t) - f[(k-1)\Delta t] = f(\tau) - f(\tau - \Delta t). \quad (14.6)$$

**Дельта-функция**  $\delta(t)$ , или функция Дирака, может быть представлена по-разному. С точки зрения инженера, желающего ви-

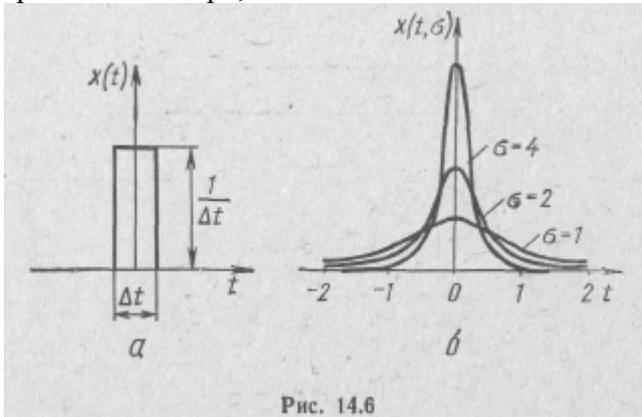


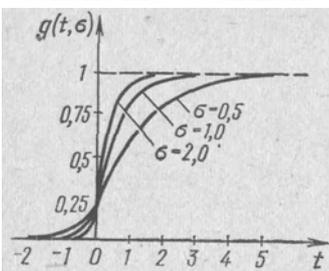
Рис. 14.6

деть  $\delta(t)$  -функцию как сигнал в физической системе, функция Дирака представляет импульс с бесконечно большой амплитудой и бесконечно малой длительностью, площадь которого

конечна и равна единице. В качестве примера представим импульс сколь угодно малой длительности  $\Delta t$ , амплитуда которого

$U_m = \frac{1}{\Delta t}$  (рис. 14.6, а). В пределе, когда  $\Delta t \rightarrow 0$ , его амплитуда

$U_m \rightarrow \infty$ , но площадь остается постоянной и равна  $U_m \Delta t = 1$ .



Такое определение  $\delta(t)$ -функции, несмотря на его простоту и наглядность, не является строгим в математическом отношении. Тем

не менее оно достаточно для большинства приложений, встречающихся в теории электрорадио цепей.

Более строго в этом отношении  $\delta(t)$ -функция определяется как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. Например, последовательность непрерывных функций (рис. 14.6,б)

$$x(t, \sigma) = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} e^{-\sigma^2 t^2}; \quad \sigma = 0, 1, 2, \dots \quad (14.7)$$

сходится к нулю при  $t \neq 0$ . При  $t = 0$  и  $\sigma \rightarrow \infty$  значения этих функций неограниченно возрастают.

Аналогично определяют и единичную ступенчатую функцию  $1(t)$ . Например, последовательность непрерывных функций (рис. 14.7)

$$g(t, \sigma) = a^{-e^{-\sigma t}}; \quad 0 < a < 1; \quad \sigma = 0, 1, 2, \dots \quad (14.8)$$

при  $t < 0$  имеет предел 0, а при  $t > 0$  ее пределом является 1, что соответствует выражению (14.3).

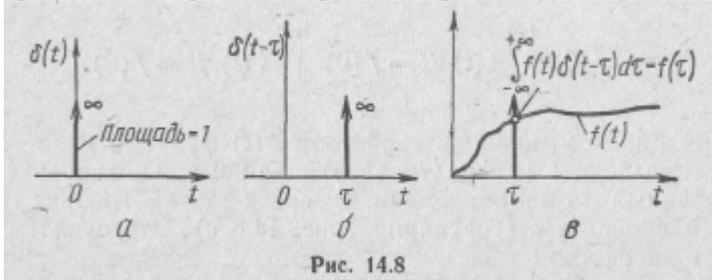


Рис. 14.8

Дельта функция, как и функция  $1(t)$ , относится к специальному типу функций, имеющих определенные свойства и называемых обобщенными функциями.

Для  $\delta(t)$ -функции (рис. 14.8, а) справедливы соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \delta(t) &= 0 \text{ при } t \neq 0; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (14.9)$$

При смещении  $\delta(t)$ -функции вправо по оси абсцисс на время  $\tau$  (рис. 14.8, б) получим:

$$\left. \begin{aligned} \delta(t - \tau) &= 0 \text{ при } t \neq \tau; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) dt &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (14.10)$$

В практическом отношении ценность  $\delta(t)$ -функции заключается в конечном значении ее площади, чего нельзя сказать о конкретном значении самой функции.

Важность  $\delta(t)$ -функции становится более ясной при интегрировании. Более ценными являются не значения самой  $\delta(t)$ -функции, а то, что с ней происходит при интегрировании. Это особенно проявляется при решении часто встречающихся на практике задач, связанных с воздействиями кратковременных толчков или импульсов. Результат таких воздействий часто не зависит от формы импульса, а определяется интегральным значением, т. е. площадью импульса.

Рассмотрим интеграл, содержащий произведение произвольной непрерывной функции и  $\delta$ -функции:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt. \quad (14.11)$$

Учитывая, что  $\delta(t) \neq 0$  лишь при  $t=0$  и в окрестностях этой точки на бесконечно малом интервале от  $-\Delta t$  до  $\Delta t$   $f(t) \rightarrow f(0)$  ( $\Delta t \rightarrow 0$ ), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = \int_{-\Delta t}^{+\Delta t} \delta(t) f(t) dt = \int_{-\Delta t}^{+\Delta t} \delta(t) f(0) dt = \\ = f(0) \int_{-\Delta t}^{+\Delta t} \delta(t) dt = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = f(0).$$

Таким образом, важным свойством  $\delta(t)$ -функции является возможность выделить (отфильтровать) с ее помощью значение функции в данный момент времени. В связи с этим говорят о фильтрующем свойстве  $\delta(t)$ -функции (рис. 14.8, в). Это свойство определяется равенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0). \quad (14.12)$$

Если в формулу (14.11) подставить  $\delta(t)$ -функцию, смещенную на произвольный момент времени  $\tau$ , то аналогично получим равенство для более общего случая

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) f(t) dt = f(\tau). \quad (14.13)$$

Между единичной ступенчатой функцией  $1(t)$  и  $\delta(t)$ -функцией Дирака существует тесная связь:

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = 1(t). \quad (14.14)$$

Действительно, при  $t < 0$  функция  $\delta(t)$  и ее интеграл равны нулю. После перехода через момент времени  $t=0$  значение интеграла изменяется скачком на единицу и остается равным единице.

С другой стороны,

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t) = 1'(t), \quad (14.15)$$

так как  $1'(t)=0$  при  $t < 0$  и  $1'(t)=\infty$  при  $t=0$ .

Таким образом,  $\delta(t)$ -функция равна первой производной единичной ступенчатой функции.

Импульсные воздействия, близкие к  $\delta(t)$ -функции, встречаются достаточно часто на практике, например удары в механических системах, броски э. д. с. самоиндукции при коммутациях в электрических цепях и др.

### 14.3. ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПИ

Временной характеристикой цепи называется функция времени, значения которой численно определяются реакцией цепи на типовое воздействие. Реакция цепи на заданное типовое воздействие зависит лишь от схемы цепи и параметров ее элементов и, следовательно, может служить ее характеристикой. Временные характеристики определяют для линейных цепей, не содержащих независимых источников энергии, и при нулевых начальных условиях. Временные характеристики зависят от вида заданного типового воздействия. В связи с этим их делят на две группы: переходные и импульсные временные характеристики.

**Переходная характеристика**, или переходная функция, определяется реакцией цепи на воздействие единичной ступенчатой функции. Она имеет несколько разновидностей (табл. 14.1).

Таблица 14.1

Вид воздействия		Вид реакции	Переходная характеристика
Единичный напряжения	скачок	Напряжение	$K_U(t)$
		Ток	$Y(t)$
Единичный тока	скачок	Напряжение	$Z(t)$
		Ток	$K_I(t)$

Если воздействие задано в виде единичного скачка напряжения и реакцией является также напряжение, то переходная характеристика оказывается безразмерной, численно равной напряжению на выходе цепи и называется переходной функцией или коэффициентом передачи  $K_U(t)$  по напряжению. Если же выходной величиной служит ток, то переходная характеристика имеет размерность проводимости, численно равна этому току и называется переходной проводимостью  $Y(t)$ . Аналогично при воздействии в виде тока и реакции в виде напряжения переходная функция имеет размерность сопротивления и называется переходным сопротивлением  $Z(t)$ . Если же при этом выходной величиной является ток, то переходная характеристика безразмерна и называется переходной функцией или коэффициентом передачи  $K_I(t)$  по току.

В общем случае переходную характеристику любого вида обозначают через  $h(t)$ . Переходные характеристики легко определяются расчетом реакции цепи на единичное ступенчатое воздействие, т. е. расчетом переходного процесса при включении цепи на постоянное напряжение 1 В или на постоянный ток 1 А.

#### Пример 14.2.

Найти временные переходные характеристики простой RC-цепи (рис. 14.9, а), если воздействиями являются напряжения.

Решение.

1. Для определения переходных характеристик рассчитаем переходный процесс при поступлении на вход цепи напряжения  $u(t) = 1(t)$ . Этому соответствует включение цепи в момент  $t=0$  на источник постоянной э. д. с.  $E_0=1 \text{ В}$  (рис. 14.9,б). При этом:

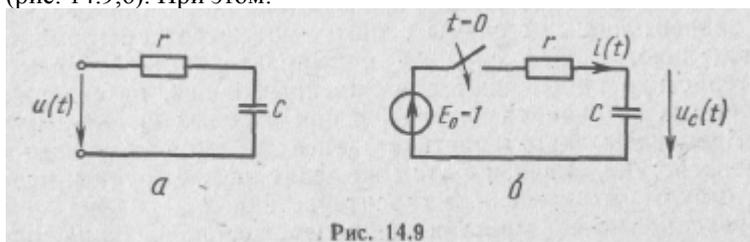


Рис. 14.9

а) ток в цепи определяется выражением

$$i(t) = \frac{E_0}{r} e^{-t/rC} = \frac{1}{r} e^{-t/rC},$$

поэтому переходной проводимостью является

$$Y(t) = \frac{1}{r} e^{-t/rC};$$

б) напряжение на емкости

$$u_C(t) = E_0 (1 - e^{-t/rC}) = 1 - e^{-t/rC},$$

поэтому переходная функция по напряжению

$$K_U(t) = 1 - e^{-t/rC}.$$

**Импульсная** характеристика, или импульсная переходная функция, определяется реакцией цепи на воздействие  $\delta(t)$ -функции. Как и переходная характеристика, она имеет несколько разновидностей, определяемых видом воздействия и реакции — напряжением или током. В общем случае импульсную характеристику обозначают через  $a(t)$ .

Установим связь между импульсной характеристикой и переходной характеристикой линейной цепи. Для этого определим сначала реакцию цепи на импульсное воздействие малой длительности  $t_{\text{и}} = \Delta t$ , представив его наложением двух ступенчатых функций:

$$f_{\text{вх}}(t) = U_m [1(t) - 1(t - \Delta t)].$$

В соответствии с принципом наложения реакция цепи на такое воздействие определяется с помощью переходных характеристик:

$$f_{\text{вых}}(t) = U_m [h(t) - h(t - \Delta t)].$$

При малых  $\Delta t$  можно записать

$$f_{\text{вых}}(t) = \frac{h(t) - h(t - \Delta t)}{\Delta t} U_m \Delta t = \frac{\Delta h(t)}{\Delta t} S_{\text{и}}, \quad (14.16)$$

где  $S_{\text{и}} = U_m \Delta t$  — площадь импульса.

При  $\Delta t \rightarrow 0$  и  $U_m \rightarrow \frac{1}{\Delta t}$  полученное выражение описывает реакцию цепи на  $\delta(t)$ -функцию, т. е., определяет импульсную характеристику цепи:

$$a(t) = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ S_H \rightarrow 1}} \frac{\Delta h(t)}{\Delta t} S_H = h'(t). \quad (14.17)$$

С учетом этого реакция линейной цепи на импульсное воздействие малой длительности может быть найдена как произведение импульсной функции на площадь импульса:

$$f_{\text{вых}}(t) = a(t) S_H. \quad (14.18)$$

Это равенство лежит в основе экспериментального определения импульсной функции. Оно тем точнее, чем меньше длительность импульса.

Таким образом, импульсная характеристика представляет производную от переходной характеристики:

$$a(t) = h'(t) = \frac{d}{dt} [h(t) 1(t)] = h'(t) 1(t) + h(0) \delta(t). \quad (14.19)$$

Здесь учтено, что  $h(t)\delta(t) = h(0)\delta(t)$ , а умножение  $h(t)$  на  $1(t)$  эквивалентно указанию на то, что значение функции  $h(t)$  при  $t < 0$  равно нулю.

Интегрируя полученные выражения, легко убедиться, что

$$h(t) = \int_{-\infty}^t a(t) dt. \quad (14.20)$$

Равенства (14.17) и (14.19) являются следствием равенств (14.14) и (14.15). Так как  $a(t) = \frac{dh(t)}{dt}$

импульсные характеристики имеют размерность соответствующей переходной характеристики, поделенной на время. Для расчета импульсной характеристики можно воспользоваться выражением (14.19), т. е. рассчитать ее с помощью переходной характеристики.

#### Пример 14.3.

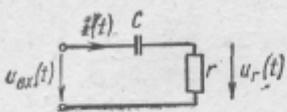
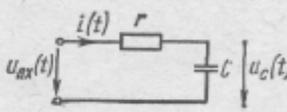
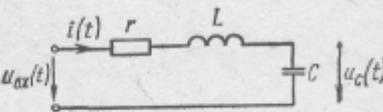
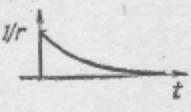
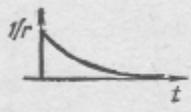
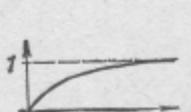
Найти импульсные характеристики простой RC-цепи (см. рис. 14.9, а). Решение.

Используя выражения для переходных характеристик, полученные в примере 14.2, с помощью выражения (14.19) находим импульсные характеристики;

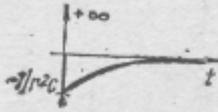
$$a_Y(t) = Y'(t) 1(t) + Y(0) \delta(t) = -\frac{1}{r^2 C} e^{-t/rC} + \frac{1}{r} \delta(t);$$

$$a_K(t) = K'_U(t) 1(t) + K_U(0) \delta(t) = \frac{1}{rC} e^{-t/rC}.$$

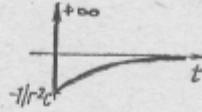
Временные характеристики типовых звеньев приведены в табл. 14.2.

					
$Y(t) = \frac{1}{r} e^{-\frac{t}{rC}}$		$Y(t) = \frac{1}{r} e^{-\frac{t}{rC}}$		$Y(t) = \frac{1}{\omega_{св} L} e^{-\delta t} \sin \omega_{св} t$	
$K_U(t) = e^{-\frac{t}{rC}}$		$K_U(t) = 1 - e^{-\frac{t}{rC}}$		$K_U(t) = 1 - e^{-\delta t} \cos \omega_{св} t$	

$$a_Y(t) = -\frac{1}{r^2 C} e^{-\frac{t}{rC}} + \frac{1}{r} \delta(t)$$



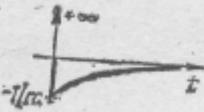
$$a_Y(t) = -\frac{1}{r^2 C} e^{-\frac{t}{rC}} + \frac{1}{r} \delta(t)$$



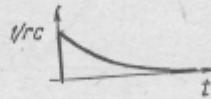
$$a_Y(t) = \frac{1}{\omega_{CB} L} e^{-\delta t} \times (\omega_{CB} \cos \omega_{CB} t - \delta \sin \omega_{CB} t) \approx \frac{1}{L} e^{-\delta t} \cos \omega_0 t$$



$$a_K(t) = -\frac{1}{rC} e^{-\frac{t}{rC}} + \delta(t)$$



$$a_K(t) = \frac{1}{rC} e^{-\frac{t}{rC}}$$



$$a_K(t) = e^{-\delta t} \times (\omega_{CB} \sin \omega_{CB} t + \delta \cos \omega_{CB} t) \approx \omega_0 e^{-\delta t} \sin \omega_0 t$$



Расчет временных характеристик обычно производится в следующем порядке: определяются точки приложения внешнего воздействия и его вид (ток или напряжение), а также интересующая выходная величина — реакция цепи (ток или напряжение на каком-то ее участке); нужная временная характеристика рассчитывается как реакция цепи на соответствующее типовое воздействие:  $1(t)$  или  $\delta(t)$ ,

#### 14.4. РАСЧЕТ РЕАКЦИИ ЦЕПИ НА ВОЗДЕЙСТВИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

В основе расчета реакции линейной цепи на воздействие произвольной формы с использованием ее временных характеристик лежит принцип наложения. Суть такого метода расчета заклю-

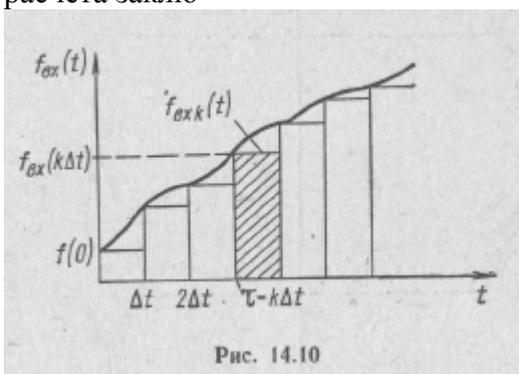


Рис. 14.10

чается в представлении входного воздействия суммой (наложением) простых типовых импульсных функций.

Представим входной сигнал произвольной формы наложением прямоугольных импульсов малой длительности  $t_{и} = \Delta\tau = \Delta t$  (рис. 14.10).

$$f_{вх}(t) = \sum_{k=0}^n f_{вхk}(t), \quad (14.21)$$

где

$$f_{вхk}(t) = f_{вх}(k\Delta t) \{1(t - k\Delta t) - 1[t - (k + 1)\Delta t]\} = f_{вх}(\tau) [1(t - \tau) - 1(t - \tau - \Delta\tau)]. \quad (14.22)$$

При малой длительности  $\Delta\tau$  реакция цепи на каждый импульс  $f_{вхk}(t)$  в соответствии с формулой (14.18) определяется с помощью ее импульсной характеристики как произведение:

$$f_{вхk}(t) = a(t - \tau) S_{иk} = a(t - \tau) f_{вх}(\tau) \Delta\tau. \quad (14.23)$$

Реакцию цепи на воздействие  $f_{BX}(t)$  в соответствии с принципом наложения найдем как сумму реакций  $f_{BЫX k}(t)$ :

$$f_{BЫX}(t) = \sum_{k=1}^n f_{BЫX k}(t) = \sum_{k=1}^n f_{BX}(\tau) a(t - \tau) \Delta\tau. \quad (14.24)$$

Устремляя  $\Delta\tau > 0$ , в пределе получаем  $t$

$$f_{BЫX}(t) = \int_0^t f_{BX}(\tau) a(t - \tau) d\tau = f_{BX}(t) * a(t) \quad (14.25)$$

или после замены переменных

$$f_{BЫX}(t) = \int_0^t f_{BX}(t - \tau) a(\tau) d\tau = f_{BX}(t) * a(t). \quad (14.26)$$

Здесь интегрирование производится по  $\tau$ , а под  $t$  понимают фиксированный момент времени, в который требуется найти значение  $f_{BЫX}(t)$ .

Полученные выражения называются интегралами свертки. Они позволяют найти реакцию линейной цепи на произвольное воздействие как свертку входного воздействия с импульсной характеристикой цепи. Подобные выражения можно получить и при аппроксимации функции воздействия с помощью ступенчатых функций (см. рис. 14.5,6).

Интегралу свертки можно дать графическую интерпретацию. Для этого последовательность свертывания двух функций проиллюстрируем с помощью рис. 14.11. Свертываемые функции (рис. 14.11,а) после замены переменной  $t$  на  $\tau$  (рис. 14.11,б) преобразуем путем замены  $t$  на  $(-\tau)$ . Такое преобразование (рис. 14.11,в) соответствует зеркальному отражению функций относительно оси ординат. Последующая замена  $(-\tau)$  на  $(t-\tau)$  соответствует смещению отраженных функций вправо на величину  $t$  (рис. 14.11,г). Произведение двух функций, находящееся под знаком интеграла в свертке (14.25) и (14.26), представлено на рис. 14.11, д. Интегрирование перемноженных функций дает значение интеграла свертки в данный момент времени (рис. 14.11, е). Ордината результирующей кривой (см. рис. 14.11, е) соответствует площади заштрихованной поверхности (см. рис. 14.11,д). Для нахождения каждой новой ординаты требуется новое отражение и смещение, после чего выполняется перемножение ординат и интегрирование.

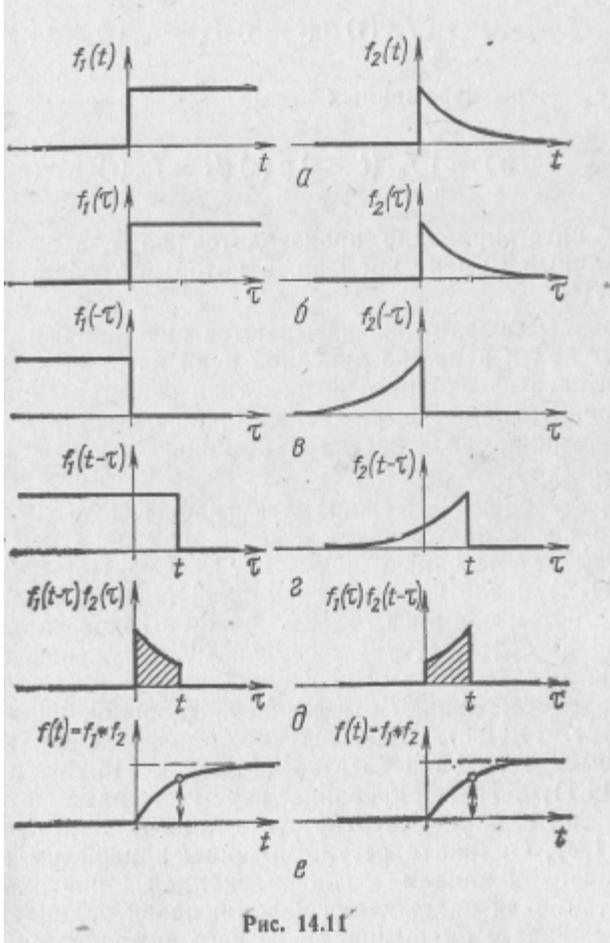
Таким образом, свертывание двух функций может быть представлено с помощью четырех действий — отражения, смещения, перемножения и интегрирования, выполняемых в определенной последовательности.

Если подставить в интегралы (14.25) и (14.26) выражение (14.19) и использовать замену переменных, то получим еще

две формы интеграла свертки, которые в теории цепей обычно называют интегралами Дюамеля:

$$f_{\text{ВЫХ}}(t) = f_{\text{ВХ}}(t) h(0) + \int_0^t f_{\text{ВХ}}(t - \tau) h'(\tau) d\tau; \quad (14.27)$$

$$f_{\text{ВЫХ}}(t) = f_{\text{ВХ}}(t) h(0) + \int_0^t f_{\text{ВХ}}(\tau) h'(t - \tau) d\tau, \quad (14.28)$$



так как

$$f_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_0^t f_{\text{ВХ}}(t - \tau) a(\tau) d\tau = \int_0^t f_{\text{ВХ}}(t - \tau) h'(\tau) 1(\tau) d\tau + \\ + \int_0^t f_{\text{ВХ}}(t - \tau) h(0) \delta(\tau) d\tau = f_{\text{ВХ}}(t) h(0) + \int_0^t f_{\text{ВХ}}(t - \tau) h'(\tau) d\tau.$$

Интегрируя в (14.25) и (14.26) по частям ( $\int u dv = uv - \int v db$ ), получаем еще две формы (третью и четвертую) интеграла Дюамеля:

$$f_{\text{вых}}(t) = f_{\text{вх}}(0) h(t) + \int_0^t f'_{\text{вх}}(t-\tau) h(\tau) d\tau; \quad (14.29)$$

$$f_{\text{вых}}(t) = f_{\text{вх}}(0) h(t) + \int_0^t f_{\text{вх}}(\tau) h'(t-\tau) d\tau, \quad (14.30)$$

так как

$$\begin{aligned} f_{\text{вых}}(t) &= f_{\text{вх}}(t) h(0) + f_{\text{вх}}(t-\tau) h(\tau) \Big|_0^t - \int_0^t h(\tau) \frac{df_{\text{вх}}(t-\tau)}{d\tau} d\tau = \\ &= f_{\text{вх}}(0) h(t) + \int_0^t h(\tau) \frac{df_{\text{вх}}(t-\tau)}{d\tau} d\tau = \\ &= f_{\text{вх}}(0) h(t) + \int_0^t f'(t-\tau) h(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Дифференцируя определенный интеграл (14.25) и (14.26) по верхнему пределу

$$\left( \frac{d}{dx} \int_0^x \varphi(x; y) dy = \varphi(x; x) + \int_0^x \frac{d\varphi(x; y)}{dx} dy \right)$$

получаем пятую и шестую формы интеграла Дюамеля:

$$f_{\text{вых}}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f_{\text{вх}}(t-\tau) h(\tau) d\tau; \quad (14.31)$$

$$f_{\text{вых}}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f_{\text{вх}}(\tau) h(t-\tau) d\tau. \quad (14.32)$$

Выбор удобной формы записи интеграла свертки (Дюамеля) определяется условием решаемой задачи, видом входного воздействия и используемой временной характеристики цепи.

Расчет реакции цепи на воздействие произвольной формы распадается в общем случае на два этапа:

расчет временной характеристики нужного вида;

расчет реакции цепи с помощью интеграла свертки (Дюамеля) в любой удобной его форме (14.25) — (14.32).

#### Пример 14.4.

На вход  $rC$ -цепи (см. рис. 14.9, а) подается импульс напряжения экспоненциальной формы  $u_{\text{вх}}(t) = I_m e^{-at}$ .

Определить напряжение на емкости.

Решение. 1. Для расчета используем импульсную характеристику

$$a_K(t) = \frac{1}{rC} e^{-\frac{t}{rC}}$$

найденную для этой цепи в примере 14.3.

2. С помощью интеграла свертки (14.25) находим напряжение на емкости

$$u_C(t) = \int_0^t u_{вх}(\tau) a(t-\tau) d\tau = \frac{U_m}{rC} \int_0^t e^{-a\tau} e^{-\frac{t-\tau}{rC}} d\tau = \frac{U_m}{rC} e^{-\frac{t}{rC}} \times$$

$$\times \frac{1}{\frac{1}{rC} - a} e^{\left(\frac{1}{rC} - a\right)\tau} \Big|_0^t = \frac{U_m}{1 - arC} \left( e^{-at} - e^{-\frac{t}{rC}} \right).$$

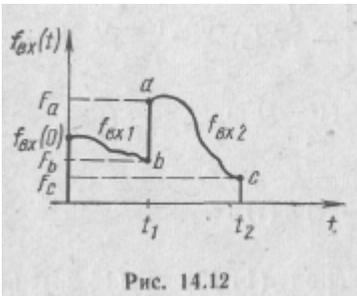


Рис. 14.12

Рассмотрим особенности применения интеграла Дюамеля при сложной форме входного сигнала. Пусть  $f_{вх}(t)$  изменяется, например, в соответствии с рис. 14.12. Функция  $f_{вх}(t)$  в точках  $t=0$ ,  $t_1$  и  $t_2$  изменяется скачком, а на интервалах времени  $0-t_1$  и  $t_1-t_2$  изменяется плавно, но по разным законам:  $f_{вх1}(t)$  и  $f_{вх2}(t)$  соответственно. Реакцию цепи на такое воздействие, задаваемое на разных интервалах разными функциями и характеризующееся наличием скачков, удобно рассчитать с помощью интеграла Дюамеля (14.29) и (14.30).

В первом интервале времени:  $\tau = 0 \div t_1$

$$f_{вых}(t) = f_{вх}(0) h(t) + \int_0^t f'_{вх1}(\tau) h(t-\tau) d\tau.$$

Во втором интервале времени  $\tau = t_1 \div t_2$

$$f_{вых}(t) = f_{вх}(0) h(t) + \int_0^{t_1} f'_{вх1}(\tau) h(t-\tau) d\tau +$$

$$+ (F_a - F_b) h(t-t_1) + \int_{t_1}^t f'_{вх2}(\tau) h(t-\tau) d\tau.$$

Здесь слагаемое  $(F_a - F_b)h(t-t_1)$  обусловлено скачком входной функции от  $F_b$  до  $F_a$  в момент времени  $t_1$ .

В третий интервал времени  $\tau > t_2$

$$f_{вых}(t) = f_{вх}(0) h(t) + \int_0^{t_1} f'_{вх1}(\tau) h(t-\tau) d\tau +$$

$$+ (F_b - F_a) h(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f'_{вх2}(\tau) h(t-\tau) d\tau + (0 - F_c) h(t-t_2).$$

Здесь слагаемое  $(0 - F_c)h(t-t_2)$  обусловлено скачком функции  $f_{вх}(t)$  от  $F_c$  до 0 в момент времени  $t_2$ .

## 14.5. ПОНЯТИЕ О РАСЧЕТЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПО ОГИБАЮЩИМ ВРЕМЕННЫМ ФУНКЦИЯМ. ИНТЕГРАЛ СВЕРТКИ ДЛЯ ОГИБАЮЩИХ

В радиотехнике часто решаются задачи исследования переходных процессов в высокочастотных колебательных контурах при воздействии на них модулированных высокочастотных колебаний (рис. 14.13). Причем частота этих колебаний мало отличается от частоты собственных колебаний резонансного контура ( $\omega \approx \omega_0$  или  $\omega = \omega_0$ ), а само высокочастотное колебание модулировано с помощью медленно меняющихся функций, например

$$f_{BX}(t) = F_{m\ BX}(t) \cos[\omega t + \psi_{BX}(t)], \quad (14.33)$$

где  $F_{m\ BX}(t)$  и  $\psi_{BX}(t)$  — амплитуда и начальная фаза высокочастотного колебания, являющиеся медленно меняющимися функциями времени.

Под медленно меняющейся функцией времени в данном случае понимают такую функцию, для которой

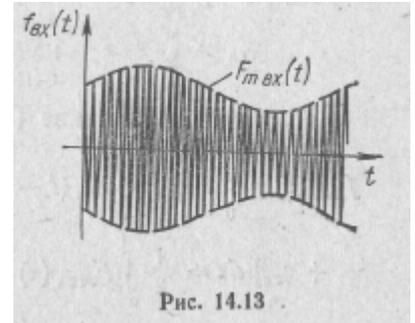


Рис. 14.13

$$\left| \frac{d^2 F_{m\ BX}(t)}{dt^2} \right| \ll \omega \left| \frac{dF_{m\ BX}(t)}{dt} \right| \ll \omega^2 |F_m(t)|. \quad (14.34)$$

Решение подобных задач можно значительно упростить, если ограничиться описанием переходного процесса лишь на основе расчета огибающих высокочастотных колебаний. Для рассматриваемого воздействия (14.33) огибающей является функция  $F_{m\ BX}(t)$  (см. рис. 14.13).

Такой подход к решению задачи не является строгим, но достигаемые с его помощью упрощения расчета настолько значительны, что вполне оправдывают его применение. Разработал и впервые широко использовал метод огибающих для анализа переходных процессов в резонансных системах с малым затуханием советский ученый С. И. Евтянов.

Пусть на цепь, представляющую резонансную колебательную систему, действует модулированный по амплитуде и фазе радиосигнал (14.33). Реакцию цепи, или сигнал на выходе системы, найдем как свертку входного сигнала  $f_{BX}(t)$  и импульсной характеристики цепи  $a(t)$ :

$$f_{ВМХ}(t) = \int_0^t F_{m\ BX}(\tau) \cos[\omega\tau + \psi_{ВМХ}(\tau)] a(t - \tau) d\tau. \quad (14.35)$$

Импульсную характеристику колебательной системы можно представить как

$$a(t) = A_m(t) \cos(\omega_{св}t + \varphi_{св}). \quad (14.36)$$

Примером может служить импульсная характеристика последовательного колебательного контура

$$a_Y(t) = \frac{1}{\omega_{CB}L} e^{-\delta t} (\omega_{CB} \cos \omega_{CB}t - \delta \sin \omega_{CB}t) = \\ = \frac{\omega_0}{\omega_{CB}L} e^{-\delta t} \cos \left( \omega_{CB}t + \frac{\pi}{2} - \alpha \right), \quad (14.37)$$

где  $A_m(t) = \frac{\omega_0}{\omega_{CB}L} e^{-\delta t}$  — огибающая импульсной характеристики;

$\varphi_{CB} = \frac{\pi}{2} - \alpha$  — начальная фаза импульсной характеристики.

Подставляя выражение (14.36) в формулу (14.35), находим

$$f_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_0^t F_{\text{м вх}}(\tau) A_m(t-\tau) \cos[\omega\tau + \psi_{\text{вх}}(\tau)] \cos[\omega_{CB}(t-\tau) + \varphi_{CB}] d\tau = \\ = \frac{1}{2} \int_0^t F_{\text{м вх}}(\tau) A_m(t-\tau) \cos[(\omega - \omega_{CB})\tau + \omega_{CB}t + \psi_{\text{вх}}(\tau) + \varphi_{CB}] d\tau + \\ + \frac{1}{2} \int_0^t F_{\text{м вх}}(\tau) A_m(t-\tau) \cos[(\omega + \omega_{CB})\tau - \omega_{CB}t + \psi_{\text{вх}}(\tau) - \varphi_{CB}] d\tau.$$

Второй интеграл в полученном выражении близок к нулю, так как множитель его подынтегрального выражения представляет периодическую функцию, изменяющуюся с большой частотой  $(\omega + \omega_{CB})$ . При интегрировании площади положительных и отрицательных полувольт взаимно уничтожаются. Таким образом,

$$f_{\text{ВЫХ}}(t) \approx \frac{1}{2} \int_0^t F_{\text{м вх}}(\tau) A_m(t-\tau) \cos[(\omega - \omega_{CB})\tau + \omega_{CB}t + \psi_{\text{вх}}(\tau) + \varphi_{CB}] d\tau. \quad (14.38)$$

Это выражение можно упростить, используя комплексную форму записи:

$$f_{\text{ВЫХ}}(t) \approx \frac{1}{2} \int_0^t F_{\text{м вх}}(\tau) A_m(t-\tau) \times \\ \times \operatorname{Re} [e^{j(\omega - \omega_{CB})\tau} e^{j(\omega_{CB}t + \varphi_{CB})} e^{j\psi_{\text{вх}}(\tau)}] d\tau \quad (14.39)$$

ИЛИ

$$f_{\text{ВЫХ}}(t) \approx \operatorname{Re} \left[ e^{j(\omega_{CB}t + \varphi_{CB})} \frac{1}{2} \int_0^t \dot{F}_{\text{м вх}}(\tau) A_m(t-\tau) e^{j\Delta\omega\tau} d\tau \right], \quad (14.40)$$

где  $\Delta\omega = (\omega - \omega_{CB})$  — расстройка системы;

$\dot{F}_{\text{м вх}}(\tau) = F_{\text{м вх}}(\tau) e^{j\psi_{\text{вх}}(\tau)}$  — комплексная, огибающая входного сигнала.

Комплексная огибающая высокочастотного сигнала — это комплексная функция времени, модуль которой представляет закон изменения его амплитуды, а аргумент — закон изменения начальной фазы. Как следует из формулы (14.40), комплексной огибающей выходного сигнала в рассматриваемом случае является

$$\dot{F}_{m \text{ вых}}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \dot{F}_{m \text{ вх}}(\tau) A_m(t - \tau) e^{j\Delta\omega\tau} d\tau = F_{m \text{ вых}}(t) e^{j\psi_{\text{вых}}(t)}. \quad (14.41)$$

С помощью этого интеграла можно рассчитать огибающую колебаний в переходном режиме в системе и с ее помощью исследовать протекающие процессы.

В тех случаях, когда фаза входного сигнала не является функцией времени и расстройка системы отсутствует, т. е.  $\psi(t) = \text{const}$  и  $\Delta\omega = 0$ , получим выражение огибающей выходного сигнала в виде

$$F_{m \text{ вых}}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t F_{m \text{ вх}}(\tau) A_m(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2} F_{m \text{ вх}}(t) * A_m(t). \quad (14.42)$$

Оно представляет интегральную свертку огибающих входного сигнала и импульсной характеристики цепи и называется интегралом свертки для огибающих.

#### Пример 14.5.

Рассчитать огибающую тока в последовательном высокодобротном резонансном контуре при его подключении на синусоидальное напряжение с частотой, равной резонансной частоте контура  $\omega = \omega_0$ . С помощью огибающей построить картину переходного процесса.

Решение.

Огибающей входного сигнала является ступенчатая функция

$$F_{m \text{ вх}}(t) = U_m \cdot 1(t).$$

Используя также выражение для огибающей импульсной характеристики (14.37), с помощью выражения (14.42) для случая  $\omega = \omega_0$  находим

$$\begin{aligned} F_{m \text{ вых}}(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t F_{m \text{ вх}}(\tau) H(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t U_m 1(\tau) \frac{\omega_0}{\omega_{cB} L} e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau = \\ &= \frac{\omega_0}{2\omega_{cB} L} U_m e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda\tau} d\tau = \frac{\omega_0}{2\omega_{cB} L} U_m (1 - e^{-\lambda t}). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что амплитуда колебаний тока в контуре плавно нарастает по закону обратной экспоненты (см. рис. 13.21). Этот результат совпадает с полученным ранее выражением (13.71).

## 15. СПЕКТРЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

### 15.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИГНАЛАХ. СПЕКТРАЛЬНЫЙ СПОСОБ ОПИСАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

В радиотехнике, радиолокации, автоматическом управлении и других областях техники основными проблемами являются получение, передача и обработка информации. Носителем информации являются сигналы. Сигнал—это физический процесс, протекающий в системе. Электро- и радиосигналами называются электромагнитные процессы, несущие информацию. Примерами таких сигналов могут служить импульсы различной формы. Обычно различают импульсы постоянного тока и импульсы переменного тока, являющиеся ограниченными отрезками синусоидальных колебаний с заданным законом изменения амплитуды. Первые называются видеоимпульсами, а вторые — радиоимпульсами.

При теоретическом исследовании используют, как правило, математическую модель сигнала. В зависимости от способа описания сигнала она может быть построена по-разному. Важнейшими формами представления сигнала является временное и спектральное представление. В первом случае сигнал описывается как функция времени, во втором — как сумма ортогональных составляющих.

В основе классического спектрального представления сигнала лежит его разложение по системе синусоидальных функций. Однако известно и используется на практике разложение и по системе других ортогональных функций (функции Бесселя, Хаара, Уолша и др.). В общем случае сигналы могут быть представлены в виде суммы ортогональных составляющих бесчисленным количеством способов. Выбор той или иной системы функций в качестве основной определяется удобством решения поставленной практической задачи.

Начало решению задачи разложения периодических сигналов в ряд по синусоидальным функциям было положено в XVIII в. Эйлером и Лагранжем. Эта теория приобрела законченную форму в блестящих работах Фурье по исследованию тепловых потоков (1822 г.). С тех пор многим крупным математикам удалось внести серьезный вклад в развитие спектральной теории. Выдающаяся роль в развитии классических спектральных представлений

применительно к задачам радиотехники и автоматики принадлежит советским ученым Л. И. Мандельштаму, В. А. Котельникову, Г. С. Горелику, С. М. Рытову, А. А. Харкевичу, Я. З. Цыпкину и др.

Значение ряда Фурье для математики хорошо выразил американский ученый К. Ланцош словами: «Если бы нам предложили выбросить все математические открытия, кроме одного, мы едва ли бы не оставили ряд Фурье. Этот ряд оказал наиболее глубокое влияние на все развитие анализа как в его теоретическом, так и в практическом аспекте». Такая высокая оценка в полной мере применима и к той роли, которую классический спектральный анализ играет в современной теоретической электро- и радиотехнике, радиолокации, автоматике и др.

Итак, возможны два классических способа представления сигнала: временной и спектральный. Сигнал может быть представлен этими способами в области как вещественных, так и комплексных величин.

Для спектрального представления периодических сигналов применяется разложение в ряд Фурье. Известно, что любая периодическая функция  $v(x)$  с периодом  $2\pi$ , удовлетворяющая в пределах периода условиям Дирихле, может быть представлена рядом Фурье, т. е. рядом вида

$$v(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (15.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} v(x) dx; \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} v(x) \cos nx dx; \quad n=1, 2, \dots; \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} v(x) \sin nx dx; \quad n=1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (15.2)$$

Пусть временной периодический процесс описывается функцией  $f(t)$  с произвольным периодом  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ . Вводя новую переменную  $t = \frac{x}{\Omega}$ , приходим к функции

$f\left(\frac{x}{\Omega}\right) = v(x)$  периодом  $\Omega T = 2\pi$ , разложение которой в ряд Фурье делается с помощью выражений (15.1) и (15.2).

Возвращаясь к исходной временной функции  $f(t)$ , учитываем,

что  $x = \Omega t$ ;  $dx = \Omega dt = \frac{2\pi}{T} dt$ ;  $v(x) = f(t)$ .

Тогда функция  $f(t)$  принимает вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t), \quad (15.3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) dt; \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos n\Omega t dt; \quad n = 1, 2, \dots; \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \sin n\Omega t dt; \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (15.4)$$

Это разложение можно записать и в несколько иной форме:

$$f(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\Omega t - \psi_n), \quad (15.5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= a_0; \\ C_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \\ \psi_n &= \operatorname{arctg} b_n/a_n. \end{aligned} \right\} \quad (15.6)$$

Таким образом, периодический сигнал можно рассматривать как результат наложения постоянной составляющей и бесконечно большого числа синусоидальных (гармонических) колебаний с частотами  $\Omega_1 = \Omega, \Omega_2 = 2\Omega, \Omega_3 = 3\Omega, \dots$ , амплитудами  $C_1, C_2, C_3, \dots$  и начальными фазами  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$  (рис. 15.1).

Гармонические колебания с частотами  $\Omega, 2\Omega, 3\Omega$  и т. д. называются соответственно основной или первой, второй, третьей и т. д. гармониками. Постоянная составляющая равна среднему значению колебания за период.

Определив физический смысл коэффициентов  $\Omega_n, C_n$  и  $\psi_n$ , легко прийти к выводу о возможности полного описания сигнала последовательностью величин, носящей названия спектров:  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots$  — спектр частот;  $\frac{C_0}{2}, C_1, C_2, C_3, \dots$  — спектр амплитуд;  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$  — спектр фаз. Такое представление сигнала называется спектральным.

Большое применение на практике получили амплитудно-частотные и фазо-частотные спектры (АЧС и ФЧС), которыми называются совокупности спектральных линий, представляющих перпендикуляры к оси частот, отложенные в точках  $\Omega_n = n\Omega$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) так, что их ординаты соответственно равны значениям  $\frac{C_0}{2}, C_1, C_2, C_3, \dots$  или  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$  (рис. 15.2). При комплексной форме записи ряда Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{C}_n e^{jn\Omega t} \quad (15.7)$$

комплексные амплитуды вычисляются как

$$\dot{C}_n = C_n e^{-j\phi_n} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-jn\Omega t} d\Omega. \quad (15.8)$$

В этом случае шкала частот дополняется отрицательной полуосью: амплитудный и фазовый спектры изображаются парами ор-

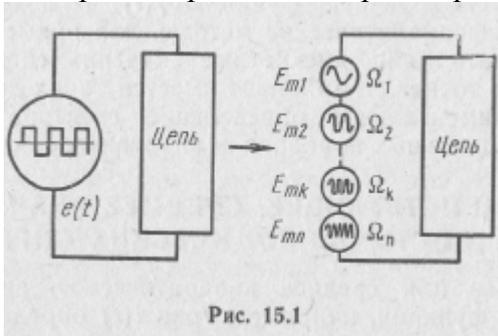


Рис. 15.1

динат, соответствующих положительным и отрицательным значениям частот  $n\Omega$  и  $-n\Omega$  (рис. 15.3). При этом АЧС становится симметричным относительно оси ординат, а ФЧС — относительно начала отсчета.

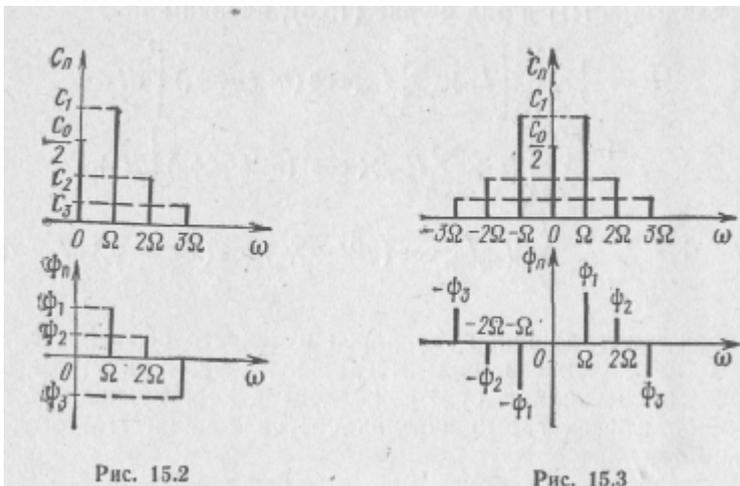


Рис. 15.2

Рис. 15.3

Таким образом, в зависимости от принятой формы записи ряда Фурье (тригонометрической или комплексной) получаются спектры двух видов: на положительной полуоси или на обеих полуосях частот.

Временной и спектральный способы представления сигналов равноправны и взаимозаменяемы. Они являются различными формами описания реально существующих процессов. Частота и время

являются дуальными величинами, дуальными могут быть названы и соответствующие им способы описания сигналов.

Методы определения спектров реальных сигналов можно разделить на три группы: аналитические, графоаналитические и экспериментальные. Аналитические методы сводятся к расчету спектров по формулам (15.3) — (15.8). Однако для аналитического описания реальных сигналов не всегда удается подобрать достаточно точную аппроксимирующую функцию  $f(t)$ . В подобных случаях используют графоаналитические методы, для применения которых необходимо знать лишь дискретные значения сигнала. Решение получается тем точнее, чем больше имеется таких дискретных значений. Экспериментальное определение спектров производится с помощью специальных приборов — анализаторов спектра.

## 15.2. ДЕЙСТВУЮЩЕЕ, СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЯ И МОЩНОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Действующее, или среднее квадратическое, значение любой периодической функции, например, тока  $i(t)$  определяется соотношением

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} [i(t)]^2 dt}.$$

Раскладывая  $i(t)$  в ряд Фурье (15.5), находим

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left[ I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn} \cos(n\Omega t - \psi_n) \right]^2 dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left[ I_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn}^2 \times \cos^2(n\Omega t - \psi_n) \right] dt + \\ &+ \sum_{\substack{q, s=0 \\ q+s}}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} I_{mq} I_{ms} \cos(q\Omega t - \psi_q) \cos(s\Omega t - \psi_s) dt. \quad (15.9) \end{aligned}$$

Второй интеграл при  $s \neq q$  равен нулю, что объясняется свойством ортогональности подынтегральных функций. Первый же интеграл представляет сумму квадратов действующих значений постоянной и всех гармонических составляющих. Поэтому окончательно получим

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} I_n^2}, \quad (15.10)$$

т. е. действующее значение периодического несинусоидального тока равно корню квадратному из суммы квадрата его постоянной составляющей и квадратов действующих значений всех его гармоник. Аналогичные выражения можно получить и для напряжения или э.д. с.

Действующее значение не зависит от начальных фаз гармоник и определяется лишь их амплитудами. Действующее значение измеряют, в частности, электроизмерительные приборы электромагнитной, электродинамической, тепловой систем.

Под средним значением периодической несинусоидальной функции (тока, напряжения) понимают среднее значение этой функции, взятой по абсолютной величине:

$$F_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |f(t)| dt. \quad (15.11)$$

Этот интеграл равен среднему значению функции  $f(t)$  за положительный полупериод, если она имеет одинаковые положительную и отрицательную полуволны.

Средние значения токов, напряжений измеряют электроизмерительные приборы выпрямительной системы.

Как известно, активная мощность равна среднему значению мгновенной мощности.

Раскладывая ток и напряжение в ряд Фурье, получаем

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} u i dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left[ U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos(n\Omega t - \psi_{un}) \right] \times \\ &\quad \times \left[ I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn} \cos(n\Omega t - \psi_{in}) \right] dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left[ U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} I_{mn} \cos(n\Omega t - \psi_{un}) \cos(n\Omega t - \psi_{in}) \right] dt = \\ &\quad = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n, \end{aligned} \quad (15.12)$$

так как  $\int_{-T/2}^{+T/2} U_{mq} I_{ms} \cos(q\Omega t - \psi_{uq}) \cos(s\Omega t - \psi_{is}) dt = 0$  при  $q \neq s$ .

Таким образом, активная мощность при периодических несинусоидальных токах и напряжениях равна сумме активных мощностей постоянной и всех синусоидальных составляющих тока и напряжения:

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 + P_1 + P_2 + \dots = \\ &= U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots \end{aligned} \quad (15.13)$$

Реактивную мощность в цепи с периодическими несинусоидальными токами и напряжениями определяют как сумму реактивных мощностей отдельных гармоник:

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 \dots, \quad (15.14)$$

а полную мощность — как произведение действующих значений напряжения и тока:

$$S = UI. \quad (15.15)$$

По при различии форм кривых напряжения и тока сумма квадратов активной и реактивной мощности не равна квадрату полной мощности. Дополнительная составляющая, которая учитывает это различие, называется мощностью искажения:

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}. \quad (15.16)$$

Все указанные составляющие полной мощности в цепи с несинусоидальными токами и напряжениями связаны соотношением

$$S^2 = P^2 + Q^2 + T^2. \quad (15.17)$$

Активная мощность, которая может быть выделена периодическим сигналом, определяется действием всей совокупности его спектральных составляющих. Эффективность каждой спектральной составляющей определяется распределением мощности или энергии в спектре сигнала.

Чтобы оценить распределение энергии в спектре данного колебания, рассчитаем мощность, выделяемую им в сопротивлении  $r=1$  Ом. Ее величина равна квадрату действующего значения тока или напряжения:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} p(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} [i(t)]^2 dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} [u(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} [f(t)]^2 dt. \end{aligned} \quad (15.18)$$

В случае периодических несинусоидальных колебаний, учитывая выражения (15.5), (15.9), (15.10), получим

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} [f(t)]^2 dt = \left(\frac{C_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_n}{\sqrt{2}}\right)^2. \quad (15.19)$$

Это выражение носит название равенства Парсеваля. Оно выражает мощность периодического сигнала как сумму мощностей его отдельных спектральных составляющих.

Если распределение амплитуд гармоник сигнала по частоте  $|C_n(\Omega_n)|$  определяет его

АЧС, то  $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}C_n(\Omega_n)\right|^2$  показывает распределение мощности или энергии в его спектре и

называется энергетическим спектром. Ординаты спектральных линий энергетического спектра равны квадрату действующего значения соответствующих гармоник.

Диапазон частот, в пределах которого распределена основная часть энергии сигнала (обычно 90%), называют эффективной шириной спектра,

### 15.3. СПЕКТРЫ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВИДЕОИМПУЛЬСОВ

Пусть  $w(t)$  определяет периодическую последовательность прямоугольных видеоимпульсов с амплитудой  $U_m$ , длительностью  $t_u$  и периодом следования  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$  (рис. 15.4). Такие импульсы применяются, например, в радиолокации, телевидении, автоматике.

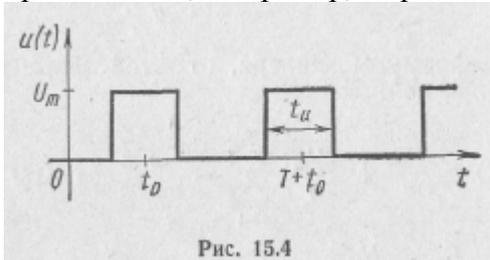


Рис. 15.4

Функция  $u(t)$  в пределах периода может быть описана как

$$u(t) = \begin{cases} U_m & \text{при } \left(t_0 - \frac{t_u}{2}\right) < t < \left(t_0 + \frac{t_u}{2}\right); \\ 0 & \text{при } \left(t_0 + \frac{t_u}{2}\right) < t < \left(t_0 - \frac{t_u}{2} + T\right). \end{cases} \quad (15.20)$$

Переходя к спектральному представлению, определим коэффициенты ее разложения в ряд Фурье. Расчет удобно вести в комплексной форме:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{mn} = \dot{C}_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} u(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{2U_m}{T} \int_{t_0 - \frac{t_u}{2}}^{t_0 + \frac{t_u}{2}} e^{-jn\Omega t} dt = \\ &= \frac{2U_m}{-jn\Omega T} e^{-jn\Omega t} \Big|_{t_0 - \frac{t_u}{2}}^{t_0 + \frac{t_u}{2}} = \frac{2U_m}{n\pi} \frac{1}{2j} \left[ e^{jn\Omega \left(-t_0 + \frac{t_u}{2}\right)} - e^{jn\Omega \left(-t_0 - \frac{t_u}{2}\right)} \right] = \\ &= \frac{2U_m}{q} \frac{\sin \frac{n\pi}{q}}{\frac{n\pi}{q}} e^{-jn\Omega t_0}, \end{aligned} \quad (15.21)$$

где  $q = \frac{T}{t_u}$  скважность импульсов,

Таким образом, в соответствии с выражением (15.7) получаем

$$C_n = \frac{2U_m}{n\pi} \sin n\Omega \frac{t_n}{2} = \frac{2U_m}{q} \frac{\sin \frac{n\pi}{q}}{\frac{n\pi}{q}}; \quad \psi_n = n\Omega t_0; \quad (15.22)$$

$$u(t) = \frac{1}{2} \frac{2U_m}{q} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{q}}{\frac{n\pi}{q}} e^{jn\Omega(t-t_0)}. \quad (15.23)$$

Используя формулы Эйлера, от этой формы легко перейти к тригонометрической:

$$u(t) = \frac{U_m}{q} + \frac{2U_m}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{q}}{\frac{n\pi}{q}} \cos n\Omega(t-t_0). \quad (15.24)$$

Здесь  $U_0 = \frac{C_0}{2} = \frac{U_m}{q}$  - постоянная составляющая

$$U_{mn} = |C_n| = \frac{2U_m}{q} \left| \frac{\sin \frac{n\pi}{q}}{\frac{n\pi}{q}} \right| - \text{амплитуда } n\text{-й гармоники.}$$

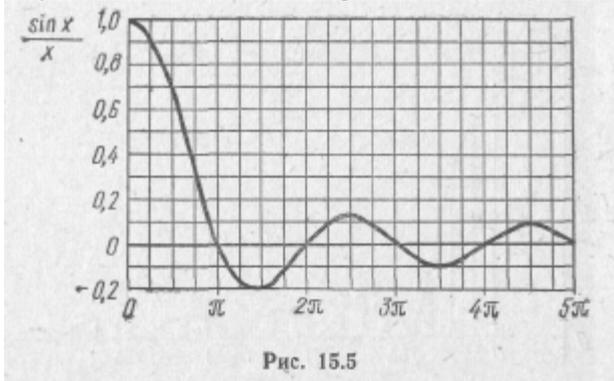
Анализ полученных выражений позволяет сделать следующие выводы:

1. Постоянная составляющая и амплитуды всех гармоник пропорциональны амплитуде импульсов и уменьшаются с ростом их скважности, что объясняется физически уменьшением энергии в импульсе (уменьшается его относительная площадь).
2. Амплитуды  $C_n$  гармоник не зависят от сдвига импульсов во времени  $t_0$ , а зависят лишь от их длительности (скважности). С другой стороны, начальные фазы гармоник зависят лишь от сдвига импульсов и не зависят от их амплитуды и длительности, т. е. сдвиг сигнала во времени не влияет на его АЧС, а изменяет только ФЧС.
3. Распределение амплитуд гармоник по величине подчиняется закону арочного синуса:  $x = \frac{n\pi}{q}$ , где  $x = \frac{n\pi}{q}$ . Такая функция имеет арочную структуру (рис. 15.5) и определяет

появление перед амплитудами знака плюс или минус, что соответствует изменению от арки к арке фазы гармоник на  $\pm\pi$ . С учетом этого выражение (15.24) можно записать иначе:

$$u(t) = \frac{U_m}{q} + \frac{2U_m}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin \frac{n\pi}{q}}{\frac{n\pi}{q}} \right| \cos [n\Omega t - \psi_n \mp (k-1)\pi], \quad (15.25)$$

где  $k=1, 2, 3, \dots$  — номер арки или интервала значений переменной  $x = \frac{n\pi}{q}$ , при которых функция  $Sa(x) = \frac{\sin x}{x}$  принимает определенные по знаку значения (положительные или отрицательные),



Переходя к анализу спектров, их особенности в общих чертах можно сформулировать так:

1. Спектральные линии находятся друг от друга на одинаковом расстоянии, равном частоте следования импульсов  $\Omega$ .
2. Распределение спектральных линий по высоте определяется огибающей спектра, характер которой зависит от формы сигнала.
3. Для построения спектров можно воспользоваться методикой, суть которой в следующем. В точках  $n\Omega$  на расстоянии  $\Omega$  одна от другой проводятся линии, перпендикулярные оси частот. В тех же координатах в нужном масштабе строится огибающая спектра. Точки пересечения перпендикуляров с огибающей спектра определяют высоту спектральных линий.
4. Для построения огибающей удобно пользоваться типовыми кривыми или рассчитывать значения их ординат в характерных точках.

### 15.3.1. Амплитудно-частотный спектр

Огибающая АЧС последовательности прямоугольных видеоимпульсов описывается функцией

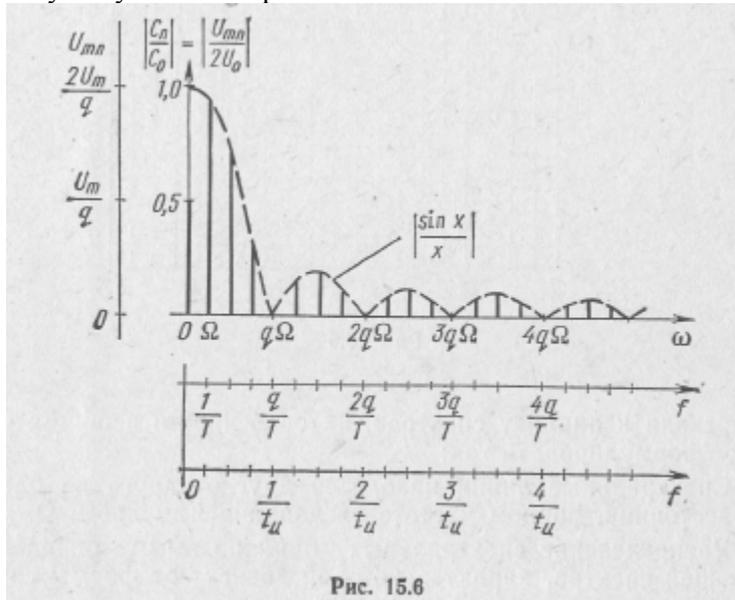
$$U_{mn} = \frac{2U_m}{q} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{2U_m}{q} |Sa(x)|,$$

$$x = n\Omega \frac{t_H}{2} = \frac{n\pi}{q}.$$

и пересекает ось частот, когда  $x$  кратно  $l$ , т. е.  $n$  кратно  $q$ , т. е. при частотах, кратных скважности. Поэтому именно эти частоты, равные

$$qn\Omega = n \frac{2\pi}{t_{II}}$$

отсутствуют в спектре.



Обычно при построении спектров откладывают относительные

величины, т. е.  $\frac{C_n}{C_0} = \frac{U_{mn}}{2U_0} = \left| \frac{\sin x}{x} \right| = |Sa(x)|$  и получают

относительный или нормированный спектр (рис. 15.6).

Спектральные составляющие с наибольшей амплитудой расположены под первыми арками, в них сосредоточена и основная часть энергии сигнала. Поэтому эффективную ширину спектра можно определить как

$$\Delta\omega_c = (1 \div 2,5)q\Omega. \quad (15.26)$$

Теоретически ширина спектра бесконечна, однако не все его составляющие оказывают действительное влияние на форму сигнала и имеют практическое значение. Поэтому под шириной спектра обычно понимают ограниченный диапазон частот, внутри которого распределена большая часть энергии сигнала. Ширина спектра, так же как, например, полоса пропускания контура,— понятие условное.

Рассмотрим особенности АЧС при изменении длительности и частоты следования импульсов (рис. 15.7).

С уменьшением частоты следования  $\Omega$  при  $t_{II} = \text{const}$  происходит сгущение спектра: расстояние между спектральными линиями уменьшается. Ширина спектра, определяемая его огибающей, не

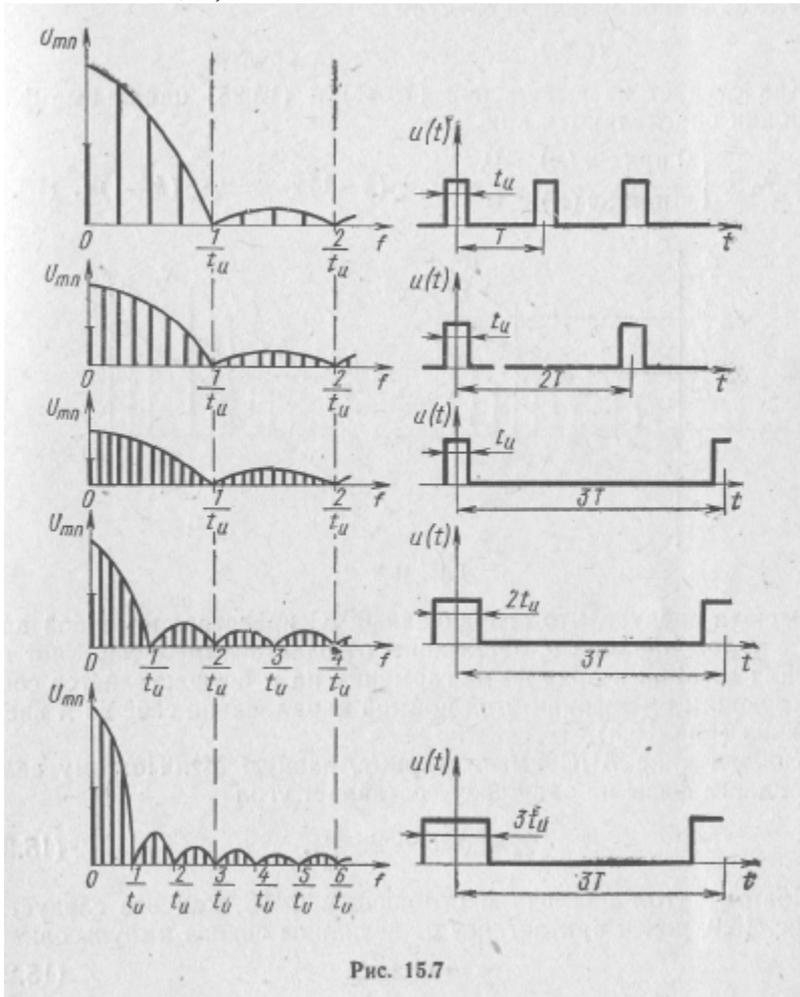


Рис. 15.7

меняется, а основная часть энергии распределяется на большем числе гармоник.

С увеличением длительности импульсов при  $\Omega = \text{const}$  ширина арок и связанная с ней ширина спектра уменьшаются: происходит относительное сжатие спектра. Основная часть энергии распределяется на меньшем числе гармоник и сосредотачивается в области все более низких частот.

Таким образом, чем короче импульсы и больше их скважность, тем шире и гуще их спектр, и наоборот,

На практике часто приходится учитывать в спектре лишь конечное число гармоник. Точность аппроксимации исходной функции в этом случае зависит от числа учтенных гармоник. Она оказывается достаточной, если учитываются все гармоники, определяемые заданной шириной спектра.

### 15.3.2. Фазо-частотный спектр

Как следует из выражений (15.24) и (15.25) начальные фазы гармоник определяются как

$$\psi_{\Sigma n} = \psi_n \pm \begin{cases} 0 & \text{при } \text{Sa}(x) > 0, \\ \pi & \text{при } \text{Sa}(x) < 0 \end{cases} = \psi_n \pm (k-1)\pi = n\Omega t_0 \pm (k-1)\pi. \quad (15.27)$$

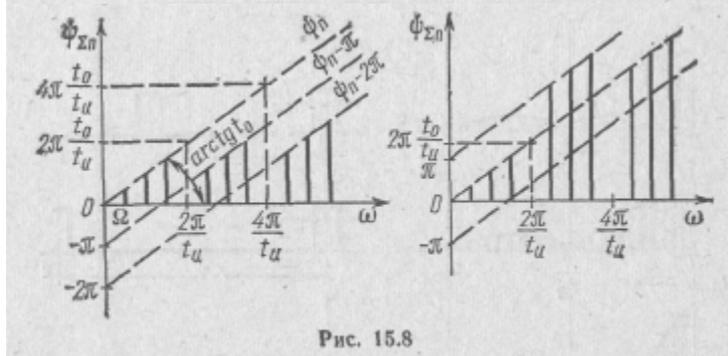


Рис. 15.8

Отсюда следует, что огибающая ФЧС представляет собой прямую с углом наклона  $\alpha$ , зависящим от сдвига импульсов. Учет изменения от арки к арке фазы гармоник на  $\pi$  осуществляется соответствующим смещением этой прямой параллельно себе на  $\pi$  вверх или вниз (рис. 15.8).

Каждая арка АЧС имеет ширину, равную  $q\Omega$ . Поэтому величина сдвига фазы на одну арку составляет угол

$$\psi_a = q\Omega t_0 = 2\pi \frac{t_0}{t_H}. \quad (15.28)$$

Поэтому угол наклона  $\alpha$  огибающей ФЧС, как это следует и из рис. 15.9, равен арктангенсу от величины сдвига импульсов:

$$\alpha = \text{arctg} t_0. \quad (15.29)$$

Чем больше сдвиг импульсов во времени, тем больше наклон огибающей их ФЧС (рис. 15.9). При  $t_0=0$  угол  $\alpha$  равен нулю.

Симметричные частотные спектры имеют аналогичный вид, но построение спектральных линий на них распространяется на ось отрицательных частот. При этом АЧС и ФЧС оказываются симметричными относительно оси ординат и начала отсчета соответственно (рис. 15.10).

#### Пример 15.1.

Рассчитать спектры периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов, если  $U_m = 100$  мВ;  $q=5$ ;  $t_H=0,02$  мс;  $t_0=2 t_H$ .

Решение.

1. Расстояние между спектральными линиями, равное частоте следования импульсов

$$F = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{q t_u} = \frac{50}{5} = 10 \text{ кГц},$$

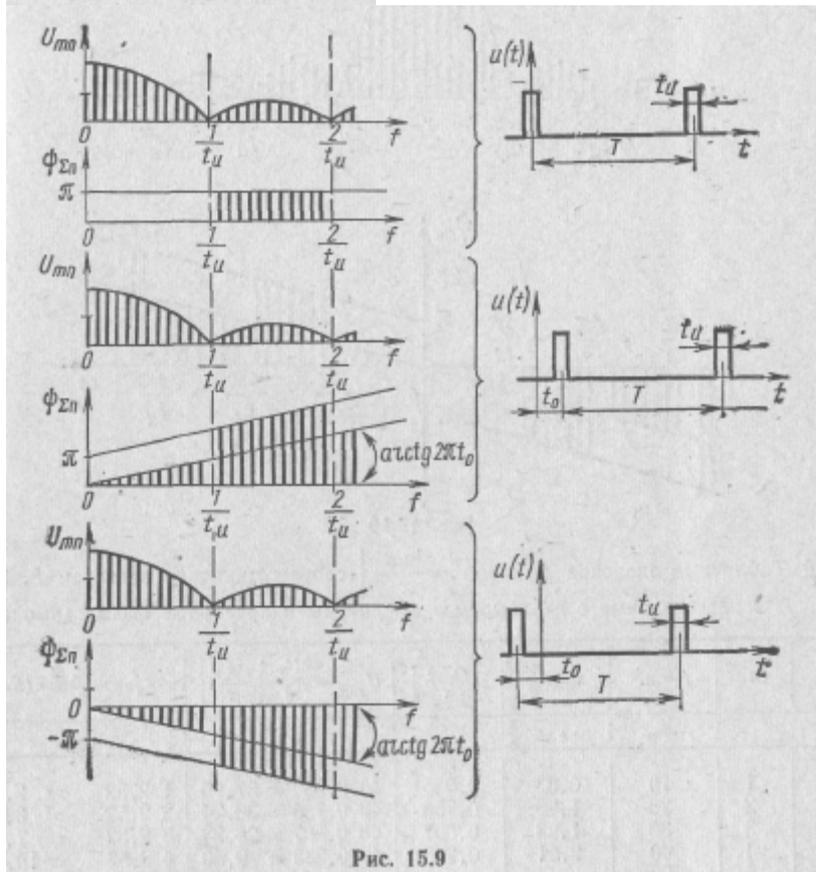


Рис. 15.9

2. Ширина арки:

$$\frac{1}{t_H} = qF = \frac{1}{0,01} = 50 \text{ кГц}.$$

3. Количество спектральных линий под каждой аркой:

$$q - 1 = 5 - 1 = 4.$$

4. Сдвиг фазы на одну арку:

$$\psi_a = 2\pi \frac{t_0}{t_H} = 2\pi \cdot 2 = 4\pi.$$

Постоянная составляющая:

$$U_0 = \frac{U_m}{q} = \frac{100}{5} = 20 \text{ мВ}$$

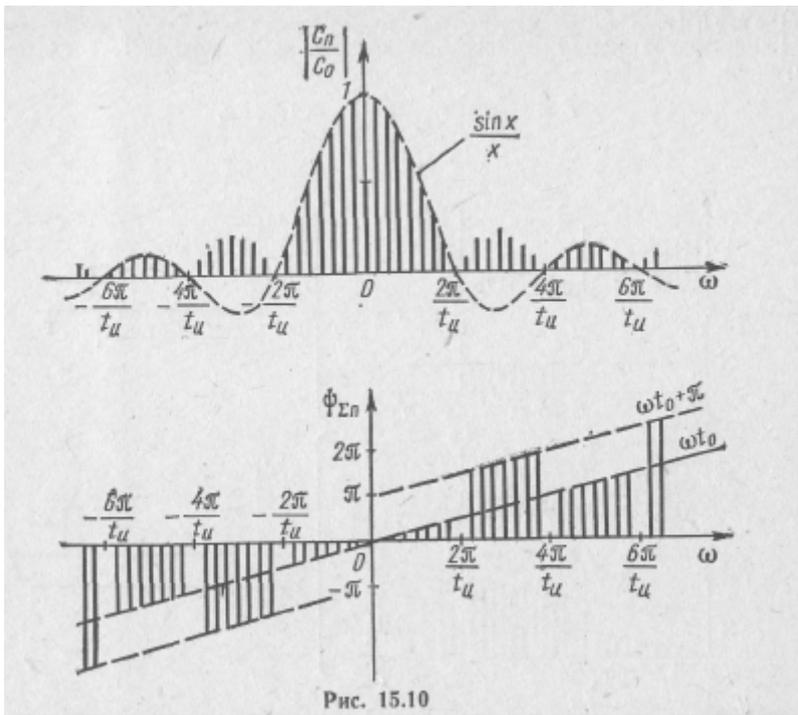


Рис. 15.10

6. Табличные значения функции  $\left| \frac{\sin x}{x} \right|$  соответствующие частотам  $F, 2F, 3F, \dots$  и рассчитанные с их помощью амплитуды и начальные фазы гармоник:

$k$	$n$	$f = nF$	$x = \frac{n\pi}{q}$	$\left  \frac{\sin x}{x} \right $	$U_{mn} = \frac{2U_m}{q} \left  \frac{\sin x}{x} \right $	$\phi_{\Sigma n} = n \frac{\phi_s}{q} \pm \pi(k-1)$
		кГц	рад/с		мВ	рад
1	1	10	0.63	0.935	40 0.935 = 37,40	1 2,52 = 2,52
	2	20	1,26	0,756	40 0,756 = 30,24	2 2,52 = 3,04
	3	30	1,88	0,507	40 0,507 = 20,28	3 2,52 = 7,56
	4	40	2,51	0,235	40 0,235 = 9,40	4 2,52 = 10,08
	5	50		0	0	—
2	6	60	3,77	0,157	40 0,157 = 6,28	6 2,52 = 11,98
	7	70	4,39	0,217	40 0,217 = 8,68	7 2,52 = 14,50
	8	80	5,03	0,189	40 0,189 = 7,56	8 2,52 = 17,02
	9	90	5,65	0,104	40 0,104 = 4,16	9 2,52 = 19,54
	10	100	2	0	0	—
3	11	110	6,93	0,085	40 0,085 = 3,40	11 2,52 - 2 = 21,44
	12	120	7,56	0,126	40 0,126 = 5,04	12 2,52 - 2 = 23,96
	13	130	8,19	0,177	40 0,177 = 4,68	13 2,52 - 2 = 26,48
	14	140	8,82	0,067	40 0,067 = 2,68	14 2,52 - 2 = 29,00
	15	150	3	0	0	—

В спектре отсутствуют гармоники, кратные  $q=5$ , т. е.  $5F=50$  кГц,  $10F=100$  кГц,  $15F=150$  кГц и т. д.

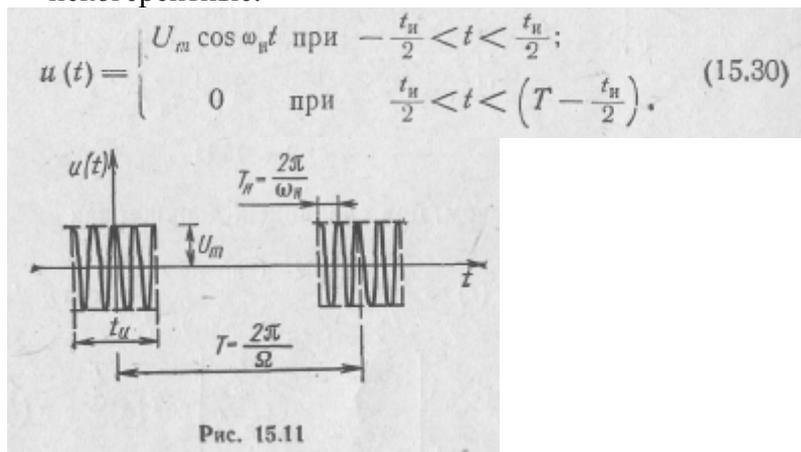
## 15.4. СПЕКТРЫ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ РАДИОИМПУЛЬСОВ

Рассчитаем спектр симметричной относительно оси ординат последовательности прямоугольных радиоимпульсов (рис. 15.11):

Здесь  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$  и  $\Omega$  — период и частота следования импульсов;

$\omega_H$  — несущая частота.

Если несущая частота кратна частоте следования, т. е.  $\omega_H = k\Omega$ , где  $k$  — целое число, то импульсы называются когерентными, если эти частоты не кратны ( $\omega_H \neq k\Omega$ ), то импульсы — некогерентные.



С помощью выражения (15.4) находим постоянную составляющую

$$U_0 = \frac{C_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-t_H/2}^{+t_H/2} U_m \cos \omega_H t dt = \frac{2U_m}{\omega_H T} \sin \omega_H \frac{t_H}{2} = \frac{\Omega}{\omega_H} \cdot \frac{U_m}{\pi} \sin \omega_H \frac{t_H}{2}. \quad (15.31)$$

В силу симметрии функции относительно оси ординат ряд Фурье будет содержать лишь косинусоиды ( $b_n = 0$ ).

$$C_n = a_n = \frac{2}{T} \int_{-t_H/2}^{+t_H/2} U_m \cos \omega_H t \cos n\Omega t dt = \frac{2U_m}{T} \left[ \frac{\sin(\omega_H - n\Omega) \frac{t_H}{2}}{\omega_H - n\Omega} + \frac{\sin(\omega_H + n\Omega) \frac{t_H}{2}}{\omega_H + n\Omega} \right]. \quad (15.32)$$

Отсюда следует, что амплитуды гармонических составляющих резко возрастают в районе значений частот, близких к  $\omega_H$ , т. е.  $n\Omega \approx \omega_H$ . По в этом районе значений  $n$  второе слагаемое в выра-

Жении (15.32) значительно меньше первого, и им можно пренебречь<sup>1</sup>. Кроме того, так как  $\omega_H > \Omega$ , постоянной составляющей можно также практически пренебречь.

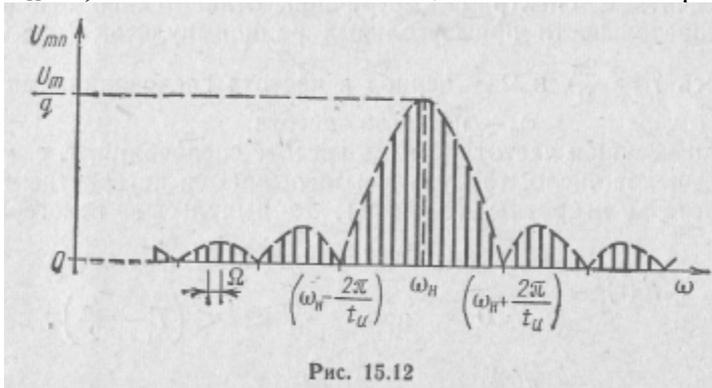


Рис. 15.12

Таким образом, при сделанных допущениях

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \frac{U_m}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\omega_H - n\Omega) \frac{t_H}{2}}{(\omega_H - n\Omega) \frac{t_H}{2}} \cos n\Omega t = \\
 &= \frac{U_m}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(\omega_H - n\Omega) \frac{t_H}{2}}{(\omega_H - n\Omega) \frac{t_H}{2}} \right| \cos [n\Omega t \pm \pi(k-1)]. \quad (15.33)
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что огибающая АЧС последовательности прямоугольных радиоимпульсов определяется, так же как и для последовательности аналогичных видеоимпульсов, функцией  $|Sa(x)| = \left| \frac{\sin x}{x} \right|$ . Разница лишь в том, что эта функция сдвинута

по оси частот на величину  $\omega_H$ , а ее максимум вдвое меньше и соответствует частоте  $\omega = \omega_H$ . (рис. 15.12).

В спектре некогерентной последовательности радиоимпульсов несущая частота  $\omega_H$  отсутствует,  $n\Omega \neq \omega_H$  и наибольшую амплитуду имеет составляющая с частотой, близкой к  $\omega_H$ . Если импульсы когерентны, то в их спектре присутствует составляющая несущей

частоты, имеющая наибольшую амплитуду, равную  $\frac{U_m}{q}$  (рис. 15.13).

Таким образом, спектр последовательности прямоугольных радиоимпульсов совпадает со спектром последовательности прямо-

<sup>1</sup> При комплексной форме ряда Фурье и построении симметричных спектров  $n$  принимает не только положительные, но и отрицательные значения. При отрицательных  $n$  в формуле (15.32) нельзя пренебречь вторым слагаемым, так как в районе частот  $-n\Omega \approx -\omega_H$ , оно становится, наоборот, значительно больше первого слагаемого.

угольных видеоимпульсов, смещенным вправо по оси частот на величину  $\omega_n$ . При этом часть спектра, лежащая в области  $\omega < \omega_n$ , является зеркальным отображением части спектра, лежащего в области  $\omega > \omega_n$ . Сделанные выводы тем точнее, чем  $\omega_n > \Omega$ ,

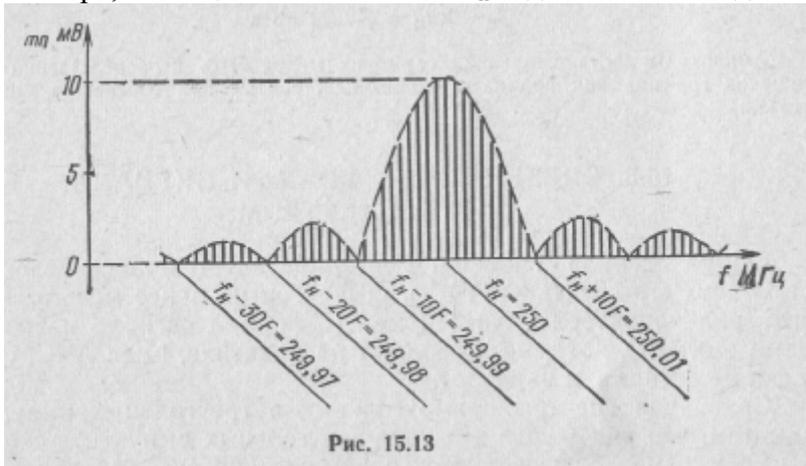


Рис. 15.13

Наиболее эффективные спектральные составляющие, имеющие наибольшие амплитуды, у радиоимпульсов сосредоточены вблизи несущей частоты. Эффективная ширина спектра радиоимпульсов в два раза больше, чем у одинаковых по длительности видеоимпульсов.

Пример 15.2.

Построить АЧС периодической последовательности прямоугольных радиоимпульсов, если  $U_m = 100$  мВ;

$$f_n = 250 \text{ МГц}; F = \frac{\Omega}{2\pi} \text{ кГц}; t_H = 100 \text{ мкс.}$$

Решение.

1. Сквозность импульсов:

$$q = T/t_H = 1/t_H F = \frac{1}{100 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3}} = 10.$$

2. Ширина малых арок и половины большой арки:

$$1/t_H = qF = 1/100 = 0,01 \text{ МГц}$$

3. Максимальная ордината огибающей спектра:

$$U_m / q = 100 / 10 = 10 \text{ мВ.}$$

4. Так как  $f_n$  кратно  $F$ , импульсы когерентны, основная спектральная составляющая имеет частоту, равную  $f_n = 250$  МГц.

В спектре, показанном на рис. 15.13, присутствуют частоты:

$$\begin{aligned} f_n + 2F &= 250,002 \text{ МГц}; \\ f_n + F &= 250,001 \text{ МГц}; \\ f_n &= 250,000 \text{ МГц}; \\ f_n - F &= 249,999 \text{ МГц}; \\ f_n - 2F &= 249,998 \text{ МГц}; \end{aligned}$$

отсутствуют частоты:

$$\begin{aligned}f_n + 2/t_n &= 250,02 \text{ МГц}; \\f_n + 1/t_n &= 250,01 \text{ МГц}; \\f_n - 1/t_n &= 249,99 \text{ МГц}; \\f_n - 2/t_n &= 249,98 \text{ МГц};\end{aligned}$$

Амплитуды соответствующих гармоник могут быть непосредственно отсчитаны из графика как ординаты огибающей, взятые при соответствующих частотах.

## 15.5. СВЯЗЬ МЕЖДУ ФОРМОЙ СИГНАЛА И ЕГО СПЕКТРОМ

Форма сигнала в полной мере определяется лишь совокупностью двух его спектров: АЧС и ФЧС. Тем не менее можно установить ряд характерных связей между формой сигнала и параметрами его АЧС, которые позволяют на практике, имея АЧС, судить о форме сигнала, и наоборот.

Сравнивая спектры прямоугольных и треугольных импульсов, заметим, что ряд Фурье в случае треугольных импульсов сходится быстрее, чем в случае прямоугольных импульсов, так как амплитуды гармоник убывают быстрее с ростом их номера (табл. 15.1). Закономерность, по которой уменьшаются амплитуды гармоник с ростом их номера, можно выразить через число раз дифференцирования исследуемой функции, необходимое для "выделения из нее дельта-функций. Пусть в  $k$ -й производной исследуемой функции появляются дельта-функции. Тогда для коэффициентов Фурье имеют силу неравенства:

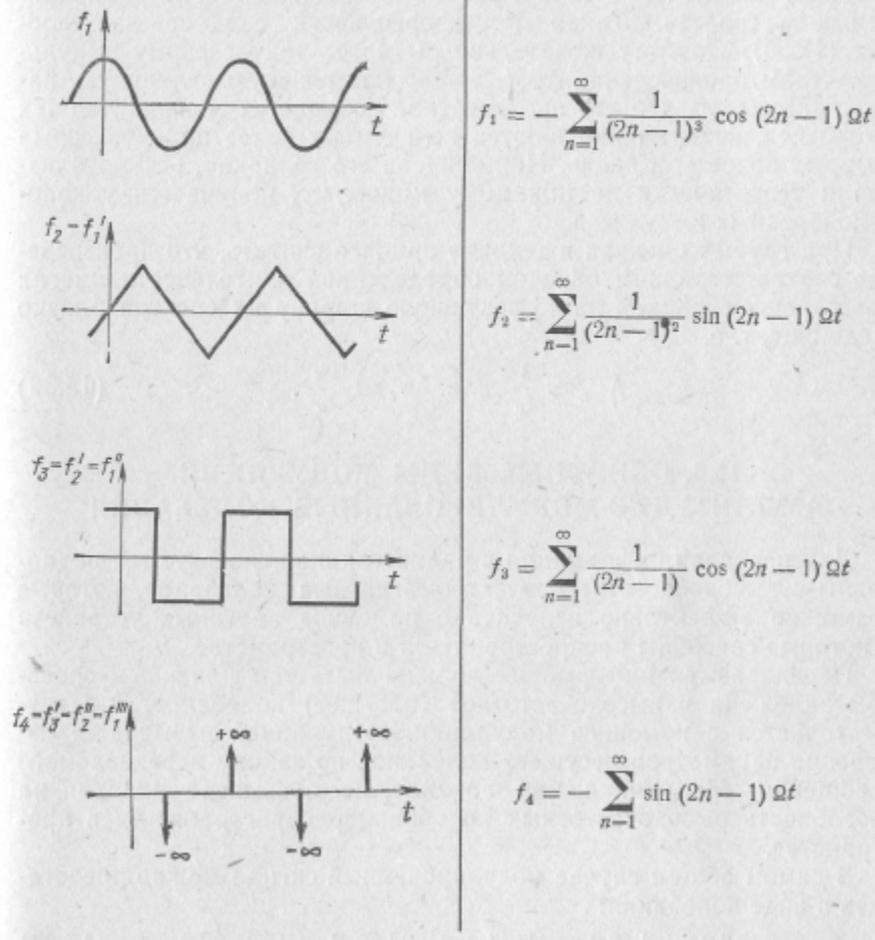
$$|a_n| \leq \frac{M}{n^k}; \quad |b_n| \leq \frac{M}{n^k}, \quad (15.34)$$

где  $M$  — постоянная, зависящая от формы сигнала.

Скорость убывания амплитуд гармоник в спектре зависит от структурных свойств сигнала: коэффициенты убывают тем быстрее, чем более «гладкой» является форма сигнала и его производных. Если сигнал имеет скачкообразные переходы (его функция имеет конечные разрывы) и в его первой производной появляются  $\delta(t)$ -импульсы, то амплитуды гармоник в его спектре стремятся к нулю очень медленно — порядок  $1/n$ ; если же в пределах периода следования сигнал непрерывен, но в его первой производной имеются конечные разрывы, а во второй —  $\delta(t)$ -импульсы, то амплитуды его гармоник стремятся к нулю быстрее — порядок не ниже  $1/n^2$  и т. д. Чем быстрее убывают коэффициенты Фурье, чем более «гладкая» форма сигнала, тем меньше ширина его спектра. В пределе имеет место наиболее «гладкое» моногармоническое колебание.

Понятие длительности определено лишь для прямоугольных и сходных с ними импульсов. На практике длительность импульса произвольной формы, так же как и ширину спектра сигнала, опре-

## Графики функций и их разложения в ряд Фурье



деляют энергетическим методом, т. е. как интервал времени, внутри которого - сосредоточена большая часть его энергии, например 90%. Ширина спектра импульсов получается тем больше, чем меньше длительность импульсов. Важным свойством АЧС сигнала является то, что произведение длительности импульса на ширину спектра есть величина постоянная для импульсов данной формы:

$$\Delta \omega_c t_H = const. \quad (15.35)$$

Это свойство присуще спектрам любых сигналов и играет существенную роль при выборе их параметров.

Уменьшение длительности радиолокационных импульсов, например, позволяет увеличить точность определения координат цели. Однако увеличение при этом ширины спектра сигнала затрудняет обеспечение требуемой помехозащищенности радиоприемных устройств. Такая противоречивость следует из условия (15.35). Поэтому желательно выбирать такую форму импульсов, чтобы произведение  $\Delta\omega_c t_H$  имело наименьшую величину. Анализ показывает, что это произведение получается меньше для тех импульсов, которые изменяются во времени более плавно, форма которых более «гладкая». Наименьшая его величина, весьма близкая к теоретически достижимому минимуму, получается у коло-колообразных импульсов.

При грубых оценках в технике принято считать, что произведение соответствующим образом определенной длительности многих простейших сигналов на эффективную ширину их " спектра близко к единице, т. е.

$$\Delta F_c \approx \frac{1}{t_H} \text{ или } \Delta\omega_c \approx \frac{2\pi}{t_H}. \quad (15.36)$$

## 15.6. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ МОДУЛЯЦИИ. АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Для передачи информации в радиотехнике используются радио-волны — высокочастотные электромагнитные колебания, которые возможно эффективно излучать с помощью антенных устройств и которые способны распространяться в пространстве.

Передаваемая информация должна быть тем или иным способом заложена в высокочастотное (несущее) колебание. Это осуществляется с помощью модуляции. Модуляцией называется изменение параметров несущего колебания по закону передаваемого сообщения. Модуляция, как правило, не оказывает влияния на способность высокочастотных колебаний распространяться в пространстве.

В самом общем случае, модулированный сигнал можно представить в виде колебания:

$$a(t) = A_m(t) \cos [\omega t + \psi(t)] = A_m(t) \cos \theta(t), \quad (15.37)$$

в котором амплитуда  $A_m$  или фаза  $\psi$  изменяется по закону передаваемого сообщения.

Если  $A_m$  и  $\psi$  — постоянные величины, то это выражение описывает простое гармоническое несущее колебание, не содержащее в себе никакой информации.

В зависимости от того, какой из двух параметров изменяется — амплитуда  $A_m$  или угол  $\theta$  — различают два основных вида модуляции: амплитудную и угловую.

Угловая модуляция в свою очередь подразделяется на частотную и фазовую модуляции. Эти два вида модуляции между собой тесно связаны, различие между ними проявляется лишь в харак-

тере изменения во времени угла  $\theta$  при одном и том же законе модуляции.

Для большинства используемых в радиотехнике сигналов характерно, что при модуляции параметры радиосигнала изменяются настолько медленно, что в пределах одного периода высокочастотного колебания его можно считать синусоидальным. Поэтому функции  $A_m(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\theta(t)$  можно считать медленно изменяющимися функциями времени.

Модулированные колебания в общем не являются периодическими и относятся к числу квазигармонических, почти периодических функций. Такие функции могут быть разложены в тригонометрический ряд и представлены как сумма гармонических составляющих, частоты которых в общем случае не являются кратными, представляют комбинации частот и называются комбинационными. В отличие от такого ряда ряд Фурье содержит гармонические составляющие с кратными частотами.

В развитии теории модулированных колебаний большую роль сыграли работы Л. И. Мандельштама, П. Д. Папалекси, М. В. Шулейкина, В. И. Сифорова, И. С. Гоноровского и других советских ученых. В наиболее полном виде строгая математическая формулировка основных свойств модулированных колебаний и единых методов их исследования была впервые дана в монографии С. М. Рытова «Модулированные колебания и волны» (1940г.).

Амплитудная модуляция (АМ) относится к числу простейших и получивших широкое применение благодаря своей простоте в осуществлении и использовании. При АМ амплитуда несущего колебания является функцией времени вида

$$A_m(t) = A_{m0}[1+F(t)], \quad (15.38)$$

где  $A_{m0}$  — постоянная, равная среднему значению амплитуды;

$F(t)$ —функция времени, изменяющаяся по такому же закону, что и модулирующий сигнал, и называемая модуляционной функцией.

Способы осуществления АМ обычно основаны на изменении потенциалов электронных приборов, входящих в состав радиопередающего устройства. В простейшем случае амплитудно-модулированное (АМ) колебание тока можно получить в цепи с изменяющимся сопротивлением, к которому приложено напряжение высокой частоты, а закон изменения определяется модуляционной функцией. Подобным переменным сопротивлением может служить, например, угольный микрофон.

Аналитически АМ колебания определяются выражением вида

$$a(t) = A_{m0}[1+F(t)] \cos(\omega_H t + \psi_H). \quad (15.39)$$

При гармонической (однотональной) модуляции, когда

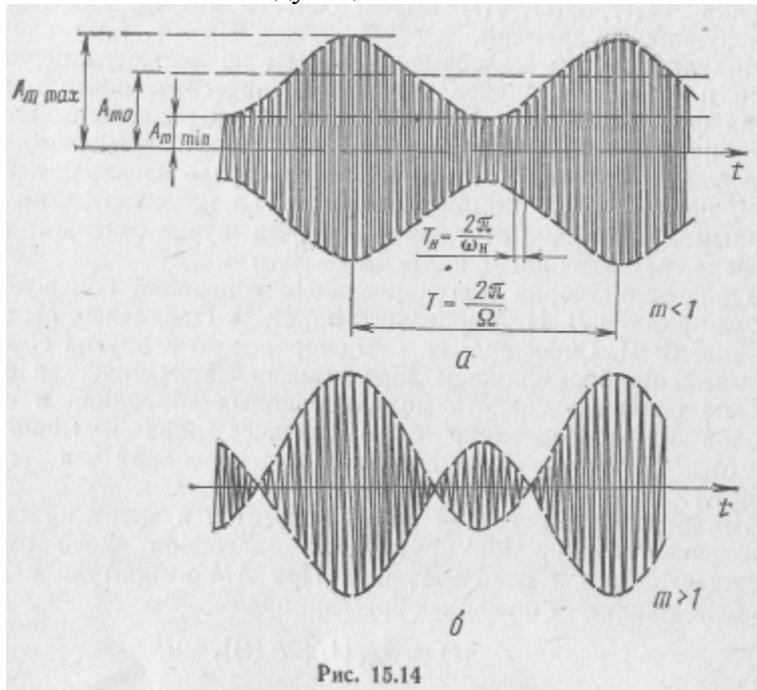
$$F(t) = m \cos(\Omega t + \varphi_0), \quad (15.40)$$

для АМ колебания получаем

$$a(t) = A_{m0}[1 + m \cos(\Omega t + \varphi_0)] \cos(\omega_H t + \psi_H), \quad (15.41)$$

где  $m$  — коэффициент модуляции;

$\Omega$  — частота модуляции.



Коэффициент модуляции  $m$  пропорционален интенсивности передаваемого сигнала, его называют также глубиной модуляции. При  $0 \leq m \leq 1$  амплитуда АМ колебания не принимает отрицательных значений. Такая модуляция называется неискаженной (рис. 15.14, а). При  $m > 1$  значения  $A_m(t)$  на некоторых интервалах времени становятся отрицательными (рис. 15.14, б), что приводит к перемодуляции, связанной с искажением огибающей колебания. Во избежание этого коэффициент модуляции выбирают не более единицы.

При неискаженной модуляции амплитуда АМ колебания изменяется в пределах от  $A_{m \min} = A_{m0} (1 - m)$  до  $A_{m \max} = A_{m0} (1 + m)$ . При этом коэффициент модуляции может быть найден как отношение максимального приращения  $\Delta A_m$  амплитуды колебаний к среднему ее значению  $A_{m0}$ :

$$m = \frac{A_{m0} - A_{m \min}}{A_{m0}} = \frac{A_{m \max} - A_{m0}}{A_{m0}} = \frac{\Delta A_m}{A_{m0}}. \quad (15.42)$$

Следует заметить, что даже при модуляции простейшим гармоническим сигналом АМ колебание представляет собой сложный сигнал, состоящий из ряда гармонических составляющих. Эта особенность была установлена еще в 1913 г. московским профессором Н. Н. Андреевым, а затем подробно исследована в работах М. В. Шулейкина (1916 г.). Тем не менее в свое время (1930 г.) американским ученым Флемингом была поднята дискуссия о «реальности» дополнительных гармонических составляющих в АМ колебании с далеко идущими практическими выводами. Он утверждал, что временное представление АМ колебания (15.39) отображает реальную ситуацию, а его спектральное представление является математической фикцией. По мнению Флеминга, в действительности никаких дополнительных частот нет, реальна лишь несущая частота, а следовательно, ширина спектра АМ колебания бесконечно мала и точное воспроизведение сигнала возможно при сколь угодно малой полосе пропускания приемника, настроенного точно на несущую частоту. Из этого делался вывод о возможности безграничного уплотнения эфира.

В настоящее время в справедливости спектрального представления сомнений нет, а окончательный вывод Флеминга представляется наивным. Для обычно используемых фильтров с постоянными параметрами гармонический спектр АМ сигнала не менее реален, чем его временное представление. Спектр можно наблюдать и исследовать с помощью анализаторов спектра.

Как следует из формулы (15.41), при гармонической (однотональной) амплитудной модуляции

$$\begin{aligned}
 a(t) &= A_{m0} [1 + m \cos(\Omega t + \tau_0)] \cos(\omega_n t + \psi_n) = \\
 &= A_{m0} \cos(\omega_n t + \psi_n) + \frac{mA_{m0}}{2} \cos[(\omega_n + \Omega)t + (\psi_n + \tau_0)] + \\
 &\quad + \frac{mA_{m0}}{2} \cos[(\omega_n - \Omega)t + (\psi_n - \tau_0)]. \quad (15.43)
 \end{aligned}$$

Первое слагаемое здесь представляет несущее колебание с частотой  $\omega_n$ . Второе и третье слагаемые соответствуют новым гармоническим составляющим, появляющимся в процессе модуляции амплитуды. Они являются продуктом модуляции и называются боковыми гармоническими составляющими. Частоты этих колебаний  $(\omega_n + \Omega)$  и  $(\omega_n - \Omega)$  называются боковыми: верхней и нижней боковой частотой соответственно. Амплитуды этих составляющих одинаковы и зависят от глубины модуляции (рис. 15.15,а), а их фазы симметричны относительно фазы несущего колебания. Чем меньше коэффициент  $m$ , тем меньше амплитуды боковых составляющих, и в пределе при  $m=0$  они отсутствуют.

Если модулирующий сигнал является сложным

$$F(t) = \sum_{k=1}^n m_k \cos(\Omega_k t + \varphi_k), \quad (15.44)$$

то каждая его гармоническая составляющая дает пару боковых частот:

$$\begin{aligned}
 a(t) &= A_{m0} \left[ 1 + \sum_{k=1}^n m_k \cos(\Omega_k t + \varphi_k) \right] \cos(\omega_n t + \psi_n) = \\
 &= A_{m0} \cos(\omega_n t + \psi_n) + \frac{A_{m0}}{2} \sum_{k=1}^n m_k \cos[(\omega_n + \Omega_k)t + (\psi_n + \varphi_k)] + \\
 &\quad + \frac{A_{m0}}{2} \sum_{k=1}^n m_k \cos[(\omega_n - \Omega_k)t + (\psi_n - \varphi_k)]. \quad (15.45)
 \end{aligned}$$

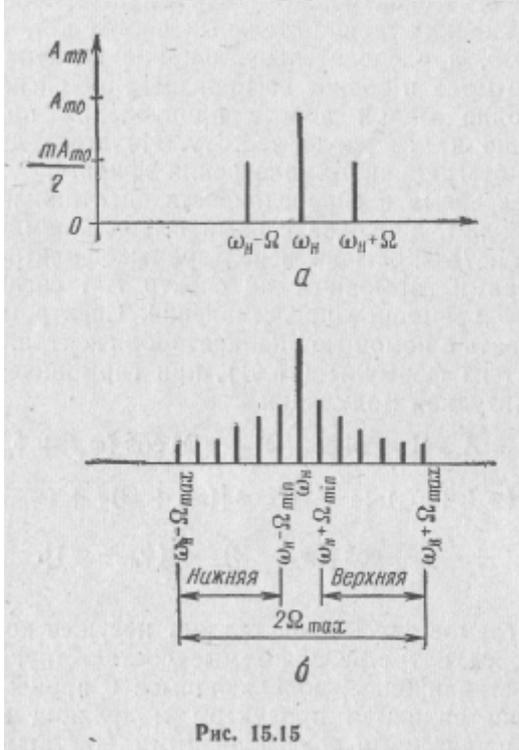


Рис. 15.15

В результате получается спектр, состоящий из двух полос частот, расположенных симметрично относительно несущей частоты  $\omega_n$ . Эти полосы частот, расположенные по обе стороны от несущей, называются боковыми: верхней и нижней боковой полосой (рис. 15.15,6).

Сравнивая спектры модулирующего сигнала (модулирующей функции) и соответствующего ему АМ колебания, можно сделать вывод, что спектр верхней боковой полосы АМ колебания подобен спектру модулирующего сигнала. Разница лишь в том, что он сдвинут по оси частот на величину  $\omega_n$ . При АМ происходит лишь трансформация спектра модулирующего сигнала по оси частот.

Если полоса частот модулирующего сигнала ограничена сверху максимальной частотой  $f_{\max}$ , то соответствующий ему АМ сигнал будет иметь спектр (см. рис. 15.15,6), ширина которого вдвое больше:

$$\Delta\omega_c = 2\Omega_{\max} \quad (15.46)$$

Для телевизионных сигналов, например,  $f_{\max} = 5$  МГц и  $\Delta F_c = 2f_{\max} = 10$  МГц.

При одновременной работе в данном диапазоне частот нескольких радиопередающих устройств во избежание помех при приеме за счет перекрытия необходимо, чтобы несущие частоты ближайших (по шкале частот) станций были разнесены одна от другой не менее чем на  $\Delta\omega_c = 2\Omega_{\max}$ .

Довольно широкий диапазон частот, занимаемый АМ сигналами, является недостатком такого вида модуляции. К числу других серьезных недостатков АМ следует отнести плохую помехозащищенность и низкую экономичность радиопередатчиков. Указанные недостатки устраняются или в значительной мере снижаются при других видах модуляции, в частности при угловой модуляции.

Частным случаем АМ колебаний является последовательность когерентных прямоугольных радиоимпульсов (рис. 15.11). Такие колебания называют манипулированными. Различают соответственно амплитудно-, фазо- и частотно-манипулированные сигналы.

## 15.7. УГЛОВАЯ МОДУЛЯЦИЯ

Принципы, лежащие в основе угловой модуляции, были выдвинуты еще в прошлом столетии (1862 г.) Гельмгольцем задолго до развития радиотехники. Однако впервые она была применена в радиосвязи в 1912 г. для телеграфной манипуляции передатчиков путем изменения их частоты. Первые схемы частотных модуляторов с электронными лампами относятся к 1921 г. (Г. А. Зейт-ленок и Е. И. Каменский). В своих работах в 1936—1938 гг. В. И. Сифоров и В. Б. Пестряков исследовали влияние помех при приеме частотно-модулированных (ЧМ) колебаний и показали преимущества этой системы модуляции.

Благодаря высокой помехоустойчивости, малым искажениям, экономичности радиопередатчиков принципы угловой модуляции завоевали широкие области применения. Частотная модуляция (ЧМ)— основной метод модуляции в радиорелейных линиях, предназначенных для многоканальной телефонии и телевидения. Угловая модуляция используется в настоящее время в радиорелейной связи, радиотелеграфии, радиолокации, в радиовещании и телевидении, в измерительной и ядерной технике.

Одной из разновидностей угловой модуляции является фазовая модуляция (ФМ). При ФМ модулирующий сигнал воздействует на начальную фазу несущего колебания. Начальная

фаза несущего колебания становится переменной величиной и меняется по закону модулирующего сигнала:

$$\psi(t) = F(t) + \psi_{H0}, \quad (15.47)$$

где  $\psi_{H0}$  — постоянная, равная неизменной части начальной фазы;

$F(t)$  — модуляционная функция.

Аналитически фазо-модулированные (ФМ) колебания в общем случае описываются выражением

$$a(t) = A_{m0} \cos[\omega_H t + F(t) + \psi_{H0}] = A_{m0} \cos \theta(t), \quad (15.48)$$

где амплитуда неизменна, а фазовый угол изменяется во времени. Частота  $\omega_H$  и здесь называется несущей частотой. Величина  $\theta(t)$  представляет полную (текущую) фазу.

При гармонической (однотональной) модуляции, когда  $F(t) = \Delta\psi \cos(\Omega t + \varphi_0)$ ,

$$\psi(t) = \psi_{H0} + \Delta\psi \cos(\Omega t + \varphi_0) = \psi_{H0} + m_\psi \cos(\Omega t + \varphi_0) \quad (15.49)$$

для ФМ колебания получаем

$$a(t) = A_{m0} \cos[\omega_H t + m_\psi \cos(\Omega t + \varphi_0) + \psi_{H0}]. \quad (15.50)$$

Величина  $m_\psi = \Delta\psi$  выражает максимальное отклонение фазы при модуляции и называется фазовым отклонением, девиацией фазы или индексом фазовой модуляции.

Другой разновидностью угловой модуляции является частотная модуляция (ЧМ). При ЧМ модулирующий сигнал воздействует на частоту несущего колебания. В случае ЧМ изменение мгновенной частоты высокочастотного колебания повторяет закон изменения модулирующего сигнала:

$$\omega(t) = \omega_H + F(t), \quad (15.51)$$

где  $\omega(t)$  — мгновенная угловая частота несущего колебания.

Угловая частота в общем случае есть скорость изменения полной (текущей) фазы, т. е.

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}. \quad (15.52)$$

В частном случае, когда  $\theta(t) = \omega_H t + \psi_H$ ,

$\omega(t) = \omega_H = \text{const}$ .

С другой стороны, полная фаза через мгновенную частоту может быть определена как

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(t) dt + \psi_{H0}. \quad (15.53)$$

Таким образом, аналитическое выражение ЧМ колебаний в общем случае принимает вид'

$$a(t) = A_{m0} \cos \theta(t) = A_{m0} \cos \left[ \int_0^t \omega(t) dt + \psi_{H0} \right] = \\ = A_{m0} \cos \left[ \omega_H t + \int_0^t F(t) dt + \psi_{H0} \right]. \quad (15.54)$$

При гармонической (однотональной) модуляции, когда

$$F(t) = \Delta\omega \cos(\Omega t + \varphi_0)$$

и

$$\omega(t) = \omega_H + \Delta\omega \cos(\Omega t + \varphi_0), \quad (15.55)$$

для ЧМ колебания получаем

$$a(t) = A_{m0} \cos \left\{ \int_0^t [\omega_H + \Delta\omega \cos(\Omega t + \varphi_0)] dt + \psi_{H0} \right\} = \\ = A_{m0} \cos \left[ \omega_H t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin(\Omega t + \varphi_0) + \psi_{H0} \right] = \\ = A_{m0} \cos [\omega_H t + m_\omega \sin(\Omega t + \varphi_0) + \psi_{H0}]. \quad (15.56)$$

Сравним общие выражения для ФМ (15.48) и ЧМ (15.54) колебаний. В обоих случаях физическая сущность явления аналогична: фаза колебания изменяется, однако соотношение между фазовым углом и модулирующим сигналом различно.

Действительно, при ФМ фазовый угол  $\varphi(t)$  пропорционален модулирующему сигналу:

$$\varphi(t) = \varphi_{H0} + F(t).$$

а соответствующая мгновенная частота

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [\omega_H t + F(t) + \psi_{H0}] = \omega_H + \frac{dF(t)}{dt} \quad (15.57)$$

пропорциональна производной сигнала.

В случае же ЧМ мгновенная частота

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \omega_n t + \int_0^t F(t) dt + \psi_{n0} \right] = \omega_n + F(t) \quad (15.58)$$

пропорциональна модулирующему сигналу, а начальная фаза пропорциональна его интегралу:

$$\psi(t) = \int_0^t F(t) dt + \psi_{n0}. \quad (15.59)$$

Указанные особенности важны при применении ФМ и ЧМ. Па-пример, если колебание модулируется по фазе сигналом, предварительно прошедшим через интегрирующую цепь, то получается колебание, модулированное по частоте исходным сигналом. Таким способом, в частности, с помощью ФМ формируют ЧМ<sup>4</sup> колебания.

При угловой модуляции амплитуда ФМ и ЧМ колебаний остается неизменной. Это повышает экономичность радиопередатчиков за счет более полного использования их мощности. Кроме того, вследствие неизменности амплитуды ФМ и ЧМ сигналы более помехоустойчивы.

## 15.8. СПЕКТРЫ ПРИ УГЛОВОЙ МОДУЛЯЦИИ

При анализе спектров ограничимся рассмотрением простейшего случая угловой модуляции по гармоническому закону. Как при ЧМ, так и при ФМ выражения (15.48) и (15.56) для этого случая можно свести к виду

$$a(t) = A_{m0} \cos [\omega_n t + m \sin (\Omega t + \varphi_0) + \psi_{n0}], \quad (15.60)$$

где  $m = m_\omega$ , при ЧМ и  $m = m_\psi$  при ФМ.

Перепишем его в более удобном для анализа виде

$$a(t) = A_{m0} \{ \cos [m \sin (\Omega t + \varphi_0)] \cos (\omega_n t + \psi_{n0}) - \sin [m \sin (\Omega t + \varphi_0)] \sin (\omega_n t + \psi_{n0}) \}. \quad (15.61)$$

Из теории функций Бесселя известно, что

$$\left. \begin{aligned} \cos (x \sin y) &= J_0(x) + 2J_2(x) \cos 2y + 2J_4(x) \cos 4y + \dots; \\ \sin (x \sin y) &= 2J_1(x) \sin y + 2J_3(x) \sin 3y + 2J_5(x) \sin 5y + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (15.62)$$

где через  $J_n(x)$  обозначена функция Бесселя первого рода «-го порядка аргумента  $x$ .

Применяя эти соотношения, положив  $y = \Omega t + \varphi_0$  и  $x = m$ , после несложных преобразований получаем

$$a(t) = A_{m0} \left\{ J_0(m) \cos (\omega_n t + \psi_n) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m) \cos [(\omega_n + n\Omega) t + n\varphi_0 + \psi_n] + \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(m) \cos [(\omega_n - n\Omega) t - n\varphi_0 + \psi_n] \right\}. \quad (15.63)$$

Из теории функций Бесселя известно также, что

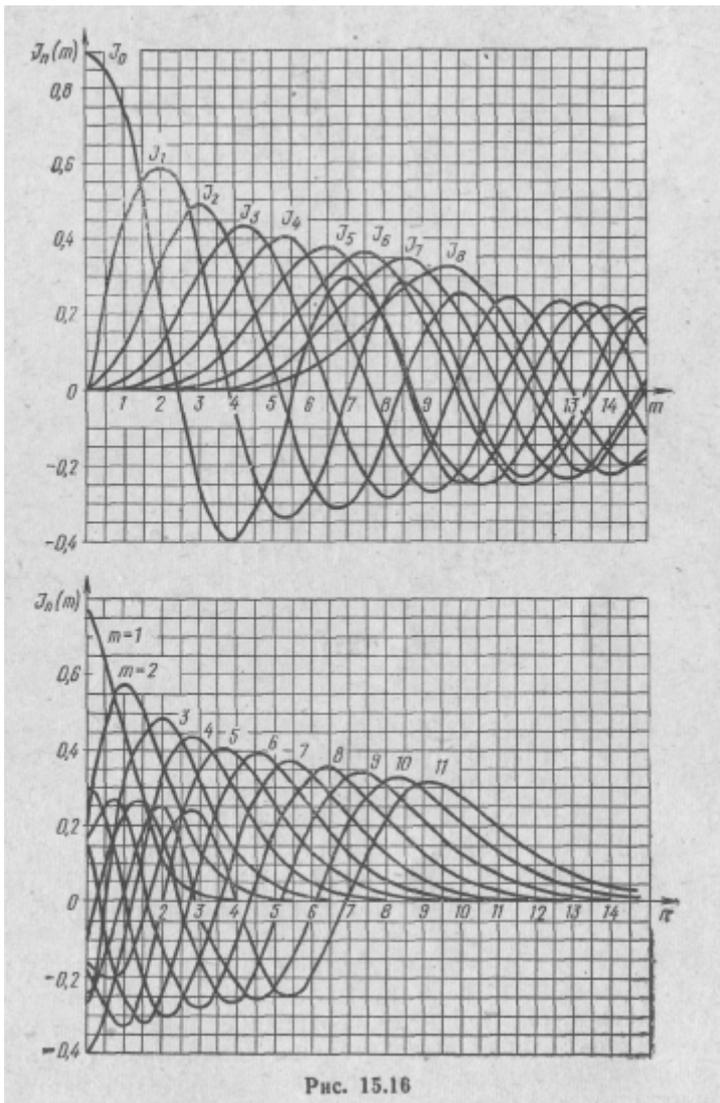
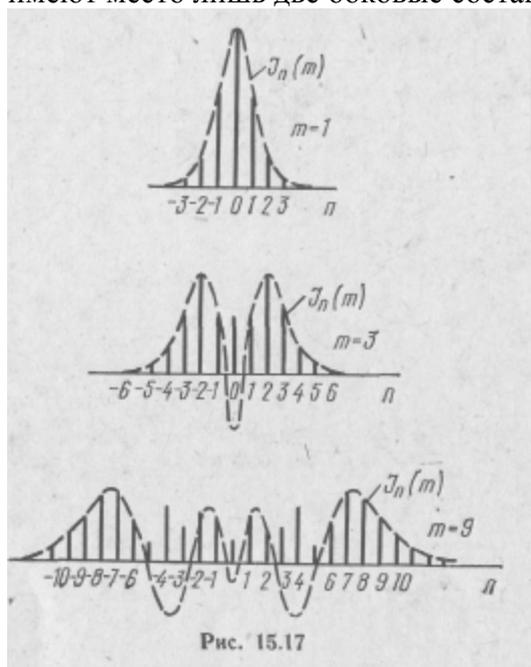
$$J_{-n}(m) = (-1)^n J_n(m). \quad (15.64)$$


Рис. 15.16

Значения функций Бесселя известны в виде таблиц и графиков (рис. 15.16). Они могут быть вычислены и с помощью разложения в степенной ряд.

Из выражения (15.63) следует, что спектр ЧМ или ФМ колебания даже в случае простейшей гармонической модуляции имеет бесконечное множество гармоник, образующих верхнюю и ниж-

нюю боковые полосы, с частотами  $\omega_H + n\Omega$ , и  $\omega_H - n\Omega$ . В случае АМ колебаний при этом имеют место лишь две боковые составляющие,



Амплитуда каждой гармонической составляющей частоты  $\omega_H \pm n\Omega$  в спектре ЧМ и ФМ колебания определяется абсолютным значением функции Бесселя  $n$ -го порядка с аргументом  $m = m_\psi = m_\omega$  и может быть вычислена с помощью кривых или таблиц этих функций. Амплитуды составляющих изменяются в зависимости от индекса модуляции  $m$ . В качестве примера на рис. 15.17 приведены спектры ЧМ колебания при разных значениях  $m$ .

Анализ спектров показывает, что с увеличением индекса  $m$  порядок составляющих с максимальной амплитудой увеличивается, стремясь к  $m$ . При этом составляющие высшего порядка приобретают все большее относительное значение. С возрастанием  $m$  энергия модулированного сигнала сосредоточивается в составляющих высокого порядка. Простые количественные изменения индекса модуляции, пропорционального интенсивности модулирующего сигнала, при угловой модуляции приводят к значительным качественным изменениям спектра. Это объясняется следующим образом. Если при АМ энергия боковых гармонических составляющих возникает за счет изменения амплитуды колебания, то при угловой модуляции амплитуда неизменна и их энергия может быть получена лишь за счет энергии составляющей несущей

частоты. Поэтому чем больше  $m$ , тем сильнее подчеркиваются удаленные боковые частоты и уменьшаются амплитуды несущей и ближайших к ней гармонических составляющих.

Теоретически спектр сигнала при угловой модуляции является бесконечным, но на практике его можно считать ограниченным. Объясняется это тем, что при заданном  $m$  значения функций Бесселя  $J_n(m)$  при значительном увеличении их порядка  $n$  быстро уменьшаются. Как видно из графиков (15.16,6), начиная с  $n \geq (m+1)$ , значения  $J_n(m)$  становятся весьма малыми. Поэтому гармоническими составляющими с порядковыми номерами  $n > (m+1) = n_{\max}$  в разложении (15.63) практически можно пренебречь.

Обозначим максимальный порядковый номер учитываемой составляющей через  $n_{\max}$ .

Тогда ширина спектра модулированного колебания составит

$$\Delta\omega_c = 2n_{\max}\Omega = 2(m+1)\Omega \quad (15.65)$$

или для значений  $m \gg 1$

$$\Delta\omega_c \approx 2m\Omega. \quad (15.66)$$

Ширина спектра при угловой модуляции в зависимости от ее вида определяется девиацией фазы или частоты.

В свое время среди радиотехников было распространено мнение, что при ЧМ с небольшой девиацией частоты можно сузить полосу частот, занимаемую радиосигналом, в сравнении с системой АМ. Прочность этого заблуждения, известного как «парадокс узкополосной ЧМ», можно пояснить выдачей в 30-х годах патента США на его использование.

Предположим, что  $m \ll 1$ . Тогда

$$J_0(m) \approx 1; J_1(m) \approx \frac{m}{2}; J_n(m) \approx 0 \quad \text{при } n > 1,$$

т. е. в спектре кроме колебания основной частоты  $\omega_n$  следует учитывать только первую пару боковых частот  $|\omega_n \pm \Omega|$ . Отсюда ширина спектра

$$\Delta\omega_c = 2n_{\max}\Omega \approx 2\Omega.$$

Таким образом, при угловой модуляции с малыми индексами модуляции (узкополосная ЧМ) ширина спектра колебания совпадает с шириной спектра при АМ. При малых  $m$  амплитудно-частотные спектры ФМ, ЧМ и АМ колебаний практически совпадают. Разница в спектрах возрастает при больших индексах модуляции (широкополосная ЧМ). В радиовещательных системах ЧМ девиация частоты обычно выбирается равной 75 кГц. При частоте модуляции  $F=1$  кГц этому соответствует индекс модуляции  $m_\omega = 75/1 = 75$  и ширина спектра 150 кГц. В случае амплитудной модуляции ширина спектра оказывается равной лишь 2 кГц

Передача широкополосных ЧМ и ФМ сигналов практически возможна только в диапазоне ультракоротких волн (УКВ).

Сравнение спектра ФМ и ЧМ колебаний (рис. 15.18) показывает, что при одинаковых  $\omega_n$ ,  $\Omega$  и  $m$  их спектры ничем не отли-

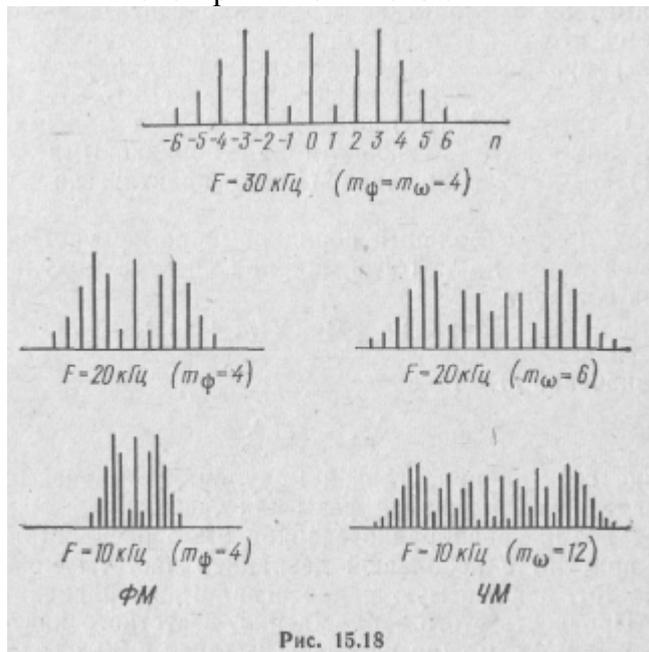


Рис. 15.18

чаются. Изменения  $\omega_n$  и  $m$  вызывают одинаковые изменения в спектрах ФМ и ЧМ колебаний.

Отличительной особенностью спектра ЧМ колебания в сравнении с ФМ является практически независимость его ширины от частоты модуляции. При ЧМ с уменьшением  $\Omega$  индекс модуляции  $m_\omega = \frac{\Delta\omega}{\Omega}$  увеличивается пропорционально  $\Omega$ , а ширина спектра

$$\Delta\omega_c \approx 2m_\omega \Omega = 2\Delta\Omega \quad (15.67)$$

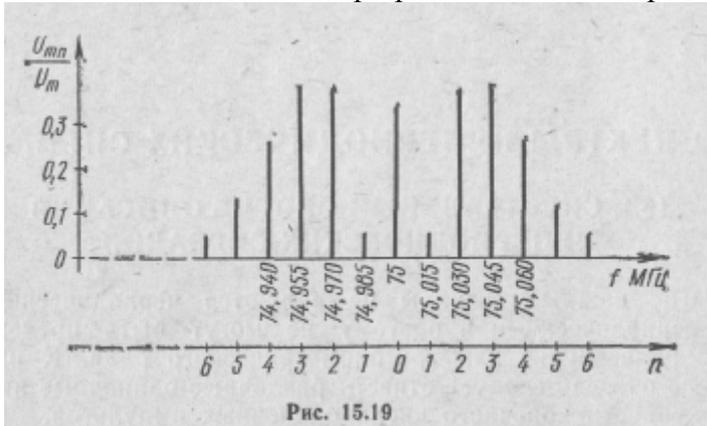
остается неизменной. Действительно, с уменьшением  $\Omega$  расстояние между спектральными линиями также уменьшится, но при ЧМ это сопровождается ростом  $m$ , что в свою очередь приводит к увеличению числа учитываемых гармоник. В результате ширина спектра практически не изменяется.

В случае же ФМ индекс модуляции  $m_\psi = \Delta\psi$  не зависит от  $\Omega$ . Поэтому с изменением  $\Omega$  число учитываемых гармоник остается неизменным, а ширина спектра меняется:

$$\Delta\omega_c \approx 2m_\psi \Omega = 2\Delta\psi \Omega \quad (15.68)$$

Таким образом, ЧМ в отличие от ФМ характеризуется большим постоянством спектров сигналов, что является одной из при-

чин предпочтительного применения ЧМ на практике. ФМ и ЧМ колебания по сравнению с АМ занимают более широкую полосу частот, но обладают двумя важными преимуществами: высокой помехоустойчивостью и возможностью обеспечить передачу более мощного сигнала при равной мощности радиопередатчика,



ЧМ осуществляется в генераторах на клистронах, лампах бегущей волны (ЛБВ), лампах обратной волны (ЛОВ), магнетронах, платинотронах, в схемах с реактивной лампой и др.

**Пример 15.3.**

Рассчитать относительный спектр ЧМ радиосигнала с амплитудой  $U_m = 100$  мВ, если  $f_H = 75$  МГц;  $\Delta f = 75$  кГц;  $F = 15$  кГц.

Решение. 1. Индекс модуляции и максимальный порядок учитываемой гармоники:

$$m_\omega = \frac{\Delta f}{F} = \frac{75}{15} = 5; n_{\max} = m_\omega + 1 = 6.$$

2. Табличные значения функций Бесселя, взятые при аргументе  $t=5$ , и рассчитанные с их помощью амплитуды гармонических составляющих:

$n$	$f = f_H \pm nF$ МГц	$ J_n(m) $	$U_{mn} = U_m  J_n(m) $ мВ	$\frac{U_{mn}}{U_m} =  J_n(m) $
0	75	0,178	17,8	0,178
1	75+0,015	0,328	32,8	0,328
2	75+0,030	0,047	4,7	0,047
3	75+0,045	0,365	36,5	0,365
4	75+0,060	0,391	39,1	0,391
5	75+0,075	0,261	26,1	0,261
6	75+0,090	0,131	13,1	0,131
7	75+0,105	0,053	5,3	0,153

Спектр сигнала приведен на рис. 15.19.

## 16. СПЕКТРЫ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

### 16.1. СПЕКТРАЛЬНЫЙ СПОСОБ ОПИСАНИЯ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Многие важные - сигналы не являются периодическими или почти периодическими и поэтому не могут быть представлены в виде ряда Фурье или тригонометрического ряда. К их числу в первую очередь следует отнести различные одиночные импульсы и совокупности конечного числа одиночных импульсов.

Чтобы применить спектральный метод для описания таких сигналов, предположим, что они являются периодическими функциями с периодом  $T$ . Воспользовавшись при этом разложением в ряд Фурье и устремив  $T \rightarrow \infty$ , вернемся к исходной непериодической функции. Тогда и представление непериодических сигналов по Фурье может рассматриваться как предел ряда Фурье при  $T \rightarrow \infty$ .

В зависимости от того, из какой формы записи ряда Фурье исходить: вещественной (15.1) — (15.6) или комплексной (15.7), (15.8), будет получено спектральное представление непериодических сигналов в плоскости вещественных или комплексных величин. В первом случае спектральные характеристики сигнала определяются в области положительных частот от 0 до  $+\infty$ , во втором — в области как положительных, так и отрицательных частот, т. е. в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Наиболее удобной и компактной является комплексная форма записи, позволяющая часто значительно упростить расчеты. Подставим значения коэффициентов  $C_n$  из формулы (15.8) в выражение ряда (15.7). Тогда, обозначив интервал между соседними частотами

гармоник  $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \Delta\omega$ , получим

ж

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{jn\Omega t} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-jn\Omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{jn\Omega t} \Delta\omega \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-jn\Omega t} dt. \end{aligned} \quad (16.1)$$

По мере возрастания Периода  $T$  амплитуда гармоник  $C_n$  уменьшается, интервал  $\Delta\omega$  между соседними частотами в спектре сокращается и линейный спектр все более сгущается. В пределе при  $T \rightarrow \infty$   $\Delta\omega = \Omega \rightarrow d\omega \rightarrow 0$ ,  $n\Omega \rightarrow \omega$ , т. е. спектр из дискретного превращается в сплошной. При этом сумма в правой части (16.1) переходит в интеграл и получается выражение, называемое двойным интегралом или двойным преобразованием Фурье в комплексной форме:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (16.2)$$

Эта формула Фурье имеет силу, если функция  $f(t)$  абсолютно

интегрируема в пределах  $\pm\infty$ , т. е. существует интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$  кроме того,

удовлетворяет условиям Дирихле во всяком конечном интервале. Однако условие абсолютной интегрируемости не является необходимым, а только достаточным. Хотя этому условию удовлетворяют все реальные сигналы, существует ряд идеализированных сигналов, например ступенчатая  $l(t)$ , синусоидальная  $\sin \omega_0 t$  функции, не интегрируемые абсолютно, но представимые в виде интеграла Фурье.

Формула Фурье (16.2) представляет собой сумму бесконечно большого числа гармонических функций с бесконечно малыми амплитудами и с частотами  $\omega$ , проходящими весь спектр от  $-\infty$  до  $+\infty$ . В самом деле, комплексное выражение

$$\frac{d\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-jn\Omega t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} C_n$$

представляет собой бесконечно малую по модулю комплексную амплитуду гармоники частоты  $\omega$  (конечный интеграл, умноженный на бесконечно малую величину  $d\omega$ ).

Таким образом, приходим к выводу, что непериодические сигналы характеризуются непрерывным, сплошным спектром частот, в то время как периодические — дискретным или линейчатым спектром.

Формулу (16.2) можно переписать следующим образом:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt; \quad (16.3)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (16.4)$$

что представляет собой взаимно связанные интегральные уравнения, каждое из которых служит решением другого. Выражение (16.3) называется прямым преобразованием Фурье, а (16.4) —

обратным преобразованием Фурье, и они часто обозначаются соответственно как

$$S(j\omega) = F[f(t)]; \quad (16.5)$$

$$f(t) = F^{-1}[S(j\omega)]. \quad (16.6)$$

Прямое преобразование Фурье позволяет перейти от временной области представления функции на комплексную плоскость, а обратное преобразование, наоборот, — с комплексной плоскости на временную. Основные свойства преобразований Фурье приведены в табл. 16.1.

Таблица 16.1	
Наименование	Формула
Линейность	$F[af_1(t) + bf_2(t)] = aS_1(j\omega) + bS_2(j\omega)$
Дуальность	$S(j\omega) = F[f(t)]; S(t) = -F^{-1}[2\pi j\hat{f}(j\omega)]$ $f(t) = F^{-1}[S(j\omega)]; 2\pi j\hat{f}(j\omega) = F[S(t)]$
Теорема дифференцирования	$F\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = j\omega S(j\omega)$
Теорема интегрирования	$F\left[\int_{-\infty}^t f(t)dt\right] = \frac{1}{j\omega} S(j\omega)$
Теорема подобия (масштаба)	$F[f(at)] = \frac{1}{a} S\left(j\frac{\omega}{a}\right)$
Теорема о сдвиге (запаздывания)	$F[f(t \pm t_0)] = S(j\omega) e^{\pm j\omega t_0}$
Теорема о модуляции	$F[f(t) e^{\pm j\omega_0 t}] = S[j(\omega \mp \omega_0)]$ $F[f(t) \cos \omega_0 t] = \frac{1}{2} \{ S[j(\omega - \omega_0)] + S[j(\omega + \omega_0)] \}$ $F[f(t) \sin \omega_0 t] = \frac{1}{2j} \{ S[j(\omega - \omega_0)] - S[j(\omega + \omega_0)] \}$

Продолжение

Наименование	Формула
Теорема о свертке	$F[f_1(t) f_2(t)] = S_1(j\omega) * S_2(j\omega)$ $F[f_1(t) * f_2(t)] = S_1(j\omega) S_2(j\omega)$
Теорема Рэлея	$\int_{-\infty}^{+\infty}  f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}  S(\omega) ^2 d\omega$

Величина  $S(j\omega)$  обычно называется спектральной плотностью, спектральной характеристикой или просто спектром непериодического сигнала. В общем случае

$$S(j\omega) = S(\omega) e^{-j\psi(\omega)} = P(\omega) - jQ(\omega), \quad (16.7)$$

где  $S(\omega) = |S(j\omega)|$  — амплитудно-частотная характеристика или спектр;

$\psi(\omega) = \arg S(j\omega)$  — фазо-частотная характеристика или спектр;

$P(\omega) = \operatorname{Re} S(j\omega)$  — вещественная частотная характеристика или спектр;

$Q(\omega) = \operatorname{Im} S(j\omega)$  — мнимая частотная характеристика или спектр.

Спектральная плотность является комплексной функцией одной переменной — вещественной частоты  $\omega$ . Поэтому ее компоненты: модуль, фазу, вещественную и мнимую составляющие — можно изобразить в виде графиков-спектров.

Отметим, что при использовании комплексной формы преобразований Фурье (16.2) — (16.4) указанные спектры захватывают всю область как положительных, так и отрицательных частот, так как согласно формуле (16.3) спектральная плотность, а следовательно, и все ее компоненты дают представление функции на комплексной плоскости.

Проводя аналогию между разложением в ряд Фурье и интегралом Фурье:

$$\dot{C}_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-jn\Omega t} dt, \quad S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt,$$

можно прийти к соотношению

$$S(j\omega) \leftrightarrow T \frac{C_n}{2} = \frac{1}{F} \cdot \frac{C_n}{2} = \frac{2\pi}{\Omega} \cdot \frac{C_n}{2} = \frac{\pi}{\Omega} \dot{C}_n, \quad (16.8)$$

где  $\Omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{T}$ .

Коэффициент  $1/2$  в правой части этого выражения учитывает, что при использовании комплексной формы представления синусоидальных гармонических величин, когда одной частоте  $\omega$  соответствуют две взаимно сопряженные мнимые частоты  $j\omega$  и  $-j\omega$ , амплитуды гармоник равны  $C_n/2$ .

С помощью соотношения (16.8) можно осуществить непосредственный переход, например, от спектра одиночного импульса к спектру периодической последовательности таких же импульсов и наоборот. С другой стороны, оно указывает, что спектральная плотность  $S(\omega)$  получается делением комплексной амплитуды  $C_n/2$   $n$ -й гармоники на интервал  $F = \frac{\Omega}{2\pi}$ , разделяющий по частоте соседние гармонические составляющие.

Поэтому функция  $S(\omega)$  имеет смысл плотности амплитуд и обладает размерностью амплитуды, деленной на герц (размерность частоты). Спектральная плотность  $S(j\omega)$  характеризует по амплитуде и фазе гармонику частоты  $\omega$ . Выражение  $\frac{d\omega}{\pi} S(j\omega)$  является

комплексной амплитудой этой гармоники, так как

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \dot{C}_n = \frac{1}{\pi} S(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} 2S(j\omega) d\omega = 2S(j\omega) df. \quad (16.9)$$

Из соотношения (16.8) вытекает также очень важный вывод: огибающая сплошного спектра  $S(\omega)$  непериодической функции и огибающая линейчатого спектра периодической функции  $C_n(\omega)$  совпадают по форме и отличаются лишь масштабом:

$$S(\omega) = \frac{\pi}{\Omega} C_n$$

Если исходить из вещественной формы записи ряда Фурье (15.3), то, подставив в него значения коэффициентов (15.4) и обозначив  $\Omega = \Delta\omega$ , получим

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(\tau) \times \\ &\times (\cos n\Omega\tau \cos n\Omega t + \sin n\Omega\tau \sin n\Omega t) d\tau = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega \int_{-T/2}^{+T/2} f(\tau) \cos [n\Omega(t - \tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (16.10)$$

При  $T \rightarrow \infty$  здесь  $\Delta\omega$  превращается в  $d\omega$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \rightarrow \int_0^{\infty}$ . Тогда, считая функцию  $f(t)$  абсолютно

интегрируемой в пределах  $\pm \infty$  и учитывая, что при этом первый интеграл в выражении (16.10) равен нулю, устремляя  $T \rightarrow \infty$ , получим двойной интеграл или двойное преобразование Фурье в вещественной форме:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau. \quad (16.11)$$

Эта формула Фурье Представляет собой сумму бесконечно большого числа гармонических функций —  $\frac{1}{\pi} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(1-\tau) d\tau$  с бесконечно малыми амплитудами и частотами, проходящими спектр от 0 до  $+\infty$ . Ее можно представить в ином виде. Преобразуя правую часть в выражении (16.11) и используя формулу для косинуса разности углов, найдем

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [P(\omega) \cos \omega t + Q(\omega) \sin \omega t] d\omega, \quad (16.12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} P(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt; \\ Q(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt. \end{aligned} \right\} \quad (16.13)$$

С другой стороны, обозначив

$$\left. \begin{aligned} S(\omega) &= \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \\ \psi(\omega) &= \text{arctg } Q(\omega)/P(\omega), \end{aligned} \right\} \quad (16.14)$$

получим еще один вид интеграла Фурье в вещественной форме:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos [\omega t - \psi(\omega)] d\omega. \quad (16.15)$$

Полученные спектральные характеристики (16.13), (16.14) сигнала полностью совпадают с уже полученными выше (16.7). Однако при использовании вещественной формы интеграла Фурье они представляют функцию в плоскости вещественных величин и захватывают поэтому лишь область положительных частот от 0 до  $+\infty$ .

Сравнивая выражения (16.3) и (16.4), можно отметить существенно симметричную природу прямого и обратного преобразований Фурье. Это свойство основано на дуальности частоты и времени.

Если в преобразованиях Фурье произвести взаимную замену переменных, а именно: заменить  $j\omega$  на  $t$  и  $t$  на  $j\omega$ , а затем заме

нить  $j\omega$  на  $-j\omega$ , то получим, что функция  $2\pi j f^*(j\omega)$  будет спектром функции  $S(t)$ , функция

$S(t)$ —обратным преобразованием функции  $-2\pi j f^*(j\omega)$ :

$$2\pi j f^*(j\omega) = \int_{-j\infty}^{+j\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt; \quad (16.16)$$

$$S(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-j\infty}^{+j\infty} 2\pi j f^*(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (16.17)$$

Иными словами, если спектром функции  $f(t)$  является  $S(\omega)$ , то спектром функции  $S(t)$  будет  $2\pi f(\omega)$ .

Указанное свойство частотно-временной двойственности, или дуальности, преобразований Фурье часто используется в теории сигналов. Оно позволяет взаимно менять местами временную функцию и ее спектр. Решению любой задачи из теории сигналов в частотной области соответствует решение дуальной ей задачи во временной области, и наоборот, хотя в конкретных случаях решение дуальной задачи может и не иметь практического значения.

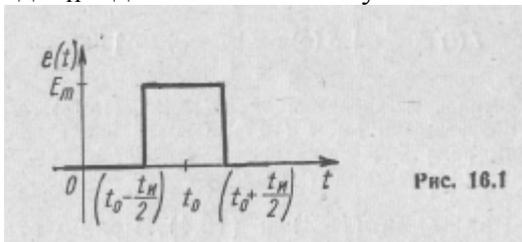
## 16.2. СПЕКТРЫ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

### 16.2.1. Прямоугольный видеоимпульс

Пусть импульс  $u(t)$  сдвинут относительно начала координат на отрезок времени  $t_0$  (рис. 16.1). Аналитически его можно представить в виде

$$u(t) = \begin{cases} U_m & \text{при } (t_0 - \frac{t_H}{2}) < t < (t_0 + \frac{t_H}{2}); \\ 0 & \text{при } (t_0 + \frac{t_H}{2}) < t < (t_0 - \frac{t_H}{2}), \end{cases} \quad (16.18)$$

где  $t_H$  — длительность импульса.



Спектральную плотность сигнала находим с помощью прямого преобразования Фурье (16.3):

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{U_m}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{t_0 - \frac{t_H}{2}}^{t_0 + \frac{t_H}{2}} = \\ &= \frac{U_m}{j\omega} e^{-j\omega t_0} \left( e^{j\frac{\omega t_H}{2}} - e^{-j\frac{\omega t_H}{2}} \right) = U_m t_H \frac{\sin \frac{\omega t_H}{2}}{\frac{\omega t_H}{2}} e^{-j\omega t_0} = \\ &= U_m t_H \left| \frac{\sin \frac{\omega t_H}{2}}{\frac{\omega t_H}{2}} \right| e^{-j|\omega t_0 \pm \pi(k-1)|}, \end{aligned} \quad (16.19)$$

где  $k=1, 2, 3, \dots$  — номер арки.

Отсюда получаем выражения для АЧС и ФЧС сигнала:

$$S(\omega) = U_m t_u \left| \frac{\sin \frac{\omega t_u}{2}}{\frac{\omega t_u}{2}} \right|; \quad (16.20)$$

$$\psi(\omega) = \omega t_0 \pm \begin{cases} 0 & \text{при } \text{Sa}(x) > 0 \\ \pi & \text{при } \text{Sa}(x) < 0 \end{cases} = \omega t_0 \pm \pi(k-1). \quad (16.21)$$

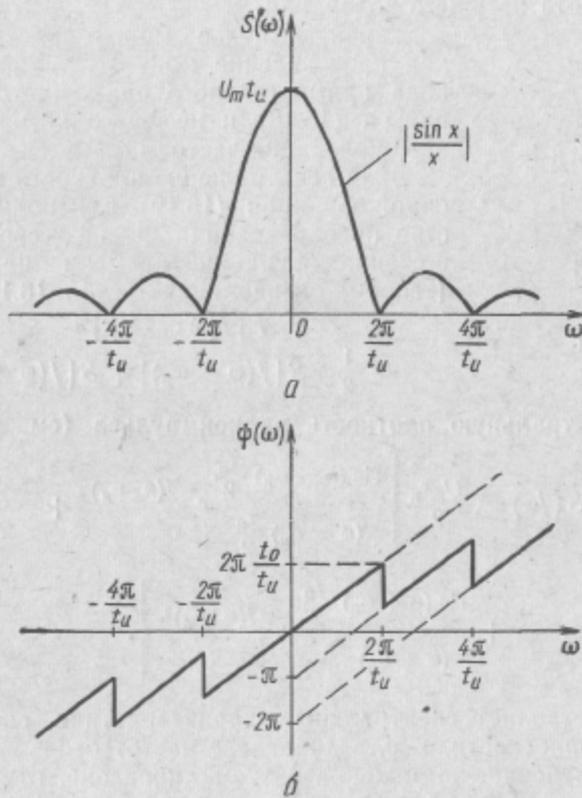


Рис. 16.2

Характер АЧС существенно зависит от длительности импульса и не связан с его сдвигом во времени. ФЧС, наоборот, определяется сдвигом импульса и не зависит от его длительности. Графики АЧС и ФЧС прямоугольного видеоимпульса представлены на рис. 16,2, а и б. Они совпадают с огибающими спектров периодической последовательности таких же импульсов (см. рис. 15.6 и 15.8).

### 16.2.2. Прямоугольный радиоимпульс

Рассмотрим одиночный прямоугольный радиоимпульс (рис. 16.3). Колебания подобного вида имеют большое практическое значение и широко применяются в радиолокации. Пусть

$$u(t) = \begin{cases} U_m \cos \omega_H t & \text{при } (t_0 - \frac{t_H}{2}) < t < (t_0 + \frac{t_H}{2}); \\ 0 & \text{при } (t_0 + \frac{t_H}{2}) < t < (t_0 - \frac{t_H}{2}), \end{cases} \quad (16.22)$$

где  $\omega_H$  — частота несущего колебания.

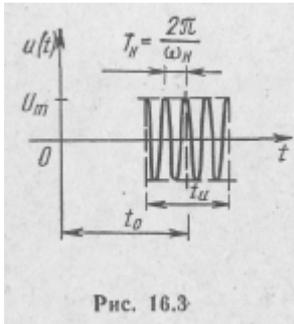


Рис. 16.3

Такой импульс можно рассматривать как произведение модуляционной функции вида прямоугольного одиночного видеоимпульса (16.18) и несущего косинусоидального колебания частоты  $\omega_H$ .

Зная спектральную плотность модуляционной функции (16.19) и используя свойство преобразования Фурье — свойство умножения функции времени на косинус (теорема о модуляции) (табл. 16.1):

$$F[f(t) \cos \omega_H t] = \frac{1}{2} \{S[j(\omega - \omega_H)] + S[j(\omega + \omega_H)]\}$$

находим спектральную плотность радиоимпульса (см. рис. 16.3)

$$S(j\omega) = \frac{U_m t_H}{2} \left[ \frac{\sin(\omega - \omega_H) \frac{t_H}{2}}{(\omega - \omega_H) \frac{t_H}{2}} e^{-j(\omega - \omega_H)t_0} + \frac{\sin(\omega + \omega_H) \frac{t_H}{2}}{(\omega + \omega_H) \frac{t_H}{2}} e^{-j(\omega + \omega_H)t_0} \right]. \quad (16.23)$$

Она представляет спектральные характеристики сигнала на комплексной плоскости, т. е. в диапазоне частот от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Исследуя полученное выражение в этом диапазоне, отметим, что модуль  $S(\omega)$  имеет наибольшее значение в районе частот  $\omega \approx \omega_H$ , и  $\omega \approx -\omega_H$ . Объясняется это тем, что знаменатель одной из дробей в квадратной скобке делается в районе этих частот относительно малой величиной: при  $\omega \approx \omega_H$  вторая дробь значительно меньше первой, а при  $\omega \approx -\omega_H$ , наоборот, первая дробь значительно меньше второй.

Таким образом, выражение (16.23) для спектральной плотности прямоугольного радиоимпульса в области положительных частот достаточно точно описывается первой дробью, а в области отрицательных частот — второй дробью. Поэтому можно приближенно записать:

для положительных частот:

$$\left. \begin{aligned} S(\omega) &\approx \frac{U_m t_H}{2} \left| \frac{\sin(\omega - \omega_H) \frac{t_H}{2}}{(\omega - \omega_H) \frac{t_H}{2}} \right|; \\ \psi(\omega) &\approx (\omega - \omega_H) t_0 \pm \pi(k-1); \end{aligned} \right\} \quad (16.24)$$

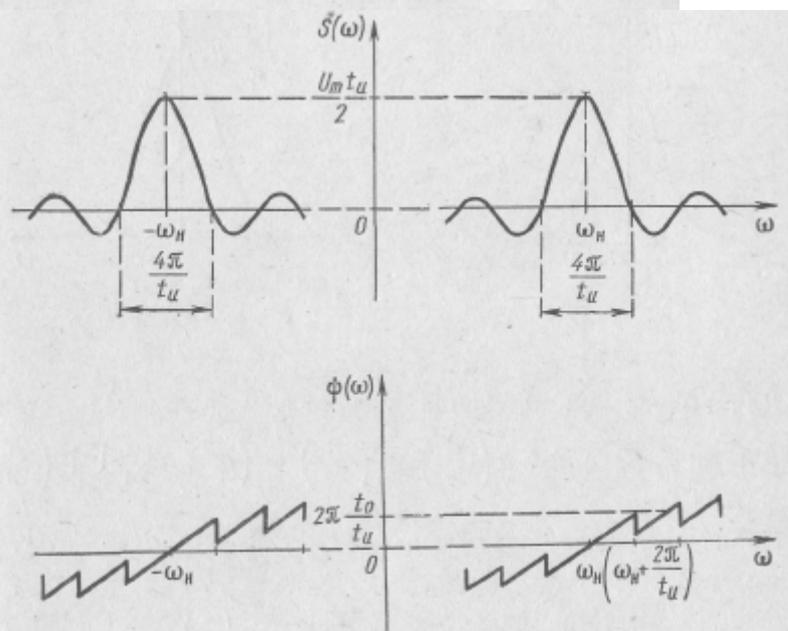


Рис. 16.4

для отрицательных частот:

$$\left. \begin{aligned} S(\omega) &\approx \frac{U_m t_H}{2} \left| \frac{\sin(\omega + \omega_H) \frac{t_H}{2}}{(\omega + \omega_H) \frac{t_H}{2}} \right|; \\ \psi(\omega) &\approx (\omega + \omega_H) t_0 \pm \pi(k-1). \end{aligned} \right\} \quad (16.25)$$

Спектры прямоугольного радиоимпульса представлены на рис. 16.4. Они практически отличаются от спектров прямоугольного видеоимпульса лишь смещением по оси частот на величину  $\omega_H$  и уменьшением вдвое модуля спектральной функции.

### 16.2.3. Колоколообразный импульс

Для колоколообразного или «гауссова» импульса (рис. 16.5)

$$u(t) = U_m e^{-\alpha t^2} \quad (16.26)$$

где  $\alpha$  — постоянная, определяющая длительность импульса.

На основании формулы (16.3) спектральная плотность такого импульса

$$S(j\omega) = U_m \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at)^2} e^{-j\omega t} dt = U_m \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a^2 t^2 + j\omega t)} dt. \quad (16.27)$$

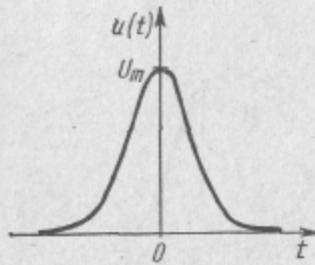


Рис. 16.5

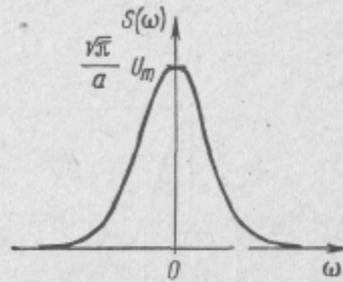


Рис. 16.6

Для вычисления интеграла преобразуем показатель степени:

$$a^2 t^2 + j\omega t = a^2 t^2 + j\omega t = \left(\frac{\omega}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{2a}\right)^2 = \left(at + j\frac{\omega}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{2a}\right)^2.$$

Произведя замену переменных  $at + j\frac{\omega}{2a} = x; dt = \frac{1}{a} dx$ , получим

$$S(j\omega) = \frac{U_m}{a} e^{-\left(\frac{\omega}{2a}\right)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = U_m \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\left(\frac{\omega}{2a}\right)^2} = S(\omega), \quad (16.28)$$

так как  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  —интеграл Лапласа.

Ввиду четности функции (16.26) спектр получился вещественным, причем, как и сам импульс, он имеет колоколообразную форму (рис. 16.6).

Колоколообразный импульс широко используется в теории сигналов, поскольку он и его спектр выражаются одинаковыми функциями и обладают свойством симметрии: чтобы получить одну из этих функций по заданной другой, достаточно заменить  $t$  на  $\omega$ . Исключительно большое практическое значение импульса колоколообразной формы объясняется минимальным значением произведения  $\Delta\omega_C t_H$ . Это значит, что по сравнению с импульсами другой формы колоколообразный импульс той же длительности имеет наименьшую ширину спектра и поэтому более помехоустойчив. При энергетическом способе определения  $\Delta\omega_C$  и  $t_H$  для колоколообразного импульса

$$\Delta F_C t_H = \frac{\Delta\omega_C}{2\pi} t_H = 0,22.$$

### 16.2.4. Экспоненциальный импульс

Для экспоненциального импульса (рис. 16.7)

$$u(t) = \begin{cases} U_m e^{-at} & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases} \quad (16.29)$$

находим

$$S(j\omega) = U_m \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{U_m}{-(a+j\omega)} e^{-j(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{U_m}{a+j\omega}. \quad (16.30)$$

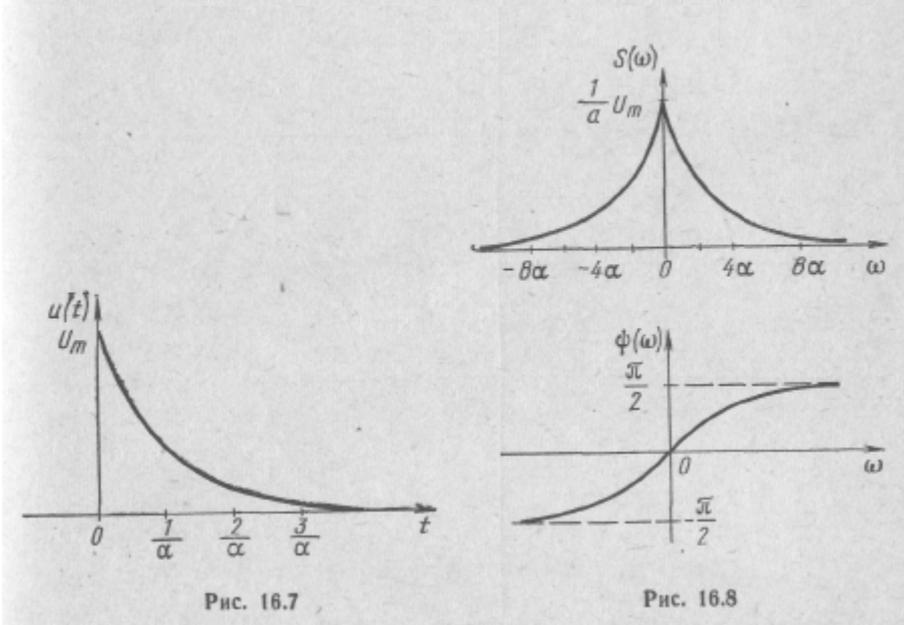


Рис. 16.7

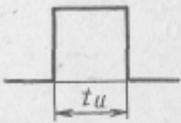
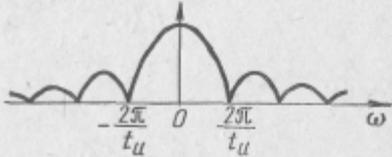
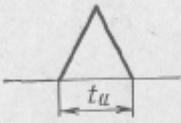
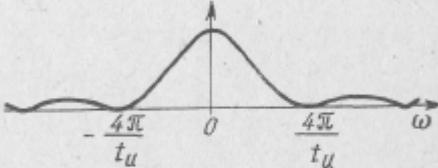
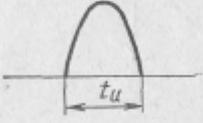
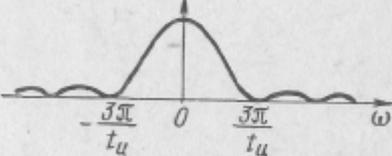
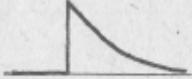
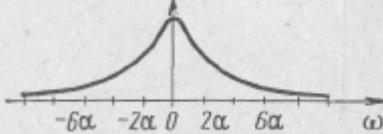
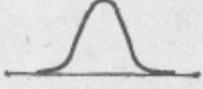
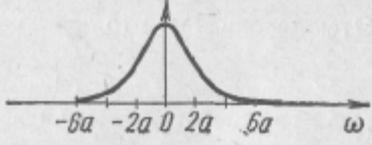
Рис. 16.8

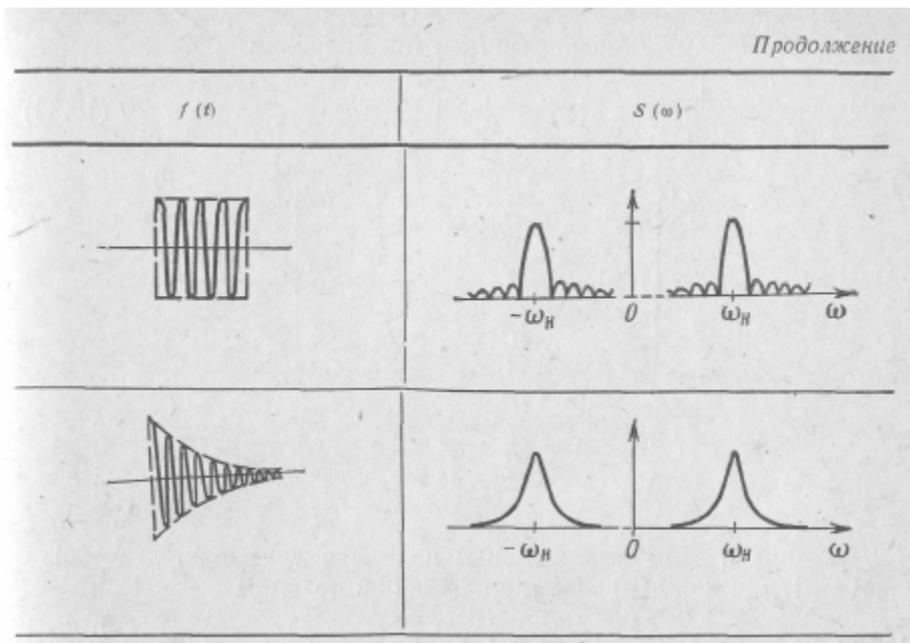
Отсюда следует, что

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}; \quad \phi(\omega) = \text{arctg} \frac{\omega}{a}. \quad (16.31)$$

Графики этих функций приведены на рис. 16.8. Спектры рассмотренных и некоторых других импульсов сведены в табл. 16.2,

Таблица 16.2

$f(t)$	$S(\omega)$
	
	
	
	
	



### 16.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И СПЕКТР ДЕЛЬТА-ФУНКЦИИ И ЕДИНИЧНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ФУНКЦИИ

Для многих часто применяемых функций (например, дельта-функция, единичная ступенчатая функция,  $\cos \omega_0 t$ ,  $\sin \omega_0 t$  и др.) преобразования Фурье, к сожалению, не существуют в обычном смысле. Тем не менее удобно обобщить технику преобразований Фурье и на эти функции.

Учитывая выражения (14.12), с помощью формулы (16.3) находим спектральную плотность дельта-функции (рис. 16.9, а)

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = 1. \quad (16.32)$$

Таким образом,  $\delta(t)$ -функции соответствует равномерно распределенная спектральная плотность, спектр такой функции имеет бесконечно большую ширину (рис. 16.9,б).

Заметим теперь, что на основании свойства частотно-временной двойственности или дуальности преобразований Фурье, если спектром  $\delta(t)$ -функции является  $S(j\omega) = S(\omega) = 1$ , то спектром функции  $S(t)=1$  будет  $2\pi\delta(\omega)$  (рис. 16.10). Действительно, обратное преобразование Фурье от единицы ( $S(j\omega) = 1$ ) может быть записано как

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega. \quad (16.33)$$

Взаимной заменой переменных  $t$  и  $\omega$  получаем

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} dt. \quad (16.34)$$

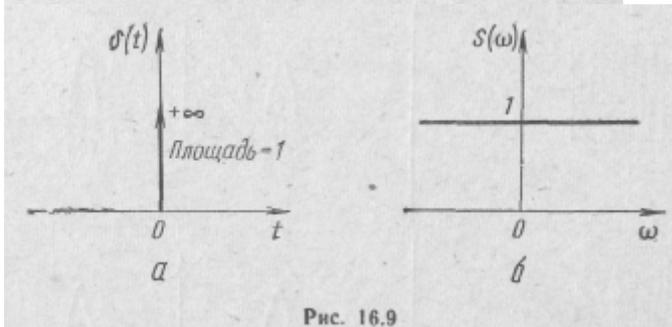


Рис. 16.9

Заменив в этом выражении  $\omega$  на  $-\omega$  и учитывая, что  $\delta(\omega) = -\delta(-\omega)$ , так как  $\delta(\omega)$ —четная функция, находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega). \quad (16.35)$$

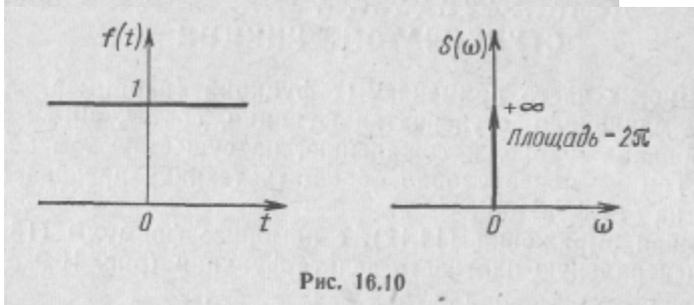


Рис. 16.10

Это выражение известно как лемма Римана — Лебега. Хотя оно получено не совсем формализованно, существует его строгое доказательство.

Таким образом, спектральная функция постоянной величины, равной единице, есть  $\delta$ -функция с площадью, равной  $2\pi$ , взятая в частотной области (см. рис. 16.10).

Спектральная плотность любой постоянной  $a$  будет в  $a$  раз больше:

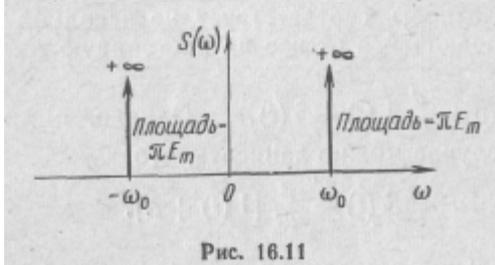
$$F[a] = 2\pi a\delta(\omega). \quad (16.36)$$

Спектр постоянной бесконечно узок, он расположен в районе частоты  $\omega=0$  и имеет бесконечно малую ширину, стремящуюся к нулю,

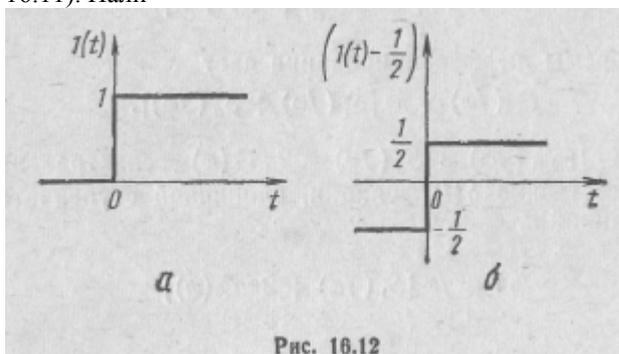
Используя полученные соотношения, можно найти преобразования Фурье и спектральную плотность гармонических функций  $\cos \omega_0 t$  и  $\sin \omega_0 t$ . Для этого достаточно использовать свойство преобразований Фурье — умножение функции времени на косинус или синус (теорема о модуляции) (табл. 16.1), учитывая выражение (16.36);

$$F[U_m \cos \omega_0 t] = \pi U_m [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]; \quad (16.37)$$

$$F[U_m \sin \omega_0 t] = \pi U_m [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] e^{-j \frac{\pi}{2}}. \quad (16.38)$$



Спектр функций  $U_m \cos \omega_0 t$  и  $U_m \sin \omega_0 t$ , так же как и постоянной величины, бесконечно узок, его ширина бесконечно мала. Но в отличие от спектра постоянной он сосредоточен в районе частот  $\omega = \omega_0$  и  $\omega = -\omega_0$  (рис. 16.11). Нали-



чие здесь двух частот: положительной и отрицательной — объясняется особенностью представления синусоидальных колебаний на плоскости комплексных величин.

Единичная ступенчатая функция (рис. 16.12,а) не является абсолютно интегрируемой (ее площадь не имеет конечного значения). Поэтому попытка непосредственного применения преобразования Фурье для нахождения спектральной плотности такой функции приводит к расходящемуся интегралу, который, строго говоря (если пользоваться обычными определениями и правилами математики), вычислить нельзя.

Однако стремление распространить спектральный метод, широко применяемый для решения многих технических и физических задач, на рассмотрение единичных скачков приводит к попыткам

обойти возникающую при этом трудность различными приемами, которые часто приводят к неверному результату. Например, представляя  $1(t)$  как предел (при  $a \rightarrow 0$ ) от экспоненциального импульса, получают

$$F[1(t)] = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a + j\omega} = \frac{1}{j\omega},$$

что не соответствует истине, так как найденная таким образом спектральная плотность соответствует не исходной функции  $1(t)$ , а функции, отличающейся от нее на постоянную составляющую  $1/2$  (рис. 16.12,б).

Известно, что  $\frac{d}{dt}1(t) = \delta(t)$ . Однако, с другой стороны, в более общем случае можно записать, что

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}[1(t) + a], \quad (16.39)$$

где  $a$  — произвольная постоянная.

Прямое преобразование Фурье от левой и правой части этого выражения

$$F[\delta(t)] = F\left\{\frac{d}{dt}[1(t) + a]\right\} \quad (16.40)$$

с учетом теоремы дифференцирования дает

$$S_\delta(j\omega) = j\omega[S_1(j\omega) + S_a(j\omega)], \quad (16.41)$$

где  $S_\delta(j\omega) = 1$ ;  $S_1(j\omega)$  и  $S_a(j\omega) = 2\pi a\delta(\omega)$  — спектральная плотность соответственно  $\delta(t)$  - функции, единичной ступенчатой функции и постоянной  $a$ .

Отсюда

$$\begin{aligned} \text{или} \quad 1 &= j\omega[S_1(j\omega) + 2\pi a\delta(\omega)] \\ S_1(j\omega) &= \frac{1}{j\omega} - 2\pi a\delta(\omega). \end{aligned} \quad (16.42)$$

Найдем постоянную  $a$  в этом выражении. Обратное преобразование Фурье от его левой и правой части дает -

$$\begin{aligned} F^{-1}[S_1(j\omega)] = 1(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{j\omega} - 2\pi a\delta(\omega) \right] e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\omega} d\omega - a. \end{aligned} \quad (16.43)$$

Здесь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\omega} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega + j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega, \quad (16.44)$$

Кроме того, известно, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega = 0; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \begin{cases} \pi & \text{при } t > 0; \\ -\pi & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (16.45)$$

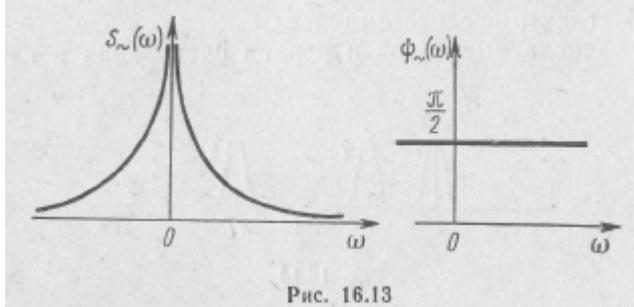


Рис. 16.13

Учитывая это, а также то, что при  $t < 0$   $l(t) = 0$ , из выражения (16.43) получаем,  $a = -\frac{1}{2}$ ,

что после подстановки в формулу (16.42) дает

$$S_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega). \quad (16.46)$$

Здесь первое слагаемое  $\frac{1}{j\omega}$  есть спектральная плотность переменной составляющей функции  $l(t)$ , а второе  $\pi\delta(\omega)$  — спектральная плотность ее постоянной составляющей. Спектральные характеристики переменной составляющей

$$S_~(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} = S_~(\omega) e^{-j\varphi_~(\omega)} \quad (16.47)$$

представлены на рис. 16.13.

#### 16.4. СПЕКТРЫ ПАЧЕК ИМПУЛЬСОВ

К числу широко применяемых на практике сигналов относится пачка (серия) импульсов. Например, при обзоре радиолокатором цели от нее отражается и поступает на вход приемника последовательность из определенного числа импульсов, следующих через равные промежутки времени.

Допустим, что сигнал (пачка импульсов) состоит из конечного числа периодически повторяющихся импульсов произвольной формы. Пусть начало отсчета проходит через середину первого импульса (рис. 16.14). Найдем спектр сигнала,

На основании теоремы линейности и теоремы о сдвиге (табл. 16.1) спектральная плотность пачки импульсов

$$S_n(j\omega) = S_1(j\omega) + S_2(j\omega) + \dots + S_n(j\omega) = S_1(j\omega) [1 + e^{-j\omega T} + \dots + e^{-j(n-1)\omega T}], \quad (16.48)$$

где  $S_1(j\omega)$  — спектр первого импульса;

$n$  и  $T$  — число импульсов и период следования в пачке.

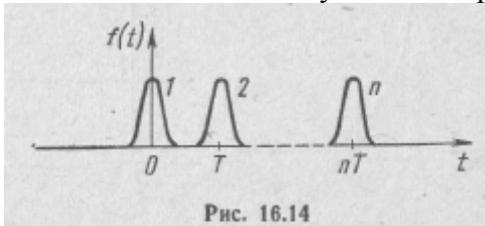


Рис. 16.14

В квадратных скобках получена геометрическая прогрессия, знаменатель которой  $g = e^{-j\omega T}$ . Сумма геометрической прогрессии, как известно, определяется дробью  $\frac{a_1 - a_n g}{1 - g}$ , где  $a_1$  и  $a_n$  — первый и последний члены прогрессии. Следовательно,

$$\frac{a_1 - a_n g}{1 - g} = \frac{1 - e^{-j(n-1)\omega T} e^{-j\omega T}}{1 - e^{-j\omega T}} = \frac{1 - e^{-jn\omega T}}{1 - e^{-j\omega T}} = \frac{\sin \frac{n\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} e^{-j(n-1)\omega \frac{T}{2}}.$$

Таким образом,

$$S_n(j\omega) = S_1(j\omega) \frac{\sin \frac{n\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} e^{-j(n-1)\omega \frac{T}{2}}. \quad (16.49)$$

Модуль спектральной плотности пачки импульсов

$$S_n(\omega) = S_1(\omega) \left| \frac{\sin \frac{n\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \right|. \quad (16.50)$$

После нормирования по его значению  $S_n(0)$  при  $\omega = 0$  получаем модуль нормированной спектральной плотности

$$S_{н.н}(\omega) = \frac{S_n(\omega)}{S_n(0)} = \frac{S_1(\omega)}{S_1(0)} \frac{1}{n} \left| \frac{\sin \frac{n\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \right| = S_H(\omega) B(\omega), \quad (16.51)$$

где  $S_H(\omega) = \frac{S_1(\omega)}{S_1(0)}$  — модуль нормированной спектральной плотности или нормированной

АЧС импульса в пачке;

$$B(\omega) = \frac{1}{n} \left| \frac{\sin \frac{n\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \right| - \text{функция частоты, не зависящая от формы импульсов и определяемая}$$

лишь их числом и периодом следования,

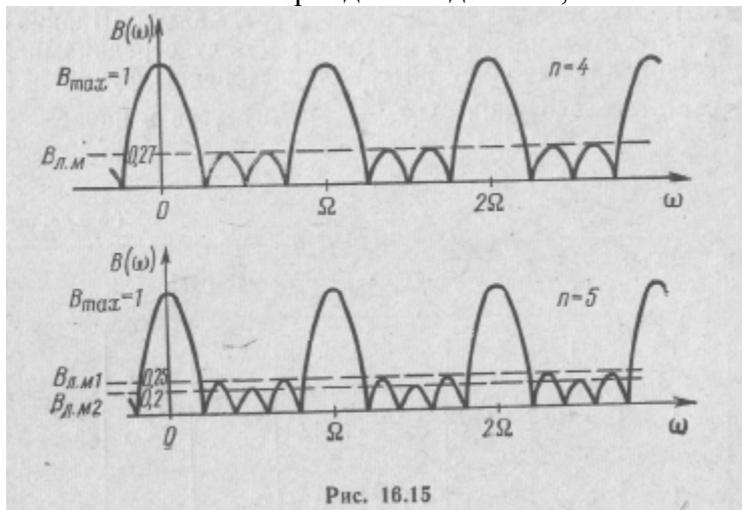


Рис. 16.15

Полученное выражение справедливо для пачек импульсов любой формы. С его помощью, зная спектр импульса в пачке и вид функции  $B(\omega)$ , можно построить спектр всей пачки импульсов. Построение можно провести путем простого перемножения двух функций  $S_H(\omega)$  и  $B(\omega)$ .

Рассмотрим подробнее функцию  $B(\omega)$ . Легко заметить, что ее числитель и знаменатель одновременно обращаются в нуль при  $\frac{\omega T}{2}$ , кратном  $\pi$ , т. е.  $\frac{\omega T}{2} = \pi k$ , где  $k=0, 1, 2, \dots$

Раскрывая получающуюся при этом неопределенность по правилу Лопиталья, находим, что в этих случаях  $B(\omega) = 1$ , так как

$$\lim_{\frac{\omega T}{2} \rightarrow \pi k} \frac{1}{n} \left| \frac{\sin \frac{n\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \right| = \lim_{\frac{\omega T}{2} \rightarrow \pi k} \left| \frac{\cos \frac{n\omega T}{2}}{\cos \frac{\omega T}{2}} \right| = 1.$$

В интервале частот от 0 до  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \Omega$  числитель дроби в  $B(\omega)$ , а следовательно, и функция  $B(\omega)$  принимают нулевое значение  $n-1$  раз. Периодичность числителя функции  $B(\omega)$  в  $n$  раз выше, чем знаменателя. Графики функции  $B(\omega)$  имеют лепестковую структуру (рис. 16.15). В общем случае график состоит из

больших и малых лепестков. Высота больших лепестков определяется максимальным значением  $V_{\max} = 1$ , а высоты малых лепестков—локальными максимумами  $V_{л.м}$  функции  $V(\omega)$ . Число локальных максимумов и их значения можно найти путем исследования функции  $V(\omega)$  или с помощью специальных таблиц (табл. 16.3). Большие лепестки вдвое шире малых. Ширина всех малых лепестков одинакова. Расстояние между серединами больших лепестков представляет интервал повторения функции  $V(\omega)$ , равный частоте следования  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$  импульсов в пачке.

Таблица 16.3

n	Высота лепестков вдоль интервала повторения $\Omega$								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1								
3	1	0,33	1						
4	1	0,27	0,27	1					
5	1	0,25	0,20	0,25	1				
6	1	0,235	0,173	0,173	0,235	1			
7	1	0,230	0,160	0,143	0,160	0,230	1		
8	1	0,227	0,150	0,128	0,128	0,150	0,227	1	
9	1	0,222	0,144	0,118	0,111	0,118	0,144	0,222	1

Рассмотрим в качестве примера спектр пачки прямоугольных видеоимпульсов. Пусть  $n=5$  и  $q = \frac{T}{t_H} = 2$  (рис. 16.16). Для прямоугольного видеоимпульса в соответствии с выражением

$$S_H(\omega) = \frac{S_1(\omega)}{S_1(0)} = \left| \frac{\sin \frac{\omega t_H}{2}}{\frac{\omega t_H}{2}} \right|. \quad (16.52)$$

График этой функции определяется кривой  $Sa(x) = \frac{\sin x}{x}$  (см. рис. 15.5) и пересекает ось частот в точках, соответствующих частотам  $q\Omega = 2\Omega, 4\Omega, \dots$ , кратным скважности. Построение спектра пачки показано на рис. 16.17. На нем в общих координат-

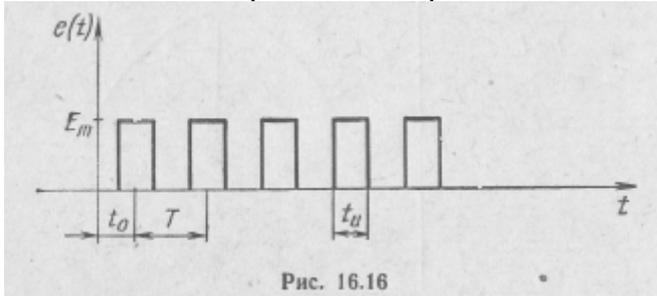


Рис. 16.16

ных осях построены графики функций  $S_H(\omega)$  и  $B(\omega)$ . Спектральная характеристика пачки получена путем графического перемножения этих кривых. В табл. 16.4 приведены спектры пачки прямоугольных видеоимпульсов с различным числом  $n$ .

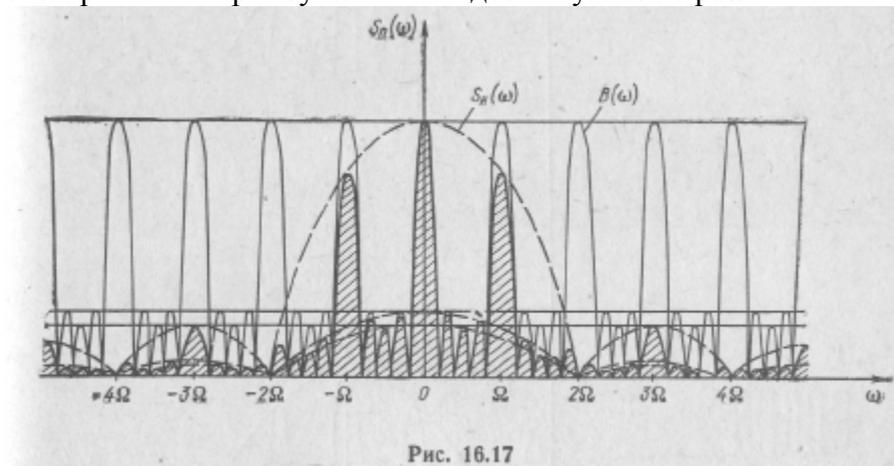
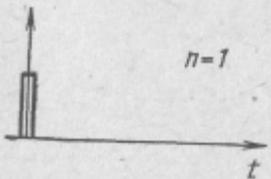
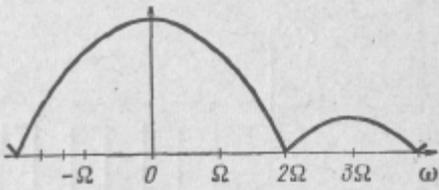
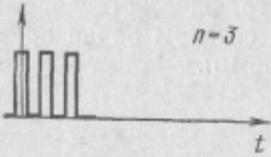
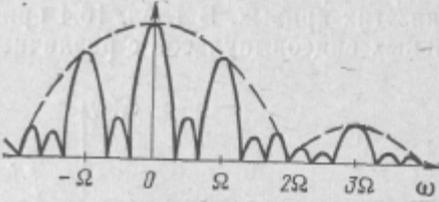
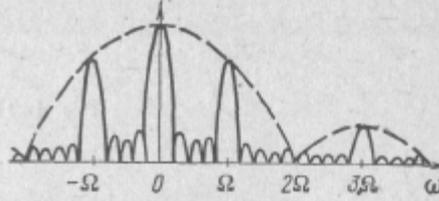
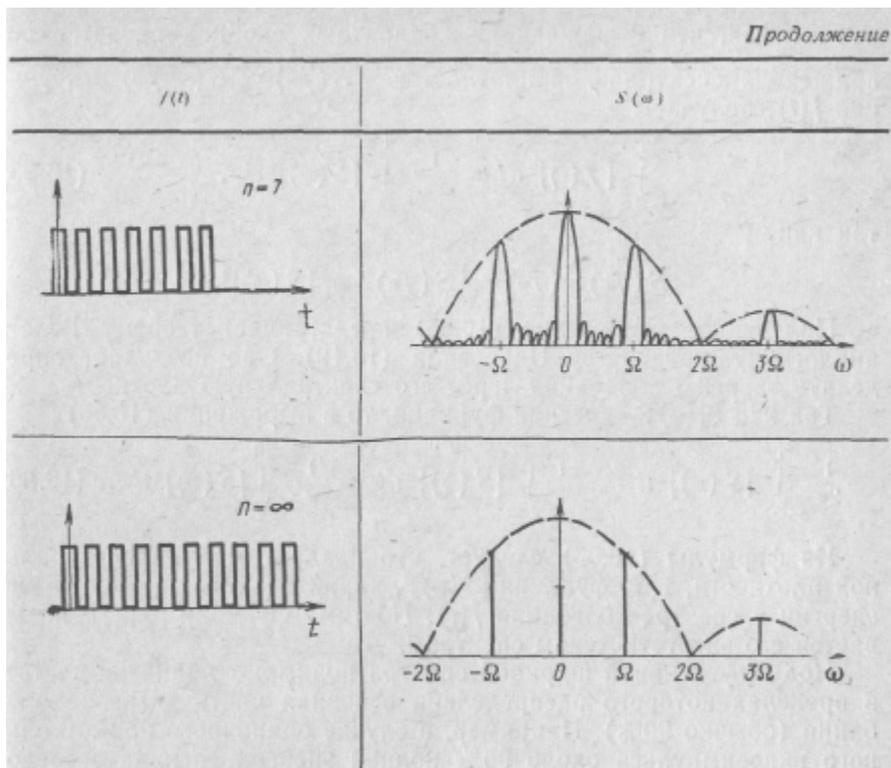


Рис. 16.17

Анализ значений локальных максимумов (табл. 16.3) и амплитудно-частотных спектров (табл. 16.4) позволяет сделать выводы о связи спектров последовательности пачек и одиночных импульсов. С ростом числа импульсов  $n$  большие лепестки сужаются, высота малых лепестков уменьшается, а их число растет; спектр постепенно вырождается из сплошного в линейчатый и при  $n \rightarrow 0$  превращается в дискретный.

$f(t)$	$S(\omega)$
 <p style="text-align: right;"><math>n=1</math></p>	
 <p style="text-align: right;"><math>n=3</math></p>	
 <p style="text-align: right;"><math>n=5</math></p>	



### 16.5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ В СПЕКТРЕ. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР И ЭФФЕКТИВНАЯ ШИРИНА СПЕКТРА

Чтобы оценить распределение энергии непериодических сигналов, как и в случае периодических сигналов, считают, что она выделяется в сопротивлении  $r=1$  Ом. Для определения энергии непериодических колебаний, выделяемой в таком сопротивлении, используем выражение колебания через его спектральную плотность (16.4):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt. \quad (16.53)$$

Изменив порядок интегрирования в правой части:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega \quad (16.54)$$

и учитывая, что выражение в квадратных скобках является сопряженной спектральной плотностью  $S^*(j\omega) = S(-j\omega)$  функции  $f(t)$ , получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [S(\omega)]^2 d\omega, \quad (16.55)$$

так как

$$S(j\omega) S^*(j\omega) = |S(j\omega)|^2 = [S(\omega)]^2.$$

Полученное выражение (16.55) представляет теорему Релея, аналогичную равенству Парсевала (15.19). Оно позволяет определить энергию колебания через его спектральную плотность.

Так как  $[S(\omega)]^2$  — четная функция, то в выражении (16.55)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [S(\omega)]^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [S(\omega)]^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 [S(\omega)]^2 d\omega. \quad (16.56)$$

Из формулы (16.55) следует, что квадрат модуля спектральной плотности, т. е. функция  $[S(\omega)]^2$ , характеризует распределение энергии в спектре колебания  $f(t)$ . Поэтому функция  $[S(\omega)]^2$  называется его энергетическим спектром.

Под эффективной шириной спектра понимают диапазон частот, в пределах которого распределена основная часть энергии колебания (обычно 90%). Например, в случае одиночного прямоугольного видеоимпульса около 90% полной энергии сигнала сосредоточено в первом лепестке спектра (полоса частот от 0 до  $\omega = \frac{2\pi}{t_H}$ ). При этом чем короче

импульс, тем шире полоса частот, в которой сосредоточена основная доля сигнала. Отсюда идет название «ширина спектра».

Пример 16.1.

Рассчитать энергию, распределенную в спектре одиночного прямоугольного видеоимпульса (см. рис. 16.1).

Решение. Подстановкой выражения (16.20) в формулу (16.55) находим

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U_m^2 t_H^2 \left[ \frac{\sin \frac{\omega t_H}{2}}{\frac{\omega t_H}{2}} \right]^2 d\omega = U_m^2 t_H, \quad (16.57)$$

так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2} dx = a\pi. \quad (16.58)$$

Пример 16.2.

Рассчитать энергию одиночного прямоугольного радиоимпульса (см. рис. 16.3).

Решение.

Расчет проведем с помощью теоремы Релея (16.55). Для этого используем аналитическое представление радиоимпульса (16.22) и выражение (16.23) для его спектральной плотности.

В первом случае подстановкой выражения (16.22) в формулу (16.55) находим

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt = \int_{-\frac{t_H}{2}}^{+\frac{t_H}{2}} U_m^2 \cos^2 \omega_H t dt = \\
 &= \left( \frac{U_m^2 t_H}{2} + \frac{1}{2\omega_H} \sin 2\omega_H t \right) \Big|_{-\frac{t_H}{2}}^{+\frac{t_H}{2}} = \\
 &= \frac{U_m^2 t_H}{2} \left( 1 + \frac{\sin \omega_H t_H}{\omega_H t_H} \right) \approx \frac{U_m^2 t_H}{2}, \quad (16.59)
 \end{aligned}$$

так как обычно  $t_H \gg T_H = \frac{2\pi}{\omega_H}$

Во втором случае этот же результат получим подстановкой выражения (16.23) в формулу (16.55) с учетом равенств (16.24), (16.25) и (16.58):

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [S(\omega)]^2 d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_m^2 t_H^2}{4} \left| \frac{\sin(\omega - \omega_H) \frac{t_H}{2}}{(\omega - \omega_H) \frac{t_H}{2}} e^{-j(\omega - \omega_H) t_H} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sin(\omega + \omega_H) \frac{t_H}{2}}{(\omega + \omega_H) \frac{t_H}{2}} e^{-j(\omega + \omega_H) t_H} \right|^2 d\omega \approx \\
 &\approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_m^2 t_H^2}{2} \left[ \frac{\sin(\omega - \omega_H) \frac{t_H}{2}}{(\omega - \omega_H) \frac{t_H}{2}} \right]^2 d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_m^2 t_H^2}{2} \left[ \frac{\sin(\omega + \omega_H) \frac{t_H}{2}}{(\omega + \omega_H) \frac{t_H}{2}} \right]^2 d\omega = \frac{U_m^2 t_H}{2}. \quad (16.60)
 \end{aligned}$$

В связи с широким применением радиоимпульсов на этом примере следует остановиться подробнее. Квадрат модуля спектральной плотности радиоимпульса — четная функция. Однако если ее подставить непосредственно в виде выражения (16.23) в интеграл (16.56) с пределами интегрирования от 0 до  $\infty$  или от  $-\infty$  до 0, то одно из слагаемых в выражении (16.23) не будет учтено, что приведет к ошибке.

## **17. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРОХОЖДЕНИЯ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ**

### **17.1. ПОНЯТИЕ ОБ ИСКАЖЕНИИ СИГНАЛОВ ПРИ ИХ ПРОХОЖДЕНИИ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ. СУЩНОСТЬ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА**

При прохождении через радиотехнические цепи и системы сигналы претерпевают различные изменения: сигнал, действующий на выходе устройства, отличается от сигнала на входе. Выходным сигналом является реакция цепи на действие входного сигнала. Под действием различных сигналов в системе возникают переходные процессы, оказывающие существенное влияние на характер ее реакции. В отличие от задач электротехники, в которых интересуются установлением режима при различных коммутациях, в радиотехнике, радиолокации, импульсной технике основное значение имеет влияние переходных процессов на форму сигнала. В радиотехнических системах это в итоге определяет влияние системы на содержащуюся в сигнале информацию. Искажениями называют такие изменения сигнала, которые приводят к нарушению заключенной в нем информации. В радиотехнике задача исследования процессов в системе чаще формулируется как задача исследования особенностей прохождения сигналов через цепи. Подобные задачи могут быть решены различными путями: классическим или операторным методом анализа переходных процессов; методом наложения с использованием временных характеристик цепи — методом интеграла свертки; методом наложения с использованием частотных характеристик цепи и воздействующих сигналов — частотным или спектральным методом.

Суть спектрального метода заключается в следующем. Сигнал, действующий на цепь, представляется в виде совокупности гармонических воздействий, приложенных к цепи задолго до момента наблюдения, т. е. действующих на интервале времени  $-\infty \leq t \leq +\infty$ . При этом сигнал, появляющийся на выходе цепи, в соответствии с принципом наложения определяется как сумма гармонических реакций, вызываемых каждой из гармонических составляющих входного сигнала в отдельности. Таким образом,

задача, по сути, сводится к анализу установившихся режимов в цепи при синусоидальном воздействии. Значения гармонических составляющих выходного сигнала легко находятся, если известны спектр входного сигнала и частотные характеристики цепи.

Так как в основе спектрального метода лежит принцип наложения, такой метод является линейным, он справедлив для решения линейных задач, задач анализа прохождения сигналов через линейные цепи. С другой стороны, частотные характеристики линейной цепи находят, как известно, для цепей, не содержащих начальных запасов энергии и независимых источников энергии. Поэтому применение спектрального метода ограничивается кругом именно такого вида цепей. Тем не менее к этому случаю можно свести решение большинства практических задач.

Если цепь содержит независимые источники или начальные запасы энергии, то их влияние на процессы учитывается отдельно, например классическим или операторным методом. Для этого внутренняя э. д. с. источника входного сигнала принимается равной нулю, учитывается лишь его внутреннее сопротивление, а воздействием считаются заряд емкости или ток в индуктивности, учитывающие запасы энергии и независимые источники энергии.

Анализ прохождения сигналов спектральным методом может быть проведен как в области вещественных величин, так и с использованием плоскости комплексных величин. Более удобным является использование комплексной плоскости.

## 17.2. РАСЧЕТ ПРОХОЖДЕНИЯ СИГНАЛОВ С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ

Пусть на цепь воздействует сигнал в виде периодического несинусоидального напряжения или тока, которые можно представить рядом Фурье в виде суммы бесконечного числа гармоник. Требуется определить выходной сигнал, которым является ток в ветви или напряжение на одном из ее элементов.

Известно, что комплексные амплитуды синусоидального тока частоты  $\omega$ , протекающего в ветви, и напряжения, приложенного к ней, связаны простыми соотношениями:

$$\dot{I}_m e^{j\omega t} = Y(j\omega) \dot{U}_m e^{j\omega t}$$

где  $Y(j\omega)$  и  $Z(j\omega)$ —комплексные проводимость и сопротивление ветви, рассчитанные на частоте  $\omega$ .

Если приложенное напряжение сложной формы можно представить в виде суммы ряда гармонических составляющих

$$u(t) = U_0 + U_{m1} \cos(\omega_1 t + \psi_1) + \dots + U_{mn} \cos(\omega_n t + \psi_n). \quad (17.1)$$

то на каждой из частот  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \dots, \omega_n$  можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_{mk} e^{j\omega_k t} &= Y(j\omega_k) \dot{U}_{mk} e^{j\omega_k t}; \\ \dot{U}_{mk} e^{j\omega_k t} &= Z(j\omega_k) \dot{I}_{mk} e^{j\omega_k t}, \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$$

где  $Y(j\omega)$  и  $Z(j\omega_k)$ —комплексные проводимость и сопротивление, рассчитанные на частоте  $\omega_k$ .

Это позволяет найти амплитуды и начальные фазы гармонических составляющих выходного сигнала:

$$I_0 = \frac{U_0}{z(0)}; \quad I_{mk} = \frac{U_{mk}}{z(\omega_k)}; \quad \psi_k - \varphi_k = \psi_k - \operatorname{arctg} \frac{x(\omega_k)}{r}, \quad (17.3)$$

где  $z(0)$ —сопротивление ветви постоянному току (при  $\omega=0$ );

$z(\omega_k)$  — полное сопротивление ветви на частоте  $\omega_k$ ;

$r$  и  $x(\omega_k)$  — активная и реактивная составляющие комплексного сопротивления.

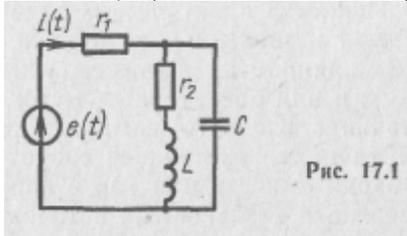


Рис. 17.1

Таким образом, ток в цепи на основании метода наложения легко определить как сумму:

$$i(t) = I_0 + I_{m1} \cos(\omega_1 t + \psi_1 - \varphi_1) + \dots + I_{mn} \cos(\omega_n t + \psi_n - \varphi_n). \quad (17.4)$$

Пример 17.1.

Найти ток  $i(t)$ , потребляемый от источника в схеме (рис. 17.1), если  $e(t) = 30 + 15 \sin \omega t + 20 \sin 3\omega t$ .

В;  $r_1 = 1 \text{ КОМ}$ ;  $\omega L = 1 \text{ КОМ}$ ;  $r_2 = 0.5 \text{ КОМ}$ ;

$1/\omega C = 1 \text{ КОМ}$ .

Решение.

1. Комплексные сопротивления цепи и комплексные амплитуды гармоник тока:

$$Z(0) = r_1 + r_2 = 1,5 \text{ КОМ};$$

$$Z(j\omega) = r_1 + \frac{(r_2 + j\omega L) \frac{1}{j\omega C}}{r_2 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = 1,63 + j1,09;$$

$$Z(j3\omega) = r_1 + \frac{(r_2 + j3\omega L) \frac{1}{j3\omega C}}{r_2 + j3\omega L + \frac{1}{j3\omega C}} = 19 - j3;$$

$$I_0 = \frac{E_0}{Z(0)} = \frac{30}{1,5} = 20 \text{ МА};$$

$$i_{m1} = \frac{\dot{E}_{m1}}{Z(j\omega)} = \frac{15}{1,63 + j1,09} = 7,65 e^{-j33^\circ 36'};$$

$$i_{m3} = \frac{\dot{E}_{m3}}{Z(j3\omega)} = \frac{20}{19 - j3} = 1,04 e^{j8^\circ 54'}.$$

2. Мгновенное значение потребляемого от источника тока

$$i(t) = 20 + 7,65 \sin(\omega t - 33^\circ 36') + 1,04 \sin(3\omega t + 8^\circ 54') \text{ мА.}$$

Комплексные сопротивления  $Z(j\omega)$  и проводимости  $Y(j\omega)$  являются частными случаями более общего понятия — комплексной функции цепи.

Представим сигнал, действующий на входе цепи, в виде ряда Фурье в комплексной форме:

$$f_{\text{вх}}(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \dot{F}_{\text{вх } mn} e^{j\omega_n t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F_{\text{вх } mn} e^{-j\psi_{\text{вх } n}} e^{j\omega_n t}. \quad (17.5)$$

Комплексная амплитуда каждой из гармоник выходного сигнала  $\dot{F}_{\text{ВЫХ } mn}$  определяется как произведение комплексной амплитуды соответствующей гармоники входного сигнала  $\dot{F}_{\text{ВХ } mn}$  на соответствующую комплексную функцию цепи  $K(j\omega_n) = K(\omega_n) e^{j\varphi(\omega_n)}$ :

$$\dot{F}_{\text{ВЫХ } mn} = \dot{F}_{\text{ВХ } mn} K(j\omega_n) = F_{\text{ВЫХ } mn} e^{-j\psi_{\text{ВЫХ } n}}, \quad (17.6)$$

Где  $\dot{F}_{\text{ВЫХ } mn} = \dot{F}_{\text{ВХ } mn} K(\omega_n) = \dot{F}_{\text{ВЫХ } mn} e^{j\varphi_{\text{ВЫХ } n}}$ .

Отсюда на основании принципа наложения находим выражение выходного сигнала

$$f_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \dot{F}_{\text{ВЫХ } mn} e^{j\omega_n t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \dot{F}_{\text{ВХ } mn} K(j\omega_n) e^{j\omega_n t}. \quad (17.7)$$

Если входной сигнал (17.5) представить рядом Фурье в вещественной форме:

$$f_{\text{вх}}(t) = F_{\text{вх } 0} + \sum_{n=1}^{\infty} F_{\text{вх } mn} \cos(\omega_n t - \psi_{\text{вх } n}), \quad (17.8)$$

то сигнал на выходе найдем в аналогичной форме как

$$\begin{aligned} f_{\text{ВЫХ}}(t) &= F_{\text{ВЫХ } 0} + \sum_{n=1}^{\infty} F_{\text{ВЫХ } mn} \cos(\omega_n t - \psi_{\text{ВЫХ } n}) = \\ &= F_{\text{вх } 0} K(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F_{\text{вх } mn} K(\omega_n) \cos[\omega_n t - \psi_{\text{вх } n} + \varphi(\omega_n)]. \end{aligned} \quad (17.9)$$

Таким образом, АЧС сигнала на выходе может быть получен перемножением АЧС входного сигнала на модуль комплексной функции цепи, а его ФЧС — суммированием ФЧС входного сигнала со значениями аргумента комплексной функции цепи на соответствующих частотах. Метод расчета основан на использовании разложения сигналов в ряд Фурье. При расчете:

входной сигнал представляют в виде ряда Фурье;

определяют необходимую входную или передаточную комплексную функцию цепи;

комплексные амплитуды гармонических составляющих выходного сигнала рассчитывают по формуле (17.6) как произведение комплексных амплитуд входного сигнала на комплексную функцию цепи.

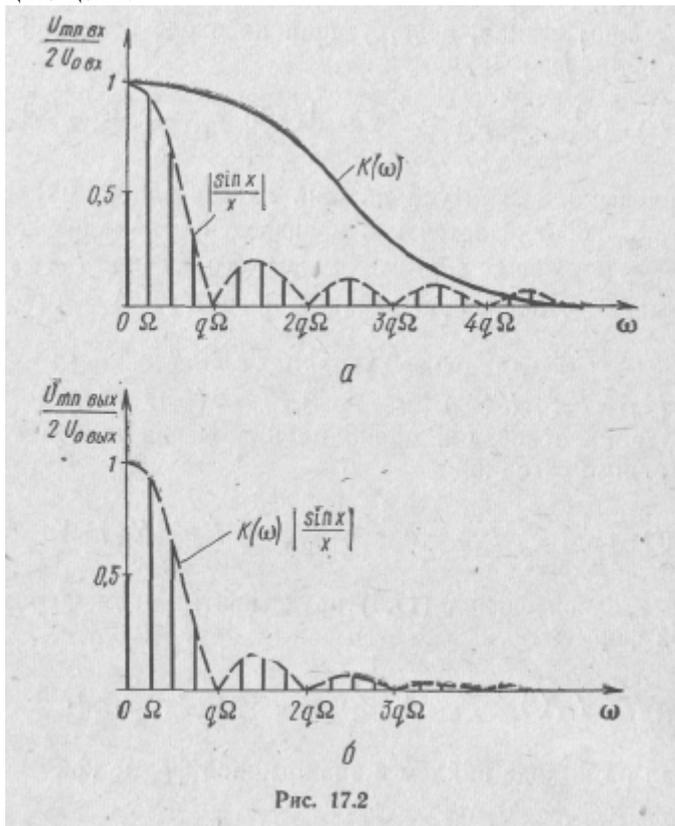


Рис. 17.2

### Пример 17.2.

На вход интегрирующей цепи (см. рис. 6.6,6) поступает последовательность прямоугольных видеоимпульсов напряжения. Найти напряжение, появляющееся на ее выходе, если  $\omega rC \gg 1$ .

Решение.

1. Представление входного сигнала в виде ряда Фурье определяется выражением (15.23), а комплексный коэффициент передачи цепи по напряжению—выражением (6.44).
2. Напряжение на выходе цепи находим по формуле (17.6):

$$\begin{aligned}
 u_{\text{вых}}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \dot{U}_{\text{вх } n\pi} K(jn\Omega) e^{jn\Omega t} = \\
 &= \frac{U_m}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{q}}{n \sqrt{1 + (n\Omega rC)^2}} e^{jn\Omega (t-t_0) - \text{arctg } n\Omega rC}.
 \end{aligned}$$

При  $\omega rC \gg 1$

$$u_{\text{вых}}(t) \approx \frac{U_{\text{вр}}}{q} + \frac{U_m}{\pi \Omega rC} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{q}}{n^2} \cos \left[ n\Omega (t - t_0) - \frac{\pi}{2} \right] =$$

$$= \frac{U_m}{q} + \frac{U_m}{\pi \Omega rC} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{q}}{n^2} \sin n\Omega (t - t_0).$$

На рис. 17.2, а приведены АЧС входного сигнала и зависимость модуля коэффициента передачи (АЧХ) цепи от частоты, а также АЧС выходного сигнала, полученный их перемножением. При  $\omega rC \gg 1$  полученный спектр соответствует последовательности видеоимпульсов треугольной формы (рис. 17.2,б).

### 17.3. РАСЧЕТ ПРОХОЖДЕНИЯ СИГНАЛОВ СО СПЛОШНЫМ СПЕКТРОМ

При расчете прохождения непериодических сигналов спектральным методом используются прямое и обратное преобразования Фурье (16.3) и (16.4). Представление непериодической функции в виде интеграла Фурье подразумевает суммирование бесконечного числа незатухающих и бесконечно близких по частоте синусоидальных колебаний с бесконечно малыми амплитудами. Это дает возможность применять к бесконечно малым гармоническим составляющим токов и напряжений обычные методы расчета установившихся режимов, а затем, пользуясь методом наложения, определять результирующие напряжения и токи. Ценность такого подхода заключается в том, что анализ переходного режима сводится к анализу установившихся режимов.

Предположим, что на линейную цепь, комплексная функция  $K(j\omega)$  которой известна, подается сигнал  $f_{\text{вх}}(t)$ . Интеграл Фурье позволяет представить этот сигнал наложением бесконечного числа гармоник с комплексными амплитудами  $\frac{1}{\pi} S_{\text{вх}}(j\omega) d\omega$ .

Очевидно, комплексные амплитуды соответствующих гармоник выходного сигнала определяются произведением

$$\frac{1}{\pi} S_{\text{вх}}(j\omega) K(j\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} S_{\text{вых}}(j\omega) d\omega, \quad (17.10)$$

а спектральная плотность выходного сигнала

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = S_{\text{вх}}(j\omega) K(j\omega) \quad (17.11)$$

равна произведению спектральной плотности входного сигнала на соответствующую комплексную функцию цепи,

Значение выходного сигнала как функции времени находим с помощью обратного преобразования Фурье наложением бесконечно большого числа его гармонических составляющих:

$$f_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\text{вых}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\text{вх}}(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (17.12)$$

Таким образом, по известной комплексной функции цепи и спектральной плотности входного сигнала с помощью обратного преобразования Фурье можно рассчитать реакцию цепи на любое заданное воздействие.

Расчет обычно ведут в такой последовательности:

находят спектральную плотность  $S_{\text{вх}}(j\omega)$  входного сигнала;

определяют необходимую входную или передаточную функцию цепи;

рассчитывают спектральную плотность выходного сигнала по формуле (17.11) как произведение  $S_{\text{вх}}(j\omega)$  на комплексную функцию цепи;

сигнал на выходе находят с помощью принципа наложения как сумму реакций цепи на каждое из воздействий в отдельности.

Пример 17.3.

На простую RC-цепь (см. рис. 6.6, а) действует одиночный прямоугольный импульс малой длительности ( $t_H \rightarrow 0$ ) с амплитудой  $U_m$ . Найти напряжение на выходе.

Решение.

1. Спектральная плотность входного сигнала:

$$S_{\text{вх}}(j\omega) = U_m t_H \frac{\sin \frac{\omega t_H}{2}}{\frac{\omega t_H}{2}} \Big|_{t_H \rightarrow 0} \approx U_m t_H,$$

т. е., так как  $t_H \rightarrow 0$ , импульс на входе цепи можно представить  $\delta(t)$ -функцией с площадью  $U_m t_H$ , характеризующейся сплошным спектром. Таким образом, задачу удается свести к нахождению реакции на воздействие  $\delta(t)$ -функции.

2. Комплексный коэффициент передачи цепи по напряжению:

$$K(j\omega) = \frac{r}{r + \frac{1}{j\omega C}} = 1 + j \frac{1}{rC} \frac{1}{\omega - j \frac{1}{rC}}.$$

3. Спектральная плотность выходного сигнала:

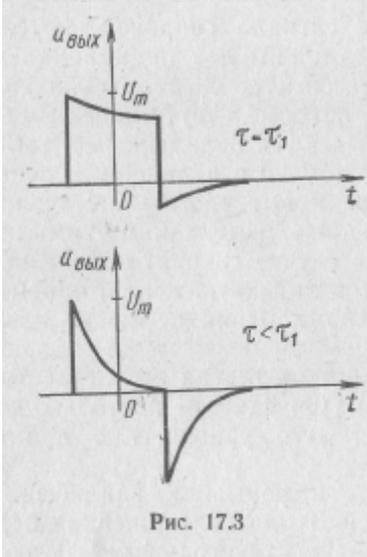
$$S_{\text{вых}}(j\omega) = S_{\text{вх}}(j\omega) K(j\omega) = U_m t_H \left( 1 + j \frac{1}{rC} \frac{1}{\omega - j \frac{1}{rC}} \right).$$

4. Сигнал на выходе цепи:

$$\begin{aligned}
 u_{\text{вых}}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\text{вых}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\
 &= \frac{U_m t_H}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega + j \frac{1}{rC} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\omega - j \frac{1}{rC}} d\omega \right) = \\
 &= U_m t_H \left[ \delta(t) - \frac{1}{rC} e^{-\frac{t}{rC}} \right],
 \end{aligned}$$

так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega = 2\pi \delta(t) \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega - j \frac{1}{rC}} e^{j\omega t} d\omega = 2\pi j e^{-\frac{t}{rC}}.$$



Пример 17.4

На простую  $rC$ -цепь (см. рис. 6.6, а) действует одиночный прямоугольный импульс конечной длительности  $t_H$  с амплитудой  $U_m$ . Найти напряжение на выходе.

Решение.

1. Спектральная плотность выходного сигнала:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{вых}}(j\omega) &= S_{\text{вх}}(j\omega) K(j\omega) = U_m t_H \frac{\sin \frac{\omega t_H}{2}}{\frac{\omega t_H}{2}} \frac{\omega}{\omega - j \frac{1}{rC}} = \\
 &= 2U_m \frac{\sin \frac{\omega t_H}{2}}{\omega - j \frac{1}{rC}}.
 \end{aligned}$$

2. Сигнал на выходе цепи:

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\text{ВЫХ}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{U_m}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{\omega t_H}{2}}{\omega - j \frac{1}{rC}} e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{U_m}{\pi} 2\pi j \sin \left( j \frac{1}{rC} \frac{t_H}{2} \right) e^{-\frac{t}{rC}} = U_m \left[ e^{-\frac{1}{rC} \left( t + \frac{t_H}{2} \right)} - e^{-\frac{1}{rC} \left( t - \frac{t_H}{2} \right)} \right],$$

так как  $2j \sin jx = e^{-x} - e^x$ .

Форма импульса на входе и выходе цепи при разных постоянных времени  $\tau=rC$  показана на рис. 17.3.

#### 17.4. ПОНЯТИЕ О НЕИСКАЖЕННОЙ ПЕРЕДАЧЕ СИГНАЛА И НЕИСКАЖАЮЩЕЙ ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ

Любые изменения сигнала сопровождаются изменением его спектра. При этом возможны два принципиально различных случая. В одном из них в спектре сигнала появляются составляющие с новыми частотами, которые отсутствовали на входе устройства. Такие изменения называются нелинейными, так как появление новых частот возможно только в нелинейных цепях. Во втором случае в спектре сигнала новые частоты не возникают, а его изменения определяются лишь изменениями амплитуд и начальных фаз гармоник. В этом случае говорят о линейных изменениях сигнала. Они возникают в линейных цепях, описываемых линейными уравнениями. В линейных цепях не могут появляться новые частоты.

В реальных устройствах всегда имеют место искажения сигналов. Однако их стремятся сделать настолько малыми, чтобы они не превышали допустимого уровня, т. е. практически отсутствовали.

Будем считать, что информация, заключенная в сигнале, отображается его формой. Тогда неискаженная передача сигнала будет обозначать неизменность его формы. При неискаженной передаче возможны изменения амплитуды и сдвиг сигнала, не сопровождающиеся изменением формы (рис. 17.4).

Выясним, какими характеристиками должна обладать линейная цепь или система, чтобы обеспечивалась неискаженная передача сигнала. Очевидно, условием такой передачи при временном описании является соотношение

$$f_{\text{ВЫХ}}(t) = kf_{\text{ВХ}}(t - t_0). \quad (17.13)$$

где  $k$  — постоянный множитель, учитывающий изменения амплитуды;

$t_0$  — время запаздывания, определяющее сдвиг сигнала во времени.

При спектральном описании, переходя от выражения (17.13) к уравнению для спектров входного и выходного сигналов, с учетом теоремы линейности и теоремы о сдвиге находим

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = k S_{\text{вх}}(j\omega) e^{-j\omega t_0} = K(j\omega) S_{\text{вх}}(j\omega), \quad (17.14)$$

где  $K(j\omega) = k e^{-j\omega t_0} = K(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$  — комплексная функция цепи.

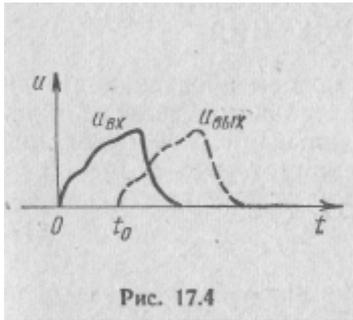


Рис. 17.4

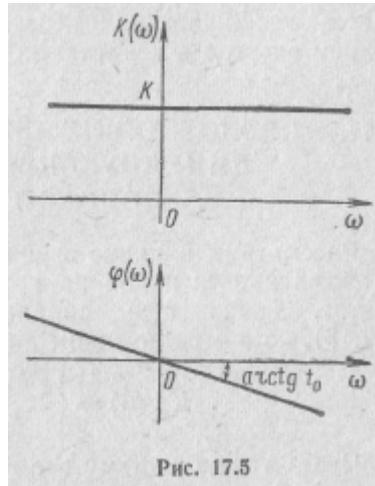


Рис. 17.5

Таким образом, для неискаженной передачи сигнала, сопровождающейся лишь изменением его амплитуды и запаздыванием на время  $t_0$ , амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики цепи должны быть линейными во всем диапазоне частот  $-\infty \leq \omega \leq +\infty$  (рис. 17.5):

$$\left. \begin{aligned} K(\omega) &= k = \text{const}; \\ \varphi(\omega) &= -\omega t_0. \end{aligned} \right\} \quad (17.15)$$

Это значит, что во всем диапазоне частот колебания на выходе прямо пропорциональны колебаниям на входе, причем все гармонические составляющие запаздывают на одно и то же время.

Нелинейность частотных характеристик цепи вызывает появление искажений сигналов. Осуществить реальную цепь с линейными характеристиками во всем диапазоне частот не представляется возможным. На практике это не требуется, так как все реальные сигналы обладают ограниченным по эффективной ширине спектром. Поэтому вполне достаточно, чтобы частотные характеристики цепи были линейны только в ограниченной полосе частот (полосе пропускания), соответствующей ширине спектра сигнала. Однако при конечной полосе пропускания, если спектр сигнала шире полосы пропускания системы, нельзя избежать искажений даже при идеальных ее характеристиках.

Изменения формы сигналов, обусловленные отклонением АЧХ цепи от равномерной, носят название частотных искажений. Аналогично искажения, вызванные нелинейностью ее ФЧХ, называются фазовыми.

Причиной нелинейности частотных характеристик линейной цепи является наличие в ее составе реактивных элементов, обуславливающих частотную зависимость ее параметров. Задержка во времени при прохождении сигналов через такие цепи объясняется возникновением переходных процессов, вызванных накоплением энергии в реактивных элементах.

### 17.5. ПРОХОЖДЕНИЕ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ИДЕАЛЬНУЮ ЛИНЕЙНУЮ ЦЕПЬ С ОГРАНИЧЕННОЙ ПОЛОСОЙ ПРОПУСКАНИЯ

Рассмотрим влияние ограничения полосы пропускания цепи на прохождение сигналов на примере идеального фильтра нижних частот. Такая цепь обладает идеальными характеристиками (17.15), но в ограниченном диапазоне частот (рис. 17.6):

$$K(j\omega) = \begin{cases} e^{j\omega t_0} & \text{при } -\omega_c < \omega < \omega_c; \\ 0 & \text{при } \omega_c < \omega < -\omega_c. \end{cases} \quad (17.16)$$

Через такую систему все гармоники спектра с частотами ниже

частоты среза  $\omega_0$  будут проходить без изменения амплитуд и со сдвигом фаз,

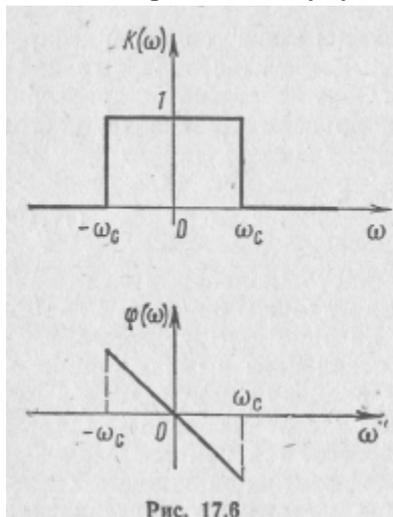


Рис. 17.6

пропорциональным частоте. Гармоники с частотами выше  $\omega_c$  не будут пропускаться, что должно привести к изменению спектра и формы сигнала на выходе. Степень искажения сигнала будет определяться долей отсеченной части спектра, зависящей от ширины полосы пропускания системы.

Заметим, что фильтр с указанными идеальными характеристиками не может быть реализован практически, так как его комплексная функция (17.16) не удовлетворяет условиям физической реализуемости. Тем не менее подобная идеализация удобна, так как позволяет значительно упростить анализ и выделить наиболее существенные особенности протекающих в системе явлений.

В качестве входного сигнала при рассмотрении процессов удобно выбрать типовые воздействия вида  $\delta(t)$  и  $1(t)$ -функций,

### 17.5.1. Воздействие дельта-функции

Как известно, дельта-функция Дирака характеризуется бесконечно широким спектром, а ее спектральная плотность  $S_{\text{вх}}(\omega) = 1$ . При прохождении через систему с ограниченной полосой пропускания спектр такого сигнала будет ограничен частотой среза. Вы-

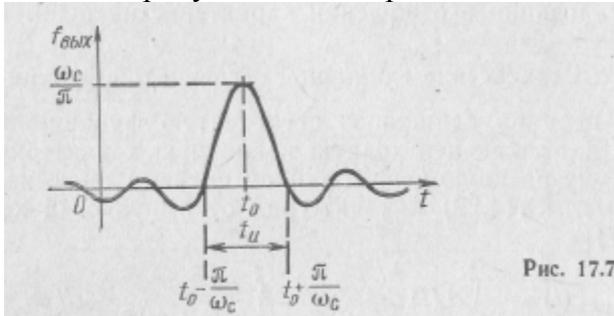


Рис. 17.7

ходной сигнал, соответствующий этому спектру и представляющий импульсную временную характеристику системы, согласно выражению (17.12)

$$f_{\text{вых}}(t) = a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\text{вх}}(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c(t-t_0)}{\omega_c(t-t_0)}. \quad (17.17)$$

Эта функция (рис. 17.7) имеет максимальное значение при  $t=t_0$ , равное  $f_{\text{вых}}(t) = \frac{\omega_c}{\pi}$ . В стороне от максимума в точках  $\omega_c(t-t_0) = \pm k\pi$ , т. е. при  $t = t_0 \pm \frac{k\pi}{\omega_c}$ , она имеет нулевые значения. Значения этой функции при разных аргументах можно определить с помощью кривой  $\frac{\sin x}{x}$  (см. рис. 15.5) или таблиц.

Основная часть сигнала определяется главной аркой спектра и имеет ширину  $t_H = \frac{2\pi}{\omega_c}$ .

Характерно, что произведение

$$\omega_c t_H = 2\pi = \text{const}. \quad (17.18)$$

Из графика (см. рис. 17.7) следует, что выходной сигнал запаздывает на время  $t_0$ , равное угловому коэффициенту ФЧХ цепи, а отсечение высокочастотной части спектра привело к тому, что выходной сигнал в отличие от входного имеет конечную длительность  $t_H$  и конечную амплитуду  $\frac{\omega_c}{\pi}$ . С увеличением частоты среза  $\omega_c$ , т. е. по мере расширения полосы пропускания системы, искажения уменьшаются: при  $\omega_c \rightarrow \infty$  длительность  $t_H \rightarrow \infty$ , а амплитуда

$\frac{\omega_c}{\pi} \rightarrow \infty$ , что в пределе дает  $\delta(t)$ -функцию, действующую на входе.

Из полученных соотношений и графика можно предположить, что реакция цепи возникает при  $t < 0$ , т. е. до воздействия  $\delta(0)$  функции на входе. Этот парадокс является следствием принятой вначале идеализации в отношении характеристик цепи.

### 17.5.2. Воздействие единичной ступенчатой функции

Реакция цепи на единичную ступенчатую функцию представляет не что иное, как переходную временную характеристику системы. Поэтому реакцию цепи в данном случае удобно найти с помощью формулы (14.20) как интеграл от импульсной характеристики (17.17):

$$f_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^t a(t) dt = \frac{\omega_c}{\pi} \int_{-\infty}^t \frac{\sin \omega_c(t-t_0)}{\omega_c(t-t_0)} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (17.19)$$

Полученный интеграл можно выразить через табулированный интегральный синус (рис. 17.8,а):

$$\text{Si } z = \int_0^z \frac{\sin x}{x} dx, \quad (17.20)$$

для которого характерно соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx = \pi. \quad (17.21)$$

Учитывая это, из уравнения (17.19) находим

$$f_{\text{вых}}(t) = h(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si } \omega_c(t-t_0). \quad (17.22)$$

Реакция цепи имеет вид графика смещенного интегрального синуса (рис. 17.8,б). Характерным для нее является значение крутизны фронта (скорости нарастания) при  $t=t_0$ . Как следует из выражения (17.19), эта величина равна

$$\left. \frac{df_{\text{вых}}}{dt} \right|_{t=t_0} = a(t_0) = \frac{\omega_c}{\pi}. \quad (17.23)$$

В то же время, обращаясь к рис. 17.8,б, ее можно выразить как

$$\left. \frac{df_{\text{вых}}}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{1}{t_\Phi}, \quad (17.24)$$

где  $t_\Phi$  — длительность фронта.

Приравнявая правые части этих выражений, получим

$$t_{\phi} = \frac{\pi}{\omega_c} \quad (17.25)$$

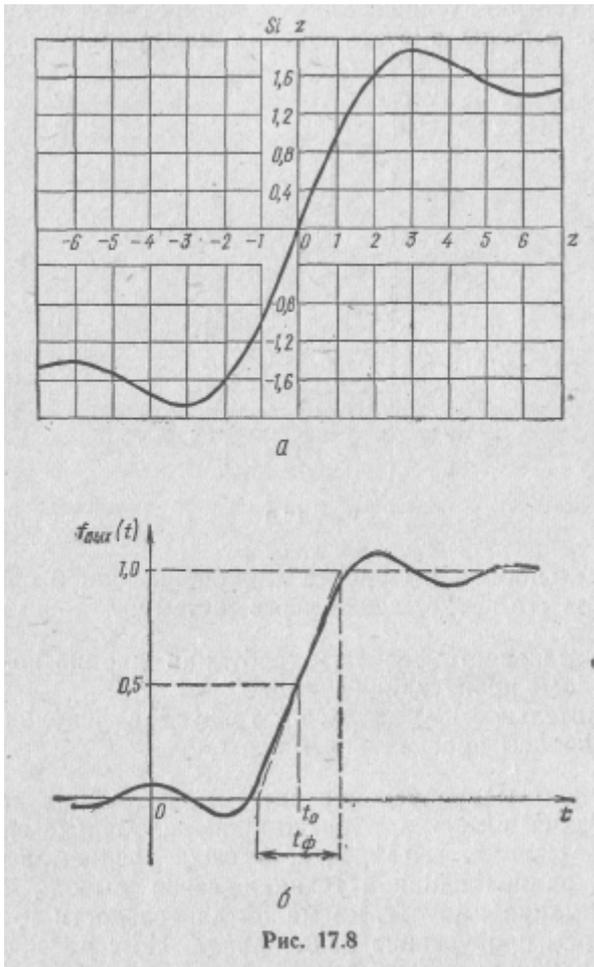


Рис. 17.8

Это позволяет сделать вывод: чем уже полоса пропускания системы, тем медленнее нарастает сигнал на выходе. Характерно, что произведение

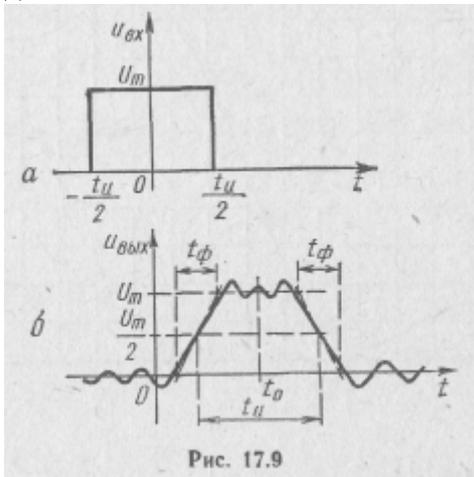
$$\omega_c t_{\phi} = \pi = const. \quad (17.26)$$

Из графика (см. рис. 17.8,6) также следует, что сигнал на выходе запаздывает на время  $t_0$ , определяемое наклоном ФЧХ цепи, а отсечение высокочастотной части спектра приводит к тому, что выходной сигнал в отличие от входного имеет конечную длительность фронта  $t_{\phi}$ . По мере расширения полосы пропускания иска-

жения уменьшаются: при  $\omega_c \rightarrow \infty$  длительность фронта  $t_\phi = \frac{\pi}{\omega_c} \rightarrow 0$  и в пределе

приходим к  $1(t)$ -функции, действующей на входе.

Рассмотренные примеры прохождения  $1(t)$  и  $\delta(t)$ -функций через систему с ограниченной полосой пропускания позволяют сделать важные выводы о соотношениях между длительностью им-



пульса, длительностью его фронта и шириной полосы пропускания, требуемой для его прохождения через систему:

$$\left. \begin{array}{l} \text{длительность фронта } \times \text{ требуемая ширина полосы пропускания} = \text{const}; \\ \text{длительность импульса } \times \text{ требуемая ширина полосы пропускания} = \text{const}. \end{array} \right\}$$

Ширина полосы пропускания системы, требуемая для неискаженной передачи импульса, обратно пропорциональна его длительности и длительности его фронта. Отсюда следует, в частности, важный для радиолокации и техники связи вывод: передача и прием информации импульсами малой длительности требуют увеличения полосы пропускания радиоканала. По с расширением полосы пропускания растет влияние помех. Это требует при выборе оптимальных параметров системы учета влияния обоих факторов.

Пример 17.5.

Рассчитать изменения фронтов прямоугольного видеоимпульса с длительностью  $t_u$  при его прохождении через идеальную систему с полосой пропускания, ограниченной частотой среза  $\omega_c$ .

Решение.

Любой прямоугольный видеоимпульс (рис. 17.9, а) можно представить наложением двух ступенчатых функций, сдвинутых одна относительно другой на время, равное его длительности  $t_u$ .

$$u_{\text{вх}}(t) = U_m \left[ 1 \left( t + \frac{t_u}{2} \right) - 1 \left( t - \frac{t_u}{2} \right) \right] = u_{\text{вх}1}(t) - u_{\text{вх}2}(t).$$

Учитывая выражение (17.22), сигнал на выходе такой системы (рис. 17.9,6) найдем в соответствии с принципом наложения:

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = u_{\text{ВЫХ1}}(t) - u_{\text{ВЫХ2}}(t) = \frac{U_m}{\pi} \left[ \text{Si } \omega_c \left( t + \frac{t_H}{2} - t_0 \right) - \text{Si } \omega_c \left( t - \frac{t_H}{2} - t_0 \right) \right]. \quad (17.27)$$

Длительность его фронта  $t_\phi$ , определяется формулой (17.25) и зависит от того, какая часть спектра входного сигнала проходит через систему. При полосе пропускания, соответствующей ширине главной арки его

спектра, т. е. при  $\omega_c = \frac{2\pi}{t_H}$ , длительность фронтов составит

$$t_\phi = \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{1}{2} t_H.$$

Если же она соответствует ширине  $k$  арки спектра, т. е.  $\omega_c = k \frac{2\pi}{t_H}$ ,

то

$$t_\phi = \frac{1}{2k} t_H$$

### Пример 17.6.

Расчитать в общем виде прохождение прямоугольного радиоимпульса через идеальный полосовой фильтр (ПФ) с полосой пропускания, ограниченной частотами  $\omega_0 \mp \omega_c$ .

Решение.

Известно, что при воздействии прямоугольного радиоимпульса  $f_{\text{ВХ1}} < 0$  на идеальный фильтр нижних частот (ФНЧ) с частотой среза  $\omega_c$  (см. рис. 17.6) сигнал на выходе  $f_{\text{ВЫХ1}}(t)$  определяется формулой (17.27). Его спектральная плотность

$$S_{\text{ВЫХ1}}(j\omega) = K_1(j\omega) S_{\text{ВХ1}}(j\omega),$$

где  $K_1(j\omega)$  — комплексный коэффициент передачи идеального ФНЧ;

$S_{\text{ВХ1}}(t)$  — спектральная плотность прямоугольного радиоимпульса.

В соответствии с теоремой о модуляции (табл. 16.1), если

$$f_{\text{ВЫХ}}(t) = f_{\text{ВЫХ1}}(t) \cos \omega_H t, \quad (17.28)$$

то

$$\begin{aligned} S_{\text{ВЫХ}}(j\omega) &= \frac{1}{2} \{ S_{\text{ВЫХ1}}[j(\omega - \omega_H)] + S_{\text{ВЫХ1}}[j(\omega + \omega_H)] \} = \\ &= \frac{1}{2} \{ K_1[j(\omega - \omega_H)] S_{\text{ВХ1}}[j(\omega - \omega_H)] + K_1[j(\omega + \omega_H)] S_{\text{ВХ1}}[j(\omega + \omega_H)] \} = \\ &= K(j\omega) S_{\text{ВХ}}(j\omega), \end{aligned} \quad (17.29)$$

что представляет произведение комплексного коэффициента передачи  $K(j\omega)$  идеального ПФ, образованного смещением по оси частот коэффициента передачи  $K_1(j\omega)$  идеального ФНЧ в обе стороны от начала координат на величину  $\pm\omega_H$ , на спектральную плотность прямоугольного радиоимпульса, образованную аналогичным смещением по частоте спектральной плотности прямоугольного радиоимпульса, умноженной на  $1/2$  (рис. 17.10). В уравнении (17.29) учтено, что

$$\begin{aligned} K_1[j(\omega - \omega_H)] S_{\text{ВХ1}}[j(\omega + \omega_H)] &\approx 0; \\ K_1[j(\omega + \omega_H)] S_{\text{ВХ1}}[j(\omega - \omega_H)] &\approx 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что выражения (17.28) и (17.29) описывают реакцию идеального ПФ на воздействие прямоугольного радиоимпульса:

$$f_{\text{ВХ}}(t) = f_{\text{ВХ1}}(t) \cos \omega_H t. \quad (17.30)$$

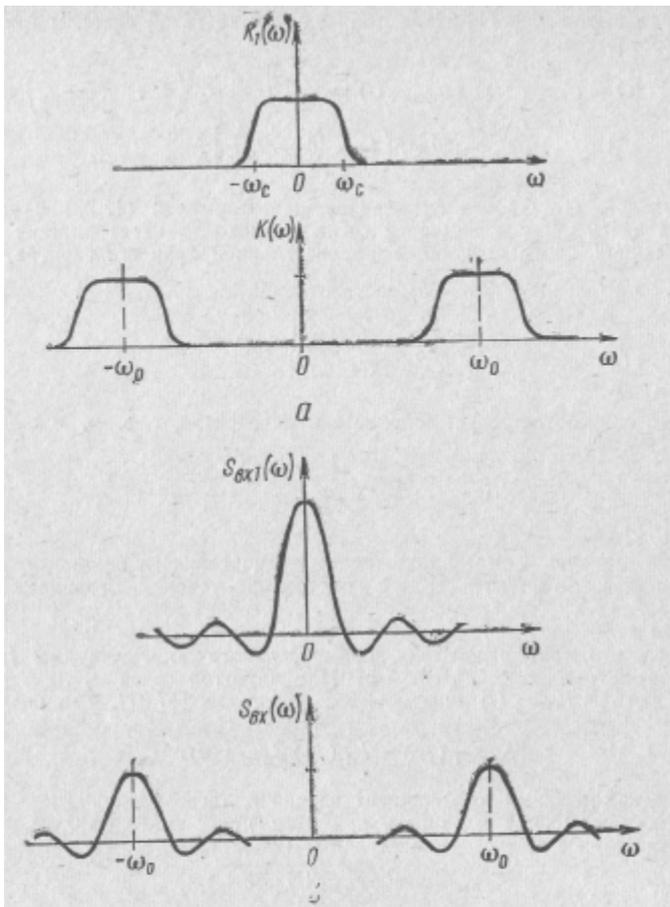


Рис. 17.10

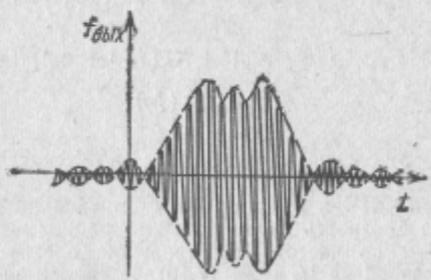


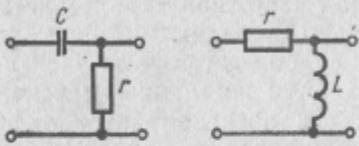
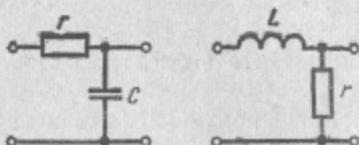
Рис. 17.11

Таким образом, огибающая сигнала на выходе ПФ при воздействии прямоугольного радиоимпульса (рис. 17.11) определяется огибающей сигнала на выходе ФНЧ при воздействии на его вход прямоугольного видеоимпульса. Этот вывод можно распространить и на случай других радиоимпульсов, сформулировав теорему об огибающей,

## 17.6. ВЛИЯНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЦЕПИ НА СПЕКТР И ФОРМУ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА

При комплексной форме записи в соответствии с выражениями (17.6) и (17.11) спектр, а следовательно, и форма выходного сигнала определяются произведением комплексных функций входного сигнала и цепи. Частотные характеристики цепи полностью определяют изменения спектра и формы сигнала, возникающие при прохождении сигнала через нее. Спектр выходного сигнала зависит от частотной характеристики цепи в той же мере, что и от спектра входного сигнала.

Сравнение спектра входного сигнала с графиком частотных характеристик цепи позволяет оценить систему передачи сигнала с точки зрения вносимых искажений. В зависимости от того, какая часть спектра сигнала задерживается, можно судить о характере и степени искажений. Это очень важно при проектировании систем. Знание спектра сигнала позволяет сделать выбор требуемой полосы пропускания системы и ее граничных частот. Кроме того, по известным частотным характеристикам цепи и сигнала можно выбрать схемы и параметры корректирующих устройств, необходимых для корректировки частотных характеристик системы и исправления формы выходного сигнала. Возможность относительно простой оценки искажений сигнала при прохождении через цепи является основной ценностью спектрального метода. Это особенно ценно, когда известны не схемы цепей, а их частотные характеристики, снятые экспериментально.

Таблица 17.1	
	$K_1(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{j\omega}{a + j\omega}$
$a = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{rC}$ $a = \frac{1}{\tau} = \frac{r}{L}$	$K_2(j\omega) = \frac{a}{j\omega} K_1(j\omega)$
	$K_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{a}{a + j\omega}$

Чтобы отметить влияние различных участков частотной характеристики цепи на спектр и форму сигнала, обратимся к двум группам простейших схем: дифференцирующим (рис. 6.6,а и 6.7, а) и интегрирующим (рис. 6.6,б и 6.7,б). Их частотные характеристики (см. рис. 6.8) имеют спад соответственно в области нижних или в области верхних частот, что позволяет относить эти цепи к числу фильтров верхних или фильтров нижних частот. Комплексные передаточные функции таких схем сведены в табл. 17.1. Для случая ступенчатого воздействия на входе:

$$\left. \begin{aligned} u_{\text{вх}}(t) &= U_m \cdot 1(t); \\ S_{\text{вх}}(j\omega) &= U_m \left[ \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (17.31)$$

### 17.6.1. Дифференцирующие цепи

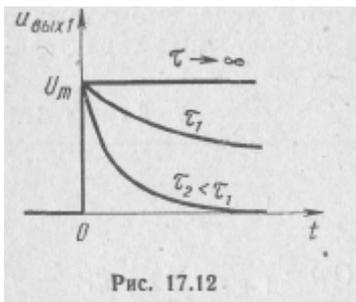
Спектральная плотность сигнала на выходе цепей первой группы при ступенчатом воздействии на входе

$$S_{\text{вх1}}(j\omega) = S_{\text{вх}}(j\omega) K_1(j\omega) = \frac{U_m}{a + j\omega} + \frac{U_m \pi \delta(\omega) j\omega}{a + j\omega} = \frac{U_m}{a + j\omega}, \quad (17.32)$$

так как  $\delta(\omega)j\omega = 0$  при всех значениях  $\omega$ .

Такому спектру соответствует экспоненциальная функция

$$u_{\text{вх1}}(t) = U_m e^{-at} = U_m e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (17.33)$$



При больших постоянных времени  $\tau$  спад частотной характеристики относительно невелик и цепи этой группы слабо искажают сигнал. С уменьшением постоянной  $\tau$  искажения растут и носят характер дифференцирования (рис. 17.12).

Дифференцирование происходит при  $\omega_{\text{max}} \ll a = \frac{1}{\tau}$ , т.е.

$$\omega_{\text{max}} \tau \ll 1, \quad (17.34)$$

когда

$$|K_1(j\omega)| = j\omega \frac{1}{a}, \quad (17.35)$$

где  $\omega_{\text{max}}$  —максимальная учитываемая частота в спектре входного сигнала.

При таком виде искажения изменения фронта сигнала не происходят, изменяется в основном его вершина. В спектре сигнала этому соответствует уменьшение спектральной плотности низкочастотных составляющих.

## 17.6.2. Интегрирующие цепи

Спектральная плотность сигнала на выходе цепей второй группы при ступенчатом воздействии с учетом соотношений, приведенных в табл. 17.1,

$$S_{\text{вых}2}(j\omega) = S_{\text{вх}}(j\omega) K_2(j\omega) = S_{\text{вх}}(j\omega) \frac{a}{j\omega} K_1(j\omega) = \frac{a}{j\omega} S_{\text{вых}1}(j\omega). \quad (17.36)$$

Отсюда на основании теоремы интегрирования (табл. 16.1) находим

$$u_{\text{вых}2}(t) = a \int_0^t u_{\text{вх}1}(t) dt = aU_m \int_0^t e^{-at} dt = U_m (1 - e^{-at}) = U_m \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad (17.37)$$

т. е. сигнал на выходе изменяется по закону обратной экспоненты.

Цепи этой группы слабо искажают сигнал при малых постоянных времени  $\tau$ . Искажения растут с увеличением пополюсней  $\tau$  и носят характер интегрирования (рис. 17.13).

Интегрирование происходит при  $\omega_{\text{max}} \gg a = \frac{1}{\tau}$ , т. е.

$$\omega_{\text{max}} \tau \gg 1. \quad (17.38)$$

когда

$$K_2(j\omega) \approx \frac{a}{j\omega}. \quad (17.39)$$

При таком виде искажения происходят в основном изменения фронта сигнала, а его вершина изменяется слабо. В спектре сигнала этому соответствует уменьшение спектральной плотности высокочастотных составляющих.

Отмечая влияние различных участков частотной характеристики цепи на форму сигнала, можно заключить, что для неискаженной передачи фронта импульса необходимо обеспечить условия неискаженной передачи на верхних частотах, а для сохранения неизменной формы его вершины нужно обеспечить условия неискаженной передачи на нижних частотах.

Для более сложных цепей частотные характеристики оказываются также сложными функциями частоты. В этих случаях удобно применять приближенные методы, при которых, например, кривая частотных характеристик аппроксимируется прямолинейными отрезками. Чтобы выяснить влияние отдельных элементов цепи на характер ее частотных характеристик, а следовательно,

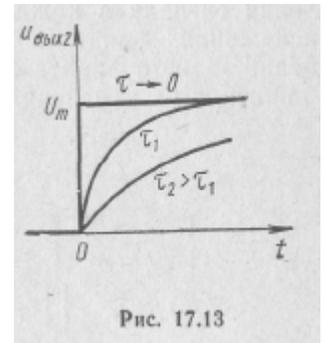
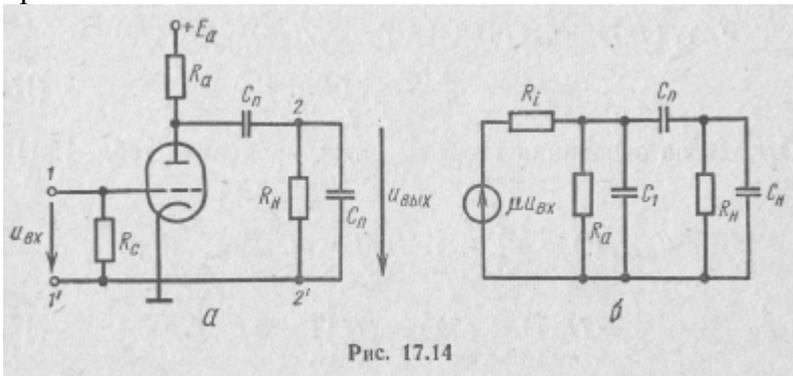
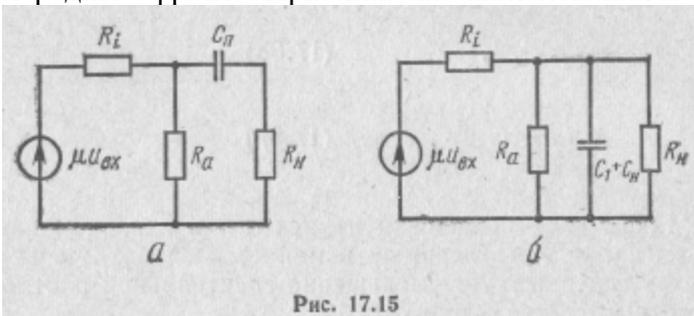


Рис. 17.13

и на искажения сигнала, можно составить ее эквивалентные схемы для низких и для высоких частот в отдельности. Каждая из них будет проще полной схемы замещения, поэтому анализ процессов в них также упростится. Расчет характеристик и анализ прохож-



дения сигнала в каждой из таких схем позволяют судить об искажениях фронта и вершины импульса. Подход к оценке изменений заднего фронта такой же, как и для переднего фронта. Приблизительно их изменения можно считать одинаковыми.



**Пример 17.7.**

Оценить искажения прямоугольного видеоимпульса при прохождении через однокаскадный ламповый усилитель (рис. 17.14, а).

Решение.

Полная схема замещения каскада представлена на рис. 17.14,б. На ней  $C_1 = C_{ак} + C_{м}$  учитывает емкость анод — катод электронной лампы и емкость монтажа.

1. Схемы замещения каскада для нижних и верхних частот приведены на рис. 17.15. На нижних частотах (рис. 17.15, а) не учитываем емкость  $C_1$  и емкость нагрузки  $C_{н}$ , так как их значения относительно малы, а на высоких частотах (рис. 17.15,б) переходную емкость  $C_{п}$ , замыкаем накоротко, так как обычно она велика.

2. Комплексный коэффициент передачи цепи на нижних частотах рассчитываем с помощью схемы замещения на этих частотах:

$$K_{н.ч}(j\omega) = \frac{\mu \dot{U}_{вх}}{R_l + \frac{r_a \left( r_n + \frac{1}{j\omega C_n} \right)}{r_a + r_n + \frac{1}{j\omega C_n}}} \frac{r_a}{r_a + r_n + \frac{1}{j\omega C_n}} \frac{r_n}{\dot{U}_{вх}} =$$

$$= \frac{j\omega C_n R_{\text{Э}1}}{1 + j\omega C_n R_{\text{Э}2}} = k \frac{j\omega C_n R_{\text{Э}}}{1 + j\omega C_n R_{\text{Э}}},$$

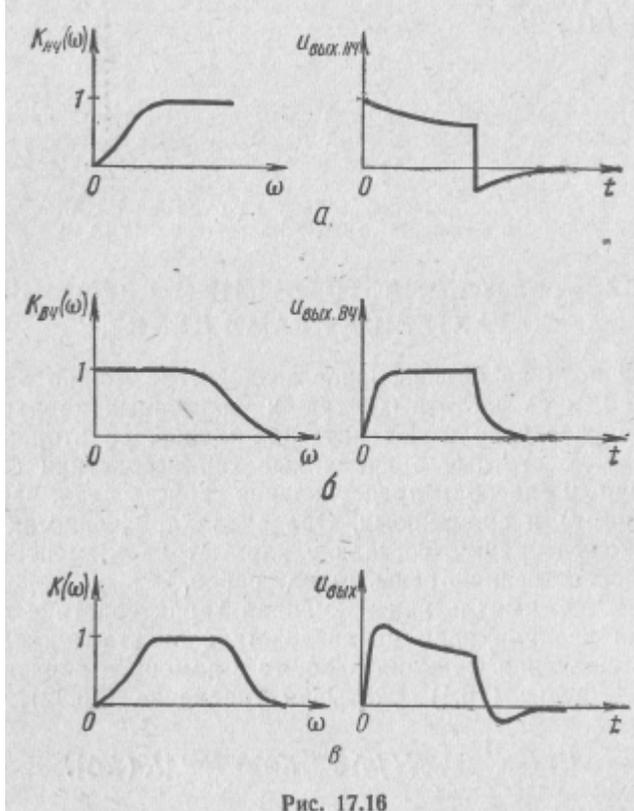


Рис. 17.16

где  $R_{\text{Э}1} = \frac{\mu r_a r_n}{R_l + r_a};$   
 $R_{\text{Э}2} = \frac{R_l r_a + R_l r_n + r_a r_n}{R_l + r_a};$   
 $k = \frac{\mu}{1 + \frac{R_l}{r_a} + \frac{R_l}{r_n}}.$

Анализ прохождения сигнала в такой схеме сводится к задаче, уже решенной в примере 17.4. Напряжение на ее выходе представляет прямоугольный видеоимпульс с пологой вершиной. Изменения вершины вызваны искажениями в области нижних частот (рис. 17.16,а) за счет влияния переходной емкости  $C_n$ .

3. Комплексный коэффициент передачи цепи на верхних частотах рассчитываем с помощью схемы замещения (рис. 17.15,б):

$$K_{\text{вч}}(j\omega) = \frac{\mu \dot{U}_{\text{вх}}}{R_l + \frac{1}{\frac{1}{R_l} + \frac{1}{r_n} + j\omega(C_1 + C_n)}} \frac{1}{\frac{1}{R_l} + \frac{1}{r_n} + j\omega(C_1 + C_n)} =$$

$$= k \frac{1}{1 + j\omega C_3 R_3},$$

где  $R_3 = \frac{R_l}{1 + \frac{R_l}{r_n} + \frac{R_l}{r_n}}$  ;  
 $C_3 = C_1 + C_n$ .

Анализ прохождения сигнала в этой схеме показывает, что напряжение на ее выходе представляет прямоугольный видеоимпульс с пологими фронтами. Изменения фронтов здесь обусловлены искажениями в области верхних частот (см. рис. 17.16, б) за счет влияния емкостей  $C_1$  и  $C_n$ .

4. Полное решение поставленной задачи находим наложением двух решений: в области нижних и в области верхних частот (рис. 17.16, в).

### 17.7. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЧАСТОТНЫМИ И ВРЕМЕННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ЦЕПИ

Реакцию цепи на произвольное воздействие можно рассчитать с помощью как ее частотных, так и временных характеристик. В первом случае используют интеграл Фурье, во втором — интеграл свертки. Частотные и временные характеристики соответствуют различным способам представления свойств цепи: частотному (спектральному) и временному. Оба вида характеристик зависят только от конфигурации, состава и параметров элементов цепи и имеют непосредственную связь между собой.

Как известно, импульсная временная характеристика  $a(t)$  численно равна реакции цепи на воздействие дельта-функции. Если  $K(j\omega)$  — комплексная функция цепи, то с помощью обратного преобразования Фурье (16.4), учитывая уравнение (16.32), находим

$$a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = F^{-1} [K(j\omega)]. \quad (17.40)$$

С другой стороны,

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} a(t) e^{-j\omega t} dt = F[a(t)]. \quad (17.41)$$

Таким образом, комплексная функция цепи равна спектральной плотности ее импульсной временной характеристики, в то время как импульсная характеристика является обратным преобразованием Фурье (оригиналом) ее комплексной функции. Интегрирование в выражении (17.41) осуществляется в пределах от 0 до  $+\infty$ , так как  $a(t)=0$  при  $t<0$ .

Представляя комплексную функцию цепи через ее вещественную  $R(\omega)$  и мнимую  $X(\omega)$  части и разлагая  $e^{j\omega t}$  по формуле Эйлера, из уравнения (17.40) получим

$$a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [R(\omega) + jX(\omega)] (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [R(\omega) \cos \omega t - X(\omega) \sin \omega t] d\omega, \quad (17.42)$$

так как в силу четности функции  $R(\omega)$  и нечетности  $X(\omega)$  произведения  $R(\omega) \sin \omega t$  и  $X(\omega) \cos \omega t$  являются нечетными функциями частоты и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(\omega) \sin \omega t d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cos \omega t d\omega = 0.$$

Выражение (17.42) справедливо для всех значений времени  $t$ . Заменяв в нем  $t$  на  $-t$  и учитывая, что  $a(t)=0$  при  $t<0$ , находим

$$0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [R(\omega) \cos \omega t + X(\omega) \sin \omega t] d\omega. \quad (17.43)$$

Складывая равенства (17.42) и (17.43), получаем

$$a(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (17.44)$$

Отсюда, учитывая связь между временными характеристиками цепи, находим переходную временную характеристику

$$h(t) = \int_0^t a(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) d\omega \int_0^t \cos \omega t dt = \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega. \quad (17.45)$$

Полученные соотношения (17.44) и (17.45) позволяют по вещественной частотной характеристике цепи однозначно определить ее временные характеристики.

Вещественную частотную характеристику цепи  $R(\omega)$  можно рассчитать или определить экспериментально, определяя порознь амплитудно-частотную  $K(\omega)$  и фазо-частотную  $\varphi(\omega)$  характеристики, так как  $R(\omega) = K(\omega) \cos \varphi(\omega)$ . Если  $R(\omega)$  задана графически, то временную характеристику цепи можно определить с помощью уравнения (17.45). Существует несколько методов определения временной характеристики цепи с помощью этого выражения, основанных на разных способах аппроксимации ее вещественной частотной характеристики. Наиболее известен метод трапецеидаль-

ных характеристик В. В. Солодовникова, в основе которого лежит замена кривой  $K(\omega)$  суммой трапецеидальных характеристик.

Частотные и временные характеристики цепи взаимосвязаны. Изменение частотных характеристик всегда влечет за собой изменение временных характеристик, и наоборот. В качестве примера рассмотрим пропорциональное сжатие частотных характеристик по частоте. Этому соответствует изменение масштаба частоты. Подставив в выражение (17.40)  $K(j\omega_a)$  вместо  $K(j\omega)$ , получим

$$a_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(ja\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Заменив в этом выражении  $\omega_a$  на  $\Omega$  и возвращаясь вновь к переменной  $\omega$ , найдем

$$a_1(t) = \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} K(j\Omega) e^{j\Omega \frac{t}{a}} d\Omega = \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} K(j\omega) e^{j\omega \frac{t}{a}} d\omega. \quad (17.46)$$

Сравнивая полученное выражение с (17.40), отмечаем, что

$$a_1(t) = \frac{1}{a} a\left(\frac{t}{a}\right), \quad (17.47)$$

т. е. сжатию частотных характеристик по оси частот соответствует растяжение во столько же раз временной характеристики вдоль оси времени, и наоборот. Это вполне согласуется с выводом о связи между реакцией цепи и шириной ее полосы пропускания: чем уже полоса пропускания, тем медленнее протекают процессы.

#### Пример 17.8.

Найти комплексный коэффициент передачи простой дифференцирующей  $rC$ -цепи, если известна ее

переходная характеристика  $h(t) = 1(t)e^{-\frac{t}{rC}}$ .

Решение. 1. Импульсная характеристика цепи:

$$a(t) = h(0)\delta(t) + h'(t) = \delta(t) - \frac{1}{rC} e^{-\frac{t}{rC}}.$$

2. Комплексный коэффициент передачи:

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} \left[ \delta(t) - \frac{1}{rC} e^{-\frac{t}{rC}} \right] e^{-j\omega t} dt = \\ &= 1 + \frac{1}{rC} \frac{1}{\frac{1}{rC} + j\omega} e^{-\left(\frac{1}{rC} + j\omega\right)t} \Big|_0^{-\infty} = \frac{j\omega rC}{1 + j\omega rC}. \end{aligned}$$

Полученный результат совпадает с приведенным ранее выражением (6.42).

## 18. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ

### 18.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Для решения линейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в теории электрических цепей нашел широкое применение так называемый операторный метод, основанный на преобразованиях Лапласа.

Сущность этого метода заключается в том, что функции вещественного переменного  $t$  преобразуются в функции комплексного переменного  $p = \sigma + j\omega$  таким образом, чтобы вместо интегро-дифференциальных уравнений получить алгебраические уравнения. После решения этих уравнений производят обратный переход к функции вещественного переменного  $t$ . Это значительно упрощает решение интегро-дифференциальных уравнений.

Переход от функции вещественного переменного  $t$  к функциям комплексного переменного  $p$  осуществляется с помощью прямого преобразования Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (18.1)$$

Обратный переход от функций комплексного переменного  $p$  к функциям вещественного переменного  $t$  осуществляют на основании обратного преобразования Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad (18.2)$$

Функцию  $f(t)$  называют оригиналом, а функцию  $F(p)$  — изображением оригинала по Лапласу или просто изображением.

Напомним, что для того, чтобы функция  $f(t)$  имела изображение (18.1), необходимо, чтобы она:

- а) удовлетворяла условиям Дирихле;
- б) была равна нулю для отрицательных значений  $t$ , т. е. при  $t < 0$   $f(t) = 0$ ;



5. **Теорема сдвига.** Если  $f(t) \hat{=} F(p)$ , то

$$F(p + \delta) \hat{=} e^{-\delta t} f(t), \quad (18.8)$$

т. е. замене в изображении оператора  $p$  на оператор  $p + \delta$  соответствует умножение оригинала на  $e^{-\delta t}$

6. **Умножение изображений (теорема свертывания).** Если

$$f_1(t) \hat{=} F_1(p) \text{ и } f_2(t) \hat{=} F_2(p), \text{ то}$$

$$F_1(p) F_2(p) \hat{=} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_2(\tau) f_1(t - \tau) d\tau, \quad (18.9)$$

т. е. умножений изображении соответствует «свертывание» оригиналов

Следствие: применяя правило дифференцирования оригинала к (18.9), получим

$$\begin{aligned} p F_1(p) F_2(p) &\hat{=} \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^t f_2(\tau) f_1(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (18.10)$$

Это две формы записи интеграла Дюамеля, из которых можно получить остальные формы этого интеграла, рассмотренные в разд. 14.

7. **Теорема разложения.** Если изображение имеет вид рациональной дроби

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}, \quad (18.11)$$

причем степень многочлена  $F_1(p)$  ниже степени многочлена  $F_2(p)$ , коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  — вещественные числа, а корни  $p_k$  уравнения  $F_2(p) = 0$  различны, то оригинал определяется выражением

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (18.12)$$

В случае если один из корней уравнения  $F_2(p) = Q$  равен нулю, т. е.  $F_2(p) = p F_3(p)$ , то оригинал находится по формуле

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (18.13)$$

В случае если уравнение  $F_2(p) = 0$  имеет кратные корни, то оригинал находится по формуле

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(m_k - 1)!} \left[ \frac{d^{m_k - 1}}{dp^{m_k - 1}} \cdot \frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p - p_k)^{m_k} e^{p t} \right]_{p=p_k}. \quad (18.14)$$

Теорема разложения в сочетании с другими свойствами преобразования Лапласа дает возможность составить таблицы изображений и оригиналов, облегчающие и ускоряющие нахождение оригиналов по изображениям [26]. Некоторые наиболее часто встречающиеся операторные соответствия приведены в табл. 18.1

Таблица 18.1

Изображение	Оригинал
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{p}$	1 (t)
$\frac{1}{p^2}$	t
$\frac{1}{p^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$ , n — целое положительное число
$\frac{1}{p + \alpha}$	$e^{-\alpha t}$
$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$	$t e^{-\alpha t}$
$\frac{1}{p(p + \alpha)}$	$\frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \sin \omega t$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
$\frac{1}{(p + \alpha)(p + \beta)}$	$\frac{1}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$
$\frac{p}{(p + \alpha)(p + \beta)}$	$\frac{1}{\beta - \alpha} (\beta e^{-\beta t} - \alpha e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$	$\frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t$

Следует отметить, что возможность интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью операторного метода впервые была показана русским математиком М. Е. Ващенко-Захарченко в 1862 г. В конце XIX в.

английский ученый О. Хевисайд применил этот метод к расчету электромагнитных переходных процессов. Большой вклад в развитие операционного исчисления и его применение к расчету электромагнитных процессов внесли советские ученые В. С. Игнатовский, А. М. Данилевский, А. М. Эфрос, К. А. Круг, М. И. Канторович и др.

## 18.2. ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРНОГО МЕТОДА К АНАЛИЗУ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ. ЗАКОНЫ ОМА И КИРХГОФА В ОПЕРАТОРНОЙ ФОРМЕ

Рассмотрим последовательный контур, содержащий элементы  $r$ ,  $L$  и  $C$ , на который воздействует э. д. с.  $e(t)$  при ненулевых начальных условиях (рис. 18.1).

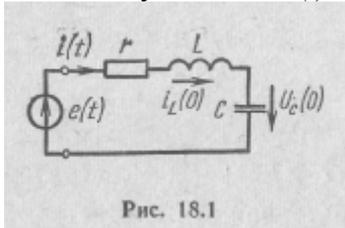


Рис. 18.1

На основании второго закона Кирхгофа для мгновенных значений для рассматриваемой цепи можно записать следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = e(t). \quad (18.15)$$

Нижний предел у интеграла, стоящего в левой части этого уравнения, равный  $-\infty$ , взят для того, чтобы учесть, что до момента подключения к цепи источника э.д.с.  $e(t)$  конденсатор был заряжен. Этот интеграл можно представить в виде

$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(t) dt + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = U_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt,$$

где  $U_C(0)$  — начальное напряжение на емкости.

С учетом этого уравнение для рассматриваемой цепи будет иметь вид

$$ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + U_C(0) = e(t). \quad (18.16)$$

Рассматривая заданную э. д. с.  $e(t)$  и искомый ток  $i(t)$  в качестве оригиналов, положим, что им соответствуют изображения  $E(p)$  и  $I(p)$ , т. е.

$$e(t) \hat{=} E(p) \text{ и } i(t) \hat{=} I(p).$$

Так как  $U_c(0)$  — величина постоянная, то

$$U_c(0) \hat{=} U_c(0) / p$$

На основании свойства линейности преобразования Лапласа и теорем дифференцирования и интегрирования уравнению (18.16) соответствует следующее операторное уравнение для изображений:

$$rI(p) + pLI(p) - Li(0) + \frac{1}{pC} I(p) + \frac{U_c(0)}{p} = E(p).$$

Это уравнение является выражением второго закона Кирхгофа в операторной форме для рассматриваемой цепи при ненулевых начальных условиях. Его можно представить в виде

$$\left(r + pL + \frac{1}{pC}\right) I(p) = E(p) + Li(0) - \frac{U_c(0)}{p} \quad (18.17)$$

или

$$Z(p) I(p) = \varepsilon(p), \quad (18.18)$$

где  $\varepsilon(p) = E(p) + Li(0) - \frac{U_c(0)}{p}$  — приведенная операторная э.д. с.;

$Z(p) = r + pL + \frac{1}{pC}$  — операторное сопротивление.

Приведенная операторная э.д.с.  $e(p)$  учитывает ненулевые начальные условия в цепи: токи в индуктивностях и напряжения на емкостях в момент коммутации. Направление дополнительного источника э.д.с.  $Li(0)$  совпадает с направлением начального тока  $i(0)$ , а направление источника э.д.с.  $U_c(0)/p$  определяется полярностью начального напряжения  $U_c(0)$  (от минуса к плюсу). Введение понятия приведенной операторной э.д. с. позволяет привести задачу с ненулевыми начальными условиями к задаче с нулевыми начальными условиями. При нулевых начальных условиях  $\varepsilon(p) = E(p)$ .

Операторное сопротивление  $Z(p)$  можно определить как отношение изображения напряжения к изображению тока при нулевых начальных условиях. Операторные сопротивления элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$  соответственно равны  $r$ ,  $pL$  и  $1/pC$ .

Величину  $Y(p)$ , обратную операторному сопротивлению  $Z(p)$ , называют операторной проводимостью:

$$Y(p) = 1/Z(p).$$

Операторное сопротивление  $Z(p)$  и операторная проводимость  $Y(p)$  формально отличаются от комплексного сопротивления  $Z(j\omega)$  и комплексной проводимости  $Y(j\omega)$  только тем, что в них место  $j\omega$  занимает оператор  $p$ , т. е.

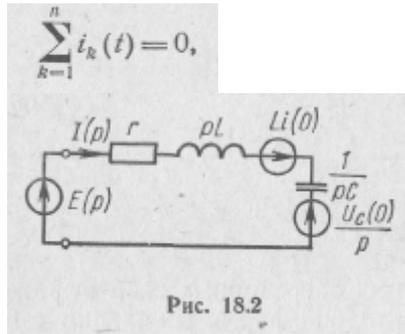
$$Y(p) = Y(j\omega) \Big|_{j\omega=p} \quad \text{и} \quad Y(p) = Y(j\omega) \Big|_{j\omega=p}.$$

Из уравнения (18.18) следует, что

$$I(p) = \varepsilon(p)/Z(p). \quad (18.19)$$

Это соотношение выражает закон Ома в операторной форме.

Применив преобразование Лапласа к выражению для первого закона Кирхгофа для мгновенных значений токов в любом узле электрической цепи:



получим выражение этого закона в операторной форме:

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0. \quad (18.20)$$

Аналогичным образом из выражения второго закона Кирхгофа для любого контура электрической цепи

$$\sum_{k=1}^n u_k(t) = \sum_{k=1}^n e_k(t),$$

получим выражение этого закона в операторной форме:

$$\sum_{k=1}^n U_k(p) = \sum_{k=1}^n E_k(p), \quad (18.21)$$

где  $U_k(p) = Z_k(p)I_k(p) - L_k i_k(0) + U_{ck}(0)/p$ .

Выражение (18.21) можно представить в виде

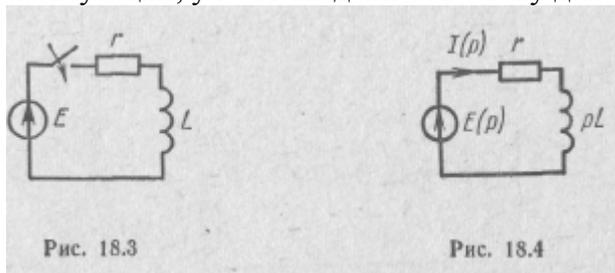
$$\sum_{k=1}^n Z_k(p) I_k(p) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k(p), \quad (18.22)$$

где  $\varepsilon_k(p) = E_k(p) + L_k i_k(0) - U_{ck}(0)/p$ .

Уравнению для изображений (18.17), полученному для схемы электрической цепи, приведенной на рис. 18.1, можно поставить в соответствие схему, приведенную на рис. 18.2.

Такую схему называют эквивалентной операторной схемой или схемой изображений. Она может быть получена из основной схемы, если индуктивности  $L$  и емкости  $C$  заменить операторными сопротивлениями  $pL$  и  $1/pC$ , токи  $i(t)$  и внешние э.д. с.  $e(t)$  заме-

Нить их изображениями, а ненулевые начальные условия, соответствующие моменту времени  $t = 0+$ , т. е. моменту времени, следующему непосредственно за моментом коммутации, учесть введением в схему дополнительных источников э.д. с.  $Li(0)$  и  $U_c(0)/p$ ,



Для эквивалентных операторных схем выражения законов Ома и Кирхгофа в операторной форме совпадают с выражениями этих законов в комплексной форме. Поэтому для отыскания изображений токов и напряжений в эквивалентных операторных схемах применимы все методы расчета цепей синусоидального тока в символической форме.

Переход от полученных изображений токов и напряжений к их оригиналам можно произвести как непосредственно по обратному преобразованию Лапласа (18.2), так и с помощью ряда методов, облегчающих решение этой задачи. Такими методами являются табличный метод, предполагающий использование таблиц операторных соответствий, методы, основанные на применении теорем операционного исчисления, и ряд других методов.

Порядок расчета электрических цепей операторным методом с помощью эквивалентных операторных схем рассмотрим на конкретных примерах.

### Пример 18.1.

Найти выражение для мгновенного значения тока в цепи  $rL$  (рис. 18.3) при подключении ее к источнику постоянного напряжения  $E$  при нулевых начальных условиях с помощью эквивалентной операторной схемы.

Решение.

Схеме, приведенной на рис. 18.3, соответствует эквивалентная операторная схема, приведенная на рис. 18.4, где  $E(p) = E/p$ .

Изображение тока в этой схеме найдем по закону Ома в операторной форме:

$$I(p) = \frac{E(p)}{Z(p)} = \frac{E/p}{r + pL}.$$

Для перехода к оригиналу, т. е. к мгновенному значению тока, воспользуемся таблицей операторных соответствий, из которой находим

$$\frac{A}{p(p + \alpha)} \triangleq \frac{A}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}).$$

Приведя изображение тока к табличному виду, получим

$$I(p) = \frac{E/L}{p(p + r/L)}.$$

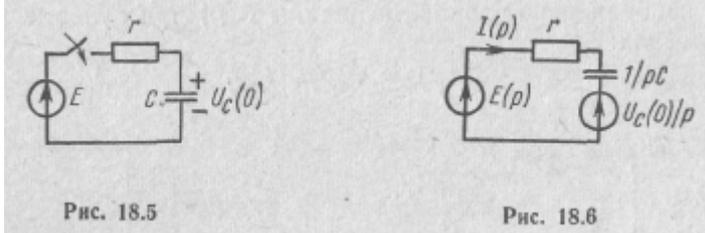
Следовательно, мгновенное значение тока в цепи будет иметь вид

$$i(t) = \frac{E/L}{r/L} \left( 1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right) = \frac{E}{r} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_n}} \right),$$

где  $\tau_n = 1/a = L/r$ .

**Пример 18.2.**

С помощью эквивалентной операторной схемы найти выражение для напряжения на емкости  $C$  (рис. 18.5) при подключении к цепи гС источника постоян-



ного напряжения  $E$  при условии, что в момент подключения цепи на емкости имелось напряжение  $U_C(0)$

Решение. Схеме, приведенной на рис. 18.5, соответствует эквивалентная операторная схема, приведенная на рис. 18.6. Из этой схемы найдем изображение напряжения на емкости

$$\begin{aligned} U_C(p) &= I(p) \frac{1}{pC} + \frac{U_C(0)}{p} = \frac{E/p - U_C(0)/p}{pC(r + 1/pC)} + \frac{U_C(0)}{p} = \\ &= \frac{E - U_C(0)}{p(1 + prC)} + \frac{U_C(0)}{p} = \\ &= \frac{[E - U_C(0)]/rC}{p(p + 1/rC)} + \frac{U_C(0)}{p}. \end{aligned}$$

Используя для перехода от изображения напряжения на емкости к оригиналу табличное операторное соответствие, приведенное в предыдущем примере, получим выражение для мгновенного значения напряжения на емкости

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{[E - U_C(0)]/rC}{1/rC} \left( 1 - e^{-\frac{1}{rC}t} \right) + U_C(0) = \\ &= [E - U_C(0)] \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_n}} \right) + U_C(0), \end{aligned}$$

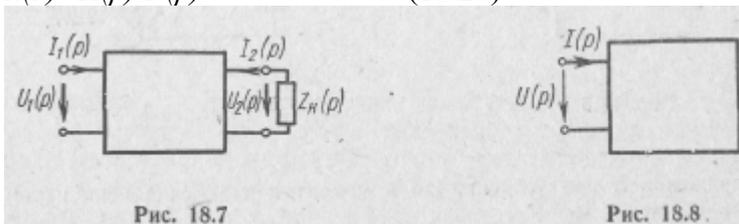
где  $\tau_n = rC$ .

Следует отметить, что переход к эквивалентной операторной схеме, особенно при нулевых начальных условиях, можно произвести мысленно, т. е. определять необходимые изображения токов или напряжений можно и по исходной схеме цепи, считая, что сопротивления элементов  $L$  и  $C$  равны  $pL$  и  $1/pC$ , включив при ненулевых начальных условиях последовательно с  $L$  и  $C$  дополнительные источники э.д. с.  $Li(0)$  и  $U_C(0)/p$ .

### 18.3. ОПЕРАТОРНЫЕ ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ И ИХ СВЯЗЬ С КОМПЛЕКСНЫМИ ПЕРЕДАТОЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ И ВРЕМЕННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Операторной передаточной функцией линейной электрической цепи  $K(p)$  называют отношение изображения выходной величины  $X(p)$  к изображению входной величины  $F(p)$  при нулевых начальных условиях:

$$K(p) = X(p)/F(p). \quad (18.23)$$



По аналогии с комплексными передаточными функциями операторными передаточными функциями цепи, рассматриваемой как четырехполюсник (рис. 18.7), являются: передаточная функция по напряжению  $K_U(p) = U_2(p)/U_1(p)$ , по току  $K_I(p) = I_2(p)/I_1(p)$ , операторное передаточное сопротивление  $Z_{21}(p) = U_2(p)/I_1(p)$  и операторная передаточная проводимость  $Y_{21}(p) = I_2(p)/U_1(p)$ .

Операторными передаточными функциями цепи, рассматриваемой как двухполюсник (рис. 18.8), являются операторное входное сопротивление  $Z(p) = U(p)/I(p)$  и операторная входная проводимость  $Y(p) = I(p)/U(p) = 1/Z(p)$ .

Операторные передаточные функции электрической цепи  $K(p)$ , так же как и ее комплексные передаточные функции  $K(j\omega)$  и временные характеристики  $h(t)$  и  $a(t)$ , не зависят от внешних воздействий на цепь. Они определяются только схемой цепи и параметрами входящих в нее элементов, т. е. характеризуют собственно цепь, и связаны между собой. Найдем эти связи.

Из сравнения выражений для прямых преобразований Лапласа (18.1) и Фурье (16.3) непосредственно следует, что

$$K(p) = K(j\omega) \Big|_{j\omega=p}, \quad (18.24)$$

т. е. операторная передаточная функция цепи  $K(p)$  получается из ее комплексной передаточной функции  $K(j\omega)$  путем замены у  $K(j\omega)$  переменной  $j\omega$  оператором  $p$ . Поэтому для расчета  $K(p)$  по известной схеме цепи можно применить все методы расчета  $K(j\omega)$ . Связь между операторной передаточной функцией  $K(p)$  и временными характеристиками цепи  $h(t)$  и  $a(t)$  можно установить

непосредственно из определения этих характеристик и из связи изображений выходной величины  $X(p)$  и входной величины  $F(p)$ , следующей из уравнения (18.23):

$$X(p) = F(p)K(p). \quad (18.25)$$

Если на вход линейной электрической цепи при нулевых начальных условиях подать воздействие в виде единичной функции включения  $1(t)$ , то реакция на выходе цепи будет ее переходной характеристикой  $h(t)$ , т. е. если  $f(t) = 1(t)$ , то  $x(t) = h(t)$ . Так как изображение единичной функции включения  $1(t) = \dot{I}/p$ , то, учитывая выражение (18.25), получим

$$h(t) \hat{=} K(p)/p, \quad (18.26)$$

т. е. изображение переходной характеристики цепи равно ее операторной передаточной функции, деленной на оператор  $p$ .

Если на вход линейной электрической цепи при нулевых начальных условиях подать воздействие в виде дельта-функции  $\delta(t)$ , то реакция на выходе цепи будет ее импульсной характеристикой  $a(t)$ , т. е. если  $f(t) = \delta(t)$ , то  $x(t) = a(t)$ . Так как изображение

дельта-функции  $\delta(t) \hat{=} 1$ , то, учитывая выражение (18.25), получим

$$a(t) \hat{=} K(p), \quad (18.27)$$

т. е. изображением импульсной характеристики цепи является ее операторная передаточная функция или оригиналом операторной передаточной функции цепи является ее импульсная характеристика.

Полученные соотношения позволяют найти переходную  $h(t)$  и импульсную  $a(t)$  характеристики цепи по ее операторной передаточной функции.

Пример 18.3.

Найти операторную передаточную функцию, переходную  $h(t)$  и импульсную  $a(t)$  характеристики цепи (рис. 18.9) по напряжению.

Решение.

Операторная передаточная функция по напряжению для рассматриваемой цепи

$$K(p) = U_2(p)/U_1(p) = 1/(1 + p\tau_u),$$

где  $\tau_u = rC$ .

Изображение переходной характеристики

$$h(t) \hat{=} K(p)/p = 1/p(1 + p\tau_u) = 1/\tau_u p(1 + 1/\tau_u).$$

Используя таблицу операторных соответствий, получим

$$h(t) = 1 - e^{-t/\tau_u}.$$

Изображение импульсной характеристики

$$a(t) \hat{=} K(p) = 1/(1 + p\tau_u) = 1/\tau_u (p + 1/\tau_u)$$

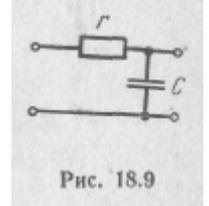


Рис. 18.9

Используя таблицу операторных соответствий, получим

$$a(t) = \frac{1}{\tau_{11}} e^{-t/\tau_{11}}.$$

Соотношения (18.26) и (18.27) позволяют также найти выражение для операторной передаточной функции цепи  $K(p)$  по ее заданным переходной  $h(t)$  или импульсной  $a(t)$  характеристикам, что используется при решении задач синтеза электрической цепи.

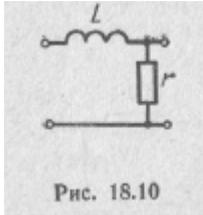


Рис. 18.10

Пример 18.4.

Найти операторную передаточную функцию, схему и параметры цепи, если ее переходная характеристика

$$h(t) = 1 - e^{-t/\tau_u} \text{ Решение.}$$

По таблице операторных соответствий находим изображение переходной характеристики цепи:

$$\hat{h}(t) = 1/p(1 + p\tau_u) = K(p)/p.$$

откуда  $K(p) = 1/(1 + p\tau_u)$ .

Такую операторную передаточную функцию имеет электрическая цепь, рассмотренная в примере 18.3. Однако такую же операторную передаточную функцию могут иметь и другие цепи, например цепь, приведенная на рис. 18.10, в которой  $\tau_u = L/r$ .

Из рассмотренного примера видно, что решение задачи синтеза электрической цепи является неоднозначным, так как одни и те же операторные передаточные функции могут иметь различные электрические цепи.

#### 18.4. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРНЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Для установления характера операторных передаточных функций линейных пассивных электрических цепей с сосредоточенными

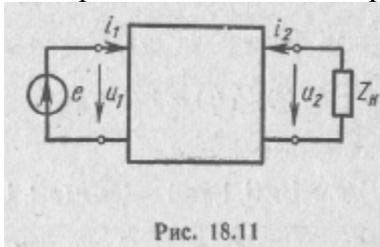


Рис. 18.11

параметрами рассмотрим схему электрической цепи, приведенную на рис. 18.11.

Выбрав независимые контуры таким образом, чтобы ветвь с источником э.д. с.  $e$  входила только в первый контур, а ветвь



При  $p = p\beta_k$  передаточная функция становится равной нулю, а при  $p = a_k$  она становится равной, бесконечности. Поэтому  $\beta_k$  называют нулями передаточной функции, а  $a_k$  — ее полюсами. Следует отметить, что если степень полинома числителя передаточной функции  $W(p)$  меньше степени полинома ее знаменателя  $V(p)$ , то нули передаточной функции  $K(p)$  будут и при  $p = \infty$ . Причем кратность этих нулей будет равна разности степеней полиномов знаменателя и числителя передаточной функции  $K(p)$ .

Нули и полюсы передаточной функции могут быть вещественными или попарно комплексно-сопряженными, поскольку их произведение должно дать вещественные коэффициенты  $b_k$  и  $a_k$  полиномов числителя и знаменателя  $K(p)$ . Из выражений (18.25) и (18.32) следует, что

$$\begin{aligned} (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) X(p) = \\ = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) F(p). \end{aligned} \quad (18.34)$$

На основании теоремы о дифференцировании оригинала при нулевых начальных условиях, при которых и определена  $K(p)$ , от уравнения для изображений (18.34) перейдем к дифференциальному уравнению для оригиналов

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = \\ = b_m \frac{d^m f}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{df}{dt} + b_0 f, \end{aligned} \quad (18.35)$$

где  $x = x(t)$  — выходная величина (реакция цепи);

$f = f(t)$  — входная величина (воздействие на входе цепи). Из приведенных выражений видно, что если приравнять нулю знаменатель  $V(p)$  передаточной функции, то получим характеристическое уравнение электрической цепи

$$V(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0. \quad (18.36)$$

Это обстоятельство налагает дополнительные ограничения на вид полинома знаменателя передаточной функции электрической цепи, т. е. на вид полинома  $V(p)$ , который обычно называют характеристическим полиномом электрической цепи.

Так как свободные колебания в пассивных электрических цепях носят затухающий характер, то нули характеристического полинома (полюсы передаточной функции) таких цепей должны иметь отрицательную вещественную часть, т. е. должны располагаться в левой полуплоскости (рис. 18.12). Такой полином называют полиномом Гурвица.

В идеализированных пассивных цепях, составленных лишь из элементов  $L$  и  $C$ , свободные колебания не убывают по амплитуде, поскольку здесь первоначально запасенная энергия не расходуется на тепловые потери. Поэтому в цепях без потерь корни их харак-

теристических уравнений (полюсы передаточных функций) представляют собой пары мнимых сопряженных чисел  $f\omega_k$  и  $-f\omega_k$ , которым соответствуют незатухающие гармонические колебания. Однако чисто мнимые корни  $f\omega_k$  и  $-f\omega_k$  должны быть простыми. Действительно, если бы такие корни имели каждый кратность  $m > 1$ , то соответствующее им решение имело бы вид [9]

$$x(t) = (A_0 + A_1 t + \dots + A_{m-1} t^{m-1}) \sin \omega_k t.$$

При  $m > 1$  колебания в цепи с течением времени возрастали бы по амплитуде, чего в пассивной цепи быть не может.

Пассивных электрических цепей, в которых свободные колебания не убывают по амплитуде, на практике также не существует.

Однако в электрических цепях с очень малыми потерями амплитуды свободных колебаний убывают весьма медленно и приведенная выше идеализация об отсутствии потерь в цепи является очень полезной при анализе электрических цепей и особенно при их синтезе.

Если известны нули и полюсы передаточной функции цепи, то можно, составив выражение вида (18.33), найти саму функцию, за исключением постоянного вещественного множителя  $b_m/a_n$ , т. е. нули и полюсы передаточной функции определяют эту функцию с точностью до постоянного вещественного множителя, играющего роль масштабного коэффициента.

По расположению нулей и полюсов передаточной функции можно судить о свойствах электрической цепи. Если все полюсы расположены только на отрицательной вещественной полуоси, то переходной процесс в цепи носит аperiodический характер. Если имеются сопряженные полюсы в левой полуплоскости, то переходный процесс носит характер затухающих колебаний. Причем чем ближе расположены полюсы к мнимой оси, тем медленнее затухают эти колебания, т. е. тем больше длительность переходного процесса.

По заданной передаточной функции можно создать цепь с заданными свойствами, т. е. произвести синтез электрической цепи. Вследствие того что одной и той же передаточной функции могут соответствовать несколько различных схем, задача синтеза носит неоднозначный характер.

Таким образом, операторные передаточные функции линейных пассивных электрических цепей с сосредоточенными параметрами обладают следующими свойствами:

1. Они являются рациональными функциями оператора  $p$  с вещественными коэффициентами (18.32).

2. Нули и полюсы этих функций могут быть вещественными или попарно комплексно-сопряженными,

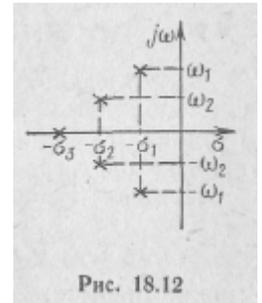


Рис. 18.12

3. Полюсы этих функций могут располагаться только в левой полуплоскости, т. е. полиномы знаменателей этих функций являются полиномами Гурвица. Полюсы передаточных функций цепей, состоящих из элементов L и C, располагаются на мнимой оси и являются простыми.

4. Нули этих функций могут располагаться как в левой, так и в правой полуплоскости. Дополнительные ограничения на расположение нулей и полюсов налагаются как видом схемы цепи, так и видом входящих в нее элементов.

### 18.5. СВОЙСТВА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

В предыдущем подразделе было показано, что характеристическим полиномом пассивной электрической цепи является полином Гурвица, т. е. полином с вещественными коэффициентами, все нули которого расположены в левой полуплоскости  $p$ .

Полином Гурвица степени  $n$

$$V(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 \quad (18.37)$$

можно представить в виде произведения:

$$V(p) = a_n (p - p_1) (p - p_2) \dots (p - p_n), \quad (18.38)$$

где  $p_k$  — нули полинома;

$a_n$  — вещественное положительное число.

Все нули полинома  $p_k$  являются либо вещественными отрицательными числами, либо попарно комплексно-сопряженными числами с отрицательной вещественной частью.

Вещественным отрицательным нулям  $p_k = -\alpha_k < 0$  в разложении (18.38) соответствуют линейные множители  $(p + \alpha_k)$  с вещественными положительными коэффициентами 1 и  $\alpha_k$ .

Паре комплексных сопряженных нулей  $-\delta_l \pm j\omega_l$  соответствует произведение двух линейных множителей:

$$\begin{aligned} [p - (-\delta_l + j\omega_l)] [p - (-\delta_l - j\omega_l)] &= (p + \delta_l)^2 + \omega_l^2 = \\ &= p^2 + 2\delta_l p + \delta_l^2 + \omega_l^2 = p^2 + \beta_l p + \gamma_l, \end{aligned}$$

которое представляет собой полином второй степени с вещественными положительными коэффициентами 1,  $\beta_l$  и  $\gamma_l$ .

Следовательно, полином Гурвица степени  $n$  может быть представлен в виде произведения полиномов первой и второй степени с вещественными положительными коэффициентами:

$$V(p) = a_n (p + \alpha_1) (p + \alpha_2) \dots (p^2 + \beta_1 p + \gamma_1) \times (p^2 + \beta_2 p + \gamma_2) \dots \quad (18.39)$$

Отсюда следует, что полином Гурвица содержит все степени переменной  $p$ , от нулевой до  $n$ -й, и все его коэффициенты положительны.

Поэтому, для того чтобы полином степени  $n$  был полиномом Гурвица, необходимо, чтобы полином содержал все степени переменной  $p$  от нулевой до  $n$ -й и чтобы все его коэффициенты были вещественными положительными числами. Это условие является необходимым. Однако для полиномов третьей и более высоких степеней оно не является достаточным.

Исследуем свойства полиномов Гурвица при  $p=j\omega$ , т. е. комплекса полинома Гурвица  $V(j\omega)$ . Подставив  $p=j\omega$  в формулу (18.39), получим

$$V(j\omega) = a_n (j\omega + \alpha_1) (j\omega + \alpha_2) \dots (-\omega^2 + j\omega\beta_1 + \gamma_1) \times \\ \times (-\omega^2 + j\omega\beta_2 + \gamma_2) \dots = |V(j\omega)| e^{j\varphi_r(\omega)} = \\ = |V(j\omega)| \cos \varphi_r(\omega) + j|V(j\omega)| \sin \varphi_r(\omega), \quad (18.40)$$

где  $|V(j\omega)|$  — модуль комплекса полинома Гурвица;

$\varphi_r(\omega)$  — его аргумент, равный сумме аргументов отдельных множителей. Аргумент линейного множителя  $(f\omega + a_k)$  равен

$$\varphi_k(\omega) = \arctg \frac{\omega}{a_k}, \quad (18.41)$$

а аргумент квадратичного множителя  $(-\omega^2 + j\omega\beta_l + \gamma_l)$  равен

$$\varphi_1(\omega) = \arctg \frac{\beta_l \omega}{\gamma_l - \omega^2}. \quad (18.42)$$

Из выражений (18.41) и (18.42) видно, что с изменением частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  аргумент каждого из линейных множителей (18.40), монотонно возрастая, получает приращение на угол  $\pi/2$ , а каждого из квадратичных множителей — на угол  $\pi$ . Поэтому с изменением частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  аргумент  $\varphi_r(\omega)$  комплекса полинома Гурвица степени  $n$ , монотонно возрастая, получает приращение на угол  $n\pi/2$ .

Для примера на рис. 18.13 приведен график аргумента комплекса полинома Гурвица седьмой степени.

Таким образом, для того чтобы полином степени  $n$  был полиномом Гурвица, необходимо, чтобы аргумент комплекса этого полинома при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  получал приращение на угол  $n\pi/2$ . Это условие является и достаточным.

Рассмотрим поведение вещественной и мнимой частей комплекса полинома Гурвица. Подставив  $p=j\omega$  в формулу (18.37), получим

$$V(j\omega) = a_0 + j\omega a_1 - \omega^2 a_2 - j\omega^3 a_3 + \omega^4 a_4 + \dots = \\ = A(\omega^2) + j\omega B(\omega^2), \quad (18.43)$$

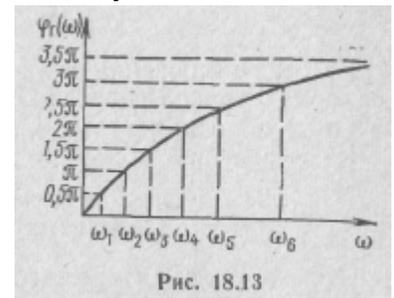


Рис. 18.13

где

$$A(\omega^2) = a_0 - a_1\omega^2 + a_2\omega^4 - \dots; \quad (18.44)$$

$$j\omega B(\omega^2) = a_1j\omega - a_2j\omega^3 + \dots; \quad (18.45)$$

$$B(\omega^2) = a_1 - a_2\omega^2 + \dots \quad (18.46)$$

Из этих выражений видно, что вещественная часть комплекса полинома Гурвица содержит лишь четные, а мнимая часть — лишь нечетные степени частоты  $\omega$ .

Из выражений (18.40) и (18.43) следует, что

$$A(\omega^2) = |V(j\omega)| \cos \varphi_r(\omega); \quad (18.47)$$

$$\omega B(\omega^2) = |V(j\omega)| \sin \varphi_r(\omega). \quad (18.48)$$

Отсюда видно, что вещественная часть комплекса полинома Гурвица обращается в нуль всякий раз, когда его аргумент равен нечетному числу  $\pi/2$ , т. е. когда  $\varphi_r(\omega) = \pm(2k+1)\pi/2$ , а мнимая часть — когда его аргумент равен целому числу  $\pi$ , т. е. когда  $\varphi_r(\omega) = \pm k\pi$ .

Так как аргумент комплекса  $\varphi_r(\omega)$  монотонно возрастает от нуля при  $\omega = 0$  до  $n\pi/2$  при  $\omega = \infty$ , то с ростом  $\omega$  от 0 до  $\infty$  он последовательно обращается в нуль то мнимая, то вещественная части полинома  $V(j\omega)$ .

Отсюда следует, что все нули вещественной и мнимой частей комплекса полинома Гурвица на оси  $j\omega$  являются простыми и чередуются между собой, т. е. между любыми двумя смежными нулями полинома  $A(\omega^2)$  расположен один нуль полинома  $\omega B(\omega^2)$ , и наоборот.

Поэтому степени полиномов  $A(\omega^2)$  и  $\omega B(\omega^2)$  всегда отличаются на единицу. Это же следует и из того, что ни один из коэффициентов полинома Гурвица не может быть равен нулю.

Из рассмотренного следует, что вещественную и мнимую части комплекса полинома Гурвица можно представить в виде произведений вещественных множителей:

$$A(\omega^2) = b(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)\dots; \quad (18.49)$$

$$j\omega B(\omega^2) = j\omega c(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_4^2 - \omega^2)\dots, \quad (18.50)$$

где  $0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \dots$ ;

$$c = \begin{cases} a_n & \text{при } n \text{ нечетном} \\ a_{n-1} & \text{при } n \text{ четном} \end{cases}$$

$$c = \begin{cases} a_n & \text{при } n \text{ нечетном} \\ a_{n-1} & \text{при } n \text{ четном} \end{cases}$$

Если в последних выражениях перейти от  $j\omega$  к оператору  $p$ , то для полинома Гурвица получим выражение

$$V(p) = b(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_3^2) + \dots + pc(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_4^2)\dots \quad (18.51)$$

Если четную или нечетную часть этого полинома умножить на положительную постранный величину, то новый полином будет

также полиномом Гурвица, так как чередуемость нулей вещественной и мнимой частей комплекса этого полинома в этом случае не нарушается.

Если же нечетную часть этого полинома умножить на  $-1$ , то новый полином  $V(-p)$  будет называться полиномом, сопряженным с полиномом Гурвица. Все его нули будут располагаться в правой полуплоскости  $p$ .

Рассмотренные свойства полиномов Гурвица могут быть использованы при обосновании некоторых критериев устойчивости и методов синтеза электрических цепей.

## 18.6. МИНИМАЛЬНО-ФАЗОВЫЕ И НЕМИНИМАЛЬНО-ФАЗОВЫЕ ЦЕПИ

При решении задачи синтеза электрической цепи по ее заданной амплитудно-частотной характеристике  $X(\omega)$  используют зависимость между этой характеристикой и операторной передаточной функцией цепи  $K(p)$ .

Для установления этой зависимости представим квадрат амплитудно-частотной характеристики  $K^2(\omega)$  в виде

$$K^2(\omega) = K(j\omega) \overset{*}{K}(j\omega) = K(j\omega) K(-j\omega) = F(\omega^2). \quad (18.52)$$

Для значений  $p$ , расположенных на оси  $j\omega$ , т. е. при  $j\omega = p$ , получим

$$F(-p^2) = K(p)K(-p). \quad (18.53)$$

Эта функция, так же как и квадрат амплитудно-частотной характеристики  $K^2(\omega)$ , является четной рациональной функцией. Полиномы ее числителя и знаменателя являются четными полиномами переменного  $p$  с вещественными коэффициентами. Так как нули четных полиномов располагаются симметрично относительно мнимой оси, а нули полиномов с вещественными коэффициентами — симметрично относительно вещественной оси, то нули и полюсы функции  $F(-p^2)$  располагаются на комплексной плоскости симметрично относительно ее координатных осей, т. е. находятся в квадрантной симметрии.

Это свойство нулей и полюса функции  $F(-p^2)$  позволяет найти выражение для операторной передаточной функции электрической цепи  $K(p)$  по ее заданной амплитудно-частотной характеристике. Для этого необходимо в выражении для  $K^2(\omega)$  заменить  $\omega^2$  на  $-p^2$ , найти нули и полюсы функции  $F(-p^2)$  и распределить их поровну между  $K(p)$  и  $K(-p)$ . При этом нули  $F(-p^2)$ , находящиеся в левой полуплоскости, для пассивной электрической цепи следует отнести к  $K(p)$ , а все полюсы, находящиеся в правой полуплоскости, — к  $K(-p)$ . Так как на расположение нулей передаточных функций пассивных электрических

цепей никаких ограничений не накладывалось, то нули  $F(-p^2)$  следует распределить поровну между  $K(p)$  и  $K(-p)$ .

**Пример 18.5.**

Найти выражение для передаточной функции электрической цепи, если квадрат ее амплитудно-частотной характеристики имеет вид

$$K^2(\omega) = (\omega^2 + 1)/(\omega^4 + 4).$$

Решение.

Произведя замену  $\omega = -p^2$ , из  $K^2(\omega)$  получим функцию

$$F(-p^2) = (-p^2 + 1)/(p^4 + 4).$$

Разложив числитель и знаменатель этой функции на простые множители, получим

$$F(-p^2) = (p+1)(p-1)/(p^2 + 2p + 2)(p^2 - 2p + 2).$$

Из этой функции находим

$$K(p) = (p+1)(p^2 + 2p + 2) \text{ и } K(-p) = (p-1)(p^2 - 2p + 2)$$

или

$$K(p) = (p-1)(p^2 + 2p + 2) \text{ и } K(-p) = (p+1)(p^2 - 2p + 2).$$

Из рассмотренного примера видно, что одну и ту же амплитудно-частотную характеристику могут иметь электрические цепи с разными передаточными функциями, что обусловлено произвольностью выбора нулей передаточной функции.

Если все нули передаточной функции электрической цепи расположены только в левой полуплоскости, то такую цепь называют минимально-фазовой цепью. Если все или часть нулей передаточной функции электрической цепи расположены в правой полуплоскости, то такую цепь называют неминимально-фазовой.

Примером неминимально-фазовой цепи является четырехполюсник с операторной передаточной функцией

$$K(p) = V(-p)/V(p), \tag{18.54}$$

где  $V(p)$  — полином Гурвица, все нули которого расположены в левой полуплоскости;

$V(-p)$  — сопряженный полином Гурвица, все нули которого имеют знаки, противоположные знакам нулей полинома Гурвица, т. е. расположены в правой полуплоскости, являясь зеркальным отображением нулей полинома Гурвица.

Четырехполюсник с передаточной функцией (18.54) обычно называют фазовым контуром.

Так как

$$V(-j\omega) = |V(j\omega)|e^{-j\varphi_\Gamma(\omega)} \text{ и } V(-j\omega) = |V(j\omega)|e^{-j\varphi_\Gamma(\omega)},$$

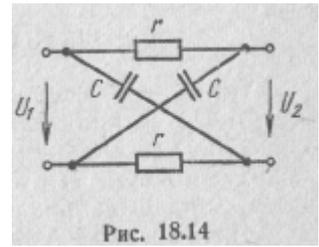
то комплексная передаточная функция фазового контура будет иметь вид

$$K(j\omega) = \frac{V(-j\omega)}{V(j\omega)} = e^{-2j\varphi_\Gamma(\omega)}, \tag{18.55}$$

где  $\varphi_\Gamma(\omega)$  — аргумент комплекса полинома Гурвица,

Из уравнения (18.55) видно, что амплитудно-частотная характеристика фазового контура не зависит от частоты и равна единице, а фазо-частотная характеристика, равная  $-2\varphi_r(\omega)$ , монотонно убывает с ростом частоты, так как аргумент комплекса юлинома Гурвица  $\varphi_r(\omega)$  монотонно возрастает с ростом  $\omega$ .

Примером фазового контура является электрическая цепь, схема которой приведена на рис. 18.14.



Передаточная функция этой цепи по напряжению имеет вид

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1 - prC}{1 + prC},$$

а амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики определяются выражениями:

$$K(\omega) = 1; \varphi(\omega) = -2 \operatorname{arctg} \omega r C.$$

Если нули передаточной функции находятся как в левой, так и в правой полуплоскостях, то передаточную функцию можно представить в виде

$$K_1(p) = \frac{\psi(-p) W_0(p)}{V(p)}, \quad (18.56)$$

где  $W_0(p)$  — полином, не имеющий нулей в правой полуплоскости;

$\psi(-p)$  — полином, сопряженный полиному Гурвица  $\psi(p)$ , имеющий все нули в правой полуплоскости.

Если в выражении (18.56)  $\psi(-p)$  заменить на  $\psi(p)$ , то получим передаточную функцию цепи минимально-фазового типа

$$K_2(p) = \frac{\psi(p) W_0(p)}{V(p)}. \quad (18.57)$$

При  $p=j\omega$  множители  $\psi(j\omega)$  и  $\psi(-j\omega)$  имеют равные модули, так как они образуют пару комплексно-сопряженных величин.

Поэтому

$$|K_1(j\omega)| = |K_2(j\omega)|.$$

Следовательно, любую неминимально-фазовую цепь всегда можно сопоставить с минимально-фазовой цепью с той же амплитудно-частотной характеристикой.

Передаточную функцию неминимально-фазовой цепи  $K_1(p)$  можно представить в виде

$$K(p) = \frac{\psi(-p) W_0(p)}{V(p)} = \frac{\psi(p) W_0(p)}{V(p)} \frac{\psi(-p)}{\psi(p)} = K_2(p) K_3(p), \quad (18.58)$$

где  $K_3(p) = \psi(-p)/\psi(p)$  — передаточная функция фазового контура;

$K_2(p)$  — передаточная функция минимально-фазовой цепи,

Следовательно, передаточную функцию неминимально-фазовой цепи можно рассматривать как произведение передаточной функции минимально-фазовой цепи с той же амплитудно-частотной характеристикой и передаточной функции фазового контура.

Из выражения (18.58) следует, что

$$\arg K_1(j\omega) = \arg K_2(j\omega) + \arg K_3(j\omega).$$

Так как фазо-частотная характеристика фазового контура  $\arg K_3(j\omega)$  отрицательна, то из этого выражения следует, что минимально-фазовая цепь из всех цепей, имеющих одинаковые амплитудно-частотные характеристики, имеет на любой частоте меньшее запаздывание по фазе, чем неминимально-фазовая цепь. С этим связано и название минимально-фазовых и неминимально-фазовых цепей.

Характерной особенностью минимально-фазовых электрических цепей является однозначная связь между их амплитудно-частотными и фазо-частотными характеристиками. Так, получив по амплитудно-частотной характеристике минимально-фазовой цепи ее передаточную функцию и определив ее аргумент, получим фазо-частотную характеристику рассматриваемой цепи, т. е. по амплитудно-частотной характеристике минимально-фазовой электрической цепи можно однозначно получить ее фазо-частотную характеристику. И наоборот, по фазо-частотной характеристике минимально-фазовой электрической цепи можно однозначно найти ее амплитудно-частотную характеристику.

Существуют соотношения, с помощью которых можно по одной из частотных характеристик минимально-фазовой цепи непосредственно найти вторую характеристику [47].

Наличие жесткой связи между амплитудно-частотными и фазо-частотными характеристиками минимально-фазовых электрических цепей следует учитывать в задачах синтеза электрических цепей, когда по условиям задачи предъявляются требования одновременно к обоим характеристикам.

### **18.7. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРНЫХ ВХОДНЫХ ФУНКЦИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

Операторными входными функциями электрической цепи, рассматриваемой как двухполюсник (см. рис. 18.8), являются операторное сопротивление  $Z(p) = U(p)/I(p)$  и операторная проводимость  $Y(p) = I(p)/U(p) = 1/Z(p)$ .

Эти функции можно рассматривать как передаточные функции цепи для случая, когда реакция цепи находится для той же пары зажимов, к которой подведено воздействие. Поэтому они, так же как и передаточные функции электрических цепей, являются рациональными функциями оператора  $p$  с вещественными коэффици-

циентами, т. е. представляют собой отношение двух полиномов, все коэффициенты которых вещественны (18.32):

$$Z(p) = \frac{W(p)}{V(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

При подстановке в это выражение вещественных значений  $p = \alpha$   $Z(p)$  будет вещественным.

Таким образом, первым свойством операторных входных функций  $Z(p)$  и  $Y(p)$  пассивных электрических цепей с сосредоточенными параметрами является то, что они являются вещественными функциями при вещественном значении  $p$ .

Вторым свойством  $Z(p)$  и  $Y(p)$  является то, что при  $p=j\omega$ , т. е. при изменении  $p$  вдоль мнимой оси, вещественная часть любой из этих функций не может принимать отрицательных значений. В противном случае средняя мощность

$$P = I^2 \operatorname{Re}\{Z(j\omega)\} = U^2 \operatorname{Re}\{Y(j\omega)\},$$

потребляемая двухполюсником в режиме гармонических колебаний была бы отрицательной, что противоречит условию пассивности двухполюсника. Следовательно,  $\operatorname{Re}\{Z(j\omega)\} \geq 0$  и  $\operatorname{Re}\{Y(j\omega)\} \geq 0$ .

В отличие от операторных передаточных функций, у которых характеристическими полиномами (полиномами Гурвица) являются только полиномы их знаменателей, у операторных входных функций линейных пассивных электрических цепей характеристическими полиномами являются как полиномы знаменателей, так и полиномы числителей. Это следует из того, что функции  $Z(p)$  и  $Y(p)$  связаны соотношением  $Z(p) = 1/Y(p)$ , т. е. являются взаимно обратными.

Поэтому третьим свойством операторных входных функций электрических цепей является то, что их полюсы и нули располагаются только в левой полуплоскости комплексного оператора  $p = \sigma + j\omega$  или на мнимой оси. Причем при  $\sigma=0$  все полюсы и нули простые. В частности, простыми будут полюсы и нули при  $p=0$  и  $p=\infty$ , в связи с чем степени полиномов числителя и знаменателя этих функций не могут отличаться больше чем на единицу.

Рациональные функции переменного  $p$ , обладающие вышеуказанными свойствами, называют положительными вещественными функциями.

Таким образом, необходимым условием, которому должны удовлетворять операторные входные функции  $Z(p)$  и  $Y(p)$  линейных пассивных электрических цепей с сосредоточенными параметрами, является то, чтобы эти функции были положительными вещественными функциями. Для определения принадлежности заданных функций к классу положительных вещественных функций разработаны специальные методы [47].

## 18.8. НОРМИРОВАНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ ФУНКЦИЙ. НОРМИРОВАНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЙ И ЧАСТОТЫ

Для удобства анализа и особенно синтеза электрических цепей производят нормирование сопротивлений и частоты.

Сущность нормирования сопротивлений состоит в том, что сопротивления всех элементов цепи делят на постоянную величину  $r_0$ , которая выбирается произвольно. Чаще всего эту величину выбирают равной величине одного из активных сопротивлений рассматриваемой цепи. При этом нормированные значения операторных сопротивлений элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$  оказываются равными;

$$\left. \begin{aligned} r_H &= r/r_0; \\ pL_H &= pL/r_0 \text{ или } L_H = L/r_0; \\ 1/pC_H &= 1/pCr_0 \text{ или } C_H = Cr_0. \end{aligned} \right\} \quad (18.59)$$

Операторные входные и передаточные функции электрической цепи, состоящей из нормированных операторных сопротивлений, оказываются также нормированными.

Если заданной является функция нормированных сопротивлений электрической цепи и по ней получены нормированные значения элементов цепи, то переход к истинным величинам элементов осуществляется по формулам;

$$r = r_H r_0; \quad L = L_H r_0; \quad C = C_H / r_0. \quad (18.60)$$

Сущность нормирования частоты заключается в том, что текущую частоту делят на постоянную частоту  $\omega_c$ , которую обычно выбирают равной частоте среза или граничной частоте полосы пропускания электрической цепи. При этом оператор  $p = \sigma \pm j\omega$  становится равным  $p_H = \sigma / \omega_c \pm j\omega / \omega_c$  или же, если  $\sigma = 0$ , то  $p_H = \pm j\omega / \omega_c$ . Если до нормирования частоты величины сопротивлений были равны  $r$ ,  $pL$  и  $1/pC$ , то для сохранения неизменными функций электрической цепи эти величины должны остаться такими же и после нормирования частоты. Для этого необходимо, чтобы

$$\left. \begin{aligned} r_H &= r; \\ p_H L_H &= pL = \frac{p}{\omega_c} L \omega_c \text{ или } L_H = L \omega_c; \\ \frac{1}{p_H C_H} &= \frac{1}{pC} = \frac{1}{\frac{p}{\omega_c} C \omega_c} \text{ или } C_H = C \omega_c. \end{aligned} \right\} \quad (18.61)$$

Если заданной является функция электрической цепи с нормированной частотой и по ней получены нормированные значения элементов цепи, то переход к истинным значениям элементов в этом случае осуществляется по формулам:

$$r = r_H; \quad L = L_H / \omega_c; \quad C = C_H / \omega_c. \quad (18.62)$$

Наиболее часто производят нормирование и сопротивлений, и частоты одновременно. При этом нормированные величины элементов оказываются равными:

$$r_n = r/r_0; L_n = L\omega_c/r_0; C_n = Cr_0\omega_c, \quad (18.63)$$

а обратный переход от полученных в результате синтеза нормированных значений элементов к их истинным значениям осуществляется по формулам:

$$r = r_n r_0; L = L_n r_0 / \omega_c; C = C_n / r_0 \omega_c. \quad (18.64)$$

#### Пример 18.6.

Найти выражение для нормированного сопротивления двухполюсника, состоящего из последовательно включенных элементов:  $r=10^2$  Ом;  $L=10^{-4}$  Г;  $C=10^{-8}$  Ф, если  $r_0=10^2$  Ом и  $\omega_c=10^6$  1/с.

Решение.

В соответствии с формулами (18.63) найдем нормированные значения элементов:

$$\begin{aligned} r_n &= r/r_0 = 10^2/10^2 = 1; \\ L_n &= L\omega_c/r_0 = 10^{-4} \cdot 10^6/10^2 = 1; \\ C_n &= Cr_0\omega_c = 10^{-8} \cdot 10^2 \cdot 10^6 = 1. \end{aligned}$$

При этом нормированное сопротивление двухполюсника

$$Z_H(p_H) = r_n + p_H L_n + 1/p_H C_n = 1 + p_H + 1/p_H.$$

Сравнение полученного в рассмотренном выше примере выражения для нормированного сопротивления двухполюсника с ненормированным, равным для рассматриваемого двухполюсника

$$Z(p) = r + pL + 1/pC = 10^2 + 10^{-4} p + 1/10^{-8} p.$$

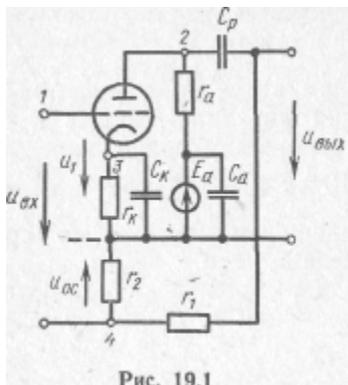
показывает, что нормирование сопротивлений и частоты может привести к упрощению функций электрической цепи.

Следует отметить, что одновременное нормирование сопротивлений и частоты приводит к тому, что элементы  $r$ ,  $L$  и  $C$  становятся безразмерными.

## 19. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

### 19.1. ПОНЯТИЕ ОБ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ И МЕТОДАХ АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Обратные связи очень широко распространены как в природе, так и в технике.



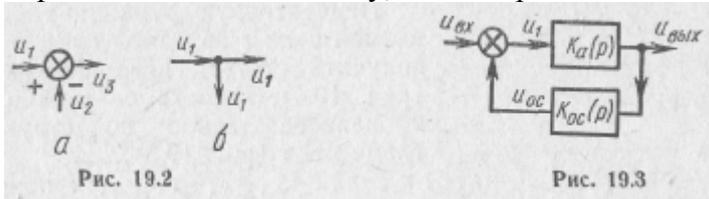
Применительно к электрическим цепям обратная связь проявляется, в воздействии выходной величины электрической цепи на ее вход, благодаря чему создается замкнутая цепь зависимостей между входными и выходными величинами электрической цепи.

В качестве примера электрической цепи с обратной связью на рис. 19.1 приведена схема однокаскадного электронного усилителя, в котором обратная связь осуществляется путем подачи части выходного напряжения с делителя, состоящего из сопротивлений  $r_1$  и  $r_2$ , на вход усилителя.

Элемент или группу элементов, посредством которых осуществляется обратная связь, называют цепью обратной связи. В приведенном на рис. 19.1 усилителе цепью обратной связи является делитель напряжения  $r_1$  и  $r_2$ .

Примененную в рассматриваемом усилителе обратную связь иногда называют внешней обратной связью. Такая обратная связь вводится в электрическую цепь специально в целях улучшения ее некоторых характеристик. Кроме специально вводимых, обратные связи в электрических цепях могут возникать самопроизвольно, например за счет междуэлектродных емкостей электронных приборов. Такие связи называют внутренними. Эти связи могут оказывать вредное влияние на электрические цепи, например могут приводить к самовозбуждению усилителей, в результате которого они перестают выполнять свои функции усиления подводимых к ним полезных сигналов. В этом случае принимают меры по устранению или уменьшению этих связей,

Если напряжение обратной связи пропорционально напряжению на выходе цепи, как, например, в приведенном на рис. 19.1 усилителе, то обратную связь называют обратной связью по напряжению. Если напряжение обратной связи пропорционально току на выходе цепи, то ее называют обратной связью по току. Может быть и комбинированная обратная связь — и по току, и по напряжению.



Анализ электрических цепей с обратной связью, содержащих электронные лампы и транзисторы, можно производить с помощью рассмотренных в разд. 12 общих методов анализа активных цепей. Однако для более четкого выяснения влияния обратной связи на свойства цепи более предпочтительным методом анализа цепей с обратными связями является метод сигнальных графов. С этой же целью для анализа цепей с обратными связями часто используют так называемый метод структурных схем, сущность которого состоит в том, что схему электрической цепи представляют в виде однонаправленных четырехполюсников, не нагружающих друг друга, т. е. таких четырехполюсников, передаточные функции которых не изменяются в зависимости от того, присоединен к их зажимам последующий четырехполюсник или нет. Эти четырехполюсники соединяются не двумя, а одной линией, на которой стрелкой указывают направление передачи сигнала. Внутри четырехполюсников обычно указывают их передаточные функции. Сложение или вычитание сигналов изображают сумматорами (рис. 19.2,а). Разветвление сигналов обозначают точкой, которую обычно называют узлом (рис. 19.2,б). Изображенную таким способом схему электрической цепи называют структурной схемой.

Структурная схема простейшей электрической цепи с обратной связью приведена на рис. 19.3, где  $K_a(p) = U_{\text{ВЫХ}}(p)/U_1(p)$  — передаточная функция активного четырехполюсника без обратной связи;  $K_{\text{ОБС}}(p) = U_{\text{ОБС}}(p)/U_{\text{ВЫХ}}(p)$  — передаточная функция цепи обратной связи.

От структурной схемы цепи можно перейти к ее сигнальному графу, и наоборот, так как они отличаются друг от друга только формально. Так, заменив в структурной схеме цепи однонаправленные четырехполюсники линиями с указанием их передаточных функций, получим сигнальный граф цепи. И наоборот, от сигнального графа цепи можно перейти к ее структурной схеме, изобразив его ветви однонаправленными четырехполюсниками.

В качестве примера на рис. 19.4 показан сигнальный граф цепи, структурная схема которой изображена на рис. 19.3.

При преобразовании структурных схем используют такие же правила, как и при преобразовании сигнальных графов, т. е. метод структурных схем и метод сигнальных графов являются разновидностями одного и того же метода.

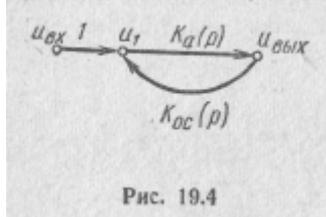


Рис. 19.4

Передаточную функцию рассматриваемой цепи с обратной связью можно получить по ее сигнальному графу (рис. 19.4). Однако ее можно найти и непосредственно по структурной схеме цепи (рис. 19.3). Учитывая, что  $u_1 = u_{ВХ} + u_{ос}$  или  $u_{ВХ} = u_1 - u_{ос}$ , для передаточной функции цепи с обратной связью получим

$$K(p) = \frac{U_{ВЫХ}(p)}{U_{ВХ}(p)} = \frac{U_{ВЫХ}(p)}{U_1(p) - U_{ос}(p)} = \frac{\frac{U_{ВЫХ}(p)}{U_1(p)}}{\frac{U_1(p)}{U_1(p)} - \frac{U_{ос}(p)}{U_{ВЫХ}(p)} \frac{U_{ВЫХ}(p)}{U_1(p)}} = \frac{K_a(p)}{1 - K_{ос}(p)K_a(p)}. \quad (19.1)$$

Произведение  $K_{ос}(p)K_a(p)$ , стоящее в знаменателе этого выражения, называют возвратным отношением. Оно представляет собой передаточную функцию разомкнутой петли обратной связи, равную отношению изображения выходной величины цепи обратной связи  $U_{ос}(p)$  к изображению входной величины независимого источника  $U_1(p)$ .

Знаменатель выражения (19.1)  $1 - K_{ос}(p)K_a(p)$  называют возвратной разностью. Эта разность характеризует влияние обратной связи на свойства цепи. Модуль этой разности называют глубиной обратной связи. Если  $|1 - K_{ос}(p)K_a(p)| \gg 1$ , то обратную связь называют глубокой. При этом выражение (19.1) можно записать в виде

$$K(p) \approx -\frac{1}{K_{ос}(p)}. \quad (19.2)$$

т. е. при глубокой обратной связи передаточная функция цепи определяется только параметрами цепи обратной связи.

Если сигнал на выходе цепи обратной связи  $u_{ос}$  совпадает по фазе с сигналом на входе цепи  $u_{вх}$ , то обратную связь считают положительной; если эти сигналы находятся в противофазе, — отрицательной. Если возвратное отношение  $K_{ос}(p)K_a(p)$  является функцией частоты, то сдвиг фаз между  $u_{ос}$  и  $u_{вх}$  может быть отличен от 0 и  $\pi$ . В этом случае обратную связь считают положительной, если модуль передаточной функции цепи с обратной связью  $|K(p)|$  будет больше модуля передаточной функции цепи без об-

ратной связи  $|K(p)|$ . Если же  $|K(p)| < |K_a(p)|$ , то обратную связь считают отрицательной. Структурная схема цепи с обратной связью для более общего случая показана на рис. 19.5. Здесь звено с передаточной функцией  $K_0(p) = U''_{ВЫХ}(p)/U_{ВХ}(p)$  учитывает прохождение сигнала

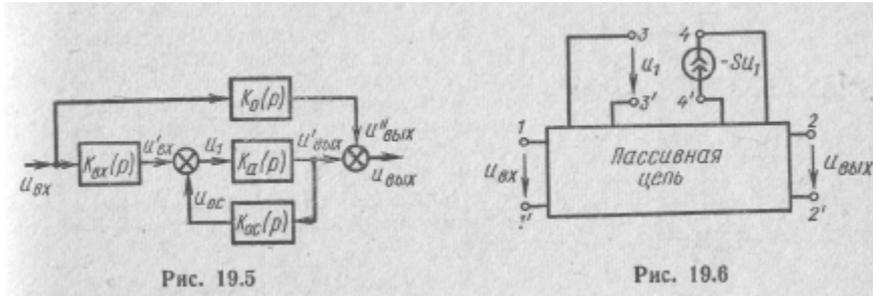


Рис. 19.5

Рис. 19.6

со входа цепи на ее выход через пассивную часть цепи. Звено с передаточной функцией  $K_{ВХ}(p) = U'_{ВХ}(p)/U_{ВХ}(p)$  учитывает прохождение сигнала от входа цепи ко входу зависимого источника.

Передаточная функция всей цепи с обратной связью в рассматриваемом случае определяется выражением

$$K(p) = \frac{U_{ВЫХ}(p)}{U_{ВХ}(p)} = \frac{K_{ВХ}(p) K_a(p)}{1 - K_a(p) K_{ос}(p)} + K_0(p). \quad (19.3)$$

Для удобства определения передаточных функций отдельных звеньев цепи с обратной связью целесообразно выделить из нее идеальный зависимый источник тока или э. д. с., а остальную часть цепи представить в виде пассивного восьмиполюсника, отнеся к нему пассивные элементы эквивалентной схемы зависимого источника. На рис. 19.6 приведена такая схема с зависимым источником тока.

Для определения передаточных функций  $K_{ВХ}(p)$  и  $K_0(p)$  ко входным зажимам цепи (рис. 19.6) необходимо подключить источник напряжения  $u_{ВХ}$ , принять  $S=0$  и найти  $U_1(p)$  и  $u_{ВЫХ}(p)$ . При этом получим  $K_{ВХ}(p) = U_1(p)/U_{ВХ}(p)$ ;  $K_0(p) = U_{ВЫХ}(p)/U_{ВХ}(p)$ .

Для определения передаточной функции цепи обратной связи  $K_{ос}(p)$  к выходным зажимам цепи необходимо подключить источник напряжения  $u_{ВЫХ}$ , принять  $S = 0$ , а ко входным зажимам цепи подключить внутреннее сопротивление источника входного сигнала. При этом  $u_1 = u_{ос}$  и  $K_{ос}(p) = U_1(p)/U_{ВЫХ}(p)$ .

Для определения передаточной функции  $K_a(p)$  необходимо разомкнуть цепь обратной связи левее зажимов 3—3', подключить к этим зажимам напряжение  $u_1$ , а ко входным зажимам цепи 1—1' подключить внутреннее сопротивление источника входного сигнала, тогда  $K_a(p) = U_{ВЫХ}(p)/U_1(p)$ .

Методику анализа электрических цепей с обратной связью с помощью структурных схем рассмотрим на конкретных примерах.

**Пример 19.1.**

Составить структурную схему усилителя, схема которого приведена на рис. 19.1, и найти его передаточную функцию по напряжению.

Решение.

Учитывая, что сопротивления емкостей  $C_k$ ,  $C_a$  и  $C_p$  для переменной составляющей входного сигнала малы, схему усилителя по переменной составляющей входного сигнала можно представить в виде, показанном на рис. 19.7. Эту схему представим в виде эквивалентной схемы, приведенной на рис. 19.8.

Подключив ко входным зажимам цепи источник напряжения  $u_{вх}$  и приняв  $S=0$ , получим

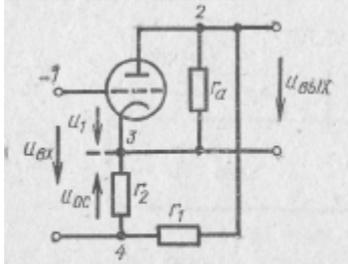


Рис. 19.7

$$K_{вх}(p) = U_1(p)/U_{вх}(p) = 1 \text{ и}$$

$$K_0(p) = U_{вых}(p)/U_{вх}(p) = 0.$$

Подключив к выходным зажимам цепи источник напряжения  $u_{вых}$ , приняв  $S=0$  и замкнув накоротко входные зажимы цепи, получим

$$K_{ос}(p) = U_1(p)/U_{вых}(p) = r_2/(r_1 + r_2).$$

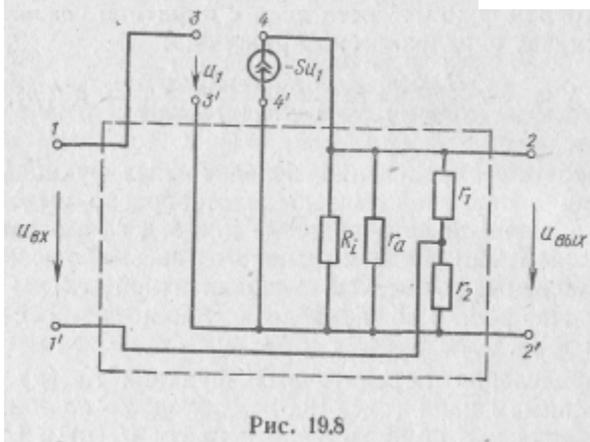


Рис. 19.8

Разомкнув цепь обратной связи левее зажимов 3—3', подключив к этим зажимам источник напряжения  $u_1$  и замкнув накоротко входные зажимы цепи, получим

$$K_a(p) = \frac{U_{вых}(p)}{U_1(p)} = - \frac{SR_1 r_a (r_1 + r_2)}{R_1 r_a + R_1 (r_1 + r_2) + r_a (r_1 + r_2)}.$$

При этом структурная схема усилителя будет иметь вид, показанный на рис. 19.3, а его передаточная функция будет определяться выражением

$$K(p) = - \frac{SR_1 r_a (r_1 + r_2)}{R_1 r_a + R_1 (r_1 + r_2) + r_a (r_1 + r_2)} / \left[ 1 + \frac{SR_1 r_a (r_1 + r_2)}{R_1 r_a + R_1 (r_1 + r_2) + r_a (r_1 + r_2)} \right].$$

В рассмотренном примере напряжение на выходе цепи обратной связи  $u_{oc}$  находится в противофазе с напряжением на входе усилителя  $u_{вх}$ , так как возвратное отношение  $K_{oc}(p)/K_a(p)$  является вещественным отрицательным. Поэтому обратная связь

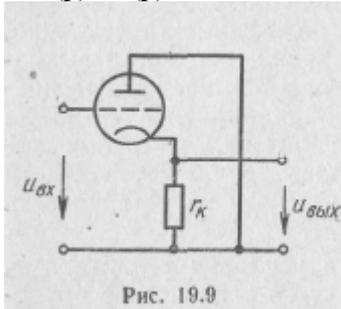


Рис. 19.9

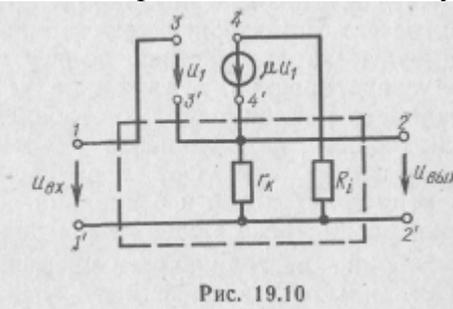


Рис. 19.10

в этом усилителе является отрицательной. Она уменьшает модуль передаточной функции усилителя, что видно из полученных выражений для  $K(p)$  и  $K_a(p)$ .

### Пример 19.2.

Найти передаточную функцию катодного повторителя, схема которого по переменной составляющей входного сигнала показана на рис. 19.9.

Решение.

Представив триод эквивалентной схемой с зависимым источником э. д. с., получим схему катодного повторителя, приведенную на рис. 19.10.

Подключив ко входным зажимам цепи источник напряжения  $u_{вх}$  и приняв  $\mu=0$ , получим

$$K_{вх}(p) = U_1(p)/U_{вх}(p) = 1 \text{ и } K_0(p) = U_{вых}(p)/U_{вх}(p) = 0.$$

Подключив к выходным зажимам цепи источник напряжения  $u_{вых}$ , приняв  $\mu=0$  и замкнув накоротко входные зажимы цепи, получим

$$K_{oc}(p) = U_1(p)/U_{вых}(p) = -1.$$

Разомкнув цепь обратной связи перед зажимами 3—3', подключив к этим зажимам источник напряжения  $u_1$  и замкнув накоротко входные зажимы цепи, получим

$$K_a(p) = \frac{\mu r_k}{r_k + R_l}.$$

Подставив найденные значения передаточных функций в формулу (19.3), получим передаточную функцию катодного повторителя

$$K(p) = \frac{\mu r_k / (r_k + R_l)}{1 + \mu r_k / (r_k + R_l)} = \frac{\mu r_k}{R_l + r_k (1 + \mu)}.$$

Из рассмотренного примера видно, что катодный повторитель представляет собой усилитель напряжения с отрицательной обратной связью, коэффициент усиления которого меньше единицы.

## 19.2. ВЛИЯНИЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПИ

Обратная связь влияет не только на коэффициент усиления усилителя, что было показано в предыдущем подразделе, но и на другие его характеристики: стабильность коэффициента усиления, частотные характеристики, полосу пропускания, входное и выходное сопротивление, а также на устойчивость. В настоящем подразделе ограничимся рассмотрением влияния обратной связи на стабильность коэффициента усиления усилителя, частотные характеристики и полосу пропускания. Понятие об устойчивости электрических цепей и о влиянии обратной связи на устойчивость будет рассмотрено в следующем подразделе.

Влияние неустойчивости коэффициента усиления усилителя  $k_a$  на стабильность коэффициента усиления этого усилителя с обратной связью  $k$  характеризуют так называемой чувствительностью  $S_{k_a}^k$ , под которой понимают отношение относительного изменения величины  $k$  к относительному изменению величины  $k_a$ :

$$S_{k_a}^k = \frac{dk/k}{dk_a/k_a} = \frac{k_a}{k} \frac{dk}{dk_a}. \quad (19.4)$$

Считая, что структурная схема усилителя с обратной связью имеет вид, показанный на рис. 19.3, и что  $K_a(p) = k_a$ , а  $K_{OC}(p) = -k_{oc}$ , в соответствии с формулой (19.1) получим

$$k = \frac{k_a}{1 - k_{oc}k_a}. \quad (19.5)$$

Подставив это в выражение (19.4), будем иметь

$$S_{k_a}^k = \frac{k_a}{k} \frac{1}{(1 - k_{oc}k_a)^2} = \frac{1}{1 - k_{oc}k_a}. \quad (19.6)$$

Из этого выражения видно, что отрицательная обратная связь ( $|1 - k_a k_{oc}| > 1$ ) улучшает стабильность коэффициента усиления, а положительная обратная связь ( $|1 - k_a k_{oc}| < 1$ ), наоборот, ухудшает стабильность этого коэффициента. Поэтому отрицательная обратная связь находит широкое применение в целях улучшения стабильности коэффициента усиления, хотя при этом величина коэффициента усиления и уменьшается.

Для улучшения стабильности коэффициента усиления иногда применяют глубокую отрицательную обратную связь ( $|k_a k_{oc}| \gg 1$ ). При этом, как следует из формулы (19.2), стабильность коэффициента усиления усилителя с обратной связью зависит только от стабильности цепи обратной связи. Стабильность этой цепи обычно выше стабильности коэффициента усиления усилителя, так как цепь обратной связи, как правило, выполняется из пассивных элементов, параметры которых более стабильны, чем параметры ламп и транзисторов,

При оценке влияния обратной связи на частотные характеристики и полосу пропускания цепи будем считать, что комплексные передаточные функции прямой цепи и цепи обратной связи (см. рис. 19.3) имеют вид:

$$K_a(j\omega) = \frac{k_a}{1 + j\omega\tau_u}; \quad (19.7)$$

$$K_{oc}(j\omega) = k_{oc}, \quad (19.8)$$

т. е. прямая цепь является апериодическим звеном, а передаточная функция цепи обратной связи равна постоянной величине, не зависящей от частоты. Такую обратную связь иногда называют жесткой обратной связью.

Подставив выражения (19.7) и (19.8) в уравнение (19.1), получим выражение для передаточной функции цепи с обратной связью:

$$K(j\omega) = \frac{\frac{k_a}{1 + j\omega\tau_u}}{1 - \frac{k_a k_{oc}}{1 + j\omega\tau_u}} = \frac{k_a}{1 - k_a k_{oc} + j\omega\tau_u} =$$

$$= \frac{k_a}{1 - k_a k_{oc}} \cdot \frac{1}{1 + j\omega \frac{\tau_u}{1 - k_a k_{oc}}} = \frac{k'_a}{1 + j\omega\tau'_u}, \quad (19.9)$$

где

$$k'_a = \frac{k_a}{1 - k_a k_{oc}}; \quad (19.10)$$

$$\tau'_u = \frac{\tau_u}{1 - k_a k_{oc}}. \quad (19.11)$$

Из этих выражений видно, что при охвате апериодического звена жесткой обратной связью его структура сохраняется, т. е. оно остается апериодическим звеном. Однако его параметры — коэффициент усиления  $k_a$  и постоянная времени  $\tau_u$  — изменяются. При отрицательной обратной связи они уменьшаются, а при положительной — увеличиваются. Рассмотрим, как это влияет на амплитудно-частотную характеристику и полосу пропускания цепи.

В соответствии с формулой (19.7) выражение для амплитудно-частотной характеристики цепи с обратной связью имеет вид

$$K(\omega) = \frac{k'_a}{\sqrt{1 + \omega^2 (\tau'_u)^2}}. \quad (19.12)$$

Полосу пропускания цепи найдем из соотношения

$$\frac{k'_a}{\sqrt{2}} = \frac{k'_a}{\sqrt{1 + \omega_{rp}^2 (\tau'_u)^2}}$$

откуда

$$\omega_{гр} = 1 / \sqrt{1 - k_a k_{ос}}$$

График нормированной амплитудно-частотной характеристики цепи приведен на рис.

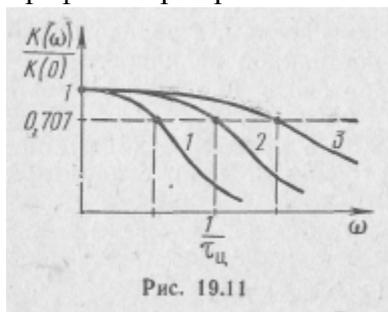


Рис. 19.11

19.11 (1—для цепи с положительной обратной связью; 2 — для цепи без обратной связи; 3 — для цепи с отрицательной обратной связью). Из этого рисунка видно, что положительная обратная связь уменьшает, а отрицательная — увеличивает полосу пропускания рассматриваемой электрической цепи. Поэтому для увеличения полосы пропускания цепи и для улучшения равномерности ее амплитудно-частотной характеристики часто используют отрицательную обратную связь.

### 19.3. ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ И О КРИТЕРИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ

Под устойчивостью электрической цепи понимают свойство цепи возвращаться к установившемуся состоянию после прекращения действия внешнего возмущения. Если цепь обладает таким свойством, то она устойчива, если не обладает, то неустойчива.

Неустойчивость электрической цепи проявляется в том, что ее выходная величина (напряжение или ток) монотонно возрастает с течением времени либо в цепи возникает колебание токов и напряжений с непрерывно возрастающей амплитудой. В реальных электрических цепях за счет нелинейностей и ограниченности величин источников питания в первом случае выходная величина будет ограничена на некотором конечном уровне, а во втором случае будет конечной и постоянной амплитуда колебаний.

Как в первом, так и во втором случае электрическую цепь нельзя использовать для передачи или усиления сигналов, так как в неустойчивой цепи выходная величина перестает зависеть от входной величины. Однако во втором случае электрическая цепь может быть использована для создания синусоидальных колебаний (автогенераторы) или периодических несинусоидальных колебаний (мультивибраторы, блокинг-генераторы и ряд других устройств).

Основы современных методов исследования устойчивости как электрических цепей, так и других систем были разработаны выдающимся русским математиком академиком А. М. Ляпуновым (1857—1918). Более подробно эти методы рассматриваются в дис-

циплине «Системы автоматического управления». Здесь же ограничимся рассмотрением оценки устойчивости линейной электрической цепи по виду корней ее характеристического уравнения и понятия о критериях устойчивости.

Как показано в разд. 13, физические процессы в линейной электрической цепи с сосредоточенными параметрами после прекращения действия на нее внешних возмущений описываются линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = 0, \quad (19.13)$$

где  $x(t)$ —выходная величина электрической цепи (ток или напряжение). Решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}, \quad (19.14)$$

где  $A_k$ — постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями;

$p_k$  — корни характеристического уравнения цепи

$$V(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0. \quad (19.15)$$

Так как коэффициенты этого уравнения  $a_k$  вещественны, то его корни  $p_k$  могут быть вещественными либо попарно комплексно-сопряженными.

Вещественному корню  $p_k = a_k$  соответствует составляющая

$$x_k(t) = A_k e^{a_k t}, \quad (19.16)$$

Вид этой составляющей в зависимости от знака  $a_k$  показан на рис. 19.12.

Паре комплексно-сопряженных корней  $p_k = a_k + j\omega_k$  и  $p_{k+1} = a_k - j\omega_k$  соответствует составляющая

$$x_k(t) = A_k e^{(a_k + j\omega_k)t} + A_k e^{(a_k - j\omega_k)t} = C_k e^{a_k t} \cos \omega_k t, \quad (19.17)$$

где  $C_k = 2A_k$ .

Вид этой составляющей в зависимости от знака  $a_k$  изображен на рис. 19.13.

Из рис. 19.12 и 19.13 видно, что для того, чтобы линейная электрическая цепь была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все корни  $p_k$  ее характеристического уравнения имели отрицательную вещественную часть. Для этого, как показано в предыдущем разделе, необходимо, чтобы характеристический полином цепи был полиномом Гурвица.

В активных цепях с обратной связью в отличие от пассивных цепей характеристический полином может иметь нули и в правой полуплоскости, т.е. не быть полиномом Гурвица. Это видно из вы-

ражения для передаточной функции цепи с обратной связью (19.1), полином знаменателя которой равен разности полиномов знаменателя и числителя возвратного отношения. Поэтому активная цепь с обратной связью может быть неустойчивой.

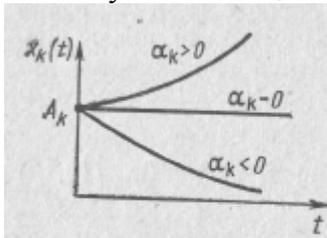


Рис. 19.12

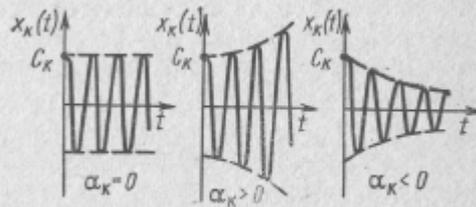


Рис. 19.13

Производить оценку устойчивости электрической цепи по виду корней ее характеристического уравнения в случае, если это уравнение имеет степень выше второй, затруднительно из-за сложности вычисления корней. Кроме того, иногда возникает задача анализа устойчивости электрической цепи по виду ее экспериментально снятых частотных характеристик, заданных в виде графиков или таблиц. Характеристическое уравнение цепи в этом случае неизвестно.

Поэтому применяются косвенные методы суждения об устойчивости электрических цепей, не требующие вычисления корней характеристического уравнения или даже определения вида этого уравнения. Эти методы получили название критериев устойчивости, которые разделяют на алгебраические и частотные.

Алгебраические критерии устойчивости позволяют судить об отсутствии корней характеристического уравнения в правой полуплоскости по виду его коэффициентов. Из алгебраических критериев устойчивости наибольшее применение на практике находит критерий Гурвица, предложенный швейцарским математиком А. Гурвицем в 1895 г. Этот критерий формулируется следующим образом.

Для того чтобы все корни алгебраического уравнения с вещественными коэффициентами

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0 \quad (19.18)$$

лежали в левой полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы при  $a_n > 0$  составленный из коэффициентов уравнения определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & \dots \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \dots \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & \dots \end{vmatrix} \quad (19.19)$$

и все его главные миноры

$$\Delta_1 = a_{n-1}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{vmatrix}; \dots$$

были положительны.

Определитель (19.19) обычно называют определителем Гурвица. Он составляется по следующему правилу. На главной его диагонали выписываются коэффициенты уравнения, начиная с  $a_{n-1}$ . Справа от этих коэффициентов записывают коэффициенты при старших степенях, а слева — коэффициенты при младших степенях. Все коэффициенты, индексы которых превышают  $n$  или отрицательны, заменяют нулями.

### Пример 19.3.

Произвести оценку устойчивости электрической цепи, если ее характеристическое уравнение имеет вид

$$p^4 + 7p^3 + 18p^2 + 22p + 12 = 0.$$

Решение.

Определитель Гурвица для данного уравнения имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 22 & 18 & 7 & 1 \\ 0 & 12 & 22 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}.$$

откуда

$$\Delta_1 = 7; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 22 & 18 \end{vmatrix} = 104;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 22 & 18 & 7 \\ 0 & 12 & 22 \end{vmatrix} = 1700; \Delta_4 = \Delta = 12\Delta_3.$$

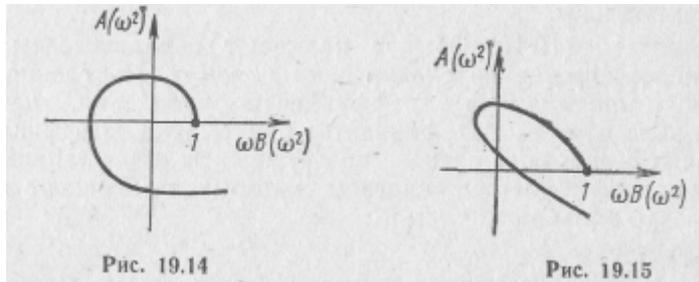
Так как определитель Гурвица и все его главные миноры положительны, то все корни характеристического уравнения цепи лежат в левой полуплоскости. Следовательно, электрическая Цепь является устойчивой.

Частотные критерии позволяют судить об устойчивости цепи по виду ее частотных характеристик с замкнутой петлей обратной связи (критерий Михайлова, предложенный советским ученым А. В. Михайловым в 1938 г.) или по виду ее частотных характеристик с разомкнутой петлей обратной связи (критерий Найквиста — Михайлова).

В основе критерия Михайлова лежит рассмотренное в под-разд. 18.5 свойство аргумента комплекса характеристического полинома. Применительно к электрическим цепям этот критерий можно сформулировать следующим образом: для устойчивости электрической цепи необходимо и достаточно, чтобы вектор комплекса характеристического полинома при изменении частоты от

нуля до бесконечности повернулся в положительном направлении, начиная с положительной вещественной оси, на число квадрантов, равное порядку, характеристического уравнения цепи.

В качестве примера на рис. 19.14 и 19.15 приведены годографы векторов комплексных характеристических полиномов устойчивой и неустойчивой электрических цепей при  $n=4$ .



Для суждения об устойчивости цепи не обязательно вычисление всего годографа вектора комплексного характеристического полинома, а достаточно, как показано в подразд. 18.5, установить факт чередования нулей его вещественной и мнимой частей.

Критерий Найквиста — Михайлова рассмотрен, например, в [9]. Там же более подробно рассмотрены и другие критерии устойчивости.

## 20. ОСНОВЫ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

### 20.1. ЗАДАЧА СИНТЕЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Задачей синтеза электрических цепей является нахождение схемы электрической цепи и параметров входящих в нее элементов по заданным характеристикам цепи. Заданными характеристиками могут быть: операторные входные или передаточные функции; амплитудно-частотная или фазо-частотная характеристика либо обе эти характеристики одновременно; переходная или импульсная характеристика.

Операторные входные и передаточные функции, как правило, задаются их аналитическими выражениями, а остальные характеристики могут быть заданы как аналитически, так и в виде графиков.

Процесс решения задачи синтеза можно разделить на два этапа: этап аппроксимации заданных характеристик с помощью функций, удовлетворяющих соответствующим условиям физической реализуемости, и этап реализации этих функций с помощью электрической цепи, состоящей только из пассивных элементов (резисторов, индуктивных катушек, конденсаторов и трансформаторов), или цепи, имеющей как пассивные, так и активные элементы (радиолампы, транзисторы).

Под условиями физической реализуемости функций электрических цепей понимают необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять функции, выражающие характеристики электрических цепей. При этом под достаточностью условий понимается возможность построения хотя бы одной физически осуществимой цепи с характеристиками в виде заданной функции. Эти условия налагают ограничения на вид функций, которые можно реализовать с помощью электрических цепей с сосредоточенными параметрами.

Следует отметить, что научно обоснованное проектирование электрических цепей возможно только на основе методов их синтеза. Материал, относящийся к современному синтезу цепей, весьма обширен. Поэтому ограничимся рассмотрением только основных положений метода синтеза линейных электрических це-

пей с сосредоточенными параметрами в частотной области, получившего название частотного метода синтеза цепей.

Этап аппроксимации, заданных характеристик в этом методе синтеза осуществляется таким образом, чтобы по заданным характеристикам электрической цепи получить выражение ее операторной входной или передаточной функции, удовлетворяющей условиям физической реализуемости.

Хотя решение конкретной задачи синтеза начинается с этапа аппроксимации, знакомство с основами синтеза удобнее начать с рассмотрения методов реализации, так как они служат базой для решения любой задачи синтеза цепей. Вначале рассмотрим методы реализации реактивных двухполюсников, предварительно установив свойства их операторных входных функций.

## 20.2. ВХОДНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ ФУНКЦИИ РЕАКТИВНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

Реактивными двухполюсниками называют двухполюсники, составленные лишь из элементов  $L$  и  $C$ . Так как первоначально запасенная энергия в таких двухполюсниках не расходуется на тепловые потери, то процесс свободных колебаний в таких цепях носит незатухающий характер. Следовательно, все нули полиномов знаменателей  $Z(p)$  и  $Y(p)$ , а так как  $Z(p) = 1/Y(p)$ , то и все нули полиномов числителей  $Z(p)$  и  $Y(p)$ , как показано в подразд. 18.4, должны располагаться на мнимой оси, быть простыми и сопряженными, за исключением нуля при  $j\omega=0$ .

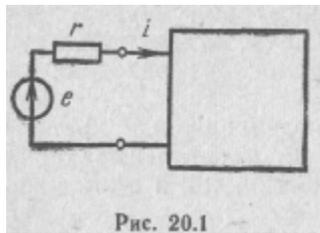


Рис. 20.1

При изменении  $p$  вдоль мнимой оси, т. е. при  $p=j\omega$ , вещественная часть функций  $Z(p)$  и  $Y(p)$  равна нулю, так как реактивный двухполюсник не потребляет активной мощности. Мнимая часть этих функций, т. е. мнимая частотная характеристика, является нечетной функцией частоты  $\omega$ . Поэтому каждую из этих функций можно представить как отношение четной функции  $A(p^2)$  к нечетной  $pB(p^2)$  или, наоборот, как отношение нечетной функции к четной.

Для выяснения характера функций  $A(p^2)$  и  $pB(p^2)$  подключим ко входным зажимам реактивного двухполюсника последовательно соединенные источник э. д. с.  $e$  и активное сопротивление  $r$  (рис. 20.1).

Входная операторная проводимость полученной цепи по отношению к зажимам источника э. д. с.  $e$

$$Y'(p) = I(p) / E(p) = 1 / [r + Z(p)]. \quad (20.1)$$

Входное операторное сопротивление  $Z(p)$ , как было показано выше, можно представить в виде

$$Z(p) = A(p^2) / pB(p^2) \quad (/:-\bullet) \quad \text{или} \quad Z(p) = pB(p^2) / A(p^2). \quad (20.2)$$

Подставив выражение (20.2) в формулу (20.1), получим

$$Y'(p) = 1 / [r + A(p^2) / pB(p^2)] = pB(p^2) / [rpB(p^2) + A(p^2)]$$

или

$$Y'(p) = 1 / [r + pB(p^2) / A(p^2)] = A(p^2) / [rA(p^2) + pB(p^2)]. \quad (20.3)$$

Знаменатели этих выражений являются характеристическими полиномами цепи, схема которой изображена на рис. 20.1. Так как эта цепь содержит активное сопротивление  $r$ , то процесс свободных колебаний в ней будет носить затухающий характер, а следовательно, полиномы знаменателей (20.3) являются полиномами, нули которых расположены в левой полуплоскости  $p$ , т. е. полиномами Гурвица.

В подразд. 18.5 было показано, что полином Гурвица можно представить в виде суммы четной и нечетной частей (18.51)

$$V(p) = A(p^2) + pB(p^2) = b(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_3^2) \dots + pc(p^2 + \omega_j^2)(p^2 + \omega_i^2) \dots \quad (20.4)$$

и что при умножении четной или нечетной части этого полинома на положительную постоянную величину получим новый полином, являющийся также полиномом Гурвица. Следовательно, полиномы  $A(p^2)$  и  $pB(p^2)$  являются четной и нечетной частями полинома Гурвица, одна из которых умножена на постоянный положительный множитель  $r$ ,

Таким образом, необходимым условием того, чтобы заданная функция оператора  $p$  была входной операторной функцией реактивного двухполюсника, является то, чтобы она была дробью, представляющей собой отношение четной и нечетной или, наоборот, нечетной и четной частей полинома Гурвица. Учитывая свойства четной и нечетной частей комплекса полинома Гурвица, установленные в подразд. 18.5, можно сделать вывод о том, что нули и полюсы входной операторной функции реактивного двухполюсника на мнимой оси являются простыми и взаимно чередующимися. Такие функции называют реактансными.

Из полинома Гурвица нечетной степени  $n=2\nu+1$

$$V(p) = a_{2\nu+1}p^{2\nu+1} + a_{2\nu}p^{2\nu} + \dots + a_1p + a_0 = a_{2\nu}(p^2 + \omega_1^2) \dots (p^2 + \omega_{2\nu-1}^2) + a_{2\nu+1}p(p^2 + \omega_2^2) \dots (p^2 + \omega_{2\nu}^2),$$

взяв отношение нечетной его части к четной и, наоборот, четной части к нечетной, получим два вида операторных входных сопротивлений некоторых реактивных двухполюсников:

$$Z_I(p) = \frac{Hp(p^2 + \omega_2^2) \dots (p^2 + \omega_{2\nu}^2)}{(p^2 + \omega_1^2) \dots (p^2 + \omega_{2\nu-1}^2)}; \quad (20.5)$$

$$Z_{II}(p) = \frac{(p^2 + \omega_1^2) \dots (p^2 + \omega_{2\nu-1}^2)}{Hp(p^2 + \omega_2^2) \dots (p^2 + \omega_{2\nu}^2)}, \quad (20.6)$$

где  $H = ra_{2\nu+1} / a_{2\nu}$

Аналогичным образом из полинома Гурвица четной степени  $n=2\nu+2$

$$V(p) = a_{2\nu+2}p^{2\nu+2} + a_{2\nu+1}p^{2\nu+1} + \dots + a_1p + a_0 = \\ = a_{2\nu+2}(p^2 + \omega_1^2) \dots (p^2 + \omega_{2\nu+1}^2) + a_{2\nu+1}p(p^2 + \omega_2^2) \dots (p^2 + \omega_{2\nu}^2)$$

получим

$$Z_{III}(p) = \frac{Hp(p^2 + \omega_2^2) \dots (p^2 + \omega_{2\nu}^2)}{(p^2 + \omega_1^2) \dots (p^2 + \omega_{2\nu+1}^2)}; \quad (20.7)$$

$$Z_{IV}(p) = \frac{(p^2 + \omega_1^2) \dots (p^2 + \omega_{2\nu+1}^2)}{Hp(p^2 + \omega_2^2) \dots (p^2 + \omega_{2\nu}^2)}; \quad (20.8)$$

где  $H = ra_{2\nu+1} / a_{2\nu+2}$ .

Так как входная операторная проводимость обратна  $Z(p)$ , то для реактивных двухполюсников она будет выражаться в виде, аналогичном (20.5) — (20.8).

В следующем подразделе покажем, что указанные выше необходимые условия для функций реактивных двухполюсников являются также и достаточными.

### 20.3. РЕАЛИЗАЦИЯ РЕАКТИВНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ ПУТЕМ РАЗЛОЖЕНИЯ ИХ ВХОДНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ФУНКЦИЙ НА ПРОСТЫЕ ДРОБИ

Указанные в предыдущем подразделе условия, которым должны удовлетворять входные операторные функции реактивных двухполюсников, являются не только необходимыми, но и достаточными. Для доказательства достаточности этих условий следует указать хотя бы один способ реализации этих функций.

Рассмотрим первый способ реализации реактансных функций, основанный на разложении этих функций на сумму простейших реактансных функций, каждая из которых выражает операторное сопротивление или операторную проводимость простейшего реактивного двухполюсника.

Пусть задана реактансная функция вида (20.8). Ее можно разложить на сумму простых дробей [47]:

$$Z_{IV}(p) = a_\infty p + \frac{a_0}{p} + \sum_{k=1}^m \frac{2a_k p}{p^2 + \omega_k^2}, \quad (20.9)$$

где  $m$  — число пар сопряженных полюсов при  $p = \pm j\omega_k$ .

Можно показать, что коэффициенты  $a_\infty$ ,  $a_0$  и  $a_k$  этого разложения являются вещественными положительными числами [47]. Их

можно определить различными методами, например методом неопределенных коэффициентов, или по формулам:

$$a_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Z(p)}{p}; \quad a_0 = \lim_{p \rightarrow 0} pZ(p); \quad 2a_k = \lim_{p^2 \rightarrow -\omega_k^2} \frac{\omega_k^2 + p^2}{p} Z(p). \quad (20.10)$$

Слагаемое  $a_\infty p$  в разложении (20.9), являющееся целой частью дроби (20.8), соответствует полюсу реактансной функции при

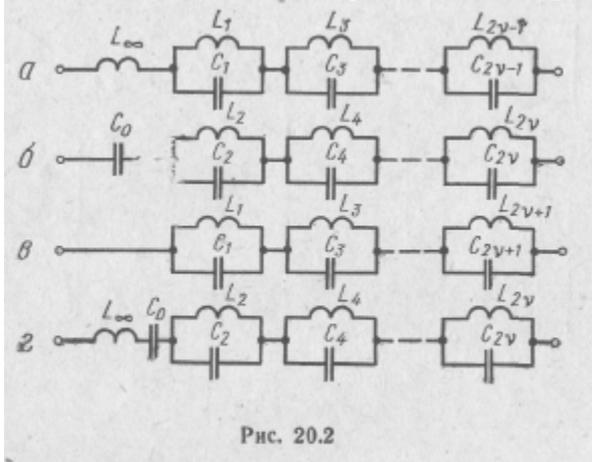


Рис. 20.2

$p = \infty$ . Его можно рассматривать как операторное сопротивление индуктивности. В схеме двухполюсника (рис. 20.2, а) ему соответствует последовательно включенная индуктивность  $L_\infty = a_\infty$ .

Слагаемое  $a_0/p$ , соответствующее полюсу функции при  $p=0$ , можно рассматривать как операторное сопротивление емкости. В схеме двухполюсника ему соответствует последовательно включенная емкость  $C_0 = 1/a_0$ .

Слагаемое  $2a_k p / (p^2 + \omega_k^2)$  соответствует паре мнимых полюсов функции при  $p = \pm j\omega_k$ . Это слагаемое можно представить в виде,

$$\frac{2a_k p}{p^2 + \omega_k^2} = \frac{1}{p/2a_k + 1/p2a_k/\omega_k^2} = \frac{1}{pC_k + 1/pL_k},$$

откуда следует, что это слагаемое можно рассматривать как операторное сопротивление параллельно соединенных емкости  $C_k = 1/2a_k$  и индуктивности  $L_k = 2a_k/\omega_k^2$ .

Таким образом, выражение (20.9) можно рассматривать как операторное сопротивление двухполюсника  $Z_{IV}(p)$ , состоящего из последовательно соединенных индуктивности  $L_\infty$ , емкости  $C_0$  и параллельных контуров с емкостями  $C_k$  и индуктивностями  $L_k$  (см. рис. 20.2,г).

Операторные входные сопротивления  $Z_I(p)$  (20.5),  $Z_n(p)$  (20.6) и  $Z_{II}(p)$  (20.7) представляют собой частные случаи рассмотренного выше разложения для  $Z_{IV}(p)$ . В разложении для  $Z_I(p)$  будет отсутствовать слагаемое  $a_0p$ , для  $Z_n(p)$  — слагаемое

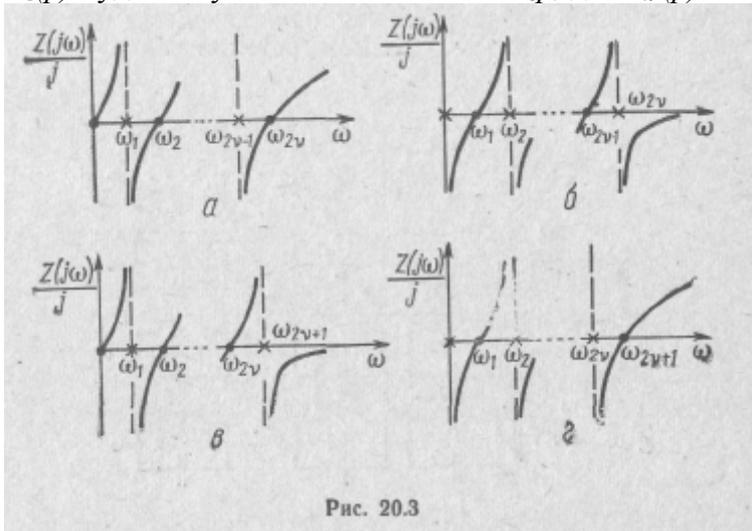


Рис. 20.3

$a_\infty p$ , а для  $Z_{III}(p)$  — слагаемые  $a_\infty p$  и  $a_0/p$ . Этим разложениям соответствуют двухполосники, схемы которых приведены на рис. 20.2, а, б, в, г.

Заменив в формулах (20.5) — (20.8)  $p$  на  $j\omega$ , получим четыре вида комплексных входных сопротивлений реактивных двухполосников, частотные характеристики которых приведены на рис. 20.3. Из этого рисунка видно, что  $Z(j\omega)/j$  растет с ростом  $\omega$ . Кроме нулей и полюсов, находящихся на конечных значениях частоты  $\omega$ , двухполосник  $Z_I(j\omega)$  имеет нуль сопротивления при  $\omega=0$  и полюс при  $\omega=\infty$ ;  $Z_{II}(j\omega)$  — нуль при  $\omega=\infty$  и полюс при  $\omega=0$ ;  $Z_{III}(j\omega)$  — нули при  $\omega=0$  и  $\omega=\infty$ ;  $Z_{IV}(j\omega)$  — полюсы при  $\omega=0$  и  $\omega=\infty$ .

**Пример 20.1.**

Найти реактивный двухполосник, сопротивление которого задано в виде реактивной функции

$$Z(p) = \frac{p^4 + 6p^2 + 1}{4p^3 + 4p} = \frac{p^4 + 6p^2 + 1}{4p(p^2 + 1)}.$$

Решение.

В том, что заданная функция действительно является реактансной, нетрудно убедиться, определив ее нули и полюсы. Все они находятся на мнимой оси, являются простыми и взаимно чередуются. Так как заданная функция имеет по-

люсы  $p = \infty$ ,  $p=0$  и  $p = \pm j$ , то разложение этой функции на элементарные дроби имеет вид

$$Z(p) = a_{\infty}p + \frac{a_0}{p} + \frac{2a_1p}{p^2 + 1}.$$

Коэффициенты разложения:

$$a_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Z(p)}{p} = \frac{1}{4}; \quad a_0 = \lim_{p \rightarrow 0} pZ(p) = \frac{1}{4}; \quad 2a_1 = \lim_{p^2 \rightarrow -1} Z(p) \frac{p^2 + 1}{p} = 1.$$

Подставив эти коэффициенты в  $Z(p)$ , получим

$$Z(p) = \frac{1}{4}p + \frac{1}{4p} + \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Схема двухполосника приведена на рис. 20.4. Параметры нормированных элементов двухполосника:

$$L_{\infty} = a_{\infty} = \frac{1}{4}; \quad C_0 = \frac{1}{a_0} = 4;$$

$$C_1 = \frac{1}{2a_1} = 1; \quad L_1 = \frac{2a_1}{\omega_1^2} = 1.$$

Рассмотренный выше способ реализации реактансных функций можно считать доказательством не только необходимости, но и достаточности условий, которым должны удовлетворять операторные входные функции реактивных двухполосников, так как по этим условиям можно построить соответствующую цепь.

Если разлагать на элементарные дроби операторные проводимости, являющиеся функциями, обратными функциям операторных сопротивлений, то получим еще четыре схемы реактивных двухполосников.

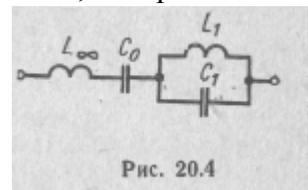


Рис. 20.4

Пусть, например, операторная проводимость имеет вид

$$Y_{III}(p) = \frac{1}{Z_{III}(p)} = \frac{H(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2) \dots (p^2 + \omega_{2v+1}^2)}{p(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_4^2) \dots (p^2 + \omega_{2v}^2)}. \quad (20.11)$$

Учитывая, что это выражение совпадает с выражением (20.8) для  $Z_{IV}(p)$ , можно написать разложение:

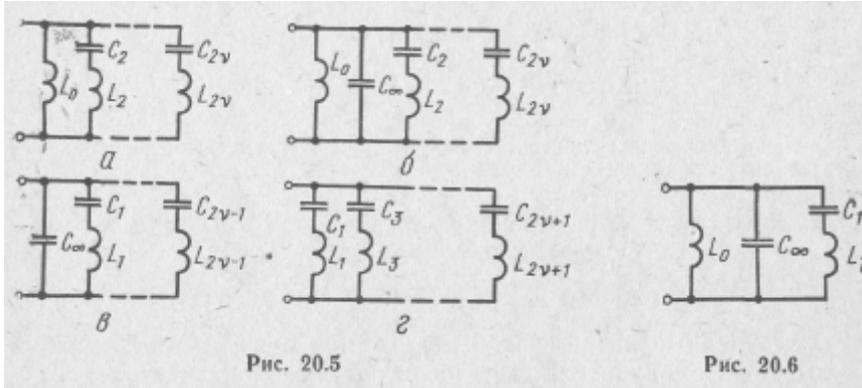
$$Y_{III}(p) = b_{\infty}p + \frac{b_0}{p} + \sum_{k=1}^m \frac{2b_k p}{p^2 + \omega_k^2}. \quad (20.12)$$

Первое слагаемое в этом выражении можно рассматривать как операторную проводимость емкости  $C_{\infty} = b_{\infty}$  (рис. 20.5,б), а второе слагаемое — как операторную проводимость индуктивности  $L_0 = 1/b_0$ .

Слагаемое  $2b_k p / (p^2 + \omega_k^2)$  представим в виде

$$\frac{2b_k p}{p^2 + \omega_k^2} = \frac{1}{p^2/b_k + 1/p^2 b_k/\omega_k^2} = \frac{1}{pL_k + 1/pC_k}$$

откуда следует, что это слагаемое можно рассматривать как операторную проводимость последовательного контура, состоящего из индуктивности  $L_k = 1/2b_k$  и емкости  $C_k = 2b_k/\omega_k^2$ .



Таким образом, выражение (20.12) можно рассматривать как операторную проводимость двухполюсника, состоящего из параллельно включенных емкости  $C_\infty$ , индуктивности  $L_0$ , и последовательных контуров, состоящих из индуктивностей  $L_k$  и емкостей  $C_k$  (см. рис. 20.5, б). На этом же рисунке приведены еще три разновидности схем реактивных двухполюсников.

Пример 20.2.

Найти реактивный двухполюсник, проводимость которого задана в виде реактансной функции

$$Y(p) = \frac{p^4 + 6p^2 + 1}{4p^3 + 4p}$$

Решение.

Используя результаты предыдущего примера, получим

$$Y(p) = b_\infty p + \frac{b_0}{p} + \frac{2b_1 p}{p^2 + \omega_1^2}$$

где  $b_\infty = \frac{1}{4}$ ;  $b_0 = \frac{1}{4}$ ;  $2b_1 = 1$ ;  $\omega_1 = 1$ .

Подставив это в разложение для  $K(p)$ , получим

$$Y(p) = \frac{1}{4} p + \frac{1}{4p} + \frac{p}{p^2 + 1}$$

Параметры элементов двухполюсника:

$$C_\infty = b_\infty = 1/4; L_0 = 1/b_0 = 4; L_1 = 1/2b_1; C_1 = 2b_1/\omega_1^2 = 1.$$

Схема двухполюсника приведена на рис. 20.6.

Из выражений (20.9) и (20.12) следует, что сумма любого числа реактансных функций является также реактансной функцией и что любую сложную реактансную функцию можно представить в виде суммы двух более простых реактансных функций.

В частности, реактансную функцию  $Z(p)$  с полюсом при  $p=\infty$  можно представить суммой:

$$Z(p) = a_{\infty} p + Z_1(p), \quad (20.13)$$

где  $a_{\infty} > 0$ , а  $Z_1(p)$  — реактансная функция с нулем при  $p=\infty$ .

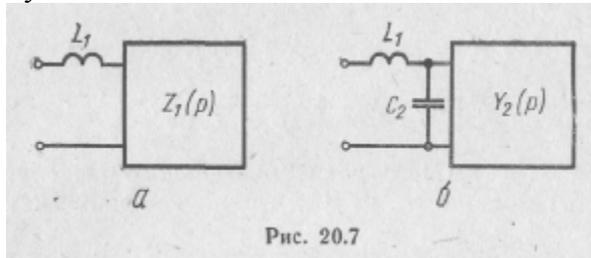
Реактансную функцию  $Z(p)$  с полюсом при  $p=0$  можно представить в виде

$$Z(p) = a_0/p + Z_1(p), \quad (20.14)$$

где  $a_0 > 0$ , а  $Z_1(p)$  — реактансная функция с нулем при  $p=0$ .

#### 20.4. РЕАЛИЗАЦИЯ РЕАКТИВНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ ПУТЕМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИХ ВХОДНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ФУНКЦИЙ В ВИДЕ ЦЕПНОЙ ДРОБИ

Представление реактансных функций  $Z(p)$  и  $Y(p)$  в виде цепной дроби осуществляется путем последовательного выделения полюсов этих функций при  $p=\infty$  или при  $p=0$ .



Пусть функция  $Z(p)$  имеет полюс при  $p=\infty$ . Тогда, расположив полиномы числителя и знаменателя  $Z(p)$  по убывающим степеням и деля числитель на знаменатель, получим  $Z(p) = pL_1 + Z_1(p)$ .

Здесь  $L_1 > 0$ , а функция  $Z_1(p)$  согласно формуле (20.13) является также реактансной функцией, обращающейся в нуль при  $p=\infty$ .

Слагаемое  $pL_1$  реализуется в виде индуктивности  $L_1$  (рис. 20.7,а). Так как функция  $Z_1(p)$  имеет нуль при  $p=\infty$ , то функция  $Y(p) = 1/Z(p)$  имеет здесь полюс. Выделяя этот полюс путем деления знаменателя  $Z_1(p)$  на его числитель, получим

$$Z_1(p) = \frac{1}{Y_1(p)} = \frac{1}{pC_2 + Y_2(p)}.$$

Здесь  $C_2 > 0$ , а функция  $Y_2(p)$  является реактансной функцией, обращающейся в нуль при  $p = \infty$ .

Слагаемое  $pC_2$  реализуется в виде емкости  $C_2$ , включенной параллельно с проводимостью  $Y_2(p)$  (рис. 20.7,б),

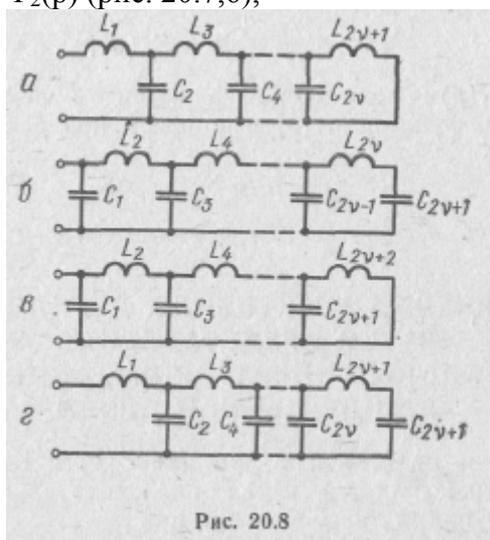


Рис. 20.8

Подставив  $Z_1(p)$  в выражение для  $Z(p)$ , получим

$$Z(p) = pL_1 + \frac{1}{pC_2 + Y_2(p)}.$$

Продолжая этот процесс последовательного выделения полюсов  $Z(p)$  и  $Y(p)$  при  $p = \infty$ , получим цепную дробь вида

$$Z(p) = pL_1 + \frac{1}{pC_2 + \frac{1}{pL_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{pL_n}}}}. \quad (20,15)$$

Эта дробь реализуется в виде схемы реактивного двухполюсника, приведенной на рис. 20.8, а.

Если функция  $Z(p)$  имеет нуль при  $p = \infty$ , то, разлагая в цепную дробь функцию  $Y(p) = 1/Z(p)$  путем последовательного выделения полюсов при  $p = \infty$ , получим схему двухполюсника, приведенную на рис. 20.8, б.

Если при выделении полюсов функций  $Z(p)$  и  $Y(p)$  при  $p = \infty$  полиномы числителей и знаменателей этих функций расположить по возрастающим степеням  $p$ , то получим еще две разновидности схем реактивных двухполюсников (рис. 20.8, в и г),

**Пример 20.3.**

Наши реактивный двухполюсник, сопротивление Которого задано реактансной функцией

$$Z(p) = \frac{p^4 + 10p^2 + 9}{p^3 + 4p}.$$

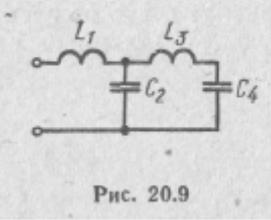


Рис. 20.9

Решение.

Путем последовательного деления числителя  $Z(p)$  на знаменатель, знаменателя на первый остаток и т. д. представим заданную функцию в виде цепной дроби

$$\begin{array}{r} \frac{p^4 + 10p^2 + 9}{p^3 + 4p} \Big| \frac{p^3 + 4p}{p} \\ - \frac{p^3 + 4p}{p^3 + 4p} \Big| \frac{6p^2 + 9}{6p^2 + 9} \\ - \frac{p^3 + \frac{3}{2}p}{p^3 + \frac{3}{2}p} \Big| \frac{1}{\frac{1}{6}p} \\ - \frac{6p^2 + 9}{6p^2 + 9} \Big| \frac{\frac{5}{2}p}{\frac{12}{5}p} \\ - \frac{6p^2}{6p^2} \Big| \frac{\frac{5}{2}p}{\frac{5}{5}p} \\ - \frac{\frac{5}{2}p}{\frac{5}{2}p} \Big| \frac{9}{\frac{5}{18}p} \end{array}$$

Искомая цепная дробь будет иметь вид

$$Z(p) = p + \frac{1}{\frac{p}{6} + \frac{1}{\frac{12}{5}p + \frac{1}{\frac{5}{18}p}}}.$$

Этой дроби соответствует двухполюсник, схема которого приведена на рис. 20.9, где

$$L_1 = 1; C_2 = \frac{1}{6}; L_3 = \frac{12}{5}; C_4 = \frac{5}{18}.$$

При выделении из реактансных функций  $Z(p)$  и  $Y(p)$  полюсов при  $p=0$  получим цепную дробь вида

$$Z(p) = \frac{1}{pC_1} + \frac{1}{\frac{1}{pL_2} + \frac{1}{\frac{1}{pC_3} + \dots}} \quad (20.16)$$

$$\dots + \frac{1}{pC_n}$$

и еще четыре разновидности схем реактансных двухполюсников (рис. 20.10). Двухполюсники, схемы которых приведены на рис. 20.8—20.10, обычно называют двухполюсниками лестничного типа.

Все рассмотренные в настоящем и предыдущем подразделах двухполюсники характерны тем, что из всех возможных схем двухполюсников, соответствующих заданным реактансным функциям,

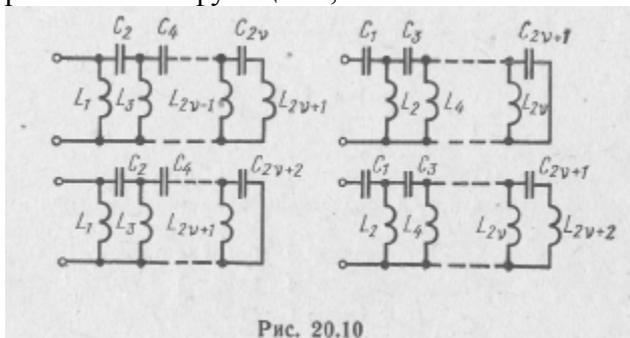


Рис. 20.10

они содержат наименьшее число элементов, равное наивысшей степени  $p$  заданных функций. Схемы этих двухполюсников обычно называют каноническими схемами.

Таким образом, любую заданную реактансную функцию можно реализовать в виде четырех канонических схем (см. рис. 20.2, 20.5, 20.8 и 20.10), которые являются эквивалентными. Если применять комбинированную методику реализации, то количество эквивалентных схем может быть увеличено. Однако получающиеся при этом схемы уже не будут каноническими.

Если нули и полюсы реактансной функции заранее неизвестны, то проще находятся лестничные реактивные двухполюсники, так как вычисление нулей и полюсов реактансных функций при большом их порядке сопряжено с большим объемом вычислительной работы.

## 20.5. РЕАЛИЗАЦИЯ ДВУХПОЛЮСНИКОВ ТИПА $rC$

При синтезе двухполюсников типа  $rC$  воспользуемся результатами, полученными при рассмотрении синтеза двухполюсников типа  $LC$ . Для этого установим связь между операторными входными функциями этих двухполюсников.

В выражениях для операторного входного сопротивления  $Z(p) = \Delta_z / \Delta_{11}$  и операторной входной проводимости  $Y(p) = 1/Z(p) = \Delta_{11} / \Delta_z$  цепи  $rC$  элементами определителя контуры

уравнений  $\Delta_Z$  и его алгебраических дополнений  $\Delta_{11}$  является операторное сопротивление

$$Z_{kj}(p) = r_{kj} + 1/C_{kj}p. \quad (20.17)$$

Произведя в этом выражении замену  $p=s^2$ , получим

$$Z_{kj}(p) = Z_{kj}(s^2) = r_{kj} + 1/C_{kj}s^2 = (sr_{kj} + 1/C_{kj}s)/s = Z_{kj}(s)/s, \quad (20.18)$$

где

$$Z_{kj}(s) = sr_{kj} + 1/C_{kj}s. \quad (20.19)$$

Так как множитель  $1/s$  входит во все элементы  $\Delta$  и  $\Delta_{11}$ , то для цепи, состоящей из  $n$  контуров, получим

$$\left. \begin{aligned} \Delta_Z(p) = \Delta_Z(s^2) &= \frac{1}{s^n} \Delta'_Z(s); \\ \Delta_{11}(p) = \Delta_{11}(s^2) &= \frac{1}{s^{n-1}} \Delta'_{11}(s). \end{aligned} \right\} \quad (20.20)$$

Элементами  $\Delta'(s)$  и  $\Delta'_{11}(s)$  является сопротивление  $Z_{kj}(s)$  (20.19), которое можно рассматривать как сопротивление цепи  $LC$ , считая, что  $r_{kj} = L_{kj}$  и  $s=p$ . При этом для входных операторных сопротивлений двухполюсника типа  $rC$  получим

$$Z_{rC}(p) = Z_{rC}(s^2) = \frac{\Delta_Z(s^2)}{\Delta_{11}(s^2)} = \frac{1}{s} \frac{\Delta'_Z(s)}{\Delta'_{11}(s)} = \frac{1}{s} Z_{LC}(s), \quad (20.21)$$

где  $Z_{LC}(s)$  — входное операторное сопротивление двухполюсника типа  $LC$ .

Из этого выражения видно, что если входное операторное сопротивление двухполюсника типа  $LC$ , взятое как функция  $s$ , разделить на оператор  $s$  и заменить  $s^2$  на  $p$ , то получим входное операторное сопротивление двухполюсника типа  $rC$ . Так, например, произведя указанные операции с входным операторным сопротивлением двухполюсника типа  $LC$ , определяемым выражением (20.8),

$$Z_{LCIV}(s) = \frac{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_3^2) \dots (s^2 + \omega_{2r+1}^2)}{Hs(s^2 + \omega_2^2)(s^2 + \omega_4^2) \dots (s^2 + \omega_{2r}^2)}. \quad (20.22)$$

получим

$$Z_{rCIV}(p) = \frac{(p + \omega_1^2)(p + \omega_3^2) \dots (p + \omega_{2r+1}^2)}{Hp(p + \omega_2^2)(p + \omega_4^2) \dots (p + \omega_{2r}^2)}. \quad (20.23)$$

Аналогичным образом из входных операторных сопротивлений двухполюсника типа  $LC$ , определяемых выражениями (20.5) —

(20.7), можно получить еще три вида входных операторных сопротивлений двухполюсника типа  $rC$ :

$$Z_{rC I}(p) = \frac{H(p + \omega_2^2)(p + \omega_4^2) \dots (p + \omega_{2\nu}^2)}{(p + \omega_1^2)(p + \omega_3^2) \dots (p + \omega_{2\nu-1}^2)}; \quad (20.24)$$

$$Z_{rC II}(p) = \frac{(p + \omega_1^2)(p + \omega_3^2) \dots (p + \omega_{2\nu-1}^2)}{Hp(p + \omega_2^2)(p + \omega_4^2) \dots (p + \omega_{2\nu}^2)}; \quad (20.25)$$

$$Z_{rC III}(p) = \frac{H(p + \omega_2^2)(p + \omega_4^2) \dots (p + \omega_{2\nu}^2)}{(p + \omega_1^2)(p + \omega_3^2) \dots (p + \omega_{2\nu+1}^2)}. \quad (20.26)$$

Учитывая чередуемость  $\omega_k$ , из выражений (20.23) — (20.26) можно установить следующие особенности входных операторных сопротивлений двухполюсников типа  $rC$ :

а) высшая степень полинома числителя на единицу меньше или равна степени полинома знаменателя;

б) все полюсы и нули расположены на вещественной отрицательной полуоси, являются простыми и взаимно чередуются, причем ближайшим к началу координат является полюс (он может, в частности, находиться и в начале координат); полюса в бесконечности быть не может.

Из выражений, обратных уравнениям (20.23) — (20.26), можно установить следующие особенности входных операторных проводимостей двухполюсников типа  $rC$ :

а) высшая степень полинома числителя на единицу больше или равна степени полинома знаменателя;

б) все полюсы и нули расположены на вещественной отрицательной полуоси, являются простыми и взаимно чередуются, причем ближайшим к началу координат является нуль.

Установленная выше связь между входными операторными функциями двухполюсников типа  $rC$  и  $LC$  позволяет при синтезе двухполюсников типа  $rC$  использовать рассмотренные ранее методы синтеза двухполюсников типа  $LC$ .

Для разложения функции  $Z_{rC}(p)$  (20.23) на простые дроби воспользуемся выражением (20.9), которое запишем в виде

$$Z(s) = a_\infty s + \frac{a_0}{s} + \sum_{k=1}^m \frac{2a_k s}{s^2 + \omega_k^2}.$$

Умножив это выражение на  $1/s$  и заменив  $s^2$  на  $p$ ,  $\omega_k^2$  на  $\sigma_k$  и  $2a_k$  на  $a_k$ , получим

$$Z_{rC}(p) = a_\infty + \frac{a_0}{p} + \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{p + \sigma_k}. \quad (20.27)$$

Коэффициенты этого выражения  $a_\infty$ ,  $a_0$  и  $a_k$ , являющиеся вещественными положительными числами, можно определить по формулам:

$$a_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} Z(p); \quad a_0 = \lim_{p \rightarrow 0} pZ(p); \quad a_k = \lim_{p \rightarrow -\sigma_k} (p + \sigma_k) Z(p).$$

Первое слагаемое выражения (20.27), соответствующее значению функции  $Z_{rc}(p)$  при  $p = \infty$ , можно реализовать в виде активного сопротивления  $r_\infty = a_\infty$ , второе слагаемое, соответствующее

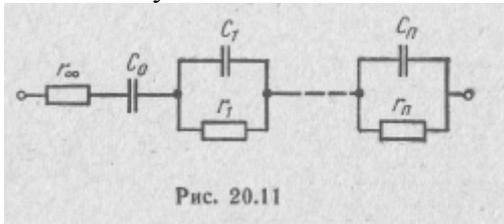


Рис. 20.11

полюсу функции при  $p=0$ , — в виде емкости  $C_0=1/a_0$ , а каждое из слагаемых  $a_k/(p+\sigma_k)$ , соответствующих полюсам функции при  $p=-\sigma_k$ , — в виде цепи, состоящей из параллельного соединения элементов  $r_k$  и  $C_k$ . Для определения величин  $r_k$  и  $C_k$  представим  $a_k/(p+\sigma_k)$  в виде

$$\frac{a_k}{p + \sigma_k} = \frac{1}{\frac{p}{a_k} + \frac{\sigma_k}{a_k}} = \frac{1}{\frac{p}{pC_k} + r_k},$$

откуда следует, что  $C_k=1/a_k$  и  $r_k=a_k/\sigma_k$ .

Схема двухполюсника, соответствующего выражению (20.27), приведена на рис. 20.11.

Для получения разложения функции  $Y_{rc}(p)$  на простые дроби вначале учтем, что в соответствии с формулой (20.21) эту функцию можно представить в виде

$$Y_{rc}(p) = sY_{LC}(s). \quad (20.28)$$

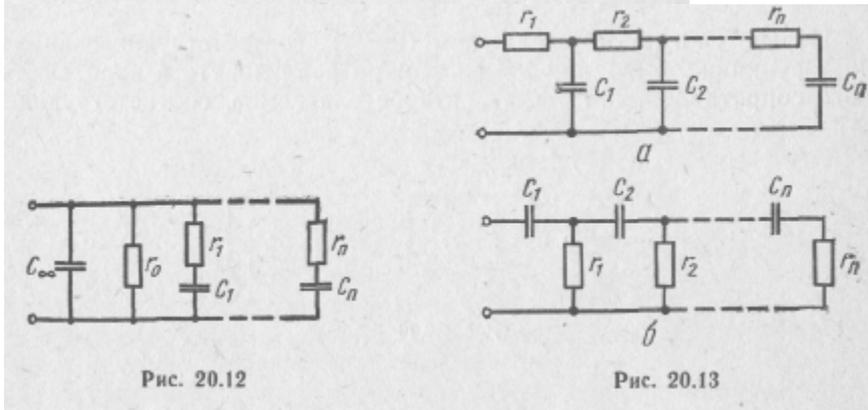
В соответствии с уравнением (20.12) это выражение представим в виде

$$Y_{rc}(p) = s \left[ b_\infty s + \frac{b_0}{s} + \sum_{k=1}^m \frac{2b_k s}{s^2 + \omega_k^2} \right] =$$

$$= b_\infty s^2 + b_0 + \sum_{k=1}^m \frac{2b_k s^2}{s^2 + \omega_k^2}.$$

Заменив в этом выражении  $s^2$  на  $p$ ,  $\omega_k^2$  на  $a_k$  и  $2b_k$  на  $b_k$ , получим

$$Y_{rC}(p) = b_\infty p + b_0 + \sum_{k=1}^m \frac{b_k p}{p + \sigma_k} \quad (20.29)$$



Коэффициенты этого выражения  $b_\infty$ ,  $b_0$  и  $b_k$  можно определить по формулам:

$$b_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Y(p)}{p}; \quad b_0 = \lim_{p \rightarrow 0} Y(p); \quad b_k = \lim_{p \rightarrow -\sigma_k} \frac{(p + \sigma_k)}{p} Y(p).$$

Выражению (20.29) соответствует схема двухполюсника, приведенная на рис. 20.12, где  $C_\infty = b_\infty$ ;  $r_0 = 1/b_0$ ;  $C_k = b_k/\sigma_k$ ;  $r_k = 1/b_k$ .

Значения величин  $C_k$  и  $r_k$  получаются из представления  $b_k p / (p + \sigma_k)$  в виде

$$\frac{b_k p}{p + \sigma_k} = \frac{1}{\frac{1}{b_k} + \frac{1}{p b_k / \sigma_k}} = \frac{1}{r_k + \frac{1}{p C_k}}.$$

По аналогии с двухполюсниками типа  $LC$  можно получить еще два вида схем двухполюсников типа  $rC$  (рис. 20.13) путем разложения заданной функции сопротивления  $Z_{rC}(p)$  или проводимости  $Y_{rC}(p)$  в непрерывную дробь, начиная деление с высших или низших степеней  $p$ .

Следует отметить, что все четыре рассмотренные схемы двухполюсников типа  $rC$  содержат одинаковое, минимально возможное число элементов. Поэтому такие схемы называют каноническими.

#### Пример 20.4.

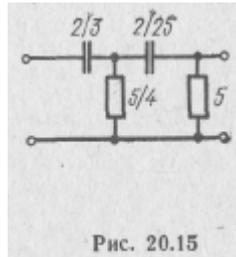
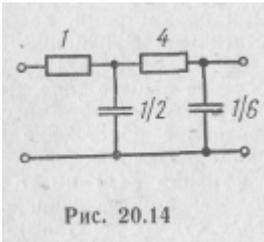
Произвести синтез двухполюсника типа  $rC$  путем разложения  $Z_{rC}(p)$  в непрерывную дробь, если входное сопротивление двухполюсника имеет вид

$$Z_{rC}(p) = \frac{(p+3)(p+1)}{p(p+2)} = \frac{p^2 + 4p + 3}{p^2 + 2p}.$$

Решение.

Начнем деление числителя на знаменатель, расположив полиномы числителя и знаменателя по убывающим степеням:

$$\begin{array}{r}
 -p^2 + 4p + 3 \quad | \quad p^2 + 2p \\
 \underline{p^2 + 2p} \quad | \quad 1 \\
 -2p + 3 \quad | \quad 0,5p \\
 \underline{p^2 + 1,5p} \quad | \quad 2p + 3 \\
 -2p + 3 \quad | \quad 0,5p \\
 \underline{2p} \quad | \quad 4 \\
 -0,5p + 3 \quad | \quad 0,5p \\
 \underline{0,5p} \quad | \quad 3 \\
 -0,5p \quad | \quad 1 \\
 \underline{0,5p} \quad | \quad \frac{1}{6}p \\
 0
 \end{array}$$



Отсюда видно, что  $Z_{rC}(p)$  можно представить в виде непрерывной дроби

$$Z_{rC}(p) = 1 + \frac{1}{0,5p + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{1}{6}p}}}$$

которой соответствует схема двухполюсника, приведенная на рис. 20.14.

Если полиномы числителя и знаменателя расположить по возрастающим степеням, то получим

$$\begin{array}{r}
 -3 + 4p + p^2 \quad | \quad 2p + p^2 \\
 \underline{3 + \frac{3}{2}p} \quad | \quad \frac{3}{2p} \\
 2p + p^2 \quad | \quad \frac{5}{2}p + p^2 \\
 \underline{2p + \frac{4}{5}p^2} \quad | \quad \frac{4}{5} \\
 -\frac{5}{2}p + p^2 \quad | \quad \frac{1}{5}p^2 \\
 \underline{\frac{5}{2}p} \quad | \quad \frac{25}{2p} \\
 -\frac{1}{5}p^2 \quad | \quad p^2 \\
 \underline{\frac{1}{5}p^2} \quad | \quad \frac{1}{5} \\
 0
 \end{array}$$

откуда видно, что  $Z_{rc}(p)$  можно представить в виде непрерывной дроби

$$Z_{rc}(p) = \frac{3}{2p} + \frac{1}{\frac{4}{5} + \frac{1}{\frac{25}{2p} + \frac{1}{\frac{1}{5}}}}$$

которой соответствует схема двухполюсника, приведенная на рис. 20.15.

## 20.6. ПОНЯТИЕ О РЕАЛИЗАЦИИ ДВУХПОЛЮСНИКОВ ОБЩЕГО ТИПА

В подразд. 18.7 было показано, что необходимым условием, которому должны удовлетворять входные операторные функции  $Z(p)$  и  $Y(p)$  линейных пассивных электрических цепей с сосредоточенными параметрами, является то, чтобы эти функции были положительными вещественными функциями. Доказательство достаточности этого условия впервые сделал О. Бруне в 1931 г., предложивший метод реализации пассивных двухполюсников общего типа. Сущность этого метода сводится к разложению заданной положительной вещественной функции в цепную дробь, элементами которой являются простейшие положительные вещественные функции, реализуемые в виде двухполюсников.

Если заданная положительная вещественная функция  $Z(p)$  имеет простые полюсы и нули на мнимой оси, то, выделив полюсы этой функции, находящиеся на мнимой оси, ее можно представить в виде суммы реактансной функции  $Z_{1p}(p)$  и положительной вещественной функции  $Z_{10}(p)$  более низкого порядка:

$$Z(p) = Z_{1p}(p) + Z_{10}(p).$$

Функция  $Z_{10}(p)$  уже не будет иметь полюсов на мнимой оси, но может иметь на этой оси нули. Тогда функция  $Y_{10}(p) = 1/Z_{10}(p)$  будет иметь полюсы на мнимой оси, и ее можно также представить в виде суммы реактансной функции  $Y_{2p}(p)$  и положительной вещественной функции  $Y_{20}(p)$ . Тогда

$$Z_{10}(p) = 1/[Y_{2p}(p) + Y_{20}(p)].$$

Аналогичный процесс можно продолжать до тех пор, пока оставшаяся функция уже не будет содержать ни полюсов, ни нулей на мнимой оси. Очевидно, степени полиномов числителя и знаменателя этой оставшейся функции будут одинаковыми, иначе эта функция имела бы или нуль, или полюс при  $p = \infty$ , которые можно было бы из нее выделить. Если при  $p = j\omega$  вещественная часть оставшейся функции ни при одном значении  $\omega$  не равна нулю, то можно выделить вещественную положительную постоянную, равную наименьшему значению, вещественной части на мнимой оси, которая реализуется как последовательное или параллельное сопротивление в зависимости от того, выражает оставшаяся функция сопротивление или проводимость. После этого описанный выше процесс выделения реактансных функций и вещественных положительных постоянных продолжается до тех пор, пока он либо успешно закончится, либо приведет к положительной вещественной функции, которая после выделения предельно возможной постоянной не имеет на мнимой оси ни нулей, ни полюсов.

В первом из этих случаев заданная положительная вещественная функция может быть представлена в виде лестничного двухполюсника [47].

Если на одном из этапов разложения заданной положительной вещественной функции в цепную дробь продолжение процесса оказывается невозможным из-за отсутствия у оставшейся функции нулей и полюсов на мнимой оси, то в этом случае используется предложенный О. Бруне метод, основанный на искусственном введении полюсов в разлагаемую функцию [47].

## 20.7. РЕАЛИЗАЦИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ В ВИДЕ МОСТОВЫХ СХЕМ

Как показано в подразд. 18.4, необходимым условием, которому должны удовлетворять передаточные функции линейных электрических цепей с сосредоточенными параметрами

$$K(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{W(p)}{V(p)}, \quad (20.30)$$

является вещественность коэффициентов полиномов числителя и знаменателя, а полином знаменателя  $V(p)$ , кроме того, должен быть полиномом Гурвица.

Чтобы доказать, что эти условия являются и достаточными, необходимо построить хотя бы одну физически осуществимую электрическую цепь с передаточной функцией, удовлетворяющей указанным выше условиям. В качестве такой цепи выберем согласованно нагруженный симметричный мостовой четырехполюсник с характеристическим сопротивлением  $Z_C$ , не зависящим от частоты, т. е.  $Z_C = r_0$  (рис. 20.16).

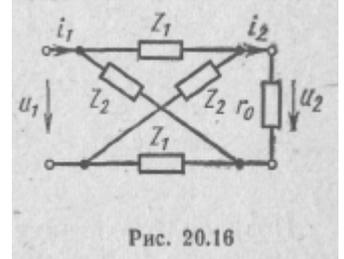


Рис. 20.16

Сопротивления ветвей  $Z_1$  и  $Z_2$  такого четырехполюсника связаны соотношением

$$Z_C = r_0 = \sqrt{Z_1 Z_2} \text{ или } Z_2 = r_0^2 / Z_1. \quad (20.31)$$

Непосредственным расчетом передаточных функций рассматриваемого четырехполюсника по току и по напряжению можно показать, что эти функции одинаковы и равны

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{I_2(p)}{I_1(p)} = \frac{r_0 - Z_1(p)}{r_0 + Z_1(p)}. \quad (20.32)$$

Из этого соотношения получим

$$Z_1(p) = r_0 \frac{1 - K(p)}{1 + K(p)} \text{ и } Z_2(p) = \frac{r_0^2}{Z_1(p)} = r_0 \frac{1 + K(p)}{1 - K(p)}. \quad (20.33)$$

Так как коэффициенты полиномов  $K(p)$  являются вещественными, то из выражения (20.33) следует, что  $Z_1(p)$  и  $Z_2(p)$  являются вещественными при вещественных значениях  $p$ . Кроме того, если  $|K(p)| \geq 1$  при  $\sigma \geq 0$ , то вещественные части  $Z_1(p)$  и  $Z_2(p)$  будут положительными.

Этих двух условий, как показано в подразд. 18.7, достаточно, чтобы  $Z_1(p)$  и  $Z_2(p)$  были положительными вещественными функциями, которые, как показано в подразд. 20.6, можно реализовать в виде пассивных двухполюсников.

Из этого следует, что указанные в начале подраздела условия, которым должны удовлетворять передаточные функции электрических цепей с сосредоточенными параметрами, являются не только

необходимыми, но и достаточными. Дополнительное условие физической реализуемости передаточных функций электрических цепей

$$|K(p)| \leq 1 \text{ при } \sigma \geq 0 \quad (20.34)$$

можно выполнить путем умножения заданной передаточной функции, не удовлетворяющей этому условию, на постоянный вещественный множитель  $k < 1$ . Это приводит лишь к частотно-независимому уменьшению модуля передаточной функции  $|K(p)|$ , которое может быть скомпенсировано добавлением к цепи каскада с частотно-независимым коэффициентом усиления.

Следует отметить, что условие (20.34) можно выполнить только в случае, если степень полинома числителя передаточной функции (20.30) не превосходит степень полинома ее знаменателя. Порядок реализации заданной передаточной функции в виде согласованно нагруженного симметричного мостового четырехполюсника с частотно-независимым характеристическим сопротивлением рассмотрим на конкретном примере.

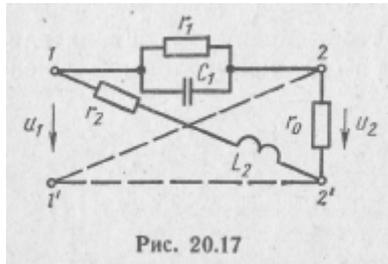


Рис. 20.17

### Пример 20.5.

Произвести синтез четырехполюсника по заданной передаточной функции

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{p + 10^4}{p + 5 \cdot 10^8}$$

если его нагрузкой является активное сопротивление  $r_0$ , равное 10 кОм.

Решение.

По заданной передаточной функции и сопротивлению нагрузки, используя выражения (20.33), находим  $Z_1(p)$  и  $Z_2(p)$ :

$$Z_1(p) = r_0 \frac{1 - K(p)}{1 + K(p)} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-9} p + 15 \cdot 10^{-8}};$$

$$Z_2(p) = r_0^2 / Z_1(p) = 0.5 p + 15 \cdot 10^8.$$

Сопротивление  $Z_1(p)$  реализуется в виде параллельного соединения емкости  $C_1 = 5000$  пФ и активного сопротивления  $r = 6666$  Ом, а сопротивление  $Z_2(p)$  — в виде последовательного соединения индуктивности  $L = 0,5$  Г и активного сопротивления  $r_2 = 15$  кОм (рис. 20.17).

Следует отметить, что поскольку на расположение нулей передаточной функции при мостовой реализации не накладывалось никаких ограничений, то этот вид реализации может быть использован в задачах синтеза как минимально-фазовых, так и неминимально-фазовых цепей.

Недостатками мостовой реализации являются уравновешенная структура и неоправданно большое число элементов, необходимое для реализации заданной передаточной функции, а также слож-

мая структура плеч в случае передаточных функций высокого порядка. Для уменьшения числа элементов иногда применяют четырехполюсники с трансформаторами, в которых число элементов уменьшается вдвое.

Для упрощения структуры плеч мостового четырехполюсника иногда применяют каскадное соединение мостовых четырехполюсников постоянного характеристического сопротивления с более простой структурой плеч. Для этого заданную передаточную функцию  $K(p)$  представляют в виде произведения рациональных функций с вещественными коэффициентами:

$$K(p) = \frac{W(p)}{V(p)} = \frac{W_1(p)}{V_1(p)} \cdot \frac{W_2(p)}{V_2(p)} \cdots \frac{W_n(p)}{V_n(p)} = K_1(p) K_2(p) \dots K_n(p). \quad (20.35)$$

Это представление  $K(p)$  можно всегда осуществить таким образом, чтобы каждая из функций  $K_k(p)$  удовлетворяла условиям физической реализуемости передаточных функций [47].

Реализовав составляющие  $K_k(p)$  в виде мостовых четырехполюсников постоянного характеристического сопротивления и соединив их каскадно, получим сложный четырехполюсник с заданной передаточной функцией  $K(p)$ . При этом общее число элементов цепи остается таким же, как и при реализации той же передаточной функции  $K(p)$  одним четырехполюсником. Однако при этом влияние отклонений параметров элементов от номинальных значений на характеристики цепи уменьшается.

Если по условиям задачи требуется, чтобы синтезируемый четырехполюсник был неуравновешенным, то можно от полученного мостового четырехполюсника перейти к эквивалентному неуравновешенному четырехполюснику или же сразу произвести синтез четырехполюсника с неуравновешенной структурой [47].

## 20.8. РЕАЛИЗАЦИЯ ЛЕСТНИЧНЫХ РЕАКТИВНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ, НАГРУЖЕННЫХ РЕЗИСТОРАМИ С ОДНОЙ ИЗ СТОРОН

Большое применение на практике находят лестничные реактивные четырехполюсники, нагруженные резисторами с одной из сторон. Питание таких четырехполюсников осуществляется от источников тока либо от источников э. д. с. При синтезе таких четырехполюсников их передаточные функции выражают через параметры холостого хода ( $Z_{11}$ ,  $Z_{12}$ ,  $Z_{21}$  и  $Z_{22}$ ) или короткого замыкания ( $Y_{11}$ ,  $Y_{12}$ ,  $Y_{21}$  и  $Y_{21}$ ) и активные сопротивления, подключенные к их зажимам.

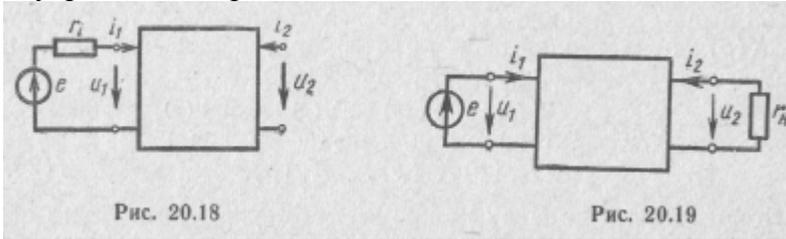
Ограничимся рассмотрением реактивных четырехполюсников при их питании от источника э. д. с. (рис. 20.18 и 20.19). Как показано в разд. 10, передаточную функцию по напряжению для схемы, приведенной на рис. 20.18, можно записать в виде

$$K_U(p) = \frac{U_2(p)}{E(p)} = \frac{Z_{21}}{r_l + Z_{11}}, \quad (20.36)$$

а для схемы, приведенной на рис. 20.19, — в виде

$$K_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = - \frac{Y_{21}}{1/r_H + Y_{22}} \quad (20.37)$$

Если в рассматриваемых четырехполюсниках сопротивление нагрузки  $r_H$  или внутреннее сопротивление источника э.д. с.  $r_i$



принять равным единице, т. е. осуществить нормирование сопротивлений, то выражения для передаточных функций (20.36) и (20.37) примут вид:

$$K_U(p) = \frac{U_2(p)}{E(p)} = \frac{Z_{21}}{1 + Z_{11}} \quad (20.38)$$

$$K_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = - \frac{Y_{21}}{1 + Y_{22}} \quad (20.39)$$

Аналогичную структуру имеют и передаточные функции четырехполюсника при подключении к его входным зажимам источника тока [9].

Вначале рассмотрим свойства передаточных функций лестничных четырехполюсников, которые используются при их синтезе.

### 20.8.1. Свойства передаточных функций лестничных четырехполюсников

Ограничимся рассмотрением свойств передаточного сопротивления  $Z_{21}(p)$  лестничного четырехполюсника (рис. 20.20). Основным свойством этого сопротивления является то, что его нули совпадают с полюсами сопротивлений последовательных ветвей и нулями сопротивлений параллельных ветвей. Это можно пояснить непосредственно по схеме четырехполюсника (рис. 20.20) исходя из физических соображений или показать математически. Например, для четырехполюсника, состоящего из одной параллельной ветви с сопротивлением  $Z_0$  (рис. 20.21), передаточное сопротивление

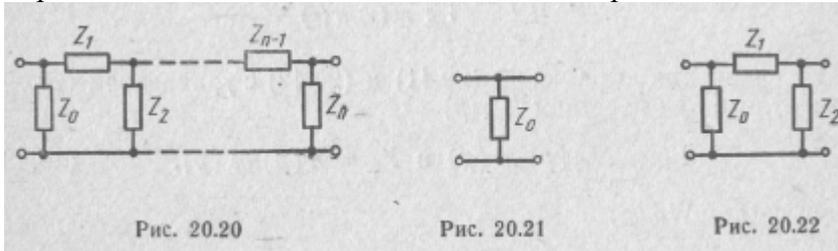
$$Z_{21}(p) = \frac{U_2(p)}{I_1(p)} = \frac{Z_0 I_1(p)}{I_1(p)} = Z_0.$$

Значит, в этом четырехполюснике нуль  $Z_{21}(p)$  совпадает с нулем  $Z_0$ , т. е. с нулем сопротивления параллельной ветви.

Для четырехполюсника, состоящего из трех ветвей (рис. 20.22), получим

$$Z_{21}(p) = \frac{U_2(p)}{I_1(p)} = \frac{Z_0 Z_2}{Z_0 + Z_1 + Z_2}.$$

Из этого выражения видно, что нули  $Z_{21}(p)$  совпадают с нулями сопротивлений параллельных ветвей  $Z_0$  и  $Z_2$  и полюсом сопротивления последовательной ветви  $Z_1$ .



Продолжая этот процесс и дальше, можно убедиться в справедливости указанного выше свойства  $Z_{21}(p)$ . Однако следует иметь в виду, что для некоторых лестничных четырехполюсников это свойство несправедливо [47].

Поскольку сопротивления ветвей лестничной схемы представляют собой положительные вещественные функции и не имеют ни нулей, ни полюсов в правой полуплоскости, то и нули передаточного сопротивления  $Z_{21}(p)$  лестничного четырехполюсника не могут находиться в правой полуплоскости. У реактивных лестничных четырехполюсников нули  $Z_{21}(p)$  находятся только на оси  $j\omega$ , а у лестничных четырехполюсников типа  $rC$  — только на вещественной отрицательной полуоси,

### 20.8.2. Реализация лестничных реактивных четырехполюсников, нагруженных резисторами с одной из сторон

Так как свойства  $Z$ - и  $Y$ -параметров четырехполюсников одинаковы, то выражения для их передаточных функций (20.38), (20.39) не только одинаковы по форме, но и имеют одинаковые свойства.

Из свойств  $Z$ - и  $Y$ -параметров реактивных четырехполюсников следует, что знаменатели передаточных функций таких четырехполюсников являются полиномами Гурвица, а числители — четными или нечетными полиномами [47]. Поэтому каждую из передаточных функций можно представить в виде

$$K(p) = \frac{N_{12}(p)}{m(p) + n(p)}, \quad (20.40)$$

где  $N_{12}(p)$  — четный или нечетный полином;  
 $m(p)$  и  $n(p)$  — четная и нечетная части полинома Гурвица.

При нечетном  $N_{12}(p)$  выражение (20.40) можно представить в виде

$$K(p) = \frac{N_{12}(p)/m(p)}{1 + n(p)/m(p)}, \quad (20.41)$$

а при четном  $N_{12}(p)$  — в виде

$$K(p) = \frac{N_{12}(p)/n(p)}{1 + m(p)/n(p)}. \quad (20.42)$$

Из сравнения выражений (20.41) и (20.42) с уравнением (20.39) следует, что при нечетном  $N_{12}(p)$

$$Y_{21} = N_{12}(p)/m(p) \text{ и } Y_{22} = n(p)/m(p), \quad (20.43)$$

а при четном  $N_{12}(p)$

$$Y_{21} = N_{12}(p)/n(p) \text{ и } Y_{22} = m(p)/n(p). \quad (20.44)$$

При этом задача реализации четырехполюсника по заданной функции  $K(p)$  сводится к реализации четырехполюсника без потерь по заданным двум  $Y$ -параметрам. Функция  $Y_{22}$  создается таким образом, чтобы реализовать желаемые нули  $Y_{21}$ . Полюсы  $Y_{21}$  при этом реализуются автоматически, так как они совпадают с полюсами  $Y_{22}$ . Поэтому порядок реализации зависит от расположения нулей  $N_{12}(p)$ .

Если заданной является функция (20.38), то для  $Z_{21}$  и  $Z_{11}$  получим выражения, аналогичные формулам (20.43) и (20.44).

Наиболее просто реализуются по заданным передаточным функциям лестничные реактивные четырехполюсники, нули передаточных функций которых находятся только при  $p = \infty$ .

Пример 20.6.

Произвести синтез реактивного четырехполюсника без потерь, если при активной нагрузке с нормированным значением, равным единице, его передаточная функция по напряжению имеет вид

$$K(p) = 1/(p^3 + 2p^2 + 2p + 1).$$

Решение.

Числитель  $K(p)$  является четной функцией, поэтому, воспользовавшись выражением (20.44), получим

$$Y_{21} = \frac{1}{p^3 + 2p}; \quad Y_{22} = \frac{2p^2 + 1}{p^3 + 2p}.$$

Функцию  $Y_{22}$  необходимо реализовать таким образом, чтобы она создавала нуль  $Y_{21}$  третьей кратности при  $p = \infty$ . Для этого схема четырехполюсника должна иметь три ветви, создающие нули передаточной функции при  $p = \infty$ . Такими ветвями в лестничном четырехполюснике являются последовательные ветви, имеющие попорядку сопротивления при  $p = \infty$ , либо параллельные ветви, имеющие нули сопротивления при  $p = \infty$ . В первом случае эти ветви должны содержать только индуктивности, а во втором — только емкости.

Такие ветви можно получить путем разложения  $Y_{22}$  в цепную дробь

$$Y_{22} = \frac{1}{\frac{1}{2}p + \frac{1}{\frac{4}{3}p + \frac{1}{\frac{3}{2}p}}}$$

Это разложение обеспечивает нуль третьей кратности функции  $K(p)$  при  $p = \infty$ . По произведенному разложению можно построить реактивный четырехполюсник, схема которого приведена на рис. 20.23.

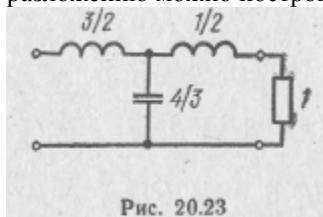


Рис. 20.23

Методика реализации реактивных четырехполюсников, нули передаточных функций которых находятся не только при  $j\omega = \infty$ , но и в других точках оси  $j\omega$ , рассмотрена, например, в [47].

## 20.9. РЕАЛИЗАЦИЯ ЛЕСТНИЧНЫХ РЕАКТИВНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ, НАГРУЖЕННЫХ РЕЗИСТОРАМИ С ДВУХ СТОРОН

Большой практический интерес представляет синтез реактивного четырехполюсника, нагруженного с обеих сторон в случае, когда сопротивление нагрузки и внутреннее сопротивление источника э.д.с.  $E_{вх}$  (см. рис. 10.2) являются активными сопротивлениями:  $Z_H = r_H$  и  $Z_{BH} = r_{BH}$ .

При реализации такого четырехполюсника используют волновой коэффициент передачи  $S_{21}$ , выражение которого после замены  $j\omega$  в формуле (10.75) на  $p$  можно записать в операторной форме:

$$S_{21}(p) = 2 \sqrt{\frac{R_{01}}{R_{02}}} \frac{U_2(p)}{E_{вх}(p)} \bigg|_{\substack{Z_{BH} = r_{BH} \\ Z_H = r_H}} = 2 \sqrt{\frac{r_{BH}}{r_H}} \frac{U_2(p)}{E_{вх}(p)}. \quad (20.45)$$

Необходимым и достаточным условием реализации этой передаточной функции [47] является то, чтобы она представляла собой рациональную дробь вида

$$S_{21}(p) = W(p)/V(p), \quad (20.46)$$

где  $V(p)$ —полином Гурвица;

$W(p)$ —четный или нечетный полином.

Для установления связи между волновым коэффициентом передачи четырехполюсника  $S_{21}$ , который задается при синтезе реактивного четырехполюсника, нагруженного резисторами с двух сторон, с его передаточной функцией по напряжению  $K_U(p) =$

—  $U_2(p)/U_1(p)$ , по которой осуществляют его синтез, обратимся к равенству (10.81a), которое характерно для четырехполосников без потерь и при  $j\omega = p$  имеет вид

$$|S_{11}(p)|^2 + |S_{21}(p)|^2 = 1, \quad (20.47)$$

где  $S_{11}(p)$  — коэффициент отражения на входе четырехполосника, в соответствии с выражением (10.70) равный в рассматриваемом случае

$$S_{11}(p) = \frac{Z_{\text{вх}1} - r_{\text{вн}}}{Z_{\text{вх}1} + r_{\text{вн}}}, \quad (20.48)$$

После подстановки выражения (20.46) в уравнение (20.47), получим

$$|S_{11}(p)|^2 + |W(p)/V(p)|^2 = 1,$$

или

$$|S_{11}(p)|^2 = 1 - \left| \frac{W(p)}{V(p)} \right|^2 = \frac{|V(p)|^2 - |W(p)|^2}{|V(p)|^2} = \frac{|h(p)|^2}{|V(p)|^2}, \quad (20.49)$$

где  $|h(p)|^2 = |V(p)|^2 - |W(p)|^2$

Выражение (20.45) представим в виде

$$S_{21}(p) = 2 \sqrt{\frac{r_{\text{вн}}}{r_{\text{н}}}} \frac{U_2(p)}{U_1(p)} \cdot \frac{U_1(p)}{E_{\text{вх}}(p)} = 2 \sqrt{\frac{r_{\text{вн}}}{r_{\text{н}}}} \frac{U_1(p)}{E_{\text{вх}}(p)} K_U(p), \quad (20.50)$$

где  $K_U(p) = U_2(p)/U_1(p)$ .

Из формулы (20.50) выразим передаточную функцию четырехполосника по напряжению

$$K_U(p) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{вн}}}} \frac{E_{\text{вх}}(p)}{U_1(p)} S_{21}(p).$$

Учитывая, что здесь

$$\frac{U_1(p)}{E_{\text{вх}}(p)} = \frac{Z_{\text{вх}1}}{Z_{\text{вх}1} + r_{\text{вн}}} = \frac{1}{2} \frac{(Z_{\text{вх}1} + r_{\text{вн}}) + (Z_{\text{вх}1} - r_{\text{вн}})}{Z_{\text{вх}1} + r_{\text{вн}}} = \frac{1 + S_{11}(p)}{2},$$

получим

$$K_U(p) = S_{21}(p) \sqrt{\frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{вн}}}} \frac{1}{1 + S_{11}(p)}. \quad (20.51)$$

Подставив сюда выражения (20.46) и (20.49), получим окончательно

$$K_U(p) = \sqrt{\frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{вн}}}} \frac{W(p)}{V(p) + h(p)}. \quad (20.52)$$

Это выражение обычно и используют при синтезе реактивного четырехполосника, нагруженного резисторами с двух сторон. Рассмотрим это на конкретном примере.

#### Пример 20.7.

Произвести синтез реактивного четырехполосника, включенного между источником э. д. с., внутреннее сопротивление которого  $r_{\text{вн}}$  чисто активно и

равно 1 Ом, и нагрузкой с чисто активным сопротивлением  $r_H=1$  Ом, волновой коэффициент передачи которого имеет вид

$$S_{21}(p) = \frac{15}{p^3 + 6p^2 + 15p + 15}$$

Решение.

Воспользовавшись выражением  $|h(p)|^2 = |V(p)|^2 - |W(p)|^2$ , найдем  $|h(p)|^2 = h(p)h(-p) = -p^6 + 6p^4 - 45p^2$ .

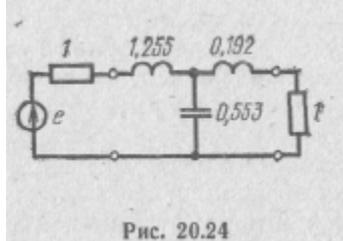


Рис. 20.24

Отсюда можно найти

$$h(p) = \pm(p^3 + 4,4064p^2 + 6,7082p).$$

С помощью выражения (20.52) найдем

$$K_U(p) = \frac{15}{2p^3 + 10,4064p^2 + 21,7082p + 15}.$$

Так же, как и в примере 20.6, разделив числитель и знаменатель  $K_U(p)$  на нечетную часть полинома знаменателя, найдем параметры четырехполюсника:

$$Y_{21} = \frac{15}{2p^3 + 21,7082p}; \quad Y_{22} = \frac{10,4064p^2 + 15}{2p^3 + 21,7082p}.$$

Так как в данном случае параметр  $Y_{21}$  имеет только нуль третьей кратности при  $p = \infty$ , то, разлагая  $Y_{22}$  в цепную дробь, получим

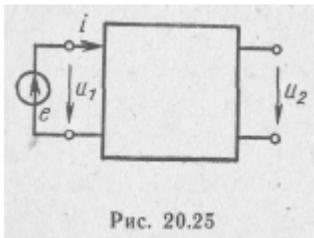
$$Y_{22} = \frac{1}{0,192p + \frac{1}{0,553p + \frac{1}{1,255p}}}.$$

Этой дроби соответствует схема реактивного четырехполюсника, приведенная на рис. 20,24.

## 20.10. РЕАЛИЗАЦИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ ТИПА $rC$

С помощью четырехполюсников типа  $rC$  можно реализовывать передаточные функции с простыми отрицательными вещественными полюсами и нулями, расположение которых ограничено структурой цепи. У лестничных схем четырехполюсников типа  $rC$  нули находятся на вещественной отрицательной полуоси, у перекрытых Т-образных схем — в левой полуплоскости, у мостовых и двойных Т-образных схем — как в левой, так и в правой полуплоскостях [47].

Ограничимся рассмотрением реализации лестничных схем четырехполюсников типа  $rC$ ,



Будем считать, что к входу такого четырехполюсника подключен идеальный источник напряжения, а выходные зажимы четырехполюсника разомкнуты (рис. 20.25). Такому включению, например, соответствует включение четырехполюсника между катодным повторителем, выходное сопротивление которого значительно меньше, чем входное сопротивление четырехполюсника, и входом усилительного каскада, входной ток у которого отсутствует.

Передаточная функция такого четырехполюсника по напряжению в соответствии с формулой (20.38) будет иметь вид

$$K_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}}. \quad (20.53)$$

где  $Z_{11}$  и  $Z_{21}$  являются  $Z$ -параметрами холостого хода рассматриваемого четырехполюсника.

Вид передаточных функций по напряжению (20.53), которые можно реализовать с помощью четырехполюсника рассматриваемого типа, определяется видом функций  $Z_{11}$  и  $Z_{21}$  этого четырехполюсника.

Вид функции  $Z_{11}$  можно непосредственно установить по виду функции входного сопротивления  $Z_{rc}(p)$  двухполюсника типа  $rC$  (подразд. 20.5):

$$Z_{11} = S(p)/q(p). \quad (20.54)$$

В этом выражении высшая степень полинома  $S(p)$  на единицу меньше или равна степени полинома  $q(p)$ . Все нули полиномов  $S(p)$  и  $q(p)$  расположены на вещественной отрицательной полуоси, являются простыми и взаимно чередуются. Ближайшим к началу координат является нуль полинома  $q(p)$ . Этот нуль может находиться и в начале координат. Полином  $S(p)$  нулей, находящихся в начале координат, иметь не может.

Функцию  $Z_{21}$ , как показано в [47], можно представить в виде

$$Z_{21} = m(p)/q(p), \quad (20.55)$$

где  $q(p)$  —рассмотренный выше полином;

$m(p)$  —полином, степень которого не превышает степени полинома  $S(p)$ .

Для лестничного четырехполюсника типа  $rC$  все нули полинома  $m(p)$  находятся на вещественной отрицательной полуоси, могут быть кратными и равными нулю. В частном случае полином  $m(p)$  может быть равен вещественной положительной постоянной величине.

Подставив выражения (20.54) и (20.55) в формулу (20.53), получим

$$K_U(p) = m(p)/S(p). \quad (20.56)$$

Из этого выражения и установленных выше свойств полиномов  $m(p)$  и  $S(p)$  следует, что с помощью лестничного четырехполюсника типа  $rC$ , к входу которого подключается идеальный источник э. д. с., а выходные зажимы которого разомкнуты, можно реализовать передаточную функцию по напряжению, которая обладает следующими свойствами:

а) все ее полюсы являются простыми и расположены на вещественной отрицательной полуоси, исключая нуль и бесконечность;

б) все ее нули также расположены на вещественной отрицательной полуоси, однако в отличие от полюсов они могут быть кратными и находиться в начале координат и бесконечности.

При реализации рассматриваемого четырехполюсника по заданной передаточной функции по напряжению (20.56) вначале находят два из  $Z$ -параметров холостого хода четырехполюсника —  $Z_{11}$  и  $Z_{21}$ . Для этого делят числитель и знаменатель уравнения (20.56) на полином  $q(p)$ . Этот полином выбирается произвольно. Однако он должен удовлетворять указанным выше ограничениям: его степень должна быть на единицу больше или равна степени полинома  $S(p)$ , а его нули должны находиться на вещественной отрицательной полуоси и чередоваться с нулями полинома  $S(p)$ . Причем ближайшим к началу координат должен быть нуль полинома  $q(p)$ . Этот нуль может находиться и в начале координат.

Порядок реализации рассматриваемого четырехполюсника по найденным параметрам  $Z_{11}$  и  $Z_{21}$  аналогичен порядку реализации лестничного четырехполюсника типа  $LC$ . Так как полюсы  $Z_{21}$  являются одновременно и полюсами  $Z_{11}$ , то они при реализации  $Z_{11}$  реализуются автоматически. Поэтому порядок реализации четырехполюсника зависит только от расположения нулей передаточной функции  $K_U(p)$ . Эти нули, как показано ранее при рассмотрении лестничных четырехполюсников типа  $LC$ , можно реализовать или последовательной ветвью, сопротивление которой имеет здесь полюс, т. е. равно бесконечности, или параллельной ветвью, сопротивление которой здесь равно нулю.

Следует отметить, что из-за некоторой произвольности выбора полинома  $q(p)$  можно получить большое количество различных схем четырехполюсников, реализующих заданную передаточную функцию. Полином  $q(p)$  целесообразно выбирать таким образом, чтобы схема четырехполюсника получилась с меньшим количеством элементов и чтобы эти элементы были более удобными для реализации. Для этого нужна определенная практика и опыт. Более подробно синтез четырехполюсников типа  $rC$  рассмотрен, например, в [47]. Здесь же ограничимся рассмотрением двух примеров.

#### Пример 20.8.

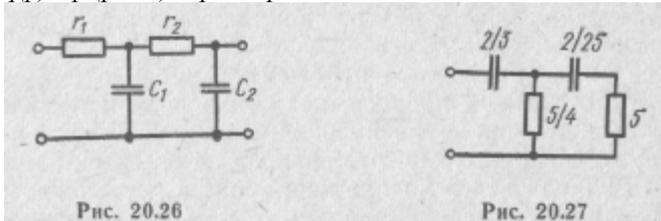
Произвести синтез четырехполюсников типа  $rC$ , если его передаточная функция по напряжению имеет вид

$$K_U(p) = \frac{k}{(p+3)(p+1)}.$$

Решение.

По заданной функции  $K_U(p)$  найдем параметры четырехполюсника  $Z_{11}$  и  $Z_{21}$ . Для этого выберем полином

$$q(p) = p(p+2) = p^2 + 2p.$$



При этом получим

$$Z_{11} = \frac{S(p)}{q(p)} = \frac{(p+3)(p+1)}{p(p+2)} = \frac{p^2 + 4p + 3}{p^2 + 2p};$$

$$Z_{21} = \frac{m(p)}{q(p)} = \frac{k}{p(p+2)} = \frac{k}{p^2 + 2p}.$$

Как показано в примере 20.4,  $Z_{11}$  можно представить в виде непрерывной дроби

$$Z_{11} = 1 + \frac{1}{0.5p + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{1}{6}p}}}.$$

Этой дроби соответствует четырехполюсник, схема которого приведена на рис. 20.26, где  $r_1 = 1$ ;  $C_1 = 0,5$ ;  $r_2 = 4$ ;  $C_2 = 1/6$  — нормированные значения.

Передаточная функция полученного четырехполюсника имеет вид

$$K_U(p) = \frac{3}{(p+3)(p+1)},$$

т. е. получившийся при синтезе четырехполюсник реализует заданную передаточную функцию с точностью до постоянного множителя  $k=3$ .

### Пример 20.9.

Произвести синтез лестничного четырехполюсника типа  $rC$ , если его передаточная функция по напряжению

$$K_U(p) = \frac{kp^3}{(p+3)(p+1)}.$$

Решение.

Выбрав полином  $q(p) = p(p+2)$ , получим

$$Z_{11} = \frac{(p+3)(p+1)}{p(p+2)}; \quad Z_{21} = \frac{p}{p+2}.$$

Как показано в примере 20.4,  $Z_{11}$  можно представить в виде непрерывной дроби

$$Z_{11} = \frac{3}{2p} + \frac{1}{\frac{4}{5} + \frac{1}{\frac{25}{2p} + \frac{1}{1/5}}}.$$

которой соответствует схема четырехполюсника, приведенная на рис. 20.27.

## 20.11. ПОНЯТИЕ О СИНТЕЗЕ АКТИВНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

В последние годы в связи с развитием микроэлектроники большое применение на практике получили активные  $rC$ -цепи. С помощью этих цепей можно реализовывать такие же функции, как и функции цепей, состоящих из пассивных элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$  [13, 38].

Многообразные методы и схемы реализации активных  $rC$ -цепей [13, 23, 30, 32, 38, 62, 63] в зависимости от типа активных приборов можно разделить на методы и схемы реализации с усилителями, имеющими конечный коэффициент усиления; с усилителями, имеющими бесконечный коэффициент усиления (операционные усилители); с конверторами и с инверторами (гираторами).

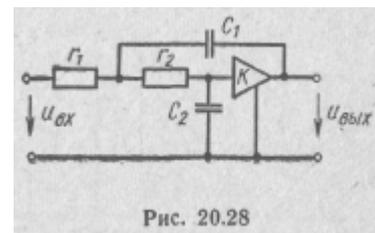


Рис. 20.28

Из этих методов реализации наибольшее распространение получили схемы с усилителями, имеющими конечный коэффициент усиления, и схемы с операционными усилителями. К настоящему времени разработано большое число различных моделей схем с такими усилителями и методик их расчета. Наиболее распространенной является методика, сущность которой состоит в следующем. Выбирается некоторая электронная модель, представляющая собой соединение активного прибора с пассивными элементами  $r$  и  $C$ . Определяется выражение для передаточной функции модели, в которой неизвестными являются параметры активных и пассивных элементов. При этом можно использовать различные методы анализа цепей, например матричный метод или метод структурных схем. Передаточная функция модели приравнивается к заданной передаточной функции. Из сравнения этих функций записывается система уравнений, в результате решения которой определяются параметры синтезируемой цепи. Рассмотрим это на примерах.

### Пример 20.10.

Реализовать передаточную функцию по напряжению  $K(p) = b_0/(a_2p^2 + a_1p + 1)$  на усилителе напряжения, управляемом напряжением с конечным коэффициентом усиления, если  $b_0=10$ ,  $a_2=1$ ,  $a_1=1,4$ .

Решение.

Для реализации выберем схему, приведенную на рис. 20.28. Считая усилитель напряжения идеальным, т. е. приняв его входное сопротивление равным бесконечности, а выходное сопротивление равным нулю, получим эквивалентную схему, показанную на рис. 20.29. Для определения передаточной функции рассматриваемой цепи воспользуемся методом структурных схем. Передаточные функции отдельных звеньев обобщенной структурной схемы цепи с обратной связью (см, рис. 19.5) получим следующим образом.

Подключив ко входным зажимам цепи (см. рис. 20.29) источник напряжения  $u_{вх}$  и приняв  $k=0$ , получим:

$$K_0(p) = U_{ВЫХ}(p)/U_{ВХ}(p) = 0;$$

$$K_{ВХ}(p) = U_1(p)/U_{ВХ}(p) = 1/[C_1 C_2 r_1 r_2 p^2 + (C_2 r_1 + C_1 r_1 + C_2 r_2)p + 1].$$

Подключив к выходным зажимам цепи источник напряжения  $u_{вых}$ , приняв  $k=0$  и замкнув накоротко входные зажимы цепи, получим

$$K_{о.с}(p) = U_1(p)/U_{ВЫХ}(p) = C_1 r_1 p/[C_1 C_2 r_1 r_2 p^2 + (C_2 r_1 + C_1 r_1 + C_2 r_2)p + 1].$$

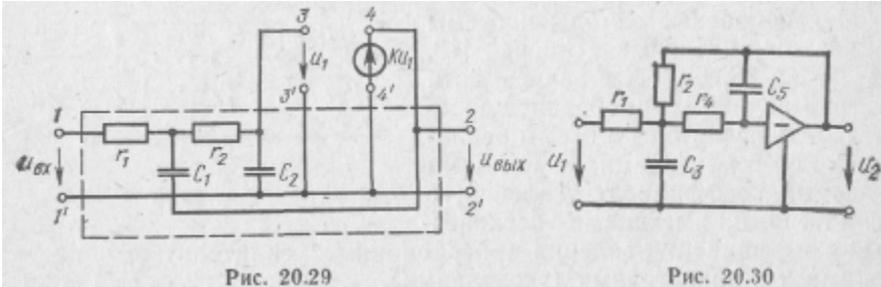


Рис. 20.29

Рис. 20.30

Разомкнув цепь обратной связи левее зажимов 3—3', подключив к этим зажимам источник напряжения  $u_1$  и замкнув накоротко входные зажимы цепи, получим

$$K_a(p) = U_{ВЫХ}(p)/U_1(p) = k.$$

Считая, что в рассматриваемой схеме  $k>0$ , получим передаточную функцию цепи по напряжению

$$K(p) = \frac{U_{ВЫХ}(p)}{U_{ВХ}(p)} = \frac{K_{ВХ}(p) K_a(p)}{1 - K_a(p) K_{о.с}(p)} = \frac{k}{C_1 C_2 r_1 r_2 p^2 + [C_2 r_1 + C_2 r_2 + C_1 r_1 (1 - k)] p + 1}.$$

Сравнивая эту функцию с заданной, запишем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} k &= 10; \\ C_1 C_2 r_1 r_2 &= 1; \\ C_2 r_1 + C_2 r_2 + C_1 r_1 (1 - k) &= 1,4. \end{aligned} \right\}$$

Решение этой системы можно найти методом проб. Одно из таких решений дает следующие параметры элементов:  $r_1=1$  Ом;  $r_2=1$  Ом;  $C_1=0,4$  Ф;  $C_2=2,5$  Ф;  $k=10$ .

### Пример 20.11.

Реализовать передаточную функцию по напряжению  $K(p) = 1/(p^2+p+1)$  на операционном усилителе.

Решение.

Для реализации выберем схему, приведенную на рис. 20.30 [13]. Как и в предыдущем примере, для определения передаточной функции этой схемы воспользуемся методом структурных схем. При этом, считая, что операционный усилитель является идеальным ( $k = -\infty$ ;  $r_{ВХ} = \infty$ ;  $r_{ВЫ} X = 0$ ), получим:

$$\left. \begin{aligned} K_0(p) &= 0; \\ K_{ВХ}(p) &= \frac{r_2}{p^2 r_1 r_2 r_4 C_3 C_6 + [(r_1 r_2 + r_1 r_4 + r_2 r_4) C_6 + r_1 r_2 C_3] p + r_1 + r_2}; \\ K_{о.с}(p) &= \frac{p^2 r_1 r_2 r_4 C_3 C_6 + (r_1 r_2 + r_1 r_4 + r_2 r_4) p C_6 + r_1}{p^2 r_1 r_2 r_4 C_3 C_6 + [(r_1 r_2 + r_1 r_4 + r_2 r_4) C_6 + r_1 r_2 C_3] p + r_1 + r_2}; \\ K_a(p) &= -\infty. \end{aligned} \right\}$$

Подставив эти значения в выражение для передаточной функции обобщенной структурной схемы цепи с обратной связью (19.3), получим

$$K(p) = -\frac{K_{нх}(p)}{K_{ос}(p)} = -\frac{r_2/r_1}{p^2 r_2 r_4 C_3 C_5 + p C_5 (r_2 + r_4 + r_2 r_4 / r_1) + 1}.$$

Сравнив эту функцию с заданной, получим систему нелинейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} r_2/r_1 &= 1; \\ r_2 r_4 C_3 C_5 &= 1; \\ C_5 (r_2 + r_4 + r_2 r_4 / r_1) &= 1. \end{aligned} \right\}$$

одно из решений которой дает следующие параметры элементов:  $r_1=1$  Ом;  $r_2=1$  Ом;  $r_4=0,5$  Ом;  $C_3=4$  Ф;  $C_5=0,5$  Ф.

Следует отметить, что для улучшения стабильности характеристик активных  $rC$ -цепей реализацию их передаточных функций производят, как правило, путем развязанного каскадного включения отдельных звеньев с передаточными функциями первого и второго порядков.

Современное состояние и проблемы синтеза активных  $rC$ -цепей наиболее полно освещены в работе [13], в которой дается систематический обзор практически всех публикаций по вопросам синтеза активных  $rC$ -цепей с сосредоточенными постоянными параметрами.

## 20.12. ЗАДАЧА АППРОКСИМАЦИИ В ПРОБЛЕМЕ СИНТЕЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Синтез электрических цепей, как указывалось в подразд. 20.1, связан с решением двух задач: аппроксимации и реализации.

Задача аппроксимации состоит в нахождении функции  $F(x)$  переменного  $x$ , удовлетворяющей условиям физической реализуемости, которая с необходимой точностью воспроизводит бы заданную функцию  $\xi(x)$  в требуемом интервале  $x$ . Этой заданной функцией  $\xi(x)$  может быть амплитудно-частотная, фазо-частотная или одна из временных характеристик электрической цепи (переходная  $h(t)$  или импульсная  $a(t)$  характеристики). Эти характеристики могут быть заданы аналитически или графически. Если заданной является одна из временных характеристик, то эту характеристику можно преобразовать по Лапласу в функцию частоты. Однако задаваемая степень приближения при аппроксимации временной функции переводится в степень приближения по частоте с большими трудностями вычислительного характера. Поэтому если заданными являются временные характеристики, то синтез электрической цепи целесообразно производить не в частотной, а во временной области [2, 27].

Задача аппроксимации решается с привлечением методов интерполирования и приближения функций, которые излагаются в высшей математике. Здесь же ограничимся кратким рассмотрением аппроксимации в виде «гладкой» кривой (аппроксимации по

Тейлору) и наилучшего (равномерного) приближения (аппроксимации по Чебышеву), которые находят широкое применение при синтезе электрических цепей.

### 20.12.1. Аппроксимация по Тейлору

Функция  $P(x)$  является аппроксимирующей функцией  $n$ -го порядка по Тейлору относительно функции  $\xi(x)$  (рис. 20.31), если в точке  $x=x_0$  равны значения этих функций и  $n-1$  производных

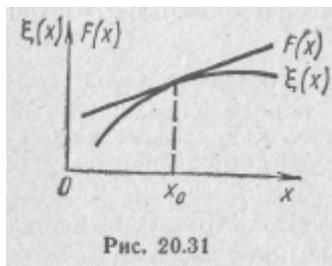


Рис. 20.31

младших порядков, т. е.

$$\left. \begin{aligned} F(x_0) &= \xi(x_0); \\ F'(x_0) &= \xi'(x_0); \\ &\dots \dots \dots \\ F^{(n-1)}(x_0) &= \xi^{(n-1)}(x_0). \end{aligned} \right\} \quad (20.57)$$

Погрешность рассматриваемой аппроксимации  $F(x) - \xi(x)$  можно найти, если каждую из функций представить рядом Тейлора:

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x_0) + \frac{F'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{F^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} + \dots; \\ \xi(x) &= \xi(x_0) + \frac{\xi'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{\xi^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

Тогда

$$F(x) - \xi(x) = \frac{F^{(n)}(x_0) - \xi^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots, \quad (20.58)$$

т. е. при аппроксимации по Тейлору первые  $n-1$  производных функций отклонения  $F(x) - \xi(x)$  при  $x=x_0$  равны нулю. С увеличением разности  $x - x_0$  отклонение увеличивается. Следовательно, рассматриваемая аппроксимация описывает заданную функцию наиболее точно при значениях  $x$ , близких к  $x_0$ , и менее точно при значениях  $x$ , значительно отличающихся от  $x_0$ .

### 20.12.2. Аппроксимация по Чебышеву

Функция  $F(x)$  аппроксимирует по Чебышеву функцию  $\xi(x)$ , если эта функция выбрана таким образом, что наибольшее значение модуля разности  $|F(x) - \xi(x)|$  -- интервале приближения является минимальным.

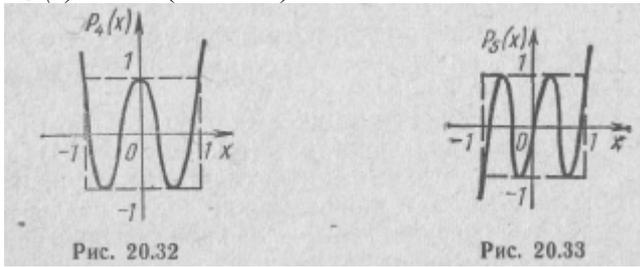
Этот тип аппроксимации назван по имени русского математика академика П. Л. Чебышева (1821—1894 гг.), который впервые сформулировал и указал общие методы решения задачи наилучшего приближения функций. Теория наилучшего приближения функций, основанная П. Л. Чебышевым, была блестяще развита в работах наших соотечественников Е. И. Золотарева, П. И. Ахиезера и др.

При решении задач наилучшего приближения функций большое применение находят так называемые полиномы Чебышева, которые вычисляются по формуле

$$P_n(x) = \cos(n \arccos x). \quad (20.59)$$

При  $n=1$  получим

$$P_1(x) = \cos(\arccos x) = x.$$



При  $n=2$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \cos^2(\arccos x) = \cos^2(\arccos x) - \sin^2(\arccos x) = \\ &= \cos^2(\arccos x) - 1 + \cos^2(\arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1. \end{aligned}$$

При  $n=3; 4; 5$  эти полиномы имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} P_3(x) &= 4x^3 + 3x; \\ P_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1; \\ P_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x. \end{aligned} \right\} \quad (20.60)$$

Из приведенных выражений видно, что полиномы Чебышева представляют собой многочлены степени  $n$  с коэффициентом при старшем члене, равным  $2^{n-1}$ . В качестве примера на рис. 20.32 и 20.33 приведены графики полиномов  $P_4(x)$  и  $P_5(x)$ .

Особенностью полиномов Чебышева является то, что в интервале  $-1 \leq x \leq 1$  они из всех полиномов степени  $n$  с коэффициентом при старшем члене  $2^{n-1}$  наименее отклоняются от нуля. Вне указанного выше интервала значения этих полиномов по абсолютной величине являются наибольшими из всех полиномов степени  $n$ .

### 20.13. СИНТЕЗ ФИЛЬТРОВ ТИПА LC

При проектировании электрических фильтров в последнее время начали широко использовать общую теорию синтеза электрических цепей [4, 9], позволяющую реализовать заданную характеристику фильтра при минимальном числе его элементов. Чаще всего заданной характеристикой фильтра является его амплитудно-частотная характеристика. Обычно ограничиваются рассмотрением методики синтеза нормированного фильтра нижних частот, так как с помощью преобразования частоты от этого фильтра можно

перейти к фильтрам других типов. При этом под Нормированным фильтром нижних частот понимают такой фильтр, у которого нормированная частота среза  $\Omega_c = \omega / \omega_c = 1$  и сопротивление нагрузки равно единице. Идеальная амплитудно-частотная характеристика такого фильтра приведена на рис. 20.34, где по горизонтальной оси отложена нормированная частота  $\Omega = \omega / \omega_c$ .

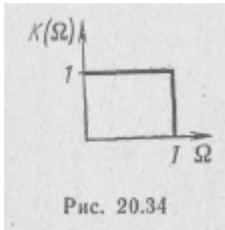


Рис. 20.34

Ограничимся рассмотрением методики синтеза нормированного фильтра нижних частот полиномиального типа, т. е. такого фильтра, у которого нули операторной передаточной функции или полюсы затухания находятся на бесконечно большой частоте.

Аппроксимацию амплитудно-частотной характеристики фильтра (см. рис. 20.34) осуществляют такими аналитическими функциями частоты  $\Omega$ , чтобы по этим функциям можно было получить реализуемые операторные передаточные функции реактивного четырехполюсника  $K(p)$ . Выражение квадрата амплитудно-частотной характеристики фильтра нижних частот полиномиального типа, имеет вид

$$|K(j\Omega)|^2 = 1 / (1 + A_1\Omega^2 + \dots + A_n\Omega^{2n}). \quad (20.61)$$

Величины коэффициентов  $A_n$  зависят от выбранного типа аппроксимации.

Рассмотрим синтез нормированных фильтров нижних частот полиномиального типа с аппроксимацией их амплитудно-частотных характеристик по Тейлору и по Чебышеву.

### 20.13.1. Синтез фильтров нижних частот с аппроксимацией их амплитудно-частотных характеристик по Тейлору

При аппроксимации амплитудно-частотной характеристики фильтра нижних частот по Тейлору требуется, чтобы при  $\Omega = 0$  функция (20.61) была равна единице, а все ее  $2n-1$  первых производных были равны нулю. Этим требованиям удовлетворяет функция [47]

$$|K(j\Omega)|^2 = 1 / (1 + A_n\Omega^{2n}). \quad (20.62)$$

Такую функцию обычно называют максимально плоской или максимально гладкой.

На границе полосы пропускания фильтра ( $\Omega=1$ ) аппроксимирующая функция принимает вид

$$|K(j1)|^2 = 1 / (1 + A_n). \quad (20.63)$$

Обычно принимают  $A_n=1$ . При этом  $|K(j1)|^2=0,5$ ;  $|K(j1)| \approx 0,707$ , а аппроксимирующая функция (20.62) будет иметь вид.

$$|K(j\Omega)|^2 = 1 / (1 + \Omega^{2n}). \quad (20.64)$$

Для определения передаточной функции фильтра  $K(p)$  по аппроксимирующей функции  $|K(j\Omega)|^2$  произведем замену  $j\Omega = p$ . При этом получим

$$K^2(p) = K(p)K(-p) = \frac{1}{1 + \Omega^{2n}} \Big|_{\Omega^2 = -p^2} = \frac{1}{1 + (-1)^n p^{2n}}. \quad (20.65)$$

Приравняв нулю знаменатель этой функции, получим уравнение

$$1 + (-1)^n p^{2n} = 0.$$

Корни этого уравнения

$$p_k = e^{j \frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{2}} \quad (n \text{ четное});$$

$$p_k = e^{j \frac{2k}{n} \frac{\pi}{2}} \quad (n \text{ нечетное})$$

являются полюсами функции  $K^2(p)$ . Они располагаются на окружности с единичным радиусом на равных расстояниях друг от друга. Всего получается  $2n$  корней. Половина из них, находящаяся в левой полуплоскости  $p$ , относится к  $K(p)$ , а остальные — к  $K(-p)$ . При этом искомая передаточная функция фильтра будет иметь вид

$$K(p) = 1/V(p) = 1/(1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + p^n). \quad (20.66)$$

Полиномы знаменателя этого выражения получили название полиномов Баттерворта. Вычислять эти полиномы всякий раз, когда применяется аппроксимация по Тейлору, нет необходимости. Они приводятся в таблицах [47].

Полиномы Баттеворта младших степеней имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} V_1(p) &= p + 1; \\ V_2(p) &= p^2 + 1,41p + 1; \\ V_3(p) &= p^3 + 2p^2 + 2p + 1 = (p + 1)(p^2 + p + 1); \\ V_4(p) &= p^4 + 2,61p^3 + 3,41p^2 + 2,61p + 1 = \\ &= (p^2 + 0,76p + 1)(p^2 + 1,8p + 1); \\ V_5(p) &= p^5 + 3,24p^4 + 5,24p^3 + 5,2p^2 + 3,24p + 1 = \\ &= (p + 1)(p^2 + 0,62p + 1)(p^2 + 1,62p + 1). \end{aligned} \right\} \quad (20.67)$$

Степень  $n$  полинома Баттерворта определяют исходя из условий задачи на расчет фильтра, а при определении величин элементов фильтра учитывают нагрузку на его зажимах. Порядок расчета фильтра нижних частот с аппроксимацией его амплитудно-частотной характеристики по Тейлору рассмотрим на конкретном примере.

#### Пример 20.12.

Рассчитать нормированный фильтр нижних частот с аппроксимацией его амплитудно-частотной характеристики по Тейлору, если фильтр включен между

идеальным источником э. д. с. и активным сопротивлением  $r_H$ , нормированное значение которого равно единице. Значение амплитудно-частотной характеристики фильтра на нормированных частотах  $\Omega \geq 2$  должно быть не больше 0,1, а на границе полосы пропускания должно быть равно 0,707.

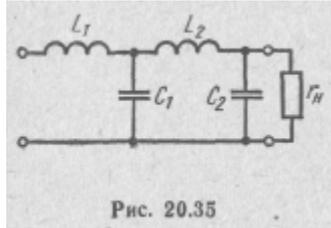


Рис. 20.35

Решение.

Для определения степени  $n$  полинома Баттерворта воспользуемся выражением (20.64). Используя условия задачи из этого выражения, получим

$$|K(j2)| = 1\sqrt{1 + 2^{2n}} \leq 0,1,$$

откуда найдем  $n \geq 3,33$ . Поэтому выбираем  $n=4$ .

Подставив в формулу (20.66) полином Баттерворта четвертой степени (20.67), получим выражение для операторной передаточной функции фильтра

$$K(p) = 1/(p^4 + 2,6p^3 + 3,4p^2 + 2,6p + 1).$$

Для реализации этой функции воспользуемся методикой реализации реактивных четырехполюсников, изложенной в подразд. 20.8. Так как числитель полученного выражения является четным полиномом, то, разделив четную часть знаменателя  $K(p)$  на его нечетную часть, найдем параметр  $Y_{22}$  синтезируемого четырехполюсника:

$$Y_{22} = (p^4 + 3,4p^2 + 1)/(2,6p^3 + 2,6p).$$

Разложив эту функцию в цепную дробь

$$Y_{22} = 0,38p + \frac{1}{1,1p + \frac{1}{1,6p + \frac{1}{1,5p}}}$$

получим реактивный четырехполюсник, схема которого приведена на рис. 20.35. Нормированные значения его элементов:

$$C_2 = 0,38; L_2 = 1,1; C_1 = 1,6; L_1 = 1,5; r_H = 1.$$

### 20.13.2. Синтез фильтров нижних частот с аппроксимацией их амплитудно-частотных характеристик по Чебышеву

При аппроксимации амплитудно-частотной характеристики фильтра нижних частот по Чебышеву квадрат этой характеристики представляют в виде

$$|K(j\Omega)|^2 = 1/[1 + \varepsilon^2 P_n^2(\Omega)], \quad (20.68)$$

где  $\varepsilon$  — коэффициент, определяющий неравномерность амплитудно-частотной характеристики в полосе пропускания фильтра;

$P_n(\Omega)$  — полином Чебышева степени  $n$  от нормированной частоты  $\Omega = \omega/\omega_C$

В качестве примера на рис. 20.36 приведен график  $|K(j\Omega)|^2$  при  $n=4$ . Из этого графика видно, что отклонения квадрата амплитудно-частотной характеристики в полосе пропускания фильтра от единицы имеют волновой характер. Поэтому рассматриваемую

аппроксимацию часто называют равноволновой. В полосе задерживания кривая зависимости  $|K(j\Omega)|$  монотонно убывает с увеличением частоты.

Для определения операторной передаточной функции фильтра  $K(p)$  по аппроксимирующей функции  $|K(j\Omega)|^2$  в выражении (20.68) произведем замену  $j\Omega = \sigma$ .

При этом получим

$$K^2(p) = K(p)K(-p) = 1/[1 + \varepsilon^2 P_n^2(\Omega/2)]. \quad (20.69)$$

Полюсами этой функции являются корни уравнения

$$1 + \varepsilon^2 P_n^2(\Omega/2) = 0,$$

которые равны [47]

$$p_k = \sigma_k + j\omega_k,$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma_k &= \pm \operatorname{sh} \left( \frac{1}{n} \operatorname{arsh} \frac{1}{\varepsilon} \right) \sin \frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{2}; \\ \omega_k &= \operatorname{ch} \left( \frac{1}{n} \operatorname{arsh} \frac{1}{\varepsilon} \right) \cos \frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (20.70)$$

Так как коэффициент при старшем члене знаменателя (20.68) равен  $\varepsilon^2(2^{n-1})^2$ , то искомая операторная передаточная функция фильтра будет иметь вид

$$K(p) = 1/\varepsilon 2^{n-1} (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n). \quad (20.71)$$

Эта функция реализуется реактивным четырехполюсником, содержащим  $n$  реактивных элементов.

Порядок расчета фильтра нижних частот с аппроксимацией его амплитудно-частотной характеристики по Чебышеву рассмотрим на конкретном примере.

### Пример 20.13.

Произвести расчет нормированного фильтра нижних частот по заданным в предыдущем примере требованиям к нему. Значение амплитудно-частотной характеристики фильтра в полосе пропускания должно быть не меньше 0,707, а ее аппроксимацию произвести по Чебышеву.

Решение.

В соответствии с уравнением (20.69) для амплитудно-частотной характеристики на границе полосы пропускания фильтра можно записать

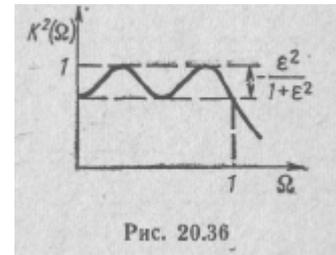
$$1/\sqrt{1 + \varepsilon^2 P_n^2(1)} = 0,707,$$

откуда можно найти  $\varepsilon=1$ .

Для определения степени полинома Чебышева я воспользуюсь выражением (20.69). Подставив в него найденное значение  $\varepsilon$  и учтя заданные условия для полосы задерживания, получим

$$1/\sqrt{1 + P_n^2(2)} \leq 0,1,$$

откуда  $P_n(2) \geq 10$ .



Воспользовавшись выражениями для полиномов Чебышева (подразд. 20.12), находим  $P_2(2)=7$  и  $P_3(2)=26$ . Следовательно, необходимо выбрать  $n = 3$ .

Воспользовавшись выражением (20.70), найдем полюсы передаточной функции:  $p_1=-0,3$ ;  $p_{2,3}=-0,15 \pm j0,87$ .

Подставив эти значения в формулу (20.71), получим выражение для передаточной функции

$$K(p) = 1/4(p + 0,3)(p^2 + 0,3p + 0,8) = 1/(4p^3 + 2,4p^2 + 3,6p + 1).$$

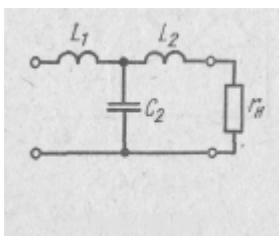


Рис. 20.37

Так как числитель полученного выражения является четной функцией, то, разделив четную часть знаменателя на его нечетную часть, получим параметр  $Y_{22}$  синтезируемого четырехполюсника:

$$Y_{22} = (2,4p^2 + 1)/(4p^3 + 3,6p).$$

Разложение этой функции в цепную дробь дает:

$$Y_{22} = \frac{1}{1,67 + \frac{1}{1,2p + \frac{1}{1,93p}}}$$

Этой дроби соответствует реактивный четырехполюсник, схема которого приведена на рис. 20.37. Нормированные значения его элементов равны:  $L_1=1,93$ ;  $C_1=1,2$ ;  $L_2=1,67$ ;  $r_H=1$ .

Рассмотренные примеры синтеза фильтров с аппроксимацией их амплитудно-частотных характеристик по Тейлору и Чебышеву показывают, что для удовлетворения одинаковых требований к амплитудно-частотным характеристикам фильтр с аппроксимацией по Чебышеву получается менее сложным, так как содержит меньшее число элементов, чем фильтр с аппроксимацией по Тейлору. Однако фазо-частотные характеристики фильтров с аппроксимацией по Чебышеву менее линейны, чем фильтров с аппроксимацией по Тейлору. Поэтому если не предъявляются особых требований к линейности фазо-частотных характеристик, то целесообразно применять аппроксимацию по Чебышеву, а если такие требования предъявляются, то применяют аппроксимацию по Тейлору.

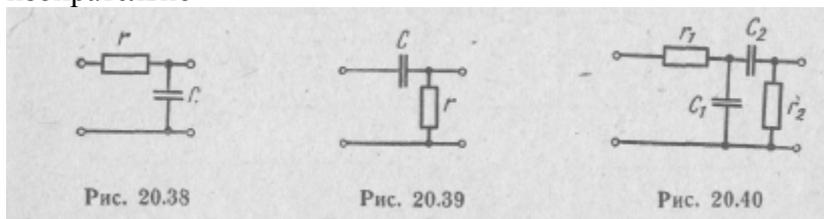
Кроме рассмотренных, применяются и другие виды аппроксимации [9, 32].

В заключение следует отметить, что расчет фильтров по рабочим параметрам требует значительной по объему вычислительной работы. Расчеты существенно усложняются, если их вести с учетом потерь в элементах фильтра. Поэтому в последнее время при синтезе электрических фильтров стали широко применяться электронные вычислительные машины.

## 20.14. ПОНЯТИЕ О СИНТЕЗЕ ПАССИВНЫХ И АКТИВНЫХ $rC$ -ФИЛЬТРОВ

В последние годы в связи с развитием микроэлектроники резко возрос интерес к проектированию селективных цепей, состоящих из сопротивлений, емкостей и транзисторов. Уже в настоящее

время гС-фильтры по большинству показателей начинают успешно конкурировать с обычными LC-фильтрами, особенно в диапазоне низких и инфранизких частот. Следует отметить, что, по крайней мере теоретически, возможности получения требуемых характеристик у цепей гС не хуже, чем у цепей LC. Однако для обеспечения высокой избирательно-



сти пассивные гС-фильтры требуют большого числа элементов и громоздких схемных структур. Поэтому в настоящее время наибольшее распространение получили активные гС-фильтры, в которых обеспечивается высокая, избирательность при достаточно *малой* массе и габаритах.

Методика синтеза пассивных гС-фильтров, изложенная, например, в [23], основывается на каскадном включении звеньев фильтра и пренебрежении влиянием последующих звеньев на характеристики предыдущих. Для обеспечения этого необходимо между отдельными звеньями ставить развязывающие усилители или же повышать уровень входного сопротивления каждого последующего звена, т. е. входное сопротивление каждого последующего звена делать более высокоомным.

Передаточную функцию полиномиального пассивного гС-фильтра нижних частот выбирают равной

$$K(p) = 1/(1 + \delta_1 p)^n. \quad (20.72)$$

Эта функция реализуется в виде каскадного включения простейших звеньев фильтра нижних частот (рис. 20.38), полюсы передаточных функций которых  $p_1 = -1/\delta_1$  являются кратными. Количество звеньев  $n$  и величина  $\delta$  выбираются исходя из условий задачи на расчет фильтра [23].

Переход от фильтров нижних частот к фильтрам верхних частот и полосовым фильтрам осуществляют с помощью преобразований частоты. Звено фильтра верхних частот приведено на рис. 20.39, а звено полосового фильтра — на рис. 20.40.

Вопросам синтеза активных гС-фильтров посвящено очень большое количество работ. Так как с помощью активных гС-цепей можно реализовывать передаточные функции с комплексными полюсами, т. е. такие же функции, как и с помощью гLC-цепей, то задача аппроксимации при синтезе активных гС-фильтров решается точно так же, как и при синтезе LC-фильтров,

Для улучшения стабильности характеристик реализацию активных гС-фильтров осуществляют, как правило, в виде каскадного включения отдельных звеньев с передаточными функциями не выше второго порядка.

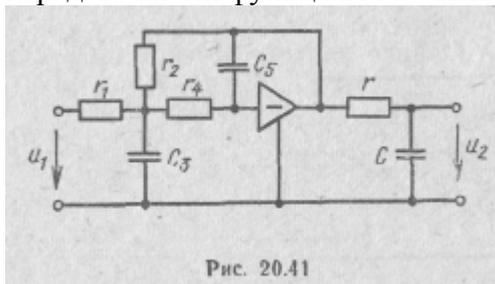


Рис. 20.41

Из многообразных методов и схем реализации звеньев активных гС-фильтров наибольшее распространение в настоящее время получили схемы с усилителями, имеющими конечный коэффициент усиления, и схемы с операционными усилителями. Методика

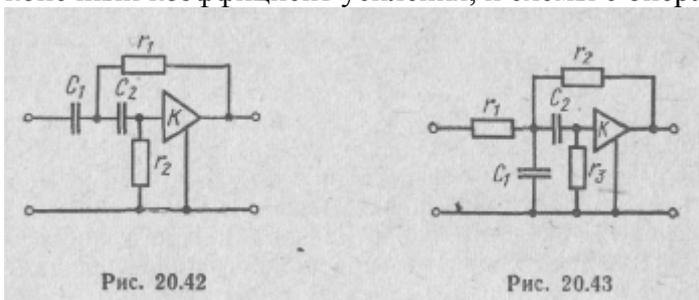


Рис. 20.42

Рис. 20.43

реализации звеньев второго порядка для фильтров нижних частот рассмотрена в подразд. 20.11. Звенья первого порядка реализуются, как правило, в виде пассивной гС-цепи. Порядок реализации многозвенного активного гС-фильтра рассмотрим на примере.

Пример 20.14.

Реализовать фильтр нижних частот третьего порядка, если его амплитудно-частотная характеристика аппроксимирована по Тейлору.

Решение. Учитывая, что полином Баттерворта третьего порядка (20.67) имеет вид

$$V_3(p) = p^3 + 2p^2 + 2p + 1 = (p + 1)(p^2 + p + 1).$$

для передаточной функции фильтра по напряжению получим

$$K(p) = \frac{1}{p + 1} \cdot \frac{1}{p^2 + p + 1}.$$

. Звено с передаточной функцией  $K_1(p) = 1/(p + 1)$  реализуем с помощью пассивной гС-цепи (см. рис. 20.38)

Сравнивая выражение передаточной функции этой цепи  $K(p) = 1/(1 + pCr)$  с заданной, найдем нормированные значения элементов:  $r=1, C=1,$

Звено с передаточной функцией  $K_2(p) = 1/(p^2+p+1)$  реализуем активной RC-цепью с операционным усилителем, схема которой приведена на рис. 20.30. Значения элементов этой схемы получены в примере 20.11.

Подключив звено первого порядка к выходу операционного усилителя звена второго порядка, получим схему искомого фильтра третьего порядка, показанную на рис. 20.41.

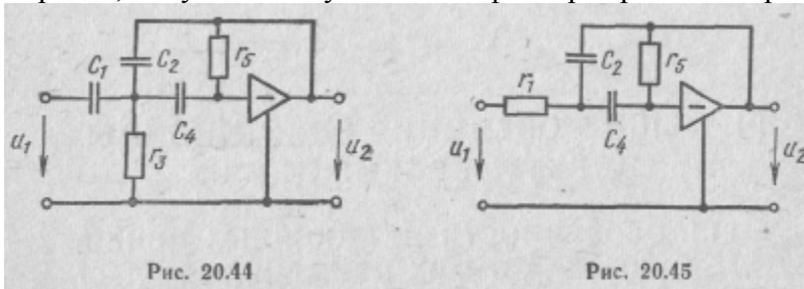


Рис. 20.44

Рис. 20.45

Схемы реализации звеньев фильтра верхних частот и полосового фильтра с усилителями, имеющими конечный коэффициент усиления, приведены на рис. 20.42 и 20.43.

На рис. 20.44 показана схема фильтра верхних частот, а на рис. 20.45—схема полосового фильтра с операционными усилителями.

Более подробно методика синтеза активных RC-фильтров изложена, например, в [13, 23, 30, 38, 62, 63].

## 21. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

### 21.1. ОСОБЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ И ОБЛАСТИ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Как уже указывалось в разд.1, нелинейной электрической цепью называют цепь, электрическое сопротивление, индуктивность или емкость хотя бы одного из участков которой зависит от значений или направлений токов и напряжений на этом участке цепи. Физические процессы, протекающие в нелинейных электрических цепях, описываются нелинейными алгебраическими или дифференциальными уравнениями, т. е. уравнениями, которые содержат нелинейные функции тока, напряжения и их производных, например, ток и напряжение в степенях выше первой или с коэффициентами, зависящими от тока или напряжения.

Нелинейные цепи имеют следующие основные особенности:

1. К ним неприменим принцип наложения. Рассмотрим это на примере нелинейного элемента, в котором ток пропорционален квадрату напряжения:  $i=au^2$ .

Если в цепи действуют одновременно два последовательно включенных источника напряжения  $u_1$  и  $u_2$ , то ток в цепи

$$i = a(u_1 + u_2)^2 = au_1^2 + 2au_1u_2 + au_2^2.$$

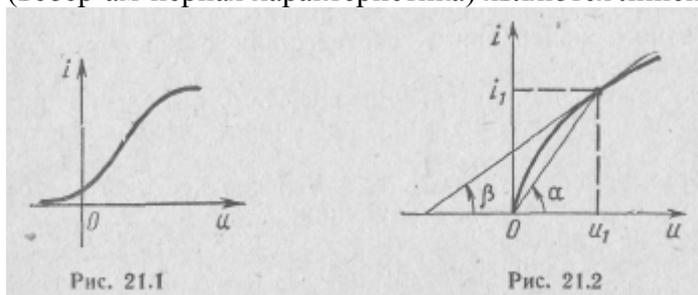
Этот ток не равен сумме токов, вызываемых в цепи действием каждого источника в отдельности:

$$i \neq i_1 + i_2 = au_1^2 + au_2^2.$$

2. В отличие от линейных цепей в нелинейных цепях в установившемся режиме при синусоидальном входном воздействии выходная величина будет несинусоидальной, т. е. на выходе цепи появляются гармонические составляющие частот, не содержащиеся во входном воздействии. Преобразование спектра частот — одна из характерных особенностей нелинейных цепей.

3. В отличие от линейных электрических цепей, в которых зависимость между током и напряжением (вольт-амперная характе-

ристика), зависимость заряда конденсатора от приложенного к нему напряжения (кулон-вольтная характеристика) и зависимость потокосцепления индуктивного элемента от тока (вебер-ам-перная характеристика) являются линейными, в нелинейных цепях



эти зависимости нелинейны. Пример нелинейной вольт-амперной характеристики приведен на рис. 21.1.

4. В нелинейных электрических цепях в отличие от линейных для характеристики элементов вводят так называемые статические и динамические параметры.

Статическим сопротивлением называют отношение постоянного напряжения на элементе к установившемуся значению постоянного тока:

$$r_c(i) = u/i.$$

Оно пропорционально котангенсу угла наклона линии, проведенной в рассматриваемую точку вольт-амперной характеристики нелинейного элемента из начала координат (рис. 21.2).

Динамическим сопротивлением нелинейного элемента называют производную от напряжения на этом элементе по току в нем:

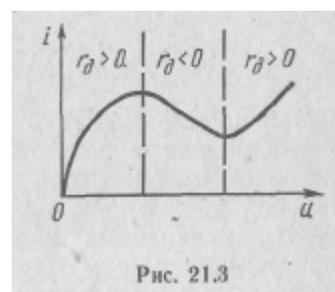
$$r_d(i) = \frac{du}{dt},$$

Оно пропорционально котангенсу угла наклона касательной в рассматриваемой точке вольт-амперной характеристики (см. рис. 21.2) и может быть как положительным, так и отрицательным

(рис. 21.3).

Статические и динамические параметры вводят также и для нелинейных индуктивностей и емкостей.

Нелинейные цепи находят большое применение во многих электротехнических устройствах. Ряд необходимых преобразований токов и напряжений возможно осуществить только в нелинейных электрических цепях. Такими преобразованиями являются:



преобразование переменного тока в постоянный, т. е. выпрямление;  
генерирование синусоидальных и релаксационных колебаний, т. е. преобразование постоянного тока в переменный синусоидальный или несинусоидальный;  
модуляция, т. е. изменение амплитуды, частоты или фазы высокочастотного колебания в соответствии с законом изменения управляющего сигнала;  
демодуляция или детектирование, т. е. выделение полезного управляющего сигнала из модулированных высокочастотных колебаний;  
преобразование частоты, т. е. изменение несущей частоты сигнала с сохранением закона модуляции;  
умножение и деление частоты;  
стабилизация напряжения и тока;  
построение математических функций и ряд других преобразований.

Большинство из названных выше преобразований рассматривается в инженерно-технических дисциплинах. Здесь же ограничимся рассмотрением общих сведений о нелинейных элементах, об аппроксимации их характеристик, о методах расчета нелинейных цепей и преобразовании спектров сигналов в нелинейных цепях.

## 21.2. КЛАССИФИКАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Нелинейные элементы можно разделить на три группы: нелинейные активные сопротивления  $r$ , нелинейные индуктивности  $L$  и нелинейные емкости  $C$ . Примером нелинейных активных сопротивлений являются вакуумные и полупроводниковые диоды и триоды, нелинейных индуктивностей — индуктивные катушки и трансформаторы с магнитопроводом, нелинейных емкостей — конденсаторы с диэлектриком из сегнетоэлектрика.

В каждой из этих групп нелинейные элементы, в свою очередь, можно разделить на два класса: неуправляемые и управляемые нелинейные элементы.

Неуправляемые нелинейные элементы всегда можно представить в виде двухполюсника. Ток этого двухполюсника зависит только от напряжения, приложенного к его зажимам. Такой нелинейный элемент характеризуется одной вольт-амперной характеристикой. Примером неуправляемого нелинейного сопротивления является вакуумный или полупроводниковый диод.

Управляемые нелинейные элементы обычно являются многополюсниками. Ток в главной цепи такого элемента зависит не только от напряжения, приложенного к главной цепи, но и от других параметров (управляющих факторов). Управляющие факторы могут быть электрическими и неэлектрическими. Примерами управляемых нелинейных элементов с электрическим управляющим фактором являются многоэлектродные электронные лампы и магнит-

ные усилители. Примером управляемого нелинейного сопротивления с неэлектрическим управляющим фактором является фоторезистор, величина тока через который зависит от величины освещенности.

Неуправляемые нелинейные активные сопротивления по принципу тепловой инерционности можно разделить на две группы: инерционные и безынерционные.

Примером инерционных сопротивлений являются лампы накаливания и термисторы. У этих элементов существенно нелинейной является зависимость только между действующими или амплитудными значениями токов и напряжений. Из-за тепловой инерционности за время периода синусоидального тока сопротивление этих элементов меняется несущественно. Поэтому с достаточной для практики точностью можно считать, что зависимость между мгновенными значениями тока и напряжения в пределах одного периода является линейной.

Примером безынерционных сопротивлений являются ламповые и полупроводниковые диоды и триоды при не очень высоких частотах. Здесь характеристики нелинейны как для действующих, так и для мгновенных значений токов и напряжений.

Следует отметить, что все реальные элементы электрических цепей обладают некоторой нелинейностью. Поэтому деление электрических цепей на линейные и нелинейные является условным. Элемент цепи может считаться линейным или нелинейным в зависимости от степени нелинейности и той задачи, которая ставится при рассмотрении данной цепи.

### 21.3. АППРОКСИМАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Аппроксимацией называется приближенное аналитическое представление функций, заданных в виде графика или таблицы. При аппроксимации функций необходимо стремиться к тому, чтобы аналитическое выражение описывало реальную зависимость с достаточной точностью, допускало выполнение над ним требуемых математических операций и по возможности было кратким и простым.

Для аппроксимации вольт-амперных характеристик нелинейных элементов наиболее часто применяют два метода: аппроксимацию степенным полиномом и кусочно-линейную аппроксимацию (аппроксимацию ломаной линией). Рассмотрим эти методы.

#### 21.3.1. Аппроксимация степенным полиномом

Вольт-амперную характеристику или ее рабочую часть представляют конечным числом слагаемых ряда Тейлора:

$$i = f(u) \approx a_0 + a_1(u - u_0) + a_2(u - u_0)^2 + \dots + a_k(u - u_0)^k, \quad (21.1)$$

где  $U_0$ —напряжение в рабочей точке вольт-амперной характеристики (рис. 21.4).

Число слагаемых определяется требуемой точностью расчета. Для определения коэффициентов аппроксимации  $\alpha_k$  необходимо рабочую часть вольт-амперной характеристики разбить на  $k$  про-

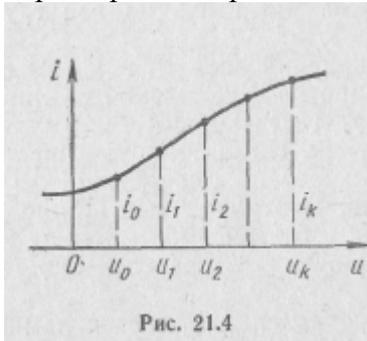


Рис. 21.4

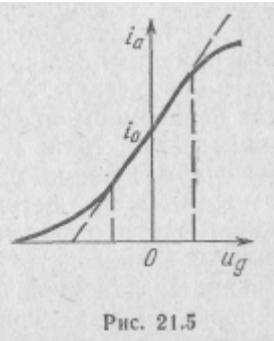


Рис. 21.5

межутков и определить из графика  $k+1$  значения тока и напряжения. Подставив эти значения тока и напряжения в ряд (21,1), получим  $k+1$  уравнения:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= a_0 + a_1(u_1 - u_0) + a_2(u_1 - u_0)^2 + \dots + a_k(u_1 - u_0)^k; \\ i_2 &= a_0 + a_1(u_2 - u_0) + a_2(u_2 - u_0)^2 + \dots + a_k(u_2 - u_0)^k; \\ &\dots \\ i_{k+1} &= a_0 + a_1(u_{k+1} - u_0) + a_2(u_{k+1} - u_0)^2 + \dots + \\ &\quad + a_k(u_{k+1} - u_0)^k. \end{aligned} \right\} (21.2)$$

Решая эту систему уравнений относительно коэффициентов аппроксимации  $a_n$ , находят эти коэффициенты, а затем подставляют их в ряд (21.1).

Обычно степенным полиномом аппроксимируют такие кривые, для которых полином может быть ограничен степенью не выше пятой.

При расчете электрических цепей с электронными лампами и транзисторами, работающими на линейных участках их вольт-амперных характеристик (рис. 21.5), эти характеристики обычно заменяют прямыми линиями, т. е. аппроксимируют полиномом первой степени:

$$i = a_0 + a_1(u_g - u_{g0}), \quad (21.3)$$

где  $u_g$  — напряжение на управляющей сетке;

$u_{g0}$  — рабочая точка на вольт-амперной характеристике.

При  $u_{g0}=0$  из выражения (21.3) получим

$$i = a_0 + a_1 u_g \quad (21.4)$$

Приняв  $u_g = 0$ , получим  $a_0 = i_0$ .

Взяв производную от уравнения (21.4) по  $u_g$ , получим

$$\frac{di}{du_g} = a_1 = S,$$

где  $S$  — крутизна вольт-амперной характеристики.

Подставив  $a_0$  и  $a_1$  в формулу (21.4), получим выражение для вольт-амперной характеристики

$$i = i_0 + Su_g. \quad (21.5)$$

Если  $u_{g0} \neq 0$ , то будем иметь

$$i = i_0 + S(u_g - u_{g0}). \quad (21.6)$$

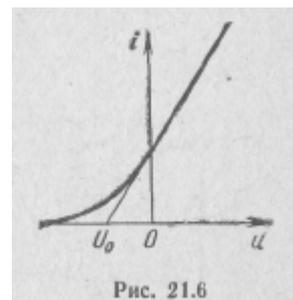


Рис. 21.6

### 21.3.2. Кусочно-линейная аппроксимация

Эта аппроксимация состоит в том, что график действительной зависимости заменяется ломаной линией. В простейшем случае ломаная линия может состоять из двух прямых (рис. 21.6), уравнения которых имеют вид:

$$i = 0 \text{ при } u \leq U_0;$$

$$i = S(u - U_0) \text{ при } u > U_0,$$

где  $S$  — крутизна наклонной прямой.

Аппроксимация ломаной линией особенно удобна для представления вольт-амперных характеристик выпрямителей, детекторов, ограничителей и других устройств.

## 21.4. ПОНЯТИЕ О МЕТОДАХ РАСЧЕТА НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Расчет нелинейных электрических цепей является обычно более трудоемким и громоздким, чем расчет линейных цепей. Это объясняется тем, что вольт-амперные характеристики нелинейных элементов являются кривыми линиями, аналитическое выражение которых заранее неизвестно, и неприменимостью к нелинейным цепям принципа наложения.

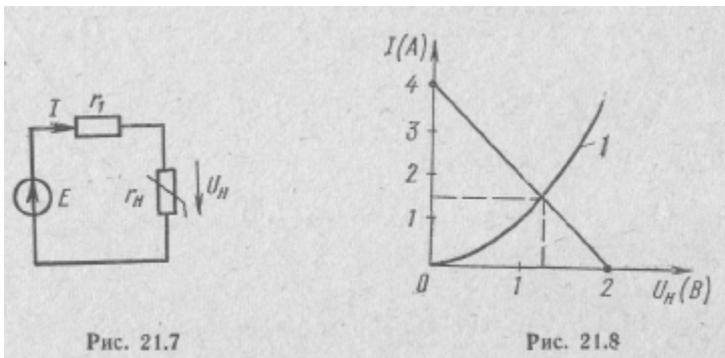
При расчете нелинейных цепей применяют графические, аналитические и численные методы.

Графические методы расчета, обладающие большой наглядностью и дающие вполне удовлетворительную точность решения, являются, как правило, очень громоздкими и не всегда позволяют сделать общие выводы.

Аналитические методы расчета основаны на приближенном аналитическом описании характеристик нелинейных элементов.

Эти методы обычно менее наглядны, но с их помощью удастся получить общие расчетные зависимости.

Численные методы основаны на приближенных способах решения нелинейных алгебраических и дифференциальных уравнений. Эти методы позволяют с помощью вычислительных машин решить любую задачу по расчету нелинейных цепей с высокой точностью.



Кроме того, в практике расчета нелинейных цепей широко используются комбинированные методы, например графоаналитические.

При расчете конкретных нелинейных цепей следует иметь в виду, что характеристики нелинейных элементов имеют большой разброс (10—20%). Поэтому простота и наглядность решения часто имеют гораздо большее значение, чем точность аппроксимации и исходных данных задачи.

При расчете нелинейных электрических цепей постоянного тока наиболее часто используют графические и аналитические методы. Рассмотрим это на примерах.

#### Пример 21.1.

Найти напряжение на нелинейном сопротивлении и ток в цепи постоянного тока (рис. 21.7), если  $E=2$  В,  $r_1=0,5$  Ом, а вольт-амперная характеристика нелинейного элемента задана в виде графика (рис. 21.8, кривая 1).

Решение.

Применим графический метод. На основании второго закона Кирхгофа, справедливого как для линейных, так и для нелинейных цепей, для рассматриваемой цепи можно записать

$$E = I r_1 + U_H,$$

откуда

$$I = (E - U_H) / r_1. \quad (21.7)$$

С другой стороны, ток в нелинейном элементе в зависимости от напряжения на его зажимах определяется вольт-амперной характеристикой нелинейного элемента:

$$I = f(U_H). \quad (21.8)$$

Решим систему из двух нелинейных уравнений (21.7) и (21.8) с двумя неизвестными  $I$  и  $U_H$  графическим методом. Для этого на рис. 21.8, на котором изображена зависимость  $I=f(U_H)$  (кривая 1), построим зависимость (21.7), которая является уравнением прямой. Для построения этой прямой достаточно

найти две точки. Одну из точек найдем, приняв  $U_H = 0$ . При этом из формулы (21.7) получим  $I = E/r_1 = 2/0,5 = 4\text{A}$ .

Вторую точку найдем, приняв  $U_H = E$ . При этом из (21.7) получим  $I = 0$ .

Проведя через эти точки прямую линию, найдем искомые  $I$  и  $U_H$  как координаты точки пересечения этой линии с характеристикой нелинейного элемента:

$I = 1,5\text{ A}$ ;  $U_H = 1,22\text{ В}$ .

### Пример 21.2.

Решить предыдущую задачу аналитическим методом, учитывая, что вольт-амперная характеристика нелинейного элемента аппроксимируется выражением

$$I = aU_H^2, \quad (21.9)$$

где  $a=1$ .

Решение.

Подставив выражение (21.9) в уравнение (21.7), получим

$$aU_H^2 = (E - U_H)/r_1 \text{ или } aU_H^2 + U_H/r_1 - E/r_1 = 0,$$

откуда

$$U_H = -\frac{1}{2ar_1} \pm \sqrt{\frac{1}{4a^2r_1^2} + \frac{E}{ar_1}} =$$
$$= -\frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 0,5} \pm \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 1^2 \cdot 0,5^2} + \frac{2}{1 \cdot 0,5}} = 1,22\text{ В}.$$

Подставив это значение в формулу (21.9), найдем ток в цепи

$$I = aU_H^2 = 1 \cdot 1,22^2 = 1,5\text{ A}.$$

Порядок расчета нелинейных электрических цепей постоянного тока с двумя и более нелинейными элементами приведен, например, в [20].

При расчете нелинейных электрических цепей с источниками гармонического тока наиболее часто используют аналитические методы.

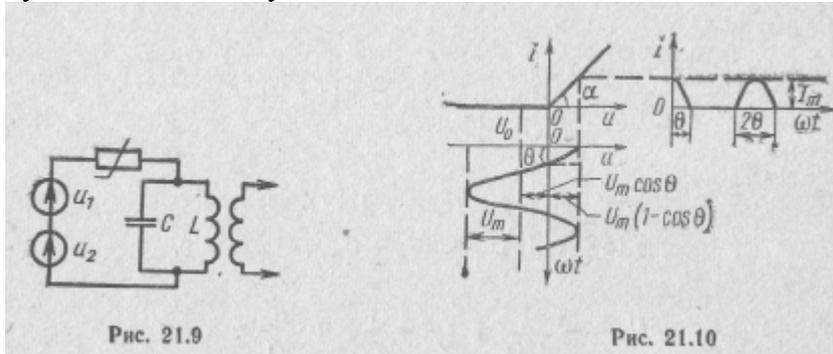
Если нелинейность вольт-амперной характеристики нелинейного элемента на ее рабочем участке является несущественной, то рабочий участок характеристики заменяют прямой линией (см. рис. 21.5). Такую замену называют линеаризацией. В этом случае нелинейная цепь заменяется эквивалентной линейной цепью, для расчета которой могут быть использованы все методы расчета линейных электрических цепей. Токи и напряжения на отдельных элементах в такой цепи практически можно считать синусоидальными.

Если рабочий участок вольт-амперной характеристики нелинейного элемента является существенно нелинейным, то его аппроксимируют степенным полиномом или ломаной линией. В этом случае отклик (реакция) цепи на синусоидальное воздействие будет несинусоидальным. Расчет таких цепей значительно усложняется [5, 18, 19, 20].

## 21.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СПЕКТРОВ СИГНАЛОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

### 21.5.1. Умножение частоты

Умножением частоты называют выделение в цепи с нелинейным элементом гармоник с частотами, кратными частоте входного сигнала, действующего на цепь. Выделение нужной частоты осу-



ществляется с помощью колебательного контура, настроенного на частоту выделяемой гармоники.

Умножение частоты можно осуществить с помощью различных нелинейных элементов. Наиболее часто используют диоды и триоды, как полупроводниковые, так и вакуумные.

Рассмотрим электрическую цепь с нелинейным элементом (рис. 21.9). В цепь включен колебательный контур, настроенный на частоту  $n$ -й гармоники, т. е. на частоту  $\omega_0 = n\omega_1 = 1/\sqrt{LC}$ . На вход цепи подаются два напряжения:

$$u_1 = U_m \cos \omega_1 t \text{ и } u_2 = -U_0,$$

т. е. синусоидальное напряжение с частотой  $\omega_1$  и постоянное напряжение, предназначенное для выбора рабочей точки на вольт-амперной характеристике нелинейного элемента.

Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента аппроксимируется двумя отрезками прямых (рис. 21.10) и аналитически записывается в виде

$$i = \begin{cases} a_1 u; & u > 0; \\ 0; & u < 0, \end{cases}$$

где  $a_1 = \operatorname{tg} \alpha$ .

Ток в цепи представляет собой последовательность видеоимпульсов косинусоидальной формы с амплитудой  $I_m$ , длительностью  $\tau_n = 2\theta/\omega_1$  и периодом  $T = 2\pi/\omega_1$  где  $\theta$  — так называемый угол отсечки, равный половине длительности импульса, выраженной в угловой мере. Угол отсечки зависит от амплитуды синусоидаль-

ного напряжения  $U_m$  и величины напряжения смещения  $U_0$  (см. рис. 21.10).

Для определения амплитуд гармоник импульсов тока получим вначале аналитическую запись для импульсов тока. Так как  $U_0 = U_m \cos \theta$  (см. рис. 21.10), то

$$u = u_1 + u_2 = U_m \cos \omega_1 t - U_0 = U_m \cos \omega_1 t - U_m \cos \theta = U_m (\cos \omega_1 t - \cos \theta).$$

При этом  $i = a_1 u = a_1 U_m (\cos \omega_1 t - \cos \theta)$ .

При  $\omega_1 t = 0$  ток

$$i(0) = I_m = a_1 U_m (1 - \cos \theta),$$

откуда

$$a_1 = I_m / U_m (1 - \cos \theta).$$

Подставив это в выражение для  $i$ , получим

$$i = I_m (\cos \omega_1 t - \cos \theta) / (1 - \cos \theta). \quad (21.10)$$

Для определения амплитуды  $n$ -й гармоники воспользуемся формулой для вычисления коэффициентов ряда Фурье в тригонометрической форме

$$I_{mn} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i(t) \cos n\omega_1 t d\omega_1 t.$$

Подставив сюда выражение (21.10), получим

$$I_{mn} = \frac{2I_m}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\cos \omega_1 t - \cos \theta}{1 - \cos \theta} \cos n\omega_1 t d\omega_1 t.$$

Воспользовавшись соотношением  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$ , после

интегрирования будем иметь

$$I_{mn} = \frac{I_m}{\pi (1 - \cos \theta)} \left[ \frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\theta}{n-1} - 2 \cos \theta \frac{\sin n\theta}{n} \right]. \quad (21.11)$$

Отношение амплитуды  $n$ -й гармоники  $I_{mn}$  к амплитуде импульсов тока  $I_m$  называют коэффициентом  $n$ -й гармоники:

$$\alpha_n = \frac{I_{mn}}{I_m} = \frac{1}{\pi (1 - \cos \theta)} \left[ \frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\theta}{n-1} - 2 \cos \theta \frac{\sin n\theta}{n} \right]. \quad (21.12)$$

Графики зависимостей коэффициентов гармоник  $\alpha_n$  от угла отсечки  $\theta$  (рис. 21.11) называют по имени советского ученого А. И. Берга, впервые предложившего этот способ расчета коэффициентов гармоник, кривыми Берга.

Из этих зависимостей видно, что для каждой гармоники имеется свой оптимальный угол отсечки, при котором ее амплитуда становится максимальной. Например, для первой гармоники  $\theta_{\text{опт}} = 120^\circ$ , для второй  $\theta_{\text{опт}} = 60^\circ$  и т. д. С помощью этого графика

можно выбирать угол отсечки, необходимый для получения максимальной амплитуды желаемой гармоники.

Графики спектров сигналов на входе и выходе цепи при умножении частоты приведены на рис. 21.12.

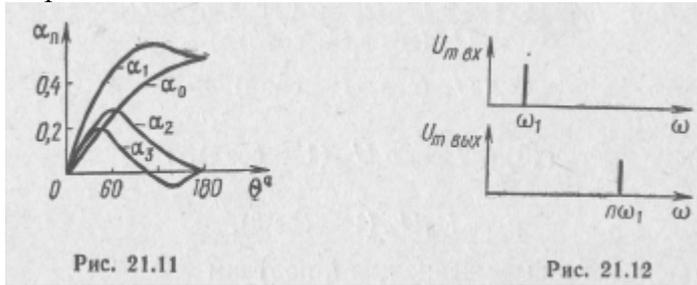


Рис. 21.11

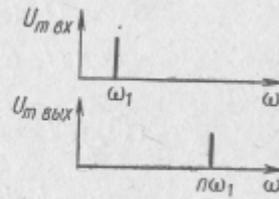


Рис. 21.12

### 21.5.2. Преобразование частоты (гетеродинирование)

Преобразованием частоты {гетеродинированием} называют такое нелинейное преобразование сигналов, при котором из сигналов двух различных частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  выделяется сигнал разностной частоты  $\omega_{пр} = |\omega_1 - \omega_2|$ . Такое преобразование широко используется для понижения несущей частоты сигналов, подлежащих дальнейшему усилению, например в супергетеродинных радиоприемниках. В этом случае под  $\omega_1$  следует понимать несущую частоту  $\omega_0$ , а под  $\omega_2$  — частоту местного генератора (гетеродина)  $\omega_r$ . Величину  $\omega_r$  выбирают так, чтобы разность  $(\omega_0 - \omega_r)$  была для всех несущих частот одинаковой. Эту постоянную разностную частоту называют промежуточной частотой.

Преобразование частоты используется также в измерительной технике, в эталонных генераторах и в ряде других устройств.

Преобразование частоты можно осуществить в схеме с нелинейным элементом (см. рис. 21.9), где  $u_1 = U_{m1} \sin \omega_1 t$ ,  $u_2 = U_{m2} \sin \omega_2 t$ . резонансная частота контура  $\omega_0 = \omega_{пр} = |\omega_1 - \omega_2| = 1/\sqrt{LC}$ , а вольт-амперная характеристика нелинейного элемента аппроксимируется полиномом второй степени

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2. \quad (21.13)$$

Ток в такой цепи

$$i = a_0 + a_1 (u_1 + u_2) + a_2 (u_1 + u_2)^2 = a_0 + a_1 (U_{m1} \sin \omega_1 t + U_{m2} \sin \omega_2 t) + a_2 (U_{m1} \sin \omega_1 t + U_{m2} \sin \omega_2 t)^2.$$

Используя соотношения

$$\sin^2 \alpha = 0,5 (1 - \cos 2\alpha) \text{ и } \sin \alpha \sin \beta = 0,5 [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)],$$

после преобразования получим

$$i = a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_{m1}^2 + \frac{1}{2} a_2 U_{m2}^2 + a_1 U_{m1} \sin \omega_1 t + \\ + a_1 U_{m2} \sin \omega_2 t - \frac{1}{2} a_2 U_{m1}^2 \cos 2\omega_1 t - \frac{1}{2} a_2 U_{m2}^2 \cos 2\omega_2 t + \\ + a_2 U_{m1} U_{m2} \cos (\omega_1 - \omega_2) t - a_2 U_{m1} U_{m2} \cos (\omega_1 + \omega_2) t. \quad (21.14)$$

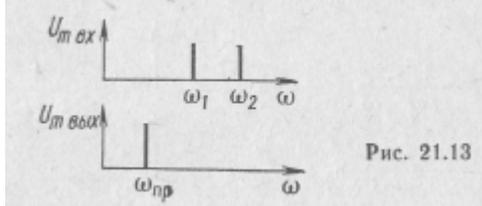


Рис. 21.13

Частоты  $\omega_1 \pm \omega_2$  носят название, простых комбинационных частот. Составляющая тока разностной частоты

$$i_{разн} = a_2 U_{m1} U_{m2} \cos(\omega_1 - \omega_2) t$$

будет создавать на контуре, настроенном на эту частоту, падение напряжения. Остальные компоненты будут шунтироваться контуром.

Графики спектров сигналов на входе и выходе цепи при преобразовании частоты приведены на рис. 21.13.

### 21.5.3. Амплитудная модуляция

Ограничимся рассмотрением случая амплитудно-модулированных колебаний. Этот вид модуляции можно получить с помощью рассмотренной выше нелинейной цепи (см. рис. 21.9), где  $u_1 = U_m \sin \omega_0 t$  — колебание несущей частоты,  $u_2 = U_{m\Omega} \sin \Omega t$  — низкочастотный управляющий сигнал. Колебательный контур настраивается на несущую частоту  $\omega_0$ . Его полоса пропускания выбирается таким образом, чтобы пропускались простые комбинационные частоты  $\omega_0 \pm \Omega$ , которые в рассматриваемом случае называют боковыми частотами.

Подставив в выражение для тока сумму напряжений  $u_1$  и  $u_2$ , получим

$$i = a_0 + a_1 U_m \sin \omega_0 t + a_1 U_{m\Omega} \sin \Omega t + a_2 U_m^2 \sin^2 \omega_0 t + \\ + 2a_2 U_m U_{m\Omega} \sin \Omega t \sin \omega_0 t + a_2 U_{m\Omega}^2 \sin^2 \Omega t. \quad (21.15)$$

Колебательный контур выделит составляющие тока

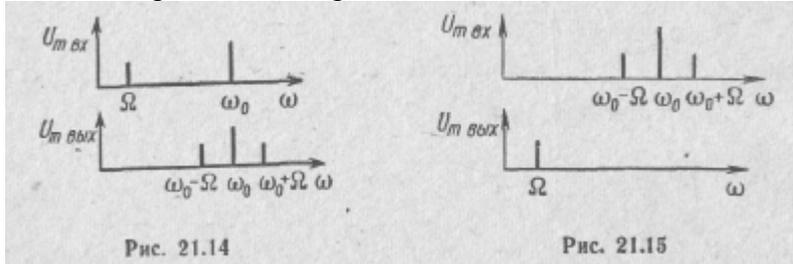
$$i_{мод} = a_1 U_m \sin \omega_0 t + 2a_2 U_m U_{m\Omega} \sin \omega_0 t \sin \Omega t = \\ = a_1 U_m \left[ 1 + 2 \frac{a_2}{a_1} U_{m\Omega} \sin \Omega t \right] \sin \omega_0 t.$$

Это выражение можно представить в виде

$$i_{\text{вых}} = I_m (1 + m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t, \quad (21.16)$$

где  $I_m = a_1 U_m$ ;  $m = 2 \frac{a_2}{a_1} U_{m\Omega}$  — глубина модуляции.

Графики спектров сигналов на входе и выходе цепи при амплитудной модуляции сигналов приведены на рис. 21.14.



#### 21.5.4. Детектирование амплитудно-модулированных колебаний

Детектированием или демодуляцией называют такое нелинейное преобразование, при котором из амплитудно-модулированного сигнала

$$u = U_m (1 + m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t \quad (21.17)$$

выделяется низкочастотная составляющая, т. е. полезный управляющий сигнал. Такое преобразование можно осуществить в цепи, состоящей из нелинейного элемента, имеющего вольт-амперную характеристику

$$i = a_2 u^2, \quad (21.18)$$

и фильтра, настроенного на частоту полезного управляющего сигнала  $\Omega$ .

Подставив выражение (21.17) в формулу (21.18), получим

$$i = a_2 U_m^2 (1 + m \sin \Omega t)^2 \sin^2 \omega_0 t.$$

Учитывая, что  $\sin^2 a = 0,5(1 - \cos 2a)$ , после преобразования будем иметь

$$i = a_2 U_m^2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{m^2}{4} + m \sin \Omega t - \frac{m^2}{4} \cos 2\Omega t - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{m^2}{2} \right) \times \right. \\ \left. \times \cos 2\omega_0 t - m \sin \Omega t \cos 2\omega_0 t + \frac{m^2}{4} \cos 2\Omega t \cos \omega_0 t \right]. \quad (21.19)$$

Из этих составляющих на выходе фильтра будет выделяться только полезный управляющий сигнал с частотой  $\Omega$ .

Графики спектров сигналов на входе и выходе цепи при детектировании амплитудно-модулированных колебаний приведены на рис. 21.15.

## 22. НЕКОТОРЫЕ СОВРЕМЕННЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОРАДИОЦЕПЕЙ

### 22.1. ПОНЯТИЕ О НОВЫХ МЕТОДАХ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ЦЕПЕЙ

За последние три десятилетия теория цепей стала областью науки, сферы приложения которой все дальше расширяются, отходя от классических задач анализа и синтеза электрорадиоцепей. Большое разнообразие и сложность стоящих проблем привели к тому, что в развитии радиоэлектроники наметилась тенденция к переходу от проектирования отдельных устройств узкого назначения к созданию сложных комплексов, предназначенных для решения широкого круга задач. Этому способствовало и развитие элементной базы. Успехи в области микроминиатюризации и унификации элементов и узлов радиоэлектронных систем, разработка и внедрение интегральных схем открыли огромные перспективы в современной радиоэлектронике и привели к качественно новым, по праву называемым революционными изменениям в ней. Быстрое усложнение радиоэлектронных цепей, необходимость решения более сложных задач и новые технические возможности определили потребность в разработке новых, более совершенных методов и средств теоретического анализа, расчета и проектирования систем.

Создание и использование электронных вычислительных машин (ЭВМ), которые за последние 10—15 лет совершили революцию в вычислительной математике, оказали огромное влияние и на дальнейшее развитие методов теории цепей и систем, значительно сблизив теорию цепей, теорию систем и математические методы проведения расчетов. Если еще недавно для проведения расчетов инженер мог полагаться на свой опыт, практические навыки и пользоваться богатым арсеналом аналитических методов, то теперь он часто вынужден прибегать к помощи ЭВМ, закладывая в нее соответствующую программу или алгоритм расчета. В связи с этим наиболее перспективными методами анализа и синтеза цепей стали методы, *более* приспособленные и удобные для использования ЭВМ, и методы, основанные на применении ЭВМ, — машинные методы.

Однако внедрение ЭВМ не только не устранило необходимость применения и развития ручных методов анализа, но и в свою очередь способствовало их развитию. Известно множество инженерных задач расчета цепей и систем, для решения которых классические методы малопригодны из-за громоздкости, а применение ЭВМ нецелесообразно ввиду относительной простоты этих задач. Это делает актуальной разработку универсальных методов, отличающихся минимальным объемом необходимых выкладок и высокой степенью формализации, делающих их удобными как для ручных расчетов, так и для расчетов на ЭВМ. Сейчас разработан и внедрен в практику инженерных расчетов ряд новых методов, основанных на применении математического аппарата теории множеств, матричной алгебры, топологии (в особенности теории графов). К числу таких методов, играющих в настоящее время центральную роль в теории цепей и систем, следует отнести метод пространства состояний, известный в теории абстрактных автоматов, методы обобщенных, структурных чисел, матричные и топологические методы.

В связи с прогрессом в ряде областей радиоэлектроники в последние годы большое развитие получили два направления в теории электрорадиоцепей: теория цепей сверхвысоких частот и теория активных цепей, прежде всего активных  $rC$ -цепей. Первое направление связано с освоением новых диапазонов частот и повышением требований к аппаратуре, работающей в области СВЧ. Это делает перспективным развитие и применение методов, основанных как на целевом, так и на полевом подходе к описанию и анализу электромагнитных процессов, например волновых методов расчета. Второе направление связано с микроминиатюризацией радиоэлектронной аппаратуры и отсутствием реальных путей миниатюризации индуктивных катушек. Индуктивные катушки с зарождения радиотехники и даже еще недавно были обязательным элементом любой частотно-избирательной цепи. Устранение индуктивных катушек приводит сейчас к появлению «мира без индуктивностей» — активных  $rC$ -цепей — новой области радиоэлектроники, для которой характерны новая схемотехника, легко выполняемая в интегральной форме, новые возможности и проблемы. Это определило появление нового раздела в теории цепей — теории активных  $rC$ -цепей, включающей в основном синтез активных  $rC$ -цепей. Активная  $rC$ -цепь составляется исключительно из резисторов, конденсаторов и активных элементов. Активными элементами в таких цепях служат гираторы, конверторы отрицательного иммитанса, усилители с конечным усилением и операционные усилители (усилители с бесконечным усилением) или зависимые источники напряжения (тока). Состав используемых элементов существенно влияет на особенности решения задач синтеза активных  $rC$ -цепей.

Новые задачи, возникшие в области обработки радиолокационных сигналов, сигналов в телеметрии, дальней космической связи, синтетической телефонии и т. д., привели к развитию новых на

правлений в теории сигналов. Обобщения в спектральной теории сигналов и возможности, появившиеся в связи с развитием полупроводниковой электроники и микроэлектроники, а также в связи с применением ЭВМ, позволили широко использовать новые спектральные представления сигналов, основанные на самых различных системах базисных функций. Это обеспечило в настоящее время развитие обобщенной теории сигналов, делающей возможным эффективно решать многие важные задачи.

Для обработки сигналов используются как аналоговые, так и цифровые методы. Достижения в области цифровой техники сделали цифровую обработку сигналов одним из перспективных и быстро развивающихся направлений в области обработки сигналов. За последнее десятилетие цифровые методы обработки сигналов были внедрены во многие области науки и техники и составили для них прочную теоретическую основу. При этом основными направлениями использования методов цифровой обработки являются цифровая фильтрация и спектральный анализ.

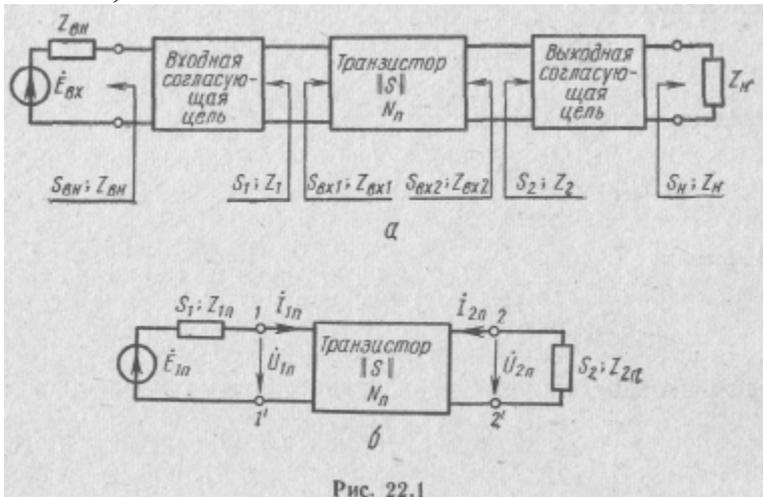
Теория цифровой обработки опирается на теорию дискретных линейных систем и строится с учетом возможности осуществления цифровой обработки сигналов методами вычислительной техники. В дискретной теории сигналы определяются лишь в дискретные моменты времени и описываются последовательностью чисел, следующих одно за другим через определенные отрезки времени; в ней используются такие своеобразные понятия, как дискретные преобразования Фурье, дискретная и круговая свертка, быстрые преобразования Фурье, высокоскоростная свертка и корреляция и др.

Теория цифровой обработки сигналов имеет много общего с классической теорией цепей, хотя не может рассматриваться как ее дискретный аналог, а может быть скорее представлена как один из разделов вычислительной математики. Схемы цифровых фильтров описываются разностными уравнениями подобно тому, как схемы аналоговых фильтров описываются дифференциальными уравнениями. Решение разностных уравнений и синтез цифровых фильтров основаны на применении математического аппарата  $z$ -преобразований, аналогичного преобразованиям Лапласа, которые используются в теории линейных, непрерывных систем. Некоторые типы цифровых фильтров можно рассматривать как аппроксимацию известных аналоговых фильтров, хотя в общем случае возможно создание цифровых фильтров, не имеющих себе подобных среди аналоговых фильтров.

## **22.2. ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ**

При современном уровне техники параметры рассеяния электронных приборов СВЧ можно измерить значительно точнее, чем параметры их эквивалентных схем. Это обеспечивает высокую точность расчетов на основе  $S$ -параметров. Большее распространение

расчет электронных схем с помощью S-параметров получил в применении к транзисторным усилителям СВЧ. Расчет усилительного каскада при этом практически сводится к выбору параметров согласующих цепочек, включаемых между источником сигнала,



транзистором и нагрузкой (рис. 22.1,а). Сущность такого подхода заключается в следующем. Максимально возможное усиление каскада обеспечивается условиями двухстороннего согласования транзистора, представленного четырехполюсником. Заданный коэффициент усиления, значение которого ниже максимального, обеспечивается подбором согласующих цепей за счет отклонения режима от согласованного (рис. 22.1,б).

Эквивалентная схема (см. рис. 22.1,б) транзисторного усилителя (рис. 22.1,а) представляет четырехполюсник, нагруженный с обеих сторон. Здесь  $S_1, Z_1$  и  $S_2, Z_2$  — соответственно параметры источника входного сигнала и нагрузки четырехполюсника с учетом согласующих цепочек, а  $\|S\|$  — матрица рассеяния высококачественного транзистора.

Выразим входные комплексные функции нормированного четырёхполюсника  $N_n$  (см. рис. 22.1,б) через его S-параметры. Найдем сначала входное сопротивление  $Z_{ВХ1n}$  и коэффициент отражения  $S_{ВХ1}$  со стороны зажимов 1—1'. Для этого определим падающую  $\dot{U}_{1пад}$  и отраженную волны:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{1отр} &= S_{11}\dot{U}_{1пад} + S_{12}\dot{U}_{2пад} = S_{11}\dot{U}_{1пад} + S_{12}S_2\dot{U}_{2отр}; \\ \dot{U}_{2отр} &= S_{21}\dot{U}_{1пад} + S_{22}\dot{U}_{2пад} = S_{21}\dot{U}_{1пад} + S_{22}S_2\dot{U}_{2отр}; \end{aligned} \right\} \quad (22.1)$$

так как

$$\dot{U}_{2пад} = S_2\dot{U}_{2отр}. \quad (22.2)$$

Здесь  $S_2 = \frac{Z_{2n} - 1}{Z_{2n} + 1}$  - коэффициент отражения нагрузки.

В равенстве (22.2) учтено, что в рассматриваемой схеме волна  $\dot{U}_{2\text{пад}}$  по отношению к нагрузке является отраженной, а  $\dot{U}_{2\text{отр}}$  — падающей.

Решая уравнения (22.1) и (22.2) относительно переменных рассеяния, находим

$$\dot{U}_{1\text{отр}} = \left( S_{11} + \frac{S_2 S_{12} S_{21}}{1 - S_2 S_{22}} \right) \dot{U}_{1\text{пад}}. \quad (22.3)$$

Отсюда входной коэффициент отражения

$$S_{\text{вх}1} = \frac{\dot{U}_{1\text{отр}}}{\dot{U}_{1\text{пад}}} = S_{11} - \frac{S_2 S_{12} S_{21}}{1 - S_2 S_{22}} = \frac{S_{11} - S_2 |S|}{1 - S_2 S_{22}}. \quad (22.4)$$

Выражая  $\dot{U}_{1\text{отр}}$  и  $u_{1\text{нал}}$  через напряжение и ток:

$$S_{\text{вх}1} = \frac{\dot{U}_{1\text{отр}}}{\dot{U}_{1\text{пад}}} = \frac{\dot{U}_{1\text{н}} - \dot{I}_{1\text{н}}}{\dot{U}_{1\text{н}} + \dot{I}_{1\text{н}}} = \frac{Z_{\text{вх}1\text{н}} - 1}{Z_{\text{вх}1\text{н}} + 1},$$

находим входное сопротивление нагруженного четырехполюсника

$$Z_{\text{вх}1\text{н}} = \frac{1 + S_{\text{вх}1}}{1 - S_{\text{вх}1}} = \frac{1 + S_{11} - S_2 S_{22} - S_{\text{н}} |S|}{1 - S_{11} - S_2 S_{22} + S_{\text{н}} |S|}. \quad (22.5)$$

Аналогично со стороны 2—2' (см. рис. 22.1,6) получим:

$$S_{\text{вх}2} = S_{22} - \frac{S_1 S_{12} S_{21}}{1 - S_1 S_{11}} = \frac{S_{22} - S_1 |S|}{1 - S_1 S_{11}}; \quad (22.6)$$

$$Z_{\text{вх}2\text{н}} = \frac{1 + S_{\text{вх}2}}{1 - S_{\text{вх}2}} = \frac{1 + S_{22} - S_1 S_{11} - S_1 |S|}{1 - S_{22} - S_1 S_{11} + S_1 |S|}. \quad (22.7)$$

В технике СВЧ для повышения чувствительности системы добиваются передачи максимума мощности сигнала через четырехполюсник при сопряженном согласовании, когда в нагрузке выделяется максимум активной мощности.

**Условие сопряженного согласования** на входе четырехполюсника выражается равенством

$$\dot{Z}_1 = Z_{\text{вх}1}, \text{ т. е. } \dot{S}_1 = S_{\text{вх}1} = \frac{S_{11} - S_2 |S|}{1 - S_2 S_{22}}. \quad (22.8)$$

Рассматривая четырехполюсник совместно с источником сигнала относительно зажимов 2—2' как эквивалентный генератор с внутренним сопротивлением  $Z_{\text{вх}2}$ , аналогично установим условие его согласования на выходе:

$$\dot{Z}_2 = Z_{\text{вх}2}, \text{ т. е. } \dot{S}_2 = S_{\text{вх}2} = \frac{S_{22} - S_1 |S|}{1 - S_1 S_{11}}. \quad (22.9)$$

**Условия двухстороннего согласования** требуют одновременного выполнения равенств (22.8) и (22.9). Подставляя в выраже-

ние (22.8)  $S_2 = \left( S_2^* \right)^*$  из формулы (22.9), а затем — в выражение (22.9)  $S_1 = \left( S_1^* \right)$

из формулы (22.8), приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned} \left( S_1^* \right)^2 C_1 - S_1^* B_1 + C_1 &= 0; \\ \left( S_2^* \right)^2 C_2 - S_2^* B_2 + C_2 &= 0, \end{aligned}$$

решением которых соответственно является

$$S_1^* = \frac{1}{2C_1} [B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4|C_1|^2}] \text{ и } S_2 = \frac{1}{2C_2} [B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4|C_2|^2}], \quad (22.10)$$

где

$$B_1 = 1 + |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 - |S|^2; \quad (22.11)$$

$$B_2 = 1 + |S_{22}|^2 - |S_{11}|^2 - |S|^2; \quad (22.12)$$

$$C_1 = S_{11} - |S| S_{22}^*; \quad C_2 = S_{22} - |S| S_{11}^*. \quad (22.13)$$

Таким образом, для достижения режима двухстороннего согласования коэффициенты отражения нагрузки  $S_2$  и источника  $S_1$  с учетом согласующих цепочек должны выражаться формулами (22.10), где знак плюс относится к отрицательным  $B$ , а минус — к положительным  $B$ . Одновременно должны быть выполнены и условия

$$\left| \frac{B_1}{2C_1} \right| > 1 \text{ и } \left| \frac{B_2}{2C_2} \right| > 1, \quad (22.14)$$

Можно убедиться, что если

$\left| \frac{B_i}{2C_i} \right| > 1$ , где  $i=1; 2$ , то одно из решений уравнения (22.10) будет больше, а другое

меньше единицы. Значения  $|S_1|$  и  $|S_2|$  будут меньше единицы при знаке плюс перед радикалами, когда  $B$  отрицательно, и, наоборот, больше единицы, при знаке минус перед радикалами, когда  $B$  положительно.

(При  $\left| \frac{B_i}{2C_i} \right| < 1$  оба решения равны единице, что не удовлетворяет условию физического существования.)

Переменные рассеяния схемы на стороне 1—1' найдем с учетом выражений (22.3) и (22.4). Для эквивалентной схемы:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{1\text{пад}} &= \frac{1}{2} (\dot{U}_{1n} + \dot{I}_{1n}) = \frac{1}{2} [\dot{E}_{1n} + (1 - Z_{\text{вх}1n}) \dot{I}_{1n}] = \\ &= \frac{1}{2} \left( \dot{E}_{1n} - \frac{2S_1}{1-S_1} \dot{I}_{1n} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{1\text{отр}} &= \frac{1}{2} (\dot{U}_{1n} - \dot{I}_{1n}) = \frac{1}{2} [\dot{E}_{1n} - (1 + Z_{\text{вх}1n}) \dot{I}_{1n}] = \\ &= \frac{1}{2} \left( \dot{E}_{1n} - \frac{2}{1-S_1} \dot{I}_{1n} \right); \end{aligned}$$

$$\dot{U}_{1\text{отр}} = S_{\text{вх}1} \dot{U}_{1\text{пад}} = \frac{S_{11} - S_2 |S|}{1 - S_2 S_{22}} \dot{U}_{1\text{пад}}.$$

Решение этих соотношений относительно  $\dot{U}_{1\text{пад}}$  дает

$$\dot{U}_{1\text{пад}} = \frac{1 - S_1}{1 - S_1 S_{\text{вх}1}} \frac{\dot{E}_{1n}}{2} = \frac{(1 - S_1)(1 - S_2 S_{22})}{1 - S_1 S_{11} - S_2 S_{22} + S_1 S_2 |S|} \frac{\dot{E}_{1n}}{2}, \quad (22.15)$$

кроме того,

$$\dot{U}_{1\text{отр}} = S_{\text{вх}1} \dot{U}_{1\text{пад}} = \frac{(1 - S_1)(S_{11} - S_2 |S|)}{1 - S_1 S_{11} - S_2 S_{22} + S_1 S_2 |S|} \frac{\dot{E}_{1n}}{2}. \quad (22.16)$$

По аналогии с формулой (22.3) на стороне 2—2' с учетом формулы (22.15) получим:

$$\dot{U}_{2\text{отр}} = \frac{S_{21}}{1 - S_2 S_{22}} \dot{U}_{1\text{пад}} = \frac{S_{21}(1 - S_1)}{1 - S_1 S_{11} - S_2 S_{22} + S_1 S_2 |S|} \frac{\dot{E}_{1n}}{2}; \quad (22.17)$$

$$\dot{U}_{2\text{пад}} = S_2 \dot{U}_{2\text{отр}} = \frac{S_2 S_{21}(1 - S_1)}{1 - S_1 S_{11} - S_2 S_{22} + S_1 S_2 |S|} \frac{\dot{E}_{1n}}{2}. \quad (22.18)$$

**Активная мощность на входе и выходе** четырехполюсника через параметры рассеяния определяется с помощью выражений (22.15) — (22.18):

$$P_{\text{вх}} = \text{Re}(\dot{U}_{1n} \dot{I}_{1n}) = \text{Re}(Z_{\text{вх}1n} \dot{I}_{1n}^2) = U_{1\text{пад}}^2 - U_{1\text{отр}}^2 = \frac{(|1 - S_2 S_{22}|^2 - |S_{11} - S_2 |S||^2) |1 - S_1|^2}{|1 - S_1 S_{11} - S_2 S_{22} + S_1 S_2 |S||^2} \frac{E_{1n}^2}{4}; \quad (22.19)$$

$$P_{\text{вых}} = \text{Re}(\dot{U}_{2n} \dot{I}_{2n}) = \text{Re}(Z_{2n} \dot{I}_{2n}^2) = U_{2\text{отр}}^2 - U_{2\text{пад}}^2 = \frac{|S_{21}|^2 (1 - |S|)^2 |1 - S_1|^2}{|1 - S_1 S_{11} - S_2 S_{22} + S_1 S_2 |S||^2} \cdot \frac{E_{1n}^2}{4}. \quad (22.20)$$

**Номинальная** мощность источника входного сигнала равна максимальной активной мощности, которую может отдать источник сигнала в сопряженно согласованную нагрузку ( $Z_{\text{вх}1} = \dot{Z}_1^*$ ):

$$P_{\text{ист. ном}} = \frac{E_{1n}^2}{2(Z_{1n} + \dot{Z}_{1n}^*)} = \frac{E_{1n}^2}{4 \text{Re} Z_{1n}} = \frac{E_{1n}^2}{4 \text{Re} \frac{1 + S_1}{1 - S_1}} = \frac{|1 - S_1|^2}{|1 - |S_1||^2} \cdot \frac{E_{1n}^2}{4}. \quad (22.21)$$

Номинальная мощность на выходе четырехполюсника  $P_{\text{вых. ном}}$  равна максимальной активной мощности, отдаваемой им в сопряженно согласованную нагрузку ( $Z_{\text{вх}2} = \dot{Z}_2^*$ ):

$$P_{\text{вых. ном}} = \frac{E_{2\text{эл}}^2}{2(Z_{\text{вх}2n} + \dot{Z}_{\text{вх}2n}^*)} = \frac{E_{2\text{эл}}^2}{4 \text{Re} Z_{\text{вх}2n}}. \quad (22.22)$$

Здесь  $E_{2\text{эл}}$  — нормированная э. д. с. эквивалентного генератора, которым можно заменить четырехполюсник совместно с источником входного сигнала относительно зажимов 2—2'. В соответствии

с теоремой об эквивалентном генераторе эта э. д. с, равна напряжению холостого хода на зажимах 2—2'. В этом режиме:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_{2n} = Y_{21n} \dot{U}_{1n} + Y_{22n} \dot{U}_{2n} = 0, \\ \dot{U}_{2n} = \dot{E}_{2\vartheta n}, \end{aligned} \right\}$$

т. е.

$$\dot{E}_{2\vartheta n} = -\frac{Y_{21n}}{Y_{22n}} \dot{U}_{1n} = -\frac{Y_{21n}}{Y_{22n}} \frac{Z_{11n}}{Z_{11n} + Z_{1n}} \dot{E}_{1n} = \frac{Z_{21n}}{Z_{11n} + Z_{1n}} \dot{E}_{1n}$$

или, переходя к параметрам рассеяния,

$$\dot{E}_{2\vartheta n} = \frac{S_{21}(1-S_1)}{1-S_{22}-(S_{11}-|S|)S_1} \dot{E}_{1n}. \quad (22.23)$$

Таким образом, из уравнения (22.22) с помощью выражений (22.6), (22.7) и (22.23) получим

$$\begin{aligned} P_{\text{вых, ном}} &= \frac{E_{2\vartheta n}^2}{4 \operatorname{Re} Z_{\text{вх} 2n}} = \frac{E_{2\vartheta n}^2}{4 \operatorname{Re} \frac{1+S_{\text{вх} 2}}{1-S_{\text{вх} 2}}} = \\ &= \frac{|S_{21}|^2 |1-S_1|^2}{|1-S_1 S_{11}|^2 - |S_{22}-S_1|S||^2 - |S_{22}-S_1|S|^2} \frac{E_{1n}^2}{4}. \end{aligned} \quad (22.24)$$

**Передаточные характеристики** транзисторного усилителя СВЧ включают: реализуемый коэффициент усиления номинальной мощности

$$K_p = \frac{P_{\text{вых}}}{P_{\text{ист. ном}}} = \frac{|S_{21}|^2 (1-|S_2|^2) (1-|S_1|^2)}{|1-S_1 S_{11}-S_2 S_{22}+S_1 S_2|S||^2}; \quad (22.25)$$

коэффициент усиления номинальной мощности

$$K_{pн} = \frac{P_{\text{вых, ном}}}{P_{\text{ист. ном}}} = \frac{|S_{21}|^2 (1-|S_1|^2)}{|1-S_1 S_{11}|^2 - |S_{22}-S_1|S||^2}; \quad (22.26)$$

фактический коэффициент усиления мощности

$$K_{p\phi} = \frac{P_{\text{вых}}}{P_{\text{вх}}} = \frac{|S_{21}|^2 (1-|S_2|^2)}{|1-S_2 S_{22}|^2 - |S_{11}-S_2|S||^2}. \quad (22.27)$$

При согласовании на входе четырехполосника  $K_p = K_{p\phi}$ , при согласовании на его выходе  $K_p = K_{pн}$ , а при двухстороннем согласовании  $K_{pн} = K_p = K_{p\phi} = K_{p\text{max}}$ .

Подставляя в уравнение (22.25) значения коэффициентов отражения  $S_1$  и  $S_2$ , взятые в соответствии с выражением (22.10), находим максимально возможное усиление

$$K_{p\text{max}} = \left| \frac{S_{21}}{S_{12}} \right| (k \mp \sqrt{k^2-1}), \quad (22.28)$$

где

$$k = \frac{1 + ||S||^2 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2}{2 |S_{12}| |S_{21}|} \quad (22.29)$$

коэффициент устойчивости (он должен быть больше единицы).

По известным значениям коэффициентов  $S_1$  и  $S_2$  легко найти требуемые эквивалентные и реактивные сопротивления источника входного сигнала и нагрузки, при которых обеспечивается заданный коэффициент усиления.

Если требуемый коэффициент усиления меньше максимального (22.28), то решается задача снижения усиления выбором параметров нагрузок ( $Z_1$  и  $Z_2$ ), отличающихся от оптимальных. Пусть, например, четырехполосник согласован на входе, тогда усиление схемы зависит от рассогласования на выходе. В этом случае, как это следует из выражения (22.25),

$$K_P = K_{P\Phi} = \frac{|S_{21}|^2 (1 - |S_2|^2)}{|1 - S_2 S_{22}|^2 - |S_{11} - S_2|S|^2} = |S_{21}|^2 g_2, \quad (22.30)$$

где

$$g_2 = \frac{1 - |S_2|^2}{|1 - S_2 S_{22}|^2 - |S_{11} - S_2|S|^2} \quad (22.31)$$

коэффициент, задающий отличие фактического коэффициента усиления от  $|S_{21}|^2$  и определяющийся параметрами транзистора и нагрузки четырехполосника.

Равенство (22.31) можно переписать в виде

$$|S_2|^2 - 2 \frac{g_2 \operatorname{Re} |S_2 C_2|}{1 - g_2 D_2} + \frac{g_2 (1 - |S_{11}|^2) - 1}{1 - g_2 D_2} = 0, \quad (22.32)$$

где

$$C_2 = S_{22} - \dot{S}_{22}|S|; \quad D = |S_{22}|^2 + ||S|^2.$$

Решение полученного уравнения дает значение коэффициента отражения  $S_2$  нагрузки, при которой будет получен требуемый коэффициент усиления. По известному коэффициенту  $S_2$  с помощью выражения (22.8) находят коэффициент отражения  $S_1$  источника входного сигнала, при котором обеспечивается согласование на входе. Определив  $S_2$  и  $S_1$ , а следовательно, и  $Z_2$  и  $Z_1$ , при известных значениях  $Z_{ВН}$  и  $Z_{Н}$  переходят к расчету согласующих цепочек.

### Пример 22.1.

Рассчитать усилитель на транзисторе 2N 3570 для работы на частоте 750 МГц с максимальным усилением.

Параметры рассеяния транзистора на этой частоте известны:

$$|S| = \begin{vmatrix} 0,277e^{-j53^\circ} & 1,92e^{j64^\circ} \\ 0,078e^{j93^\circ} & 0,848e^{-j31^\circ} \end{vmatrix}; \quad R_{01} = R_{02} = 50 \text{ Ом.}$$

Решение.

#### 1. Вспомогательные расчеты:

$$\begin{aligned} |S| &= S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21} = 0,324e^{-j64,8^\circ}; & C_1 &= S_{11} - \dot{S}_{22}|S| = 0,120e^{-j135,4^\circ}; \\ B_1 &= 1 + |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 - ||S|^2 = 0,253; & C_2 &= S_{22} - \dot{S}_{11}|S| = 0,768e^{-j33,8^\circ}; \\ B_2 &= 1 + |S_{22}|^2 - |S_{11}|^2 - ||S|^2 = 1,537; & D_2 &= |S_{22}|^2 - ||S|^2 = 0,614; \\ k &= \frac{1 + ||S|^2 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2}{2|S_{12}| \cdot |S_{21}|} = 1,033 > 1. \end{aligned}$$

2. Максимальный коэффициент усиления

$$K_{P \max} = \left| \frac{S_{21}}{S_{12}} \right| (k - \sqrt{k^2 - 1}) = 19,087.$$

3. Для достижения максимального усиления в схеме необходимо обеспечить двухстороннее согласование, что возможно при

$$S_1 = \frac{B_1 - \sqrt{B_1^2 - 4|C_1|^2}}{2C_1} = 0,730e^{j135,4^\circ};$$
$$S_2 = \frac{B_2 - \sqrt{B_2^2 - 4|C_2|^2}}{2C_2} = 0,951e^{j33,6^\circ}.$$

Этим коэффициентам отражения соответствуют сопротивления источника входного сигнала и нагрузки с учетом согласующих цепочек:

$$Z_1 = R_{01} Z_{1п} = R_{01} \frac{1 + S_1}{1 - S_1} = 9,083 + j19,903 \text{ Ом};$$
$$Z_2 = R_{02} Z_{2п} = R_{02} \frac{1 + S_2}{1 - S_2} = 14,686 + j163,096 \text{ Ом}.$$

Полученные величины являются исходными для расчета параметров согласующих цепочек.

### 22.3. ПРИМЕНЕНИЕ ЭВМ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ЦЕПЕЙ

Методы теории цепей обычно используются для решения задач трех типов: задач анализа, синтеза и оптимизации. Наиболее простыми являются задачи анализа. Они сводятся к составлению и решению уравнений цепи. Задачи синтеза заключаются в отыскании схемы и ее параметров по заданным характеристикам цепи. В задачах оптимизации ставится цель такого выбора параметров цепи, при котором достигаются экстремальные значения той или иной ее функции, реализуются заданные характеристики, обеспечивается нужный запас устойчивости; проводится оценка влияния изменения параметров компонентов схемы на функции цепи и т. д. Для решения всех этих задач широко используются ЭВМ, которые в зависимости от принципа их работы можно разделить на две основные группы — ЭВМ непрерывного и дискретного действия.

Работа ЭВМ непрерывного действия, или аналоговых ЭВМ, основана на моделировании математических величин непрерывными физическими процессами в электронных схемах. Для исследования математического выражения (например, дифференциального уравнения) на такой ЭВМ составляется и исследуется электронная схема, описываемая подобным же выражением. В аналоговой ЭВМ есть комплекс электронных функциональных преобразователей, устройств, выполняющих умножение, дифференцирование, интегрирование и другие действия над мгновенными значениями электрических величин. С помощью этих устройств в машине создаются схемы, в которых изменения напряжений во вре-

мени описываются теми же уравнениями, что и изучаемое явление. Решение уравнений получается в виде осциллограмм напряжений— аналогов математических величин. Аналоговые ЭВМ имеют сравнительно ограниченный диапазон применения — в основном для анализа переходных процессов, исследования систем управления и регулирования, решения некоторых задач синтеза. В рамках соответствующих задач их применение очень эффективно. Принципиальным недостатком таких ЭВМ является ограниченная точность вычислений, определяемая погрешностью изготовления и нестабильностью характеристик используемых элементов.

Значительно более широкий круг задач удается решать на ЭВМ дискретного действия — электронных цифровых вычислительных машинах (ЭЦВМ). Такие ЭВМ оперируют с числовыми величинами, представленными в цифровой форме. Поэтому математические величины в них представляются и обрабатываются в цифровой, дискретной форме. Цифровая ЭВМ содержит программно-управляемый комплекс устройств, выполняющих арифметические и логические операции над числами. С помощью этих операций в ЭЦВМ осуществляется преобразование числовой информации. Управление этим процессом производится автоматически и в полном соответствии с заранее составленной программой. Составление программы является отдельным и часто трудоемким этапом. Основными преимуществами ЭЦВМ являются их универсальность и высокая точность работы.

Все задачи, встречающиеся в теории цепей, основаны на использовании математических моделей цепи в виде алгебраических, дифференциальных, разностных или других уравнений. Особенность их решения на ЭЦВМ заключается в необходимости сведения процедуры решения к последовательности арифметических и логических операций, предусмотренных в машине. Это делается с помощью методов вычислительной математики, иначе — численных методов.

Методы вычислительной математики позволяют свести к последовательности арифметических и логических операций, выполняемых на ЭЦВМ, решение всех доступных в настоящее время задач. Эффективность решения на ЭЦВМ поставленных задач зависит от выбора методов теории цепей, предназначенных для создания математической модели цепи, и численных методов, необходимых для решения составленных уравнений. Качество этих методов определяется удобством программной реализации (простотой и доступностью программирования), количеством требуемых для вычислений действий и достигаемой точностью вычислений. Относительные достоинства различных методов и программ расчета в большой степени зависят от конкретного приложения и формулирования, постановки задачи.

При проведении расчетов электрических цепей на ЭЦВМ используется много различных программ, простых и сложных. Одни из них позволяют проводить расчеты установившихся режимов по постоянному или переменному току, другие — анализировать пере-

ходные режимы во временной или частотной области, рассчитывать линейные или нелинейные цепи. Переходные процессы в линейных цепях более удобно анализировать в частотной области, а в нелинейных цепях — во временной области. Это приводит к разделению программ анализа.

Применение ЭЦВМ к решению задач анализа и синтеза цепей возможно на разных уровнях. Самый низкий из них (уровень «большой логарифмической линейки») соответствует расчетам по готовым формулам, построениям таблиц и графиков. Более высокие уровни предусматривают использование стандартных и специализированных программ математического обеспечения. Они позволяют в значительной степени автоматизировать весь процесс проектирования схем.

Широкое применение получили ЭЦВМ при расчете и проектировании электронных схем. Применение ЭЦВМ позволило существенно углубить теоретический анализ проектируемой схемы и резко сократить объем экспериментальных работ, а в результате значительно снизить сроки и стоимость, а также существенно расширить возможности проектирования. В настоящее время машинное проектирование электронных схем, в основе которого лежат теоретические методы исследования и расчета электронных цепей с применением современных средств вычислительной техники, сложилось в отдельную область науки и техники.

Основой машинного проектирования электронной схемы является ее машинный анализ. Важным этапом анализа цепи является математическое описание происходящих в ней процессов. Это математическое описание включает составление эквивалентной схемы цепи и составление уравнений, описывающих процессы в ней.

Первоначально применение ЭЦВМ для анализа электронных схем было основано на составлении уравнений цепи вручную, а также на составлении и отладке машинных программ для каждого частного случая. Трудоемкость такой процедуры, необходимость практически заново повторять работу по программированию даже при небольшом изменении схемы показали бесперспективность такого подхода.

Использование матрично-топологических методов анализа цепей позволило полностью формализовать и осуществить с помощью ЭЦВМ процесс составления уравнений цепи. При этом исходными данными являются списки элементов эквивалентной схемы и значения их параметров, таблица соединений этих элементов и характеристики действующих на схему сигналов. Машинные программы, реализующие алгоритмы составления систем уравнений цепи, совместно с машинными программами решения этих уравнений легли в основу универсальных программ анализа электронных схем.

Применение таких программ расширило диапазон решаемых задач и выдвинуло более жесткие и разнообразные требования к математическому описанию (математическим моделям) компо-

ментов электронных схем. Особую трудность представляет построение моделей активных компонентов (полупроводниковых и других устройств). В последние годы предложено большое число разнообразных моделей активных компонентов, которые позволяют обеспечить требуемую точность математического моделирования электронных схем. На их основе с помощью универсальных программ на ЭЦВМ формируется общая математическая модель всей электронной схемы, а также необходимых математических соотношений для решения задач анализа и синтеза.

Математическое моделирование на ЭЦВМ, под которым понимают имитацию условий работы реальных электрических цепей и систем с помощью вычислительных алгоритмов, реализуемых в виде машинных программ, называют цифровым моделированием. Цифровая модель может быть введена в реальную техническую систему вместо имитируемого устройства, так как алгоритм-имитатор в ряде отношений может оказаться лучше, чем имитируемое устройство. Примерами могут служить цифровые модели фильтров. Соответствующее таким фильтрам направление называют цифровой фильтрацией.

В универсальных программах анализа электронных схем для получения уравнений цепи нашли применение разные методы. К ним прежде всего относятся обобщенный метод узловых напряжений (контурных токов) и метод переменных состояния. С помощью этих программ анализ схемы производится на основе матричной алгебры или на основе теории сигнальных графов.

Первые программы машинного анализа электронных схем (ECAP, NASAP, NODAL и др.) были разработаны в конце 60-х годов. Для получения уравнений цепи в них использовался обобщенный метод узловых напряжений. Однако при анализе переходных процессов этот метод оказался недостаточно удобным. В общем случае он приводит к системам дифференциальных уравнений, не разрешенным относительно производных. Для решения этих уравнений нужно использовать сравнительно мало разработанные методы неявного интегрирования.

Новое в составлении уравнений цепи связано с использованием так называемых переменных состояния. Как известно, состояние цепи полностью определяется ее внутренними запасами энергии и входящими в ее состав автономными источниками энергии. Переменными состояниями называются заряд конденсаторов и потоко-сцепления катушек индуктивности, а при постоянных значениях емкостей и индуктивностей переменными состояниями являются напряжения на емкостях и токи в индуктивностях. Метод переменных состояния приводит к описанию цепи системой дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных, т. е. приведенных к нормальной форме. Это существенно облегчает разработку машинных алгоритмов. Численные методы решения таких уравнений являются наиболее разработанными. Метод переменных состояния лег в основу многих программ машинного анализа последующего поколения (SCEPTRE,

АЕDNET, АФУС, ПАЭС и др.). Этот метод позволяет анализировать линейные, нелинейные и параметрические цепи. Методы машинного проектирования электронных схем получили особое развитие с появлением интегральных схем.

## **22.4. ПОНЯТИЕ О ТЕОРИИ И МЕТОДАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СХЕМ**

Повышение требований к надежности радиоэлектронных устройств и систем, уменьшение габаритов и массы, снижение потребляемой мощности аппаратуры вызвали интенсивное развитие микроэлектроники. Принципиально новым шагом на пути микроминиатюризации электронных устройств явилось применение интегральных схем (ИС) и схем с высокой степенью интеграции — больших интегральных схем (БИС) на биполярных и униполярных транзисторах. Анализ и синтез микросхем представляют собой сложную задачу, для решения которой требуются еще значительные исследования.

Если при проектировании схем на обычных дискретных компонентах ручные методы давали вполне удовлетворительные результаты, то использование ИС сделало совершенно неэффективными традиционные принципы и методы проектирования. В процессе разработки ИС возникают все трудности, свойственные проектированию обычных схем, а также трудности, связанные с решением множества других задач, не имеющих аналогий в классической теории электронных схем. Это определяется большой сложностью ИС, паразитными связями между компонентами ИС, разбросом параметров этих компонентов. Все это привело к тому, что основой проектирования ИС стали машинные методы.

При разработке ИС совершенно недостаточно полагаться на приближенные вычисления с дальнейшей экспериментальной доработкой путем макетирования схемы. Анализ и расчет ИС должны быть достаточно полными и точными, так как изготовление ИС и изменения в ней требуют много времени и больших затрат.

Интегральные схемы можно рассматривать как многослойные структуры с распределенными параметрами. Для их анализа необходимо использовать эффективные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. Для структур сложной формы решение возникающих задач чрезвычайно затруднено, и поэтому часто прибегают к моделированию процессов. Один из путей моделирования заключается в замене структуры с распределенными параметрами упрощенной эквивалентной схемой из дискретных компонентов.

При создании программ машинного расчета для составления математической модели ИС используется классическая теория цепей. Для этого элементы ИС замещаются эквивалентными схемами, с помощью которых составляется математическая модель всей интегральной схемы. Точность расчета ИС при сколь угодно сложной и точной программе определяется тем, насколько точно

используемые эквивалентные схемы (модели) отражают работу элементов ИС. Поэтому модели элементов ИС имеют особое значение при моделировании и расчете ИС. Создание таких достаточно точных моделей является составной частью машинного расчета ИС.

На практике к используемым моделям предъявляются требования максимальной простоты при допустимых пределах ошибки моделирования. С повышением точности моделирования эквивалентные схемы усложняются. Однако сложные модели практически не применимы даже при использовании быстродействующих ЭЦВМ. Главным и особенно сложным вопросом при моделировании ИС является выбор эквивалентных схем полупроводниковых приборов— различного типа транзисторов, диодов. В настоящее время созданы и используются в известных машинных программах нелинейные модели транзистора: Эберса и Молла, зарядная модель Бюфоау — Спаркса и модели Линвилла. Наряду с ними существуют также линейные модели различной сложности, предназначенные для описания работы транзистора при малом сигнале в окрестности рабочей точки. Во многих случаях они позволяют получить хорошие результаты. С развитием микроэлектроники совершенствуется и техника моделирования.

В настоящее время имеются комплексы программ для построения математических моделей большого числа достаточно разнообразных электронных схем. Они позволяют проводить анализ и оптимизировать по параметрам практически любую электронную схему с сосредоточенными параметрами; формировать входные сигналы любой формы и получать характеристики нужных величин в любой точке схемы; имитировать случайные изменения параметров схемы и т. д.

Особенностью эквивалентных схем БИС является большое число стандартных моделей и множество связей между ними. При машинном расчете сложных цепей максимально допустимое число ветвей и узлов схемы определяется кроме характеристик ЭЦВМ эффективностью используемых алгоритмов. Поэтому при анализе и расчете больших схем стремятся сократить объем хранимой информации и время моделирования. В связи с этим получил развитие метод анализа сложных цепей и систем по частям, названный диакопстикой. Сущность этого метода заключается в разделении сложной цепи на части — подцепи, каждая из которых рассчитывается независимо от других, а общее решение уравнений всей цепи получается путем соответствующего объединения решений уравнений отдельных подцепей. Применение диакопстики повышает эффективность использования ЭЦВМ при расчете БИС за счет существенного уменьшения объема вычислений.

- [Часть 1: ст. 1-100](#)  
[Часть 2: ст. 101-200](#)  
[Часть 3: ст. 201-300](#)  
[Часть 4: ст. 301-401](#)  
[Часть 5: ст. 402-485](#)

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Введение.....	3
1. Основные понятия и определения.....	7
1.1. Определения, характеристики и классификация электрических цепей и элементов цепи.....	-
1.2. Понятие о дуальности. Дуальные элементы и цепи.....	12
1.3. Элементы топологии цепей.....	13
2. Анализ цепей постоянного тока.....	16
2.1. Закон Ома и законы Кирхгофа для цепей постоянного тока.....	-
2.2. Баланс мощностей в цепях постоянного тока.....	19
2.3. Эквивалентные преобразования схем электрических цепей.....	20
2.4. Метод уравнений Кирхгофа.....	26
2.5. Метод контурных токов.....	29
2.6. Метод наложения.....	33
2.7. Метод узловых потенциалов.....	35
2.8. Метод эквивалентного генератора.....	38
2.9. Принцип взаимности.....	40
2.10. Рекомендации по выбору оптимального метода расчета цепей.....	41
3. Анализ цепей синусоидального тока.....	43
3.1. Основные понятия и определения.....	-
3.2. Представление синусоидальных функций проекциями вращающегося вектора. Векторная диаграмма.....	46
3.3. Представление синусоидальных функций с помощью комплексных величин.....	48
3.4. Комплексные сопротивления и проводимости. Закон Ома и законы Кирхгофа в комплексной форме.....	50
3.5. Цепи синусоидального тока с одним пассивным элементом.....	52
3.6. Цепь синусоидального тока с последовательным соединением элементов $r$ , $L$ и $C$ .....	55
3.7. Мощность в цепи синусоидального тока.....	57
3.8. Цепь синусоидального тока с параллельным соединением элементов $r$ , $L$ и $C$ .....	61
3.9. Обобщение методов расчета цепей постоянного тока на цепи синусоидального тока.....	63
4. Трехфазные электрические цепи.....	70
4.1. Понятие о многофазных цепях и системах.....	-
4.2. Соотношения между линейными и фазными величинами в трехфазных электрических цепях.....	41
4.3. Мощность трехфазной цепи.....	74
4.4. Расчет трехфазных цепей.....	76
5. Цепи со взаимной индуктивностью.....	78
5.1. Индуктивная связь. Степень связи и коэффициент связи.....	-
5.2. Согласное и встречное включение индуктивных катушек.....	79
5.3. Последовательное соединение индуктивно-связанных катушек.....	80
5.4. Параллельное соединение индуктивно-связанных катушек.....	81
5.5. Особенности расчета сложных цепей синусоидального тока со взаимной индукцией.....	83
5.6. Трансформатор без магнитопровода.....	84
6. Частотные характеристики цепей.....	88
6.1. Комплексные функции цепи.....	-
6.2. Связь между параметрами цепи и ее комплексными функциями.....	90
6.3. Комплексные функции и частотные характеристики цепи.....	94
6.4. Свойства комплексных входных и передаточных функций линейных цепей.....	100
6.5. Расчет комплексных функций цепи с помощью матриц ее контурных сопротивлений и узловых проводимостей.....	101
7. Последовательный колебательный контур.....	106
7.1. Условие резонанса и основные параметры контура.....	-
7.2. Комплексные входные и передаточные функции; частотные характеристики.....	110
7.3. Полоса пропускания, понятие об избирательности, коэффициент прямоугольности.....	118
7.4. Особенности применения последовательных колебательных контуров.....	121

8. Параллельный колебательный контур.....	124
8.1. Условие резонанса и резонансная частота.....	-
8.2. Комплексные входные и передаточные функции; частотные характеристики.....	126
8.3. Полоса пропускания и коэффициент прямоугольности.....	134
8.4. Сложные параллельные колебательные контуры.....	136
8.5. Особенности применения параллельных колебательных контуров.....	139
9. Связанные колебательные контуры.....	142
9.1. Назначение и виды связи между контурами. Коэффициент связи.....	-
9.2. Эквивалентные схемы и комплексные функции систем двух связанных контуров.....	145
9.3. Резонансы в системе связанных контуров. Частные и сложные резонансы.....	149
9.4. Частотные характеристики системы связанных колебательных контуров.....	156
9.5. Полоса пропускания и коэффициент прямоугольности.....	163
9.6. Понятие о многосвязанных колебательных контурах.....	165
9.7. Применение связанных колебательных контуров.....	168
10. Основы теории четырехполюсников.....	171
10.1. Основные понятия и определения.....	-
10.2. Уравнения, параметры и схемы замещения четырехполюсника.....	173
10.3. Комплексные входные и передаточные функции четырехполюсника.....	184
10.4. Характеристические параметры четырехполюсника.....	188
10.5. Параметры рассеяния четырехполюсника.....	198
10.6. Сложные четырехполюсники.....	202
11. Электрические фильтры.....	206
11.1. Общие сведения об электрических фильтрах.....	-
11.2. Анализ обобщенных Т- и П-образных схем фильтров.....	208
11.3. Фильтры нижних частот.....	211
11.4. Преобразование частоты. Фильтры верхних частот. Полосовые и заграждающие фильтры.....	213
11.5. Анализ обобщенной мостовой схемы фильтра.....	218
11.6. Пьезоэлектрические фильтры.....	219
12. Анализ линейных активных цепей.....	224
12.1. Понятие о линейных активных цепях.....	-
12.2. Анализ с помощью эквивалентных схем.....	225
12.3. Матричные методы анализа.....	228
12.4. Сигнальные (направленные) графы и их применение для расчета электронных схем.....	240
13. Классический метод анализа переходных процессов в электрических цепях.....	251
13.1. Общие сведения о переходных процессах в электрических цепях и классическом методе их анализа.....	-
13.2. Переходные процессы в неразветвленных цепях первого порядка.....	254
13.3. Переходные процессы в разветвленных цепях первого порядка.....	260
13.4. Переходные процессы в неразветвленных цепях второго порядка.....	262
13.5. Переходные процессы в разветвленных цепях второго порядка.....	270
14. Метод интеграла свертки.....	272
14.1. Принцип наложения в теории переходных процессов.....	-
14.2. Типовые импульсные воздействия.....	274
14.3. Временные характеристики цепи.....	279
14.4. Расчет реакции цепи на воздействие произвольной формы с использованием временных характеристик.....	284
14.5. Понятие о расчете переходных процессов по огибающим временных функций. Интеграл свертки для огибающих.....	289
15. Спектры периодических сигналов.....	292
15.1. Общие сведения о сигналах. Спектральный способ описания периодических сигналов.....	-
15.2. Действующее, среднее значения и мощность периодических сигналов.....	296
15.3. Спектры периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов.....	299
15.4. Спектры периодической последовательности прямоугольных радиоимпульсов.....	307
15.5. Связь между формой сигнала и его спектром.....	310
15.6. Основные виды модуляции. Амплитудно-модулированные колебания.....	312
15.7. Угловая модуляция.....	317
15.8. Спектры при угловой модуляции.....	320

16. Спектры непериодических сигналов.....	326
16.1. Спектральный способ описания непериодических сигналов.....	-
16.2. Спектры непериодических сигналов.....	332
16.3. Преобразование Фурье и спектр дельта-функции и единичной ступенчатой функции.....	339
16.4. Спектры пачек импульсов.....	343
16.5. Распределение энергии в спектре. Энергетический спектр и эффективная ширина спектра.....	349
17. Спектральный анализ прохождения сигналов через линейные цепи.....	352
17.1. Понятие об искажении сигналов при их прохождении через линейные цепи. Сущность спектрального метода.....	-
17.2. Расчет прохождения сигналов с дискретным спектром.....	353
17.3. Расчет прохождения сигналов со сплошным спектром.....	357
17.4. Понятие о неискаженной передаче сигнала и неискажающей линейной цепи.....	360
17.5. Прохождение сигналов через идеальную линейную цепь с ограниченной полосой пропускания.....	362
17.6. Влияние частотных характеристик цепи на спектр и форму выходного сигнала.....	369
17.7. Связь между частотными и временными характеристиками цепи.....	374
18. Операторный метод анализа цепей.....	377
18.1. Основные положения и теоремы операционного исчисления.....	-
18.2. Применение операторного метода к анализу линейных электрических цепей. Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме.....	381
18.3. Операторные передаточные функции электрической цепи и их связь с комплексными передаточными функциями и временными характеристиками.....	386
18.4. Свойства операторных передаточных функций электрических цепей.....	388
18.5. Свойства характеристических полиномов электрических цепей.....	392
18.6. Минимально-фазовые и номинимально-фазовые цепи.....	395
18.7. Свойства операторных входных функций электрических цепей.....	398
18.8. Нормирование операторных функций. Нормирование сопротивлений и частоты.....	400
19. Электрические цепи с обратной связью.....	402
19.1. Понятие об обратной связи в электрических цепях и методах анализа цепей с обратной связью.....	-
19.2. Влияние обратной связи на характеристики цепи.....	408
19.3. Понятие об устойчивости электрических цепей с обратной связью и о критериях устойчивости.....	410
20. Основы синтеза линейных электрических цепей.....	415
20.1. Задача синтеза электрических цепей.....	-
20.2. Входные операторные функции реактивных двухполюсников.....	416
20.3. Реализация реактивных двухполюсников путем разложения их входных операторных функций на простые дроби.....	418
20.4. Реализация реактивных двухполюсников путем представления их входных операторных функций в виде цепной дроби.....	423
20.5. Реализация двухполюсников типа гС.....	426
20.6. Понятие о реализации двухполюсников общего типа.....	432
20.7. Реализация четырехполюсников в виде мостовых схем.....	433
20.8. Реализация лестничных реактивных четырехполюсников, нагруженных резисторами с одной из сторон.....	435
20.9. Реализация лестничных реактивных четырехполюсников, нагруженных резисторами с двух сторон.....	439
20.10. Реализация четырехполюсников типа гС.....	441
20.11. Понятие о синтезе активных электрических цепей.....	445
20.12. Задача аппроксимации в проблеме синтеза электрических цепей.....	447
20.13. Синтез фильтров типа LC.....	449
20.14. Понятие о синтезе пассивных и активных гС-фильтров.....	454
21. Общие сведения о нелинейных электрических цепях.....	458
21.1. Особенности нелинейных цепей и области их применения.....	-
21.2. Классификация нелинейных элементов.....	460
21.3. Аппроксимация характеристик нелинейных элементов.....	461
21.4. Понятие о методах расчета нелинейных электрических цепей.....	463
21.5. Преобразование спектров сигналов в нелинейных цепях.....	466
22. Некоторые современные направления в теории электрорадиоцепей.....	471
22.1. Понятие о новых методах анализа и синтеза цепей.....	-
22.2. Применение матрицы рассеяния для расчета электронных схем.....	473
22.3. Применение ЭВМ к решению задач анализа и синтеза цепей.....	480
22.4. Понятие о теории и методах интегральных схем.....	484
Литература.....	486