

DIE GRUNDLEHREN DER MATHEMATISCHEN  
WISSENSCHAFTEN IN EINZELDARSTELLUNGEN  
BAND IV

E. MADELUNG  
DIE MATHEMATISCHEN  
HILFSMITTEL DES PHYSIKERS

Dritte Auflage

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

DIE GRUNDLEHREN DER  
MATHEMATISCHEN  
WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER  
BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

GEMEINSAM MIT

W. BLASCHKE · F. K. SCHMIDT · B. L. VAN DER WAERDEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. COURANT

BAND IV

DIE MATHEMATISCHEN  
HILFSMITTEL DES PHYSIKERS

VON

E. MADELUNG



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1936

# DIE MATHEMATISCHEN HILFSMITTEL DES PHYSIKERS

VON

DR. ERWIN MADELUNG

ORD. PROFESSOR DER THEORETISCHEN PHYSIK  
AN DER UNIVERSITÄT FRANKFURT A. M.

UNTER MITARBEIT VON

DR. KARL BOEHLE UND DR. SIEGFRIED FLÜGGE  
GÖTTINGEN LEIPZIG

DRITTE  
VERMEHRTE UND VERBESSERTE AUFLAGE

MIT 25 TEXTFIGUREN



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1936

ISBN 978-3-662-01882-8      ISBN 978-3-662-02177-4 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-662-02177-4

ALLE RECHTE, INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG  
IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.  
Copyright 1936 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg  
Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1936.



## Aus dem Vorwort zur ersten Auflage.

Die Veranlassung zur Niederschrift dieses Buches entsprang einem persönlichen Bedürfnis. Ursprünglich war das Material für den eigenen Gebrauch bei Untersuchungen und Vorlesungen gesammelt, um das dauernde Nachschlagen in den verschiedensten Lehrbüchern zu ersparen. Als ich mich dann auf das Zureden befreundeter Fachkollegen hin entschloß, das Vorhandene nach Möglichkeit zu ergänzen und in die Form eines Buches zu bringen, glaubte ich, daß das von mir Gesammelte auch für andere nützlich sein könnte. Es schwebte mir dabei das Ideal vor, ein Buch zu verfassen, das als theoretisches Analogon zu dem bekannten Buche von KOHLRAUSCH aufgefaßt werden könnte. Je weiter ich mit der Bearbeitung des Materials fortschritt, um so deutlicher wurde mir freilich, daß sich dieses Ideal zunächst nicht würde erreichen lassen, und daß es in mancher Richtung besser gewesen wäre, wenn dieses Buch nicht von einem, sondern von mehreren Physikern und Mathematikern geschrieben würde. So verlockend es gewesen wäre auf diese Weise etwas Vollkommenes in die Wege zu leiten, so habe ich doch endgültig davon abgesehen die Aufgabe zu teilen, in der Erwägung, daß ein Buch, das für den praktischen Gebrauch der Physiker bestimmt ist, auch wenn es wesentlich Mathematik enthält, nur von einem Physiker verfaßt sein darf, und daß bei einer Verteilung der Aufgabe auf mehrere Mitarbeiter die Homogenität zu sehr gelitten hätte. Ich hege die Hoffnung, daß, nachdem das Buch einmal in einem bestimmten Charakter geschrieben vorliegt, zu einer späteren Zeit durch die Mitarbeit von mehreren Fachkollegen die vorhandenen Mängel ausgeglichen werden.

Frankfurt a. M., September 1922.

ERWIN MADELUNG.

## Vorwort zur dritten Auflage.

Seit dem Erscheinen der zweiten Auflage sind nunmehr 10 Jahre verflossen. In dieser Zeit hat sich die Notwendigkeit einer gründlichen Überarbeitung und Ergänzung des bisher Gebrachten immer mehr herausgestellt. Einerseits ist der Umfang des für den Physiker notwendigen mathematischen Rüstzeugs, besonders unter dem Einfluß der Wellenmechanik, nicht unwesentlich gestiegen, andererseits hat auch die innere Entwicklung des Verfassers ihn die Mängel der ersten Bearbeitungen immer stärker fühlen lassen. Wenn auch der ganze Charakter des Buches sich bewährt zu haben scheint, so war es doch in vielen Einzelheiten verbesserungs- und ergänzungsbedürftig.

Unter diesen Umständen war es sehr zu begrüßen, daß sich die Mitarbeit eines Mathematikers bot, der bereit und fähig war, sich der Eigenart des wesentlich für den Physiker bestimmten Buches anzupassen. Herr Dr. K. BOEHLE, damals Assistent am mathematischen Seminar der Universität Frankfurt, hat diese Mitarbeit übernommen. Er hat sich nicht damit begnügt, Ungenauigkeiten zu berichtigen und Lücken auszufüllen, sondern er hat größere Abschnitte ganz neu geschrieben. Wenn der mathematische Teil des Buches in der neuen Form jetzt auch von einem Mathematiker ohne Beanstandung aufgenommen werden kann, so ist das wesentlich ihm zu verdanken.

Ein zweiter wertvoller Mitarbeiter wurde Herr Dr. S. FLÜGGE, damals Assistent am Institut für theoretische Physik in Frankfurt. Er hat an der Neubearbeitung des ganzen Buches in allen seinen Teilen regsten Anteil genommen und auch einzelne Abschnitte neu geschrieben. Seine Tätigkeit ist für die Zuverlässigkeit des Buches von großer Bedeutung gewesen.

Wer die neue Auflage mit der letzten vergleicht, wird neben zahlreichen kleineren und größeren Verbesserungen und Ergänzungen, Umstellungen und Zusätzen auch mancherlei Neues finden. In der Mathematik sind die Entwicklungen nach orthogonalen Funktionensystemen und die Funktionen selbst systematischer behandelt als bisher. Die Abschnitte über Algebra, Integralgleichungen und Variationsrechnung sind wesentlich erweitert worden. Ganz neu ist ein Abschnitt über Gruppentheorie. In der Physik ist vieles besser geordnet. Die Quantentheorie erforderte eine ganz neue Darstellung. In einem Anhang ist vereinigt,

was bisher als Fremdkörper im Text stand, aber nicht gerne entbehrt werden konnte, wie Beispiele, Spezialfälle u. a.

Leider ist eine gewisse Vergrößerung des Umfanges nicht zu vermeiden gewesen. Wo es irgend ging, wurde versucht zu kürzen. Eine noch stärkere Konzentration wäre aber nicht möglich ohne die Verwendbarkeit zu beeinträchtigen. Maßgebend war allein die Absicht denen zu dienen, die auf dem weiten Feld der Physik arbeiten wollen.

Bei dieser Neu- und Wiedergeburt meines Buches habe ich vor allem meinen treuen Mitarbeitern Dr. BOEHLE und Dr. FLÜGGE Dank zu sagen für ihre hingebungsvolle Tätigkeit im Dienste der Sache. Danken möchte ich auch Herrn Prof. Dr. F. K. SCHMIDT, Jena, für manche freundlichen Ratschläge sowie Herrn Dr. W. KOFINK, Frankfurt, für seine wertvolle Hilfe beim Lesen der Korrekturen.

Frankfurt a. M., Dezember 1935.

**ERWIN MADELUNG.**

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung . . . . .	1
Erster Teil.	
<b>Mathematik.</b>	
Das Begriffssystem der Mathematik . . . . .	3
Erster Abschnitt: <b>Differential- und Integralrechnung</b> . . . . .	4
A. Allgemeine Differentiationsregeln . . . . .	4
1. Produkte und Quotienten S. 4. – 2. Funktion von Funktion S. 5. – 3. Umkehrfunktionen S. 5. – 4. Implizite Funktionen S. 5. – 5. Funktionen eines Parameters S. 5. – 6. Einführung neuer Variablen S. 5. – Differentiation von Integralen S. 6.	
B. Differentiations- und Integrationstabelle. . . . .	7
C. Integrationsmethoden . . . . .	9
1. Partielle Integration S. 9. – 2. Rationale Funktionen. Zerlegung in Partialbrüche S. 9. – 3. Einführung neuer Veränderlicher S. 11. – 4. Entwicklung des Integranden in eine Potenzreihe S. 11.	
D. Bestimmte Integrale . . . . .	11
1. Abschätzung S. 11. – 2. SCHWARZsche Ungleichung S. 11. – 3. Annäherung durch Summen S. 12. – 4. Formelschatz S. 12. – 5. Elliptische Integrale S. 5.	
E. Differenzenrechnung . . . . .	16
Zweiter Abschnitt: <b>Reihen und Reihenentwicklungen</b> . . . . .	19
A. Reihen. . . . .	19
1. Allgemeines S. 19. – 2. Konvergenzkriterien S. 20. – 3. Summation von Reihen S. 20.	
B. Reihenentwicklungen . . . . .	22
1. Darstellung beliebig gegebener Funktionen durch bekannte Funktionen S. 22. – 2. Orthogonale Funktionensysteme S. 23. – 3. Entwicklungen nach Orthogonalsystemen S. 24. – Spezielle orthogonale Entwicklungen S. 26. – 5. Entwicklung in Potenzreihen S. 31.	
Dritter Abschnitt: <b>Funktionen</b> . . . . .	34
A. Allgemeine Funktionentheorie . . . . .	34
1. Bezeichnungen S. 34. – 2. Komplexe Größen S. 35. – 3. Analytische Funktionen S. 36. – 4. CAUCHYs Integralsatz S. 37. – 5. Potenzreihenentwicklung der analytischen Funktionen S. 38. – 6. Berechnung	

bestimmter Integrale durch Integration im Komplexen S. 41. – 7. Abbildung durch komplexe Funktionen S. 42. – 8. Veranschaulichung komplexer Funktionen S. 43.

B. Spezielle Funktionen . . . . . 45

    1. Definition der Funktionen S. 45. – 2. Klassifikation der Funktionen S. 45. – 3. Algebraische Funktionen S. 46. – 4. Elementare transzendente Funktionen S. 49. – 5. Systeme orthogonaler Polynome S. 54. – 6. Kugelfunktionen S. 60. – 7. Zylinderfunktionen S. 66. – 8. Gammafunktion S. 73. – 9. Elliptische Integrale und Funktionen S. 74.

Vierter Abschnitt: **Algebra** . . . . . 79

    A. Lineare Gleichungen . . . . . 79

        1. Definitionen S. 79. – 2. Lösbarkeit und Lösungen S. 79. – 3. Lineare Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten S. 81. – Ein wichtiges System S. 82.

    B. Matrizen . . . . . 83

        1. Definition, Bezeichnungen S. 83. – 2. Rechnen mit (endlichen) Matrizen S. 83. – 3. Determinanten, Rang, Spur S. 85. – 4. Besondere Matrizen S. 86. – 5. Matrizen mit Symmetrieeigenschaften S. 86. – 6. Transformation der Matrizen S. 88. – 7. Unendliche Matrizen S. 90.

    C. Determinanten . . . . . 92

        1. Definitionen S. 92. – 2. Determinantensätze S. 92. – 3. Multiplikation, Differentiation S. 93. – 4. Abschätzung und Ränderung von Determinanten S. 93. – 5. Spezielle Determinanten S. 94. – 6. Unendliche Determinanten S. 94. – 7. Praktische Berechnung S. 95.

    D. Kombinatorik . . . . . 95

        1. Permutationen S. 95. – 2. Kombinationen, Variationen S. 96. – 3. Binomialkoeffizienten S. 96.

Fünfter Abschnitt: **Transformationen** . . . . . 97

    A. Allgemeine Transformationen. . . . . 97

        1. Allgemeines S. 97. – 2. Geometrische Bedeutung S. 98. – 3. Invarianten S. 98.

    B. Lineare Transformationen . . . . . 99

        1. Lineare Räume S. 99. – 2. Allgemeine lineare Transformationen S. 100. – 3. Orthogonale Transformationen, Drehung S. 102. – 4. Transformation quadratischer und hermitescher Formen S. 103.

    C. Berührungstransformation . . . . . 104

        1. Im Zweidimensionalen S. 104. – 2. Im Mehrdimensionalen S. 108.

Sechster Abschnitt: **Vektoranalysis** . . . . . 109

    A. Koordinatenfreie Formulierung der Vektoranalysis im dreidimensionalen euklidischen Raum . . . . . 109

        1. Definitionen S. 109. – 2. Vektoralgebra S. 110. – 3. Algebraische Vektorgleichungen S. 111. – 4. Integral- und Differentialausdrücke S. 112. – 5. Allgemeine Differentialformeln S. 116. – 6. Spezielle Vektorfelder S. 116. – 7. Der Vektor  $\mathbf{r}$  S. 118. – 8. Unstetige Vektorfelder S. 120. – 9. Lineare Vektorfeldfunktion S. 123. – 10. Tensoren S. 123. – 11. Der Gradiententensor S. 128. – 12. Tensoren höheren Grades S. 129. – 13. Transformation von Vektoren auf bewegtes Bezugssystem S. 129. – 14 Komplexe Vektoren S. 130.

	Seite
B. Koordinatenmäßige Formulierung der Vektoranalysis im $n$ -dimensionalen Raume . . . . .	131
1. Vektorkomponenten S. 131. – 2. Tensorkomponenten S. 133. –	
3. Tensoren höheren Grades S. 134. – 4. Transformationen S. 134. –	
5. Drei-Indizes-Symbole S. 135. – 6. Verjüngung und Erweiterung	
S. 136. – 7. Erweiterung und Verjüngung in Anwendung auf den Tensor	
$g_{ik}$ S. 137. – 8. Orthogonale Koordinaten S. 138.	
Siebenter Abschnitt: <b>Spezielle Koordinatensysteme</b> . . . . .	141
A. Zweidimensionale Systeme . . . . .	141
1. Ebene Koordinatensysteme S. 141. – 2. Koordinaten auf Flächen	
S. 142.	
B. Dreidimensionale Systeme . . . . .	143
1. Kartesische Koordinaten S. 143. – 2. Kugelkoordinaten S. 145. –	
3. Zylinderkoordinaten S. 146. – 4. Parabolische Koordinaten S. 147. –	
5. Elliptische Koordinaten S. 148.	
Achter Abschnitt: <b>Gruppentheorie</b> . . . . .	152
A. Allgemeine Definitionen und Sätze . . . . .	152
1. Gruppen S. 152. – 2. Untergruppen S. 154. – 3. Transformation,	
Normalteiler S. 155.	
B. Kontinuierliche Gruppen . . . . .	156
C. Darstellungstheorie . . . . .	157
1. Allgemeines über die Darstellungen einer Gruppe S. 157. –	
2. Hauptsätze über Darstellungen S. 159. – 3. Eigenwertprobleme und	
Darstellungen von Gruppen S. 161. – 4. Drehungsgruppen und ihre Dar-	
stellungen S. 163. – 5. Darstellungen und Charaktere der symmetrischen	
Gruppen S. 164.	
Neunter Abschnitt: <b>Differentialgleichungen</b> . . . . .	166
A. Allgemeines über Differentialgleichungen . . . . .	166
1. Einteilung der Differentialgleichungen S. 166. – 2. Lösungen	
von Differentialgleichungen S. 167. – 3. Lineare Probleme S. 170.	
B. Gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .	170
1. Differentialgleichungen erster Ordnung S. 170. – 2. Lineare	
Differentialgleichungen erster Ordnung S. 173. – Besondere Formen von	
Differentialgleichungen S. 178. – 4. Lineare Differentialgleichung	
zweiter Ordnung S. 180. – 5. Systeme von Differentialgleichungen	
(simultane Differentialgleichungen) S. 185. – 6. Totale Differential-	
gleichungen (PFAFFSche Gleichungen) S. 187.	
C. Partielle Differentialgleichungen . . . . .	189
1. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung S. 189. – 2. Parti-	
elle Differentialgleichungen zweiter Ordnung S. 191.	
D. Lineare Probleme . . . . .	195
1. Allgemeines S. 195. – 2. Homogene Probleme zweiter Ordnung	
S. 197. – 3. Randwertprobleme elliptischer Gleichungen S. 201. –	
4. Anfangswertprobleme hyperbolischer Gleichungen S. 204.	
E. Störungsprobleme . . . . .	205
1. Eindimensionale gestörte Probleme S. 205. – 2. Mehrdimensionale	
Störungsprobleme S. 208.	

	Seite
<b>Zehnter Abschnitt: Integralgleichungen</b> . . . . .	209
A. Integralgleichungen zweiter Art . . . . .	209
1. Allgemeiner Sachverhalt S. 209. – 2. Symmetrischer Kern, homogene Gleichung S. 210. – 3. Symmetrischer Kern, inhomogene Gleichung S. 211. – 4. Unsymmetrischer Kern S. 213.	
B. Integralgleichungen erster Art . . . . .	214
<b>Elfter Abschnitt: Variationsrechnung</b> . . . . .	215
A. Zurückführung auf Differentialgleichungen. . . . .	215
1. Variation ohne Nebenbedingungen S. 215. – 2. Variationen mit Nebenbedingungen S. 216.	
B. Direkte Lösungsmethoden . . . . .	217
1. Das Ritzsche Verfahren S. 217. – 2. Zurückführung auf ein Problem von unendlich vielen Veränderlichen S. 220. – 3. Approximation durch gebrochene Linienzüge S. 221.	
<b>Zwölfter Abschnitt: Wahrscheinlichkeitsrechnung</b> . . . . .	221
A. Grundbegriffe . . . . .	221
B. Mittelwertbildung . . . . .	222
C. Schwankungen . . . . .	223
D. Wahrscheinlichkeitsnachwirkung . . . . .	225
E. Korrelation. . . . .	225

Zweiter Teil.

**Physik.**

<b>Das Begriffssystem der theoretischen Physik</b> . . . . .	227
<b>Erster Abschnitt: Mechanik</b> . . . . .	229
A. Mechanik des einzelnen Massenpunktes . . . . .	229
1. Grundgesetz und Begriffe S. 229. – 2. Verschiedene Formen des Grundgesetzes S. 231.	
B. Systeme von Massenpunkten . . . . .	234
1. Allgemeines S. 234. – 2. Formale Zurückführung auf die Dynamik eines Massenpunktes S. 235. – 3. Gleichgewichtslagen und Schwingungen S. 235.	
C. Prinzipien der Mechanik . . . . .	236
1. Differentialprinzipien S. 236. – 2. Variationsprinzipien S. 237.	
D. Starrer Körper . . . . .	239
E. Mechanik der Continua . . . . .	242
1. Kinematik S. 242. – 2. Kräfte S. 244. – 3. Elastizitätstheorie S. 244. – 4. Übergang zur Hydrodynamik S. 248. – 5. Hydrodynamik S. 249.	
<b>Zweiter Abschnitt: Elektrodynamik (einschließlich Optik)</b> . . . . .	250
A. Allgemeine Theorie . . . . .	250
1. Elektrostatik S. 250. – 2. Elektrokinetik S. 253. – 3. Magnetostatik S. 254. – 4. Elektromagnetik S. 255. – 5. Elektrodynamik S. 256. – 6. Kräfte S. 257. – 7. Energie S. 260.	

	Seite
B. Spezielle Fälle . . . . .	262
1. Elektrodynamik quasistationärer Ströme S. 262. – 2. Elektrodynamik im homogenen Material S. 262. – 3. Elektrodynamik periodischer Felder im homogenen Material S. 265. – 4. Grundlagen der Optik S. 266. – 5. Wellen in anisotropen Medien (Kristalloptik) S. 268.	
Dritter Abschnitt: <b>Relativitätstheorie</b> . . . . .	271
A. Spezielle Relativitätstheorie . . . . .	271
1. Vierdimensionale Darstellung der Welt und das Relativitätsprinzip S. 271. – 2. LORENTZ-Transformation S. 272. – 3. Physikalische Bedeutung vierdimensionaler Vektoren und Tensoren S. 276. – 4. Elektrodynamik S. 278. – 5. Elektrodynamik in bewegten Medien S. 279. – 6. Dynamik des Massenpunktes S. 280.	
B. Allgemeine Relativitätstheorie . . . . .	282
1. Grundlagen S. 282. – 2. Einige wichtige Lösungen der Feldgleichungen S. 295. – 3. Kosmologische Ansätze S. 287.	
Vierter Abschnitt: <b>Quantentheorie</b> . . . . .	289
A. Vorläufige Formulierung . . . . .	289
1. Mechanik S. 289. – 2. Elektrodynamik S. 291.	
B. Quantenmechanik . . . . .	292
1. Unrelativistische Punktmechanik. Konservative und nicht-konservative Systeme S. 292. – 2. Relativistische Punktmechanik S. 303.	
C. Quantenoptik . . . . .	308
1. Lichtquanten S. 308. – 2. Hohlraumstrahlung S. 309. – 3. Wechselwirkung von Strahlung und Materie S. 310.	
Fünfter Abschnitt: <b>Thermodynamik</b> . . . . .	313
A. Grundbegriffe . . . . .	313
B. Hauptsätze . . . . .	314
C. Zustandsvariablen . . . . .	316
D. Koeffizienten . . . . .	318
E. Prozesse . . . . .	318
F. Abgeschlossene Systeme . . . . .	319
G. Spezialfälle . . . . .	321
1. Ideale Gase S. 321. – 2. Gemische idealer Gase S. 323. – 3. Hohlraumstrahlung S. 324.	
H. Zustandsgleichung . . . . .	324
I. Spezielle Gleichgewichte . . . . .	326
K. Phasentheorie . . . . .	327
L. Massenwirkungsgesetz . . . . .	328
M. Dritter Hauptsatz der Thermodynamik . . . . .	329
Sechster Abschnitt: <b>Statistische Methoden</b> . . . . .	331
A. Diskrete Zustände . . . . .	331
1. Allgemeines S. 331. – 2. Thermodynamisches Gleichgewicht S. 333.	
B. Statistische Mechanik . . . . .	335
1. Klassische Mechanik S. 335. – 2. Zelleneinteilung des Phasenraums S. 336. – 3. Das kinetische Modell des idealen Gases S. 337.	
C. FERMI- und BOSE-Statistik . . . . .	341



**Anhang.**

1. FOURIER-Integrale S. 344. – 2. Potenzreihenentwicklung S. 344. – 3. Beispiel für komplexe Integration S. 347. – 4. Harmonischer Oszillator S. 348. – 5. Planetenbewegung S. 349. – 6. Zur Vektorsymbolik S. 350. – 7. Drei-Indizes-Symbole S. 351. – 8. Erzwungene Schwingung S. 351. – 9. Vektoranalytische Behandlung der Planetenbewegung S. 352. – 10. Magnetischer Kreis S. 353. – 11. Elektrische Maßsysteme S. 354. – 12. Die drei Einsteineffekte S. 355. – 13. KEPLER-Problem S. 356. – 14. Potentialschwelle S. 357. – 15. Atombau (Elektronenkatalog) S. 359. – 16. Elektronengas S. 359. – 17. BROWNSCHE Bewegung S. 361. – 18. Schwankung makroskopischer Größen S. 362. – 19. Binomialkoeffizienten S. 363. – 20. Reihenoeffizienten S. 364. – 21. Elektrizitätsmengen-Einheiten S. 365. – 22. Energieeinheiten S. 365. – 23. Universelle Konstanten S. 366.

<b>Literaturverzeichnis</b> . . . . .	367
<b>Sachverzeichnis</b> . . . . .	372

## Einleitung.

Die Physik stellt sich zwei Aufgaben, erstens aus der Erfahrung Theoreme über die Welt und ihr Geschehen zu gewinnen und zweitens, aus diesen Theoremen Folgerungen zu ziehen, die der Erfahrung zugänglich sind. Sie heißen: *Induktion* und *Deduktion*.

Auf dem Wege der Induktion schreitet die Physik von speziellen Erfahrungen ausgehend durch Idealisierung und Generalisierung (Extrapolation) zur Aufstellung von Theoremen immer größerer Allgemeinheit fort. Ihr Ziel ist es, alle in speziellen Fällen erkannten Regelmäßigkeiten in einer Mindestzahl von *Grundgesetzen* zusammenzufassen. Hierbei löst sie sich von der Erfahrung los, sie überschreitet die Grenzen des empirisch gesicherten Bodens und schwebt von Hypothesen getragen im Leeren, wenn es ihr nicht gelingt, auf dem Wege der Deduktion spezialisierend neuen Boden zu finden, indem sie wieder bei Erfahrungen anlangt. So entsteht eine *Theorie*, die sich über den Abgrund des der Erfahrung Unzugänglichen spannt wie ein Gewölbe, das die Grundgesetze als Schlußsteine in sich trägt.

Experimentelle und mathematische Physik unterscheiden sich nur durch die Methode, nicht durch den Gegenstand ihrer Betrachtung. Beide zusammen bilden ein Ganzes, nur ihr Zusammenwirken vermag das Gewölbe zu spannen. Die Experimentalphysik ist ohne die Hilfe des Theoretikers genau so machtlos wie der Theoretiker ohne die Unterstützung des Experimentalphysikers.

Die Methode der *mathematischen Physik* ist die Benutzung der von der Mathematik gelieferten Erkenntnisse. Sie verwendet das mathematische Schema als Modell, zu dem sie die Welt in Analogie setzt. Die mathematische Form ist ihr ein Bild der Welt, in dem das geistige Auge Dinge sieht, die dem leiblichen verschlossen sind. Die großen Erfolge, die diese Methode bisher gehabt hat, indem sie immer wieder ins sichere Land der Erfahrung zurückführte, gibt dem Physiker das feste Vertrauen zu ihrer Anwendbarkeit. Dabei bleibt sie ihm aber doch nur Hilfsmittel, nur Werkzeug und Gerüst. Die mathematische Form, den Formalismus, zu überschätzen, wäre ebenso falsch wie ihn zu verachten.

Der *erste* Teil dieses Buches ist der Bereitstellung des mathematischen Materials gewidmet. Bei der stets wechselnden Art seiner Anwendung ist in jedem Falle ein gewisses Zurichten nicht zu umgehen. Neben das vermittelte Wissen muß das selbständige Können treten.

Der *zweite* Teil enthält die Grundgesetze und einige sich daran anschließende Theoreme in einem solchen Umfange, daß die ganze Theorie in ihren Umrissen erkennbar wird. Das Methodische steht hierbei durchaus im Vordergrund. Im wesentlichen wird deshalb die mathematische Abbildung der Theorie gegeben, vorbereitet für ihre weitere mathematische Behandlung, sowie die Regeln, nach denen die Abbildung aus dem Physikalischen ins Mathematische (und umgekehrt) erfolgen soll. Dieses Übersetzen aus der einen in die andere Sprache mit Berücksichtigung der jeder eigenen Ausdrucksfähigkeit bleibt immer, zumal für den Anfänger, der schwierigste Teil der Arbeit, der nur durch genaue Kenntnis der beiden Wissenschaften zu überwinden ist. Eine eingehende Kritik und die Klärung der Frage, inwieweit diese Übersetzung mit Erhaltung des Sinnes gelungen ist, ist in jedem Falle unerlässlich.

Im Vertrauen auf ein physikalisches Gesetz im Bereiche einer Theorie fortschreiten, heißt sich im *theoretisch Möglichen* bewegen. Ob man auf diese Weise zu etwas *Realisierbarem*, wirklich Möglichem gelangt, ist damit noch nicht entschieden. Man muß das spezifische Empfinden und die Erfahrungen eines Physikers besitzen, um oft mehr zu fühlen als zu erkennen, ob eine Rechnung noch einen greifbaren Sinn hat.

Ein *Problem* behandeln heißt den durch die *Problemstellung* eingegengten Bereich des Möglichen erfassen und darstellen. Diese Darstellung heißt die *Lösung* des Problems. Mit ihrer Auffindung kommt der Physiker an die Grenze seines selbst abgegrenzten Aufgabenkreises. Er bietet die Lösungen als die Früchte seiner Arbeit den Nachbarn an. Dabei darf er nie vergessen, daß diese Früchte zum Genusse erst dann geeignet sind, wenn sie reif sind, d. h. wenn sie dem Bedürfnis des Benutzers entsprechen. Eine „Lösung“ z. B., die zu ihrer Auswertung eine übermäßige Arbeit erfordert, ist praktisch wertlos. Auf jeden Fall ist sich der Physiker dessen bewußt, daß er nur ein Glied ist in der Kette der vielen, die einander die Fackel weiterreichen.

Erster Teil.

## Mathematik.

### Das Begriffssystem der Mathematik.

Die *Gegenstände*, mit denen sich die Mathematik befaßt, sind rein *fiktiver* Natur. Sie haben an sich nichts mit den Gegenständen der sinnlichen Wahrnehmung zu tun. Da sie aber geschaffen sind und abhängig bleiben vom menschlichen Geist, der nur sinnlich Erfasstes verarbeiten und seine natürlichen Grenzen nicht überschreiten kann, so ist einerseits ihre Erfassung in Gedanken und Worten nur mit Bezugnahme auf Realitäten (Objekte oder Geschehnisse) durch Idealisierung oder Abstraktion möglich, andererseits unterliegen sie den Gesetzen menschlichen Denkens (*Logik*). Hierdurch ist die Verwendbarkeit mathematischer Erkenntnisse in der Welt des Realen begründet.

Zwei wichtige Gegenstände der Mathematik sind der *Punkt* und die *Zahl*. Die *Geometrie* (im weiteren Sinne) beschäftigt sich mit Punkten in endlichen oder unendlichen *Punktmannigfaltigkeiten*. Die *Analysis* beschäftigt sich mit Zahlen in *Zahlenmannigfaltigkeiten*. Diesen aus Punkten oder Zahlen bestehenden mathematischen Gebilden stehen als selbständige Gegenstände die mathematischen *Operationen* gegenüber. Die einfachste Operation der Geometrie ist die *Verschiebung*. Sie führt einen Punkt in einen anderen über, bzw. eine Verschiebungsmannigfaltigkeit führt Punktmannigfaltigkeiten in andere über (*Abbildung*). In der Analysis entspricht dem die Zuordnung von Zahlen bzw. Zahlenmannigfaltigkeiten zueinander (*Funktion* oder *Transformation*). Diese Analogie (*Isomorphie*) gestattet Geometrie und Analysis in dasselbe formale Gewand zu kleiden oder auch sie als verschiedene Darstellungen derselben abstrakten Gegenständlichkeit zu betrachten. Hierdurch ist die Gleichwertigkeit geometrischer und analytischer Formalismen für die Anwendung begründet.

Die mathematischen Gegenstände sind definierbar:

1. *deskriptiv*, durch Beschreibung ihrer Eigenart (Vorhandensein oder Nichtvorhandensein bestimmter Eigenschaften, innere Gesetzmäßigkeiten u. dgl.) oder

2. *konstruktiv*, durch Angabe der Methode, wie sie aus *Elementen* aufgebaut werden können.

Die Elemente sind nur deskriptiv definierbar.

Nicht jeder deskriptiv definierte Gegenstand ist konstruierbar. Nichtkonstruierbare Gegenstände heißen, sofern sie nicht als Elemente zugelassen sind, *nicht existent* (Existenzbeweise).

Die Mathematik hat eine eigene *Symbolschrift* entwickelt. Sowohl Größen wie Operationen werden zumeist durch einzelne Buchstaben angedeutet, Operationen auch oft durch besondere Zeichen, Wortkürzungen u. dgl. Symbole für Operationen heißen *Operatoren*. In den Formen:  $\sin x$ ,  $a \cdot x$ ,  $x + \alpha$ ,  $(x)^2$ ,  $f(x)$  usw. sind  $\sin$ ,  $a \cdot$ ,  $+$ ,  $( )^2$ ,  $f( )$  Operatoren, die der Größe  $x$  jeweils eine neue Größe zuordnen. Von festen Regeln, nach denen man Größen und Operatoren aus der Symbolschrift unterscheiden könnte, sind wir weit entfernt. Man erkennt, daß ein mathematisches Symbolsystem oft in verschiedenem Sinne gelesen und sein Sinn erst aus dem Zusammenhang (Begleittext!) entnommen werden kann.

Ein *mathematisches System* (z. B. Algebra, Funktionentheorie, Gruppentheorie) beschäftigt sich mit einem System von Größen und Operationen, die aus gewissen ausgewählten Elementen konstruierbar sind. Es stellt eine Anzahl von *Axiomen* (Spielregeln) auf, nach denen man kombinieren darf und welche festsetzen, wann solche Kombinationen als „gleich“ zu betrachten sind. Symbolisch schreiben sich diese Axiome in der Form von *Gleichungen*. Damit ist der Ausgangspunkt für ein *Rechenverfahren* (Kalkül) gegeben.

## Erster Abschnitt.

# Differential- und Integralrechnung.

## A. Allgemeine Differentiationsregeln.

### 1. Produkte und Quotienten.

$$(u \cdot v)' = v u' + u v'; \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v u' - u v'}{v^2} = \frac{u}{v} \left(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}\right)$$

$$(u \cdot v)'' = u''v + 2u'v' + uv'';$$

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v' + \dots + u \cdot v^{(n)}.$$

*Logarithmische* Differentiation:  $\frac{d(\ln y)}{dx} = \frac{y'}{y} =$  logarithmische Ableitung.

$$y = \frac{u \cdot v \cdot \dots}{w \cdot \dots}; \quad y' = y \cdot \frac{d(\ln y)}{dx} = y \left( \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \dots - \frac{w'}{w} - \dots \right)$$

$$y = u^v; \quad \frac{d}{dx}(u^v) = u^v \cdot (v \cdot \ln u)' = u^v \left( v \frac{u'}{u} + v' \cdot \ln u \right).$$

**2. Funktion von Funktion.**

$$y = F(u), \quad u = f(x),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad (\text{Kettenregel});$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{du^2} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2};$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d^3 y}{du^3} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^3 + \frac{d^2 y}{du^2} \cdot 3 \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^3 u}{dx^3}.$$

**3. Umkehrfunktionen.**

$$\text{a) } y = y(x), \quad x = x(y), \quad \frac{dx}{dy} \neq 0;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2 x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}; \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{3 \left(\frac{d^2 x}{dy^2}\right)^2 - \frac{dx}{dy} \cdot \frac{d^3 x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}.$$

$$\text{b) } u = u(x, y), \quad v = v(x, y); \quad \frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_y, \dots, \quad D \neq 0.$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{v_y}{D}; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{-u_y}{D};$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-u_x}{D}; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{u_x}{D};$$

$$D = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}.$$

**4. Implizite Funktionen.**

$$f(x, y, z, \dots) = 0, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0.$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-f_x}{f_y};$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{f_{xx} f_y^2 - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2}{f_y^3}.$$

**5. Funktionen eines Parameters.**

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi' \neq 0.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'}{\varphi'};$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\varphi' \psi'' - \varphi'' \psi'}{\varphi'^3};$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\varphi'^2 \psi''' - 3 \varphi' \varphi'' \psi'' + 3 \psi' \varphi'^2 - \varphi' \psi' \varphi'''}{\varphi'^6}.$$

**6. Einführung neuer Variablen.**

$$\varphi = \varphi(x, y),$$

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot dy \text{ heißt totales Differential von } \varphi.$$

Ein Ausdruck  $d\varphi = f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy$  ist dann und nur dann ein *totales Differential* einer Funktion  $\varphi = \varphi(x, y)$  (d. h.  $f_1$  und  $f_2$  sind darstellbar in der Form  $f_1(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $f_2(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ ), wenn  $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$  ist.

- a)  $\varphi = \varphi(x, y)$ ; statt  $y$  die neue Variable  $z = z(x, y)$ ;  
 $\varphi(x, y)$  geht dabei in  $\varphi(x, y) = \Phi(x, z(x, y))$  über:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}.$$

- b)  $\varphi = \varphi(x, y)$ ; neue Variablen:  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ ;  
 $\varphi(x, y)$  geht dabei in  $\Phi(u(x, y), v(x, y))$  über:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

- c)  $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;  $x_i = x_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ;  $i, k = 1, 2, \dots, n$ .  
 $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  geht in  $\Phi(y_1, y_2, \dots, y_n)$  über.

$$\text{Dann ist} \quad d\varphi = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot dx_i; \quad dx_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \cdot dy_k,$$

$$\text{also} \quad d\Phi = \sum_i \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \cdot dy_k = \sum_k \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} \cdot dy_k,$$

$$\text{mithin} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i}.$$

## 7. Differentiation von Integralen.

- a) Nach einer Integrationsgrenze:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = - \frac{d}{dx} \int_x^a f(t) dt = f(x).$$

- b) Nach einem Parameter: Für jedes Intervall  $\alpha \leq x \leq \beta$ , in welchem  $f(x, t)$  für  $a \leq t \leq b$  stetig nach  $x$  differenzierbar ist, gilt

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt.$$

Bei uneigentlichem Integral müssen außerdem  $\int_a^b f(x, t) dt$  und  $\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$

im Intervall  $\alpha \leq x \leq \beta$  gleichmäßig konvergent sein.

- c) Nach Integrationsgrenze und Parameter [Voraussetzungen s. u. b)]

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(x, t) dt = f(x, x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

allgemeiner

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt = \psi'(x) f(x, \psi(x)) - \varphi'(x) f(x, \varphi(x)) + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt.$$

Besitzt  $f(x, t)$  an der oberen Grenze eine Singularität, so führt man statt  $t$  oft mit Vorteil eine neue Variable ein derart, daß die Integrationsgrenzen konstant werden (Fall b). Mit Hilfe von  $s = \frac{t-a}{x-a}$ ;  $0 \leq s \leq 1$  gewinnt man die nützliche Formel:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(x, t) dt = \frac{1}{x-a} \int_a^x \left( (x-a) \frac{\partial f}{\partial x} + (t-a) \frac{\partial f}{\partial t} + f \right) dt.$$

### B. Differentiations- und Integrationstabelle.

Vgl. auch die Formeln für arccos, arcctg usw. S. 51.

$\frac{dy}{dx} = f(x)$	$y = \int f(t) dt$	$\frac{dy}{dx} = f(x)$	$y = \int f(t) dt$
$a^x$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\arcsin x$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
$\ln x$	$x \ln x - x$	$\operatorname{arctg} x$	$x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
$\sin x$	$-\cos x$	$\sin^2 x$	$\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x \cos x$
$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\operatorname{tg} x$	$-\ln \cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\operatorname{ctg} x$	$\ln \sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\operatorname{Csin} x$	$\operatorname{Cof} x$	$\frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x$	$\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$
$\operatorname{Cof} x$	$\operatorname{Csin} x$	$\frac{1}{\cos x} = \operatorname{sec} x$	$\ln \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$
$\operatorname{Ctg} x$	$\ln \operatorname{Cof} x$	$\frac{1}{\sin x \cos x}$	$\ln \operatorname{tg} x$
$\frac{1}{x+a}$	$\ln(x+a)$	$(x+a)^b$	$\frac{1}{b+1} (x+a)^{b+1}$ für $b \neq -1$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\operatorname{Ar} \operatorname{Csin} \frac{x}{a} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$
	$-\arccos \frac{x}{a}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\operatorname{Ar} \operatorname{Cof} \frac{x}{a} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$
$\frac{a}{x^2+a^2}$	$\operatorname{arctg} \frac{x}{a}$	$\frac{a}{x \sqrt{x^2-a^2}}$	$\operatorname{arc} \operatorname{sec} \frac{x}{a} = \operatorname{arc} \operatorname{csc} \frac{a}{x}$
	$-\operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{x}{a}$		



$\frac{dy}{dx} = f(x)$	$y = \int f(t) dt$
$\frac{a}{a^2 - x^2}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ar} \text{ Tg} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{a+x}{a-x} \quad \text{reell f\u00fcr }  x  < a, \quad x \text{ reell} \\ \text{Ar} \text{ Ctg} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{x+a}{x-a} \quad \text{reell f\u00fcr }  x  > a > 0, \quad x \text{ reell} \end{array} \right.$
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$\frac{1}{2} a^2 \text{Ar} \text{ Sin} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$-\frac{1}{2} a^2 \text{Ar} \text{ Cos} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2}$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$-\frac{1}{2} a^2 \text{arc} \cos \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2}$
$\frac{1}{x^2 + 2bx + c}$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\sqrt{b^2 - c}} \cdot \ln \frac{x+b-\sqrt{b^2-c}}{x+b+\sqrt{b^2-c}} \quad \text{f\u00fcr } c < b^2 \\ \frac{1}{\sqrt{c-b^2}} \text{arc} \text{ tg} \left( \frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}} \right) \quad \text{f\u00fcr } c > b^2 \end{array} \right.$
$\frac{Ax + B}{(x-x_1)(x-x_2)}$	$\frac{1}{x_1 - x_2} \{ (Ax_1 + B) \ln(x-x_1) - (Ax_2 + B) \ln(x-x_2) \}$
$\frac{Ax + B}{(x^2 + 2bx + c)^n}$	$\frac{-A}{2(n-1)(x^2 + 2bx + c)^{n-1}} - \frac{Ab - B}{(c-b^2)^{n-\frac{1}{2}}} \int \frac{du}{(1+u)^n}$ $u = \frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}, \quad c > b^2$
$\frac{1}{(1+x^2)^n}$	$\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} \quad \text{f\u00fcr } n \neq 1$
$\frac{1}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}$	$\frac{1}{\sqrt{a}} \ln(b + ax + \sqrt{a} \sqrt{ax^2 + 2bx + c}) \quad \text{f\u00fcr } a > 0; b^2 - ac \neq 0$
$\frac{1}{\sqrt{-ax^2 + 2bx + c}}$	$\frac{1}{\sqrt{a}} \text{arc} \sin \frac{ax-b}{\sqrt{b^2+ac}} \quad \text{f\u00fcr } a > 0; b^2 + ac \neq 0$
$\sin^m x \quad (m \neq 0)$	$-\frac{1}{m} \sin^{m-1} x \cdot \cos x + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x dx$
$\cos^m x \quad (m \neq 0)$	$\frac{1}{m} \cos^{m-1} x \cdot \sin x + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} x dx$
$\text{tg}^m x \quad (m \neq 1)$	$\frac{1}{m-1} \text{tg}^{m-1} x - \int \text{tg}^{m-2} x dx$
$\text{ctg}^m x \quad (m \neq 1)$	$-\frac{1}{m-1} \text{ctg}^{m-1} x - \int \text{ctg}^{m-2} x dx$
$\sin^m x \cos^n x$	$-\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx$
$(m+n \neq 0)$	$= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx$
$\frac{1}{\sin^n x} \quad (n \neq 1)$	$-\frac{\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$
$\frac{1}{\cos^n x} \quad (n \neq 1)$	$\frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$
$\frac{\sin^m x}{\cos^n x} \quad (n \neq 1)$	$\frac{\sin^{m+1} x}{(n-1) \cos^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\sin^m x dx}{\cos^{n-2} x}$
$\frac{\cos^m x}{\sin^n x} \quad (n \neq 1)$	$\frac{\cos^{m+1} x}{(n-1) \sin^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\cos^m x dx}{\sin^{n-2} x}$

### C. Integrationsmethoden.

#### 1. Partielle Integration.

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx.$$

#### 2. Rationale Funktionen, Zerlegung in Partialbrüche.

Jede rationale Funktion  $R(x)$  läßt sich zerlegen:  $R(x) = F(x) + \frac{\varphi(x)}{f(x)}$ , wobei  $F(x)$ ,  $\varphi(x)$  und  $f(x)$  ganze rationale Funktionen sind,  $f(x)$  von höherem Grad als  $\varphi(x)$ . Der Ausdruck  $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$  läßt sich immer in eine Summe von Partialbrüchen zerlegen, die sich ohne weiteres integrieren lassen.

a) Hat  $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0$  lauter verschiedene Wurzeln, so wird

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n}, \quad \text{mit } A_i = \frac{\varphi(x_i)}{f'(x_i)}.$$

b) Hat  $f(x) = 0$  mehrfache Wurzeln, und zwar  $\alpha$  Wurzeln  $x_1$ ,  $\beta$  Wurzeln  $x_2$  usw., so hat die Partialbruchzerlegung die Form:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = & \frac{A_1}{(x - x_1)^\alpha} + \frac{A_2}{(x - x_1)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x - x_1)} \\ & + \frac{B_1}{(x - x_2)^\beta} + \frac{B_2}{(x - x_2)^{\beta-1}} + \dots \end{aligned}$$

$A_i, B_i, C_i, \dots$  findet man durch Koeffizientenvergleich:

Ist z. B.  $f(x) = (x - x_1)^\alpha f_1(x)$ , so hat man zur Bestimmung der  $A_i$  die  $\alpha$  Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) &= A_1 f_1(x_1), \\ \varphi'(x_1) &= A_1 f_1'(x_1) + A_2, \\ \varphi''(x_1) &= A_1 f_1''(x_1) + 2A_2 f_1'(x_1) + 2A_3 f_1(x_1), \\ &\dots \end{aligned}$$

allgemein: 
$$\varphi^{(k)}(x_1) = \sum_{\nu=0}^k \frac{k!}{(k-\nu)!} A_{\nu+1} f_1^{(k-\nu)}(x_1) \quad k = 0, 1, \dots, \alpha - 1.$$

Sind  $f(x)$  und  $\varphi(x)$  für reelle  $x$  reell, so kann man die zu komplexen Wurzeln von  $f(x) = 0$  gehörenden Partialbrüche stets paarweise zu je einem reellen Gliede zusammenziehen. Ist z. B.  $x_1 = u_1 + i v_1$ ;  $x_2 = x_1^* = u_1 - i v_1$ , so ist

$$\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} = \frac{Px + Q}{(x - u_1)^2 + v_1^2}.$$

Integrand	$u$		$\frac{dx}{dy}$
$R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x)$	$\operatorname{tg} \frac{x}{2}$	$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \operatorname{tg} x = \frac{2u}{1-u^2}$	$\frac{2}{1+u^2}$
$R(\operatorname{Sin} x, \operatorname{Cos} x, \operatorname{Zg} x)$	$\operatorname{Zg} \frac{x}{2}$	$\operatorname{Sin} x = \frac{2u}{1-u^2}, \operatorname{Cos} x = \frac{1+u^2}{1-u^2}, \operatorname{Zg} x = \frac{2u}{1+u^2}$	$\frac{2}{1-u^2}$
$R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x, \operatorname{tg} x)$	$\operatorname{tg} x$	$\sin^2 x = \frac{u^2}{1+u^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+u^2}, \sin x \cos x = \frac{u}{1+u^2}$	$\frac{1}{1+u^2}$
$R(\operatorname{Sin}^2 x, \operatorname{Cos}^2 x, \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x, \operatorname{Zg} x)$	$\operatorname{Zg} x$	$\operatorname{Sin}^2 x = \frac{u^2}{1-u^2}, \operatorname{Cos}^2 x = \frac{1}{1-u^2}, \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x = \frac{u}{1-u^2}$	$\frac{1}{1-u^2}$
$R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})$	$\sqrt{cx+d}$	$x = \frac{u^2-d}{c}$	$\frac{2u}{c}$
$R(x, \sqrt{1+x^2})$	$x + \sqrt{x^2+1}$	$x = \frac{u^2-1}{2u}, \sqrt{1+x^2} = \frac{1+u^2}{2u}$	$\frac{1+u^2}{2u^2}$
$R(x, \sqrt{1-x^2})$	$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$	$x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \sqrt{1-x^2} = \frac{2u}{1+u^2}$	$\frac{-4u}{(1+u^2)^2}$
$R(x, \sqrt{x^2-1})$	$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$	$x = \frac{1+u^2}{1-u^2}, \sqrt{x^2-1} = \frac{2u}{1+u^2}$	$\frac{4u}{(1-u^2)^2}$
$R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$	$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$	$x = \frac{d \cdot u^n - b}{c \cdot u^n - a}$	$\frac{n(ad-bc)}{(cu^n-a)^2} \cdot u^{n-1}$
$R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})$	$\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}$	$x = \frac{\sqrt{ac-b^2} u - b}{a}$	$\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}$

### 3. Einführung neuer Veränderlicher.

*Allgemein:* a) Ist  $t = g(u)$ , und hat  $g'(u)$  in  $c \leq u \leq d$  stets dasselbe Vorzeichen, so gilt

$$\int_a^b f(t) dt = \int_c^d f(g(u)) g'(u) du; \quad a = g(c), \quad b = g(d). \quad (1)$$

b) Wird ein abgeschlossener Bereich  $G$  des  $(x_1, \dots, x_n)$ -Raumes durch  $x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , umkehrbar eindeutig mit in  $G$  positiver Funktionaldeterminante (vgl. S. 97) in den Bereich  $G'$  des  $(x'_1, \dots, x'_n)$ -Raumes abgebildet, so gilt:

$$\int_{G'} \dots \int F(x'_1, \dots, x'_n) dx'_1 \dots dx'_n = \int_G \dots \int F(x'_1, \dots, x'_n) \frac{\partial(x'_1 \dots x'_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)} dx_1 \dots dx_n.$$

c) *Anwendung* von (1) in speziellen Fällen (s. Tabelle S. 10).

$R$  bedeute eine rationale Funktion. Das Integral über eine Funktion der angegebenen Form wird durch Einführung der neuen Variablen  $u$  auf das Integral einer rationalen Funktion zurückgeführt, das nach C 2 behandelt werden kann. In speziellen Fällen können andere Substitutionen schneller und einfacher zum Ziel führen, z. B. durch Zurückführung auf eine der letzten Formeln der Tabelle B, S. 7.

### 4. Entwicklung des Integranden in eine Potenzreihe.

Eine Potenzreihe darf gliedweise integriert werden, wenn beide Integrationsgrenzen im Inneren des Konvergenzgebietes liegen.

## D. Bestimmte Integrale.

### 1. Abschätzung.

Aus  $f(x) < g(x)$  im Intervall  $a < x < b$  folgt:

$$\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx.$$

Ist  $|f(x)| \leq M$  im Intervall  $a < x < b$  (bzw. auf dem komplexen Integrationsweg  $C$  von der Länge  $L$ ), so gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b-a) \quad \text{bzw.} \quad \left| \int_C f(z) dz \right| \leq M \cdot L.$$

### 2. SCHWARZSche Ungleichung.

Sind  $f(x)$  und  $g(x)$  reell und in  $a \leq x \leq b$  integrierbar, so gilt:

$$\left( \int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx.$$

Diese Ungleichung für einfache Integrale gilt entsprechend auch für ein- und mehrfache Summen und mehrfache Integrale.

### 3. Annäherung durch Summen (vgl. auch S. 18 u. 24).

Das Intervall  $a \leq x \leq b$  sei in  $n$  gleiche Teile der Länge  $h$  zerlegt:  $b - a = nh$ ; es sei  $f(a + kh) = y_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , und es bedeute  $\xi$  einen Zwischenwert  $a < \xi < b$ . Dann gilt:

*Trapezformel:*

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} (y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) - R_n,$$

$$R_n = \frac{nh^3}{12} f''(\xi).$$

*Simpsonformel* ( $n$  gerade):

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) - R_n,$$

$$R_n = \frac{nh^5}{90} f^{(4)}(\xi).$$

### 4. Formelschatz<sup>1</sup>.

a) *Konstanten*, die durch bestimmte Integrale definiert sind:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin at}{t} dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{für } a > 0 \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos at}{t} dt = \infty$$

$$\int_0^{\pi} \cos mt \cos nt dt = \int_0^{\pi} \sin mt \sin nt dt = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \quad (m, n = 0, \pm 1, \dots) \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } m = n. \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{3/2} t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{3/2} t dt = \frac{1}{6\sqrt{2}\pi} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^8}} = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-1/3} t dt = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}\sqrt[3]{2}} \Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)$$

<sup>1</sup> Eine große Sammlung bestimmter Integrale findet man bei: D. BIERENS DE HAAN, *Nouvelles tables d'intégrales définies*. Leiden 1867.

$$\int_0^1 \frac{t \, dt}{\sqrt{1-t^3}} = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{1/3} t \, dt = \frac{\sqrt{3}}{\pi^2 \sqrt{4}} \Gamma^3\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-1/2} t \, dt = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

b) Funktionen, die durch bestimmte Integrale definiert werden:

$$\int_0^{\infty} t^y e^{-xt} \, dt = \frac{1}{2} x^{-\frac{y+1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{y+1}{2}\right) \quad (x > 0)$$

$$\int_0^{\infty} t^{2n+1} e^{-xt} \, dt = \frac{n!}{2x^{n+1}} \quad (x > 0, n \text{ ganze Zahl})$$

$$\int_0^{\infty} t^{2n} e^{-xt} \, dt = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \sqrt{\pi}}{2^{n+1} x^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} \, dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad (0 < x < 1)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^x \, dt = \Gamma(x+1) = \Pi(x) \quad (\text{EULERSches Integral, vgl. S. 73}).$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^x (1-t)^y \, dt &= 2 \int_0^1 t^{2x+1} (1-t^2)^y \, dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x+1} t \cos^{2y+1} t \, dt \\ &= B(x, y) = \frac{\Pi(x) \Pi(y)}{\Pi(x+y+1)} = \frac{\Gamma(x+1) \Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2} \, dt = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}.$$

$$\begin{aligned} F(x, \pm 1) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t} \, dt}{e^{x+t} \pm 1} = e^{-x} + (\mp 1) \frac{e^{-2x}}{2^{3/2}} + \dots + \\ &\quad + (\mp 1)^{n-1} \frac{e^{-nx}}{n^{3/2}} + \dots \quad (x > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(x, \pm 1) &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t^3} \, dt}{e^{x+t} \pm 1} = e^{-x} + (\mp 1) \frac{e^{-2x}}{2^{5/2}} + \dots + \\ &\quad + (\mp 1)^{n-1} \frac{e^{-nx}}{n^{5/2}} + \dots \quad (x > 0) \end{aligned}$$

$$U_{\varrho}(x) = \frac{1}{\Gamma(\varrho+1)} \int_0^{\infty} \frac{t^{\varrho} \, dt}{e^{-x+t} + 1} = x^{\varrho+1} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\varrho+2)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{2k}}{x^{2k} \Gamma(\varrho-2k+2)} \right\} + R(x, \varrho),$$

wobei  $|R(x, \rho)| \leq e^{-x}$  gilt ( $x < 0$ ,  $\rho < 0$ ,  $\rho \neq 1, 2, \dots$ ),

$$\text{und } c_{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{2k}} = \frac{(2^{2k}-1) \pi^{2k} \cdot B_k}{2 \cdot (2k)!}, \quad \text{speziell: } c_2 = \frac{\pi^2}{12}$$

$B_k = k$ -te BERNOULLISCHE Zahl (vgl. S. 21).

$$\Delta(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{\sin xt \cdot \cos yt}{t} dt \quad (\text{DIRICHLETSche Funktion}^1): \text{ Längs der Ge-}$$

raden  $y = \pm x$  ist  $\Delta = \pm \frac{\pi}{4}$ , sonst = 0 oder  $= \pm \frac{\pi}{2}$ . Die Funktions-

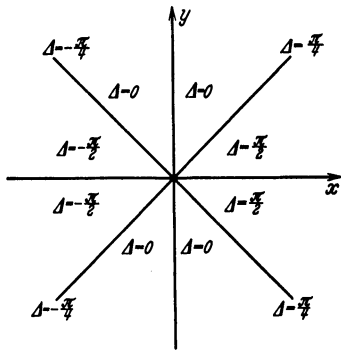


Fig. 1. Die DIRICHLETSche Funktion.

werte für die verschiedenen Oktanten der  $x, y$ -Ebene sind in Fig. 1 angegeben.

Weitere bestimmte Integrale, die zur Definition von Funktionen dienen, finden sich bei diesen auf S. 60 (LEGENDRESche Polynome), S. 66 (zugeordnete Kugelfunktionen), S. 67 (Zylinderfunktionen), S. 73 (Gammafunktion).

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Auswertung bestimmter Integrale ist der CAUCHYSche Integralsatz der Funktionentheorie, vgl. S. 37, sowie Anhang; 3.

## 5. Elliptische Integrale.

Die Integrale der Form

$$V = \int R(t, \sqrt{a_0 t^4 + a_1 t^3 + \dots + a_4}) dt$$

heißen, wenn  $R$  eine rationale Funktion ist und die Gleichung

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + \dots + a_4 = 0$$

keine mehrfachen Wurzeln hat, *elliptische Integrale*. Sie lassen sich durch reelle Transformationen auf gewisse Normalintegrale zurückführen.

Man beseitigt zunächst die ungeraden Potenzen der Variablen:

a) Durch eine reelle lineare Substitution  $t = \frac{a \cdot u + b}{u + 1}$  ( $a, b$  reell) verlegt man die reellen bzw. komplexen Nullstellen des Integranden symmetrisch zum Nullpunkt auf die reelle bzw. imaginäre Achse und erhält mit reellen  $p$  und  $q$ :

$$V = \int R_1(u, \sqrt{\pm(u^2 - p)(u^2 - q)}) du = \int R_1(u, W) du.$$

b)  $R_1(u, W)$  schreibt man in der Form

$$\frac{M_1(u^2, W) + u N_1(u^2, W)}{M(u^2, W) + u N(u^2, W)}$$

<sup>1</sup> Wir benutzen diese Ausdrucksweise statt der üblichen, aber unklaren: „DIRICHLETScher diskontinuierlicher Faktor“.

und durch Erweitern mit  $(M - uN)$  in der Form  $P(u^2, W) + u \cdot Q(u^2, W)$ , wo  $M_1, N_1, M, N$  ganze,  $P$  und  $Q$  allgemeine rationale Funktionen sind.  $\int Q(u^2, W) u du$  wird durch  $u^2 = v$  elementar integrierbar, während sich  $P(u^2, W)$ , weil  $W^2$  rational ist, wie oben umformen läßt in:

$$P(u^2, W) = \frac{K_1(u^2) + W \cdot L_1(u^2)}{K(u^2) + W \cdot L(u^2)} = \Phi_1(u^2) + W \cdot \Phi_2(u^2) = \Phi_1(u^2) + \frac{\Phi(u^2)}{W},$$

wo  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi$  rationale Funktionen sind.  $\int \Phi_1(u^2) du$  ist elementar integrierbar.

Das Integral  $\int \frac{\Phi(u^2)}{W} du$  bringt man durch Substitution einer neuen Variablen  $x$  statt  $u$  auf die Form

$$A \cdot \int \frac{\Phi(u^2) dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}.$$

Die Substitution ist je nach der Gestalt von  $W$  verschieden; die fünf möglichen Fälle sind in der Tabelle zusammengestellt ( $\lambda^2 < \mu^2$ ).

$W^2$	$k^2 < 1$	Substitution	$A$
$+(u^2 - \lambda^2)(u^2 - \mu^2)$	$\frac{\lambda^2}{\mu^2}$	für $u^2 < \lambda^2 : u = \lambda x$ für $u^2 > \mu^2 : u = \frac{\mu}{x}$	$\frac{1}{\mu}$ $-\frac{1}{\mu}$
$-(u^2 - \lambda^2)(u^2 - \mu^2)$	$\frac{\mu^2 - \lambda^2}{\mu^2}$	$u^2 = \mu^2 - (\mu^2 - \lambda^2) x^2$ oder $u^2 = \frac{\mu^2 \lambda^2}{\mu^2 - (\mu^2 - \lambda^2) x^2}$	$\frac{1}{\mu}$ $-\frac{1}{\mu}$
$+(u^2 + \lambda^2)(u^2 - \mu^2)$	$\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2}$	$u^2 = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{x^2} - \lambda^2$ oder $u^2 = \frac{\mu^2}{1 - x^2}$	$-\frac{1}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}$
$-(u^2 + \lambda^2)(u^2 - \mu^2)$	$\frac{\mu^2}{\lambda^2 + \mu^2}$	$u^2 = \frac{\lambda^2 \mu^2}{\mu^2 x^2 - \lambda^2 - \mu^2}$ oder $u^2 = \mu^2 (1 - x^2)$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$ $-\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$
$+(u^2 + \lambda^2)(u^2 + \mu^2)$	$\frac{\mu^2 - \lambda^2}{\lambda^2}$	$u^2 = \frac{\lambda^2}{x^2} - \lambda^2$ oder $u^2 = \frac{\mu^2}{1 - x^2}$	$-\frac{1}{\lambda}$ $\frac{1}{\lambda}$

$k$  ( $k < 1, \lambda^2 < \mu^2$ ) heißt LEGENDRESCHER Modul. Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion  $A \cdot \Phi(u^2) = \Omega(x^2)$  führt auf die Integrale  $\int \frac{x^{2n} dx}{X}$  und  $\int \frac{dx}{(x^2 + c)^m X}$ , wobei  $X = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}$  ist.



$\int \frac{x^{2n} dx}{X}$  läßt sich durch die Rekursionsformel

$$(2n-1) \int \frac{x^{2n} dx}{X} - (2n-2)(1+h^2) \int \frac{x^{2n-2} dx}{X} + (2n-3) \int \frac{x^{2n-4} dx}{X} = x^{2n-3}$$

auf die LEGENDRESCHEN Normalintegrale 1. und 2. Gattung,  $\int \frac{dx}{(x^2+c)^m X}$  durch ähnliche Rekursionen auf die Normalintegrale 1. und 3. Gattung zurückführen (vgl. Abschnitt Funktionen, S. 74).

### E. Differenzenrechnung.

Von einer Funktion  $f(x)$  bilde man für einen gegebenen Wert von  $x$  folgende Ausdrücke:

1.  $\frac{1}{h} \bar{\Delta} f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
2.  $\frac{1}{h} \underline{\Delta} f(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$
3.  $\frac{1}{h} \Delta f(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \quad \left( \Delta = \frac{1}{2} (\bar{\Delta} + \underline{\Delta}) \right).$

Man bezeichnet diese Größen als *vordere*, *hintere* und *mittlere Differenzenquotienten*, gebildet mit der Differenz  $h$  der Variablen. Beim Grenzübergang  $h \rightarrow 0$  gehen diese Ausdrücke für differenzierbare Funktionen in den Differentialquotienten  $\frac{df(x)}{dx}$  über.

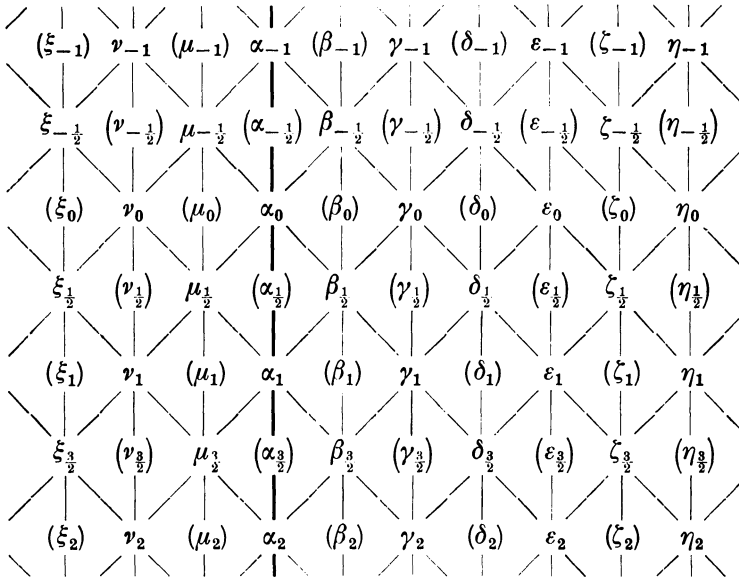
Analog definieren wir einen 2. Differenzenquotienten durch:

$$\frac{1}{h^2} \Delta^2 f(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}, \quad (\Delta^2 = \bar{\Delta} - \underline{\Delta}).$$

Die Bildung höherer Differenzenquotienten erfolgt ganz analog.

Liegt eine Funktion  $f(x)$  in konstanten Intervallen  $h$  tabuliert vor, so berechnet man die mit den entsprechenden Potenzen von  $h$  multiplizierten Differenzenquotienten (also die  $\Delta^n$ ) durch Subtraktionen nach dem Schema auf folgender Seite.

In dieses Schema tragen wir an die Stellen  $\alpha_n$  ( $n$  ganzzahlig) die Funktionswerte von  $f(x + nh)$  ein. Sodann schreibt man an die Stellen  $\beta_{n+\frac{1}{2}}$  die Differenz der links oberhalb und links unterhalb stehenden  $\alpha_{n+1}$  und  $\alpha_n$  ( $\beta_{n+\frac{1}{2}} = \alpha_{n+1} - \alpha_n$ ). Analog berechnet man die  $\gamma_n$  aus:  $\gamma_n = \beta_{n+\frac{1}{2}} - \beta_{n-\frac{1}{2}}$  und verfährt entsprechend für die  $\delta$ ,  $\varepsilon$  usw. Schließlich findet man die noch ausstehenden, durch Einklammerung bezeichneten  $\alpha_{n+\frac{1}{2}}$ ,  $\beta_n$ ,  $\gamma_{n+\frac{1}{2}}$  ... durch Mittelwertbildung aus den beiden jeweils oberhalb und unterhalb stehenden Zahlen, z. B.  $\beta_n = \frac{1}{2} (\beta_{n+\frac{1}{2}} + \beta_{n-\frac{1}{2}})$ . Die (mittleren) Differenzenquotienten an der Stelle  $x + nh$  sind dann bis auf die entsprechende Potenz von  $h$  die rechts neben  $\alpha_n$  stehenden  $\beta_n$ ,  $\gamma_n$  usw.



Wir können das Schema auch nach links weiter ausfüllen, indem wir zunächst an einer Stelle  $\mu_{n+\frac{1}{2}}$  eine beliebige Zahl, z. B. 0, eintragen und nunmehr die weiteren  $\mu_{n+\frac{1}{2}}$  so berechnen, daß  $\mu_{n+\frac{1}{2}} - \mu_{n-\frac{1}{2}} = \alpha_n$  wird, also durch Addition der jeweils rechts unterhalb stehenden Zahl das folgende  $\mu$  finden. Ebenso verfahren wir mit der Reihe für  $\nu$ ,  $\xi$  usw. Die eingeklammerten Werte findet man wieder wie oben durch Mittelwertbildung. Die links stehenden Zahlen  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\xi \dots$  bezeichnet man als erste, zweite ... *Summenwerte*.

**Zusammenhang zwischen Differenzenquotienten und Differentialquotienten.**

Die TAYLORSche Reihenformel (s. S. 31) liefert unmittelbar die Möglichkeit, die Differenzenquotienten als lineare Funktionen der Differentialquotienten auszurechnen. Diese Berechnung hat aber nur untergeordnete Bedeutung gegenüber dem umgekehrten Problem, aus den gegebenen Differenzenquotienten die Differentialquotienten zu berechnen. Die Auflösung des linearen Gleichungssystems liefert:

$$h \frac{d}{dx} f(x + nh) = \beta_n - \frac{1}{6} \delta_n + \frac{1}{30} \zeta_n - \dots$$

$$h^2 \frac{d^2}{dx^2} f(x + nh) = \gamma_n - \frac{1}{12} \epsilon_n + \frac{1}{90} \eta_n - \dots$$

bzw.

$$h \frac{d}{dx} f(x + (n + \frac{1}{2})h) = \beta_{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{24} \delta_{n+\frac{1}{2}} + \frac{3}{640} \zeta_{n+\frac{1}{2}} - \dots$$

$$h^2 \frac{d^2}{dx^2} f(x + (n + \frac{1}{2})h) = \gamma_{n+\frac{1}{2}} - \frac{5}{24} \epsilon_{n+\frac{1}{2}} + \frac{259}{5760} \eta_{n+\frac{1}{2}} - \dots$$

Diese Formeln gestatten also die „numerische Differentiation“ einer tabuliert vorliegenden Funktion. In entsprechender Weise kann man einen linearen

**Zusammenhang zwischen Summenwerten und Integralen**

durch folgende Formeln geben:

$$\frac{1}{h} \int_{x+n_1 h}^{x+n_2 h} f(x) dx = \left[ \mu_n - \frac{1}{12} \beta_n + \frac{11}{720} \delta_n - \frac{191}{60480} \zeta_n + \dots \right]_{n_1}^{n_2}$$

$$\frac{1}{h^2} \int_{x+n_1 h}^{x+n_2 h} \int_{x+n_1 h}^{x+n_2 h} f(x) dx = \left[ \nu_n + \frac{1}{12} \alpha_n - \frac{1}{240} \gamma_n + \frac{31}{60480} \epsilon_n - \dots \right]_{n_1}^{n_2}$$

$$\frac{1}{h^3} \int_{x+n_1 h}^{x+n_2 h} \int_{x+n_1 h}^{x+n_2 h} \int_{x+n_1 h}^{x+n_2 h} f(x) dx = \left[ \xi_n + \frac{1}{240} \beta_n - \frac{31}{30240} \delta_n + \dots \right]_{n_1}^{n_2}$$

Diese Formeln sind nützlich für das praktisch häufig vorkommende Problem der „numerischen Integration“.

Auch zur

**Interpolation**

ist das Differenzenschema mit Vorteil zu benutzen. Gesucht sei der Wert von  $f(x + (n + t) h)$ , ( $0 < t < 1$ ).

Man berechne zunächst die Größen:

$A = t, B = \frac{1}{2}(t - 1), C = \frac{1}{3}(t + 1), D = \frac{1}{4}(t - 2), E = \frac{1}{5}(t + 2) \dots$ ,  
dann ist:

$$f(x + (n + t) h) = \alpha_n + A I, \quad I = \beta_{n+\frac{1}{2}} + B II$$

$$II = \gamma_n + C III$$

$$III = \delta_{n+\frac{1}{2}} + D IV$$

$$IV = \epsilon_n + E V$$

.....

$$f(x + (n - t) h) = \alpha_n - A I, \quad I = \beta_{n-\frac{1}{2}} - B II$$

$$II = \gamma_n - C III$$

$$III = \delta_{n-\frac{1}{2}} - D IV$$

$$IV = \epsilon_n - E V$$

.....

Wieviel man von diesen Gliedern zu berücksichtigen hat, richtet sich nach der gewünschten Genauigkeit. Wegen weiterer Einzelheiten vgl. die einschlägigen Lehrbücher der praktischen Analysis.

## Zweiter Abschnitt.

**Reihen und Reihenentwicklungen.****A. Reihen.****1. Allgemeines.**

Die formal gebildete Summe  $S = u_1 + u_2 + \dots = \sum_{h=1}^{\infty} u_h$  unendlich vieler reeller oder komplexer Zahlen  $u_1, u_2, \dots$  (oder Funktionen  $u_1(z), u_2(z), \dots$ ) heißt *Reihe*. Hat  $s_n = \sum_{h=1}^n u_h = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  ( $n$ -te Partialsumme) für  $n \rightarrow \infty$  einen Grenzwert  $s$ , so heißt die Reihe  $S$  *konvergent*, andernfalls *divergent*.  $s$  heißt die *Summe* der Reihe,  $s - s_n = r_n$  der ( $n$ -te) Rest der Reihe.

**Konvergenz.** Notwendig und hinreichend für die Konvergenz der Reihe  $S$  ist, daß es zu jeder (beliebig klein wählbaren) positiven Zahl  $\varepsilon$  stets eine Schranke  $N(\varepsilon)$  gibt, so daß gilt:

$$|r_n| = |s - s_n| < \varepsilon \text{ für jedes } n > N(\varepsilon) \quad (1)$$

oder  $|s_m - s_n| < \varepsilon$  für jedes Paar  $m, n$  mit  $m > N(\varepsilon), n > N(\varepsilon)$ . (2)

Konvergiert die Reihe der absoluten Beträge, so heißt  $S$  *absolut konvergent*, andernfalls *bedingt konvergent*: nur bei absoluter Konvergenz ist die Summe  $s$  der Reihe  $S$  von der Anordnung der Glieder unabhängig.

**Funktionsreihen.** Die Funktionenreihe  $S(z) = \sum_{h=1}^{\infty} u_h(z)$  heißt *gleichmäßig konvergent* im abgeschlossenen Gebiet  $G$  der  $z$ -Ebene (bzw. im reellen Intervall  $a \leq z \leq b$ ), wenn es eine *von  $z$  unabhängige* Schranke  $N(\varepsilon)$  gibt, so daß (1) oder (2) für alle  $z$  in  $G$  gleichmäßig gilt.

Eine im abgeschlossenen Gebiet  $G$  *gleichmäßig konvergente* Reihe  $\alpha$ ) stetiger bzw. analytischer Funktionen von  $z$  ist in  $G$  stetig bzw. analytisch,

$\beta$ ) integrierbarer Funktionen ist in  $G$  gliedweise integrierbar.

$$\int_G \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} u_h(t) \right\} dt = \sum_{h=1}^{\infty} \int_G u_h(t) dt. \quad (3)$$

$\gamma$ ) in  $G$  regulärer analytischer Funktionen ist beliebig oft gliedweise differenzierbar.

$$\frac{d^k}{dz^k} \sum_{h=1}^{\infty} f_h(z) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{d^k}{dz^k} f_h(z), \quad k = 1, 2, \dots$$

δ) von Ableitungen  $\frac{d u_h(z)}{dz}$  ist in  $G$  gleich der Ableitung von  $\sum_{h=1}^{\infty} u_h(z)$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{d u_h(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \left( \sum_{h=1}^{\infty} u_h(z) \right), \quad (4)$$

d. h. eine Reihe von in  $G$  differenzierbaren Funktionen ist in  $G$  gliedweise differenzierbar, wenn die Reihe der Ableitungen in  $G$  gleichmäßig konvergiert.

## 2. Konvergenzkriterien.

Für die Konvergenz einer Reihe ist die Abänderung endlich vieler Glieder belanglos.

a) Die Reihe  $S = \sum_{h=1}^{\infty} u_h$  konvergiert *absolut*, wenn eine positive Zahl  $a < 1$  existiert, so daß gilt:

$$\left| \frac{u_{h+1}}{u_h} \right| \leq a < 1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{für alle großen } h, \text{ d. h. für alle} \\ h > H \text{ (} H \text{ eine positive Zahl).} \end{array} \right\} \quad (5)$$

$$\text{oder} \quad \sqrt[h]{|u_h|} \leq a < 1 \quad (6)$$

*Allgemein:*  $\sum_{h=1}^{\infty} u_h$  konvergiert absolut, wenn es eine konvergente Reihe positiver Zahlen  $a_h$  gibt mit

$$a_h \geq |u_h| \quad \text{für alle } h > H \text{ (} H \text{ positive Zahl).} \quad (7)$$

b) Die Funktionenreihe  $S(z) = \sum_{h=1}^{\infty} u_h(z)$  ist *gleichmäßig konvergent* in jedem abgeschlossenen Gebiet  $G$ , in welchem (5), (6) oder (7) mit von  $z$  unabhängigem  $H$  gilt.

c) Eine Reihe aus abwechselnd positiven und negativen Gliedern konvergiert, wenn die Beträge ihrer Glieder mit  $n \rightarrow \infty$  monoton  $\rightarrow 0$  konvergieren. Es gilt stets für den Rest:  $|r_n| \leq |u_{n+1}|$ .

d) Durch Vergleich mit Integralen läßt sich oft die Konvergenz bzw. Divergenz einer Reihe feststellen: Ist z. B.  $|f(x)|$  monoton fallend für  $x > m$ , so gilt:

$$\left| \sum_{h=m+1}^n f(h) \right| \leq \sum_{h=m+1}^n |f(h)| \leq \int_m^n |f(t)| dt \quad \text{für jedes } n > m$$

und es konvergiert  $\sum_{h=1}^{\infty} f(h)$  sicher absolut, wenn  $\int_m^{\infty} |f(t)| dt$  existiert.

## 3. Summation von Reihen.

a) Es ist praktisch von großer Bedeutung, den Summenwert einer Reihe entweder durch leicht berechenbare oder durch tabulierte Funktionen darzustellen, vgl. auch B 1 e und die Zusammenstellung S. 31f.

Die im folgenden auftretenden *BERNOULLISCHEN ZAHLEN*  $B_k$  sind die Koeffizienten der Potenzreihe  $\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{B_h x^h}{h!}$ ; es ist:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_{2k+1} = 0, \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, \quad B_4 = -\frac{1}{30},$$

$$B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{14} = \frac{7}{6}, \quad B_{16} = -\frac{3617}{510}, \dots$$

$B_{2k}$  wird oft auch mit  $B_k$  bezeichnet. Zur Abschätzung s. Gl. (9).

b) Endliche Reihen.

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \quad \text{für } x \neq 1.$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n (n + 1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n (n + 1) (2n + 1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n + 1)^2$$

$$1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p = \frac{(n + B)^{p+1} - B^{p+1}}{p + 1}, \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

(Erläuterung: Entwickle nach dem binomischen Satz und ersetze  $B^h$  stets durch die  $h$ -te *BERNOULLISCHE ZAHL*  $B_h$ .)

Ist  $f(x)$  samt allen auftretenden Ableitungen stetig, so gilt die *EULERSCHE SUMMENFORMEL*:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=0}^m f(k) &= \int_0^m f(t) dt + \frac{1}{2} (f(0) + f(m)) + \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k}}{(2k)!} \{ f^{(2k-1)}(m) - f^{(2k-1)}(0) \} + \frac{m B_{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\vartheta m) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$m, n = 1, 2, \dots, \quad 0 < \vartheta < 1$$

Hängt  $f(k)$  noch von einem Parameter  $x$  ab, so liefert (8) i. a. eine halbkonvergente Entwicklung (vgl. B 1 e, S. 23).

c) Unendliche Reihen.

$$1 + \frac{1}{2^2k} + \frac{1}{3^2k} + \frac{1}{4^2k} + \dots = \frac{(-1)^k (2\pi)^{2k} B_{2k}}{2 (2k)!}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

speziell für  $k = 1: \frac{\pi^2}{6}, \quad k = 2: \frac{\pi^4}{90}, \quad k = 3: \frac{\pi^6}{945}, \quad k = 4: \frac{\pi^8}{9450}.$

Allgemein kann eine Summe der Form  $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$  oft mit der *EULERSCHEN SUMMENFORMEL* (8) für  $m \rightarrow \infty$  summiert oder wenigstens angenähert berechnet werden.

## B. Reihenentwicklungen.

*Vorbemerkung:* Die in 1—4 für eine Variable dargestellten Tatsachen bleiben richtig, wenn  $x$  jeweils durch  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $t$  durch  $t_1, t_2, \dots, t_n$ ,  $dt$  durch  $dt_1 \cdot dt_2 \cdot \dots \cdot dt_n$  ersetzt wird und das Grundgebiet  $G$  ein gewisses Gebiet des  $x_1 \dots x_n$ -Raumes bedeutet.

### 1. Darstellung beliebig gegebener Funktionen durch bekannte Funktionen.

a) Die Aufgabe, eine irgendwie für alle  $x$  eines Gebietes  $G$  (z. B.:  $a \leq x \leq b$ ) gegebene Funktion  $f(x)$  durch ein System von unendlich vielen bekannten Funktionen  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$  „möglichst gut“ darzustellen, läßt sich lösen:

1. Als *Approximation* durch lineare Kombinationen (Polynome)

$F_n(x) = \sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi_\nu(x)$ ; für jedes  $n$  werden  $c_1^{(n)}, c_2^{(n)}, \dots, c_n^{(n)}$  so bestimmt, daß  $F_n(x)$  von  $f(x)$  in  $G$  möglichst wenig abweicht (vgl. b).

2. Durch *Reihenentwicklung* nach  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ ; es wird ein System von Koeffizienten  $c_1, c_2, \dots$  so bestimmt, daß die Partialsummen  $S_n(x) = \sum_{h=1}^n c_h \varphi_h(x)$  für hinreichend großes  $n$  in  $G$  von  $f(x)$  beliebig wenig abweichen (vgl. b).

b) Das „*Wenig Abweichen*“ der Näherung von  $f(x)$  wird i. a. auf eine der folgenden Arten präzisiert:

1. (im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate): Es soll

$$\int_G \left| f(t) - \sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi_\nu(t) \right|^2 dt$$

jeweils möglichst klein werden (*mittlere Approximation bzw. Konvergenz*).

2. (im „*TSCHEBYSCHESCHEN SINNE*“): Es soll das

$$\text{Maximum}_{\text{für } x \text{ in } G} \left| f(x) - \sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi_\nu(x) \right|$$

möglichst klein werden (*gleichmäßige Approximation bzw. Konvergenz*).

3. (bei Reihen):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( f(x) - \sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi_\nu(x) \right) = 0$$

für alle  $x$  in  $G$  (gewöhnliche *Konvergenz* der Reihe).

Bei endlichem Gebiet  $G$  enthält die Möglichkeit der gleichmäßigen Approximation die der mittleren Approximation. Es genügt, ganz im Endlichen gelegene Gebiete zu betrachten, da ins Unendliche reichende Gebiete in ganz im Endlichen liegende transformiert werden können.

c) Vollständigkeit. Das System der Funktionen  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$  heißt *vollständig* für das Gebiet  $G$ , wenn sich jede in  $G$  stetige Funktion im Mittel beliebig genau approximieren läßt, d. h. wenn für jedes positive  $\varepsilon$   $n$  so gewählt werden kann, daß

$$\int_G \left| f(t) - \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v(t) \right|^2 dt < \varepsilon \text{ wird.}$$

d) Zur Darstellung werden i. a. benutzt:

$\alpha$ ) Vollständige Systeme *orthogonaler* Funktionen.

$\beta$ ) Die *Potenzen*  $1, x, x^2, x^3, \dots$ , bzw.  $1, (x-a), (x-a)^2, (x-a)^3, \dots$ , bzw.  $1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \dots$  usw. (Bei mehreren Variablen  $x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}$ ,  $k_v = 1, 2, \dots$  usw.)

e) Nur zu *angenäherter Berechnung von Funktionswerten* dienende Reihenentwicklungen brauchen nicht zu konvergieren; es genügt, wenn das Restglied  $R_n(x)$  zu *einer* Partialsumme  $F_n(x)$  der Entwicklung genügend klein wird. Nimmt  $|R_n(x)|$  bei festem  $x$  mit wachsendem  $n$  zunächst ab, ehe es  $\rightarrow \infty$  geht, so heißt die Entwicklung *halb-* oder *semikonvergent*. Die erreichbare Genauigkeit ist beschränkt, aber häufig ausreichend, und kann wertvoller sein als die konvergenter Reihen. Speziell die Reihen mit  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^n R_n(x)) = 0$  für alle  $n$  heißen *asymptotische Reihen* und dienen zur Berechnung von Funktionswerten großen Arguments [vgl. S. 21 (8)].

## 2. Orthogonale Funktionssysteme.

a) Definitionen. Eine Funktion  $\Phi(x)$  genüge der *Bedingung A*, wenn  $\Phi(x)$  in  $G$  bis auf endlich viele Stellen stetig ist (bei mehreren Veränderlichen in jeder Veränderlichen für beliebige in  $G$  gelegene feste Werte der andern) und  $\int_G |\Phi(t)| dt$  und  $\int_G |\Phi(t)|^2 dt$  existieren.

Zwei der Bedingung *A* genügende Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  heißen in  $G$  *zueinander orthogonal*, wenn gilt<sup>1</sup>:

$$(f, g) = \int_G f(t) \cdot (g(t))^* dt = 0. \quad (1)$$

Eine Folge von *A* genügenden Funktionen  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ , von denen jede zu jeder anderen orthogonal ist:

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \int_G \varphi_m(t) (\varphi_n(t))^* dt = d_{mn} \text{ mit } \left\{ \begin{array}{ll} d_{mm} > 0 & m, n = 1, 2, \dots \\ d_{mn} = 0 & m \neq n \end{array} \right\} \quad (2)$$

heißt *orthogonales Funktionssystem*, kurz *Orthogonalsystem* zu  $G$ . Gilt stets  $(\varphi_m, \varphi_m) = 1$ , so heißt das Orthogonalsystem *normiert*. Das System

$$\psi_m(x) = \frac{\varphi_m(x)}{\sqrt{(\varphi_m, \varphi_m)}} \text{ ist normiert.}$$

<sup>1</sup> Der Stern bedeutet Übergang zum Komplex-Konjugierten.



Gilt für ein System  $\chi_1(x), \chi_2(x), \dots$  bei reellem  $\varrho(x)$ ,  $\varrho(x) \geq 0$  in  $G$ ,

$$\int_G \varrho(t) \chi_m(t) (\chi_n(t))^* dt = d_{mn} \quad (\text{vgl. (2)}), \quad (3)$$

so bildet es ein *Orthogonalsystem zur Belegungsfunktion*  $\varrho(x)$ . Die Funktionen  $\sqrt{\varrho(x)} \cdot \chi_n(x)$  mit  $n = 1, 2, \dots$  bilden dann ein gewöhnliches Orthogonalsystem.

b) *Lineare Abhängigkeit.*  $k$  Funktionen  $f_1(x), \dots, f_k(x)$  heißen in  $G$  voneinander *linear unabhängig*, wenn nur für  $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$  eine Gleichung  $\sum_{\nu=1}^k c_\nu f_\nu(x) = 0$  für alle  $x$  in  $G$  besteht; andernfalls heißen  $f_1(x), \dots, f_k(x)$  in  $G$  *linear abhängig*. Die Funktionen eines Orthogonalsystems sind stets sämtlich voneinander linear unabhängig.

c) *Orthogonalisierung.* Sind in einem System von  $k$  Funktionen  $f_1(x), \dots, f_k(x)$   $l$  voneinander linear unabhängig, so lassen sich daraus  $l$  zueinander orthogonale Funktionen bilden ( $k, l = 1, 2, \dots, \infty$ ). Man setze  $\varphi_1(x) = c_{11} f_1(x)$ ,

$$\varphi_2(x) = c_{21} \varphi_1(x) + c_{22} f_2(x),$$

allgemein  $\varphi_h(x) = c_{h1} \varphi_1(x) + \dots + c_{hh-1} \varphi_{h-1}(x) + c_{hh} f_h(x)$ ,  $h = 1, 2, \dots$  und bestimme für jedes  $h = 1, 2, \dots$  die Koeffizienten  $c_{h1}, \dots, c_{hh}$  so, daß nicht alle  $= 0$  sind und daß  $\varphi_h(x)$  zu  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{h-1}(x)$  orthogonal ist, d. h. aus den Gleichungen

$$(\varphi_h, \varphi_k) = c_{h1} (\varphi_1, \varphi_k) + \dots + c_{hh-1} (\varphi_{h-1}, \varphi_k) + c_{hk} (f_h, \varphi_k) = 0$$

$k = 1, 2, \dots, h-1$ . Identisch verschwindende Funktionen lasse man weg. Verlangt man noch  $(\varphi_h, \varphi_h) = 1$ , so sind die  $c_{hk}$  im wesentlichen eindeutig bestimmt und  $\varphi_1, \dots, \varphi_l$  bilden dann ein normiertes Orthogonalsystem.

d) Aus vollständigen Orthogonalsystemen in *einer* Veränderlichen lassen sich folgendermaßen solche in *mehreren* Veränderlichen bilden: Ist  $\varphi_{11}(x_1), \varphi_{12}(x_1), \dots$  ein solches zu  $a_1 \leq x_1 \leq b_1$ , ferner  $\varphi_{21}(x_2), \varphi_{22}(x_2), \dots$  ein solches zu  $a_2 \leq x_2 \leq b_2$  usw., so bildet  $\varphi_{1h_1}(x_1) \cdot \varphi_{2h_2}(x_2) \cdot \dots \cdot \varphi_{nh_n}(x_n)$  mit  $h_1, h_2, \dots, h_n = 1, 2, \dots$  ein solches für das Grundgebiet  $a_k \leq x_k \leq b_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

### 3. Entwicklung nach Orthogonalsystemen.

a) *Reihe.* Zu jeder beliebigen,  $A$  genügenden (s. 2 a) Funktion  $f(x)$  läßt sich (zumindest formal) die Reihe von  $f(x)$  nach dem Orthogonalsystem  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$  bilden:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} c_h \varphi_h(x) \quad \text{mit} \quad c_h = \frac{(f, \varphi_h)}{(\varphi_h, \varphi_h)}, \quad h = 1, 2, \dots; \quad (4)$$

die  $c_h$  heißen *Entwicklungskoeffizienten*, auch FOURIER-Koeffizienten von  $f(x)$  nach dem System der  $\varphi_h(x)$ . Es gilt die BESSELSche Ungleichung<sup>1</sup>

$$\sum_{h=1}^{\infty} |c_h|^2 (\varphi_h, \varphi_h) \leq (f, f). \quad (5)$$

Die gliedweise Integration von (4) liefert stets eine in  $G$  gleichmäßig konvergente Reihe für  $\int_x^x f(t) dt$ .

Ist  $\{\chi_h(x)\}$  ein vollständiges Orthogonalsystem zu der Belegungsfunktion  $\varrho(x)$ , so gilt entsprechend:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} b_h \chi_h(x) \quad \text{mit} \quad b_h = \frac{\int_G \varrho(t) f(t) \chi_h(t) dt}{\int_G \varrho(t) \chi_h^2(t) dt}. \quad (6)$$

b) Approximation. Unter allen Linearkombinationen  $\sum_{h=1}^n a_h \varphi_h(x)$  liefern die Partialsummen  $F_n(x)$  von  $F(x)$  die beste mittlere Approximation von  $f$  in  $G$ : es ist  $\int_G \left| f(t) - \sum_{h=1}^n a_h \varphi_h(t) \right|^2 dt$  am kleinsten, wenn  $a_h = c_h$  [Gl. (4)] für  $h = 1, \dots, n$  gilt.

c) Vollständigkeit. Ist das Orthogonalsystem  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$  *vollständig* (vgl. 1 c), so geht (5) in die *Vollständigkeitsrelation* (PARSEVALsche Gleichung)

$$\sum_{h=1}^{\infty} |c_h|^2 \cdot (\varphi_h, \varphi_h) = (f, f) \quad (7)$$

über. Allgemein gilt, wenn  $d_h$  die Entwicklungskoeffizienten von  $g(x)$  sind,  $\sum \frac{c_h d_h^*}{(\varphi_h, \varphi_h)} = (f, g)$ . Ferner läßt sich dann jedes der Bedingung  $A$  genügende (vgl. 1a)  $f(x)$  durch die Partialsummen  $F_n(x)$  im Mittel beliebig genau approximieren und kein solches  $f(x)$  ist zu allen  $\varphi_h(x)$ ,  $h = 1, 2, \dots$  orthogonal, außer  $f \equiv 0$  (*Abgeschlossenheit* des Orthogonalsystems). Jede in  $G$  der Bedingung  $A$  genügende Funktion  $f(x)$  ist durch die Entwicklungskoeffizienten nach einem vollständigen Orthogonalsystem eindeutig bestimmt.

d) Darstellung. Nicht jede stückweise stetige Funktion  $f(x)$  wird durch die Reihe  $F(x)$  nach einem Orthogonalsystem *dargestellt* [d. h.  $F(x)$  konvergiert und ist  $= f(x)$ ]; dazu ist zunächst die Vollständigkeit des benutzten Orthogonalsystems *notwendig* (aber *nicht hinreichend!*). Allgemein gilt  $F(x) = f(x)$ :

$\alpha$  in jedem in  $G$  gelegenen abgeschlossenen Gebiet  $G'$  (etwa  $\alpha \leq x \leq \beta$ ), in welchem die Reihe  $F(x)$  gleichmäßig konvergiert und  $f(x)$  stetig ist;

<sup>1</sup>  $|c_h|^2 = c_h \cdot c_h^*$ .

$\beta$ ) wenn  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$  die Eigenfunktionen einer Integralgleichung 2. Art mit dem Grundgebiet  $G$  und dem symmetrischen Kern  $K(x, y)$  (vgl. Bilinearformel S. 211) sind und  $f(x)$  durch  $f(x) = \int_G K(x, t)g(t)dt$  mit  $A$  genügendem  $g(x)$  „quellenmäßig“ darstellbar ist (vgl. auch S. 264). Das umfaßt

$\gamma$ ) wenn  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$  die Eigenfunktionen einer selbstadjungierten Differentialgleichung der Form  $p y'' + p' y' + q y + \lambda \rho y = 0$  mit stetigem  $p, p', q$  und  $p \geq 0$  in  $G$  (bzw. bei mehreren Variablen  $p \Delta y + p_{x_1} y_{x_1} + p_{x_2} y_{x_2} + \dots + p_{x_n} y_{x_n} + q y + \lambda \rho y = 0$ ) zu geeigneten<sup>1</sup> Randbedingungen sind und  $f'(x)$  und  $f''(x)$  existieren und in  $G$  stückweise stetig sind (vgl. COURANT-HILBERT V, 14, 5).

In den Fällen  $\beta$ ) und  $\gamma$ ) konvergiert  $F(x)$  in  $G$  gleichmäßig und absolut.

e) Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Funktion, auf die im folgenden häufig zurückgegriffen wird.

*Bedingungen B:* Das Gebiet sei in endlich viele Teilgebiete zerlegbar, die von stückweise differenzierbaren Kurven begrenzt sind und in deren Innerem  $f$  mit seinen ersten Ableitungen stetig ist; ferner sei  $f$  in  $G$  mit seinen ersten Ableitungen absolut genommen integrierbar.

*Bedingungen D* (sog. DIRICHLETSche Bedingungen): Das Intervall  $I: a \leq x \leq b$  sei in endlich viele Teilintervalle so zerlegbar, daß  $f$  in jedem solchen durchweg monoton ist:  $f$  sei bis auf endlich viele Stellen in  $I$  stetig, es existiere  $\int_a^b |f(t)| dt$  und  $\int_a^b |f'(t)| dt$ .

f) Unter gewissen Voraussetzungen (s. 4) gilt:

$$F(x) = f(x), \text{ wenn } f \text{ in } x \text{ stetig ist;}$$

Allgemein:  $F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} (f(x+h) + f(x-h)) = \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0))$ , wenn die Grenzwerte  $f(x+0)$  und  $f(x-0)$  beschränkt sind [bei mehreren Veränderlichen:  $F(x) =$  dem arithmetischen Mittel der Grenzwerte von  $f$  beiderseits der Unstetigkeitsstellen, sofern die Grenzwerte beschränkt und vom Annäherungsweg unabhängig sind].

Die Reihe  $F$  konvergiert *gleichmäßig* in jedem abgeschlossenen Stetigkeitsgebiet von  $f$ .

#### 4. Spezielle orthogonale Entwicklungen.

*Vorbemerkung.* Die Entwicklung erhält man nach (4) bzw. (6) aus den angegebenen Daten. Dabei bedeutet:

*Grdgeb.* = Grundgebiet, vorkommende Integrale sind darüber zu erstrecken.

*Bfkt.* = Belegungsfunktion  $\varrho(x) = \dots$  [vgl. bei (3) in 2 a].

<sup>1</sup> Vgl. HILBERT, Integralgleichungen, oder COURANT-HILBERT.

V.O.S. = Vollständiges Orthogonalsystem zur angegebenen Bfkt.

Normg. = Normierung; es wird  $\int \varrho |\chi|^2 dt$  angegeben, wobei  $\varrho$  die Bfkt. und  $\chi = \chi_h$ , bzw.  $= \chi_{hm}$  irgendeine der Funktionen des V.O.S. ist.

$F(x)$  bedeutet ohne Rücksicht auf Konvergenz usw. die Reihe (bzw. das Integral).

Koeff. = Koeffizienten der Entwicklung nach (6) bzw. (4).

Darst. = Bedingungen für die Darstellung von  $f$  durch  $F$  (vgl. 3 d).

a) **FOURIERSche Reihe.** (Eine Veränderliche.)

Grdgeb.:  $0 \leq x \leq l$ ; Bfkt.:  $= 1$ ; Normg.:  $= \frac{1}{2}l$ :

$$\left. \begin{aligned} \text{V.O.S. (reell): } \varphi_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_h(x) = \cos \frac{2\pi h x}{l}, \quad \varphi_{-h}(x) = \sin \frac{2\pi h x}{l}, \\ & \hspace{15em} h = 1, 2, \dots \\ \text{V.O.S. (komplex): } \varphi_h(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{2\pi i h x}{l}}, \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \right\} (8)$$

Entwicklungen:

$$F(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ a_h \cos \frac{2\pi h x}{l} + b_h \sin \frac{2\pi h x}{l} \right\} = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \alpha_h e^{\frac{2\pi i h x}{l}} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{mit } a_h &= \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos \frac{2\pi h t}{l} dt, \quad b_h = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin \frac{2\pi h t}{l} dt, \quad h = 0, 1, \dots \\ \text{bzw. } \alpha_h &= \frac{1}{l} \int_0^l f(t) e^{-\frac{2\pi i h t}{l}} dt, \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \right\} (10)$$

Darst.: Gelten für  $f$  mit  $f(0) = f(l)$  im Intervall I:  $\alpha \leq x \leq \beta$ ;  $0 \leq \alpha; \beta \leq l$ :  $f(x)$  ist in I stetig und  $F(x)$  dort konvergent, oder die Bedingungen B oder D (vgl. 3 e), so gilt 3 f.

Periodizität: Wird  $f(x)$  durch  $F(x)$  in  $G: 0 \leq x \leq l$  dargestellt, so setzt die Reihe  $F(x)$  die Funktion  $f(x)$  außerhalb  $G$  mit der Periode  $l$  fort, stellt also  $f(x)$  überall dar, wenn  $f$  selbst die Periode  $l$  besitzt.

Weitere V.O.S. zu  $0 \leq x \leq l$ : Normg.  $= \frac{1}{2}l$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_h(x) = \cos \frac{\pi h x}{l}, \quad h = 1, 2, \dots; \\ \text{oder } \varphi_h(x) &= \sin \frac{\pi h x}{l}, \quad h = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} (11)$$

b) **FOURIERSches Integral.** (Eine Variable s. Anhang, 1.)

$\alpha$ ) Im Grundgebiet  $-\infty < x < +\infty$  tritt an die Stelle der FOURIER-Reihe das *FOURIERSche Integral*. Existiert  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ , so läßt sich der Funktion  $f(x)$  (zumindest formal) das *FOURIER-Integral*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{a(t) \cos 2\pi tx + b(t) \sin 2\pi tx\} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t) e^{2\pi itx} dt \quad (12)$$

$$\text{mit } a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos 2\pi tu du, \quad b(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin 2\pi tu du \quad (13)$$

$$\text{bzw. } \alpha(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2\pi i tu} du \quad (14)$$

zuordnen. Für reelles  $f(x)$  gilt auch

$$F(x) = 2 \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos 2\pi u(t-x) dt. \quad (15)$$

*Darstellung:* Es gilt das in a) für die Reihe  $F(x)$  Gesagte.

$\beta$ ) Eine Funktion  $g(x)$ , die durch Summation über eine jeweils um  $2l$  verschobene beliebige, für alle  $x$  definierte Funktion  $G(x)$  entsteht, ist periodisch mit der Periode  $2l$ :

$$g(x) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} G(x + 2hl) = g(x + 2nl), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (16)$$

Gelten daher die Darstellungen

$$g(x) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \alpha_h e^{\frac{i\pi h x}{l}} \quad \text{und} \quad G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) e^{2\pi itx} dt, \quad (17)$$

$$\text{so ist} \quad \alpha_h = \frac{1}{2l} A\left(\frac{h}{2l}\right).$$

Das erhält man durch Anwendung der *POISSONSchen Summenformel*, die sich aus

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(n+y) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i h y} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-2\pi i h t} dt \quad (18)$$

für  $y = 0$  ergibt. (18) gilt, wenn  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)| dt$  existiert,  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(n+y)$  in  $0 \leq y \leq 1$  gleichmäßig konvergiert und eine stückweise stetige Funktion von  $y$  ist.

### c) Mehrdimensionale FOURIER-Entwicklungen.

Die *FOURIERSche* Entwicklung einer Funktion  $f(x_1 \dots x_n)$  in einem Grundgebiet  $G$  des  $x_1 \dots x_n$ -Raumes erhält man, indem man nacheinander nach jeder der Variablen  $x_k$  entwickelt, und zwar in die *FOURIERSche* Reihe oder das Integral, je nachdem, ob  $G$  in  $x_k$  ins Unendliche reicht oder nicht. Man ersetzt dazu  $G$  passend durch ein Gebiet  $G'$  der Form  $a_k \leq x_k \leq b_k$ , bzw.  $-\infty < x_k < +\infty$ ,  $k = 1, \dots, n$ , und ergänzt  $f$  außerhalb  $G$  passend, etwa durch  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

*Beispiele:*

**a) FOURIER-Reihe in  $n$  Variablen.** *Grdgeb.:*  $0 \leq x_k \leq l_k, k = 1, \dots, n;$

*V.O.S.:*  $\psi_{h_1 \dots h_n}(x_1, \dots, x_n) = \varphi_{h_1}(x_1) \dots \varphi_{h_n}(x_n);$

mit  $\varphi_h(x)$  aus a) (8) und  $h_1, \dots, h_n = 0, \pm 1, \dots;$

*Normg.:*  $(\psi_{h_1 \dots h_n}, \psi_{h_1 \dots h_n}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n l_1 \cdot l_2 \cdot \dots \cdot l_n;$

*Entwicklung:* 
$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{h_n=-\infty}^{+\infty} \gamma_{h_1 \dots h_n} e^{2\pi i \left( \frac{h_1 x_1}{l_1} + \dots + \frac{h_n x_n}{l_n} \right)}$$
 (19)

mit 
$$\gamma_{h_1 \dots h_n} = \frac{1}{l_1 \dots l_n} \int_0^{l_1} \dots \int_0^{l_n} f(t_1, \dots, t_n) e^{-2\pi i \left( \frac{h_1 t_1}{l_1} + \dots + \frac{h_n t_n}{l_n} \right)} dt_1 \dots dt_n;$$

*Darst.:* Darstellbar ist jedes  $f(x_1, \dots, x_n)$ , das in jeder Variablen bei beliebigen zulässigen festen Werten der anderen nach a) durch (9) darstellbar ist.

**β) FOURIER-Integral in  $n$  Variablen.**

*Grdgeb.:*  $-\infty < x_k < +\infty, k = 1, \dots, n$

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t_1, \dots, t_n) e^{2\pi i(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n)} dt_1 \dots dt_n$$
 (20)

mit  $\alpha(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, \dots, u_n) e^{-2\pi i(u_1 t_1 + \dots + u_n t_n)} du_1 \dots du_n;$

*Darstellung:* Es gilt das in  $\alpha$ ) Gesagte entsprechend mit (12) statt (9).

**γ) Gemischte FOURIER-Entwicklung.** *Grdgeb.:*  $-\infty < x < \infty; 0 \leq y \leq 1;$

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} a_h(t) e^{2\pi i \left( tx + \frac{hy}{l} \right)} dt$$

mit 
$$a_h(t) = \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_0^l dv \left\{ f(u, v) e^{-2\pi i \left( tu + \frac{hv}{l} \right)} \right\}$$
 (21)

*Darst.:* Es gilt stets  $F(x, y) = f(x, y)$ , wenn  $f$  nach  $x$  in (12) und nach  $y$  in (9) entwickelt werden kann, für alle  $y$  bzw.  $x$  in  $G$ .

**d) Entwicklung nach Kugelfunktionen.**

**α) LEGENDRESche Reihe.** *Grdgeb.*  $-1 \leq x \leq +1;$  *Bfkt.*  $\varrho(x) = 1;$

*V.O.S.*  $\{P_h(x)\}, h = 0, 1, \dots$  (LEGENDRESche Polynome, vgl. S. 60);

*Normg.*  $\int (P_h(t))^2 dt = \frac{2}{2h+1};$  *Koeff.*  $c_h = \frac{2h+1}{2} \int f(t) P_h(t) dt;$

*Darst.* Gelten die Bedingungen  $B$  oder  $D$  (S. 26), so gilt 3 f. Allgemein gilt:  $f(x)$  wird durch die Reihe  $F(x)$  dargestellt, wenn  $f(\cos \vartheta) \cdot \sin \vartheta$  durch die FOURIERSche Reihe dargestellt wird.

**β) Zugeordnete LEGENDRESche Funktionen** (vgl. S. 66).

*Grdgeb.*  $-1 \leq x \leq +1$ ; *V.O.S.*  $\{P_h^m(x)\}$ ,  $h = m, m+1, \dots$ ; *Bfkt.*  $= 1$ ;

*Normg.*  $\frac{2}{2h+1} \cdot \frac{(h+m)!}{(h-m)!}$  ( $m = 0, 1, \dots$  fest).  
 $P_h^0 = P_h$ .

**γ) Symmetrische Kugelfunktionen** (vgl. S. 65).

*Grdgeb.*  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ;  $0 \leq \vartheta \leq \pi$  (volle Kugeloberfläche); *Bfkt.*  $\varrho(\vartheta, \varphi) = \sin \vartheta$ ;

*V.O.S.*  $e^{im\varphi} P_h^m(\cos \vartheta) = \varphi_{hm}$

$h = 0, 1, \dots$ ;  $m = -h, -h+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, h-1, h$ .

*Normg.*  $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\varphi d\vartheta \sin \vartheta \varphi_{hm} \varphi_{hm}^* = \frac{4\pi}{2h+1} \frac{(h+m)!}{(h-m)!}$

*Entwicklung:*  $F(\vartheta, \varphi) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{m=-h}^{+h} a_{hm} e^{im\varphi} P_h^m(\cos \vartheta)$  (22)

mit  $a_{hm} = \frac{2h+1}{4\pi} \frac{(h-m)!}{(h+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\vartheta', \varphi') e^{-im\varphi'} P_h^m(\cos \vartheta') \sin \vartheta' d\varphi' d\vartheta'$ ;

*Darst.* Gelten die Bedingungen *B* (S. 26), so gilt 3 f (vgl. auch HOBSON).

Diese Entwicklung läßt sich auch schreiben als

**d) Entwicklung nach allgemeinen Kugelfunktionen.**

$F(\vartheta, \varphi) = \sum_{h=0}^{\infty} Y_h(\vartheta, \varphi)$ ; die Summanden  $Y_h$  sind gegeben durch:

$$Y_h(\vartheta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\vartheta', \varphi') P_h(\cos \gamma) \cdot \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi' \quad (23)$$

mit  $\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi')$ .

**e) Entwicklung nach BESSEL-Funktionen** (vgl. S. 67).

**α)** *Grdgeb.*  $0 \leq x \leq 1$ ;  $p$  sei reell fest,  $p \geq -\frac{1}{2}$ ;  $k_{ph}$ ,  $h = 1, 2, \dots$  mit  $k_{ph} < k_{p,h+1}$  seien alle positiven Lösungen von  $I_p(k) = 0$ , bzw.

$l_{ph}$  die von  $\alpha l \cdot \frac{dI_p(x)}{dx} \Big|_{x=l} + \beta \cdot I_p(l) = 0$ , ( $\alpha, \beta$  beliebige Konstanten);

*V.O.S.*  $\{I_p(k_{ph} x)\}$  oder  $\{I_p(l_{ph} x)\}$ ; *Bfkt.*  $= x$ ;

*Normg.*  $\frac{1}{2} (I_p'(k_{ph}))^2 = \frac{1}{2} (I_{p+1}(k_{ph}))^2$  bzw.  $(I_p'(l_{ph}))^2 + \left\{1 - \left(\frac{p}{l_{ph}}\right)^2\right\} (I_p(l_{ph}))^2$ ;

*Darst.* Wenn die Bedingungen *B* oder *D* (vgl. 3 e) gelten, gilt 3 f.

**β) Integraldarstellung:** *Grdgeb.*  $0 \leq x < \infty$ ;  $n$  fest  $= 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$F(x) = \int_0^\infty t \cdot a(t) I_n(tx) dt \quad \text{mit} \quad a(t) = \int_0^\infty u I_n(ut) f(u) du;$$

*Darst.* Ist  $f(0) = 0$ , gelten die Bedingungen *B* oder *D* (S. 26) für jedes positive endliche Intervall und existiert  $\int_0^\infty t |f(t)| dt$ , so gilt 3 f.

**f) Entwicklung nach LAGUERRESchen Polynomen** (vgl. S. 57).

*Grđgeb.*  $0 \leq x < \infty$ ; *V.O.S.*  $\{L_h(x)\}$ ,  $h = 0, 1, \dots$ ; *Normg.*  $(h!)^2$ ; *Bfkt.*  $e^{-x}$ ; *Darst.* Wenn für  $f$  die Bedingungen  $D$  (S. 26) in jedem endlichen Teilintervall  $(a \dots b)$  mit  $a > 0$  des Grundgebiets gelten und  $f(x) e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{1}{4} + \varepsilon}$  für jedes  $\varepsilon > 0$  bei  $x \rightarrow \infty$  bzw.  $f(x) x^{\frac{3}{4} + \varepsilon}$  bei  $x \rightarrow 0$  beschränkt bleibt, so gilt 3 f.

**g) Entwicklung nach HERMITESchen Polynomen** (vgl. S. 59)

(BRUNSSche Reihe).

*Grđgeb.*  $-\infty < x < +\infty$ ; *V.O.S.*  $\{H_h(x)\}$ ; *Normg.*  $2^h h!$ ; *Bfkt.*  $e^{-x^2}$ ; *Darst.* Wenn für  $f$  die Bedingungen  $D$  (s. S. 26) in jedem endlichen Teilintervall des Grundgebiets gelten und  $f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} x^\varepsilon$  für jedes  $\varepsilon > 0$  bei  $x \rightarrow \pm \infty$  beschränkt bleibt, so gilt 3 f.

**h) Entwicklung nach TSCHEBYSCHEFFSchen Polynomen** (vgl. S. 55).

*Grđgeb.*  $-1 < x < +1$ ; *V.O.S.*  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  und  $\{T_h(x)\}$  bzw.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  und  $\{U_h(x)\}$ ; *Normg.*  $\frac{\pi}{2}$ ; *Bfkt.*  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ; *Darst.* Durch  $x = \cos \vartheta$  erhält man eine FOURIER-Reihe, vgl. 4 a (11).

**5. Entwicklung in Potenzreihen.**

TAYLOR-Reihe. Besitzt  $f(z)$  im Gebiete  $G$  der komplexen  $z$ -Ebene stetige Ableitungen bis zur  $(n+1)$ -ten Ordnung, so gilt:

$$f(z) = f(a) + \frac{(z-a)}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n, \quad (24)$$

wobei das *Restglied*

$$R_n = \frac{(z-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \vartheta(z-a)), \quad 0 < \vartheta < 1 \quad (25)$$

ist; speziell für  $a = 0$ :

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{1!} f'(0) + \dots + \frac{z^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\vartheta z). \quad (26)$$

Spezielle Reihenentwicklungen: Zur Restabschätzung vgl. auch (11). ( $k$ : heißt: konvergent für).

$$1 + \binom{a}{1} x + \binom{a}{2} x^2 + \dots = (1+x)^a, \quad k: |x| < 1 \quad (\text{vgl. auch KNOPP, S. 410});$$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}, \quad k: |x| < 1;$$

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n = e^x, \quad k: \text{alle } x; |R_n| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n!} \text{ für } |x| \leq \frac{n+1}{2};$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718\,281\,828 \dots;$$



$$1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \dots = e^{x \ln a} = a^x, \quad k: \text{ alle } x;$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sin x, \quad x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \mathfrak{S}in x, \quad k: \text{ alle } x;$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \cos x, \quad 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \mathfrak{C}os x, \quad k: \text{ alle } x;$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} + \dots = \operatorname{tg} x, \quad k: |x| < \frac{\pi}{2};$$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots + (-1)^n \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} + \dots =$$

$$= \frac{\mathfrak{S}in x}{\mathfrak{C}os x} = \mathfrak{Z}g x, \quad k: |x| < \frac{\pi}{2};$$

$$x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots = \operatorname{arc} \sin x, \quad k: |x| \leq 1, x \neq \pm 1;$$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \operatorname{arctg} x, \quad k: |x| \leq 1, x \neq \pm i;$$

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \ln(1+x), \quad k: |x| \leq 1, x \neq -1;$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right), \quad k: |x| \leq 1, x \neq \pm 1;$$

$$x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5} \frac{x^5}{5!} - \dots = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \operatorname{Si} x, \quad k: \text{ alle } x;$$

(„Integralsinus“);

$$C + \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{4} \frac{x^4}{4!} - \dots = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt = \operatorname{Ci} x, \quad k: \text{ alle } x;$$

(„Integralcosinus“);

$$C + \ln x + \frac{1}{1} \cdot \frac{x}{1!} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{2!} + \dots = \int_\infty^{-x} \frac{e^{-t}}{t} dt = \operatorname{li}(e^x) = \operatorname{Ei}(x), \quad k: \text{ alle } x;$$

(„Integrallogarithmus“);

wobei  $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0,57721566\dots$  ist;  
(EULERSche Konstante),

$$1 - \frac{x^2}{5 \cdot 2!} + \frac{x^4}{9 \cdot 4!} - \frac{x^6}{13 \cdot 6!} + \dots = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt \left. \begin{array}{l} k: \text{ alle } x; \\ \text{(FRESNELSche} \\ \text{Integrale),} \end{array} \right\}$$

$$\frac{x}{3} - \frac{x^3}{7 \cdot 3!} + \frac{x^5}{11 \cdot 5!} - \dots = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots = \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(x), \quad k: \text{ alle } x;$$

(GAUSSSches Fehlerintegral),

$$1 - \frac{1}{x} + \frac{1 \cdot 3}{x^2} - \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(-1)^n x^n} + R_n = \frac{\sqrt{2\pi x}}{\sqrt{2\pi x} - 2e^{-\frac{x}{2}}} \Phi\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)$$

$$[\text{asymptotische Reihe (vgl. 1 e)}] |R_n| < \frac{2e^{-n-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

Elliptische Funktionen (s. S. 76).  $q = e^{-\pi K'/K}$ ,  $u = \frac{x}{2K}$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{2n+1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \sin(2n+1)\pi u = \frac{kK}{2\pi} \operatorname{sn} x,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{2n+1}{2}}}{1+q^{2n+1}} \cos(2n+1)\pi u = \frac{k'K}{2\pi} \operatorname{cn} x,$$

$$1 + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos 2\pi n u = \frac{2K}{\pi} \operatorname{dn} x,$$

$$x - (1+k^2) \frac{x^3}{3!} + (1+14k^2+k^4) \frac{x^5}{5!} - (1+135k^2+135k^4+k^6) \frac{x^7}{7!} + \dots = \operatorname{sn} x,$$

$$x - (1+k^2) \frac{x^3}{3!} + (1+14k^2+k^4) \frac{x^5}{5!} - \dots = \operatorname{sn} x.$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + (1+4k^2) \frac{x^4}{4!} - (1+44k^2+16k^4) \frac{x^6}{6!} + \dots = \operatorname{cn} x,$$

$$1 - k^2 \frac{x^2}{2!} + k^2(4+k^2) \frac{x^4}{4!} - k^2(16+44k^2+k^4) \frac{x^6}{6!} + \dots = \operatorname{dn} x.$$

Kugelfunktionen (s. S. 60).

$$\begin{aligned} \cos n x + \frac{1}{1} \frac{n}{2n-1} \cos(n-2)x + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} \cos(n-4)x \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \cos(n-6)x + \dots \\ = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \frac{P_n(\cos x)}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \\ = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} P_n(x). \end{aligned}$$

Zylinderfunktionen (s. S. 66).

$$1 - \frac{x}{1 \cdot (\rho+1)} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot (\rho+1)(\rho+2)} - \dots = \Pi(\rho) x^{-\frac{\rho}{2}} I_{\rho}(2\sqrt{x}),$$

$$1 - \frac{x^2}{1!^2} + \frac{x^4}{2!^2} - \frac{x^6}{3!^2} + \dots = I_0(2x),$$

$$1 - \frac{x}{1!2!} + \frac{x^2}{2!3!} - \dots = \frac{1}{\sqrt{x}} I_1(2\sqrt{x}) \approx -\frac{1}{\sqrt{x}} I_0'(2\sqrt{x}), |x| \ll 1,$$

$$1 - \frac{3x^2}{2 \cdot 4} + \frac{3^2 x^4}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 10} - \frac{3^3 x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 16} + \dots = \sqrt{\frac{x}{2}} \Pi\left(-\frac{1}{3}\right) I_{-\frac{1}{3}}(x),$$

$$1 - \frac{x^2}{1 \cdot 5} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 9} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13} + \dots = \sqrt{\frac{1}{2}} \Pi\left(\frac{1}{4}\right) I_{\frac{1}{4}}(x).$$

Dritter Abschnitt.

## Funktionen.

### A. Allgemeine Funktionentheorie.

#### 1. Bezeichnungen.

Eine *eindeutige Funktion*  $f$  ( $f(x)$  bzw.  $f(x_1, \dots, x_n)$ ) ordnet jedem Punkte  $x$  eines Gebietes (d. h. jedem Wert  $x$  eines Intervalles bzw. Wertsystem  $x_1, \dots, x_n$  eines Gebietes) einen Funktionswert zu. Enthält das Intervall bzw. Gebiet alle seine Randpunkte, so heißt es *abgeschlossen* (sonst: *offen*); dann gehört der Grenzpunkt jeder konvergenten Folge von Punkten des Gebietes stets auch zum Gebiet.

Eine Funktion  $f$  heißt

*stetig im Punkt*  $\xi$ , wenn  $f(\xi)$  endlich ist und für jede nach  $\xi$  konvergente Folge gilt:  $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$ ; dabei kann eine Funktion

$f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  von mindestens zwei Variablen in einem Punkte  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  in jeder der Variablen für sich stetig sein (d. h. bei Festhalten aller übrigen), ohne *im Punkte*  $\xi$  *stetig* zu sein (d. h. als Funktion aller Variablen);

*stetig im Gebiet*  $G$ , wenn  $f$  in jedem Punkt von  $G$  stetig ist;

*stückweise* oder *abteilungsweise stetig* im Gebiet  $G$ , wenn es eine Zerlegung von  $G$  in endlich viele Teilgebiete gibt, so daß  $f$  in deren Innerem stetig ist und sich bei beliebiger Annäherung an den Rand (von innen) *bestimmten endlichen* Grenzwerten nähert;

*stückweise glatt*, wenn  $f$  und seine ersten Ableitungen stückweise stetig sind;

*differenzierbar* im Punkte  $\xi$ , wenn für jede nach  $\xi$  konvergente Folge  $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$  existiert (also auch endlich ist);

*absolut integrierbar* im Gebiet  $G$ , wenn  $\int_G |f| dx$  existiert.

Jede differenzierbare Funktion ist stetig, jede stetige ist integrierbar.

Eine reelle Funktion  $f(x)$  einer reellen Variablen  $x$  heißt im Intervall  $I$ :

*monoton wachsend*, wenn in  $I$  für  $x > \xi$  stets  $f(x) \geq f(\xi)$  gilt,

*monoton fallend*, wenn für  $x > \xi$  stets  $f(x) \leq f(\xi)$  gilt.

Eine Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  heißt *homogen* vom Grade  $\alpha$ , wenn

$$f(t x_1, \dots, t x_n) = t^\alpha f(x_1, \dots, x_n).$$

Für differenzierbare homogene Funktionen gilt die *EULERSche Relation*:

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha f.$$

## 2. Komplexe Größen.

Definition: Die formal gebildete Summe einer *reellen* Zahl  $a$  und einer *imaginären* Zahl  $ib$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) heißt eine *komplexe* Zahl  $c = a + ib$ ;  $a$  heißt ihr *Realteil* ( $a = \Re c$ ),  $b$  ihr *Imaginärteil* ( $b = \Im c$ ),  $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$  heißt ihr (absoluter) *Betrag*.

*Veranschaulichung der komplexen Zahl  $c = a + ib$ :*

1. Durch den *Punkt* der komplexen (GAUSSSchen) Ebene, dessen rechtwinklige Koordinaten  $x = a$ ,  $y = b$  sind.  $|c|$  bedeutet den Betrag des Abstandes  $r$  vom Punkt  $c$  bis zum Nullpunkt.

Es ist also (Fig. 2)

$$a = r \cos \varphi$$

$$b = r \sin \varphi$$

$$a + ib = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi},$$

$$\text{wo } r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arctg \frac{b}{a}. \quad \varphi \text{ heißt } \textit{Argument},$$

*Amplitude* oder *Arkus*.

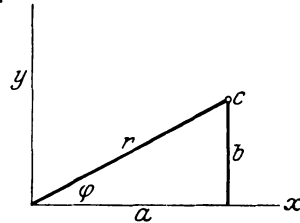


Fig. 2. GAUSSSche Zahlenebene.

2. Durch einen *Vektor* vom Nullpunkt, dessen Komponenten gleich  $a$  bzw.  $b$  sind<sup>1</sup>.

$c_1 + c_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)$  ist dann ein Vektor, der durch Vektoraddition (vgl. S. 110) der Vektoren  $c_1$  und  $c_2$  entsteht.

$c_1 \cdot c_2 = (a_1 + ib_1) (a_2 + ib_2) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$  ist ein Vektor, dessen Argument  $\varphi$  gleich der Summe derjenigen von  $c_1$  und  $c_2$  ist und dessen Betrag gleich dem Produkt der Beträge von  $c_1$  und  $c_2$  ist. Insbesondere ist  $c^n = (a + ib)^n = r^n \cdot e^{in\varphi} = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ .

Zwei komplexe Größen heißen nur dann gleich, wenn

1. sowohl ihre Realteile wie ihre Imaginärteile gleich sind oder
2. sowohl ihre Beträge wie ihre Argumente (modulo  $2\pi$ ).

Ist  $c_1 = c_2 \cdot C$  oder  $\frac{c_1}{c_2} = C = C_0 \cdot e^{i\alpha}$ , wo  $C_0$  reell sei, so ist  $C_0$  das Verhältnis der Beträge  $\frac{|c_1|}{|c_2|}$  und  $\alpha$  der Winkel zwischen den beiden Vektoren:  $\alpha = \varphi_1 - \varphi_2$ .

$c^* = a - ib$  heißt „*konjugiert komplex*“ zu  $c = a + ib$ .

Daraus folgt:

$$a = \frac{c + c^*}{2} = \Re c \qquad b = \frac{c - c^*}{2i} = \Im c$$

$$\sqrt{cc^*} = \sqrt{a^2 + b^2} = |c| = |c^*|.$$

<sup>1</sup> Besonders in der Form:  $A \cdot e^{i\omega t} = r e^{i(\varphi + \omega t)}$ . Bedeutet  $t$  die Zeit, so dreht sich der Vektor mit gleichförmiger Geschwindigkeit um den Nullpunkt.

### 3. Analytische Funktionen.

Eine Funktion  $f(z) = u + iv$  der komplexen Variablen  $z = x + iy$  heißt im Punkt  $z = x + iy$  *regulär*, wenn

$$[1. \text{ Definition:}] \quad \frac{df(z)}{dz} = \lim_{h, k \rightarrow 0} \frac{f(x+h+i(y+k)) - f(x+iy)}{h+ik} \quad (1)$$

einen von der Art des Grenzüberganges (dem Wege, auf dem  $h$  und  $k$  gegen Null gehen) unabhängigen Wert hat;

$$[2. \text{ Definition:}] \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

(CAUCHY-RIEMANNSche Gleichungen) ist und diese Differentialquotienten stetige Funktionen von  $x$  und  $y$  sind.

Die beiden Definitionen sind gleichwertig.

Eine Funktion, die in einem Gebiete  $G$  nur für höchstens abzählbar unendlich viele Werte von  $z$  nicht regulär ist, heißt *analytisch* in  $G$ . Die Punkte von  $G$ , in denen die Funktion nicht regulär ist, heißen *singuläre Punkte* oder *singuläre Stellen* der Funktion, und zwar *außerwesentlich singulär*, wenn es ein positives  $n$  gibt, so daß  $(z - z_0)^n f(z)$  in  $z_0$  beschränkt ist, andernfalls *wesentlich singulär*.

Eine analytische Funktion einer analytischen Funktion ist wieder eine solche. Auch die zu  $f(z)$  inverse Funktion  $\varphi(z)$  (definiert durch  $\varphi(f(z)) = f(\varphi(z)) = z$ ) ist eine analytische.

Durch eine analytische Funktion  $f(z) = u + iv$  werden  $u$  und  $v$  als Funktionen von  $x$  und  $y$  festgelegt:

$$u = f_1(x, y), \quad v = f_2(x, y). \quad (3)$$

Man findet diese, indem man  $f(x + iy)$  in die Form  $f_1(x, y) + if_2(x, y)$  bringt.

$f_1$  und  $f_2$  sind zueinander konjugierte Potentialfunktionen. Es gilt:

$$\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0, \quad \text{wo} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (\text{LAPLACESche Gleichungen.})$$

Jede beliebige analytische Funktion  $f$  liefert daher zwei partikuläre Lösungen der Gleichung  $\Delta \varphi = 0$  (im Zweidimensionalen).

Ist die analytische Funktion  $f(z) = u + iv$  für reelles  $z$  reell, so gilt

$$f(z^*) = u - iv \quad (\text{Spiegelungsprinzip})$$

und daher

$$u = \frac{f(z) + f(z^*)}{2}; \quad v = \frac{f(z) - f(z^*)}{2i}. \quad (4)$$

Durch eine analytische Funktion  $f$  wird dem Wertepaar  $x, y$  ein Wertepaar  $u, v$  zugeordnet. Betrachtet man daher  $x, y$  als die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes in einer Ebene,  $u, v$  als die eines

Punktes in einer zweiten Ebene, so vermittelt die Funktion  $f$  die *Abbildung* jedes Punktes oder aus Punkten gebildeten Systems (z. B. einer Kurve oder eines Flächenstücks) der  $x, y$ -Ebene auf die  $u, v$ -Ebene.

$f(z)$  vermittelt eine *konforme* Abbildung der  $x, y$ -Ebene auf die  $u, v$ -Ebene (vgl. S. 42).

Unter dem Integral  $\int_a^b f(z) dz$  versteht man:

$$\int_a^b f(z) dz = \int_a^b (u + iv) (dx + i dy) = \int_a^b (u dx - v dy) + i \int_a^b (v dx + u dy). \quad (5)$$

Die Integrale sind längs einer bestimmten Kurve zwischen den Punkten  $a$  und  $b$  zu erstrecken.

Wegen der Definitionsgleichung (2) der analytischen Funktionen sind sowohl  $(u dx - v dy)$  wie  $(v dx + u dy)$  *totale Differentiale* (vgl. S. 5).

#### 4. CAUCHYS Integralsatz.

$\int_a^b f(z) dz$  bleibt für analytische  $f(z)$  unverändert, wenn man unter Festhalten von  $a$  und  $b$  den Integrationsweg verschiebt, falls nicht diese Verschiebung über singuläre Punkte von  $f(z)$  hinweg geschieht.

Erfolgt die Integration über eine geschlossene Kurve (Zeichen  $\oint$ ), d. h. ist  $a = b$ , so ist  $\oint f(z) dz = 0$ , wenn die Kurve keinen singulären Punkt von  $f(z)$  einschließt.

**CAUCHYS Integralformel.**

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - \zeta} dz \quad (6)$$

gestattet die Berechnung von  $f(z)$  für den Wert  $z = \zeta$ , wenn  $f(z)$  auf dem Umfang einer den Punkt  $\zeta$  umschließenden Kurve gegeben ist, welche keinen singulären Punkt von  $f(z)$  einschließt. Dabei ist die Kurve im *positiven* Sinne (der auf dem Einheitskreise von  $+1$  über  $+i$  nach  $-1$  führt) zu durchlaufen.

Spezialfall:  $\oint (z - \zeta)^n dz = 0$  für  $n \neq -1, n = 0, 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

$$n = -1: \quad \oint \frac{dz}{z - \zeta} = 2\pi i. \quad (7)$$

**Mittelwertsatz.** Ist die Kurve ein Kreis und ist  $u_0 + iv_0$  der Wert von  $f(z)$  im Mittelpunkt,  $u + iv$  der Wert auf dem Umfang (dargestellt als Funktion des Winkels  $\vartheta$ ), so ist

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u d\vartheta; \quad v_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v d\vartheta, \quad (8)$$

also  $u_0$  bzw.  $v_0$  der Mittelwert der  $u$  bzw.  $v$  auf dem Umfang des Kreises.

## 5. Potenzreihenentwicklung der analytischen Funktionen.

### a) Entwicklung in der Umgebung regulärer Punkte.

$\alpha$ ) Ist  $f(z)$  in der Umgebung des Punktes  $z = z_0$  eindeutig und regulär, so läßt sich  $f(z)$  in die (TAYLORSche) Reihe entwickeln:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots \quad (9)$$

$$\text{mit } a_k = \oint_C \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^{k+1}} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0); \quad \left( f^{(n)} = \frac{d^n f}{dz^n} \right). \quad (10)$$

Der Integrationsweg  $C$  ist eine einfach geschlossene Kurve, die  $z_0$  einmal, aber keine singulären Punkte von  $f$  umschließt und im positiven Sinne durchlaufen ist.

**Konvergenz.** Die TAYLORSche Reihe (9) konvergiert absolut und gleichmäßig in jedem Kreis:  $|z - z_0| \leq r$ , in und auf welchem  $f(z)$  regulär ist. Es gibt stets ein  $R > r$  (den *Konvergenzradius*), so daß die Reihe (9)

konvergiert, wenn  $|z - z_0| < R$  ist,

divergiert, wenn  $|z - z_0| > R$  ist.

Das Verhalten auf dem *Konvergenzkreis*  $|z - z_0| = R$  hängt von  $f(z)$  ab. Der Konvergenzkreis geht durch den  $z_0$  am nächsten liegenden singulären Punkt von  $f(z)$ .

Verschwinden die  $n$  Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  und ist  $a_n \neq 0$ , so heißt der Punkt  $z_0$ : *Nullstelle  $n$ -ter Ordnung von  $f(z)$* .

$\beta$ ) Ist  $f(z)$  im *Unendlichen* (d. h.  $f\left(\frac{1}{z'}\right)$  für  $z' = 0$ ) regulär, so liefert die Entwicklung von  $f\left(\frac{1}{z'}\right)$  bei  $z' = 0$  die Entwicklung von  $f(z)$  bei  $z = \infty$ :

$$f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots \quad \text{mit } a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) \zeta^{n-1} d\zeta, \quad (11)$$

wobei  $C$  eine einfach geschlossene Kurve ist, die alle endlichen singulären Punkte von  $f(z)$  umschließt. Die Reihe konvergiert außerhalb des Kreises um  $z = 0$ , der durch die von  $z = 0$  entfernteste Singularität von  $f$  geht. Sie konvergiert gleichmäßig und absolut auf und außerhalb jedes größeren Kreises um  $z = 0$ .

Praktisch wesentlich an diesen Entwicklungsmöglichkeiten ist, daß die Funktion innerhalb des Konvergenzbereiches durch eine Reihe von beschränkter Gliederzahl mit einer gewissen Näherung dargestellt wird und der Fehler dieser Näherung mit wachsender Gliederzahl beliebig klein wird (Beispiel vgl. Anhang, 2).

$\gamma$ ) **Analytische Fortsetzung.** Durch die Entwicklung in der Umgebung von  $z_0$  ist  $f(z)$  zunächst nur innerhalb des Konvergenzkreises

bestimmt. Geht man zu der Entwicklung um einen Punkt  $z'_0 = z_0 + c$  über, so erhält man die Entwicklung

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z'_0 + c) + a_2(z - z'_0 + c)^2 + \dots$$

Löst man die einzelnen Klammerpotenzen  $(z - z'_0 + c)^n$  nach dem binomischen Lehrsatz und ordnet nach Potenzen von  $(z - z'_0)$ , so erhält man eine Entwicklung der Form

$$f(z) = b_0 + b_1(z - z'_0) + b_2(z - z'_0)^2 + \dots$$

die in einem Kreise um  $z'_0$  konvergiert, der möglicherweise über den alten Kreis hinausragt. In dem den beiden Kreisen gemeinsamen Gebiete liefern beide Entwicklungen dieselben Werte. Die zweite Entwicklung liefert daher, soweit sie außerhalb des Konvergenzkreises der ersten konvergiert, eine *analytische Fortsetzung* der ersten. Durch Wiederholung dieses Verfahrens ist es möglich, die durch die Potenzreihe definierte Funktion über einen weiteren Bereich, eventuell über die gesamte Ebene fortzusetzen. Es gibt Fälle, in denen eine Fortsetzung über eine bestimmte Grenze nicht möglich ist.

#### b) LAURENTSche Entwicklung eindeutiger Funktionen.

In jedem *ringförmigen* Gebiet  $\mathfrak{R}$  (zwischen den konzentrischen Kreisen  $K_1$  und  $K_2$ ):  $r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2$ , in welchem  $f(z)$  eindeutig und regulär ist, gilt die dort absolut und gleichmäßig konvergente Entwicklung:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k = \dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots \quad (12)$$

$$\text{mit} \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(t) dt}{z^{k+1}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (13)$$

wobei der Integrationsweg  $K$  ein Kreis in  $\mathfrak{R}$  ist:  $|z - z_0| = \varrho$ ;  $r_1 \leq \varrho \leq r_2$ .

Die LAURENT-Reihe zerlegt  $f(z)$  in zwei Funktionen:  $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$  ( $f_1 = \sum_{k=-\infty}^{-1}$ ,  $f_2 = \sum_{k=0}^{\infty}$ ), wo  $f_1(z)$  überall außerhalb des Kreises  $K_1$  regulär ist (vgl. a,  $\beta$ ), und  $f_2(z)$  überall in  $K_2$  (vgl. a,  $\alpha$ ). Dementsprechend konvergiert die LAURENT-Reihe im ganzen Ringgebiet zwischen den Kreisen, die durch die zu  $\mathfrak{R}$  nach innen und außen nächstgelegenen Singularitäten von  $f(z)$  gehen.

#### c) Entwicklung in der Umgebung isolierter singulärer Punkte.

Auch hier wird der Charakter der Funktion  $f(z)$  im *unendlichfernen Punkt* ( $z = \infty$ ) durch den von  $f\left(\frac{1}{z'}\right)$  in  $z' = 0$  gekennzeichnet und die zugehörige Entwicklung durch die von  $f\left(\frac{1}{z'}\right)$  in  $z' = 0$  geliefert.



$\alpha$ ) In der Umgebung von  $z = z_0$  *eindeutige* analytische Funktionen lassen sich in die LAURENTSche Reihe entwickeln, die für  $0 < |z - z_0| < R$  konvergiert, wo der Kreis  $|z - z_0| = R$  durch die zu  $z_0$  nächstgelegene Singularität von  $f$  geht.

Entweder kommen nur *endlichviele negative Potenzen* vor; dann gibt es ein positives ganzes  $m$  so, daß  $(z - z_0)^m f(z)$ , nicht aber  $(z - z_0)^{m-1} f(z)$  in  $z = z_0$  regulär ist.  $f(z)$  hat dann in  $z = z_0$  einen *m-fachen Pol*:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (14)$$

Oder es kommen *unendlich viele negative Potenzen* in (12) vor: dann ist  $z = z_0$  eine *wesentlich singuläre Stelle* von  $f(z)$ .

$\beta$ ) In *jeder* Umgebung von  $z = z_0$  *mehrdeutige* analytische Funktionen haben in  $z = z_0$  einen *Verzweigungspunkt*. Gibt es ein positives ganzes  $m$  so, daß  $f(z_0 + t^m)$  in der Umgebung von  $t = 0$  eindeutig wird, so gilt die Entwicklung:

$$f(z_0 + t^m) = f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k t^{k/m} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^{k/m}. \quad (15)$$

Ist dabei  $m$  kleinst gewählt, so hat  $f(z)$  bei  $z = z_0$  einen *Verzweigungspunkt (m-1)-ter Ordnung*. Dabei kommen keine, endlich viele oder unendlich viele negative Potenzen vor, je nachdem  $f(z_0 + t^m)$  in  $t = 0$  regulär ist, einen Pol hat oder wesentlich singulär ist.

Ist die Funktion  $f(z)$  bei  $z = z_0$  unendlich vieldeutig (*Verzweigungspunkt unendlich hoher Ordnung*), so gibt es keine Entwicklung nach irgendwelchen Potenzen von  $(z - z_0)$  (*wesentlich singuläre Stelle*).

#### d) Residuum, Residuensatz.

Der Koeffizient  $a_{-1}$  in der LAURENTSchen Reihe von  $f(z)$  an einer singulären Stelle  $z = z_0$  heißt *Residuum von  $f(z)$  bei  $z = z_0$* :

$$a_{-1} = \text{Res } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz. \quad (16)$$

Der Integrationsweg  $C$  schließt dabei keine singuläre Stelle außer  $z = z_0$  ein. Die praktische Bedeutung dieser Formel liegt darin, daß sie gestattet, die Berechnung des Integrals  $\int_C f(z) dz$  zurückzuführen auf die Entwicklung der Funktion in der Umgebung eines Poles.

Als Residuum des unendlich fernen Punktes bezeichnet man den Koeffizienten  $-a_1$  der in der Umgebung dieses Punktes gültigen Entwicklung

$$f(z) = a_{-m} z^m + a_{-m+1} z^{m-1} + \dots + a_{-1} z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (17)$$

Ist  $f(z)$  in einem von einer oder mehreren stetigen Kurven berandeten Gebiet überall eindeutig und bis auf endlich viele singuläre Stellen im Innern regulär, so ist  $\frac{1}{2\pi i} \oint f(z) dz$  erstreckt über die Berandung des

Gebietes gleich der Summe der Residuen der singulären Stellen dieses Gebietes. Ist  $f(z)$  überall eindeutig und bis auf endlich viele singuläre Stellen regulär, so ist die Summe der zu den Polen und zum unendlich fernen Punkt gehörigen Residuen gleich Null (*Residuensatz*).

### 6. Berechnung bestimmter Integrale durch Integration im Komplexen.

Gegeben sei ein reelles bestimmtes Integral  $I = \int_a^b f(x) dx$ . Ist  $f(z)$  in einem die Strecke  $a \rightarrow b$  der reellen Achse enthaltenden Gebiet der komplexen  $z$ -Ebene analytisch, so ist  $I = \int_a^b f(z) dz$  ein in der komplexen Ebene auszuführendes Integral zwischen den Punkten  $a$  und  $b$  der reellen Achse. Als Integrationsweg kann man dann jeden beliebigen nehmen, der durch Verzerrung des ursprünglichen reellen Weges bei Festhaltung der ursprünglichen reellen Grenzen  $a$  und  $b$  entsteht, falls die Verzerrung nicht über einen singulären Punkt von  $f(z)$  hinübergeführt hat. Es lassen sich häufig komplexe Wege von  $a$  nach  $b$  finden, längs derer die Integration bequemer als längs des reellen Weges auszuführen ist.

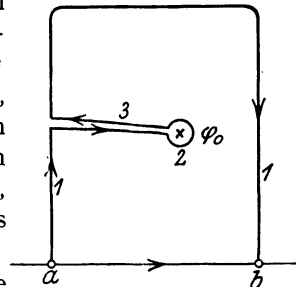


Fig. 3. Anwendung des Residuensatzes.

Um die Verzerrung auch über singuläre Punkte hinwegführen zu können, muß man so verfahren, wie die Fig. 3 zeigt: Man ersetzt den reellen Weg  $a \rightarrow b$  durch drei komplexe Stücke, 1. den verlangten Umweg, 2. einen (beliebig kleinen) Kreis um den singulären Punkt, 3. die Zuwege zu dem singulären Punkt. Der Anteil des Weges 2 ist gleich  $2\pi i$  mal dem Residuum des singulären Punktes; der Anteil des Weges 3 (Hin- und Rückweg) verschwindet.

Durch Einführung einer neuen geeigneten Variablen  $\varphi(z)$  statt  $z$  (Abbildung von der  $z$ -Ebene auf eine  $\varphi$ -Ebene) kann oft eine weitere Vereinfachung erzielt werden (z. B. so, daß das Integral über den Weg 1 ganz verschwindet, letzteres besonders dann, wenn die neue Variable zu einem geschlossenen Integrationsweg führt). — Gelegentlich kann man den Integrationsweg so legen, daß nur kleine Stücke des Weges wesentliche Beiträge zum Gesamtwert  $I$  liefern, und zwar Stücke, wo der Integrand (näherungsweise) in einfacher Form geschrieben werden kann (Methode der Sattelpunkte). Es sind noch andere Kunstgriffe möglich, z. B. das neue Integral als reellen Teil eines einfacheren komplexen Integrals aufzufassen<sup>1</sup>. (Beispiel vgl. Anhang, 3.)

<sup>1</sup> Beispiele der Anwendung auch bei physikalischen Untersuchungen vgl. z. B. Arbeiten von A. SOMMERFELD und seinen Schülern, ferner L. BRILLOUIN: Ann. Phys. 44, 203 (1914). — DEBYE, P.: Math. Ann. 67, 535 (1910).

## 7. Abbildung durch komplexe Funktionen.

Jede stetige komplexe Funktion  $w = \varphi(z) = u + iv$  der komplexen Veränderlichen  $z = x + iy$  liefert eine stetige *Abbildung* eines Gebietes der komplexen  $z$ -Ebene ( $xy$ -Ebene) auf ein Gebiet der komplexen  $w$ -Ebene ( $uv$ -Ebene) und umgekehrt.

**Konforme Abbildung.** Hat das Verhältnis des Abstandes zweier Punkte  $P_1$  und  $P$  der  $xy$ -Ebene zum Abstand der Bildpunkte  $Q_1$  und  $Q$  der  $uv$ -Ebene, wenn  $P_1$  auf stetiger Kurve nach  $P$  rückt, einen Grenzwert, der nur von  $P$  abhängt, also für alle durch  $P$  gehenden stetigen Kurven derselbe ist, so heißt die Abbildung *konform* im Punkte  $P$ . (Diese Definition der Konformität gilt allgemein für Abbildungen  $n$ -dimensionaler Gebiete.) Die *konforme Abbildung* ist *winkeltreu* (im weiteren Sinn): die Winkel der Tangenten differenzierbarer Kurven durch  $P$  sind gleichgroß den Winkeln der Tangenten ihrer Bildkurven im Bildpunkt von  $P$ ; der Drehsinn kann entgegengesetzt sein. Kleine Dreiecke werden in nahezu ähnliche kleine Dreiecke abgebildet: die konforme Abbildung ist *in kleinsten Teilen ähnlich*.

Jede *analytische Funktion* liefert eine in jedem Gebiet, in welchem  $f(z)$  regulär und  $f'(z) \neq 0$  ist, *konforme Abbildung* eines  $z$ -Gebietes auf ein  $w$ -Gebiet und umgekehrt; die Abbildung ist winkeltreu im engeren Sinn: sie erhält auch den Drehsinn. Die von der konjugiert-komplexen Funktion  $w = f^*(z)$  gelieferte konforme Abbildung kehrt den Winkel drehsinn um. Jede konforme Abbildung entspringt einer analytischen Funktion (oder deren konjugiert-komplexem Wert).

**RIEMANNSCHE FLÄCHE.** Eine komplexe Funktion  $w = f(z)$  ist i. a. nicht eindeutig, einem  $z$ -Wert entsprechen i. a. mehrere  $w$ -Werte. Zerspaltet man die  $z$ -Ebene in den Mehrdeutigkeitsgebieten in mehrere übereinanderliegende *Blätter*, die man geeignet untereinander verbindet, so läßt sich Eindeutigkeit erreichen: jedem  $z$ -Gebiet dieser Blättergesamtheit [der *RIEMANNSCHEN FLÄCHE* zu  $f(z)$ ] entspricht dann ein  $w$ -Gebiet. Man konstruiert diese *RIEMANNSCHE FLÄCHE* durch analytische Fortsetzung (vgl. 5 a,  $\gamma$ ) von  $f(z)$  auf allen möglichen von einem regulären Punkt ausgehenden Wegen; in allen  $z$ -Punkten, in deren Umgebung eine Fortsetzung mit einer früher erhaltenen übereinstimmt, vereinigt man sie mit dieser, in allen anderen führt man sie in ein neues darüberliegendes Blatt. Die einzelnen Blätter der *RIEMANNSCHEN FLÄCHE* hängen in den *Verzweigungspunkten* der Funktion, den *Windungspunkten* der *RIEMANNSCHEN FLÄCHE* zusammen. Ein Verzweigungspunkt (Windungspunkt) hat die Ordnung  $n - 1$  bzw.  $\infty$ , wenn in ihm  $n$  bzw. unendlichviele Blätter zusammenhängen.

Ersetzt man entsprechend die  $w$ -Ebene durch die *RIEMANNSCHE FLÄCHE* der Umkehrfunktion (Inversen) zu  $f(z)$ , so werden die beiden Flächen durch  $w = f(z)$  umkehrbar eindeutig aufeinander bezogen.

## 8. Veranschaulichung komplexer Funktionen.

Zur Veranschaulichung einer komplexen Funktion  $w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  benutzt man die durch sie gegebene Abbildung. Diese stellt man dar, indem man in der  $xy$ -Ebene bzw. der RIEMANNschen Fläche von  $f(z)$  diejenigen Kurven einträgt, die auf gewisse Standardkurven der  $uv$ -Ebene abgebildet werden.

a) Man wähle als Standardkurven die Kurven konstanten Real- und Imaginärteils von  $w$ , etwa  $u(x, y) = m\alpha$ ,  $v(x, y) = n\alpha$ ,  $\alpha$  eine Konstante,  $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Überall, wo  $f(z)$  regulär und  $f'(z) \neq 0$  ist, durchsetzen beide Kurvenscharen einander senkrecht: zwei Kurven derselben Schar schneiden sich nicht, d. h. nicht im selben Blatt der RIEMANNschen Fläche zu  $f(z)$ .

*Erste Deutung.* Man kann stets eine Schar (gleichgültig welche) als *Höhenschichtlinien* (Isohypsen), die andere als *Falllinien* (Gradientenlinien) einer Raumfläche über der  $z$ -Ebene auffassen. Dabei liegen ebensoviel Flächenteile wie Blätter der RIEMANNschen Fläche über einem  $z$ -Gebiet.

Die Fläche hat überall *negative* Krümmung, hat also *keine Maxima* („Gipfel“) oder *Minima* („Gruben“).

Jede Falllinie fällt monoton von  $+\infty$  bis  $-\infty$ ; jede Höhenlinie trennt ein höheres von einem tieferen Gebiet. Keine der Scharkurven ist geschlossen: reicht sie nicht doppelpunktfrei bis ins Unendliche, so zertrennt sie entweder ein singulärer Punkt, oder sie gehört verschiedenen Blättern der RIEMANNschen Fläche an.

*Zweite Deutung.* Man kann die eine Kurvenschar (etwa  $u = \text{const.}$ ) auffassen als *Stromlinien* einer zweidimensionalen *Strömung* einer inkompressiblen Flüssigkeit, dann gibt die andere Schar ( $v = \text{const.}$ ) die *Kurven gleichen Potentials*. Der Strömungsvektor  $v\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)$ , ein Tangentenvektor von  $u = \text{const.}$ , ist quellen- und wirbelfrei:  $\text{div } v = 0$ ,  $\text{rot } v = 0$  an allen regulären Stellen von  $f(z)$ . Die singulären Punkte sind dagegen Quell- oder Wirbelpunkte.

Nullstellen und Singularitäten. Nullstellen sind die Schnittpunkte von  $u = 0$  mit  $v = 0$ .  $n$ -fache Nullstellen von  $f$  sind  $(n - 1)$ -fache der Ableitung  $f'$ . Diese werden dargestellt durch *Sattelpunkte* der Fläche (in denen ein „Paß“ aus einem „Tal“ in ein anderes führt) bzw. als *Kreuzungs- oder Staupunkte* der Flüssigkeitsströmung. Es treffen dort  $n$  Täler bzw. Strömungen aufeinander. Jeweils  $2n$  Kurven jeder Schar (mit demselben Parameter, d. h. derselben Konstante) treffen sich in diesem Punkt unter dem Winkel  $\frac{\pi}{n}$ , der von den Kurven der anderen Schar durch diesen Punkt halbiert wird. Die Abbildung ist dort nicht mehr konform, die beiden Scharen nicht zueinander orthogonal (vgl. dazu Fig. 5, die einen Kreuzungspunkt 1. Ordnung zeigt).

Ein *einfacher Pol* (Unendlichkeitsstelle) ergibt eine unendlich-hohe „Spitze“ unendlich dicht bei einem unendlichtiefen „Loch“, bzw. eine *Doppelquelle* (*Quellsenke*). Dem einfachen Pol entspringen von jeder Schar je ein Bündel Kurven aller Parameterwerte in einer Richtung, die von der entgegengesetzten Richtung wieder einmünden (vgl. hierzu Fig. 21, die Darstellung eines einfachen Poles). *n-fache Pole* ergeben entsprechend *n* Spitzen und *n* Löcher (*n* Quellen und *n* Senken gleicher unendlichgroßer Ergiebigkeit) in unendlich enger, symmetrischer, abwechselnder Anordnung. Ihnen entspringen *n* Kurvenbündel jeder Schar (vgl. hierzu Fig. 7, die Darstellung eines Poles 2. Ordnung).

In der Umgebung einer *regulären* Stelle ist  $f(z)$  beschränkt: die Umgebung eines *Poles* läßt sich für beliebig großes festes  $G > 0$  so einengen, daß dort überall  $|f(z)| > G$  wird. In jeder noch so kleinen Umgebung eines *wesentlich singulären* Punktes kommt  $f(z)$  jedem beliebigen Wert beliebig nahe. Daher kommt man bei Annäherung an eine solche Stelle von verschiedenen Richtungen zu verschiedenen Grenzwerten, z. B. bei  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$  für  $z = 0$ : auf der negativen reellen Achse kommend erhält man  $e^{-\infty} = 0$ , auf der positiven  $e^{+\infty} = \infty$ . Einfache Quellen und Senken im Strömungsbild sind stets wesentlich singuläre Stellen (z. B.  $z = \ln w$  für  $w = 0$ , Fig. 9).

b) Auch die *Darstellung der Umkehrfunktion* gibt Aufschlüsse über die Funktion selbst. *Verzweigungspunkte* stellen sich als Sattelpunkte (vgl. oben) dar; das  $m$  in (III A, 5c,  $\beta$ ) ist gleich der Anzahl der zusammenlaufenden Täler.

c) Eine Übersicht über die Funktionswerte erhält man, wenn man als Standardkurven die *Kurven konstanten Absolutbetrages* und *Argumentes* wählt:  $r(x, y) = |w| = m\alpha$ ,  $\varphi(x, y) = \arctg \frac{v}{u} = n\beta$ ,  $\alpha, \beta$  Konstante,  $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Die beiden Kurvenscharen sind in den Punkten, in denen  $f(z)$  und seine Umkehrfunktion regulär ist, orthogonal. Die erste Schar stellt die Höhenlinien der „*Betragsfläche*“  $r(x, y)$  von  $f(z)$  dar, die andere Schar liefert die Falllinien. Diese gehen von den Polen strahlenförmig aus, um in den Nullpunkten ebenso zusammenzulaufen. Die Höhenlinien umschlingen Pole und Nullstellen als i. a. doppelpunktfreie, in der RIEMANNschen Fläche geschlossene Kurven: die Anzahl der Umschlingungen eines Verzweigungspunktes ist daher gleich der Anzahl der dort zusammenhängenden Blätter.

Die Pole werden durch unendlichhohe Spitzen, die Nullstellen durch trichterförmige Gruben dargestellt; die  $(n - 1)$ -fachen Nullstellen der Ableitung  $f'$  ergeben, wenn  $f(z) \neq 0$  ist, Sattelpunkte mit  $n$  Tälern<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Darstellungsweise in JAHNKE-EMDE, Funktionentafeln, 2. Aufl. z. B. S. 322.

d) Eine Darstellung, welche die Sonderstellung von  $z = \infty$  aufhebt, erhält man durch die *stereographische Projektion* der  $xy$ - bzw.  $uv$ -Ebene auf eine Kugel, welche die Ebene in einem Punkte, z. B. dem Nullpunkte, berührt (RIEMANN). Von dem zum Berührungspunkt diametralen Punkt auf der Kugel zieht man Strahlen, deren Schnittpunkte mit der Kugel und der Ebene dann eine eindeutige Zuordnung aller Punkte der Ebene zu denen der Kugel liefern. Der Punkt  $z = \infty$  entspricht dann dem Projektionszentrum. Die Abbildung ist konform.

Projiziert man ebenso die Kugel auf eine andere berührende Ebene, so wird die dadurch gegebene konforme Abbildung beider Ebenen aufeinander direkt durch gewisse gebrochene lineare Funktionen geliefert.

## B. Spezielle Funktionen.

### 1. Definition der Funktionen.

Die Definition einer speziellen Funktion kann erfolgen

a) durch Angabe gewisser Eigenschaften, z. B. der *Singularitäten* bei sonst regulärem Verhalten (RIEMANN) oder der *inneren Gesetzlichkeit* in Form von *Funktionalgleichungen* (z. B. Periodizitätsforderungen, Differential- oder Integralgleichungen) oder ihrer *Extremaleigenschaften* (Variationsforderung);

b) durch Vorschriften zur Berechnung, zur Konstruktion der Funktionswerte, z. B. mit Hilfe algebraischer Gleichungen, von Differentiationen oder Integrationen oder durch Angabe von Reihenentwicklungen nach schon bekannten Funktionen.

Nicht durch jedes System geforderter Eigenschaften ist eine Funktion definiert: zu a) gehört daher stets noch ein Existenznachweis; in vielen Fällen wird dieser durch Angabe einer konstruktiven Definition b) geführt.

### 2. Klassifikation der Funktionen.

$w = az + b$  heißt *ganze lineare* Funktion.

$w = \frac{az + b}{cz + d}$  heißt *gebroschene lineare* Funktion.

$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$  heißt *ganze rationale* Funktion  $n$ -ten Grades, oder kurz *Polynom*.

$w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}$  heißt *gebroschene rationale* Funktion.

Ist  $w$  Wurzel einer algebraischen Gleichung  $w^n + r_1(x) w^{n-1} + \dots + r_n(x) = 0$ , deren Koeffizienten  $r_k(x)$  ganze rationale Funktionen sind, so heißt  $w$  eine *algebraische* Funktion.

Eine nicht algebraische heißt eine *transzendente Funktion*.

Eine Funktion, die im Endlichen überall regulär ist, deren Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  also für jedes endliche  $z$  (d. h. beständig) konvergiert, heißt *ganz*: ganz rational, ganz algebraisch, ganz transzendent.

Eine Funktion, die im Endlichen nur Pole hat, heißt *meromorph*.

### 3. Algebraische Funktionen.

Hat eine endlich vieldeutige analytische Funktion  $w = f(z)$  nirgends, auch nicht bei  $z = \infty$ , wesentliche Singularitäten, so ist sie eine algebraische Funktion (s. 2.); als Singularitäten kommen nur Pole (ein- und mehrfache) und Verzweigungspunkte vor. Die zugehörige RIEMANNsche Fläche besteht aus  $n$  Blättern, wo  $n$  der Grad der algebraischen Gleichung für  $w$  ist; über jeder Stelle  $z$ , die nicht Verzweigungspunkt ist, liegen genau  $n$  Blätter.

#### a) Rationale Funktionen

(= eindeutige algebraische Funktionen).

**$\alpha$ ) Ganze lineare Funktionen.**  $w = az + b$ ;

*Umkehrfunktion*:  $z = \frac{w-b}{a}$  (ebenfalls ganz linear);

*Abbildung*:  $z$ -Ebene und  $w$ -Ebene werden konform aufeinander abgebildet durch eine Drehstreckung, d. h. eine Verschiebung, Drehung und Maßstabänderung (Ähnlichkeitstransformation).

**$\beta$ ) Gebrochene (allgemeinste) lineare Funktionen.**  $w = \frac{az + b}{cz + d}$ ;

*Umkehrfunktion*:  $z = \frac{-dw + b}{cw - a}$  (ebenfalls linear);

*Singularität*: Einfacher Pol bei  $z = -d/c$ , sonst regulär;

*Nullstelle*:  $z = -b/a$ .

*Abbildung*: Geraden (ebenso Kreise) gehen in Kreise oder Geraden über. Jede umkehrbar eindeutige konforme Abbildung der vollen  $z$ -Ebene (d. h. mit  $z = \infty$ ) auf die volle  $w$ -Ebene wird durch eine lineare Funktion gegeben.

Die lineare Funktion läßt sich, für  $c \neq 0$  zusammensetzen aus:

$cz + d = z'$ ;  $\frac{1}{z'} = z''$ ;  $\frac{bc-ad}{c} z'' + \frac{a}{c} = w$ ; also die entsprechende Ab-

bildung aus Drehstreckungen (s.  $\alpha$ ) und der durch  $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} e^{-i\omega}$  mit  $z = \rho e^{i\omega}$  gegebenen Abbildung nach reziproken Radien (Spiegelung am Einheitskreis).

Vgl. auch das Beispiel  $w = \frac{1}{1-z}$  im Anhang S. 344.

**$\gamma$ ) Ganze rationale Funktion  $n$ -ten Grades und Umkehrung.**

$$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n.$$

Die inverse Funktion ist nicht rational. Wir können schreiben

$$w = a_0 (z - z_1) (z - z_2) \dots (z - z_n).$$

An den Stellen  $z_1, z_2 \dots z_n$  hat die Funktion Nullstellen. Ist  $z_1 = z_2$ , so liegt dort eine zweifache Nullstelle usw. Der unendlich ferne Punkt ist die einzige singuläre Stelle (Pol  $n$ -ter Ordnung).

Die spezielle Funktion

$$w = z^n, \quad z = \sqrt[n]{w}$$

läßt sich besonders leicht veranschaulichen, wenn man die Kurven  $r = \text{constans}$ ,  $\varphi = \text{constans}$ , bzw.  $\rho = \text{constans}$ ,  $\psi = \text{constans}$  zeichnet mit

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \quad w = \rho \cdot e^{i\psi}.$$

Man erhält

$$\rho = r^n, \quad \psi = n\varphi \quad \text{und} \quad r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \varphi = \psi/n.$$

Kreise um den Punkt  $w = 0$  in der  $w$ -Ebene entsprechen Kreisen und Radien in Sektoren vom Öffnungswinkel  $2\pi/n$  in der  $z$ -Ebene. Die  $w$ -Ebene kann daher nicht eindeutig auf die  $z$ -Ebene abgebildet werden, wohl aber eine  $n$ -blättrige RIEMANNSCHE  $w$ -Fläche mit Verzweigungspunkten bei  $w = 0$  und  $w = \infty$ .

Im Falle  $n = 2$  läßt sich die Funktion

$$W = f(Z) = aZ^2 + bZ + c$$

zusammensetzen aus den linearen Transformationen

$$w = W - \left(c + \frac{b^2}{4a}\right), \quad z = \sqrt{a}Z + \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

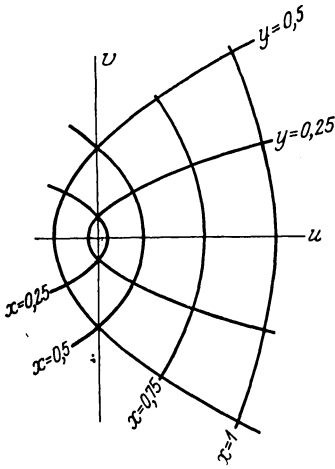


Fig. 4.  $z = \sqrt{w}$ .

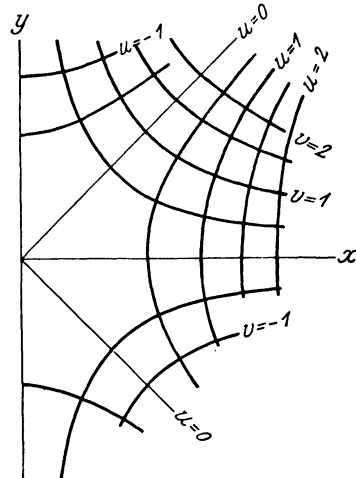


Fig. 5.  $w = z^2$ .



und der speziellen Funktion

$$w = z^2 \quad \text{mit der Umkehrung} \quad z = \sqrt{w}.$$

Die schlichte  $z$ -Ebene wird auf die doppelt überdeckte  $w$ -Ebene abgebildet. Um Eindeutigkeit der inversen Funktion zu erzielen, muß man die  $w$ -Ebene durch zwei RIEMANNSCHE Blätter ersetzen. Bei  $z = 0$  hat die Darstellung in der  $z$ -Ebene einen Sattelpunkt (doppelte Nullstelle).

Es gelten die Formeln:

$$\begin{aligned} +u + \sqrt{u^2 + v^2} &= 2x^2 & x^2 - y^2 &= u \\ -u + \sqrt{u^2 + v^2} &= 2y^2 & 2xy &= v. \end{aligned}$$

Die Kurven  $x = \text{constans}$ ,  $y = \text{constans}$  in der  $w$ -Ebene sind daher eine Schar konfokaler Parabeln mit  $w = 0$  als Brennpunkt (Fig. 4). Die Kurven  $u = \text{constans}$ ,  $v = \text{constans}$  sind eine Schar gleichseitiger Hyperbeln in der Halbebene  $x > 0$  (Fig. 5).

d) **Gebrochene rationale Funktionen und Umkehrung.** Auch hier gehört die Umkehrung nicht dem gleichen Typ an. Wir betrachten den Fall

$$w = \frac{1}{z^2} \quad \text{mit der Umkehrung} \quad z = \frac{1}{\sqrt{w}}.$$

Es gelten die Gleichungen

$$\begin{cases} \frac{1}{u^2 + v^2} (+u + \sqrt{u^2 + v^2}) = 2x^2 \\ \frac{1}{u^2 + v^2} (-u + \sqrt{u^2 + v^2}) = 2y^2 \\ \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = u \\ \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = v \end{cases}$$

und die Kurvenbilder Fig. 6 und 7. Die Stelle  $z = 0$  ist ein Pol zweiter Ordnung; es treten dort zwei Kurvenbündel der Schar  $u = \text{constans}$  und zwei der Schar  $v = \text{constans}$  aus.

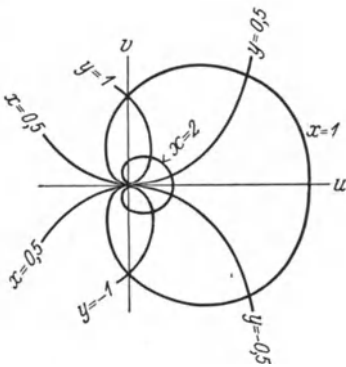


Fig. 6.  $z = \frac{1}{\sqrt{w}}$ .

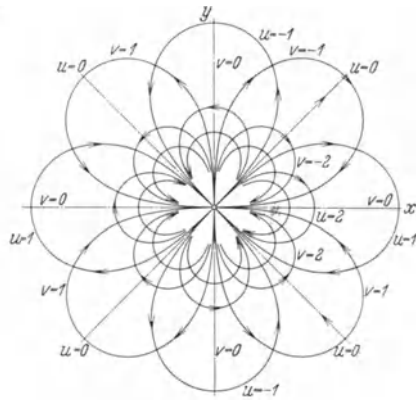


Fig. 7.  $w = \frac{1}{z^2}$ .

**b) Nichtrationale algebraische Funktionen.**

Wir betrachten den speziellen Fall

$$w = \sqrt{1 - z^2} \text{ mit der inversen Funktion } z = \sqrt{1 - w^2}.$$

Es gelten die Gleichungen:

$$\begin{cases} u^2 v^2 + x^2 (v^2 - u^2) = x^4 - x^2 \\ u^2 v^2 - y^2 (v^2 - u^2) = y^4 - y^2 \\ x^2 y^2 + u^2 (y^2 - x^2) = u^4 - u^2 \\ x^2 y^2 - v^2 (y^2 - x^2) = v^4 - v^2. \end{cases}$$

Die Fig. 8 zeigt die  $z$ -Ebene; in der  $w$ -Ebene ergibt sich bei diesem Beispiel genau das gleiche Bild. Zu jedem Wert von  $z$  gehören zwei Werte von  $w$ . Die Stellen  $z = +1$  und  $z = -1$  sind Verzweigungspunkte.  $z = \infty$  ( $w = \infty$ ) ist ein einfacher Pol.

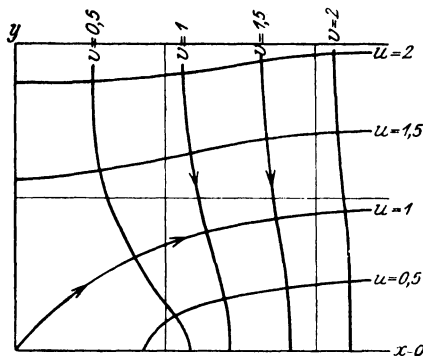


Fig. 8.  $w = \sqrt{1 - z^2}$ .

**4. Elementare transzendente Funktionen.**

Ganze Transzendente sind z. B.  $w = e^z$  und  $w = \sin z$ ; meromorph ist z. B.  $w = \operatorname{tg} z$ .

**a) Exponentialfunktion und Logarithmus.** (Potenzreihen s. S. 31.)

$$w = e^z = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{a}\right)^a, \quad \text{Umkehrung: } z = \ln w.$$

$$\begin{aligned} \ln \sqrt{u^2 + v^2} &= x, & \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v}{u} &= y \\ e^x \cos y &= u, & e^x \sin y &= v. \end{aligned}$$

$w = e^z$  ist *periodisch*:  $e^z = e^{z \pm 2\pi i}$ . Ein Streifen der Breite  $y_1 - y_2 = 2\pi$  der  $z$ -Ebene wird bereits auf die ganze  $w$ -Ebene abgebildet.

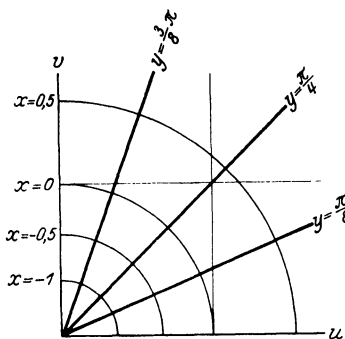


Fig. 9.  $z = \ln w$ .

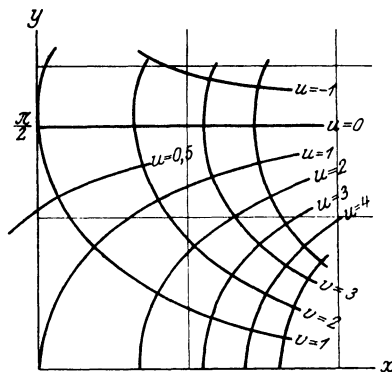


Fig. 10.  $w = e^z$ .

In der  $w$ -Ebene sind die Linien  $x = \text{constans}$  Kreise,  $y = \text{constans}$  Radien (Fig. 9). In der  $z$ -Ebene (Fig. 10) erhält man in jedem Periodenstreifen  $-\pi \leq y \leq +\pi$  die gleichen Kurven  $u = \text{constans}$ ,  $v = \text{constans}$ .  
*Einige wichtige Formeln ( $n$  ganzzahlig):*

$$\ln(x + iy) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + (\text{arc tg } \frac{y}{x} + 2\pi n) i.$$

Insbesondere:

$$\ln(ix) = \ln x + \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i.$$

$$\ln(-x) = \ln x + (2n + 1)\pi i.$$

Ferner:

$$a^{ix} = e^{i x \ln a} = \cos(x \ln a) + i \sin(x \ln a).$$

$$x^i = e^{i \ln x} = \cos(\ln x) + i \sin(\ln x).$$

$$i^x = e^{x \ln i} = \cos \frac{\pi x}{2} + i \sin \frac{\pi x}{2}.$$

Insbesondere:

$$e^{2n\pi i} = 1, \quad e^{(2n+1)\pi i} = -1, \quad \sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i), \quad i^i = e^{-\pi/2}.$$

### b) Trigonometrische Funktionen (Kreisfunktionen).

Wir betrachten die ganze Transzendent

$$w = \sin z \quad \text{und ihre Umkehrung} \quad z = \text{arc sin } w.$$

Es bestehen die reellen Gleichungen

$$\frac{u^2}{\sin^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x} = 1 \quad \sin x \text{ Cos } y = u$$

$$\frac{u^2}{\text{Cos}^2 y} + \frac{v^2}{\text{Sin}^2 y} = 1 \quad \cos x \text{ Sin } y = v.$$

In der  $w$ -Ebene erhalten wir ein System von Ellipsen und Hyperbeln mit dem gemeinsamen Mittelpunkt  $w = 0$  (Fig. 11); in der  $z$ -Ebene

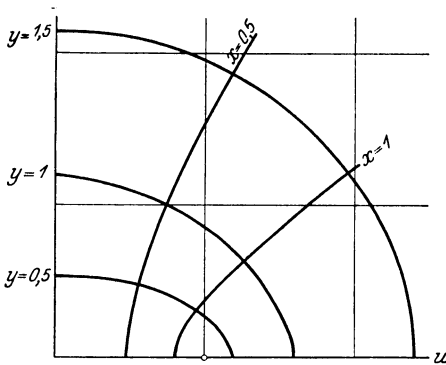


Fig. 11.  $z = \text{arc sin } w$ .

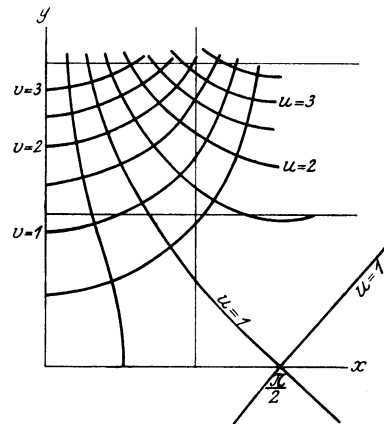


Fig. 12.  $w = \sin z$ .

haben wir in jedem Periodenstreifen  $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$  die gleichen Kurven (Fig. 12). Verzweigungspunkte sind die Stellen  $w = +1$  und  $w = -1$  bzw.  $z = \frac{\pi}{2} \pm n\pi$  (Potenzreihenentwicklung s. S. 32).

### c) Hyperbolische Funktionen.

$$w = \operatorname{Cof} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \text{Umkehrung} \quad z = \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} w.$$

Ferner:

$$w = \operatorname{Sin} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \text{Umkehrung} \quad z = \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} w.$$

$$\operatorname{Tg} z = \frac{\operatorname{Sin} z}{\operatorname{Cof} z}, \quad \operatorname{Ctg} z = \frac{\operatorname{Cof} z}{\operatorname{Sin} z}.$$

Für die Funktion  $w = \operatorname{Sin} z$  gelten die um  $90^\circ$  gedrehten Figuren 11 und 12 (Potenzreihenentwicklung s. S. 32).

### d) Wichtige Formeln für Kreis- und Hyperbelfunktionen.

#### 1. Beziehungen zur $e$ -Funktion:

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} & \operatorname{Cof} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} & \operatorname{Sin} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ e^{ix} &= \cos x + i \sin x & e^x &= \operatorname{Cof} x + \operatorname{Sin} x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x & e^{-x} &= \operatorname{Cof} x - \operatorname{Sin} x. \end{aligned}$$

#### 2. Beziehungen zwischen Kreis- und Hyperbelfunktionen:

$$\begin{aligned} \cos x &= \operatorname{Cof} ix & \operatorname{Cof} x &= \cos ix \\ \sin x &= -i \operatorname{Sin} ix & \operatorname{Sin} x &= -i \sin ix \\ \operatorname{tg} x &= -i \operatorname{Tg} ix & \operatorname{Tg} x &= -i \operatorname{tg} ix \\ \operatorname{ctg} x &= i \operatorname{Ctg} ix & \operatorname{Ctg} x &= i \operatorname{ctg} ix. \end{aligned}$$

#### 3. Beziehungen zwischen den inversen Funktionen:

$$\begin{aligned} \operatorname{arc} \cos x &= -i \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} x & \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} x &= i \operatorname{arc} \cos x \\ \operatorname{arc} \sin x &= -i \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} ix & \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x &= -i \operatorname{arc} \sin x \\ \operatorname{arc} \operatorname{tg} x &= -i \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} ix & \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x &= -i \operatorname{arc} \operatorname{tg} ix \\ \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x &= i \operatorname{Ar} \operatorname{Ctg} ix & \operatorname{Ar} \operatorname{Ctg} x &= i \operatorname{arc} \operatorname{ctg} ix. \end{aligned}$$

#### 4. Beziehungen der inversen Funktionen zum Logarithmus:

$$\begin{aligned} \operatorname{arccos} x &= -i \ln(x + i\sqrt{1-x^2}) & \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} x &= \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \\ \operatorname{arcsin} x &= -i \ln(ix + \sqrt{1-x^2}) & \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \\ \operatorname{arctg} x &= \frac{i}{2} \ln \frac{1+ix}{1-ix} & \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \\ \operatorname{arcctg} x &= \frac{i}{2} \ln \frac{ix-1}{ix+1} & \operatorname{Ar} \operatorname{Ctg} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}. \end{aligned}$$

## 5a. Beziehungen der Kreisfunktionen untereinander:

$$\begin{aligned} \cos x &= \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}} \\ \sqrt{1 - \cos^2 x} &= \sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}} \\ \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x} &= \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \\ \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} &= \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x. \end{aligned}$$

## 5b. Beziehungen der Hyperbelfunktionen untereinander:

$$\begin{aligned} \operatorname{Cof} x &= \sqrt{1 + \operatorname{Sin}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{Tg}^2 x}} = \frac{\operatorname{Ctg} x}{\sqrt{\operatorname{Ctg}^2 x - 1}} \\ \sqrt{\operatorname{Cof}^2 x - 1} &= \operatorname{Sin} x = \frac{\operatorname{Tg} x}{\sqrt{1 - \operatorname{Tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Ctg}^2 x - 1}} \\ \frac{\sqrt{\operatorname{Cof}^2 x - 1}}{\operatorname{Cof} x} &= \frac{\operatorname{Sin} x}{\sqrt{1 + \operatorname{Sin}^2 x}} = \operatorname{Tg} x = \frac{1}{\operatorname{Ctg} x} \\ \frac{\operatorname{Cof} x}{\sqrt{\operatorname{Cof}^2 x - 1}} &= \frac{\sqrt{1 + \operatorname{Sin}^2 x}}{\operatorname{Sin} x} = \frac{1}{\operatorname{Tg} x} = \operatorname{Ctg} x. \end{aligned}$$

## 6. Additionstheorem:

$$\begin{aligned} \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y & \operatorname{Cof}(x \pm y) &= \operatorname{Cof} x \operatorname{Cof} y \pm \operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} y \\ \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y & \operatorname{Sin}(x \pm y) &= \operatorname{Sin} x \operatorname{Cof} y \pm \operatorname{Cof} x \operatorname{Sin} y \\ \operatorname{tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} & \operatorname{Tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{Tg} x \pm \operatorname{Tg} y}{1 \pm \operatorname{Tg} x \operatorname{Tg} y} \\ \operatorname{ctg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x} & \operatorname{Ctg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{Ctg} x \operatorname{Ctg} y \pm 1}{\operatorname{Ctg} y \pm \operatorname{Ctg} x}. \end{aligned}$$

## 7. Funktionen des doppelten Arguments:

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x & \operatorname{Cof} 2x &= \operatorname{Cof}^2 x + \operatorname{Sin}^2 x \\ \sin 2x &= 2 \cos x \sin x & \operatorname{Sin} 2x &= 2 \operatorname{Cof} x \operatorname{Sin} x \\ \operatorname{tg} 2x &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} & \operatorname{Tg} 2x &= \frac{2 \operatorname{Tg} x}{1 + \operatorname{Tg}^2 x} \\ \operatorname{ctg} 2x &= \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x} & \operatorname{Ctg} 2x &= \frac{\operatorname{Ctg}^2 x + 1}{2 \operatorname{Ctg} x}. \end{aligned}$$

## 8. Funktionen des dreifachen Arguments:

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos x (1 - 4 \sin^2 x) & \operatorname{Cof} 3x &= \operatorname{Cof} x (1 + 4 \operatorname{Sin}^2 x) \\ \sin 3x &= \sin x (4 \cos^2 x - 1) & \operatorname{Sin} 3x &= \operatorname{Sin} x (4 \operatorname{Cof}^2 x - 1) \\ \operatorname{tg} 3x &= \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} & \operatorname{Tg} 3x &= \frac{3 \operatorname{Tg} x + \operatorname{Tg}^3 x}{1 + 3 \operatorname{Tg}^2 x} \\ \operatorname{ctg} 3x &= \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 3 \operatorname{ctg} x}{3 \operatorname{ctg}^2 x - 1} & \operatorname{Ctg} 3x &= \frac{\operatorname{Ctg}^3 x + 3 \operatorname{Ctg} x}{3 \operatorname{Ctg}^2 x + 1}. \end{aligned}$$

9. Funktionen des  $n$ -fachen Arguments:

$$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2} \sin^2 x \cos^{n-2} x + \binom{n}{4} \sin^4 x \cos^{n-4} x - \dots$$

$$\sin nx = n \sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \sin^3 x \cos^{n-3} x + \binom{n}{5} \sin^5 x \cos^{n-5} x - \dots$$

$$\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n.$$

## 10. Potenzen der Funktionen:

Wenn  $n$  ungerade:

$$\begin{aligned} \sin^n x = \left(\frac{1}{2i}\right)^{n-1} & \left[ \sin nx - \binom{n}{1} \sin(n-2)x + \binom{n}{2} \sin(n-4)x - \right. \\ & \left. - \binom{n}{3} \sin(n-6)x + \dots (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \sin x \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^n x = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \left[ \cos nx + \binom{n}{1} \cos(n-2)x + \binom{n}{2} \cos(n-4)x + \dots \right. \\ & \left. + \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \cos x \right] \end{aligned}$$

wenn  $n$  gerade:

$$\begin{aligned} \sin^n x = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} & \left[ \cos nx - \binom{n}{1} \cos(n-2)x + \binom{n}{2} \cos(n-4)x - \dots \right. \\ & \left. + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{\frac{n-2}{2}} \cos 2x \right] + \binom{n}{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^n x = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \left[ \cos nx + \binom{n}{1} \cos(n-2)x + \binom{n}{2} \cos(n-4)x + \dots \right. \\ & \left. + \binom{n}{\frac{n-2}{2}} \cos 2x \right] + \binom{n}{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

## 11. Funktionen des halben Arguments:

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\text{Cof} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\text{Cof} x + 1}{2}}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\text{Sin} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\text{Cof} x - 1}{2}}$$

$$\text{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$\text{Dg} \frac{x}{2} = \frac{\text{Sin} x}{\text{Cof} x + 1} = \frac{\text{Cof} x - 1}{\text{Sin} x}$$

$$\text{ctg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$$

$$\text{Ctg} \frac{x}{2} = \frac{\text{Sin} x}{\text{Cof} x - 1} = \frac{\text{Cof} x + 1}{\text{Sin} x}.$$

## 12. Summe und Differenz der Funktionen:

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} & \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} & \cos x - \cos y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\ \sin x \pm \sin y &= 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2} & \sin x \pm \sin y &= 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2} \\ \operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y &= \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y} & \operatorname{Tg} x \pm \operatorname{Tg} y &= \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y} \\ \operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y &= \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y} & \operatorname{Ctg} x \pm \operatorname{Ctg} y &= \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y} \end{aligned}$$

## 13. Produktauflösung:

$$\begin{aligned} 2 \cos nx \cos mx &= \cos(n-m)x + \cos(n+m)x & 2 \cos nx \cos mx &= \cos(n+m)x + \cos(n-m)x \\ 2 \sin nx \sin mx &= \cos(n-m)x - \cos(n+m)x & 2 \sin nx \sin mx &= \cos(n+m)x - \cos(n-m)x \\ 2 \sin nx \cos mx &= \sin(n-m)x + \sin(n+m)x & 2 \sin nx \cos mx &= \sin(n+m)x + \sin(n-m)x \end{aligned}$$

## 14. Summe und Differenz der inversen Funktionen:

$$\begin{aligned} \arccos x \pm \arccos y &= \arccos(x \mp \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}) & \operatorname{Ar} \cos x \pm \operatorname{Ar} \cos y &= \operatorname{Ar} \cos(x \mp \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}) \\ &= \arcsin(y \sqrt{1-x^2} \pm x \sqrt{1-y^2}) & &= \operatorname{Ar} \sin(y \sqrt{1-x^2} \pm x \sqrt{1-y^2}) \\ \arcsin x \pm \arcsin y &= \arcsin(x \sqrt{1-y^2} \pm y \sqrt{1-x^2}) & \operatorname{Ar} \sin x \pm \operatorname{Ar} \sin y &= \operatorname{Ar} \sin(x \sqrt{1-y^2} \pm y \sqrt{1-x^2}) \\ &= \arccos(\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} \mp xy) & &= \operatorname{Ar} \cos(\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} \mp xy) \\ \operatorname{arctg} x \pm \operatorname{arctg} y &= \operatorname{arctg} \frac{x \pm y}{1 \mp xy} & \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x \pm \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} y &= \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{x \pm y}{1 \mp xy} \end{aligned}$$

## 5. Systeme orthogonaler Polynome.

Orthogonalisiert man das System der Funktionen  $\sqrt{\varrho(x)}$ ,  $x \cdot \sqrt{\varrho(x)}$ ,  $x^2 \cdot \sqrt{\varrho(x)}$ , ... im Intervall  $a \leq x \leq b$  (vgl. II B 2c, S. 24), so erhält man eine Folge orthogonaler Funktionen  $\sqrt{\varrho(x)} \cdot F_n(x)$ ; dabei ist  $F_n(x)$  ein Polynom (ganzrationale Funktion)  $n$ -ten Grades, das genau  $n$  verschiedene Nullstellen im Intervall  $a \leq x \leq b$  hat und durch Angabe einer Normierung, etwa von

$$N_n = \int_a^b \varrho(t) [F_n(t)]^2 dt$$

(bis auf das Vorzeichen), festgelegt wird. So ergeben sich die

a) LEGENDRESCHEN Polynome  $P_n(x)$  (vgl. S. 60)

für  $\varrho(x) = 1$ , in  $-1 \leq x \leq +1$ , mit  $N_n = \frac{2}{2n+1}$  (vgl. IIIB 6a 10, S. 61).

b) Die TSCHEBYSCHEFFSCHEN Polynome<sup>1</sup>  $T_n(x)$ ,  $U_n(x)$

ergeben sich:

1. Durch Orthogonalisierung (s. o.) mit  $N_n = \frac{\pi}{2}$ , in  $-1 \leq x \leq +1$ ,  $T_n(x)$  für  $\varrho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $Q_n(x) = \frac{U_{n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$  für  $\varrho(x) = \sqrt{1-x^2}$ .

Oft wird auch  $2^{-n+1} T_n(x)$  bzw.  $2^{-n+1} U_n(x)$  mit  $T_n(x)$  bzw.  $U_n(x)$  bezeichnet.  $U_n(x)$  ist *kein* Polynom von  $x$ . Man setzt noch:

$$T_{-n}(x) = T_n(x); \quad U_{-n}(x) = -U_n(x).$$

Entwicklung nach TSCHEBYSCHEFFSCHEN Polynomen s. IIB4h, S. 31. Alle  $n$  Nullstellen liegen in  $-1 \leq x \leq +1$ .

2. Dasjenige Polynom  $n$ -ten Grades ( $n$  fest) mit dem höchsten Koeffizienten 1:  $p_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ , für welches der Maximalbetrag von  $p_n(x)$  in  $-1 \leq x \leq +1$  am kleinsten wird, welches dort die beste absolute Approximation der Null (vgl. IIB 1 b 2, S. 22) liefert, ist

$$p_n(x) = 2^{-n+1} T_n(x).$$

$$3. T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \frac{1}{2} [(x + i \sqrt{1-x^2})^n + (x - i \sqrt{1-x^2})^n]$$

$$U_n(x) = \sin(n \arccos x) = \frac{1}{2i} [(x + i \sqrt{1-x^2})^n - (x - i \sqrt{1-x^2})^n].$$

Durch die Substitution  $x = \cos \vartheta$  gehen  $T_n(x)$  bzw.  $U_n(x)$  in  $\cos n \vartheta$  bzw.  $\sin n \vartheta$  über;  $z = T_n(x)$  bzw.  $z = U_n(x)$  ergibt sich daher durch Projektion der auf den Mantel des Zylinders über dem Einheitskreis  $r^2 = x^2 + y^2 = 1$  gezeichneten Kurven  $z = \cos n \vartheta$  bzw.  $z = \sin n \vartheta$ ,  $0 \leq \vartheta \leq \pi$  auf die Ebene  $x = r \cos \vartheta = 0$ . Ferner gilt für  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\begin{aligned} \cos(2n \arcsin x) &= \cos [(2n+1) \arcsin x] = \\ &= (-1)^n T_{2n}(x); & &= (-1)^n U_{2n+1}(x) \\ \sin(2n \arcsin x) &= \sin [(2n+1) \arcsin x] = \\ &= (-1)^{n+1} U_{2n}(x); & &= (-1)^n T_{2n+1}(x). \end{aligned}$$

4. Durch die Potenzreihe nach  $t$  der erzeugenden Funktion

$$\frac{1-tx}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad |t| < 1. \quad (1)$$

<sup>1</sup> S. auch VAN DER POL u. WEIJERS in Physica I (1934) S. 78.



Entsprechend für  $U_n(x) = \sqrt{1-x^2} Q_{n-1}(x)$

$$\frac{1}{1-2tz+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad |t| < 1. \quad (2)$$

$$5. T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} (1-x^2) \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}.$$

6. *Explizite Darstellung:*

Es treten *nur positive* Potenzen von  $x$  auf.

$$T_n(x) = 2^{n-1} \left( x^n - \frac{n}{1!2^2} x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2!2^4} x^{n-4} - \frac{n(n-3)(n-5)}{3!2^6} x^{n-6} + \dots \right)$$

$$Q_n(x) = \frac{U_{n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} = 2^n \left( x^n - \frac{n-1}{1!2^2} x^{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{2!2^4} x^{n-4} - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{3!2^6} x^{n-6} + \dots \right).$$

Speziell ist:

$$\begin{array}{ll} T_0(x) = 1, & T_1(x) = x, & U_0(x) = 0, & U_1(x) = \sqrt{1-x^2} \\ T_2(x) = 2x^2 - 1 & & U_2(x) = 2x\sqrt{1-x^2} \\ T_3(x) = 4x^3 - 3x & & U_3(x) = (4x^2 - 1)\sqrt{1-x^2} \\ T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 & & U_4(x) = (8x^3 - 4x)\sqrt{1-x^2} \\ T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, & & U_5(x) = (16x^4 - 12x^2 + 1)\sqrt{1-x^2}. \end{array}$$

Die folgenden Definitionen (und 3 für  $\lambda$  statt  $n$ ) definieren für jedes  $\lambda$  die TSCHEBYSCHESCHEN Funktionen  $T_\lambda(x)$  und  $U_\lambda(x)$ .

7.  $T_\lambda(x)$  und  $U_\lambda(x)$  sind zwei Grundlösungen der TSCHEBYSCHESCHEN Differentialgleichung

$$(1-x^2)y'' - xy' + \lambda^2 y = 0, \quad (3)$$

d. h. jede Lösung von (3) wird durch  $y = A \cdot T_\lambda(x) + B \cdot U_\lambda(x)$  gegeben, wo  $A$  und  $B$  willkürliche Konstanten sind. Es gilt ferner:

$$T'_\lambda(x) \cdot \sqrt{1-x^2} = \lambda U_\lambda(x); \quad U'_\lambda(x) \cdot \sqrt{1-x^2} = -T_\lambda(x).$$

8. Wenn  $C$  eine einfach geschlossene Kurve ist, welche die Punkte  $t = z + \sqrt{1-z^2}$  und  $t = z - \sqrt{1-z^2}$  ein-,  $t = 0$  aber ausschließt, so gilt:

$$T_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(1-tz)t^{-\lambda-1} dt}{1-2tz+t^2};$$

für  $\lambda = 0, 1, \dots$  ergibt sich das nach (7) (S. 37) aus (1), für  $U_\lambda(z)$  analog aus (2), ebenso allgemein gültig.

**Rekursionsformel** (für  $U_\lambda(x)$  dieselbe):

$$T_{\lambda+1}(x) - 2xT_\lambda(x) + T_{\lambda-1}(x) = 0.$$

**Spezielle Werte:**  $T_n(1) = T_n(-1) = 1$ ;  $U_n(1) = U_n(-1) = 0$ ;

$$\begin{array}{l} T_{4k+l}(0) = \text{bzw. } 1; 0; -1; 0 \\ U_{4k+l}(0) = \text{bzw. } 0; 1; 0; -1 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} T_{4k+l}(0) \\ U_{4k+l}(0) \end{array}} \right\} \text{ für } l = 0, 1, 2, 3.$$

c) Die JACOBISCHEN oder hypergeometrischen Polynome  $J_n(p, q; x)$ .

1. Sie ergeben sich durch Orthogonalisierung (s. o.) mit  $\varrho(x) = x^{q-1}(1-x)^{p-q}$ ,  $q > 0$ ,  $p-q > -1$ , in  $0 \leq x \leq 1$ , für  $J_n(p, q; 0) = 1$ .

Alle  $n$  Nullstellen sind verschieden und liegen in  $0 \leq x \leq 1$ . Für  $p=q=1$  bzw.  $p=0, q=\frac{1}{2}$  erhält man die LEGENDRESCHEN Polynome:

$$P_n(x) = J_n\left(1; 1; \frac{1-x}{2}\right)$$

bzw. die TSCHEBYSCHESCHEN Polynome:

$$T_n(x) = J_n\left(0, \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right).$$

2.  $y = J_n(p, q; x)$  ist, von konstanten Faktoren abgesehen, das Polynom  $n$ -ten Grades unter den Lösungen der Differentialgleichung:

$$x(1-x)y'' + (q - (p+1)x)y' + n(p+n)y = 0 \quad q > 0, p-q > -1. \quad (4)$$

(4) ist ein Spezialfall der GAUSSSCHEN hypergeometrischen Differentialgleichung (vgl. S. 184); die  $J_n$  sind gerade die abbrechenden unter den hypergeometrischen Reihen, d. h. sie werden

3. **explizite** gegeben durch

$$\begin{aligned} J_n(p, q; x) &= F(-n, p+n, q; x) = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(p+n)(p+n+1)\dots(p+n+k-1)}{q(q+1)\dots(q+k-1)} x^k. \end{aligned}$$

Speziell ist:

$$J_0(p, q; x) = 1;$$

$$J_1(p, q; x) = 1 - \frac{p+1}{q}x;$$

$$J_2(p, q; x) = 1 - 2\frac{p+2}{q}x + \frac{(p+2)(p+3)}{q(q+1)}x^2.$$

4. Es gilt:

$$J_n(p, q; x) = \frac{x^{1-q}(1-x)^{q-p}}{q(q+1)\dots(q+n-1)} \frac{d^n}{dx^n} (x^{q-1+n}(1-x)^{p-q+n}).$$

d) Die LAGUERRESCHEN Polynome  $L_n(x)$

ergeben sich:

1. Durch Orthogonalisierung (s. o.) mit  $\varrho(x) = e^{-x}$  in  $0 \leq x < \infty$ ,  $N_n = (n!)^2$ . Sämtliche Nullstellen sind positiv.

**Entwicklung** nach LAGUERRESCHEN Polynomen s. II B4f, S. 31.

2. Sie werden **explizit gegeben** durch

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n! (n-1)! \dots (k+1)!}{(n-k)!} x^k.$$

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1; & L_1(x) &= 1 - x; & L_2(x) &= 2 - 4x + x^2; \\ L_3(x) &= 6 - 18x + 9x^2 - x^3; & L_4(x) &= 24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4; \\ L_5(x) &= 120 - 600x + 600x^2 - 200x^3 + 25x^4 - x^5. \end{aligned}$$

$$3. \quad L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

4. Die Potenzreihe der *erzeugenden Funktion* lautet:

$$\frac{e^{-xt}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} t^n \quad t < 1.$$

5.  $L_n(x)$  ist, bis auf einen konstanten Faktor, die bei  $x=0$  endliche und für  $x \rightarrow \infty$  wie  $x^n$  wachsende Lösung der *LAGUERRESchen Differentialgleichung*

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0. \quad (5)$$

Die durch (5) für beliebiges nichtganzes  $n$  definierten *LAGUERRESchen Funktionen* werden durch die

6. Integraldarstellung gegeben:

$$L_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{-tz} (1+t)^\lambda t^{-\lambda-1} dt,$$

wo  $C$  von  $+\infty$  kommt und einmal positiv um  $t=0$  zurück nach  $+\infty$  läuft (auf der *RIEMANNschen Fläche* des Integranden).

**Rekursionsformel:**

$$L_{\lambda+1}(x) - (2\lambda+1-x)L_\lambda(x) + \lambda^2 L_{\lambda-1}(x) = 0.$$

Verallgemeinerte *LAGUERRESche* Polynome  $L_n^{(k)}(x)$  sind die Polynomlösungen der Differentialgleichung

$$xy'' + (k+1-x)y' + (n-k)y = 0 \quad k > -1,$$

die man auch durch Orthogonalisierung mit  $\varrho(x) = e^{-x} x^k$  erhält; für  $k=1, 2, \dots$  gilt  $L_n^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} L_n(x)$ ; für  $k = \frac{1}{2}$  und  $k = -\frac{1}{2}$  gilt folgende Beziehung zu den *HERMITESchen Polynomen*:

$$H_2(x) = C_n L_n^{(-\frac{1}{2})}(x^2); \quad H_{2n+1}(x) = C'_n L_n^{(\frac{1}{2})}(x^2). \quad (C_n, C'_n \text{ Konstante}).$$

**e) Die HERMITESCHEN Polynome  $H_n(x)$**

ergeben sich:

1. Durch Orthogonalisierung (s. o.) mit  $\varrho(x) = e^{-x^2}$  in  $-\infty < x < +\infty$  für  $N_n = 2^n n!$ ;  $H_n(x)$  hat  $n$  verschiedene reelle Nullstellen.

Entwicklung nach HERMITESCHEN Polynomen s. II B4g, S. 31.

2. Explizite Darstellung:

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k n!}{k! (n-2k)!} (2x)^{n-2k} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  bedeutet dabei die größte ganze Zahl  $\leq \frac{n}{2}$ .

Speziell ist:

$$H_0(x) = 1; \quad H_1(x) = 2x; \quad H_2(x) = 4x^2 - 2; \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x;$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12; \quad H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x.$$

3. Durch die Potenzreihe nach  $t$  der erzeugenden Funktion:

$$e^{-t^2 + 2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (\text{für alle } t).$$

$$4. \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

5. Bis auf einen konstanten Faktor als die Lösungen der HERMITESCHEN Differentialgleichung

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \tag{6}$$

welche für  $x \rightarrow +\infty$  und  $x \rightarrow -\infty$  nur wie  $x^n$  unendlich werden. Die durch (6) auch für nichtganze  $n = \lambda$  definierten HERMITESCHEN Funktionen gestatten die

6. Integraldarstellung:

$$H_\lambda(z) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{2\pi i} \int_C e^{-t^2 + 2tz} \cdot t^{-\lambda-1} dt;$$

$C$  kommt von  $t = +\infty$ , umläuft  $t = 0$  einmal positiv und geht nach  $t = +\infty$  zurück (in der RIEMANNschen Fläche des Integranden).

Rekursionsformel:

$$H_{\lambda+1} - 2xH_\lambda + 2\lambda H_{\lambda-1} = 0.$$

Differentialrekursion:

$$H'_\lambda(x) = 2\lambda H_{\lambda-1}(x).$$

## 6. Kugelfunktionen<sup>1</sup>.

### a) LEGENDRESche oder „einfache“ Kugelfunktionen.

**Allgemeine Definitionen.** Die LEGENDRESchen Kugelfunktionen  $P_n(\mu)$  sind ganze rationale Funktionen einer Variablen  $\mu$  und eines ganzzahligen positiven<sup>2</sup> Parameters  $n$ , der Ordnung der Kugelfunktion. Man setzt auch  $\mu = \cos \vartheta$  und betrachtet  $P_n(\cos \vartheta)$  als Funktion des Winkels  $\vartheta$ .

**Definitionen:**

1.  $P_n(\cos \vartheta)$  sind die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\vartheta+r^2}} \begin{cases} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cdot P_n(\cos\vartheta) & \text{für } |r| < 1 \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos\vartheta) & \text{für } |r| > 1 \end{cases} \quad (1)$$

2. Setzt man  $\mu = \cos \vartheta = \frac{z}{r}$ ,  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , so ist

$$P_n(\cos \vartheta) = \frac{(-1)^n}{n!} r^{n+1} \cdot \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left( \frac{1}{r} \right). \quad (2)$$

3. Eine homogene ganzrationale Funktion  $n$ -ten Grades  $H_n(r, z)$  von  $r$  und  $z = r \cos \vartheta$ , die der Bedingung  $\Delta H_n(r, z) = 0$  genügt, definiert<sup>3</sup>

$$P_n(\cos \vartheta) = \frac{C}{r^n} \cdot H_n(r, z) \quad (3)$$

bis auf eine Konstante  $C$  (vgl. auch  $c$ , 2).

$$4. \quad P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n [\mu^2 - 1]^n}{d\mu^n}. \quad (4)$$

$$5. \quad P_n(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\mu \pm \cos \varphi \sqrt{\mu^2 - 1})^n d\varphi$$

(LAPLACE). (5)

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(\mu \pm \cos \varphi \sqrt{\mu^2 - 1})^{n+1}}$$

Dabei ist  $+$  oder  $-$  beliebig!

$$6. \quad P_n(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(z^2 - 1)^n dz}{2^n (z - \mu)^{n+1}} \quad (\text{SCHLAEFLI}). \quad (6)$$

Der Weg  $C$  geht positiv um  $\mu$  herum.

<sup>1</sup> Wegen numerischer Tabellen und weiterer Formeln vgl. z. B. JAHNKE und EMDE: Funktionentafeln, 2. Aufl. S. 173. Vgl. auch BETHE: Handbuch der Physik, 2. Aufl. Bd. 24/1 S. 551 f.

<sup>2</sup> Für negatives  $n$  s. S. 64.

<sup>3</sup> Auch  $H'_n = \frac{1}{r^{n+1}} \cdot P_n(\cos \vartheta)$  erfüllt die Gleichung  $\Delta H'_n = 0$ .

7.  $P_n(\cos \vartheta)$  ist ein Spezialfall der allgemeinen Kugelfunktionen  $Y_n(\varphi, \vartheta)$  (s. S. 64).

Transformiert man  $\Delta V = 0$  auf Polarkoordinaten  $r, \varphi, \vartheta$  (vgl. S. 145), setzt die Reihe  $V = \sum_n r^n Y_n(\varphi, \vartheta)$  ein und sucht speziell solche Lösungen  $Y_n$ , welche von  $\varphi$  unabhängig sind und nur von  $\mu = \cos \vartheta$  abhängen, so gelangt man zu der

8. Differentialgleichung:

$$n(n+1)y + \frac{d}{d\mu} \left( (1-\mu^2) \frac{dy}{d\mu} \right) = 0 \quad (7)$$

(LEGENDRESche Differentialgleichung).

Ihre allgemeine Lösung lautet:

$$y = AP_n(\mu) + BQ_n(\mu), \quad (8)$$

wo  $A$  und  $B$  willkürliche Konstanten sind [Bedeutung von  $Q_n(\mu)$ , s. S. 63].

$$\begin{aligned} 9. P_n(\mu) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-2k-1)}{2^k k! (n-2k)!} \mu^{n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-2k-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2^{n-1} k! (n-k)!} \cos(n-2k)\vartheta. \end{aligned} \quad (9)$$

$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  bedeutet die größte ganze Zahl  $\leq \frac{n}{2}$ ,  $\cos(0 \cdot \vartheta)$  ist durch  $\frac{1}{2}$  zu ersetzen.

10.  $P_n(\mu)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  ergibt sich auch bei der Orthogonalisierung von  $1, x, x^2, \dots$  im Intervall  $-1 \leq x \leq +1$  (vgl. II B2c, S. 24, Normierung S. 29).

Die Definitionen 1, 2, 4, 5, 6, 9 sind eindeutig, 3, 8 und 10 lassen eine Konstante unbestimmt. 8 gestattet noch eine zweite Lösung, die *Kugelfunktion 2. Art*  $Q_n(\mu)$ .

Es ist üblich, die Konstanten so zu wählen, daß  $P_n(1) = 1$  wird.

**Rekursionsformel:**

$$P_{n+1} = \mu P_n + \frac{n}{n+1} (\mu P_n - P_{n-1}). \quad (10)$$

**Differentialformel:**

Schreiben wir  $\frac{dP_n(\mu)}{d\mu} = P'_n$ , so gilt

$$P'_n = \frac{n(\mu P_n - P_{n-1})}{\mu^2 - 1} = (n+1) \frac{(P_{n+1} - \mu P_n)}{\mu^2 - 1}. \quad (11)$$

$$P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n+1) P_n$$

$$\mu P'_n - P'_{n-1} = n P_n.$$

**Spezielle Formeln:**

$$P_0(\mu) = 1$$

$$P_1(\mu) = \cos \vartheta = \mu$$

$$P_2(\mu) = \frac{1}{4} (3 \cos 2\vartheta + 1) = \frac{1}{2} (3\mu^2 - 1)$$

$$P_3(\mu) = \frac{1}{8} (5 \cos 3\vartheta + 3 \cos \vartheta) = \frac{1}{2} (5\mu^3 - 3\mu)$$

$$P_4(\mu) = \frac{1}{64} (35 \cos 4\vartheta + 20 \cos 2\vartheta + 9) = \frac{1}{8} (35\mu^4 - 30\mu^2 + 3)$$

$$P_5(\mu) = \frac{1}{128} (63 \cos 5\vartheta + 35 \cos 3\vartheta + 30 \cos \vartheta) \\ = \frac{1}{8} (63\mu^5 - 70\mu^3 + 15\mu)$$

$$P_6(\mu) = \frac{1}{512} (231 \cos 6\vartheta + 126 \cos 4\vartheta + 105 \cos 2\vartheta + 50) \\ = \frac{1}{16} (231\mu^6 - 315\mu^4 + 105\mu^2 - 5)$$

$$P_7(\mu) = \frac{1}{1024} (429 \cos 7\vartheta + 231 \cos 5\vartheta + 189 \cos 3\vartheta + 175 \cos \vartheta) \\ = \frac{1}{16} (429\mu^7 - 693\mu^5 + 315\mu^3 - 35\mu)$$

$$P_8(\mu) = \frac{1}{16384} (6435 \cos 8\vartheta + 3432 \cos 6\vartheta + 2772 \cos 4\vartheta \\ + 2520 \cos 2\vartheta + 1225) \\ = \frac{1}{128} (6435\mu^8 - 12012\mu^6 + 6930\mu^4 - 1260\mu^2 + 35).$$

**Spezielle Werte:**

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}, \quad P_{2n+1}(0) = 0, \quad P_n(1) = 1.$$

**Negatives Argument:**

$$P_n(-\mu) = (-1)^n P_n(\mu).$$

**Allgemeiner Verlauf der Kugelfunktionen im Bereich  $1 > \mu > -1$ :**

Die LEGENDRESCHEN Kugelfunktionen sind oszillierend und ihr Betrag (außer für  $\mu = \pm 1$ ) kleiner als 1.

$P_n(\mu)$  hat  $n$  reelle, voneinander verschiedene Nullpunkte zwischen  $-1$  und  $+1$  (Fig. 13).

Für gerade  $n$  sind die  $P_n(\mu)$  gerade, für ungerade  $n$  ungerade Funktionen von  $\mu$ .

**Integralsätze für Kugelfunktionen:**

(Orthogonalität der Kugelfunktionen.) Es ist

$$\int_{-1}^{+1} P_m(\mu) \cdot P_n(\mu) d\mu = 0 \quad \text{für } m \neq n \quad \int_{-1}^{+1} P_n^2(\mu) d\mu = \frac{2}{2n+1}. \quad (12)$$

Entwicklung nach Kugelfunktionen s. II B 4 d  $\alpha$ , S. 29.

Asymptotische Darstellung<sup>1</sup> für große Werte von  $n$ :

$$P_n(\cos \vartheta) = \rightarrow \sqrt{\frac{2}{n \pi \sin \vartheta}} \cdot \sin \left\{ \left( n + \frac{1}{2} \right) \vartheta + \frac{\pi}{4} \right\}. \quad (13)$$

Vorausgesetzt:  $n \gg 1$ ,  $\varepsilon < \vartheta < \pi - \varepsilon$ ,  
 $0 < \varepsilon \ll \frac{\pi}{6}$ .

**b) Kugelfunktionen zweiter Art**  
 $Q_n(x)$ .

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (LEGENDRESche Differentialgleichung, vgl. S. 184)

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left. \begin{array}{l} \\ + n(n+1)y = 0 \end{array} \right\} \quad (14)$$

lautet:  $y = A P_n(x) + B Q_n(x)$ .

Setzt man  $y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$ , so fordert obige Gleichung die folgende Relation zwischen den  $A_i$

$$A_{i+2} = \frac{(i-n)(n+i+1)}{(i+1)(i+2)} A_i. \quad (15)$$

Es bleiben also zwei  $A_i$ , z. B.  $A_0$  und  $A_1$  unbestimmt.

Es wird:

$$\left. \begin{array}{l} y = A_0 \left( 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 - \frac{n(2-n)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 - \dots \right) \\ + A_1 x \left( 1 + \frac{(1-n)(n+2)}{3!} x^2 + \frac{(1-n)(3-n)(n+2)(n+4)}{5!} x^4 + \dots \right) \end{array} \right\} \quad (16)$$

$$= A_0 p_n(x) + A_1 q_n(x).$$

Für geradzahliges  $n$  ist dann das endliche Polynom  $p_n$ , für ungerades  $n$  das endliche Polynom  $q_n$  (bis auf einen Faktor) identisch mit den LEGENDRESchen Kugelfunktionen  $P_n$ . Dieser Faktor ist durch die übliche Normierung  $P_n(1) = 1$  bestimmt, so daß

$$\left. \begin{array}{l} P_n = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1 \cdot 3 \dots n-1}{2 \cdot 4 \dots n} p_n \quad \text{für gerade } n \\ P_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 \cdot 3 \dots n}{2 \cdot 4 \dots n-1} q_n \quad \text{für ungerade } n \end{array} \right\} \quad (17)$$

<sup>1</sup>  $f(n) = \rightarrow g(n)$  (asymptotisch gleich) bedeutet  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$ .

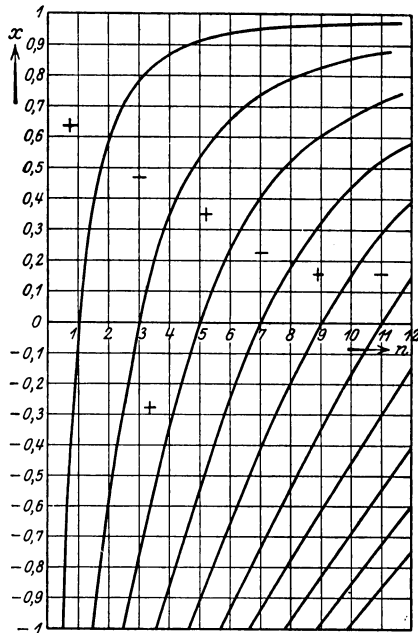


Fig. 13. Kurven:  $P_n(x) = 0$ .



wird. Für gerades  $n$  heißen dann die  $q_n$ , für ungerades  $n$  die  $p_n$  Kugelfunktionen 2. Art  $Q_n$ . Normierung:

$$\left. \begin{aligned} Q_n &= (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \dots n}{1 \cdot 3 \dots n-1} q_n \quad \text{für gerade } n \\ Q_n &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \dots n-1}{1 \cdot 3 \dots n} p_n \quad \text{für ungerade } n \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Gelegentlich werden auch andere Normierungen benutzt.

Nach dieser Definition bricht die Reihe für  $P_n(x)$  mit dem  $n$ -ten Gliede ab.  $Q_n(x)$  ist durch eine unendliche Reihe dargestellt.

Hieraus ist  $P_n(x)$  auch für  $x > 1$  definiert, während dann die Reihe  $Q_n(x)$  divergent wird. Hier konvergiert die Entwicklung:

$$\left. \begin{aligned} Q_n(x) &= \frac{n!}{1 \cdot 3 \dots (2n+1)} x \left( \frac{1}{x^{n+1}} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} \frac{1}{x^{n+3}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} \frac{1}{x^{n+5}} + \dots \right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Es ist für  $x^2 < 1$

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right),$$

$$Q_1(x) = -1 + \frac{x}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right).$$

Es ist für  $x^2 > 1$

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right),$$

$$Q_1(x) = 1 - \frac{x}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right).$$

Weitere  $Q_n$  folgen aus der Rekursionsformel:

$$(n+1) Q_{n+1} = (2n+1) x Q_n - n Q_{n-1}.$$

**Spezielle Werte:**

$$Q_n(1) = \infty, \quad Q_n(-1) = -\infty, \quad Q_n(\infty) = 0,$$

$$\text{für gerades } n: Q_n(0) = 0.$$

**Negativer Parameter  $n$ .**

Wegen  $p_{-n} = p_{n+1}$ ,  $q_{-n} = q_{n-1}$  folgt:

$$P_{-(n+1)} = Q_n. \quad (20)$$

Die Kugelfunktionen 2. Art können daher auch als solche 1. Art mit negativem Parameter  $n$  aufgefaßt werden.

### c) Allgemeine Kugelfunktionen.

Die allgemeinen Kugelfunktionen  $Y_n(\varphi, \vartheta)$  sind Funktionen zweier Variablen  $\varphi$  und  $\vartheta$  (Polarkoordinaten) und eines Parameters  $n$ . Außerdem enthalten sie  $2n+1$  willkürliche Konstanten.

**Definitionen** der allgemeinen Kugelfunktionen:

1. Man setzt

$$\cos \vartheta = \frac{z}{r}, \quad \cos \varphi \sin \vartheta = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi \sin \vartheta = \frac{y}{r}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Dann ist

$$Y_n(\varphi, \vartheta) = C \cdot r^{n+1} \frac{\partial^n \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}. \quad (21)$$

Hierbei ist  $\alpha + \beta + \gamma = n$ . Durch verschiedene Wahl der  $\alpha, \beta, \gamma$  sind  $2n + 1$  verschiedene Funktionen  $Y_n$ , die voneinander linear unabhängig sind, definiert.

2. Bildet man eine homogene Funktion  $n$ -ten Grades von  $x, y, z$ ,  $H_n(x, y, z)$ , die die Bedingung

$$\Delta H_n = 0$$

erfüllt, so ist

$$Y_n(\varphi, \vartheta) = \frac{1}{r^n} H_n(x, y, z)$$

bis auf  $2n + 1$  Konstanten definiert<sup>1</sup>.

3. Es ist

$$\begin{aligned} Y_n(\varphi, \vartheta) &= \sum_{m=0}^n (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) \sin^m \vartheta \frac{d^m P_n(\cos \vartheta)}{d(\cos \vartheta)^m}. \quad (22) \\ &= \sum_{m=0}^n (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta), \quad [\text{vgl. (24)}]. \end{aligned}$$

Die  $A_m$  und  $B_m$  sind  $2n + 1$  willkürliche Konstanten. Die Funktionen  $\cos m\varphi P_n^m(\cos \vartheta)$  und  $\sin m\varphi P_n^m(\cos \vartheta)$  heißen „symmetrische Kugelfunktionen“.

4. Die  $Y_n(\varphi, \vartheta)$  sind Lösungen der Differentialgleichung:

$$n(n+1) Y_n + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial Y_n}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (23)$$

Ist  $\frac{\partial Y_n}{\partial \varphi} = 0$ , so wird  $Y_n = C \cdot P_n(\cos \vartheta)$ .

Bedeutung von  $Y_n$ :

Aus 1. folgt, daß  $Y_n(\varphi, \vartheta)$  das Potential auf der Kugel  $r = 1$  darstellt, wenn im Zentrum  $r = 0$  ein System von Dipolen liegt. Die LEGENDRESCHEN Kugelfunktionen erhält man, wenn deren Achsen alle parallel zur  $z$ -Achse liegen.

**Entwicklung** nach symmetrischen und allgemeinen Kugelfunktionen s. II B 4 d  $\gamma, \delta$ , S. 30.

<sup>1</sup> Außer  $r^n Y_n$  erfüllt auch  $\frac{Y_n}{r^{n+1}}$  die Differentialgleichung  $\Delta H_n = 0$ .

**d) Zugeordnete Kugelfunktionen**

heißen die Funktionen (mit  $\cos \vartheta = \mu$ )

$$P_n^m(\cos \vartheta) = \sin^m \vartheta \frac{d^m P_n(\cos \vartheta)}{d(\cos \vartheta)^m} = \frac{\sin^m \vartheta}{2^n (n)!} \frac{d^{n+m}(\mu^2 - 1)^n}{d\mu^{n+m}}. \quad (24)$$

Es gilt auch

$$P_n^m(\mu) = \frac{(n+m)!}{n!} \frac{i^m}{\pi} \int_0^\pi (\mu + \cos \varphi) (\mu^2 - 1)^n \cos m \varphi d\varphi. \quad (25)$$

**Differentialgleichung:**

$$\left( n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right) y + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{dy}{d\vartheta} \right) = 0. \quad (26)$$

HELMHOLTZ führte die Funktionen

$$P_{nm} = \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m} \quad (27)$$

ein; sie genügen der Differentialgleichung:

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 y}{d\mu^2} - 2(m+1)\mu \frac{dy}{d\mu} + (n(n+1) - m(m+1))y = 0. \quad (28)$$

**Entwicklung** nach zugeordneten Kugelfunktionen s. II B4d $\beta$ , S. 30.

**e) Integralsätze.**

1. Zwei beliebige Kugelfunktionen  $Y_n(\varphi, \vartheta)$  und  $Y_m(\varphi, \vartheta)$  sind zueinander *orthogonal*

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_n Y_m \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0 \quad \text{für } m \neq n. \quad (29)$$

Sind  $\vartheta$  und  $\varphi$  Polarkoordinaten, so bedeutet  $\sin \vartheta d\vartheta d\varphi = d\sigma$  das Oberflächenelement der Kugel vom Radius  $r = 1$ ; die Integration in (29) ist dann über die ganze Kugel erstreckt.

2. Wird  $m = n$  und bedeutet  $\gamma$  den Winkel des Radius nach  $(\vartheta, \varphi)$  gegen den festen Radius  $(\vartheta', \varphi')$ , d. h. ist

$$\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi'),$$

so gilt

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_n P_n(\cos \gamma) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\vartheta', \varphi'). \quad (30)$$

**7. Zylinderfunktionen<sup>1</sup>.**

Die Zylinderfunktionen sind Funktionen einer Variablen  $x$  und eines Parameters  $p$ , der beliebige (reelle) Werte annehmen kann. Für negatives  $x$  ist die Funktion nur bei ganzzahligem  $p$  definiert.

<sup>1</sup> Wegen weiterer Formeln, Tabellen und Literaturangaben vgl. JAHNKE u. EMDE: Funktionentafeln, 2. Aufl. S. 192f.

Die Zylinderfunktionen sind gewisse Lösungen der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (\text{BESSELSche Differentialgleichung}). \quad (1)$$

Die allgemeine Lösung heiße<sup>1</sup>:

$$y = Z_p(x).$$

Die Funktion  $u = Z_p(r) \cdot e^{i p \varphi}$  genügt der Differentialgleichung  $\Delta u + u = 0$ , wo  $\varphi$  das Azimut um die  $z$ -Achse,  $r$  den Abstand von der  $z$ -Achse bedeutet, und  $u$  nicht von  $z$  abhängt.

### a) Zylinderfunktionen erster Art $I_p(x)$ (BESSELSche Funktionen).

Diese sind definiert:

1. Als Spezialfall von  $Z_p(x)$  aus den Randbedingungen, daß

$$I_p(0) \text{ endlich für } p \geq 0 \text{ und } I_p(x) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \infty.$$

Speziell ist

$$I_0(0) = 1.$$

2. Bei ganzzahligem  $p$  als Grenzfall der zugeordneten Kugelfunktionen  $P_n^m$  (vgl. S. 30) für  $n \rightarrow \infty$ , nämlich

$$I_p(x) = (-1)^p \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^p \left( \cos \frac{x}{n} \right). \quad (2)$$

3. Bei ganzzahligem  $p$  durch das Integral

$$I_p(x) = \frac{(-1)^p}{\pi} \int_0^\pi e^{i x \cos \varphi} \cos p \varphi d\varphi. \quad (3)$$

Daraus folgt für gerades  $p$

$$I_{2n} = \frac{(-1)^n}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos \varphi) \cos 2n \varphi d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \varphi) \cos 2n \varphi d\varphi, \quad (3a)$$

für ungerades  $p$

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \frac{(-1)^n}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \cos \varphi) \cos(2n+1) \varphi d\varphi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x \sin \varphi) \sin(2n+1) \varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (3b)$$

<sup>1</sup> Die allgemeinere Gleichung:  $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{a}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + \left(b^2 - \frac{c^2}{x^2}\right) y = 0$  hat die Lösung:  $y = x^\alpha Z_p(bx)$ , wo  $\alpha = \frac{1-a}{2}$  und  $p^2 = \alpha^2 + c^2$ .

4.  $I_p(x) \cdot 2 \cdot i^p = c_p$  ist der Koeffizient der FOURIER-Entwicklung

$$e^{ix \cos \omega} = \frac{1}{2} c_0 + c_1 \cos \omega + c_2 \cos 2\omega + \dots + c_p \cos p\omega + \dots \quad (4)$$

und wird demnach dargestellt durch die Potenzreihe

$$\begin{aligned} 5. I_p(x) &= \frac{x^p}{p! 2^p} \left( 1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2p+2)(2p+4)} - \dots \right) \quad (4a) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{p+2k}}{2^{p+2k} \cdot k! (p+k)!}. \end{aligned}$$

Für nicht ganzes  $p$  ist in dieser Summenformel  $\Gamma(p+k)$  statt  $(p+k)!$  einzusetzen (vgl. S. 73).

Entwicklung nach Zylinderfunktionen  $I_p(x)$ : s. II B4e, S. 30.

### b) Zylinderfunktionen zweiter Art.

Als Zylinderfunktionen zweiter Art werden verschiedene Funktionen gebraucht.

$$N_p(x) = -\frac{2}{\pi} K_p(x) = \frac{I_p(x) \cos p\pi - I_{-p}(x)}{\sin p\pi}, \quad (5)$$

$$H_p^{(1)}(x) = I_p(x) + iN(x) = \frac{i}{\sin p\pi} (e^{-p\pi i} I_p(x) - I_{-p}(x)), \quad (6)$$

$$H_p^{(2)}(x) = I_p(x) - iN_p(x) = \frac{-i}{\sin p\pi} (e^{p\pi i} I_p(x) - I_{-p}(x)). \quad (7)$$

Die  $N_p(x)$  heißen „NEUMANNsche“, die  $H_p^{(1)}(x)$  und  $H_p^{(2)}(x)$  „HANKELsche Zylinderfunktionen“. Ihr Aufbau

$$H^{(1)} = I + iN, \quad H^{(2)} = I - iN \text{ ist analog } e^{ix} = \cos x + i \sin x, \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Diese Definitionen versagen für ganzzahliges  $p$ . Durch Grenzübergang findet man hier die Entwicklung:

$$N_p(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ I_p(x) \left( \ln \frac{x}{2} - \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} \right) + C \right) - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{p+2k}{k(p+k)} I_{p+2k} - \frac{1}{2} p! \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{p-k} \left( \frac{2}{x} \right)^{p-k} \frac{I_k}{k!} \right\} \quad (8)$$

$C = 0,57722 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$  heißt EULERSche Konstante.

### c) Die allgemeine Lösung der BESSELSchen Differentialgleichung.

Für die allgemeine Lösung der BESSELSchen Differentialgleichung sind zwei voneinander linear unabhängige Zylinderfunktionen zu verwenden.

Hierfür eignen sich:

a) Für reelles  $x$

1.  $I_p(x)$  und  $I_{-p}(x)$  außer für ganzzahliges  $p$ , da  $I_p(x)$  und  $I_{-p}(x)$  in diesem Falle bis auf das Vorzeichen identisch werden.

2.  $I_p(x)$  und  $N_p(x)$ .

b) Für rein imaginäres  $x$

$I_p(x)$  und  $H_p^{(1)}(x)$  oder  $H_p^{(2)}(x)$ .

#### d) Allgemeine Beziehungen.

Für alle bisher genannten Zylinderfunktionen  $Z_p$  gelten folgende Beziehungen:

##### 1. Algebraische Rekursionsformel:

$$Z_{p-1} + Z_{p+1} = \frac{2p}{x} Z_p. \quad (9)$$

Hieraus folgt speziell:

$$\begin{aligned} Z_2 &= \frac{2}{x} Z_1 - Z_0, & Z_{-1} &= -Z_1, \\ Z_3 &= -\frac{4}{x} Z_0 - \left(1 - \frac{8}{x^2}\right) Z_1 \text{ usw.} & Z_{-2} &= \frac{2}{x} Z_1 - Z_0 \text{ usw.} \end{aligned}$$

und allgemein für ganzzahliges  $p$ :

$$Z_{-p} = (-1)^p Z_p. \quad (9a)$$

Aus  $Z_0$  und  $Z_1$  sind daher alle  $Z_p$  für ganzzahliges  $p$  ableitbar.

##### 2. Differentialformeln zur Rekursion:

$$\frac{dZ_p}{dx} = -\frac{p}{x} Z_p + Z_{p-1}. \quad (10)$$

Hieraus folgt speziell:

$$\begin{aligned} \frac{dZ_0(x)}{dx} &= -Z_1(x), \\ \frac{dZ_1(x)}{dx} &= -\frac{1}{x} Z_1 + Z_0 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Man leitet aus (10) die Rekursionsformeln her.

$$\begin{aligned} Z_{p+1} &= \frac{p}{x} Z_p - \frac{dZ_p}{dx} \\ Z_{p-1} &= \frac{p}{x} Z_p + \frac{dZ_p}{dx}. \end{aligned}$$

##### 3. Integralformeln:

$$\int x^{p+1} Z_p(x) dx = x^{p+1} Z_{p+1}(x). \quad (11a)$$

Speziell ist:

$$\begin{aligned} \int x Z_0(x) dx &= x Z_1 \text{ usw.} \\ \int x^{-p+1} Z_p(x) dx &= -x^{-p+1} Z_{p-1}(x). \end{aligned} \quad (11b)$$

Orthogonalität der BESSELSchen Funktionen:

Wenn  $I_p(\alpha_m) = I_p(\alpha_n) = 0$  ist, wird

$$\int_0^1 I_p(\alpha_m x) I_p(\alpha_n x) x dx = 0, \text{ für } \alpha_m \neq \alpha_n \text{ und}$$

$$\int_0^1 [I_p(\alpha_m x)]^2 x dx = \frac{1}{2} [I'_p(\alpha_m)]^2.$$

**e) Negativer Parameter.**

$$I_{-p} = I_p \cdot \cos p\pi - N_p \cdot \sin p\pi. \quad (12)$$

Es wird also:

$$I_{-p} = (-1)^p I_p, \quad N_{-p} = (-1)^p N_p \text{ für ganzzahliges } p.$$

$$I_{-p} = -N_p \sin((n + \frac{1}{2})\pi) = N_p \cdot (-1)^{n+1} = N_p (-1)^{p+\frac{1}{2}} \text{ für } p = n + \frac{1}{2}.$$

**Negativ reelles Argument:**

Ist  $p$  ganzzahlig, so wird

$$I_p(-x) = (-1)^p I_p(x). \quad (13)$$

Ist  $p = n + \frac{1}{2}$ , so wird

$$I_p(-x) = \pm i I_p(x) \text{ (mit unbestimmtem Vorzeichen)}. \quad (14)$$

Für beliebiges  $p$  wird  $I_p(-x)$  vieldeutig wegen des Faktors  $x^p$ .

**f) Zylinderfunktionen mit halbzahligen Parameter.**

1. Es sei  $p = n + \frac{1}{2}$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Dann lassen sich die Funktionen elementar ausdrücken:

$$I_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (A_{n+\frac{1}{2}}(x) \cos x + B_{n+\frac{1}{2}}(x) \sin x),$$

wobei die Rekursionsformeln gelten:

$$A_{n+\frac{1}{2}}(x) = \frac{n}{x} A_{n-\frac{1}{2}} - \frac{d}{dx} A_{n-\frac{1}{2}} - B_{n-\frac{1}{2}}$$

$$B_{n+\frac{1}{2}}(x) = \frac{n}{x} B_{n-\frac{1}{2}} - \frac{d}{dx} B_{n-\frac{1}{2}} + A_{n-\frac{1}{2}}.$$

Speziell ist für

$$\begin{array}{lll} n = 0 & A_{\frac{1}{2}} = 0 & B_{\frac{1}{2}} = 1 \\ n = 1 & A_{\frac{3}{2}} = -1 & B_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{x} \\ n = 2 & A_{\frac{5}{2}} = -\frac{3}{x} & B_{\frac{5}{2}} = \frac{3}{x^2} - 1 \text{ usw.} \end{array}$$

2. Für  $p = -(n + \frac{1}{2})$  erhält man

$$I_{-(n+\frac{1}{2})}(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (B_{n+\frac{1}{2}}(x) \cos x - A_{n+\frac{1}{2}}(x) \sin x)$$

$$N_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n+1} I_{-(n+\frac{1}{2})}(x)$$

$$N_{-(n+\frac{1}{2})}(x) = (-1)^n I_{n+\frac{1}{2}}(x).$$

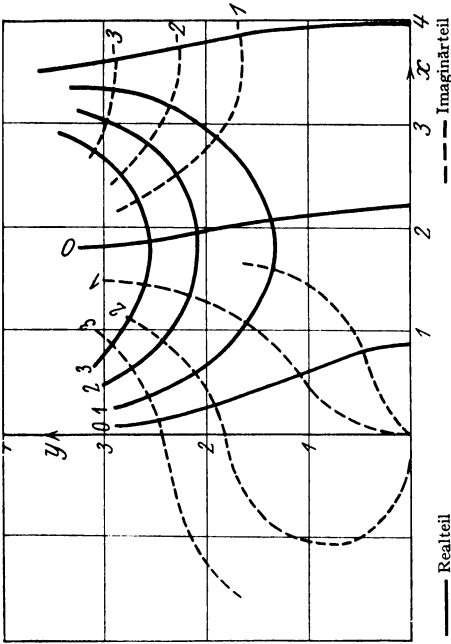


Fig. 15.  $N_0(x+iy)$ .

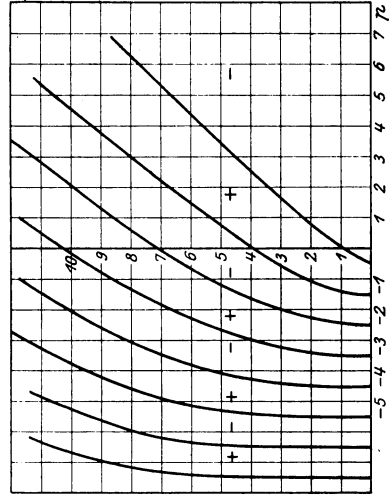


Fig. 17.  $N_P(x) = 0$ .

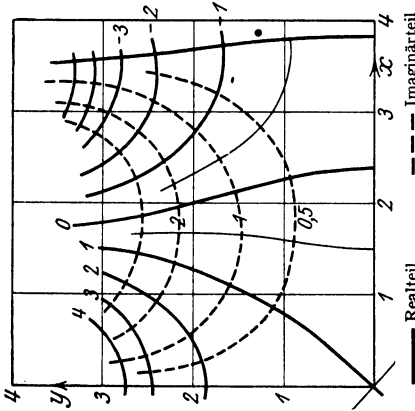


Fig. 14.  $I_0(x+iy)$ .

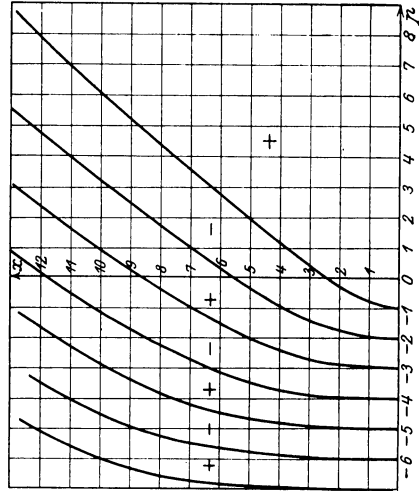


Fig. 16. Kurven:  $I_P(x) = 0$ .

$$\begin{aligned}
 3. \quad H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (A_{n+\frac{1}{2}}(x) - i B_{n+\frac{1}{2}}(x)) e^{ix} \\
 H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (A_{n+\frac{1}{2}}(x) + i B_{n+\frac{1}{2}}(x)) e^{-ix} \\
 H_{-(n+\frac{1}{2})}^{(1)}(x) &= i (-1)^n H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) \\
 H_{-(n+\frac{1}{2})}^{(2)}(x) &= -i (-1)^n H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x).
 \end{aligned}$$



g) Grenzwerte für kleines  $x$ .

## 1. Reelles Argument.

$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ :

- a)  $I_0(x) = 1$ ,  $I_p(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p}{\Gamma(p)}$ , wenn  $p > 0$   
 $I_1(x) = \frac{x}{2}$   
 $I_2(x) = \frac{x^2}{8}$   $I_p(0) \begin{cases} = 0, & \text{wenn } p < 0 \text{ und ganzzahlig} \\ = \infty, & \text{wenn } p < 0 \text{ und nicht ganzzahlig.} \end{cases}$
- b)  $N_0(x) = -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x}$ , wo  $\gamma = e^C = 1,7811\dots$  ist (vgl. 8, 3, S. 73)  
 $N_1(x) = -\frac{2}{\pi x}$ .

## 2. Imaginäres Argument.

- a)  $I_0(ix) = 1$   $I_1(ix) = \frac{ix}{2}$ .
- b)  $N_0(ix) = -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x} + i$   $N_1(ix) = -\frac{x}{2} + i \frac{2}{\pi x}$ .

h) Asymptotische Werte<sup>1, 2</sup> für  $x \gg 1$  und zugleich  $x \gg p$ .

$$H_p^{(1)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot e^{ix} i^{-(p+\frac{1}{2})} \quad (15a)$$

$$H_p^{(2)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot e^{-ix} i^{+(p+\frac{1}{2})}, \quad (15b)$$

daraus wegen  $2I_p = H_p^{(1)} + H_p^{(2)}$ :

$$I_p(x) \rightarrow \pm \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ für gerades } p$$

$$\rightarrow \pm \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ für ungerades } p.$$

## Analogie zu den Exponentialfunktionen:

1.  $I_p(x)$  entspricht  $\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ .

Es ist periodisch für großes  $x$  mit der Periode  $2\pi$ .

2.  $H_p^{(1)}(ix)$  entspricht  $e^{-x}$ .

Es ist monoton abfallend, asymptotisch gleich Null.

3.  $H_p^{(2)}(ix)$  entspricht  $e^x$ .

Es ist monoton nach  $\infty$  ansteigend.

<sup>1</sup> Vgl. Anm. S. 63.

<sup>2</sup> Wegen genauerer Abschätzung vgl. z. B. JAHNKE u. EMDE: Funktionentafeln, 2. Aufl. S. 203.

### 8. Gammafunktion.

Das Produkt  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$  heißt  $n$  Fakultät, es gilt

$$n! = n(n-1)!$$

Einer Funktion  $\Pi(x)$ , die  $n!$  auch für nicht ganzes positives  $x$  interpolieren soll, schreibt man daher vor:

$$\Pi(x) = x \Pi(x-1) \text{ und } \Pi(1) = 1.$$

Die „glatteste“ unter allen möglichen solchen Funktionen  $\Pi(x)$  ist die GAUSSSCHE Funktion  $\Pi(x)$ :

$$\Pi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n^x}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}; \quad (1)$$

sie ist die einzige, deren Logarithmus  $y = \ln \Pi(x)$  für alle  $x > -1$  positive Krümmung hat, also keinen Wendepunkt besitzt; es ist  $\Pi \Pi'' > \Pi'^2$  für alle  $x > -1$ . Man setzt gewöhnlich  $\Gamma(x) = \Pi(x-1)$ .

$\Gamma(x)$  ist eine in der ganzen Ebene analytische meromorphe Funktion, die bei  $x = 0, -1, \dots$  Pole erster Ordnung mit dem Residuum  $\frac{(-1)^n}{n!}$  für  $x = -n$  besitzt;  $x = \infty$  ist wesentlich singular;  $\frac{1}{\Gamma(x)}$  ist ganztranszendent.

#### Definitionen:

1. Der GAUSSSCHE Grenzwert

$$\Gamma(z) = \Pi(z-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot n^{z-1}}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)}$$

existiert für alle komplexen  $z \neq 0, -1, -2, \dots$

2. Ist der Realteil von  $z$ ,  $\Re z > 0$ , so gilt:

$$\Gamma(z) = \Pi(z-1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\text{EULERSCHES Integral}).$$

3. Versteht man unter  $C = 0,577215665\dots$  die EULERSCHE KONSTANTE ( $e^C = 1,781\dots$ ), so gilt die Produktdarstellung:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{Cz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \quad (2)$$

für alle komplexen  $z$ .

#### Funktionalgleichungen:

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z); \quad \Pi(z+1) = (z+1) \cdot \Pi(z) \quad (3)$$

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} = \Pi(-z) \cdot \Pi(z-1); \quad (4)$$

$$\Gamma\left(\frac{z}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{z+1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \Gamma\left(\frac{z+n-1}{n}\right) n^{z-\frac{1}{2}} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \Gamma(z); \quad (5)$$

$$\text{speziell } n=2: \quad \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) 2^{z-1} = \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(z). \quad (6)$$

Ist daher  $\Gamma(z)$  in einem reellen Intervall (bzw. einem vertikalen Parallelstreifen) der Breite 1 bzw.  $\frac{1}{2}$ , etwa in  $1 \leq z \leq 2$  bzw.  $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$  gegeben, so läßt es sich aus (3) bzw. (3) und (4) für alle Werte berechnen.

#### Spezielle Werte:

$$\Gamma(1) = \Pi(0) = 0! = 1; \quad \Gamma(2) = \Pi(1) = 1;$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \Pi\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}; \quad \frac{1}{\Gamma(0)} = \frac{1}{\Gamma(-n)} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2) \cdot \dots \cdot x \cdot \Gamma(x).$$

#### Logarithmische Ableitung:

$$\Psi(z) = \frac{d}{dz} (\ln \Pi(z)) = \frac{\Pi'(z)}{\Pi(z)};$$

$$\Psi(z) = -C + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{z+k} \right); \quad C = \text{EULERSche Konst.}$$

$$\Psi(n) = -C + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

#### Asymptotische Formeln:

$$\ln \Gamma(x) \Rightarrow \ln \Pi(x) \Rightarrow x \cdot \ln x \quad \text{für } x \gg 1 \quad (\Rightarrow \text{s. Fußnote S. 63}),$$

$$\ln \Pi(z) = \ln \Gamma(z+1) = \left(z + \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \ln \sqrt{2\pi} + \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \dots$$

$$+ \sum_{k=3}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k-1) 2^k \cdot z^{2k-1}} + r_n(z), \quad (B_{2k} \text{ s. S. 2})$$

$$|r_n(z)| < \frac{|B_{2n+2} \cdot z^{-2n-1}|}{(2k+1)(2k+2) \left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)^{2n+2}} \quad \text{für } z = r e^{i\varphi}, \quad \varphi \neq \pm \pi.$$

#### STIRLINGSche Formel ( $x$ reell):

$$\Pi(x) = x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} (1 + r(x)) \quad \text{mit} \quad 0 < r(x) < \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2}.$$

## 9. Elliptische Integrale und Funktionen.

### a) Elliptische Integrale.

Über die Reduktion des allgemeinen elliptischen Integrals vgl. S. 14 (Abschn. Int.-R.).

*LEGENDRESche Normalform:* Das allgemeine elliptische Integral läßt sich reduzieren auf die drei Normalintegrale ( $0 < k^2 < 1$ ,  $x = \sin \varphi$ )

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = F(k, \varphi), \quad (1)$$

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2 t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} d\psi = E(k, \varphi), \quad (2)$$

$$\int_0^x \frac{dt}{(t^2 - a^2) \sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}. \quad (3)$$

Sie heißen *unvollständige* elliptische Integrale 1., 2. und 3. Gattung. Das Integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = K(k) \quad (4)$$

heißt *vollständiges* elliptisches Integral 1. Gattung. Die Funktionen  $E, F, K$  sind tabuliert. In Fig. 18 sind  $F(k, \varphi)$  und  $E(k, \varphi)$  als Funktionen von  $\varphi$  für verschiedene Werte des Parameters  $k = \sin \vartheta$  dargestellt.

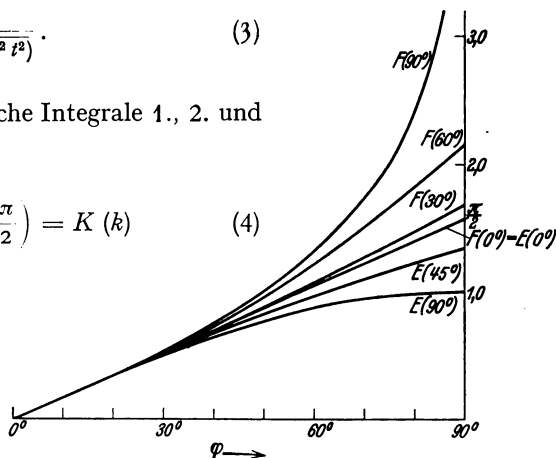


Fig. 18. Die elliptischen Integrale 1. und 2. Gattung.

Als *WEIERSTRASSSches Normalintegral* 1. Gattung bezeichnet man

$$z = \int_u^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}. \quad (5)$$

**b) Allgemeines über elliptische Funktionen.**

Die elliptischen Funktionen sind Umkehrfunktionen oder algebraische Funktionen von Umkehrfunktionen elliptischer Integrale. Sie sind doppelperiodische Funktionen ihres komplexen Arguments  $z$  mit zwei komplexen Perioden  $\omega_1$  und  $\omega_2$ , so daß

$$f(z) = f(z + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2) \quad (m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (6)$$

wird. Im Endlichen haben sie keine wesentlichen Singularitäten. Das Verhältnis  $\omega_1/\omega_2$  ist stets nicht reell, d. h. die komplexe  $z$ -Ebene kann von einem beliebigen Punkt  $z_0$  ausgehend in Parallelogramme eingeteilt werden, deren Eckpunkte ein Gitter  $z_0 + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$  bilden, derart, daß  $f(z)$  in entsprechenden Punkten verschiedener Parallelogramme den gleichen Wert hat („Periodenparallelogramme“).

LIUVILLESche Sätze:

1. Es gibt keine nichtkonstante elliptische Funktion, die im Periodenparallelogramm überall endlich ist.
2. Die Summe der Residuen im Periodenparallelogramm ist Null.
3. Eine elliptische Funktion nimmt im Periodenparallelogramm jeden Wert an ebensoviel Stellen (der Vielfachheit nach gezählt) an wie den Wert  $\infty$ .

c) Die JACOBISchen elliptischen Funktionen.

*Definition:* Die Umkehrfunktion zu (1)

$$z = F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad (0 < k^2 < 1) \quad (7)$$

heißt die „Amplitude“ von  $z$ :

$$\varphi = \operatorname{am} z. \quad (8)$$

Führt man  $x = \sin \varphi$  ein, so geht (7) über in

$$z = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} \quad (9)$$

und (8) in

$$x = \sin(\operatorname{am} z).$$

Hierfür schreibt man kürzer

$$x = \operatorname{sn} z. \quad (10)$$

Man führt weiter die Funktionen ein

$$\sqrt{1-x^2} = \cos(\operatorname{am} z) = \operatorname{cn} z, \quad (11)$$

$$\sqrt{1-k^2 x^2} = \Delta \operatorname{am} z = \operatorname{dn} z. \quad (12)$$

$\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$ ,  $\operatorname{dn}$  sind die JACOBISchen elliptischen Funktionen.

*Allgemeine Eigenschaften:*  $\operatorname{sn} z$  ist eine ungerade,  $\operatorname{cn} z$  und  $\operatorname{dn} z$  sind gerade Funktionen von  $z$ . Insbesondere ist

$$\operatorname{sn} 0 = 0, \quad \operatorname{cn} 0 = 1, \quad \operatorname{dn} 0 = 1.$$

Die Funktionen sind *doppeltperiodisch*, und zwar hat

$$\operatorname{sn} z \text{ die Perioden } \omega_1 = 4K, \quad \omega_2 = 2iK',$$

$$\operatorname{cn} z \text{ die Perioden } \omega_1 = 4K, \quad \omega_2 = 2K + 2iK',$$

$$\operatorname{dn} z \text{ die Perioden } \omega_1 = 2K, \quad \omega_2 = 4iK',$$

wobei  $K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $K' = F\left(k', \frac{\pi}{2}\right)$  und  $k'^2 = 1 - k^2$ .

Die JACOBISCHEN Funktionen haben die *Nullstellen*

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(2mK + 2niK') &= 0 & \operatorname{cn}((2m+1)K + 2niK') &= 0 \\ \operatorname{dn}((2m+1)K + (2n+1)iK') &= 0 \end{aligned}$$

und die *Pole 1. Ordnung*

$$z = 2mK + (2n+1)iK' \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Ferner gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(z+K) &= \frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z}, & \operatorname{cn}(z+K) &= -k' \frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{dn} z}, & \operatorname{dn}(z+K) &= \frac{k'}{\operatorname{dn} z}, \\ \operatorname{sn}(z+iK') &= \frac{1}{k \operatorname{sn} z}, & \operatorname{cn}(z+iK') &= -\frac{i}{k} \frac{\operatorname{dn} z}{\operatorname{sn} z}, & \operatorname{dn}(z+iK') &= -i \frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{sn} z}, \\ \operatorname{sn}(z+K+iK') &= \frac{1}{k} \frac{\operatorname{dn} z}{\operatorname{cn} z}, & \operatorname{cn}(z+K+iK') &= -\frac{i k'}{k \operatorname{cn} z}, & & \\ & & \operatorname{dn}(z+K+iK') &= i k' \frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z}. \end{aligned}$$

*Differentialformeln:*

$$\frac{d \operatorname{sn} z}{dz} = \operatorname{cn} z \cdot \operatorname{dn} z, \quad \frac{d \operatorname{cn} z}{dz} = -\operatorname{sn} z \cdot \operatorname{dn} z, \quad \frac{d \operatorname{dn} z}{dz} = -k^2 \operatorname{sn} z \cdot \operatorname{cn} z.$$

*Reihenentwicklungen* vgl. Abschn. Reihen, II B 5, S. 33.

#### d) Die WEIERSTRASSSche $\wp$ -Funktion.

*Definition:* Die Umkehrfunktion zu (5)

$$z = \int_u^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}$$

heißt die WEIERSTRASSSche  $\wp$ -Funktion zu den Invarianten  $g_2$  und  $g_3$ :

$$u = \wp(z) \quad \text{oder} \quad u = \wp(z; g_2, g_3). \quad (13)$$

Sie genügt der Differentialgleichung

$$\wp'^2 = \left(\frac{d\wp}{dz}\right)^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3. \quad (14)$$

*Allgemeine Eigenschaften:*  $\wp(z)$  ist eine doppelperiodische Funktion. Es ist

$$\wp(0) = \wp(\omega_1) = \wp(\omega_2) = \infty. \quad (15)$$

An diesen Stellen hat  $\wp$  Pole 2. Ordnung. Setzt man

$$4t^3 - g_2 t - g_3 = 4(t - e_1)(t - e_2)(t - e_3) \quad (16)$$

mit

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

so wird  $\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = e_1, \quad \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = e_2, \quad \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = e_3. \quad (17)$

*Entwicklung:* Bedeutet  $w = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$ , so gelten die Entwicklungen:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum'_{m_1, m_2} \left( \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right), \quad (18)$$

$$\wp'(z) = -2 \sum'_{m_1, m_2} \frac{1}{(z-w)^3}. \quad (19)$$

Die Summen sind über alle  $m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  zu erstrecken mit Ausschluß von  $m_1 = m_2 = 0$ . Die Entwicklung (18) kann auch geschrieben werden:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20} z^2 + \frac{g_3}{28} z^4 + \frac{g_2^2}{1200} z^6 + \frac{3 g_2 g_3}{6160} z^8 + \dots \quad (20)$$

Zwischen den Invarianten und den Perioden bestehen die Beziehungen:

$$g_2 = \left( \frac{2\pi}{\omega_2} \right)^4 \left[ \frac{1}{12} + 20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^{2n}}{1 - q^{2n}} \right] \quad (21)$$

$$g_3 = \left( \frac{2\pi}{\omega_2} \right)^6 \left[ \frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 q^{2n}}{1 - q^{2n}} \right] \quad (22)$$

mit 
$$q = e^{i\pi \frac{\omega_1}{\omega_2}}.$$

*Reduktion:* Die  $\wp$ -Funktion mit den Invarianten  $g_2, g_3$  kann stets auf eine  $\wp$ -Funktion mit nur einer („absoluten“) Invariante  $j$  reduziert werden nach der Formel

$$\wp(z; g_2, g_3) = m^2 \cdot \wp \left( mz; \frac{g_2}{m^4}, \frac{g_3}{m^6} \right), \quad (23)$$

wenn man  $m = \sqrt{\frac{g_3}{g_2}}$  setzt. Man erhält dann speziell

$$\wp(z; g_2, g_3) = \frac{g_3}{g_2} \cdot \wp \left( \sqrt{\frac{g_3}{g_2}} z; j, j \right) \text{ mit } j = \frac{g_2^3}{g_3^2}. \quad (24)$$

*Darstellung:* Jede doppelperiodische Funktion  $f(z; \omega_1, \omega_2)$  kann als rationale Funktion der beiden elliptischen Funktionen  $\wp(z; \omega_1, \omega_2)$  und  $\wp'(z; \omega_1, \omega_2)$  dargestellt werden.

#### e) Zusammenhang zwischen den JACOBISCHEN und der $\wp$ -Funktion.

$$\operatorname{sn} u = \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{\wp(z) - e_3}} \quad \operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{\wp(z) - e_1}{\wp(z) - e_3}} \quad \operatorname{dn} u = \sqrt{\frac{\wp(z) - e_2}{\wp(z) - e_3}}$$

mit 
$$u = z \sqrt{e_1 - e_3} \quad \text{und} \quad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

Umkehrung:

$$\wp(z) = e_1 + (e_1 - e_3) \frac{\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 u} = e_2 + (e_1 - e_3) \frac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 u} = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2 u}.$$





Lineare Unabhängigkeit.  $m$  lineare Funktionen  $f_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} x_k$  (oder  $m$  Systeme  $a_i$  von  $n$  Zahlen  $\alpha_{ik}$ ) ( $i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n$ ) heißen *linear unabhängig*, wenn es *nicht* möglich ist,  $m$  feste Zahlen  $c_1, \dots, c_m$  (nicht alle Null) so zu bestimmen, daß  $\sum c_i f_i = 0$  identisch in  $x_1, \dots, x_n$  (Vorbedingung:  $m \leq n$ ). (Vgl. GRAMSche Determinante S. 94.) Ist  $m > n$ , so existieren stets lineare Abhängigkeiten  $\sum c_i f_i = 0$  bzw.  $\sum c_i a_i = 0$ , wobei die  $c_i$  nicht alle Null sind.

Geometrisch:  $m$  linear unabhängige Vektoren  $a_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) mit den Komponenten  $(\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in})$  liegen nicht alle in einer  $(m-1)$ -dimensionalen, aber in einer  $m$ -dimensionalen Hyperebene.

### b) Homogene Gleichungen.

Sind alle  $b_i = 0$ , so heißt das Gleichungssystem (1) *homogen*.

$\alpha$ ) **Rang  $r = n$** , Defekt  $d = 0$ , also Determinante  $\det(a_{ik}) \neq 0$ . Es gibt *nur* die *triviale* Lösung  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ .

$\beta$ ) **Rang  $r < n$** , Defekt  $d > 0$ , also  $\det(a_{ik}) = 0$ . Es gibt  $d = n - r$  linear unabhängige Lösungssysteme

$$x_i = \xi_i^{(h)} \quad (h = 1, 2, \dots, d; \quad i = 1, 2, \dots, n).$$

Alle linearen Kombinationen dieser Systeme mit beliebigen Koeffizienten  $c_h$  sind wieder Lösungssysteme:

$$x_i = \sum_{h=1}^d c_h \xi_i^{(h)} \quad (i = 1, \dots, n) \text{ sog. } \textit{allgemeine} \text{ Lösung.} \quad (3)$$

Im Falle  $r = n - 1$  ( $d = 1$ ) ist das Lösungssystem durch

$$\xi_1 : \xi_2 : \dots : \xi_n = A_{i1} : A_{i2} : \dots : A_{in} \quad (i \text{ beliebig gewählt}) \quad (3a)$$

(bis auf einen Proportionalitätsfaktor) bestimmt.  $A_{ik}$  ist der Minor zu  $a_{ik}$  (s. C 1 Schluß, S. 92).

Das *transponierte* Gleichungssystem (entstanden durch Ersetzen von  $a_{ik}$  durch  $a_{ki}$ ) hat stets den gleichen Rang und Defekt, also ebenfalls  $d = n - r$  linear unabhängige Lösungssysteme  $\tilde{\xi}_i^{(h)}$  ( $h = 1, \dots, d$ ).

### c) Inhomogene Gleichungen.

Das Gleichungssystem (1) heißt *inhomogen*, wenn mindestens ein  $b_i \neq 0$  ist.

$\alpha$ ) **Rang  $r = n$** , Defekt  $d = 0$ , also  $|a_{ik}| \neq 0$ . Das zugehörige homogene System hat keine nichttriviale Lösung. Dann hat das inhomogene lineare Gleichungssystem genau eine Lösung:

$$x_k = \frac{1}{\det(a_{ik})} (b_1 A_{1k} + \dots + b_n A_{nk}). \quad (4)$$

$\frac{A_{ki}}{\det(a_{ik})}$  sind also die  $n^2$  Komponenten des zu  $\mathfrak{A}$  reziproken Tensors (bzw. Matrix)  $\mathfrak{A}^{-1}$  mit  $\mathfrak{x} = \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{b}$  [vgl. (2)].

**Praktische Lösung.** Die Lösung (4) ist zur praktischen Durchführung meist wenig geeignet, die Berechnung der Determinanten erfordert i. a. mehr Arbeit als die folgende Lösung durch schrittweise Elimination: Durch das gleiche Verfahren, das in C 4 für Determinanten geschildert ist, reduziert man die Unbekanntenzahl des Systems schrittweise um eins, bis man eine Unbekannte bestimmt hat; die anderen werden dann durch schrittweise wieder rückwärts gehendes Einsetzen der gefundenen Werte nacheinander bestimmt.

$\beta$ ) **Rang**  $r < n$ , Defekt  $d > 0$ ,  $\det(a_{ik}) = 0$ . Es bestehen zwischen den linken Seiten  $\sum_k a_{ik} x_k$  ( $i = 1, \dots, n$ )  $d = n - r$  lineare Abhängigkeiten (gegeben durch die Lösungen des zugehörigen transponierten homogenen Systems). Die Gleichungen (1) sind daher nur dann *miteinander verträglich*, also lösbar, wenn die

$$\text{Lösbarkeitsbedingungen } \sum_i b_i \tilde{\xi}_i^{(h)} = 0 \quad \text{für alle } h = 1, \dots, d \quad (5)$$

gelten. Die Gesamtheit der Lösungssysteme (die allgemeine Lösung) ist darstellbar als Summe *eines* Lösungssystems der inhomogenen Gleichungen und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichungen (s. (3)).

**Bestimmung einer Lösung.** Man sucht eine  $r$ -reihige nicht-verschwindende Unterdeterminante und setzt in den entsprechenden  $r$  inhomogenen Gleichungen die  $n - r$  nicht zugehörigen Variablen Null. Die Lösung des so entstandenen inhomogenen Gleichungssystems für  $r$  Variable liefert, zusammen mit den nullgesetzten  $n - r$  Variablen, eine Lösung des Systems in  $n$  Variablen.

### 3. Lineare Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten

schreibt man zweckmäßig in der Form:

$$x_i + \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} x_k = b_i \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (6)$$

d. h. man setzt für  $\mathfrak{A}$  in (1)  $\mathfrak{E} + \mathfrak{C}$  ( $\mathfrak{E}$  = Einheitsmatrix; vgl. S. 86). „*Transponiert*“ nennt man *hier* das System mit  $\mathfrak{E} + \tilde{\mathfrak{C}}$ . Unter gewissen Voraussetzungen (z. B. der, daß die Doppelsumme  $\sum_{\mu, \nu=1}^{\infty} |c_{\mu\nu}|^2$  konvergiert, die Matrix also von  $\mathfrak{E}$  nicht sehr abweicht), gelten die entsprechenden Sätze wie bei endlichvielen Unbekannten. (Die unendliche Determinante hat kaum Bedeutung.) Entweder hat (6) — und dann

auch das dazu „transponierte“ System — für beliebige  $b_i$  mit konvergenter Summe  $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^2$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $x_i = b_i + \sum_{k=1}^{\infty} d_{ik} b_k$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), mit  $\sum |x_i|^2$  konvergent, oder das homogene System (alle  $b_i = 0$ ) sowie das „transponierte“ homogene System hat  $d > 0$  linear unabhängige Lösungen mit  $\sum |x_i|^2$  konvergent. Das inhomogene System besitzt dann nur Lösungen, wenn die (5) entsprechenden  $d$  Bedingungen erfüllt sind.

Für allgemeinere Gleichungssysteme gelten diese Sätze i. a. nicht mehr (vgl. B 7b, S. 91).

#### 4. Ein wichtiges System

linearer Gleichungen ist das Folgende

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda) x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda) x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda) x_n &= b_n \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

abgekürzt geschrieben:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k - \lambda x_i = b_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Das zugehörige homogene System ( $b_i = 0$ ) hat nur Lösungen, wenn  $\lambda$  eine der  $n$  Wurzeln  $\lambda_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) der *Säkulargleichung*  $\det(\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E}) = 0$  (vgl. S. 89) ist. Diese  $n$  *Eigenwerte* sind sämtlich reell, wenn die Matrix  $(a_{ik})$  hermitesch ( $a_{ik} = a_{ki}^*$  für alle  $i, k$ ), bei reellen  $a_{ik}$  also symmetrisch ist ( $a_{ik} = a_{ki}$ ). Dann heißen die zu dem Eigenwert  $\lambda_j$  gehörigen Lösungen  $\xi_{1j}, \xi_{2j}, \dots, \xi_{nj}$  des homogenen Systems *Eigenlösungen*. Für sie gilt  $\lambda_j \xi_{ij} = \sum_{\nu} a_{i\nu} \xi_{\nu j}$  ( $i, j = 1; \dots, n$ ). Sie sind bis auf einen gemeinsamen

Faktor bestimmt, wenn  $\lambda_j$  eine einfache Wurzel ist; er wird durch die *Normierungsgleichungen*

$$\xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2 + \dots + \xi_{nj}^2 = \sum_{\nu=1}^n \xi_{\nu j}^2 = 1 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (8)$$

festgelegt. Dagegen gilt stets, wenn  $\lambda_h \neq \lambda_j$  ist,

$$\xi_{1h} \xi_{1j} + \xi_{2h} \xi_{2j} + \dots + \xi_{nh} \xi_{nj} = \sum_{\nu=1}^n \xi_{\nu h} \xi_{\nu j} = 0. \quad (8a)$$

Führt man statt  $x_k$  und  $b_k$  neue Größen  $x'_k$  und  $b'_k$  ein durch die (orthogonale) Transformation (*Hauptachsentransformation*, Entwicklung nach *Eigenlösungen*)

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{\nu} \xi_{i\nu} x'_{\nu} & \text{und} & & b_i &= \sum_{\nu} \xi_{i\nu} b'_{\nu}, \\ \text{aufgelöst} & & & & & \\ x'_k &= \sum_{\nu} \xi_{\nu k} x_{\nu} & \text{und} & & b'_k &= \sum_{\nu} \xi_{\nu k} b_{\nu}, \end{aligned}$$

so wird

$$\sum_k x_k^2 = \sum_k x_k'^2, \quad \sum_i \sum_k a_{ik} x_i x_k = \sum_j \lambda_j x_j'^2. \quad (9)$$

Das inhomogene System (7) erhält dann die Form

$$(\lambda_k - \lambda) x_k' = b_k'.$$

Durch Einsetzen erhält man die Lösung

$$x_i = \sum_k \frac{\xi_{ik}}{\lambda_k - \lambda} \sum_l \xi_{lk} b_l'. \quad (10)$$

## B. Matrizen.

### 1. Definition, Bezeichnungen.

a) Ein System von  $m \cdot n$  Zahlen (oder auch sonstigen Rechengrößen)  $a_{ik}$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $k = 1, \dots, n$ ), den *Elementen*, die in einem rechteckigen Schema von  $m$  *Zeilen* (= Horizontalreihen) und  $n$  *Spalten* oder *Kolonnen* (= Vertikalreihen) angeordnet sind, heißt (endliche) *Matrix*, ausführlich geschrieben:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|, \quad (1)$$

kürzer  $(a_{ik})$ ,  $\|a_{ik}\|$  oder gegebenenfalls deutlicher  $(a_{ik})_{(m,n)}$ . Meist werden Matrizen mit großen deutschen Buchstaben bezeichnet:  $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ ,  $\mathfrak{B} = (b_{ik})$ .  $i$  ist stets Zeilenindex,  $k$  Spaltenindex;  $(a_{ki})_{(n,m)}$  bezeichnet daher die *transponierte* Matrix zu  $(a_{ik})_{(m,n)}$ , die man durch Vertauschen von Zeilen mit Spalten erhält. Ist  $m = n$ , so heißt die Matrix *quadratisch*.

b) Einspaltige Matrizen ( $n = 1$ ) werden mit kleinen deutschen Buchstaben  $a, \dots, \xi, \dots$  bezeichnet und zur Darstellung von Vektoren benutzt (s. 2 c, S. 84).

Die Elemente einer Matrix können verschiedene Bedeutung haben: Sie können die Koeffizienten bzw. Komponenten von Reihenentwicklungen, linearen Gleichungen oder Transformationen, Bilinearformen, quadratischen Formen, Determinanten, Tensoren usw., aber auch selbst wieder Matrizen sein. Matrizen von Matrizen heißen *Übermatrizen*.

### 2. Rechnen mit (endlichen) Matrizen.

a) Zwei Matrizen gleicher Zeilenzahl  $m$  und Spaltenzahl  $n$  heißen *gleichartig*. Mit gleichartigen Matrizen läßt sich folgendermaßen rechnen:

Gleichheit. Zwei gleichartige Matrizen sind dann und nur dann gleich:  $(a_{ik}) = (b_{ik})$ , wenn  $a_{ik} = b_{ik}$  für alle  $i, k$  ist. Eine Gleichung zwischen Matrizen faßt also  $m \cdot n$  Gleichungen zwischen ihren Elementen zusammen.

Summe. Die Summe  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  der gleichartigen Matrizen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  ist die aus der Summe entsprechender Elemente gebildete Matrix:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = (a_{ik}) + (b_{ik}) = (a_{ik} + b_{ik}). \quad (2)$$

Es gilt  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}$  (kommutatives Gesetz)  
und  $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$  (assoziatives Gesetz).

Multiplikation mit Skalaren. Eine Matrix  $\mathfrak{A} = (a_{ik})$  wird mit einer beliebigen komplexen Zahl  $\rho$  (einem Skalar) multipliziert, indem man jedes Element mit  $\rho$  multipliziert:

$$\mathfrak{A} \rho = \rho \mathfrak{A} = (\rho a_{ik}). \quad (3)$$

Hinsichtlich der Addition und der skalaren Multiplikation verhalten sich daher die Matrizen wie ihre Elemente.

b) Produkt quadratischer Matrizen. Das Produkt  $\mathfrak{A} \mathfrak{B}$  der gleichartigen quadratischen Matrizen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  ist erklärt durch

$$\mathfrak{A} \mathfrak{B} = (a_{ik}) (b_{ik}) = \left( \sum_{v=1}^n a_{iv} b_{vk} \right) = (c_{ik}), \quad (4)$$

d. h. das der  $i$ -ten Zeile und der  $k$ -ten Spalte gemeinsame Element  $c_{ik}$  ist das innere Produkt des  $i$ -ten Zeilenvektors von  $\mathfrak{A}$  und des  $k$ -ten Spaltenvektors von  $\mathfrak{B}$ :  $c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{in} b_{nk}$ .

Es gelten stets:

$$(\mathfrak{A} \mathfrak{B}) \mathfrak{C} = \mathfrak{A} (\mathfrak{B} \mathfrak{C}) = \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C} \quad (\text{assoziatives Gesetz d. Mult.}) \quad (5)$$

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \mathfrak{C} = \mathfrak{A} \mathfrak{C} + \mathfrak{B} \mathfrak{C} \quad (6)$$

$$\mathfrak{A} (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A} \mathfrak{B} + \mathfrak{A} \mathfrak{C} \quad (7)$$

Vertauschbarkeit. Im allgemeinen ist

$$\left( \sum_{v=1}^n a_{iv} b_{vk} \right) = \mathfrak{A} \mathfrak{B} \neq \mathfrak{B} \mathfrak{A} = \left( \sum_{v=1}^n b_{iv} a_{vk} \right), \quad (8)$$

d. h. das kommutative Gesetz der Multiplikation ist nicht erfüllt. Daher heißen zwei Matrizen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ , für die  $\mathfrak{A} \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \mathfrak{A}$  gilt, *miteinander vertauschbar*. Z. B. ist  $\rho \mathfrak{E}$  ( $\rho$  beliebige komplexe Zahl,  $\mathfrak{E}$  = Einheitsmatrix) mit jeder Matrix vertauschbar. Ein Maß für die Nicht-Vertauschbarkeit zweier beliebigen Matrizen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  ist die Matrix

$$(\mathfrak{A} \mathfrak{B} - \mathfrak{B} \mathfrak{A}) = \varkappa [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \quad (\varkappa \text{ eine Konstante}). \quad (9)$$

c) Produkt rechteckiger Matrizen. Sind  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  rechteckige Matrizen (Zeilenzahlen  $m_1, n_1$  bzw.  $m_2, n_2$ ), so existiert das Produkt  $\mathfrak{A} \mathfrak{B}$  entsprechend (4), wenn  $n_1 = m_2$  gilt;  $\mathfrak{A} \mathfrak{B}$  ist dann eine  $(m_1, n_2)$ -Matrix. Analog existiert die  $(m_2, n_1)$ -Matrix  $\mathfrak{B} \mathfrak{A}$ , wenn  $m_1 = n_2$  ist. Mitunter wird das zur Darstellung linearer Gleichungssysteme verwandt: Ist  $\mathfrak{b}$  die  $(m, 1)$ -Matrix  $(b_i)$ , ( $i = 1, \dots, m$ ) und  $\mathfrak{x}$  die  $(n, 1)$ -Matrix  $(x_i)$ ,

( $i = 1, \dots, n$ ), so stellt  $\mathfrak{A}x = b$  das zur  $(m, n)$ -Matrix  $\mathfrak{A}$  gehörige lineare Gleichungssystem dar (vgl. S. 79).

d) Differentiation. Sind die Elemente der Matrix  $(a_{ik})$  Funktionen eines Parameters  $t$ , so heißt Ableitung der Matrix nach  $t$  die Matrix der Ableitungen

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{A}(t) = \frac{d}{dt} (a_{ik}(t)) = \left( \frac{d}{dt} a_{ik}(t) \right). \quad (10)$$

e) Als direktes Produkt der  $(m, n)$ -Matrix  $\mathfrak{A} = (a_{ik})$  mit der  $(m', n')$ -Matrix  $\mathfrak{A}' = (a'_{ik})$  bezeichnet man die  $(mm', nn')$ -Matrix

$$(c_{ii', kk'}) = \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}' \quad \text{mit} \quad c_{ii', kk'} = a_{ik} a'_{i'k'}.$$

Jeder Kombination  $ii'$  entspricht eine Zeile, jeder Kombination  $kk'$  eine Spalte der Produktmatrix.

Beispiel:

$$(a_1 \ a_2) \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_1 b_{12} & a_2 b_{11} & a_2 b_{12} \\ a_1 b_{21} & a_1 b_{22} & a_2 b_{21} & a_2 b_{22} \end{pmatrix}.$$

Es gilt allgemein

$$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}') (\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}') = \mathfrak{A} \mathfrak{B} \times \mathfrak{A}' \mathfrak{B}'.$$

### 3. Determinanten, Rang, Spur.

a) Die *Determinante* mit der *endlichen quadratischen* Matrix  $\mathfrak{A}$  heißt Determinante zu  $\mathfrak{A}$ , geschrieben:  $\det \mathfrak{A}$  (Definition S. 92). Es gilt:

$$\det \mathfrak{A} \mathfrak{B} = \det \mathfrak{A} \cdot \det \mathfrak{B} \quad [\text{vgl. S. 93 (4)}]. \quad (11)$$

b) Der Rang  $r$  der endlichen (nicht notwendig quadratischen) Matrix  $\mathfrak{A}$  ist die größte der Gradzahlen der nichtverschwindenden Unterdeterminanten (vgl. S. 92). Bei quadratischen Matrizen der Reihenzahl  $n$  heißt  $n - r = d$  der *Defekt* (nullity) der Matrix. Es gilt: Der Defekt des Produkts zweier Matrizen ist mindestens gleich dem Defekt eines jeden Faktors und höchstens gleich der Summe der Defekte beider Faktoren.

c) Eine quadratische Matrix  $\mathfrak{A}$  heißt *entartet* (singulär), wenn  $\det \mathfrak{A} = 0$ , also der Rang  $r < n$  ist, *nichtentartet* (regulär), wenn  $\det \mathfrak{A} \neq 0$ , also der Rang  $r = n$  ist. Eine nichtentartete Matrix heißt auch *umkehrbar* (vgl. 4c).

d) Die *Spur* einer quadratischen Matrix  $\mathfrak{A} = (a_{ik})$  ist die Summe ihrer Diagonalelemente:

$$\text{spur } \mathfrak{A} = \sum_{i=1}^n a_{ii}. \quad (12)$$

Es gilt  $\text{spur } (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \text{spur } \mathfrak{A} + \text{spur } \mathfrak{B}$  (13)

und  $\text{spur } (\mathfrak{A} \mathfrak{B}) = \text{spur } (\mathfrak{B} \mathfrak{A})$  oder  $\text{spur } [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = 0$ . (14)

#### 4. Besondere Matrizen.

a) Nullmatrix. Die Matrix, deren Elemente sämtlich null sind, heißt *Nullmatrix*; sie wird mit  $\mathfrak{N}$  oder einfach mit 0 bezeichnet. Es ist  $\det \mathfrak{N} = 0$  und es gilt:

$$\mathfrak{A} + 0 = 0 + \mathfrak{A} = \mathfrak{A} \quad \mathfrak{A} 0 = 0 \mathfrak{A} = 0. \quad (15)$$

Im Gegensatz zu den gewöhnlichen Zahlen folgt aus  $\mathfrak{A} \mathfrak{B} = 0$  i. a. nicht  $\mathfrak{A} = 0$  oder  $\mathfrak{B} = 0$ . Z. B. ist

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{N} \text{ mit beliebigen } a, b, c, d. \quad (16)$$

Die beiden links stehenden Matrizen heißen *Nullteiler*.

b) Einheitsmatrix. Die Einheitsmatrix ist durch

$$\mathfrak{E} = (\delta_{ik}) \quad \text{mit} \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases} \quad (17)$$

gegeben. Die Elemente der *Diagonale*:  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  sind alle = 1, alle anderen Elemente sind Null. Es ist

$$\mathfrak{A} \mathfrak{E} = \mathfrak{E} \mathfrak{A} = \mathfrak{A}; \quad \det \mathfrak{E} = 1. \quad (18)$$

Man schreibt auch 1 statt  $\mathfrak{E}$ .

c) Reziproke. Zu jeder *nichtentarteten* endlichen Matrix  $\mathfrak{A}$  ( $\det \mathfrak{A} \neq 0$ ) gibt es eine eindeutig bestimmte reziproke Matrix  $\mathfrak{A}^{-1}$ , die *Reziproke* (*Inverse*) mit

$$\mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{A} = \mathfrak{A} \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{E}, \quad (\mathfrak{A}^{-1})^{-1} = \mathfrak{A} \quad (21)$$

$$(\mathfrak{A} \mathfrak{B})^{-1} = \mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{A}^{-1}, \quad \det \mathfrak{A}^{-1} = (\det \mathfrak{A})^{-1}. \quad (22)$$

Die *entarteten* endlichen Matrizen ( $\det \mathfrak{A} = 0$ ) besitzen keinerlei Reziproke.

Die Bestimmung von  $\mathfrak{A}^{-1}$  ist gleichbedeutend mit der Auflösung des linearen Gleichungssystems  $\eta = \mathfrak{A} \xi$  oder  $\eta = \tilde{\mathfrak{A}} \xi$  nach  $\xi$ .

d) Potenzen, Polynome. Die Potenzen  $\mathfrak{A} \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2$ ,  $\mathfrak{A} \mathfrak{A} \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^3$  usw. heißen *iterierte* Matrizen; entsprechend  $\mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}^{-2}$  usw. und  $\mathfrak{E} = \mathfrak{A}^0$ . Ausdrücke der Form

$$F(\mathfrak{A}) = \varrho_0 \mathfrak{A}^h + \varrho_1 \mathfrak{A}^{h-1} + \dots + \varrho_{h-1} \mathfrak{A} + \varrho_h \mathfrak{E} \quad (23)$$

heißen *Polynome* von  $\mathfrak{A}$ .

#### 5. Matrizen mit Symmetrieeigenschaften.

a) Kanonisch heißt eine quadratische Matrix  $\mathfrak{K}$ , bei der  $a_{ik} = 0$  ist für  $i < k$  oder  $i > k$ , d. h. die Elemente über bzw. unter der Diagonale verschwinden sämtlich.  $\mathfrak{E}$  ist also kanonisch. Es gilt

$$\det \mathfrak{K} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}. \quad (24)$$

Verschwinden *alle* Elemente außerhalb der Diagonale, d. h. hat die Matrix die Form  $\mathfrak{D} = (d_k \delta_{i,k})$ , so heißt sie *Diagonalmatrix*. Es ist

$$\det \mathfrak{D} = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n. \quad (25)$$

Wegen der Übersichtlichkeit der Diagonalmatrizen bemüht man sich, andere Matrizen durch gleichwertige Diagonalmatrizen zu ersetzen. Diagonalmatrizen sind stets untereinander vertauschbar. Speziell sind die Matrizen  $\varrho \mathfrak{E}$  (welche die Zahlen  $\varrho$  repräsentieren) mit allen Matrizen vertauschbar [vgl. (3)]. Haben die Diagonalelemente einer Diagonalmatrix den Betrag 1, so heißt sie *Phasenmatrix* ( $e^{i\varphi_k} \delta_{i,k}$ ). Sind die Elemente einer Diagonalmatrix selbst Matrizen, so heißt sie *Stufenmatrix*.

b) Transponierte, Konjugiert-Komplexe, Adjungierte, Kontragrediente. Der Matrix  $\mathfrak{A}$  entsprechen<sup>1</sup>:

- die *transponierte* oder *gestürzte* Matrix:  $\tilde{\mathfrak{A}} = (a_{ki})$ ,
- die *konjugiert-komplexe* Matrix:  $\mathfrak{A}^* = (a_{i,k}^*)$ ,
- die *begleitende* oder *adjungierte* Matrix:  $\mathfrak{A}^\dagger = (a_{ki}^*) = \tilde{\mathfrak{A}}^*$ .

$(\mathfrak{A}^\dagger)^{-1}$  heißt auch *kontragrediente* Matrix. Es gelten die Formeln:

$$\widetilde{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})} = \tilde{\mathfrak{A}} + \tilde{\mathfrak{B}}; \quad (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^* = \mathfrak{A}^* + \mathfrak{B}^*; \quad (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^\dagger = \mathfrak{A}^\dagger + \mathfrak{B}^\dagger; \quad (26)$$

$$\widetilde{(\mathfrak{A} \mathfrak{B})} = \tilde{\mathfrak{B}} \tilde{\mathfrak{A}}; \quad (\mathfrak{A} \mathfrak{B})^* = \mathfrak{A}^* \mathfrak{B}^*; \quad (\mathfrak{A} \mathfrak{B})^\dagger = \mathfrak{B}^\dagger \mathfrak{A}^\dagger; \quad (27)$$

$$\widetilde{\mathfrak{A}^{-1}} = (\tilde{\mathfrak{A}})^{-1}; \quad (\mathfrak{A}^{-1})^* = (\mathfrak{A}^*)^{-1}; \quad (\mathfrak{A}^{-1})^\dagger = (\mathfrak{A}^\dagger)^{-1}; \quad (28)$$

$$\det \tilde{\mathfrak{A}} = \det \mathfrak{A}; \quad \det \mathfrak{A}^* = (\det \mathfrak{A})^*; \quad \det \mathfrak{A}^\dagger = (\det \mathfrak{A})^*; \quad (29)$$

$$\tilde{\tilde{\mathfrak{A}}} = \mathfrak{A}; \quad \mathfrak{A}^{**} = \mathfrak{A}; \quad \mathfrak{A}^{\dagger\dagger} = \mathfrak{A}. \quad (30)$$

c) Symmetrische, hermitesche, schiefsymmetrische, alternierende Matrizen. Ist  $\mathfrak{A}$  gleich seiner Transponierten:  $\mathfrak{A} = \tilde{\mathfrak{A}}$ ,  $a_{i,k} = a_{k,i}$ , für alle  $i, k$ , so heißt die Matrix *symmetrisch*. Ist  $\mathfrak{A}$  gleich seiner Adjungierten,  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^\dagger$ ,  $a_{i,k} = a_{k,i}^*$ , so heißt  $\mathfrak{A}$  *hermitesch* oder *selbstadjungiert*. Die Diagonalelemente sind reell, ebenso die Determinante. Eine reelle hermitesche Matrix ist symmetrisch. Die folgenden Formeln gelten auch für beliebige symmetrische Matrizen ( $\sim$  statt  $^\dagger$ ). Aus  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^\dagger$ ,  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^\dagger$  folgt:

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^\dagger = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}, \quad (F(\mathfrak{A}))^\dagger = F(\mathfrak{A}) \quad [F(a) \text{ ein beliebiges Polynom}], \quad (31)$$

$$(\mathfrak{A}^{-1})^\dagger = \mathfrak{A}^{-1}, \quad \text{falls } \det \mathfrak{A} \neq 0 \text{ ist}, \quad (32)$$

$$\text{aber nur} \quad (\mathfrak{A} \mathfrak{B})^\dagger = \mathfrak{B} \mathfrak{A}, \quad (33)$$

d. h. das Produkt hermitescher Matrizen ist *nur dann* hermitesch, wenn die Faktoren vertauschbar sind.

<sup>1</sup> Die symbolische Bezeichnung in der Literatur ist sehr verschieden. Die hier angegebenen Zeichen sind in diesem Buch durchgängig dieselben.



Die Eigenwerte hermitescher Matrizen (vgl. 6b) sind alle reell, ebenso der Wert einer *hermiteschen Form*  $\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k^*$ ,  $(a_{ik}) = (a_{ki}^*)$  für beliebige Werte von  $x_i$ . Hat eine hermitesche Form für beliebige Werte der Variablen  $x_i$  stets einen positiven (bzw. nichtnegativen) Wert, so heißt sie *positiv definit* (bzw. *semidefinit*). Die Eigenwerte ihrer Matrix sind dann sämtlich positiv (bzw. nichtnegativ).

Eine Matrix  $\mathfrak{A}$  mit  $\mathfrak{A}^\dagger = -\mathfrak{A}$  heißt *alternierend*; sie ist das  $i$ -fache einer hermiteschen Matrix. Eine reelle alternierende Matrix heißt *schiefsymmetrisch* oder *antimetrisch*,  $\tilde{\mathfrak{A}} = -\mathfrak{A}$ . Die Diagonalelemente  $a_{ii}$  einer alternierenden Matrix sind rein imaginär, die einer schiefsymmetrischen alle = 0. Die Determinante einer alternierenden Matrix ist bei gerader Ordnung reell, bei ungerader rein imaginär; der Rang einer schiefsymmetrischen Matrix ist stets gerade.

Jede beliebige Matrix  $\mathfrak{A}$  ist eindeutig darstellbar als Summe einer hermiteschen und einer alternierenden Matrix, einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix.

d) Unitäre, orthogonale Matrizen. Eine Matrix  $\mathfrak{U}$ , für die  $\mathfrak{U}\mathfrak{U}^\dagger = \mathfrak{U}^\dagger\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ , also  $\mathfrak{U}^\dagger = \mathfrak{U}^{-1}$  ist, heißt *unitär* (auch hermitesch orthogonal). Ist  $\mathfrak{U}$  unitär, so ist auch  $\mathfrak{U}^{-1}$ ,  $\tilde{\mathfrak{U}}$ ,  $\mathfrak{U}^* \mathfrak{U}^\dagger$ , unitär; mit  $\mathfrak{U}_1$  und  $\mathfrak{U}_2$  sind auch  $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2$  und  $\mathfrak{U}_2 \mathfrak{U}_1$  unitär. Für unitäre endliche Matrizen ist  $|\det \mathfrak{U}| = 1$ , d. h.  $\det \mathfrak{U} = e^{i\varphi}$ . Mit  $\mathfrak{A}$  ist stets jede *unitär Transformierte*  $\mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{A} \mathfrak{U}$  hermitesch.

Eine Matrix  $\mathfrak{D}$  heißt *orthogonal*, wenn  $\mathfrak{D}\tilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{E}$  gilt. Jede reelle unitäre Matrix ist orthogonal. Es übertragen sich alle Regeln für unitäre Matrizen. Für endliche orthogonale Matrizen ist  $\det \mathfrak{D} = \pm 1$  (vgl. auch S. 102).

## 6. Transformation der Matrizen.

a) Allgemeines. Die Transformierte einer beliebigen quadratischen (oder unendlichen) Matrix  $\mathfrak{A}$  mit der *umkehrbaren* Matrix  $\mathfrak{C}$  ist  $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{-1} \mathfrak{A} \mathfrak{C}$ ; umgekehrt ist  $\mathfrak{A} = \mathfrak{C} \mathfrak{C}^{-1}$  die mit  $\mathfrak{C}^{-1}$  transformierte Matrix zu  $\mathfrak{C}$ .  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{C}^{-1} \mathfrak{A} \mathfrak{C}$  heißen *äquivalent*. Äquivalente Matrizen haben denselben Rang; sie stellen dieselbe lineare Abbildung dar (vgl. S. 101). Summe bzw. Produkt äquivalenter Matrizen sind äquivalent:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{C}^{-1}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\mathfrak{C} &= \mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{C}; \\ \mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} &= (\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{C})(\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{C}). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Weiter ist:

$$\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{C} = (\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{C})^{-1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{C}^{-1}F(\mathfrak{A})\mathfrak{C} = F(\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{C}), \quad (35)$$

wenn  $F(\mathfrak{A})$  ein Polynom der Matrix  $\mathfrak{A}$  ist. Summe, Produkt, Reziproke und beliebige Polynome transformieren sich also *kongredient* zu den Matrizen selbst.

b) Invarianten (vgl. auch S. 98, das dort Gesagte gilt hier entsprechend). Die wichtigsten Invarianten liefert das invariante *charakteristische* oder *Säkularpolynom* der Matrix:

$$\det(\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^n +$$

$$+ (-1)^{n-1} \sum a_{ii} \lambda^{n-1} + \dots$$

$$- \sum A_{ii} \lambda + \det \mathfrak{A} \quad (36)$$

Die Koeffizienten dieses Polynoms sind Invarianten, darunter die *Spur*

$$\sum a_{ii} = \text{spur } \mathfrak{A} = \text{spur } (\mathfrak{E}^{-1} \mathfrak{A} \mathfrak{E})$$

und die *Determinante*

$$\det \mathfrak{A} = \det (\mathfrak{E}^{-1} \mathfrak{A} \mathfrak{E}).$$

Wichtige Invarianten sind die  $n$  Wurzeln der *charakteristischen Gleichung* zu  $\mathfrak{A}$ ,  $\det(\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E}) = 0$ , die *Eigenwerte*  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Ihre Gesamtheit (jede Wurzel in ihrer Vielfachheit gerechnet) bildet das Spektrum zu  $\mathfrak{A}$ ; es besteht gerade aus den Werten, für welche die *Resolvente* zu  $\mathfrak{A}$ ,  $(\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E})^{-1}$ , nicht existiert. Es gilt:

$$\text{spur } \mathfrak{A} = \lambda_1 + \dots + \lambda_n, \quad \det \mathfrak{A} = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n. \quad (37)$$

Der Rang ist gleich der Anzahl der nichtverschwindenden Eigenwerte,  $\mathfrak{A}$  ist dann und nur dann entartet, wenn mindestens ein Eigenwert verschwindet. Zur Potenz  $\mathfrak{A}^h$  ( $h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) gehören die Eigenwerte  $(\lambda_i)^h$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), zum Polynom  $F(\mathfrak{A})$  (s. 4d) die Eigenwerte  $F(\lambda_i)$ .

c) Normalform. Wichtig ist, zu einer gegebenen Matrix  $\mathfrak{A}$  eine äquivalente  $\mathfrak{E}^{-1} \mathfrak{A} \mathfrak{E}$  von möglichst einfacher Gestalt (Normalform) zu finden. Aus ihr lassen sich die bei Transformation invarianten Eigenschaften leichter ablesen; außerdem sind genau die Matrizen zueinander äquivalent, die sich in die gleiche Normalform transformieren lassen. Ist die Normalform eine Diagonalmatrix, so gilt  $\mathfrak{D} = (\lambda_i \delta_{ik})$ , in der Diagonale stehen die Eigenwerte.

$\mathfrak{A}$  läßt sich in eine Diagonalmatrix transformieren:

$\alpha$ ) wenn alle Eigenwerte voneinander verschieden sind. Die  $k$ -te Spalte  $\mathfrak{s}_k$  von  $\mathfrak{E}$  ergibt sich aus dem linearen Gleichungssystem  $(\mathfrak{A} - \lambda_k \mathfrak{E}) \mathfrak{s}_k = 0$  und ist bis auf einen Faktor bestimmt.

$\beta$ ) wenn  $\mathfrak{A}$  hermitesch, unitär oder symmetrisch ist (vgl. d). In diesen Fällen ist das Spektrum ein *vollständiges Invariantensystem* (s. S. 103). In den übrigen Fällen existieren i. a. noch weitere Invarianten, die durch die Elementarteilertheorie gegeben werden. Transformation auf Diagonalgestalt ist i. a. nicht möglich.

d) **Unitäre Transformation.** Zu jeder hermiteschen oder unitären Matrix  $\mathfrak{H}$  gibt es stets eine *unitäre* Matrix  $\mathfrak{U}$ , so daß

$$\mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{H} \mathfrak{U} = \mathfrak{D} = (\lambda_i \delta_{ik}) = \sum_{j=1}^l A_j \mathfrak{F}^{(j)} \quad (38)$$

eine Diagonalmatrix ist. Dabei sind  $A_1, A_2, \dots, A_l$  die verschiedenen der  $n$  Eigenwerte zu  $\mathfrak{H}$ , und zwar habe  $A_j$  als Wurzel von  $\det(\mathfrak{H} - \lambda \mathfrak{E}) = 0$  die Vielfachheit  $\varrho_j$ ;  $\mathfrak{F}^{(j)} = (f_{ik}^{(j)})$  sei eine Diagonalmatrix mit  $f_{ii}^{(j)} = 1$ , wenn  $\lambda_i = A_j$  gilt, dagegen  $f_{ii}^{(j)} = 0$ , wenn  $\lambda_i \neq A_j$  ist.

Das homogene lineare Gleichungssystem

$$(\mathfrak{H} - A_j \mathfrak{E}) \mathfrak{I}_j = 0, \quad \mathfrak{I}_j^\dagger = \mathfrak{I}_j, \quad (39)$$

besitzt  $\varrho_j$  linear unabhängige Lösungen  $\mathfrak{I}_j^{(1)}, \mathfrak{I}_j^{(2)}, \dots, \mathfrak{I}_j^{(\varrho_j)}$ , die *Eigenlösungen* von  $\mathfrak{H}$  zu  $A_j$ , die normiert und zueinander orthogonal angenommen werden können:

$$(\mathfrak{I}_j^{(h)}, \mathfrak{I}_j^{(h)}) = 1, \quad (\mathfrak{I}_j^{(h)}, \mathfrak{I}_j^{(k)}) = 0, \quad h \neq k. \quad (40)$$

Die insgesamt  $n = \sum_{j=1}^l \varrho_j$  verschiedenen solchen Eigenlösungen  $\mathfrak{I}_j^{(h)}$  ( $h = 1, \dots, \varrho_j, j = 1, \dots, l$ ) sind dann untereinander orthogonal und ergeben die  $n$  Spalten einer unitären Matrix  $\mathfrak{U}$  in (38). Das analoge gilt für orthogonale Transformation symmetrischer Matrizen (vgl. lin. Gl. A 4, S. 82).

Ist auch  $\mathfrak{U}_1^{-1} \mathfrak{H} \mathfrak{U}_1 = \mathfrak{D}$ , so ist  $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}^{-1}$  eine Stufenmatrix von  $l$  unitären Matrizen mit den Reihenzahlen  $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ ; sind alle  $\lambda_i$  voneinander verschieden, so ist  $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}^{-1}$  eine Phasenmatrix.

Jede *unitäre* Matrix läßt sich unitär in eine Diagonalmatrix, und zwar in eine Phasenmatrix, transformieren.

e) **Simultane Transformation mehrerer Matrizen.** Sind die  $m$  *hermiteschen* oder  $m$  *unitären* Matrizen  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_m$  alle miteinander vertauschbar, so gibt es unitäre Matrizen  $\mathfrak{U}$ , so daß die transformierten  $\mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{B}_1 \mathfrak{U}, \mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{B}_2 \mathfrak{U}, \dots, \mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{B}_m \mathfrak{U}$  sämtlich Diagonalmatrizen sind.

## 7. Unendliche Matrizen.

a) Wächst bei einer quadratischen Matrix die Reihenzahl  $n \rightarrow \infty$ , so erhält man eine *unendliche Matrix*:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = (a_{ik}).$$

Die quadratische Teilmatrix, bei der beide Indizes höchstens  $= q$  sind, heißt  $q$ -ter *Abschnitt*  $(a_{i,k})_{[q]}$  der unendlichen Matrix.

Die Definitionen und Regeln für das Rechnen mit endlichen quadratischen Matrizen übertragen sich nur mit Einschränkungen. Damit nach (4) das Produkt gebildet werden kann, ist die Konvergenz aller vorkommenden Summen erforderlich. (5), (6), (7) sind nicht ohne weiteres gültig. Für die sogenannten beschränkten Matrizen überträgt sich 2a und b (S. 83). Dabei heißt eine Matrix *beschränkt*, wenn für jedes Wertesystem  $x_1, x_2, \dots$  und  $y_1, y_2, \dots$  mit

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \leq 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 \leq 1 \quad \text{gilt} \quad \left| \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k} x_i x_k \right| \leq M$$

( $M$  von  $x_i$  und  $y_i$  unabhängig).

Die Spur ist nach (8) definiert, wenn die Summe konvergiert. Trotz der Existenz von  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ,  $\text{spur } \mathfrak{A}$  und  $\text{spur } \mathfrak{B}$  kann  $\text{spur } \mathfrak{A}\mathfrak{B}$  und  $\text{spur } \mathfrak{B}\mathfrak{A}$  divergieren, jedoch  $\text{spur } [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$  [vgl. (5)] existieren und  $\neq 0$  sein.

Determinante vgl. unendliche Determinanten S. 94. Der Rang ist i. a. unendlich, der Defekt, die Anzahl linear unabhängiger Lösungen des zur Matrix gehörenden linearen Gleichungssystems, i. a. endlich.

b) Nullmatrix, Einheitsmatrix sind entsprechend 4a und 4b definiert. Bezüglich der Reziproken zu einer unendlichen Matrix hat man zu unterscheiden:

Ist  $\mathfrak{X}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$ , so heißt  $\mathfrak{X}$  *vordere Reziproke (Linksinverse)* zu  $\mathfrak{A}$ ,  
ist  $\mathfrak{A}\mathfrak{Y} = \mathfrak{E}$ , so heißt  $\mathfrak{Y}$  *hintere Reziproke (Rechtsinverse)* zu  $\mathfrak{A}$ .

Es ist gleichbedeutend (vgl. A 1b, S. 79) die Bestimmung von

$\mathfrak{X}$  mit der Auflösung des linearen Gleichungssystems  $\eta = \mathfrak{A}\xi$  nach  $\xi$ ,

$\mathfrak{Y}$  mit der Auflösung des linearen Gleichungssystems  $\eta = \tilde{\mathfrak{A}}\xi$  nach  $\xi$ .

In jedem System, in dem sich nach 2 uneingeschränkt rechnen läßt (z. B. bei beschränkten Matrizen), gelten die Sätze:

$\alpha$ ) Besitzt  $\mathfrak{A}$  sowohl eine vordere als auch eine hintere Reziproke, so sind beide gleich und eindeutig bestimmt.

$\beta$ ) Besitzt  $\mathfrak{A}$  eine und nur eine hintere Reziproke, so ist diese auch vordere Reziproke und eindeutig bestimmt.

Speziell gilt für eine hermitesche Matrix  $\mathfrak{H}$ : Entweder existiert weder vordere noch hintere Reziproke oder genau eine zugleich vordere und hintere (hermitesche) Reziproke.

c) Für die Transformation der unendlichen Matrizen gilt das in 6a Gesagte. Die Eigenwerte werden als die Werte von  $\lambda$  definiert, für die die Resolvente nicht existiert. Wesentlich ist, daß i. a. die so definierten Eigenwerte auch einen kontinuierlichen Wertbereich erfüllen können (*Streckenspektrum*). Die Normalform (38) enthält in diesem Falle noch einen Summanden in der Form eines Integrals.

## C. Determinanten.

### 1. Definitionen.

Die *Determinante* einer quadratischen Matrix aus  $n \cdot n$  Elementen  $a_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, \dots, n$ ) ist die Summe aller Produkte

$$\varepsilon(r_1 r_2 \dots r_n) a_{1r_1} a_{2r_2} \dots a_{nr_n},$$

bei denen  $(r_1 r_2 \dots r_n)$  eine Permutation der Zahlen  $1, 2, \dots, n$  ist;  $\varepsilon(r_1 r_2 \dots r_n)$  ist dabei  $= +1$ , wenn die Permutation  $(r_1 r_2 \dots r_n)$  gerade,  $= -1$ , wenn sie ungerade ist (vgl. D 1, S. 95).

Die zur  $n$ -reihigen quadratischen Matrix  $\mathfrak{A} = (a_{ik})$  gehörende *Determinante  $n$ -ter Ordnung* (auch  $n$ -ten Grades) wird geschrieben

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(a_{ik}) = \det \mathfrak{A} = |a_{ik}| \quad (i, k = 1, \dots, n). \quad (1)$$

**Unterdeterminanten.** Die Determinante der quadratischen  $r$ -reihigen Matrix, die man aus einer  $(m, n)$ -reihigen Matrix  $\mathfrak{B}$  durch Streichen der  $m - r$  Zeilen  $i_1, i_2, \dots, i_{m-r}$  und der  $n - r$  Spalten  $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$  erhält, heißt *Unterdeterminante  $r$ -ten Grades* der Matrix  $\mathfrak{B}$ . Das Produkt dieser Unterdeterminante mit  $(-1)^{i_1 + \dots + i_{m-r} + k_1 + \dots + k_{n-r}}$  (der Exponent heißt Index der Unterdeterminante) heißt *Minor  $r$ -ten Grades* von  $\mathfrak{B}$ . Zu  $\mathfrak{B}$  gibt es  $\binom{m}{r} \cdot \binom{n}{r}$   $r$ -reihige Minoren bzw. Unterdeterminanten. Ist  $\mathfrak{B}$  quadratisch, so heißt die Unterdeterminante (der Minor)  $(n - r)$ -ten Grades, die durch Streichen gerade der eben stehen gebliebenen  $r$  Zeilen und  $r$  Spalten entsteht, die dazu *konjugierte Unterdeterminante* (bzw. Minor). Streicht man insbesondere aus der quadratischen Matrix  $(a_{ik})$  die  $i$ -te Zeile und die  $k$ -te Spalte und multipliziert die entstehende Unterdeterminante mit  $(-1)^{i+k}$ , so heißt das Produkt der Minor zum Element  $a_{ik}$  (geschrieben  $A_{ik}$ ).

### 2. Determinantensätze.

a) *Entwicklungssatz (LAPLACE).*

$$\det \mathfrak{A} = |a_{ik}| = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu h} A_{\nu h} = \sum_{\nu=1}^n a_{h \nu} A_{h \nu} \quad (h = 1, 2, \dots, n); \quad (2)$$

dagegen ist

$$\sum_{\nu=1}^n a_{\nu h} A_{\nu j} = \sum_{\nu=1}^n a_{h \nu} A_{j \nu} = 0, \quad h \neq j. \quad (3)$$

b) Den Wert *Null* hat eine Determinante, wenn

1. alle Elemente einer Reihe (Spalte oder Zeile)  $= 0$  sind, oder
2. alle Elemente einer Reihe dieselben Vielfachen der entsprechenden Elemente einer Parallelreihe sind, oder

3. alle Elemente einer Reihe dieselben linearen Kombinationen der entsprechenden Elemente von Parallelreihen sind, allgemeiner: wenn zwei oder mehr Reihen linear abhängig sind.

c) *Ungeändert* bleibt eine Determinante, wenn

1. man sie *transponiert*, d. h. alle  $a_{ik}$  durch  $a_{ki}$  ersetzt,

2. man zu den Elementen einer Reihe die entsprechenden einer Parallelreihe, bzw. ein bestimmtes Vielfaches derselben addiert.

d) Nur *ihr Vorzeichen ändert* eine Determinante, wenn man zwei ihrer Reihen miteinander vertauscht.

e) *Mit einem Faktor multipliziert* wird der Wert einer Determinante, wenn alle Elemente einer Reihe mit diesem Faktor multipliziert werden.

### 3. Multiplikation, Differentiation.

Das *Produkt*  $\det(a_{ik}) \cdot \det(b_{ik})$  ist gleich der Determinante  $\det(c_{ik})$ , deren Elemente auf eine bestimmte der folgenden vier verschiedenen Weisen gebildet sind ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) (rechts die entsprechende Matrixgleichung):

$$\left. \begin{aligned} 1. c_{ik} &= \sum_{\nu} a_{i\nu} b_{\nu k} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{in} b_{nk}; & \mathfrak{C} &= \mathfrak{A} \mathfrak{B} \\ 2. c_{ik} &= \sum_{\nu} a_{i\nu} b_{k\nu} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + \dots + a_{in} b_{kn}; & \mathfrak{C} &= \mathfrak{A} \tilde{\mathfrak{B}} \\ 3. c_{ik} &= \sum_{\nu} a_{\nu i} b_{k\nu} = a_{1i} b_{k1} + a_{2i} b_{k2} + \dots + a_{ni} b_{kn}; & \mathfrak{C} &= \tilde{\mathfrak{A}} \mathfrak{B} \\ 4. c_{ik} &= \sum_{\nu} a_{\nu i} b_{\nu k} = a_{1i} b_{1k} + a_{2i} b_{2k} + \dots + a_{ni} b_{nk}; & \mathfrak{C} &= \tilde{\mathfrak{A}} \tilde{\mathfrak{B}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Für die *Differentiation* einer Determinante gilt:

$$\frac{\partial |a_{ik}|}{\partial a_{hj}} = A_{hj} \quad (\text{vgl. 1 Schluß}), \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 |a_{ik}|}{\partial a_{hj} \partial a_{lm}} = - \frac{\partial |a_{ik}|}{\partial a_{hm} \partial a_{lj}}, \quad (6)$$

wenn alle  $a_{ik}$  voneinander unabhängige Veränderliche sind.

### 4. Abschätzung und Ränderung von Determinanten.

a) Es gilt nach HADAMARD für eine  $n$ -reihige Matrix:

$$|\det(a_{ik})|^2 \leq \prod_{i=1}^n (|a_{i1}|^2 + |a_{i2}|^2 + \dots + |a_{in}|^2).$$

b) Es ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & u_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & u_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n & w \end{vmatrix} = w \cdot |a_{ik}| - \sum_i \sum_k A_{ik} \cdot u_i \cdot v_k. \quad (7)$$

Ist speziell  $w = 1$  und sämtliche  $u_i = 0$  oder sämtliche  $v_i = 0$ , so ist der Wert  $= |a_{ik}|$ , d. h. gleich dem Wert der ursprünglichen Determinante.

### 5. Spezielle Determinanten (vgl. auch B 5, S. 86).

a) Für die sogenannte VANDERMONDESche Determinante gilt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{k,l \\ k>l}} (a_k - a_l), \quad (k, l = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$  sind beliebige Zahlen.

b) Eine symmetrische Determinante der Form:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \\ a_3 & a_4 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} = Z_n \text{ heißt } \textit{Zirkulante} \quad (9) \\ \text{oder } \textit{zyklische Determinante}$$

Ihr Wert ist gleich

$$Z_n = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \prod_{k=0}^{n-1} (a_1 + a_2 \omega^k + a_3 \omega^{2k} + \dots + a_n \omega^{(n-1)k}), \quad (10)$$

wobei  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$  ist (oder eine andere primitive  $n$ -te Einheitswurzel).

c) GRAMSche Determinante: Notwendig und hinreichend für die lineare Abhängigkeit der  $m$  Zahlen- $n$ -tupel (Vektoren)  $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$  (vgl. S. 80) ist das Verschwinden der GRAMSchen Determinante

$$\det(a_i a_k) = \det \left( \sum_{\nu=1}^n a_{i\nu} a_{k\nu}^* \right) = \begin{vmatrix} a_1^2 & (a_1 a_2) & \dots & (a_1 a_n) \\ (a_2 a_1) & a_2^2 & \dots & (a_2 a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n a_1) & (a_n a_2) & \dots & a_n^2 \end{vmatrix} = \det(\mathfrak{A} \mathfrak{A}^t) \quad (11)$$

wenn  $\mathfrak{A} = (a_{ik})$  ist.

### 6. Unendliche Determinanten.

Existiert der Grenzwert der Determinanten der  $q$ -ten Abschnitte einer unendlichen Matrix

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \det(a_{ik})_{[q]} = D,$$

so heißt  $D$  die Determinante der unendlichen Matrix  $(a_{ik})$ ;  $D$  ist dann eine konvergente unendliche Determinante. Sind dabei

$$\sum_{\substack{i,k=1 \\ i+k}}^{\infty} a_{ik} \quad \text{und} \quad \prod_{i=1}^{\infty} a_{ii} \quad \text{beide konvergent,}$$

so heißt die Determinante normal. Die Unterdeterminanten normaler Determinanten sind normal. Für normale Determinanten gelten die entsprechenden Sätze wie für endliche (vgl. 2 und 3).

## 7. Praktische Berechnung.

Man subtrahiere von den Elementen der  $i$ -ten Zeile der Determinante  $\det(a_{ik})$  die mit  $a_{i1}/a_{11}$  multiplizierten entsprechenden Elemente der ersten. Hierdurch wird der Wert von  $\det(a_{ik})$  nicht geändert. Führt man dies an allen Zeilen (außer der ersten) durch, so erhält man eine Determinante der Form

$$\det(a_{ik}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}. \quad (12)$$

In derselben Weise reduziert man die Determinante der  $b$  usw. Man erhält schließlich ein einfaches Produkt von  $n$  Zahlen als Wert von  $\det(a_{ik})$ . Hierbei ist es meist vorteilhaft, Vertauschungen von Reihen vorzunehmen (unter Beachtung der dabei auftretenden Vorzeichenwechsel) und jeweils möglichst große Faktoren abzusondern.

Man kann den Wert von  $\det(a_{ik})$  auch aus den Lösungen von linearen Gleichungssystemen finden. Man löse nacheinander folgende Systeme:

$$\begin{aligned} 1. & \quad a_{11} x_1 = 1 \\ 2. & \quad \begin{cases} a_{11} x_2 + a_{12} y_2 = 0 \\ a_{21} x_2 + a_{22} y_2 = 0 \end{cases} \\ 3. & \quad \begin{cases} a_{11} x_3 + a_{12} y_3 + a_{13} z_3 = 0 \\ a_{21} x_3 + a_{22} y_3 + a_{23} z_3 = 0 \\ a_{31} x_3 + a_{32} y_3 + a_{33} z_3 = 1 \quad \text{usw.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\det(a_{ik}) = \frac{1}{x_1 y_2 z_3 \cdots w_n}. \quad (13)$$

Die Berechnung von Determinanten und die Lösung von linearen Gleichungssystemen sind praktisch die gleichen Probleme.

## D. Kombinatorik.

### 1. Permutationen.

a)  $n$  verschiedene Elemente lassen  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$  ( $n$ -Fakultät) verschiedene Anordnungen (in einer Reihe) zu (*Permutationen*). Eine *Permutation* heißt *gerade* (*ungerade*), wenn sie sich durch eine gerade (ungerade) Anzahl von Vertauschungen von je zwei Elementen (*Transpositionen*) in die Ausgangsreihenfolge bringen läßt. Bei gerader (ungerader) Permutation der Zahlen  $1, 2, \dots, n$  ist auch die Gesamtanzahl der



auf jede Zahl in der Permutation noch folgenden kleineren Zahlen (Anzahl aller *Fehlstände*) gerade (ungerade).

b)  $n$  Elemente, darunter  $\alpha, \beta, \gamma$  usw. je unter sich gleiche, lassen  $\frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots}$  verschiedene Anordnungen zu (*Permutationen mit Wiederholungen*).

## 2. Kombinationen, Variationen.

a) Aus  $n$  verschiedenen Elementen lassen sich  $r$  verschiedene Elemente herausgreifen (ohne Rücksicht auf Anordnung) auf  $\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$  verschiedene Weisen (*Kombinationen*)

herausgreifen und anordnen auf  $\binom{n}{r} r! = \frac{n!}{(n-r)!}$  verschiedene Weisen (*Variationen*).

b) Darf von  $n$  verschiedenen Elementen jedes beliebig oft vorkommen, so lassen sich  $r$  Elemente

herausnehmen auf  $\binom{n+r-1}{r} = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{r!}$  verschiedene Weisen (*Kombinationen mit Wiederholung*)

herausnehmen und anordnen auf  $n^r$  verschiedene Weisen (*Variationen mit Wiederholungen*).

## 3. Binomialkoeffizienten.

$$\left. \begin{aligned} \binom{x}{m} &= \frac{x(x-1)\dots(x-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} = \binom{x}{m-1} \frac{x-m+1}{m}; \\ \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Speziell ist:

$$\binom{x}{0} = 1; \quad \binom{x}{1} = x; \quad \binom{n}{n-1} = n; \quad \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{m} = 0 \text{ für } m > n. \quad (2)$$

Es gelten die Regeln (Voraus.  $m \leq x, m \leq y$ ):

$$\binom{x+y}{m} = \binom{x}{m} \binom{y}{0} + \binom{x}{m-1} \binom{y}{1} + \dots + \binom{x}{0} \binom{y}{m} \quad (\text{Additionstheorem}). \quad (3)$$

Hieraus folgen:

$$\binom{x+1}{m} = \binom{x}{m} + \binom{x}{m-1} \quad (4)$$

$$\binom{2n}{n} = 1 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 \quad (5)$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \dots + \binom{k}{k}. \quad (6)$$

Hier bedeuten:  
 $k$  eine natürliche Zahl  $\leq n$   
 $m, n$  beliebige natürliche Zahlen  
 $x, y$  beliebige reelle oder komplexe Zahlen

Ferner gilt:

$$\binom{n}{0} \pm \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \pm \dots + (\pm 1)^n \binom{n}{n} = (1 \pm 1)^n = \begin{cases} 2^n \\ 0 \end{cases}. \quad (7)$$

Das Verhalten von  $\binom{n}{k}$ , besonders für große  $n$  und  $k$ , zeigt:

$$\binom{n}{k} = e^{-\frac{n-1}{2}z^2} \cdot \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}} \cdot F_n; \quad z = \frac{\left| \frac{n-k}{2} \right|}{\frac{n}{2}}; \quad z \ll \sqrt[3]{\frac{1}{n}} \quad (8)$$

mit  $F_n = e^{\Theta \frac{nz^3}{1-z}} = 1 + \Theta \frac{nz^3}{1-z} + \dots; \quad -\frac{1}{2} < \Theta < \frac{1}{2}.$

Die Annäherung ist um so besser, je näher  $k$  an  $\frac{n}{2}$  liegt. Ist  $k \ll n$ , so gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} \cdot e^{-\Theta \frac{k^2}{n-k}}; \quad 0 < \Theta < \frac{1}{2}. \quad (9)$$

### Fünfter Abschnitt.

## Transformationen.

### A. Allgemeine Transformationen.

#### 1. Allgemeines.

a) Eine Transformation ordnet einem Wertsystem  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ein anderes zu:  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$  durch ein System von Gleichungen der Form:

$$x'_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \quad x'_2 = f_2(x_1, \dots, x_n), \quad \dots, \quad x'_n = f_n(x_1, \dots, x_n). \quad (1)$$

Umkehrung. Im folgenden sollen die Funktionen  $f_i$  stetige, differenzierbare Funktionen sein, deren Funktionaldeterminante, die *Transformationsdeterminante*,

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right) \quad (2)$$

für die zu transformierenden Wertsysteme von Null verschieden sei. Dann ist das Gleichungssystem (1) nach den  $x_i$  auflösbar; die Gleichungen

$$x_i = F_i(x'_1, \dots, x'_n) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3)$$

stellen die *inverse* Transformation dar, die (1) rückgängig macht. Die Transformation (1) ist dann *umkehrbar*.

b) Gruppeneigenschaft. Die umkehrbaren Transformationen einer Mannigfaltigkeit bilden eine Gruppe (vgl. S. 152): Zwei nacheinander ausgeführte Transformationen  $S$  und  $T$  sind einer einzigen,

$TS$ , gleichwertig. Im allgemeinen ist  $TS \neq ST$ . Das Einheitslement der Gruppe ist die identische Transformation  $E$ :

$$x_i = x'_i \quad (i = 1, \dots, n); \quad (4)$$

das reziproke Element zu  $S$  ist die inverse Transformation  $S^{-1}$  (3), mit  $SS^{-1} = S^{-1}S = E$ .

## 2. Geometrische Bedeutung.

Eine Transformation kann geometrisch gedeutet werden als:

a) Eine *Koordinatenänderung*, d. h. der Übergang von der Beschreibung durch die Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  zur Beschreibung durch  $x'_1, \dots, x'_n$ . Die  $x_i$  und die  $x'_i$  sind die Koordinaten desselben Punktes in verschiedenen Koordinatensystemen. Sind die  $f_i$  beliebige differenzierbare Funktionen, so erhält man, ausgehend von einem kartesischen Koordinatensystem, i. a. ein krummliniges Koordinatensystem.

b) Eine *Verzerrung* der Mannigfaltigkeit, d. h. eine *Abbildung* der Mannigfaltigkeit *auf sich*, eine *Verschiebung* des Punktes  $x_i$  in einen anderen  $x'_i$  desselben Koordinatensystems. I. a. gehen gerade Linien in krumme über.

c) Eine Abbildung der  $x_1 \dots x_n$ -Mannigfaltigkeit auf die  $x'_1 \dots x'_n$ -Mannigfaltigkeit. Bei beliebigen (differenzierbaren) Funktionen  $f_i$  braucht die Abbildung *im Großen* nicht eindeutig zu sein, dem System  $x_1, \dots, x_n$  können mehrere verschiedene Systeme  $x'_1, \dots, x'_n$  entsprechen und umgekehrt. Im Kleinen ist die Abbildung stets eindeutig (wenn die Transformationsdeterminante  $\neq 0$ ), d. h. eine *kleine Umgebung* eines Punktes  $x_i$  wird stets umkehrbar eindeutig auf eine kleine Umgebung des Punktes  $x'_i$  abgebildet.

Die *Transformationsdeterminante* gibt stets das infinitesimale Volumvergrößerungsverhältnis, das Verhältnis ineinander transformierter Volumelemente an (vgl. S. 11)

$$\frac{dV'}{dV} = \frac{\partial(x'_1, \dots, x'_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}.$$

## 3. Invarianten.

Der Charakter einer Transformation  $T: x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$  ergibt sich aus denjenigen Eigenschaften des Transformierten, die der Transformation  $T$  gegenüber *invariant* sind, d. h. durch  $T$  nicht geändert werden. Für die Funktionen, welche diese Eigenschaften beschreiben, gilt:

$$K(x_1, \dots, x_n, z, t, \dots) = \kappa \cdot K(x'_1, \dots, x'_n, z', t', \dots), \quad (5)$$

d. h. setzt man an Stelle der ursprünglichen Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  bzw. Variablen  $z, t, \dots$  die transformierten  $x'_1, \dots, x'_n, z', t', \dots$  ein, so bleiben die Funktionen ihrem Wert nach, bis auf einen nur von den

Parametern der Transformation abhängigen Faktor  $\kappa$  erhalten. Die Funktionen  $K(x_1, \dots, x_n, z, t, \dots)$  heißen, besonders wenn keine Variablen  $z, t, \dots$  auftreten, *Invarianten*, sonst auch *Kovarianten*. Gleichungen und Gleichungssysteme, welche bei Transformation ungeändert bleiben, heißen *kovariant*.

Nach den zugehörigen Invarianten teilt man die Transformationen einer Mannigfaltigkeit in Klassen ein. Die Transformationen einer Klasse bilden eine Gruppe. *Vollständig* heißt ein System von unabhängigen Invarianten, das zur Kennzeichnung einer Klasse von Transformationen ausreicht; jede weitere Invariante der Transformationen dieser Klasse läßt sich aus den Invarianten eines vollständigen Systems herleiten. Zur spezielleren Klasse gehören mehr unabhängige Invarianten.

Mit Hilfe der Invarianten entscheidet man ferner, wann zwei gegebene Mannigfaltigkeiten durch Transformationen einer gegebenen Klasse ineinander transformiert werden können. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn die Werte der Invarianten eines vollständigen Invariantensystems dieser Klasse bei beiden Mannigfaltigkeiten übereinstimmen.

Die Invarianten bei *Koordinatentransformation* heißen auch *Skalare*, wie z. B. der Abstand zweier Punkte, der Inhalt einer Fläche; besonders wichtig ist das Linien- oder Bogenelement,  $ds = \sqrt{\sum_{i,k} g_{ik} dx_i dx_k} = \sqrt{\sum_{i,k} g'_{ik} dx'_i dx'_k}$ . Kennt man die Abhängigkeit der  $g_{ik}$  von den  $x_i$ , so sind dadurch auch alle Maßverhältnisse innerhalb der durch die  $x_i$  beschriebenen Mannigfaltigkeit festgelegt.

## B. Lineare Transformationen.

### I. Lineare Räume.

a) Ein  $n$ -dimensionaler *linearer* oder *affiner* Raum umfaßt alle durch  $n$  Koordinaten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  in bezug auf ein festes Koordinatensystem gegebenen Punkte (*Punktraum*) oder alle Vektoren  $\xi = (x_1, \dots, x_n)$  (*Vektorraum*). Durch eine lineare Transformation

$$x'_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k, \quad \xi' = \mathfrak{A} \xi, \quad (6)$$

geht er in sich über, wird er auf sich abgebildet. Jedem Punkt (bzw. Vektor) wird ein anderer Punkt (bzw. Vektor) zugeordnet, und zwar umkehrbar eindeutig. Die Matrix  $\mathfrak{A} = (a_{ik})$  stellt den Operator dar, der diese Abbildung erzeugt.

b) Unitärer Raum. Sind  $x_1, x_2, \dots, x_n$  beliebige komplexe Zahlen und wird die Länge  $|\xi|$  eines Vektors  $\xi$  durch die hermitesche Einheitsform

$$|\xi|^2 = \sum_{i=1}^n x_i x_i^* \quad (x_i^* \text{ konj. komplex zu } x_i) \quad (7)$$

gegeben, so heißt der lineare Raum *unitärer Raum*, da (7) gegen unitäre Transformationen invariant ist.

Das *innere* oder *skalare* Produkt der Vektoren  $\xi$  und  $\eta$  wird durch

$$(\xi, \eta) = \sum_{\nu=1}^n x_\nu y_\nu^* = (\eta, \xi)^* \tag{8}$$

erklärt. Es ist  $(\xi, \xi) = |\xi|^2$ ,

$$|(\xi, \eta)| \leq |\xi| \cdot |\eta|, \quad |\xi + \eta| \leq |\xi| + |\eta|, \tag{9}$$

$\xi$  und  $\eta$  heißen orthogonal, wenn  $(\xi, \eta) = (\eta, \xi) = 0$  ist.  $n + 1$  Vektoren im  $n$ -dimensionalen Raum sind stets linear abhängig;  $n$  linear unabhängige Vektoren  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , lassen sich orthogonalisieren, d. h. in ein vollständiges System normierter orthogonaler Vektoren überführen. Man setzt (für  $k = 1, \dots, n$ )  $\eta_k = \lambda_{k1} \xi_1 + \lambda_{k2} \xi_2 + \dots + \lambda_{kk} \xi_k$  und bestimmt  $\lambda_{k1}, \dots, \lambda_{kk}$  aus den  $k$  linearen Gleichungen  $(\eta_1, \eta_k) = 0, \dots, (\eta_{k-1}, \eta_k) = 0, (\eta_k, \eta_k) = 1$ . Die Koordinatenachsenvektoren  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$  bilden ein vollständiges System normierter orthogonaler Vektoren, jedes solche läßt sich unitär in dieses transformieren.

Der unitäre Raum mit abzählbar unendlich vielen Dimensionen, der aus allen Punkten bzw. Vektoren  $(x_1, x_2, \dots)$  besteht, für die  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i x_i^*$  konvergiert, heißt HILBERTScher (unitärer) Raum.

## 2. Allgemeine lineare Transformationen.

a) Darstellung. Eine homogene lineare Transformation des Wertsystems  $x_1, \dots, x_n$  wird dargestellt durch

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \\ x'_2 &= a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x'_n &= a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n \end{aligned} \right\} \xi' = \mathfrak{A} \xi, \quad (a_{ik}) = \mathfrak{A}. \tag{10}$$

Sie ist durch die Matrix  $\mathfrak{A}$  eindeutig bestimmt und werde kurz mit  $A$  bezeichnet. Wird nach der Transformation mit der Matrix  $\mathfrak{A}$  die mit  $\mathfrak{B}$  ausgeführt, so ergibt sich die Transformation  $BA$  mit der Matrix  $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ .  $A$  und  $B$  sind i. a. nicht vertauschbar. Die Matrix  $\mathfrak{A}^{-1}$  der inversen Transformation ist die Reziproke zu  $\mathfrak{A}$ . Die identische Transformation hat die Einheitsmatrix  $\mathfrak{E}$ . Die Gesamtheit der umkehrbaren homogenen linearen Transformationen entspricht eindeutig der Gesamtheit der nichtentarteten Matrizen. Die Transformationsdeterminante ist konstant  $= \det \mathfrak{A}$ , das Volumen wird also in der ganzen Mannigfaltigkeit im gleichen Verhältnis vergrößert.

b) Normalform. Die durch (10) gegebene lineare Abbildung wird im Koordinatensystem der  $y_i$  durch

$$y'_i = \sum_{\nu} b_{i\nu} y_{\nu} \quad \text{mit} \quad (b_{ik}) = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}^{-1} \mathfrak{A} \mathfrak{C} \quad (11)$$

gegeben, wenn  $x_i = \sum_{\nu} s_{i\nu} y_{\nu}$  ist. Äquivalente Matrizen stellen also die gleiche lineare Abbildung, nur in verschiedenen Koordinatensystemen dar. Sind die Eigenwerte  $\lambda_i$  der Matrix  $\mathfrak{A}$  alle voneinander verschieden oder ist  $\mathfrak{A}$  symmetrisch oder hermitesch, so läßt sich (vgl. IV B 6c, S. 89) das Koordinatensystem  $y_i$  (d. h.  $\mathfrak{C}$ ) so wählen, daß die Abbildung durch die einfachen Gleichungen

$$y'_i = \lambda_i y_i \quad (\text{Normalform der linearen Abbildung}) \quad (12)$$

gegeben ist. Die neuen Koordinatenachsen sind die Fixgeraden der Abbildung. In den anderen Fällen ist die Normalform nicht ganz so einfach (vgl. IV B 6c, S. 89).

c) Eigenschaften. Die transformierten Mannigfaltigkeiten seien im folgenden stets durch ein kartesisches Koordinatensystem beschrieben.

$\alpha$ ) Projektive Abbildung. Geometrisch stellt eine lineare Transformation eine kollineare (projektive) Abbildung dar. Sind in (10) die  $x_1, \dots, x_n$  homogene Koordinaten eines  $(n-1)$ -dimensionalen (projektiven) Raumes, so stellt (10) die *allgemeine Kollineation* dieses Raumes dar.

Bei *kollinear*er Abbildung sind *invariant*:

das Doppelverhältnis von vier Elementen (Geraden, Punkten),  
der Grad algebraischer Kurven und Flächen.

Es gilt also:

Gerade, Ebenen, Strahlenbüschel usw., ferner Kegelschnitte, überhaupt Kurven und Flächen 2. Ordnung bleiben solche.

Die unendlichfernen Elemente gehen i. a. in endliche über, Systeme paralleler Geraden in Strahlenbüschel.

Ein kartesisches Koordinatensystem geht in ein projektives, bestehend aus  $n-1$  Strahlen- (bzw. Ebenen-) Büscheln über.

$\beta$ ) Affine Abbildung (Ähnlichkeitstransformation). Sind in (10)  $x_1, \dots, x_n$  inhomogene Koordinaten eines  $n$ -dimensionalen Raumes, also mit den entsprechenden homogenen Koordinaten  $\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$  verknüpft durch:

$$x_1 = \frac{\xi_1}{\xi_{n+1}}, \quad x_2 = \frac{\xi_2}{\xi_{n+1}}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\xi_n}{\xi_{n+1}}; \quad x'_1 = \frac{\xi'_1}{\xi'_{n+1}}, \quad \dots, \quad x'_n = \frac{\xi'_n}{\xi'_{n+1}}, \quad (13)$$

so gilt die Normalform (12). Die Abbildung besteht in einer Dehnung in Richtung jeder Fixgeraden; der dieser Fixgeraden entsprechende Eigenwert gibt die Dehnungsgröße.

Die *Translation*

$$x'_i = x_i + a_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (14)$$

liefert eine kongruente Abbildung; sie stellt eine Parallelverschiebung dar. Alle Entfernungen sind invariant. Mit (10) zusammen liefert sie die *allgemeine* affine Abbildung des  $n$ -dimensionalen Raumes:

$$x'_i = \sum_{k=1}^n a_{i k} x_k + a_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (15)$$

### 3. Orthogonale Transformationen, Drehung.

Eine reelle Transformation (10) heißt *orthogonal*, wenn sie  $\sum_i x_i^2$  invariant läßt:

$$\sum_i x_i'^2 = \sum_i x_i^2 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (16)$$

Dann gehen alle Kreise (Kugeln) um den Nullpunkt in sich über; es gelten die für orthogonale Transformationen kennzeichnenden *Orthogonalitätsbedingungen*:

$$\left. \begin{aligned} \sum_v a_{v k}^2 &= 1, & \sum_v a_{k v}^2 &= 1, & (v, k &= 1, \dots, n) \\ \sum_v a_{v k} a_{v l} &= 0, & \sum_v a_{k v} a_{l v} &= 0, & k &\neq l \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

welche sich in der Matrixgleichung

$$\tilde{\mathfrak{D}} \mathfrak{D} = \mathfrak{D} \tilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{E} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{D} = (a_{i k}) \quad (17a)$$

zusammenfassen lassen (vgl. IV B 6d, S. 90). Eine orthogonale Transformation hat  $\frac{1}{2} n(n-1)$  unabhängige Koeffizienten.

*Unitäre* Transformationen lassen  $\sum_i x_i x_i^*$  invariant. Für sie gilt analog (13)  $\sum_v a_{v i} a_{v k}^* = \sum_v a_{i v} a_{k v}^* = \delta_{i k}$  (vgl. IV B 6d).

Geometrisch bedeutet eine orthogonale Transformation eine Drehung ( $\det \mathfrak{D} = 1$ ) oder Drehung mit Spiegelung ( $\det \mathfrak{D} = -1$ ), wenn die  $x_i$  kartesische Koordinaten sind. Die Entfernung zweier beliebiger Punkte bleibt ungeändert. Es ist

$$a_{i k} = \cos(x'_i, x_k), \quad (18)$$

wenn  $(x'_i, x_k)$  der Winkel zwischen  $x'_i$ -Achse und  $x_k$ -Achse ist.

$n = 3$ . Jede orthogonale Transformation im Raum läßt sich als Drehung um eine feste Achse darstellen; deren Richtungskosinus sind:

$$c_i = \cos \alpha_i = \sqrt{\frac{a_{i i} - \cos \delta}{1 - \cos \delta}} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (19)$$

wobei  $\delta$  der Drehwinkel ist, der durch

$$\cos \delta = \frac{1}{2} (a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1) \quad (20)$$

gegeben ist. Umgekehrt stellt sich die Drehung um den Winkel  $\delta$  um eine Achse, deren Richtungskosinus  $c_i = \cos \alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sind, dar:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x_1 (1 - \sin^2 \alpha_1 (1 - \cos \delta)) + x_2 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 (1 - \cos \delta) + \\ &\quad + \cos \alpha_3 \sin \delta) + x_3 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 (1 - \cos \delta) - \cos \alpha_2 \sin \delta) \\ x'_2 &= x_1 (\cos \alpha_2 \cos \alpha_1 (1 - \cos \delta) - \cos \alpha_3 \sin \delta) + \\ &\quad + x_2 (1 - \sin^2 \alpha_2 (1 - \cos \delta)) + \\ &\quad + x_3 (\cos \alpha_2 \cos \alpha_3 (1 - \cos \delta) + \cos \alpha_1 \sin \delta) \\ x'_3 &= x_1 (\cos \alpha_3 \cos \alpha_1 (1 - \cos \delta) + \cos \alpha_2 \sin \delta) + \\ &\quad + x_2 (\cos \alpha_3 \cos \alpha_2 (1 - \cos \delta) - \cos \alpha_1 \sin \delta) + \\ &\quad + x_3 (1 - \sin^2 \alpha_3 (1 - \cos \delta)) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

oder durch (6) mit

$$a_{ik} = \delta_{ik} \cos \delta + c_i c_k (1 - \cos \delta) + c_{ik} \sin \delta, \quad (21a)$$

$$(\delta_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (c_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ -c_3 & 0 & c_1 \\ c_2 & -c_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Invariant bleibt außer  $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  auch

$$p = x_1 \cos \alpha_1 + x_2 \cos \alpha_2 + x_3 \cos \alpha_3;$$

$p$  ist nämlich die Projektion von  $r$  auf die Drehachse.

Für kleine Drehwinkel  $\delta$  wird:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + y \cdot \delta \cdot \cos \alpha_3 - z \cdot \delta \cdot \cos \alpha_2 \\ y' &= -x \cdot \delta \cdot \cos \alpha_3 + y + z \cdot \delta \cdot \cos \alpha_1 \\ z' &= x \cdot \delta \cdot \cos \alpha_2 - y \cdot \delta \cdot \cos \alpha_1 + z \end{aligned} \right\} \quad (22) \quad a_{ik} = \delta_{ik} + c_{ik} \delta$$

#### 4. Transformation quadratischer und hermitescher Formen.

Bei der linearen Transformation  $x_i = \sum_{\nu} b_{i\nu} x'_{\nu}$ ,  $(b_{ik}) = \mathfrak{B}$ , geht die quadratische Form  $Q = \sum_{i,k} q_{ik} x_i x_k$  mit der symmetrischen Matrix  $\mathfrak{Q} = (q_{ik})$  über in  $Q' = \sum_{i,k} q'_{ik} x'_i x'_k$  mit  $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{B} \mathfrak{Q} \mathfrak{B}$ .  $\mathfrak{Q}$  und  $\mathfrak{Q}'$  haben (wenn  $\det \mathfrak{B} \neq 0$ ) stets den gleichen Rang  $r$  (Rang der quadratischen Form). Analog für hermitesche Formen  $H = \sum_{i,k} h_{ik} x_i x_k^*$ ,  $\mathfrak{H}' = \mathfrak{B}^\dagger \mathfrak{H} \mathfrak{B}$ .

Jede quadratische Form vom Rang  $r$  läßt sich linear in die Einheitsform  $x_1^2 + \dots + x_r^2$  transformieren. Alle quadratischen Formen gleichen Ranges lassen sich linear ineinander transformieren.



*Reelle quadratische Formen* (alle  $q_{ik}$  reell) lassen sich *reell* (alle  $b_{ik}$  reell) in  $x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$  transformieren. Hermitesche Formen lassen sich stets in  $x_1 x_1^* + \dots + x_p x_p^* - x_{p+1} x_{p+1}^* - \dots - x_r x_r^*$  transformieren. Der *Trägheitsindex*  $p$  ist dabei für die Ausgangsform fest bestimmt und bei reellen (bei  $\xi$  bei allen) Transformationen invariant. Ist  $p = r$ , so nimmt die Form für beliebige  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (nicht alle  $x_i = 0$ ) nur positive (bei  $p = 0$  nur negative) Werte an; sie heißt dann *positiv (negativ) definit*.

*Orthogonal* lassen sich quadratische Formen in  $\sum_i \lambda_i x_i^2$  transformieren, wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die Eigenwerte der Matrix der Form sind. *Unitär* lassen sich hermitesche Formen in  $\sum_i \lambda_i x_i x_i^*$  transformieren. Die Matrix der orthogonal (unitär) transformierten Form ist die transformierte Matrix der Ausgangsform [wegen (17a)]; vgl. daher IV B 6d, S. 90.

## C. Berührungstransformation (Kontakttransformation).

### 1. Im Zweidimensionalen.

#### a) Allgemeines.

Durch eine Gleichung der Form:

$$W(x, y, X, Y) = 0 \quad (\text{aequatio directrix}) \quad (1)$$

wird jedem Punkt der  $xy$ -Ebene eine Kurve in der  $XY$ -Ebene zugeordnet und umgekehrt, sowie einer Kurve  $\varphi(x, y) = 0$  bzw.  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  eine Kurvenschar:  $F(X, Y, t) = 0$ , deren Enveloppe als Abbild der Kurve  $\varphi = 0$  aufgefaßt werden kann.

Der Name „Berührungstransformation“ stammt daher, daß die Abbilder zweier sich berührender Kurven wieder zwei solche sind.

Die Gleichung des Abbildes der Kurve  $\varphi = 0$  findet man durch Elimination von  $t$  aus den Gleichungen  $F = 0$  und  $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$  oder durch Elimination von  $x$  und  $y$  aus  $W = 0$  und

$$\frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Während sich hierbei die Punkte der  $xy$ -Ebene und der  $XY$ -Ebene nicht eindeutig entsprechen, tun dies die Punkte einer gegebenen Kurve  $\varphi = 0$  und die ihres Abbildes (so daß man letztere mit dem gleichen Parameter  $t$  darstellen kann).

Schreibt man  $\frac{dy}{dx} = p$ ,  $\frac{dY}{dX} = P$ , so findet man aus den drei Gleichungen:

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial X} + P \cdot \frac{\partial W}{\partial Y} = 0,$$

die obige Transformation auch in der Form:

$$X = X(x, y, p), \quad Y = Y(x, y, p), \quad P = P(x, y, p), \quad (2)$$

wobei der Ausdruck:

$$\frac{\partial X}{\partial p} \left( \frac{\partial Y}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} \right) - \frac{\partial Y}{\partial p} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial X}{\partial y} \right) = 0 \quad (3)$$

sein muß.

### b) Die LEGENDRESche Transformation

ist ein einfaches Beispiel. Sie ist definiert durch

$$xX - y - Y = 0 \quad (4)$$

und liefert die einfachen Beziehungen:

$$p = X, \quad P = x, \quad xp - y = Y, \quad XP - Y = y. \quad (5)$$

Sie findet Anwendung zur Umformung von Differentialgleichungen  $f(x, y, p) = 0$  in eine evtl. leichter lösbare Form:  $f(P(XP - Y), X) = 0$ , d. h. es wird hier der Differentialquotient zur unabhängigen Variablen  $X$  gemacht (vgl. S. 173).

### c) Die kanonische Transformation

ist eine für die Mechanik wichtige Berührungstransformation, definiert durch:

$$z - Z = \Phi(q, Q), \quad (6)$$

wo  $\Phi$  eine beliebige Funktion sei. Sie heißt „erzeugende Funktion“. Setzen wir

$$p = \frac{dz}{dq}, \quad P = \frac{dZ}{dQ},$$

so folgt:

$$p dq - P dQ = d\Phi \quad \text{bzw.} \quad p = \frac{\partial \Phi}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q}. \quad (7)$$

Diese Transformation heißt *kanonisch*, weil sie die sogenannten kanonischen Differentialgleichungen der Mechanik (vgl. S. 233):

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p}, \quad \dot{p} = \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q} \quad (8)$$

(wo der Parameter  $t$  die Zeit bedeutet und  $H$  die HAMILTONSche Funktion der Lagenkoordinate  $q$  und der Impulskoordinate  $p$  ist) in ein analoges System in  $Q$  und  $P$  überführt.

Zum Beweis bilde man die Variation der durch  $dt$  dividierten Gleichung (7), welche lautet:

$$p \delta \dot{q} + q \delta \dot{p} - P \delta \dot{Q} - \dot{Q} \delta P - \delta \dot{\Phi} = 0,$$

und die man wegen  $(\delta \Phi)' = \delta \dot{\Phi}$  auch in der Form schreiben kann:

$$(p \delta q - P \delta Q - \delta \Phi)' - \dot{p} \delta q + \dot{P} \delta Q + q \delta \dot{p} - \dot{Q} \delta P = 0. \quad (9)$$

Hierin verschwindet der Klammerausdruck wegen (7).

Setzt man ferner

$$H(q, p) = K(Q, P),$$

so wird

$$\frac{\partial H}{\partial q} \delta q + \frac{\partial H}{\partial p} \delta p - \frac{\partial K}{\partial Q} \delta Q - \frac{\partial K}{\partial P} \delta P = 0,$$

und Subtraktion von (9) unter Berücksichtigung von (8) ergibt unmittelbar:

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}; \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}, \quad (8')$$

also wieder ein kanonisches System in den neuen Variablen.

Äquivalent zu den Definitionsgleichungen (7) sind auch folgende:

$$\left. \begin{aligned} p dq + Q dP &= dX(q, P) \\ q dp + P dQ &= d\Psi(p, Q) \\ q dp - Q dP &= d\Omega(p, P) \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

Die Transformation wird identisch, d. h.  $p = P$ ,  $q = Q$ , wenn  $X = q \cdot P$  oder  $\Psi = p \cdot Q$ .

Setzt man die Transformation an in der Form:

$$p = p(P, Q), \quad q = q(P, Q),$$

so folgt aus (7) bzw. (7'), daß

$$\frac{\partial p}{\partial P} = \frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \frac{\partial p}{\partial Q} = -\frac{\partial P}{\partial q}, \quad \frac{\partial q}{\partial Q} = \frac{\partial P}{\partial p}, \quad \frac{\partial q}{\partial P} = -\frac{\partial Q}{\partial p}, \quad (10)$$

also auch

$$\frac{\partial p}{\partial P} \cdot \frac{\partial q}{\partial Q} - \frac{\partial p}{\partial Q} \cdot \frac{\partial q}{\partial P} = 1, \quad (10')$$

d. h. die Transformationsdeterminante  $\frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)}$  ist = 1, die Abbildung der  $pq$ -Ebene auf die  $PQ$ -Ebene ist flächentreu.

**Sonderfälle:** I. Eine *infinitesimale kanonische Transformation* ist gegeben durch

$$Q = q + \lambda \frac{\partial F(q, p)}{\partial p}, \quad P = p - \lambda \cdot \frac{\partial F(q, p)}{\partial q}, \quad (11)$$

wo  $\lambda$  eine sehr kleine Konstante sei.

Z. B. ist auch

$$\begin{aligned} Q &= q + \dot{q} dt = q + \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} \cdot dt \\ P &= p + \dot{p} dt = p - \frac{\partial H}{\partial q} \cdot dt \end{aligned}$$

eine kanonische Transformation und wegen der Gruppeneigenschaft (vgl. S. 97) der Transformation auch

$$q = q_0 + \int_{t_0}^t \dot{q} dt, \quad p = p_0 + \int_{t_0}^t \dot{p} dt \quad (12)$$

eine solche der  $q_0, p_0$  in die  $q, p$ .

Es gilt daher

$$\dot{p} = \frac{\partial S(q_0, q)}{\partial q}, \quad \dot{p}_0 = -\frac{\partial S(q_0, q)}{\partial q_0}. \quad (13)$$

$S$  heißt in der Mechanik „*Wirkungsfunktion*“ (vgl. S. 233). Dort wird sie in der Regel definiert durch:

$$S = \int_{t_0}^t (\dot{p} \dot{q} - H) dt = \int_{t_0}^t L dt.$$

$L = \dot{p} \dot{q} - H$  heißt „*LAGRANGESche Funktion*“.

In der Tat findet man auch hieraus mit Benutzung von (8):

$$\delta S = \dot{p} \delta q - \dot{p}_0 \delta q_0.$$

2. Von besonderem Interesse ist eine kanonische Transformation, welche  $K(Q, P)$  nur von  $P$  abhängig macht, z. B.  $K(Q, P) = \omega P$ .

Dann wird

$$\left. \begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial K}{\partial P} = \omega, & Q &= \omega t + \alpha \\ \dot{P} &= -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0, & P &= \beta \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

wo  $\omega, \alpha, \beta$  Konstanten sind.

Man erhält hier also eine sehr einfache Lösung der transformierten HAMILTONSchen Gleichung und somit durch Rücktransformation die Lösung der ursprünglichen.

Wenn bei der mechanischen Anwendung  $Q$  eine reine (dimensionslose) Zahl bzw. ein Winkel ist, derart daß  $q$  und  $\dot{p}$  als Funktionen von  $Q$  mit  $2\pi$  periodisch sind, heißt  $Q$  eine *Winkelvariable* (Beispiel vgl. Anhang, 4).

#### d) Eine Verallgemeinerung

kann die Theorie noch in der Richtung erfahren, daß die kanonische Transformation von  $t$  selbst abhängt, d. h. daß die Formeln  $\dot{p} = \dot{p}(Q, P, t)$ ,  $q = q(Q, P, t)$  lauten, also  $t$  explizite enthalten.

Die einfachste Form ist hierfür:

$$\dot{p} = P + At, \quad q = Q + Bt, \quad (16)$$

wo  $A$  und  $B$  beliebige Konstante sind.

Diese Transformation ist kanonisch, wenn man setzt:

$$K(P, Q) = H(\dot{p}, q) + (Aq - B\dot{p}). \quad (16')$$

Sie liefert mit einer zeitunabhängigen Transformation auf neue Variable  $P', Q'$  kombiniert die allgemeinere:

$$\dot{p} = P(P', Q') + At, \quad q = Q(P', Q') + Bt \quad (17)$$

mit

$$K'(P', Q') = K(P, Q) = H(\dot{p}, q) + (Aq - B\dot{p}). \quad (17')$$

Man erhält so Transformationen auf bewegte Koordinatensysteme.

Dies kann man benutzen, wenn die Reduktion des vorigen Paragraphen nur bis zu einer Form  $K(P, Q) = K_0(P) + K_1(P, Q)$  zu führen ist, wo  $K_1$  klein gegen  $K_0$  sei.

Dann hat man:

$$\dot{Q} = \frac{\partial K_0}{\partial P} + \frac{\partial K_1}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial K_1}{\partial Q}, \quad P = \beta_0 - \int_{t_0}^t \frac{\partial K_1}{\partial Q} dt.$$

Wenn nun  $\int_{t_0}^t \frac{\partial K_1}{\partial Q} dt$  klein gegen  $\beta_0$  ist, kann man durch die Transformation:

$$Q = \omega t + \alpha, \quad P = \beta_0 + \beta \quad (18)$$

$\alpha$  und  $\beta$  als neue Variable einführen, die dann selbst als kleine Größen zu behandeln sind.

Das führt nach obigem auf die Form:

$$K(P, Q) = \Omega(\alpha, \beta) - \omega(\beta_0 + \beta)$$

und

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta}, \quad \dot{\beta} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}.$$

Die Größen  $\alpha$  und  $\beta$  sind also wieder kanonische Variable mit der HAMILTONSchen Funktion  $\Omega$ .

$\Omega$  heißt „Störungsfunktion“.

Die Methode heißt die der „Variation der Konstanten“.

## 2. Im Mehrdimensionalen.

Hier lautet die aequatio directrix:

$$W(x_1 x_2 \dots x_n X_1 X_2 \dots X_n) = 0. \quad (19)$$

Die LEGENDRESche Transformation im Dreidimensionalen ist gegeben durch:

$$xX + yY - z - Z = 0. \quad (20)$$

Hieraus folgt, wenn man  $z$  bzw.  $Z$  als von  $x, y$  bzw.  $X, Y$  abhängige Variablen auffaßt:

$$X = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad x = \frac{\partial Z}{\partial X}, \quad y = \frac{\partial Z}{\partial Y} \text{ usw.} \quad (20')$$

$$dz = X dx + Y dy, \quad dZ = x dX + y dY.$$

Die kanonische Transformation kann ohne Schwierigkeiten auf mehr Dimensionen verallgemeinert werden (vgl. Anhang, 5.); (7) geht über in:

$$\sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i dQ_i = d\Phi(q_1 q_2 \dots q_n, Q_1 Q_2 \dots Q_n), \text{ wo } i = 1, 2, \dots, n, \quad (21)$$

also

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q_i}. \quad (22)$$

Bis auf die zu setzenden Summenzeichen bleibt alles ungeändert; Gleichung (10) und (10') sind in folgender Weise zu erweitern:

$$\frac{\partial p_i}{\partial P_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial Q_k} = -\frac{\partial P_k}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} = \frac{\partial P_k}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial P_k} = -\frac{\partial Q_k}{\partial p_i}. \quad (23)$$

Daher wird

$$\sum_i \left( \frac{\partial p_i}{\partial P_k} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial x} - \frac{\partial p_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial P_k} \right) = \sum_i \left( \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial x} + \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial x} \right) = \frac{\partial Q_k}{\partial x} \quad (24)$$

= 1 für  $x = Q_k$  und sonst = 0, wenn man für  $x$  andere  $P$  oder  $Q$  außer  $Q_k$  einsetzt.

Der Ausdruck

$$(x, y) = \sum_i \left( \frac{\partial q_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial y} - \frac{\partial p_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial y} \right)$$

heißt „LAGRANGESche Klammer“. Es ist also

$$(Q_k, P_j) = -(P_j, Q_k) = \delta_{jk} \quad (Q_k, Q_j) = (P_k, P_j) = 0. \quad (25)$$

Sechster Abschnitt.

## Vektoranalysis.

### A. Koordinatenfreie Formulierung der Vektoranalysis im dreidimensionalen euklidischen Raum.

#### 1. Definitionen.

Die Vektoranalysis beschäftigt sich mit Skalaren, Vektoren und Tensoren.

1. Ein *Skalar* ist eine Funktion des Ortes, die jedem Punkt einen Betrag (Zahlwert) zuordnet.

2. Ein *Vektor* ist eine Funktion des Ortes, die jedem Punkt einen Betrag und eine Richtung zuordnet.

3. Ein *Tensor* (2. Grades) ist eine Funktion des Ortes, die jedem Vektor in einem Punkte daselbst einen anderen Vektor linear zuordnet. Ein Tensor höheren Grades ordnet ebenso jedem Vektor einen Tensor nächstniedereren Grades zu (Vektor = Tensor 1. Grades).

Diese Funktionen können neben ihrer Abhängigkeit vom Ort noch andere Parameter, wie z. B. die Zeit, enthalten.

Sind die Funktionen für jeden Punkt des Raumes definiert, so spricht man von *Skalarfeldern*, *Vektorfeldern*, *Tensorfeldern* bzw. *Feldvektoren* usw.

Sind die Funktionen nur in Punkten, Linien, Flächen definiert, so hat man *Punkt-*, *Linien-*, *Flächenvektoren* usw.

Sind die Funktionen vom Ort unabhängig, so werden die Skalare, Vektoren, Tensoren im folgenden als „frei“ bezeichnet.

Ein in einem Punkte definierter Vektor kann in einen anderen unter Erhaltung von Betrag und Richtung *verpflanzt* werden. Analoges gilt für Tensoren.

Vektoren, deren Betrag überall  $= 1$  ist, heißen *Einheitsvektoren*. Der Betrag eines Vektors ist ein Skalar.

Bezeichnung: Im folgenden sind meistens bezeichnet:

Skalare durch griechische Buchstaben, z. B.  $\varphi$ ,

Vektoren durch deutsche Buchstaben, z. B.  $a$ ,

Einheitsvektoren durch den Index  $1$ , z. B.  $a_1$ ,

Tensoren durch große deutsche Buchstaben, z. B.  $\mathfrak{A}$ .

Der Betrag eines Vektors  $a$  wird durch den gleichlautenden lateinischen Buchstaben  $a$  bezeichnet. Auch die Bezeichnungsweise  $|a|$  ist gebräuchlich.

## 2. Vektoralgebra.

Unter der *Summe zweier Vektoren*  $a$  und  $b$  versteht man den Vektor

$$c = a + b,$$

dessen Richtung und Betrag an jeder Stelle von den Summanden in derselben Weise abhängt, wie die Diagonale eines Parallelogramms von den Seiten, die mit ihr von derselben Ecke auslaufen. Hiernach gilt für die Summation von Vektoren das *kommutative* Gesetz:

$$a + b = b + a, \quad (1)$$

sowie das *assoziative* Gesetz:

$$(a + b) + c = a + (b + c). \quad (2)$$

Der Begriff der Subtraktion folgt durch Umkehrung

$$a = c - b; \quad b = c - a. \quad (3)$$

Unter dem *Produkt*  $a\varphi$  eines Vektors  $a$  und eines Skalars  $\varphi$  versteht man den Vektor mit dem Betrage  $a\varphi$  und der Richtung von  $a$ . Es ist also  $a = a a_1$ .

Als *Produkt zweier Vektoren*  $a$  und  $b$  bezeichnet man zwei verschiedene Größen:

a) das *innere Produkt* (auch skalares Produkt genannt). Dies ist ein Skalar, dessen Betrag

$$(a b) = a \cdot b \cdot \cos \varphi \quad (4)$$

ist, d. h. gleich dem Produkt der Beträge der Vektoren  $a$  und  $b$ , multipliziert mit dem Kosinus des Winkels zwischen ihren Richtungen. Daher ist  $(a b) = (b a)$  (kommutatives Gesetz);

b) das *äußere Produkt* (auch Vektorprodukt genannt)  $[a b]$ . Dies ist ein Vektor, dessen Richtung senkrecht steht auf der durch  $a$  und  $b$  gelegten Ebene und dessen Betrag gleich

$$|[a b]| = a \cdot b \cdot \sin \varphi \quad (5)$$

ist. Der Richtungssinn ergibt sich durch die Festsetzung, daß die Richtungen  $a, b, [a b]$  hintereinander gesetzt eine Rechtsschraube bilden.

Daher ist

$$[a b] = -[b a]. \quad (6)$$

Es gelten folgende Regeln:

$$[a a] = 0 \quad (a [a b]) = 0. \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} (a b) + (a c) &= (a (b + c)) \\ [a b] + [a c] &= [a (b + c)] \end{aligned} \right\} \text{distributives Gesetz.} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} (a [b c]) &= (b [c a]) = (c [a b]) \\ [a [b c]] &= b (a c) - c (a b) \\ ([a b] [c d]) &= (c [d [a b]]) = (a c) (b d) - (b c) (a d) \\ [a b]^2 &= a^2 b^2 - (a b)^2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Es ist ferner

$$(a [b c]) (c [f g]) = \begin{vmatrix} (a e) (a f) (a g) \\ (b e) (b f) (b g) \\ (c e) (c f) (c g) \end{vmatrix} \quad (10)$$

und daraus

$$(a [b c])^2 = a^2 b^2 c^2 - a^2 (b c)^2 - b^2 (a c)^2 - c^2 (a b)^2 + 2 (a b) (b c) (a c).$$

Der Betrag eines Vektors  $a$  ist

$$a = \sqrt{(a a)}. \quad (11)$$

Er ist immer positiv zu rechnen.

### 3. Algebraische Vektorgleichungen.

$x$  sei ein unbekannter Vektor, der zu ermitteln ist.

1.  $x + a = b, \quad \text{Lösung: } x = b - a.$

2.  $\begin{cases} (x a) = p \\ [x a] = b \end{cases} \quad \text{Lösung: } x = \frac{a p}{a^2} + \frac{[a b]}{a^2}.$

Ist nur eine der Gleichungen gegeben, so bleibt  $b$  bzw.  $p$  unbestimmt.

3.  $\begin{cases} (x a) = p \\ (x b) = q \\ (x c) = r \end{cases} \quad \text{Lösung: } x = \frac{p [b c] + q [c a] + r [a b]}{(a [b c])}.$



$$4. \quad \mathfrak{p} = x \mathfrak{a} + y \mathfrak{b} + z \mathfrak{c}.$$

$$\text{Lösung: } x = \frac{(\mathfrak{p} [\mathfrak{b} \mathfrak{c}])}{(\mathfrak{a} [\mathfrak{b} \mathfrak{c}])}, \quad y = \frac{(\mathfrak{p} [\mathfrak{c} \mathfrak{a}])}{(\mathfrak{a} [\mathfrak{b} \mathfrak{c}])}, \quad z = \frac{(\mathfrak{p} [\mathfrak{a} \mathfrak{b}])}{(\mathfrak{a} [\mathfrak{b} \mathfrak{c}])}.$$

$$5. \quad \mathfrak{p} = x [\mathfrak{b} \mathfrak{c}] + y [\mathfrak{c} \mathfrak{a}] + z [\mathfrak{a} \mathfrak{b}].$$

$$\text{Lösung: } x = \frac{(\mathfrak{p} \mathfrak{a})}{(\mathfrak{a} [\mathfrak{b} \mathfrak{c}])}, \quad y = \frac{(\mathfrak{p} \mathfrak{b})}{(\mathfrak{a} [\mathfrak{b} \mathfrak{c}])}, \quad z = \frac{(\mathfrak{p} \mathfrak{c})}{(\mathfrak{a} [\mathfrak{b} \mathfrak{c}])}.$$

Es ist zu beachten, daß eine Gleichung, die zwei Vektoren einander gleichsetzt, drei algebraischen Gleichungen äquivalent ist. Andererseits ist ein unbekannter Vektor äquivalent drei algebraischen Unbekannten.

#### 4. Integral- und Differentialausdrücke.

##### a) Skalare Integrale.

Als *Linienintegral* eines Vektors längs einer Kurve bezeichnet man die Größe

$$\int (\mathfrak{a} d\mathfrak{s}) = \int (\mathfrak{a} \mathfrak{s}) ds,$$

wo  $\mathfrak{s}$  ein Einheitsvektor ist, dessen Richtung gleich der des Kurvenelementes  $d\mathfrak{s}$  ist.  $(\mathfrak{a} \mathfrak{s})$  wird auch in der Form  $a_s$  geschrieben, also das Linienintegral  $\int a_s ds$ .

Als *Flächenintegral* bezeichnet man die Größe

$$\int (\mathfrak{a} \mathfrak{n}) df,$$

wo  $\mathfrak{n}$  ein Einheitsvektor ist, dessen Richtung senkrecht zu dem Flächenelement  $df$  steht. Statt  $(\mathfrak{a} \mathfrak{n})$  schreibt man auch  $a_n$ , also für das Flächenintegral  $\int a_n df$ .

##### b) Abgeleitete Vektoren und Skalare.

Der Differentialquotient  $\frac{d\varphi}{ds}$  eines Skalars  $\varphi$  beim Fortschreiten um  $ds$  ist im allgemeinen eine Funktion der Richtung des Schrittes und erreicht einen Maximalwert für eine bestimmte Richtung.

$\text{grad } \varphi$  ist ein Vektor, dessen Betrag gleich dem positiven Maximalwert von  $\frac{d\varphi}{ds}$  ist und dessen Richtung in die dazugehörige Richtung fällt.

Er steht senkrecht auf die Fläche  $\varphi = \text{const}$ .

Daher gilt für ein beliebiges  $d\mathfrak{s}$ :

$$d\varphi = (d\mathfrak{s} \text{ grad } \varphi).$$

Läßt man in dem Ausdruck  $\frac{\int a_n df}{V}$ , wo das Integral über eine geschlossene Fläche um das Volumen  $V$  erstreckt ist,  $V$  zur Grenze 0 übergangen, so bezeichnet man den Grenzwert als  $\text{div } \mathfrak{a}$ .

$\operatorname{div} \mathbf{a}$  ist ein Skalar.

Läßt man in dem Ausdruck  $\frac{\int a_s ds}{F}$ , wo das Integral über eine geschlossene Kurve vom Inhalt  $F$  erstreckt ist,  $F$  zur Grenze 0 übergehen, so wird der Wert eine Funktion der Richtung der Normalen von  $F$ .

$\operatorname{rot} \mathbf{a}$  ist ein Vektor, dessen Betrag gleich dem *Maximum* unter allen bei verschiedenen Richtungen von  $F$  auftretenden Grenzwerten ist und dessen Richtung senkrecht auf der zugehörigen Lage von  $F$  steht, so, daß der Umlaufsinn  $\int ds$  und  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  eine Rechtsschraube bilden.

Man kann diese Größen auch in folgender Weise formal definieren:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \varphi &= \lim_{v \rightarrow 0} \left( \frac{1}{V} \int df n \varphi \right) \\ \operatorname{div} \mathbf{a} &= \lim_{v \rightarrow 0} \left( \frac{1}{V} \int df (n \mathbf{a}) \right) \\ \operatorname{rot} \mathbf{a} &= \lim_{v \rightarrow 0} \left( \frac{1}{V} \int df [n \mathbf{a}] \right).\end{aligned}$$

Hierbei ist der Normalvektor  $n$  immer nach außen gerichtet zu nehmen.

### c) Integralsätze.

**GAUSSSCHER SATZ:**

$$\int df a_n = \int dv \operatorname{div} \mathbf{a}. \quad (1)$$

Das erste Integral ist über eine geschlossene Fläche, das zweite über das von ihr umschlossene Volumen zu erstrecken. Der Vektor  $n$  in  $a_n = (\mathbf{a} n)$  ist nach außen gerichtet.

**STOKESSCHER SATZ:**

$$\int ds a_s = \int df \operatorname{rot}_n \mathbf{a}, \quad [\operatorname{rot}_n \mathbf{a} = (n \operatorname{rot} \mathbf{a})]. \quad (2)$$

Das erste Integral ist über eine geschlossene Kurve, das zweite über irgendeine durch die Kurve umschlossene Fläche zu erstrecken.

**GREENSCHER SATZ:** Wendet man den GAUSSSCHEN Satz auf den Vektor  $\psi \operatorname{grad} \varphi$  an, so erhält man

$$\int df \psi \operatorname{grad}_n \varphi = \int dv [\psi \Delta \varphi + (\operatorname{grad} \psi \operatorname{grad} \varphi)]. \quad (\text{GREENSCHER SATZ.}) \quad (3)$$

(Betreffs der Bedeutung des Symbols  $\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$  vgl. S. 116.)

Hieraus folgt die weitere nützliche Formel:

$$\int df (\psi \operatorname{grad}_n \varphi - \varphi \operatorname{grad}_n \psi) = \int dv (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi). \quad (4)$$

Folgende *Spezialfälle* sind von Bedeutung:

I.  $\psi = 1$ .

$$\int df \operatorname{grad}_n \varphi = \int dv \Delta \varphi. \quad (5)$$

2.  $\psi = \frac{1}{r}$ . Dann ist  $\Delta \psi = 0$ , außer für  $r = 0$ . Man erhält:

$$\int df \left( \frac{1}{r} \text{grad}_n \varphi - \varphi \text{grad}_n \frac{1}{r} \right) = \int dv \left( \frac{1}{r} \Delta \varphi \right) - \int dv \left( \varphi \Delta \frac{1}{r} \right). \quad (6)$$

Das letzte Integral ist  $= 0$ , wenn die begrenzende Fläche den Punkt  $r = 0$  ausschließt. Umfaßt sie ihn, so wird

$$\int dv \left( \varphi \Delta \frac{1}{r} \right) = -4\pi \varphi_0, \quad (7)$$

wo  $\varphi_0$  den Wert von  $\varphi$  im Nullpunkt bedeutet. Man erhält also, wenn die Fläche den Nullpunkt umschließt,

$$4\pi \varphi_0 = -\int dv \frac{\Delta \varphi}{r} + \int df \left( \frac{1}{r} \text{grad}_n \varphi - \varphi \text{grad}_n \frac{1}{r} \right). \quad (8)$$

2a.  $\varphi = 1$  ergibt:

$$\int dv \Delta \left( \frac{1}{r} \right) = \int df \text{grad}_n \left( \frac{1}{r} \right) = 0 \text{ bzw. } = -4\pi, \quad (9)$$

je nachdem das Volumen und die Fläche den Nullpunkt ausschließt oder einschließt.

3.  $\psi = \frac{e^{ikr}}{r}$ , dann ist  $\Delta \psi = -k^2 \psi$  außer für  $r = 0$ . Gilt für  $\varphi$  überall die Gleichung  $\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0$ , so wird

$$\int df \left( \frac{e^{ikr}}{r} \text{grad}_n \varphi - \varphi \cdot \text{grad}_n \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right) = 4\pi \varphi_0 \text{ bzw. } = 0,$$

je nachdem der Punkt  $r = 0$  von der Fläche umschlossen wird oder nicht.

#### d) Vektorielle Integrale.

Im Gegensatz zu der ungerichteten Größe  $\int a_s ds$  kann man auch  $\int \mathbf{a} ds$  bilden.

Unter  $\int \mathbf{a} ds$  versteht man den Vektor, der durch Summation der Vektordifferentiale  $\mathbf{a} ds$  längs einer Kurve entsteht (nachdem sie alle durch Parallelverschiebung in einen Punkt „verpflanzt“ sind). Analog bildet man  $\int \mathbf{a} df$  und  $\int \mathbf{a} dv$ . Diese Vektoren sind keinem bestimmten Orte zugeordnet, also freie Vektoren.

Für eine geschlossene Kurve ist

$$\int d\mathbf{s} \varphi = \int ds \varphi \mathbf{s} = -\int df [\text{grad} \varphi, \mathbf{n}]. \quad (10)$$

Die folgenden Integrale über *geschlossene* Flächen lassen sich umformen in Volumintegrale über den von der Fläche umschlossenen Bereich:

$$\int d f \varphi n = \int d v \operatorname{grad} \varphi \quad (11)$$

$$\int d f [n, a] = \int d v \operatorname{rot} a \quad (12)$$

$$\int d f a (b n) = \int d v (a \operatorname{div} b + (b \operatorname{grad}) a) \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \int d f n (a b) &= \int d v \operatorname{grad} (a b) = \\ &= \int d v ((a \operatorname{grad}) b + (b \operatorname{grad}) a + [a \operatorname{rot} b] + [b \operatorname{rot} a]) \end{aligned} \right\} (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \int d f (n (a b) - a (b n) - b (a n)) &= \\ &= \int d v ([a \operatorname{rot} b] + [b \operatorname{rot} a] - a \operatorname{div} b - b \operatorname{div} a) \end{aligned} \right\} (15)$$

$$\int d f \left( \frac{n}{2} a^2 - a (a n) \right) = \int d v ([a \operatorname{rot} a] - a \operatorname{div} a). \quad (16)$$

### e) Bestimmte Integrale.

Die folgenden Integrale sind über den ganzen Raum (bis  $r = \infty$ ) zu erstrecken. Der Integrand soll stetig sein und für sehr große  $r$  stärker als  $1/r^2$  verschwinden.

#### Skalare Integrale:

$$\int d v \operatorname{div} a = 0 \quad (17)$$

$$\int d v \varphi \operatorname{div} a = - \int d v (a \operatorname{grad} \varphi) \quad (18)$$

$$\int d v (a \operatorname{rot} b) = \int d v (b \operatorname{rot} a) \quad (19)$$

#### Sonderfälle:

$$\int d v \frac{\operatorname{div} a}{r} = - \int d v \left( a \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) = \int d v \cdot \frac{(a r)}{r^3} \quad (20)$$

$$\int d v (r \operatorname{grad} \varphi) = - 3 \int d v \varphi \quad (21)$$

$$\int d v (r \operatorname{rot} a) = 0. \quad (22)$$

#### Vektorielle Integrale:

$$\int d v \operatorname{grad} \varphi = 0 \quad (23)$$

$$\int d v \operatorname{rot} a = 0 \quad (24)$$

$$\int d v a \operatorname{div} b = - \int d v (b \operatorname{grad}) a \quad (25)$$

$$\int d v \varphi \operatorname{rot} a = \int d v [a \operatorname{grad} \varphi] \quad (26)$$

$$\int d v \varphi \operatorname{grad} \psi = - \int d v \psi \operatorname{grad} \varphi \quad (27)$$

$$\int d v (a \operatorname{div} b + b \operatorname{div} a) = \int d v ([a \operatorname{rot} b] + [b \operatorname{rot} a]). \quad (28)$$

Sonderfälle:

$$\int d v \frac{\operatorname{rot} \mathbf{a}}{r} = \int d v \left[ \mathbf{a} \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right] = - \int d v \frac{[\mathbf{a} \mathbf{r}]}{r^3} \quad (29)$$

$$\int d v [\mathbf{r} \operatorname{grad} \varphi] = 0 \quad (30)$$

$$\int d v \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{a} = - \int d v \mathbf{a} \quad (31)$$

$$\int d v [\mathbf{r} \operatorname{rot} \mathbf{a}] = 2 \int d v \mathbf{a} \quad (32)$$

$$\int d v \frac{\operatorname{grad} \varphi}{r} = \int d v \frac{\varphi \mathbf{r}}{r^3}. \quad (33)$$

### 5. Allgemeine Differentialformeln.

Es gilt allgemein:

$$\operatorname{rot} (\operatorname{grad} \varphi) = 0 \quad (1)$$

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{a}) = 0 \quad (2)$$

ferner:

$$\operatorname{div} (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{a} \operatorname{grad} \varphi) \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} - [\mathbf{a} \operatorname{grad} \varphi] \quad (4)$$

$$\operatorname{div} [\mathbf{a} \mathbf{b}] = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}. \quad (5)$$

Die Größe  $\operatorname{div} (\operatorname{grad} \varphi)$  wird mit  $\Delta \varphi$  bezeichnet.

Es lassen sich schließlich noch folgende nützliche Vektoren definieren:

$$\Delta \mathbf{a} = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{a}) - \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{a}) \quad (6)$$

$$(\mathbf{b} \operatorname{grad}) \mathbf{a} = \frac{1}{2} (\operatorname{rot} [\mathbf{a} \mathbf{b}] + \operatorname{grad} (\mathbf{a} \mathbf{b}) - \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} + \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} - [\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}] - [\mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a}]) \quad (7)$$

Dieser Vektor  $(\mathbf{b} \operatorname{grad}) \mathbf{a}$  gibt den Zuwachs an, den der Vektor  $\mathbf{a}$  erfährt, wenn man in einem Feld um die durch  $\mathbf{b}$  angezeigte Strecke fortschreitet<sup>1</sup>. Hieraus folgt

$$\operatorname{rot} [\mathbf{a} \mathbf{b}] = (\mathbf{b} \operatorname{grad}) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \operatorname{grad}) \mathbf{b} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} \quad (8)$$

$$\operatorname{grad} (\mathbf{a} \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \operatorname{grad}) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \operatorname{grad}) \mathbf{a} + [\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}] + [\mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a}]. \quad (9)$$

### 6. Spezielle Vektorfelder.

1. Ein Vektorfeld  $\mathbf{a}$ , in dem  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  überall verschwindet, heißt ein „wirbelfreies Feld“.

Ein wirbelfreier Vektor  $\mathbf{a}$  ist darstellbar als negativer Gradient eines Skalars  $\varphi$ ,

$$\mathbf{a} = - \operatorname{grad} \varphi,$$

<sup>1</sup> Für  $(\mathbf{b} \operatorname{grad}) \mathbf{a}$  wird auch  $(\mathbf{b} \nabla) \mathbf{a}$  geschrieben. Das Symbol  $\nabla$  wird „Nabla“ gelesen (vgl. Anhang, 6).

welcher „Potential“ oder auch „skalares Potential“ genannt wird. Es gilt dann

$$\int_1^2 a_s ds = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (1)$$

Der Wert des Integrals ist nur abhängig von den Grenzen, unabhängig vom Integrationsweg und verschwindet für einen geschlossenen Integrationsweg. Umgekehrt kann man auch sagen: Das Feld des Gradienten eines Skalars ist stets ein wirbelfreies.

Setzt man

$$\operatorname{div} a = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\Delta \varphi = 4\pi \varrho, \quad (2)$$

so wird  $\varphi = \int \frac{dv \varrho}{r}$ , wo  $r$  die Entfernung des Volumendifferentials vom Aufpunkt, in dem  $\varphi$  berechnet werden soll, angibt. Das Integral ist, falls nichts anderes bemerkt ist, über den ganzen Raum zu erstrecken. Es ist natürlich zu prüfen, ob es konvergiert.

Explizite ist diese Formel zu schreiben:

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \frac{dx, dy, dz \varrho(x, y, z)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}.$$

Ist also  $\operatorname{div} a$  überall gegeben und  $\operatorname{rot} a = 0$ , so gestattet diese Formel die Berechnung von  $\varphi$ , also auch die von  $a$  selbst.

2. Ein Vektorfeld  $a$ , in dem  $\operatorname{div} a$  überall verschwindet, heißt ein „quellenfreies Feld“. Ein quellenfreier Vektor  $a$  ist darstellbar als Rotation eines quellenfreien Vektors  $\mathfrak{A}$ :

$$a = \operatorname{rot} \mathfrak{A}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{A} = 0, \quad (3)$$

welcher „Vektorpotential“ genannt wird.

Setzt man

$$\operatorname{rot} a = \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathfrak{A}) = -\Delta \mathfrak{A} = 4\pi c, \quad (4)$$

so wird

$$\mathfrak{A} = \int \frac{dv c}{r}. \quad (5)$$

Ist also  $\operatorname{rot} a$  überall gegeben und  $\operatorname{div} a = 0$ , so gestattet diese Formel die Berechnung von  $\mathfrak{A}$ , also auch die von  $a$  selbst.

Jedes Vektorfeld läßt sich eindeutig als Summe (Superposition) eines wirbelfreien und eines quellenfreien Feldes darstellen.

$$a = a' + a'', \quad (6)$$

wo  $\operatorname{rot} a' = 0$ ,  $\operatorname{div} a'' = 0$ .

$$\mathbf{a}' = -\operatorname{grad} \int \frac{d v \operatorname{div} \mathbf{a}}{4 \pi r}, \quad \mathbf{a}'' = \operatorname{rot} \int \frac{d v \operatorname{rot} \mathbf{a}}{4 \pi r}, \quad (7)$$

wobei die durch die Symbole vorgeschriebenen Operationen *unter* dem Integral an der Stelle des Volumendifferentials  $dv$ , die Operationen *vor* dem Integral an der Stelle des zu bestimmenden Vektors  $\mathbf{a}'$  bzw.  $\mathbf{a}''$  vorzunehmen sind.

## 7. Der Vektor $\mathbf{r}$ .

Ein wichtiger Vektor ist der Ortsvektor  $\mathbf{r}$ , welcher die Lage eines Punktes in bezug auf einen festen Punkt  $\mathbf{r} = 0$  darstellt. Er bildet ein Vektorfeld, indem jedem Punkte des Raumes ein Vektor  $\mathbf{r}$  zugeordnet werden kann, dessen Richtung vom Nullpunkt zu dem Aufpunkt zeigt und dessen Betrag  $r$  die Entfernung vom Nullpunkt ist.

Ist eine Kurve gegeben und ist  $\mathbf{r}$  der Ortsvektor ihrer Punkte, so ist

$$\frac{d \mathbf{r}}{d s} = \mathbf{t} \quad (1)$$

ein Einheitsvektor parallel zur Tangente im Punkte  $\mathbf{r}$ .

Ferner ist

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d s^2} = \frac{\mathfrak{R}}{R^2}. \quad (2)$$

Hierin ist  $\mathfrak{R}$  ein Vektor, welcher Richtung und Länge des Krümmungsradius der Kurve im Punkte  $\mathbf{r}$  angibt.

$\mathfrak{R}$  und  $\mathbf{t}$  bestimmen also die Schmiegungeebene der Kurve im Punkte  $\mathbf{r}$ .

Differentiations-Operationen lassen sich an Skalaren und Vektoren, die aus  $\mathbf{r}$  und ortsunabhängigen Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , ...  $\mathbf{f}$  gebildet sind, leicht ausführen. In den Tabellen auf Seite 119—121 sind für die wichtigsten Typen die betreffenden Resultate gegeben.

Man beachte besonders:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{r} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{r} &= 3 \\ \operatorname{grad} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) &= \mathbf{a} \\ \operatorname{rot} [\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}] &= 2 \mathbf{a} \\ \operatorname{div} [\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

sowie:

$$\operatorname{grad} \left( \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})}{r^3} \right) = -\operatorname{rot} \left( \frac{[\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}]}{r^3} \right). \quad (4)$$

Ferner gilt für einen *beliebigen* Vektor  $\mathbf{x}$ :

$$(\mathbf{x} \operatorname{grad}) \mathbf{r} = \mathbf{x}. \quad (5)$$

b	div b	rot b	grad div b	$\Delta b$	(f · grad) b
$a r^n$	$n (a\tau) r^{n-2}$	$n \cdot r^{n-2} [r a]$	$a \cdot n \cdot r^{n-2}$ $+ r \cdot n (n-2) (a\tau) r^{n-4}$	$a \cdot n (n+1) r^{n-2}$	$a \cdot (r f) n \cdot r^{n-2}$
$r r^n$	$(n+3) r^n$	0	$r \cdot n (n+3) r^{n-2}$	$r \cdot n (n+3) r^{n-2}$	$f \cdot r^n + r \cdot (f\tau) n \cdot r^{n-2}$
$a (b\tau) r^n$	$(a b) r^n$ $+ (a\tau) (b\tau) n \cdot r^{n-2}$	$[b a] r^n$ $+ [r a] (b\tau) n r^{n-2}$	$a (b\tau) n \cdot r^{n-2}$ $+ b (a\tau) n \cdot r^{n-2}$ $+ r (a b) n \cdot r^{n-2}$ $+ r (a\tau) (b\tau) n (n-2) r^{n-4}$	$- a \cdot n (n+1) (b\tau) r^{n-2}$	$a (f b) r^n$ $+ a \cdot (r f) (\tau b) n r^{n-2}$
$r (a\tau) r^n$	$(n+4) (a\tau) r^n$	$[a\tau] r^n$	$a \cdot (n+4) r^n$ $+ r (n+4) n (a\tau) r^{n-2}$	$r (a\tau) n (n+5) r^{n-2}$ $+ 2 a r^n$	$f (a\tau) r^n$ $+ r (a f) r^n$ $+ r (a\tau) (f\tau) n \cdot r^{n-2}$
$r (a\tau) (b\tau) r^n$	$(n+5) (a\tau) (b\tau) r^n$	$[a\tau] (b\tau) r^n + [b\tau] (a\tau) r^n$	$(n+5) \cdot r^n \cdot \left\{ a (b\tau) + \frac{(a\tau) (b\tau)}{r^2} \right\}$ $+ b (a\tau) + r \cdot n \cdot \left\{ \frac{(a\tau) (b\tau)}{r^2} \right\}$	$2 r^n \{ a (b\tau) + b (a\tau) + r (a b) \}$ $+ r (a\tau) (b\tau) n (n+7) r^{n-2}$	$f (a\tau) (b\tau) r^n$ $+ r (a f) (b\tau) + (a\tau) (b f) r^n$ $+ r \cdot (a\tau) (b\tau) (f\tau) n \cdot r^{n-2}$
$[a\tau] r^n$	0	$a (n+2) r^n$ $- r (a\tau) n r^{n-2}$	0	$[a\tau] n (n+3) \cdot r^{n-2}$	$[a f] r^n$ $+ [a\tau] (f\tau) n r^{n-2}$
$[a\tau] (b\tau) r^n$	$(\tau [b a]) r^n$	$a (n+3) (b\tau) r^n$ $- r r^n \left\{ (a b) + n \frac{(b\tau) (a\tau)}{r^2} \right\}$	$[b a] r^n$ $+ r (\tau [b a]) n r^{n-2}$	$[a\tau] (b\tau) n (n+5) r^{n-2}$ $+ 2 [a b] r^n$	$[a f] (b\tau) r^n$ $+ [a\tau] (b\tau) (f\tau) n \cdot r^{n-2}$ $+ [a\tau] (b f) r^n$
$a \ln r$	$\frac{(a\tau)}{r^2}$	$\frac{[r a]}{r^2}$	$\frac{a}{r^2} - \frac{2 r (a\tau)}{r^4}$	$\frac{a}{r^2}$	$a \frac{(f\tau)}{r^2}$



$\varphi$	grad $\varphi$	$\Delta \varphi$
$r^n$	$\mathbf{r} \cdot n \cdot r^{n-2}$	$n(n+1) \cdot r^{n-2}$
$\ln r$	$\frac{\mathbf{r}}{r^2}$	$\frac{1}{r^2}$
$(\mathbf{a}\mathbf{r}) r^n$	$\mathbf{a} \cdot r^n$ $+ \mathbf{r} (\mathbf{a}\mathbf{r}) n r^{n-2}$	$(\mathbf{a}\mathbf{r}) n(n+3) r^{n-2}$
$(\mathbf{a}\mathbf{r}) (\mathbf{b}\mathbf{r}) r^n$	$\mathbf{a} (\mathbf{b}\mathbf{r}) r^n$ $+ \mathbf{b} (\mathbf{a}\mathbf{r}) r^n$ $+ \mathbf{r} (\mathbf{a}\mathbf{r}) (\mathbf{b}\mathbf{r}) n r^{n-2}$	$2 (\mathbf{a}\mathbf{b}) r^n$ $+ (n+5) n (\mathbf{a}\mathbf{r}) (\mathbf{b}\mathbf{r}) r^{n-2}$

### 8. Unstetige Vektorfelder.

1. Es sei  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$   
und  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ , außer für  $r = 0$ .  
Dann ist

$$\int a_n df = \text{const} = 4\pi e \quad (1)$$

für jede die Stelle  $r = 0$  umschließende Fläche,

$$\int a_n df = 0 \quad (2)$$

für jede die Stelle  $r = 0$  nicht umschließende Fläche (vgl. S. 113).

$e$  heißt die „Ergiebigkeit“ der „Quelle“ in  $r = 0$ .

Es wird

$$\mathbf{a} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad \varphi = \frac{e}{r}. \quad (3)$$

1 a. Es sei  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$  außer in  $r = 0$  und in  $r = l$ , und zwar sei die Ergiebigkeit der beiden Quellen  $= -e$  bzw.  $+e$ . Läßt man dann  $l$  zur Grenze 0 übergehen, wobei  $le = m$  endlich bleibe, so spricht man von einer „Doppelquelle“ oder „Dipol“ vom „Moment“  $m$ .

Es wird

$$\mathbf{a} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad \varphi = \left( m \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) = -\frac{(m \mathbf{r})}{r^3}. \quad (4)$$

$\mathbf{a}$  läßt sich dann auch aus einem Vektorpotential ableiten:

$$\mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} = \frac{[m \mathbf{r}]}{r^3} = -\left[ m \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right]$$

$\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0.$

grad $\Delta \varphi$	$\Delta \Delta \varphi$
$r \cdot n (n + 1) (n - 2) r^{n-4}$	$n (n + 1) (n - 2) (n - 1) r^{n-4}$
$-\frac{2}{r^4} r$	$\frac{2}{r^4}$
$\alpha n (n + 3) r^{n-2} + r (n - 2) n (n + 3) (\alpha r) r^{n-4}$	$n (n + 1) (n - 2) (n + 3) (\alpha r) r^{n-4}$
$n (n + 5) r^{n-2} \cdot \left\{ \alpha (b r) + b (\alpha r) + (n - 2) \frac{(\alpha r) (b r)}{r^2} r \right\} + 2 (\alpha b) n r^{n-2} r$	$n r^{n-2} \left\{ 2 (2n + 3) (\alpha b) + (n + 5) (n - 2) (n - 1) \frac{(\alpha r) (b r)}{r^2} \right\}$

2. Es sei  $\operatorname{rot} \alpha = 0$   
und  $\operatorname{div} \alpha = 0$ .

$\alpha$  ändere sich unstetig an einer Fläche, so daß  $a_n$  beim Übergang von einer Seite der Fläche zur anderen von  $a_{n1}$  auf  $-a_{n2}$  springt.

Wir definieren die Größe

$$\omega = -\frac{1}{4\pi} (a_{n1} + a_{n2}), \tag{5}$$

wo  $n$  der nach der Fläche hin gerichtete Normalvektor ist.

$4\pi\omega = \operatorname{div} \alpha$  heißt „Flächendivergenz“.

$\omega$  ist die auf die Flächeneinheit bezogene Ergiebigkeit der über die Fläche verteilt gedachten Quellen.

Springt auch  $\varphi$  an der Fläche, so definieren wir die Größe

$$\tau = \frac{1}{4\pi} (\varphi_2 - \varphi_1). \tag{6}$$

In diesem Falle spricht man von einer „Doppelfläche“ oder „Doppelschicht“ mit dem „Moment“  $\tau$ .  $4\pi\tau n_1 = -4\pi\tau n_2 = \operatorname{grad} \varphi$  heißt „Flächengradient“.

Dann ist  $\alpha = -\operatorname{grad} \varphi$

$$\varphi = \int df \left( \frac{\omega}{r} + \tau \left( n_1 \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) \right), \tag{7}$$

erstreckt über die Fläche.

Ist  $\tau$  eine Konstante längs der Fläche und  $\omega = 0$ , so wird

$$\varphi = \tau \Omega, \tag{8}$$

wo  $\Omega$  der räumliche Winkel ist, unter dem die Berandung der Fläche vom Aufpunkt aus erscheint.

3. Es sei  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$   
und *außer auf einer Linie*  $L$  („Wirbellinie“)  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$ .

Dann ist für jede die Linie umfassende Kurve

$$\int ds a_s = \int df \operatorname{rot}_n \mathbf{a} = \text{const} = 4\pi \tau \quad (\text{vgl. S. 113}), \quad (9)$$

wobei die Fläche  $\int df$  beliebig verzerrt werden kann. Daraus folgt, daß  $\tau$  längs  $L$  konstant und daß die Wirbellinie  $L$  geschlossen sein oder bis ins Unendliche verlaufen muß.

$\tau$  heißt das *Moment der Wirbellinie*.

Wegen  $d\mathbf{v} = ds df$  ist dann das Vektorpotential der Wirbellinie gegeben durch

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi} \int \int \frac{ds df \operatorname{rot} \mathbf{a}}{r} = \tau \int_L \frac{d\mathfrak{s}}{r}, \quad (10)$$

daraus folgt

$$\mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \tau \int_L \frac{1}{r^3} d\mathfrak{s} \mathbf{r}. \quad (11)$$

Da  $\mathbf{a}$  außer auf  $L$  *wirbelfrei* ist, läßt sich  $\mathbf{a}$  auch aus einem skalaren Potential  $\varphi$  ableiten  $\mathbf{a} = -\operatorname{grad} \varphi$ , wobei jedoch für jede die geschlossene Wirbellinie umfassende Kurve nach (9)

$$\int_2^1 ds a_s = \varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi \tau$$

ist, falls 1 und 2 zwei zusammengehörige Vorder- und Rückseitenpunkte auf einer über  $L$  ausgespannten Fläche  $F$  sind. Die Wirbellinie  $L$  vom Moment  $\tau$  ist also äquivalent einer Doppelfläche  $F$  vom Moment  $\tau$ , welche über  $L$  beliebig ausgespannt ist. Das skalare Potential ist also wie oben  $\varphi = \tau \Omega$ .

4. Es sei  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$  *außer auf einer Fläche* und  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ , d. h.  $\mathbf{a}$  ändere sich unstetig an einer Fläche, so daß  $[\mathbf{n} \mathbf{a}]$  (eine Parallelkomponente zur Fläche) beim Übergang von einer Seite der Fläche zur anderen von  $[\mathbf{n} \mathbf{a}_1]$  zu  $[\mathbf{n} \mathbf{a}_2]$  springt.

Wir definieren den Vektor

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{4\pi} [\mathbf{n} (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)]. \quad (12)$$

$4\pi \mathfrak{g} = \operatorname{rot} \mathbf{a}$  heißt „*Flächenwirbel*“ oder „*Flächenrotation*“. Es ist dann

$$\mathfrak{A} = \int df \frac{\mathfrak{g}}{r}, \quad \mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}. \quad (13)$$

### 9. Lineare Vektorfeldfunktion.

Schreitet man in einem Vektorfelde  $a$  längs einer beliebigen Geraden fort und ist hierbei der Vektor  $a$  eine lineare Funktion der auf der Geraden gemessenen Länge, also darstellbar in der Form  $a_1 - a_2 = b d$ , wo  $b$  einen konstanten nur durch die Richtung der Geraden bestimmten Vektor bedeutet und  $d$  den Abstand zwischen den Punkten der Vektoren  $a_1$  und  $a_2$ , so heißt das Vektorfeld  $a$  eine lineare Vektorfunktion des Orts.

Eine solche Funktion läßt sich aufbauen aus einer Anzahl von Größen der Form:

$$a = a_0 + k r + \sum_n ([u_n r] + p_n (q_n r) + [d_n [a_n r]] + \dots), \quad (1)$$

d. h. aus einer Summe von *Vektoren*, die von  $r$  linear abhängen. Die Größen  $a_0$ ,  $k$ ,  $u_n$ ,  $p_n$ ,  $q_n$ ,  $d_n$ ,  $e_n$  seien hierbei Konstanten bzw. ortsunabhängige Vektoren.

Der Ausdruck läßt sich aber, ohne seine Allgemeinheit zu beschränken, auch in der einfacheren Form schreiben:

$$a = a_0 + \sum_n (p_n (q_n r)) \quad (n = 1, 2, 3), \quad (2)$$

wo die  $p_n$  und  $q_n$  freie Vektoren seien.

Es ist dann

$$\operatorname{div} a = \sum_n (p_n q_n). \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} a = \sum_n [p_n q_n]. \quad (4)$$

Zerlegt man  $a - a_0$  in 2 Felder  $a'$  und  $a''$ , so daß  $\operatorname{div} a' = 0$  und  $\operatorname{rot} a'' = 0$  wird (vgl. S. 117), d. h. in einen quellenfreien und einen wirbelfreien Teil, so ist

$$a - a_0 = a' + a'' \quad (5)$$

$$a' = [u r], \quad \operatorname{rot} a' = 2 u, \quad u = \frac{1}{2} \sum [p_n q_n]. \quad (6)$$

$$a'' = \frac{1}{2} \sum (p_n (q_n r) + q_n (p_n r)), \quad \operatorname{div} a'' = \sum (p_n q_n). \quad (7)$$

### 10. Tensoren (zweiten Grades).

#### a) Der Tensorbegriff.

Die lineare Abhängigkeit des letzten Paragraphen, die jedem  $r$  ein  $a$  zuordnet, schreiben wir symbolisch:

$$a - a_0 = \mathfrak{X} r$$

oder allgemein die lineare Abhängigkeit zweier Vektoren  $a$  und  $b$ :

$$a = \mathfrak{X} b = \sum_{n=1}^3 p_n (q_n b). \quad (1)$$

Den Operator  $\mathfrak{X}$  bezeichnet man als einen *Tensor*<sup>1</sup>.

Die Linearität fordert, daß

$$k a = k \mathfrak{X} b = \mathfrak{X} k b, \quad (2)$$

ferner, wenn  $a' = \mathfrak{X} b'$ :

$$a + a' = \mathfrak{X} b + \mathfrak{X} b' = \mathfrak{X}(b + b'). \quad (3)$$

Definieren wir ferner die Summe zweier Tensoren  $\mathfrak{X}_1$  und  $\mathfrak{X}_2$  aus:

$$(\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2) b = \mathfrak{X}_1 b + \mathfrak{X}_2 b, \quad (4)$$

so sieht man, daß der Operator  $\mathfrak{X}$  wie eine algebraische Größe im Sinne der obigen Formeln behandelt werden darf.

Ein Tensor heißt *symmetrisch*, wenn für *beliebige* Vektoren  $a$  und  $b$ :

$$(a \mathfrak{X} b) = (b \mathfrak{X} a) \quad (5)$$

ist, *antimetrisch* (oder *schief-symmetrisch*), wenn:

$$(a \mathfrak{X} b) = - (b \mathfrak{X} a) \quad (5')$$

ist. Jeder Tensor  $\mathfrak{X}$  kann eindeutig in die Summe von einem symmetrischen und einem antimetrischen Teil  $\mathfrak{X}_1$  und  $\mathfrak{X}_2$  zerlegt werden:

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2.$$

Der Tensor  $\tilde{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2$  heißt der zu  $\mathfrak{X}$  *konjugierte* oder *transponierte* Tensor. Ein symmetrischer Tensor ist also zu sich selbst konjugiert. Es gilt ganz allgemein  $(a \mathfrak{X} b) = (b \mathfrak{X} a)$ .

Die Zerlegung des Vektors  $a = \mathfrak{X} r$  (vgl. S. 117) in einen wirbelfreien und quellenfreien Teil  $a = a_1 + a_2$  entspricht dieser Zerlegung von  $\mathfrak{X}$ , d. h.

$$a_1 = \mathfrak{X}_1 r \quad (6)$$

$$a_2 = \mathfrak{X}_2 r. \quad (6')$$

Infolge der linearen Beziehung zwischen  $a$  und  $b$  kann im allgemeinen auch  $b$  durch einen neuen Tensor aus  $a$  abgeleitet werden. Er wird als der zu  $\mathfrak{X}$  *reziproke* Tensor  $\mathfrak{X}^{-1}$  bezeichnet:

$$b = \mathfrak{X}^{-1} a. \quad (7)$$

Haben wir außer der Abhängigkeit:

$$a = \mathfrak{X} b$$

die zweite:

$$b = \mathfrak{S} c$$

<sup>1</sup> Speziell als Tensor 2. Grades. Ein Skalar kann aus später ersichtlichen Gründen (vgl. S. 129) als ein Tensor 0. Grades, ein Vektor als ein solcher 1. Grades bezeichnet werden.

also:

$$a = \mathfrak{X} \mathfrak{C} c, \quad (8)$$

so vermittelt auch diese Formel eine lineare Abhängigkeit zwischen  $a$  und  $c$ , d. h.  $\mathfrak{X} \mathfrak{C}$  repräsentiert einen neuen Tensor, der als das *tensorielle Produkt* von  $\mathfrak{X}$  und  $\mathfrak{C}$  bezeichnet wird. Im allgemeinen ist:

$$\mathfrak{X} \mathfrak{C} \neq \mathfrak{C} \mathfrak{X}.$$

Das tensorielle Produkt eines Tensors mit sich selbst  $\mathfrak{X} \mathfrak{X} = \mathfrak{X}^2$  heißt *iterierter* Tensor. Diese Produktbildung kann beliebig oft wiederholt werden:

$$\mathfrak{X} \mathfrak{X} \mathfrak{X} = \mathfrak{X}^3, \dots \quad (9)$$

### b) Spezielle Tensoren.

Als *Einheitstensor*  $\mathfrak{E}$  bezeichnen wir einen Tensor, der jeden beliebigen Vektor  $a$  in sich selber überführt:

$$\mathfrak{E} a = a. \quad (10)$$

Für jeden beliebigen Tensor ist:  $\mathfrak{X} \mathfrak{X}^{-1} = \mathfrak{E} = \mathfrak{E}^{-1} = \tilde{\mathfrak{E}}$ .

Als *orthogonalen* Tensor  $\mathfrak{D}$  bezeichnen wir einen Tensor, für den

$$\tilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}^{-1} \quad (11)$$

ist. Daraus folgt für beliebige Vektoren  $a$  und  $b$ :

$$(\mathfrak{D} a \mathfrak{D} b) = (a b). \quad (12)$$

Die durch einen solchen Tensor festgelegte Zuordnung kann für ein beliebiges System von Vektoren durch eine vom Tensor allein bedingte bloße Drehung beschrieben werden, d. h. es bleibt der Betrag aller Vektoren erhalten  $(\mathfrak{D} a)^2 = a^2$ , wie auch die Winkel zwischen ihnen.

### c) Abgeleitete Skalare.

Bildet man den Ausdruck:

$$\frac{(\mathfrak{X} a [\mathfrak{X} b \mathfrak{X} c])}{(a [b c])} = |T|, \quad (13)$$

so erkennt man leicht, daß für irgend 3 nichtkomplanare Vektoren  $a$ ,  $b$ ,  $c$  dieser Ausdruck von  $a$ ,  $b$  und  $c$  unabhängig ist. Er ist also ein von  $\mathfrak{X}$  allein abhängiger Skalar. Man bezeichnet ihn als die *Determinante* des Tensors (vgl. S. 135).

Bildet man die Determinante für den Tensor:

$$\mathfrak{X} + \lambda \mathfrak{E}$$

und entwickelt diese nach den Potenzen von  $\lambda$ , so erhält man einen Ausdruck der Form:

$$\lambda^3 + \lambda^2 T_{(1)} + \lambda T_{(2)} + |T|. \quad (14)$$

Die hier auftretenden Größen  $T_{(1)}$  und  $T_{(2)}$  sind zwei weitere Skalare, die aus dem Tensor  $\mathfrak{X}$  abzuleiten sind. Wir schreiben im weiteren statt  $T_{(1)}$ :  $|\mathfrak{X}|$  und bezeichnen diese Größe als *Spur* des Tensors. Es ist ferner:

$$T_{(2)} = |T| |\mathfrak{X}^{-1}|. \quad (15)$$

Als *skalares Produkt* von  $\mathfrak{X}$  und  $\mathfrak{S}$  bezeichnet man die Spur des tensoriellen Produktes  $\mathfrak{X}\tilde{\mathfrak{S}}$ :

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{S}) = |\mathfrak{X}\tilde{\mathfrak{S}}|. \quad (16)$$

Es gilt:

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{S}) = (\mathfrak{S}\mathfrak{X}). \quad (17)$$

Das so gebildete Produkt eines Tensors mit sich selbst ergibt einen neuen Skalar, den man als *Quadrat* des Tensors bezeichnen kann.

Für antimetrische Tensoren ist die Spur immer = 0, die Determinante verschwindet dann gleichfalls<sup>1</sup>.

Für den Einheitstensor gilt:

$$|E| = 1, \quad |\mathfrak{E}| = 3, \quad (\mathfrak{E}\mathfrak{E}) = 3.$$

Für den orthogonalen Tensor gilt:

$$|O| = 1 \quad (\mathfrak{O}\mathfrak{O}) = 3$$

und:

$$|\mathfrak{O}| = 1 + 2 \cos \delta,$$

wenn  $\delta$  den Winkel der Drehung bezeichnet (vgl. S. 102).

#### d) Das Tensorellipsoid.

Definiert man eine Fläche durch die Gleichung:

$$(\mathfrak{r}\mathfrak{X}\mathfrak{r}) = 1, \quad (18)$$

so stellt diese ein *Ellipsoid* dar: das *Tensorellipsoid*. Dieses gestattet eine geometrische Darstellung des *symmetrischen* Teils eines Tensors. Die Hauptachsen dieses Ellipsoids werden zugleich als *Hauptachsen des Tensors* bezeichnet.

Den antimetrischen Teil eines Tensors  $\mathfrak{X}_2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{X} - \tilde{\mathfrak{X}})$  kann man gleichfalls geometrisch, und zwar durch einen Vektor  $\mathfrak{u}$  darstellen. Dieser wird festgelegt durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{u} = \frac{[\mathfrak{a}\mathfrak{X}_2\mathfrak{a}]}{a^2}. \quad (19)$$

Man überzeugt sich leicht, daß dieser Vektor  $\mathfrak{u}$  von der Wahl von  $\mathfrak{a}$  unabhängig ist. Daraus folgt weiter:

$$\mathfrak{X}_2\mathfrak{a} = [\mathfrak{u}\mathfrak{a}]. \quad (20)$$

<sup>1</sup> Entwickelt man eine Vektoranalysis in Räumen beliebiger Mannigfaltigkeit, so verschwindet die Determinante nur bei *ungeradzahlig*er Mannigfaltigkeit.

**e) Zusammenhang zwischen iterierten Tensoren.**

Zwischen 4 durch Iteration nacheinander gewonnenen Tensoren  $\mathfrak{X}^n$ ,  $\mathfrak{X}^{n+1}$ ,  $\mathfrak{X}^{n+2}$ ,  $\mathfrak{X}^{n+3}$  besteht folgende identische Relation<sup>1</sup>:

$$\mathfrak{X}^{n+3} - |\mathfrak{X}| \mathfrak{X}^{n+2} + |\mathfrak{X}^{-1}| |T| \mathfrak{X}^{n+1} - |T| \mathfrak{X}^n = 0. \quad (21)$$

Diese Relation kann bei der Lösung von Tensorgleichungen benutzt werden. Ist z. B. gegeben die Gleichung:

$$\mathfrak{X} \mathfrak{x} - C \mathfrak{x} = \mathfrak{b},$$

dann ist:

$$\mathfrak{X}^2 \mathfrak{x} - C \mathfrak{X} \mathfrak{x} = \mathfrak{X} \mathfrak{b},$$

$$\mathfrak{X}^3 \mathfrak{x} - C \mathfrak{X}^2 \mathfrak{x} = \mathfrak{X}^2 \mathfrak{b}.$$

Eliminiert aus diesen drei Gleichungen unter Benutzung obiger Identität  $\mathfrak{X} \mathfrak{x}$ ,  $\mathfrak{X}^2 \mathfrak{x}$ ,  $\mathfrak{X}^3 \mathfrak{x}$ , so bleibt  $\mathfrak{x}$  als Funktion von

$$C, |\mathfrak{X}|, |\mathfrak{X}^{-1}|, |T|, \mathfrak{b}, \mathfrak{X} \mathfrak{b}, \mathfrak{X}^2 \mathfrak{b}.$$

**f) Ortsabhängige Tensoren.**

Ist der Tensor als eine Funktion des Ortes gegeben, so spricht man von einem *Tensorfeld*. Aus einem solchen können wir einen *Vektor* ableiten, der aus der Ortsabhängigkeit des Tensors entspringt:

$$\operatorname{div} \mathfrak{X} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int d f(\mathfrak{X} n), \quad (22)$$

$n$  bedeutet, wie früher, die Normale der das Volumen  $V$  umschließenden Oberfläche.

Dem GAUSSSchen Satz entspricht die Gleichung:

$$\int d f(\mathfrak{X} n) = \int d v \operatorname{div} \mathfrak{X}. \quad (23)$$

Ferner gilt:

$$\operatorname{div}(\varphi \mathfrak{X}) = \varphi \operatorname{div} \mathfrak{X} + \mathfrak{X} \operatorname{grad} \varphi; \quad (24)$$

speziell für den Einheitstensor:

$$\operatorname{div}(\varphi \mathfrak{E}) = \operatorname{grad} \varphi. \quad (24')$$

Die Anwendung des GAUSSSchen Satzes auf den Vektor  $\mathfrak{X} a$  ergibt:

$$\int d v \operatorname{div} \mathfrak{X} a = \int d f(n \mathfrak{X} a) = \int d f(a \tilde{\mathfrak{X}} n). \quad (25)$$

**g) Differentiation nach einem Parameter ( $t$ ).**

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{X} a) = \mathfrak{X} \frac{\partial a}{\partial t} + \mathfrak{X}' a, \quad \text{wo } \mathfrak{X}' = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}. \quad (26)$$

<sup>1</sup> In Mannigfaltigkeiten von der Ordnung  $m$  besteht eine analoge Beziehung zwischen  $m + 1$  solcher Tensoren.



Für den orthogonalen Tensor  $\mathfrak{D}$  ergibt sich, wenn wir unter  $t$  die Zeit verstehen:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{D} \mathbf{a}) = \mathfrak{D} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + [\mathfrak{u} \mathbf{a}], \quad (27)$$

wo  $\mathfrak{u}$  der Vektor der Drehgeschwindigkeit ist, d. h. ein Vektor, dessen Richtung in die Drehachse fällt und dessen Betrag gleich der Drehgeschwindigkeit ist. Durch Verwendung eines von der Zeit abhängigen orthogonalen Tensors ist es daher möglich, ein beliebig bewegtes starres System auf Ruhe zu transformieren (vgl. S. 129).

## II. Der Gradiententensor.

Analog, wie der Vektor  $\text{grad } \varphi$  die Ortsabhängigkeit des Skalars  $\varphi$  charakterisiert, können wir einen Tensor bilden, der die Ortsabhängigkeit eines Vektors darstellt.

Es entspricht der Gleichung:

$$d\varphi = (\text{grad } \varphi d\mathfrak{s})$$

die analoge:

$$d\mathbf{a} = \mathfrak{A} d\mathfrak{s}. \quad (1)$$

Diesen Tensor  $\mathfrak{A}$  nennen<sup>1</sup> wir den „Gradienten“ von  $\mathbf{a}$ .

Es ist:

$$|\mathfrak{A}| = \text{div } \mathbf{a} \quad (2)$$

$$\text{div } \mathfrak{A} = \Delta \mathbf{a} \quad (3)$$

$$(\mathfrak{b} \text{ grad}) \mathbf{a} = \mathfrak{A} \mathfrak{b}. \quad (4)$$

Wir können den Tensor  $\mathfrak{A}$  in seinen symmetrischen und antisymmetrischen Teil  $\mathfrak{A}_1$  und  $\mathfrak{A}_2$  zerlegen. Den symmetrischen Teil  $\mathfrak{A}_1$  zerlegen wir weiter in:

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{C} \frac{|\mathfrak{A}|}{3} + \mathfrak{A}'_1. \quad (5)$$

Es ist dann:

$$|\mathfrak{A}'_1| = 0 \quad (5a)$$

$$\text{div } \mathfrak{A} = \Delta \mathbf{a} = \frac{1}{3} \text{grad div } \mathbf{a} + \text{div } \mathfrak{A}'_1 + \text{div } \mathfrak{A}_2 \quad (5b)$$

$$\text{div } \mathfrak{A}'_1 = \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{a} + \frac{1}{3} \text{grad div } \mathbf{a}) \quad (5c)$$

$$\text{div } \mathfrak{A}_2 = \frac{1}{2} \text{rot rot } \mathbf{a}. \quad (5d)$$

Wir bemerken ferner noch folgende Formel:

$$\text{div } \mathfrak{X} \mathbf{a} = (\mathbf{a} \text{ div } \mathfrak{X}) + (\mathfrak{X} \mathfrak{A}). \quad (6)$$

<sup>1</sup> Bei GANS mit „def  $\mathfrak{a}$ “ bezeichnet; es liegt gar kein Grund vor, diesen Tensor nicht mit „grad  $\mathfrak{a}$ “ zu bezeichnen.

## 12. Tensoren höheren Grades.

Ein Vektor  $\mathfrak{a}$  kann auch durch lineare Abhängigkeit von *zwei* anderen  $\mathfrak{b}$  und  $\mathfrak{c}$  gegeben sein:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{X}(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = \sum p_n(q_n \mathfrak{b}) (r_n \mathfrak{c}).$$

$\mathfrak{X}$  heißt dann Tensor 3. Grades. Analog bildet man Tensoren höheren Grades.

## 13. Transformation von Vektoren auf bewegtes Bezugssystem.

In einem Vektorfeld  $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\mathfrak{r}, t)$ , d. h. einem solchen, das außer vom Ort  $\mathfrak{r}$  auch von der Zeit  $t$  abhängt, wird, wenn man es in einem mit der Geschwindigkeit  $\mathfrak{v}$  *gradlinig starr fortschreitenden* Bezugssystem  $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} - \mathfrak{v}t$  darstellt,

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}(\mathfrak{r}, t) &= \mathfrak{a}'(\mathfrak{r}', t) \\ \frac{\partial \mathfrak{a}'}{\partial t'} &= \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} + (\mathfrak{v} \text{ grad}) \mathfrak{a} \end{aligned} \quad (1)$$

analog für einen Skalar  $\varphi(\mathfrak{r}, t) = \varphi'(\mathfrak{r}', t)$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t'} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathfrak{v} \text{ grad}) \varphi. \quad (2)$$

$\frac{\partial \mathfrak{a}'}{\partial t'}$  bedeutet also die zeitliche Änderung von  $\mathfrak{a}$  für konstantes  $\mathfrak{r}'$ , d. h. in einem festen Punkt des bewegten Systems.

In einem mit  $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u} \mathfrak{r}]$  *fortschreitenden* und *rotierenden* Bezugssystem  $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} - \mathfrak{v}_0 t - [\mathfrak{u} \mathfrak{r}] t$  wird

$$\frac{\partial \mathfrak{a}'}{\partial t'} = \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} + (\mathfrak{v} \text{ grad}) \mathfrak{a} + [\mathfrak{a} \mathfrak{u}] = \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} + \text{rot} [\mathfrak{a} \mathfrak{v}] + \mathfrak{v} \text{ div} \mathfrak{a} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t'} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathfrak{v} \text{ grad}) \varphi. \quad (4)$$

Für ein Linienintegral  $\int_1^2 (\mathfrak{a} d\mathfrak{s})$ , das längs einer sich mit der Geschwindigkeit  $\mathfrak{v}$  bewegendem Kurve gebildet ist, gilt

$$\frac{d}{dt} \int_1^2 d\mathfrak{s} \mathfrak{a}_s = \int_1^2 d\mathfrak{s} \left( \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} + \text{grad} (\mathfrak{v} \mathfrak{a}) - [\mathfrak{v} \text{ rot} \mathfrak{a}] \right)_s \quad (5)$$

und für ein Oberflächenintegral  $\int d\mathfrak{f} \mathfrak{a}_n$

$$\frac{d}{dt} \int d\mathfrak{f} \mathfrak{a}_n = \int d\mathfrak{f} \left( \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} + \text{rot} [\mathfrak{a} \mathfrak{v}] + \mathfrak{v} \text{ div} \mathfrak{a} \right)_n. \quad (6)$$

#### 14. Komplexe Vektoren.

Analog zu der Bildung komplexer Zahlen kann man auch *komplexe Vektoren* bilden, indem man setzt:

$$c = a + i b \quad (i = \sqrt{-1}). \quad (1)$$

Ein solcher Vektor entbehrt natürlich jeder Anschaulichkeit; er ist aber gelegentlich mit Vorteil zu verwenden.  $c^* = a - i b$  ist der zu  $c$  komplex konjugierte Vektor.

Als *Betrag* von  $c$  bezeichnet man:

$$\sqrt{(c c^*)} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Besonders häufig tritt ein Ausdruck auf von der Form:

$$c = c_0 e^{i \omega t}, \quad (2)$$

wo  $t$  die Zeit bedeutet. Der Realteil dieses Vektors ist dann offenbar:

$$a = a_0 \cos \omega t - b_0 \sin \omega t, \quad (2')$$

stellt also einen Vektor dar, welcher sowohl seiner Richtung wie Größe nach von der Zeit periodisch abhängt.

Ein Vektor, für den:

$$c^2 = a^2 - b^2 + 2i(a b) = 0 \quad (3)$$

ist, heißt ein *Nullvektor*. Für ihn muß  $a \perp b$  sein, und  $|a| = |b|$ . Natürlich existieren auch *Einheitsvektoren* im Komplexen, für die  $a \perp b$  ist, und:

$$a^2 = b^2 + 1. \quad (4)$$

Eine Gleichung von der Form:

$$c = k [u c] \quad (u \text{ reell}) \quad (5)$$

hat im Reellen nur die triviale Lösung  $c = 0$ . Im Komplexen rechnen wir folgendermaßen:

$$(c c) = c^2 = 0$$

$$(u c) = 0,$$

d. h. falls  $c = a + i b$  gesetzt wird, wird:

$$a \perp u$$

$$b \perp u$$

$$a \perp b, \quad |a| = |b|,$$

ferner ergibt sich:

$$c = k^2 [u [u c]] = -k^2 (c u^2 - u (u c)) \quad (6)$$

also:

$$k^2 u^2 = -1 \quad (7)$$

oder:

$$k = \pm \frac{i}{u}. \quad (7')$$

Diese Gleichung stellt also eine *Bedingungsgleichung* für die Lösbarkeit der Ausgangsgleichung dar.

Die explizite Lösung läßt sich unter Verwendung eines willkürlichen reellen Vektors  $f$  folgendermaßen schreiben:

$$c = [u f] \pm \frac{i}{u} [u [u f]]. \quad (8)$$

Anwendung findet diese Rechnungsart z. B. bei der Lösung der *Vektordifferentialgleichung*:

$$\frac{d c}{d t} = [u c]. \quad (9)$$

Die Anschauung lehrt unmittelbar, daß durch diese Gleichung ein Vektor definiert wird, der um eine feste Achse  $u$  „präzessiert“.

Wir machen den Ansatz:

$$c = c_0 e^{i \omega t} + \alpha u \quad (10)$$

und erhalten:

$$c_0 = - \frac{i}{\omega} [u c_0]. \quad (11)$$

Aus unserer obigen Bedingungsgleichung für  $k$  folgt unmittelbar:

$$\omega = u, \quad (12)$$

$\alpha$  ist eine beliebige Konstante.

Sowohl der Realteil wie der Imaginärteil der definitiven Lösung, sowie auch eine beliebige lineare Kombination von beiden ist eine Lösung.

## B. Koordinatenmäßige Formulierung der Vektoranalysis im $n$ -dimensionalen Raume.

### I. Vektorkomponenten.

Analog zum dreidimensionalen ist jeder Vektor im  $n$ -dimensionalen Raume aus  $n$  Grundvektoren  $e_1, e_2, \dots, e_n$  darzustellen in der Form:

$$a = a^1 e_1 + a^2 e_2 + \dots + a^n e_n = \sum_i a^i e_i \quad (1)$$

(falls die  $e_i$  linear unabhängig voneinander, d. h. nichtkomplanar sind). Die  $a^1, a^2, \dots, a^n$  heißen die *kontravarianten Komponenten* von  $a$  (bezogen auf die Grundvektoren). Bildet man die zu den  $e_i$  reziproken Vektoren  $e^i$ , so daß  $(e^i e_k) = \delta_{i,k}$ , d. h.  $= 1$  für  $i = k$  und  $= 0$  für  $i \neq k$  wird, so ist auch die Darstellung

$$a = a_1 e^1 + a_2 e^2 + \dots + a_n e^n \quad (2)$$

möglich. Die  $a_n$  heißen die *kovarianten Komponenten*<sup>1</sup> von  $a$ .

<sup>1</sup> Die Bezeichnung (und Schreibung) deutet auf die analogen Transformationseigenschaften der mit hoch- bzw. tiefstehenden Indizes versehenen Größen  $e$  und  $x$  hin (vgl. 4, S. 134).

In einem willkürlichen (krummlinigen) Koordinatensystem<sup>1</sup>  $x^1, x^2, x^3, \dots$  legt man die Grundvektoren  $e_1, e_2, e_3 \dots$  an jeder Stelle in die Tangentenrichtungen der dort sich kreuzenden Koordinatenkurven  $x^1 = \text{const}, x^2 = \text{const}, x^3 = \text{const}$  usw. und wählt die Beträge  $|e_1|, |e_2|, |e_3| \dots$  entsprechend dem metrischen Gefälle der Koordinatenmaßzahlen  $x^1, x^2, x^3 \dots$  an dieser Stelle. D. h. der Vektor  $d\hat{s}$  mit der infinitesimalen Länge  $ds$  soll gegeben werden durch

$$d\hat{s} = e_1 dx^1 + e_2 dx^2 + e_3 dx^3 + \dots \quad (3)$$

Die  $dx^i$  sind also die kontravarianten Komponenten des Vektors  $d\hat{s}$ , und die Grundvektoren sind bestimmt durch

$$e_1 = \frac{\partial \hat{s}}{\partial x^1}, \quad e_2 = \frac{\partial \hat{s}}{\partial x^2}, \quad e_3 = \frac{\partial \hat{s}}{\partial x^3}, \dots \quad (4)$$

Die  $e_i$  geben die *metrischen* Verhältnisse im krummlinigen Koordinatensystem an. Sie genügen den Gleichungen

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^k} = \frac{\partial e_k}{\partial x^i}. \quad (5)$$

Es wird ferner

$$(ds)^2 = (dx^1)^2 (e_1)^2 + 2 dx^1 \cdot dx^2 (e_1 e_2) + \dots$$

Zur Abkürzung schreibt man oft:

$$(e_1)^2 = g_{11}, \quad (e_1 e_2) = g_{12} \text{ usw.}$$

$$(e^1)^2 = g^{11}, \quad (e^1 e^2) = g^{12} \text{ usw.}$$

Es wird daher

$$(ds)^2 = \sum_i \sum_k g_{ik} dx^i \cdot dx^k. \quad (6)$$

$ds$  heißt das „*Linienelement*“ des Koordinatensystems.

Man pflegt die Summenzeichen fortzulassen und fordert, daß über jeden Index zu summieren ist, der in einem Gliede zweimal vorkommt.

Man schreibt also:

$$(ds)^2 = dx^i dx^k g_{ik} = dx^i dx^k (e_i e_k) \quad (7)$$

$$a^2 = a^i a^k g_{ik} = a_i a_k g^{ik} = a^i a^k (e_i e_k) = a_i a_k (e^i e^k)$$

$$= a_i a^k (e^i e_k) = a_i a^i.$$

Ebenso

$$(a \hat{b}) = a^i b^k g_{ik} = a_i b^i = a^i \hat{b}_i \text{ usw.}$$

Man beachte noch folgende Relationen:

$$a^i = (a e^i), \quad a_i = (a e_i) \quad (8)$$

$$a_i = g_{ik} a^k, \quad a^i = g^{ik} a_k$$

$$(a e^i) (e_i \hat{b}) = (a \hat{b}).$$

<sup>1</sup> Bei zeitabhängigen Koordinatensystemen vgl. S. 232.

Zur speziellen Rechnung ist die Verwendung der  $g_{ik}$  meist vorteilhafter als die der Vektoren  $e_i$ . Die Größen  $g_{ik}$  bestimmt man dann unmittelbar durch Aufstellung der Form des Linienelementes.

Die Größen  $g^{ik}$  findet man aus diesen, indem man aus den  $g_{ik}$  die Determinante  $\det g_{ik} = g$  bildet. Nennt man  $G_{ik}$  die Unterdeterminante zu  $g_{ik}$ , so ist  $g^{ik} = \frac{G_{ik}}{g}$ .  $\sqrt{|g|}$  ist gleich dem Volumen des aus den Grundvektoren  $e_i$  gebildeten Parallelepipeds.

## 2. Tensorkomponenten.

Die Beziehung<sup>1</sup>

$$a = \mathfrak{A}(b) = \sum_n p_n(q_n b)$$

schreibt sich (unter Weglassung der Summenzeichen über zweimal vorkommende Indizes):

$$a_i = p_{ni}(q_{nk} b^k) = T_{ik} b^k; \quad (1)$$

wo

$$T_{ik} = p_{ni} q_{nk}$$

bedeutet.  $T_{ik}$  heißen die *kovarianten* Komponenten des Tensors. Es ist  $T_{ik} = \mathfrak{A} c_i c_k$ . Entsprechend gilt:

$$a^i = T^{ik} b_k, \quad \text{wo} \quad T^{ik} = p_n^i q_n^k \text{ ist.} \quad (2)$$

$T^{ik}$  heißen die *kontravarianten* Komponenten des Tensors  $T^{ik} = \mathfrak{A} e^i e^k$ . Ebenso gilt:

$$a^i = T^i_k b^k, \quad \text{wo} \quad T^i_k = p_n^i q_{nk} \text{ ist.}$$

$T^i_k$  heißen die *gemischten* Komponenten des Tensors ( $T^i_k = \mathfrak{A} e^i e_k$ ). Es ist also

$$T_{ik} = T_i^l(e_k e_l) = T_i^l g_{lk}$$

und

$$T^i_k = T^{lm} g_{il} g_{km}.$$

Man beachte, daß

$$T^i_k = (c^i \mathfrak{A} e_k) = (c_k \mathfrak{A} c^i) = T_k^i \text{ ist.}$$

Der Tensor ist symmetrisch, wenn  $T_{ik} = T_{ki}$  ist. Der Tensor ist schief-symmetrisch oder antimetrisch, wenn  $T_{ik} = -T_{ki}$  ist. Auch die Größen  $g_{ik}$  sind die kovarianten Komponenten eines symmetrischen Tensors, nämlich des Einheitstensors  $\mathfrak{E}$ , der in diesem Zusammenhang „*metrischer Fundamentaltensor*“ heißt (vgl. S. 283). Hier ist  $p_n = e_n$ ,  $q_n = e^n$  zu setzen.

<sup>1</sup> Die Summe über den Index  $n$  muß zur vollen Allgemeinheit im  $n$ -Dimensionalen  $n$  unabhängige Glieder enthalten.

### 3. Tensoren höheren Grades.

Tensoren höheren Grades sind entsprechend zu bilden, z. B.

$$\left. \begin{aligned} T_{ijkl} &= \sum_n p_{ni} q_{nk} r_{nl} \\ T^i{}_{kl} &= \sum_n p_n^i q_{nk} r_{nl} \text{ usw.} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Vektoren kann man hiernach auch als Tensoren 1. Grades, Skalare als Tensoren 0. Grades bezeichnen.

### 4. Transformationen.

Beim Übergang von den krummlinigen Koordinaten  $x^i$  zu neuen krummlinigen Koordinaten  $x'^i$ , d. h. beim Übergang von einem System von Grundvektoren  $e_i$  zu einem anderen  $e'_i$ , transformieren sich die kontravarianten Komponenten des *Linienelements* (unter Fortlassung der Summenzeichen):

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} dx^k = (e'^i e_k) dx^k.$$

Nach demselben Gesetz transformieren sich die  $e^i$ , d. h.  $e'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} e^k$ , sowie die kontravarianten Komponenten eines *Vektors*  $a$

$$a'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} a^k.$$

Die  $e_i$  sowie die kovarianten Komponenten transformieren sich durch

$$\begin{aligned} e'_i &= \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} e_k, \\ a'_i &= \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} a_k. \end{aligned}$$

Daher wird für jede Transformation

$$a_i b^i = a'_i b'^i = a^i b_i = a'^i b'_i = \text{Invariante (Skalar)}.$$

Die Komponenten eines *Tensors 2. Grades* transformieren sich wie die Produkte der Komponenten zweier Vektoren, und zwar  $T^{ik}$  wie  $(a^i b^k)$ ,  $T_{ik}$  wie  $(a_i b_k)$ ,  $T_i{}^k$  wie  $(a_i b^k)$ . Also

$$\begin{aligned} T'_{ik} &= \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} \cdot T_{mn} \\ T'^{ik} &= \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial x^n} \cdot T^{mn} \\ T_i{}^k &= \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial x^n} \cdot T_m{}^n. \end{aligned}$$

Es wird daher für jede Transformation  $T_{ik} S^{ik}$  eine Invariante (Skalar), wenn  $\mathfrak{T}$  und  $\mathfrak{S}$  Tensoren sind.

Umgekehrt: Ist für jeden beliebigen Tensor  $\mathfrak{S}$  die Größe  $T_{ik} S^{ik}$  ein Skalar, so ist  $\mathfrak{X}$  ein Tensor.

Entsprechendes gilt für Tensoren beliebigen Grades.

**Zusammenstellung der wichtigsten Invarianten.**

$$a^2 = a_i a^i, \quad (a \ b) = a_i b^i = a^i b_i$$

$$(a \ [b \ c]) = \sqrt{|g|} \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \quad (\text{im Dreidimensionalen}).$$

$$|\mathfrak{X}| = T_i^i = T_{ik} g^{ik} = T^{ik} g_{ik} \quad (\text{Spur})$$

$$(\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{X}) = T_{ik} T^{ik} = T_i^k T^i_k, \quad (\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{S}) = T_{ik} S^{ik}$$

$$|T| = |T_k^i| \quad (\text{Determinante}).$$

$$(a \ \mathfrak{X} \ b) = T_{ik} a^i b^k$$

## 5. Drei-Indizes-Symbole

(vgl. auch Anhang, 7).

Wir führen die beiden Abkürzungen ein:

$$\Gamma_{i,rs} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ir}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{is}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i} \right).$$

$$\Gamma_{rs}^i = g^{ij} \Gamma_{j,rs}.$$

Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{i,rs} &= \Gamma_{i,sr} \\ \Gamma_{rs}^i &= \Gamma_{sr}^i \end{aligned} \right\}$$

$$\Gamma_{s,ri} + \Gamma_{r,si} = \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i}$$

$$\Gamma_{ir}^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^r} = \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^r}.$$

In den Grundvektoren ausgedrückt, erhält man die Formeln:

$$\Gamma_{i,rs} = \left( e_i \cdot \frac{\partial e_s}{\partial x^r} \right) = \left( e_i \cdot \frac{\partial e_r}{\partial x^s} \right)$$

$$\Gamma_{rs}^i = \left( e^i \cdot \frac{\partial e_s}{\partial x^r} \right) = \left( e^i \cdot \frac{\partial e_r}{\partial x^s} \right) = - \left( \frac{\partial e^i}{\partial x^r} \cdot e_s \right)$$

$$\Gamma_{ir}^i = \text{div } e_r = \left( e^i \cdot \frac{\partial e_r}{\partial x^i} \right).$$

Für die Transformation von  $x^i$  auf ein anderes Koordinatensystem  $x'^i$  gilt

$$\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^m \partial x'^n} + \Gamma_{\mu\nu}^l \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^m} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^n} = (\Gamma_{mn}^\mu)' \frac{\partial x^l}{\partial x'^\mu} \quad (\text{CHRISTOFFELSche Formeln}).$$



Die  $\Gamma$ -Symbole verhalten sich daher nur dann wie Tensoren dritten Ranges, wenn alle

$$\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^m \partial x'^n} = 0$$

sind, d. h. wenn der Übergang von den  $x^i$  zu den  $x'^i$  durch eine affine Transformation erfolgt (vgl. S. 101) („Affintensor“).

### 6. Verjüngung und Erweiterung.

Aus einem Tensor  $T^{ik}$  erhält man durch Multiplikation mit  $g_{ik}$  den Skalar  $|\mathfrak{X}| = T^{ik} g_{ik}$ , aus  $T_j^k$  den Vektor  $t_j = T_j^k g_{ik}$  usw. Diese Operation, die den Grad eines Tensors um 2 erniedrigt, heißt Verjüngung.

Durch Differentiation erhält man umgekehrt aus Tensoren solche höheren Grades (Erweiterung), durch Kombination mit Verjüngung auch solche niederen Grades. Bei der Differentiation ist zu beachten, daß die  $e_i$  mit zu differenzieren sind<sup>1</sup>. Dadurch erhält man unter Benutzung der Drei-Indizes-Symbole u. a. folgende Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \quad (a = \text{grad } \varphi) \\ A_{ik} &= a_{i,k} = \frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^r a_r \quad (\mathfrak{A} = \text{grad } a) \quad (\text{vgl. S. 128}) \\ A^i_k &= a^i_k = \frac{\partial a^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kr}^i a^r \\ A_{ik,l} &= \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^r A_{rk} - \Gamma_{kl}^r A_{ir} \\ A^i_{k,l} &= \frac{\partial A^i_k}{\partial x^l} + \Gamma_{lr}^i A^r_k - \Gamma_{kl}^r A^i_r \\ A^{ik,l} &= \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma_{lr}^i A^{rk} + \Gamma_{lr}^k A^{ir} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

und durch Kombination u. a.

$$\left. \begin{aligned} C_{ik} &= a_{ik} - a_{ki} = \frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i} \quad (\mathfrak{C} = \text{rot } a) \quad (\text{vgl. S. 140}) \\ c^i &= b^k \frac{\partial a^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kr}^i b^k a^r \quad (c = (b \text{ grad } a)) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Durch Kombination mit Verjüngung findet man u. a.

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} a^i)}{\partial x^i} = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} + \Gamma_{ri}^r a^i \quad \left( \psi = \text{div } a = \left( e^i \frac{\partial a}{\partial x^i} \right) \right) \quad (3)$$

$${}^1 d a = \frac{\partial}{\partial x^k} (a^i e_i) dx^k = a^i \frac{\partial e_i}{\partial x^k} dx^k + e_i \frac{\partial a^i}{\partial x^k} dx^k$$

$$(d a)^l = d a \cdot e^l = \left( \frac{\partial a^l}{\partial x^k} + a^i \left( e^l \frac{\partial e_i}{\partial x^k} \right) \right) dx^k = \left( \frac{\partial a^l}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l a^i \right) dx^k = a_k^l dx^k$$

d. h. das Differential der Komponente ist *nicht* gleich der Komponente des Differentials:  $d(a^l) \neq (d a)^l$ .

$$\left. \begin{aligned} a_i &:= \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial(\sqrt{g} T^k_i)}{\partial x^k} - \Gamma_{ir}^s T^r_s & (\alpha = \operatorname{div} \mathfrak{X}) \\ a^i &:= \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial(\sqrt{g} T^k_i)}{\partial x^k} + \Gamma_{rs}^i T^r_s \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\psi := \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{g} \cdot g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right) \quad (\psi = \Delta \varphi) \quad (5)$$

### 7. Erweiterung und Verjüngung in Anwendung auf den Tensor $g_{ik}$ .

Für den Tensor  $g_{ik}$  erhält man speziell:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial \sqrt{g} g^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma_{rs}^i g^{rs} = 0 \quad (\operatorname{div} \mathfrak{G} = 0, \mathfrak{G} = \text{Einheitstensor}) \quad (1)$$

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma_{lr}^i g^{rk} + \Gamma_{lr}^k g^{ir} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{lk}^r g_{ir} - \Gamma_{li}^r g_{rk} = 0.$$

An Tensoren höheren Grades ist aus  $g_{ik}$  nur der folgende abzuleiten

$$R^i_{jkh} = \frac{\partial}{\partial x^h} \Gamma^i_{jk} - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma^i_{jh} + \Gamma^i_{rh} \Gamma^r_{jk} - \Gamma^i_{rk} \Gamma^r_{jh} \quad (3)$$

und hieraus durch Verjüngung ein anderer Tensor 2. Grades

$$R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^r} \Gamma^r_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma^r_{ir} + \Gamma^s_{rs} \Gamma^r_{ik} - \Gamma^s_{ri} \Gamma^r_{ks} \quad (4)$$

und der Skalar

$$R = g^{ih} R_{ik}.$$

Die Größe  $R^i_{jkh}$  heißt der „RIEMANN-CHRISTOFFELSche Krümmungstensor“.

Das Verschwinden dieses Tensors ist die Bedingung dafür, daß die  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, ausgemessen mit dem Linienelement  $ds$ , die EUKLIDSche Geometrie erfüllt.

In den Grundvektoren ausgedrückt ist

$$R^i_{jkh} = \left( e^i \left\{ \frac{\partial}{\partial x^h} \left( \frac{\partial e_j}{\partial x^k} \right) - \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial e_j}{\partial x^h} \right) \right\} \right).$$

Die Differentialgleichung einer geraden Linie, d. h. einer Linie, für die die Bogenlänge  $\int ds$  zwischen je zwei ihrer Punkte ein Minimum ist (geodätische Linie), lautet:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{hl} \frac{dx^h}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0. \quad (5)$$

Die Differentialgleichung einer Feldlinie (Kraftlinie) eines Vektorfeldes  $\mathfrak{a}$  lautet

$$\frac{dx^i}{ds} = a^i, \quad (6)$$

wo  $a^i = f^i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ist.

Verschiebt man einen Vektor  $\mathfrak{a}$  aus dem Punkte  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ungeändert und parallel zu sich (Verpflanzung) um  $\delta \mathfrak{a}$ , so ändern sich seine Komponenten  $a^i$  zu  $a^i + \delta a^i$  und es gilt

$$\delta a^i = -\Gamma_{rs}^i a^r \delta x^s \quad (7)$$

bzw.

$$\delta a_i = \Gamma_{is}^r a_r \delta x^s.$$

Setzt man diese Parallelverschiebung von Punkt zu Punkt längs einer geschlossenen Kurve fort, so lautet die Bedingung dafür, daß die Komponenten  $a^i$  wieder ihren ursprünglichen Wert annehmen:

$$R^i_{j\ h\ k} = 0. \quad (8)$$

## 8. Orthogonale Koordinaten<sup>1</sup>.

Ein orthogonales Koordinatensystem ist definiert durch das Linien-  
element

$$(ds)^2 = \sum_i g_{ii} (dx^i)^2,$$

wobei

$$g_{ii} = (e_i)^2 \quad \text{und} \quad g^{ii} = (e^i)^2,$$

also

$$g_{ii} = \frac{1}{g^{ii}} \quad \text{und} \quad e_i = \frac{1}{e^i}.$$

Es ist hier oft zweckmäßig außer den ko- und kontravarianten Komponenten, zwischen denen der Zusammenhang besteht,

$$a^i e_i = a_i e^i \quad \text{oder} \quad a^i = a_i g^{ii} = \frac{a_i}{g_{ii}}$$

noch ihr geometrisches Mittel einzuführen

$$\bar{a}_i = \sqrt{a_i a^i} = a^i e_i = a_i e^i.$$

Wir bezeichnen die  $\bar{a}_i$  als *physikalische Komponenten*; sie sind die Beträge der komponierenden Vektoren.

Wir führen nun an Stelle der Grundvektoren  $e_k$  Einheitsvektoren  $i_k$  in den gleichen Richtungen ein; dann ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \sum_k a_k e^k = \sum_k (a_k e^k) i^k = \sum_k \bar{a}_k i^k \\ \mathfrak{a} &= \sum_k a^k e_k = \sum_k (a^k e_k) i_k = \sum_k \bar{a}^k i_k \end{aligned}$$

und daher also auch  $i^k = i_k$ .

<sup>1</sup> In diesem Teil 8. sind alle Summationen ausgeschrieben.

$dx^i$  ist keine physikalische Vektorkomponente, sondern

$$e_i dx^i = \overline{ds}_i.$$

Analog kann man die physikalischen Komponenten eines Tensors  $\mathfrak{X}$  definieren; die Tensorrelation  $a = \mathfrak{X} \cdot b$  schreibt sich

$$\bar{a}_i = \sum_k \overline{T}_{ik} b_k,$$

wobei die physikalischen Komponenten des Tensors gegeben sind durch

$$T_{ik} = \frac{T_{ik}}{e_i e_k} = T^{ik} e_i e_k = T^i_k e_i = T_i^k e_k = (i; \mathfrak{X} i_k).$$

**Metrischer Fundamentaltensor.** Er hat Diagonalform

$$g_{ik} = g_{ii} \delta_{ik} \quad \text{mit} \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k \end{cases}$$

$$g_{ii} = \frac{1}{g^{ii}}.$$

**Determinante:**  $g = g_{11} g_{22} g_{33} \dots$

**Drei-Indizes-Symbole:**

$$\Gamma_{l,ik} = 0, \quad \text{wenn } i \neq k \neq l \neq i$$

$$\Gamma_{l,ii} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^l} \quad (l \neq i)$$

$$\Gamma_{i,ki} = \Gamma_{i,ik} = +\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} \quad (k \neq i)$$

$$\Gamma_{i,ii} = +\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}$$

$$\Gamma_{ik}^l = 0, \quad \text{wenn } i \neq k \neq l \neq i$$

$$\Gamma_{ii}^l = -\frac{1}{2 g_{il}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^l} \quad (l \neq i)$$

$$\Gamma_{ki}^i = \Gamma_{ik}^i = +\frac{1}{2 g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln g_{ii}}{\partial x^k} \quad (k \neq i)$$

$$\Gamma_{ii}^i = \frac{1}{2 g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln g_{ii}}{\partial x^i}.$$

Durch diese Beziehungen transformieren sich die Formeln von S. 136 folgendermaßen in physikalische Komponenten:

$$\bar{a}_i = \frac{1}{e_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \quad (\alpha = \text{grad } \varphi)$$

$$\bar{A}_{ik} = \frac{1}{e_k} \left( \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k} - \frac{\bar{a}_k}{e_i} \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^i} + \delta_{ik} \sum_r \frac{\bar{a}_r}{e_r} \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^r} \right) \quad (\mathfrak{A} = \text{grad } \alpha)$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{g} \cdot \frac{\bar{a}_i}{e_i} \right) \quad (\psi = \text{div } \alpha)$$

$$\psi := \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{g} \cdot \frac{1}{e_i^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right) \quad (\psi = \Delta \varphi)$$

$$\bar{a}_i := \frac{e_i}{\sqrt{g}} \sum_r \frac{\partial}{\partial x^r} \left( \sqrt{g} \cdot \frac{\bar{T}_{ir}}{e_i e_r} \right) + \sum_r \frac{(\bar{T}_{ri} + \bar{T}_{ir})}{e_i e_r} \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^r} - \sum_r \frac{\bar{T}_{rr}}{e_i e_r} \cdot \frac{\partial e_r}{\partial x^i} \quad (\mathbf{a} = \operatorname{div} \mathfrak{T}).$$

Ist hierin  $T_{ik}$  ein antisymmetrischer Tensor ( $\bar{T}_{ik} = -\bar{T}_{ki}$ ), so verschwinden die beiden letzten Glieder.

Ist speziell

$$\bar{T}_{ik} := \bar{a}_{ik} - \bar{a}_{ki} = \frac{1}{e_i e_k} \left( \frac{\partial (\bar{b}_i e_i)}{\partial x^k} - \frac{\partial (\bar{b}_k e_k)}{\partial x^i} \right),$$

so wird

$$\bar{a}_i = \frac{e_i}{\sqrt{g}} \cdot \sum_r \frac{\partial}{\partial x^r} \left( \sqrt{g} \frac{\left( \frac{\partial (\bar{b}_i e_i)}{\partial x^r} - \frac{\partial (\bar{b}_r e_r)}{\partial x^i} \right)}{e_i^2 e_r^2} \right) \quad (\mathbf{a} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{b}).$$

Dieser Ausdruck ist in zwei Teile zerlegbar:

$$\bar{a}_i = \frac{1}{e_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \sum_r \frac{\partial}{\partial x^r} \left( \sqrt{g} \frac{\bar{b}_r}{e_r} \right) \right) - \bar{c}_i,$$

wo der erste Teil gleich  $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{b}$ , der zweite Teil  $\mathbf{c} = \Delta \mathfrak{b}$  bedeutet. Der symmetrische Anteil des Tensors  $\bar{a}_{ik}$  schreibt sich:

$$\bar{S}_{ik} = \frac{\bar{a}_{ik} + \bar{a}_{ki}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{e_i}{e_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\bar{b}_i}{e_i} \right) + \frac{e_k}{e_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\bar{b}_k}{e_k} \right) \right) + \frac{\delta_{ik}}{e_k} \sum_r \frac{\bar{b}_r}{e_r} \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^r}.$$

Antisymmetrische Tensoren haben im Dreidimensionalen nur 3 Komponenten. Deutet man diese als die Komponenten eines Vektors, so ist dieser hierdurch in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Weise definiert, indem man setzt

$$\bar{T}_{12} = \bar{a}_3, \quad \bar{T}_{23} = \bar{a}_1, \quad \bar{T}_{31} = \bar{a}_2.$$

Z. B. liefert der Tensor  $\bar{a}_i \bar{b}_k - \bar{a}_k \bar{b}_i = \bar{c}_l$  die Definition des Vektors  $\mathbf{c} = [\mathfrak{a} \mathfrak{b}]$ , ferner der Tensor

$$\bar{a}_{ik} - \bar{a}_{ki} = \frac{1}{e_i e_k} \cdot \left( \frac{\partial (\bar{b}_i e_i)}{\partial x^k} - \frac{\partial (\bar{b}_k e_k)}{\partial x^i} \right) = \bar{c}_l$$

die Definition des Vektors  $\mathbf{c} = \operatorname{rot} \mathfrak{b}$ .

Diese Vektoren heißen axiale im Gegensatz zu den anderen, die als polar bezeichnet werden.

Die Operation  $\operatorname{rot}$ , angewandt auf einen axialen Vektor, ist identisch mit der Operation  $\operatorname{div}$ , angewandt auf den antisymmetrischen Tensor (vgl.  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{b}$ ).

Siebenter Abschnitt.

## Spezielle Koordinatensysteme.

### A. Zweidimensionale Systeme.

Die Koordinaten dienen entweder zur Beschreibung der Lage eines Punktes in einer Ebene oder auf einer gekrümmten Fläche.

#### 1. Ebene Koordinatensysteme.

Viel benutzt werden die folgenden Systeme:

$\alpha$ ) Das **kartesische System** zweier sich rechtwinklig schneidender äquidistanter Geradenscharen. Die infinitesimale Entfernung zweier Punkte ist  $ds$  mit

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Es ist also  $g_{ik} = g^{ik} = \delta_{ik}$ ,  $g = 1$ , und es gibt nur eine einzige Art von Vektorkomponenten. Es ist

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}.$$

Über die Deutung als *komplexe Zahlenebene*  $z = x + iy$  vgl. S. 35f.

$\beta$ ) **Polarkoordinaten**  $r, \varphi$ . Es ist

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

$$\left. \begin{array}{lll} g_{11} = 1, & g_{22} = r^2, & g_{12} = 0 \\ g^{11} = 1, & g^{22} = \frac{1}{r^2}, & g^{12} = 0 \end{array} \right\} g = r^2.$$

Drei-Indizes-Symbole:

$$\left. \begin{array}{lll} \Gamma_{22}^1 = -r, & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{1,22} = -r, & \Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21} = r \end{array} \right\} \text{alle anderen} = 0.$$

Mit den kartesischen Koordinaten besteht der Zusammenhang

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi + \alpha) & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r \sin(\varphi + \alpha) & \varphi &= -\alpha + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Man wählt i. a.  $\alpha = 0$ .

Die Gleichung einer Geraden ist  $r \sin(\varphi - \beta) = p$ . Ihr Abstand vom Nullpunkt ist  $p$ , sie hat die Richtung  $\varphi = \beta$ .

Zwei Gerade sind parallel, wenn  $\beta_1 = \beta_2$ . Ihr Abstand ist  $|\rho_1 - \rho_2|$ .  
Zwei Gerade sind senkrecht, wenn  $(\beta_1 - \beta_2) = \frac{\pi}{2}$ .

Die endliche Entfernung zweier Punkte  $(r_1 \varphi_1)$  und  $(r_2 \varphi_2)$  ist

$$s = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

## 2. Koordinaten auf Flächen.

Auf gekrümmten Flächen kann man die vorstehenden Koordinatensysteme i. a. nicht benutzen. Anwendbar sind sie jedoch auf solchen Flächen, die sich durch eine *dehnungslose Verbiegung* in die Ebene überführen lassen. So kann man einen *Zylinder* bequem durch kartesische Koordinaten beschreiben ( $x = \text{constans}$ : *Mantellinien*,  $y = \text{constans}$ : *Breitenkreise*) und einen *Kegel* durch Polarkoordinaten ( $\varphi = \text{constans}$ : *Mantellinien*,  $r = \text{constans}$ : *Breitenkreise*). Alle Flächen, bei denen diese Möglichkeit besteht, sind gekennzeichnet dadurch, daß der RIEMANNsche Krümmungstensor (s. S. 137)  $R^i_{j\,hk} = 0$  wird.

Als Beispiel einer Fläche, bei der diese Möglichkeit *nicht* besteht, betrachten wir die *Kugel*. Man benutzt als Koordinaten<sup>1</sup> entweder *Länge*  $\alpha$  und *Breite*  $\delta$  oder *Länge*  $\alpha$  und *Poldistanz*  $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \delta$ . Der Abstand zweier benachbarter Punkte auf der Kugel vom Radius  $a$  ist gegeben durch

$$ds^2 = a^2(\sin^2 \vartheta d\alpha^2 + d\vartheta^2) = a^2(\cos^2 \delta d\alpha^2 + d\delta^2).$$

Es sei  $x^1 = \alpha$ ,  $x^2 = \delta$ . Dann ist

$$\begin{aligned} g_{11} &= a^2 \cos^2 \delta, & g_{22} &= a^2, & g_{12} &= 0 \\ g^{11} &= \frac{1}{a^2} \sec^2 \delta, & g^{22} &= \frac{1}{a^2}, & g^{12} &= 0, & g &= a^4 \cos^2 \delta. \end{aligned}$$

Drei-Indizes-Symbole:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,12} &= \Gamma_{1,21} = -a^2 \cos \delta \sin \delta \\ \Gamma_{2,11} &= a^2 \cos \delta \sin \delta, & \text{alle anderen} &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\text{tg } \delta \quad \Gamma^2_{11} = \cos \delta \sin \delta \quad \text{und alle anderen} = 0.$$

Der Krümmungstensor hat hier nur eine einzige Komponente

$$R^1_{212} = 1 \quad \text{oder} \quad R^{12}_{12} = \frac{1}{a^2}, \quad R_{11} = R_{22} = 1, \quad R = \frac{2}{a^2}.$$

<sup>1</sup> Z. B. die geographische Länge und Breite auf der Erdkugel, Rektaszension  $\alpha$  und Deklination  $\delta$  auf der Himmelskugel.

**B. Dreidimensionale Systeme.****1. Kartesische Koordinaten  $x, y, z$ .**

$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ , also  $g_{ik} = g^{ik} = \delta_{ik}$ ; alle Drei-Indizes-Symbole verschwinden.  $g = 1$ .

Es gibt nur eine einzige Art von Vektorkomponenten  $(a_x, a_y, a_z)$ , die Projektionen von  $a$  auf die drei Achsen ( $a_x = (a \cdot e_1)$  usw.)

Das innere Produkt  $(a \ b)$  wird

$$(a \ b) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1)$$

Das äußere Produkt  $[a \ b]$  hat die Komponenten:

$$\left. \begin{aligned} [a \ b]_x &= a_y b_z - a_z b_y \\ [a \ b]_y &= a_z b_x - a_x b_z \\ [a \ b]_z &= a_x b_y - a_y b_x \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Der Betrag eines Vektors  $a$  wird:

$$a = |a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (3)$$

$(a \ [b \ c])$  wird

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}, \quad (4)$$

$\text{grad } \varphi$  hat die Komponenten:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (5)$$

$\text{div } a$  wird:

$$\text{div } a = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad (6)$$

$\text{rot } a$  hat die Komponenten:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_x a &= \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \text{rot}_y a &= \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \text{rot}_z a &= \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\Delta \varphi \text{ ist } = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (8)$$

$\Delta a$  hat die Komponenten:

$$\Delta_x a = \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} = \Delta a_x \text{ usw.} \quad (9)$$

$(a \ \text{grad}) \ b$  hat die Komponenten:

$$(a \ \text{grad})_x b = a_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_x}{\partial z} \text{ usw.} \quad (10)$$



Der GAUSSSCHE Satz lautet:

$$\int \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dv = \int (a_x \cos(nx) + a_y \cos(ny) + a_z \cos(nz)) df. \quad (11)$$

Der STOKESSCHE Satz lautet:

$$\int df \left\{ \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cos(nx) + \dots \right\} = \int (a_x dx + a_y dy + a_z dz). \quad (12)$$

Eine lineare Vektorfunktion stellt sich in der Form dar:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= a_{0x} + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_y &= a_{0y} + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_z &= a_{0z} + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Die Zerlegung von  $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0$  in einen quellenfreien Teil  $\mathfrak{a}'$  und einen wirbelfreien Teil  $\mathfrak{a}''$  liefert:

$$\mathfrak{a}_x = \mathfrak{a}'_x + \mathfrak{a}''_x$$

usw., wo

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{a}'_x &= \frac{1}{2} \{ (a_{12} - a_{21})y + (a_{13} - a_{31})z \} = u_y z - u_z y \\ \mathfrak{a}'_y &= \frac{1}{2} \{ (a_{23} - a_{32})z + (a_{21} - a_{12})x \} = u_z x - u_x z \\ \mathfrak{a}'_z &= \frac{1}{2} \{ (a_{31} - a_{13})x + (a_{32} - a_{23})y \} = u_x y - u_y x \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{a}''_x &= a_{11}x + \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})y + \frac{1}{2}(a_{13} + a_{31})z \\ \mathfrak{a}''_y &= \frac{1}{2}(a_{21} + a_{12})x + a_{22}y + \frac{1}{2}(a_{23} + a_{32})z \\ \mathfrak{a}''_z &= \frac{1}{2}(a_{31} + a_{13})x + \frac{1}{2}(a_{32} + a_{23})y + a_{33}z \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Drückt man die Abhängigkeit des Vektors  $\mathfrak{a}$  vom Ort aus in der Form:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{A} \mathfrak{r},$$

so bezeichnet man die  $a_{ik}$  der Formel (15) als die Komponenten des Tensors  $\mathfrak{A}$ .

Schreibt man  $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{X} \mathfrak{r}$ , so sind also die Größen  $a_{11}$ ,  $\frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})$ ,  $\frac{1}{2}(a_{13} + a_{31})$  usw. die Komponenten eines symmetrischen Tensors.

Entsprechend bezeichnet man die  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  als die Komponenten eines antimetrischen Tensors (vgl. S. 140).

$\mathfrak{p} = \text{div } \mathfrak{X}$  hat die Komponenten:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \\ p_y &= \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \\ p_z &= \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$(\mathfrak{X} \mathfrak{X}) = T_{xx}^2 + T_{yy}^2 + T_{zz}^2 + 2T_{xy}^2 + 2T_{xz}^2 + 2T_{yz}^2. \quad (19)$$

$$|\mathfrak{X}| = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}. \quad (20)$$

$$|\mathfrak{T}| = \begin{vmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{vmatrix}.$$

2. Kugelkoordinaten  $(r, \varphi, \vartheta)$ .

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + r^2 d\vartheta^2, \quad e_1 = 1, \quad e_2 = r \sin \vartheta, \quad e_3 = r, \quad \left. \begin{array}{l} \\ g = r^4 \sin^2 \vartheta. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Drei-Indizes-Symbole:

$$\Gamma_{1,33} = -r, \quad \Gamma_{2,12} = r \sin^2 \vartheta, \quad \Gamma_{3,22} = -r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta,$$

$$\Gamma_{1,22} = -r \sin^2 \vartheta, \quad \Gamma_{2,23} = r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta, \quad \Gamma_{3,13} = r,$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r \sin^2 \vartheta, \quad \Gamma_{22}^3 = -\sin \vartheta \cos \vartheta, \quad \Gamma_{23}^2 = \text{ctg } \vartheta.$$

Wir bezeichnen

$$a_1 = a_r, \quad a_2 = a_\varphi, \quad a_3 = a_\vartheta.$$

 $\mathbf{a} = \text{grad } \psi$ :

$$a_r = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad a_\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad a_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}, \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{2}{r} a_r + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\text{ctg } \vartheta}{r} a_\vartheta \quad (3)$$

$$= \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) \right) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta a_\vartheta) \right)$$

$$\Delta \psi = \text{div grad } \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} + \left. \begin{array}{l} \\ + \frac{1}{r^2} \text{ctg } \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \end{array} \right\} \quad (4)$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) \quad (5)$$

$$\text{rot}_r \mathbf{a} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left( \frac{\partial a_\vartheta}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta a_\varphi) \right) \quad (6)$$

$$\text{rot}_\varphi \mathbf{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_\vartheta)}{\partial r} \quad (7)$$

$$\text{rot}_\vartheta \mathbf{a} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi) - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right) \quad (8)$$

$$\Delta_r \mathbf{a} = \frac{1}{r} \Delta (r a_r) - \frac{2}{r} \text{div } \mathbf{a}. \quad (9)$$

Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta.$$

Zwischen den  $a_x, a_y, a_z$  und den  $a_r, a_\varphi, a_\vartheta$  bestehen die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} a_r &= a_x \sin \vartheta \cos \varphi + a_y \sin \vartheta \sin \varphi + a_z \cos \vartheta \\ a_\varphi &= -a_x \sin \varphi + a_y \cos \varphi \\ a_\vartheta &= a_x \cos \vartheta \cos \varphi + a_y \cos \vartheta \sin \varphi - a_z \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} a_x &= a_r \sin \vartheta \cos \varphi - a_\varphi \sin \varphi + a_\vartheta \cos \varphi \cos \vartheta \\ a_y &= a_r \sin \vartheta \sin \varphi + a_\varphi \cos \varphi + a_\vartheta \sin \varphi \cos \vartheta \\ a_z &= a_r \cos \vartheta - a_\vartheta \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

### 3. Zylinderkoordinaten $(\varrho, \varphi, z)$ .

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2 + dz^2, \quad e_1 = 1, \quad e_2 = \varrho, \quad e_3 = 1, \quad g = \varrho^2. \quad (1)$$

Drei-Indizes-Symbole:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{1,22} &= -\varrho, & \Gamma_{2,12} &= \Gamma_{2,21} = \varrho \\ \Gamma_{22}^1 &= -\varrho, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{\varrho} \end{aligned} \right\} \text{ alle anderen} = 0.$$

Wir bezeichnen:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_\varrho, & \bar{a}_2 &= a_\varphi, & a_3 &= a_z \\ a = \text{grad } \psi: & \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} = a_\varrho, & \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} &= a_\varphi, & \frac{\partial \psi}{\partial z} &= a_z \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{div } a = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho a_\varrho) + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (3)$$

$$\Delta \psi = \text{div grad } \psi = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (4)$$

$$\text{rot}_\varrho a = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \quad (5)$$

$$\text{rot}_\varphi a = \frac{\partial a_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \varrho} \quad (6)$$

$$\text{rot}_z a = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial (\varrho a_\varphi)}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial a_\varrho}{\partial \varphi}. \quad (7)$$

Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten:

$$x = \varrho \cdot \cos \varphi$$

$$y = \varrho \cdot \sin \varphi$$

$$z = z.$$

Zwischen den  $a_x, a_y, a_z$  und den  $a_\varrho, a_\varphi, a_z$  bestehen die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} a_\varrho &= a_x \cos \varphi + a_y \sin \varphi \\ a_\varphi &= -a_x \sin \varphi + a_y \cos \varphi \\ a_z &= & + a_z. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} a_x &= a_\varrho \cos \varphi - a_\varphi \sin \varphi \\ a_y &= a_\varrho \sin \varphi + a_\varphi \cos \varphi \\ a_z &= & + a_z. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

**4. Parabolische Koordinaten  $(\xi, \eta, \varphi)$ .**

$$ds^2 = (\xi^2 + \eta^2) (d\xi^2 + d\eta^2) + \xi^2 \eta^2 d\varphi^2 \quad (1)$$

$$g_{11} = g_{22} = \xi^2 + \eta^2 \quad g_{33} = \xi^2 \eta^2 \quad \sqrt{g} = (\xi^2 + \eta^2) \cdot \xi \eta.$$

Drei-Indizes-Symbole:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1, 11} &= \xi & \Gamma_{1, 22} &= -\xi & \Gamma_{1, 12} &= \eta & \Gamma_{1, 33} &= -\xi \eta^2 \\ \Gamma_{2, 11} &= -\eta & \Gamma_{2, 22} &= \eta & \Gamma_{2, 12} &= \xi & \Gamma_{2, 33} &= -\xi \eta^2 \\ \Gamma_{3, 13} &= \xi \eta^2 & \Gamma_{3, 23} &= \xi^2 \eta. \end{aligned}$$

Um den ersten Index heraufzuziehen, hat man die Ausdrücke durch  $(\xi^2 + \eta^2)$  zu dividieren mit Ausnahme der beiden letzten:

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{\xi} \quad \Gamma_{23}^3 = \frac{1}{\eta}.$$

Wir bezeichnen:

$$\bar{a}_1 = a_\xi, \quad \bar{a}_2 = a_\eta, \quad \bar{a}_3 = a_\varphi.$$

$\mathbf{a} = \text{grad } \psi$  hat die Komponenten:

$$a_\xi = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad (2)$$

$$a_\eta = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}$$

$$a_\varphi = \frac{1}{\xi \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$$

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi a_\xi) + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta a_\eta) + \sqrt{\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2}} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} (\xi a_\xi + \eta a_\eta) \right\} \quad (3)$$

$$\Delta \psi = \text{div grad } \psi = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \left( \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right\} \quad (4)$$

$$\text{rot}_\xi \mathbf{a} = \frac{1}{\xi \eta} \frac{\partial a_\eta}{\partial \varphi} - \frac{1}{\eta \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta a_\varphi)$$

$$\text{rot}_\eta \mathbf{a} = \frac{1}{\xi \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi a_\varphi) - \frac{1}{\xi \eta} \frac{\partial a_\xi}{\partial \varphi} \quad (5)$$

$$\text{rot}_\varphi \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \left\{ \left( \frac{\partial a_\xi}{\partial \eta} - \frac{\partial a_\eta}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} (\eta a_\xi - \xi a_\eta) \right\}.$$

Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten:

$$x = \xi \eta \cdot \cos \varphi \quad y = \xi \eta \cdot \sin \varphi \quad z = \frac{1}{2} (\xi^2 - \eta^2) \quad r = \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2)$$

$$\xi^2 = r + z \quad \eta^2 = r - z \quad \varphi = \text{arc tg } \frac{y}{x}.$$

$$a_\xi = a_x \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \cos \varphi + a_y \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \sin \varphi + a_z \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}},$$

$$a_\eta = a_x \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \cos \varphi + a_y \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \sin \varphi - a_z \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad (6)$$

$$a_\varphi = -a_x \sin \varphi + a_y \cos \varphi.$$

$$\begin{aligned}
 a_x &= a_\xi \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \cos \varphi + a_\eta \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \cos \varphi - a_\varphi \sin \varphi, \\
 a_y &= a_\xi \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \sin \varphi + a_\eta \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \sin \varphi + a_\varphi \cos \varphi, \\
 a_z &= a_\xi \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} - a_\eta \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

### 5. Elliptische Koordinaten.

Durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$$

ist eine Fläche 2. Grades mit den Hauptachsen  $A = \sqrt{\lambda^2 - a^2}$ , ... in Richtung der  $x$ ,  $y$ ,  $z$ -Achse definiert.  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\lambda$  sind reelle Parameter.

Ohne die Allgemeinheit wesentlich zu beschränken, kann der Parameter  $a = 0$  gesetzt und die Bestimmung  $c \geq b \geq 0$  getroffen werden.

Dann wird:

$$A^2 > B^2 > C^2,$$

$$A^2 = \lambda^2, \quad B^2 = \lambda^2 - b^2, \quad C^2 = \lambda^2 - c^2$$

bzw.

$$\lambda^2 = A^2, \quad b^2 = A^2 - B^2, \quad c^2 = A^2 - C^2.$$

Durch verschiedene Wahl von  $b$ ,  $c$  und  $\lambda$  ergeben sich eine große Zahl verschiedener Flächen: erstens je nachdem, ob  $\lambda$  zwischen 0 und  $b$ , oder zwischen  $b$  und  $c$ , oder zwischen  $c$  und  $\infty$  variiert; zweitens je nachdem die Werte  $b$  und  $c$  dicht beieinander, oder dicht bei ihren möglichen Grenzwerten 0 bzw.  $\infty$  liegen (durch  $\sim$  angedeutet). Eine Übersicht über diese Fälle gibt die folgende Tabelle. In ihr sind jedesmal die Grenzfälle angegeben, denen die Fläche beim entsprechenden Grenzübergang zustrebt.

	$0 < \lambda < b$	$b < \lambda < c$	$c < \lambda < \infty$
$0 < b < c < \infty$	Zweischaliges Hyperboloid	Einschaliges Hyperboloid	Ellipsoid
$0 < b \sim c < \infty$	Zweischaliges Rot.-Hyp. um $x$ -Achse	Ebenenpaar durch $x$ -Achse	Verlängertes Rot.-Ellipsoid um $x$ -Achse
$0 \sim b < c < \infty$	Ebenenpaar durch $z$ -Achse	Einschaliges Rot.-Hyp. um $z$ -Achse	Abgeflachtes Rot.-Ellipsoid um $z$ -Achse
$0 \sim b \sim c < \infty$	Elliptischer Kegel um $x$ -Achse	Elliptischer Kegel um $z$ -Achse	Kugel
$0 < b < c \sim \infty$	Hyp. Zylinder    $z$ -Achse	Ellipt. Zylinder    $z$ -Achse	Ebenenpaar $\perp$ $z$ -Achse
$0 < b \sim c \sim \infty$	Ebenenpaar    $x$ -Achse	Hyp. Zylinder    $x$ -Achse	Ellipt. Zylinder    $x$ -Achse
$0 \sim b < c \sim \infty$	Ebenenpaar durch $z$ -Achse	Kreiszyylinder    $z$ -Achse	Ebenenpaar $\perp$ $z$ -Achse

Läßt man  $\lambda$  zwischen  $c$  und  $\infty$  variieren, so erfüllen die Ellipsoide (bzw. ihre Entartungen) den ganzen Raum dicht; ebenso die bei Variation von  $\lambda$  zwischen  $b$  und  $c$  gebildeten einschaligen Hyperboloide; ebenso die bei Variation von  $\lambda$  zwischen  $0$  und  $b$  gebildeten zweischaligen Hyperboloide.

Die entstehenden 3 Flächenscharen sind zueinander orthogonal und konfokal (Fig. 19).

Setzt man

$$\lambda_3 > c > \lambda_2 > b > \lambda_1 > a,$$

so ist der Schnittpunkt der 3 Flächen  $\lambda = \lambda_1$ ,  $\lambda = \lambda_2$ ,  $\lambda = \lambda_3$  durch diese Werte (8-deutig) bestimmt.

Die 3 Größen  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  heißen *elliptische Koordinaten* dieses Punktes. Seien  $x$ ,  $y$ ,  $z$  seine kartesischen Koordinaten, dann ist

$$x^2 = \frac{(\lambda_1^2 - a^2)(\lambda_2^2 - a^2)(\lambda_3^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)},$$

$$y^2 = \frac{(\lambda_1^2 - b^2)(\lambda_2^2 - b^2)(\lambda_3^2 - b^2)}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)},$$

$$z^2 = \frac{(\lambda_1^2 - c^2)(\lambda_2^2 - c^2)(\lambda_3^2 - c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}.$$

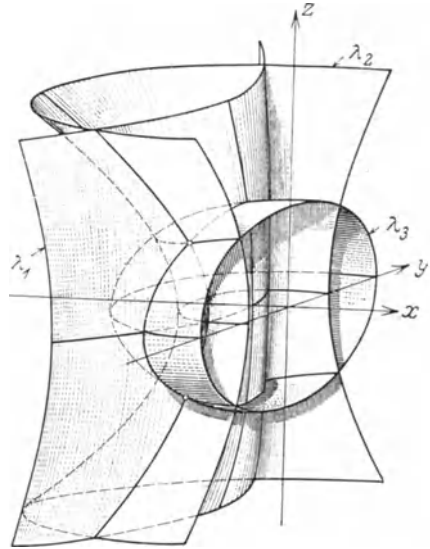


Fig. 19. Elliptische Koordinaten.

$$ds^2 = \left. \begin{aligned} & \frac{\lambda_1^2 d \lambda_1^2 D_2^2 D_3^2}{(\lambda_1^2 - a^2)(b^2 - \lambda_1^2)(c^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_2^2 d \lambda_2^2 D_1^2 D_3^2}{(\lambda_2^2 - a^2)(\lambda_2^2 - b^2)(c^2 - \lambda_2^2)} + \\ & + \frac{\lambda_3^2 d \lambda_3^2 D_1^2 D_2^2}{(\lambda_3^2 - a^2)(\lambda_3^2 - b^2)(\lambda_3^2 - c^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

wo

$$D_1^2 = \lambda_3^2 - \lambda_2^2, \quad D_2^2 = \lambda_3^2 - \lambda_1^2, \quad D_3^2 = \lambda_2^2 - \lambda_1^2.$$

An Stelle von  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  führt man mit Vorteil folgende Funktionen von ihnen als Koordinaten ein (im Falle  $a = 0$ ):

$$\alpha = \int_0^{\lambda_1} \frac{c \cdot d \lambda}{\sqrt{(b^2 - \lambda^2)(c^2 - \lambda^2)}}, \quad \beta = \int_b^{\lambda_2} \frac{c \cdot d \lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - b^2)(c^2 - \lambda^2)}},$$

$$\gamma = \int_c^{\lambda_3} \frac{c \cdot d \lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2)}}.$$

$$ds^2 = d\alpha^2 \cdot \frac{D_2^2 D_3^2}{c^2} + d\beta^2 \cdot \frac{D_3^2 D_1^2}{c^2} + d\gamma^2 \cdot \frac{D_1^2 D_2^2}{c^2}. \quad (2)$$

Der LAPLACESche Operator  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots$  transformiert sich zu

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{c^2}{D_2^2 D_3^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} \cdot \frac{c^2}{D_1^2 D_3^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \gamma^2} \cdot \frac{c^2}{D_1^2 D_2^2}. \quad (3)$$

$\alpha, \beta, \gamma$  sind als elliptische Integrale zu berechnen<sup>1</sup>. Man setzt<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= b \sin \vartheta, \\ \lambda_2 &= \sqrt{c^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}, \\ \lambda_3 &= \frac{c}{\cos \psi}, \\ k &= \frac{b}{c}, \\ k' &= \sqrt{1 - k^2},\end{aligned}$$

dann ist

$$\left. \begin{aligned}\alpha &= \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} = F(k, \vartheta) \\ \beta &= \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \cos^2 \varphi}} = F\left(k', \frac{\pi}{2}\right) - F\left(k', \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ \gamma &= \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \psi}} = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(k, \psi + \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Bei Rotationssymmetrie  $b=0$  bzw.  $b=c$  benutzt man statt der allgemeinen elliptischen Koordinaten  $\lambda$  besser die spezielleren  $\mu, \nu, \varphi$  bzw.  $\sigma, \tau, \varphi$ .

$$\begin{aligned}\text{I.} \quad x &= \alpha \sqrt{\mu^2 + 1} \sqrt{1 - \nu^2} \cos \varphi & r^2 &= \alpha^2 (\mu^2 - \nu^2 + 1) \\ y &= \alpha \sqrt{\mu^2 + 1} \sqrt{1 - \nu^2} \sin \varphi \\ z &= \alpha \mu \nu\end{aligned} \quad (5)$$

$\mu = \text{const}$  ist ein abgeplattetes Rotationsellipsoid (Achsen  $C = \alpha \mu$  und  $A = B = \alpha \sqrt{\mu^2 + 1}$ ),

$\nu = \text{const}$  ist ein einschaliges Rotationshyperboloid,

$\varphi = \text{const}$  ist eine Ebene durch die  $z$ -Achse.

<sup>1</sup> Jede lineare Funktion  $V$  von  $\alpha, \beta, \gamma$  erfüllt die Gleichung  $\Delta V = 0$ .  $V$  wird dann auf einer Fläche zweiten Grades konstant.

<sup>2</sup> Spezialfälle (vgl. oben).

1.  $b = 0$ :  $k = 0, k' = 1, \alpha = \vartheta$ ,

$$\beta = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = \ln(0) + \beta', \quad \text{wo } \beta' = \ln \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2},$$

$$\gamma = \psi.$$

Hier ist  $\beta'$  an Stelle von  $\beta$  brauchbar.

2.  $b = c$ :  $k = 1, k' = 0, \alpha = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2} \right)$ ,

$$\beta = \varphi,$$

$$\gamma = \ln(0) + \gamma', \quad \text{wo } \gamma' = \ln \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2}.$$

Transformationsformeln für die Koordinatendifferentiale:

$$\left. \begin{aligned} d\mu &= \frac{\mu}{a^2(\mu^2 + \nu^2)} \left( x dx + y dy + \frac{1 + \mu^2}{\mu^2} z dz \right) \\ d\nu &= -\frac{\nu}{a^2(\mu^2 + \nu^2)} \left( x dx + y dy - \frac{1 - \nu^2}{\nu^2} z dz \right) \\ d\varphi &= \frac{1}{a^2(\mu^2 + 1)(1 - \nu^2)} (-y dx + x dy) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

und

$$\left. \begin{aligned} dx &= -y d\varphi + \frac{\mu}{\mu^2 + 1} x d\mu - \frac{\nu}{1 - \nu^2} x d\nu \\ dy &= x d\varphi + \frac{\mu}{\mu^2 + 1} y d\mu - \frac{\nu}{1 - \nu^2} y d\nu \\ dz &= a(\nu d\mu + \mu d\nu) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$ds^2 = d\mu^2 \cdot \frac{\alpha^2(\mu^2 + \nu^2)}{\mu^2 + 1} + d\nu^2 \frac{\alpha^2(\mu^2 + \nu^2)}{1 - \nu^2} + d\varphi^2 \cdot \alpha^2(\mu^2 + 1)(1 - \nu^2) \quad (8)$$

$$\Delta V = \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu} \left( (\mu^2 + 1) \frac{\partial V}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \nu} \left( (1 - \nu^2) \frac{\partial V}{\partial \nu} \right) + \frac{(\mu^2 + 1)(1 - \nu^2)}{(\mu^2 + \nu^2)} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right\} \frac{1}{\alpha^2(\mu^2 + \nu^2)}. \quad (9)$$

II.

$$\begin{aligned} x &= \beta \sqrt{\sigma^2 - 1} \sqrt{1 - \tau^2} \cos \varphi \\ y &= \beta \sqrt{\sigma^2 - 1} \sqrt{1 - \tau^2} \sin \varphi \\ z &= \beta \cdot \sigma \tau. \end{aligned}$$

Hier ist  $\sigma = \text{const}$  ein verlängertes Rotationsellipsoid (Achsen  $C = \beta \cdot \sigma$  und  $A = B = \beta \sqrt{\sigma^2 - 1}$ ), d. h. man kommt von I auf II durch die Substitution:

$$\alpha = i\beta, \quad \mu = -i\sigma, \quad \nu = \tau, \quad \varphi = \varphi.$$

$\Delta V = 0$  wird erfüllt für I durch die speziellen partikulären Lösungen

$$V = \varphi$$

$$V = \ln \sqrt{\frac{1 + \nu}{1 - \nu}}$$

$$V = \text{arc tg } \mu$$

$$V = \mu\nu$$

$$V = \mu \left( \nu \ln \sqrt{\frac{1 + \nu}{1 - \nu}} - 1 \right)$$

$$V = \nu (\mu \text{ arc tg } \mu + 1)$$

$$V = x \left( \text{arc tg } \mu + \frac{\mu}{1 + \mu^2} + C \right)$$

$$V = x \left( \ln \sqrt{\frac{1 + \nu}{1 - \nu}} + \frac{\nu}{1 - \nu^2} + C \right)$$

und für II durch die mit obiger Substitution hieraus folgenden Ausdrücke.

Grenzfall. Man erhält Kugelkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$  mit  $\nu = \cos \vartheta$  und  $\alpha\mu = r$  im Grenzfall einer sehr kleinen Konstanten  $\alpha$ .



Achter Abschnitt.

## Gruppentheorie.

### A. Allgemeine Definitionen und Sätze.

#### I. Gruppen.

a) Eine Gesamtheit (Menge)  $\mathfrak{G}$  von endlich oder unendlich vielen unterschiedenen mathematischen Gegenständen (s. S. 3), den *Elementen*, heißt endliche bzw. unendliche *Gruppe*, wenn die folgenden sog. *Gruppenpostulate* erfüllt sind:

I. Es existiert eine *Verknüpfung*, die jedem (geordneten) Paar von Elementen  $A, B$  aus  $\mathfrak{G}$  eindeutig ein Element  $C = AB$  aus  $\mathfrak{G}$  zuordnet; i. a. ist  $AB$  von  $BA$  verschieden.

II. Für die in I genannte Verknüpfung gilt das *assoziative Gesetz*: Es ist:  $(AB)C = A(BC) = ABC$  für beliebige  $A, B, C$  aus  $\mathfrak{G}$ .

III. Zu zwei beliebigen Elementen  $A, B$  aus  $\mathfrak{G}$  existieren stets eindeutig bestimmte Elemente  $X$  und  $Y$  in  $\mathfrak{G}$  mit  $AX = B$  und  $YA = B$  (Gesetz der eindeutigen und unbeschränkten, *vorderen* und *hinteren* Division);  $X$  ist der *vordere*,  $Y$  der *hintere Quotient* von  $A$  und  $B$ .

Das Postulat III ist gleichwertig mit:

III'. Es existiert 1. ein *Einheitselement*  $E$  in  $\mathfrak{G}$ , so daß  $EA = A$  ist für jedes  $A$  aus  $\mathfrak{G}$ , 2. zu jedem  $A$  aus  $\mathfrak{G}$  ein *Reziprokes* (*Inverses*)  $A^{-1}$  in  $\mathfrak{G}$ , so daß  $A^{-1}A = E$  ist (vgl. c).

b) Die (endliche oder unendliche) Anzahl  $g$  der Elemente heißt *Ordnung* der Gruppe; die Verknüpfung wird gewöhnlich Multiplikation genannt, obwohl die Gruppenmultiplikation auch jede andere passende Verknüpfung, z. B. Addition, sein kann. Gilt das kommutative Gesetz:  $AB = BA$  für beliebige  $A, B$  aus  $\mathfrak{G}$ , so ist  $\mathfrak{G}$  eine *abelsche Gruppe*.

*Beispiele.* Eine Gruppe bilden z. B. die Permutationen von  $n$  Dingen [zu jeder endlichen Gruppe gibt es eine isomorphe (s. 1e) Permutationsgruppe]. Alle ganzen Zahlen [ebenso alle  $(m, n)$ -reihigen Zahlmatrizen] bilden hinsichtlich der Addition als Gruppenverknüpfung eine abelsche Gruppe, die positiven rationalen Zahlen hinsichtlich der Multiplikation. Die Drehungen, die reguläre Körper in sich überführen, bilden eine Gruppe, ebenso wie die linearen (oder nur die orthogonalen) Transformationen des  $n$ -dimensionalen Raumes in sich (Verknüpfung: Nacheinanderausführen).

c) In jeder Gruppe  $\mathfrak{G}$  existiert ein *Einheitselement*  $E$  mit  $AE = EA = A$  ( $A$  beliebig aus  $\mathfrak{G}$ ), ferner zu jedem Element  $A$  genau

ein *Reziprokes*  $A^{-1}$  mit  $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ . Es ist stets  $AB \neq AC$  und  $BA \neq CA$ , wenn  $B \neq C$  ist. Durchläuft  $B$  alle Elemente von  $\mathfrak{G}$ , so durchlaufen bei festem  $A$  auch  $AB$ , ebenso  $BA$  und  $B^{-1}$  alle Elemente von  $\mathfrak{G}$ , jedes genau je einmal.

d) *Mittelwert*. Die Funktion  $F(A)$  sei für jedes  $A$  in der Gruppe  $\mathfrak{G}$  erklärt (Funktion *auf der* Gruppe). Ist  $\mathfrak{G}$  endlich und besteht  $\mathfrak{G}$  aus den Elementen  $A_1, \dots, A_g$ , so heißt

$$\frac{1}{g} \sum_{\nu=1}^g F(A_\nu) \equiv \frac{1}{g} \sum_A F(A) = \mathbf{M}_A(F(A))$$

der Mittelwert von  $F(A)$  in  $\mathfrak{G}$ . Allgemein existiert der Mittelwert einer Funktion  $F(A)$  über einer beliebigen Gruppe nur unter gewissen Voraussetzungen<sup>1</sup> über  $F(A)$ ; die Matricelemente  $m_{i,k}(A)$  jeder beschränkten Darstellung genügen als Funktionen von  $A$  diesen Voraussetzungen.

Genügt  $F(A)$  diesen Voraussetzungen<sup>1</sup>, so läßt sich zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine endliche Anzahl  $n = n(\varepsilon)$  von Gruppenelementen  $A_1, \dots, A_n$  derart bestimmen, daß

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(XA_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(A_i) \right| < \varepsilon \tag{1}$$

gleichmäßig für alle  $X$  in  $\mathfrak{G}$  gilt;  $\frac{1}{n} \sum f(XA_i)$  ändert sich also um weniger als  $2\varepsilon$ , wenn  $X$   $\mathfrak{G}$  durchläuft. Mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  konvergiert  $\frac{1}{n} \sum F(A_i)$  (und damit auch  $\frac{1}{n} \sum F(XA_i)$ ) gegen einen Grenzwert, den *Mittelwert*  $F(A)$  in  $\mathfrak{G}$ :  $\mathbf{M}_A(F(A)) = \mathbf{M}_{\mathfrak{G}}(F(A))$ . Dabei ist

$$\left| \mathbf{M}(F(A)) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(A_i) \right| \leq \varepsilon. \tag{2}$$

$\mathbf{M}$  ist ein linearer Operator [vgl. C3 a, insbesondere (13)]; es gilt:

$$\mathbf{M}_A(F(A)) = \mathbf{M}_A(F(SA)) = \mathbf{M}_A(F(AS)) = \mathbf{M}_A(F(A^{-1})) \tag{3}$$

für jedes  $S$  in  $\mathfrak{G}$ . Wie man bei vorgegebener Gruppe zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  die  $A_1, \dots, A_n$  zu bestimmen hat, hängt von der Struktur dieser Gruppe ab; vgl. dazu Bc.

e) *Isomorphie*. Eine Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist auf die Gruppe  $\mathfrak{G}'$  *homomorph* abgebildet, wenn jedem Element von  $\mathfrak{G}$  eindeutig ein Element von  $\mathfrak{G}'$  so zugeordnet ist, daß dem Produkt zweier Elemente aus  $\mathfrak{G}$  das Produkt

<sup>1</sup> Siehe J. v. NEUMANN: Almost periodic functions in a group I, Trans. Am. Math. Soc. 36 (1934) S. 445 und W. МААК: Eine neue Definition der fastperiodischen Funktionen, Abh. Math. Seminar Hamburg 11 (1935) S. 240.

der entsprechenden Elemente in  $\mathcal{G}'$  entspricht. Ist die Zuordnung *umkehrbar eindeutig*, d. h. ist auch  $\mathcal{G}'$  homomorph zu  $\mathcal{G}$ , so heißen  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{G}'$  *isomorph* (zueinander) (vgl. 3c).

## 2. Untergruppen.

a) Jede Teilmenge  $\mathfrak{H}$  von Elementen einer Gruppe  $\mathcal{G}$ , die schon für sich allein eine Gruppe bildet, heißt *Untergruppe* zu  $\mathcal{G}$ . Eine Teilmenge  $\mathfrak{H}$  von  $\mathcal{G}$  ist dann und nur dann Untergruppe von  $\mathcal{G}$ , wenn das Produkt (bei unendlicher Gruppe  $\mathcal{G}$  außerdem das Reziproke) von Elementen aus  $\mathfrak{H}$ , in  $\mathcal{G}$  gebildet, stets auch zu  $\mathfrak{H}$  gehört.

Ist  $\mathcal{G}$  eine endliche Gruppe der Ordnung  $g$ , so ist die Ordnung  $h$  jeder Untergruppe  $\mathfrak{H}$  ein Teiler von  $g$ :  $g = hj$ ;  $j$  heißt *Index* von  $\mathfrak{H}$  bezüglich  $\mathcal{G}$ .

Jede Gruppe enthält als (*uneigentliche*) Untergruppen sich selbst und die *identische* Untergruppe, die nur aus  $E$  besteht. Die übrigen Untergruppen heißen *echt* oder *eigentlich*.

b) Sind zwei der Potenzen  $A^0 = E$ ,  $A^1 = A$ ,  $A^2 = AA$ ,  $A^3 = AAA, \dots$  eines Elements  $A$  von  $\mathcal{G}$  gleich, so gibt es eine kleinste natürliche Zahl  $k$  mit  $A^k = E$ ;  $k$  heißt die *Ordnung von  $A$*  und ist ein Teiler von  $g$ . Sind alle Potenzen von  $A$  voneinander verschieden, ist  $\mathcal{G}$  also eine unendliche Gruppe, so ist  $A$  ein *Element unendlicher Ordnung*.

Eine Gruppe, deren Elemente sämtlich Potenzen eines einzigen Elements sind, heißt *zyklisch* und ist eine abelsche Gruppe. Jedes Element  $A$  der Ordnung  $k$  einer Gruppe  $\mathcal{G}$  erzeugt eine zyklische Untergruppe von  $\mathcal{G}$ :  $A, A^2, \dots, A^{k-1}, A^k = E$ , die *Periode* von  $A$ .

c) Zerlegung nach einer Untergruppe. Sind  $A_1 = E, A_2, \dots, A_h$  die Elemente einer Untergruppe  $\mathfrak{H}$  von  $\mathcal{G}$ ,  $B$  ein beliebiges Element von  $\mathcal{G}$ , so bilden die Elemente

$BA_l$  ( $l = 1, 2, \dots, h$ ) die vordere *Rest-* oder *Nebenklasse*  $B\mathfrak{H}$ ,

$A_l B$  ( $l = 1, 2, \dots, h$ ) die hintere *Rest-* oder *Nebenklasse*  $\mathfrak{H}B$

nach  $\mathfrak{H}$  in  $\mathcal{G}$ .  $\mathfrak{H}$  ist selbst eine Restklasse. Die von  $\mathfrak{H}$  verschiedenen Restklassen sind keine Gruppen<sup>1</sup>. Jedes Element von  $\mathcal{G}$  gehört genau einer vorderen (bzw. hinteren) Restklasse von  $\mathfrak{H}$  nach  $\mathcal{G}$  an. Es gibt genau  $j = \frac{g}{h}$  verschiedene vordere (bzw. hintere) Restklassen ( $j = [\mathcal{G}:\mathfrak{H}] = \text{Index von } \mathfrak{H}$ ). Zwei Elemente  $B, C$  von  $\mathcal{G}$  gehören zur selben vorderen (bzw. hinteren) Restklasse, wenn  $B^{-1}C$  (bzw.  $CB^{-1}$ ) in  $\mathfrak{H}$  liegt.

d) Direktes Produkt. Eine Gruppe  $\mathcal{G}$  heißt *direktes Produkt* zweier Untergruppen  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$ :  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ , wenn jedes Element

<sup>1</sup> Die Bezeichnung „Nebengruppe“ statt „Restklasse“ oder „Nebenklasse“ ist daher irreführend.

von  $\mathcal{G}_1$  mit jedem Element von  $\mathcal{G}_2$  vertauschbar ist, und jedes Element von  $\mathcal{G}$  sich eindeutig als Produkt je eines Elementes von  $\mathcal{G}_1$  und eines von  $\mathcal{G}_2$  darstellen läßt; das Produkt der Ordnungen von  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  ist also gleich der Ordnung von  $\mathcal{G}$ . *Beispiel:* Die dreidimensionale Drehspiegelungsgruppe  $\mathfrak{D}'_3$  (vgl. C4) ist das direkte Produkt der Drehungsgruppe  $\mathfrak{D}_3$  und der Gruppe aus Ruhe (Identität)  $E$  und Spiegelung am Nullpunkt  $S$ . Es läßt sich stets eine Gruppe (abstrakt) konstruieren, welche das direkte Produkt beliebig vorgegebener Gruppen ist.

### 3. Transformation, Normalteiler.

a) Konjugierte Elemente. Sind  $T$  und  $A$  Elemente von  $\mathcal{G}$ , so heißt  $B = T^{-1}AT$  das mit  $T$  transformierte Element zu  $A$ .  $B$  ist zu  $A$  *konjugiert*; es gilt  $A = TBT^{-1}$ , also ist auch  $A$  zu  $B$  konjugiert. Ist  $A$  zu  $B$  und  $A$  zu  $C$  konjugiert, so auch  $B$  zu  $C$ . Zueinander konjugierte Elemente und nur solche gehören zur selben *Klasse*. Durchläuft  $T$  alle Elemente von  $\mathcal{G}$ , so stellt  $T^{-1}AT$  alle Elemente der Klasse von  $A$  (gleichoft) dar.  $\mathcal{G}$  zerfällt vollständig in Klassen konjugierter Elemente, jedes Element von  $\mathcal{G}$  gehört genau einer Klasse an. Die Klasse von  $E$  enthält nur  $E$  selbst. Bei abelschen Gruppen ist jedes Element eine Klasse für sich.  $A$  ist mit allen  $T$  vertauschbar, die  $A$  in sich transformieren.

Elemente derselben Klasse haben dieselbe Ordnung. Das Reziproke eines zu  $A$  konjugierten Elements ist konjugiert zu  $A^{-1}$ .

b) Konjugierte Untergruppen, Normalteiler. Die mit einem festen Elemente  $T$  aus  $\mathcal{G}$  transformierten Elemente einer Untergruppe  $\mathfrak{H}$  bilden auch eine Gruppe:  $T^{-1}\mathfrak{H}T$ , eine zu  $\mathfrak{H}$  *konjugierte Untergruppe*. Konjugierte Untergruppen sind isomorph. Ist  $\mathfrak{H}$  mit allen seinen Konjugierten identisch, d. h. enthält  $\mathfrak{H}$  alle Transformierten seiner Elemente, so heißt  $\mathfrak{H}$  *invariante Untergruppe* oder *Normalteiler*. Eine Untergruppe ist dann und nur dann Normalteiler, wenn sie mit jedem Element dessen ganze Klasse enthält. Gruppen, die keinen echten Normalteiler enthalten, heißen *einfache Gruppen*. Eine Untergruppe vom Index 2 ist stets Normalteiler. Bei abelschen Gruppen ist jede Gruppe Normalteiler.

c) Faktorgruppe. Jede rechtsseitige Restklasse  $\mathfrak{H}B$  eines Normalteilers  $\mathfrak{H}$  ist zugleich eine linksseitige Restklasse  $C\mathfrak{H}$ . Die Restklassen nach einem Normalteiler  $\mathfrak{H}$  bilden die *Faktorgruppe*  $\mathcal{G}/\mathfrak{H}$ , wenn als Produkt der Restklassen  $A\mathfrak{H}$  und  $B\mathfrak{H}$  die Restklasse  $AB\mathfrak{H}$  erklärt wird. Die Ordnung der Faktorgruppe ist gleich dem Index des Normalteilers. Ist  $\mathcal{G}$  abelsch, so ist auch jede Faktorgruppe zu  $\mathcal{G}$  abelsch.

Ordnet man jedem Element von  $\mathcal{G}$  seine Restklasse nach einem Normalteiler zu, so ist  $\mathcal{G}$  auf dessen Faktorgruppe homomorph abgebildet. Umgekehrt ist jede Gruppe  $\mathcal{G}'$ , auf die sich  $\mathcal{G}$  homomorph abbilden läßt, isomorph zu einer Faktorgruppe von  $\mathcal{G}$ .

## B. Kontinuierliche Gruppen.

Lassen sich die Elemente  $A$  einer Gruppe  $\mathfrak{G}$  durch Parameter  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , welche in gewissen Bereichen stetig variieren, eindeutig so kennzeichnen:

$$A = A(a_1, \dots, a_n) = \{a_1, \dots, a_n\},$$

daß die Parameter von Produkt und Reziproke irgendwelcher Elemente von  $\mathfrak{G}$  stetig differenzierbar von den Parametern dieser Elemente abhängen, so ist  $\mathfrak{G}$  eine *kontinuierliche Gruppe*. Je nach der endlichen ( $n$ ) oder abzählbar unendlichen Anzahl der Parameter heißt  $\mathfrak{G}$  *endlich kontinuierlich* ( $n$ -parametrig) oder *unendlich kontinuierlich*. Weiter heißt  $\mathfrak{G}$  *einfach kontinuierlich*, wenn das gesamte Variabilitätsgebiet der Parameter, das Grundgebiet  $G$ , zusammenhängend ist, *gemischt kontinuierlich*, wenn  $G$  aus mehreren (evtl. abzählbar unendlich vielen) getrennten Teilbereichen  $G_1, G_2, \dots$  besteht.

Beispiele: Die reellen orthogonalen Transformationen des  $n$ -dimensionalen Raumes mit  $\det \mathfrak{D} = +1$  bilden eine einfach kontinuierliche, die mit  $\det \mathfrak{D} = \pm 1$  eine gemischt kontinuierliche [ $\frac{1}{2} n(n-1)$ -parametrig] Gruppe. Die orthogonalen Matrizen, deren Elemente rationale Zahlen sind, bilden eine unendliche Gruppe, aber keine kontinuierliche Gruppe.

b) Elemente, deren Parameter wenig voneinander verschiedene Werte haben, heißen *benachbart*. Ein Element „ändert sich stetig“, wenn sich die zugehörigen Parameter stetig ändern.

Diejenigen Elemente einer gemischt kontinuierlichen Gruppe  $\mathfrak{G}$ , die zu dem Teilbereich (er heiße  $G_1$ ) des Grundgebietes  $G$  gehören, der das Einheits-element enthält, bilden eine einfachkontinuierliche Untergruppe von  $\mathfrak{G}$ , einen Normalteiler. Die Elemente irgendeines der Teilbereiche  $G_v$  von  $G$  stellen eine Restklasse nach diesem Normalteiler dar, der Index desselben ist gleich der Anzahl der getrennten Teilbereiche  $G_v$  des Grundgebietes  $G$ .

c) Mittelwert. Es seien  $p_k(BA) = p_k(b_1, \dots, b_n; a_1, \dots, a_n)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , die  $n$  Parameter des Produktes  $BA$ , ferner  $F(A) = F(a_1, \dots, a_n)$  irgendeine für alle Elemente  $A$  von  $\mathfrak{G}$  erklärte stetige Funktion von  $A$  (d. h. von  $a_1, \dots, a_n$ ) und

$$g(A) = g(a_1, \dots, a_n) = \frac{\partial(p_1(BA), \dots, p_n(BA))}{\partial(a_1, \dots, a_n)},$$

worin (nach der Differentiation)  $B = A^{-1}$  gesetzt ist. Falls es existiert (z. B. bei endlichem Inhalt von  $G$ ), gilt für das *HURWITZsche Integral*

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{G}} F(a_1, \dots, a_n) g(a_1, \dots, a_n) da_1 \dots da_n &= \int_{\mathfrak{G}} F(A) dA = \\ &= \int_{\mathfrak{G}} F(CA) dA = \int_{\mathfrak{G}} F(AC) dA = \int_{\mathfrak{G}} F(A^{-1}) dA \end{aligned}$$

für jedes  $C$  in  $\mathfrak{G}$ , wobei  $dA = g(a_1, \dots, a_n) da_1 \cdot \dots \cdot da_n$  ist. Dem Mittelwert  $\frac{1}{g} \sum_A F(A)$  bei endlichen Gruppen (s. A1d) entsprechend ist dann der *Mittelwert* von  $F(A)$  in der *kontinuierlichen* Gruppe  $\mathfrak{G}$

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{G}}(F(A)) = \int_{\mathfrak{G}} F(A) dA : \int_{\mathfrak{G}} dA.$$

Das hat man im folgenden stets für  $\frac{1}{g} \sum_A F(A)$  einzusetzen, wenn es sich um eine kontinuierliche Gruppe handelt.

## C. Darstellungstheorie.

### 1. Allgemeines über die Darstellungen einer Gruppe.

a) Jede Gruppe  $\mathfrak{M}$  *endlicher* quadratischer Matrizen (oder linearer Substitutionen) mit *nichtverschwindender* Determinante, auf die eine gegebene abstrakte Gruppe  $\mathfrak{G}$  homomorph (s. A1e) abgebildet werden kann, heißt eine *Darstellung* der Gruppe  $\mathfrak{G}$ . Jedem der Elemente  $A$  von  $\mathfrak{G}$  wird dann eindeutig eine Matrix  $\mathfrak{M}(A) = (m_{ik}(A))$  von  $\mathfrak{M}$  so zugeordnet, daß dem Produkte  $AB$  zweier Elemente  $A$  und  $B$  von  $\mathfrak{G}$  das Produkt der zugeordneten Matrizen entspricht:  $\mathfrak{M}(A) \mathfrak{M}(B) = \mathfrak{M}(AB)$ . Die Reihenzahl  $h$  der Matrizen von  $\mathfrak{M}$  (Variablenzahl der linearen Substitutionen) heißt *Grad* oder *Dimension* der Darstellung. Ist die Zuordnung eineindeutig, d. h. sind die Gruppen  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{M}$  isomorph, so heißt die Darstellung *treu*. Jede Darstellung von  $\mathfrak{G}$  ist eine treue Darstellung einer Faktorgruppe von  $\mathfrak{G}$ ; die dem Einheitslement der Darstellung (das ist stets die Einheitsmatrix) zugeordneten Elemente von  $\mathfrak{G}$  bilden den zugehörigen Normalteiler.

Eine Darstellung  $\mathfrak{M}$  heißt *beschränkt*, wenn sämtliche Elemente aller Matrizen von  $\mathfrak{M}$  beschränkt sind, wenn also ein  $C$  existiert mit  $|m_{ik}(A)| < C$  für alle  $i, k = 1, \dots, h$  und alle  $A$  in  $\mathfrak{G}$ . Sämtliche Darstellungen endlicher Gruppen, sowie alle unitären Darstellungen sind beschränkt.

b) Äquivalenz, Charakter. Transformiert man jede Matrix einer Darstellung  $\mathfrak{M}$  mit derselben Matrix  $T$  (vgl. S. 88), d. h. übt man auf den Raum der den Matrizen von  $\mathfrak{M}$  entsprechenden linearen Substitutionen eine affine Transformation  $T$  aus, so erhält man eine zu  $\mathfrak{M}$  *äquivalente* Darstellung  $\mathfrak{M}_T = T^{-1} \mathfrak{M} T$ . Äquivalente Darstellungen werden als nicht wesentlich verschieden betrachtet.

*Charakter* der Darstellung  $\mathfrak{M}$  heißt die Funktion

$$\chi(A) = \chi_{\mathfrak{M}}(A) = \text{spur}(\mathfrak{M}(A)) = \sum_{k=1}^h m_{kk}(A)$$

der Matrizen  $\mathfrak{M}(A)$ . Der Charakter hat für konjugierte Gruppenelemente denselben Wert:

$$\chi(A) = \chi(B^{-1} A B),$$

er hängt nur von der Klasse von  $A$  ab, ist eine Klassenfunktion.

Bei linearer Transformation der Darstellung  $\mathfrak{M}$  ändert sich der Charakter nicht. Es gilt:

Zwei beschränkte Darstellungen sind dann und nur dann äquivalent, wenn die zugehörigen Charaktere für alle Gruppenelemente übereinstimmen.

c) Reduzibilität. Aus zwei beliebigen Darstellungen  $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$  derselben Gruppe  $\mathfrak{G}$  (Dimensionen  $h_1$  und  $h_2$ ) erhält man eine weitere Darstellung, indem man jeweils die Matrizen  $\mathfrak{M}_1(A)$  und  $\mathfrak{M}_2(A)$ , welche dem Element  $A$  von  $\mathfrak{G}$  entsprechen, in der durch die Übermatrix:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_1(A) & 0 \\ 0 & \mathfrak{M}_2(A) \end{pmatrix} \quad (1)$$

gekennzeichneten Art zu einer  $(h_1 + h_2)$ -reihigen Matrix zusammensetzt.

Jede Darstellung von  $\mathfrak{G}$ , welche zu einer Darstellung der Form (1) äquivalent ist, also aus zwei anderen Darstellungen von  $\mathfrak{G}$  durch Zusammensetzung und lineare Transformation erhältlich ist, heißt *voll reduzibel*. Eine beschränkte Darstellung, die nicht voll reduzibel ist, heißt *irreduzibel*. Die Zerlegung einer voll reduziblen Darstellung in irreduzible Darstellungen ist, abgesehen von Reihenfolge und Äquivalenz, eindeutig bestimmt [vgl. hierzu 2  $\alpha$  d und (11), (12)].

Kriterien:  $\alpha$ ) Ist eine Matrix  $\mathfrak{B}$  nicht ein Vielfaches der Einheitsmatrix:  $\mathfrak{B} \neq \lambda \mathfrak{E}$  für jedes  $\lambda$ , und ist  $\mathfrak{B}$  mit allen Matrizen einer beschränkten Darstellung  $\mathfrak{M}$  vertauschbar;

$$\mathfrak{B} \mathfrak{M}(A_\nu) = \mathfrak{M}(A_\nu) \mathfrak{B}, \quad \nu = 1, \dots, g,$$

so ist  $\mathfrak{M}$  voll reduzibel.

$\beta$ ) Gilt für die  $(h', h)$ -Matrix  $\mathfrak{B}$  und alle Matrizen der *irreduziblen* Darstellungen  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{M}'$ :

$$\mathfrak{B} \mathfrak{M}(A_\nu) = \mathfrak{M}'(A_\nu) \mathfrak{B}, \quad \nu = 1, \dots, g,$$

so sind entweder  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{M}'$  äquivalent, oder es ist  $\mathfrak{B} = 0$  die Nullmatrix (SCHUR'sches Lemma).

$\gamma$ ) Nach (8) bzw. (12) gilt für den Charakter einer Darstellung  $\mathfrak{M}$ :

$$\mathfrak{M}(|\chi(A)|^2) \begin{cases} = 1, & \text{wenn } \mathfrak{M} \text{ irreduzibel ist} \\ > 1, & \text{wenn } \mathfrak{M} \text{ voll reduzibel ist.} \end{cases}$$

d) Unitäre Darstellungen. Es gibt zu jeder beschränkten Darstellung einer Gruppe  $\mathfrak{G}$  eine äquivalente, die nur aus unitären Matrizen besteht (*unitäre Darstellung*). Jede unitäre Darstellung ist beschränkt.

Äquivalente unitäre Darstellungen sind stets unitär ineinander transformierbar. Es genügt daher die Übersicht über die unitären irreduziblen Darstellungen einer Gruppe, um ihre sämtlichen beschränkten Darstellungen zu übersehen.

## 2. Hauptsätze über die Darstellungen

### α) endlicher Gruppen.

a) Zu einer endlichen Gruppe  $\mathfrak{G}$  der Ordnung  $g$ , deren Elemente  $A_1 = E, A_2, \dots, A_g$   $c$  verschiedene Klassen konjugierter Elemente bilden, gibt es genau  $c$  nicht zueinander äquivalente irreduzible Darstellungen  $\mathfrak{M}^{(1)}, \mathfrak{M}^{(2)}, \dots, \mathfrak{M}^{(c)}$  mit den Dimensionen  $h_1, \dots, h_c$ . Die Dimensionen  $h_\nu$  sind Teiler von  $g$ , und es ist:

$$h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_c^2 = g.$$

b) Sind  $\mathfrak{M}^{(1)}, \dots, \mathfrak{M}^{(c)}$  unitär (was stets durch Transformation erreichbar ist), so gelten die folgenden Orthogonalitätsrelationen:

Es sei  $(m_{ik}^{(l)}(A))$  eine Matrix der unitären irreduziblen Darstellung  $\mathfrak{M}^{(l)}$ ; dann gilt:

$$\frac{1}{g} \sum_A m_{ik}^{(l)}(A) (m_{i'k'}^{(l')}(A))^* = \frac{1}{h_l} \delta_{ll'} \delta_{ii'} \delta_{kk'} \quad [\text{vgl. (9) und B c Schluß}], \quad (2)$$

d. h. dieser Mittelwert ist nur von Null verschieden, wenn  $l = l', i = i', k = k'$  ist. Die  $h_1^2 + \dots + h_c^2 = g$  Vektoren

$$v_{ik}^{(l)} = (m_{ik}^{(l)}(A_1), \dots, m_{ik}^{(l)}(A_g)) \quad (i, k = 1, \dots, h_l, l = 1, \dots, c) \quad (3)$$

welche den Matrixelementen der unitären irreduziblen Darstellungen  $\mathfrak{M}^{(1)}, \dots, \mathfrak{M}^{(c)}$  entsprechen, bilden ein vollständiges, hermitesch orthogonales Vektorsystem eines  $g$ -dimensionalen Raumes, das allerdings beim Übergang zu äquivalenten Darstellungen geändert wird.

c) Wählt man aus jeder der  $c$  Klassen von  $\mathfrak{G}$  ein Element aus:  $B_1, \dots, B_c$  und ist  $h_k$  die Anzahl der Elemente von  $B_k$ , so gilt für die Charaktere der irreduziblen Darstellungen  $\mathfrak{M}^{(1)}, \dots, \mathfrak{M}^{(c)}$  [vgl. (10)]:

$$\frac{1}{g} \sum_A \chi^{(l)}(A) (\chi^{(l')}(A))^* = \sum_{k=1}^c \sqrt{\frac{h_k}{g}} \chi^{(l)}(B_k) \left\{ \sqrt{\frac{h_k}{g}} \chi^{(l')}(B_k) \right\}^* = \delta_{ll'}, \quad (4)$$

d. h. die Vektoren

$$w^{(l)} = \left( \chi^{(l)}(B_1) \sqrt{\frac{h_1}{g}}, \dots, \chi^{(l)}(B_c) \sqrt{\frac{h_c}{g}} \right), \quad l = 1, \dots, c, \quad (5)$$

bilden ein vollständiges hermitesch orthogonales Vektorsystem eines  $c$ -dimensionalen Raumes.



d) Für den Charakter  $\chi$  einer beliebigen (reduziblen) Darstellung  $\mathfrak{M}$  von  $\mathfrak{G}$ , bei deren Aufbau [durch Zusammensetzung und lineare Transformation (vgl. 1c)]  $q_l$  mal die irreduzible Darstellung  $\mathfrak{M}^{(l)}$  verwandt wurde, gilt:

$$\chi(B_k) = \sum_{l=1}^c q_l \chi^{(l)}(B_k) \quad (k = 1, \dots, c). \quad (6)$$

Die Zahlen  $q_l$  (und damit im wesentlichen die Zerlegung von  $\mathfrak{M}$ ) sind also eindeutig bestimmt. Es ist:

$$q_l = \frac{1}{g} \sum_A \chi(A) (\chi^{(l)}(A))^* \quad [\text{vgl. (11) und B, c, Schluß}] \quad (7)$$

und ferner

$$\frac{1}{g} \sum_A |\chi(A)|^2 = \sum_{l=1}^c q_l^2 \quad [\text{vgl. (12) und B, c, Schluß}]. \quad (8)$$

e) Ist  $\mathfrak{M}_1^{(1)}, \dots, \mathfrak{M}_1^{(c_1)}$  bzw.  $\mathfrak{M}_2^{(1)}, \dots, \mathfrak{M}_2^{(c_2)}$  ein vollständiges System irreduzibler Darstellungen der Gruppe  $\mathfrak{G}_1$  bzw.  $\mathfrak{G}_2$ , so bilden die  $c_1 c_2$  Matrixgruppen  $\mathfrak{M}^{(k,l)} = \mathfrak{M}_1^{(k)} \times \mathfrak{M}_2^{(l)}$ ,  $k = 1, \dots, c_1$ ;  $l = 1, \dots, c_2$ , welche aus sämtlichen Matrizen

$$\mathfrak{M}^{(k,l)}(A) = \mathfrak{M}_1^{(k)}(A) \times \mathfrak{M}_2^{(l)}(A) \quad [\text{s. S. 85, e}]$$

bestehen, ein vollständiges System irreduzibler Darstellungen des direkten Produktes

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \quad (\text{s. A 2d, S. 154}).$$

### β) beliebiger Gruppen.

Die für Darstellungen beliebiger Gruppen geltenden Formeln erhält man aus den in  $\alpha$ ) angegebenen, indem man jeweils  $\frac{1}{g} \sum_A$  durch den Mittelwert  $\mathbf{M}$  ersetzt. Allgemeiner gelten für zwei irreduzible Darstellungen  $\mathfrak{M}'$  und  $\mathfrak{M}''$  einer beliebigen Gruppe  $\mathfrak{G}$  mit den Dimensionen  $h'$  und  $h''$ , wenn  $B$  ein festes Element aus  $\mathfrak{G}$  ist, die Relationen [vgl. (2)]

$$\mathbf{M}_A (m'_{ik}(A) m''_{i'k'}(A^{-1}B)) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \mathfrak{M}' \text{ inäquivalent } \mathfrak{M}'', \\ \frac{1}{h} \delta_{ki'} m_{ik'}(B), & \text{wenn } \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' \text{ ist.} \end{cases} \quad (9)$$

Entsprechend (4) gilt allgemein, wenn  $\chi'$  bzw.  $\chi''$  die Charaktere zu  $\mathfrak{M}'$  bzw.  $\mathfrak{M}''$  sind,

$$\mathbf{M}_A (\chi'(A) \chi''(A^{-1}B)) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \mathfrak{M}' \text{ inäquivalent } \mathfrak{M}'', \\ \frac{1}{h} \chi'(B), & \text{wenn } \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'', \text{ also } \chi' = \chi'' \text{ ist.} \end{cases} \quad (10)$$

Entsprechend (7) gilt, wenn die (reduzible) Darstellung  $\mathfrak{M}$  die irreduzible Darstellung  $\mathfrak{M}'$   $q'$ -mal enthält,

$$q' = \mathbf{M}(\chi(A) \chi'(A^{-1})), \quad (11)$$

und ferner, wenn in  $\mathfrak{M}$  nur endlich viel verschiedene irreduzible Darstellungen  $\mathfrak{M}^{(1)}, \dots, \mathfrak{M}^{(r)}$  auftreten,

$$\mathbf{M}(\chi(A) \chi(A^{-1})) = \mathbf{M}(|\chi(A)|^2) = \sum_{\nu=1}^r q_{\nu}^2. \quad (12)$$

### 3. Eigenwertprobleme und Darstellungen von Gruppen.

a) Es sei  $O$  ein *linearer Operator*, d. h. eine Vorschrift, die jeder Funktion  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(\mathfrak{x})$  eine bestimmte Funktion  $O\varphi(x_1, \dots, x_n) = O\varphi(\mathfrak{x})$  so zuordnet, daß

$$O(a\varphi(\mathfrak{x}) + b\psi(\mathfrak{x})) = aO\varphi(\mathfrak{x}) + bO\psi(\mathfrak{x}) \quad (13)$$

für beliebige Konstanten  $a, b$  und für alle Funktionen  $\varphi(\mathfrak{x})$  und  $\psi(\mathfrak{x})$  gilt, auf die  $O$  anwendbar ist. Beispiele für solche Operatoren sind:

Multiplizieren mit  $x_k$ , oder mit dem Skalar  $\chi(\mathfrak{x})$ ;

Differenzieren nach  $x_k$ :  $\frac{\partial}{\partial x_k}$  oder

der LAPLACESCHE Operator  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ .

Ist  $A$  eine lineare Transformation der  $\mathfrak{x}$ , d. h. des  $(x_1, \dots, x_n)$ -Raumes, so bezeichne  $A_A$  den durch

$$A_A \varphi(A\mathfrak{x}) = \varphi(\mathfrak{x}), \text{ d. h. } A_A \varphi(\mathfrak{x}) = \varphi(A^{-1}\mathfrak{x}) \text{ für beliebiges } \varphi(\mathfrak{x}) \quad (14)$$

definierten linearen Operator.

Ist mit  $\varphi(\mathfrak{x})$  stets auch  $A_A \varphi(\mathfrak{x})$  Eigenfunktion zu  $O$ , d. h. folgt aus

$$O\varphi(\mathfrak{x}) = \lambda\varphi(\mathfrak{x}) \quad (15)$$

stets auch

$$O A_A \varphi(\mathfrak{x}) = \lambda A_A \varphi(\mathfrak{x}),$$

so stellt  $A$  eine *Symmetrie* von  $O$  dar. Die Gesamtheit der Symmetrien  $A$  von  $O$  bildet die *Symmetriegruppe*  $\mathfrak{G}$  des Operators  $O$ ;  $\mathfrak{G}$  besteht aus allen  $A$  (oder  $A_A$ ), für die  $O$  mit  $A_A$  vertauschbar ist.

Nun sei  $\lambda$  ein  $h$ -facher diskreter Eigenwert von  $O$  und  $\psi_1(\mathfrak{x}), \dots, \psi_h(\mathfrak{x})$  ein vollständiges System zugehöriger voneinander linear unabhängiger Eigenfunktionen. Für jede Symmetrie  $A$  von  $O$  ist dann  $A_A \psi_k(\mathfrak{x})$  als ebenfalls zu  $\lambda$  gehörige Eigenfunktion darstellbar in der Form

$$A_A \psi_k(\mathfrak{x}) = \sum_{i=1}^h d_{i,k}(A) \psi_i(\mathfrak{x}); \quad k = 1, \dots, h; \quad (16)$$

die so für alle  $A$  aus  $\mathfrak{G}$  definierten Matrizen

$$\mathfrak{D}(A) = (d_{ik}(A))$$

bilden dann eine Darstellung  $\mathfrak{D}$  der Symmetriegruppe  $\mathfrak{G}$  des Operators  $O$ .

Geht man von einem anderen System  $\psi'_1(x), \dots, \psi'_h(x)$  aus:

$$\psi'_k(x) = \sum_{i=1}^h a_{ik} \psi_i(x), \quad k = 1, \dots, h, \quad (17)$$

so ist die hierzugehörige Darstellung  $\mathfrak{D}'$

$$\mathfrak{D}' = (a_{ik})^{-1} \mathfrak{D}(a_{ik}) \quad (18)$$

zu  $\mathfrak{D}$  äquivalent. Sind insbesondere die Funktionen  $\psi_1, \dots, \psi_n$ , zueinander orthogonal, so ist  $\mathfrak{D}$  unitär.

b) Es sei  $\mathfrak{D}^{(l)}$  eine bestimmt vorgegebene (d. h. nicht nur bis auf eine Ähnlichkeitstransformation bestimmte) irreduzible Darstellung der Dimension  $h_l$  einer Gruppe  $\mathfrak{G}$  von Operatoren  $A_A$  und  $\psi_1^{(l)}(x), \dots, \psi_{h_l}^{(l)}(x)$  ein System von Funktionen, auf welche die Operatoren  $A_A$  anwendbar sind; gilt dabei

$$A_A \psi_k^{(l)}(x) = \sum_{i=1}^{h_l} d_{ik}^{(l)}(A) \psi_i^{(l)}(x), \quad k = 1, \dots, h_l, \quad (19)$$

so heißt die Funktion  $\psi_i^{(l)}(x)$  zur  $i$ -ten Zeile von  $\mathfrak{D}^{(l)}$  gehörig.  $\psi_1^{(l)}(x), \dots, \psi_{h_l}^{(l)}(x)$  sind dann linear unabhängig, und wenn  $\mathfrak{D}^{(l)}$  unitär ist, auch zueinander orthogonal.

Sind  $\mathfrak{D}^{(l)}$  und  $\mathfrak{D}^{(m)}$  zwei irreduzible Darstellungen, so gilt nach (2) bzw. (9)

$$\mathbf{M}_A ([d_{\mu\kappa}^{(m)}(A^{-1})] A_A \psi_k^{(l)}(x)) = \frac{1}{h_l} \delta_{l,m} \delta_{\kappa k} \psi_\mu^{(l)}(x) \quad (20)$$

für beliebige  $\mu, \kappa = 1, \dots, h_m$ ;  $k = 1, \dots, h_l$ .

Notwendig und hinreichend dafür, daß  $\psi_k^{(l)}(x)$  zur  $k$ -ten Zeile von  $\mathfrak{D}^{(l)}$  gehört, ist

$$\mathbf{M}_A ([d_{ik}^{(l)}(A^{-1})] A_A \psi_k^{(l)}(x)) = \frac{1}{h_l} \psi_k^{(l)}(x). \quad (21)$$

Die zu den übrigen Zeilen von  $\mathfrak{D}^{(l)}$  gehörenden  $\psi_k^{(l)}$  entsprechenden Funktionen  $\psi_i^{(l)}(x)$  erhält man durch

$$\frac{1}{h_l} \psi_i^{(l)}(x) = \mathbf{M}_A ([d_{ik}^{(l)}(A^{-1})] \psi_k^{(l)}(x)). \quad (22)$$

Sind  $\mathfrak{D}^{(1)}, \dots, \mathfrak{D}^{(c)}$  die sämtlichen irreduziblen Darstellungen der Gruppe  $\mathfrak{G}$  und  $\varphi(x)$  eine Funktion, auf die alle  $A_A$  anwendbar sind, so gilt

$$\varphi(x) = \sum_{l=1}^c \sum_{k=1}^{h_l} \varphi_k^{(l)}(x)$$

mit

$$\frac{1}{h_l} \varphi_k^{(l)}(x) = \mathbf{M}_A ([d_{kk}^{(l)}(A^{-1})] A_A \varphi(x)), \quad (23)$$

wobei  $\varphi_k^{(l)}$  zur  $k$ -ten Zeile von  $\mathfrak{D}^{(l)}$  gehört.

#### 4. Drehungsgruppen und ihre Darstellungen.

a) Die  $n$ -dimensionale Drehspiegelungsgruppe  $\mathfrak{D}'_n$  umfaßt alle Drehungen und Drehspiegelungen (alle reellen orthogonalen Transformationen mit der Determinante  $d = 1$  bzw.  $d = -1$ ) des  $n$ -dimensionalen Raumes  $\mathfrak{D}'_n$  ist eine gemischtkontinuierliche  $\frac{1}{2}(n-1)n$ -parametrische Gruppe. Das Grundgebiet  $G$  besteht aus zwei nichtzusammenhängenden Teilen, entsprechend  $d = 1$  und  $d = -1$ . Die Untergruppe der Drehungen ( $d = +1$ ), die  $n$ -dimensionale reine Drehungsgruppe  $\mathfrak{D}_n$  ist Normalteiler vom Index  $[\mathfrak{D}'_n : \mathfrak{D}_n] = 2$  in  $\mathfrak{D}'_n$ .

b)  $n = 2$ . Die Elemente  $A_d(\varphi)$  von  $\mathfrak{D}'_2$  werden durch  $A_d(\varphi)$ :

$$A_d(\varphi): \begin{cases} x' = x d \cos \varphi - y d \sin \varphi \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, d = \pm 1$$

gegeben;  $\varphi$  ist der Drehwinkel. Es ist

$$A_d(\varphi) A_t(\psi) = A_{td}(\varphi + \psi);$$

daher ist  $\mathfrak{D}'_2$  nicht abelsch, die aus allen  $A_1(\varphi)$  bestehende  $\mathfrak{D}_2$  als einparametrische einfachkontinuierliche Gruppe dagegen abelsch. Eine Klasse konjugierter Elemente aus  $\mathfrak{D}'_2$  besteht jeweils aus  $A_1(\varphi)$  und  $A_1(-\varphi)$ , ferner aus allen  $A_{-1}(\varphi)$ .

Die Gewichtsfunktion im HURWITZschen Integral (s. B, c) ist  $g(\varphi) = 1$ :

$$\int_{\mathfrak{D}'_2} F(A) dA = \sum_{d=1,-1} \int_0^{2\pi} F(A_d(\varphi)) d\varphi = \sum_{d=1,-1} \int_0^{2\pi} F(A_d(\varphi) A_t(\psi)) d\varphi$$

für jedes feste  $A_t(\psi)$  aus  $\mathfrak{D}'_2$ ,

$$\int_{\mathfrak{D}'_2} F(A) dA = \int_0^{2\pi} F(A(\varphi)) d\varphi = \int_0^{2\pi} F(A(\varphi + \psi)) d\varphi \quad \text{für jedes } \psi.$$

Die sämtlichen *irreduziblen Darstellungen* der reinen zweidimensionalen Drehgruppe  $\mathfrak{D}_2$  sind eindimensional und durch

$$\mathfrak{M}^{(m)}(A_1(\varphi)) = (e^{im\varphi}) \quad \text{für } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

gegeben. Die entsprechenden Orthogonalitätsrelationen sind die der FOURIER-Entwicklung (s. S. 27).

Ein volles System irreduzibler Darstellungen der zweidimensionalen Drehspiegelungsgruppe  $\mathfrak{D}'_2$  wird gegeben durch

$$\mathfrak{M}(A_d(\varphi)) = (1) \quad (\text{identische Darstellung})$$

$$\mathfrak{M}^{(0)}(A_d(\varphi)) = (d)$$

und

$$\mathfrak{M}^{(m)}(A_1(\varphi)) = \begin{pmatrix} e^{im\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-im\varphi} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M}^{(m)}(A_{-1}(\varphi)) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-im\varphi} \\ e^{im\varphi} & 0 \end{pmatrix},$$

$$m = 1, 2, \dots$$

c)  $n = 3$ . Jede Drehung  $A$  aus  $\mathfrak{D}_3$  läßt sich zusammensetzen aus einer Drehung  $A(0, 0, \gamma)$  um die  $z$ -Achse (Drehwinkel  $\gamma$ ), einer Drehung  $A(0, \beta, 0)$  um die  $x$ -Achse (Drehwinkel  $\beta$ ) und einer weiteren Drehung  $A(0, 0, \alpha) = A(\alpha, 0, 0)$  um die  $z$ -Achse (Drehwinkel  $\alpha$ ):

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = A(\alpha, 0, 0) A(0, \beta, 0) A(0, 0, \gamma);$$

$\alpha, \beta, \gamma$  sind die sog. drei EULERSchen Winkel. Es genügt daher, die Matrixelemente der irreduziblen Darstellungen für die Drehungen  $A(\alpha, 0, 0)$  und  $A(0, \beta, 0)$  anzugeben:  $l = 0, 1, 2, \dots$

$$m_{rs}^{(l)}(A(\alpha, 0, 0)) = e^{i r \alpha} \delta_{rs}; \quad r, s = -l, -l+1, \dots, l-1, l$$

$$m_{rs}^{(l)}(A(0, \beta, 0)) = \sum_k (-1)^k \frac{\sqrt{(l+r)! (l-r)! (l+s)! (l-s)!}}{(l+r-k)! (l+s-k)! k! (k+r-s)!} \cdot \left( \cos \frac{\beta}{2} \right)^{2l+s-r-2k} \left( \sin \frac{\beta}{2} \right)^{2k+r-s}, \quad r, s \text{ wie oben.}$$

Drehungen um denselben Drehwinkel  $\delta$  (s. V B 3, S. 103) gehören zur gleichen Klasse.

## 5. Darstellungen und Charaktere der symmetrischen Gruppen.

a) Die  $n!$  Permutationen von  $n$  Dingen bilden die *symmetrische Gruppe*  $\mathfrak{S}_n$  von  $n$  Elementen.

Mit  $(r_1 r_2 \dots r_k)$  bezeichnet man die Permutation der  $k$  Elemente  $r_1, \dots, r_k$ , die  $r_i$  in  $r_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, k-1$ ) und  $r_k$  in  $r_1$  überführt (*Zyklus*). Jede Permutation läßt sich in solche *Zyklen* zerlegen:

$$P = \left( \begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix} \right)$$
 etwa in  $(1 i_1 i_2 \dots j_1) (k i_k \dots j_k) (1 \dots) \dots$ , wenn  $j_1$  in  $1$ ,  $j_k$  in  $k, \dots$  übergeht und  $k$  im ersten Zyklus,  $l$  in den beiden ersten Zyklen usw. nicht vorkommt. Zerfällt bei dieser Zerlegung die Permutation  $P$  in  $\lambda_k$  Zyklen aus je  $k$  Ziffern ( $k = 1, \dots, n$ ), so stellt  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  den *Typus* der Permutation  $P$  dar. In einer Permutationsgruppe sind alle und nur die Permutationen mit demselben Typus zueinander konjugiert. In der symmetrischen Gruppe  $\mathfrak{S}_n$  entspricht daher jeder Zerlegung von  $n$  in positive Summanden (*partitio numerorum*), d. h. jedem Lösungssystem  $z_1, \dots, z_n$  von  $z_1 + 2z_2 + \dots + nz_n = n$  mit  $z_i \geq 0$  genau eine Klasse von  $\mathfrak{S}_n$  und auch genau eine irreduzible Darstellung von  $\mathfrak{S}_n$  (und umgekehrt).

b) Die wichtigsten irreduziblen Darstellungen, die zu den Zerlegungen  $\nu + (n-\nu) = n$  und  $1 + 1 + \dots + 1 + 2 + \dots + 2 = n$  gehören, gewinnt man etwa so: Seien  $x_1, \dots, x_n$  Variable, welche nur die beiden Werte  $+1$  und  $-1$  annehmen können. Ein vollständiges Orthogonalsystem in dem aus  $2^n$  Punkten bestehenden Raum der  $x_i$  wird durch die  $2^n$  Funktionen

- 1;
- $x_1, x_2, \dots, x_n;$
- $x_1 x_2, x_1 x_3, \dots, x_{n-1} x_n;$
- .....
- $x_1 x_2 \dots x_n$

gegeben. Multipliziert man jede der  $\binom{n}{\nu-1}$  Funktionen der  $(\nu-1)$ -ten Reihe ( $\nu = 0, 1, \dots, \frac{n}{2}$  bzw.  $\frac{n-1}{2}$ ) mit der Summe der nicht in ihr auftretenden der Variablen  $x_1, \dots, x_n$ , so erhält man  $\binom{n}{\nu-1}$  voneinander linear unabhängige Linearkombinationen der Funktionen in der  $\nu$ -ten Reihe  $f_1, \dots, f_{\binom{n}{\nu-1}}$ . Man kann dann noch  $l_\nu = \binom{n}{\nu} - \binom{n}{\nu-1}$  weitere Linearkombinationen dieser Funktionen bestimmen, die untereinander und von den  $f_i$  linear unabhängig sind. Bedeutet  $A_P g(x_1, \dots, x_n)$  die Funktion, welche aus  $g$  durch Permutation der Variablen nach  $P$  hervorgeht, so gilt

$$A_P g_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{l_\nu} m_{ik}^{(\nu)}(P) g_i(x_1, \dots, x_n)$$

für  $k = 1, \dots, l_\nu$ . Die Matrizen  $(m_{ik}^{(\nu)}(P)) = \mathfrak{M}^{(\nu)}(P)$  bilden die irreduzible Darstellung  $\mathfrak{M}^{(\nu)}$  von  $\mathfrak{S}_n$ , die der Zerlegung  $\nu + (n-\nu) = n$  entspricht; die Dimension von  $\mathfrak{M}^{(\nu)}$  ist  $l_\nu = \binom{n}{\nu} - \binom{n}{\nu-1}$ .

Die zur Zerlegung von  $n$  in  $\nu$  Zweien und  $n-2\nu$  Einsen gehörige irreduzible Darstellung ergibt sich, wenn in  $\mathfrak{M}^{(\nu)}$  die den ungeraden Permutationen entsprechenden Matrizen mit  $-1$  multipliziert werden.

Der Charakter  $\chi^{(\nu)}(P)$  von  $\mathfrak{M}^{(\nu)}(P)$  wird für  $\nu = 0, 1, \dots, \frac{n}{2}$  bzw.  $\frac{n-1}{2}$  durch

$$(1-x)(1+x)^{\lambda_1}(1+x^2)^{\lambda_2} \dots (1+x^n)^{\lambda_n} = \sum_{\nu=0}^{n+1} \chi^{(\nu)}(P) x^\nu$$

gegeben, wenn  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  der Typus von  $P$  ist.

c) Allgemein erhält man den Charakter  $\chi^{(\mu_1 \dots \mu_n)}$  der irreduziblen Darstellung, welche der Zerlegung  $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = n$ , alle  $\mu_i \geq 0$ , entspricht, indem man zunächst die Determinante

$$\Phi^{(\mu_1 \dots \mu_n)} = \det(p_{\mu_i - i + k}(Y_1, \dots, Y_n))$$

bildet; dabei ist für  $\nu = 1, 2, \dots$   $p_\nu(Y_1, \dots, Y_n)$  die Summe aller möglichen Potenzprodukte  $\nu$ -ter Dimension aus  $n$  Variablen  $Y_1, \dots, Y_n$

$$p_\nu = \sum Y_1^{\beta_1} Y_2^{\beta_2} \dots Y_n^{\beta_n} \text{ über alle } \beta_1 + \dots + \beta_n = \nu, \beta_i \geq 0,$$

und  $p_0 = 1, p_{-1} = p_{-2} = \dots = 0$ . Als symmetrische Funktion der  $Y_1, \dots, Y_n$  läßt sich  $\Phi^{(\mu_1 \dots \mu_n)}$  nach Potenzen der Potenzsummen  $s_h = Y_1^h + \dots + Y_n^h$  entwickeln; dabei ergibt sich

$$\Phi^{(\mu_1 \dots \mu_n)} = \sum_{\text{über alle } P \text{ in } \mathfrak{E}_n} \frac{\chi^{(\mu_1 \dots \mu_n)}(P) s_1^{\lambda_1} s_2^{\lambda_2} \dots s_n^{\lambda_n}}{1^{\lambda_1} \lambda_1! 2^{\lambda_2} \lambda_2! \dots n^{\lambda_n} \lambda_n!},$$

wenn  $P$  den Typus  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  hat.

Neunter Abschnitt.

## Differentialgleichungen.

### A. Allgemeines über Differentialgleichungen.

#### 1. Einteilung der Differentialgleichungen.

Eine Gleichung heißt eine Differentialgleichung, wenn sie neben einer oder mehreren unabhängigen oder abhängigen Variablen Differentialquotienten der letzteren nach der bzw. den ersteren enthält.

Man unterscheidet *partielle* und *gewöhnliche* Differentialgleichungen, je nachdem, ob die Gleichung partielle Differentialquotienten enthält oder nicht.

Gewöhnliche Differentialgleichungen enthalten daher nur *eine* unabhängige Variable, partielle dagegen zwei oder mehr.

Man klassifiziert die Differentialgleichungen

1. nach der *Ordnung*  $n$  ihres höchsten Differentialquotienten

$$\frac{d^n y}{dx^n} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^n} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^a \partial y^{n-a}} \quad \text{usw.};$$

2. gelegentlich nach dem *Grade*  $p$  der höchsten Potenz der in ihr enthaltenen Differentialquotienten, z. B.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^p,$$

wenn die Gleichung rational in  $y$  und seinen Ableitungen ist oder auf algebraischem Wege dazu gemacht werden kann.

Im besonderen heißt eine Differentialgleichung *linear*, wenn die abhängigen Variablen und ihre Ableitungen nur in der ersten Potenz und nicht miteinander multipliziert auftreten.

Ferner spricht man von *homogenen* Differentialgleichungen. Diese Bezeichnung wird in verschiedenem Sinne gebraucht.

1. Eine Differentialgleichung  $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right) = 0$  wird *homogen* genannt, wenn  $F$  eine ganze rationale homogene Funktion von  $y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$  ist. So ist z. B.

$$X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + X_n y = 0$$

eine *homogene lineare* Differentialgleichung. Die  $X_0 \dots X_n$  sind beliebige Funktionen von  $x$ .

2. Eine Differentialgleichung 1. Ordnung  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  heißt vielfach auch *homogen*, wenn  $f(x, y)$  eine Funktion von  $\frac{y}{x}$  allein ist, sich also in der Form schreiben läßt:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

In diesem Sinne ist z. B. homogen die Gleichung:

$$M \frac{dy}{dx} = N,$$

in der  $M(x, y)$  und  $N(x, y)$  homogene Funktionen desselben Grades von  $x$  und  $y$  sind.

3. Als „gleichdimensional“ wird eine (auch zuweilen „homogen“ genannte) Gattung von Differentialgleichungen folgender Art bezeichnet.

Man betrachtet  $y$  als Größe von  $n$  Dimensionen, wo  $n$  willkürlich ist.  $x$  habe die Dimension 1,  $\frac{dy}{dx}$  die Dimension  $n - 1$  usw.

Haben dann sämtliche Glieder der Gleichung im angegebenen Sinne die gleiche Dimension, so heißt sie „gleichdimensional“. Z. B.

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_n y = V,$$

wo  $V = f(x)$  oder konstant ist und die  $A_i$  Konstanten bedeuten.

## 2. Lösungen von Differentialgleichungen.

Als *Lösung* einer Differentialgleichung bezeichnet man eine Funktion der unabhängigen Variablen, welche für die abhängige Variable ( $y$ ) in die Gleichung eingesetzt, diese identisch in den unabhängigen Variablen erfüllt.

Als *Integral* bezeichnet man eine Funktion der unabhängigen und abhängigen Variablen, sowie evtl. willkürlicher Konstanten, welche gleich einer willkürlichen Konstanten gesetzt, bei jedem Wert dieser Konstanten eine Gleichung liefert, die von Lösungen der Differentialgleichung befriedigt wird.



*Intermediäres Integral* einer Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung heißt eine Funktion der unabhängigen und abhängigen Variablen und Konstanten, sowie deren Ableitungen bis höchstens zur  $(n - 1)$ -ten Ordnung, welche gleich einer Konstanten gesetzt, eine Differentialgleichung niedriger Ordnung liefert, die von Lösungen der ursprünglichen befriedigt wird.

Man nennt eine Differentialgleichung *in endlicher Form integrierbar*, wenn sich die Lösung explizit durch elementare Funktionen (algebraische, Logarithmen, Exponentialfunktionen) und endlich viele *Quadraturen*, d. h. bestimmte Integrale, darstellen läßt.

### a) Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Die *vollständige* oder *allgemeine Lösung* (auch *Stammgleichung* genannt) einer gewöhnlichen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung enthält  $n$  willkürliche Konstanten. Indem man diesen Konstanten spezielle Werte beilegt, erhält man *partikuläre* Lösungen.

Außerdem kann eine Differentialgleichung *erster Ordnung*, falls sie nicht linear ist, Lösungen haben, die sich nicht durch spezielle Wahl der Konstanten der vollständigen Lösung zu ergeben brauchen. Diese Lösungen heißen *singuläre Lösungen*.

Existiert eine singuläre Lösung der Differentialgleichung  $\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ , so muß sie gleichzeitig folgende Bedingungen erfüllen:

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

wo  $p = \frac{dy}{dx}$  bedeutet.

**Geometrische Deutung der Lösung.** Eine partikuläre Lösung einer Differentialgleichung zwischen einer abhängigen  $y$  und einer unabhängigen Variablen  $x$  repräsentiert eine Kurve in der  $x, y$ -Ebene. Die vollständige Lösung einer Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung repräsentiert eine von  $n$  Parametern abhängige Kurvenschar. Hat für  $n = 1$  diese Kurvenschar eine *Envelope*, so ist deren Gleichung eine *singuläre Lösung*.

Die einzelne Kurve (partikuläre Lösung) ist festgelegt durch  $n$  Bedingungen, die zur Bestimmung der  $n$  Parameter dienen können (Anfangs- oder Randbedingungen).

### b) Partielle Differentialgleichungen.

Die *allgemeine Lösung* (Integral) einer partiellen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung mit  $p$  unabhängigen Variablen ist eine Lösung, welche  $n$  willkürliche *Funktionen* von  $p - 1$  Variablen enthält. Diese können gewisse der *unabhängigen* Variablen oder auch Kombinationen von ihnen sein.

Bei Differentialgleichungen *erster Ordnung* spielt daneben der Begriff der *vollständigen* Lösung eine Rolle. Als solche bezeichnet man eine Lösung in Form einer Funktion der unabhängigen Variablen, welche  $p$  willkürliche *Konstanten* enthält.

Aus einer vollständigen Lösung erhält man die *allgemeine* Lösung der Differentialgleichung *erster Ordnung* wie folgt: Es sei  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_p, a_1, a_2, \dots, a_p)$  eine vollständige Lösung (wo die  $a_i$  willkürliche Konstante seien). Aus dieser  $p$ -fachen Schar von Funktionen greift man eine  $(p-1)$ -fache heraus, indem man z. B.  $a_p = \vartheta(a_1, a_2, \dots, a_{p-1})$  setzt und berechnet hieraus und aus den Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_p} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p-1),$$

die  $a_i$  als Funktionen der  $x_i$  und setzt diese Ausdrücke in  $\varphi$  ein. Dann entsteht eine Funktion, welche die Differentialgleichung befriedigt und von der willkürlichen Funktion  $\vartheta$  von  $p-1$  Variablen abhängt, also die allgemeine Lösung.

Um die *singuläre* Lösung aus der vollständigen zu erhalten, berechne man aus den Gleichungen  $\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 0$  die Größen  $a_i$  als Funktionen der  $x_i$  und setze sie in  $\varphi$  ein. Wenn die so entstehende Funktion Lösung der Differentialgleichung ist, so ist sie die singuläre Lösung.

**Geometrische Deutung der Lösung einer Gleichung erster Ordnung.** Sind nur zwei unabhängige ( $x$  und  $y$ ) und eine abhängige ( $u$ ) Variable vorhanden, so können den Lösungen im  $xyu$ -Raum geometrische Deutungen gegeben werden.

1. Das *vollständige Integral* repräsentiert ein zweifach unendliches Flächensystem von der Form:

$$\varphi(x, y, u, a, b) = 0$$

mit den beiden willkürlichen Parametern  $a$  und  $b$ .

2. Dadurch, daß man den einen Parameter zu einer willkürlichen Funktion des anderen macht und aus den drei Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y, u, a, b) &= 0 \\ b &= \vartheta(a) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \vartheta'(a) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$a$  eliminiert, also aus dem vollständigen Integral das *allgemeine Integral* ableitet, wählt man aus dem zweiparametrischen Flächensystem *eine* Flächenschar aus und bestimmt deren Enveloppe.

Es bedeutet dann das allgemeine Integral die Enveloppe dieser Flächenschar.

3. Das *singuläre Integral* bedeutet die gemeinsame Enveloppe aller in dem vollständigen Integral enthaltenen Flächen.

### 3. Lineare Probleme.

Ein *bestimmtes Problem* wird im Anschluß an eine vorgegebene Differentialgleichung erst dadurch charakterisiert, daß der Lösung der Differentialgleichung bestimmte *Bedingungen* auferlegt werden. Ist z. B. die Lösung nur in einem gewissen Variablenbereich („*Grundgebiet*“) gesucht, so kann man ihr auf dem Rande dieses Grundgebiets gewisse Bedingungen vorschreiben (*Randbedingungen*). Handelt es sich um Vorgabe von Bedingungen für die Lösung längs einer Anfangsmannigfaltigkeit, so spricht man von *Anfangsbedingungen*. Andere häufig auftretende Forderungen sind z. B. Periodizität, Normierbarkeit, Regularität, Beschränktheit (Endlichkeit) u. a.

Das Problem heißt *linear*, wenn die zugehörige Differentialgleichung linear ist. Löst mit  $u$  auch  $k \cdot u$  ( $k =$  beliebige Konstante) das Problem, so heißt es ein *homogenes*, andernfalls ein *inhomogenes*.

Ein homogenes Problem heißt ein *Eigenwertproblem*, wenn in der Differentialgleichung linear ein Parameter auftritt, der so zu bestimmen ist, daß das Problem eine nichttriviale Lösung besitzt („trivial“ heißt  $u \equiv 0$ ). Ein so bestimmter Wert des Parameters heißt ein *Eigenwert*, die zugehörige Lösung eine *Eigenlösung* oder *Eigenfunktion*. Gehören zum gleichen Eigenwert  $r$  linear unabhängige Eigenfunktionen, so heißt der Eigenwert  $(r - 1)$ -fach *entartet*.

## B. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

### 1. Differentialgleichungen erster Ordnung.

Die Differentialgleichung erster Ordnung hat die allgemeine Form

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

a) Auf gegenüberstehender Seite sind einige leicht lösbare Typen zusammengestellt.

b) **RICCATISCHE Differentialgleichung.** Die *spezielle* RICCATISCHE Differentialgleichung lautet:

1. Form: $a \frac{dy}{dx} + by^2 = cx^r$ 2. Form: $x \frac{dy}{dx} - ay + by^2 = cx^s$	( $a, b, r, s$ sind Konstante, $a \neq 0$ .)
---	---

Durch  $x^a = X$ ,  $y = XY$  geht die 2. Form in die 1. Form mit  $r = \frac{s}{a} - 2$  über.

i	2	3	4	5
	Typ	Gleichung	Lösung	Elim.
a	Separierbarer Typ $p = f_2(x)/f_1(y)$	$f_1(y) dy = f_2(x) dx$	$\int f_1(y) dy = \int f_2(x) dx + C$	—
b	Lineare Gleichung	$p + yf_1(x) + f_2(x) = 0$	$y = e^{-\int f_1 dx} (C - \int f_2 e^{\int f_1 dx} dx)$	—
c	Homogene Gleichung $F\left(\frac{y}{x}, p\right) = 0$	1. $p = f\left(\frac{y}{x}\right)$	$y = vx$ $\ln x + \int \frac{dv}{v-f(v)} = C$	v
		2. $\frac{y}{x} = f(p)$	$\ln x = C + \int \frac{f'(p) dp}{p-f(p)}$	p
d	Die unabhängige Variable fehlt $\psi(y, p) = 0$	1. $p = f(y)$	$\int \frac{dy}{f(y)} = x + C$	—
		2. $y = f(p)$	$x = \int \frac{f'(p) dp}{p} + C$	p
		3. Parameterdarstellung $y = f(u), p = g(u)$	$x = \int \frac{f'(u) du}{g(u)} + C$	—
e	Die abhängige Variable fehlt $\varphi(x, p) = 0$		1. Umformen in $\Phi\left(x, \frac{dx}{dy}\right) = 0$ . (Fall d)	—
		2. $p = F(x)$	$y = \int F(x) dx + C$	—
		3. $x = F(p)$	$y = \int p F'(p) dp + C$	p
f	CLAIRAUTSche Gleichung	$y = xp + f(p)$	$(x + f'(p)) \frac{dp}{dx} = 0;$ also entweder $\frac{dp}{dx} = 0:$ $y = Cx + f(C) \quad (1)$ mit $C = p = \text{constans}$  $\text{oder } x + f'(p) = 0 \quad (2)$ (Singuläre Lösung) = Enveloppe der Geraden (1)	p

Erklärung: 1. Es bedeutet stets  $p = \frac{dy}{dx}$ .

2. Einige Resultate sind in Parameterdarstellung angegeben; der unter Umständen noch zu eliminierende Parameter (v, p) ist in Spalte 5 genannt.

3. In Spalte 3 stehen jeweils die wichtigsten Normalformen, auf die die Gleichungen des in Spalte 2 genannten Typs sich reduzieren lassen.

Die Gleichungen sind nur in folgenden Fällen in endlicher Form integrierbar:

Fall 1:  $r = 0$  bzw.  $s = 2a$  ergibt Fall d (S. 171).

Fall 2:  $r = \frac{-4k}{2k \pm 1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  bzw.  $s = \frac{2a}{1-2h}$ ,  $h = 0, \pm 1, \dots$

$\alpha$ ) Ist  $h = \frac{s-2a}{2s} > 0$ , so führen die  $h$  Transformationen:

$$y_{2l-1} = \frac{(2l-1)n+a}{c} + \frac{x^n}{y_{2l}}; \quad y_{2l} = \frac{2ln+a}{b} + \frac{x^n}{y_{2l+1}}, \quad l = 0, 1, \dots$$

die Gleichung der Form 2 mit  $y = y_0$  über in

$$\begin{aligned} x y'_h - (a + hs) y_h + b y_h^2 &= c x^s, & \text{wenn } h \text{ gerade ist,} \\ x y'_h - (a + hs) y_h + c y_h^2 &= b x^s, & \text{wenn } h \text{ ungerade ist.} \end{aligned}$$

Diese Gleichungen fallen dann unter Fall 1.

$\beta$ ) Ist  $h = \frac{s-2a}{2s} < 0$ , so führt  $y = \frac{x^n}{y_0}$  auf  $\alpha$ .

Die spezielle RICCATISCHE Differentialgleichung ist ein Sonderfall der Gleichung:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = P + Qy + Ry^2} \quad (\text{allgemeine RICCATISCHE Gleichung}),$$

wo  $P, Q, R$  Funktionen von  $x$  sind.

Ist ein partikuläres Integral  $y_1 = f_1(x)$  bekannt, so kann das vollständige durch Integrationen erhalten werden. Man setzt

$$y = y_1 + \frac{1}{v}$$

und erhält

$$\frac{dv}{dx} + (Q + 2Ry_1)v = -R \quad (\text{Lösung vgl. b, S. 171}).$$

Ist noch ein zweites partikuläres Integral bekannt, so kann das vollständige Integral durch eine einzige Integration erhalten werden. Man setzt

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{v_1}, \quad v = v_1 w$$

$$y = y_1 + \frac{1}{v_1 w}$$

und erhält:

$$w = 1 + C \cdot e^{\int \frac{R}{v_1} dx}.$$

Ist noch ein drittes partikuläres Integral  $y_3$  bekannt, so kann das vollständige Integral  $y$  ohne Integration gefunden werden aus

$$\frac{(y-y_1)(y_2-y_3)}{(y-y_2)(y_3-y_1)} = C.$$

3. Häufig führt die *LEGENDRESche* oder *duale Transformation* zum Ziel. Man führt eine neue abhängige Veränderliche  $Y$  ein:

$$Y = px - y = \frac{dy}{dx} x - y, \quad \text{also} \quad dY = p dx + x dp - dy = x dp.$$

Ferner führt man  $p$  als neue unabhängige Veränderliche ein:

$$X = p = \frac{dy}{dx},$$

dann wird

$$x = \frac{dY}{dp} = \frac{dY}{dX} = P,$$

dann kann man die Gleichung  $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$  überführen in die Form

$$F(P, PX - Y, X) = 0.$$

Ist das Integral dieser Gleichung bekannt, so kann das der ursprünglichen durch eine algebraische Elimination gefunden werden.

Ist z. B. ein Integral der neuen Gleichung:

$$f(X, Y) = 0,$$

dann gilt

$$0 = \frac{df}{dX} = \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{dY}{dX} = \frac{\partial f}{\partial X} + x \frac{\partial f}{\partial Y}$$

und

$$-y \frac{\partial f}{\partial Y} = (Y - px) \frac{\partial f}{\partial Y} = Y \frac{\partial f}{\partial Y} + X \frac{\partial f}{\partial X}.$$

Elimination von  $X$  und  $Y$  aus diesen drei Gleichungen ergibt ein Integral (Gleichung zwischen  $x$  und  $y$ ).

## 2. Lineare Differentialgleichungen.

### Allgemeines.

Die lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung hat die allgemeine Form:

$$X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + X_n y = \Phi(D) y = V, \quad (1)$$

wo die  $X_i$  und  $V$  Funktionen von  $x$  allein sind.

Die symbolische Schreibweise  $\Phi(D) y$  bedeutet folgendes: Schreibt man

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= Dy & \frac{d^2 y}{dx^2} &= D^2 y \\ \int y dx &= D^{-1} y & \text{ usw.} \end{aligned}$$

so ist  $\Phi(D) y$  als Polynom in  $D$  aufzufassen

$$\Phi(D) y = (X_0 D^n + X_1 D^{n-1} + \dots + X_{n-1} \cdot D + X_n) y.$$

Der Wert dieser Schreibweise liegt darin, daß man diesen Ausdruck unter Umständen wie einen algebraischen behandeln darf (vgl. S. 175).

Als Beispiel für die Schreibweise sei die TAYLORSche Formel symbolisch hingeschrieben:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + h \cdot \frac{df(x)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{d^2f(x)}{dx^2} + \dots \\ &= \left(1 + hD + \frac{h^2 D^2}{2!} + \dots\right) f(x) = e^{hD} f(x). \end{aligned}$$

Der Differentialausdruck:

$$\frac{d^n(X_0 y)}{dx^n} - \frac{d^{n-1}(X_1 y)}{dx^{n-1}} + \dots + (-1)^n X_n y \quad (2)$$

heißt der zu  $\Phi(D)y$  „adjungierte“ Differentialausdruck. Ist er identisch mit  $\Phi(D)y$ , so heißt  $\Phi(D)y$  *selbstadjungiert*.

Folgende Eigenschaften sind allen linearen Differentialgleichungen gemeinsam:

1. Ist  $y_1$  eine beliebige partikuläre Lösung der Gleichung  $\Phi(D)y = V$  und setzt man  $y = y_1 + Y$ , so folgt:

$$\Phi(D)Y = 0. \quad (3)$$

Die vollständige Lösung der homogenen Gleichung (2) zu  $y_1$  hinzugefügt ergibt die vollständige Lösung der inhomogenen Gleichung (1).

2. Ist  $Y_1$  eine Lösung der homogenen Gleichung  $\Phi(D)Y = 0$ , so ist auch  $Y = C_1 Y_1$  eine Lösung.

Sind  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  Lösungen der homogenen Gleichung, so ist auch jede lineare Kombination derselben eine Lösung. Die allgemeine Lösung ergibt sich als lineare Kombination von  $n$  *unabhängigen* Lösungen.

3. Ist  $Y_1$  eine Lösung von  $\Phi(D)Y = 0$  und substituiert man den Ansatz  $y = Y_1 z$  in die Gleichung  $\Phi(D)y = V$ , so erhält man für  $z$  eine Differentialgleichung, deren Ordnung um eine Einheit niedriger ist als die der ursprünglichen Differentialgleichung.

#### a) Allgemeine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

$$\Phi(D)y = \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_n y = V(x) \quad (\text{inhom. Gleichung}) \quad (4)$$

$$\text{bzw. } = 0 \quad (\text{homogene Gleichung}). \quad (4a)$$

Man bildet die „charakteristische Gleichung“:

$$a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + \dots + A_n = 0 = \Phi(a) \quad (5)$$

und löst dieselbe nach  $a$  auf. Sind ihre  $n$  Wurzeln gleich  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , und stimmen keine zwei dieser Zahlen überein, so ist (wenn  $A, B, \dots$  beliebige Konstanten bedeuten):

$$y_0 = A e^{\alpha x} + B e^{\beta x} + \dots \quad (6)$$

die allgemeine Lösung der *homogenen* Gleichung  $\Phi(D)y = 0$ .

Sind aber zwei Wurzeln, z. B.  $\alpha$  und  $\beta$ , gleich, dann heißt die allgemeine Lösung der *homogenen* Gleichung:

$$y_0 = (A' + B' x) e^{\alpha x} + C e^{\beta x} + \dots \quad (7)$$

Sind  $r$  Wurzeln gleich  $\alpha$ , dann heißt die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$y_0 = (A' + B' x + C' x^2 + \dots + R' x^{r-1}) e^{\alpha x} + \dots \quad (8)$$

Ist nun  $f_0(x)$  ein beliebiges *partikuläres* Integral der inhomogenen Gleichung  $\Phi(D) y = V$ , so ist ihre vollständige Lösung (vgl. 2a):

$$y = f_0(x) + y_0. \quad (9)$$

Verschiedene Fälle, in denen die Bestimmung eines partikulären Integrals  $f_0(x)$  leicht möglich ist.

1. Ist  $V$  in der Differentialgleichung

$$\Phi(D) y = V,$$

eine *ganze rationale Funktion* von  $x$ , so erhält man  $f_0(x)$  in folgender symbolischer Form:

$$f_0(x) = \frac{1}{\Phi(D)} V. \quad (10)$$

Das bedeutet: Man entwickle den Ausdruck

$$\frac{1}{\Phi(D)} = \frac{1}{\left(\frac{d^n}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + A_n\right)} = \frac{1}{(D^n + A_1 D^{n-1} + \dots + A_n)}$$

nach steigenden Potenzen von  $D$ , als sei dieses Operationszeichen eine algebraische Größe. Ist hierbei die niedrigste wirklich auftretende Potenz von  $D$  die  $k$ -te und die höchste Potenz von  $x$  in  $V$  die  $m$ -te, so beginnt die Entwicklung von  $\frac{1}{\Phi(D)}$  mit  $\frac{1}{D^k}$  und braucht nicht über  $D^m$  hinausgeführt zu werden, weil alle höheren Differentialquotienten als  $D^m V$  verschwinden.

2. Ist  $V$  eine *Exponentialfunktion* von  $x$  oder enthält  $V$  eine Exponentialfunktion als Faktor

$$\boxed{V = e^{ax} X,}$$

wo  $X$  ganz und rational sei, so wird die gesuchte partikuläre Lösung

$$f_0(x) = \frac{1}{\Phi(D)} V = \frac{1}{\Phi(D)} e^{ax} X = e^{ax} \frac{1}{\Phi(D+a)} X.$$

3.  $V$  enthält einen *Sinus oder Kosinus* als Faktor.

$$\boxed{V = X \cos(mx + \alpha)}$$

$$y = \frac{1}{\Phi(D)} X \cos(mx + \alpha).$$



Setzt man

$$y_1 = \frac{1}{\Phi(D)} X \sin(mx + \alpha),$$

so wird

$$y + iy_1 = \frac{1}{\Phi(D)} X e^{i(mx + \alpha)} = e^{i(mx + \alpha)} \frac{1}{\Phi(D + im)} X,$$

so daß nur noch der Ausdruck

$$\frac{1}{\Phi(D + im)} X$$

zu berechnen ist.

4. *V* enthält eine Potenz von  $x$  als Faktor.

$$\boxed{V = x^m X}$$

$$y = \frac{1}{\Phi(D)} x^m X = x^m \frac{1}{\Phi(D)} X + m x^{m-1} \left( \frac{d}{dD} \frac{1}{\Phi(D)} \right) X \\ + \frac{m(m-1)}{2!} x^{m-2} \left( \frac{d^2}{dD^2} \frac{1}{\Phi(D)} \right) X + \dots$$

Die Entwicklung wird bis zum  $(m+1)$ -ten Gliede fortgesetzt.

5. *Ein besonderer Fall* einer linearen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist die Gleichung

$$\boxed{\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)}. \quad (11)$$

$n$  aufeinanderfolgende Integrationen ergeben als allgemeine Lösung:

$$y = \int \dots \int f(x) (dx)^n + B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \dots + B_{n-1} x + B_n, \quad (12)$$

wo die  $B_r$  beliebige Konstanten sind. Diese Lösung lautet einfacher:

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(t) (x-t)^{n-1} dt + B_1 x^{n-1} + \dots + B_n. \quad (13)$$

**b) Allgemeine lineare Differentialgleichung mit veränderlichen Koeffizienten.**

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + X_{n-1} \frac{dy}{dx} + X_n y = V(x) \quad (\text{inhom. Gl.}) \quad (14)$$

$$\text{bzw.} = 0 \quad (\text{homog. Gl.}). \quad (14a)$$

$X_1, \dots, X_n$  und  $V$  sind Funktionen von  $x$  allein.

Sind  $y_1, y_2, \dots, y_n$  partikuläre Lösungen von  $\Phi(D) y = 0$ , so ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n, \quad (15)$$

wenn die Lösungen  $y_1, y_2, \dots, y_n$  *linear unabhängig* voneinander sind (ein Fundamentalsystem bilden).

Die Bedingung, daß diese Unabhängigkeit besteht, ist das Nichtverschwinden der WRONSKISCHEN Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} & \cdots & \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \\ \frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}} & \frac{d^{n-2} y_2}{dx^{n-2}} & \cdots & \frac{d^{n-2} y_n}{dx^{n-2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \cdots & \frac{dy_n}{dx} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix} \quad (16)$$

Das allgemeine Integral der *inhomogenen* Gleichung  $\Phi(D) y = V$  berechnet sich dann zu:

$$y = \sum_{r=1}^n y_r \left[ C_r + \int \frac{V \Delta_r}{\Delta} dx \right]. \quad (17)$$

Hierbei bedeutet  $\Delta_r$  den zu  $\frac{d^{n-1} y_r}{dx^{n-1}}$  gehörigen Minor in  $\Delta$  (vgl. S. 92).

Die an dieser und anderen Stellen (vgl. z. B. S. 183) auftretende Form der Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung führt uns auf eine allgemeinere Methode. Wir suchen eine Lösung von der Form:

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi) V(\xi) d\xi. \quad (18)$$

Die in dieser Gleichung auftretende Funktion  $G(x, \xi)$  bezeichnet man als „GREENSche Funktion“ des gegebenen Differentialausdrucks. Damit die Gleichung (18) wirklich eine Lösung der Differentialgleichung ist, muß die GREENSche Funktion folgende Eigenschaften haben: Die Funktion  $G(x, \xi)$  erfüllt als Funktion von  $x$  betrachtet die homogene Gleichung, mit Ausnahme des Punktes  $x = \xi$ . In diesem Punkt bleibt die Funktion samt ihren Ableitungen bis zur  $(n - 2)$ -ten Ordnung stetig, die  $(n - 1)$ -te Ableitung springt aber hier um den Betrag 1.

Die allgemeine Lösung bekommt man durch Hinzufügung einer linearen Kombination der  $n$  linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung.

Handelt es sich um einen selbstadjungierten Differentialausdruck (vgl. S. 174), so ist die GREENSche Funktion *symmetrisch* in  $x$  und  $\xi$ , also:

$$G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

Im Fall einer Gleichung zweiter Ordnung ist das durch eine Transformation der gesuchten Funktion  $y$  in:

$$z = y e^{\int X_1 dx}$$

immer zu erreichen.

### 3. Besondere Formen von Differentialgleichungen.

a)

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \varphi(y).$$

Diese Gleichung ist nur für  $n = 1$  und  $n = 2$  durch Quadratur lösbar (für  $n = 1$  vgl. S. 171, Beispiel d).

Für  $n = 2$  ergibt Multiplikation mit  $2 \frac{dy}{dx}$  und Integration:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2 \int \varphi(y) dy + A$$

und daraus (vgl. S. 171, Fall d)

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2 \int \varphi(y) dy + A}} + B.$$

b<sub>1</sub>) Jede Gleichung der Form:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

ist durch Quadratur integrierbar. Man setzt:

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = z, \quad \frac{dz}{dx} = F(z)$$

und erhält

$$\int \frac{dz}{F(z)} = x + C.$$

Auflösung dieser Gleichung nach  $z$  ergibt das intermediäre Integral:

$$z = \varphi(x + C) = \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}.$$

Zur Lösung dieser Gleichung vgl. Fall 5, S. 176.

b<sub>2</sub>) Zur Lösung der Gleichung von der Form

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}\right)$$

setzt man:

$$z = \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}$$

und erhält

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = F(z).$$

Die Lösung hiervon ist nach a) (s. o.)

$$x = \int \frac{dz}{\sqrt{2 \int F(z) dz + A}} + B.$$

Die Auflösung nach  $z = f(x) = \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}$  ergibt durch Integration die endgültige Lösung (vgl. S. 176, Fall 5).

c) **Erniedrigung der Ordnung.** Eine Differentialgleichung *zweiter* Ordnung, in der eine der Veränderlichen nicht explizit auftritt, kann

durch Substitution in eine Differentialgleichung *erster* Ordnung verwandelt werden:

$$1. \quad \boxed{\psi \left( y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \right) = 0.} \quad \text{Es fehlt } x.$$

Man setzt:  $\frac{dy}{dx} = p$  und  $\frac{d^2y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}$  und betrachtet  $p$  als Funktion von  $y$ . Dann erhält man die Gleichung erster Ordnung:

$$\psi \left( y, p, p \frac{dp}{dy} \right) = 0,$$

mit der Lösung  $p(y) = \frac{dy}{dx}$ , daher  $x = \int \frac{dy}{p(y)} + A$ .

$$2. \quad \boxed{\psi \left( x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \right) = 0.} \quad \text{Es fehlt } y.$$

Setzt man  $\frac{dy}{dx} = p$  und  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$  und betrachtet  $p$  als Funktion von  $x$ , so erhält man die Gleichung erster Ordnung:

$$\psi \left( x, p, \frac{dp}{dx} \right) = 0.$$

**d) Gleichdimensionale Differentialgleichungen** (vgl. S. 167). Ist [bei Betrachtung von  $y$  (ebenso wie  $x$ ) als Größe von der ersten Dimension] die Differentialgleichung gleichdimensional, so setzt man:

$$y = xz \quad \text{und} \quad x = e^\theta;$$

wegen

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{x}$$

wird dann

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{d\theta} + z, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left( \frac{d^2z}{d\theta^2} + \frac{dz}{d\theta} \right) e^{-\theta}.$$

Bei Ausführung der Substitution zeigt sich, daß die neue unabhängige Variable  $\theta$  nicht explizit in der Gleichung vorkommt. Die gleichdimensionale Gleichung läßt also wie unter c) eine Erniedrigung der Ordnung zu. Dasselbe gilt, wenn die vorgelegte Differentialgleichung gleichdimensional ist bei Betrachtung von  $y$  als Größe der  $m$ -ten Dimension. In diesem Fall setzt man

$$y = x^m z, \quad x = e^\theta,$$

also  $y = z e^{m\theta}$

und  $\frac{dy}{dx} = \left( \frac{dz}{d\theta} + mz \right) e^{(m-1)\theta}$ ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{ \frac{d^2z}{d\theta^2} + (2m-1) \frac{dz}{d\theta} + m(m-1)z \right\} e^{(m-2)\theta} \text{ usw.}$$

e) **Exakte Differentialgleichungen.** Eine exakte Differentialgleichung ist eine Gleichung von der Form

$$F \equiv f \left( \frac{d^n y}{d x^n}, \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}, \dots, \frac{d y}{d x}, y, x \right) = 0,$$

wenn  $F dx$  das exakte (vollständige) Differential einer Funktion  $U$  ist, wobei  $U$  eine Funktion von  $\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}$  bis  $y$  und  $x$  ist.  $U = \text{const}$  ist dann ein intermediäres Integral. Eventuell läßt sich  $F dx$  durch Multiplikation mit einer Funktion von  $\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}, \dots, \frac{d y}{d x}, y$  und  $x$  zum exakten Differential machen. (*Integrierender Faktor.*)

#### 4. Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

a) Die allgemeine Form einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + X_1 \frac{d y}{d x} + X_2 y = V, \quad (1)$$

wo die  $X_1, X_2, V$  Funktionen von  $x$  oder konstant sind.

Ist  $y_0$  eine Lösung der zu (1) gehörigen homogenen Gleichung ( $V = 0$ ), so lautet die vollständige Lösung der inhomogenen Gleichung (1):

$$y = C_1 y_0 + C_2 y_0 \int \frac{d x}{y_0^2} e^{-\int X_1 d x} + y_0 \int \frac{d x}{y_0^2} \left\{ e^{-\int X_1 d x} \int y_0 V e^{\int X_1 d x} d x \right\}. \quad (2)$$

b) Kann man für die homogene Gleichung keine Lösung erhalten, so kann man setzen:

$$y = v \cdot e^{-\frac{1}{2} \int X_1 d x}, \quad (3a)$$

ferner

$$I = X_2 - \frac{1}{2} \frac{d X_1}{d x} - \frac{1}{4} X_1^2. \quad (3b)$$

Dann hat man statt der ursprünglichen Gleichung die Beziehung:

$$\frac{d^2 v}{d x^2} + I v = V \cdot e^{\frac{1}{2} \int X_1 d x}, \quad (4)$$

und sucht diese nach a) zu lösen.  $I$  heißt die *Invariante* der Koeffizienten der Differentialgleichung.

c) Man kann sich demnach auf die Behandlung der *Normalform*

$$\frac{d^2 v}{d x^2} + I v = 0 \quad (5)$$

an Stelle der homogenen Gleichung zu (1) beschränken. Führt man die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + X_1 \frac{d y}{d x} + X_2 y = 0$$

durch irgendeine Substitution  $y = zf(x)$  über in

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + X_1' \frac{dz}{dx} + X_2' z = 0, \quad (6)$$

so hat, nachdem das Glied mit  $\frac{dz}{dx}$  durch die Substitution  $z = w \cdot e^{-\frac{1}{2} \int X_1' dx}$  weggeschafft ist, diese Gleichung ebenfalls die Normalform

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + Iw = 0,$$

wo  $I$  dieselbe Funktion von  $X_1, X_2$  ist, wie von  $X_1'$  und  $X_2'$  (daher ihre Bezeichnung als Invariante). Haben umgekehrt zwei Gleichungen (wie die für  $y, X_1, X_2$  und  $z, X_1', X_2'$ ) dieselbe Normalform, so können sie ineinander transformiert werden.

Spezialfall: Ist  $I = \alpha x^m$ , so ist eine Lösung:

$$w = \sqrt{x} Z_{\frac{1}{m+2}} \left( \frac{2\sqrt{\alpha}}{m+2} x^{\frac{m+2}{2}} \right)$$

wo  $Z_{\frac{1}{m+2}}$  eine Zylinderfunktion der Ordnung  $\frac{1}{m+2}$  bedeutet (s. S. 67f.).

Insbesondere ergibt sich für  $m = -4$

$$w = A \cdot \cos \frac{\sqrt{\alpha}}{x} + B \cdot \sin \frac{\sqrt{\alpha}}{x}.$$

**d) Integration durch Änderung der unabhängigen Variablen.** Führt man in der ursprünglichen Gleichung ein:

$$z = \int e^{-\int X_1' dx} dx,$$

an Stelle von  $x$ , so verschwindet der Koeffizient des durch einfache Substitution von  $z$  auftretenden Gliedes mit  $\frac{dz}{dx}$ , und man erhält die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 + X_2' y = 0.$$

Setzt man

$$f(z) = \frac{X_2'}{\left( \frac{dz}{dx} \right)^2},$$

so lautet die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + f(z) y = 0.$$

Für  $f(z) = \alpha \cdot z^m$  vgl. obigen Spezialfall.

**e) Die Variation der Konstanten<sup>1</sup>.** Ist  $y_1 = f_1(x)$  eine Lösung der homogenen Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + X_1' \frac{dy}{dx} + X_2' y = 0,$$

<sup>1</sup> Spezialfall von 2b) S. 176.

so ergibt sich als weitere Lösung

$$y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2} e^{-\int X_1 dx} \cdot G, \quad (7)$$

wo  $G$  eine beliebige Konstante ist. Die vollständige Lösung der homogenen Gleichung wird dann

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \quad (8)$$

Um die Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, werden die Größen  $C_1$  und  $C_2$  jetzt nicht mehr als Konstanten, sondern als Funktionen von  $x$  betrachtet, die so zu bestimmen sind, daß die *inhomogene* Gleichung erfüllt wird. Diese Methode wird als „Variation der Konstanten“ bezeichnet.

Die Form der Lösung ist für die homogene und für die inhomogene Gleichung dieselbe. Der Unterschied liegt darin, daß die Konstanten, die in der Lösung der homogenen Gleichung auftreten, in der Lösung der inhomogenen Gleichung als Funktionen der unabhängigen Variablen erscheinen.

Dabei hat man eine Relation zwischen  $C_1$  und  $C_2$  frei.

Man fordert, daß

$$y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} = 0 \quad (9)$$

ist und erhält aus

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$$

durch Differentiation

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= C_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} + C_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} + \frac{dC_1}{dx} \frac{dy_1}{dx} + \frac{dC_2}{dx} \frac{dy_2}{dx}. \end{aligned}$$

Die Substitution dieser Werte von  $\frac{dy}{dx}$  und  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  in die inhomogene Gleichung ergibt

$$\frac{dC_1}{dx} \frac{dy_1}{dx} + \frac{dC_2}{dx} \frac{dy_2}{dx} = V.$$

Daraus folgt

$$\left. \begin{aligned} C_2 &= E + \frac{1}{G} \int V y_1 e^{\int X_1 dx} dx \\ C_1 &= F - \frac{1}{G} \int V y_2 e^{\int X_1 dx} dx \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

wo  $E$  und  $F$  willkürliche Konstanten und  $G$  eine von der Wahl von  $y_1$  und  $y_2$  abhängende Konstante ist (s. oben).

Das vollständige Integral der inhomogenen Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + X_1 \frac{dy}{dx} + X_2 y = V$$

ist schließlich

$$y = E f_2(x) + F f_1(x) + \frac{1}{G} \int^x V(\xi) e^{\int^{\xi} X_1(s) ds} [f_2(x) f_1(\xi) - f_1(x) f_2(\xi)] d\xi, \quad (11)$$

wobei  $f_1$  und  $f_2$  partikuläre Integrale der homogenen Gleichung sind.

Der Faktor von  $V$  im Integral stellt die Einwirkung dar, die von der Stelle  $\xi$  auf die Stelle  $x$  ausgeübt wird. Man bezeichnet ihn als GREENSche Funktion (vgl. S. 177).

Ein Spezialfall zu e) ist im Anhang, 8 behandelt.

**f) Integration durch Reihenentwicklung.** Die Differentialgleichung zweiter Ordnung sei, evtl. durch Entwicklung, auf die Form gebracht:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) + \frac{dy}{dx} (b_0 + b_1 x + \dots) \\ + y (c_0 + c_1 x + \dots) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots \end{aligned} \right\} (12)$$

Man macht jetzt den Ansatz:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots \quad (13)$$

Die Aufgabe ist dann, die Koeffizienten  $\alpha_i$  dieser Entwicklung zu bestimmen. Durch Einsetzen des Ansatzes für  $y$ , sowie der daraus formal gebildeten Ableitungen:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \dots$$

und

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2\alpha_2 + 2 \cdot 3\alpha_3 x + 3 \cdot 4\alpha_4 x^2 + \dots$$

in die Differentialgleichung findet man, da die resultierende Gleichung in  $x$  identisch erfüllt sein muß (Koeffizientenvergleichung), das folgende Gleichungssystem für die  $\alpha_i$ :

$$\alpha_0 c_0 + \alpha_1 b_0 + 2\alpha_2 a_0 = d_0$$

$$\alpha_0 c_1 + \alpha_1 (b_1 + c_0) + \alpha_2 (2a_1 + 2b_0) + \alpha_3 \cdot 2 \cdot 3 a_0 = d_1 \text{ usw.}$$

oder allgemein:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i [i(i-1) a_{n-i+2} + i b_{n-i+1} + c_{n-i}] = d_n. \quad (14)$$

Die Auflösung ist sukzessive möglich, wenn  $a_0 \neq 0$  ist. Jede Gleichung enthält eine Unbekannte  $\alpha_i$  mehr als die vorhergehenden und liefert daher unmittelbar deren Wert, wenn alle  $\alpha_k$  für  $k < i$  bekannt sind.

Man sieht sofort, daß zwei  $\alpha$  beliebig angenommen werden können, z. B.  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$ ; dann liefert die erste Gleichung  $\alpha_2$ , die zweite  $\alpha_3$  usw. (vgl. S. 63). Um eine Lösung  $y_0$  der inhomogenen Gleichung zu finden, kann man z. B.  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$  setzen. Sind alle  $d_i = 0$  und setzt man  $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0$ , so erhält man eine Lösung  $y_1$  der homogenen Gleichung, ebenso eine zweite Lösung  $y_2$  für  $d_i = 0, \alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$ .



Die allgemeine Lösung ist dann  $y_0 + A y_1 + B y_2$  mit beliebigem  $A$  und  $B$ .

Es bleibt natürlich zu untersuchen, ob die gefundene Entwicklung konvergiert. Eventuell wiederholt man das Verfahren, indem man in einem anderen Punkt entwickelt (Substitution:  $x' = x - x_0$ ). An singulären Stellen der Differentialgleichung macht man Lösungsansätze der Form:

$$x^r (\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots)$$

oder

$$x^r \ln x (\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots),$$

wo  $r$  passend zu wählen ist.

Analog verfährt man bei Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Nach diesem Verfahren findet man z. B. folgende Lösungen praktischer wichtiger Differentialgleichungen (vgl. auch die Zusammenstellung von Eigenlösungen S. 200).

1. GAUSSSCHE Differentialgleichung:

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \frac{dy}{dx} - \alpha \beta y = 0.$$

Lösung:

$$y = AF(\alpha, \beta, \gamma, x) + Bx^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x)$$

$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$  bedeutet hierin die *hypergeometrische Reihe*:

$$1 + \frac{\alpha \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots$$

$A$  und  $B$  sind willkürliche Konstanten.

2. LEGENDRESCHES Differentialgleichung: ( $n$  ist eine ganzzahlige Konstante):

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0.$$

Lösung:  $y = A P_n(x) + B Q_n(x)$ .

$P_n$  bzw.  $Q_n$  bedeuten Kugelfunktionen 1. bzw. 2. Art (s. S. 60f.).

3. BESSELSCHES Differentialgleichung ( $n$  ist eine Konstante):

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0.$$

Lösung:  $y = A I_n(x) + B N_n(x)$ .

$I_n$  bzw.  $N_n$  bedeuten Zylinderfunktionen 1. und 2. Art (s. S. 67f.)

### 5. Systeme von Differentialgleichungen (simultane Differentialgleichungen).

Sind die Gleichungen, nach den Differentialquotienten aufgelöst, von *erster Ordnung*, und kommt neben den  $n$  abhängigen Variablen  $y$  der  $n$  Gleichungen nur *eine* unabhängige Variable  $x$  vor, so hat das System die Form:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Jedes System von  $n$  Differentialgleichungen mit  $n$  abhängigen Variablen einer unabhängigen Variablen kann auf diese Form gebracht werden. Kommt nämlich z. B. auch die 2. Ableitung vor, z. B.  $\frac{d^2 y_1}{dx^2}$ , so führt man eine neue abhängige Variable  $y_{n+1}$  ein durch die weitere Gleichung  $\frac{dy_1}{dx} = y_{n+1}$  und ersetzt  $\frac{d^2 y_1}{dx^2}$  durch  $\frac{dy_{n+1}}{dx}$ . Analog verfährt man beim Auftreten höherer Ableitungen.

Die vollständigen Lösungen stellen ein System von  $n$  Gleichungen dar von der Form:

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

wo die  $C_i$  willkürliche Konstanten sind. Außerdem können singuläre Lösungen bestehen.

Die Differentialgleichungen können auch in der Form geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \frac{X_1}{X} \\ \frac{dy_2}{dx} &= \frac{X_2}{X} \text{ usw.} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

wo  $X, X_1$  usw. Funktionen von  $x, y_1, y_2, \dots, y_n$  sind, also

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy_1}{X_1} = \frac{dy_2}{X_2} = \dots = \frac{dy_n}{X_n}. \quad (3')$$

Ferner können die Lösungen auch in der Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= C_1 \\ \Psi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= C_2 \text{ usw.,} \end{aligned} \quad (4)$$

wo die  $\Psi_i$  voneinander unabhängig sind (d. h. ihre Funktionaldeterminante nicht verschwindet).

Jede Funktion  $\Pi(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)$  ist, konstant gesetzt, gleichfalls eine Lösung, und es besteht dann die Gleichung:

$$X \frac{\partial \Pi}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \Pi}{\partial y_1} + X_2 \frac{\partial \Pi}{\partial y_2} + \dots = 0. \quad (5)$$

a) Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Die Zahl der Gleichungen sei gleich der Zahl der abhängigen Variablen.

Hat man nur zwei abhängige Variable  $x$  und  $y$  und eine unabhängige Variable  $t$ , so lautet das System in der symbolischen Schreibweise von S. 173:

$$\begin{cases} f_1(D) x + \varphi_1(D) y = T_1 \\ f_2(D) x + \varphi_2(D) y = T_2 \end{cases} \quad (6)$$

$T_1$  und  $T_2$  sind Funktionen von  $t$  allein.

Berechnet man nun  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  als Wurzeln der Gleichung

$$\varphi_2(\lambda) f_1(\lambda) - \varphi_1(\lambda) f_2(\lambda) = 0, \quad (7)$$

so ist die *vollständige* Lösung

$$\begin{cases} x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + A_m e^{\lambda_m t} + P(t) \\ y = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + B_m e^{\lambda_m t} + Q(t) \end{cases} \quad (8)$$

worin die  $A_i$  willkürliche Konstanten sind.

Die  $B_i$  folgen aus den Relationen

$$A_i f_1(\lambda_i) + B_i \varphi_1(\lambda_i) = 0.$$

$P(t)$  ist dabei ein *partikuläres* Integral der Gleichung

$$\{\varphi_2(D) f_1(D) - \varphi_1(D) f_2(D)\} x = \varphi_2(D) T_1 - \varphi_1(D) T_2.$$

$Q(t)$  ist ein *partikuläres* Integral der Gleichung

$$\{\varphi_2(D) f_1(D) - \varphi_1(D) f_2(D)\} y = f_1(D) T_2 - f_2(D) T_1.$$

Sind zwei  $\lambda$ , z. B.  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , komplex und konjugiert, also

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta,$$

so heißt der entsprechende Teil von  $x$

$$e^{\alpha t} (L_1 \cos \beta t + L_2 \sin \beta t),$$

und von  $y$

$$e^{\alpha t} (M_1 \cos \beta t + M_2 \sin \beta t).$$

Die Relation zwischen den  $L$  und  $M$  findet man am besten durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

Sind zwei  $\lambda$  gleich, z. B.  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , so heißt der entsprechende Teil von  $x$

$$e^{\lambda t} (A + A' t),$$

der von  $y$

$$e^{\lambda t} (B + B' t).$$

Dabei gelten die Relationen:

$$\begin{aligned} A' f_1(\lambda) + B' \varphi_1(\lambda) &= 0, \\ A f_1(\lambda) + B \varphi_1(\lambda) + A' \frac{d f_1(\lambda)}{d \lambda} + B' \frac{d \varphi_1(\lambda)}{d \lambda} &= 0. \end{aligned}$$

Führt man entsprechend S. 185 neue Variable  $y_i$  ein, so kommt man zu dem allgemeinen Fall:



worin  $P, Q, R$  Funktionen von  $x, y, z$  sind. Durch diese Gleichung wird jedem Punkte des Raumes ein Flächenelement zugeordnet<sup>1</sup>.

a) Die Beziehung

$$K = P \left( \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) + Q \left( \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + R \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 0, \quad (2)$$

die sog. „Integrabilitätsbedingung“, ist notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Lösung von der Form

$$\Phi(x, y, z) = C. \quad (3)$$

Geometrisch bedeutet die Lösung eine Flächenschar. Eine Gleichung, die die Integrabilitätsbedingung erfüllt, heißt auch eine „eigentliche“ totale Differentialgleichung.

b) Ist  $K \neq 0$ , so bildet man eine willkürliche Beziehung

$$\psi(x, y, z) = 0$$

und ihr Differential

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = 0.$$

Bestimmt man aus diesen zwei Gleichungen  $z$  und  $dz$  als Funktion von  $x, y, dx, dy$  und setzt man die Werte für  $z$  und  $dz$  in die totale Differentialgleichung ein, so erhält man aus ihr eine Gleichung der Form

$$M dx + N dy = 0, \quad (4)$$

wo  $M$  und  $N$  Funktionen von  $x$  und  $y$  sind. Das Integral dieser Gleichung sei

$$\varphi(x, y) = C.$$

Dann besteht die Lösung der ursprünglichen Gleichung aus den beiden simultanen Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} \psi(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y) = C \end{array} \right\} \quad (5)$$

Die Lösung bedeutet also gewisse Kurvenscharen auf beliebigen Flächen. Derartige Gleichungen, für die  $K \neq 0$  ist, heißen auch „uneigentliche“ totale Differentialgleichungen.

c) Im Falle  $K = 0$  wird die Lösung  $\Phi(x, y, z) = \text{const}$  folgendermaßen gefunden. Man bildet die Hilfsgleichung

$$P dx + Q dy = 0$$

mit  $z$  als Konstante und sucht ihr Integral  $u(x, y, z) = u = \text{const}$ , also

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0;$$

dann bestimmt sich ein „integrierender“ Faktor  $\lambda$  durch

$$\lambda = \frac{1}{P} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Q} \frac{\partial u}{\partial y},$$

<sup>1</sup> Faßt man  $P, Q, R$  zu einem Vektor  $\mathfrak{R}$  zusammen, so heißt die Differentialgleichung  $(\mathfrak{R} \cdot d\mathfrak{r}) = 0$ ; die Integrabilitätsbedingung nimmt die Form an:  $(\mathfrak{R} \cdot \text{rot } \mathfrak{R}) = 0$ .

welcher die Gleichung

$$\lambda(P dx + Q dy + R dz) = 0$$

auf die Form bringt:

$$du + S dz = 0,$$

worin

$$\lambda R - \frac{\partial u}{\partial z} = S$$

bedeutet. Führt man schließlich in  $S$  statt  $x, y, z$  die Variablen  $x, u, z$  mit Hilfe von  $u(x, y, z) = u$  ein

$$S(x, y, z) = \bar{S}(x, u, z),$$

so wird in dieser neuen Form  $\bar{S}$  von  $x$  unabhängig. Das vollständige Integral  $\psi(u, z) = \text{const}$  der Gleichung

$$du + \bar{S} dz = 0$$

gibt dann eine vollständige Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung, wenn man in  $\psi(u, z)$  noch  $u$  durch  $u(x, y, z)$  ersetzt:

$$\psi(u, z) = \Phi(x, y, z) = \text{const}.$$

Statt des oben bestimmten Wertes  $\lambda$  ist auch  $\lambda \cdot F(\Phi)$  ein integrierender Faktor, wo  $F$  eine willkürliche Funktion der Lösung  $\Phi$  bedeutet. Die Integrabilität, d. h. die Existenz eines integrierenden Faktors hat die geometrische Bedeutung, daß, wenn man  $x, y, z$  als Koordinaten im Raum auffaßt, man von einem gegebenen Punkt aus, längs solcher Kurvenstücke, die Lösung der Differentialgleichung sind, nicht jeden Punkt seiner Umgebung erreichen kann.

Für mehr als drei Variablen gelten analoge Aussagen im Mehrdimensionalen; für nur zwei Variablen existiert immer ein integrierender Faktor.

## C. Partielle Differentialgleichungen.

Im folgenden sind stets  $u, v$  abhängige,  $x, y$  unabhängige Veränderliche. Ferner ist

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial u}{\partial x} = u_x, & q &= \frac{\partial u}{\partial y} = u_y \\ r &= u_{xx} & s &= u_{xy} & t &= u_{yy}. \end{aligned}$$

### 1. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.

#### a) In den Ableitungen lineare Gleichungen.

Im Falle zweier unabhängiger Variablen lautet die Gleichung

$$P(x, y, u)p + Q(x, y, u)q = R(x, y, u). \quad (1)$$

Man bildet das System gewöhnlicher Differentialgleichungen (vgl. S. 185)

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{R} \quad (2)$$

(„charakteristisches System“), für das man zwei voneinander unabhängige Integrale

$$\varphi(x, y, u) = a \quad \text{und} \quad \psi(x, y, u) = b \quad (3)$$

bestimmt. Dann ist

$$f(\varphi, \psi) = 0 \quad (f = \text{beliebige Funktion})$$

eine Lösung der Differentialgleichung, die alle Lösungen mit Ausnahme der singulären enthält.

Das Verfahren läßt sich auf mehr als zwei unabhängige Variable übertragen.

### b) Wichtige besondere Fälle.

1. Fall:  $\psi(p, q) = 0$  oder  $q = f(p)$ .

Die Variablen treten nicht explizit auf.

Das vollständige Integral ist

$$u = ax + by + c, \quad \text{wo} \quad \psi(a, b) = 0 \quad \text{oder} \quad b = f(a)$$

also

$$u = ax + yf(a) + c.$$

2. Fall:  $\chi(u, p, q) = 0$ .

Die unabhängigen Variablen treten nicht explizit auf.

Man setzt  $u = u(x + ay) = u(\xi)$ . Es wird dann

$$p = \frac{du}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{du}{d\xi}, \quad q = \frac{du}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} = a \frac{du}{d\xi},$$

das führt auf  $\chi\left(u, \frac{du}{d\xi}, a \frac{du}{d\xi}\right) = 0$ , also auf eine gewöhnliche Differentialgleichung. Es wird

$$\frac{du}{d\xi} = \varphi(u, a),$$

also

$$x + ay + b = \int \frac{du}{\varphi(u, a)} = F(u, a).$$

3. Fall:  $\varphi(x, p) = \psi(y, q)$ . (Separation der Variablen.)

Man setzt beide Seiten gleich einer Konstanten  $a$  und erhält

$$p = \vartheta_1(x, a), \quad q = \vartheta_2(y, a).$$

Die Integrale dieser beiden Gleichungen

$$u = f_1(x, a) + \text{einer von } x \text{ unabhängigen Größe}$$

$$u = f_2(y, a) + \text{einer von } y \text{ unabhängigen Größe}$$

sind enthalten in

$$u = f_1(x, a) + f_2(y, a) + b,$$

der vollständigen Lösung der ursprünglichen Gleichung.

4. Fall:  $u = px + qy + \varphi(p, q)$ .

Die vollständige Lösung dieser Gleichung ist

$$u = ax + by + \varphi(a, b).$$

## 2. Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die in den 2. Ableitungen linear sind.

### a) Normalform der Gleichung mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

Es sei die reelle Differentialgleichung vorgelegt

$$R(x, y)r + 2S(x, y)s + T(x, y)t = V(x, y, p, q, u). \quad (1)$$

Je nachdem, ob an einer Stelle  $x, y$  die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} R & S \\ S & T \end{vmatrix} > 0, = 0, < 0 \quad (2)$$

ist, heißt die Differentialgleichung dort von *elliptischem* bzw. *parabolischem* bzw. *hyperbolischem* Typ.

Die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$R\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2S\frac{dy}{dx} + T = 0, \quad (3)$$

die sich in zwei lineare Differentialgleichungen aufspalten läßt, hat zwei einparametrische Kurvenscharen in der  $x, y$ -Ebene zur Lösung:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= a \\ f_2(x, y) &= b. \end{aligned} \quad (4)$$

Für  $\Delta < 0$  sind diese Kurven reell („Charakteristiken“), für  $\Delta > 0$  komplex. Für  $\Delta = 0$  fallen beide Scharen zusammen.

Führt man die Parameter  $a$  und  $b$  als neue Variable ein, so geht (1) über in

$$u_{ab} = F(a, b, u, u_a, u_b). \quad (5)$$

Diese Gleichung ist reell im hyperbolischen Fall (1. Normalform). Sie kann durch die Substitution

$$a = \xi + \eta, \quad b = \xi - \eta$$

übergeführt werden in die ebenfalls für  $\Delta < 0$  reelle (2. Normalform):

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \quad (6)$$

Im elliptischen Falle ( $\Delta > 0$ ) erhält man aus (5) durch die Substitution

$$a = \xi + i\eta, \quad b = \xi - i\eta$$

die reelle Normalform

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \quad (7)$$

Im parabolischen Falle ( $\Delta = 0$ ) wird endlich  $a \equiv b$ . Man setzt

$$a = b = \xi, \quad \eta = \text{beliebige Funktion von } x, y.$$

Dann wird die Normalform

$$u_{\xi\xi} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \quad (8)$$



### b) Methode der Separation der Variablen.

Zur Zurückführung linearer homogener partieller Differentialgleichungen in zwei oder mehr unabhängigen Variablen  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  auf gewöhnliche Differentialgleichungen erweist sich oft der Ansatz als geeignet

$$u = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots \cdot f_n(x_n). \quad (1)$$

In vielen Fällen ist es auch erforderlich, von den Variablen  $x_i$  zunächst zu einem anderen Variablensystem  $x'_i = x'_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  überzugehen, und in diesen Variablen den Ansatz (1) zu versuchen. Durch lineare Kombination der Partikulärlösungen der Form (1) findet man dann die vollständige Lösung.

Dies Verfahren führt zum Ziele, wenn es möglich ist, die Differentialgleichung durch Einsetzen von (1) auf die Form zu bringen (z. B. durch Division mit  $f_2 f_3 \dots f_n$ ):

$$\Phi_1 \left( x_1, \frac{df_1}{dx_1}, \frac{d^2 f_1}{dx_1^2} \right) + \Phi_2 \left( x_2, x_3, \dots, x_n, \frac{df_2}{dx_2}, \dots \right) = 0, \quad (2)$$

d. h. auf eine solche, daß die Gleichung in zwei Summanden zerfällt, von denen der eine  $\Phi_1$  die eine unabhängige Variable, z. B.  $x_1$ , allein enthält, während im anderen  $x_1$  nicht vorkommt. Da diese Gleichung für beliebige Werte von  $x_1$  gelten soll, muß  $\Phi_1$  gleich einer Konstanten sein.

Wir setzen daher  $\Phi_1 = \text{const} = -\Phi_2$ . Die erste Gleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung, die zweite sucht man analog wie die ursprüngliche weiter zu zerlegen.

Als Beispiel betrachten wir die Gleichung (vgl. unten 8, b)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda^2 u = 0.$$

Wir setzen  $u = P(\varrho) \Phi(\varphi) Z(z)$  und setzen ein:

$$P'' \cdot \Phi \cdot Z + \frac{P'}{\varrho} \cdot \Phi \cdot Z + \frac{1}{\varrho^2} \Phi'' \cdot P \cdot Z + P \Phi Z'' + \lambda^2 P \Phi Z = 0$$

oder

$$\frac{P''}{P} + \frac{P'}{\varrho P} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{Z''}{Z} + \lambda^2 = 0.$$

Es wird also:

$$\frac{Z''}{Z} = -k^2, \quad Z = e^{\pm i k z}$$

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -m^2, \quad \Phi = e^{\pm i m \varphi}$$

$$\frac{P''}{P} + \frac{P'}{\varrho P} - \frac{m^2}{\varrho^2} - k^2 + \lambda^2 = 0, \quad P = Z_m(\varrho \sqrt{\lambda^2 - k^2}) \quad (\text{vgl. S. 67}),$$

also

$$u = e^{\pm i(kx \pm m\varphi)} Z_m(\varrho \sqrt{\lambda^2 - k^2}),$$

wo  $k$  und  $m$  beliebige Konstanten sind.

Weitere partikuläre Lösungen sind auch Ausdrücke der Form:

$$\frac{\partial u}{\partial k}, \frac{\partial u}{\partial m}, \int u \psi(k) dk \text{ usw.}$$

Mit Hilfe dieser Methode findet man z. B. Lösungen von folgenden Differentialgleichungen:

1. Grundgleichung der Funktionentheorie (LAPLACESche Gleichung):

$$\Delta V = 0 \text{ in der Ebene }^1.$$

a)  $x_1 = x, \quad x_2 = y; \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$

Partikuläre Lösung:  $V_k = e^{\pm k(x \pm iy)}$

$$V_0 = (a_1 x + a_2)(b_1 y + b_2)$$

bzw.

$$V = f_1(x + iy) + f_2(x - iy).$$

b)  $x_1 = \varrho, \quad x_2 = \varphi; \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0.$

Partikuläre Lösung:  $V_k = \varrho^{\pm k} e^{i k \varphi}$

$$V_0 = a_1 + a_2 \ln \varrho.$$

2. Grundgleichung der Potentialtheorie:

$$\Delta V = 0 \text{ im Raume.}$$

a)  $x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z; \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$

Partikuläre Lösung:  $V_{klm} = e^{(kx + ly + mz)}$ , wo  $k^2 + l^2 + m^2 = 0.$

b)  $x_1 = \varrho, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = z; \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$

Partikuläre Lösung<sup>2</sup>:  $V_{km} = e^{\pm i(kz \pm m\varphi)} Z_m(ik\varrho)$

$$V_{0m} = (a_1 z + a_2) \varrho^m e^{\pm im\varphi}$$

$$V_{k0} = e^{\pm ikz} (b_1 \varphi + b_2) Z_0(ik\varrho)$$

$$V_{00} = (a_1 z + a_2) (b_1 \varphi + b_2) (c_1 + c_2 \ln \varrho).$$

c)  $x_1 = r, \quad x_2 = \vartheta, \quad x_3 = \vartheta;$

$$r^2 \Delta V = \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0.$$

<sup>1</sup> Die inhomogene Gleichung  $\Delta V = a$  wird gelöst durch  $V = V_1 + V_2$ , wo  $\Delta V_1 = 0$ ,  $\Delta V_2 = a$  bei z. B.  $V_2 = \frac{a}{2} x^2$  oder  $\frac{a}{2} y^2$  oder  $\frac{a r^2}{4}$ .

<sup>2</sup>  $Z_m$  bedeutet eine Zylinderfunktion  $m$ -ter Ordnung (vgl. S. 67).

Partikuläre Lösung<sup>1,2</sup>:

$$V_n = (a_1 r^n + a_2 r^{-(n+1)}) Y_n(\vartheta, \varphi)$$

$$\text{bzw. } V_{nk} = (a_1 r^n + a_2 r^{-(n+1)}) e^{\pm i k \varphi} P_n^k(\cos \vartheta).$$

3. Gleichung eindimensionaler Diffusions- und Wärmeleitvorgänge ( $y = \text{Zeit}$ ):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = a \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$V_k = e^{\pm i k x - \frac{k^2}{a} y}$$

$$V_0 = a_1 x + a_2.$$

4. Eindimensionale Wellengleichung ( $y = \text{Zeit}$ ,  $1/a = \text{Fortpflanzungsgeschwindigkeit}$ ):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \quad (\text{vgl. 1 a}).$$

$$V_k = e^{\pm k(x \pm a y)} \quad \text{bzw. } V = f_1(x + a y) + f_2(x - a y)$$

$$V_0 = (a_1 x + a_2)(b_1 y + b_2).$$

5. Gleichung der eindimensionalen gedämpften Welle:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + a \frac{\partial V}{\partial x} = b^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2},$$

$$V_k = e^{-\frac{a}{2} x \pm \frac{i k y}{b} \pm x \sqrt{\frac{a^2}{4} - k^2}}$$

$$V_0 = (a_1 + a_2 e^{-a x})(b_1 y + b_2).$$

6. Gleichung der Wärmeleitung in drei Dimensionen:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = a \frac{\partial V}{\partial t}; \quad V_{\alpha, \beta, \gamma} = e^{+(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)t \pm (\alpha x \pm \beta y \pm \gamma z)} V^a.$$

7. Gleichung stehender Wellen (Schwingungsgleichung) in der Ebene:

$$\Delta V + \lambda^2 V = 0.$$

a)  $x_1 = x, \quad x_2 = y; \quad \Delta V + \lambda^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \lambda^2 V = 0.$

$$V_{k\alpha} = e^{\pm x \sqrt{k^2 - \alpha^2 \lambda^2} + i y \sqrt{k^2 + (1 - \alpha^2) \lambda^2}}$$

<sup>1</sup>  $Y_n$  bedeutet eine Kugelfunktion  $n$ -ter Ordnung (vgl. S. 64).

<sup>2</sup>  $P_n^k$  bedeutet eine zugeordnete Kugelfunktion (vgl. S. 67).

$$V_{0\alpha} = e^{\pm i\gamma\alpha x + i\lambda y\sqrt{1-\alpha^2}} \text{ (bzw. } = e^{\pm i(m x + n y)}, \text{ wo } m^2 + n^2 = \lambda^2)$$

$$V_{k0} = e^{\pm kx + iy\sqrt{k^2 + \lambda^2}}$$

$$V_{00} = (a_1 x + a_2) e^{i\lambda y}.$$

b)  $x_1 = \varrho, \quad x_2 = \varphi$

$$V_k = e^{ik\varphi} Z_k(\lambda\varrho)$$

$$V_0 = (a_1\varphi + a_2) Z_0(\lambda\varrho).$$

8. Schwingungsgleichung im Raume:

$$\Delta V + \lambda^2 V = 0.$$

a)  $x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z;$

$$V_{lm} = e^{i(kx + ly + mz)}, \quad \text{wo } \lambda^2 = k^2 + l^2 + m^2.$$

b)  $x_1 = \varrho, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = z;$

$$V_{km} = e^{\pm i(kz + m\varphi)} Z_m(\varrho\sqrt{\lambda^2 - k^2}).$$

c)  $x_1 = r, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = \vartheta;$

$$V_n = \frac{1}{\sqrt{r}} Z_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) Y_n(\vartheta, \varphi) \text{ (vgl. 2).}$$

## D. Lineare Probleme<sup>1</sup>.

### 1. Allgemeines.

#### a) Homogene und inhomogene Probleme.

Ist  $L(\dots)$  ein linearer Differentialoperator, so möge die vorgelegte Gleichung lauten

$$L(u) + \lambda\varrho u = V(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1)$$

wo  $\lambda$  ein Parameter ist und  $\varrho$  und  $V$  vorgegebene Funktionen sind.

Die Randbedingungen heißen homogen, wenn für  $V = 0$  das zugehörige Problem homogen ist (vgl. S. 170). In allen anderen Fällen heißen sie inhomogen. Ein inhomogenes Problem liegt also vor, 1. wenn  $V \neq 0$  und die Randbedingungen inhomogen sind, 2. wenn  $V$  nicht verschwindet und die Randbedingungen beliebig (homogen oder inhomogen) sind. Die inhomogenen Probleme der verschiedenen Typen lassen sich oft ineinander überführen.

Besonders wichtige Typen *homogener* Randbedingungen sind solche, bei denen gefordert wird, daß  $u = 0$  ( $u$  bedeutet:  $u$  am Rande des Grundgebietes), oder daß erste oder höhere Ableitungen von  $u$  auf dem Rande

<sup>1</sup> Vgl. Vorbemerkung zu C, S. 189.

verschwinden, oder daß Linearkombinationen von  $u$  und seinen Ableitungen auf dem Rande verschwinden.

Die wichtigsten *inhomogenen* Fälle liegen vor, wenn solche Ausdrücke als Funktionen  $f_i$  des Ortes auf dem Rande vorgegeben sind.

Jedem inhomogenen Problem kann eindeutig ein homogenes Problem zugeordnet werden, nämlich  $V = 0$ ,  $f_i = 0$ .

### b) Alternativsatz

(vgl. S. 80f., lineare Gleichungen und S. 209, Integralgleichungen).

Ein inhomogenes Problem besitzt *entweder* eine und nur eine Lösung, wenn das zugehörige homogene Problem nur die triviale Lösung  $u = 0$  hat. *Oder* aber das homogene Problem besitzt eine oder mehrere nicht-triviale Lösungen (Eigenlösungen), dann ist das inhomogene nur bedingt lösbar. Im Falle einer inhomogenen Gleichung mit homogenen Randbedingungen ist die Lösbarkeitsbedingung

$$\int_{(G)} \dots \int V(x_1, x_2, \dots, x_n) \hat{u}_i(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (2)$$

wobei  $\hat{u}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) alle Lösungen der homogenen Gleichung für die gleichen Randbedingungen bedeutet. Solche Eigenlösungen existieren i. a. nur für bestimmte Werte von  $\lambda$  (*Eigenwerte*  $\lambda = \lambda_n$  mit  $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Die Bestimmung der Lösung des homogenen Problems ist daher untrennlich mit dem Aufsuchen der Eigenwerte verknüpft.

### c) Allgemeine Methodik.

Um die Behandlung eines Problems vorzubereiten, ist oft eine geeignete Transformation der unabhängigen Variablen (*Koordinatenwahl*) erforderlich. Allgemeine Regeln hierfür lassen sich nicht angeben. Zum Ziele führen häufig die beiden Gesichtspunkte:

1. Die Differentialgleichung *separierbar* zu machen.
2. Auf dem Rande des Grundgebietes eine unabhängige Variable konstant werden zu lassen, d. h. den *Rand als Koordinatenfläche* zu wählen.

### d) GREENSche Formel.

Es sei

$$L(u) = A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + F u \quad (3)$$

ein linearer Differentialausdruck, dessen Koeffizienten gegebene Funktionen von  $x, y$  seien. Der adjungierte Ausdruck lautet:

$$M(v) = (Av)_{xx} + 2(Bv)_{xy} + (Cv)_{yy} - (Dv)_x - (Ev)_y + Fv. \quad (4)$$

Ferner sei ein Grundgebiet  $G$  in der  $x, y$ -Ebene gegeben mit der Randkurve  $\Gamma$ ,  $s$  sei die Bogenlänge auf  $\Gamma$ ,  $n$  die Normale auf  $\Gamma$  nach innen. Wir definieren eine Richtung  $n'$  („*Konormale*“) durch

$$\left. \begin{aligned} A \cos(n, x) + B \cos(n, y) &= P \cos(n', x) \\ B \cos(n, x) + C \cos(n, y) &= P \cos(n', y) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

woraus man  $P$  bestimmt mit Hilfe von

$$\cos^2(n', x) + \cos^2(n', y) = 1.$$

Ferner definieren wir auf dem Rande  $\Gamma$  die „adjungierte Funktion“:

$$Q = (A_x + B_y - D) \cos(n, x) + (B_x + C_y - E) \cos(n, y), \quad (6)$$

die für selbstadjungierte Differentialausdrücke verschwindet. Dann gilt die GREENSche Formel:

$$\int_G \int \{v L(u) - u M(v)\} dx dy = \int_\Gamma \left\{ P \left( u \frac{\partial v}{\partial n'} - v \frac{\partial u}{\partial n'} \right) + Quv \right\} ds. \quad (7)$$

Die Formel läßt sich leicht auf mehr als zwei unabhängige Variable verallgemeinern. An Stelle der Gleichungen (1) bis (5) treten dann die folgenden:

$$L(u) = \sum_i \sum_k A_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_i B_i u_{x_i} + Fu \quad (A_{ik} = A_{ki}) \quad (3')$$

$$M(v) = \sum_i \sum_k (A_{ik} v)_{x_i x_k} - \sum_i (B_i v)_{x_i} + Fv. \quad (4')$$

$$\sum_k A_{ik} \cos(n, x_k) = P \cos(n', x_i) \quad (5')$$

$$Q = \sum_k \cos(n, x_k) \left[ \sum_i (A_{ik})_{x_i} - B_k \right] \quad (6')$$

$$\left. \begin{aligned} \int_G \int \{v L(u) - u M(v)\} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ = \int_\Gamma \left\{ P \left( u \frac{\partial v}{\partial n'} - v \frac{\partial u}{\partial n'} \right) + Quv \right\} dS \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

( $dS$  = Flächenelement der Begrenzung  $\Gamma$  des Grundgebietes  $G$ ).

## 2. Homogene Probleme zweiter Ordnung.

### a) Eindimensionaler Fall.

Es sei die Differentialgleichung vorgelegt

$$L(u) + \lambda u = 0. \quad (1)$$

Ist  $L(u)$  ein linearer Differentialoperator zweiter Ordnung, so kann man ihn stets selbstadjungiert machen (vgl. S. 174). Die Gleichung nimmt dann die etwas allgemeinere Gestalt an:

$$L(u) + \lambda \rho(x) u = 0, \quad L(u) = (Pu')' - Qu. \quad (2)$$

Ein zu (2) gehöriges homogenes Problem mit *endlichem* Grundgebiet  $G$  und in  $G$  und auf dem Rande von  $G$  regulären Koeffizientenfunktionen besitzt stets eine abzählbar unendliche Menge diskreter Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  mit Eigenfunktionen  $u_1, u_2, \dots$ , die ein *vollständiges Orthogonalsystem* bilden, das wir stets als auf 1 *normiert* annehmen können:

$$\int \rho u_i u_k dx = \delta_{ik}. \quad (3)$$

Daher läßt sich jede den Randbedingungen des Problems genügende Funktion nach den Eigenfunktionen entwickeln (vgl. S. 23).

Das Problem heißt ein STURM-LIOUVILLESCHES, wenn außer den bisher gemachten Voraussetzungen folgende Randbedingungen befriedigt werden sollen (Grundgebiet  $a \leq x \leq b$ ):

1.  $u(a) = 0$  und  $u(b) = 0$ , oder
2.  $u'(a) = 0$  und  $u'(b) = 0$ , oder
3.  $\alpha \cdot u(a) = u'(a)$  und  $-\beta \cdot u(b) = u'(b)$  ( $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ).

Hierbei sollen auch  $P$  und  $\rho$  positiv sein im Grundgebiet. Bei den so formulierten Problemen sind alle Eigenwerte einfach (nichtentartet) und positiv.

Wird das *Grundgebiet unendlich groß* oder haben die Koeffizienten der Differentialgleichung auf dem Rande des Grundgebietes *Singularitäten*, so können außer diskreten (*Punktspektren*) auch kontinuierliche Verteilungen der Eigenwerte (*Streckenspektren*) auftreten (z. B. bei dem SCHRÖDINGERSCHEN Problem, Anhang, 13 u. 14).

Zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenfunktionen empfiehlt sich oft die folgende Methode. Man setzt an

$$u = \varphi(x)F(x), \quad (4)$$

wobei man die Funktion  $\varphi(x)$  so zu bestimmen sucht, daß  $F(x)$  ein Polynom oder eine ganze Transzendente (für  $n \rightarrow \infty$ )

$$F(x) = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n \quad (5)$$

mit konstanten  $\alpha_i$  wird (*Polynommethode*). Die Funktion  $\varphi(x)$  muß also insbesondere das Verhalten von  $u$  in der Umgebung seiner Singularitäten richtig wiedergeben. Verschwinden von  $u$  für  $x = \pm \infty$  erreicht man oft durch geeignete Exponentialfaktoren. Einsetzen von (4) in (1) gibt eine Differentialgleichung für  $F(x)$ , in die man dann mit dem Ansatz (5) eingeht. Erhält man auf diese Weise eine *zweigliedrige Rekursionsformel* für die  $\alpha_i$ , so führt das Verfahren unmittelbar zum Ziele. Man erhält ein Polynom  $n$ -ten Grades durch die Forderung  $\alpha_{n+1} = 0$ ; diese Forderung dient (für jeden Wert von  $n$ ) als Bestimmungs-gleichung für den betreffenden Eigenwert  $\lambda = \lambda_n$ . Erhält man eine

*mehrgliedrige* Rekursion, so hat man im Falle eines Polynoms  $n$ -ten Grades ein lineares Gleichungssystem mit den  $n$  Unbekannten  $\alpha_i$  aufzulösen.

Beispiel:

$$u'' + (1 - x^2)u + \lambda u = 0. \quad (6)$$

Randbedingungen:  $u = 0$  für  $x = \pm \infty$ .

Die Randbedingungen legen den Ansatz nahe

$$\varphi(x) = e^{-\beta x^2}.$$

Er erfüllt asymptotisch für große  $|x|$  die Differentialgleichung, wenn  $\beta = 1/2$  gewählt wird. Damit wird

$$F'' - 2x F' + \lambda F = 0.$$

Hierin den Ausdruck (5) eingesetzt, ergibt als Faktor von jedem  $x^i$ :

$$(i+2)(i+1)\alpha_{i+2} - 2i\alpha_i + \lambda\alpha_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots n)$$

oder

$$\alpha_{i+2} = \alpha_i \frac{2i - \lambda}{(i+1)(i+2)}. \quad (7)$$

Aus  $\alpha_{n+2} = 0$  folgt  $2n = \lambda_n$  für den  $n$ -ten Eigenwert mit  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Die Eigenfunktionen können aus (7) abgelesen werden. Es sind die HERMITESCHEN Orthogonalfunktionen (vgl. S. 59)

$$u_n = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x).$$

#### b) Mehrdimensionaler Fall.

Die Gleichung (1) kann auch dann noch stets in selbstadjungierte Form gebracht werden, wenn

$$L(u) = \sum_i \sum_k A_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_i B_i u_{x_i} + C u$$

mit zweimal differenzierbaren Koeffizientenfunktionen  $A_{ik}$ ,  $B_i$ ,  $C$ . Die Gleichung besitzt dann die Form

$$L(u) + \lambda \varrho u = 0$$

mit

$$\sum_k (A_{ik})_{x_k} = B_i.$$

Die Eigenfunktionen bilden ebenfalls ein vollständiges Orthogonalsystem:

$$\int \int_G \dots \int \varrho(x_1, x_2, \dots, x_n) u_i u_k dx_1 dx_2 \dots dx_n = \delta_{ik}.$$



c) Formelschatz.

	Gleichung	Grundgebiet	Randbedingungen	Eigenwerte $\lambda_n$	Eigenfunktionen $u_n$
1.	$[(1-x^2)u']' + \lambda u = 0$ $(1-x^2)u'' - 2xu' + \lambda u = 0$	$-1 \leqq x \leqq +1$	$u(\pm 1)$ endl.	$n(n+1)$	$P_n(x)$ (Kugelfunktionen, vgl. S. 60)
2.	$[(1-x^2)u']' - \frac{m^2 u}{1-x^2} + \lambda u = 0$	$-1 \leqq x \leqq +1$	$u(\pm 1)$ endl.	$n(n+1)$ $n \geqq m$	$P_n^m(x)$ (zugeordn. Kugelfunktionen, vgl. S. 66)
3.	$(\sqrt{1-x^2}u')' + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}u = 0$ $(1-x^2)u'' - xu' + \lambda u = 0$	$-1 \leqq x \leqq +1$	$u(\pm 1)$ endl.	$n^2$	$T_n(x)$ (TSCHEBYSCHEFF-Polynome, S. 55)
4.	$[x^q(1-x)^{p-q+1}u']' + \lambda(1-x)^{p-q}x^{q-1}u = 0$ $x(1-x)u'' + [q-(p+1)x]u' + \lambda u = 0$	$-1 \leqq x \leqq +1$	$u(\pm 1)$ endl.	$(p+n)n$	$F(p+n, -n, q, x)$ (JACOBISCHE Polynome, d. h. abbrechende hypergeometrische Reihen, vgl. S. 57)
5.	$(xe^{-x}u')' + \lambda e^{-x}u = 0$ $xu'' + (1-x)u' + \lambda u = 0$	$0 \leqq x \leqq +\infty$	$u(0)$ endl. Normierbarkeit	$n$	$L_n(x)$ (LAGUERRE-Polynome, S. 57)
6.	$(xu')' + \left(\frac{1-x}{2}\right)u + \lambda u = 0$	$0 \leqq x \leqq +\infty$	$u(0)$ endl. Normierbarkeit	$n$	$e^{-\frac{x}{2}}L_n(x)$
7.	$(x^{m+1}e^{-x}u')' + x^m e^{-x}(\lambda - m)u = 0$ $xu'' + (m+1-x)u' + (\lambda - m)u = 0$	$0 \leqq x \leqq +\infty$	$u(0)$ endl. Normierbarkeit	$n$ $n \geqq m$	$L_n^m(x)$ (LAGUERRE-Polynome $m$ -ter Ordnung, vgl. S. 58)
8.	$(xu')' + \left(\frac{1-m-x}{2} - \frac{x}{4} - \frac{m^2}{4x}\right)u + \lambda u = 0$	$0 \leqq x \leqq +\infty$	$u(0)$ endl. Normierbarkeit	$n$	$e^{-\frac{x}{2}}L_n^m(x)$
9.	$(e^{-x^2}u')' + \lambda e^{-x^2}u = 0$ $u'' - 2xu' + \lambda u = 0$	$-\infty \leqq x \leqq +\infty$	Normierbarkeit	$2n$	$H_n(x)$ (HERMITE-Polynome, S. 59)
10.	$u'' + (1-x^2)u + \lambda u = 0$	$-\infty \leqq x \leqq +\infty$	Normierbarkeit	$2n$	$e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)$

$m, n = 0, 1, 2, \dots$  Von den angegebenen Differentialgleichungen hat jeweils die erste selbstadjungierte Form; der Vermerk „Normierbarkeit“ bedeutet, daß

$$\int \varrho \cdot u_n^2 dx,$$

erstreckt über das Grundgebiet, existiert. Die Funktionen  $v_n = \sqrt{\varrho} \cdot u_n$  bilden ein vollständiges Orthogonalsystem mit

$$\int v_n v_m dx = \delta_{nm} \cdot \int v_n dx.$$

### 3. Randwertprobleme elliptischer Gleichungen.

#### a) Inhomogene Gleichung mit homogenen Randbedingungen.

$$L(u) + \lambda \varrho u = V.$$

Man bestimme zunächst die Eigenfunktionen  $u_i$  und Eigenwerte  $\lambda_i$  des homogenen Problems  $V = 0$  mit denselben Randbedingungen. Sie bilden ein vollständiges Orthogonalsystem, wenn der Ausdruck  $L(u)$  selbstadjungiert ist. Man setzt die Lösung der inhomogenen Gleichung als Reihenentwicklung nach diesem Orthogonalsystem an:

$$u = \sum_i c_i u_i,$$

und bestimmt die Koeffizienten  $c_i$ . Dies kann z. B. geschehen, indem man  $V/\varrho$  auch nach dem Orthogonalsystem  $\{u_i\}$  entwickelt:

$$V = \sum_i k_i \varrho \cdot u_i, \quad k_i = \int V u_i dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Dann gilt wegen

$$\sum_i c_i \varrho (\lambda - \lambda_i) u_i = V$$

die Beziehung

$$c_i = \frac{k_i}{\lambda - \lambda_i}.$$

Das Verfahren versagt, wenn  $\lambda$  ein Eigenwert ist; vgl. hierzu Alternativsatz (S. 196).

**b) Homogene Gleichung mit inhomogenen Randbedingungen.** Man unterscheidet folgende Standardaufgaben:

1. Randwertaufgabe: Auf dem Rande des Gebietes sei  $u = \bar{u} = f$  eine vorgegebene Funktion.
2. Randwertaufgabe: Es sei  $\frac{\partial u}{\partial n} = f$  auf dem Rande vorgegeben.
3. Randwertaufgabe: Die Linearkombination  $\alpha \bar{u} + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = f$  sei auf dem Rande vorgegeben.

**Methode der GREENSchen Funktion.** Zur Lösung der 1. Randwertaufgabe für die Gleichung

$$L(u) + \lambda u = u_{xx} + u_{yy} + a u_x + b u_y + (c + \lambda) u = 0$$

benutzen wir die GREENSche Formel (S. 196). Für  $v$  wählen wir eine „GREENSche Funktion“, die durch folgende Eigenschaft definiert ist: Sie besitzt an der Stelle  $x = \xi$ ,  $y = \eta$  im Innern des Gebietes eine logarithmische Singularität, und zwar wird dort

$$v(x, y, \xi, \eta) = -\ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} + \text{reguläre Glieder.}$$

Sie genügt an jeder anderen Stelle der Differentialgleichung  $M(v) = 0$ . Sie genügt schließlich der homogenen Randbedingung  $\bar{v} = 0$ . Eine solche Funktion existiert stets (HILBERT). Die Lösung lautet dann:

$$2\pi u(\xi, \eta) = \oint ds \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \right).$$

Das Verfahren läßt sich auch auf mehr als zwei unabhängige Variable verallgemeinern. Statt der logarithmischen Singularität besitzt die GREENSche Funktion dann einen Pol  $(n-2)$ -ter Ordnung ( $n > 2$ ) an der Stelle  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ .

**Reduktion auf Integralgleichungen.** Wir erläutern die Methode an der *Potentialgleichung*

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \quad (1)$$

Es sei  $F$  eine geschlossene, einfach zusammenhängende Fläche. „Aufpunkt“  $P$  heißt der Punkt, in welchem  $u$  gesucht ist;  $Q$  („Quellpunkt“) sei ein Punkt auf  $F$ . Oberflächenelement von  $F$  in  $Q$ :  $dF_Q$ . Nähert sich  $P$  dem Punkte  $Q$  von außen, so geht  $u \rightarrow (u_Q)_a$ , von innen, so geht  $u \rightarrow (u_Q)_i$ .

Lautet die Randbedingung

$$\alpha (u_Q)_i + \beta (u_Q)_a = f(Q) \quad (1. \text{ Randwertaufgabe}), \quad (2)$$

so verteilen wir eine *Doppelbelegung* vom Momente  $\mu(Q)$  (vgl. S. 121) auf  $F$ , d. h. wir setzen an:

$$u(P) = \int_F \frac{\partial}{\partial n_Q} \left( \frac{1}{r_{PQ}} \right) \cdot \mu(Q) dF_Q.$$

Legen wir speziell  $P \rightarrow Q'$  auf  $F$ , so wird

$$u(Q') = (u_{Q'})_i - 2\pi\mu(Q') = (u_{Q'})_a + 2\pi\mu(Q'), \quad (4)$$

so daß entsteht

$$f(Q') = 2\pi(\alpha - \beta)\mu(Q') + (\alpha + \beta) \int_F \frac{\partial}{\partial n_Q} \left( \frac{1}{r_{Q'Q}} \right) \mu(Q) dF_Q. \quad (5)$$

Das ist eine Integralgleichung 2. Art für das Moment  $\mu(Q)$ :

$$\frac{f(Q')}{2\pi(\alpha - \beta)} = g(Q') = \mu(Q') - \lambda \int_F K(Q', Q) \mu(Q) dF_Q$$

mit dem unsymmetrischen Kern

$$K(Q', Q) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_Q} \left( \frac{1}{r_{Q'Q}} \right) \quad \text{und} \quad \lambda = -\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}. \quad (6)$$

$\lambda = -1$  ( $\beta = 0$ ) ist kein Eigenwert; d. h. im Innenraum hat die 1. Randwertaufgabe stets eine eindeutige Lösung.  $\lambda = +1$  ( $\alpha = 0$ ) ist Eigenwert des Kerns; eine Lösung im Außenraum besteht daher nur unter einschränkenden Bedingungen.

Analog erhält man bei der Randbedingung

$$\alpha \left( \frac{\partial u_Q}{\partial n} \right)_i + \beta \left( \frac{\partial u_Q}{\partial n} \right)_a = f(Q) \quad (2. \text{ Randwertaufgabe}) \quad (7)$$

mit dem Lösungsansatz

$$u(P) = \int_F \frac{1}{r_{PQ}} \varrho(Q) dF_Q \quad (8)$$

(einfache Belegung der Fläche  $F$ ) die Integralgleichung

$$f(Q') = -2\pi(\alpha - \beta) \varrho(Q') + (\alpha + \beta) \int_F \frac{\partial}{\partial n_Q} \left( \frac{1}{r_{QQ'}} \right) \varrho(Q) dF_Q \quad (9)$$

oder

$$-\frac{f(Q')}{2\pi(\alpha - \beta)} = g(Q') = \varrho(Q') - \lambda \int_F K(Q, Q') \varrho(Q) dF_Q,$$

wobei

$$\lambda = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \quad (10)$$

und  $K$  derselbe Kern wie in (6) ist mit vertauschten Argumenten. Auch hier ist  $\lambda = -1$  ( $\alpha = 0$ ) kein Eigenwert, d. h. im Außenraum hat die 2. Randwertaufgabe stets eine Lösung;  $\lambda = +1$  ( $\beta = 0$ ) ist Eigenwert, also besteht im Innenraum nur unter einschränkenden Bedingungen eine Lösung ( $\int_F f(Q) dF_Q = 0$ ).

Die 3. Randwertaufgabe läßt sich mit Hilfe einer Linearkombination der Ansätze (3) und (8) behandeln.

Für die zweidimensionale LAPLACESche Gleichung

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

gilt das entsprechende, nur hat man in (3) und (8) statt  $\frac{1}{r}$  (NEWTONSches Potential)  $\ln r$  (logarithmisches Potential) einzuführen, und den Faktor  $2\pi$  überall durch  $\pi$  zu ersetzen. Der Ausdruck  $\frac{\partial}{\partial n_Q} (\ln r_{PQ}) ds_Q$  (wobei  $s$  die Bogenlänge auf der Randkurve ist) kann geometrisch gedeutet werden als der Gesichtswinkel, unter dem  $ds$  von  $P$  aus gesehen erscheint.

**Zwei wichtige Spezialfälle** (POISSONSche Integralformeln):

1.  $\Delta u = 0$  in der Ebene; auf dem Kreis  $r = R$  soll  $u(R, \varphi) = F(\varphi)$  werden. Lösung:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\Phi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\varphi - \Phi) + r^2} d\Phi.$$

2.  $\Delta u = 0$  im Raume; auf der Kugel  $r = R$  soll  $u(R, \varphi, \vartheta) = F(\varphi, \vartheta)$  werden. Lösung:

$$u(r, \varphi, \vartheta) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F(\Phi, \Theta) \frac{R^2 - r^2}{(R^2 - 2rR \cos \gamma + r^2)^{3/2}} \sin \Theta d\Theta d\Phi,$$

wobei

$$\cos \gamma = \cos \Theta \cos \vartheta + \sin \Theta \sin \vartheta \cos(\Phi - \varphi)$$

ist.

#### 4. Anfangswertprobleme hyperbolischer Gleichungen.

$$R u_{xx} + 2S u_{xy} + T u_{yy} = V(x, y, u, u_x, u_y). \quad (1)$$

Längs einer Kurve  $x = x(\tau)$ ,  $y = y(\tau)$  in der  $x, y$ -Ebene, die jede Charakteristik von (1) nur einmal trifft<sup>1</sup> (Parameter  $\tau$ , etwa die Bogenlänge;  $\frac{du}{d\tau} = u'$  usw.) seien vorgegeben:

$$u(\tau) = F(\tau) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = G(\tau) \quad (\text{„Anfangsstreifen“}). \quad (2)$$

Man berechnet der Reihe nach die sämtlichen ersten und höheren Ableitungen von  $u$  nach  $x$  und  $y$  im Streifen wie folgt:

1. Ableitungen:

$$u_x x' + u_y y' = F'$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -u_x \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} + u_y \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = G.$$

Aus diesen Gleichungen können  $u_x = p(\tau)$  und  $u_y = q(\tau)$  bestimmt werden, da die Determinante = 1 ist.

2. Ableitungen:

$$p' = u_{xx} x' + u_{xy} y'$$

$$q' = u_{xy} x' + u_{yy} y'$$

$$V = u_{xx} R + u_{xy} 2S + u_{yy} T.$$

Hieraus findet man  $u_{xx} = r(\tau)$ ,  $u_{xy} = s(\tau)$ ,  $u_{yy} = t(\tau)$ , wenn die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & 0 \\ 0 & x' & y' \\ R & 2S & T \end{vmatrix} = T x'^2 - 2S x' y' + R y'^2$$

nicht verschwindet<sup>1</sup>. Für  $\Delta \neq 0$  lassen sich auch die höheren Ableitungen durch Fortsetzen des Verfahrens sukzessive bestimmen, z. B. erhält man die 3. Ableitungen aus den entsprechenden Gleichungen für  $r'$ ,  $s'$ ,  $t'$ ,  $V_x$  oder  $V_y$ . Es tritt dann immer wieder dieselbe Determinante  $\Delta$  auf.

<sup>1</sup> Insbesondere darf also z. B. die Anfangskurve nicht geschlossen sein, eine Charakteristik berühren oder selbst Charakteristik sein.

Aus der Kenntnis sämtlicher Ableitungen längs des Anfangsstreifens folgt die Möglichkeit, die Lösung  $u$  in Form einer TAYLOR-Entwicklung aufzubauen.

**RIEMANNSCHE Integrationsmethode.** Die Differentialgleichung sei auf die Normalform gebracht

$$L(u) = u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0;$$

sie hat dann die Charakteristiken  $x = \text{constans}$ ,  $y = \text{constans}$ . Es sei  $\Gamma$  die Anfangskurve, die jede Charakteristik nur *einmal* trifft in dem Gebiet, in dem die Lösung gesucht wird. Sie ist also insbesondere keine geschlossene Kurve. Längs  $\Gamma$  seien  $u$  und  $\frac{\partial u}{\partial n}$  (und damit auch  $\frac{\partial u}{\partial n'}$ ) vorgegeben. Um  $u(\xi, \eta)$  zu finden, ziehe man durch den Punkt  $Q(\xi, \eta)$  die Charakteristiken  $y = \eta$  und  $x = \xi$ , die  $\Gamma$  in  $A$  und  $B$  treffen mögen.

Ferner suche man eine GREENSCHE Funktion  $G(x, y; \xi, \eta)$  derart, daß

1. sie in  $x, y$  überall im Gebiet  $ABQ$  und auf seinen Rändern der adjungierten Differentialgleichung  $M(G) = 0$  genügt,
2. auf  $y = \eta$  wird  $G_x - bG = 0$ ,
3. auf  $x = \xi$  wird  $G_y - aG = 0$ ,
4.  $G(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1$  wird.

Dann gewinnt man die Lösung von  $L(u) = 0$  durch Anwendung der GREENSCHEN Formel auf den Bereich  $ABQ$  und partielle Integration längs der Wege  $AQ$  und  $BQ$ :

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2} [(uG)_A + (uG)_B] + \int_A^B \left[ \frac{1}{2} \left( u \frac{\partial G}{\partial n'} - G \frac{\partial u}{\partial n'} \right) - (a \cos(n, x) + b \cos(n, y)) uG \right] ds.$$

Damit ist  $u$  durch die Werte von  $u$  und  $\frac{\partial u}{\partial n'}$  auf  $\Gamma$  ausgedrückt.

Sind speziell  $a = b = c = 0$ , so kann man  $G(x, y; \xi, \eta) = 1$  wählen.

## E. Störungsprobleme.

### 1. Eindimensionale gestörte Probleme.

Vorgelegt sei die Differentialgleichung

$$L(u) + \lambda \rho u = 0, \tag{1}$$

und irgendwelche homogene Randbedingungen, für die man ein vollständiges System von Eigenfunktionen  $u_i$  zu den Eigenwerten  $\lambda_i$  kennt (vgl. S. 198) mit den Orthogonalitätsrelationen

$$\int \rho u_i u_k dx = \delta_{ik}. \tag{2}$$

Wir betrachten (1) als „*ungestörtes Ausgangsproblem*“ und fragen danach, welche Änderungen an den Eigenwerten und Eigenfunktionen vorzunehmen sind, wenn wir zu dem gestörten Problem übergehen:

$$L(u) + \lambda \varrho u = \varepsilon \cdot s(x) u, \quad (3)$$

mit den gleichen Randbedingungen wie bei (1).  $s(x)$  heißt die Störungsfunktion.  $\varepsilon$  soll eine sehr kleine Zahl sein (*Störungsparameter*), von der wir höhere Potenzen in erster Näherung vernachlässigen dürfen.

Die Ausgangslösung wird auch als „nullte“ Näherung bezeichnet; eine Lösung, in der alle Potenzen von  $\varepsilon$  bis mit  $\varepsilon^m$  berücksichtigt sind, heißt „ $m$ -te Näherung“. Wir beschränken uns im folgenden auf die erste Näherung.

#### a) Einfache Eigenwerte.

Wir setzen

$$\lambda = \lambda_i + \varepsilon \cdot l, \quad u = u_i + \varepsilon \cdot v_i. \quad (4)$$

Dann wird in erster Näherung

$$L(v_i) + \lambda_i v_i = (s - l \varrho) u_i, \quad (5)$$

und dies inhomogene Problem zur Bestimmung von  $v_i$  ist nur lösbar, wenn

$$\int (s - l \varrho) u_i^2 dx = 0, \quad (6)$$

d. h. wegen (2):

$$l = \int s u_i^2 dx. \quad (7)$$

Die gestörte Funktion findet man durch den Ansatz

$$v_i = \sum_k' c_{ik} u_k. \quad (8)$$

Durch Einsetzen in (5) und Anwendung der Operation  $\int u_j \dots dx$ . Es wird:

$$v_i = \sum_j' \frac{\int s u_j u_i dx}{\lambda_i - \lambda_j}. \quad (9)$$

Man kann an Stelle von (4) auch sofort den Ansatz setzen

$$\lambda = \lambda_i + \varepsilon l, \quad u = \sum_k (\delta_{ik} + \varepsilon \cdot c_{ik}) u_k. \quad (4')$$

Dann wird

$$\sum_k c_{ik} (\lambda_i - \lambda_k) \varrho u_k = (s - l \varrho) u_i. \quad (5')$$

Anwendung der Operation  $\int u_j \dots dx$  ergibt:

$$c_{ij} (\lambda_i - \lambda_j) = \int u_j s u_i dx - l \delta_{ij},$$

also für  $i = j$

$$l = \int s u_i^2 dx \quad (7')$$

und sonst

$$c_{ij} = \frac{\int u_j s u_i dx}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad \text{d. h. } u = u_i + \varepsilon \sum_k' \frac{\int u_k s u_i dx}{\lambda_i - \lambda_k}. \quad (9')$$

### b) Mehrfache Eigenwerte.

Die zum Eigenwert  $\lambda_i$  gehörigen  $n$  Eigenfunktionen seien  $u_i^{(\alpha)}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ). Wir setzen an

$$\lambda = \lambda_i + \varepsilon \cdot l_i, \quad u = \sum_{\alpha'} c^{(\alpha')} u_i^{(\alpha')} + \varepsilon \cdot v_i. \quad (10)$$

Es wird dann

$$L(v_i) + \lambda \varrho v_i = \sum_{\alpha'} c^{(\alpha')} (s - l_i \varrho) u_i^{(\alpha')}. \quad (11)$$

Es müssen also die Gleichungen gelten:

$$\sum_{\alpha'} c^{(\alpha')} \int (s - l_i \varrho) u_i^{(\alpha')} u_i^{(\alpha'')} dx = 0, \quad (12)$$

oder, wenn die  $u_i^{(\alpha)}$  von Anfang an als zueinander orthogonal und normiert gewählt werden, was stets möglich ist:

$$\sum_{\alpha'} c^{(\alpha')} (s_i^{(\alpha', \alpha'')} - l_i \delta_{\alpha', \alpha''}) = 0, \quad (13)$$

wobei

$$s_i^{(\alpha', \alpha'')} = \int u_i^{(\alpha'')} s u_i^{(\alpha')} dx = s_i^{(\alpha'', \alpha')}$$

bedeutet. Die homogenen Gleichungen (13) haben Lösungen  $c^{(\alpha')}$ , wenn ihre Determinante verschwindet:

$$\det (s_i^{(\alpha', \alpha'')} - l_i \delta_{\alpha', \alpha''}) = 0 \quad (\text{„Säkulargleichung“}). \quad (14)$$

Hieraus folgen  $n$  Lösungen für die Eigenwertstörung  $l_i^{(\alpha)}$ . Sind alle  $l_i^{(\alpha)}$  untereinander verschieden, so sagt man, die Entartung sei vollständig aufgehoben (der Eigenwert spaltet auf in  $n$  Komponenten). Die zugehörigen „richtigen“ *Linearkombinationen* der Eigenfunktionen  $u_i^{(\alpha)}$  findet man durch Auflösen des Gleichungssystems (13) nach den  $c^{(\alpha')}$ , wobei man für  $l_i$  der Reihe nach alle  $l_i^{(\alpha)}$  einzusetzen hat.

Ist insbesondere  $n = 2$  und  $s_i^{(1,1)} = s_i^{(2,2)}$  (*symmetrische Störung*), so ist

$$l_i^{(1)} = s_i^{(1,1)} + s_i^{(1,2)} \quad \text{und} \quad l_i^{(2)} = s_i^{(1,1)} - s_i^{(1,2)};$$

die zugehörigen Linearkombinationen sind

$$U_i^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_i^{(1)} + u_i^{(2)}) \quad (\text{symmetrische Lösung}),$$

$$U_i^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_i^{(1)} - u_i^{(2)}) \quad (\text{antimetrische Lösung}).$$



## 2. Mehrdimensionale Störungsprobleme.

**Methode der Variation der Konstanten.** Es liege die Differentialgleichung

$$L(\psi) - i \varrho \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

mit homogenen Randbedingungen vor;  $L(\dots)$  soll ein linearer selbst-adjungierter Differentialoperator in den Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sein, für die wir kurz symbolisch  $x$  schreiben wollen. Der Ansatz

$$\psi = u(x) e^{i \lambda t} \quad (2)$$

führt dann auf das Eigenwertproblem

$$L(u) + \lambda \varrho u = 0 \quad (3)$$

mit Eigenfunktionen  $u_i$  und Eigenwerten  $\lambda_i$  und den Beziehungen

$$\int \varrho u_i u_k^* dx = \delta_{ik}. \quad (4)$$

Die ungestörte Ausgangslösung lautet also allgemein

$$\psi = \sum_i c_i u_i(x) e^{i \lambda_i t}. \quad (5)$$

Gefragt wird jetzt nach einer solchen Lösung  $\psi'$  der Gleichung

$$L(\psi') - i \varrho \frac{\partial \psi'}{\partial t} = \varepsilon \cdot V(x) \psi', \quad (6)$$

die die gleichen homogenen Randbedingungen erfüllt und für  $\varepsilon \rightarrow 0$  in (5) übergeht. Geht man mit dem Ansatz

$$\psi' = \sum_i \sum_k C_{ik}(t) u_i e^{i \lambda_k t} \quad (7)$$

in (6) ein, so erhält man nach einfachen Umformungen

$$\frac{d C_{ik}}{dt} = i(\lambda_i - \lambda_k) C_{ik} + i \varepsilon \sum_l C_{lk} V_{li} \quad (8)$$

mit

$$V_{ik} = V_{ki}^* = \int u_k^* V u_i dx.$$

Deutet man  $t$  als Zeit, und  $t = 0$  als den Zeitpunkt, wo die Störung „eingeschaltet“ wird, so kann man genähert für kleine  $t$  setzen:

$$C_{ik} = c_i \delta_{ik} + \varepsilon \cdot \gamma_{ik}(t) \quad \text{mit} \quad \gamma_{ik}(0) = 0. \quad (9)$$

Hiermit erhält man als Lösung des Gleichungssystems (8):

$$\left. \begin{aligned} C_{ii} &= c_i (1 + \varepsilon \cdot i V_{ii} t) \\ C_{ik} &= \varepsilon \cdot \frac{c_k V_{ki}}{\lambda_i - \lambda_k} (e^{i(\lambda_i - \lambda_k)t} - 1) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Zehnter Abschnitt.

**Integralgleichungen.****A. Integralgleichungen zweiter Art.****1. Allgemeiner Sachverhalt.**

a) Die Funktionalgleichung:

$$U(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) U(t) dt = f(x) \quad (\text{J})$$

heißt bei gegebenem  $K(x, y)$  und  $f(x)$  *Integralgleichung zweiter Art* für  $U(x)$ ;  $K(x, y)$  heißt *Kern* der Integralgleichung,  $\lambda$  ist Parameter, die Variablen  $x, y$  seien beschränkt auf das reelle (endliche oder unendliche) Intervall  $(a \dots b)$ , das *Grundgebiet*, über das alle Integrale erstreckt werden. Die vorkommenden Funktionen seien alle reell.

Die folgenden Überlegungen gelten auch bei Integralgleichungen für Funktionen mehrerer Veränderlichen.  $x$  faßt dann die Variablen  $x_1, \dots, x_m$  zusammen, die im Grundgebiet  $G$  variieren; entsprechend  $y, t, s$ .

*Homogene* bzw. *transponierte* Integralgleichung zu (J) heißen:

$$U(x) - \lambda \int K(x, t) U(t) dt = 0, \text{ bzw.} \quad (\text{J}_h)$$

$$\tilde{U}(x) - \lambda \int K(t, x) \tilde{U}(t) dt = f(x). \quad (\tilde{\text{J}})$$

b) Ist  $f(x)$  stetig, existieren die Integrale

$$W = \iint K^2(s, t) ds dt \quad \text{und} \quad \int f^2(t) dt \quad (1)$$

und ist entweder  $K(x, y)$  stückweise stetig (s. S. 34) oder hat  $K(x, y)$  für  $x = \text{const.}$  und  $y = \text{const.}$  je höchstens abzählbar unendlich viele Unstetigkeiten und existieren  $\int K^2(x, t) dt$  und  $\int K^2(t, x) dt$  und sind als Funktionen von  $x$  im Grundgebiet beschränkt, so gelten bei festem  $\lambda$  die folgenden Sätze:

I. Die Anzahl  $\varrho$  der linear unabhängigen Lösungen  $u^{(1)}(x), \dots, u^{(\varrho)}(x)$  von  $(\text{J}_h)$  ist endlich und gleich der Anzahl der linear unabhängigen Lösungen  $\tilde{u}^{(1)}(x), \dots, \tilde{u}^{(\varrho)}(x)$  von  $(\tilde{\text{J}}_h)$ ;  $\varrho$  heißt der *Defekt* des Kerns  $K(x, y)$  für den Wert  $\lambda$ . Die *allgemeine* Lösung von  $(\text{J}_h)$  ist  $c_1 u^{(1)}(x) + \dots + c_\varrho u^{(\varrho)}(x)$  mit beliebigen reellen  $c_i$ .

II. Ist  $\varrho = 0$ , so sind (J) und  $(\tilde{\text{J}})$  bei beliebigem stetigem  $f(x)$  stets eindeutig lösbar. Es existiert ein „*lösender Kern*“  $L(x, y)$ , derart, daß die Lösungen gegeben sind durch

$$U(x) = f(x) + \lambda \int L(x, t) f(t) dt, \quad \tilde{U}(x) = f(x) + \lambda \int L(t, x) f(t) dt. \quad (2)$$

III. Ist  $\varrho > 0$ , so hat (J) dann und nur dann eine Lösung, wenn

$$\int \tilde{w}^{(i)}(t) f(t) dt = 0 \quad (i = 1, \dots, \varrho) \quad (3)$$

gilt. Die *allgemeine* Lösung von (J) ergibt sich aus *einer* Lösung von (J) durch Addition der allgemeinen Lösung von  $(J_k)$ .

Die Auflösung der Integralgleichung (J) ist gleichwertig mit der Lösung des folgenden unendlichen Gleichungssystems (vgl. S. 81):

$$x_i - \lambda \sum_k K_{ik} x_k = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

wobei gesetzt ist:  $(i, k = 1, 2, \dots)$

$$x_i = \int u(t) \omega_i(t) dt, \quad \text{also} \quad \sum_i x_i^2 = \int u^2(t) dt,$$

$$f_i = \int f(t) \omega_i(t) dt, \quad \text{also} \quad \sum_i f_i^2 = \int f^2(t) dt,$$

$$K_{ik} = \iint K(s, t) \omega_i(s) \omega_k(t) ds dt, \quad \sum_{i,k} K_{ik}^2 \leq W,$$

und  $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots$  ein *vollständiges System normierter orthogonaler Funktionen* für das Intervall  $(a \dots b)$  sind.

Der Kern  $K(x, y)$  heißt *symmetrisch*, wenn  $K(x, y) = K(y, x)$  ist.

## 2. Symmetrischer Kern, homogene Gleichung.

a) Unter den in 1b genannten Voraussetzungen ist  $(J_k)$  nur für bestimmte diskrete Werte von  $\lambda, (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots)$ , nichttrivial lösbar (d. h. ist der zugehörige Defekt  $\varrho > 0$ ). Diese Werte  $\lambda_i$  heißen die *Eigenwerte*, die zugehörigen Lösungen  $u_i(x)$  die *Eigenfunktionen (Nulllösungen)* zum Kern  $K(x, y)$ . Für den Defekt  $\varrho$  gilt  $\varrho \leq \lambda^2 \cdot W$ .

b) Jeder symmetrische nichtverschwindende Kern besitzt mindestens einen, höchstens abzählbar unendlich viele Eigenwerte, die sich im Endlichen nicht häufen. Die Eigenwerte eines reellen symmetrischen Kerns sind reell. Im Intervall  $-A \leq \lambda \leq +A$  liegen höchstens  $A^2 \cdot W$  Eigenwerte; es gilt daher

$$\lambda_n^2 \geq \frac{1}{W}. \quad (5)$$

Die zum Eigenwert  $\lambda_n$  gehörenden  $\varrho_n$  linear unabhängigen Eigenfunktionen  $u_n^{(1)}(x), \dots, u_n^{(\varrho_n)}(x)$  lassen sich normiert und zueinander orthogonal annehmen:

$$\int u_n^{(h)}(t) u_n^{(h)}(t) dt = 1, \quad \int u_n^{(h)}(t) u_n^{(j)}(t) dt = 0, \quad h \neq j. \quad (6)$$

Die Eigenfunktionen können stets reell gewählt werden. Zu verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_m \neq \lambda_n$  gehörende Eigenfunktionen sind stets orthogonal:

$$\int u_m(t) u_n(t) dt = 0. \quad (7)$$

Die Eigenfunktionen  $u_n^{(h)}(x)$  bilden ein vollständiges Orthogonalsystem (vgl. auch S. 23).

Sind  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  die *verschiedenen* Eigenwerte und ist  $q_i$  der Defekt des Kerns zum Eigenwert  $\lambda_i$ , so ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\lambda_n^2} < W \quad (8)$$

stets konvergent.

c) Sukzessive Approximation von Eigenwerten und -funktionen. Ausgehend von einer normierten willkürlichen Funktion  $q_0(x)$  bildet man  $q_n(x) = \lambda'_n \int K(x, t) q_{n-1}(t) dt$ , wobei man  $\lambda'_n$  so bestimmt, daß auch  $q_n$  normiert ist. Dann konvergiert  $q_n(x)$  gegen eine Eigenfunktion,  $\lambda'_n$  gegen einen Eigenwert (E. SCHMIDT).

d) Bilinearreihe. Der Kern  $K(x, y)$  wird durch die Reihe

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{q_n} \frac{u_n^{(\nu)}(x) u_n^{(\nu)}(y)}{\lambda_n} \quad (9)$$

dargestellt, wenn diese gleichmäßig in  $x$  und  $y$  im Grundgebiet konvergiert. Das ist der Fall, wenn

$\alpha$ )  $K(x, y)$  nur endlich viele Eigenwerte hat (*ausgearteter Kern, Kern endlichen Ranges*),

$\beta$ ) für beliebige  $x, y$  im Grundgebiet die LIPSCHITZ-Bedingung gilt:

$$|K(x, t) - K(y, t)| < M \cdot |x - y|, \quad M \text{ unabhängig von } x, y. \quad (10)$$

Es genügt, daß das Integral über das Quadrat des (10) entsprechenden Differenzenquotienten beschränkt ist (HAMMERSTEIN).

$\gamma$ )  $K(x, y)$  im *endlichen* Grundgebiet stetig ist und wenigstens von einem der beiden Vorzeichen nur endlich viele Eigenwerte hat (z. B. keine: *definite Kerne*) (MERCER).

*Positiv (negativ) definit* heißt ein Kern, der nur positive (bzw. negative) Eigenwerte besitzt. Die sog. *quadratische Integralform*

$$\iint K(s, t) q(s) q(t) ds dt$$

hat dann für jedes im Grundgebiet stückweise stetige  $q(x)$  nur positive (bzw. negative) Werte.

### 3. Symmetrischer Kern, inhomogene Gleichung.

a) E. SCHMIDTSche Auflösungsformel. Stets wenn (J) lösbar ist, wird die Lösung durch

$$U(x) = f(x) + \lambda \cdot \sum_{n, \nu} \lambda_n^{(\nu)} \frac{u_n^{(\nu)}(x)}{\lambda_n - \lambda}, \quad \text{mit} \quad \lambda_n^{(\nu)} = \int f(t) u_n^{(\nu)}(t) dt \quad (11)$$

gegeben. Die Reihe konvergiert gleichmäßig in  $x$ ;  $\lambda_n$  und  $u_n^{(v)}(x)$  sind die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Kerns (vgl. 2). Ist (J) für den Eigenwert  $\lambda_n$  lösbar, so treten wegen (3) die  $\lambda_n$  enthaltenden Glieder in (11) nicht auf.

b) Sukzessive Approximation. Die Funktionenfolge

$$\phi_1(x) = f(x), \quad \phi_n(x) = f(x) + \lambda \int K(x, t) \phi_{n-1}(t) dt, \quad n = 2, 3, \dots \quad (12)$$

konvergiert gleichmäßig gegen die Lösung  $U(x)$  von (J), wenn gilt:

$$\lambda^2 \leq \frac{1}{W} \quad (\text{bzw. } \lambda^2 \leq A < \frac{1}{W}), \quad (13)$$

wenn nur ein Eigenwert existiert) (vgl. c). Diese Methode ist gleichbedeutend mit der Entwicklung in die

c) NEUMANNsche Reihe. Die Lösung von (J) ist durch

$$U(x) = f(x) + \sum_r \lambda^r \int K^{(r)}(x, t) f(t) dt \quad (14)$$

gegeben, wenn (13) gilt. Dann gilt für den lösenden Kern [vgl. (2)]:

$$L(x, y) = \sum_r \lambda^{r-1} K^{(r)}(x, y). \quad (15)$$

Dabei ist

$$K^{(1)}(x, y) = K(x, y), \quad K^{(n)}(x, y) = \int K^{(n-1)}(x, t) K(t, y) dt, \quad n = 2, 3, \dots \quad (16)$$

$K^{(n)}(x, y)$  heißt *n-ter iterierter Kern* zu  $K(x, y)$ .

Um die Anwendbarkeit der sukzessiven Approximation auf gegebenes  $\lambda$  zu erweitern, approximiert man  $K(x, y)$  durch eine möglichst einfache Summe der Form  $\sum_{n=1}^q a_n(x) b_n(y) = A(x, y)$  so, daß für den Rest  $K - A = R(x, y)$  das Doppelintegral  $\lambda^2 W_R = \lambda^2 \iint R^2(s, t) ds dt < 1$  wird. Dann läßt sich nach (15) der lösende Kern  $S(x, y)$  zu  $R(x, y)$  bestimmen und damit die Funktionen

$$a_n(x) = a_n(x) + \lambda \int S(x, t) a_n(t) dt \quad (n = 1, \dots, q)$$

und

$$f(x) = f(x) + \lambda \int S(x, t) f(t) dt.$$

Für  $U(x)$  gilt dann die Integralgleichung mit *ausgeartetem* Kern:

$$U(x) - \lambda \int \sum_{n=1}^q a_n(x) b_n(t) U(t) dt = f(x). \quad (17)$$

d) Die Lösung einer Gleichung (J) mit *ausgeartetem Kern* ist äquivalent (vgl. 1c) mit einem linearen Gleichungssystem mit endlichvielen Unbekannten, da ein ausgearteter Kern durch endlich viele Orthogonalfunktionen darstellbar ist.

e) Iterierte Kerne. Genügt der reelle symmetrische Kern  $K(x, y)$  den Voraussetzungen in 1b, so ist der  $n$ -te iterierte Kern  $K^{(n)}(x, y)$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) reell, symmetrisch und außerdem stetig. Die Eigenwerte von  $K^{(n)}$  sind  $\Lambda_i = \lambda_i^n$ , die  $n$ -ten Potenzen der Eigenwerte zu  $K$ ; die Eigenfunktionen zu  $\Lambda_i$  sind genau die bei  $K$  zu  $\lambda_i$  und gegebenenfalls  $-\lambda_i$  gehörenden. Es gilt analog zu (9)

$$K^{(n)}(x, y) = \sum_{\nu} \sum_{\mu} \frac{u_{\nu}^{(\mu)}(x) \cdot u_{\nu}^{(\mu)}(y)}{\lambda_{\nu}^n} \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (18)$$

und diese Reihen konvergieren im Grundgebiet im Gegensatz zu (9) stets gleichmäßig und absolut.

f) Die Integralgleichung  $(J^{(n)})$

$$U(x) - \lambda^n \int K^{(n)}(x, t) U(t) dt = f_n(x) \quad \text{mit} \quad \left. \begin{aligned} f_n(x) &= f(x) + \\ + \lambda \int K(x, t) f(t) dt &+ \lambda^2 \int K^{(2)}(x, t) f(t) + \dots \lambda^{n-1} \int K^{(n-1)}(x, t) f(t) dt \end{aligned} \right\} (J^{(n)})$$

besitzt genau dieselben Lösungen wie  $(J)$ ; statt  $(J)$  kann man  $(J^{(n)})$  lösen und umgekehrt. Wenn  $K(x, y)$  nicht mehr den Voraussetzungen in 1b genügt, diese aber für  $K^{(n)}(x, y)$  gelten, kann man in den Lösungen von  $(J^{(n)})$  Lösungen von  $(J)$  erhalten.

#### 4. Unsymmetrischer Kern.

a) Die Lösungen der *homogenen* Gleichung  $(J_h)$  bilden i. a. kein Orthogonalsystem.  $(J_h)$  ist nicht für jeden Kern lösbar, es gibt Kerne ohne Eigenwert. Jedem Kern  $K(x, y)$  lassen sich jedoch stets die beiden Orthogonalsysteme zuordnen, die aus den Eigenfunktionen  $v_n(x)$  und  $w_n(x)$  der beiden symmetrischen positiv definiten Hilfskerne

$$K_1(x, y) = \int K(x, t) K(y, t) dt, \quad K_2(x, y) = \int K(t, x) K(t, y) dt \quad (19)$$

mit den (bei beiden gleichen) Eigenwerten  $\mu_n = \lambda_n^2$  bestehen. Das System

$$v_n(x) = \lambda \int K(x, t) w_n(t) dt, \quad w_n(x) = \lambda \int K(t, x) v_n(t) dt \quad (20)$$

ist nur für  $\lambda = \lambda_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) und nur durch Eigenfunktionen zu  $K_1$  und  $K_2$  lösbar. Jede in der Form  $\int K(x, t) \chi(t) dt$  bzw. in der Form  $\int K(t, x) \chi(t) dt$  darstellbare Funktion  $\varphi(t)$  läßt sich in eine gleichmäßig und absolut konvergente Reihe nach den  $v_n(x)$  bzw.  $w_n(x)$  entwickeln.

b) Für die Lösung von  $(J)$  gilt das in 3b, c, d, f Gesagte.  $(J)$  hat dieselbe Lösung wie die Gleichung

$$u(x) = \lambda \int K(x, t) u(t) dt = f(x) \quad (21)$$

mit dem symmetrischen Kern

$$K(x, y) = K(x, y) + K(y, x) - \lambda \int K(t, x) K(t, y) dt$$

und

$$f(x) = f(x) - \lambda \int K(t, x) f(t) dt.$$

## B. Integralgleichungen erster Art.

1. Eine Gleichung der Form

$$f(x) = \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt \quad (1)$$

bezeichnet man als Integralgleichung erster Art für die Funktion  $\varphi(x)$ . Ist (1) lösbar, so heißt  $f(x)$  *quellenmäßig darstellbar* mit Hilfe des Kerns  $K(x, y)$ .

2. Bei symmetrischem Kern, d. h. wenn  $K(x, y) = K(y, x)$  ist im Grundgebiet  $a \leq x \leq b$  bzw.  $a \leq y \leq b$ , gilt der

Entwicklungssatz: Jede Funktion  $f(x)$ , welche sich mit Hilfe eines symmetrischen Kerns nach (1) darstellen läßt, kann nach den Eigenfunktionen  $u_n(x)$  des Kerns  $K(x, y)$  in eine gleichmäßig und absolut konvergente Reihe entwickelt werden:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n u_n(x) \quad \text{mit} \quad \gamma_n = \int_a^b u_n(t) f(t) dt, \quad (2)$$

wobei  $u_n(x)$  alle zueinander orthogonalen normierten Eigenfunktionen durchläuft. Die Lösung von (1) wird durch

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \lambda_n u_n(x) \quad [\gamma_n \text{ vgl. (2)}] \quad (3)$$

gegeben.

3. Unsymmetrischer Kern. Jede durch (1) quellenmäßig darstellbare Funktion  $f(x)$  läßt sich in die gleichmäßig und absolut konvergente Reihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n(x) \quad \text{mit} \quad \alpha_n = \int_a^b v_n(t) f(t) dt \quad (4)$$

entwickeln [ $v_n(x)$  vgl. A4a]. Analog folgt aus der Darstellung

$$i(x) = \int_a^b K(t, x) \psi(t) dt \quad (5)$$

die Entwicklung:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n w_n(x) \quad \text{mit} \quad \beta_n = \int_a^b w_n(t) f(t) dt. \quad (6)$$

Elfter Abschnitt.

## Variationsrechnung.

Die Variationsrechnung stellt sich die Aufgabe, Funktionen  $x, y, z, \dots$  von  $s, t, \dots$  zu ermitteln, welche ein Integral

$$S = \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} \dots V(s, t, \dots, x, y, \dots, x_s, x_t, \dots) ds dt \dots \quad \left( x_t = \frac{\partial x}{\partial t}, \dots \right)$$

zu einem Minimum oder Maximum (Extremum) machen. Dabei können die Grenzen fest oder auch variabel mit gewissen einschränkenden Bedingungen vorausgesetzt werden. Jedoch läßt sich der Fall variabler Grenzen auf den mit festen Grenzen zurückführen. Wir betrachten daher nur den Fall *fester* Grenzen. Die lösenden Funktionen unter den zur Konkurrenz zugelassenen Funktionen heißen *Extremalen*.

Variationsprobleme können *direkt* (z. B. durch Approximation) oder *indirekt* durch Zurückführung auf Differentialgleichungen gelöst werden. Umgekehrt empfiehlt sich oft die Zurückführung einer Differentialgleichung auf ein Variationsproblem und dessen Lösung mit Hilfe der direkten Methoden der Variationsrechnung.

## A. Zurückführung auf Differentialgleichungen.

### 1. Variation ohne Nebenbedingungen.

Die wichtigsten Fälle sind im folgenden zusammengestellt:

a)  $V(x, \dot{x}, t)$  mit *einer* abhängigen Funktion  $x(t)$  von *einer* unabhängigen  $t$  und deren Ableitung  $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ . *Variieren* wir die Funktion  $x(t)$ , indem wir statt ihrer setzen

$$x(t) + \varepsilon \cdot \xi(t),$$

so wird die zugehörige Variation von  $S$  definiert durch:

$$\delta S = \varepsilon \cdot \frac{\partial S(x + \varepsilon \xi)}{\partial \varepsilon} = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \dot{\xi} + \frac{\partial V}{\partial x} \xi \right) dt$$

oder durch partielle Integration des mit  $\dot{\xi}$  behafteten Teils:

$$\delta S = \varepsilon \cdot \left[ \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \xi \right]_{t_1}^{t_2} + \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \xi \cdot \left[ \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right) \right] dt.$$

Ist  $x(t)$  für  $t_1$  und  $t_2$  vorgeschrieben, also dort  $\xi = 0$ , so fällt der erste Teil fort. Die erste notwendige Bedingung für ein Extremum von  $S$ , daß  $\delta S = 0$  ist für alle zulässigen Funktionen  $\xi$ , hat die EULER-LAGRANGEsche Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (1)$$

zur Folge. Sie bestimmt  $x(t)$  bis auf zwei Integrationskonstanten, welche durch die Randbedingungen festgelegt sein müssen.

b)  $V(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \dots, t)$  von *mehreren* ( $n$ ) abhängigen Funktionen einer unabhängigen  $t$ . Hier wird  $\delta S = 0$ , wenn  $x(t), y(t), \dots$  die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{y}} \right) = 0, \dots \quad (2)$$



erfüllen. Das sind  $n$  Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Sie bestimmen  $x(t)$ ,  $y(t)$ , ... bis auf  $2n$  Integrationskonstanten, die durch die Randbedingungen festgelegt sein müssen.

c)  $V(x, \dot{x}, \ddot{x}, t)$  von *einer* abhängigen Funktion und ihren Ableitungen bis zur dritten Ordnung. Hier wird

$$\delta S = \varepsilon \left[ \xi \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} \right) + \dot{\xi} \left( \frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} \right) + \ddot{\xi} \frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} \right]_{t_1}^{t_2} + \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \xi \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} - \frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} \right) dt.$$

$\delta S$  wird also gleich Null, wenn außer  $x(t)$  auch  $\dot{x}$  und  $\ddot{x}$  für  $t_1$  und  $t_2$  vorgeschrieben sind und die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} - \frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} = 0 \quad (3)$$

erfüllt ist.

d)  $V(s, t, \dots, x, y, \dots, x_s, x_t, \dots, y_s, y_t, \dots)$ . Mehrere unabhängige:  $s, t, \dots$ , mehrere abhängige:  $x, y, \dots$ , und deren Ableitungen:  $x_s, y_s, \dots$ .  $\delta S$  wird gleich Null, wenn  $x(s, t, \dots)$  usw. bestimmt werden aus den LAGRANGESchen Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial V}{\partial x_s} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V}{\partial x_t} \right) - \dots &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial V}{\partial y_s} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V}{\partial y_t} \right) - \dots &= 0 \text{ usw.} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

## 2. Variation mit Nebenbedingungen.

Die Variationsaufgabe. Sind zur Lösung des Problems

$$\delta \int \dots \int V ds dt \dots = 0 \quad (1)$$

nur solche Funktionen zur Konkurrenz zugelassen, die irgendwelche *Nebenbedingungen* erfüllen in der Form

$$\int \dots \int G ds dt \dots = \text{constans}, \quad \int \dots \int H ds dt \dots = \text{constans}, \dots \quad (2a)$$

oder auch in der Form

$$G = 0, \quad H = 0, \dots, \quad (2b)$$

so hat man in den LAGRANGESchen Gleichungen  $V$  zu ersetzen durch

$$V + \lambda G + \mu H + \dots \quad (3)$$

Hierin sind die LAGRANGESchen Multiplikatoren  $\lambda, \mu, \dots$  nachträglich aus den Rand- und Nebenbedingungen zu bestimmen<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Die Methode ist noch näher erläutert am physikalischen Beispiel der Zwangskräfte, S. 231.

**Äquivalenz mit Eigenwertproblemen** (vgl. S. 197). Lautet das Variationsproblem speziell

$$\delta \int_a^b \left\{ A \left( \frac{du}{dx} \right)^2 - Bu^2 \right\} dx = 0, \quad (4)$$

wo  $A$  und  $B$  vorgegebene Funktionen von  $x$  sind, mit der Nebenbedingung

$$\int_a^b \rho u^2 dx = \text{constans}, \quad (5)$$

sowie den Randbedingungen  $x(a) = x(b) = 0$ , so nehmen die LAGRANGE'schen Gleichungen die Form an

$$\frac{d}{dx} \left( A \frac{du}{dx} \right) + Bx + \lambda \rho x = 0. \quad (6)$$

Umgekehrt kann also das Eigenwertproblem (6) stets zurückgeführt werden auf das Variationsproblem (4), (5).

Ganz entsprechend läßt sich das mehrdimensionale Eigenwertproblem

$$\sum_i \sum_k \frac{\partial}{\partial x_i} \left( A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + Bu + \lambda \rho u = 0 \quad (7)$$

zurückführen auf

$$\delta \int \dots \int_{(G)} \left\{ \sum_k \sum_i A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} - Bu^2 \right\} dx_1 dx_2 \dots dx_n = 0 \quad (8)$$

mit der Nebenbedingung

$$\int \dots \int_{(G)} \rho u^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n = \text{constans}. \quad (9)$$

**Äquivalenz mit Integralgleichungen.**

$\iint K(x, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy = \text{Extremum}$ ,  $\int \varphi^2(t) dt = 1$ ,  $\varphi = 0$  am Rand hat dieselben Eigenwerte  $\lambda$  und Lösungen  $\varphi(t)$  als Eigenfunktionen wie die homogene Integralgleichung

$$\varphi(x) - \lambda \iint K(x, y) \varphi(y) dy = 0.$$

## B. Direkte Lösungsmethoden.

### 1. Das RITZsche Verfahren.

Der Grundgedanke des RITZschen Verfahrens ist folgender: Man wählt ein geeignetes vollständiges Funktionensystem  $\{f_p(t)\}$  zum Grundgebiet derart, daß jede dieser Funktionen den Randbedingungen des Problems genügt. Dann sucht man die Extremale aufzubauen in der Form

$$x(t) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p f_p(t). \quad (1)$$

Die Lösung des Variationsproblems  $\delta S = 0$  läuft also auf die direkte Bestimmung der unendlich vielen Konstanten  $c_p$  hinaus. Diese geschieht auf folgendem Wege: Man bildet die *endlichen* Summen

$$x_n(t) = \sum_{p=1}^n c_p f_p(t), \quad (2)$$

und bestimmt die  $n$  Koeffizienten  $c_1, c_2, \dots, c_n$  aus den  $n$  Gleichungen

$$\frac{\partial S_n}{\partial c_p} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

wobei  $S_n = S_n(c_1, c_2, \dots, c_n)$  diejenige Funktion der  $c_p$  ist, die sich ergibt, wenn man in das zu extremierende Integral  $S$  für  $x(t)$  die Funktion  $x_n(t)$  einsetzt. Konvergiert die auf diesem Wege erhaltene Funktionenfolge  $x_n(t)$  mit wachsendem  $n$  gegen eine zulässige Funktion, so stellen die  $x_n(t)$  Näherungslösungen des Problems dar.

Der Erfolg des Verfahrens hängt sehr von der geschickten Wahl des Funktionensystems  $\{f_p(t)\}$  ab.

Beispiel: Es sei das Eigenwertproblem vorgelegt

$$\ddot{x} + \lambda x = 0 \quad \text{mit} \quad x(0) = 0 \quad \text{und} \quad x(1) = 0. \quad (4)$$

Die Lösungen sind bekanntlich  $\lambda_k = k^2 \pi^2$  und  $x^{(k)} = A \cdot \sin(k \pi t)$ . Eigenwerte und Eigenfunktionen können approximiert werden, indem man das Problem ersetzt durch das Variationsproblem

$$\int_0^1 \dot{x}^2 dt = \text{Extremum} \quad (5a)$$

mit der Nebenbedingung

$$\int_0^1 x^2 dt = C \quad (5b)$$

und den gleichen Randbedingungen.

Wir machen nun den Ansatz (2) und gehen damit in (5a) und (5b) ein. Mit den Abkürzungen

$$\int_0^1 \dot{f}_p \dot{f}_q dt = A_{pq} \quad \int_0^1 f_p f_q dt = B_{pq} \quad (6)$$

erhalten wir dann

$$\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n c_p c_q A_{pq} = \text{Extremum}, \quad \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n c_p c_q B_{pq} = C. \quad (7)$$

Durch Differenzieren nach sämtlichen  $c_q$  geht hieraus das Gleichungssystem hervor:

$$\sum_{p=1}^n c_p (A_{pq} - \lambda B_{pq}) = 0 \quad (q = 1, 2, \dots, n), \quad (8)$$

worin  $\lambda$  ein später noch zu bestimmender LAGRANGEScher Multiplikator ist.

Um die Koeffizienten  $A_{pq}, B_{pq}$  bestimmen zu können, müssen wir jetzt nähere Angaben über das Funktionensystem  $\{f_p\}$  machen. Wir fordern, daß  $f_p$  jeweils ein Polynom vom Grade  $(p - 1)$  wird. Ferner lehrt ein Blick auf (8), daß wir zweckmäßig diese Funktionen als orthogonal und normiert annehmen:

$$\int_0^1 f_p f_q dt = B_{pq} = \delta_{pq} \quad \text{wenn nicht } f_p \text{ oder } f_q = 0 \text{ ist.} \quad (9)$$

Auf Grund dieser Bedingungen finden wir:

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = \sqrt{30} t(1-t), \quad f_4 = \sqrt{210} (t - 3t^2 + 2t^3) \dots \quad (10)$$

Begnügen wir uns mit *drei* Gliedern ( $n = 3$ ), so bleibt von dem System (8) nur die eine Gleichung

$$c_{33}(\lambda - A_{33}) = 0, \quad \text{d. h. } \lambda = A_{33}.$$

$$\lambda = \int_0^1 f_3^2 dt = 30 \int_0^1 (1 - 4t + 4t^2) dt = 10.$$

Aus der Nebenbedingung (5 b) folgt ferner

$$C = \int_0^1 x^2 dt = c_3^2 \int_0^1 f_3^2(t) dt = c_3^2 \cdot 1,$$

also  $c_3 = \pm \sqrt{C}$  und schließlich

$$x_3(t) = \pm \sqrt{2C} t(1-t) \sqrt{15} \quad \text{und} \quad \lambda = 10, \quad (11)$$

statt der exakten Lösung

$$x^{(1)}(t) = \sqrt{2C} \sin(\pi t) \quad \text{und} \quad \lambda_1 = \pi^2 = 9,86. \quad (12)$$

*Treibt man die Näherung einen Schritt weiter* und nimmt die Funktion  $f_4(t)$  noch mit, so erhält man

$$A_{34} = A_{43} = 0, \quad A_{44} = 42.$$

Das Gleichungssystem (8) besteht jetzt aus den beiden Gleichungen

$$c_3(10 - \lambda) = 0 \quad \text{und} \quad c_4(42 - \lambda) = 0. \quad (13)$$

Wir erhalten also zwei Eigenlösungen

I.  $\lambda_1 = 10$  (wie oben),  $c_3 = \pm \sqrt{C}$  (wegen 5 b),  $c_4 = 0$ .

$$x_4^{(1)}(t) = \pm \sqrt{2C} t(1-t) \sqrt{15} \quad (\text{wie oben}). \quad (14a)$$

II.  $\lambda_2 = 42$ ,  $c_3 = 0$ ,  $c_4 = \pm \sqrt{C}$  (wegen 5 b).

$$x_4^{(2)}(t) = \pm \sqrt{2C} (t - 3t^2 + 2t^3) \sqrt{105} \quad (14b)$$

statt der exakten Lösung

$$\lambda_2 = 4\pi^2 = 39,4 \quad \text{und} \quad x^{(2)}(t) = \pm \sqrt{2C} \sin(2\pi t).$$

## 2. Zurückführung auf ein Problem von unendlich vielen Veränderlichen.

Man setzt die Lösung des Problems als Reihenentwicklung nach geeigneten Orthogonalfunktionen an und bestimmt die FOURIER-Koeffizienten so, daß die entwickelte Funktion Extremale des Problems wird. Als Beispiel geben wir die HURWITZsche Lösung des *isoperimetrischen Problems*: Eine geschlossene ebene und differenzierbare Kurve der Länge  $L$  soll so gewählt werden, daß der von ihr umschlossene Flächeninhalt möglichst groß wird.

Es sei statt der Bogenlänge  $s$  längs der Kurve der Parameter  $t = 2\pi s/L$  eingeführt, der von 0 bis  $2\pi$  läuft. Dann kann das Problem formuliert werden:

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt = \text{Extremum}$$

mit der Nebenbedingung:

$$L^2 = 2\pi \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right] dt = \text{constans.}$$

Wir machen den FOURIER-Ansatz

$$x = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

$$y = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nt + d_n \sin nt),$$

dann ergibt sich nach einfacher Rechnung unter Benutzung der Orthogonalitätseigenschaften von  $\sin nt$  und  $\cos nt$ :

$$F = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n d_n - b_n c_n),$$

$$L^2 = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2).$$

Hieraus kann man den Ausdruck bilden

$$L^2 - 4\pi F = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} [(na_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 + (c_n^2 + d_n^2)(n^2 - 1)],$$

in dem jeder der Summanden positiv ist; also ist  $L^2 - 4\pi F \geq 0$  und Gleichheit (d. h.  $F = \text{Maximum}$ ) tritt nur ein, wenn alle Summanden verschwinden, d. h. für

$$x = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t$$

$$y = \frac{1}{2} c_0 - b_1 \cos t + a_1 \sin t,$$

und das ist die Parameterdarstellung des Kreises.

### 3. Approximation durch gebrochene Linienzüge.

Man ersetzt das zu extremierende Integral näherungsweise durch eine Summe

$$S = \int_a^b V(t, x, \dot{x}) dt = \sum_{i=0}^n V\left(t_i, x_i, \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}\right) \Delta t = \sum_{i=0}^n V_i \Delta t, \quad (1)$$

d. h. man teilt das Intervall  $a \leq t \leq b$  in  $n$  gleiche Teile der Breite  $\Delta t$ . Die Werte  $x_i$  der Funktion  $x(t)$  an den Stellen  $t_i$  bestimmt man dann aus den  $(n+1)$  Gleichungen

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = 0. \quad (2)$$

Die so entstehenden Gleichungen können auch aufgefaßt werden als ein System von Differenzgleichungen, welches die EULER-LAGRANGEsche Differentialgleichung ersetzt. Es lautet:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} - \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\partial V_i}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V_{i-1}}{\partial \dot{x}_{i-1}} \right) = 0. \quad (3)$$

Zwölfter Abschnitt.

## Wahrscheinlichkeitsrechnung.

### A. Grundbegriffe.

1. Wenn unter gewissen Bedingungen *ein* Ereignis unter einer Auswahl von  $N$  Ereignissen  $a_1 a_2 \dots a_N$  eintreten muß, und kein Grund vorliegt, warum irgendeines derselben leichter eintreten sollte als ein anderes, so heißt der Bruch  $\frac{1}{N}$  die „Wahrscheinlichkeit“ für das Eintreten eines jeden dieser Ereignisse.

Die Beobachtung eines solchen Ereignisses heißt eine „Probe“.

2. Bezeichnet man als „günstiges Ereignis“ das Eintreten *eines beliebigen* Ereignisses aus einer bestimmten Menge der  $a$ , bestehend aus  $n$  ( $n \leq N$ ) Elementen, so heißt der Bruch  $p = \frac{n}{N}$  die „Wahrscheinlichkeit“ für das Eintreten dieses „günstigen Ereignisses“.

3. Sind mehrere solcher Mengen gegeben, die sich gegenseitig ausschließen, so daß also kein  $a$  in mehr als einer Menge vorkommt, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten irgendeines beliebigen Ereignisses aus irgendeiner der gegebenen Mengen gleich der *Summe* der Einzelwahrscheinlichkeiten

$$W \text{ (entweder — oder — oder) } = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$$

Enthalten die Mengen zusammen alle möglichen Ereignisse  $a_1 a_2 \dots a_N$ , so ist  $\sum p_i = 1$ .

4. Sind  $a'_1 a'_2 \dots a'_n$  Ereignisse, die wie die  $a$  charakterisiert und von diesen unabhängig sind, und ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines bestimmten Ereignisses  $a'_0$  gleich  $p'_0$ , so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sowohl das Ereignis  $a_0$  als auch das Ereignis  $a'_0$  eintritt, gleich dem *Produkt* der Einzelwahrscheinlichkeiten

$$W \text{ (sowohl } a_0 \text{ als auch } a'_0) = p_0 \cdot p'_0,$$

allgemein:

$$W \text{ (sowohl } — \text{ als auch } — \text{ als auch } \dots) = p^{(1)} \cdot p^{(2)} \cdot p^{(3)} \dots$$

Die zweite Probe kann dabei eine Wiederholung der ersten unter denselben äußeren Bedingungen zu einer anderen Zeit sein, oder auch in einem verschiedenen Vorgang zu gleicher oder anderer Zeit bestehen.

5. Wenn bei  $N$  unabhängigen Proben 1, 2, ...,  $N$  die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines günstigen Ereignisses jedesmal gleich  $p$  ist, und von den  $N$  Proben in Wirklichkeit  $n$  günstig ausfallen, so wird  $\left| \frac{n}{N} - p \right|$  mit wachsendem  $N$  beliebig klein. Für die Wahrscheinlichkeit  $W(n)$ , daß bei diesen  $N$  Proben  $n$ -mal ein günstiges Ereignis eintritt, gilt die „NEWTONSche Formel“:

$$W(n) = \binom{N}{n} p^n \cdot q^{N-n}, \quad (1)$$

wo  $q = 1 - p$  bedeutet.

Für den Grenzfall sehr großer  $N$  geht diese Formel über in

$$W(n) = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{2\pi N p q}}, \quad \text{worin} \quad z = \frac{n - N p}{\sqrt{2 N p q}} \quad (\text{LAPLACE}). \quad (2)$$

Ist  $N$  auch sehr groß gegen  $N p$ , so wird

$$W(n) = \frac{e^{-N p} (N p)^n}{n!} \quad (\text{POISSON}). \quad (3)$$

6. Wiederholt man die Serie von  $N$  Proben, so wird sich jedesmal ein anderes  $n$  ergeben. Der Mittelwert  $\bar{n}$  wird im Grenzfall unendlich-facher Wiederholung der Serie  $\bar{n} = N \cdot p$  (BERNOULLI).

## B. Mittelwertbildung.

Ist die Wahrscheinlichkeit  $W(n)$  eines durch  $f(n)$  charakterisierten Zustandes bekannt, so ist der *Mittelwert* (*Erwartungswert*) von  $f(n)$ :

$$\bar{f}(n) = \sum_n f(n) W(n) \quad \text{mit} \quad \sum_n W(n) = 1. \quad (1)$$

Bilden die möglichen Werte von  $n$  ein Kontinuum, so geht diese Formel über in

$$f(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(n) W(n) dn. \quad (2)$$

Der Mittelwert der Funktion in einem bestimmten Intervall  $a \leq n \leq b$  ist:

$$f(n) = \frac{\sum_{n=a}^b f(n) W(n)}{\sum_{n=a}^b W(n)} = \frac{\int_a^b f(n) W(n) dn}{\int_a^b W(n) dn}. \quad (3)$$

$W(n)$  nennt man hierbei auch „Gewichtsfunktion“.

### C. Schwankungen.

1. Man bezeichnet die Größen

$$s = n - \bar{n}, \quad \delta = \frac{n - \bar{n}}{n}$$

als absolute bzw. relative *Schwankung*. Die „durchschnittliche absolute Schwankung“ ist

$$|s| = 2 W(v) \cdot \left( n - \frac{v n}{N} \right), \quad (1)$$

worin  $v$  die größte ganze Zahl  $\leq n$  ist und  $W(v)$  die Wahrscheinlichkeit ist, daß bei  $N$  Proben  $v$ -mal das Ereignis  $a$  eintritt; die „durchschnittliche relative Schwankung“ wird daher

$$|\delta| = \frac{|s|}{n} = 2 W(v) \cdot \left( 1 - \frac{v}{N} \right). \quad (2)$$

Die „mittlere absolute Schwankung“  $\sqrt{s^2}$  wird gegeben durch

$$s^2 = n^2 - \bar{n}^2 = N p q = n q, \quad (3)$$

die „mittlere relative Schwankung“  $\sqrt{\delta^2}$  daher

$$\delta^2 = \frac{1}{n} - \frac{1}{N} = \frac{q}{n}. \quad (4)$$

2. Die durchschnittliche Abweichung der verschiedenen Werte  $n$  von einem bestimmt vorgegebenen  $n_1$  ist

$$\overline{n_1 - n} = n_1 - \bar{n}. \quad (5)$$

Die „mittlere Abweichung“ zweier aufeinanderfolgender Proben ist gegeben durch

$$\overline{(n_1 - n_2)^2} = 2 \overline{s^2} = 2 \bar{n}^2 \overline{\delta^2} = 2 n q. \quad (6)$$

3. Ist  $p \ll 1$ ,  $N \gg 1$ ,  $p \cdot N = n$  endlich, so gilt die *Poissonsche Formel*:

$$W(n) = \frac{e^{-\bar{n}} \cdot \bar{n}^n}{n!}. \quad (7)$$



In diesem Falle ist die mittlere absolute bzw. relative Schwankung bestimmt durch

$$\left. \begin{aligned} \overline{s^2} &= \overline{n} \\ \overline{\delta^2} &= \frac{1}{n} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

4. Sowohl  $N$  als auch  $n$  seien so groß, daß man  $\delta$  als kontinuierlich veränderlich ansehen kann, ohne daß  $p \ll 1$  ist. Dann gilt das GAUSSsche Fehlergesetz: Es ist die Wahrscheinlichkeit, daß für  $\delta$  ein Wert zwischen  $\delta$  und  $\delta + d\delta$  gefunden wird

$$W(\delta) d\delta = \sqrt{\frac{n}{2\pi q}} \cdot e^{-\frac{n}{2q} \delta^2} d\delta. \quad (9)$$

In diesem Falle ist die durchschnittliche Schwankung:

$$|\overline{\delta}| = 2 \int_0^{\infty} \delta \cdot W(\delta) d\delta = \sqrt{\frac{2 \cdot q}{\pi n}}, \quad (10)$$

und die mittlere Schwankung  $\sqrt{\overline{\delta^2}}$  bestimmt durch:

$$\overline{\delta^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^2 \cdot W(\delta) d\delta = \frac{q}{n}. \quad (11)$$

Das Fehlergesetz läßt sich also auch schreiben:

$$W(\delta) d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi \delta^2}} \cdot e^{-\frac{\delta^2}{2\delta^2}} \cdot d\delta.$$

Es wird ferner der Quotient

$$\frac{|\overline{\delta}|}{\sqrt{\overline{\delta^2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}; \quad (12)$$

für das Verhältnis der „absoluten“ Schwankungen gilt dasselbe.

5. Ist außerdem  $p \ll 1$ , so ist in den Formeln überall  $q = 1$  zu setzen. Speziell wird dann

$$\left. \begin{aligned} |\overline{\delta}| &= \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \\ \overline{\delta^2} &= \frac{1}{n}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Zeigt sich bei Versuchen, Statistiken usw., daß tatsächlich  $\overline{s^2} = n$  ist, so sagt man: es liegt „normale Dispersion“ vor,

ist  $\overline{s^2} > n$ , so hat man „übernormale“

ist  $\overline{s^2} < n$ , so hat man „internormale“ Dispersion.

Die Ursachen für solche Abweichungen liegen in der nichterfüllten Unabhängigkeit der Proben.

### D. Wahrscheinlichkeitsnachwirkung.

Folgen Serien von Proben im Zeitabstand  $\tau$  aufeinander, so sind in vielen praktischen Fällen die Zahlen  $n$  der günstig ausfallenden Proben in einer Serie nicht unabhängig von dem Ausfall der Proben der vorhergehenden Serie.

Besonders einfach und wichtig ist der Fall:

$$N \gg 1, \quad p \ll 1, \quad pN = n \text{ endlich.} \quad (1)$$

Dann wird:

$$\overline{n_i - n_{i+1}} = P(n_i - n) \quad \text{und} \quad \overline{(n_i - n_{i+1})^2} = 2Pn. \quad (2)$$

Hierbei bedeuten  $n_i$  und  $n_{i+1}$  die  $n$  für zwei einander folgende Serien und  $P$  eine Konstante  $< 1$ , die von den Bedingungen des Versuches und dem Zeitabstand  $\tau$  der Serien abhängt, und mit steigendem  $\tau$  bis 1 anwächst.

Alle anderen Schwankungsformeln bleiben ungeändert.

### E. Korrelation.

Ist ein Zustand (Beobachtungsergebnis, Ausfall einer Probe) charakterisiert durch *mehrere* ( $k$ ) Zahlen ( $n_1, n_2, \dots, n_k$ ), so läßt sich eine *mehrp-parametrische Wahrscheinlichkeit*  $W(n_1, n_2, \dots, n_k)$  definieren. Es ist

$$\sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_k} W(n_1, n_2, \dots, n_k) = 1. \quad (1)$$

Die Mittelwerte (Erwartungswerte) sind definiert durch:

$$\bar{n}_i = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_k} n_i W(n_1, n_2, \dots, n_k). \quad (2)$$

Sind die  $k$  Parameter voneinander unabhängig, so wird

$$W(n_1, n_2, \dots, n_k) = \prod_i W_i(n_i). \quad (3)$$

Gilt *speziell* das GAUSSsche Fehlergesetz, so wird mit

$$x_i = \frac{n_i - \bar{n}_i}{n_i} \quad (4)$$

die Wahrscheinlichkeit

$$W(x_1, x_2, \dots, x_k) = C \cdot e^{\sum_{i,j=1}^k a_{ij} x_i x_j}, \quad (5)$$

und dieser Ausdruck zerfällt in ein Produkt der Form (3), wenn im Exponenten die  $a_{ij}$  eine Diagonalmatrix bilden ( $a_{ij} = 0$  für  $i \neq j$ ), d. h. wenn das Koordinatensystem der  $x_j$  das Hauptachsensystem des „Streu-ellipsoids“  $\sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j = 0$  ist. Die  $a_{ij}$  werden bis auf einen allen gemeinsamen Faktor gleich

$$r_{ij} = \frac{\overline{x_i x_j}}{\sqrt{\overline{x_i^2} \overline{x_j^2}}} \quad (\text{Korrelationskoeffizient}). \quad (6)$$

Diese Größe stellt ein Maß für die Abhängigkeit der Parameter  $x_i$  und  $x_j$  (bzw.  $n_i$  und  $n_j$ ) voneinander dar. Für  $r_{ij}=0$  besteht keinerlei Korrelation, für  $r_{ij}=1$  besteht strenge Proportionalität der Schwankungen  $x_i=c_{ij}x_j$  (funktionale Abhängigkeit). Für  $r_{ij}<1$  ist der Faktor  $c_{ij}$  unscharf definiert. Bildet man ein  $\tilde{c}_{ij}=\operatorname{tg} \varphi_{ij}$  mit

$$\operatorname{tg} 2\varphi_{ij} = \frac{2\overline{x_i x_j}}{x_i^2 - x_j^2}, \quad (7)$$

so macht dies den Ausdruck

$$\overline{\left( \frac{x_i - \tilde{c}_{ij} x_j}{1 + c_{ij}^2} \right)^2}$$

(mittleres Quadrat des Abstandes aller Meßpunkte von der Hyperebene  $x_i = \tilde{c}_{ij} x_j$ ) zu einem Minimum.

Zweiter Teil.

## Physik.

### Das Begriffssystem der theoretischen Physik.

Die theoretische Physik bedient sich der *mathematischen Form* zur Darstellung der *erfahrungsmäßigen Regelmäßigkeiten* im Verlaufe der Naturerscheinungen. Dazu ist eine *Abbildung* des mit den Sinnen erfaßten Wahrnehmungsmaterials auf ein mathematisches Schema notwendig. Das anschauliche Schema der (dreidimensionalen euklidischen) *Geometrie*, das wohl am nächsten liegt, hat sich vielfach als zu eng erwiesen; das der *Analysis* scheint bisher auszureichen und wird heute in überwiegenderem Maße verwendet. Da dieses letzten Endes nur aus Zahlen besteht, handelt es sich also in der theoretischen Physik um eine Abbildung der Welt auf ein System von Zahlen. Die beobachteten Regelmäßigkeiten stellen sich dann dar als Relationen zwischen Zahlen, die, mathematisch formuliert, *Gesetze* genannt werden.

Voraussetzung für die Durchführung dieses Programms ist die Fixierung eines *Zuordnungsverfahrens* des sinnlich Wahrgenommenen zu den Zahlen des Schemas. Dies Verfahren ausüben, heißt *Messen*. Es erfolgt nach einer *Meßvorschrift*, die festgelegt sein muß als eine mit natürlichen Mitteln durchführbare Tätigkeit, die zur Gewinnung einer Zahl, der *Maßzahl*, führt. Man pflegt bei ihrer Nennung durch ein hinzugefügtes Symbol (Namen oder Zeichen, z. B. cm Länge, ° Celsius) das Meßverfahren (mehr oder weniger eindeutig) zu bezeichnen, das sie lieferte. Dieses Symbol bezeichnet die, in der Physik allein *durch das Meßverfahren definierte*, hier gemessene *Qualität*, während die Maßzahl die *Quantität* angibt. Der Inbegriff von Qualität und Quantität heißt *physikalische Größe*.

Unter den unendlich vielen ersinnbaren Meßverfahren wählt die physikalische *Metronomie* eine beschränkte Anzahl aus nach dem Gesichtspunkt, daß die mit ihnen gewonnenen Zahlen *möglichst einfache Relationen* erfüllen sollen. Dies Suchen nach immer „besseren“ Verfahren führt zur Aufstellung eines *Ideals* in Gestalt von *ideal einfachen Relationen* für die mit idealen Verfahren gewonnenen Zahlen. Diese gelten dann als die *Gesetze* im eigentlichen Sinne.

Der Wortlaut einer Meßvorschrift muß alle für die Messung nötigen Angaben enthalten, nämlich Nennung der erforderlichen *Meßwerkzeuge* (Sinnesorgane und Geräte), der mit ihnen auszuführenden Tätigkeit, und der Auswertung des sinnlich Wahrgenommenen in Form einer (abgelesenen oder gezählten) Zahl, eventuell auch mit Hilfe von *Rechenvorschriften* (Formeln). Die Meßwerkzeuge müssen entweder als verfügbare individuelle oder als gegebenenfalls beschaffbare reelle Objekte hinreichend beschrieben sein. Die exakt eindeutige Formulierung einer Meßvorschrift wie auch ihre exakte Befolgung ist unmöglich. Es gibt nur ein anzustrebendes Ideal.

Häufig liefern an sich verschiedene Verfahren regelmäßig dieselben Zahlen. Das ist die einfachste Form  $a = b$  einer auffindbaren Relation und daher Ausdruck eines Gesetzes. Man pflegt dann aber zumeist zu sagen: Die verschiedenen Verfahren messen *dieselbe* physikalische Größe. Auch im Falle einer Relation  $a = F(b)$  spricht man oft nur vom Unterschied in der *Skala* für dieselbe Größe, speziell, wenn  $a = \alpha b$  gilt, d. h. wenn sich die Zahlen nur um einen konstanten Faktor  $\alpha$  unterscheiden. Besonders einfach (und daher gesucht) sind Relationen von der Form  $a + b = c$ , sog. *Additivitäts-* oder *Superpositionsgesetze*. Auch dann nennt man  $a$ ,  $b$  und  $c$  Quantitäten der gleichen physikalischen Größe. In diesem Falle, wo dann „das Ganze gleich der Summe seiner Teile“ ist, kann eine Quantität einer Größe als Summe ihrer Teilquantitäten aufgebaut werden. Sind letztere gleich groß, so kann man sie als *Einheiten* bezeichnen und die ganze Quantität  $c = a + a + a + \dots + a = n \cdot a$  durch die Zahl  $n$  „relativ zur Einheit  $a$ “ darstellen. Die üblichen Meßverfahren für Längen, Zeiten und Massen (sowie für viele andere Größen) gehören hierher, und ihre „Güte“ wird an der Erfüllung des Additivitätsgesetzes geprüft. Die zugehörigen Einheiten sind durch individuell bezeichnete reelle Objekte festgelegt.

Häufig läßt sich eine Messung in mehrere Teilmessungen zerlegen, deren Ergebnisse nach Vorschrift rechnerisch zu kombinieren sind. Das gilt für die meisten physikalisch wichtigen Größen. Deren Messung kann allein aus Längen-, Zeiten- und Massenmessungen aufgebaut werden. Da diese als besonders einfach oder fundamental gelten, werden solche Messungen häufig „*absolut*“ genannt. Doch ist dieses Wort nur als eine Konvention zu werten.

Die Art der geforderten rechnerischen Verknüpfung der bei absoluten Messungen gefundenen Längen-, Zeiten- und Massenzahlen wird durch die *Dimensionsformel* angedeutet. Diese bildet man formal so, daß in der Rechenvorschrift an Stelle jeder Maßzahl der Länge der Buchstabe  $l$ , und entsprechend für die der Zeiten und Massen  $t$  bzw.  $m$  geschrieben wird. Diese Symbole kombiniert man nach algebraischen Regeln und ersetzt alle übrig bleibenden Zahlen durch 1. So gelangt man auf eine

Form  $[Q] = l^\alpha t^\beta m^\gamma$ . Diese Dimensionsformel definiert die Qualität durchaus nicht eindeutig, und ist auch nicht immer eindeutig aufstellbar.

Ein gegebenes System von Maßeinheiten und die Vorschriften für ihre Benutzung definieren ein *Maßsystem*. Speziell verwendet man bei absoluten Messungen in der Physik das C.G.S.- (Centimeter-Gramm-Sekunden-)System. Bei Übergang zu neuen Einheiten (und ungeänderter Vorschrift) ändern sich die Maßzahlen dann um den Faktor  $\frac{1}{[Q]}$ , wenn  $l, t, m$  als Zahlen genommen (nicht wie oben als Symbole!) die Quantitäten der neuen Einheiten relativ zu den alten bedeuten.

Erster Abschnitt.

## Mechanik.

### A. Mechanik des einzelnen Massenpunktes.

#### 1. Grundgesetz und Begriffe.

Zur Darstellung der Bewegung eines Massenpunktes benutzt man folgende Punktvektoren:

Lage  $r$  (Koordinaten<sup>1</sup>  $x^i$ ).

Geschwindigkeit  $v = \frac{dr}{dt} \quad \left( v^i = \frac{dx^i}{dt} \right)$ .

Beschleunigung  $b = \frac{d^2r}{dt^2} \quad \left( b^i = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{hl} \frac{dx^h}{dt} \frac{dx^l}{dt} \right)$ .

Ist  $\mathfrak{K}$  der Vektor der Kraft und  $m$  die Masse des Punktes, so lautet das *dynamische Grundgesetz* (NEWTON)

$$\mathfrak{K} = m b = m \frac{d^2 r}{dt^2} \quad (K^i = m b^i) \quad (1)$$

$\mathfrak{K}$  muß dabei für jedes Problem als Funktion von  $r$  und  $t$ , eventuell auch von  $\dot{r}$ ,  $\ddot{r}$  usw. vorgegeben sein. *Gesucht* wird  $r$  als Funktion von  $t$  durch Lösung der Vektordifferentialgleichung (1) (System der 3 Komponenten-Gleichungen). Die allgemeine Lösung dieses Systems mit 6 Integrationskonstanten enthält sämtliche bei vorgegebenem Kraftgesetz möglichen Bewegungen. Die im speziellen Falle eintretende Bewegung findet man erst eindeutig, indem man die Integrationskonstanten durch gewisse Bedingungen festlegt, welche man der Lösung vorschreibt (z. B. Ort und Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt oder Ort allein zu zwei Zeitpunkten).

<sup>1</sup> Nur in affinen Koordinatensystemen wird  $x^i = r^i$ , d. h. nur in solchen sind die  $x^i$  die Komponenten des Vektors  $r$  in Richtung vom Nullpunkt zum Aufpunkt. Dagegen sind allgemein die  $dx^i$  die Komponenten von  $dr$ .

$\mathfrak{p} = m\mathfrak{v}$  heißt *Impuls* oder *Bewegungsgröße*. Daher gilt

$$\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{p}}{dt} \quad \left( K^i = \frac{d p^i}{dt} + \Gamma_{hl}^i \frac{p^h p^l}{m} \right). \quad (2)$$

Zerlegt man die Beschleunigung in Radial- und Tangentialbeschleunigung  $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_r + \mathfrak{b}_t$ , so wird (s. S. 118)

$$\mathfrak{b}_r = \frac{\mathfrak{K}}{R^2} v^2 = \frac{[\mathfrak{v} [\mathfrak{b} \mathfrak{v}]]}{v^2}, \quad \mathfrak{b}_t = \frac{\mathfrak{v} (\mathfrak{b} \mathfrak{v})}{v^2} = \frac{\mathfrak{v}}{v} \frac{dv}{dt}.$$

Dabei bedeutet  $\mathfrak{K}$  einen Vektor von Richtung und Betrag des Krümmungsradius der Bahn

—  $m\mathfrak{b}_r$  heißt *Zentrifugalkraft*.

$$dA = (\mathfrak{K} \mathfrak{v}) dt = (\mathfrak{K} d\mathfrak{r}) \quad (dA = (K_i v^i) dt = K_i dx^i) \quad (3)$$

heißt die bei der Verschiebung  $d\mathfrak{r}$  geleistete *Arbeit*.

Es ist

$$dA = m \left( \frac{d\mathfrak{v}}{dt} \mathfrak{v} \right) dt = \frac{d}{dt} \left( \frac{m v^2}{2} \right) dt = dT$$

$$dT = (\mathfrak{p} d\mathfrak{v}), \quad \left( p_i = \frac{\partial T}{\partial v^i}, \quad dT = p_i dv^i \right)$$

$T = \frac{m v^2}{2}$  heißt *kinetische Energie*

$$T = \frac{m}{2} (v^i v_i) = \frac{m}{2} (v^i v^k g_{ik}) = \frac{1}{2} (p_i v^i) = \frac{1}{2m} (p_i p^i). \quad (4)$$

#### Sonderfälle.

**Zentralkraft.** Ist  $\mathfrak{K} \parallel \mathfrak{r}$ , also  $[\mathfrak{K} \mathfrak{r}] = 0$ , so folgt der *Flächensatz*

$$\frac{d}{dt} [\mathfrak{r} \dot{\mathfrak{r}}] = [\mathfrak{r} \ddot{\mathfrak{r}}] = 0.$$

Es ist also

$$[\mathfrak{r} \dot{\mathfrak{r}}] = \mathfrak{f}$$

ein konstanter Vektor und  $(\mathfrak{r} \mathfrak{f}) = 0$ , d. h. die Bewegung erfolgt in einer festen Ebene. (Beispiel hierzu im Anhang, 9.)

**Massenpunkt im Potentialfelde.** Ist die Kraft als Funktion des Ortes und der Zeit gegeben und läßt sie sich als Gradient darstellen:

$$\boxed{\mathfrak{K} = \text{grad } U = -\text{grad } W} \quad \left( K_i = \frac{\partial U}{\partial x^i} = -\frac{\partial W}{\partial x^i} \right),$$

wo  $U(x^1, x^2, x^3, t) = -W(x^1, x^2, x^3, t)$  Skalare sind, so heißt  $U$  die *Kräftefunktion* und  $W$  die *potentielle Energie*. Ist  $U$  auch von  $t$  unabhängig, so heißt  $\mathfrak{K}$  eine *konservative Kraft*. Dann gilt

$$dA = dU = -dW = dT$$

$$\boxed{d(T + W) = 0} \quad (\text{Erhaltungssatz der Energie}).$$

**Zwangskraft.** Soll sich ein Massenpunkt unter dem Einfluß der Kraft  $\mathfrak{R}$  so bewegen, daß er in jedem Augenblicke  $k$  Bedingungsgleichungen

$$f_\alpha(x^1, x^2, x^3, t) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, k)$$

erfüllt<sup>1</sup>, so muß man zu der „äußeren“ Kraft  $\mathfrak{R}$  eine *Zwangskraft*  $\mathfrak{Z}$  hinzufügen in der Form:

$$\mathfrak{Z} = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \text{grad } f_\alpha \quad \left( Z_i = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^i} \right),$$

wo die  $\lambda_\alpha$  zunächst unbestimmte Funktionen von Ort und Zeit sind.  $k = 1$  bedeutet Bindung an die Fläche  $f_1 = 0$ ,  $k = 2$  an die Kurve  $f_1 = 0$ ,  $f_2 = 0$ .  $k > 2$  hat für *einen* Massenpunkt keinen geometrischen Sinn. Die Zwangskräfte stehen senkrecht auf der Fläche (Kurve) und leisten daher keine Arbeit an dem Massenpunkte:

$$(\mathfrak{Z}_\alpha d\mathbf{r}) = 0 \quad \left( \sum_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^i} dx^i = 0 \right).$$

Die Bewegungsgleichungen lauten daher (LAGRANGESche Gleichungen 1. Art):

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathfrak{R} + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \text{grad } f_\alpha \quad \left( m \ddot{x}^i = K^i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^i} \right) \quad (3 \text{ Gleichungen})$$

mit den *Nebenbedingungen*

$$f_\alpha(x^1, x^2, x^3) = 0 \quad (k \text{ Gleichungen}).$$

Das sind  $(3 + k)$  Gleichungen für die  $(3 + k)$  Funktionen  $\mathbf{r}(t)$  und  $\lambda_\alpha(x^1, x^2, x^3, t)$ . Man löst sie, indem man aus den Bewegungsgleichungen die  $\lambda_\alpha$  algebraisch eliminiert; aus den so entstehenden  $(3 - k)$  Gleichungen zusammen mit den  $k$  Nebenbedingungen bestimmt man  $\mathbf{r}(t)$ .

Die Zwangskräfte selbst kann man aus der so gefundenen Lösung durch reine Differentiationen bestimmen.

## 2. Verschiedene Formen des Grundgesetzes.

In kovarianter Schreibweise mit Benutzung der Fundamentalvektoren (S. 134) stellen sich die obigen Größen dar in der Form:

$$d\mathbf{r} = e_i dx^i, \quad \mathbf{v} = c_i v^i, \quad \mathfrak{p} = m\mathbf{v} = m v^i e_i$$

$$\mathfrak{R} = K^i e_i, \quad dU = (\mathfrak{R} d\mathbf{s}) = K^k dx^k (e_k e_i),$$

also

$$\frac{\partial U}{\partial x^i} = K^k (e_i e_k) = K_i.$$

<sup>1</sup> Bedingungsgleichungen, die in der Form  $f_\alpha(x^1, x^2, x^3) = 0$  gegeben sind, heißen *holonom*. Sind sie durch eine nichtintegrale totale Differentialgleichung  $L dx^1 + M dx^2 + N dx^3 = 0$  gegeben, so heißen sie *nichtholonom*.



Die Grundgleichung der Mechanik heißt dann

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \left( \frac{d v^i}{dt} \mathbf{e}_i + v^i \frac{d \mathbf{e}_i}{dt} \right) = K^i \mathbf{e}_i = \mathfrak{R},$$

also nach Multiplikation mit  $\mathbf{e}_k$

$$m \left\{ \frac{d v^i}{dt} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) + v^i \left( \mathbf{e}_k \cdot \frac{d \mathbf{e}_i}{dt} \right) \right\} = \frac{d U}{d x^k}, \quad (1)$$

während die kinetische Energie  $T$  dargestellt wird durch

$$2T = m v^i v^k (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) = v^i \phi_i.$$

Diese Darstellung gestattet die Gleichungen sofort in einem fließenden, d. h. einem willkürlich zeitlich veränderlichen Koordinatensystem zu schreiben.

In einem solchen gilt :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \mathbf{e}_l}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial t} + v^k \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial x^k}, & v^i &= u^i + \frac{d x^i}{dt} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^l} - (\mathbf{u} \text{ grad}) \mathbf{e}_l \\ \mathbf{e}_k \frac{\partial u^k}{\partial x^l} &= \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Dabei bedeutet  $\mathbf{u}$  die Strömungsgeschwindigkeit des Koordinatensystems,  $\frac{d \mathbf{e}_l}{dt}$  bzw.  $\frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial t}$  die Änderung der Vektoren  $\mathbf{e}_l$  mit der Zeit im Massenpunkt bzw. an einem festen Ort, so daß für  $x^i = \text{const}$  wird

$$\mathbf{e}_k \frac{\partial v^k}{\partial x^l} = \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial t}.$$

Daher wird<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x^l} \Big|_{x^r} &= m \left\{ v^i v^k \left( \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^l} \right) + v^i (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) \frac{\partial v^k}{\partial x^l} \right\} = m v^i \left( \mathbf{e}_i \cdot \frac{d \mathbf{e}_l}{dt} \right) \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^l} \Big|_r &= m v^i (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_l) = m v_l = \phi_l \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^l} &= m \left\{ \frac{d v^i}{dt} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_l) + v^i \left( \mathbf{e}_i \cdot \frac{d \mathbf{e}_l}{dt} + \mathbf{e}_l \cdot \frac{d \mathbf{e}_i}{dt} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Die Grundgleichung der Mechanik (1) schreibt sich daher in einem willkürlichen, eventuell auch zeitlich veränderlichen Koordinatensystem

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^l} \right) - \frac{\partial T}{\partial x^l} = \frac{\partial U}{\partial x^l}, \quad (3)$$

oder bei Einführung des „kinetischen Potentials“ (LAGRANGESCHE FUNKTION)  $L(x^i, \dot{x}^i, t) = T + U = T - W$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^l} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^l} \left( = \frac{d \phi_l}{dt} \right)} \quad (\text{LAGRANGESCHE GLEICHUNGEN 2. ART.}) \quad (4)$$

<sup>1</sup> Die Schreibweise bedeutet, daß hier  $T$  als Funktion der  $x^i$  und  $\dot{x}^i$  (also nicht etwa der  $v_i$ ) betrachtet werden soll.

Nun gilt<sup>1</sup> aber

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \Big|_{x^r} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \Big|_{v^r} + p_i \frac{\partial u^i}{\partial \dot{x}^i}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \Big|_{v^r} = - \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \Big|_{v^r}, \quad \frac{\partial U}{\partial \dot{x}^i} \Big|_{v^r} = \frac{\partial U}{\partial \dot{x}^i} \Big|_{v^r},$$

also entsteht an Stelle der LAGRANGESchen Form bei Einführung der HAMILTONSchen Funktion

$$H(x^i, p_i, t) = T - U - p_i u^i = p_i \dot{x}^i - (T + U)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d p_i}{d t} = - \frac{\partial H}{\partial x^i} \Big|_{p_r} \\ \frac{d x^i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \Big|_{x^r} \end{array} \right\} \text{(HAMILTONSche kanonische Gleichungen)} \quad (5)$$

wobei die letzte Gleichung folgt aus

$$2 T = p_i v^i, \quad v^i - u^i = \frac{d x^i}{d t} = \frac{\partial T}{\partial p_i} \Big|_{x^r} - u^i = \frac{\partial (T - U - u^i p_i)}{\partial p_i} \Big|_{x^r}.$$

Die Größen  $x^i$  und  $p_i$  (nicht  $p^i = m \frac{d x^i}{d t}$ ) heißen *generalisierte* Lagen- und Impulskoordinaten. Meist findet man statt  $x^i$  die Schreibweise  $q_i$ .

Für  $u^i = 0$  ist  $H = T - U = T + W$  die Energie und  $\frac{d H}{d t} = 0$ .

Setzt man  $S = \int_{t_0}^t L dt$  (*Wirkungsfunktion*), wo das Integral längs einer Bahn erstreckt und  $S$  als eine Funktion der  $x^i$ , der Zeit  $t$  und von Konstanten betrachtet sei, so wird:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial L}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta \dot{x}^i \right) dt + \frac{\partial S}{\partial t} \delta t \\ &= \int_{t_0}^t \left\{ \left[ \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{d t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \right] \delta x^i + \frac{d}{d t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta x^i \right) \right\} dt + \frac{\partial S}{\partial t} \delta t \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta x^i + \frac{\partial S}{\partial t} \delta t = p_i \delta x^i + \frac{\partial S}{\partial t} \delta t, \end{aligned}$$

also:

$$\frac{\partial S}{\partial x^i} \Big|_t = p_i,$$

1

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \Big|_{v^r} &= v_i v^k \left( e_i \frac{\partial e_k}{\partial \dot{x}^i} \right) = m v_i v^k \left( e^i \frac{\partial e_k}{\partial \dot{x}^i} \right), \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \Big|_{v_r} &= m v_i v_k \left( e^k \frac{\partial e^i}{\partial \dot{x}^i} \right) = m v_i v^k \left( e_k \frac{\partial e^i}{\partial \dot{x}^i} \right) \end{aligned}$$

wobei wegen  $(e^i e_k) = 0$  für  $i \neq k$ , bzw.  $= 1$  für  $i = k$ , gilt

$$e^i \frac{\partial e_k}{\partial \dot{x}^i} = - e_k \frac{\partial e^i}{\partial \dot{x}^i}.$$

ferner

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= L = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + p_i (v^i - u^i) \\ &= \frac{\partial S}{\partial t} + 2T - p_i u^i = \frac{\partial S}{\partial t} + H + L, \end{aligned}$$

also:

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x^i, \frac{\partial S}{\partial x^i}\right) = 0} \quad (\text{HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung}). \quad (6)$$

Es sei aus dieser Differentialgleichung  $S$  bestimmt als Funktion von  $t$ ,  $x^i$  und Integrationskonstanten  $\alpha_i$ , unter denen sich, falls  $H$  explizite von  $t$  unabhängig ist, die Energiekonstante  $h = -\frac{\partial S}{\partial t}$  befindet. Setzt man  $A = S + h(t - t_0)$ , so werden die  $\frac{\partial A}{\partial \alpha_i} = \beta_i$  neue Konstanten. Wählt man diese so, daß die Anfangsbedingungen erfüllt sind, so liefert die letzte Gleichung die Bahnkurve in der Form:

$$x^i = f^i(t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots).$$

## B. Systeme von Massenpunkten.

### 1. Allgemeines.

Das System bestehe aus  $N$  Massenpunkten.

Die Massen  $m_\alpha$  seien Kräften  $\mathfrak{R}_\alpha$  unterworfen. Außerdem mögen sie aufeinander Zentralkräfte  $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$  ausüben.

Dann gilt für jeden Massenpunkt:

$$m b_\alpha = \mathfrak{R}_\alpha + \sum_\beta \mathfrak{R}_{\alpha\beta}, \quad \alpha \neq \beta. \quad (1)$$

Hierbei gilt das *Prinzip der Gleichheit von Aktion und Reaktion*

$$\mathfrak{R}_{\beta\alpha} = -\mathfrak{R}_{\alpha\beta}.$$

Die Arbeit der Kräfte wird

$$\begin{aligned} dA &= \sum_\alpha (\mathfrak{R}_\alpha d\mathbf{r}_\alpha) + \sum_\alpha \sum_\beta (\mathfrak{R}_{\beta\alpha} d\mathbf{r}_\alpha) \\ &= \sum_\alpha (\mathfrak{R}_\alpha d\mathbf{r}_\alpha) + \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\beta (\mathfrak{R}_{\beta\alpha} (d\mathbf{r}_\alpha - d\mathbf{r}_\beta)) \end{aligned} \quad (2)$$

Sind die Kräfte  $\mathfrak{R}_\alpha$  bzw.  $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$  teilweise Zwangskräfte, d. h. durch Bedingungsgleichungen ersetzbar, so verschwindet ihr Anteil in  $dA$ .

Die Bedingungsgleichungen für die  $\mathfrak{Z}_{\alpha\beta}$  haben die Form:

$$\begin{aligned} f(x_\alpha^1, x_\alpha^2, x_\alpha^3, x_\beta^1, x_\beta^2, x_\beta^3) &= 0, \\ [\mathfrak{Z}_{\alpha\beta}, d(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta)] &= 0, \\ \left( (Z_{\alpha\beta})_i = \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial x_\alpha^i} - \frac{\partial f}{\partial x_\beta^i} \right) \right. &\quad \text{im affinen Koordinatensystem),} \\ [\mathfrak{Z}_{\alpha\beta} d\mathbf{r}_\alpha] &= [\mathfrak{Z}_{\alpha\beta} d\mathbf{r}_\beta]. \end{aligned} \quad (3)$$

## 2. Formale Zurückführung auf die Dynamik eines Massenpunktes.

Die Dynamik eines Systems von  $N$  Massenpunkten im dreidimensionalen Raum kann formal auf die eines einzelnen im  $3N$ -dimensionalen zurückgeführt werden.

Die LAGRANGESchen Gleichungen lassen sich nämlich schreiben:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x^i} = \frac{\partial U}{\partial x^i}, \quad \text{wo} \quad T = \sum_n T_n, \quad U = \sum_n U_n, \quad (1)$$

und der Index  $i$  von 1 bis  $3N$  läuft. Dabei ist es durchaus nicht notwendig, daß die  $x^i$  bzw.  $p_i$  für alle Massen auf das gleiche Koordinatensystem bezogen werden. Man kann z. B. so vorgehen, daß man zunächst einen Massenpunkt auszeichnet und auf ein festes oder bewegtes System bezieht, sodann den zweiten auf ein solches, welches relativ zum ersten ruht, den dritten auf eines, in dem die beiden ersten ruhen, also auf ein fließendes usw. Für alle Massenpunkte gelten dann unverändert die LAGRANGESchen oder HAMILTONSchen Gleichungen.

Ebenso wie die  $3$  auf einen Massenpunkt sich beziehenden LAGRANGESchen Gleichungen in ihrer Form ungeändert bleiben, wenn man zu anderen Koordinaten übergeht, so bleibt das System der  $3N$  Gleichungen in seiner Form erhalten, wenn wir an Stelle der  $x^i$  neue  $x'^i$  einführen, die beliebige voneinander unabhängige Funktionen der  $x^i$  sind:

$$x'^i = f_i(x^1, x^2, x^3, \dots, x^{3N}).$$

Die  $3N$   $x'^i$  sind dann als Parameter des gesamten Systems aufzufassen.

Bestehen zwischen den  $x^i$   $\alpha$  unabhängige Bedingungsgleichungen, so kann man  $\alpha$  Koordinaten eliminieren. Es empfiehlt sich dann durch eine Transformation zu neuen Koordinaten  $x'^i$  überzugehen, derart, daß die  $\alpha$  Bedingungsgleichungen durch  $\alpha$  Gleichungen der Form  $x'^l = \text{const}$  ersetzt werden.

Die Zahl  $Z = 3N - \alpha$ , d. h. die Zahl der zur Beschreibung der Anordnung aller Teile erforderlichen Variablen heißt die „Zahl der Freiheitsgrade“ des Systems. Für ein System von  $3$  und mehr starr verbundenen Massenpunkten ist  $Z = 6$ .

## 3. Gleichgewichtslagen und Schwingungen.

Sind für ein bestimmtes Wertesystem  $x^i$  alle  $\frac{\partial U}{\partial x^i} = 0$  und sind alle  $\ddot{x}^i = 0$ , so besteht Gleichgewicht. Man kann  $U$  in der Nachbarschaft dieser Stelle darstellen in der Form:

$$U = U_0 + \sum_i \frac{(x^i - x_0^i)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^i{}^2} + \sum_i \sum_k' (x^i - x_0^i) (x^k - x_0^k) \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^i \partial x^k} + \dots \quad (1)$$

d. h.  $U - U_0 = \sum_i \sum_k x^i x^k \frac{A_{ik}}{2}$ , wenn man  $x_0^i$  als neuen Nullpunkt wählt. Dann gilt (in kartesischen Koordinaten):

$$m_i \frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x^i} = \sum_k x^k A_{ik}. \quad (2)$$

Setzt man hierin

$$x^i = a^i e^{\frac{\omega t}{\sqrt{m_i}}},$$

so wird

$$\dot{x}^i \omega^2 = \sum_k x^k A_{ik},$$

d. h. man erhält ein System von 3  $N$  homogenen linearen Gleichungen (vgl. S. 79).

Durch Nullsetzen der Determinante erhält man eine Gleichung 3  $N$ -ten Grades für  $\omega^2$ .

Transformiert man die  $x^i$  wie auf S. 82 in die neuen Koordinaten  $x'^i$ , so heißen diese „Normalkoordinaten“.

*Stabil* ist der durch  $x'^i = x_0'^i$  gegebene Gleichgewichtszustand bzw. der durch  $x'^i = a^i e^{\frac{\omega t}{\sqrt{m_i}}}$  gegebene Schwingungszustand nur, wenn die Gleichung für  $\omega^2$  nur negativ reelle Wurzeln hat. Andernfalls heißt das Gleichgewicht *labil*.

### C. Prinzipien der Mechanik.

Das alles umfassende Grundprinzip der Mechanik des Massenpunktes oder von Massenpunktsystemen ist NEWTONS **dynamische Grundgleichung**:

$$\mathfrak{R} = m \ddot{\mathbf{r}} \quad (\text{vgl. S. 229 und 234}). \quad (1)$$

Im folgenden sind eine Reihe anderer, zum Teil spezieller Formulierungen, die sog. „Prinzipien“ zusammengestellt.

#### 1. Differentialprinzipien.

##### a) LAGRANGESCHE GLEICHUNGEN 1. ART (vgl. S. 231).

Ist der Massenpunkt *nicht frei*, sondern an Bedingungen gebunden, etwa an eine Fläche  $\varphi(x, y, z) = 0$  oder eine Kurve  $\varphi(x, y, z) = 0$ ,  $\psi(x, y, z) = 0$ , so ist die Bewegung bestimmt durch

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathfrak{R} + \lambda \text{grad } \varphi + \mu \text{grad } \psi \quad (\text{LAGRANGESCHE GLEICHUNGEN 1. ART}). \quad (2)$$

Das sind zusammen mit  $\varphi = 0$  und  $\psi = 0$  fünf Gleichungen für  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  und die Funktionen  $\lambda$  und  $\mu$ .

Bei Vorhandensein von mehreren Massenpunkten gelten die LAGRANGE-schen oder NEWTONSchen Gleichungen für jeden einzelnen Massenpunkt. Die Beziehungen der einzelnen Massenpunkte zueinander sind durch die Nebenbedingungen festgelegt.

**b) Das Prinzip des kleinsten Zwanges (GAUSS).**

„Zwang“ heißt die Größe

$$\frac{1}{m} (m \ddot{r} - \mathfrak{R})^2. \quad (3)$$

Die Bewegung erfolgt so, daß der Zwang in jedem Augenblick ein Minimum ist.

Bei mehreren Massenpunkten ist der Zwang gleich der Summe der Einzelzwänge.

**c) Das Prinzip der virtuellen Verrückungen (der Statik) und das Prinzip von D'ALEMBERT.**

Ein System von  $n$  Massenpunkten ist im Gleichgewicht, wenn die Gesamtarbeit der äußeren Kräfte bei jeder virtuellen, d. h. mit den Bedingungen des Systems verträglichen Verrückung verschwindet:

$$\sum_{i=1}^n \mathfrak{R}_i \delta r^i = 0. \quad (4)$$

Bestehen zwischen den Massenpunkten Bedingungen  $\varphi^{(k)}(r_1, r_2, \dots, r_n) = 0$ , so müssen die  $\delta r^i$  die Gleichungen erfüllen:

$$\sum_{i=1}^n \text{grad}_i \varphi^{(k)} \cdot \delta r^i = 0.$$

Führt man das negative Produkt aus Masse und Beschleunigung als *Trägheitskraft* ein, so erhält man das Prinzip von D'ALEMBERT, durch das die Dynamik formal auf die Statik zurückgeführt wird:

$$\sum_{i=1}^n (\mathfrak{R}_i - m_i \ddot{r}_i) \cdot \delta r^i = 0. \quad (5)$$

## 2. Variationsprinzipien.

### a) HAMILTONSches Prinzip.

Von allen Bewegungen, die mit den Rand- und Nebenbedingungen eines mechanischen Problems verträglich sind, ist die wirklich zwischen  $t_1$  und  $t_2$  stattfindende Bewegung diejenige, die das Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (6)$$

zum Minimum macht. Darin heißt

$$L = T - W \quad (7)$$

die LAGRANGESche Funktion,  $T$  ist die kinetische,  $W$  die potentielle Energie. Dies Prinzip ist das umfassendste der Prinzipien der Mechanik. Es gilt für beliebig viele Massenpunkte und beliebig viele Freiheitsgrade. Die Zeit  $t$  kann sowohl in  $W$  wie in den Nebenbedingungen explizite auftreten. Es ist nicht an die Gültigkeit des Energiesatzes gebunden, d. h. auch auf nichtkonservative Systeme anwendbar. Über Berücksichtigung von Nebenbedingungen vgl. Teil I, Abschnitt 11, S. 216.

Dem Prinzip sind äquivalent die LAGRANGESchen Differentialgleichungen 2. Art (vgl. S. 232), die JACOBISCHE partielle Differentialgleichung (vgl. S. 234) und für konservative Systeme die HAMILTONSchen kanonischen Gleichungen (vgl. S. 233).

#### b) Das Prinzip der kleinsten Wirkung (EULER).

Bei konservativen Systemen wird das Integral

$$\int_{t_0}^t T dt \quad (8)$$

bei der wirklich stattfindenden Bewegung in jedem Augenblick  $t$  ein Minimum, verglichen mit allen anderen mit den Bedingungen verträglichen Bewegungen der gleichen Energie  $E = T + W$ . Festgehalten werden bei der Variation die Anfangszeit  $t_0$  sowie Anfangs- und Endpunkt der Bahn; dagegen nicht die Endzeit  $t$ .

Das EULERSche Prinzip ist nicht auf das HAMILTONSche zurückführbar. Wegen der offenen oberen Grenze sind die gewöhnlichen Methoden der Variationsrechnung nicht anwendbar.

#### c) Das Prinzip von JACOBI.

Bei konservativen Systemen wird das Integral

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{E - W(x, y, z)} ds, \quad (9)$$

zwischen den festen Punkten  $r_1$  und  $r_2$  längs einer beliebigen Kurve erstreckt, ein Minimum, wenn der Integrationsweg übereinstimmt mit der wirklichen Bahnkurve des Massenpunktes. Der zeitliche Ablauf der Bewegung kann sodann aus dem Energiesatz  $T + W = E = \text{constans}$  bestimmt werden.

Bezeichnet man

$$n(x, y, z) = \sqrt{E - W(x, y, z)}$$

als Brechungsindex, so ist das Prinzip formal identisch mit dem FERMATschen Prinzip der geometrischen Optik.

### D. Starrer Körper.

Ein Massenpunktsystem bestehend aus starr miteinander (durch Zwangskräfte) verbundenen Massen  $m_\alpha$  heißt ein *starrer* Körper.

Die Geschwindigkeiten  $v_\alpha$  seiner Punkte sind dann durch zwei freie Vektoren<sup>1</sup>  $v_0$  und  $u$  darstellbar:

$$v_\alpha = v_0 + [u r_\alpha] \quad (v_\alpha^i = v_0^i + u_k^i x_\alpha^k, \quad u^{ik} = -u^{ki}). \quad (1)$$

$r_\alpha$  ist der Ortsvektor von einem mit dem Körper starr verbundenen Nullpunkt aus.

$v_0$  ist die Geschwindigkeit des Punktes  $r=0$ .

$u$  ist die Drehgeschwindigkeit um die durch  $r=0$  gehende Achse  $\parallel u$ .

Verschiebt man das Bezugssystem im Körper um die Strecke  $a$  ( $r' = r - a$ ), so wird  $v = v_0 + [u a] + [u, r - a] = v'_0 + [u r']$ , d. h. die Drehgeschwindigkeit  $u$  ist unabhängig von der Wahl des Bezugssystems.

Wählt man speziell  $a = -\frac{[u v]}{u^2}$ , so wird

$$v'_0 = \frac{u(uv)}{u^2}, \quad \text{d. h.} \quad v'_0 \parallel u.$$

Die Bewegung ist also als reine *Schraubung* darstellbar. Die Achse durch den neuen Nullpunkt ( $r'=0$ ) heißt *instantane Drehachse*.

Weitere wichtige Vektoren sind:

$$p = \sum_\alpha m_\alpha v_\alpha \text{ der Gesamtimpuls} \quad p^i = \sum_\alpha m_\alpha v_\alpha^i \quad (2)$$

$$q = \sum_\alpha m_\alpha [r_\alpha v_\alpha] \text{ der gesamte Drehimpuls} \quad q^{ik} = \sum_\alpha m_\alpha (x_\alpha^i v_\alpha^k - x_\alpha^k v_\alpha^i) \quad (3)$$

$$q^{ik} = -q^{ki}.$$

Die kinetische Energie  $T = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} v_\alpha^2$  ist dann darstellbar durch:

$$2T = (v_0 p) + (u q) = (v^i p_i + u^{ik} q_{ik}). \quad (4)$$

*Schwerpunkt* heißt der Punkt, für den als Nullpunkt ( $r=0$ )

$\sum_\alpha m_\alpha r_\alpha = 0$  wird.

$$M = \sum_\alpha m_\alpha \quad (5)$$

heißt *Gesamtmasse*,

$$J_u = \sum_\alpha m_\alpha \frac{[u r_\alpha]^2}{u^2} \quad (6)$$

heißt das *Trägheitsmoment* bezogen auf die Drehachse  $u$  durch  $r=0$ .

Es ist dann:

$$T = \frac{M v_0^2}{2} + \frac{J_u u^2}{2}. \quad (7)$$

<sup>1</sup> Es sollen *nur affine* (d. h. gradlinig äquidistante) Koordinaten in Frage kommen, da nur in solchen die Komponenten der freien Vektoren vom Ort unabhängig sind.



Die Kräfte auf starre Körper sind (in ihrer Wirkung) darzustellen durch zwei Vektoren:

$$1. \text{ die Gesamtkraft } \mathfrak{R} = \sum_{\alpha} \mathfrak{R}_{\alpha} \quad K = \sum_{\alpha} K_{\alpha}^i, \quad (8)$$

$$2. \text{ das Drehmoment } \mathfrak{Q} = \sum_{\alpha} [r_{\alpha} \mathfrak{R}_{\alpha}] \quad L^{ik} = \sum_{\alpha} (x_{\alpha}^i K_{\alpha}^k - x_{\alpha}^k K_{\alpha}^i) \quad (9)$$

$$L_{ik} = -L^{ki}.$$

Die *Bewegungsgleichungen* lauten dann:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathfrak{p}}{dt} &= \mathfrak{R}, & \frac{d\mathfrak{p}^i}{dt} &= K^i, \\ \frac{d\mathfrak{q}}{dt} &= \mathfrak{Q} - [v_0 \mathfrak{p}], & \frac{d\mathfrak{q}^{ik}}{dt} &= L^{ik} - v_0^i \mathfrak{p}^k + v_0^k \mathfrak{p}^i \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Wir wählen im weiteren den Schwerpunkt zum Nullpunkt unseres Systems, so daß  $\sum_{\alpha} m_{\alpha} v_{\alpha} = 0$  ist. Dann vereinfachen sich die Gleichungen, wegen  $[v_0 \mathfrak{p}] = 0$  zu der Form:

$$\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = \mathfrak{R}, \quad \frac{d\mathfrak{q}}{dt} = \mathfrak{Q}. \quad (11)$$

#### Der kräftefreie Kreisel.

Fehlen alle äußeren Kräfte, bzw. heben diese sich vollständig auf, wie z. B. die Gravitationskräfte bei einer Unterstützung des Körpers im Schwerpunkt, so vereinfachen sich die Beziehungen wesentlich. Es gilt speziell:

$$\frac{d\mathfrak{q}}{dt} = 0. \quad (12)$$

Die Relation (3):

$$\mathfrak{q} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [r_{\alpha} [u r_{\alpha}]]$$

läßt sich durch einen symmetrischen Tensor  $\mathfrak{X}$  darstellen:

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{X} u. \quad (13)$$

$\mathfrak{X}$  ist natürlich, ebenso wie  $u$ , zeitabhängig. Der Energiesatz fordert:

$$(u \mathfrak{q}) = (u \mathfrak{X} u) = \text{const} = C_1, \quad (14)$$

andererseits fordert (12):

$$\mathfrak{q}^2 = (\mathfrak{X} u \mathfrak{X} u) = (u \mathfrak{X}^2 u) = C_2. \quad (15)$$

Wir führen nunmehr durch den orthogonalen Tensor  $\mathfrak{D}$  ein neues Bezugssystem ein durch:

$$r = \mathfrak{D} \bar{r}$$

und lassen  $\mathfrak{D}$  derartig von der Zeit abhängen, daß

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = 0 \quad (16)$$

wird. (Transformation auf ein *körperfestes Bezugssystem*.) In diesem lautet (13):

$$q = \bar{\mathfrak{X}} u,$$

wo nunmehr  $\bar{\mathfrak{X}}$ , da es nur von den Massen und den  $\bar{r}$  abhängt, *zeitunabhängig* wird. Das Tensorellipsoid  $(\bar{r} \bar{\mathfrak{X}} \bar{r}) = 1$  heißt das *Trägheitsellipsoid* des Körpers.

Die transformierten Gleichungen (14) und (15):

$$(\bar{u} \bar{\mathfrak{X}} u) = C_1$$

und

$$(\bar{u} \bar{\mathfrak{X}}^2 u) = C_2$$

liefern folgende anschauliche Darstellung für die zeitliche Änderung von  $\bar{u}$ :

Deuten wir  $\bar{u}$  als Ortsvektor einer Bahnkurve, so ergibt sich diese als Schnittkurve der beiden Tensorellipsoide von  $\frac{\bar{\mathfrak{X}}}{C_1}$  und  $\frac{\bar{\mathfrak{X}}^2}{C_2}$  (*Polhodiekurve*).

Aus

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \mathfrak{D} \frac{d\bar{r}}{dt} + \mathfrak{D}' \bar{r} = [u \bar{r}] = \mathfrak{D} [\bar{u} \bar{r}]$$

folgt wegen (16) für einen beliebigen Vektor  $a$ :

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \mathfrak{D} \left( \frac{d\bar{a}}{dt} + [u \bar{a}] \right) \quad (\text{vgl. S. 128}),$$

also wegen (12):

$$\frac{d\bar{q}}{dt} + [\bar{u} \bar{q}] = 0 \quad (\text{EULERSche Gleichung}) \quad (17)$$

[bzw. =  $\bar{\mathfrak{L}}$  bei Vorhandensein eines äußeren Drehmomentes (11)].

Aus (14) folgt ferner, daß der Vektor  $u$  als Ortsvektor gedeutet immer auf eine feste Ebene senkrecht zu  $q$  hinweist. Diese Ebene ist zugleich Tangentialebene an das Ellipsoid  $\frac{\bar{\mathfrak{X}}}{C_1}$ , d. h. das Trägheitsellipsoid rollt bei festem Zentrum auf einer festen Ebene. Die Bahn des Berührungspunktes definiert nach Größe und Richtung die Zeitabhängigkeit des Vektors  $u$  („*Herpolhodiekurve*“).

### Der symmetrische Kreisel.

Im Falle einer *Rotationssymmetrie* des Körpers ist die Benutzung eines Tensors unnötig. Hier genügt an Stelle von (13) der Ansatz:

$$q = \alpha u + \beta \mathfrak{f}(u \mathfrak{f}) \quad (\mathfrak{f}^2 = 1), \quad (1)$$

wo  $\mathfrak{f}$  ein Einheitsvektor in Richtung der Figurenaxe ist und  $\alpha$  und  $\beta$  zwei Konstanten sind, die die Massenverteilung bzw. die Hauptträgheitsmomente berücksichtigen. Nehmen wir an, daß alle äußeren Kräfte zusammengefaßt werden können in eine Kraft  $\mathfrak{R}$ , die in einem Punkt der Figurenaxe im Abstand 1 vom Drehpunkt angreift, so gelten folgende Gleichungen:

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = [\mathfrak{f} \mathfrak{R}], \quad \frac{d\mathfrak{f}}{dt} = [u \mathfrak{f}], \quad (2)$$

Diese Gleichungen genügen zur Berechnung der unbekanntenen Vektoren  $u$  und  $f$  bei gegebenen Anfangsbedingungen und gegebenem  $\mathfrak{R}$ .

Ist  $\mathfrak{R}$  konstant und gehen wir aus von einem Zustand, wo  $\mathfrak{R}$ ,  $f$  und  $u$  und daher auch  $q$  konplanar sind, und besteht die Relation

$$\mathfrak{R} = \tau q + \alpha \tau^2 f, \quad (3)$$

wo  $\tau$  ein beliebiger Faktor ist, so folgt, daß das System dieser Vektoren in sich unverändert mit der Geschwindigkeit  $\omega = \frac{K}{\alpha \tau}$  um  $\mathfrak{R}$  rotiert. („Reguläre Präzession“.)

Für die allgemeine Lösung der Gleichungen geht man üblicherweise in ein geeignetes Koordinatensystem über. Die weitere Rechnung führt dann auf elliptische Funktionen.

Beschränkt man sich auf die Untersuchung solcher Bewegungen, die der regulären Präzession nahe benachbart sind, so kann man das Problem wie folgt linearisieren:

Man transformiere zunächst auf ein mit der Geschwindigkeit  $\omega$  um  $\mathfrak{R}$  rotierendes Bezugssystem. In diesem sind die bei der regulären Präzession gefundenen  $f$ ,  $u$  und  $q$  konstant =  $f_0$ ,  $u_0$  und  $q_0$ . Eine benachbarte Bewegungsform wird dann gegeben durch:

$$f = f_0 + \delta f, \quad u = u_0 + \delta u, \quad q = q_0 + \delta q,$$

wo wir die  $\delta f$ ,  $\delta u$  und  $\delta q$  als so kleine Größen auffassen, daß ihre Produkte vernachlässigt werden können. Zu ihrer Bestimmung findet man dann leicht die Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \delta f = \frac{K}{\alpha \omega} \left[ \dot{f}_0 \left( \delta f + \frac{\omega}{K} \gamma q \right) \right], \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \delta q = - \left[ \mathfrak{R} \left( \delta f + \frac{\omega}{K} \delta q \right) \right]. \quad (5)$$

Diese linearen Gleichungen sind leicht zu lösen, auch in Vektorform (vgl. S. 131). Die Bewegung ergibt sich wieder als Präzessionsbewegung z. B. von  $f$  um  $f_0$ , die sich der regulären Präzession überlagert. Sie wird als „Nutation“ bezeichnet.

## E. Mechanik der Kontinua.

### 1. Kinematik.

Die Massen seien kontinuierlich verteilt. Ihre Geschwindigkeiten werden daher durch einen *Feldvektor*  $v$  bestimmt.

Die *Massendichte* ist ein Skalar  $\rho$ , definiert durch  $\rho = \lim_{V \rightarrow 0} \left( \frac{M}{V} \right)$  aus der im Volumen  $V$  enthaltenen Masse  $M$ , so daß  $\int_V \rho dv = M$  ist.

Es ist  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0$  (*Kontinuitätsgleichung*, *Erhaltungssatz der Materie*).

Hier bedeutet  $\frac{\partial}{\partial t}$  die Änderung des Argumentes an einer festen Stelle des Raumes mit der Zeit (*lokaler* Differentialquotient). Sucht man die betreffende Änderung in einem mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegten Punkt, so verwenden wir das Symbol  $\frac{d}{dt}$  (*substantieller* Differentialquotient).

Es ist für einen Skalar  $\alpha$ :  $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{ grad } \alpha)$ ,

für einen Vektor  $\mathbf{a}$ :  $\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{ grad } \mathbf{a})$ ,

also  $\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{ div } \mathbf{v} = 0$ .

Für *inkompressible* Substanzen ist  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  (nicht  $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ ) und  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ .

Infinitesimale Verschiebungen  $\mathfrak{f}$  der Punkte eines Kontinuums sind in der Umgebung eines Punktes  $\mathbf{r}_0$  als lineare Funktionen des Ortes  $\delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  und eventuell der Zeit zu betrachten.

Wir zerlegen  $\mathfrak{f}$  in drei Teile:  $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_0 + \frac{1}{2} [\delta\mathbf{r} \text{ rot } \mathfrak{f}] + \mathfrak{S} \delta\mathbf{r}$  mit den Komponenten (in kovarianter Schreibweise):

$$s^i = s_0^i + \delta x^k R_k^i + \delta x^k S_k^i, \quad (1)$$

wobei

$$R_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_i}{\partial x^k} - \frac{\partial s_k}{\partial x^i} \right) \quad (2)$$

und

$$S_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_i}{\partial x^k} + \frac{\partial s_k}{\partial x^i} \right) - s_l \Gamma_{ik}^l. \quad (3)$$

$\mathfrak{f}_0$  ist die Verschiebung des Punktes  $\mathbf{r}_0$ .

$\frac{1}{2} [\delta\mathbf{r} \text{ rot } \mathfrak{f}]$  ist eine starre Rotation.

$\mathfrak{S} \delta\mathbf{r}$  heißt die *Deformation*.  $\mathfrak{S}$  ist ein symmetrischer Tensor (*Deformationstensor*).

$\mathfrak{S} \delta\mathbf{r}$  läßt sich weiter zerlegen in

$$\mathfrak{S} \delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{r} \cdot \frac{\text{div } \mathfrak{f}}{3} + \mathfrak{S}' \delta\mathbf{r}, \quad (4)$$

so daß  $\text{div} (\mathfrak{S}' \delta\mathbf{r}) = 0$  ist, oder in kovarianten Komponenten<sup>1</sup>:

$$S_{ik} = \frac{|\mathfrak{S}|}{3} \cdot g_{ik} + S'_{ik}, \quad \text{also} \quad |\mathfrak{S}'| = 0. \quad (4')$$

Der erste Teil entspricht einer homogenen *Dilatation*.

Der zweite Teil entspricht einer *Scherung*, d. h. Formänderung bei konstantem Volumen.

In analoger Weise läßt sich das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v} = \frac{d\mathfrak{f}}{dt}$  in der Umgebung des Punktes  $\mathbf{r}_0$  darstellen:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2} [\delta\mathbf{r} \text{ rot } \mathbf{v}] + \mathfrak{B} \delta\mathbf{r} \quad (5)$$

und

$$\mathfrak{B} \delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{r} \frac{\text{div } \mathbf{v}}{3} + \mathfrak{B}' \delta\mathbf{r}. \quad (6)$$

<sup>1</sup>  $|\mathfrak{S}|$  bedeutet  $\Sigma S_i^i$ , vgl. S. 135.

## 2. Kräfte.

Die in einem Kontinuum wirkenden Kräfte lassen sich einteilen in fernwirkende und nahwirkende.

Erstere werden dargestellt durch Feldvektoren  $\mathfrak{f}$  (*Volumenkräfte*), letztere durch Flächenvektoren  $\mathfrak{p}$  (*Oberflächenkräfte*).

Die Volumenkräfte (Gravitation u. dgl.) wirken auf die Elemente des den Raum erfüllenden Substrats.

Die Oberflächenkräfte (Oberflächendrucke, äußere Reibung u. dgl.) wirken nur auf die Elemente der Oberfläche eines begrenzten Körpers.

Um die inneren nahwirkenden (Atom-)Kräfte in die Rechnung einzuführen, verfährt man wie folgt: Man denkt sich den Körper durch einen Schnitt in zwei Teile zerlegt und fragt nach den Oberflächenkräften  $\mathfrak{p}'$ , die man an den zwei so neugebildeten Oberflächen anzusetzen hat, um den ursprünglichen durch den Schnitt aufgehobenen atomaren Zusammenhang wieder herzustellen. Diese Kräfte  $\mathfrak{p}'$  sind an den zwei Flächen entgegengesetzt gleich. Sie sind an jeder Stelle im allgemeinen abhängig von der Orientierung der Schnittfläche. Diese Abhängigkeit wird als linear angenommen und dargestellt durch:

$$\mathfrak{p}' = \mathfrak{P} \mathfrak{n}, \quad p'^i = P^{ik} n_k, \quad (1)$$

wo  $\mathfrak{n}$  der nach außen gerichtete Einheitsnormalvektor zur Schnittfläche ist.

$\mathfrak{P}$  heißt der *Spannungstensor*.

$\mathfrak{P} \mathfrak{n}$  läßt sich zerlegen in

$$\mathfrak{P} \mathfrak{n} = -\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p} + \mathfrak{P}' \mathfrak{n}, \quad P_{ik} = \frac{|\mathfrak{P}|}{3} g_{ik} + P'_{ik}, \quad (2)$$

$$\text{wo } |\mathfrak{P}'| = 0,$$

so daß  $\text{div } \mathfrak{P}' \mathfrak{r} = 0$  ist.

$$\mathfrak{p} \text{ heißt } \textit{Druck} \left( = -\frac{|\mathfrak{P}|}{3} \right).$$

Die Gesamtkraft auf ein Volumen  $V$  ist

$$\mathfrak{R} = \int \mathfrak{f} dv + \int \mathfrak{p} df. \quad (3)$$

Das Drehmoment ist

$$\mathfrak{Q} = \int dv [\mathfrak{f} \mathfrak{r}] + \int df [\mathfrak{p} \mathfrak{r}]. \quad (4)$$

Die Kraft, die durch die auf die Oberfläche der Volumenelemente wirkenden Oberflächenkräfte ausgeübt wird, ist durch einen Feldvektor  $\mathfrak{f}'$  zu ersetzen:

$$\mathfrak{f}' = \text{div } \mathfrak{P}.$$

## 3. Elastizitätstheorie.

Die statische Elastizitätstheorie fragt nach dem Gleichgewicht eines unter der Einwirkung von Kräften  $\mathfrak{f}$  und  $\mathfrak{p}$  deformierten Körpers. Es kann nur bestehen für  $\mathfrak{f} = -\text{div } \mathfrak{P}$  im Innern und  $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \mathfrak{n}$  an der

Außenfläche. Ferner muß der Tensor  $\mathfrak{P}$  symmetrisch sein, damit keine Drehmomente übrig bleiben.

Nach dem HOOKEschen Gesetz sind die Verschiebungen  $\mathfrak{f}$  lineare Funktionen der Kräfte  $\mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{f}$ .

Daher wird die Arbeit der äußeren Kräfte für eine statische Deformation:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int d v (\mathfrak{f} \mathfrak{f}) + \frac{1}{2} \int d f (\mathfrak{f} \mathfrak{p}) \\ &= -\frac{1}{2} \int d v (\mathfrak{f} \operatorname{div} \mathfrak{P}) + \frac{1}{2} \int d f (\mathfrak{f} \mathfrak{P} \mathfrak{n}) \\ &= \frac{1}{2} \int d v (\mathfrak{S} \mathfrak{P}) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Es ist also

$$\omega = \frac{1}{2} (\mathfrak{P} \mathfrak{S}) = \frac{1}{2} P_{ik} S^{ik} \quad (2)$$

die in der Volumeneinheit enthaltene *potentielle Energie*, d. h. die Energiedichte.  $\omega$  ist eine homogene Funktion 2. Grades der Deformation bzw. der Spannungskomponenten.

Aus Gleichung (2) folgt:

$$P_{ik} = 2 \frac{\partial \omega}{\partial S_{ik}}.$$

Schreiben wir das HOOKEsche Gesetz als lineare Beziehung zwischen den Tensoren  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{S}$  in der Form  $P_{ik} = a_{ik}^{lm} S_{lm}$ , so treten wegen der Symmetrie von  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{S}$  21 Konstanten auf, indem

$$a_{ik}^{lm} = a_{ki}^{ml} = a_{ki}^{lm} = a_{ik}^{ml} \quad (3)$$

wird.

Für *isotrope Medien* vereinfacht sich die Abhängigkeit. Hier müssen aus Symmetriegründen die Hauptachsenrichtungen der Tensoren  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{S}$  zusammenfallen. Man sieht leicht, daß der allgemeinste Ansatz für die lineare Abhängigkeit dann lautet:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\operatorname{div} \mathfrak{f}}{3} &= \alpha \cdot \mathfrak{p}, & \mathfrak{S}' &= \beta \mathfrak{P}' \\ S_i^i &= \alpha P_i^i, & S_{ik}' &= \beta P_{ik}' \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die anschaulich physikalische Bedeutung der Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  folgt aus Anwendungen auf spezielle Probleme. Es ist

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1-2\mu}{E} = \frac{\kappa}{3}, & \beta &= \frac{1+\mu}{E}, \\ E &= \frac{3}{\alpha + 2\beta}, & \mu &= \frac{\beta - \alpha}{\alpha + 2\beta}, \end{aligned} \quad (5)$$

wo  $E$  der Elastizitätsmodul,

$\mu$  der Querkontraktionskoeffizient,

$\kappa$  die Kompressibilität ist.

In kovarianter Form ist:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{S}| &= \alpha |\mathfrak{P}|, & S'_{ik} &= \beta P'_{ik} & (|\mathfrak{S}| &= S^{ik} g_{ik}), \\ S_{ik} &= \frac{1}{3} |\mathfrak{S}| g_{ik} + S'_{ik} = \frac{\alpha - \beta}{3} |\mathfrak{P}| g_{ik} + \beta P_{ik}, \\ P_{ik} &= \frac{1}{3} |\mathfrak{P}| g_{ik} + P'_{ik} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) |\mathfrak{S}| g_{ik} + \frac{1}{\beta} S_{ik}. \end{aligned}$$

Es folgt daher:

$$S_{ik} = -\frac{\mu}{E} |\mathfrak{P}| g_{ik} + \frac{\mu + 1}{E} P_{ik}, \quad (6)$$

$$P_{ik} = \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \cdot |\mathfrak{S}| g_{ik} + \frac{E}{1 + \mu} \cdot S_{ik}. \quad (6')$$

Für die Energiedichte folgt<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} 2\omega = S_{ik} P^{ik} &= \frac{1}{\beta} (S^2) + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) |\mathfrak{S}|^2 & ((S^2) &= S_{ik} S^{ik}) \\ &= \beta (P^2) + \frac{\alpha - \beta}{3} |\mathfrak{P}|^2. \end{aligned} \quad (7)$$

#### a) Statische Elastizitätsprobleme.

Entweder sind die  $\mathfrak{f}$  und  $\mathfrak{p}$  gegeben und  $\mathfrak{f}$  gesucht oder umgekehrt. Zwischen diesen bestehen nach obiger Theorie die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{f} &= -\frac{1}{2\beta} \Delta \mathfrak{f} - \frac{1}{6} \left( \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \text{grad div } \mathfrak{f} \\ \mathfrak{p} &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \mathfrak{n} \text{ div } \mathfrak{f} + \frac{1}{2\beta} [\mathfrak{n} \text{ rot } \mathfrak{f}] + \frac{1}{\beta} (\mathfrak{n} \text{ grad}) \mathfrak{f}. \end{aligned}$$

Bei gegebenen Deformationen findet man also die Kräfte durch Differentiation. Bei gegebenen Kräften ist aber die Deformation nur durch das viel schwierigere Problem der Lösung einer Differentialgleichung zu ermitteln. Für die einfachsten Fälle genügt es, nach der Differentiationsmethode eine größere Anzahl von speziellen Lösungen aufzustellen und unter diesen die gewünschte Lösung herauszusuchen. Besonders wichtig sind dabei die Fälle, wo die Volumenkräfte  $\mathfrak{f}$  verschwinden, da in der Regel nur Oberflächenkräfte in Frage kommen. In diesem Falle wird  $\text{div } \mathfrak{P} = 0$ , also:

$$\Delta \mathfrak{f} + \frac{1}{1 - 2\mu} \text{grad div } \mathfrak{f} = 0$$

oder:

$$\text{rot rot } \mathfrak{f} - 2 \cdot \frac{1 - \mu}{1 - 2\mu} \text{grad div } \mathfrak{f} = 0.$$

<sup>1</sup> Es ist meist üblich von dieser Gleichung auszugehen, weil  $(S^2)$  und  $|\mathfrak{S}|^2$  die beiden einzigen unabhängigen quadratischen Invarianten der Verschiebung sind. Setzt man  $2\omega = A(S^2) + B|\mathfrak{S}|^2$ , so ist  $A = \frac{1}{\beta} = \frac{E}{1 + \mu}$  und

$$B = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) = \frac{E\mu}{(1 - 2\mu)(1 + \mu)}.$$

Für diese Differentialgleichung kann man leichter partikuläre Lösungen finden, aus denen die gesuchte Lösung aufzubauen ist.

Spezielle Lösungen sind mit  $C = 1 - 2\mu$ :

1. Kugelsymmetrische Lösungen:

$$\mathfrak{f} = r \quad (\text{homogene Dilatation})$$

$$\mathfrak{f} = \frac{r}{r^3} \quad (\text{Dilatation mit Singularität bei } r = 0: \\ \text{„Dilatationskern“}).$$

2. Drehungen um den Vektor  $\mathfrak{a}$  als Achse:

$$\mathfrak{f} = [\mathfrak{a} r] \quad (\text{Drehung als starrer Körper})$$

$$\mathfrak{f} = \frac{[\mathfrak{a} r]}{r^3} \quad (\text{Drehungskern: äußeres Kräftepaar greift bei } \\ r = 0 \text{ an, dort Singularität}).$$

3. Andere Lösungen:

a) Singularitätenfrei (Biegung):

$$\mathfrak{f} = -\frac{2+C}{3C+1} r^2 \mathfrak{a} + (\mathfrak{a} r) r, \quad \frac{2+C}{3C+1} = \frac{3-2\mu}{4-6\mu}.$$

b) Lösungen mit Singularität bei  $r = 0$ , z. B.:

$$\mathfrak{f} = (2C+1) \frac{\mathfrak{a}}{r} + \frac{(\mathfrak{a} r)}{r^3} r, \quad 2C+1 = 3-4\mu.$$

Mit jedem  $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_0$  ist auch

$$\mathfrak{f}_1 = (\mathfrak{a} \text{ grad}) \mathfrak{f}_0, \quad \mathfrak{f}_2 = (\mathfrak{b} \text{ grad}) ((\mathfrak{a} \text{ grad}) \mathfrak{f}_0),$$

$$\mathfrak{f}_3 = (\mathfrak{c} \text{ grad}) ((\mathfrak{b} \text{ grad}) ((\mathfrak{a} \text{ grad}) \mathfrak{f}_0)) \text{ usw.}$$

mit beliebigen konstanten Vektoren  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{b}$ ,  $\mathfrak{c}$  ... eine Partikularlösung. Auf diese Weise kann man aus jeder Lösung solche von beliebig hohen Singularitäten konstruieren (Multipole, d. h. Einzelkräfte, Einzelmomente usw. wirken von außen).

**b) Bewegungsgleichungen in isotropen elastischen Körpern.**

$$\varrho \frac{d^2 \mathfrak{f}}{dt^2} = \mathfrak{f} + \frac{1}{2\beta} \Delta \mathfrak{f} + \frac{1}{6} \left( \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \text{grad div } \mathfrak{f} = \\ = \mathfrak{f} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta} \right) \text{grad div } \mathfrak{f} - \frac{1}{2\beta} \cdot \text{rot rot } \mathfrak{f}.$$

Zerlegt man  $\mathfrak{f}$  in  $\mathfrak{f}_1$  und  $\mathfrak{f}_2$ , so daß

$$\text{div } \mathfrak{f}_1 = 0, \quad \text{rot } \mathfrak{f}_2 = 0, \quad \text{also } \mathfrak{f}_2 = -\text{grad } \varphi \quad \text{und ist } \mathfrak{f} = 0,$$

so wird:

$$\varrho \frac{d^2 \mathfrak{f}_1}{dt^2} = \frac{1}{2\beta} \cdot \Delta \mathfrak{f}_1 \quad (\text{Transversal- oder Scherungswelle})$$

und

$$\varrho \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta} \right) \Delta \varphi \quad (\text{Longitudinal- oder Verdichtungswelle}).$$



Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind

$$\text{für die transversale Welle} = \sqrt{\frac{1}{2\beta\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\mu)}}$$

$$\text{für die longitudinale Welle} = \sqrt{\frac{1}{3\rho}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta}\right)} = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-2\mu)(1+\mu)}}.$$

#### 4. Übergang zur Hydrodynamik.

In nicht vollkommen elastischen Körpern verschwinden bei konstanter Deformation die Spannungen  $\mathfrak{P}'$  mit der Zeit. Dies führt auf folgenden möglichst einfachen, aber speziellen Ansatz:

$$\frac{\partial \mathfrak{P}'}{\partial t} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{S}'}{\partial t} - \frac{1}{\tau} \mathfrak{P}'. \quad (1)$$

Ist  $\frac{\partial \mathfrak{S}'}{\partial t} = 0$ , so folgt aus (1)

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}'_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\tau = \text{Relaxationszeit}). \quad (2)$$

Schreiben wir  $\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} = \mathfrak{v}$  und stellen  $\mathfrak{v}$  (ebenso wie  $\mathfrak{f}$ ) dar durch

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \frac{1}{2} [\delta \mathbf{r} \cdot \text{rot } \mathfrak{v}] + \mathfrak{B} \delta \mathbf{r}$$

und

$$\mathfrak{B} \delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{r} \frac{\text{div } \mathfrak{v}}{3} + \mathfrak{B}' \delta \mathbf{r},$$

so wird

$$\mathfrak{B}' = \frac{\partial \mathfrak{S}'}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathfrak{P}'}{\partial t} = \frac{1}{\beta} \mathfrak{B}' - \frac{1}{\tau} \mathfrak{P}'.$$

Für langsam veränderliches  $\mathfrak{B}'$  bzw. kleines  $\tau$ , d. h. Flüssigkeiten, erhalten wir damit

$$\mathfrak{P}' = \frac{\tau}{\beta} \mathfrak{B}'. \quad (3)$$

$\mathfrak{P}'$  wird also jetzt durch die Geschwindigkeitsverteilung bestimmt. Die Beziehung  $|\mathfrak{S}'| = \alpha |\mathfrak{P}'|$  bleibt erfahrungsgemäß bestehen.

Die Bewegungsgleichungen werden dann<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathfrak{v}}{dt} &= \mathfrak{f} + \text{div } \mathfrak{P} = \mathfrak{f} + \text{div} \left( \mathfrak{E} \frac{|\mathfrak{P}'|}{3} + \frac{\tau}{\beta} \mathfrak{B}' \right) \\ &= \mathfrak{f} - \text{grad } \mathfrak{p} + \frac{\tau}{2\beta} \left( \Delta \mathfrak{v} + \frac{1}{3} \text{grad div } \mathfrak{v} \right). \end{aligned}$$

$\lambda = \frac{\tau}{2\beta}$  heißt *Reibungskoeffizient* (Zähigkeit).

Wir erhalten somit die NAVIER-STOKESSCHE Gleichung

$$\rho \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{f} - \text{grad } \mathfrak{p} + \lambda \Delta \mathfrak{v} + \frac{\lambda}{3} \text{grad div } \mathfrak{v} \quad (4)$$

als Bewegungsgleichung einer Flüssigkeit mit innerer Reibung.

<sup>1</sup>  $\mathfrak{E}$  bedeutet Einheitstensor (vgl. S. 125).

### 5. Hydrodynamik.

Für *reibungsfree* Flüssigkeiten wird  $\lambda = 0$ . Die Bewegungsgleichungen lauten daher

$$\varrho \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathfrak{f} - \text{grad } p \quad (1)$$

oder

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathfrak{f}}{\varrho} - \text{grad } P; \quad (1')$$

wo

$$P = \int \frac{d p}{\varrho}$$

gesetzt werden kann, wenn  $\varrho$  eine eindeutige Funktion von  $p$  ist, bzw. wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} - (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{1}{2} \text{grad } v^2 + [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \frac{\mathfrak{f}}{\varrho} - \text{grad} \left( \frac{v^2}{2} + P \right) + [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] \end{aligned} \quad (2)$$

(EULERSche Bewegungsgleichungen).

Ist  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$  (*stationäre Strömung*) und  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$  (*wirbelfreie oder Potentialströmung*), so wird

$$\frac{\mathfrak{f}}{\varrho} - \text{grad} \left( \frac{v^2}{2} + P \right) = 0, \quad (3)$$

bzw. bei konstantem  $\varrho$

$$\mathfrak{f} - \text{grad} \left( \varrho \frac{v^2}{2} + p \right) = 0. \quad (3')$$

$\left( \varrho \frac{v^2}{2} + p \right)$  heißt *hydrodynamischer Druck*.

Hat  $\frac{\mathfrak{f}}{\varrho}$  ein Potential, d. h.  $\mathfrak{f} = \varrho \text{ grad } \varphi$ , so wird

$$\frac{\partial \text{rot } \mathbf{v}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] \quad (4)$$

und daher

$$\frac{d}{dt} \int d f \text{rot}_n \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} d \mathfrak{s} = 0 \quad (4')$$

(vgl. S. 113), d. h. das Wirbelmoment einer mit der Flüssigkeit mitbewegten Fläche bleibt konstant (HELMHOLTZ).

Ist  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ , so ist  $\mathbf{v}$  darstellbar als  $\mathbf{v} = \text{grad } \Phi$  (Geschwindigkeitspotential). Es gilt dann

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \varphi + P + \frac{1}{2} \text{grad}^2 \Phi = \text{const.} \quad (5)$$

Für inkompressible Flüssigkeit  $\varrho = \text{const}$ ,  $P = \frac{p}{\varrho}$  ergibt die Kontinuitätsgleichung  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ , also  $\Delta \Phi = 0$ .

Die meisten Probleme der Hydrodynamik laufen auf die Lösung dieser Differentialgleichung mit Berücksichtigung der durch die Begrenzung der Strömung gegebenen Randbedingungen  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$  bzw.  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = v_n$  heraus, wo  $v_n$  die Normalkomponente der Geschwindigkeiten der Begrenzung ist.

Bei strengerer Annäherung an die Wirklichkeit ist die Flüssigkeit als an der Begrenzung haftend zu betrachten. Dann ist aber im allgemeinen die Bedingung  $\text{rot } v = 0$  nicht zu erfüllen.

Zweiter Abschnitt.

## Elektrodynamik

(einschließlich Optik).

### A. Allgemeine Theorie.

#### I. Elektrostatik.

Der Elektrostatik liegen folgende idealisierte Erfahrungen zugrunde:

1. Das COULOMBSche Gesetz: Von einer ruhenden elektrischen *Punktladung* der Größe  $e_1$  am Ort  $r_1$  wird auf eine zweite  $e_2$  am Ort  $r_2$  eine Kraft  $\mathfrak{R}_{12}$  ausgeübt

$$\mathfrak{R}_{12} = \frac{e_1 e_2 (r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3}. \quad (1)$$

2. Die Ladungen  $e$  sind unveränderliche und additiv kombinierbare Größen (Satz von der *Erhaltung der Ladung* oder *Elektrizitätsmenge*).

3. Die elektrischen Kräfte superponieren sich (nach der Parallelogrammregel). Sie sind konservativ.

Mit diesen Sätzen sind die Größen  $e$  eindeutig aus Messungen von Kräften feststellbar (bei Verwendung von mindestens drei Ladungen aus drei Gleichungen).

Die Kraft  $\mathfrak{R}_{12}$  ist auch zu schreiben

$$\mathfrak{R}_{12} = -e_2 \text{grad} \left( \frac{e_1}{|r_2 - r_1|} \right) = -e_2 \text{grad } \varphi_2 = e_2 \mathfrak{E}_2,$$

wo der Gradient an der Stelle  $r_2$  zu bilden ist, d. h.  $\varphi_2 = \frac{e_1}{|r_1 - r_2|}$  ist als Funktion des Ortes  $r_2$  zu betrachten. Man schreibt i. a. einfacher für die Kraft auf eine Ladung  $e$

$$\mathfrak{R} = e \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (2)$$

$\varphi$  heißt das *Potential* am Ort der Ladung  $e$ , und  $\mathfrak{E}$  heißt die elektrische *Feldstärke* daselbst.  $\varphi$  und  $\mathfrak{E}$  bilden ein skalares bzw. vektorielles Feld.

Bei mehreren wirkenden Ladungen  $e_i$  wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} &= \sum_i \mathfrak{K}_i, & \varphi &= \sum_i \varphi_i, & \mathfrak{E} &= \sum_i \mathfrak{E}_i = -\text{grad} \left( \sum_i \varphi_i \right). \\ \varphi &= \sum_i \frac{e_i}{r_i} & \text{mit} & & r_i &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{außer für} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_i \quad (\text{LAPLACESche Gleichung}). \quad (4)$$

Den Begriff einer *Raumladung* findet man durch Grenzübergang aus dem Bilde sehr vieler, kleiner, dicht gedrängt im Raum verteilter Punktladungen. *Ladungsdichte*  $\rho$  heißt dann der Ausdruck

$$\rho = \lim_{V \rightarrow 0} \left( \frac{e}{V} \right),$$

wo  $e$  die im Volumen  $V$  enthaltene Gesamtladung bedeutet, d. h.

$$\int_V dV \rho = e.$$

Analog bildet man den Begriff einer *Flächenladung* und ihrer Dichte  $\sigma$ . Die erzeugten Potentiale werden

$$\varphi = \int dV \frac{\rho}{r} \quad \text{bzw.} \quad \varphi = \int dA \frac{\sigma}{r}. \quad (3')$$

Hieraus folgt (vgl. S. 114)

$$\begin{aligned} 4\pi \rho &= -\Delta \varphi = \text{div } \mathfrak{E} \quad (\text{POISSONSche Gleichung}) \\ \text{rot } \mathfrak{E} &= -\text{rot grad } \varphi = 0. \end{aligned} \quad (4')$$

Als elektrischen *Dipol* bezeichnet man die Kombination zweier entgegengesetzt gleicher Ladungen  $\pm e$  im infinitesimal kleinen Abstand  $\delta r$ .  $e \delta r = m$  heißt sein *Moment* (vgl. S. 120). Sein Potential wird

$$\varphi = \left( m \text{ grad } \frac{1}{r} \right). \quad (3'')$$

Den Begriff *Dipoldichte* oder *Polarisation*  $\mathfrak{P}$  findet man wie oben. Er liefert das Potential

$$\varphi = \int dV \left( \mathfrak{P} \text{ grad } \frac{1}{r} \right) = - \int dV \frac{\text{div } \mathfrak{P}}{r} + \int dV \text{div} \left( \frac{\mathfrak{P}}{r} \right).$$

Das letzte Integral verschwindet, wenn die Integration über den ganzen Raum erstreckt wird und  $\mathfrak{P}$  im Unendlichen verschwindet.

Besteht gleichzeitig Ladungsdichte und Polarisation, so wird

$$\boxed{\varphi = \int dV \frac{\rho - \text{div } \mathfrak{P}}{r}} \quad (3''')$$

$$-\Delta \varphi = \text{div } \mathfrak{E} = 4\pi (\rho - \text{div } \mathfrak{P})$$

also

$$4\pi \rho = \text{div} (\mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P}). \quad (4'')$$

Es heißt

$$\varrho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} (\mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P}) \quad \text{Dichte der wahren Ladung,}$$

$$\varrho' = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{E} \quad \text{Dichte der freien Ladung,}$$

$$\varrho'' = \operatorname{div} \mathfrak{P} \quad \text{Dichte der Polarisationsladung.}$$

In einem isotropen Medium (*Dielektrikum*) tritt unter der Wirkung von  $\mathfrak{E}$  eine Ausbildung von Dipolen, d. h. eine Polarisation ein. Im allgemeinen wird dann  $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{E}$ . Man hat daher:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P} = \varepsilon \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathfrak{E}. \quad (5)$$

$\varepsilon$  heißt *Dielektrizitätskonstante*. Sie ist niemals kleiner als 1. Im Vakuum ist  $\mathfrak{P} = 0$ , d. h.  $\varepsilon = 1$ .  $\mathfrak{D}$  heißt *dielektrische Verschiebung* oder *elektrische Induktion*. Die Gleichungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi \varrho, \quad \mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0 \quad (6)$$

sind die Hauptgleichungen der Elektrostatik.

Durch die (zunächst unbeobachtbare) Polarisation werden die Veränderungen des elektrischen Feldes gedeutet, wenn ein an sich ungeladenes Dielektrikum in ein elektrisches Feld gebracht wird. In ihm bleibt dann  $\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0$ , aber es wird

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = -\frac{1}{\varepsilon} (\mathfrak{E} \operatorname{grad} \varepsilon).$$

An einer Fläche, wo  $\varepsilon$  von  $\varepsilon_1$  auf  $\varepsilon_2$  springt, bleibt die Flächendivergenz von  $\mathfrak{D} = 0$ , d. h. die *Normalkomponente* von  $\mathfrak{D}$  geht stetig durch die Fläche. Wegen  $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$  bleibt andererseits die *Parallelkomponente* von  $\mathfrak{E}$  an der Fläche stetig. Daraus folgt das Brechungsgesetz der Kraftlinien  $\operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2 = \varepsilon_1 : \varepsilon_2$ , wo  $\alpha$  den Winkel der Feldlinien  $\mathfrak{E}$  bzw.  $\mathfrak{D}$  gegen die Flächennormale bedeutet. Die freie Flächenladungsdichte  $\sigma'$  wird

$$4\pi \sigma' = E_{n_2} - E_{n_1} = \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 1 \right) E_{n_1}.$$

Weder  $\mathfrak{E}$  noch  $\mathfrak{D}$  sind im Innern eines Körpers direkt meßbar. Führt man aber einen Schnitt durch den Körper *senkrecht* zu den Kraftlinien, so ist in dem so gebildeten materiefreien Spaltraum ein  $\mathfrak{E}'$  (als Kraft auf die Einheitsladung) meßbar, das gleich dem  $\mathfrak{D}$  im angrenzenden Körper ist. Schneidet (oder „bohrt“) man andererseits *parallel* zu den Kraftlinien, so mißt<sup>1</sup>  $\mathfrak{E}'$  hier das angrenzende  $\mathfrak{E}$ . In einem kugelförmigen Hohlraum im Innern des Körpers findet man ein

$$\mathfrak{E}' = \frac{3\varepsilon}{1+2\varepsilon} \mathfrak{E} = \frac{3}{1+2\varepsilon} \mathfrak{D}.$$

<sup>1</sup> Dies kann auch zur Definition von  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{E}$  in Körpern benutzt werden.

Als „Zahl“ der durch einen Querschnitt  $q$  gehenden Feldlinien von  $\mathfrak{E}$  bzw.  $\mathfrak{D}$  bezeichnet man (FARADAY) das Flächenintegral

$$\int_q d\mathfrak{f} E_n \quad \text{bzw.} \quad \int_q d\mathfrak{f} D_n.$$

Die Zahl der in einer Ladung  $e$  entspringenden Induktionslinien  $\mathfrak{D}$  ist gleich  $4\pi e$ .

*Leiter* der Elektrizität heißen Körper, in denen bei statischen Verhältnissen  $\varphi = \text{constans}$ , d. h.  $\mathfrak{E} = 0$  und  $\varrho = 0$  ist. Sie können nur Oberflächenladungen  $\sigma$  tragen. Ein Leiter verhält sich statisch wie ein Körper mit unendlich großem  $\varepsilon$ . Freie Ladungen auf Leitern heißen *Influenzladungen*. Sie sind abtrennbar und wie wahre Ladungen zu behandeln.

Das sog. *elektrostatistische Problem* besteht in der Aufgabe, bei gegebener Lage und Form von Leitern und Nichtleitern und ihren Ladungen  $e_i$  die Feldverteilung zu finden. Dazu sind folgende Gleichungen zu lösen:

$$\text{div } \mathfrak{D} = 4\pi \varrho \quad \text{außerhalb der Leiter,}$$

$$4\pi e_i = \int_{F_i} d\mathfrak{f} D_n \quad \text{erstreckt über die Oberflächen der Leiter } (F_i) \text{ mit}$$

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}, \quad \text{rot } \mathfrak{E} = 0 \quad \text{und} \quad \varphi = \text{constans} = \varphi_i \text{ auf den } F_i.$$

## 2. Elektrokinetik.

Jeder Transport von Ladung heißt elektrischer Strom. *Stromstärke*  $I$  heißt die durch eine Fläche  $F$  in der Zeiteinheit transportierte Elektrizitätsmenge

$$I = \frac{\delta e}{\delta t}.$$

Die *Stromdichte*  $i$  ist analog definiert durch

$$I = \int_F d\mathfrak{f} i_n.$$

Wegen des Satzes von der Erhaltung der Ladung gilt

$$\text{div } i = - \frac{\partial \varrho}{\partial t} \quad (\text{Kontinuitätsgleichung}).$$

Elektrischer Strom tritt phänomenologisch in verschiedener Form auf:

1. Als *Konvektionsstrom*: Ladung  $\varrho$  wird von mit  $v$  bewegter Substanz getragen:  $i_K = \varrho v$ .

2. Als *Leitungsstrom*: Ladung bewegt sich im Leiter unter der Kraftwirkung eines elektrischen Feldes  $\mathfrak{E}$ , ohne daß die Bewegung als solche beobachtbar ist:  $i = \sigma \mathfrak{E}$ .  $\sigma$  heißt *Leitfähigkeit*.

3. Auch der sog. *Verschiebungsstrom*  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$  kann als Strom bezeichnet werden. Es gilt nämlich

$$\text{div } \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi} \text{div } \mathfrak{D} \right) = \frac{\partial \varrho}{\partial t}.$$

Als *wahren Strom*  $c$  bezeichnet man

$$c = i + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}.$$

Es gilt die Formel  $\operatorname{div} c = 0$ .

*Stationär* nennt man Ströme, wenn  $\frac{\partial i}{\partial t} = 0$  und  $\operatorname{div} i = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  ist. Lläuft ein solcher Strom längs eines Leiters vom Querschnitt  $q$ , so ist  $I = \int_q d\int i_n$  längs des Leiters konstant und  $i_n = \frac{I}{q} = |i|$ . Die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten des Leiters

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 ds E_s = \int_1^2 ds \frac{i_s}{\sigma} = \int_1^2 \frac{ds}{\sigma q} \cdot I = WI$$

wird also, falls  $\sigma$  von  $i$  unabhängig ist, proportional  $I$  und einem Faktor  $W$ , genannt *OHMScher Widerstand*, der nur durch die geometrischen Dimensionen des Leiters und dessen Leitfähigkeit bestimmt ist (*OHMSches Gesetz*).

In einem in sich geschlossenen Leiter (wie oben) wird  $\oint ds E_s = 0$ , d. h.  $I = 0$ . Ist aber in ihm irgendwo die Beziehung  $i = \sigma \mathfrak{E}$  nicht gültig, wie z. B. in galvanischen Elementen, Thermoelementen u. dgl., so heißt

$$\int ds \left( \frac{i}{\sigma} - \mathfrak{E} \right)_s = E$$

die *elektromotorische Kraft* (EMK), und es gilt

$$E = IW.$$

Auch diese Formel heißt *OHMSches Gesetz*, obgleich sie nicht dasselbe aussagt wie die gleichbenannte frühere.

$\frac{i}{\sigma} - \mathfrak{E} = \mathfrak{E}'$  spielt die Rolle eines „Scheinfeldes“, denn es gilt

$$i = \sigma (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}').$$

### 3. Magnetostatik.

Der Magnetostatik liegen ganz analoge Erfahrungen zugrunde wie der Elektrostatik, d. h. wenn man die *Polstärke*  $m$  eines permanenten Magneten an die Stelle der elektrischen Ladung  $e$  setzt, so gilt für die Kraft zwischen Magnetpolen ein dem *COULOMBSchen* entsprechendes Gesetz. Es gelten daher auch alle Formeln der Elektrostatik in entsprechender Umdeutung mit den Größen:

$m$  *Polstärke* entsprechend  $e$ ,

$\mathfrak{H}$  *magnetische Feldstärke* entsprechend  $\mathfrak{E}$

$\mathfrak{M}$  *Magnetisierung* entsprechend  $\mathfrak{P}$ ,

$\mathfrak{B}$  *Induktion* entsprechend  $\mathfrak{D}$ ,

$\mu$  *Permeabilität* entsprechend  $\epsilon$ .

Es bestehen aber folgende Unterschiede:

1. Es gibt keine wahre magnetische Ladungsdichte. Die Hauptgleichungen lauten also:

$$\text{div } \mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \quad \text{rot } \mathfrak{H} = 0.$$

2.  $\mu$  ist für viele Stoffe keine Konstante (*Ferromagnetika*), sondern in komplizierter Weise von  $\mathfrak{H}$  abhängig (*Hysteresis*). Daher kann  $\mathfrak{M}$  auch bei verschwindendem  $\mathfrak{H}$  bestehen (z. B. in permanenten Magneten).

3. Es gibt keine Leiter des Magnetismus, wohl aber Stoffe mit sehr großem  $\mu$ , die sich annähernd wie magnetische Leiter verhalten (z. B. weiches Eisen).

4.  $\mathfrak{B}$  kann, weil es quellenfrei ist, dargestellt werden in der Form

$$\mathfrak{B} = \text{rot } \mathfrak{A}$$

mit 
$$\mathfrak{A} = \int dv \frac{\text{rot } \mathfrak{M}}{r} \quad (\text{Vektorpotential}).$$

Die Polstärke  $m$  ist eine *freie* magnetische Ladung, d. h.

$$m = \frac{1}{4\pi} \int dv \text{div } \mathfrak{H},$$

das Integral über einen nur *einen* Magnetpol enthaltenden Raum erstreckt.

#### 4. Elektromagnetik.

Folgende Erfahrungen liegen zugrunde:

Konstante elektrische Ströme sind von Magnetfeldern begleitet (ÖRSTED). Das Feld  $\mathfrak{H}$  eines kleinen Kreisstromes von der Stärke  $I$  um die Fläche  $df$  ist gleich dem eines magnetischen Dipols vom Moment  $\frac{I}{c} df$  senkrecht zur Fläche (AMPÈRE). Hierin ist  $c$  eine Konstante von der Dimension einer Geschwindigkeit, und zwar gleich der Lichtgeschwindigkeit (WEBER):

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm sec}^{-1}.$$

Das Feld eines beliebigen in sich geschlossenen Stromes  $I$  ist daher gleich dem einer magnetischen Doppelschicht vom Moment  $\frac{I}{c}$  (vgl. S. 122) und darstellbar aus dem Vektorpotential

$$\mathfrak{A} = \frac{I}{c} \oint \frac{d\mathfrak{s}}{r}, \quad \mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A} = -\frac{I}{c} \oint \frac{[d\mathfrak{s} \mathfrak{r}]}{r^3} \quad (\text{BIOT-SAVARTSches Gesetz}).$$

Das Integral ist dabei zu erstrecken über die Strombahn. Bei beliebig quellenfrei verteilter Strömung wird daher

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c} \int dv \frac{\mathfrak{i}}{r},$$

mithin

$$\text{rot } \mathfrak{H} = \frac{4\pi \mathfrak{i}}{c} \quad \text{und} \quad \text{div } \mathfrak{A} = 0.$$



Existiert neben dem Feld des Stromes auch das einer Magnetisierung, so wird

$$\mathfrak{A} = \int \frac{dv}{r} \left( \frac{i}{c} + \text{rot } \mathfrak{M} \right), \quad \text{div } \mathfrak{A} = 0.$$

$$\text{rot rot } \mathfrak{A} = 4\pi \left( \frac{i}{c} + \text{rot } \mathfrak{M} \right) = \text{rot } (\mathfrak{H} + 4\pi \mathfrak{M}) = \text{rot } \mathfrak{B},$$

d. h.

$$\text{rot } \mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \quad \text{div } \mathfrak{B} = 0.$$

Es heißt

$$\frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathfrak{H} \quad \text{der wahre Strom,}$$

$$\frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathfrak{B} \quad \text{der freie Strom}$$

$$-c \text{rot } \mathfrak{M} \quad \text{der Magnetisierungsstrom.}$$

Die *Hauptgleichungen der Elektromagnetik* lauten

$$\text{div } \mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \quad \text{rot } \mathfrak{H} = \frac{4\pi i}{c}.$$

## 5. Elektrodynamik.

Die Elektrodynamik erweitert die Gesetze der Elektromagnetik durch Einbeziehung zeitlicher Änderungen.

Es liegen folgende Erfahrungen zugrunde:

1. Das *Induktionsgesetz* (FARADAY, F. NEUMANN) in der Formulierung

$$\oint ds E_s = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int df B_n \left( = \int df \text{rot}_n \mathfrak{E}, \text{ vgl. S. 113, STOKESScher Satz} \right),$$

d. h. das Linienintegral der elektrischen Feldstärke längs einer geschlossenen Kurve, physikalisch: die elektromotorische Kraft in einem geschlossenen Drahte, ist proportional der Änderungsgeschwindigkeit des Induktionsflusses durch die umschlossene Fläche.

2. Das Magnetfeld wird nicht nur durch den Leitungs- (bzw. Konvektions-)Strom  $i$  erzeugt, sondern durch den wahren Strom

$$i + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \quad (\text{MAXWELL}).$$

Das führt zu den folgenden *Hauptgleichungen der Elektrodynamik* oder **MAXWELLSchen Gleichungen**

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathfrak{H} &= \frac{4\pi i}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \\ \text{rot } \mathfrak{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \\ \text{div } \mathfrak{B} &= 0 \\ \text{div } \mathfrak{D} &= 4\pi \varrho \end{aligned}$$

mit den *Materialgleichungen*

$$\begin{array}{l} \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} \\ \mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E} \\ \mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E}. \end{array}$$

Diese Gleichungen enthalten die bisherigen als Spezialfälle.

## 6. Kräfte.

Als *ponderomotorische* Kräfte in elektromagnetischen Systemen bezeichnet man die mechanisch nachweisbaren Kräfte auf die Ladung, Polarisation und Strom tragenden materiellen Bestandteile des Systems.

### a) Ruhendes Substrat.

1. Elektrostatik. Die Kraft auf einen ruhenden mit  $e$  geladenen Massenpunkt ist  $\mathfrak{R} = e\mathfrak{E}$ ; die Gesamtkraft auf ein System solcher  $\mathfrak{R} = \sum_i e_i \mathfrak{E}_i$  bzw. bei kontinuierlicher Ladungsverteilung  $\mathfrak{R} = \int dv \rho \mathfrak{E}$ .

Das Feld  $\mathfrak{E}$  besteht hierbei aus zwei Teilen, dem „äußeren“ von fremden Ladungen erzeugten Teil  $\mathfrak{E}^0$  und dem „inneren“ Feld

$$\sum'_{i,k} \frac{e_k}{r_{ik}^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k).$$

Letzteres trägt zur Gesamtkraft nichts bei, so daß auch

$$\mathfrak{R} = \sum_i e_i \mathfrak{E}_i^0 \quad \text{mit} \quad \mathfrak{E}_i^0 = \mathfrak{E}^0(\mathbf{r}_i) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{R} = \int dv \rho \mathfrak{E}^0$$

gilt.

*Kraftdichte* heißt die Größe  $\mathfrak{k} = \rho \mathfrak{E}$  oder  $\rho \mathfrak{E}^0$ , je nach Definition. Bei der Frage nach der Kraft auf Systemteile ist entsprechend zu unterscheiden.

Die Kraft auf einen Dipol ist  $\mathfrak{R} = (m \text{ grad}) \mathfrak{E}$ , daher die auf ein nur Polarisationen enthaltendes System

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \int dv (\mathfrak{P} \text{ grad}) \mathfrak{E} = \int dv (\mathfrak{P} \text{ grad}) \mathfrak{E}^0 \\ &= - \int dv \mathfrak{E} \text{ div } \mathfrak{P} = - \int dv \mathfrak{E}^0 \text{ div } \mathfrak{P}. \end{aligned}$$

Die Umformung gilt, falls  $\mathfrak{P}$  außerhalb des Integrationsbereiches verschwindet, also für die *Teile* des Systems nur bei entsprechender Fragestellung.

Für ein allgemeines, Ladung und Polarisation enthaltendes System ist

$$\mathfrak{R} = \int dv \mathfrak{E} (\rho - \text{div } \mathfrak{P}) = \frac{1}{4\pi} \int dv \mathfrak{E} \text{ div } \mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi} \int dv \mathfrak{E}^0 \text{ div } \mathfrak{E}.$$

Das Volumintegral kann in ein Flächenintegral umgeformt werden

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{4\pi} \int d\mathfrak{f} \left( \mathfrak{E} (\mathfrak{E} \mathfrak{n}) - \frac{\mathfrak{n}}{2} \mathfrak{E}^2 \right),$$

wobei das Integral über eine beliebige, das System umschließende, vollständig im leeren Raum liegende Fläche mit dem dort vorhandenen  $\mathfrak{E}$  (nicht  $\mathfrak{E}^0$ ) zu bilden ist. Der Integrand kann in der Form  $\mathfrak{I} n$  geschrieben werden. Hierin heißt  $\mathfrak{I}$  der MAXWELLSche Spannungstensor.

$$\operatorname{div} \mathfrak{I} = \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E}.$$

Da auf der Integrationsfläche (Vakuum!)  $\mathfrak{E} = \mathfrak{D}$  ist, kann  $\mathfrak{D}$  beliebig für  $\mathfrak{E}$  gesetzt werden, z. B.

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{4\pi} \int df \left( \mathfrak{D} (\mathfrak{D} n) - \frac{n}{2} \mathfrak{D}^2 \right),$$

oder auch

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{4\pi} \int df \left( \mathfrak{E} (\mathfrak{D} n) - \frac{n}{2} (\mathfrak{E} \mathfrak{D}) \right).$$

Letztere Form ist nur bei konstantem  $\varepsilon$  in ein einfaches Volumintegral überzuführen<sup>1</sup>. Man kann  $\mathfrak{R}$  in folgenden Formen als Volumintegral darstellen (wegen  $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$ ,  $\operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi \rho$ ,  $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi (\rho - \operatorname{div} \mathfrak{P})$  und  $\operatorname{rot} \mathfrak{D} = 4\pi \operatorname{rot} \mathfrak{P}$ )

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \frac{1}{4\pi} \int dv \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E} \\ &= \int dv (\rho \mathfrak{E} - \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{P}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int dv ((\mathfrak{D} \operatorname{div} \mathfrak{D}) - [\mathfrak{D} \operatorname{rot} \mathfrak{D}]) \\ &= \int dv (\rho \mathfrak{D} - [\mathfrak{D} \operatorname{rot} \mathfrak{P}]). \end{aligned}$$

Man bevorzugt die zweite Form zur Definition der Kraftdichte auf den Ladung bzw. Polarisation tragenden Teil des Substrats.

Das *Drehmoment* auf ein elektrostatisches System ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q} &= \int dv ([\mathfrak{r} \mathfrak{E}] \rho + [\mathfrak{r} (\mathfrak{P} \operatorname{grad}) \mathfrak{E}] + [\mathfrak{E} \mathfrak{P}]) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int dv [\mathfrak{r} \mathfrak{E}] \operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi} \int dv [\mathfrak{r} \mathfrak{E}^0] \operatorname{div} \mathfrak{E} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int df \left[ \mathfrak{r} (\mathfrak{E} (\mathfrak{E} n) - \frac{n}{2} \mathfrak{E}^2) \right]. \end{aligned}$$

2. Elektromagnetik. In der Magnetostatik sind alle obigen Formeln mit  $\mathfrak{H}$  statt  $\mathfrak{E}$  usw. zu übernehmen. Wegen der Äquivalenz von Strömen mit magnetischen Doppelflächen bei der Felderzeugung schließt man auch auf Äquivalenz für die Kräfte (AMPÈRE) und betrachtet

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{4\pi} \int df \left( \mathfrak{H} (\mathfrak{H} n) - \frac{n}{2} \mathfrak{H}^2 \right)$$

als allgemein gültig.

<sup>1</sup> Trotzdem wird zumeist diese Form für die Definition des MAXWELLSchen Spannungstensors gewählt und der Integrand des Volumintegrals als Kraftdichte gedeutet.

Das ergibt (wegen  $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi i}{c}$ ,  $\operatorname{div} \mathfrak{H} = -4\pi \operatorname{div} \mathfrak{M}$ ,  $\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0$ )

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} &= \frac{1}{4\pi} \int dv (\mathfrak{H} \operatorname{div} \mathfrak{H} - [\mathfrak{H} \operatorname{rot} \mathfrak{H}]) \\ &= \int dv \left( \frac{[i \mathfrak{H}]}{c} - \mathfrak{H} \operatorname{div} \mathfrak{M} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int dv [\mathfrak{B} \operatorname{rot} \mathfrak{B}] \\ &= \int dv \left( \frac{[i \mathfrak{B}]}{c} - [\mathfrak{B} \operatorname{rot} \mathfrak{M}] \right). \end{aligned}$$

Die Integranden sind je nach Definition als Kraftdichte zu bezeichnen. Üblich ist es,  $\frac{[i \mathfrak{B}]}{c}$  als Kraftdichte auf den stromführenden und  $-[\mathfrak{B} \operatorname{rot} \mathfrak{M}]$  auf den polarisierten Teil des Substrats zu definieren.

3. Elektrodynamik. Bei zeitlich veränderlichen Systemen gelten dieselben Formeln für die Oberflächenintegrale, wenn am Rande die Zeitableitungen verschwinden. Für die Umformung auf Volumintegrale beachte man die MAXWELLSchen Gleichungen. So findet man

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} &= \frac{1}{4\pi} \int dv \left( \rho \mathfrak{E} + \frac{[i \mathfrak{B}]}{c} - \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{P} - [\mathfrak{B} \operatorname{rot} \mathfrak{M}] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\pi c} \left[ \mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right] - \frac{1}{4\pi c} \left[ \mathfrak{B} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \right] \right), \end{aligned}$$

d. h. es treten noch zwei Zusatzglieder auf, die man schreiben kann

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi c} [\mathfrak{E} \mathfrak{B}] \right) - \frac{1}{4\pi c} \left[ \mathfrak{B} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \right].$$

Das zweite Glied ist die Kraftdichte auf den mit Veränderungen der Polarisationen verbundenen Strom; das erste wird gedeutet als Ausdruck der zeitlichen Änderung  $\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial t}$  einer *elektromagnetischen Impulsdichte*

$$\mathfrak{p} = \frac{1}{4\pi c} [\mathfrak{E} \mathfrak{B}] = \frac{\mu}{c^2} \mathfrak{E}.$$

Wichtig ist, daß  $\mathfrak{p}$  auch im leeren Raum bestehen bleibt.

### b) Bewegtes Substrat.

Ein mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegter, mit  $e$  geladener Massenpunkt führt einen Konvektionsstrom. Dieser ist in der Felderzeugung gleichwertig einem nicht stationären Leitungsstrom und erfährt im magnetischen Feld  $\mathfrak{H}$  die entsprechende Kraft  $\frac{e}{c} [v \mathfrak{H}]$ . Die Gesamtkraft wird daher

$$\mathfrak{K} = e \left( \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [v \mathfrak{H}] \right) \quad (\text{LORENTZ-Kraft}).$$

In einem bewegten Substrat treten daher auf die in ihm befindlichen Ladungen, Dipole usw. bei Bewegung neue Kräfte auf, die man durch „Scheinfelder“  $\mathfrak{E}'$  bzw.  $\mathfrak{H}'$  (vgl. S. 254) darstellen kann

$$\mathfrak{E}' = \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathfrak{H}], \quad \mathfrak{H}' = -\frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathfrak{E}].$$

Sie erzeugen Ströme und Polarisationen. Es gilt

$$\mathbf{i} = \sigma (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}'), \quad \mathfrak{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}'), \quad \mathfrak{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi} (\mathfrak{H} + \mathfrak{H}').$$

Die Linienintegrale  $\int ds E'_s$  und  $\int ds H'_s$  heißen die durch die Bewegung erzeugte elektromotorische bzw. magnetomotorische Kraft.

## 7. Energie.

Unter dem Energiezuwachs  $\delta W$  eines elektromagnetischen Systems versteht man die äußere Arbeit  $\delta A$ , die aufzuwenden ist, um das System zu ändern, abzüglich der aus dem System abfließenden Energiemengen. Da man Arbeit leistende äußere Kräfte nur an Ladungen (und Strömen) angreifen lassen kann, wird

$$\delta A = - \int d v (\mathfrak{E} i_K) \delta t,$$

wo  $i_K$  die durch äußere Kräfte bei der Änderung während  $\delta t$  erzeugte Stromdichte bedeutet; also wird (mit  $\mathbf{i} = \sigma \mathfrak{E} =$  Leitungsstrom)

$$\begin{aligned} \delta A &= \int d v (\mathfrak{E} \mathbf{i}) \delta t - \frac{c}{4\pi} \int d v (\mathfrak{E} \operatorname{rot} \mathfrak{H}) \delta t + \frac{1}{4\pi} \int d v (\mathfrak{E} \delta \mathfrak{D}) \\ &= \delta t \left\{ \int d v (\mathfrak{E} \mathbf{i}) + \frac{c}{4\pi} \int d v \operatorname{div} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] \right\} + \frac{1}{4\pi} \int d v ((\mathfrak{E} \delta \mathfrak{D}) + (\mathfrak{H} \delta \mathfrak{B})) \\ &= \delta t \left\{ \int d v (\mathfrak{E} \mathbf{i}) + \frac{c}{4\pi} \int d f [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_n \right\} + \frac{1}{4\pi} \int d v ((\mathfrak{E} \delta \mathfrak{D}) + (\mathfrak{H} \delta \mathfrak{B})). \end{aligned}$$

Diese Formel wird so gedeutet:  $\int d v (\mathfrak{E} \mathbf{i})$  ist die je Zeiteinheit auftretende *JOULESche Wärme*.  $\frac{c}{4\pi} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] = \mathfrak{S}$  (*POYNTINGScher Vektor*) ist die Dichte eines durch die Oberfläche tretenden Energiestromes. Schließlich ist

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int d v ((\mathfrak{E} \delta \mathfrak{D}) + (\mathfrak{H} \delta \mathfrak{B}))$$

der Energiezuwachs. Ist  $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$  mit feldunabhängigem  $\varepsilon$  und  $\mu$ , so wird<sup>1</sup>

$$W = \frac{1}{8\pi} \int d v ((\mathfrak{E} \mathfrak{D}) + (\mathfrak{H} \mathfrak{B})).$$

<sup>1</sup> Die übliche Herleitung aus statischen Betrachtungen ist bedenklich, weil „statische Änderungen“ unmöglich sind und eine Übertragung auf die Dynamik nicht hinreichend zu begründen ist.

Dies Integral läßt sich, wenn man die Grenzen ins Unendliche legt, umformen in

$$W = \frac{1}{2} \int dv (\rho \varphi + (\mathfrak{A} i)).$$

**Sonderfälle. 1.** Die Energie eines Systems, bestehend aus mit den Ladungen  $e_i$  geladenen Leitern, ist

$$W = \frac{1}{2} \sum_i e_i \varphi_i.$$

Die Potentiale  $\varphi_i$  sind lineare Funktionen der  $e_i$ . Daher ist  $W$  darstellbar in der Form

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{e_i e_k}{C_{ik}}.$$

Die Koeffizienten  $C_{ik} = C_{ki}$  heißen gegenseitige *Kapazitäten*;  $C_{ii}$  auch *Selbstkapazität* des  $i$ -ten Leiters. Es folgt

$$\varphi_i = \frac{\partial W}{\partial e_i} = \sum_k \frac{e_k}{C_{ik}}.$$

Für nur zwei Leiter mit den Ladungen  $e_1 = -e_2 = e$  (*Kondensator*) wird

$$W = \frac{e^2}{2} \left( \frac{1}{C_{11}} - \frac{2}{C_{12}} + \frac{1}{C_{22}} \right) = \frac{e}{2} (\varphi_1 - \varphi_2).$$

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_{11}} - \frac{2}{C_{12}} + \frac{1}{C_{22}}} = \frac{e}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

heißt hier die *Kapazität* des Systems.

**2.** Die Energie eines Systems, bestehend aus Strömen  $I_i$  in geschlossenen Drähten, ist

$$W = \frac{1}{2} \sum_i I_i \oint (\mathfrak{A} d\mathfrak{s}).$$

Die Linienintegrale sind lineare Funktionen der  $I_i$ , daher ist  $W$  darstellbar in der Form

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k} I_i I_k L_{ik}.$$

Die Koeffizienten  $L_{ik} = L_{ki}$  heißen gegenseitige *Induktionen*,  $L_{ii}$  die *Selbstinduktion* des  $i$ -ten Drahtes. Es folgt:

$$\oint (\mathfrak{A} d\mathfrak{s}) = \frac{\partial W}{\partial I_i} = \sum_k I_k L_{ik}.$$

## B. Spezielle Fälle.

### 1. Elektrodynamik quasistationärer Ströme.

Kann der Verschiebungsstrom  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$  neben dem Leitungsstrom vernachlässigt werden, so treten Vereinfachungen ein. Es wird in einem geschlossenen Draht

$$\oint (\mathfrak{E} d\mathfrak{s}) = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int d\mathfrak{f} B_n = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \oint (\mathfrak{A} d\mathfrak{s}) = IW = -L \frac{dI}{dt},$$

wo  $L$  die Selbstinduktion des Drahtes und  $W$  den Widerstand bedeutet. Handelt es sich um ein System von Drähten (*Transformator*), so hat man das Gleichungssystem

$$I_i W_i + \sum_k L_{ik} \frac{dI_k}{dt} = 0. \quad (1)$$

Liegen in den Drähten noch elektromotorische Kräfte  $E_i$  (vgl. S. 254), so wird

$$I_i W_i + \sum_k L_{ik} \frac{dI_k}{dt} = E_i. \quad (2)$$

Sind außerdem noch Kondensatoren mit den Kapazitäten  $C_i$  eingeschaltet, so tritt zu  $\oint (\mathfrak{E} d\mathfrak{s})$  noch  $e_i/C_i$ , und wegen  $I = de/dt$  erhält man

$$\frac{1}{C_i} I_i + W_i \frac{dI_i}{dt} + \sum_k L_{ik} \frac{d^2 I_k}{dt^2} = \frac{dE_i}{dt}. \quad (3)$$

Dieses Gleichungssystem ist der Ausgangspunkt für die Behandlung der induktiv gekoppelten Stromkreise.

Existiert nur *ein* Stromkreis, so wird aus (3) einfach

$$\frac{1}{C} I + W \frac{dI}{dt} + L \frac{d^2 I}{dt^2} = \frac{dE}{dt}.$$

Dies ist die Gleichung einer gedämpften, von der Änderung der EMK erzwungenen Schwingung. Ist  $E$  konstant, so erfolgt die Schwingung frei (*Schwingungskreis*) mit der komplexen Kreisfrequenz:

$$\omega = \frac{iW}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{W^2}{4L^2}}$$

und speziell für  $W=0$ :

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{THOMSONSche Formel}).$$

### 2. Elektrodynamik im homogenen Material.

Sind  $\varepsilon$ ,  $\mu$  und  $\sigma$  orts- und feldunabhängig, so werden vereinfachende Umformungen möglich. Man findet durch Elimination:

$$\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = -\text{rot rot } \mathfrak{E}. \quad (1)$$

Die gleiche Formel gilt für  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $i$ .

Führt man an Stelle der statischen Potentiale  $\varphi$  und  $\mathfrak{A}$  ( $\text{div } \mathfrak{A} = 0$ ) neue Größen  $\Phi$  und  $\mathfrak{A}$  (*kinetische Potentiale*) ein durch die mit den MAXWELLSchen Gleichungen verträglichen Forderungen:

$$\mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{D} = -\text{grad } \Phi - \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$$

und

$$\text{div } \mathfrak{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\text{LORENTZ-Konvention}),$$

so gilt für diese

$$\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathfrak{A} = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{i}$$

$$\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta \Phi = 4\pi \varrho.$$

Definiert man einen Vektor  $\mathfrak{B}$  (*HERTZscher Vektor*) durch

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \quad \Phi = -\text{div } \mathfrak{B} + \varepsilon \varphi \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \right),$$

so gilt

$$\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial t^2} - \Delta \mathfrak{B} = 4\pi \mathfrak{q}, \quad \text{wo } \mathfrak{q} = \int^t \mathfrak{i} dt, \quad \text{d. h. } \mathfrak{i} = \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial t}, \quad \varrho = -\text{div } \mathfrak{q} + \varrho_0$$

( $\mathfrak{q}$  = Ladungsverschiebung).

Die Lösung dieser Gleichung lautet in Integralform

$$\Phi(\mathfrak{r}, t) = \int \frac{d\varphi}{r} \varrho \left( \mathfrak{r}, t - \frac{r}{V} \right)$$

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{r}, t) = \int \frac{d\varphi}{r} \frac{\mathfrak{i}}{c} \left( \mathfrak{r}, t - \frac{r}{V} \right)$$

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{r}, t) = \int \frac{d\varphi}{r} \mathfrak{q} \left( \mathfrak{r}, t - \frac{r}{V} \right) \quad \text{mit } V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

d. h. man berechnet  $\Phi$ ,  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  für einen Ort zur Zeit  $t$  aus den Werten von  $\varrho$ ,  $\mathfrak{i}$ ,  $\mathfrak{q}$  an den um  $r$  entfernten Orten zur Zeit  $t - \frac{r}{V}$ . Die  $\varrho$ ,  $\mathfrak{i}$ ,  $\mathfrak{q}$  brauchen also die Zeitdifferenz  $r/V$ , bis sie in der Entfernung  $r$  wirksam werden; ihre Wirkung erscheint „retardiert“.

Diese Form der Lösung bringt es mit sich, daß nur für sehr kleines  $r$ , bzw. bei langsam wechselndem  $\varrho$ ,  $\mathfrak{i}$ ,  $\mathfrak{q}$  die statischen Beziehungen gelten.

Methodisch vorteilhaft ist die daraus folgende Vorschrift: Man denke sich zur Zeit  $t$  eine Kugelwelle mit der formalen Geschwindigkeit  $-V$  vom Aufpunkt ausgehen. Alle Ladungen wirken dann mit dem Betrag, den sie während des Hinüberstreichens dieser Welle haben.

Mit Hilfe dieser Formeln lassen sich die Felder bewegter Ladungen berechnen.



a) Für eine im Vakuum ( $\epsilon = 1, \mu = 1, \sigma = 0$ ) gleichförmig geradlinig mit  $v$  sich bewegende Ladung  $e$  findet man:

$$\Phi = \frac{e}{\sqrt{r^2(1-\beta^2) + \frac{(r v)^2}{c^2}}},$$

$$\mathfrak{A} = \frac{e v}{c \sqrt{r^2(1-\beta^2) + \frac{(r v)^2}{c^2}}} \quad \text{wo } \beta = \frac{v}{c} \text{ ist,}$$

und daraus

$$\mathfrak{E} = \frac{(1-\beta^2) e r}{\sqrt{\phantom{x}}}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{(1-\beta^2) e [v r]}{c \sqrt{\phantom{x}}}.$$

$\Phi = \text{const}$  stellt ein abgeplattetes Rotationsellipsoid dar mit dem Achsenverhältnis  $\sqrt{1-\beta^2}$  (*Heaviside-Ellipsoid*).

Die Kraft auf eine zweite gleichfalls mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegte Ladung  $e_2$  wird dann gleich

$$\mathfrak{R} = e_2 \left( \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [v \mathfrak{H}] \right) = - (1-\beta^2) \text{ grad } \Phi$$

$$\Psi = (1-\beta^2) \Phi \text{ heißt Konvektionspotential.}$$

b) **Dipolstrahlung.** Das Moment  $m$  eines Dipols sei als Funktion der Zeit gegeben. Die Geschwindigkeit seiner Bestandteile sei klein gegen  $V = c/\sqrt{\epsilon\mu}$ . Dann ist für einen Punkt  $r$ , wenn  $r$  groß gegen die Dimension des an der Stelle  $r=0$  befindlichen Dipols ist, und  $\sigma=0$  ist:

$$\mathfrak{D} = \frac{m}{r}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{3 r (m r) - r^2 \dot{m}}{r^5} + \frac{3 r (\dot{m} r) - r^2 \ddot{m}}{V r^4} + \frac{1}{V^2 r^3} [r [r \ddot{m}]]$$

$$\mathfrak{H} = - \frac{[r \dot{m}]}{V r^3} - \frac{1}{V^2 r^2} [r \ddot{m}],$$

wobei  $m$  das Moment zur Zeit  $\left(t - \frac{r}{V}\right)$  bedeuten soll und

$$\dot{m} = \frac{d m}{d t}, \quad \ddot{m} = \frac{d^2 m}{d t^2}.$$

Für großes  $r$  wird hiernach  $\mathfrak{E} = \frac{c}{4 \pi \epsilon V^4} \cdot \frac{r}{r^5} [r \ddot{m}]^2$ .

Die Ausstrahlung pro Zeiteinheit wird dann

$$- \frac{d W}{d t} = \int S_n d f = \frac{2 c}{3 \epsilon V^4} |\ddot{m}|^2.$$

Ist  $m = m_0 \cdot \sin \omega t = m_0 \cdot \sin \frac{2 \pi}{\lambda} V t$  ( $\lambda =$  Wellenlänge), so wird

$$\frac{d W}{d t} = \frac{32 \pi^4}{3} \frac{c}{\epsilon \lambda^4} |m|^2.$$

### 3. Elektrodynamik periodischer Felder im homogenen Material.

Es soll sein

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 e^{i\omega t}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 e^{i\omega t} \text{ usw.} \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

$\mathfrak{E}_0, \mathfrak{H}_0$  und  $\omega$  können komplex sein. Zu verwenden sind Realteil und Imaginärteil unabhängig voneinander als Partikularlösungen.

1. Fall: Ströme und Ladungen sind vorgegeben (Realteile!):

$$i = i_0 e^{i\omega t}, \quad \varrho = \frac{i}{\omega} \operatorname{div} i, \quad q = \frac{-i}{\omega} i, \quad \varrho = -\operatorname{div} q$$

$$\mathfrak{J} = \int \frac{dV}{r} q e^{-\frac{i\omega r}{V}} \quad V = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{i\omega}{c} \operatorname{rot} \mathfrak{J} \quad \mathfrak{E} = \frac{1}{\epsilon} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{J} + \frac{\omega^2 \mu}{c^2} \mathfrak{J} - \operatorname{grad} \varphi_0.$$

2. Fall:  $\varrho = 0, i = \sigma \mathfrak{E}$  nicht vorgegeben: Man setzt

$$p = \sqrt{\epsilon\mu - i \frac{4\pi\sigma\mu}{\omega}} \quad (\text{komplexer Brechungsindex})$$

$$k = \frac{\omega p}{c} \quad (\text{komplexe Wellenzahl})$$

und führt einen neuen Vektor  $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 e^{i\omega t}$  ein, für den man fordert:

$$\Delta \mathfrak{P} + k^2 \mathfrak{P} = 0.$$

Dann wird:

$$\mathfrak{H} = \frac{i p}{\mu k} \operatorname{rot} \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{E} = \frac{1}{k^2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{P} \text{ oder auch:}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{i p}{\mu k^2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{E} = \frac{1}{k} \operatorname{rot} \mathfrak{P}$$

je eine partikuläre Lösung des Problems.

**Besondere Fälle.**

1. Ebene Welle:  $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_{00} e^{i k (r n)}, \quad \mathfrak{P}_{00} = \text{constans},$   
 $n = \text{konstanter Einheitsvektor.}$

$$\mathfrak{H} = \frac{p}{\mu} [\mathfrak{P}_{00} n] e^{i(\omega t + k(r n))}$$

$$\mathfrak{E} = [n [\mathfrak{P}_{00} n]] e^{i(\omega t + k(r n))}.$$

Daher ist  $(\mathfrak{E} n) = (\mathfrak{H} n) = (\mathfrak{E} \mathfrak{H}) = 0$ , also liegt eine ebene Transversalwelle vor mit  $n$  als Wellennormale.  $k n = \mathfrak{k}$  heißt der Wellenvektor,  $\frac{\omega}{k} = \frac{c}{p}$  die Phasengeschwindigkeit.

Komplexes  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{E}$  bedeutet elliptische Polarisierung,

- „  $\omega$  „ zeitliches Abklingen (Dämpfung),
- „  $k$  „ longitudinales Abfallen (Absorption),
- „  $n$  „ transversales Abfallen ( $|n|^2 = 1$ ).

2. *Zylinderwelle*:  $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_{00} e^{i(n\varphi + mz)} Z_m(\rho \sqrt{k^2 - m^2})$ .

$\rho, \varphi, z$  sind hier Zylinderkoordinaten,  $Z_m$  eine Zylinderfunktion  $m$ -ter Ordnung,  $n$  und  $m$  (meist ganze) Zahlen.

3. *Kugelwelle*:  $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_{00} \frac{1}{\sqrt{r}} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) Y_n(\vartheta, \varphi)$ .

$r, \vartheta, \varphi$  sind Kugelkoordinaten,  $Y_n$  ist eine beliebige allgemeine Kugelfunktion  $n$ -ten Grades.

Meist zerlegt man die hier auftretende Zylinderfunktion in zwei HANKELSche  $H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}$  und  $H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}$ . Ihre Darstellung S. 70 zeigt, daß die Lösung mit  $H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}$  eine nach dem Punkte  $r=0$  zusammenlaufende (*einlaufende*), die mit  $H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}$  eine von dort *auslaufende* Kugelwelle bedeutet.

4. *Eine allgemeinere Form* der Lösung ist

$$\mathfrak{P}_0 = r^{n+\frac{3}{2}} Z_{n+\frac{3}{2}}(kr) \operatorname{grad} V_n,$$

wo  $V_n = r^{-(n+1)} Y_n(\vartheta, \varphi)$  die Gleichung  $\Delta V_n = 0$  erfüllt und

$$(r \operatorname{grad} V_n) = -(n+1) V_n.$$

Dies ergibt in Kugelkoordinaten das Lösungssystem:

$$\begin{aligned} E_{0r} &= \frac{1}{r^{3/2}} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) Y_n(\vartheta, \varphi) \\ E_{0\varphi} &= \frac{1}{n(n+1)\sqrt{r} \sin \vartheta} \left( \frac{d}{dr} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) + \frac{1}{2r} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right) \frac{\partial Y_n(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi} \\ E_{0\vartheta} &= -\frac{1}{n(n+1)\sqrt{r}} \left( \frac{d}{dr} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) + \frac{1}{2r} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right) \frac{\partial Y_n(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \\ H_{0r} &= 0 \\ H_{0\varphi} &= \frac{i\mathcal{P}}{\mu} \frac{-k}{n(n+1)\sqrt{r}} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) \frac{\partial Y_n(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \\ H_{0\vartheta} &= \frac{i\mathcal{P}}{\mu} \frac{k}{n(n+1)\sqrt{r} \sin \vartheta} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) \frac{\partial Y_n(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Hieraus gewinnt man ein zweites Lösungssystem  $\mathfrak{E}'$ ,  $\mathfrak{H}'$  mit

$$\mathfrak{E}' = \frac{\mu}{i\mathcal{P}} \mathfrak{H} \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}' = \frac{i\mathcal{P}}{\mu} \mathfrak{E}.$$

## 4. Grundlagen der Optik.

### a) Wellenoptik.

Das Hauptproblem der Wellenoptik besteht darin, aus zeitlich periodischen Partikularlösungen der MAXWELLSchen Gleichungen solche zusammzusetzen, die bestimmte Rand- und Übergangsbedingungen erfüllen (Probleme der Brechung, Reflexion und Beugung). Schreibt man die Lösungen in der Form

$$\mathfrak{E} = a(x, y, z) \cdot e^{i\omega(S+t)}, \quad (1)$$

so heißt die vektorielle Ortsfunktion  $a(x, y, z)$  die *Amplitude* und

$$\varphi = \omega \cdot S(x, y, z) \quad (2)$$

die *Phase* der Welle. Flächen konstanter Phase heißen *Wellenflächen*. Die *Wellenlänge* ist

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\text{grad } \varphi|}. \quad (3)$$

### b) Geometrische Optik.

Läßt man  $\omega \rightarrow \infty$ , d. h.  $\lambda \rightarrow 0$  gehen, so erhält man den Grenzfall der geometrischen Optik. Es wird dann:

$$(\text{grad } S)^2 = p^2 \quad (\text{Eikonalgleichung}). \quad (4)$$

Die Funktion  $S(x, y, z)$  heißt das *Eikonal*.

Die Eikonalgleichung gestattet die Bestimmung der Wellenflächen für ein vorgelegtes Problem. Es ist

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 (d \mathfrak{s} \text{ grad } S), \quad (5)$$

wobei  $d \mathfrak{s}$  längs einer beliebigen Integrationskurve genommen ist. Durchsetzt insbesondere die Integrationskurve überall senkrecht die Wellenflächen, so heißt sie ein *Strahl*. Es wird dann

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 p \, ds, \quad (6)$$

d. h. der längs eines Strahles gemessene „Lichtweg“  $\int p \, ds$  ist identisch mit dem Eikonal. Die Strahlen können gefunden werden als Extremalen des Variationsprinzips von FERMAT:

$$\delta S = \delta \int_1^2 p \, ds = 0. \quad (7)$$

Aus diesen Grundgleichungen folgen die drei Grundgesetze der geometrischen Optik: 1. In homogenen Medien sind die Strahlen gerade Linien (Vernachlässigung der Beugungserscheinungen), 2. die einzelnen Strahlen sind voneinander unabhängig (Vernachlässigung der Interferenzenerscheinungen), 3. jeder Strahl kann auch im umgekehrten Sinne vom Lichte durchlaufen werden.

Der Vektor  $\mathfrak{f}$  in Richtung des Strahls vom Betrage  $p$  heißt *Strahlvektor*. Es ist

$$\mathfrak{f} = \text{grad } S.$$

Die letzte Gleichung bringt zum Ausdruck, daß sich die zu einem Strahlensystem senkrechten Flächenelemente stets zu Orthogonalflächen (Wellenflächen) zusammenfügen lassen, wenn sie es an irgendeiner Stelle tun (*Satz von MALUS*).

### 5. Wellen in anisotropen Medien (Kristalloptik).

Wir setzen

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \mathfrak{E} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{D}, \quad \mu = 1.$$

Hier sei  $\mathfrak{A}$  ein symmetrischer Tensor ( $\mathfrak{A}^{-1}$  der entsprechende reziproke), der an die Stelle des Skalars  $\varepsilon$  tritt.

Der Ansatz für eine ebene Welle für reelles  $p$  ( $\sigma = 0, v = \frac{c}{p}$ )

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 e^{i\omega \left( t - \frac{\mathfrak{n} \cdot \mathbf{r}}{v} \right)}$$

usw. in die Wellengleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{D}}{\partial t^2} &= \text{rot rot } \mathfrak{E} \\ &= \Delta \mathfrak{E} - \text{grad div } \mathfrak{E} \end{aligned}$$

eingesetzt, ergibt dann

$$\frac{v^2}{c^2} \cdot \mathfrak{D} - \mathfrak{E} + \mathfrak{n}(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{E}) = 0. \quad (1)$$

Hieraus folgt  $(\mathfrak{D} \mathfrak{n}) = 0$ . Aus der 1. MAXWELLSchen Gleichung folgt:

$$-\frac{v}{c} \cdot \mathfrak{D} = [\mathfrak{n} \mathfrak{H}] \quad \text{und} \quad \frac{v}{c} \cdot \mathfrak{H} = [\mathfrak{n} \mathfrak{E}],$$

also  $(\mathfrak{H} \mathfrak{n}) = 0, (\mathfrak{H} \mathfrak{D}) = 0$  und  $H^2 = (\mathfrak{E} \mathfrak{D})$ .

$\mathfrak{D}, \mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{n}$  bilden demnach ein orthogonales Achsenkreuz;  $\mathfrak{E}$  liegt in der von  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{n}$  aufgespannten Ebene. Da durch  $\mathfrak{D}$  auch  $\mathfrak{E}$  bestimmt ist, so sind auch  $\mathfrak{n}$  und  $\mathfrak{H}$  bestimmt, und damit auch  $v$  durch

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{(\mathfrak{E} \mathfrak{D})}{D^2}.$$

Ferner ist

$$\frac{v^2}{c^2} (\mathfrak{E} \mathfrak{D}) - E^2 + (\mathfrak{n} \mathfrak{E})^2 = 0, \quad (\mathfrak{n} \mathfrak{E}) = \sqrt{E^2 - D^2 \frac{v^4}{c^4}},$$

also nach (1)

$$\mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{E} - \mathfrak{D} \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{E^2 - D^2 \frac{v^4}{c^4}}} = \frac{\mathfrak{E} D^2 - \mathfrak{D} (\mathfrak{E} \mathfrak{D})}{D \sqrt{E^2 D^2 - (\mathfrak{E} \mathfrak{D})^2}} \quad \text{und} \quad v = \pm \frac{c}{D} \sqrt{\mathfrak{E} \mathfrak{D}}.$$

Die Wellennormale und die Geschwindigkeit sind daher vollständig durch die Schwingungsrichtung  $\mathfrak{D}$  bestimmt.

Ist  $\mathfrak{n}$  gegeben, so ist (1) ein homogenes lineares Gleichungssystem der drei Komponenten von  $\mathfrak{D}$ . Es ist nur lösbar, falls die Determinante der Koeffizienten verschwindet. Das ergibt eine Gleichung 3. Grades für  $v^2$  (Säkulargleichung), die sich wegen des Verschwindens ihres absoluten

Gliedes auf eine 2. Grades reduziert<sup>1</sup>. Für ein gegebenes  $n$  gibt es daher zwei Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  und zwei Schwingungsrichtungen  $\mathfrak{D}_1$  und  $\mathfrak{D}_2$ . Da für beide  $\mathfrak{D}(\mathfrak{D}n) = 0$  ist, findet man

$$\frac{v_1^2}{c^2}(\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2) - (\mathfrak{E}_1 \mathfrak{D}_2) = 0 = \frac{v_2^2}{c^2}(\mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_1) - (\mathfrak{E}_2 \mathfrak{D}_1).$$

Da also  $(\mathfrak{E}_1 \mathfrak{D}_2) = (\mathfrak{E}_2 \mathfrak{D}_1)$  ist [wegen  $\mathfrak{E}_1 \mathfrak{A} \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_2 \mathfrak{A} \mathfrak{E}_1$  (s. S. 124)], so wird  $(\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2)(v_1^2 - v_2^2) = 0$ .

Zu den zwei verschiedenen  $v$  gehören also zwei orthogonale  $\mathfrak{D}(\mathfrak{D}_1 \perp \mathfrak{D}_2)$ .

Die Säkulargleichung für  $v^2$  führt bei solcher Wahl des Koordinatensystems, daß die  $\mathfrak{A}_{i,k}^{-1}$  für  $i \neq k$  verschwinden (Transformation auf Hauptachsen), auf die FRESNELSche Gleichung; wenn  $\mathfrak{A}_{i,i}^{-1} = \frac{c^2}{a_i^2}$  gesetzt wird,

gilt  $\sum_i \frac{n_i^2}{a_i^2 - v^2} = 0$ .  $n_i$  sind hierbei die Komponenten (Richtungskosinus)

von  $n$  gegen die Hauptachsen.

Trägt man  $v$  als Radiusvektor in allen möglichen Richtungen  $n$  auf, so erhält man eine Fläche, die *Normalenfläche*.

Es gibt im allgemeinen zwei Richtungen  $n$ , für die  $v_1 = v_2$  wird, die *optischen Achsen*.

Geometrisch kann die Gleichung (1) wie folgt gelöst werden:

Man beschreibt das Ellipsoid  $(\mathfrak{r} \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{r}) = 1$ , schneidet es mit der Ebene  $(n \mathfrak{r}) = 0$  (die senkrecht zu  $n$  durch  $\mathfrak{r} = 0$  geht), und sucht Richtungen und Längen der Halbachsen der Schnittellipse. Für diese gilt  $\delta(r^2) = 0$ . Man erhält

$$(\mathfrak{r} \delta \mathfrak{r}) = 0$$

und die Nebenbedingungen

$$(\mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{r} \delta \mathfrak{r}) = 0$$

$$(n \delta \mathfrak{r}) = 0,$$

also

$$\mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{r} + \sigma_1 \mathfrak{r} + \sigma_2 n = 0.$$

Durch Multiplikation mit  $n$  bzw.  $\mathfrak{r}$  folgt

$$\sigma_1 = -\frac{1}{r^2}, \quad \sigma_2 = -(n \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{r}),$$

<sup>1</sup> Man kann aus (1)  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{D}$  eliminieren durch Anwendung der Formel

$$(\mathfrak{X} \mathfrak{a} \mathfrak{b}) - |\mathfrak{X}|(\mathfrak{a} \mathfrak{b}) = |T| \{(\mathfrak{X}^{-1} \mathfrak{a} \mathfrak{X}^{-1} \mathfrak{b}) - |\mathfrak{X}^{-1}|(\mathfrak{X}^{-1} \mathfrak{a} \mathfrak{b})\},$$

indem man  $\mathfrak{a} = \mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{b} = n$ ,  $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}$  setzt. Dies ergibt

$$(\mathfrak{A} \mathfrak{D} n) = |A| \{(\mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{E} n) - |\mathfrak{A}^{-1}|(\mathfrak{E} n)\}.$$

Setzt man aus (1)  $\mathfrak{D} = \frac{c^2}{v^2}(\mathfrak{E} - n(\mathfrak{E}n))$  und  $\mathfrak{E} = \mathfrak{D} \frac{v^2}{c^2} + n(\mathfrak{E}n)$ , so erhält man

$$\frac{v^4}{c^4} + \frac{v^2}{c^2} \{(\mathfrak{A}^{-1} n n) - |\mathfrak{A}^{-1}|\} + \frac{(\mathfrak{A} n n)}{|A|} = 0.$$

Aus dieser Gleichung kann man die zwei Werte von  $v$  als Funktion von  $n$  berechnen.

also

$$\mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{r} - \frac{\mathfrak{r}}{r^2} - \mathfrak{n} (\mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{r} \mathfrak{n}) = 0.$$

Wenn wir in letzterer Gleichung  $\mathfrak{r}$  mit  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{r}$  mit  $\mathfrak{E}$  und  $r^2$  mit  $\frac{c^2}{v^2}$  identifizieren, so geht sie über in unsere Gleichung (1). Die Längen der Halbachsen der Schnittellipse sind demnach gleich  $\frac{c}{v_1}$  bzw.  $\frac{c}{v_2}$  und ihre Richtungen die von  $\mathfrak{D}_1$  und  $\mathfrak{D}_2$ .

Die Fortpflanzung der Energie erfolgt senkrecht zu  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  in Richtung von  $\mathfrak{s}$ .

$$\mathfrak{s} \text{ sei ein Einheitsvektor } (s^2 = 1), \quad (\mathfrak{E} \mathfrak{s}) = 0, \quad (\mathfrak{H} \mathfrak{s}) = 0.$$

$\mathfrak{s}$  ist komplanar mit  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{n}$ .

Wir setzen  $\mathfrak{D} + \alpha \mathfrak{E} + \beta \mathfrak{s} = 0$ . Multiplikation mit  $\mathfrak{s}$  bzw.  $\mathfrak{n}$  ergibt

$$\beta = -(\mathfrak{D} \mathfrak{s}), \quad \alpha = \frac{(\mathfrak{D} \mathfrak{s}) (\mathfrak{n} \mathfrak{s})}{(\mathfrak{E} \mathfrak{n})}.$$

Aus Gleichung (1) folgt

$$\frac{(\mathfrak{D} \mathfrak{s})}{(\mathfrak{E} \mathfrak{n})} = -(\mathfrak{n} \mathfrak{s}) \frac{c^2}{v^2}.$$

Wir erhalten also

$$\frac{c^2}{v^2} (\mathfrak{n} \mathfrak{s})^2 \mathfrak{E} - \mathfrak{D} + \mathfrak{s} (\mathfrak{D} \mathfrak{s}) = 0.$$

Es ist aber  $(\mathfrak{n} \mathfrak{s}) = \cos \zeta$ , wo  $\zeta$  der Winkel zwischen  $\mathfrak{n}$  und  $\mathfrak{s}$  ist. Nennen wir  $S$  die Geschwindigkeit der Welle in Richtung von  $\mathfrak{s}$ , so ist  $\frac{v}{S} = \cos \zeta = (\mathfrak{n} \mathfrak{s})$ . Es wird also

$$\frac{c^2}{S^2} \mathfrak{E} - \mathfrak{D} + \mathfrak{s} (\mathfrak{D} \mathfrak{s}) = 0. \quad (2)$$

Diese Gleichung hat genau denselben Typus wie die ursprüngliche (1).

Die geometrische Lösung ist hier so zu benutzen, daß das Ellipsoid  $(\mathfrak{r} \mathfrak{A} \mathfrak{r}) = 1$  und die Fläche  $(\mathfrak{r} \mathfrak{s}) = 0$  zu beschreiben ist. Die Halbachsen der Schnittellipse liefern dann  $r_1 = \frac{S_1}{c}$ ,  $r_2 = \frac{S_2}{c}$  und ihre Richtungen sind diejenigen von  $\mathfrak{E}_1$  und  $\mathfrak{E}_2$ .

Die Fläche mit dem Radiusvektor  $S$  in Richtung  $\mathfrak{s}$  heißt *Strahlenfläche*.

Schreiben wir  $\mathfrak{S} = S \mathfrak{s}$ , so wird aus (2)

$$c^2 \mathfrak{E} - \mathfrak{D} S^2 + \mathfrak{S} (\mathfrak{D} \mathfrak{S}) = 0.$$

Multiplikation mit  $\mathfrak{D}$  und Variation führt wegen  $(\mathfrak{D} \delta \mathfrak{E}) = (\mathfrak{E} \delta \mathfrak{D})$  zu

$$2 \delta \mathfrak{D} (c^2 \mathfrak{E} - \mathfrak{D} S^2 + \mathfrak{S} (\mathfrak{D} \mathfrak{S})) - 2 \delta \mathfrak{S} (\mathfrak{S} \mathfrak{D}^2 - \mathfrak{D} (\mathfrak{D} \mathfrak{S})) = 0.$$

Der Faktor von  $\delta \mathfrak{D}$  ist gleich Null, der von  $\delta \mathfrak{S}$  ist ein Vektor parallel zu  $\mathfrak{n}$ .

Also gilt  $(\mathfrak{n} \delta \mathfrak{S}) = 0$ , d. h.  $\mathfrak{n}$  steht senkrecht zur Tangentialebene an die Strahlenfläche im Punkte  $\mathfrak{r} = \mathfrak{S}$ . Dies bedeutet: Eine zu  $\mathfrak{n}$  senkrechte ebene Wellenfläche, die zur Zeit  $t=0$  den Nullpunkt überschreitet, tangiert zur Zeit  $t=1$  die Strahlenfläche. Letztere ist die Enveloppe aller solcher Wellenflächen für  $t=1$ .

Dritter Abschnitt.

## Relativitätstheorie.

### A. Spezielle Relativitätstheorie.

#### 1. Vierdimensionale Darstellung der Welt und Relativitätsprinzip.

1. Jedes physikalische „Ereignis“ findet an einem Ort zu einer Zeit statt, liefert also ein Wertsystem  $xyzt$ . Hier bedeuten  $xyz$  die kartesischen Koordinaten des (dreidimensionalen) Raumes, gemessen mit *materiellen* Maßstäben, bezogen auf ein beliebig angenommenes Achsen-system und  $t$  die Maßzahl der Zeit, gemessen mit relativ zu dem System ruhenden *materiellen* Uhren.

Die Unveränderlichkeit der Maßstäbe bei den zur Ausmessung vorgenommenen Verschiebungen oder Drehungen gegen das System wird hierbei immer angenommen. Als Kontrolle des gleichen Ganges der Uhren (Definition der Gleichzeitigkeit) werden Lichtsignale als benutzt gedacht, wobei die Lichtgeschwindigkeit unter allen Umständen als im Vakuum konstant  $= c = 3 \cdot 10^{10}$  cm/sec angenommen wird.

2. Zur geometrischen Darstellung des gesamten zeitlich-räumlichen physikalischen Geschehens kann man sich einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit (*Welt*) bedienen. In dieser sei jeder Punkt durch die vier Koordinatenmaßzahlen  $x^1 x^2 x^3 x^4$  in einem kartesischen vierdimensionalen System festgelegt.

Ein Wertsystem  $x^1 x^2 x^3 x^4$  heißt ein *Weltpunkt*. Die Abhängigkeit der Lage eines materiellen Punktes im Raum  $xyz$  von der Zeit  $t$  wird durch eine *Wellinie* dargestellt. Durch die Gesamtheit der Weltlinien aller Punkte ist das gesamte (meßbare) Naturgeschehen darstellbar.

Es sind dann folgende zwei Darstellungen gebräuchlich:

a) Man identifiziert mit  $x^1 x^2 x^3 x^4$  die Größen  $x, y, z, t$ .

b) Man identifiziert mit  $x^1 x^2 x^3 x^4$  die Größen  $x, y, z, l = ict$  ( $i = \sqrt{-1}$ ). Ein Wertsystem  $xyzt$  ist dann ein imaginärer Punkt der Welt. Diese Darstellung bietet gewisse mathematische Vorteile. Sie ist aber unanschaulich. Im folgenden gebrauchen wir die Darstellung a), siehe jedoch S. 303 f.

3. Nimmt man ein gegen das System  $xyz$  gleichförmig mit der Geschwindigkeit  $v$  *bewegtes* anderes Koordinatensystem und mißt wie oben, d. h. mit gegen dieses ruhenden Maßstäben und Uhren, die Koordinaten und die Zeit desselben Ereignisses, so erhält man ein Wertsystem  $x' y' z' t'$ , das an Stelle der  $xyzt$  mit den  $x^1 x^2 x^3 x^4$  identifiziert werden kann.



Die spezielle *Relativitätstheorie* sagt dann aus, daß *die Naturgesetze*, dargestellt in den  $x^1 x^2 x^3 x^4$  *gleichlauten, unabhängig davon*, ob man diese mit den  $xyzt$  oder den  $x' y' z' t'$  identifiziert. (Es ist zu beachten, daß wir unter den Naturgesetzen die Relationen verstehen, die zwischen den durch Messung mit Maßstäben und Uhren gewonnenen Maßzahlen der physikalischen Größen bestehen. Wenn sich also auch bei der relativen Bewegung der Systeme die Maßeinheiten ändern mögen [was nicht kontrollierbar ist], so sollen die Relationen zwischen den gewonnenen Zahlen erhalten bleiben.)

## 2. LORENTZ-Transformation.

1. Die Anwendung des Relativitätspostulats (z. B. auf die Kinematik der Lichtausbreitung) führt auf folgende Beziehungen (*LORENTZ-Transformation*), wenn man die Koordinaten  $x, y, z$  als Komponenten des Ortsvektors  $r$  nimmt:

$$r' = r - v \left\{ \frac{(r \cdot v)}{v^2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) + \frac{t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right\}, \quad t' = \frac{t - \frac{(v \cdot r)}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

2. Das vollständige Transformationsschema lautet also:

	$x$	$y$	$z$	$t$
$x'$	$1 - \frac{v_x^2}{v^2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$	$-\frac{v_x v_y}{v^2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$	$\frac{v_x v_z}{v^2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$	$\frac{-v_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$
$y'$	$\frac{v_x v_y}{v^2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$	$1 - \frac{v_y^2}{v^2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$	$-\frac{v_y v_z}{v^2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$	$\frac{-v_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}$
$z'$	$\frac{v_x v_z}{v^2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$	$\frac{v_y v_z}{v^2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$	$1 - \frac{v_z^2}{v^2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$	$\frac{-v_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}$
$t'$	$\frac{-v_x}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}$	$\frac{-v_y}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}$	$\frac{-v_z}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

Hieraus folgt für  $v_z = v_y = 0$ ;  $v_x = v$  das der speziellen LORENTZ-Transformation:

	$x$	$y$	$z$	$t$
$x'$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$	0	0	$\frac{-v}{\sqrt{1 - \beta^2}}$
$y'$	0	1	0	0
$z'$	0	0	1	0
$t'$	$\frac{v}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

Die Transformation hat die Determinante 1.

3. Hieraus folgt, daß der vierdimensionale „Abstand“ zweier Welt-  
punkte  $x_1 y_1 z_1 t_1$  und  $x_2 y_2 z_2 t_2$

$$\begin{aligned} \Delta s &= \sqrt{-(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 + c^2 (t_1 - t_2)^2} \\ &= \sqrt{-(r_1 - r_2)^2 + c^2 (t_1 - t_2)^2} \end{aligned}$$

eine Invariante ist, d. h. unverändert bleibt, wenn man ihn durch die  
 $x' y' z' t'$  in derselben Form schreibt

$$\begin{aligned} \Delta s &= \sqrt{-(x'_1 - x'_2)^2 - (y'_1 - y'_2)^2 - (z'_1 - z'_2)^2 + c^2 (t'_1 - t'_2)^2} \\ &= \sqrt{-(r'_1 - r'_2)^2 + c^2 (t'_1 - t'_2)^2}. \end{aligned}$$

Ist also für ein bestimmtes System  $xyz t$  das Weltbild (dargestellt  
durch die Weltlinien) bekannt, so erhält man das Weltbild für ein anderes  
System  $x' y' z' t'$  durch eine Deformation (Transformation), die den  
„Abstand“  $\Delta s$  aller Weltpunkte unverändert läßt<sup>1</sup>.

4. Ist  $\Delta s$  imaginär, so ist es durch eine LORENTZ-Transformation  
immer möglich,  $t'_1 - t'_2$  verschwinden zu lassen. Die beiden Ereignisse  
erscheinen im geeigneten Bezugssystem als *gleichzeitig* (*Transformation  
auf Gleichzeitigkeit*).

Ist  $\Delta s$  reell, so ist es möglich,  $\Delta s$  auf die Form  $\sqrt{c^2 (t'_1 - t'_2)^2}$  zu trans-  
formieren. Die Ereignisse erscheinen als am selben Ort stattfindend  
(*Transformation auf Ruhe*).

Ist  $\Delta s = 0$ , so sind die beiden Ereignisse durch eine Raumdistanz  
 $\Delta r$  und eine Zeitdistanz  $\Delta t$  so getrennt, daß  $\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\Delta r'}{\Delta t'} = c$  ist.

Sind die beiden Weltpunkte 1 und 2 zwei infinitesimal benachbarte  
Punkte der Weltlinie eines bewegten Punktes, so ist  $ds$  immer reell;  
bewegt sich der Punkt mit Lichtgeschwindigkeit, so wird  $ds = 0$ .

$d\tau = \frac{1}{c} ds$  heißt das Differential der „Eigenzeit“ des Punktes. Ist  
der Punkt auf Ruhe transformiert, so ist  $d\tau = dt'$ .

5. Die LORENTZ-Transformation angewandt auf einen mit der Ge-  
schwindigkeit  $w$  relativ zum 1. System bewegten Punkt liefert die Ge-  
schwindigkeit  $w'$  relativ zum 2. System.

Es ist

$$w = \frac{dr}{dt},$$

also

$$w' = \frac{dr'}{dt'} = \frac{w \sqrt{1 - \beta^2} - v \left\{ \frac{(wv)}{v^2} (1 - \beta^2 - 1) + 1 \right\}}{1 - \frac{(wv)}{c^2}}.$$

<sup>1</sup> Führt man an Stelle von  $t$  die Größe  $l = ict$  und  $l' = ict'$  ein, so wird die  
Transformation orthogonal (Drehung).

Ist speziell  $w \parallel v$ , so wird:

$$w' = v \frac{\left(\frac{w}{v} - 1\right)}{1 - \frac{wv}{c^2}} \quad \text{oder} \quad w' = \frac{w - v}{1 - \frac{wv}{c^2}} \quad (\text{Additionstheorem der Geschwindigkeiten}).$$

Ist  $w \perp v$ , so wird

$$w' = w \sqrt{1 - \beta^2} - v \quad \text{oder} \quad w'^2 = w^2 + v^2 - \frac{v^2 w^2}{c^2}.$$

Anwendung. In einer mit der Geschwindigkeit  $v$  strömenden Flüssigkeit laufe ein Lichtstrahl mit der Geschwindigkeit  $w' = \frac{c}{n}$  ( $n$  = Brechungsindex) in der Richtung der Bewegung. Dann ist seine Geschwindigkeit im ruhenden System

$$w = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{n \cdot c}} = \left(\frac{c}{n} + v\right) \left(1 - \frac{v}{nc} + \dots\right) = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \dots$$

$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$  heißt *Mitführungskoeffizient*.

6. Statt (nach 3) die LORENTZ-Transformation als eine Deformation des Weltbildes zur Darstellung in einem anderen Koordinatensystem aufzufassen, kann man sie auch (vgl. S. 98) als eine Transformation der Koordinaten des (unverändert gelassenen) Weltbildes betrachten. Wir haben dann eine affine Transformation des Koordinatensystems, bei der das Linienelement  $ds$  invariant ist. Zur Darstellung der Naturgesetze bedient man sich dann mit Vorteil der vierdimensionalen Vektoranalysis im Weltbild. Die Komponenten  $p^i$  eines Vektors  $p$  transformieren sich wie die Koordinaten  $x^i$ ,  $p'^i = \sum a_k^i p^k$ , wo die  $a_k^i$  aus dem Schema 2 (S. 272) zu entnehmen sind. Tensoren transformieren sich nach der Regel

$$T'^{lm} = \sum_i \sum_k a_i^l a_k^m T^{ik} \quad (\text{vgl. S. 134}).$$

Wegen

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2$$

wird

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{44} = c^2, \quad g_{ik} = 0 \text{ für } i \neq k, \quad \det g_{ik} = |g| = -c^2.$$

Die obigen Werte für  $g_{ik}$  gelten für alle Bezugssysteme.

Folgende Beziehungen gelten daher zwischen den kovarianten und kontravarianten Komponenten von Vektoren und Tensoren ( $i, k = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{array}{lll} p_i = -p^i & T_{ik} = T^{ik} & T^i_k = -T^{ik} \\ p_4 = c^2 p^4 & T_{i4} = -c^2 T^{i4} & T^i_4 = c^2 T^{i4} \\ & T_{44} = c^4 T^{44} & T^4_i = -T^{4i} \\ & & T^4_4 = c^2 T^{44}. \end{array}$$

Das Transformationsschema für die Komponenten eines Tensors wird also bei der speziellen LORENTZ-Transformation ( $v_y = v_z = 0$ ,  $v_x = v$ ):

	11	12	13	14	21	22	23	24	31	32	33	34	41	42	43	44
11	$\frac{1}{1-\beta^2}$	0	0	$\frac{-v}{1-\beta^2}$									$\frac{-v}{1-\beta^2}$	0	0	$\frac{v^2}{1-\beta^2}$
12	0	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$	0	0			0			0			0	$\frac{-v}{\sqrt{1-\beta^2}}$	0	0
13	0	0	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$	0									0	0	$\frac{-v}{\sqrt{1-\beta^2}}$	0
14	$\frac{-v}{c^2(1-\beta^2)}$	0	0	$\frac{1}{1-\beta^2}$									$\frac{\beta^2}{1-\beta^2}$	0	0	$\frac{-v}{1-\beta^2}$
21					$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$	0	0	$\frac{-v}{\sqrt{1-\beta^2}}$								
22					0	1	0	0								
23		0			0	0	1	0		0					0	
24					$\frac{-v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$								
31									$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$	0	0	$\frac{-v}{\sqrt{1-\beta^2}}$				
32									0	1	0	0				
33		0							0	0	1	0			0	
34									$\frac{-v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$				
41	$\frac{-v}{c^2(1-\beta^2)}$	0	0	$\frac{\beta^2}{1-\beta^2}$									$\frac{1}{1-\beta^2}$	0	0	$\frac{-v}{1-\beta^2}$
42	0	$\frac{-v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}$	0	0				0					0	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$	0	0
43	0	0	$\frac{v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}$	0									0	0	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$	0
44	$\frac{\beta^2}{c^2(1-\beta^2)}$	0	0	$\frac{-v}{c^2(1-\beta^2)}$									$\frac{-v}{c^2(1-\beta^2)}$	0	0	$\frac{1}{1-\beta^2}$

und daraus für einen antimetrischen Tensor:

	14	24	34	23	31	12
14	1	0	0	0	0	0
24	0	1	0	0	0	$\frac{+v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}$
34	0	0	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$	0	$\frac{-v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}$	0
23	0	0	0	1	0	0
31	0	0	$\frac{-v}{\sqrt{1-\beta^2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$	0
12	0	$\frac{+v}{\sqrt{1-\beta^2}}$	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

### 3. Physikalische Bedeutung vierdimensionaler Vektoren und Tensoren.

Die Komponenten eines Vektors  $p^i$  lassen sich physikalischen (meßbaren) Größen zuordnen.

Die drei ersten Komponenten sind die Komponenten eines räumlichen Vektors, die vierte hat eine abweichende Bedeutung. Sie ist durch die Dimension einer Geschwindigkeit von den anderen unterschieden. Sie kann nur einen Skalar bedeuten. Der Betrag eines Vektors  $p = \sqrt{p^i p^k g_{i,k}}$  muß eine Invariante sein, also eine Größe, die für alle Bezugssysteme denselben Wert hat.

Die Aufstellung der Vektorgleichungen der Relativitätstheorie muß in Anschluß an die Erfahrung erfolgen. Sie ist in vielen Fällen nicht ohne Modifikation der älteren Anschauungen durchzuführen.

Der Einheitsvektor in Richtung einer Weltlinie  $u^i = \frac{dx^i}{ds}$  hat die Komponenten

$$u^1 = \frac{v_x}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \quad u^2 = \frac{v_y}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \quad u^3 = \frac{v_z}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \quad u^4 = \frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Folgende Vektoren und ihre räumlich-zeitliche Deutung haben sich bewährt:

Weltvektor	Räumlicher Anteil	Zeitlicher Anteil	Invarianter Betrag
$u^i$	$\frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-\beta^2}}$	$\frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}}$	1
$k^i$	$\mathfrak{k} = \text{Kraftdichte}$	$\frac{\lambda}{c^2} = \frac{\text{Leistungsdichte}}{c^2}$	$\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2} - \mathfrak{k}^2}$
$p^i$	$\mathfrak{p} = \text{Impuls}$	$\frac{E}{c^2} = \frac{\text{Energie}}{c^2}$	$\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - \mathfrak{p}^2}$
$s^i$	$\mathfrak{i} = \text{Stromdichte}$	$\varrho = \text{Ladungsdichte}$	$\sqrt{c^2 \varrho^2 - \mathfrak{i}^2}$
$\varphi^i$	$\mathfrak{Q} = \text{Vektorpotential}$	$\frac{\varphi}{c} = \frac{\text{Skalarpotential}}{c}$	$\sqrt{\varphi^2 - A^2}$

In analoger Weise sind die Komponenten eines Tensors zu deuten. Folgende Tensoren und ihre Bedeutungen werden benutzt, wobei

$\mathfrak{E}$  = elektrische Feldstärke

$\mathfrak{H}$  = magnetische Feldstärke

$\mathfrak{D}$  = elektrische Verschiebung

$\mathfrak{B}$  = magnetische Induktion bedeutet.

Tensor: $F^{ik} = -F^{ki}$					Tensor: $H^{ik} = -H^{ki}$				
$k \setminus i$	1	2	3	4	$k \setminus i$	1	2	3	4
1	0	$B_z$	$-B_y$	$-\frac{E_x}{c}$	1	0	$H_z$	$-H_y$	$-\frac{D_x}{c}$
2	$-B_z$	0	$B_x$	$-\frac{E_y}{c}$	2	$-H_z$	0	$H_x$	$-\frac{D_y}{c}$
3	$B_y$	$-B_x$	0	$-\frac{E_z}{c}$	3	$H_y$	$-H_x$	0	$-\frac{D_z}{c}$
4	$\frac{E_x}{c}$	$\frac{E_y}{c}$	$\frac{E_z}{c}$	0	4	$\frac{D_x}{c}$	$\frac{D_y}{c}$	$\frac{D_z}{c}$	0
$(F^2) = F^{ik} F_{ik} = 2(B^2 - E^2)$					$(H^2) = H^{ik} H_{ik} = 2(H^2 - D^2)$				
					$(FH) = F^{ir} H^{kl} g_{ik} g_{rl} = 2((\mathfrak{B} \mathfrak{H}) - (\mathfrak{E} \mathfrak{D}))$				

**Transformationseigenschaften.** Die genannten Vektoren (S. 276) transformieren sich wie  $r, l$  (s. S. 272). Dagegen transformieren sich die Vektoren der Elektrodynamik wie Tensorkomponenten nach Schema S. 275 unten, d. h. es gilt:

$E'_x = E_x$	$B'_x = B_x$
$E'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(E_y + \beta B_z)$	$B'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(B_y - \beta E_z)$
$E'_z = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(E_z - \beta B_y)$	$B'_z = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(B_z + \beta E_y)$
$D'_x = D_x$	$H'_x = H_x$
$D'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(D_y + \beta H_z)$	$H'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(H_y - \beta D_z)$
$D'_z = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(D_z - \beta H_y)$	$H'_z = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(H_z + \beta D_y)$

Als *elektromagnetischen Impuls-Energietensor* bezeichnet man den wie folgt gebildeten:

$$S^{ik} = \frac{g^{ik}}{4} (FH) - \frac{1}{2} (F^{ir} H^{kl} + F^{kr} H^{il}) g_{rl}$$

$$S^{11} = \frac{1}{2} (E_y D_y + E_z D_z - E_x D_x + H_y B_y + H_z B_z - H_x B_x)$$

$$S^{12} = -E_x D_y - H_x B_y \text{ usw.}$$

$$S^{14} = \frac{1}{2c} ([\mathfrak{D} \mathfrak{B}] + [\mathfrak{E} \mathfrak{H}])_x$$

$$S^{44} = \frac{1}{2c^2} ((\mathfrak{E} \mathfrak{D}) + (\mathfrak{H} \mathfrak{B})).$$

$S^{ik}$  für  $i = 1, 2, 3, k = 1, 2, 3$  sind also die Komponenten des *symmetrischen MAXWELLSchen Spannungstensors*  $\mathfrak{S}$ .  $\frac{c^2}{4\pi} S^{4i}$  sind die Komponenten des *POYNTINGSchen Vektors*.  $\frac{c^2}{4\pi} S^{44}$  ist die *Energiedichte*  $W$ .

#### 4. Elektrodynamik.

Die elektrodynamischen Gesetze stellen sich dann folgendermaßen dar:

$$\frac{\partial s^i}{\partial x^i} = 0 \quad \left( \operatorname{div} \mathfrak{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} = -F_{ik} \quad \left( \mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right), \quad (2)$$

wobei für  $\varphi^i$  gelten soll

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^i} = 0 \quad \left( \operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \right).$$

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} = 0 \quad \left( \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right) \quad (3)$$

$$k^i = \frac{F^{ik} s_k}{c} \quad (\mathfrak{k} = \rho (\mathfrak{E} + [\mathfrak{i} \mathfrak{B}], \quad \lambda = (\mathfrak{E} \mathfrak{i})) \quad (4)$$

$$\frac{\partial H^{ik}}{\partial x^k} = \frac{4\pi s^i}{c} \quad \left( \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi \mathfrak{i}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi \rho \right) \quad (5)$$

$$k^i = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial S^{ik}}{\partial x^k} \quad \left( \begin{array}{l} \mathfrak{k} = \operatorname{div} \mathfrak{S} + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{D} \mathfrak{B}] \\ \lambda = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] - \frac{\partial W}{\partial t} \end{array} \right) \quad (6)$$

Im Vakuum ist  $F^{ik} = H^{ik}$ .

Für  $F^{ik} = H^{ik}$  kann man aus den Formeln (2) und (5)  $F^{ik}$  eliminieren und findet

$$\frac{4\pi s^i}{c} = -\square \varphi^i,$$

wo

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

bedeutet.

Setzt man

$$\varphi^i = \frac{\partial Z^{ik}}{\partial x^k} \quad \text{und} \quad s^i = \frac{\partial Q^{ik}}{\partial x^k} \quad (Z^{ik} = -Z^{ki}, \quad Q^{ik} = -Q^{ki})$$

so findet man

$$\frac{4\pi Q^{ik}}{c} = -\square Z^{ik}.$$

$Z^{ik}$  entspricht dem HERTZschen Vektor  $\mathfrak{Z}$  (s. S. 263).

Diese Gleichung läßt sich in affinen Koordinatensystemen leicht integrieren.

### 5. Elektrodynamik in (bewegten) Medien.

Die allgemeine Beziehung zwischen  $F^{ik}$  und  $H^{ik}$  muß so sein, daß für ein relativ zur Materie ruhendes Bezugssystem  $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$  wird. Hier gilt außerdem  $i = \sigma \mathfrak{E}$ .

Um diese Beziehungen kovariant auszudrücken, bildet man eine Reihe von neuen Vektoren und Tensoren.

$$e^i = F^{ik} u_k, \tag{1}$$

wo  $u^k$  der Einheitsvektor  $\frac{dx^k}{ds}$  in Richtung der Weltlinie der Materie ist.

$$d^i = H^{ik} u_k. \tag{2}$$

Für ein Bezugssystem, in dem die Materie ruht, ist dann

$$u^1 = u^2 = u^3 = 0, \quad u^4 = \frac{1}{c}.$$

Hier wird

$$e^i = c F^{i4},$$

also

$$e^1 = E_x, \quad e^2 = E_y, \quad e^3 = E_z, \quad e^4 = 0$$

und

$$d^1 = D_x, \quad d^2 = D_y, \quad d^3 = D_z, \quad d^4 = 0.$$

Die kovariante Gleichung  $d^i = \varepsilon e^i$  gilt also im geeigneten Bezugssystem und daher allgemein. Hieraus folgt

$$\mathfrak{D} + \frac{1}{c} [\mathfrak{v} \mathfrak{H}] = \varepsilon \left( \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{v} \mathfrak{B}] \right).$$

Wir bilden ferner

$$b^{ikl} = F^{ik} u^l + F^{kl} u^i + F^{li} u^k, \quad \text{wo } i + l + k \tag{3}$$

$$h^{ikl} = H^{ik} u^l + H^{kl} u^i + H^{li} u^k. \tag{4}$$

Für

$$u^1 = u^2 = u^3 = 0, \quad u^4 = \frac{1}{c}$$

wird

$$b^{234} = -\frac{B_x}{c}, \quad b^{341} = \frac{B_y}{c}, \quad b^{412} = \frac{B_z}{c}, \quad b^{123} = 0 \text{ usw.}$$

Die kovariante Gleichung  $b^{ikl} = \mu h^{ikl}$  liefert

$$\mathfrak{B} - \frac{1}{c} [\mathfrak{v} \mathfrak{E}] = \mu \left( \mathfrak{H} - \frac{1}{c} [\mathfrak{v} \mathfrak{D}] \right).$$

$\mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{v} \mathfrak{B}]$  wird gelegentlich die *elektromotorische Kraft* genannt und  $\mathfrak{H} - \frac{1}{c} [\mathfrak{v} \mathfrak{D}]$  die *magnetomotorische Kraft*; vgl. aber S. 260.

Um die Beziehung  $i = \sigma \mathfrak{E}$  kovariant darzustellen, beachte man, daß  $s$  in Richtung der Weltlinie die Komponente  $u^i (s^k u_k)$  hat. Dies ist



der *Konvektionsstrom* der geladenen Materie. Die obige Gleichung bezieht sich aber nur auf den *Leitungsstrom*, also auf

$$l^i = s^i - u_i (s^k u_k).$$

Für  $u^1 = u^2 = u^3 = 0$ ,  $u^4 = \frac{1}{c}$  wird

$$l^1 = i_x, \quad l^2 = i_y, \quad l^3 = i_z, \quad l^4 = \rho - \frac{1}{c} (\rho c) = 0.$$

Wir haben hier wegen  $l^4 = 0$  einen reinen Leitungsstrom in ungeladener Materie.

Im ruhenden System und daher allgemein gilt also

$$l^i = s^i - u^i (s^k u_k) = \sigma e^i,$$

d. h.

$$i + \frac{v (v i) - \rho c^2}{c^2 - v^2} = \frac{\sigma \left( \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [v \mathfrak{B}] \right)}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Für einen reinen Konvektionsstrom

$$i = \rho v, \quad i^i = u^i (s^k u_k) = u^i \rho_0 \cdot c$$

wird

$$i^1 = \frac{v_x (\rho c^2 - (i v))}{c^2 - v^2} = v_x \cdot \rho = u^1 \cdot c \cdot \rho_0,$$

$$i^4 = \rho,$$

so daß

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \rho_0 \text{ heißt Ruhdichte der Ladung.}$$

$$k^i = c \rho_0 F^{ik} u_k \quad \text{liefert} \quad \mathfrak{k} = \rho \left( \mathfrak{E} + [v \mathfrak{B}] \right).$$

## 6. Dynamik des Massenpunktes.

Das Grundgesetz der Mechanik  $\mu \frac{dv}{dt} = \mathfrak{k}$  definiert (für kleines  $v$ ) die Massendichte  $\mu$ .

Die entsprechende kovariante Form kann nur lauten

$$c^2 \mu_0 \frac{du^k}{ds} = k^k \quad (\text{Kraftdichte}), \quad (1)$$

wo  $\mu_0$  die Dichte für  $v=0$  bedeutet. Integration über den Bereich

$$dV = dx^1 dx^2 dx^3$$

ergibt

$$c^2 \mu_0 \int \frac{du^k}{ds} dV = \int k^k dV = K^k \quad (\text{Kraft}). \quad (2)$$

Nun ist  $dV = dV_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ , wo  $V_0$  das Volumen, im mitbewegten Bezugssystem gemessen, bedeutet. Setzen wir

$$m_0 = \int \mu_0 dV_0 \quad (\text{Ruhmasse}), \quad (3)$$

so wird

$$K^k = c^2 m_0 \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \frac{d u^k}{d s} = c m_0 \cdot \frac{d u^k}{d t}, \quad (2')$$

also lautet die von der Relativitätstheorie geforderte Bewegungsgleichung, d. h. der räumliche Anteil von (2')

$$\mathfrak{R} = m_0 \cdot \frac{d}{d t} \left( \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right). \quad (4)$$

Setzen wir

$$\frac{d \mathbf{v}}{d t} = \mathfrak{b} \text{ (Beschleunigung)}, \quad \frac{d(v^2)}{d t} = 2(\mathbf{v} \mathfrak{b}),$$

so wird

$$\mathfrak{R} = m_0 \cdot \left( \frac{\mathfrak{b}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \mathfrak{b})}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}^3} \right),$$

also für  $\mathfrak{b} \parallel \mathbf{v}$

$$\mathfrak{R}_{\parallel} = \frac{m_0 \cdot \mathfrak{b}}{\sqrt{1 - \beta^2}^3}, \quad \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}^3} = \text{longitudinale Masse} \quad (5)$$

und für  $\mathfrak{b} \perp \mathbf{v}$

$$\mathfrak{R}_{\perp} = \frac{m_0 \cdot \mathfrak{b}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \text{transversale Masse}. \quad (6)$$

Der *Impuls* wird nach (4)  $\mathfrak{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ , die *Energie*  $E = \frac{c^2 m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ ; dieses nach  $\beta$  entwickelt, liefert

$$E = m_0 c^2 + \frac{m_0}{2} v^2 + \dots \quad (7)$$

Das zweite Glied ist die kinetische Energie.

Es gilt die wichtige Beziehung

$$\frac{E^2}{c^2} = \mathfrak{p}^2 + m_0^2 c^2. \quad (8)$$

Für  $v=0$  folgt  $E_0 = m_0 c^2$  (*Ruhenergie*). Dies kann so gedeutet werden, daß die *Masse*  $m_0$  *energetischen Ursprungs* ist (doch ist zu beachten, daß noch eine eventuelle Integrationskonstante hinzugefügt werden kann).

Die relativistische Dynamik kann, genau wie die klassische, auch auf andere Prinzipien als die NEWTONSche Grundgleichung

$$\frac{d \mathfrak{p}_i}{d t} = K_i$$

aufgebaut werden<sup>1</sup>. Das HAMILTONSche Prinzip

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

<sup>1</sup> Die Einführung eines Potentials  $W$  ist i. a., besonders beim Mehrkörperproblem, nicht statthaft. Die Gleichungen (9) und (10) sind daher nur in speziellen Fällen verwendbar.

bleibt unverändert erhalten, wenn man unter  $t$  die Eigenzeit des Beobachters versteht und als LAGRANGESche Funktion einführt:

$$L = m_0 c^2 (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) - W. \quad (9)$$

Ist  $W$  konstant, so führt dies Prinzip zu

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \beta^2} dt = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = 0 \quad (\tau = \text{Eigenzeit des Massenpunktes}).$$

Die *kanonischen Gleichungen* kann man unverändert übernehmen, wenn man als HAMILTONSche Funktion benutzt

$$H = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) + W, \quad (10a)$$

oder bei Einführung der Impulse statt der Geschwindigkeiten

$$H(p, x^i) = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} - m_0 c^2 + W(x^i). \quad (10b)$$

Führt man den Tensor  $K^{ik} = c^2 \mu_0 u^i u^k$  ein, so wird wegen

$$\frac{\partial (\mu_0 u^k)}{\partial x^k} = 0 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung der Materie}) \quad (11)$$

$$k^i = \frac{\partial K^{ik}}{\partial x^k}, \quad K^{ik} \text{ heißt „kinetischer Impuls-Energietensor“}.$$

Analog der Elektrodynamik lassen sich (wie in der Elastizitätstheorie) die Kräfte in der Materie durch einen Spannungstensor  $P^{ik}$  darstellen.

$$k^i = - \frac{\partial P^{ik}}{\partial x^k}, \quad P^{ik} \text{ heißt „potentieller Impuls-Energietensor“}.$$

Für ein abgeschlossenes System gilt dann

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} (K^{ik} + P^{ik}) = 0. \quad (12)$$

Hierin sind die Erhaltungssätze des Impulses und der Energie ausgedrückt.

$$T^{ik} = K^{ik} + P^{ik} \text{ heißt der „gesamte Impuls-Energietensor“}.$$

## B. Allgemeine Relativitätstheorie.

### 1. Grundlagen.

#### a) Das Grundgesetz.

Die spezielle Relativitätstheorie hat die Forderung aufgestellt, daß alle Naturgesetze Beziehungen darstellen sollen zwischen Skalaren, Vektoren oder Tensoren einer vierdimensionalen *euklidischen* Mannigfaltigkeit, deren Linienelement also immer auf die Form

$$ds^2 = c^2 (dx^4)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

gebracht werden kann. Die Grundgesetze der Physik bleiben dann kovariant gegenüber allen LORENTZ-Transformationen.

Gehen wir aus von einer *nichteuklidischen* Mannigfaltigkeit, so müssen wir die allgemeine Form

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad (1)$$

zugrunde legen. Die Tensorgleichungen erscheinen dann in einer Form, die *beliebigen Transformationen* der Koordinaten  $x^i$  gegenüber kovariant bleibt. Es treten jetzt in diesen Gleichungen auch die Komponenten des „*metrischen Fundamentaltensors*“  $g_{ik}$  als Funktionen des Ortes auf. Im Gegensatz zur speziellen Theorie betrachtet die allgemeine Relativitätstheorie die Ortsabhängigkeit des Fundamentaltensors als wesentliches Bestimmungsstück des physikalischen Feldes. Das Linienelement kann dann wohl noch in jedem Punkte auf die MINKOWSKISCHE Form (s. S. 273) gebracht werden, nicht aber in *endlichen* Bereichen.

Die nächstliegende differentialgeometrische Charakterisierung des Linienelements kann durch den verjüngten RIEMANNschen Krümmungstensor  $R_{ik}$  (vgl. S. 137) erfolgen. In einer euklidischen Mannigfaltigkeit verschwindet derselbe identisch im ganzen Gebiet. EINSTEIN stellte die Theorie auf, daß  $R_{ik}$  nur an solchen Stellen verschwindet, wo keine Materie vorhanden ist, während es im übrigen durch den gesamten Spannungs-Energietensor der Materie bestimmt wird. Der Zusammenhang wird geregelt durch die Erhaltungssätze von Impuls und Energie. Die Dynamik lieferte als oberstes Grundgesetz, daß *die Divergenz des Weltensors  $\mathfrak{T}$  der Materie* (Summe des mechanischen und elektromagnetischen Anteiles) *verschwindet* (s. S. 282):

$$\frac{\partial T_i^s}{\partial x^s} + \Gamma_{rs}^r T_i^s - \Gamma_{is}^r T_r^s = 0. \quad (2)$$

Auch aus dem Krümmungstensor läßt sich ein Tensor bilden, dessen Divergenz identisch verschwindet, nämlich

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} - \lambda g_{ik}, \quad (3)$$

worin  $\lambda$  eine beliebige Konstante ist („*kosmologische Konstante*“).

Die EINSTEINSche Theorie macht nun den Ansatz

$$\boxed{R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} - \lambda g_{ik} = -\kappa T_{ik}} \quad (\text{Feldgleichungen}), \quad (4)$$

wo  $\kappa$  ebenfalls eine universelle Konstante ist. Der Impuls-Energiesatz ist dann eine notwendige Folge der Feldgleichungen.

Der Vergleich der Feldgleichungen mit der Erfahrung lehrt, daß  $\lambda$  sehr klein ist (höchstens  $10^{-53} \text{ cm}^{-2}$ ) und für viele Probleme  $\lambda = 0$  gesetzt werden darf. Ferner erhält man als erste Näherung die NEWTONsche Gravitationstheorie, wenn

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} = 2,073 \cdot 10^{-48} \text{ cm}^{-1} \text{ g}^{-1} \text{ sec}^2 \quad (5)$$

gesetzt wird, wo  $G = (6,665 \pm 0,004) \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ sec}^{-2}$  die *Gravitationskonstante* ist.

Zwischen den 10 Differentialgleichungen (4) bestehen infolge ihres Tensorcharakters 4 Bedingungsgleichungen; sie genügen daher nicht zur eindeutigen Festlegung der 10 Größen  $g_{ik}$ , sondern lassen gerade hinreichende Freiheit, um an Stelle eines Koordinatensystems  $x^i$  ein anderes  $x'^i = f_i(x^1, x^2, x^3, x^4)$  zu substituieren (HILBERT).

### b) Andere Formen des Grundgesetzes.

Durch Verjüngung von (4) entsteht

$$R + 4\lambda = \kappa T, \quad (6)$$

und bei Substitution dieses Ausdruckes für  $R$  in (4):

$$R_{ik} + \lambda g_{ik} = -\kappa \left( T_{ik} - \frac{1}{2} T g_{ik} \right). \quad (7)$$

Diese letzte Form ist besonders im Falle  $T_{ik} = 0$  nützlich. Die Feldgleichungen lassen sich oft vorteilhaft durch ein *Variationsprinzip* ersetzen. Wir führen ein

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} = \sqrt{g} H \quad \text{mit} \quad H = g^{sr} \left( \Gamma_{sr}^m \Gamma_{nm}^m - \Gamma_{sn}^m \Gamma_{rm}^n \right) + 2\lambda \\ = g^{sr} \left( \frac{\partial}{\partial x^r} \Gamma_{sm}^m - \frac{\partial}{\partial x^m} \Gamma_{sr}^m \right) - (R + 2\lambda) \end{aligned} \quad (8)$$

und

$$g^{ik} = \sqrt{g} g^{ik}. \quad (9)$$

1. Materiefreie Räume ( $T_{ik} = 0$ ). Es gilt das Variationsprinzip

$$\delta \int \mathfrak{S} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = \delta \int H \cdot (\sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4) = 0. \quad (10)$$

Dabei werden die  $g^{ik}$  im ganzen Bereich variiert, aber auf dem Rande festgehalten. Über ihre Ableitungen ist nichts vorausgesetzt. Da  $H$  keine Invariante ist, benutzt man oft besser ein anderes Prinzip:

$$\delta \int (R + 2\lambda) (\sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4) = 0. \quad (11)$$

Dabei sind die  $g^{ik}$  und die  $\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}$  am Rande festgehalten.

Wählt man die Koordinaten speziell so, daß  $\sqrt{g} = 1$  ist, so wird

$$H = -g^{sr} \Gamma_{sn}^m \Gamma_{rm}^n + 2\lambda$$

und liefert für  $\lambda = 0$  die Feldgleichungen in der Form

$$\frac{\partial \Gamma_{rs}^m}{\partial x^m} - \Gamma_{rn}^m \Gamma_{sm}^n = 0 \quad (\text{EINSTEIN}).$$

2. Materieerfüllte Räume. Die Prinzipien sind zu erweitern zu

$$\delta \int (\mathfrak{S} + \kappa \mathfrak{M}) dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = 0 \quad (12)$$

$$\delta \int (R + 2\lambda + \kappa \cdot M) (\sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4) = 0, \quad (13)$$

wobei  $\mathfrak{M} = \sqrt{g} M$  eine Funktion der  $g^{ik}$  (nicht ihrer Ableitungen!) und der Verteilung der Materie im Raume ist. Für den *mechanischen* Anteil (Gravitation der Masse) ist

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{ik}} = T_{ik} - \frac{1}{2} T g_{ik} \quad (14a)$$

und

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{ik}} = -\sqrt{g} T_{ik}. \quad (14b)$$

Für den *elektrodynamischen* Anteil erhält man

$$M = -\frac{1}{2} g^{rs} g^{\sigma\sigma} F_{r\sigma} F_{\sigma s} \quad (\text{vgl. S. 277}). \quad (15)$$

### c) Kräftefreie Bewegung.

Die Abweichung der Weltmetrik von der Euklidizität macht sich in den *Gravitationserscheinungen* bemerkbar. Die Bewegung eines Massenpunktes in einem Gravitationsfelde ist nach der EINSTEINSCHEN Theorie eine *kräftefreie Bewegung*, d. h. infolge des Trägheitsgesetzes ist die Weltlinie eines freien Massenpunktes eine *geodätische Linie*:

$$K^i = m_0 \left( \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{rs}^i \frac{dx^r}{ds} \frac{dx^s}{ds} \right) = 0. \quad (16)$$

Die infolge der Klammerausdrücke auftretenden Zusatzglieder können als „*Scheinkraft*“ gedeutet werden, nach Art der Zentrifugal- und Korioliskräfte, die ebenfalls dadurch zustande kommen, daß in einem rotierenden Bezugssystem auch bei der euklidischen Metrik nicht sämtliche  $\Gamma_{rs}^i$  verschwinden. Alle Scheinkräfte haben die charakteristische Eigenschaft, der *trägen Masse proportional* zu sein. Infolge der experimentell mit großer Genauigkeit erwiesenen *Proportionalität zwischen gravitierender und träger Masse* zeigt auch die NEWTONSche Gravitationskraft diese Eigentümlichkeit.

## 2. Einige wichtige Lösungen der Feldgleichungen.

### a) EINSTEINS erste Näherung.

Das  $\lambda$ -Glied wird vernachlässigt und die rechte Seite von (4) als kleines Störungsglied behandelt. Man setzt

$$g_{ik} = \delta_{ik} + \kappa \cdot \gamma_{ik} \quad (x^4 = ict) \quad (17)$$

und vernachlässigt alle Potenzen von  $\kappa^2$  an aufwärts („*Quasieuklidische Welt*“). Man kann dann stets ein Koordinatensystem zugrunde legen, in dem

$$\frac{\partial \gamma_{is}}{\partial x^s} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{ss}}{\partial x^i} = 0. \quad (18)$$

Es wird dann

$$R_{ik} = -\frac{\kappa}{2} \square \gamma_{ik} \quad \left( \square = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2} \right) \quad (19)$$

und die Feldgleichungen geben

$$\frac{1}{2} \square \gamma_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{2} T \delta_{ik}. \quad (20)$$

Ist speziell  $\gamma_{44}$  nicht zeitabhängig, so erhält man für  $i = k = 4$  im Gravitationsfelde ruhender (oder mit Geschwindigkeiten  $\ll c$  bewegter) Massen ( $T_{44} = \rho c^2$ , alle anderen  $T_{ik} = 0$ )

$$\Delta \gamma_{44} = \rho c^2.$$

Diese Gleichung ist mit der Grundgleichung der NEWTONSchen Gravitationstheorie

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho$$

identisch, wenn

$$\Phi = \frac{4\pi}{c^2} \gamma_{44} \quad \text{oder} \quad g_{44} = 1 + \frac{2}{c^2} \Phi.$$

### b) SCHWARZSCHILD'S Maßbestimmungen.

Für im Raumanteil *kugelsymmetrische* Probleme folgt aus den Feldgleichungen als strenge Lösung stets

$$ds^2 = \frac{r}{r-w} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) - V^2 dt^2, \quad (21)$$

wobei  $w(r)$  und  $V(r)$  zwei freie Funktionen sind, die für die spezielle Massenverteilung von Fall zu Fall aus den Feldgleichungen oder dem entsprechenden Variationsprinzip bestimmt werden müssen.

1. *Feld des Massenpunktes.* Alle  $T_i^k = 0$ .

$$w(r) = \alpha + \frac{\lambda}{3} r^3 \quad V^2 = c^2 \left( 1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\lambda}{3} r^2 \right). \quad (22)$$

Die Integrationskonstante  $\alpha$  heißt der *Gravitationsradius* der Masse  $M$ . Für  $\lambda = 0$  ist

$$\alpha = \frac{2G}{c^2} \cdot M = 1,48 \cdot 10^{-28} M \quad (\alpha \text{ in cm, } M \text{ in g}). \quad (23)$$

2. *Feld einer inkompressiblen Flüssigkeitskugel.*  $T_i^k = 0$  mit Ausnahme der Diagonalglieder:  $T_i^i = -p$  (für  $i = 1, 2, 3$ ) und  $T_4^4 = \rho c^2$ .  $\lambda = 0$ ,  $\rho = \text{constans}$ .

*Inneres der Kugel:*

$$ds^2 = \frac{3}{\kappa c^2 \rho} (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\vartheta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \vartheta d\varphi^2) - c^2 \left( \frac{3 \cos \chi_a - \cos \chi}{2} \right) dt^2, \quad (24)$$

wobei  $\chi = \chi_a$  die Oberfläche der Kugel ist.

Äußeres der Kugel:

$$ds^2 = \frac{R}{R-\alpha} dR^2 + R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) - c^2 \frac{R-\alpha}{R} dt^2, \quad (25)$$

wobei stetiger Anschluß von Innen- und Außenraum erreicht wird mit Hilfe der Relation

$$R^3 = \left(\frac{\kappa c^2 \varrho}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} \left\{ \frac{9}{4} \cos \chi_a \left( \chi - \frac{1}{2} \sin 2\chi - \chi_a + \frac{1}{2} \sin 2\chi_a \right) + \frac{3}{2} \sin^3 \chi_a - \frac{1}{2} \sin^3 \chi \right\}.$$

Im Innern der Kugel gilt für den Raumanteil die Geometrie des sphärischen Raumes. Es existiert jedoch nicht der ganze  $(|\chi| \leq \frac{\pi}{2})$ , sondern nur ein Teil desselben  $(|\chi| \leq \chi_a)$ . Das Volumen der Kugel ist

$$V = 2\pi \left(\frac{3}{\kappa c^2 \varrho}\right) \left(\chi_a - \frac{1}{2} \sin 2\chi_a\right)$$

und der Druck nimmt nach innen zu gemäß

$$p = \varrho c^2 \frac{\cos \chi - \cos \chi_a}{3 \cos \chi_a - \cos \chi}.$$

### 3. Kosmologische Ansätze.

Um das Verhalten der Welt *im großen* zu diskutieren, kann man z. B. setzen

$$ds^2 = L^2(d\chi^2 + \sin^2\chi d\vartheta^2 + \sin^2\chi \sin^2\vartheta d\varphi^2) - S^2 c^2 dt^2. \quad (26)$$

Hierbei sei  $L = L(t)$  und  $S = S(\chi, \vartheta, \varphi)$ . Ferner dürfen wir annehmen, daß alle  $T_i^k = 0$  sind außer  $T_4^4 = \varrho c^2$ . Einsetzen in die Feldgleichungen ergibt die Bedingungen

$$\frac{dL}{dt} \frac{\partial S}{\partial \chi} = 0 \quad \frac{dL}{dt} \frac{\partial S}{\partial \vartheta} = 0 \quad \frac{dL}{dt} \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0.$$

Daher besteht die Alternative:

1.  $\frac{dL}{dt} = 0$ : *statische Welt*, die räumlich in sich geschlossen ist. Für  $S$  ergeben sich dann zwei Möglichkeiten:

$\alpha$ )  $S = \text{constans} = 1$ : *Zylinderwelt* (EINSTEIN). Es wird dann

$$L = \lambda^{-\frac{1}{2}}, \quad \varrho = \frac{2\lambda}{\kappa c^2}$$

und die Masse der Welt

$$M = 2\pi^2 L^3 \varrho = \frac{4\pi^2}{\kappa c^2 \sqrt{\lambda}}.$$



$\beta$ )  $S = \cos \chi$ : *Kugelwelt* (DE SITTER). Auch die Zeitachse ist hier in sich geschlossen. Die Lichtgeschwindigkeit ist  $V = c \cos \chi$ .

$$L = \sqrt[3]{\frac{3}{\lambda}}$$

Es muß  $\rho = 0$  sein, d. h. die DE SITTER-Welt ist nur als Grenzfall für verschwindende Materie möglich.

2.  $S = \text{constans} = 1$  und  $L = L(t)$ : *nichtstatische Zylinderwelten* (FRIEDMAN, LEMAÎTRE). Es wird

$$c(t - t_a) = \int_a^L \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3} x^3}} dx \quad (A = \text{Integrationskonstante}). \quad (27)$$

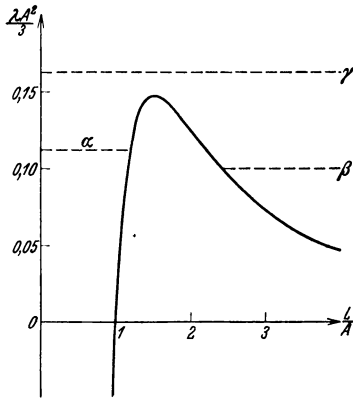


Fig. 20. Die Grenzkurve

$$A - L + \frac{\lambda}{3} L^3 = 0.$$

Abszisse: „Weltradius“, Ordinate: kosmologische Konstante in geeigneten dimensionslosen Einheiten.

Ferner hat man

$$\rho = \frac{3A}{\pi c^2 L^3} \quad \text{und} \quad M = \frac{6\pi^2 A}{\pi c^2}.$$

Lösungen existieren nur, wenn

$$A - L + \frac{\lambda}{3} L^3 > 0$$

oder

$$\left(\frac{A}{L}\right)^3 - \left(\frac{A}{L}\right)^2 + \frac{\lambda A^2}{3} > 0$$

ist, d. h. außerhalb der Kurve Fig. 20. Es gibt daher folgende Möglichkeiten:

$\alpha$ )  $\frac{\lambda A^2}{3} < \frac{4}{27}$ : *Periodische Welten*, insbesondere also auch für  $\lambda = 0$ .  $L$  wächst von 0 bis zu einem Maximum und nimmt wieder auf 0 ab. Dauer der Periode und Maximum bei  $\lambda = 0$ :

$$T = \frac{\pi A}{c} \quad \text{und} \quad L_{\max} = A.$$

$\beta$ )  $0 < \frac{\lambda A^2}{3} < \frac{4}{27}$ : *Monotone Welten zweiter Art* (vgl. Linie  $\beta$  in Fig. 20).  $L$  wächst von einem Minimalwert  $a$  monoton und für späte Zeiten asymptotisch exponentiell.

$\gamma$ )  $\frac{\lambda A^2}{3} > \frac{4}{27}$ : *Monotone Welten erster Art*.  $L$  wächst von  $L = 0$  an monoton und für späte Zeiten asymptotisch exponentiell.

Die behandelten nichtstatischen Lösungen sind prinzipiell nur als Näherungen anzusehen, da die spezielle Wahl des Materietensors nur im Falle ruhender Materie streng richtig ist.

## Vierter Abschnitt.

**Quantentheorie.**

Es hat sich gezeigt, daß die klassische Mechanik und Elektrodynamik nur angenäherte Gültigkeit besitzt. Die Betrachtung der Elementarvorgänge am einzelnen Atom oder Molekül lehrt, daß hier jedenfalls die Konstruktion anschaulicher Modelle und ihre Behandlung nach den Gesetzen der klassischen Physik zu Widersprüchen mit der Erfahrung führt.

**A. Vorläufige Formulierung.****1. Mechanik.**

Die Grundgesetze der Mechanik bleiben unverändert. Es sollen aber unter allen von der Mechanik als möglich betrachteten Bewegungen eines Systems nur eine beschränkte Anzahl tatsächlich vorkommen („*Quantenzustände*“). Außerdem sollen teils unter der Wirkung äußerer Impulse, teils auch spontan, nicht durch die Mechanik beherrschte „unmechanische“ Vorgänge stattfinden, die das System von einem Quantenzustand in einen anderen überführen (*Quantensprünge*). Die Übergangszeit muß als verschwindend klein angenommen werden. Die Art des Überganges entzieht sich jeder anschaulichen Darstellung.

Steht das betrachtete System unter der Wirkung von konservativen äußeren Kräften und werden diese langsam geändert, so ändert sich die Bewegungsform gleichfalls langsam. Die *Adiabatenhypothese* (EHRENFEST) behauptet, daß hierbei Quantenzustände als solche erhalten bleiben. (BOHR'S *Prinzip der mechanischen Transformierbarkeit*.) „Langsam“ heißt dabei eine Änderung, falls sie in einer Zeit erfolgt, die so groß ist, daß das System während derselben alle möglichen Phasen seiner Bewegung durchlaufen hat, oder ihnen wenigstens sehr nahe gekommen ist.

Das ist einfach angebbbar bei einer rein periodischen Bewegung. Hier heißt es, die Änderung der äußeren Kräfte erfolge in einer Zeit, die groß ist gegen die Bewegungsperiode. Ist die Bewegung aber nicht periodisch, so durchläuft der Phasenpunkt des Systems ein gewisses Gebiet des Phasenraumes, und kommt jedem Punkt dieses Gebietes im Lauf der Zeit beliebig nahe. Hier ist also an Stelle der Periode die Zeit zu nehmen, in der der Phasenpunkt das ganze Gebiet überstrichen hat, d. h. jedem Punkt desselben nahegekommen ist.

Das Prinzip gestattet aus einer ganz im Endlichen liegenden, als Quantenbahn bekannten Bahn eine neue durch Variation (oder Einführung) äußerer Kräfte zu berechnen. Das Prinzip ist jedoch nicht mehr anwendbar, wenn während der Änderung der äußeren Kräfte

das vom Phasenraum bestrichene Gebiet zu einem solchen von weniger Dimensionen degeneriert (*entartete Bahnen*).

Eine Form der mathematischen Formulierung der Quantenmechanik ist folgende:

Man gehe aus von der HAMILTONSchen Funktion  $H(p, q)$  (S. 233) und suche eine kanonische Transformation  $P_k, Q_k$  (S. 105 f.) zu erreichen, so daß  $H$  Funktion der neuen  $P_k$  allein wird. Dann werden wegen der HAMILTONSchen Gleichung alle  $\dot{P}_k = 0$ , d. h. alle  $P_k = \text{const.}$  Infolgedessen werden die

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H}{\partial P_k} = \omega_k = \text{const.},$$

also

$$Q_k = \omega_k t + \delta_k.$$

Da die  $Q_k$  (falls nicht  $\omega_k$  verschwindet) unbeschränkt wachsen, andererseits nur Bewegungen im Endlichen betrachtet werden sollen, muß  $Q_k$  eine Koordinate vom Charakter einer Winkelkoordinate sein, d. h. das System ändert seine Lage nicht, wenn wir  $Q_k$  um ein Vielfaches einer Größe  $\varepsilon_k$  vermehren. Durch eine geeignete Transformation (Normierung) können wir immer  $\varepsilon_k = 2\pi$  machen. Dann heißt  $Q_k$  *Winkelvariable*;  $\omega_k$  ist eine Frequenz,  $\delta_k$  eine Phasenkonstante. Üblich sind dann statt  $P_k$  und  $Q_k$  für die normierten neuen Impuls- und Lagekoordinaten die Bezeichnungen  $J_k$  und  $w_k$ .

Die Quantentheorie fordert jetzt

$$J_k = \frac{n_k \hbar}{2\pi},$$

wo  $n_k$  eine ganze Zahl („Quantenzahlen“) und

$$\hbar = 6,547 \cdot 10^{-27}$$

sein soll. Während also die klassische Mechanik nur fordert, daß die  $J_k$  konstant sind, legt die Quantentheorie diese Konstanten auf diskrete Werte fest.

Eine andere Formulierung ist folgende:

Man gehe aus von der HAMILTON-JACOBISchen Differentialgleichung und suche durch eine beliebige Transformation solche Variable, daß die Gleichung durch „Separation der Variablen“ gelöst werden kann, d. h. in einer Form:

$$S = \sum S_k(q_k, \alpha_1, \dots),$$

wo die  $\alpha_i$  zunächst willkürliche Integrationskonstanten sind und

$$S_k = \int p_k(q_k, \alpha_1, \dots) dq_k.$$

Führt man diese Integration über den ganzen Variabilitätsbereich von  $q_k$  aus, so ist

$$J_k = \frac{1}{2\pi} \oint p_k dq_k = \frac{n_k \hbar}{2\pi}.$$

Hierdurch sind dann auch die  $\alpha_i$  festgelegt.

Entartung tritt ein, sobald die  $\omega_k$  kommensurable Größen sind, bzw. teilweise = 0 werden. Dann sind nämlich die  $J_k$  und  $w_k$  nicht mehr *eindeutig* zu bestimmen. Es werden also auch die Quantenbahnen nicht mehr eindeutig festgelegt. Die Energien bleiben aber trotzdem bestimmt. Z. B. ist die auf S. 349 behandelte Planetenbewegung ein entarteter Fall, weil zwei von den  $\omega$  gleich Null werden. Nur  $P_1$  ist festgelegt (große Achse). Besteht aber eine wenn auch kleine Abweichung vom COULOMBSchen Gesetz (Bewegung eines Elektrons um einen Atomrumpf), oder beachten wir die relativistische Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit, so ist auch  $P_2$ , also die Exzentrizität, nicht mehr frei wählbar. Besteht schließlich noch ein gerichtetes äußeres elektrisches oder magnetisches Feld, so ist auch  $P_3$ , die Neigung der Bahn, auf bestimmte Winkel beschränkt (*Richtungsquantelung*).

## 2. Elektrodynamik.

Während die klassische Elektrodynamik eine kontinuierliche Ausstrahlung einer periodisch bewegten Ladung ergibt, gilt nach BOHR:

1. Elektronen in Quantenbahnen strahlen nicht.
2. Bei Übergang aus einer Quantenbahn in eine andere geringerer Energie tritt Emission einer monochromatischen Strahlung von der Schwingungszahl

$$\nu = \frac{\Delta E}{h}$$

auf, wo  $\Delta E$  die Energiedifferenz der beiden Quantenzustände bedeutet. Dieser Vorgang ist umkehrbar (Quantenabsorption).

Da die Quantenmechanik die Quantenbahnen und deren Energie liefert, so werden hiermit auch die möglichen Schwingungszahlen der Emission und Absorption festgelegt als Differenzen der möglichen  $\frac{E}{h}$  (Kombinationsprinzip der Spektroskopie). Die Größen  $\frac{E}{h}$  heißen „Spektraltermine“.

Für große Quantenzahlen geht die BOHRsche Theorie in die klassische Theorie über, wenn man durch ein *Auswahlprinzip* gewisse Forderungen über die *Übergangswahrscheinlichkeiten* aufstellt. Diese werden durch die *Korrespondenzhypothese* auch auf kleine Quantenzahlen verallgemeinert.

Beschreibt man die Bewegung eines Elektrons durch eine FOURIER-Darstellung von der Form

$$\begin{aligned} x &= \sum_{\kappa} A_{\kappa} e^{i \kappa \omega t} \\ y &= \sum_{\kappa} B_{\kappa} e^{i \kappa \omega t} \\ z &= \sum_{\kappa} C_{\kappa} e^{i \kappa \omega t} \end{aligned}$$

so setzt man in Korrespondenz:

die  $\kappa$  zu den Differenzen  $\Delta n$  der Quantenzahlen  
die  $\kappa \omega$  zu den Frequenzen  $2\pi\nu$ .

Die Grundperiode ( $\kappa=1$ ) entspricht einem Übergang mit  $\Delta n=1$ ; die nächste Oberschwingung ( $\kappa=2$ ) entspricht einem Übergang mit  $\Delta n=2$  usw.

Die Größen  $A_\kappa, B_\kappa, C_\kappa$  der FOURIER-Reihe sollen dann die Komponenten des elektrischen Vektors der ausgesandten Welle liefern, gerade so, wie sie es für die klassische Strahlung tun würden.

Durch diese Forderung ist sowohl die Polarisation der Welle festgelegt, wie auch die Intensität der zu verschiedenen  $\Delta n$  gehörenden Strahlungen, d. h. auch die Übergangswahrscheinlichkeiten für die  $\Delta n$ .

Die vorläufige Formulierung gibt die Wirklichkeit nur sehr unvollkommen wieder; sie versagt vor allem gänzlich beim Mehrkörperproblem (Heliumatom) und bei der Berechnung der Intensitäten der Spektrallinien. Sie ist anzusehen als ein Versuch, die Experimente wiederzugeben unter möglichst weitgehender Beibehaltung der klassischen Physik. In diesem Sinne kann sie auch heute noch als Näherungstheorie oft mit Vorteil benutzt werden.

## B. Quantenmechanik.

Die Quantenmechanik verzichtet im Gegensatz zur klassischen Mechanik auf die Beantwortung von Fragen nach exakten Bewegungsformen (Bahnen) der betrachteten Massenpunkte. Sie begnügt sich teils mit Aussagen über abgeschlossene Gesamtsysteme (Energie, Schwerpunktslage usw.), teils mit Mittelwertsaussagen (statistischen Daten). Trotzdem beantwortet sie, wie genauere Überlegungen zeigen, alles was im Sinne einer positivistischen Naturbetrachtung gefragt werden darf.

Charakteristisch für die Quantenmechanik ist ihre Methode. Die gefragten Größen treten zunächst in den Differentialgleichungen gar nicht auf, dafür aber eine Funktion  $\psi$  der Koordinaten und der Zeit (Wellenmechanik). Aus  $\psi$  findet man dann durch bestimmte Operationen (z. B. Quadraturen) die gesuchten physikalischen Quantitäten.

Die Methode kann (rein mathematisch) umgestaltet werden, z. B. derart, daß  $\psi$  nicht mehr in Erscheinung tritt (Matrizenrechnung).

### 1. Unrelativistische Punktmechanik.

#### a) Konservative Systeme.

Die Probleme sind durch eine Kräftefunktion  $U = -V(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, t)$  der Koordinaten der Massenpunkte mit den Massen  $\mu_1, \mu_2, \dots$  und der Zeit in derselben Weise charakterisiert wie in der klassischen Mechanik.

**a) Einkörperprobleme. 1. Zeitabhängige Probleme. Methode:** Man setze mit  $V = V(x, y, z, t)$  die „zeitabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung“ an

$$\boxed{-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\hbar}{2\pi i}\right)^2 \Delta \psi + V \psi}$$

mit  $\hbar = 6,547 \cdot 10^{-27}$  ergsec und bestimme  $\psi = \psi(x, y, z, t)$  als überall stetige und eindeutige Lösung dieser Differentialgleichung mit der Normierungsforderung

$$\int_G \psi \psi^* d\tau = 1 \quad (d\tau = dx dy dz).$$

$G$  bedeutet das „Grundgebiet“ im Sinne der Differentialgleichungstheorie. Die *physikalische* Problemstellung wählt die physikalisch sinnvollen Lösungen durch die Festlegung des Grundgebietes (i. a. der ganze unendliche dreidimensionale Raum) und durch geeignete Anfangs- und Randbedingungen aus, etwa

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 & \text{für } t &= 0 \\ \psi &= 0 & \text{für } |\mathbf{r}| &\rightarrow \infty \\ \text{oder } \psi &= 0 & \text{für } V &= \infty \text{ (bei endlichem } G\text{)}. \end{aligned}$$

Deutung der Lösung: Im Gegensatz zur klassischen Mechanik liefert sie nicht die Bewegungsform *eines* Massenpunktes, sondern die einer virtuellen Gesamtheit von solchen. Für den einzelnen Massenpunkt gibt sie daher auch nur *statistische* Daten.

$\rho = \psi \psi^*$  ist die *statistische Dichte*, d. h.  $\rho d\tau$  ist die (kausal bedingte) Wahrscheinlichkeit, mit der der Massenpunkt im Volumelement  $d\tau$  an der Stelle  $x, y, z$  zur Zeit  $t$  angetroffen wird<sup>1</sup>. Daher ist  $\int \rho d\tau = 1$ .

$\mathbf{u} = \frac{\hbar}{4\pi i \mu} (\psi^* \text{grad } \psi - \psi \text{grad } \psi^*)$  ist die entsprechend definierte *statistische Strömungsdichte*. Es gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{u} = 0.$$

Im Sinne der kinetischen Gastheorie, bzw. der Elektronentheorie heißt

$$\begin{aligned} \mu \rho &= \text{Massendichte}, & \mu \mathbf{u} &= \text{Impulsdichte}, \\ e \rho &= \text{Ladungsdichte}, & e \mathbf{u} &= \text{Stromdichte usw.} \end{aligned}$$

( $\mu$  bzw.  $e$  = Masse bzw. Ladung des Massenpunktes).

<sup>1</sup> Bei *Stoßproblemen*, d. h. bei der Untersuchung des Verhaltens eines Teilchenstromes, versteht man unter  $\rho = \psi \psi^*$  die Wahrscheinlichkeit, daß *irgendein* Massenpunkt („Teilchen“) in  $d\tau$  zur Zeit  $t$  angetroffen wird. Daher konvergiert  $\int \rho d\tau$  dort nicht.

## 2. Stationäre Bewegung.

$$V = V(x, y, z), \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad V = \text{potentielle Energie.}$$

Die zeitabhängige Gleichung wird zweckmäßig gelöst durch den FOURIER-Ansatz

$$\psi = \sum_i c_i \psi_i = \sum_i c_i u_i(x, y, z) e^{-\frac{2\pi i}{h} E_i t}$$

mit  $E_i = \text{const.}$  Die  $u_i$  genügen dann den Differentialgleichungen

$$\Delta u_i + \frac{8\pi^2\mu}{h^2} (E_i - V) u_i = 0 \quad (,SCHRÖDINGER-Gleichung').$$

Diese Gleichungen sind nicht für beliebige  $E_i$  durch solche  $u_i$  zu erfüllen, die den Lösungsbedingungen genügen. Die  $E_i$  sind in bestimmten Bereichen nur diskreter Werte (*Eigenwerte*) fähig (Punktspektrum), im übrigen eventuell auch aller Werte (Streckenspektrum). Im Bereich des Punktspektrums können die Eigenwerte nach einem oder mehreren ganzzahligen Parametern (*Quantenzahlen*) geordnet werden. Wegen der Selbstadjungiertheit der Differentialgleichungen bilden die  $\psi_i$  und ebenso die  $u_i$  ein normierbares, orthogonales und vollständiges Funktionensystem, d. h. es ist

$$\left. \begin{aligned} \int \psi_i \psi_k^* d\tau &= 0 \\ \int u_i u_k^* d\tau &= 0 \end{aligned} \right\} \text{für } E_i \neq E_k.$$

Wir normieren  $\int \psi_i \psi_i^* d\tau = 1$ .

Existieren zu ein und demselben  $E_i$  mehrere linear unabhängige Lösungen  $u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in}$ , so heißt der Eigenwert  $(n-1)$ -fach entartet. Es lassen sich dann stets durch Linearkombinationen  $n$  andere Lösungen dazu angeben, die orthogonal und normiert sind.

Deutung der Lösung: Es gilt

$$\varrho = \psi \psi^* = \sum_i |c_i|^2 \psi_i \psi_i^* = \sum_i |c_i|^2 u_i u_i^* = \sum_i |c_i|^2 \varrho_i.$$

Der Zustand  $\psi \psi^*$  kann also aufgefaßt werden als Überlagerung der stationären Zustände  $\varrho_i = u_i u_i^*$ ;  $|c_i|^2$  bedeutet den Bruchteil der Gesamtzahl an Massenpunkten, der sich im Zustande  $i$  mit der Energie  $E_i$  befindet. Es ist

$$\sum_i |c_i|^2 = 1.$$

$|c_i|^2$  kann auch gedeutet werden als die Wahrscheinlichkeit, innerhalb der virtuellen Gesamtheit ein Teilchen mit der Energie  $E_i$  anzutreffen ( $c_i = \text{Wahrscheinlichkeitsamplitude}$ ).

Tritt neben dem Punktspektrum noch ein Streckenspektrum auf, so sind die hergeleiteten Ergebnisse sinngemäß abzuändern. Man hat dann z. B.

$$\begin{aligned}\psi &= \sum_i c_i \psi_i + \int c(E) \psi(E) dE \\ &= \sum_i c_i u_i(xyz) e^{-\frac{2\pi i}{h} E_i t} + \int c(E) u(x, y, z; E) e^{-\frac{2\pi i}{h} E t} dE \\ \rho &= \sum_i |c_i|^2 u_i u_i^* + \int |c(E)|^2 u(E) u^*(E) dE\end{aligned}$$

Normiert man die Eigenfunktionen im Kontinuum durch die Forderung:

$$\int d\tau \int dE' u(E') u^*(E) = \lim_{\Delta E \rightarrow 0} \int d\tau u^*(E) \int_{E-\Delta E}^{E+\Delta E} dE' u(E') = 1$$

mit Hilfe eines (von  $E$  abhängigen) Normierungsfaktors, so wird

$$\sum_i |c_i|^2 + \int |c(E)|^2 dE = 1 \quad \text{und} \quad c(E) = \int \psi u^*(E) d\tau$$

$|c(E)|^2 dE$  ist dann wie oben der Teil der Massenpunkte in Zuständen des Energiebereiches  $dE$ , bzw. die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen hier anzutreffen.

3. *Mittelwerte (Erwartungswerte)*. In der Quantenmechanik gelten Erhaltungssätze stets nur für Integrale über das ganze Grundgebiet  $G$ . Dabei verhalten sich die folgenden Mittelwerte weitgehend wie die entsprechenden klassischen Größen:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{r}} &= \int \psi^* \mathbf{r} \psi d\tau \quad (\text{Ortsvektor des Schwerpunktes der Gesamtheit}) \\ \bar{\mathbf{p}} &= \mu \cdot \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} = \int \mu \mathbf{u} d\tau = \frac{\hbar}{2\pi i} \int \psi^* \text{grad} \psi d\tau \quad (\text{Impuls}) \\ \bar{\mathfrak{R}} &= \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = -\overline{\text{grad} V} = -\int \psi^* \psi \text{grad} V d\tau \quad (\text{Kraft, dynamische} \\ &\hspace{15em} \text{Grundgleichung}) \\ \bar{\mathfrak{L}} &= [\bar{\mathbf{r}} \bar{\mathbf{p}}] = \frac{\hbar}{2\pi i} \int \psi^* [\mathbf{r} \text{grad} \psi] d\tau \quad (\text{Drehimpuls}) \\ \bar{\mathfrak{D}} &= \frac{d\bar{\mathfrak{L}}}{dt} = \overline{[\mathbf{r} \bar{\mathfrak{R}}]} = -\overline{[\mathbf{r} \text{grad} V]} = -\int \psi^* \psi [\mathbf{r} \text{grad} V] d\tau \\ &\hspace{10em} (\text{Drehmoment, } = 0 \text{ für Zentralkraft}) \\ \bar{\mathfrak{P}} &= e \bar{\mathbf{r}} \quad (\text{elektrisches Moment}) \\ \bar{\mathfrak{M}} &= \frac{e}{\mu c} \bar{\mathfrak{L}} \quad (\text{magnetisches Moment}) \\ \bar{T} &= \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\hbar}{2\pi i} \right)^2 \int \psi^* \Delta \psi d\tau = -\frac{1}{2\mu} \left( \frac{\hbar}{2\pi i} \right)^2 \int |(\text{grad} \psi)|^2 d\tau \\ &\hspace{15em} (\text{kinetische Energie}) \\ \bar{V} &= \int \psi^* V \psi d\tau \quad (\text{potentielle Energie})\end{aligned}$$



$$E = -\frac{\hbar}{2\pi i} \int \psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi d\tau \quad (\text{Gesamtenergie})$$

$$\bar{T} + \bar{V} = E \quad (\text{Energiesatz, folgt unmittelbar aus der SCHRÖDINGER-Gleichung}).$$

4. *Operatoren.* Allgemein lautet das Bildungsgesetz des Mittelwertes einer Funktion  $f$  der Impulse  $p_k$  und der Koordinaten  $x_k$ : Man ersetze formal die Impulse durch Operatoren<sup>1</sup>

$$p_k = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

und schreibe

$$\bar{f} = \int \psi^* f \psi d\tau.$$

Dabei wirken die in  $f$  auftretenden Operatoren auf die dahinterstehenden Teile des Integranden.

Entsprechend dem *Impulsoperator*

$$p = \frac{\hbar}{2\pi i} \text{ grad}$$

kann man in die Quantenmechanik die folgenden Operatoren einführen:

$$T = \frac{1}{2\mu} p^2 = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\hbar}{2\pi i} \right)^2 \Delta \quad (\text{Operator der kinetischen Energie})$$

$$\mathfrak{Q} = [r p] = \frac{\hbar}{2\pi i} [r \text{ grad}] \quad (\text{Drehimpulsoperator}).$$

Von dem letzten Operator werden die Komponenten in verschiedenen Koordinatensystemen viel gebraucht; es seien  $r, \vartheta, \varphi$  Kugelkoordinaten, dann wird<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\hbar} \Lambda &= \frac{2\pi}{\hbar} (L_x + i L_y) = e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} + i \text{ctg } \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{2\pi}{\hbar} \Lambda^\dagger &= \frac{2\pi}{\hbar} (L_x - i L_y) = e^{-i\varphi} \left( -\frac{\partial}{\partial \vartheta} + i \text{ctg } \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{2\pi}{\hbar} L_z &= -i \frac{\partial}{\partial \varphi} = i \left( y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Ferner ist der Operator des Betrages  $L^2$ :

$$L^2 = \frac{-\hbar^2}{4\pi^2} \frac{1}{\sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} = \frac{1}{2} (\Lambda \Lambda^\dagger + \Lambda^\dagger \Lambda) + L_z^2.$$

Die SCHRÖDINGER-Gleichung erhält man, indem man in der klassischen HAMILTON-Funktion  $H(p_k, x_k)$  die  $p_k$  durch die Operatoren  $\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k}$  ersetzt in der Form:

$$H \left( \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k}, x_k \right) \psi = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

<sup>1</sup> Man kann auch die  $x_k$  als Operatoren deuten;  $x_k \psi$  bedeutet dann: „Multiplikation von  $\psi$  mit der Zahl  $x_k$ .“

<sup>2</sup>  $\Lambda^\dagger \neq \Lambda^*$  weil  $L_x$  und  $L_y$  nicht reell sind!

d. h. es ist der HAMILTON-Operator

$$H = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t},$$

und im stationären Falle:

$$\left\{ H \left( \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k}, x_k \right) - E \right\} \psi = 0.$$

Als die *Eigenwerte eines Operators*  $\Omega$  bezeichnet man die Eigenwerte  $\omega_n$  der Differentialgleichung

$$\Omega \psi = \omega \cdot \psi$$

Eigenwerte der Drehimpulse sind bei Eigenfunktionen der Form:

$$\psi = F(r, E) e^{\pm i m \varphi} P_l^m(\cos \vartheta)$$

$$\text{für } L_z \quad \pm \frac{\hbar}{2\pi} m, \quad m = 0, 1, \dots, l$$

$$\text{und für } L^2 \quad \frac{\hbar^2}{4\pi^2} l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Entsprechenden Sinn haben die Eigenwerte der SCHRÖDINGER-Gleichung als Eigenwerte des HAMILTONSchen Operators.

5. *Vertauschungsrelationen.* Das Produkt zweier Operatoren ist i. a. *nicht* kommutativ.

Schreibt man zur Abkürzung die Operatoren einfach mit den ge-läufigen Symbolen der ihnen entsprechenden Größen der klassischen Mechanik, so erhält man eine Reihe charakteristischer Vertauschungsrelationen.

Für die Operatoren eines Paares kanonisch konjugierter Variablen  $Q, P$  (s. S. 105) gilt dieselbe Vertauschungsrelation wie für die Operatoren  $x_k$  und  $p_k$ :

$$\frac{2\pi i}{\hbar} (p_k x_k - x_k p_k) = \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot x_k - x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) = 1;$$

symbolisch geschrieben:  $[p_k, x_k] = 1$ , d. h. allgemein

$$\frac{2\pi i}{\hbar} (P Q - Q P) = [P, Q] = 1.$$

Dagegen ist:

$$p_i x_k - x_k p_i = 0 \quad \text{für } i \neq k; \quad [p_i, x_k] = 0.$$

Für den Operator des Drehimpulses gelten folgende Relationen und ihre zyklischen Permutationen:

$$\begin{aligned} [L_x, x] &= 0 & [L_x, p_x] &= 0, \\ [L_x, y] &= -z & [L_x, p_y] &= -p_z, \\ [L_x, z] &= y & [L_x, p_z] &= p_y, \\ [L_y, L_z] &= -L_x. \end{aligned}$$

Bei Auszeichnung der  $z$ -Richtung, d. h. Zusammenfassung  $L_x \pm i L_y = \begin{Bmatrix} A \\ A^\dagger \end{Bmatrix}$ :

$$[L_z, A] = i A \quad [L_z, A^\dagger] = -i A^\dagger \quad [A, A^\dagger] = 2i L_z.$$

$\beta$ ) **Mehrkörperprobleme. 1. Allgemeines.** Die SCHRÖDINGER-Gleichung gilt unverändert auch für das  $n$ -Körperproblem. Die Lösungsfunktion  $\psi$  ist jetzt eine Funktion der  $3n$  Raumkoordinaten und der Zeit. Sind  $x_i, y_i, z_i$  die Koordinaten des  $i$ -ten Teilchens, so kann man schreiben

$$-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sum_i \frac{1}{2\mu_i} \left(\frac{\hbar}{2\pi i}\right)^2 \Delta_i \psi + V \psi \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

wobei  $V$  ebenfalls von den  $3n$  Raumkoordinaten und der Zeit abhängt; ist speziell  $dV/dt = 0$ , so wird

$$\left(\frac{\hbar}{2\pi i}\right)^2 \sum_i \frac{1}{2\mu_i} \Delta_i u + (V - E) u = 0,$$

$$\psi = u \cdot e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} Et};$$

dabei bedeuten die Eigenwerte  $E$  jetzt die Gesamtenergie des Systems in den möglichen stationären Zuständen. Die Normierungsforderung lautet

$$\int \psi \psi^* d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n = 1 \quad (d\tau_i = dx_i dy_i dz_i).$$

Die Lösung kann gedeutet werden in dem  $3n$ -dimensionalen Koordinatenraum  $R_{3n}$ . Es ist  $\rho = \psi \psi^*$  die Wahrscheinlichkeit, einen Massenpunkt im Volumelement  $d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n$  an der Stelle  $x_1 \dots z_n$  zur Zeit  $t$  in dem  $R_{3n}$  anzutreffen. Anschaulich bedeutet das:  $\rho = \psi \psi^*$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, zur Zeit  $t$  *gleichzeitig* einen Massenpunkt im Volumelement  $d\tau_1$  an der Stelle  $x_1, y_1, z_1$ , einen zweiten in  $d\tau_2$  bei  $x_2, y_2, z_2$  usw. anzutreffen.

2. *Zwei gekoppelte Systeme.* Hat  $V$  die spezielle Form

$$V = V_1(x_1 y_1 z_1) + V_2(x_2 y_2 z_2)$$

dann führt der Ansatz

$$\psi = \psi_1(x_1 y_1 z_1) \psi_2(x_2 y_2 z_2),$$

zum Ziele; das System zerfällt in zwei voneinander völlig unabhängige, die sich als Einkörperprobleme behandeln lassen (vgl. S. 225).

Häufig tritt noch ein *Wechselwirkungsglied* von kleinem Betrage hinzu.

$$V = V_1(1) + V_2(2) + W(1, 2),$$

wobei wir kurz  $V(1)$  schreiben statt  $V(x_1 y_1 z_1)$  usw. Ausgangslösung für die Störungsrechnung (vgl. S. 206) ist  $W = 0$ , d. h.

$$u_i = u_{(r,s)} = u_r^{(1)}(1) u_s^{(2)}(2),$$

$$E_i = E_{(r,s)} = E_r^{(1)} + E_s^{(2)}.$$

*Entartung* („quantenmechanische Resonanz“) tritt stets ein, wenn für irgendwelche  $r, s, r', s'$  gilt

$$E_i = E_{(r,s)} = E_{(r',s')} = E_k.$$

Praktische Bedeutung hat vor allem der *Sonderfall* zweier gleicher Systeme

$$V_1 = V_2; \text{ daher auch } u^{(1)} = u^{(2)} = u,$$

mit symmetrischer Kopplung

$$W(1, 2) = W(2, 1).$$

Dann wird  $E_i = E_{(r,s)} = E_{(s,r)} = E_k$ . Die zugehörigen Ausgangslösungen sind

$$u_i = u_{(r,s)} = u_r(1) u_s(2),$$

$$u_k = u_{(s,r)} = u_s(1) u_r(2).$$

Benutzen wir die Abkürzungen

$$W_{ii} = \int W |u_r(1)|^2 |u_s(2)|^2 d\tau_1 d\tau_2,$$

$$W_{ik} = \int u_s(1) u_r(2) W u_r(1) u_s(2) d\tau_1 d\tau_2,$$

so erhalten wir als Lösung in erster Näherung

$$E'_i = E_i + W_{ii} + W_{ik},$$

$$E'_k = E_i + W_{ii} - W_{ik},$$

mit den Eigenfunktionen

$$u'_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_i + u_k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ u_r(1) u_s(2) + u_s(1) u_r(2) \}$$

$$u'_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_i - u_k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ u_r(1) u_s(2) - u_s(1) u_r(2) \}.$$

Die erste Lösung ist *symmetrisch*, d. h. invariant gegen eine Vertauschung der Teilchen (1) und (2). Die zweite ist *antisymmetrisch*, d. h. sie ändert bei einer Vertauschung ihr Vorzeichen.

*Deutung von  $W_{ik}$ .* Der Energieterm spaltet auf in zwei mit der Differenz  $2W_{ik}$ . Nehmen wir an, wir wüßten, daß für  $t=0$  das Teilchen 1 sich im Zustande  $r$ , 2 im Zustande  $s$  befände:

$$\psi(0) = u_r(1) u_s(2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (u'_i + u'_k).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi'_i + \psi'_k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( u'_i e^{-\frac{2\pi i}{h} E'_i t} + u'_k e^{-\frac{2\pi i}{h} E'_k t} \right) = \\ &= e^{\frac{2\pi i}{h} (E_i + W_{ii}) t} \left[ u_r(1) u_s(2) \cos \frac{2\pi}{h} W_{ik} t - i u_r(2) u_s(1) \sin \frac{2\pi}{h} W_{ik} t \right] \end{aligned}$$

Für  $\frac{2\pi}{h} W_{ik} t = 0, \pi, 2\pi, \dots$  verschwindet das zweite Glied: Das Teilchen 1 befindet sich im Zustande  $r$ , 2 in  $s$ . Für  $\frac{2\pi}{h} W_{ik} t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$  verschwindet

das erste Glied und die Teilchen haben ihre Plätze vertauscht. Die Platzwechselfrequenz ist also

$$\nu_A = 2 W_{ik}/h;$$

$h\nu_A = 2W_{ik} = E'_i - E'_k$  heißt *Austauschenergie*,  $W_{ik}$  das *Austauschintegral*. Die Austauschenergie hat kein klassisches Analogon.

3. *Spin*. Die Beschreibung eines Teilchens durch seine drei Raumkoordinaten und die Zeit genügt erfahrungsgemäß noch nicht. Man muß ihm noch einen *Drehimpuls*  $\hat{s}$  von konstantem Betrage zuordnen („*Spin*“), der nicht von seiner Bahnbewegung herrührt; im Falle des Protons und des Elektrons ist er vom Betrage  $s = \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$  und bei anderen Teilchen stets ein ganzzahliges Vielfaches hiervon. Außerdem führen die Teilchen ein konstantes, dem Spin gleich- oder entgegengerichtetes *magnetisches Moment* mit sich.

Das klassische Verhältnis des magnetischen Moments einer auf einem Kreise umlaufenden Ladung  $e$  mit der Masse  $\mu$  zu ihrem Bahnimpuls beträgt  $\frac{e}{2\mu c}$ ; als  $g$ -Faktor irgendeines Teilchens pflegt man den Faktor zu bezeichnen, mit dem das obige Verhältnis in dem Quotienten

$$\frac{\text{Magnetisches Moment}}{\text{Drehimpuls}} = g \cdot \frac{e}{2\mu c}$$

enthalten ist.  $g$  hat für jedes *freie* Elementarteilchen und jeden Atomkern einen charakteristischen festen Wert. Für das Elektron ist  $g = -2$ , sein magnetisches Moment beträgt  $\frac{e h}{4\pi \mu_e c} = 1$  BOHRSCHEM Magneton  $= 9,18 \cdot 10^{-21}$  el. stat. CGS. Einh. ( $\mu_e =$  Elektronenmasse). Das Auftreten dieses Faktors  $g$  bei freien Elementarteilchen ist bis jetzt nur beim Elektron (s. S. 306) theoretisch begründet. (Für *gebundene* Teilchen z. B. ein Atomelektron mit der inneren Quantenzahl  $j$ , dem Bahnimpuls  $l$  und Spin  $s$  gilt angenähert

$$g = - \left[ 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \right] \quad \text{LANDÉSCHE } g\text{-FORMEL.}$$

Das Vorzeichen von  $g$  bestimmt die *Richtung* des magnetischen Moments gegenüber dem Impulsmoment des Teilchens.

Dem Spin kann man dadurch Rechnung tragen, daß man eine vierte Koordinate  $s$  („*Spinvariable*“) hinzufügt, die nur der beiden Werte  $s = \pm \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$  fähig ist. Statt dessen kann man auch statt einer zwei Eigenfunktionen  $\psi^+$  und  $\psi^-$  einführen, entsprechend den beiden Vorzeichen von  $s$ .

4. PAULI-Prinzip. Es muß als Zusatz zur Quantenmechanik des Mehrkörperproblems *angefügt* werden. Es besagt, daß nicht alle Lösungen der SCHRÖDINGER-Gleichung physikalischen Sinn haben, sondern nur

gewisse Linearkombinationen der miteinander entarteten Lösungen. Es seien  $x_i y_i z_i s_i$  Koordinaten und Spinvariable des  $i$ -ten Teilchens der gleichen Art (z. B. Elektronen), ferner  $\psi(x_i y_i z_i s_i)$  eine Lösung und  $\psi(P(x_i y_i z_i s_i))$  eine solche, die durch Vertauschung von zwei Teilchen (zwei Variablenquadrupeln) daraus hervorgeht. Dann gehören alle  $\psi(P)$  zum gleichen Eigenwert. Die allgemeine Lösung heißt

$$\Psi = \frac{1}{n!} \sum_P C_P \psi(P(x_i y_i z_i s_i))$$

mit  $|C_P|^2 = 1$ , weil alle Teilzustände gleiches Gewicht haben. Insbesondere heißen die Kombinationen

$$\Psi_s = \frac{1}{n!} \sum_P \psi(P(x_i y_i z_i s_i))$$

die *symmetrische*,

$$\Psi_a = \frac{1}{n!} \sum_P (-1)^k \psi(P(x_i y_i z_i s_i))$$

die *antimetrische*, wenn  $k$  die Anzahl der geraden Permutationen bedeutet, die zur Ausführung der Permutation  $P$  erforderlich sind (vgl. S. 95).  $\Psi_s$  ist invariant gegen Vertauschung irgend zweier Teilchen gleicher Art,  $\Psi_a$  ändert dabei sein Vorzeichen.

Das PAULI-Prinzip lautet: *Nur die antimetrischen Eigenfunktionen beschreiben die Bewegung der Teilchen.* Es gilt für Elektronen, Protonen und Neutronen; für andere Partikel ist die Gültigkeit fraglich. Es gilt nicht für Lichtquanten.

*Sonderfall.* Vernachlässigt man die Wechselwirkung zwischen den einzelnen gleichartigen Teilchen (grobe Annäherung zur Klassifikation der Zustände eines Atoms: Elektronen im Felde eines zentralen Atomkernes ohne Wechselwirkung untereinander), so ist

$$\psi = \psi_1(1) \cdot \psi_2(2) \cdot \dots \cdot \psi_n(n),$$

wobei  $\psi_i(i)$  als Abkürzung steht für die Eigenfunktionen des Teilchens  $i$ . Die antimetrische Funktion heißt dann

$$\Psi_a = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} \psi_1(1) & \psi_1(2) & \dots & \psi_1(n) \\ \psi_2(1) & \psi_2(2) & \dots & \psi_2(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_n(1) & \psi_n(2) & \dots & \psi_n(n) \end{vmatrix}.$$

Haben zwei Teilchen gleiche Funktionen  $\psi_i = \psi_k$ , so wird  $\Psi_a = 0$ , während  $\Psi_s \neq 0$  bleibt. Das PAULI-Prinzip kann in diesem Falle anschaulich gedeutet werden: Es dürfen sich nicht zwei Teilchen im gleichen Quantenzustand befinden (d. h. in allen Quantenzahlen, einschließlich des Spins, übereinstimmen). (Anhang, 15.)

*Auswahl der richtigen Kombinationen für zwei gekoppelte Systeme* (Fortsetzung zu S. 299). Bei Berücksichtigung des Spins spaltet der Energiewert in vier Terme auf mit folgenden Eigenfunktionen:

$$1. \quad \frac{1}{2} \{ \psi_r^+ (1) \psi_s^- (2) - \psi_s^+ (1) \psi_r^- (2) - \psi_r^- (1) \psi_s^+ (2) + \psi_s^- (1) \psi_r^+ (2) \}$$

symmetrisch in den Raumkoordinaten, antimetrisch in den Spin-koordinaten,

$$2. \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_r^+ (1) \psi_s^+ (2) - \psi_s^+ (1) \psi_r^+ (2) \},$$

$$3. \quad \frac{1}{2} \{ \psi_r^+ (1) \psi_s^- (2) - \psi_s^+ (1) \psi_r^- (2) + \psi_r^- (1) \psi_s^+ (2) - \psi_s^- (1) \psi_r^+ (2) \},$$

$$4. \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_r^- (1) \psi_s^- (2) - \psi_s^- (1) \psi_r^- (2) \}$$

antimetrisch in den Raumkoordinaten, symmetrisch in den Spin-koordinaten. Diese vier Kombinationen sind die einzigen, die das PAULI-Prinzip befriedigen.

#### b) Nichtkonservative Systeme.

(Das Magnetfeld.)

Bei Vorhandensein eines Magnetfeldes liegt kein konservatives System mehr vor. Zu dem skalaren Potential  $V = e\varphi$  tritt ein vektorielles  $\mathfrak{A}$  hinzu ( $\mathfrak{S} = \text{rot } \mathfrak{A}$ ). An Stelle der  $p_k$  treten die erweiterten Impulsoperatoren:

$$P_k \rightarrow \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{e}{c} A_k.$$

Man hat dann folgende erweiterte Form der SCHRÖDINGER-Gleichung:

$$H \left( \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{e}{c} A_k, x_k \right) \psi = - \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t};$$

für das Einkörperproblem ergibt sich speziell:

$$\Delta \psi + \frac{4\pi i}{\hbar} \left\{ \frac{e}{c} (\mathfrak{A} \cdot \text{grad } \psi) + \mu \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\} - \frac{8\pi^2 \mu}{\hbar^2} (\mu c^2 + e\varphi) \psi = 0.$$

Man kann auch  $\mathfrak{A}$  und  $i\varphi = A_4$  zu einem Viererpotential  $A_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) zusammenfassen und  $E/ic$  als vierte Komponente des erweiterten Impulses ansehen. Man hat dann noch die Substitution

$$E \rightarrow - \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} - e\varphi \quad \text{oder} \quad P_4 \rightarrow \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{e}{c} A_4 \quad (x_4 = ict)$$

hinzuzufügen und erhält das gleiche Resultat wie oben, wenn man nur von der SCHRÖDINGER-Gleichung des kräftefreien Falles ausgeht.

Die vernachlässigten Glieder ( $A_k^2$ ) sind von der Größenordnung der relativistischen Korrekturen.

Es gelten folgende *Vertauschungsrelationen* (vgl. S. 297) für die erweiterten Impulsoperatoren:

$$\begin{array}{l|l} [P_4, P_1] = i \frac{e}{c} \mathfrak{E}_1 & [P_2, P_3] = \frac{e}{c} \mathfrak{H}_1, \\ [P_4, P_2] = i \frac{e}{c} \mathfrak{E}_2 & [P_3, P_1] = \frac{e}{c} \mathfrak{H}_2, \\ [P_4, P_3] = i \frac{e}{c} \mathfrak{E}_3 & [P_1, P_2] = \frac{e}{c} \mathfrak{H}_3, \end{array}$$

wenn  $\mathfrak{E}_i$  und  $\mathfrak{H}_i$  die Komponenten von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  sind.

## 2. Relativistische Punktmechanik.

Die unter Ziffer 1 behandelte Theorie ist in doppeltem Sinne als Näherung zu betrachten:

1. Sie ist *nicht relativitätsinvariant*, d. h. es ist noch ein Übergang zu vollziehen analog zu demjenigen von der klassischen zur relativistischen Mechanik.

2. Sie trägt dem *Spin* nur sehr bedingt Rechnung. Er erscheint nicht als Ausfluß der Theorie, sondern als Zusatz; die SCHRÖDINGER-Gleichung bietet keine Handhabe zur quantitativen Erfassung seines Einflusses, sondern gibt nur qualitative Aussagen, z. B. die Anzahl aber nicht den Abstand der Feinstrukturkomponenten. Faßt man den Spin als Polarisation der Materiewellen auf, so ist noch ein Übergang zu vollziehen analog demjenigen von der FRESNELSchen skalaren Wellengleichung zu der vektoriellen Optik MAXWELLS.

Für das *Einkörperproblem* werden beide Aufgaben simultan gelöst durch die DIRACsche Theorie.

### a) Kräftefreier Fall.

Sei  $E$  die Energie,  $p_k$  die Impulse,  $v_k$  die Geschwindigkeiten. Dann gilt nach der Relativitätstheorie für die Energie

$$\frac{E}{c} = \pm \sqrt{\mu^2 c^2 + \sum_1^3 p_k^2}.$$

Dieser Ausdruck erweist sich zur Übertragung auf die Quantentheorie als ungeeignet, weil er voraussetzt, daß aus einem Operator die Wurzel gezogen wird, was i. a. nicht möglich ist. Diese Schwierigkeit kann man vermeiden, wenn man von dem Ausdruck ausgeht:

$$\frac{E}{c} = \sum_1^3 \frac{v_k}{c} p_k + \sqrt{1 - \frac{\sum_1^3 v_k^2}{c^2}} \cdot \mu c.$$



Die DIRACsche Gleichung entsteht hieraus durch die formale Substitution:

$$p_k \rightarrow \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$p_4 = i \frac{E}{c} \rightarrow \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_4} \quad (x_4 = ict)$$

und

$$\sqrt{1 - \frac{\sum_1^3 v_k^2}{c^2}} \xrightarrow{v_k \rightarrow \alpha_k} \alpha_0,$$

wobei die  $\alpha_k$  und  $\alpha_0$  vierreihige Matrizen sind:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Führen wir noch die Abkürzungen ein

$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix},$$

so lautet die DIRACsche Gleichung in symbolischer Schreibweise:

$$\sum_{k=1}^4 \alpha_k p_k \psi + \alpha_0 \mu c \psi = 0.$$

Das bedeutet: Statt *einer* Wellengleichung (2. Ordnung) haben wir ein System von 4 Gleichungen (1. Ordnung) für die 4 Wellenfunktionen  $\psi_1$  bis  $\psi_4$  (Komponenten) von der Form:

$$p_1 \sum_m \alpha_{1(lm)} \psi_m + p_2 \sum_m \alpha_{2(lm)} \psi_m + \dots + \mu c \sum_m \alpha_{0(lm)} \psi_m = 0 \quad l = 1, 2, 3, 4.$$

#### b) Allgemeiner Fall.

Sind Kräfte vorhanden, die sich teils aus einem vektoriiellen, teils einem skalaren Potential herleiten, so gilt die gleiche Erweiterung der Impulsoperatoren wie auf S. 302. Die  $p_k$  sind zu ersetzen durch die  $P_k$ :

$$P_k \rightarrow \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{e}{c} A_k \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Die Gleichungen lauten dann in Komponentenschreibweise:

$$\begin{aligned} \frac{i}{c} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - i \frac{\partial \psi_4}{\partial x} - \frac{\partial \psi_4}{\partial y} - i \frac{\partial \psi_3}{\partial z} + \frac{1}{\lambda} \psi_1 &= \\ &= \frac{2\pi}{h} \left\{ -\frac{1}{c} e\varphi \psi_1 - \frac{e}{c} A_x \psi_4 + i \frac{e}{c} A_y \psi_4 - \frac{e}{c} A_z \psi_3 \right\} \\ \frac{i}{c} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - i \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + i \frac{\partial \psi_4}{\partial z} + \frac{1}{\lambda} \psi_2 &= \\ &= \frac{2\pi}{h} \left\{ -\frac{1}{c} e\varphi \psi_2 - \frac{e}{c} A_x \psi_3 - i \frac{e}{c} A_y \psi_3 + \frac{e}{c} A_z \psi_4 \right\} \\ \frac{i}{c} \frac{\partial \psi_3}{\partial t} - i \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - i \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{1}{\lambda} \psi_3 &= \\ &= \frac{2\pi}{h} \left\{ -\frac{1}{c} e\varphi \psi_3 - \frac{e}{c} A_x \psi_2 + i \frac{e}{c} A_y \psi_2 - \frac{e}{c} A_z \psi_1 \right\} \\ \frac{i}{c} \frac{\partial \psi_4}{\partial t} - i \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + i \frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \frac{1}{\lambda} \psi_4 &= \\ &= \frac{2\pi}{h} \left\{ -\frac{1}{c} e\varphi \psi_4 - \frac{e}{c} A_x \psi_1 - i \frac{e}{c} A_y \psi_1 + \frac{e}{c} A_z \psi_2 \right\} \\ &\left( \lambda = \frac{h}{2\pi \mu c}, \text{ Comptonwellenlänge} \right). \end{aligned}$$

**c) Vertauschungsrelationen.** (Vgl. S. 297.)

Es gelten außer den auf S. 303 aufgeführten die folgenden Beziehungen ( $i, k = 0, 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned} [\alpha_i, P_k] &= 0 \\ \alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i &= 2 \delta_{ik} \\ \alpha_4 \alpha_k &= \alpha_k \alpha_4 = -i \alpha_k. \end{aligned}$$

Wir definieren ferner den *Spinvektor*  $\sigma$  mit den drei Komponenten

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= i \alpha_3 \alpha_2 = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_1 \end{pmatrix}, & s_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \sigma_2 &= i \alpha_1 \alpha_3 = \begin{pmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}, & s_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \\ \sigma_3 &= i \alpha_2 \alpha_1 = \begin{pmatrix} s_3 & 0 \\ 0 & s_3 \end{pmatrix}, & s_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dabei heißen  $s_1, s_2, s_3$  die *PAULISchen Spinmatrizen*. Es gelten die Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} \frac{h}{2\pi} [\alpha_1, \sigma_3] &= 2 \alpha_2 & \frac{h}{2\pi} [\sigma_2, \sigma_1] &= 2 \sigma_3 \\ \frac{h}{2\pi} [\alpha_2, \sigma_3] &= -2 \alpha_1 & \frac{h}{2\pi} [\sigma_3, \sigma_2] &= 2 \sigma_1 \\ \frac{h}{2\pi} [\alpha_3, \sigma_3] &= 0 & \frac{h}{2\pi} [\sigma_1, \sigma_3] &= 2 \sigma_2 \end{aligned}$$

usw. zyklisch, und

$$\sigma_i \sigma_k + \sigma_k \sigma_i = 2 \delta_{ik}.$$

## d) Iteration. Erhaltungssätze.

Wendet man auf die DIRACsche Gleichung

$$i P_4 = D = \sum_1^3 \alpha_k P_k + \alpha_0 \mu c$$

die Operation  $i P_4$  an, so entsteht

$$- P_4^2 = i P_4 D = i D P_4 + \frac{\hbar}{2\pi} [P_4, D] = D^2 + \frac{\hbar}{2\pi} [P_4, D].$$

Definiert man noch den Vektor  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  und wendet die Vertauschungsrelationen an, so erhält man

$$\begin{aligned} [P_4, D] &= \alpha_1 [P_4, P_1] + \alpha_2 [P_4, P_2] + \alpha_3 [P_4, P_3] = -i \frac{e}{c} (\alpha \mathfrak{E}), \\ D^2 &= \sum_1^3 P_k^2 + \mu^2 c^2 + \frac{\hbar}{2\pi i} \{ \alpha_1 \alpha_2 [P_1, P_2] + \alpha_2 \alpha_3 [P_2, P_3] + \alpha_3 \alpha_1 [P_3, P_1] \} \\ &= \sum_1^3 P_k^2 + \mu^2 c^2 + \frac{\hbar}{2\pi} \frac{e}{c} (\sigma \cdot \mathfrak{H}). \end{aligned}$$

Es wird also

$$- P_4^2 = \sum_1^3 P_k^2 + \mu^2 c^2 + \frac{\hbar}{2\pi} \frac{e}{c} (\sigma \cdot \mathfrak{H}) - \frac{\hbar}{2\pi} i \frac{e}{c} (\alpha \mathfrak{E}).$$

Andererseits ist

$$- P_4^2 = \frac{E^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} (\mu c^2 + W)^2,$$

oder in nichtrelativistischer Näherung ( $W \ll \mu c^2$ ):

$$- P_4^2 = \mu^2 c^2 + 2\mu W.$$

Der Vergleich ergibt:

$$W = \frac{1}{2\mu} (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) + \frac{1}{2} \frac{\hbar}{2\pi} \frac{e}{\mu c} (\sigma \cdot \mathfrak{H}) - \frac{1}{2} \frac{\hbar}{2\pi} \frac{e}{\mu c} i (\alpha \mathfrak{E}).$$

Der erste Term ist die klassische Energie; der zweite gibt die Wechselwirkungsenergie mit dem magnetischen Moment  $\frac{1}{2} \frac{\hbar}{2\pi} \frac{e}{\mu c} \sigma$  des Elektrons; der dritte Term entspricht einem imaginären elektrischen Moment  $-\frac{1}{2} \frac{\hbar}{2\pi} \frac{e}{\mu c} i \alpha$ , dem keine physikalische Bedeutung zukommt.

Drehimpuls. Es sei  $\mathfrak{M} = 0$ . Zum Unterschied von der SCHRÖDINGER-Gleichung gilt nicht mehr  $d\mathfrak{Q}/dt = 0$ , sondern

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{dt} = c [\alpha \mathfrak{p}]$$

und

$$\frac{1}{2} \frac{\hbar}{2\pi} \frac{d\sigma}{dt} = c [\mathfrak{p} \alpha].$$

Der Erhaltungssatz gilt also für den Vektor  $\mathfrak{M} = \mathfrak{Q} + \frac{1}{2} \frac{\hbar}{2\pi} \sigma$ :

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt} = 0.$$

Der gesamte Drehimpuls  $\mathfrak{M}$  setzt sich zusammen aus dem Bahnimпульs  $\mathfrak{L}$  und dem Spin  $\frac{1}{2} \frac{\hbar}{2\pi} \sigma$ .

Es ist

$$\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{L}^2 + (\mathfrak{L} \sigma) + \frac{3}{4} \hbar^2.$$

Der Operator

$$\mathfrak{M}^2 + \frac{1}{4} \hbar^2$$

hat die ganzzahligen Eigenwerte  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Deutung der Lösung. Stromdichte und Ladungsdichte bilden zusammen einen Vierervektor

$$s_k = -ec \psi^* \alpha_k \psi = -ec \sum_{lm} \psi_l^* \alpha_{k(lm)} \psi_m.$$

Die Ladungsdichte ist  $\rho = s_4 / ic$ . In Komponentenschreibweise erhält man:

$$\begin{aligned} s_1 &= -ec(\psi_1^* \psi_4 + \psi_2^* \psi_3 + \psi_3^* \psi_2 + \psi_4^* \psi_1), \\ s_2 &= +iec(\psi_1^* \psi_4 - \psi_2^* \psi_3 + \psi_3^* \psi_2 - \psi_4^* \psi_1), \\ s_3 &= -ec(\psi_1^* \psi_3 - \psi_2^* \psi_4 + \psi_3^* \psi_1 - \psi_4^* \psi_2), \\ \rho &= e(\psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 + \psi_4^* \psi_4). \end{aligned}$$

**e) Zweikomponententheorie.**

Die DIRACsche Gleichung kann auch geschrieben werden

$$\left\{ \sum_{k=1}^3 \begin{pmatrix} 0 & s_k \\ s_k & 0 \end{pmatrix} P_k - i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P_4 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mu c \right\} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = 0, \quad (1)$$

wobei die  $s_k$  die zweireihigen PAULISchen Spinmatrizen bedeuten, 1 die zweireihige Einheitsmatrix ist und  $\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ ,  $\psi_B = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$  zusammenfaßt.

Die  $s_k$  befolgen die Regeln:

$$\begin{aligned} s_k s_i + s_i s_k &= 2 \delta_{ik} \\ s_1 s_2 &= i s_3, \quad s_2 s_3 = i s_1, \quad s_3 s_1 = i s_2. \end{aligned}$$

Spaltet man Gleichung (1) auf in zwei zweikomponentige Gleichungen, so wird

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 s_k P_k \psi_B + (-i P_4 + \mu c) \psi_A &= 0 \\ \sum_{k=1}^3 s_k P_k \psi_A + (-i P_4 - \mu c) \psi_B &= 0. \end{aligned}$$

Setzt man

$$\psi = \varphi(x, y, z, t) e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \mu c^2 t},$$

so folgt

$$\sum_{k=1}^3 s_k P_k \varphi_B = i P_4 \varphi_A$$

$$\sum_{k=1}^3 s_k P_k \varphi_A = (i P_4 + 2\mu c) \varphi_B,$$

und hieraus eine zweikomponentige Gleichung für  $\varphi_A$  allein:

$$\frac{1}{2\mu} \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 s_i P_i \left( 1 + \frac{i}{2\mu c} P_4 \right)^{-1} s_k P_k \right\} \varphi_A = i P_4 \varphi_A.$$

Ist speziell

$$P_4 \varphi_B \ll 2\mu c \cdot \varphi_B,$$

so wird  $\varphi_B \ll \varphi_A$ . Der Operator  $\left( 1 + \frac{i}{2\mu c} P_4 \right)^{-1}$  äußert sich dann nur in kleinen Zusatzgliedern. Die so gewonnene Näherungsgleichung (entwickelt bis mit  $\frac{1}{c^2}$ ) kann als Ausgangspunkt einer *vereinfachten Spintheorie* dienen (PAULI):

$$\left\{ \frac{1}{2\mu} \mathfrak{P}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{e}{\mu c} \left( \mathfrak{s} \cdot \left( \mathfrak{S} + \frac{1}{2\mu c} [\mathfrak{E} \mathfrak{P}] \right) \right) - i \cdot \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{e}{4\mu^2 c^2} (\mathfrak{E} \mathfrak{P}) \right\} \varphi_A$$

$$= i c P_4 \left( 1 + \frac{1}{4\mu^2 c^2} \mathfrak{P}^2 \right) \varphi_A.$$

Dabei ist  $\mathfrak{P} = (P_1, P_2, P_3)$  und  $\mathfrak{s} = (s_1, s_2, s_3)$ .

## C. Quantenoptik.

Eine endgültige Theorie der Quantenelektrodynamik existiert zur Zeit noch nicht. Einige *Ansätze*, die uns einen Einblick in die Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie geben, sollen im folgenden zusammengestellt werden.

### 1. Lichtquanten.

Die allgemein gültige LORENTZ-invariante Beziehung

$$\frac{E^2}{c^2} = m^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

( $E =$  Ruhenergie + kinetische Energie) geht mit  $p_i \rightarrow \frac{h}{2\pi} i \frac{\partial}{\partial x_i}$  und

$E = -\frac{h}{2\pi} i \frac{\partial}{\partial t}$  über in

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{4\pi^2}{h^2} m^2 c^2 \psi.$$

Dies ist für  $m \neq 0$  die Bewegungsgleichung der mit einer Korpuskel gemäß der Quantenmechanik verbundenen Wahrscheinlichkeitswelle bei Abwesenheit äußerer Kräfte (KLEIN-GORDONSche Gleichung). Sie stimmt

bis auf relativistische Glieder überein mit der SCHRÖDINGER-Gleichung für  $V=0$ . Bei Anwesenheit von Kräften ist die Gleichung *nicht* richtig (vgl. DIRACsche Theorie).

Für  $m=0$  liegt die bekannte Grundgleichung der theoretischen Optik vor. Die Ausbreitungsvorgänge elektromagnetischer Wellen lassen sich also ebenfalls verstehen als *Führungswelle* eines Teilchenschwarms, bestehend aus „Lichtquanten“ von der Ruhmasse  $m=0$ , der Energie  $E=h\nu$  und dem Impuls  $p=h\nu/c$ .

## 2. Hohlraumstrahlung.

Aus den MAXWELLSchen Gleichungen folgt für das Vektorpotential  $\mathfrak{A}$ :

$$\Delta \mathfrak{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathfrak{A}} = 0 \quad \left( \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{A}}; \mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A} \right).$$

Wir setzen an

$$\mathfrak{A} = \sum_{\alpha} q_{\alpha}(t) \mathfrak{A}_{\alpha}(x, y, z) = \sum_{\alpha} e^{2\pi i \varrho_{\alpha} t} \mathfrak{A}_{\alpha}(x, y, z);$$

dann wird

$$\Delta \mathfrak{A}_{\alpha} + \frac{4\pi^2}{c^2} \varrho_{\alpha}^2 \mathfrak{A}_{\alpha} = 0$$

ein Eigenwertproblem zur Bestimmung der Eigenfrequenzen  $\varrho_{\alpha}$  und Eigenfunktionen  $\mathfrak{A}_{\alpha}$  des Hohlraumes (Randbedingungen: spiegelnde Wände, d. h.  $\mathfrak{A}_{\alpha}$  normal zum Rand). Wir normieren

$$\int \mathfrak{A}_{\alpha}^2 d\tau = 4\pi c^2$$

$$\int \mathfrak{A}_{\alpha} \mathfrak{A}_{\beta} d\tau = 0.$$

Die Anzahl der Eigenwerte zwischen den Frequenzen  $\varrho_{\alpha}$  und  $\varrho_{\alpha} + d\varrho_{\alpha}$  ist asymptotisch

$$dz = \frac{8\pi}{c^3} V \varrho_{\alpha}^2 d\varrho_{\alpha}$$

( $V$  = Volumen des Hohlraumes). Die Formel gilt um so besser, je größer  $V$  ist, d. h. je dichter die Eigenwerte liegen. Für  $q_{\alpha}(t)$  gilt die Gleichung eines harmonischen Oszillators der Masse 1

$$\ddot{q}_{\alpha} + 4\pi^2 \varrho_{\alpha}^2 q_{\alpha} = 0;$$

die zugehörige HAMILTON-Funktion ist

$$H_{\alpha} = \frac{1}{2} (p_{\alpha}^2 + 4\pi^2 \varrho_{\alpha}^2 q_{\alpha}^2).$$

Die Gesamtenergie des Hohlraums wird

$$E = \frac{1}{8\pi} \int (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) d\tau = \sum_{\alpha} H_{\alpha}$$

(Satz von JEANS), d. h. die *Eigenschwingungen des Hohlraumes* lassen sich deuten als eine Reihe *unabhängig voneinander schwingender Oszillatoren*.

Die MAXWELLSchen Gleichungen geben bereits die „Führungswelle“ des Lichtquants (s. o. 1). Trotzdem ist die ihnen äquivalente Oszillatordifferentialgleichung nicht in klassischer Weise, sondern nach den Regeln der Quantenmechanik zu behandeln (*zweite Quantelung*). Dann finden wir als mögliche Oszillatorenergien

$$H_{n\alpha} = h \varrho_\alpha \left( n + \frac{1}{2} \right).$$

Die hierin auftretende Nullpunktsenergie entzieht sich prinzipiell der Messung, führt aber zu Konvergenzschwierigkeiten und wird deshalb gestrichen.

### 3. Wechselwirkung von Strahlung und Materie.

Bringt man in den von Strahlung erfüllten Hohlraum (Ziffer 2) ein atomares System (PLANCKS „Kohlestäubchen“) mit den Eigenfunktionen  $\psi_n(\mathbf{r})$  und Eigenwerten  $E_n$ , so tritt Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie auf, die zeitliche Änderungen des Zustandes bedingt. Die Wechselwirkungsenergie ist

$$W = -\frac{e}{c} \sum_{\alpha} (\dot{\mathbf{r}} \mathcal{A}_{\alpha}) q_{\alpha},$$

ferner sei die „Matrix der Störungsenergie“

$$W_{ik} = \int \sum_{\alpha} \psi_k^* W \psi_i d\tau dq_{\alpha},$$

wobei  $i$  und  $k$  die ganze Reihe der möglichen Zustände des Gesamtsystems bedeuten und  $\psi_i$  und  $\psi_k$  entsprechend Eigenfunktionen des Gesamtsystems sind. Für die Wahrscheinlichkeit des Zustandes  $k$ ,  $|b_k|^2$ , besteht, wenn dieser nicht der Anfangszustand ist [d. h. wenn  $b_k(0) = 0$  ist] nach DIRAC die Differentialgleichung

$$\frac{h}{2\pi i} \dot{b}_k = E_k^0 b_k + \sum_i b_i W_{ik},$$

wobei  $E_k^0$  die Summe von Atomenergie und Hohlraumenergie *ohne* Störung im Zustande  $k$  bedeutet. Ist  $h\nu_n$  die Anfangsenergie des Atoms,  $h\varrho_s = \sum n_{\alpha} h\varrho_{\alpha}$  die der Strahlung ( $n_{\alpha}$  = Anzahl der Oszillatoren der Frequenz  $\varrho_{\alpha}$ ), dieselben Größen mit einem Strich (') dasselbe zur Zeit  $t$ , so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Atom sich zur Zeit  $t$  im Zustande  $h\nu_{n'}$  befindet

$$w = 2 \sum_{s'} |W_{nn', ss'}|^2 \frac{1 - \cos 2\pi (\varrho_{ss'} + \nu_{nn'}) t}{h^2 (\varrho_{ss'} + \nu_{nn'})^2}.$$

Berechnet man hierin die Matrixelemente  $W_{ik} = W_{nn', ss'}$ , so erhält man

$$W_{nn', ss'} = -\frac{e}{c} \sum_{\alpha} (\mathcal{A}_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{nn'}) q_{ss'},$$

worin  $q_{ss'}^\alpha = 0$  ist, außer wenn:

$$n'_1 = n_1, n'_2 = n_2 \dots n'_\alpha = n_\alpha \pm 1, n'_{\alpha+1} = n_{\alpha+1} \dots,$$

dann aber

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{h(n_\alpha + 1)}{8\pi^2 \rho_\alpha}} \quad \text{für } n'_\alpha = n_\alpha + 1 \quad (\text{Emission}) \\ &= \sqrt{\frac{h n_\alpha}{8\pi^2 \rho_\alpha}} \quad \text{für } n'_\alpha = n_\alpha - 1 \quad (\text{Absorption}). \end{aligned}$$

$\dot{i}_{nn'}$  ist das Matricelement von  $\dot{i}$  bezüglich der Atomeigenfunktionen

$$\dot{i}_{nn'} = \int \psi_n^* \dot{i} \psi_n d\tau.$$

Man kann  $\mathfrak{A}_\alpha$  durch seinen Mittelwert ersetzen und findet so schließlich

$$|W_{nn', ss'}|^2 = \frac{4\pi e^2}{3V} |\dot{i}_{nn'}|^2 \sum_\alpha (q_{ss'}^\alpha)^2.$$

Für die Wahrscheinlichkeit ergibt sich damit

$$\begin{aligned} w = \frac{e^2}{3\pi h V} \left\{ \sum_\alpha \frac{n_\alpha}{\rho_\alpha} |\dot{i}_{nn'}|^2 \frac{1 - \cos 2\pi (v_{nn'} + \rho_\alpha) t}{(v_{nn'} + \rho_\alpha)^2} + \right. \\ \left. + \sum_\alpha \frac{n_\alpha + 1}{\rho_\alpha} |\dot{i}_{nn'}|^2 \frac{1 - \cos 2\pi (v_{nn'} - \rho_\alpha) t}{(v_{nn'} - \rho_\alpha)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Wir fragen nach der *Anregungswahrscheinlichkeit* einer einzigen Spektrallinie, d. h. wir erstrecken die Summation nur über solche Werte  $s'$ , für die  $\rho \leq \rho_\alpha \leq \rho + d\rho$ . Wir führen die Definitionen ein

$$\sum_\alpha h n_\alpha \rho_\alpha = V U(\rho) d\rho \quad \sum_\alpha h \rho_\alpha = V u(\rho) d\rho,$$

beide Summen ebenfalls über das gleiche enge Intervall erstreckt.  $U(\rho)$  ist die Strahlungsdichte der Hohlraumstrahlung,  $u(\rho)$  aus der asymptotischen Eigenwertverteilung der Strahlung als universelle Funktion der Frequenz zu berechnen (s. S. 309)

$$u(\rho) d\rho = \frac{1}{V} h \rho dz = \frac{8\pi h}{c^3} \rho^3 d\rho.$$

Bei der Anregungswahrscheinlichkeit können wir die Summen jetzt durch Integrale ersetzen

$$\begin{aligned} w = \frac{e^2}{3\pi h^2} \left\{ \int \frac{U(\rho)}{\rho^2} |\dot{i}_{nn'}|^2 \frac{1 - \cos 2\pi (v_{nn'} + \rho) t}{(v_{nn'} + \rho)^2} d\rho + \right. \\ \left. + \int \frac{U(\rho) + u(\rho)}{\rho^2} |\dot{i}_{nn'}|^2 \frac{1 - \cos 2\pi (v_{nn'} - \rho) t}{(v_{nn'} - \rho)^2} d\rho \right\}. \end{aligned}$$

Wir unterscheiden zwei Möglichkeiten.



1. Absorption:  $E_{n'} > E_n$ ;  $\nu_{nn'} = -\nu$ , Resonanzstelle im 1. Integral, gegen die alles andere verschwindet:

$$w_{\text{Absorption}} = \frac{2\pi e^2}{3\hbar^2} t |\dot{\mathbf{r}}_{nn'}|^2 \frac{U(\nu)}{\nu^2} = \frac{8\pi^3 e^2}{3\hbar^2} t \cdot |\mathbf{r}_{nn'}|^2 U(\nu)$$

wegen  $\dot{\mathbf{r}}_{nn'} = 2\pi i \nu \mathbf{r}_{nn'}$ .

Wahrscheinlichkeit des Absorptionsvorganges in der Zeiteinheit  $A = w_{\text{Abs.}}/t$ . Intensität der zugehörigen durch das Strahlungsfeld  $U(\nu)$  erzwungenen Absorptionslinie ist  $A h \nu$ .

2. Emission:  $E_{n'} < E_n$ ;  $\nu_{nn'} = +\nu$ , Resonanzstelle im 2. Integral; Wahrscheinlichkeit der Emission in der Zeiteinheit

$$E = \frac{8\pi^3 e^2}{3\hbar^2} |\mathbf{r}_{nn'}|^2 \{U(\nu) + u(\nu)\}$$

besteht aus zwei Teilen: der *erzwungenen* Emission (1. Term) und der *spontanen* Emission (2. Term, unabhängig von der Intensität des Strahlungsfeldes).

Die für die Linienintensitäten maßgebenden Größen

$$\mathfrak{P}_{nn'} = e \mathbf{r}_{nn'} = e \int \psi_n^* \mathbf{r} \psi_n d\tau$$

werden bezeichnet als *Matrix des elektrischen Moments*.

Breite der Spektrallinien: Zu den Resonanzintegralen trägt nur die Umgebung der Resonanzstelle merklich bei, d. h. das Energieintervall  $\Delta E = \hbar \Delta \nu$ , für das  $2\pi \Delta \nu \cdot t = 1$ . Dabei ist  $t = \Delta t$  der Zeitraum zwischen  $t = 0$ , wo der Zustand des Systems bekannt war, und  $t = t$ , wo die Linie emittiert wird. Die Linie ist nur mit einer gewissen Unschärfe definiert entsprechend

$$\Delta E \Delta t = \hbar/2\pi,$$

welche um so größer wird, je länger der Zeitraum  $\Delta t$  (HEISENBERGSCHE Unschärferelation).

Thermodynamisches Gleichgewicht: Sei  $N$  die Anzahl der Atome im Zustande  $n$ ,  $N'$  dieselbe in  $n'$ . Dann ist im Gleichgewicht

$$NA = N'E \quad (\text{EINSTEINSche Gleichung}),$$

außerdem muß sein

$$N/N' = e^{\hbar \nu/kT} \quad (\text{BOLTZMANNsche Verteilung, vgl. S. 335}).$$

Daraus folgt für die Energiedichte der Strahlung (bei Vorhandensein des „Kohlestäubchens“!)

$$U(\nu) = \frac{8\pi\hbar}{c^3} \nu^3 \frac{1}{e^{\hbar \nu/kT} - 1} \quad (\text{PLANCKSche Formel}).$$

*Abgeleitete Beziehungen:*

1. Das *Intensitätsmaximum*  $\nu_0$  liegt bei  $\hbar \nu_0/kT \approx 5$ , oder bei der Wellenlänge  $\lambda_0 = 0,288/T \text{ cm} = 0,288 \cdot 10^8/T \text{ \AA}$  (WIENSches Verschiebungsgesetz).

2. Asymptotische Formel für kleine Frequenzen (*langwelliges Licht*)

$$U(\nu) = \frac{8 \pi h T}{c^3} \nu^2 \quad (\text{Formel von RAYLEIGH und JEANS}).$$

3. Asymptotische Formel für große Frequenzen (*kurzwelliges Licht*)

$$U(\nu) = \frac{8 \pi h}{c^3} \nu^3 e^{-h\nu/kT}.$$

4. Energiedichte der Strahlung (Integral über alle Frequenzen)

$$\int_0^{\infty} U(\nu) d\nu = \sigma T^4 = \frac{8}{15} \frac{\pi^5 h^4}{c^3 h^3} T^4 = 7,624 \cdot 10^{-15} T^4 \text{ erg/cm}^3$$

(Gesetz von STEFAN und BOLTZMANN).

Gesamtemission einer leuchtenden Oberfläche

$$\sigma c T^4 = 2,29 \cdot 10^{-4} T^4 \text{ erg/cm}^2 \text{ sec.}$$

Fünfter Abschnitt.

## Thermodynamik.

### A. Grundbegriffe.

Die Thermodynamik beschäftigt sich mit Systemen räumlich nebeneinander befindlicher homogener Körper.

*Homogen* heißt dabei ein Körper, wenn seine räumlichen Bestandteile gleich sind bezüglich ihrer makroskopischen Bestimmungsstücke, wie chemische Zusammensetzung, Dichte, Elastizität usw.

*Die Erfahrung zeigt*, daß bei gegebener physikalisch-chemischer Zusammensetzung der *Zustand* jedes homogenen Körpers (d. h. die Gesamtheit der übrigen genannten Bestimmungsstücke) festgelegt ist durch den äußeren (allseitigen) *Druck*  $p$ , unter dem der Körper (und daher jeder seiner Raumteile) steht und durch seine Dichte  $\rho$  bzw. sein *spezifisches Volumen*  $v = \frac{1}{\rho} = \frac{V}{M}$  ( $V = \text{Volumen}$ ,  $M = \text{Masse des Körpers}$ ).  $p$  und  $v$  heißen *Zustandsvariablen*.

Eine Wand (Trennungsfläche zwischen zwei Systemteilen) heißt *wärmeundurchlässig* oder *adiabatisch*, wenn ein von ihr umhüllter homogener Teil seinen Zustand  $p, v$  bei Ausschluß äußerer Fernkräfte nur dann ändert, wenn die Wand bewegt wird, unabhängig davon, was außen geschieht. Jede andere Wand heißt *diatherman* oder *wärmedurchlässig*.

*Die Erfahrung zeigt*, daß ein adiabatisch begrenztes System, dessen homogene Einzelsysteme diatherman einander berühren, nur dann im

*Gleichgewicht* ist, d. h. seinen Zustand bewahrt, wenn die Zustandsvariablen  $p_i, v_i$  der Einzelsysteme zusammenhängen durch Relationen:

$$f_1(p_1, v_1) = f_2(p_2, v_2) = \dots, f_i(p_i, v_i) = F(\vartheta), \quad (1)$$

wo die Form der Funktionen  $f_i$  nur durch die chemische Zusammensetzung bestimmt ist. Die Funktion  $F$  kann dabei willkürlich angenommen werden.

Wir können daher auch  $\vartheta$  als *Zustandsvariable* benutzen.  $\vartheta$  heißt empirische *Temperatur* (in zunächst willkürlicher Skala).

## B. Hauptsätze.

1. *Hauptsatz*: Um ein adiabatisch abgeschlossenes, d. h. von adiabatischen Wänden umschlossenes System von einem Gleichgewichtszustand (1) zu einem anderen (2) zu bringen, ist immer dieselbe Arbeit  $A$  erforderlich, unabhängig von der Form des Übergangs

$$A = U_{(2)} - U_{(1)}. \quad (2)$$

$U$  ist eine Funktion der Zustandsvariablen und heißt die *Energie* des Systems. Sie ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.

Für ein nicht adiabatisch abgeschlossenes System gilt die Gleichung im allgemeinen nicht.

$$Q = U_{(2)} - U_{(1)} - A \quad (3)$$

heißt dann die dem System zugeführte *Wärmemenge*.

*Quasistatisch* heißt eine Zustandsänderung, bei der das System sich immer nur um verschwindende Größen vom Gleichgewicht entfernt.

Für solche gilt (im Fall rein mechanischer Arbeitsleistung)

$$dA = -p dV,$$

mithin

$$dQ = dU + p dV, \quad (4)$$

im Falle des adiabatischen Systems also

$$dQ = dU + p dV = 0. \quad (5)$$

Ebenso gilt für jeden homogenen Bestandteil

$$dQ_i = dU_i + p_i dV_i,$$

und es ist

$$dU = \sum_i dU_i, \quad dQ = \sum_i dQ_i.$$

Sei  $\lambda_i$  eine Funktion der Zustandsvariablen des Teils  $i$ , welche als integrierender Nenner die Größe  $d\varphi_i = \frac{dQ_i}{\lambda_i}$  zu einem vollständigen Differential macht. Dann ist auch  $\varphi_i$  als *Zustandsvariable* benutzbar.

Ein solcher integrierender Nenner existiert sicher, da  $dQ_i$  nur von zwei Variablen abhängt.

Es ist dann für ein adiabatisch abgeschlossenes System

$$dQ = \sum \left( \frac{\partial U_i}{\partial \varphi_i} + p_i \frac{\partial V_i}{\partial \varphi_i} \right) d\varphi_i + \left( \frac{\partial U_i}{\partial \vartheta} + p_i \frac{\partial V_i}{\partial \vartheta} \right) d\vartheta = 0. \quad (5')$$

Diese (PFAFFSche) Gleichung mit mehr als zwei unabhängigen Variablen hat einen integrierenden Nenner  $\lambda$  (vgl. S. 188) wegen des

2. Hauptsatzes (in der Form von CARATHÉODORY)<sup>1</sup>: In beliebiger Nähe jedes Zustands eines adiabatischen abgeschlossenen Systems gibt es Nachbarzustände, die von ihm aus (etwa durch äußere Arbeit) nicht erreichbar sind.

$$d\varphi = \frac{dQ}{\lambda} \text{ sei also ein totales Differential.} \quad (6)$$

Dann gilt wegen  $d\varphi_i = \frac{dQ_i}{\lambda_i}$  auch

$$\lambda d\varphi = \sum_i \lambda_i d\varphi_i,$$

also bei  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  und  $\vartheta$  als Zustandsvariablen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = 0.$$

$\varphi$  ist also Funktion der  $\varphi_i$  allein:

$$\varphi = \varphi(\varphi_1, \varphi_2, \dots),$$

während  $\lambda$  außerdem von  $\vartheta$  abhängen kann:

$$\lambda = \lambda(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \vartheta).$$

Dann ist auch  $\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{\lambda_i}{\lambda} \right) = 0$ ,

also

$$\lambda_i = G(\vartheta) \cdot \Phi_i(\varphi_i) \quad (7)$$

und

$$\lambda = G(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots), \quad (7')$$

wo  $G(\vartheta)$  eine für alle Teile und das ganze System identische Funktion von  $\vartheta$  ist.

Wegen

$$d\varphi = \sum \frac{\lambda_i d\varphi_i}{\lambda} = \sum \frac{\Phi_i}{\Phi} d\varphi_i \text{ folgt } \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_k} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_k} = 0,$$

daher ist  $\Phi$  eine Funktion von  $\varphi(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$ , d. h.  $\lambda = G(\vartheta) \Phi(\varphi)$ .

<sup>1</sup> Mathem. Ann. 61, 355 (1909); vgl. auch M. Born. Phys. ZS. 22, 218 (1921).

Da auch  $\frac{\lambda_i}{\Phi_i(\varphi_i)}$  bzw.  $\frac{\lambda}{\Phi(\varphi)}$  integrierende Nenner der Differentiale  $dQ_i$  bzw.  $dQ$  sind, wenn  $\lambda_i$  bzw.  $\lambda$  es sind, so ist auch

$$G(\vartheta) = e^{\int \frac{\partial \ln \lambda_i}{\partial \vartheta} \Big|_{\varphi_i} d\vartheta} = e^{\int \frac{\partial \ln \lambda}{\partial \vartheta} \Big|_{\varphi} d\vartheta}$$

ein solcher für dieselben. Wir nennen

$$T = C \cdot G(\vartheta) \quad (8)$$

die *thermodynamische Temperatur*, wo  $C$  ein Maßstabfaktor ist.

Dann ist

$$dQ_i = \lambda_i d\varphi_i = \frac{T}{C} \Phi_i d\varphi_i = T dS_i, \quad (9)$$

$$S_i = \frac{1}{C} \int \Phi_i d\varphi_i$$

heißt die *Entropie* des Teils  $i$ .

$$dQ = \frac{T}{C} \Phi(\varphi) d\varphi = T dS, \quad (9')$$

$$S = \frac{1}{C} \int \Phi(\varphi) d\varphi$$

heißt die *Gesamtentropie* des Systems.

Wegen  $dQ = \sum_i dQ_i$  folgt

$$dS = \sum_i dS_i. \quad (10)$$

Wegen der Additivität von  $dU = \sum_i dU_i$  (7) und  $dS = \sum_i dS_i$  (10) können wir auch die Differentiale der *spezifischen Energie* bzw. *Entropie* einführen  $du$  bzw.  $ds$  und erhalten

$$du = T ds - p dv. \quad (11)$$

### C. Zustandsvariabeln.

Als Parameter zur thermodynamischen Charakterisierung *des Zustandes* eines homogenen Stoffes kann man also zwei beliebige der Größen  $p$ ,  $v$ ,  $T$ ,  $s$  verwenden, oder der aus diesen abgeleiteten Größen  $u$ ,  $f$ ,  $\psi$ ,  $w$ , welche definiert sind durch

$$du = T ds - p dv, \quad (1)$$

$$df = -s dT - p dv,$$

$$d\psi = -s dT + v dp,$$

$$dw = T ds + v dp,$$

und durch eine LEGENDRESche Transformation auseinander hervorgehen, indem man setzt

$$\begin{aligned} f &= u - Ts, \\ \psi &= f + pv = u - Ts + pv, \\ w &= u + pv. \end{aligned} \quad (2)$$

$f$  heißt spezifische freie Energie,  
 $\psi$  heißt thermodynamisches Potential,  
 $w$  heißt Wärmefunktion („Enthalpie“).

Aus den vollständigen Differentialen (1) liest man die wichtigen thermodynamischen Beziehungen ab:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial v} \right|_s &= - \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_v & \left. \frac{\partial s}{\partial v} \right|_T &= \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v \\ \left. \frac{\partial s}{\partial p} \right|_T &= - \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_p & \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_s &= \left. \frac{\partial v}{\partial s} \right|_p. \end{aligned}$$

Das Gesamtvolumen, die Gesamtentropie usw. findet man aus den spezifischen durch Multiplikation mit der Masse  $M$  des Körpers

$$V = Mv, \quad S = Ms \text{ usw.}$$

Die Masse  $M$  eines aus  $N$  Molekülen vom Molekulargewicht  $m$  bestehenden Körpers ist

$$M = N \cdot m \cdot \frac{k}{R},$$

wo  $k = 1,37 \cdot 10^{-16}$ , d. h. gleich der BOLTZMANNschen Konstanten und  $R = 8,314 \cdot 10^7$ , d. h. gleich der Gaskonstanten ist (vgl. S. 322).

$n = \frac{Nk}{R}$  heißt die Anzahl der „Mole“ des Körpers,

also ist  $M = nm$ .

Die Kombination mehrerer Körper, deren Zustand durch die Variablen  $p, v, T, s$  definiert ist, heißt ein *inhomogenes System*.

Für den Zustand des Systems sind folgende Größen von Bedeutung:

$$M = \sum_i M_i = \text{Masse}$$

$$V = \sum_i M_i v_i = \text{Volumen}$$

$$S = \sum_i M_i s_i = \text{Entropie}$$

$$U = \sum_i M_i u_i = \text{Energie}$$

$$F = \sum_i M_i f_i = \text{freie Energie}$$

$$\Psi = \sum_i M_i \psi_i = \text{thermodynamisches Potential}$$

$$W = \sum_i M_i w_i = \text{Wärmefunktion.}$$

### D. Koeffizienten.

Folgende partielle Differentialquotienten haben besondere Bedeutung und Namen:

$$c_v = \left. \frac{\partial q}{\partial T} \right|_v = \left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_v \quad \text{spezifische Wärme bei konstantem Volumen,}$$

$$c_p = \left. \frac{\partial q}{\partial T} \right|_p = \left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_p + p \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_p \quad \text{spezifische Wärme bei konstantem Druck,}$$

$$\alpha = \frac{1}{v_0} \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_p \quad \text{Ausdehnungskoeffizient,}$$

$$\sigma = \frac{1}{p_0} \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v \quad \text{Spannungskoeffizient,}$$

$$\varepsilon = -v_0 \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_T \quad \text{Elastizitätskoeffizient} \quad \left( \frac{1}{\varepsilon} = \text{Kompressibilität} \right).$$

Beziehungen zwischen diesen sind u. a.  $\frac{p_0 \cdot \sigma}{\varepsilon \alpha} = 1$ ,

$$\begin{aligned} c_p - c_v &= T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v \cdot \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_p = T p_0 \cdot \sigma v_0 \alpha \\ &= -T \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_T \left( \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_p \right)^2 = T \cdot \varepsilon \cdot \alpha^2 v_0. \end{aligned}$$

Ferner gelten folgende Beziehungen:

$$s(p, T) = s_{0p} + \int_0^T \frac{c_p}{T} dT, \quad u(p, T) = u_{0p} + \int_0^T c_p dT - p \int_0^T \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_p dT,$$

$$s(v, T) = s_{0v} + \int_0^T \frac{c_v}{T} dT, \quad u(v, T) = u_{0v} + \int_0^T c_v dT.$$

### E. Prozesse.

Die Änderung der Zustandsvariablen eines Systems heißt ein *Prozeß*. Man unterscheidet:

$T = \text{const}$ : isothermer Prozeß,

$S = \text{const}$ : adiabatischer Prozeß,

$V = \text{const}$ : isochorer (isopykner) Prozeß,

$p = \text{const}$ : isobarer (isopiestic) Prozeß.

Die physikalische Realisierung dieser Bedingungen kann z. B. erfolgen:

1.  $T = \text{const}$  durch den Kontakt mit einem großen Wärmereservoir,
  2.  $S = \text{const}$  durch eine wärmeundurchlässige Umhüllung,
  3.  $V = \text{const}$  durch eine starre Umhüllung,
  4.  $p = \text{const}$  durch die Wirkung eines mit Gewicht belasteten Kolbens.
1. und 2. sind daher nicht vereinbar, ebensowenig 3. und 4.

*Kreisprozeß* heißt ein Prozeß, der nach beliebiger Änderung der Variablen zum Ausgangszustand zurückführt. Da weder  $da$  noch  $dq$  totale Differentiale sind, wird  $\Delta a = \oint da$  sowie  $\Delta q = \oint dq$  je einen bestimmten von 0 verschiedenen Wert haben. Andererseits ist  $\Delta u = \oint du = 0$ , also  $\Delta a = -\Delta q$ . Durch den Kreisprozeß ist Wärme in Arbeit (oder umgekehrt) „umgewandelt“ worden.

Wichtig ist folgender mit einem beliebigen System, z. B. einem idealen Gase durchgeführter Kreisprozeß (*CARNOT-Prozeß*) zwischen zwei Wärmereservoirien  $R_1$  und  $R_2$  mit den Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ):

1. adiabatische Expansion von  $T_1$  zu  $T_2$ ,
2. isotherme Kompression bei  $T_2$  (Kontakt mit  $R_2$ ),
3. adiabatische Kompression von  $T_2$  zu  $T_1$ ,
4. isotherme Expansion bei  $T_1$  zum ursprünglichen Volumen.

Da

$$\oint dS = \frac{\Delta Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q_2}{T_2} = 0$$

ist, wird hierbei eine Arbeit  $\Delta A$  gewonnen:

$$\Delta A = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 = \frac{\Delta Q_1 (T_1 - T_2)}{T_1} = \frac{\Delta Q_2 (T_2 - T_1)}{T_2},$$

wobei  $\Delta Q_1$  bzw.  $\Delta Q_2$  die den Reservoirien entnommenen Wärmemengen sind.

## F. Abgeschlossene Systeme.

Ein System heißt *vollständig* oder *abgeschlossen*, wenn sein Zustand unabhängig ist von den Vorgängen außerhalb von ihm. Daher sind  $V$  und  $M$  für ein abgeschlossenes System konstant. Ferner folgt die Konstanz auch von  $U$  aus dem 1. Hauptsatz.

Die Abgeschlossenheit eines Systems wird nicht berührt durch die Möglichkeit von äußeren Eingriffen, welche keine Veränderungen außerhalb hinterlassen, also speziell keine Energie erfordern, wie z. B. Betätigung von Sperrungen, Öffnen und Schließen von Ventilen oder Kontakten u. dgl. Ohne solche Eingriffe wäre ja jede Beeinflussung eines abgeschlossenen Systems unmöglich.

Ein Prozeß (eines vollständigen Systems) heißt *reversibel*, wenn er von außen rückgängig gemacht werden kann (ohne außerhalb Veränderungen zu hinterlassen), andernfalls *irreversibel*.

Bei einem reversiblen Prozeß bleibt  $S = \sum_i M_i s_i$  konstant. Bei einem irreversiblen wächst  $S$  (2. Hauptsatz).

Hat  $S$  den Maximalwert, der für das System durch Änderung der Variablen der Bestandteile (bei konstanter Gesamtenergie) erreichbar ist, so ist kein irreversibler Prozeß mehr möglich. Da reversible Prozesse in der Natur nie vollständig realisierbar sind, ist das System dann im *Gleichgewicht*.



Die allgemeinste Gleichgewichtsbedingung für abgeschlossene Systeme lautet also  $\delta S = 0$  ( $S = \text{Maximum}$ ).

Eine wichtige Methode, in einem abgeschlossenen System einen Prozeß reversibel zu führen, besteht darin, daß man zwischen zweien seiner Bestandteile eine Maschine einschaltet, in der man einen CARNOT-schen Kreisprozeß durchführt. Dann ist

$$\frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} = dS_1 + dS_2 = dS = 0. \quad (1)$$

(Die Maschine kann dabei beliebig klein angenommen werden, so daß sie gegen das übrige System verschwindet. Da in ihr definitiv keine Veränderung vor sich geht, kann sie auch als außerhalb des Systems betrachtet werden.) Die hierbei gewonnene Arbeit soll dann in irgendeiner Weise etwa durch Kompressionsarbeit oder über einen zweiten CARNOT-Strom dem übrigen System wieder zugeführt werden.

Eine einfache Betrachtung zeigt, daß jede Vorrichtung, die reversibel Wärme in Arbeit umwandelt (oder umgekehrt) dieselbe Beziehung zwischen  $dQ_1$ ,  $dQ_2$  und  $dA$  liefert wie die CARNOT-Maschine. Alle derartigen Prozesse, die reversibel verlaufen, sind daher durch die fiktive Einschaltung einer CARNOT-Maschine der Berechnung zugänglich.

Wichtige Vorgänge, die zu *Irreversibilität* Anlaß geben, sind:

1. Ausdehnung eines Gases ohne äußere Arbeit

$$\Delta S = \frac{R}{m} \frac{\Delta v}{v}$$

(für kleines  $\Delta v$  und ideales Gas).

2. Diffusion von Gasen, Salzen u. dgl.

$$\Delta S = \Delta M \cdot \frac{R}{m} \frac{\Delta p}{p}.$$

3. Wärmeleitung

$$\Delta S = \Delta Q \cdot \frac{\Delta T}{T^2}.$$

4. Reibungsarbeit

$$\Delta S = \frac{\Delta A}{T}.$$

Ein *nicht abgeschlossenes* System kann durch Hinzufügen der Umgebung zu einem abgeschlossenen gemacht werden. Werden die Zustandsvariablen der Umgebung durch einen Index bezeichnet, so ist bei einem Prozeß  $dS + dS' \geq 0$ . Wir nehmen an, daß in der Umgebung keine Vorgänge geschehen, die zu Irreversibilität führen (s. o.). Dann ist

$$dS' = \frac{dQ'}{T'}, \quad dQ = -dQ'$$

also

$$dS - \frac{dQ}{T'} \geq 0$$

$$dS - \frac{dU - dA}{T'} \geq 0, \tag{2}$$

anders geschrieben

$$dU - T' dS \leq dA. \tag{2'}$$

Spezialfälle:

1.  $dQ' = 0$  (adiabatischer Vorgang)

liefert  $dU = dA$ ,  $dS \geq 0$ .

2.  $T = \text{const}$  (isothermer Vorgang)

liefert  $dF = d(U - TS) \leq dA$  (freie Energie)<sup>1</sup>.

3.  $T$  und  $p = \text{const}$

liefert  $dA = -p dV$

$d\Psi = d(U - TS + pV) \geq 0$  (thermodynamisches Potential).

*Gleichgewichte* für unvollständige Systeme (in Verbindung mit der Umgebung) bestehen, wenn  $\delta S + \delta S' = 0$  ist, also

für adiabatisch abgeschlossene Systeme, wenn  $\delta S = 0$  (max)

für isotherm gehaltene Systeme, wenn  $\delta F = 0$  (min)

für isotherm-isobare Systeme, wenn  $\delta\Psi = 0$  (min)

ferner wenn  $S$  und  $V$  konstant bleiben  $\delta U = 0$  (min)

wenn  $S$  und  $p$  konstant bleiben  $\delta W = 0$  (min).

## G. Spezialfälle.

### 1. Ideale Gase.

Bei den sog. *idealen Gasen* sind zwei Zustände  $p_1, v_1$  und  $p_2, v_2$  im thermischen Gleichgewicht, wenn  $p_1 \cdot v_1 = p_2 \cdot v_2$  ist. Also kann nach (A 1) durch  $p \cdot v = \vartheta$  eine spezielle Temperaturskala  $\vartheta$  eingeführt werden. Bei den idealen Gasen ist ferner  $u$  nur von  $p \cdot v$  abhängig, also  $u = u(\vartheta)$ . Daher wird

$$dq = du + p dv = \vartheta \left[ \frac{u'}{\vartheta} d\vartheta + d \ln v \right] = \vartheta \cdot d \ln (\Theta \cdot v),$$

falls

$$\ln \Theta = \int \frac{u'}{\vartheta} \cdot d\vartheta$$

gesetzt wird, also

$$dq = \lambda d\varphi \quad \text{mit} \quad \lambda = \vartheta = p v, \quad \varphi = \ln (\Theta \cdot v).$$

<sup>1</sup>  $dF$  stellt also den Minimalbetrag der aufzuwendenden bzw. den Maximalbetrag der zu gewinnenden Arbeit dar, wenn das System einen isothermen Prozeß durchmacht. Hierauf beruht die Bedeutung von  $F$ .

$$\Delta A = \Delta F = \Delta(U - TS) = \Delta U - T \cdot \frac{\partial \Delta F}{\partial T} = \Delta U - T \frac{\partial \Delta A}{\partial T}$$

angewandt auf reversible, isotherme Prozesse heißt „HELMHOLTZsche Gleichung“.

Nach (B 7', S. 315) wird dann

$$T = C \cdot G(\vartheta) = C e^{\int \frac{\partial \ln \lambda}{\partial \vartheta} d\vartheta} = C \vartheta = C p v$$

die thermodynamische Temperatur. Sie ist also bei einem idealen Gas (bis auf eine Maßstabkonstante) identisch mit der „Gastemperatur“.

Für *ideale Gase* machen wir folgenden durch die Erfahrung gebotenen Ansatz:

$$p v = r T,$$

$$u = u_0 + a p v = u_0 + a r T,$$

Dann wird

$$\begin{aligned} dq &= T ds = du + p dv = (a + 1) p dv + a v dp \\ &= a r dT + \frac{a r T}{v} dv = (a + 1) r dT - \frac{r T}{p} dp, \end{aligned}$$

also

$$s = s_0 + a r \ln \left( v \frac{a+1}{a} p \right);$$

und die „spezifische Wärme“ bei konstantem Druck

$$\left. \frac{\partial q}{\partial T} \right|_p = (a + 1) r = c_p,$$

bei konstantem Volumen

$$\left. \frac{\partial q}{\partial T} \right|_v = a r = c_v,$$

und hieraus

$$c_p - c_v = r, \quad \frac{c_p}{c_v} = \frac{a+1}{a} = \gamma, \quad a = \frac{1}{\gamma-1}.$$

Aus  $p \cdot v = r T$  folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_0} \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_p &= \alpha = \frac{1}{v_0} \frac{r}{p} = \text{Ausdehnungskoeffizient,} \\ \frac{1}{p_0} \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v &= \sigma = \frac{1}{p_0} \frac{r}{v} = \text{Spannungskoeffizient,} \\ -v_0 \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_T &= \varepsilon = p = \text{Elastizitätskoeffizient.} \end{aligned}$$

Die Erfahrung (sowie die kinetische Theorie der Gase) ergibt, daß  $R = r m$ , wo  $m$  das *Molekulargewicht* des Gases bedeutet, eine *universelle Konstante* ist, die „Gaskonstante“

$$R = 1,98 \frac{\text{cal}}{\text{mol}} = 8,314 \cdot 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{mol}}.$$

Für einatomige Gase ergibt die Gastheorie  $a = \frac{3}{2}$ ,  $\gamma = \frac{5}{3}$ ,  
für zweiatomige Gase wird . . . . .  $a = \frac{5}{2}$ ,  $\gamma = \frac{7}{5}$ ,  
für drei- und mehratomige Gase wird. . .  $a = 3$ ,  $\gamma = \frac{4}{3}$ .

Also wird hier

$$p v = \frac{RT}{m}, \quad s = s_0 + \frac{aR}{m} \ln(v^\gamma p),$$

$$u = u_0 + \frac{aRT}{m}, \quad c_p = \frac{a\gamma \cdot R}{m}; \quad c_v = \frac{aR}{m},$$

oder

$$s = s'_0 + c_v \ln T + \frac{R}{m} \ln \frac{T}{p}, \quad s'_0 = s_0 + c_p \ln \frac{R}{m},$$

$$= s'_0 + c_p \ln T - \frac{R}{m} \ln p,$$

$$u = u_0 + c_v T,$$

$$f = (u_0 - T s_0) + c_v T (1 - \ln(v^\gamma p)),$$

$$\psi = (u_0 - T s_0) + T (c_p - c_v \ln(v^\gamma p)),$$

$$w = u_0 + c_p T.$$

## 2. Gemische idealer Gase.

Für einen Körper vom Volumen  $V$ , der Temperatur  $T$  und dem Druck  $p$ , der aus verschiedenen Molekülen  $m_i$  mit den Molzahlen  $n_i$  besteht, gelten einfache Verhältnisse nur, falls sich die Moleküle nicht gegenseitig beeinflussen, z. B. bei Gemischen idealer Gase.

Wir führen die Größen ein, die für jede Molekülart gelten würden, wenn diese allein anwesend wäre:

$$p_i = \frac{RT}{m_i} \frac{M_i}{V} = \frac{RT}{V} n_i \quad (\text{Partialdruck})$$

$$U_i = M_i (u_{0i} + c_{vi} T) = n_i m_i (u_{0i} + c_{vi} T)$$

$$S_i = n_i \left( m_i c_{vi} \ln T + R \ln \frac{T}{p_i} + k_i \right).$$

Es gilt<sup>1</sup>

$$p = \sum_i p_i = \frac{RT}{V} \sum_i n_i \quad (\text{DALTONSches Gesetz})$$

$$U = \sum_i U_i$$

$$S = \sum_i S_i \quad (\text{GIBBSsches Paradoxon}).$$

Daraus folgt

$$p_i = \frac{p \cdot n_i}{\sum n} = p c_i$$

$$c_i = \frac{n_i}{\sum n_i} \text{ heißt molare Konzentration.}$$

<sup>1</sup> Diese Gesetze folgen nicht unmittelbar aus der Thermodynamik, sondern erfordern atomistische Hilfvorstellungen.

**Entropiezunahme bei Mischung.**

Zwei ideale Gase mit den Molzahlen  $n_1$  und  $n_2$ , beide mit gleichem  $p$  und  $T$  nebeneinander liegend, haben insgesamt die Entropie

$$S = n_1 \left( c_{v_1} m_1 \ln T + R \ln \frac{T}{p} + k_1 \right) + n_2 \left( c_{v_2} m_2 \ln T + R \ln \frac{T}{p} + k_2 \right).$$

Tritt nach Wegnahme ihrer Scheidewand eine Diffusion ein, welche zu den Partialdrucken

$$p_1 = c_1 p, \quad p_2 = c_2 p \left( c_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2}, \quad c_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2} \text{ Konzentrationen} \right)$$

führt, so wird die Entropie nach Beendigung der Diffusion

$$S = n_1 \left( c_{v_1} m_1 \ln T + R \ln \frac{T}{p_1} + k_1 \right) + n_2 \left( c_{v_2} m_2 \ln T + R \ln \frac{T}{p_2} + k_2 \right).$$

Die Entropieänderung beträgt also

$$-n_1 R \cdot \ln \frac{p_1}{p} - n_2 R \ln \frac{p_2}{p} = -n_1 R \ln c_1 - n_2 R \ln c_2 > 0.$$

**3. Hohlraumstrahlung** (vgl. S. 309 f.).

Für einen *mit Strahlung erfüllten Hohlraum* vom Volumen  $V$  gilt, wenn man  $U = uV$  setzt und  $S = sV$ , wo  $u$  die Energie und  $s$  die Entropie pro *Volumeneinheit* bedeutet:

$$dS = \frac{dU + p dV}{T}.$$

Da hier nach der MAXWELLSchen Theorie  $u = 3p$  wird, so ist

$$dS = d(sV) = s dV + V ds = \frac{3V dp + 4p dV}{T},$$

also

$$ds = \frac{3 dp}{T}, \quad s = \frac{4p}{T},$$

und daher

$$T = \text{const} \cdot p^{\frac{1}{4}}, \\ U = 3pV = \sigma T^4 V$$

(STEFAN-BOLTZMANN'Sches Gesetz),

$$\left( \sigma = 7,624 \cdot 10^{-15} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{grad}^4} \right),$$

$$S = \frac{4}{3} \sigma T^3 V, \quad F = -\frac{1}{3} \sigma T^4 V, \quad \Psi = 0, \quad W = \frac{4}{3} \sigma T^4 V.$$

**H. Zustandsgleichung.**

Für einen homogenen Stoff bestimmen zwei der Variablen  $p$ ,  $v$ ,  $T$  die dritte. Dieser Zusammenhang wird durch die *Zustandsgleichung* des Stoffes festgelegt:  $p = p(v, T)$ ,  $v = v(p, T)$  usw.

Hierdurch ist aber das thermodynamische Verhalten des Stoffes nur teilweise gekennzeichnet. Zur Vervollständigung ist eine weitere Gleichung erforderlich z. B. der Form:  $s = s(v, T)$ . Meist wird statt dessen  $c_v$  als Funktion von  $T$  und  $v$  angegeben.

*Kritischer Punkt* heißt der Zustand, in dem

$$\left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_T = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right|_T = 0$$

ist. Die dort geltenden Variablen  $p_1, T_1, v_1$  heißen *kritischer Druck*, *kritische Temperatur* und *kritisches Volumen*.

Führt man als neue Variablen die Größen

$$v = \frac{v}{v_1}, \quad \pi = \frac{p}{p_1}, \quad \tau = \frac{T}{T_1}$$

ein, so heißen diese *reduzierte Zustandsdaten*. Die *reduzierte Zustandsgleichung*  $\pi = \pi(v, \tau)$  ist für die meisten Substanzen nahezu gleich. (Das ist streng nur möglich, wenn die Zustandsgleichung nur drei für den Stoff charakteristische Konstanten enthält.)

Für hinreichend hohe Temperaturen nähert sich die Zustandsgleichung aller Stoffe der der idealen Gase  $p v = \frac{RT}{m}$  ( $m$  = Molekulargewicht,  $R$  = Gaskonstante). Nach VAN DER WAALS läßt sich durch die Gleichung

$$\left( p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = \frac{RT}{m}$$

die Zustandsgleichung aller Stoffe für größere Bereiche angenähert darstellen.

Gilt diese Gleichung streng, so wird

$$v_1 = 3b, \quad p_1 = \frac{a}{27b^2}, \quad T_1 = \frac{8}{27} \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{R}$$

also

$$a = 3\pi v^2, \quad b = \frac{v}{3}; \quad m = \frac{3}{8} \frac{R\tau}{\pi v}.$$

Die reduzierte Zustandsgleichung lautet dann

$$\left( \pi + \frac{3}{v^2} \right) (3v - 1) = 8\tau.$$

BOYLE-Punkt heißt die Temperatur  $T_B$ , bei der  $\left( \frac{\partial(pv)}{\partial p} \right)_T = 0$  ist.

*Inversionspunkt* heißt die Temperatur  $T_y$ , bei der  $T \frac{\partial v}{\partial T} \Big|_p - v = 0$  ist. Es ist angenähert  $T_y = 2 T_B = \frac{2am}{Rb}$ . Ist  $T$  größer als  $T_y$ , so liefert eine Expansion ohne Arbeitsleistung eine Erwärmung, ist  $T$  kleiner als  $T_y$ , eine Abkühlung.

Für ein VAN DER WAALS-Gas gelten folgende Formeln:

$$1. \quad c_p - c_v = \frac{R}{m} \left( 1 + \frac{2a(v-b)}{p v^3 - a v + 2ab} \right)$$

$$2. \quad ds = c_v \frac{dT}{T} + \frac{R}{m} \frac{dv}{v-b}$$

$$3. \quad du = c_v dT + a \frac{dv}{v^2}$$

und unter Voraussetzung von konstantem  $c_v$

$$s = s_0 + c_v \ln T + \frac{R}{m} \ln(v-b)$$

$$u = u_0 + c_v T - \frac{a}{v}$$

$$f = (u_0 - T s_0) + c_v T (1 - \ln T) - \frac{RT}{m} \ln(v-b) - \frac{a}{v}$$

$$\psi = (u_0 - T s_0) + T \left( c_v + \frac{R}{m} \frac{v}{v-b} - c_v \ln T \right) - \frac{RT}{m} \ln(v-b) - \frac{2a}{v}$$

$$w = u_0 + \left( c_v + \frac{R}{m} \frac{v}{v-b} \right) T - \frac{2a}{v}.$$

## J. Spezielle Gleichgewichte.

Spezialfälle für *vollständige* Systeme ( $\delta U = 0$ ,  $\delta V = 0$ ,  $\delta S = 0$ ,  $\delta M = 0$ ).

1. Die  $M_i$  seien konstant, realisierbar durch Umhüllung jedes Bestandteils mit einer wärmedurchlässigen, nichtstarrten Hülle.

Es folgt

$$T_1 = T_2 = T_3 = \dots = T_i$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_i.$$

Hierauf beruht die Möglichkeit, mit Probekörpern (*Thermometer* und *Manometer*) Temperatur und Druck beliebiger Stoffe zu messen.

2. Die  $M_i$  und  $v_i$  seien konstant; realisierbar durch wärmedurchlässige starre Umhüllungen.

Es folgt

$$T_1 = T_2 = T_3 = \dots = T_i.$$

3. Die  $s_i$  und  $M_i$  seien konstant, realisierbar durch Umhüllung jedes Bestandteils durch eine wärmedurchlässige, nichtstarre Hülle.

Es folgt

$$p_1 = p_2 = \dots = p_i.$$

4. Die  $M_i$  seien nicht konstant, sondern nur  $M$ . Die einzelnen Körper (Phasen) können in ihrer Menge sich ändern (Verdampfung usw.).

Es folgt

$$T_1 = T_2 = \dots = T_i$$

$$p_1 = p_2 = \dots = p_i$$

$$\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_i.$$

$p$  und  $T$  bestimmen sich hier gegenseitig eindeutig, solange mehrere nichtidentische Bestandteile existieren.

Da  $S$  ein Maximum sein muß, ist

$$\delta^2 S = - \sum_i \left( M_i c_{vi} \delta T_i^2 + \frac{\partial p_i}{\partial v_i} \Big|_T \delta v_i^2 \right) < 0.$$

Besteht das System nur aus zwei Bestandteilen 1 und 2 und geht man von einem Gleichgewichtszustand zu einem anderen über, bei dem  $T$  zu  $T + dT$ ,  $p$  zu  $p + dp$  wird, so ist

$$d\psi_1 - d\psi_2 = 0 = -(s_1 - s_2) dT + (v_1 - v_2) dp,$$

also

$$s_1 - s_2 = (v_1 - v_2) \frac{dp}{dT}.$$

Bei einer Umwandlung unter konstantem Druck und Temperatur aus einem Gleichgewichtszustand in einen anderen (Verdampfung usw.) ist eine Wärmezufuhr  $\Delta Q = T \Delta S$  erforderlich. Wird hierbei die Menge  $M$  aus dem Zustand  $s_1 v_1 p T$  in den Zustand  $s_2 v_2 p T$  umgewandelt, so ist

$$\Delta Q = T \cdot M (s_1 - s_2).$$

$\frac{\Delta Q}{M} = r$  heißt *Umwandlungswärme*. Es folgt

$$r = T (s_1 - s_2) = (v_1 - v_2) T \frac{dp}{dT} \quad (\text{CLAUSIUS-CLAPEYRONsche Gleichung})^1.$$

## K. Phasentheorie.

Es seien  $\alpha$  verschiedene Bestandteile („Komponenten“) in den voneinander unabhängigen Mengen  $M_i$  gegeben, die sich zu Verbindungen<sup>2</sup> vereinigen können. Von diesen sollen eine Anzahl  $\beta$  gleichzeitig nebeneinander existieren (Phasen), deren Mengen  $M^k$  seien.

In der  $k$ -ten Phase sei die Menge  $M_i^k$  des  $i$ -ten Stoffes enthalten. Es ist also

$$M_i = \sum_k M_i^k, \quad M^k = \sum_i M_i^k \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, \alpha \\ k = 1, 2, \dots, \beta. \end{array} \right.$$

Der Gleichgewichtszustand ist abhängig von den Variablen  $p$  und  $T$ , sowie den Zusammensetzungen der Phasen, etwa dargestellt durch die

<sup>1</sup> Falls  $v_1 = 0$  gesetzt werden kann (Flüssigkeit)

und  $v_2 = \frac{RT}{pm}$  gesetzt werden kann (Dampf),

gilt  $r = - \frac{RT^2}{m} \frac{d \ln p}{dT}$ .

<sup>2</sup> Jede Verbindung hat ihre eigene Zustandsgleichung.



Gehalte  $c_i^k = \frac{M_i^k}{M^k}$  ( $\alpha \cdot \beta$  Größen), zwischen denen die Relationen  $\sum_i c_i^k = 1$  ( $\beta$  Gleichungen) bestehen. Er ist nicht abhängig von der Menge einer Phase.

Wenn  $p$  und  $T$  gegeben sind, lautet die Gleichgewichtsbedingung  $\delta\Psi = 0$ .

Setzt man  $\Psi = \sum_k \Psi^k$ , dann ist  $\Psi^k$  eine homogene Funktion 1. Grades der  $M_i^k$ , denn bei Vermehrung aller  $M_i^k$  einer Phase um den gleichen Faktor wächst  $\Psi^k$  auch um diesen Faktor<sup>1</sup>. Es ist also nach dem EULERSCHEN Satz (s. S. 34):

$$\Psi^k = \sum_i \frac{\partial \Psi^k}{\partial M_i^k} M_i^k, \quad (1)$$

worin  $\frac{\partial \Psi^k}{\partial M_i^k}$  nicht von den  $M_i^k$ , sondern außer von  $p$  und  $T$  nur von den  $c_i^k$  abhängt. Daraus folgt

$$\delta\Psi = \sum_k \delta\Psi^k = \sum_k \sum_i \frac{\partial \Psi^k}{\partial M_i^k} \delta M_i^k = 0. \quad (2)$$

Dazu treten die Nebenbedingungen  $\delta M_i = \delta \sum_k M_i^k = 0$ .

Daraus folgen die  $\alpha(\beta-1)$  Gleichungen

$$\frac{\partial \Psi^1}{\partial M_i^1} = \frac{\partial \Psi^2}{\partial M_i^2} = \dots \quad (3)$$

Im ganzen hat man also  $\beta + \alpha(\beta-1)$  Gleichungen für die  $\alpha \cdot \beta + 2$  Größen  $c_i^k, p, T$ .

Damit eine Lösung möglich ist, muß  $\beta + \alpha(\beta-1) \leq \alpha\beta + 2$  sein, d. h.  $\beta \leq \alpha + 2$  (*Phasenregel von GIBBS*).

### L. Massenwirkungsgesetz.

Ein Gemisch idealer Gasmoleküle, welche ineinander umgewandelt werden können (Beispiel  $H_2, J_2, HJ$ ) und mit den Molzahlen  $n_i$ , also den (molaren) Konzentrationen

$$c_i = \frac{n_i}{n_1 + n_2 + \dots}, \quad \sum c_i = 1$$

vertreten sind, möge bei der Temperatur  $T$  und dem Druck  $p$  im Gleichgewicht sein.

Bei Variation der  $n_i$ , aber konstantem  $p$  und  $T$  unter Berücksichtigung von  $\sum c_i = 1$  ist die Gleichgewichtsbedingung

$$\begin{aligned} \delta\Psi &= 0, & \sum \delta c_i &= 0, \\ \sum (\varphi_i - R \ln c_i) \delta n_i &= 0, \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Weil keine Veränderungen im übrigen System eintreten, da das Gleichgewicht nicht geändert wird.

wenn wir unter  $\varphi_i$  den Ausdruck:

$$\varphi_i = \frac{m_i u_i}{T} - m_i c_{v_i} \ln T - R \cdot \ln \frac{T}{p} + R$$

verstehen, oder anders geschrieben

$$c_1^{\delta n_1} \cdot c_2^{\delta n_2} \dots = e^{(\varphi_1 \delta n_1 + \varphi_2 \delta n_2 + \dots)/R}. \quad (1)$$

Darin hängt die rechte Seite nur von  $p$  und  $T$  ab. Setzt man also  $\delta n_i = \nu_i \cdot z$ , wo  $z$  irgendein Faktor zur Reduktion der Zahlen  $\delta n_i$  auf möglichst kleine ganze Zahlen  $\nu_i$  ist, so wird

$$c_1^{\nu_1} \cdot c_2^{\nu_2} \dots = K(T, p) \quad (\text{Massenwirkungsgesetz}). \quad (2)$$

Beispiel. Dissoziation von Jodwasserstoff.

Drei Moleküllarten  $n_1 HJ$ ,  $n_2 H_2$ ,  $n_3 J_2$ .

Je zwei Moleküle  $HJ$  gehen in ein Molekül  $H_2$  und ein  $J_2$  über, also  $\nu_1 = -2$ ,  $\nu_2 = 1$ ,  $\nu_3 = 1$

$$\frac{c_2 c_3}{c_1^2} = \frac{n_2 n_3}{n_1^2} = K(T, p).$$

Falls die Gesamtzahl der idealen Gasmoleküle unverändert bleibt ( $\nu_1 + \nu_2 + \dots = 0$ ), zeigt sich, daß  $K$  nur von  $T$  abhängt.

## M. Dritter Hauptsatz der Thermodynamik.

(NERNST'sches Wärmetheorem.)

Die Zustandsvariablen  $p$ ,  $v$ ,  $T$  sind ohne weiteres bestimmbar, die  $s$ ,  $u$ ,  $w$  nur bis auf eine additive Konstante, die  $f$  und  $\psi$  nur bis auf eine lineare Funktion der Temperatur (vgl. S. 317 und 326).

Die Berechnung von Gleichgewichten wird durch die Unbestimmtheit der additiven Konstanten nicht berührt, wohl aber durch den nichtbestimmbaren Faktor von  $T$  in  $f$  und  $\psi$ .

Diese Schwierigkeit wird behoben durch den von NERNST aufgestellten Satz (in der Fassung von PLANCK):

Beim absoluten Nullpunkt  $T=0$  besitzt die Entropie für alle thermodynamischen Systeme ein und denselben nichtunendlichen Wert, der gleich 0 gesetzt werden kann:  $S_{T=0} = 0$ .

Dann sind alle Zustandsvariablen bis auf eine Konstante berechenbar. Es wird (unter Fortlassung der Konstanten) wegen<sup>1</sup>

$$\left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_p = \frac{C_p}{T}$$

$$S = \int_0^T \frac{C_p dT}{T} \quad (\text{Integration bei konstantem Druck}). \quad (1)$$

<sup>1</sup>  $C_p$  bedeutet hier  $M c_p$  (Wärmekapazität), analog  $C_v = M c_v$ .

Damit  $S_{T=0}$  endlich bleibt, muß gelten

$$\lim_{T=0} C_p = 0.$$

Wegen

$$\left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_v = \frac{C_v}{T}$$

wird

$$S = \int_0^T \frac{C_v dT}{T} \quad (\text{Integration bei konstantem Volumen}), \quad (2)$$

also

$$\lim_{T=0} C_v = 0.$$

Ferner wird bis auf eine belanglose Konstante

$$U = \int_0^T C_v dT \quad \text{bzw.} \quad U = \int_0^T C_p dT \quad (3)$$

$$F = U - TS = -T \int_0^T \frac{U}{T^2} dT. \quad (4)$$

Eventuell sind in diesen Formeln noch Umwandlungswärmen zu berücksichtigen.

Es folgen weiter noch folgende Grenzwerte:

Wegen

$$\left. \frac{\partial C_p}{\partial p} \right|_T = -T \left. \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \right|_p$$

und

$$\left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p = - \left. \frac{\partial S}{\partial p} \right|_T$$

wird ferner

$$\left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p = - \int_0^T \frac{1}{T} \left. \frac{\partial C_p}{\partial p} \right|_T dT = \int_0^T \left. \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \right|_p dT = \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p \Big|_0^T$$

also

$$\lim_{T=0} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p = 0.$$

Wegen

$$S = - \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_v$$

ist

$$\lim_{T=0} \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_v = -S_{T=0}$$

für alle festen und flüssigen Phasen gleich. Bedeutet demnach  $F_1 - F_2 = A_{12}$  die bei der isothermen Umwandlung der Phase 1 in die Phase 2 maximal gewinnbare Arbeit, so ist

$$\lim_{T=0} \left. \frac{\partial A_{12}}{\partial T} \right|_{v_1, v_2} = 0.$$

Der 3. Hauptsatz gilt unbedingt für die feste und flüssige Phase, dagegen nicht ohne weiteres für *gasförmige* Stoffe. Speziell wird für *ideale Gase*

$$S = C_p \ln T - \frac{MR}{m} \ln p + k$$

(also nicht = 0 für  $T = 0!$ ), ferner

$$\Psi = U - TS + pV = T \left( \frac{MR}{m} \ln p - C_p \ln T - C_p - k \right),$$

$$i = \frac{m}{M} (C_p + k) \quad \text{heißt } \textit{chemische Konstante}.$$

Ist  $i$  bekannt, so sind auch für die Gase alle Zustandsvariablen angebar.

Die chemische Konstante des betreffenden Gases ist vollkommen bestimmt und meßbar, wenn ein Weg gefunden wird, das ideale Gas auf reversiblen Wege in den festen oder flüssigen Zustand überzuführen.

Damit sind dann alle Zustandsvariablen aus thermischen Daten bestimmt und alle Gleichgewichte theoretisch berechenbar.

Die Behauptung des 3. Hauptsatzes ist, daß entweder alle Gase bei Annäherung an den absoluten Nullpunkt Abweichungen von den klassischen Gesetzen zeigen (*Gasentartung*), oder aber daß jedes Gas bei fortschreitender Abkühlung in eine flüssige oder feste Phase übergeht.

Sechster Abschnitt.

## Statistische Methoden.

Im Gegensatz zur Mechanik, Elektrodynamik usw. ist die Statistik nicht so sehr ausgezeichnet durch den Gegenstand als vielmehr durch die *Methode* ihrer Betrachtungen. Sie läßt sich immer dann anwenden, wenn eine *große Anzahl gleichartiger* physikalischer Systeme vorliegt, die ihrerseits die Gesetze der Mechanik usw. erfüllen, um Fragen zu beantworten, die das mittlere Verhalten der Gesamtheit dieser Systeme betreffen.

### A. Diskrete Zustände.

#### 1. Allgemeines.

##### a) Der einzelne Zustand.

Jeder Zustand  $r$  eines quantenmechanischen Systems (z. B. Oszillators, Atoms) wird beschrieben durch seine Energie  $E_r$  und seine Eigenfunktion  $u_r$  (Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung). Gehören zu dem gleichen Eigenwert mehrere verschiedene Eigenfunktionen (Quantenzahlen), so

heißt die Vielfachheit des Eigenwertes  $E_r$ , sein *statistisches Gewicht*. Einfache Eigenwerte haben daher stets das statistische Gewicht 1.

Die Energie hängt ab von einer Reihe Parameter, die teils kontinuierlich veränderlich, teils nur diskreter Werte fähig sind.

### b) Übergangswahrscheinlichkeit.

Zwischen zwei Zuständen  $r$  und  $s$  kann ein Übergang stattfinden. Die Wahrscheinlichkeit, daß das System aus dem Zustand  $r$  in der Zeiteinheit in den Zustand  $s$  übergeht, heißt die *Elementarwahrscheinlichkeit des Überganges*. Es ist

$$w_{sr} = w_{rs}.$$

### c) LIUVILLEScher Satz.

Zur Zeit  $t_0$  sei der Zustand des Systems  $r_0$ . Dann mögen die von  $r_0$  aus direkt oder auf Umwegen erreichbaren Zustände  $s$ , die unerreichbaren  $\sigma$  heißen. Es ist also  $w_{s\sigma} = 0$ . Zu einer späteren Zeit  $t$  besteht dann für einen beliebigen Zustand  $s$  eine gewisse Wahrscheinlichkeit  $w(s, t)$  und im Limes gilt für sehr lange Zeiträume

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(s, t) = \frac{1}{n},$$

wenn  $n$  die Anzahl der von  $r_0$  aus erreichbaren Zustände ist. Der Satz kann auch in der Form ausgesprochen werden: Die Aufenthaltsdauer des Systems in einem Zustand ist im Mittel über sehr lange Zeiträume für alle Zustände die gleiche.

### d) Ergodisches System.

Die Energie eines quantenmechanischen Systems ist nur definiert bis auf eine Unschärfe  $\Delta E$  mit  $\Delta E \Delta t = h/2\pi$ . In einem „abgeschlossenen“ System gilt der Energiesatz also nur bis auf diese Unschärfe<sup>1</sup>; alle erreichbaren Zustände müssen innerhalb  $\Delta E$  liegen. Das System heißt *ergodisch*, wenn in  $\Delta E$  *nur* erreichbare Zustände liegen.

### e) Phasenvolumen $J$ .

$J = J(E; a_1, a_2, \dots)$  ist die Anzahl der Energieeigenwerte  $E_r \leq E$ , jeder multipliziert mit seinem statistischen Gewicht. Es hängt ebenso wie die Energie von einer Reihe äußerer Parameter  $a_k$  ab.

### f) Der adiabatischen Änderung

eines Parameters  $a_k$  wirkt die Kraft entgegen

$$A_k^{(r)} = - \frac{\partial E_r}{\partial a_k}.$$

<sup>1</sup> Der Beobachter ist hier nicht mit zum System gerechnet; das System ist also *strenggenommen nicht* abgeschlossen und eben daher rührt die Unschärfe.

Führen wir die Änderung so langsam aus, daß selbst während einer unendlich kleinen Änderung von  $a_k$  das System noch sehr viele Quantensprünge macht, also jeden erreichbaren Zustand aufsucht, so wird

$$\bar{A}_k = \frac{1}{n} \sum_s A_k^{(s)}, \quad \text{und} \quad dE = - \sum_k \bar{A}_k da_k.$$

$J$  ist gegenüber einem solchen Prozeß invariant; der Prozeß heißt *adiabatisch reversibel*.

**g) Zustandsgrößen.**

Bei einem Prozeß ändert sich das Phasenvolumen um

$$dJ = \frac{\partial J}{\partial E} \left( dE + \sum_k \bar{A}_k da_k \right) = \frac{\partial J}{\partial E} dQ.$$

$dQ$  ist die Energiezufuhr und i. a. kein vollständiges Differential,  $\frac{\partial J}{\partial E}$  also integrierender Faktor. Wir bezeichnen

$$S = k \ln J \quad (k = 1,37 \cdot 10^{-16} \text{ erg/grad})$$

als *Entropie* des Systems und

$$T = \frac{J}{k} \frac{\partial E}{\partial J} = \frac{1}{k} \frac{\partial E}{\partial \ln J}$$

als seine *absolute Temperatur*.

**2. Thermodynamisches Gleichgewicht.**

Wir betrachten eine Gesamtheit von  $N \gg 1$  Systemen.  $N_r$  sei die Anzahl der Systeme im Zustand  $r$ .

Der Übergang eines Systems in einen Zustand anderer Energie ist nur möglich unter gleichzeitiger Änderung des Zustandes mindestens *eines* zweiten Systems. Die Zahl der Prozesse  $r \rightarrow r'$  und gleichzeitig  $s \rightarrow s'$  ist in der Zeiteinheit

$$w_{r's}^{r's'} N_r N_s.$$

Die Zahl der inversen Prozesse  $r' \rightarrow r$  und  $s' \rightarrow s$  ist

$$w_{r's'}^{r's} N_{r'} N_{s'},$$

unter gleichzeitiger Wahrung des Energiesatzes

$$E_r + E_s = E_{r'} + E_{s'}.$$

Diese Formeln gelten mit

$$w_{r's}^{r's'} = w_{r's'}^{r's},$$

nur dann, wenn die Übergangswahrscheinlichkeit nicht auch von dem Zustande der Besetzung des Zielzustandes abhängt (vgl. dagegen C S. 341). Es ist

$$\frac{dN_r}{dt} = \sum_{r's's'} w_{r's}^{r's'} (N_{r'} N_{s'} - N_r N_s).$$

Stationäre Verhältnisse liegen dann und nur dann vor, wenn rechts die Klammer verschwindet („thermodynamisches Gleichgewicht“):

$$N_r N_s = N_{r'} N_{s'}.$$

Das ist der Fall, wenn  $\ln N_r$  eine lineare Funktion von  $E_r$  wird:

$$N_r = e^{\alpha - \beta E_r} \quad (\text{kanonische Verteilung}).$$

Die konstante Gesamtzahl der Systeme ist

$$N = \sum_r N_r = e^\alpha Z,$$

wobei

$$Z = \sum_r e^{-\beta E_r}$$

die Zustandssumme heißt. Also ist

$$N_r = \frac{N}{Z} e^{-\beta E_r}.$$

Aus  $Z$  folgt die Energie der Gesamtheit

$$\frac{d \ln Z}{d \beta} = -\frac{1}{N} \sum_r E_r N_r = -\frac{E}{N}.$$

Entropie: Wir definieren die Entropie durch

$$S = k \ln W,$$

wobei die Größe

$$W = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots} = \frac{N!}{\prod_r N_r!}$$

die *statistische Wahrscheinlichkeit* des durch die Gesamtheit aller  $N_r$  beschriebenen Zustandes heißt. Da alle  $N_r \gg 1$  sind, kann man nach der STIRLINGSchen Formel schreiben

$$S = k N \ln N - k \sum_r N_r \ln N_r,$$

oder

$$S = k N \ln Z + k \beta E.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d S}{d t} &= -k \sum_r \frac{d N_r}{d t} (\ln N_r + 1) = \\ &= \frac{k}{4} \sum_{r r'} \sum_{s s'} w_{s' r'}^s (N_{r'} N_{s'} - N_r N_s) \ln \frac{N_{r'} N_{s'}}{N_r N_s} \geq 0, \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit der thermodynamischen Definition der Entropie (vgl. S. 319).

Temperatur: Um aus  $S$  und  $E$  die Temperatur zu definieren, benutzen wir die thermodynamische Relation (vgl. S. 316, Gleichung 11)

$$\left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_V = \frac{1}{T}.$$

Es ist bei konstantem  $N$ :

$$\frac{dS}{dE} = \frac{\partial S}{\partial E} + \left( \frac{\partial S}{\partial \beta} + \frac{\partial S}{\partial Z} \frac{dZ}{d\beta} \right) \frac{\partial \beta}{\partial E} = k\beta + \left( kE + k \frac{N}{Z} \frac{dZ}{d\beta} \right) \frac{\partial \beta}{\partial E}.$$

Wegen  $d \ln Z/d\beta = -E/N$  verschwindet die Klammer und es wird

$$k\beta = \frac{1}{T} \quad \text{oder} \quad \beta = \frac{1}{kT}.$$

Das zugehörige Verteilungsgesetz

$$N_r = \frac{N}{Z} e^{-E_r/kT}$$

heißt das **BOLTZMANNsche Verteilungsgesetz**.

Die Kenntnis der Zustandssumme genügt zur Berechnung aller thermodynamischen Grundfunktionen:

$$\text{freie Energie:} \quad F = -kT \ln Z$$

$$\text{innere Energie:} \quad U = -\frac{d \ln Z}{d\beta} \quad \text{usw.}$$

## B. Statistische Mechanik.

### 1. Klassische Mechanik.

Die  $6N$  Koordinaten  $x^i$  und Impulse  $p_i$  definieren den Zustand eines aus  $N$  Massenpunkten zusammengesetzten Systems. Benutzt man diese Größen als kartesische Koordinaten, so veranschaulichen sie den Lage- und Bewegungszustand des Systems zur Zeit  $t$  durch einen Punkt („Phasenpunkt“) in einem  $6N$ -dimensionalen Raum („Phasenraum“). Dem System kommt eine gewisse HAMILTON-Funktion  $H(x^i, p_i)$  zu, welche die kanonischen Gleichungen befriedigt:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}.$$

Eine Gesamtheit aus solchen Systemen heißt eine *mikrokanonische Gesamtheit*. Die zeitliche Änderung des Systems wird dann durch eine Kurve im Phasenraum beschrieben. Die Kurve geht durch jeden Punkt des Phasenraumes in *einer* Richtung, kann sich also nicht selbst schneiden.

In der statistischen Mechanik betrachtet man eine große Zahl solcher Systeme, die durch die gleiche Funktion  $H$  beschrieben werden. Die Gesamtheit der betrachteten Systeme wird im Phasenraum also dargestellt durch eine (sehr große) Anzahl von Phasenpunkten. Man kann diese dann als ein strömendes Kontinuum auffassen, für dessen  $6N$ -dimensionale Geschwindigkeit  $v$  mit den Komponenten  $(\dot{x}^i, \dot{p}_i)$  gilt:  $\text{div } v = 0$ . Erfüllt eine Anzahl Punkte also zur Zeit  $t=0$  ein gewisses Volumen des Phasenraumes, so erfüllt sie zu einer beliebigen anderen Zeit  $t=t$  ein ebenso großes. (LIOUVILLEScher Satz der klassischen Statistik).



Ist die Verteilungsdichte  $\varrho$  der Phasenpunkte eine Funktion von  $H$  allein, so wird  $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$  und die Strömungsrichtung fällt überall in die Hyperflächen  $H = \text{constans}$  ( $= E$ ). (*Statistisches Gleichgewicht.*) Analog zu A 2 kann man zeigen, daß dann

$$\varrho = N \cdot e^{-\frac{F-E}{kT}}$$

ist, wo  $N = \int \varrho d\omega dV$  die Zahl der die Gesamtheit bildenden Systeme ( $d\omega dV = \text{Volumenelement des Phasenraumes}$ ),  $T$  die gemeinsame Temperatur,  $k = 1,37 \cdot 10^{-16}$  erg/grad die BOLTZMANNsche Konstante und  $F$  die freie Energie bedeutet. Definiert man analog zu oben

$$Z = \int e^{-E/kT} d\omega dV$$

als *Zustandsintegral*, so gilt ebenfalls

$$F = -kT \ln Z \quad \text{usw.}$$

Besteht die Gesamtheit speziell aus *abgeschlossenen Systemen*, so ist die Bewegung der Phasenpunkte auf die Hyperfläche  $H(x^i, p_i) = E = \text{constans}$  beschränkt. Man kann dann neben der konstanten „räumlichen“ Dichte  $\varrho$  die „Flächendichte“

$$\sigma = \frac{\text{const}}{|\text{grad } H|_{H=E}}$$

definieren. Ein abgeschlossenes System heißt *ergodisch*, wenn in einer beliebig langen Zeit der Phasenpunkt jedem Punkt der Hyperfläche beliebig nahe kommt. In diesem Falle verlangt der LIOUVILLESche Satz, daß die Aufenthaltsdauer der Phasenpunkte im Mittel über lange Zeiträume in gleich großen Flächenteilen proportional der Flächendichte wird.

## 2. Zelleneinteilung des Phasenraumes.

### a) Zustand.

Wir bezeichnen ein System als *im Zustand*  $(p_i, x^i)$  *befindlich*, wenn seine Koordinaten zwischen den Werten  $x^i$  und  $x^i + dx^i$  und seine Impulse zwischen  $p_i$  und  $p_i + dp_i$  liegen, d. h. wenn das System in das Volumenelement  $dV d\omega = dx^1 dx^2 \dots dp_1 dp_2 \dots$  des Phasenraumes fällt. Wir setzen über die Größe des Volumenelementes zunächst nichts voraus.

### b) Das statistische Gewicht

des Zustandes ist proportional dem zugehörigen Volumenelement des Phasenraumes

$$g_r = \frac{1}{h^3 N} dx^1 dp_1 dx^2 dp_2 \dots dx^3 N dp_3 N.$$

Dabei bedeutet  $h$  eine zunächst willkürliche Konstante von der Dimension einer Wirkung (erg sec).

**c) Die Übergangswahrscheinlichkeit**

aus der Phasenraumzelle  $d\omega dV$  nach der Zelle  $d\omega' dV'$  ist proportional deren Volumen

$$w = W(x^i, p_i; x'^i, p'_i) d\omega' dV'.$$

Für den inversen Prozeß gilt

$$w = W(x'^i, p'_i; x^i, p_i) d\omega dV.$$

**d) Die Quantentheorie**

fordert eine *endliche bestimmte Größe* für die hier eingeführten Volumenelemente. Sie sollen das Volumen  $h^{3N}$  haben und sodann alle das gleiche statistische Gewicht besitzen.  $h$  hat dabei den Wert  $h = 6,55 \cdot 10^{-27}$  erg sec. Die *Gestalt* der Zellen ist beliebig. Man erhält in diesem Falle wieder die in Abschnitt A dargestellte Theorie, aus der die in Abschnitt B 1 behandelte als Grenzfall für  $h=0$  folgt. Der Zustand eines Systems ist in der Quantentheorie nicht mehr exakt beschrieben, sondern nur bis auf eine *Unsicherheit*

$$\Delta p_i \Delta x^i = h \quad (\text{HEISENBERGSche Unschärferelation}).$$

**3. Das kinetische Modell des idealen Gases.****a) Das Modell.**

Ein Gas besteht aus einer großen Zahl von Systemen („Molekülen“). Es ist keine mikrokanonische Gesamtheit, da zwei Moleküle sich gegenseitig beeinflussen, sobald sie einander sehr nahe kommen („Stöße“). Vernachlässigt man diejenigen, sehr seltenen, Stöße, bei denen mehr als zwei Moleküle gleichzeitig beteiligt sind, so kann man das Gas auffassen als bestehend aus zwei Gesamtheiten von Systemen, die mit einander im thermodynamischen Gleichgewicht stehen. Wir ersetzen die sehr komplizierten Kräfte zwischen den Molekülen durch das einfache *Modell stoßender elastischer Kugeln* vom Durchmesser  $\sigma$ . Gleichbedeutend damit ist es, wenn wir dem einen System den Radius  $\sigma$  geben, das andere als Massenpunkt behandeln.

**b) Die Grundgleichung.**

Es sei  $F(x^i, p_i, t) dV d\omega$  die Anzahl der zur Zeit  $t$  in  $dV d\omega$  anwesenden Teilchen. Die Anzahl der im Zeitelement  $dt$  und im Volumenelement  $dV$  von  $d\omega$  nach allen  $d\omega'$  übergehenden, d. h. aller  $d\omega$  verlassender Teilchen, ist dann also

$$b d\omega dt dV = dt dV \int_{\omega'} W(p, p') F d\omega d\omega', \quad (1)$$

während umgekehrt die Anzahl der in  $dt$  und  $dV$  aus allen  $d\omega'$  nach  $d\omega$  übergehenden Teilchen wird

$$a d\omega dt dV = dt dV \int_{\omega'} W(p', p) F' d\omega' d\omega, \quad (2)$$

wobei  $F'$  als Abkürzung steht für  $F(x^i, p_i)$ . Für  $F$  gilt dann die Bestimmungsgleichung

$$\frac{dF}{dt} = a - b. \quad (3)$$

### c) Der Stoßprozeß.

Es treffen sich zwei Teilchen gleicher Masse. Das erste mit den Impulskomponenten  $\xi, \eta, \zeta$  vor,  $\xi', \eta', \zeta'$  nach dem Stoß sei kugelförmig vom Radius  $\sigma$ , das zweite mit  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  vor und  $\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1$  nach dem Stoß sei punktförmig. Legen wir das Koordinatensystem mit der  $x$ -Achse in die Richtung der Zentrillinie des Stoßes, so wird

$$\eta = \eta' \quad \zeta = \zeta' \quad \eta_1 = \eta'_1 \quad \zeta_1 = \zeta'_1$$

und bei elastischem Stoß folgt aus Impulssatz und Energiesatz:

$$\xi = \xi'_1 \quad \xi_1 = \xi'.$$

Insbesondere wird also

$$\frac{d\omega_1}{d\omega'_1} = \frac{d\xi'}{d\xi} = \frac{d\omega'}{d\omega}. \quad (4)$$

### d) Die Übergangswahrscheinlichkeiten.

Erfolgt der Übergang aus dem Zustand  $d\omega$  in den Zustand  $d\omega'$  durch einen solchen elastischen Stoß, so ist offenbar  $W(p, p') d\omega'$  die Anzahl von punktförmigen Teilchen, die insgesamt von der Partikel mit dem Impulse  $\xi, \eta, \zeta$  so getroffen werden, daß diese letztere nach dem Stoß die Impulse  $\xi', \eta', \zeta'$  besitzt. Es sei  $v$  die Relativgeschwindigkeit der beiden stoßenden Teilchen vor dem Stoß gegeneinander; die Zentrillinie sei um den Winkel  $\vartheta$  dagegen geneigt und ihre Richtung möge innerhalb eines Raumwinkelelements  $d\Omega$  fallen. Dann denken wir uns die punktförmigen Teilchen mit der Verteilungsdichte  $F_1 d\omega_1$  ruhend gegen das Koordinatensystem, während die Kugel  $\sigma$  den Raum abstreift. Dabei wird das Oberflächenelement  $\sigma^2 d\Omega$  in der Zeit  $dt$  speziell das Zylindervolumen

$$dt d\tau = \sigma^2 d\Omega \cdot v \cos \vartheta dt$$

überstreichen; die Gesamtzahl der Stöße mit Teilchen im Impulsraumelement  $d\omega_1$  wird also

$$dt \int_{\tau} d\tau F_1 d\omega_1 = \sigma^2 \int_{\Omega} d\Omega v \cos \vartheta dt F_1 d\omega_1,$$

wobei das Integral nach  $d\Omega$  nur über die dem Stoßpartner zugewandte Halbkugel zu erstrecken ist; erstreckt man es über die ganze, so tritt der Faktor  $\frac{1}{2}$  hinzu. Es ist

$$W(p, p') d\omega' = \int_{\tau} d\tau \cdot F_1 d\omega_1.$$

Ebenso findet man für die Umkehrung

$$W(p', p) d\omega = \int_{\tau} d\tau \cdot F_1 d\omega_1.$$

### e) Die Stoßgleichung.

Die Gleichung (3) geht jetzt über in

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \int W(p', p) F' d\omega' - \int W(p, p') F d\omega' \\ &= \int_{\tau} d\tau \int_{\omega'} \left( F' F_1 \frac{d\omega' d\omega_1}{d\omega} - F F_1 \frac{d\omega' d\omega_1}{d\omega'} \right) = \int_{\tau} d\tau \int_{\omega_1} (F' F_1 - F F_1) d\omega_1. \quad (5) \end{aligned}$$

Das ist die MAXWELL-BOLTZMANSsche *Stoßgleichung*. Die linke Seite kann in der Form umgeschrieben werden:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial F}{\partial x^i} \dot{x}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right). \quad (6)$$

### f) Stoßinvarianten.

Ist  $\varphi$  eine beliebige Funktion der Impulse, so erhält man nach einigen Umformungen

$$\frac{1}{4} \int_{\tau} d\tau \int_{\omega, \omega_1} d\omega d\omega_1 (\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi'_1) (F' F_1 - F F_1) = \int \varphi \frac{dF}{dt} d\omega. \quad (7)$$

Ist  $\varphi$  eine stoßinvariante Größe, d. h.  $\varphi + \varphi_1 = \varphi' + \varphi'_1$ , so verschwindet die linke Seite. Es wird dann also

$$\int_{\omega} \varphi \left[ \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial F}{\partial x^i} \dot{x}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \right] d\omega = 0. \quad (7')$$

### g) Makroskopische Größen.

Man definiere als *Mittelwert* einer Größe  $\psi$  den Ausdruck

$$\psi = \frac{\int F \psi d\omega}{\int F d\omega} = \frac{1}{N} \int F \psi d\omega,$$

wobei also  $N = \rho/m$  die Anzahl der Teilchen im  $\text{cm}^3$  ist ( $\rho$  Dichte,  $m$  Molekülmasse). Dann werden

$$\begin{aligned} u_i &= \overline{\dot{x}^i} \text{ die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit } u, \\ \frac{N}{m} \overline{\xi^2} &= P_{xx}, \quad \frac{N}{m} \overline{\xi \eta} = P_{xy} \text{ usw. die Komponenten des Spannungstensors } \mathfrak{P}, \\ k_x &= N \overline{\dot{\xi}} \text{ usw. die Komponenten der Kraftdichte } \mathfrak{k}, \\ E &= \frac{N}{2m} \overline{p^2} \text{ die Energiedichte,} \\ \mathfrak{E} &= \frac{N}{2m^2} \overline{p p^2} \text{ die Energiestromdichte,} \end{aligned}$$

und wir erhalten aus (7') die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{mit } \varphi = m: \quad \text{div}(\rho u) + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 & (\text{Kontinuitätsgleichung}) \\ \text{mit } \varphi = p: \quad \text{div } \mathfrak{P} + \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) &= \mathfrak{k} & (\text{Bewegungsgleichungen}) \\ \text{mit } \varphi = \frac{p^2}{2m}: \quad (\mathfrak{k} u) &= \text{div } \mathfrak{E} + \frac{\partial E}{\partial t} & (\text{Arbeit der äußeren Kräfte =} \\ & & \text{Energieumsatz}) \end{aligned}$$

#### h) Entropiesatz.

Es sei  $\varphi = \ln F$ , dann lautet (7):

$$\int d\omega \ln F \frac{dF}{dt} = \frac{1}{4} \int d\tau \int \int d\omega d\omega_1 \ln \frac{F F_1}{F' F'_1} (F' F'_1 - F F_1) \leq 0.$$

Daraus folgt leicht

$$\frac{d}{dt} \int dV \int d\omega F \ln F \leq 0.$$

Man bezeichnet  $s = -k \int d\omega F \ln F$  als *Entropiedichte*,  $S = \int s dV$  als *Gesamtentropie*. Es ist also

$$\frac{dS}{dt} \geq 0 \quad (\text{BOLTZMANNNSCHES } H\text{-Theorem, Entropiesatz}).$$

#### i) Verteilungsgesetz.

Im stationären Falle muß

$$F' F'_1 = F F_1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

werden. Aus diesen Bedingungen folgt für die Molekülverteilung unter der Wirkung eines äußeren Kraftfeldes

$$\mathfrak{R} = -\text{grad } V$$

der Ausdruck

$$F(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = A \cdot e^{-\beta E} \quad \text{mit} \quad E = \frac{p^2}{2m} + V(x, y, z).$$

Der Vergleich mit der kanonischen Verteilung zeigt, daß  $\beta = 1/kT$  ist.

Ist kein äußeres Kraftfeld vorhanden, so hat man speziell die MAXWELLSche Verteilung:

$$F(p_x, p_y, p_z) = A \cdot e^{\frac{-p^2}{2mkT}};$$

der Normierungsfaktor  $A$  kann bestimmt werden aus der Forderung

$$N = \int F d\omega = 4\pi \int_0^\infty F(p) p^2 dp = A (2\pi mkT)^{3/2}.$$

Wegen  $N = \varrho/m$  kann man dann schreiben

$$F(p) = \frac{\varrho}{m} (2\pi mkT)^{-3/2} e^{\frac{-p^2}{2mkT}}.$$

### k) Mittelwerte.

Der häufigste Impuls ist

$$p_0 = \sqrt{2mkT}$$

mit der zugehörigen Energie  $E_0 = kT$ . Der mittlere Impuls ist

$$\bar{p} = \int_0^\infty p \cdot 4\pi p^2 F(p) dp = \frac{2}{\sqrt{\pi}} p_0.$$

Ferner ist

$$\overline{p^2} = \int_0^\infty p^2 \cdot 4\pi p^2 F(p) dp = \frac{3}{2} p_0^2$$

das Impulsquadrat, das zu der mittleren Energie

$$\bar{E} = \frac{\overline{p^2}}{2m} = \frac{3}{2} kT$$

gehört. Es ist

$$\overline{p^2} = \frac{3\pi}{8} \bar{p}^2 = \frac{3}{2} p_0^2.$$

Das mittlere relative Schwankungsquadrat des Impulses ist daher

$$\frac{\overline{p^2} - \bar{p}^2}{\bar{p}^2} = \left( \frac{3\pi}{8} - 1 \right) = 0,1781.$$

## C. FERMI- und BOSE-Statistik.

Der auf S. 333 (A, 2) gemachte Ansatz für die Anzahl der gleichzeitigen Übergänge  $r \rightarrow r'$  und  $s \rightarrow s'$  kann noch verallgemeinert werden. Die Anzahl der Übergänge kann auch abhängen von der anfänglichen Besetzungszahl des Zielzustandes; d. h. die Zahl der Prozesse ist

$$w_{rs}^{r's'} N_r N_s f_{r'}(N_{r'}) f_{s'}(N_{s'})$$

und in der umgekehrten Richtung

$$w_{r's'}^{rs} N_{r'} N_{s'} f_r(N_r) f_s(N_s),$$

wobei die  $f_r$  gewisse Funktionen sind, deren Festlegung der Annahme eines speziellen *Modells* entspricht. Es ist insbesondere:

$f_r(N_r) = g_r - N_r$  ( $g_r =$  Anzahl der Zellen von der Energie  $E_r$ ), wenn die Systeme das *PAULI-Prinzip* befolgen (vgl. S. 301). Jede Zelle kann dann höchstens *ein* System aufnehmen. Man sagt: Die Systeme befolgen die *FERMI-Statistik*.

$f_r(N_r) = g_r + N_r$  für Lichtquanten und alle quantenmechanischen Systeme mit symmetrischen Eigenfunktionen (vgl. S. 301). Die Systeme haben dann das „Bestreben“, sich in der gleichen Zelle anzuhäufen. Man spricht hier von der *BOSE-Statistik*.

$f_r(N_r) = 1$  in dem bereits oben behandelten Sonderfall, der als *BOLTZMANN-Statistik* bezeichnet wird.

Andere Statistiken scheinen in der Natur nicht realisiert zu sein.

**Verteilungsfunktion.** Man hat wie auf S. 333 (A, 2)

$$\frac{dN_r}{dt} = \sum_{r's's'} w_{r's's'} (N_{r'} N_{s'} f_r f_s - N_r N_s f_{r'} f_{s'}),$$

also Stationarität für

$$\frac{N_r}{f_r} \cdot \frac{N_s}{f_s} = \frac{N_{r'}}{f_{r'}} \cdot \frac{N_{s'}}{f_{s'}},$$

d. h.  $\ln(N_r/f_r)$  ist eine lineare Funktion der Energie  $E_r$ :

$$N_r = f_r(N_r) e^{-\alpha - \beta E_r}.$$

Zur Bestimmung der Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  hat man erstens die Nebenbedingung  $\sum_r N_r = N$ , und zweitens den Anschluß an die Thermodynamik auf dem Wege über die statistische Definition der Entropie. Dieser liefert wiederum  $\beta = 1/kT$  für jede Statistik. Man erhält daher als Gleichgewichtsverteilungen insbesondere für

die *FERMI-Statistik*:  $N_r = \frac{g_r}{e^{\alpha + \beta E_r} + 1},$

die *BOSE-Statistik*:  $N_r = \frac{g_r}{e^{\alpha + \beta E_r} - 1}.$

Hierbei ist insbesondere  $\alpha = 0$ , wenn kein Erhaltungssatz der Teilchenzahl gilt (*PLANCKSches Verteilungsgesetz*, Lichtquanten).

**Entropie.** Man findet analog wie auf S. 334 (A, 2)

$$S = k \sum_r \int \ln \frac{f_r}{N_r} dN_r + \text{constans},$$

und

$$\frac{dS}{dt} \geq 0.$$

Speziell ergibt sich bis auf eine additive Konstante für

$$\text{die FERMI-Statistik: } S - S_0 = -k \sum_r (N_r \ln N_r - (g_r + N_r) \ln (g_r + N_r))$$

$$\text{die BOSE-Statistik: } S - S_0 = -k \sum_r (N_r \ln N_r + (g_r - N_r) \ln (g_r - N_r)).$$

**Statistische Wahrscheinlichkeit.** Die angegebenen Ausdrücke für die Entropie stehen in Einklang mit der Beziehung

$$S = k \ln W,$$

wenn man die Wahrscheinlichkeit  $W$  definiert durch:

$$W = \prod_r \frac{g_r!}{N_r! (g_r - N_r)!} = \prod_r \binom{g_r}{N_r} \quad \text{für die FERMI-Statistik,}$$

$$W = \prod_r \frac{(g_r + N_r - 1)!}{N_r! (g_r - 1)!} \quad \text{für die BOSE-Statistik.}$$

Die erste Formel gibt die Anzahl verschiedener Besetzungsmöglichkeiten der  $g_r$  Zellen unter Berücksichtigung des PAULI-Prinzips (vgl. S. 96).

Die zweite Formel bedeutet genau diejenige Modifikation des BOLTZMANNschen Modells, welche man erhält, wenn man die *Ununterscheidbarkeit* gleicher (atomarer) Systeme in Rechnung stellt. Alle Zustände, die durch Vertauschung von Teilchen auseinander hervorgehen, werden nur als ein einziger Zustand angesehen, dem das Gewicht 1 zukommt.



# Anhang.

## 1. FOURIER-Integrale (zu S. 27).

Im folgenden sind zu einigen wichtigen Funktionen  $f(x)$  die Spektralfunktionen  $g(y)$  angegeben gemäß der Integraldarstellung

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{2\pi i x y} dy$$

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x y} dx.$$

Die Zuordnung der beiden Funktionen zueinander ist umkehrbar, d. h. die Spektralfunktion zu  $g(y)$  ist wieder  $f(x)$ .

$f(x)$	$g(y)$
$e^{-\frac{x^2}{a^2}}$	$a \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 a^2 y^2}$
$e^{-\frac{x^2}{a^2} + 2\pi i \nu x}$	$a \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 a^2 (y - \nu)^2}$
$\begin{cases} 0 & \text{für } x < -\varepsilon \\ C & \text{für } -\varepsilon \leq x \leq +\varepsilon \\ \varepsilon & \text{für } x > +\varepsilon \end{cases}$	$2C \cdot \frac{\sin 2\pi \varepsilon y}{2\pi \varepsilon y}$
desgleichen $\varepsilon \rightarrow 0$	$2C$
$\begin{cases} 0 & \text{für } x < -l \\ A e^{2\pi i \nu x} & \text{für } -l \leq x \leq +l \\ 0 & \text{für } x > +l \end{cases}$	$2Al \frac{\sin(2\pi l [y - \nu])}{2\pi l [y - \nu]}$

Eine große Tabelle von FOURIER-Integralen findet man in G. A. CAMPBELL, R. M. FOSTER "FOURIER integrals for practical applications". Bell Telephone Monograph B—584, 1931.

## 2. Potenzreihenentwicklung (zu S. 38).

Fig. 21 zeigt die Funktion  $\frac{1}{1-z}$ , dargestellt durch Kurven  $u = a$ ,  $v = b$ . In Fig. 22 ist dieselbe Funktion nach steigenden Potenzen bis  $z^6$

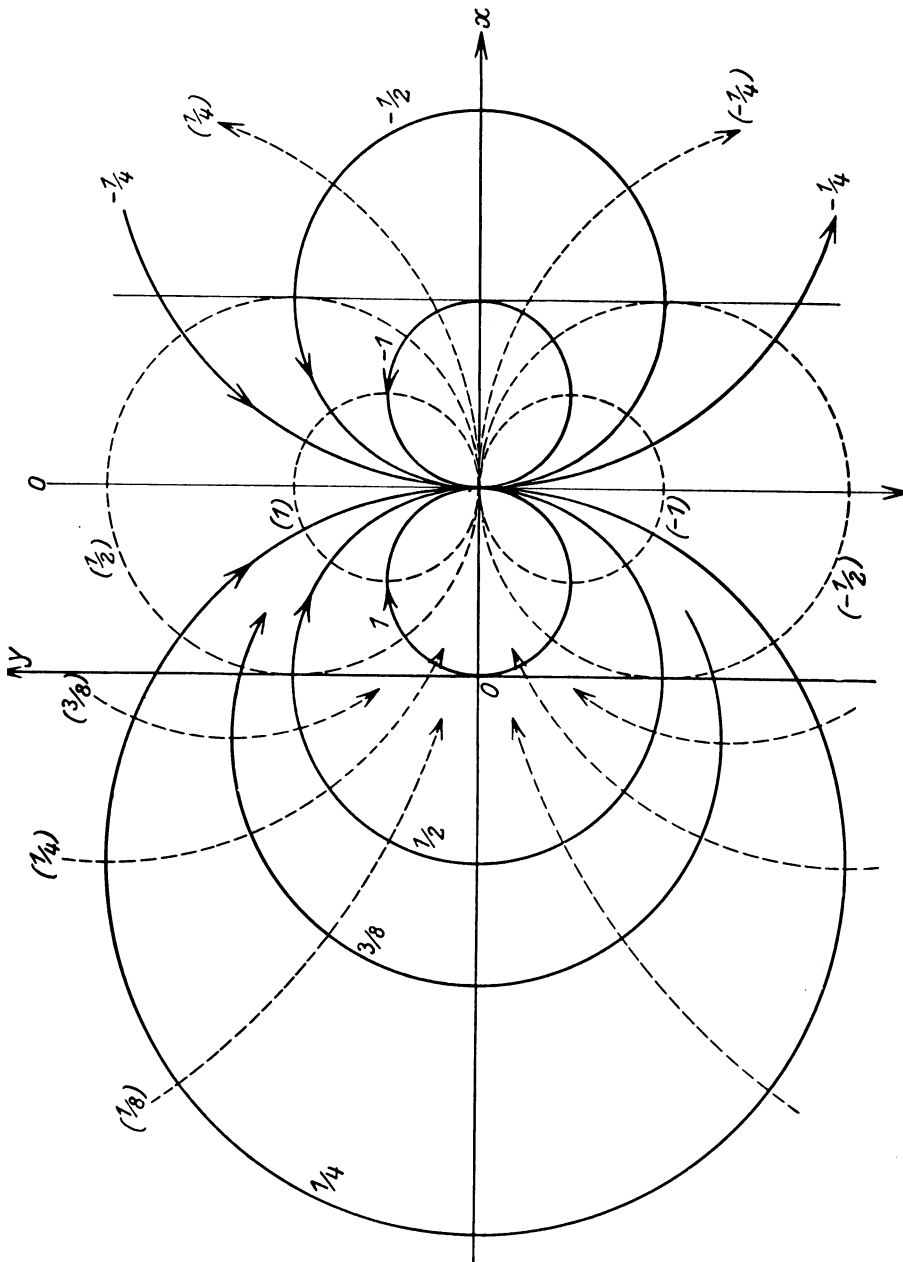


Fig. 21.  $w = \frac{1}{1-z^2}$ .





Das Integral verschwindet für die beiden Stücke parallel der imaginären Achse wegen der Periodizität von  $\cos \varphi$ , ferner für das Stück  $BC$ , wenn das Stück unendlich weit hinausgeschoben wird, weil hier der Integrand verschwindet, außerdem für die Zuwege. Es bleibt also nur das Stück um  $\varphi_0$  herum zu berechnen.

In  $\varphi_0$  hat der Integrand einen einfachen Pol. Die Entwicklung lautet hier:  $\frac{1}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_0 - \cos \varphi} = \frac{a_{-1}}{\varphi - \varphi_0} + a_0 + a_1(\varphi - \varphi_0) + \dots$ . Um  $a_{-1}$ , das Residuum, zu finden, multiplizieren wir mit  $\varphi - \varphi_0$  und gehen zur Grenze  $\varphi = \varphi_0$  über:

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \frac{(\varphi - \varphi_0) \cos \varphi_0}{\cos \varphi_0 - \cos \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi_0} \cdot \cos \varphi_0 = -\frac{1}{\varepsilon \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = -\frac{i}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \end{aligned}$$

Das gesuchte Integral ist dann gleich

$$2\pi i a_{-1} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

Zum gleichen Resultate kommt man auf folgendem Wege:

Setzt man  $z = e^{i\varphi}$ , so wird das Integral  $= \int z \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \right]^{-i} dz$ . Der

Integrationsweg ist ein Kreis mit dem Radius 1 um den Nullpunkt. Singuläre Punkte liegen an den Stellen der Wurzeln  $z_1$  und  $z_2$  der Gleichung  $z^2 + \frac{2}{\varepsilon}z + 1 = 0$ , wo der Integrand unendlich wird. Von diesen liegt nur  $z_1 = -\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1}$  im Innern des Integrationsweges. Die Entwicklung lautet hier:

$$\frac{-i}{\varepsilon (z - z_1)(z - z_2)} = \frac{a_{-1}}{z - z_1} + a_0 + a_1(z - z_1) + \dots,$$

also ist

$$a_{-1} = \frac{-i}{\varepsilon (z_1 - z_2)} = \frac{-i}{\varepsilon \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1}} = \frac{-i}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

und das Integral wird

$$2\pi i a_{-1} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

#### 4. Harmonischer Oszillator (zu S. 107).

Es sei

$$H(q, p) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) = K(Q, P) = \omega P;$$

gesucht ist  $Q = Q(q, p)$ .

Es ist

$$\frac{\partial X}{\partial q} = p = \omega \sqrt{\frac{2P}{\omega} - q^2}, \text{ also } X = \omega \int \sqrt{\frac{2P}{\omega} - q^2} dq + f(P),$$

mithin

$$Q = \frac{\partial X}{\partial P} = \arcsin \left( q \cdot \sqrt{\frac{\omega}{2P}} \right) + f'(P).$$

Setzt man z. B.  $f(P) = -\frac{\pi}{2}$ , so wird

$$\cos Q = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{\omega^2 q^2}}}$$

oder

$$\operatorname{tg} Q = -\frac{p}{\omega q}, \quad P = \frac{p^2}{2\omega} + \frac{\omega q^2}{2}$$

bzw.

$$q = \sqrt{\frac{2P}{\omega}} \cdot \cos Q, \quad p = -\sqrt{2P\omega} \sin Q.$$

### 5. Planetenbewegung (zu S. 108).

Ein Beispiel für eine Berührungstransformation im Dreidimensionalen, die (im Sinne der Transformation von S. 107)  $H$  auf eine einfachere Form bringt, ist die folgende:

Es sei die HAMILTON-Funktion:

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) - \frac{GmM}{r}.$$

Man gelangt durch die Berührungstransformation:

$$X_1 = p_1 r + p_3 \varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\vartheta} d\vartheta \sqrt{p_2^2 - \frac{p_3^2}{\sin^2 \vartheta}}, \quad q_i = \frac{\partial X_1}{\partial p_i}, \quad p_r = \frac{\partial X_1}{\partial r} \text{ usw.}$$

zu der Form:

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2} \right) - \frac{GmM}{q_1}.$$

Eine nochmalige Transformation:

$$X_2 = \int_{q_0}^{q_1} dq_1 \sqrt{-\frac{G^2 m^4 M^2}{P_1^2} + \frac{2Gm^2 M}{q_1} - \frac{P_2^2}{q_1^2}} + P_2 q_2 + P_3 q_3,$$

$$p_i = \frac{\partial X_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial X_2}{\partial P_i}$$

führt weiter zu:

$$H = K(P, Q) = -\frac{G^2 m^3 M^2}{2P_1^2}.$$

Die Bedeutung der neuen Variablen ist:

$q_1 = r$  (Radiusvektor),

$q_2 =$  Länge des Planeten vom aufsteigenden Knoten, gemessen in der Bahnebene,

$q_3 =$  Länge des aufsteigenden Knotens, gemessen im Äquator  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ,

$p_1 = m \dot{r}$ ,

$p_2 =$  gesamtes Impulsmoment,

$p_3 =$  Impulsmoment in Richtung  $\varphi = \dot{p}_\varphi = m r^2 \dot{\varphi}$

sowie:

$Q_1 =$  mittlere Anomalie,

$Q_2 =$  Länge des Perihels  $q = q_0$  vom aufsteigenden Knoten ab,

$Q_3 = q_3$  (s. oben),

$P_1 = \sqrt{G m^2 M a}$ , wo  $a$  die halbe große Achse der Bahn ist,

$P_2 = p_2 = \sqrt{G m^2 M a (1 - \varepsilon^2)}$ , wo  $\varepsilon$  die Exzentrizität der Bahn ist,

$P_3 = p_3 = P_2 \cos i$ , wo  $i$  die Neigung der Bahn gegen den Äquator ist.

(Die halbe kleine Achse  $b$  wird gleich  $\frac{P_1 P_2}{G m^2 M}$ ).

In dieser Form ist  $Q_1$  eine Winkelvariable. (Es ist dies durch die Form des Gliedes mit  $P_1$  in dem Ausdruck für  $X_1$  erreicht worden.) Die übrigen  $Q$  und  $P$  werden Konstanten. Die Größen  $q_3 = Q_3$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  beschreiben vollständig die Bahn des Planeten („Bahnelemente“).

## 6. Zur Vektorsymbolik (zu S. 109).

Die Bezeichnungen in der Vektoranalysis stehen nicht fest. Neben der in diesem Buche angewandten Symbolik findet man auch die folgenden Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} a \cdot b \text{ und } a b & \text{ für } (a b) \\ a \times b & \text{ für } [a b] \\ a b c & \text{ für } (a [b c]) \\ \text{curl } a & \text{ für rot } a. \end{aligned}$$

Vektoren werden gelegentlich durch Symbole der Form  $\vec{a}$  geschrieben, manchmal auch durch „fette“ Buchstaben.

Oft wird mit Vorteil der Operator  $\nabla$  („Nabla“) verwandt. Man schreibt:

$$\begin{aligned} \nabla \varphi &= \text{grad } \varphi \\ (\nabla, a) &= \nabla \cdot a = \text{div } a \\ [\nabla, a] &= \nabla \times a = \text{rot } a \\ (\nabla, \nabla \varphi) &= (\nabla, \nabla) \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi \\ (a \cdot \nabla) b &= (a, \nabla) b = (a \text{ grad}) b. \end{aligned}$$

Der Operator  $\nabla$  kann hierbei formal wie ein Vektor behandelt werden.

In kartesischen Koordinaten hat er die Komponenten  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}$ .

Unter einer *Plangröße* versteht man den Inbegriff der Größe eines Flächenelements und der zugehörigen Normalenrichtung. Man kann die Plangrößen ebenfalls formal wie Vektoren behandeln. Z. B. kann der GAUSSsche Satz bei ihrer Benutzung geschrieben werden:

$$\int (d\vec{\tau}, \mathbf{a}) = \int dv \operatorname{div} \mathbf{a}.$$

### 7. Drei-Indizes-Symbole (zu S. 135).

Früher waren allgemein gebräuchlich die Bezeichnungen

$$\left\{ \begin{matrix} r & s \\ i \end{matrix} \right\} = \Gamma_{rs}^i \quad \text{und} \quad \left[ \begin{matrix} r & s \\ i \end{matrix} \right] = \Gamma_{i,rs} \quad (\text{CHRISTOFFELSche Klammersymbole}).$$

### 8. Erzwungene Schwingung (zu S. 183).

Die zu lösende Differentialgleichung ist eine homogene lineare zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir benutzen eine GREENSche Funktion, indem wir zur Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t) = \text{beliebig gegebene Funktion}^1$$

den Ansatz machen

$$x = \int_{-\infty}^t f(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau$$

mit der später zu bestimmenden Funktion  $\varphi(t)$ . Er führt zu

$$\dot{x} = f(t) \varphi(0) + \int_{-\infty}^t f(\tau) \dot{\varphi}(t-\tau) d\tau$$

$$\ddot{x} = \dot{f}(t) \varphi(0) + f(t) \dot{\varphi}(0) + \int_{-\infty}^t f(\tau) \ddot{\varphi}(t-\tau) d\tau.$$

Das gibt in die obige Differentialgleichung eingefügt:

$$f(t) = [\dot{f}(t) + a f(t)] \varphi(0) + f(t) \dot{\varphi}(0) + \int_{-\infty}^t f(\tau) (\ddot{\varphi} + a \dot{\varphi} + b \varphi) d\tau.$$

Da diese Gleichung für alle Werte von  $t$  erfüllt sein soll, ist ein naheliegender Ansatz:

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 1, \quad \ddot{\varphi} + a \dot{\varphi} + b \varphi = 0,$$

d. h.

$$\varphi(t) = \frac{e^{-\frac{a}{2}t}}{\sqrt{a^2 - 4b}} \left( e^{t\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}} - e^{-t\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}} \right) \quad \text{für positives Argument,}$$

$$= 0 \quad \text{für negatives Argument.}$$

<sup>1</sup> Die Bezeichnung ist hier dem physikalischen Problem angepaßt.  $\dot{x} = dx/dt$  usw.



Sonderfälle: I.  $a^2 < 4b$  (schwache Dämpfung). Zur Abkürzung setzen wir

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = i \omega_0, \quad \frac{a}{2} = \delta, \quad \varphi(t) = \frac{e^{-\delta t}}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

mit  $\omega_0$  als „Eigenfrequenz“. Die Lösung wird dann:

$$x = \int_{-\infty}^t f(\tau) \cdot \frac{e^{-\delta(t-\tau)}}{\omega_0} \sin \omega_0(t-\tau) d\tau.$$

II.  $a^2 = 4b$  (aperiodischer Grenzfall)

$$x = \int_{-\infty}^t f(\tau) \cdot e^{-\delta(t-\tau)} (t-\tau) d\tau.$$

III.  $a^2 > 4b$  (starke Dämpfung). Zur Abkürzung setzen wir

$$\delta_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \quad \delta_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

$$x = \int_{-\infty}^t f(\tau) \cdot \frac{e^{-\delta_1(t-\tau)} - e^{-\delta_2(t-\tau)}}{\delta_2 - \delta_1} d\tau.$$

Beispiele für verschiedene  $f(t)$ :

A.  $f(t) = \frac{p}{\varepsilon}$  im Intervall  $T$  bis  $T + \varepsilon$ , im übrigen  $= 0$  (kurzer Impuls).

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } a^2 < 4b: \quad x = \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{e^{-\delta(t-T)}}{\omega_0} \sin \omega_0(t-T) \\ \text{II. } a^2 = 4b: \quad x = \frac{p}{\varepsilon} \cdot e^{-\delta(t-T)} (t-T) \\ \text{III. } a^2 > 4b: \quad x = \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{e^{-\delta_1(t-T)} - e^{-\delta_2(t-T)}}{\delta_2 - \delta_1} \end{array} \right\} \text{ für } t > T.$$

B.  $f(t) = A \cdot \sin \omega t$  (periodische Kraft).

$$x = B \cdot \cos(\omega t - \beta),$$

worin für

$$\text{I. } a^2 < 4b: \quad B = \frac{A}{\sqrt{(\delta^2 + \omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \quad \text{tg } \beta = \frac{\delta^2 + \omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega}.$$

$$\text{II. } a^2 = 4b: \quad B = \frac{A}{\sqrt{(\delta^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \quad \text{tg } \beta = \frac{\delta^2 - \omega^2}{2\delta\omega}.$$

$$\text{III. } a^2 > 4b: \quad B = \frac{A}{\sqrt{(\delta_1\delta_2 - \omega^2)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2\omega^2}}, \quad \text{tg } \beta = \frac{\delta_1\delta_2 - \omega^2}{(\delta_1 + \delta_2)\omega}.$$

## 9. Vektoranalytische Behandlung der Planetenbewegung

(zu S. 230).

Die Bewegung unter der Wirkung einer Zentralkraft

$$\mathfrak{R} = -m \cdot C \frac{\mathfrak{r}}{r^3} \quad (C = GM)$$

läßt sich vektoriell wie folgt behandeln:

$$\begin{aligned}
 [\ddot{\mathbf{r}} \mathbf{f}] &= [\ddot{\mathbf{r}} [\mathbf{r} \dot{\mathbf{r}}]] = -\frac{C}{r^3} [\mathbf{r} [\mathbf{r} \dot{\mathbf{r}}]] \\
 &= -\frac{C}{r^3} (\mathbf{r} (\mathbf{r} \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}} r^2) = -\frac{C}{r^3} \left( \frac{\mathbf{r}}{2} \frac{d r^2}{dt} - \dot{\mathbf{r}} r^2 \right) \\
 &= C \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{d}{dt} [\dot{\mathbf{r}} \mathbf{f}].
 \end{aligned}$$

Also:

$$[\dot{\mathbf{r}} \mathbf{f}] = C \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{a}.$$

$\mathbf{a}$  spielt die Rolle einer Integrationskonstanten. Es ist:

$$(\mathbf{a} \mathbf{f}) = 0$$

$$(\mathbf{r} [\dot{\mathbf{r}} \mathbf{f}]) = C r + (\mathbf{a} \mathbf{r}) = (\mathbf{f} [\mathbf{r} \dot{\mathbf{r}}]) = k^2,$$

also:

$$r = \frac{k^2}{C + a \cos(\mathbf{a}, \mathbf{r})}.$$

Das ist die Gleichung eines Kegelschnittes. Der Vektor  $\mathbf{a}$  gibt uns die Richtung der großen Achse, er weist vom Brennpunkt zum Perihel.

Für den Geschwindigkeitsvektor ergibt sich folgende interessante Darstellung:

$$[\mathbf{f} [\dot{\mathbf{r}} \mathbf{f}]] = \dot{\mathbf{r}} k^2 - \mathbf{f} (\dot{\mathbf{r}} \mathbf{f}) = \dot{\mathbf{r}} k^2 = [\mathbf{f} \mathbf{r}] \frac{C}{r} + [\mathbf{f} \mathbf{a}],$$

also:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{[\mathbf{f} \mathbf{a}]}{k^2} + \frac{C}{k^2} \frac{[\mathbf{f} \mathbf{r}]}{r}.$$

Die Geschwindigkeit läßt sich also in jedem Punkte der Bahn zusammensetzen aus zwei ihrem Betrage nach konstanten Vektoren; der eine steht immer senkrecht zur großen Achse, der andere senkrecht zum Radiusvektor.

### 10. Magnetischer Kreis (zu S. 255).

In Stoffen sehr hoher Permeabilität (Eisen) verlaufen die Induktionslinien ( $\mathfrak{B}$ ) angenähert wie die Stromlinien in Leitern.

Hat man es mit einem geschlossenen Eisenkreis zu tun, so gelten die zum elektrischen Kreis analogen Formeln. Der Formel  $i = \sigma \mathfrak{E}$  entspricht dann  $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ .  $M = \oint \mathfrak{H} d\mathfrak{s}$  wird hier aber nicht gleich Null, sondern  $= \frac{4\pi}{c} \int i_n df$ , wo das Integral über die durch den Kreis begrenzte Fläche zu nehmen ist. Fließt der Strom in  $n$  Drahtwindungen mit der Stärke  $I$  durch diese Fläche, so wird

$$M = \oint \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = \frac{4\pi n I}{c}.$$

Diese Größe kann als *magnetisierende* Kraft bezeichnet werden. Es wird dann  $I_m = \int_q B_n df$  der gesamte Induktionsfluß, oder

$$I_m = \frac{M}{W_m},$$

wo

$$W_m = \oint \frac{ds}{q\mu}$$

ist, in Analogie zu  $I = \frac{E}{W}$ .

## II. Elektrische Maßsysteme.

Das in Teil II, zweiter Abschnitt, benutzte Maßsystem heißt das GAUSSsche Maßsystem. Außerdem werden noch folgende benutzt:

**Elektromagnetisches Maßsystem.** Man setzt

$$\begin{aligned} e' &= \frac{1}{c} e & \varepsilon' &= \varepsilon \\ \varrho' &= \frac{1}{c} \varrho & \mathfrak{D}' &= c \mathfrak{D} \\ \mathfrak{E}' &= c \mathfrak{E} \\ \varphi' &= c \varphi \\ i' &= \frac{1}{c} i & \mu' &= \mu \\ \sigma' &= \frac{1}{c^2} \sigma & \mathfrak{B}' &= \mathfrak{B} \\ \mathfrak{H}' &= \mathfrak{H} & \mathfrak{A}' &= \mathfrak{A} \end{aligned}$$

**Technisches Maßsystem.** (Volt, Ampere, Ohm.)

$$\begin{aligned} e' &= \frac{10^9}{c} \text{ (Coulomb)} & \varepsilon' &= \varepsilon \\ \varrho' &= \frac{10^9}{c} & \mathfrak{D}' &= \mathfrak{D} \cdot 300 \\ \mathfrak{E}' &= \mathfrak{E} \cdot 300 \text{ (Volt/cm)} \\ \varphi' &= \varphi \cdot 300 \text{ (Volt)} \\ i' &= \frac{10^9}{c} \text{ Ampere/cm}^2 & \mu' &= \mu \\ \sigma' &= \frac{10^{-11}}{9} \sigma \\ \mathfrak{H}' &= \mathfrak{H} \end{aligned}$$

**„Rationelles“ Maßsystem.** Setzt man

$$\begin{aligned} e' &= e \sqrt{4\pi} & \varepsilon' &= \varepsilon \\ \varrho' &= \varrho \sqrt{4\pi} & \mathfrak{D}' &= \frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{4\pi}} \\ \mathfrak{E}' &= -\frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{4\pi}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{\varphi}{\sqrt{4\pi}} \\ i' &= i \sqrt{4\pi} & \mu' &= \mu \\ \sigma' &= \sigma \cdot 4\pi & \mathfrak{B}' &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \mathfrak{B} \\ \mathfrak{H}' &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \mathfrak{H} & \mathfrak{A}' &= -\sqrt{4\pi} \mathfrak{A}, \end{aligned}$$

so hat man für statische Felder (unter Fortlassung des Striches!):

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} &= -\frac{e_1 e_2}{4\pi r^3} \mathfrak{r} & \mathfrak{E} &= -\int \frac{\varrho \mathfrak{r}}{4\pi r^3} dr & \mathfrak{K} &= e \mathfrak{E} \\ \mathfrak{D} &= \varepsilon \mathfrak{E} & \operatorname{div} \mathfrak{D} &= \varrho & \mathfrak{E} &= -\operatorname{grad} \varphi & 4\pi \varphi &= \int \frac{\varrho}{r} dv \\ & & i &= \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \sigma \mathfrak{E} \\ \mathfrak{B} &= \mu \mathfrak{H} & U &= \frac{1}{2} \int dv \{ (\mathfrak{E} \mathfrak{D}) + (\mathfrak{B} \mathfrak{H}) \} \\ & & \mathfrak{B} &= \operatorname{rot} \mathfrak{A} \\ \operatorname{div} \mathfrak{B} &= 0 & -4\pi \mathfrak{A} &= \frac{1}{c} \int \frac{i}{r} dv, \end{aligned}$$

sowie für zeitlich veränderliche Felder

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} &= i = \sigma \mathfrak{E} + \varrho \mathfrak{v} \\ \mathfrak{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} &= \operatorname{grad} \varphi, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{A} = 0 \text{ usw.} \end{aligned}$$

## 12. Die drei EINSTEIN-Effekte (zu S. 286).

In der Umgebung der Sonne (Massenpunkt) kann das metrische Feld beschrieben werden durch die SCHWARZSCHILDsche Maßbestimmung (für  $\lambda = 0$ )

$$ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) - c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2,$$

mit  $\alpha = 1,47 \cdot 10^5$  cm.

Die Gleichung der geodätischen Linien hat in der Ebene  $\varphi = \text{const}$  folgende intermediäre Integrale:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d\vartheta}{ds} &= \text{const} \quad (\text{Flächensatz}) \\ \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \frac{dt}{ds} &= \text{const} \quad (\text{Energiesatz}). \end{aligned}$$

Die Bahnkurve hat die Differentialgleichung

$$\frac{d\varrho}{d\vartheta} = \sqrt{\varepsilon^2 \varrho_0^2 - \varrho^2 \sqrt{1 - 3\alpha \varrho_0 - \alpha \varrho}},$$

wo  $\varrho = \frac{1}{r} - \varrho_0$  gesetzt ist. Die exakte Integration führt auf ein elliptisches Integral; infolge der Kleinheit von  $\alpha$  erhält man genähert:

$$r = \frac{1}{\varrho_0 \left[ 1 + \varepsilon \cos \left( 1 - \frac{3\alpha}{2} \varrho_0 \right) \vartheta \right]}.$$

Das sind die KEPLERSchen *Ellipsenbahnen* mit  $\varrho_0 = \frac{1}{a(1-\varepsilon^2)}$ . Infolge des Faktors von  $\vartheta$  tritt aber eine *Perihelpräzession* auf von der Größe  $3\pi\alpha\varrho_0 = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1-\varepsilon^2)}$  pro Umlauf. Beim Merkur erreicht diese Präzession 43'' im Jahrhundert.

Unter den geodätischen Linien gibt es auch solche von der Bogenlänge 0. Man nennt sie die *geodätischen Nulllinien* und erhält sie z. B., indem man die Konstante des Flächensatzes  $= \infty$  setzt. Die Weltlinien der *Lichtstrahlen* sind geodätische Nulllinien. Ihre Bahnlinien sind in erster Näherung schwach gekrümmte Hyperbeln mit dem Asymptotenwinkel

$$\omega = 2 \frac{\alpha}{r_0},$$

wenn  $r_0$  die größte Sonnennähe bedeutet. Für einen am Sonnenrand vorbeieilenden Lichtstrahl ist  $\omega = 1,77''$ . Diese *Lichtablenkung* ist doppelt so groß, als wenn man nach der Emissionstheorie und der NEWTONSchen Mechanik rechnet.

Die zwischen 2 Lichtsignalen verstreichenden *Eigenzeiten* sind in der Entfernung  $r$  und  $r'$  voneinander verschieden, und zwar ist ihr Verhältnis

$$\frac{t}{t'} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\alpha}{r}}{1 - \frac{\alpha}{r'}}}.$$

Das gibt zu einem *Dopplereffekt* Veranlassung von der Größe

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\alpha}{2r},$$

wenn  $r' = \infty$  gesetzt werden kann (*Rotverschiebung der Spektrallinien*). Für einen vom Sonnenrand kommenden Lichtstrahl beträgt der Effekt  $2 \cdot 10^{-6}$ .

### 13. KEPLER-Problem (zu S. 294).

Bewegt sich ein Elektron im Felde eines  $Z$ -fach positiv geladenen Atomkerns, so ist

$$V = -\frac{Z e^2}{r}$$

eine Funktion von  $r$  allein. Es läßt sich dann durch den Ansatz

$$u = R(r) U(\vartheta, \varphi)$$

die SCHRÖDINGER-Gleichung *separieren* in die beiden Gleichungen

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{8\pi^2 \mu}{\hbar^2} (E - V(r)) R - \frac{\lambda}{r^2} R = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \lambda U = 0 \quad (2)$$

( $\lambda$  = Separationsparameter). Gleichung (2) ist die bekannte Differentialgleichung der Kugelfunktionen (vgl. S. 65); sie läßt für  $\lambda = l(l+1)$  mit  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$  (*Azimutalquantenzahl*) die eindeutige Lösung zu

$$U_{l,m}(\vartheta, \varphi) = P_l^m(\cos \vartheta) e^{\pm im\varphi} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Für die „*radiale Eigenfunktion*“  $R(r)$  machen wir speziell für (1) den Ansatz

$$R(r) = e^{-\sqrt{A}r} r^l \chi(2\sqrt{A}r) \quad \text{mit} \quad A = -\frac{8\pi^2 \mu E}{\hbar^2}$$

und finden mit  $\chi' = d\chi/d(2\sqrt{A}r) = d\chi/d\rho$  usw.:

$$\rho \chi'' + (2l + 2 - \rho) \chi' + \left( \frac{B}{\sqrt{A}} - l - 1 \right) \chi = 0.$$

Das ist die LAGUERRESche Differentialgleichung (vgl. S. 200), die nur für ganzzahlige Werte

$$\frac{B}{\sqrt{A}} = n = 1, 2, 3, \dots \quad (n = \text{Hauptquantenzahl})$$

Lösungen  $L_{n+l}^{(2l+1)}(\rho)$  besitzt, bei denen  $R(r)$  im Unendlichen hinreichend stark verschwindet, so daß  $u$  normierbar bleibt. Damit sind auch die *Eigenwerte* für  $A > 0$ , d. h.  $E < 0$  bestimmt:

$$A = \frac{B^2}{n^2}, \quad E = -\frac{2\pi^2 \mu Z^2 e^4}{\hbar^2} \frac{1}{n^2}.$$

Die Eigenwerte hängen also nur von  $n$ , nicht von  $l$  und  $m$  ab; entsprechend den für verschiedene  $l$  und  $m$  zum gleichen  $n$  gehörigen  $n^2$  Eigenfunktionen ist jeder Eigenwert  $(n^2 - 1)$ -fach *entartet*.

Für  $E > 0$  ( $A < 0$ ) erhält man ein *kontinuierliches* Eigenwertspektrum.

#### 14. Potentialschwelle (zu S. 294).

Wir behandeln das eindimensionale Problem

$$V = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ U & \text{für } 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{für } x > b \end{cases}$$

und benutzen die Abkürzungen:

$$k^2 = \frac{8\pi^2 \mu}{\hbar^2} E, \quad \kappa^2 = \frac{8\pi^2 \mu}{\hbar^2} (U - E), \quad \lambda = \frac{\kappa}{k}.$$

Wir setzen die *Eigenfunktionen* an in der Form

$$\psi = \begin{cases} A e^{ikx} + B e^{-ikx} & (x < 0) \\ C_1 e^{-\kappa x} + C_2 e^{+\kappa x} & (0 \leq x \leq b) \\ D e^{ikx} & (x > b). \end{cases}$$

Zur Bestimmung der *Konstanten* haben wir die Bedingungen:  $\psi$  und  $\frac{d\psi}{dx}$  müssen für  $x=0$  und  $x=b$  stetig sein. Es bleibt dann noch eine Konstante frei, z. B.  $D$ . Sie kann durch eine geeignete *Normierungsforderung* festgelegt werden (z. B. für einen von links einfallenden Teilchenstrom der Dichte 1 hätte man  $|A|^2=1$  zu setzen). Eine Eigenwertbedingung besteht nicht; das Spektrum ist *kontinuierlich*. Wir finden:

$$|\psi|^2 = \begin{cases} |D|^2 (\alpha + \beta \cos 2kx - \gamma \sin 2kx) \\ |D|^2 \left[ 1 + \left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right) \sin^2 \kappa(x-b) \right] \\ |D|^2 \end{cases}$$

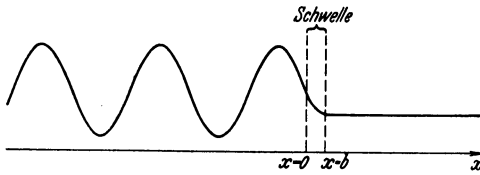
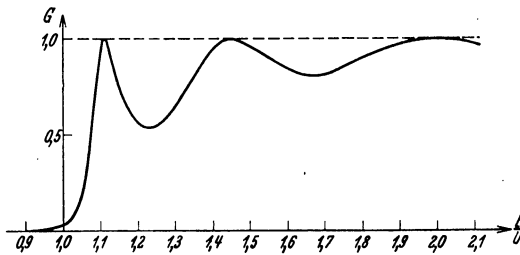
Fig. 24.  $|\psi|^2$  an einer Schwelle.

Fig. 25. Durchlässigkeit einer Schwelle.

mit den Abkürzungen:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right)^2 \sin^2 \kappa b$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \lambda^2 \right) \sin^2 \kappa b$$

$$\gamma = \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \sin \kappa b \cos \kappa b.$$

Es ist  $|\psi_3|^2$  die Intensität der durch die Schwelle *hindurchgegangenen* Welle, während  $|\psi_1|^2$  durch die Superposition der *einfallenden* Welle von der Intensität  $|A|^2$  und der *reflektierten* der Intensität  $|B|^2$  entsteht. Beide Wellenzüge *interferieren* miteinander, vgl. Fig. 24. *Durchlässigkeit der Schwelle* heißt der Ausdruck

$$G = \left| \frac{D}{A} \right|^2 = \frac{\text{Intensität der durchgelassenen Welle}}{\text{Intensität der einfallenden Welle}}.$$

Es ist  $\frac{1}{G} = 1 + \frac{1}{4} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right)^2 \sin^2 \kappa b$ .

Alle hergeleiteten Formeln können für  $E < U$  ohne weiteres benutzt werden, insbesondere geht dann die letzte für  $\kappa b \gg 1$  über in

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{16} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right)^2 e^{2\kappa b}$$

(exponentieller Intensitätsabfall in der Schwelle).

Für  $E > U$  wird  $\kappa$  imaginär, etwa  $\kappa = iK$ . Mit  $A = \frac{K}{k} = -i\lambda$  geht die Formel über in

$$\frac{1}{G} = 1 + \frac{1}{4} \left( A - \frac{1}{A} \right)^2 \sin^2 K b.$$

Es wird also  $G=1$  (wie in der klassischen Theorie: völlige Durchlässigkeit), wenn  $Kb=n\pi$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) ist (vgl. Fig. 25). Sonst wird  $G<1$ . Für  $Kb=(n+\frac{1}{2})\pi$  hat die Durchlässigkeit jeweils ein Minimum („Resonanz“).

### 15. Atombau (Elektronenkatalog) (zu S. 301).

Die Eigenfunktion eines Atoms, bestehend aus  $Z$  Elektronen und  $Z$ -fach positiv geladenem Kern, läßt sich im Falle aufgehobener Entartung in erster Näherung als Produkt von  $Z$  Wasserstoffeigenfunktionen aufbauen (vgl. S. 356), die je durch vier Quantenzahlen  $n, l, m, s$  definiert sind mit  $n>0$ ,  $n-1\geq l\geq 0$ ,  $s=\pm\frac{1}{2}$ ,  $|m|\leq l$ . Nach dem PAULI-Prinzip dürfen dabei keine zwei dieser Funktionen in allen vier Quantenzahlen übereinstimmen.

Nach dem BOHRschen *Aufbauprinzip* entsteht in der Regel ein Atom mit  $Z$  Elektronen aus einem solchen mit  $(Z-1)$  Elektronen durch Hinzufügen eines weiteren (und Erhöhung der Kernladung um 1) ohne Änderung der Quantenzahlen der schon vorhandenen Elektronen. Daher läßt sich ein *Katalog* aufstellen, aus dessen jeweils  $Z$  ersten Positionen das Atom im Grundzustande aufgebaut ist (vgl. die Tabelle S. 360).

Das Ordnungsprinzip dieses Katalogs ist eine lexikographische Ordnung nach den Zahlen  $(n+l), n, s, m$ . Eine theoretische Begründung gerade dieser Anordnung liegt bisher nicht vor. Man liest aus ihm ab:

1. Das *periodische System* der Elemente. Homolog sind zwei Atome, wenn jeweils ihr „letztes Elektron“ in den  $l, m, s$  übereinstimmt.

2. Den *spektroskopischen Charakter* des Grundterms, eingetragen in Spalte 10. Es gibt nämlich  $|\sum m|=0, 1, 2, 3 \dots$  den Charakter  $S, P, D, F, G, H, I \dots$ , und  $(2|\sum s|+1)$  die Multiplizität.

3. Die Möglichkeiten für *angeregte Zustände* (mögliche Terme), bei denen nicht alle  $Z$  Elektronen in den *ersten*  $Z$  Positionen des Katalogs sind.

Der Katalog ist die Darstellungsform einer *empirischen* Regel. Er idealisiert die Erfahrung, da in einigen Fällen Abweichungen beobachtet sind.

### 16. Elektronengas (zu S. 342).

Elektronen gehorchen der FERMI-Statistik, daher gilt im Gleichgewicht das Verteilungsgesetz

$$N_r = \frac{g_r}{e^{\alpha + \beta E_r} + 1} \quad \text{mit} \quad \beta = 1/kT.$$

Ist das Volumen  $V$ , so ist die Anzahl der zur Energie  $E_r = \frac{p^2}{2m}$  ( $p$  = Impulsbetrag) gehörigen Zellen

$$g_r = \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp.$$



Z		I		II		IV		III		$ \Sigma m $	$2\Sigma s+1$		Z		I		II		IV		III		$ \Sigma m $	$2\Sigma s+1$
		$n+l$	n	l	m	s	$n+l$	n	l						m	s	$n+l$	n	l	m	s			
1	H	1	1	0	0	+1/2	0	2	<sup>2</sup> S	0	2	<sup>2</sup> S	52	Te	6	5	1	+1	-1/2	1	3	<sup>3</sup> P		
2	He	1	1	0	0	-1/2	0	1	<sup>1</sup> S	0	1	<sup>1</sup> S	53	J	6	5	1	0	-1/2	1	2	<sup>2</sup> P		
3	Li	2	2	0	0	+1/2	0	2	<sup>2</sup> S	0	2	<sup>2</sup> S	54	X	6	5	1	-1	-1/2	0	1	<sup>1</sup> S		
4	Be	2	2	0	0	-1/2	0	1	<sup>1</sup> S	0	1	<sup>1</sup> S	55	Cs	6	6	0	0	+1/2	0	2	<sup>2</sup> S		
5	B	3	2	1	+1	+1/2	1	2	<sup>2</sup> P	1	2	<sup>2</sup> P	56	Ba	6	6	0	0	-1/2	0	1	<sup>1</sup> S		
6	C	3	2	1	0	+1/2	1	3	<sup>3</sup> S	1	3	<sup>3</sup> S	57	La	7	4	3	+3	+1/2	3	2	<sup>2</sup> F		
7	N	3	2	1	-1	+1/2	0	4	<sup>4</sup> S	0	4	<sup>4</sup> S	58	Ce	7	4	3	+2	+1/2	5	3	<sup>3</sup> H		
8	O	3	2	1	+1	-1/2	1	3	<sup>3</sup> P	1	3	<sup>3</sup> P	59	Pr	7	4	3	+1	+1/2	6	4	<sup>4</sup> I		
9	F	3	2	1	0	-1/2	1	2	<sup>2</sup> P	1	2	<sup>2</sup> P	60	Nd	7	4	3	0	+1/2	6	5	<sup>5</sup> I		
10	Ne	3	2	1	-1	-1/2	0	1	<sup>1</sup> S	0	1	<sup>1</sup> S	61	Il	7	4	3	-1	+1/2	5	6	<sup>6</sup> H		
11	Na	3	3	0	0	+1/2	0	2	<sup>2</sup> S	0	2	<sup>2</sup> S	62	Sm	7	4	3	-2	+1/2	3	7	<sup>7</sup> F		
12	Mg	3	3	0	0	-1/2	0	1	<sup>1</sup> S	0	1	<sup>1</sup> S	63	Eu	7	4	3	-3	+1/2	0	8	<sup>8</sup> S		
13	Al	4	3	1	+1	+1/2	1	2	<sup>2</sup> P	1	2	<sup>2</sup> P	64	Gd	7	4	3	+3	-1/2	3	7	<sup>7</sup> F		
14	Si	4	3	1	0	+1/2	1	3	<sup>3</sup> P	1	3	<sup>3</sup> P	65	Tb	7	4	3	+2	-1/2	5	6	<sup>6</sup> H		
15	P	4	3	1	-1	+1/2	0	4	<sup>4</sup> S	0	4	<sup>4</sup> S	66	Dy	7	4	3	+1	-1/2	6	5	<sup>5</sup> I		
16	S	4	3	1	+1	-1/2	1	3	<sup>3</sup> P	1	3	<sup>3</sup> P	67	Ho	7	4	3	0	-1/2	6	4	<sup>4</sup> I		
17	Cl	4	3	1	0	-1/2	1	2	<sup>2</sup> P	1	2	<sup>2</sup> P	68	Er	7	4	3	-1	-1/2	5	3	<sup>3</sup> H		
18	A	4	3	1	-1	-1/2	0	1	<sup>1</sup> S	0	1	<sup>1</sup> S	69	Tu	7	4	3	-2	-1/2	3	2	<sup>2</sup> F		
19	K	4	4	0	0	+1/2	0	2	<sup>2</sup> S	0	2	<sup>2</sup> S	70	Yb	7	4	3	-3	-1/2	0	1	<sup>1</sup> S		
20	Ca	4	4	0	0	-1/2	0	1	<sup>1</sup> S	0	1	<sup>1</sup> S	71	Cp	7	5	2	+2	+1/2	2	2	<sup>2</sup> D		
21	Sc	5	3	2	+2	+1/2	2	2	<sup>2</sup> D	2	2	<sup>2</sup> D	72	Hf	7	5	2	+1	+1/2	3	3	<sup>3</sup> F		
22	Ti	5	3	2	+1	+1/2	3	3	<sup>3</sup> F	3	3	<sup>3</sup> F	73	Ta	7	5	2	0	+1/2	3	4	<sup>4</sup> F		
23	V	5	3	2	0	+1/2	3	4	<sup>4</sup> F	3	4	<sup>4</sup> F	74	W	7	5	2	-1	+1/2	2	5	<sup>5</sup> D		
24	Cr	5	3	2	-1	+1/2	2	5	<sup>5</sup> D	2	5	<sup>5</sup> D	75	Re	7	5	2	-2	+1/2	0	6	<sup>6</sup> S		
25	Mn	5	3	2	-2	+1/2	0	6	<sup>6</sup> S	0	6	<sup>6</sup> S	76	Os	7	5	2	+2	-1/2	2	5	<sup>5</sup> D		
26	Fe	5	3	2	+2	-1/2	2	5	<sup>5</sup> D	2	5	<sup>5</sup> D	77	Ir	7	5	2	+1	-1/2	3	4	<sup>4</sup> F		
27	Co	5	3	2	+1	-1/2	3	4	<sup>4</sup> F	3	4	<sup>4</sup> F	78	Pt	7	5	2	0	-1/2	3	3	<sup>3</sup> F		
28	Ni	5	3	2	0	-1/2	3	3	<sup>3</sup> F	3	3	<sup>3</sup> F	79	Au	7	5	2	-1	-1/2	2	2	<sup>2</sup> D		
29	Cu	5	3	2	-1	-1/2	2	2	<sup>2</sup> D	2	2	<sup>2</sup> D	80	Hg	7	5	2	-2	-1/2	0	1	<sup>1</sup> S		
30	Zn	5	3	2	-2	-1/2	0	1	<sup>1</sup> S	0	1	<sup>1</sup> S	81	Tl	7	6	1	+1	+1/2	1	2	<sup>2</sup> P		
31	Ga	5	4	1	+1	+1/2	1	2	<sup>2</sup> P	1	2	<sup>2</sup> P	82	Pb	7	6	1	0	+1/2	1	3	<sup>3</sup> P		
32	Ge	5	4	1	0	+1/2	1	3	<sup>3</sup> P	1	3	<sup>3</sup> P	83	Bi	7	6	1	-1	+1/2	0	4	<sup>4</sup> S		
33	As	5	4	1	-1	+1/2	0	4	<sup>4</sup> S	0	4	<sup>4</sup> S	84	Po	7	6	1	+1	-1/2	1	3	<sup>3</sup> P		
34	Se	5	4	1	+1	-1/2	1	3	<sup>3</sup> P	1	3	<sup>3</sup> P	85	—	7	6	1	0	-1/2	1	2	<sup>2</sup> P		
35	Br	5	4	1	0	-1/2	1	2	<sup>2</sup> P	1	2	<sup>2</sup> P	86	Em	7	6	1	-1	-1/2	0	1	<sup>1</sup> S		
36	Kr	5	4	1	-1	-1/2	0	1	<sup>1</sup> S	0	1	<sup>1</sup> S	87	—	7	7	0	0	+1/2	0	2	<sup>2</sup> S		
37	Rb	5	5	0	0	+1/2	0	2	<sup>2</sup> S	0	2	<sup>2</sup> S	88	Ra	7	7	0	0	-1/2	0	1	<sup>1</sup> S		
38	Sr	5	5	0	0	-1/2	0	1	<sup>1</sup> S	0	1	<sup>1</sup> S	89	Ac	8	5	3	+3	+1/2	3	2	<sup>2</sup> F		
39	Y	6	4	2	+2	+1/2	2	2	<sup>2</sup> D	2	2	<sup>2</sup> D	90	Th	8	5	3	+2	+1/2	5	3	<sup>3</sup> H		
40	Zr	6	4	2	+1	+1/2	3	3	<sup>3</sup> F	3	3	<sup>3</sup> F	91	Pa	8	5	3	+1	+1/2	6	4	<sup>4</sup> I		
41	Nb	6	4	2	0	+1/2	3	4	<sup>4</sup> F	3	4	<sup>4</sup> F	92	U	8	5	3	0	+1/2	6	5	<sup>5</sup> I		
42	Mo	6	4	2	-1	+1/2	2	5	<sup>5</sup> D	2	5	<sup>5</sup> D	93	—	8	5	3	-1	+1/2	5	6	<sup>6</sup> H		
43	Ma	6	4	2	-2	+1/2	0	6	<sup>6</sup> S	0	6	<sup>6</sup> S	94	—	8	5	3	-2	+1/2	3	7	<sup>7</sup> F		
44	Ru	6	4	2	+2	-1/2	2	5	<sup>5</sup> D	2	5	<sup>5</sup> D	95	—	8	5	3	-3	+1/2	0	8	<sup>8</sup> S		
45	Rh	6	4	2	+1	-1/2	3	4	<sup>4</sup> F	3	4	<sup>4</sup> F	96	—	8	5	3	+3	-1/2	3	7	<sup>7</sup> F		
46	Pd	6	4	2	0	-1/2	3	3	<sup>3</sup> F	3	3	<sup>3</sup> F	97	—	8	5	3	+2	-1/2	5	6	<sup>6</sup> H		
47	Ag	6	4	2	-1	-1/2	2	2	<sup>2</sup> D	2	2	<sup>2</sup> D	98	—	8	5	3	+1	-1/2	6	5	<sup>5</sup> I		
48	Cd	6	4	2	-2	-1/2	0	1	<sup>1</sup> S	0	1	<sup>1</sup> S	99	—	8	5	3	0	-1/2	6	4	<sup>4</sup> I		
49	In	6	5	1	+1	+1/2	1	2	<sup>2</sup> P	1	2	<sup>2</sup> P	100	—	8	5	3	-1	-1/2	5	3	<sup>3</sup> H		
50	Sn	6	5	1	0	+1/2	1	3	<sup>3</sup> P	1	3	<sup>3</sup> P	101	—	8	5	3	-2	-1/2	3	2	<sup>2</sup> F		
51	Sb	6	5	1	-1	+1/2	0	4	<sup>4</sup> S	0	4	<sup>4</sup> S	102	—	8	5	3	-3	-1/2	0	1	<sup>1</sup> S		
													103		8	6	2	+2	+1/2	2	2	<sup>2</sup> D		

Also haben wir

$$N_r = \frac{4 \pi V}{h^3} \frac{p^2 dp}{e^{\alpha + \frac{p^2}{2 m k T}} + 1} = dN.$$

Die Bestimmung von  $\alpha$  kann korrekt erfolgen aus

$$\int dN = N,$$

oder, da die Berechnung dieses Integrals schwierig ist (vgl. S. 13 unten), genähert wie folgt:

Die Bedingung  $\frac{p^2}{2 m k T} \gg 1$  wird nur von sehr wenigen Elektronen erfüllt; infolgedessen sind in diesem Gebiet die Zellen nahezu unbesetzt und das PAULI-Prinzip verliert seinen Einfluß. Wir müssen daher *asymptotisch* die BOLTZMANNsche Verteilung erhalten

$$N_r \rightarrow \frac{4 \pi V}{h^3} p^2 dp e^{-\alpha} e^{-\frac{p^2}{2 m k T}},$$

$$N_{\text{BOLTZMANN}} = \left(2 \pi \frac{m k T}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{\alpha}{k T}} 4 \pi p^2 dp.$$

Der Vergleich ergibt

$$e^\alpha = \frac{V}{h^3 N} (2 \pi m k T)^{3/2}$$

( $N =$  Zahl der Elektronen im Volumen  $V$ , also  $\frac{V}{N} = \frac{m}{\rho}$ ).

### 17. BROWNSche Bewegung.

Teilchen, die in einem Gase oder einer Flüssigkeit suspendiert sind, führen infolge der Zusammenstöße mit den Molekülen Zickzackbewegungen aus, die um so größer sind, je kleiner die Teilchen sind. Diese unregelmäßigen Bewegungen folgen den Wahrscheinlichkeitsgesetzen. Beobachten wir die Zahl  $n$  der Teilchen, die in einem Bereiche  $v$  des Gesichtsfeldes eines Mikroskopes sichtbar sind in Zeitabständen  $\tau$ , so müssen die Gesetze gelten, die für die im Abschnitt 12, A 5 u. D (S. 221 f.) gemachten Voraussetzungen zutreffen. Für die Wahrscheinlichkeit einer Beobachtung von  $n$  Partikeln gilt die POISSONSche Formel

$$W(n) = \frac{e^{-\bar{n}} \cdot \bar{n}^n}{n!}, \quad n = \frac{v}{V} N.$$

Die mittlere Schwankung ist  $\sqrt{n}$ .

Zwei Beobachtungen, die einander folgen, sind durch Nachwirkung voneinander abhängig.

Die durchschnittliche Abweichung zweier aufeinanderfolgender Beobachtungen wird

$$(n_i - n_{i+1}) = P \cdot (n - n)$$

und die mittlere Abweichung

$$\sqrt{(n_i - n_{i+1})^2} = \sqrt{2 P \cdot n}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen innerhalb der Zeit  $t$  in einer gegebenen Richtung einen Weg zurücklegt, dessen Ende zwischen  $\xi$  und  $\xi + d\xi$  liegt, ergibt sich aus kinetischen Überlegungen zu

$$W(\xi) d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}} d\xi.$$

$D$  ist der „Diffusionskoeffizient“.

$D$  bzw.  $W(\xi)$  und  $P$  hängen eng miteinander zusammen, indem  $P$  hier die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß ein Teilchen bei der folgenden Beobachtung nicht wieder in  $v$  angetroffen wird.

Berücksichtigt man, daß im Durchschnitt der Weg, den ein Teilchen in der Zeit  $t$  zurücklegt, gleich Null ist, da ja keine Richtung vor ihrer entgegengesetzten ausgezeichnet ist, daß also die  $\xi$  auch als die Abweichungen vom Mittel angesehen werden können, so erkennt man sofort die Übereinstimmung mit dem GAUSSSchen Fehlergesetz. Es ist somit der mittlere Weg in der Zeit  $t$

$$\sqrt{\overline{\xi^2}} = \sqrt{2Dt},$$

woraus wiederum die Bedeutung des Diffusionskoeffizienten  $D$  ersichtlich wird.

## 18. Schwankungen makroskopischer Größen.

Ist  $\omega$  irgendeine (makroskopische) physikalische Größe, welche vom Volumen  $V$  und der Temperatur  $T$  abhängt, so sind die Schwankungen  $\Delta\omega = \omega - \bar{\omega}$  in einem Teilvolumen  $v$  des Gesamtvolumens  $V$  beherrscht durch das Gesetz (H. A. LORENTZ)

$$\overline{(\Delta\omega)^2} = k \frac{V}{v} \left[ -T \left. \frac{(\partial\omega/\partial v)^2}{\partial p/\partial v} \right|_T + T^2 \cdot \left. \frac{(\partial\omega/\partial T)^2}{\partial E/\partial T} \right|_v \right].$$

$$\left[ \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_v = c_v = \text{spezifische Wärme} \right].$$

1. Beispiel.  $\omega = \rho =$  Dichte = Masse pro Volumeinheit

$$(\Delta\rho)^2 = \frac{k}{v} \cdot \frac{T\rho}{\partial p/\partial \rho}.$$

Bei einem idealen Gase, mit  $N$  Molekülen pro Volumeinheit,  $n = Nv$  Molekülen in  $v$ , wo  $p = kNT = \frac{k\rho}{m} T$ , wird

$$\overline{(\Delta N)^2} = \frac{N}{v}, \quad \overline{(\Delta n)^2} = n.$$

2. Beispiel.  $\omega = E =$  Energie pro Volumeinheit. In einer inkompressiblen Substanz ( $\partial p/\partial \rho = \infty$ ) wird

$$\overline{(\Delta E)^2} = \frac{kT^2}{\rho v} \cdot \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_v.$$

### 19. Binomial-Koeffizienten $\binom{m}{n}$

$n$  ist hier immer eine ganze positive Zahl.  
 $m$  kann beliebige positive oder negative Werte haben.

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$m = 1$	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

$n =$	1	2	3	4	5	6	7
$m = -1$	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1
-2	-2	+3	-4	+5	-6	+7	-8
-3	-3	+6	-10	+15	-21	+28	-36
-4	-4	+10	-20	+35	-56	+84	-120
-5	-5	+15	-35	+70	-126	+210	-320

$n =$	1	2	3	4	5	6
$m = -7$	-7	63	-231	3003	-9009	51051
-2	-2	8	-18	128	-256	1024
-5	-5	35	-105	1155	-3003	15015
-2	-2	8	-18	128	-256	1024
-3	-3	15	-35	315	-693	3003
-2	-2	8	-18	128	-256	1024
-1	-1	3	-5	35	-63	231
-2	-2	8	-18	128	-256	1024

1	1	-1	+1	-5	+7	-21
2	2	-8	+16	-128	+256	-1024
3	3	+3	-1	+3	-3	+7
2	2	+8	-18	+128	-256	+1024
5	5	+15	+5	-5	+3	-5
2	2	+8	+18	-128	+256	-1024
7	7	+35	+35	-35	+7	-7
2	2	+8	+18	+128	-256	+1024

$n =$	1	2	3	4	5	6
$m = -4$	-4	14	-140	455	-1456	13832
-3	-3	9	-81	243	-729	6561
-2	-2	5	-40	110	-308	5236
-3	-3	9	-81	243	-729	6561
-1	-1	2	-14	35	-91	728
-3	-3	9	-81	243	-729	6561

1	1	-1	+5	-10	+22	-164
3	3	-9	+81	-243	+729	-6561
2	2	-1	+4	-7	+14	-91
3	3	-9	+81	-243	+729	-6561
4	4	+2	+4	-5	+8	-44
3	3	+9	-81	+243	-729	+6561

$n =$	1	2	3	4	5	6
$m =$						
5	5	45	195	3315	13023	348075
4	4	32	128	2048	8192	32768
3	3	21	77	1155	4389	100947
4	4	32	128	2048	8192	32768
1	1	5	15	105	603	13023
4	4	32	128	2048	8192	32768
1	1	3	7	77	231	4389
4	4	32	128	2048	8192	32768
3	3	3	5	45	117	1989
4	4	32	128	2048	8192	32768
5	5	5	5	35	77	1155
4	4	32	128	2048	8192	32768

20. Reihen-Koeffizienten.

$n$	$\frac{1}{n}$	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$	$n!$	$1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)$	$2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n$
1	1,00000	1,00000	1	1	2
2	0,50000	1,50000	2	3	8
3	0,33333	1,83333	6	15	48
4	0,25000	2,08333	24	105	384
5	0,20000	2,28333	120	945	3840
6	0,16667	2,45000	720	10395	46080
7	0,14286	2,59286	5040	135135	645120
8	0,12500	2,71786	40320	2027025	10321920
9	0,11111	2,82897	362880	34459425	185794560
10	0,10000	2,92897	3628800	654729075	3715891200
..	.....	.....	.....	.....	.....
$\infty$	0	$\ln n + C$ (vgl. S. 32)	$\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$	$2^{n + \frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$	$2^n \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

$n$	$\frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}$	$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}$	
1	1,00000	0,50000	0,66667	Erläuterung: In der letzten Zeile sind jeweils asymptotische Ausdrücke für $n \rightarrow \infty$ angegeben. Die eingeklammerten Zahlen sind die für $n = 10$ nach diesen asymptotischen Formeln berechneten Näherungen.
2	0,66667	0,37500	0,53333	
3	0,40000	0,31250	0,45714	
4	0,22857	0,27344	0,40635	
5	0,12698	0,24609	0,36941	
6	0,06926	0,22559	0,34099	
7	0,03730	0,20947	0,31826	
8	0,01989	0,19638	0,29954	
9	0,01053	0,18547	0,28377	
10	0,00554	0,17620	0,27026	
..	.....	.....	(0,280 oder 0,267)	
$\infty$	$\sqrt{\pi n} \cdot 2^{-n}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$	$2 \sqrt{\frac{\pi}{n}}, \frac{\sqrt{\pi n}}{2n+1}$	

## 21. Elektrizitätsmängeneinheiten.

	CGS stat.	CGS magn.	Amp. sec (= Coulomb)	Grammäquiv.	Elektronen- ladung	Gramm Ag	cm <sup>3</sup> Knallgas
CGS stat. . . . .	1	$0,33 \cdot 10^{-10}$	$0,33 \cdot 10^{-9}$	$3,45 \cdot 10^{-15}$	$2,10 \cdot 10^9$	$0,369 \cdot 10^{-12}$	$0,057 \cdot 10^{-9}$
CGS magn. . . . .	$3 \cdot 10^{10}$	1	10	$1,037 \cdot 10^{-4}$	$6,41 \cdot 10^{18}$	$1,118 \cdot 10^{-2}$	1,74
Amp. sec (= Coulomb) . . . . .	$3 \cdot 10^9$	0,1	1	$1,037 \cdot 10^{-5}$	$6,41 \cdot 10^{18}$	$1,118 \cdot 10^{-3}$	0,1740
$L \cdot e$ = Grammäquiv. . . . .	$2,896 \cdot 10^{14}$	$9,654 \cdot 10^3$	$9,654 \cdot 10^4$	1	$6,19 \cdot 10^{23}$	$1,069 \cdot 10^2$	$0,165 \cdot 10^5$
Elektronenladung . . . . .	$4,77 \cdot 10^{-10}$	$1,59 \cdot 10^{-20}$	$1,59 \cdot 10^{-19}$	$1,62 \cdot 10^{-24}$	1	$1,753 \cdot 10^{-22}$	$0,271 \cdot 10^{-19}$
Gramm Ag . . . . .	$2,71 \cdot 10^{12}$	$0,894 \cdot 10^2$	$0,894 \cdot 10^3$	$9,35 \cdot 10^{-3}$	$5,69 \cdot 10^{21}$	1	$0,154 \cdot 10^3$
cm <sup>3</sup> Knallgas . . . . .	$1,76 \cdot 10^{10}$	0,581	5,81	$6,07 \cdot 10^{-5}$	$3,69 \cdot 10^{19}$	$0,649 \cdot 10^{-2}$	1

## 22. Energieeinheiten.

	erg	mkg	PSh	Watt sec	kWh	Liter-at	g-cal	e-Volt	Lichtquant $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ für $\lambda = 1 \text{ cm.}$	Energie je Frei- heitsgrad $\frac{1}{2} k T$ für $T = 1^\circ \text{ abs.}$
erg . . . . .	1	$1,02 \cdot 10^{-8}$	$3,77 \cdot 10^{-14}$	$10^{-7}$	$2,78 \cdot 10^{-14}$	$9,86 \cdot 10^{-10}$	$2,39 \cdot 10^{-8}$	$6,29 \cdot 10^{11}$	$5,09 \cdot 10^{15}$	$1,458 \cdot 10^{16}$
mkg . . . . .	$9,81 \cdot 10^7$	1	$3,69 \cdot 10^{-6}$	9,81	$2,72 \cdot 10^{-6}$	$9,67 \cdot 10^{-2}$	2,34	$6,17 \cdot 10^{19}$	$4,99 \cdot 10^{23}$	$1,430 \cdot 10^{24}$
PSh . . . . .	$2,65 \cdot 10^{13}$	$2,70 \cdot 10^5$	1	$2,65 \cdot 10^6$	0,737	$2,61 \cdot 10^4$	$6,33 \cdot 10^5$	$1,67 \cdot 10^{25}$	$1,35 \cdot 10^{29}$	$3,86 \cdot 10^{29}$
Watt sec . . . . .	$10^7$	0,102	$3,77 \cdot 10^{-7}$	1	$2,78 \cdot 10^{-7}$	$9,86 \cdot 10^{-3}$	0,239	$6,29 \cdot 10^{18}$	$5,09 \cdot 10^{22}$	$1,458 \cdot 10^{23}$
kWh . . . . .	$3,6 \cdot 10^{13}$	$3,67 \cdot 10^5$	1,36	$3,6 \cdot 10^6$	1	$3,55 \cdot 10^4$	$8,61 \cdot 10^5$	$2,26 \cdot 10^{25}$	$1,83 \cdot 10^{29}$	$5,25 \cdot 10^{29}$
Liter-at . . . . .	$1,0133 \cdot 10^8$	$1,03 \cdot 10^1$	$3,82 \cdot 10^{-5}$	$1,0133 \cdot 10^2$	$2,81 \cdot 10^{-5}$	1	24,2	$6,37 \cdot 10^{20}$	$5,15 \cdot 10^{24}$	$1,476 \cdot 10^{25}$
g-cal . . . . .	4,188	0,427	$1,58 \cdot 10^{-6}$	4,188	$1,16 \cdot 10^{-6}$	$4,13 \cdot 10^{-2}$	1	$2,64 \cdot 10^{19}$	$2,13 \cdot 10^{23}$	$6,11 \cdot 10^{23}$
e-Volt . . . . .	$1,59 \cdot 10^{-12}$	$1,62 \cdot 10^{-20}$	$6,00 \cdot 10^{-26}$	$1,59 \cdot 10^{-19}$	$4,42 \cdot 10^{-26}$	$1,57 \cdot 10^{-21}$	$3,80 \cdot 10^{-20}$	1	$8,10 \cdot 10^3$	$2,32 \cdot 10^4$
$h\nu$ ( $\lambda = 1 \text{ cm.}$ ) . . . . .	1,965	$2,00 \cdot 10^{-24}$	$7,41 \cdot 10^{-30}$	$1,965 \cdot 10^{-23}$	$5,46 \cdot 10^{-30}$	$1,94 \cdot 10^{-25}$	$4,70 \cdot 10^{-24}$	1	1	1
$\frac{1}{2} k T$ ( $T = 1^\circ$ ) . . . . .	6,86	$7,00 \cdot 10^{-25}$	$2,59 \cdot 10^{-30}$	$6,86 \cdot 10^{-24}$	$1,91 \cdot 10^{-30}$	$6,77 \cdot 10^{-26}$	$1,64 \cdot 10^{-24}$	$4,31 \cdot 10^{-5}$	$3,49 \cdot 10^{-1}$	1

1 PS sec = 75 mkg = 736 Watt sec (Joule).

### 23. Universelle Konstanten.

Wirkungsquantum . . . . .	$\hbar = 6,547 \cdot 10^{-27}$ erg sec
Elektronenladung . . . . .	$e = 4,770 \cdot 10^{-10}$ g <sup>1/2</sup> cm <sup>3/2</sup> sec <sup>-1</sup> (d. h. e.-st. CGS) $= 1,591 \cdot 10^{-20}$ Coulomb
Lichtgeschwindigkeit . . . . .	$c = 2,998 \cdot 10^{10}$ cm sec <sup>-1</sup>
Feinstrukturkonstante . . . . .	$\alpha = 2 \pi e^2 / \hbar c = 1/137,3 = 0,00728$
Masse des Protons . . . . .	$m = 1,660 \cdot 10^{-24}$ g ( $m c^2 = 9,40 \cdot 10^8$ e-Volt)
Masse des Elektrons . . . . .	$\mu = 9,03 \cdot 10^{-28}$ g ( $\mu c^2 = 0,51 \cdot 10^8$ e-Volt)
Verhältnis beider . . . . .	$m/\mu = 1838,4$
RYDBERGSche Konstante . . . . .	$R = 2 \pi^2 \mu e^4 / \hbar^3 c = 109737,1$ cm <sup>-1</sup> $Rc = 3,290 \cdot 10^{15}$ sec <sup>-1</sup>
Radius der 1. BOHRschen Wasserstoffbahn . . . . .	$a_1 = \hbar^2 / 4 \pi^2 \mu e^2 = 0,532 \cdot 10^{-8}$ cm
COMPTON-Wellenlänge . . . . .	$\frac{\lambda}{2\pi} = \hbar / 2 \pi \mu c = 3,848 \cdot 10^{-11}$ cm = $\frac{24,18 \cdot 10^{-11}}{2\pi}$ cm
„Elektronenradius“ . . . . .	$a = e^2 / \mu c^2 = 2,82 \cdot 10^{-13}$ cm
BOLTZMANNsche Konstante . . . . .	$k = 1,371 \cdot 10^{-16}$ erg Grad <sup>-1</sup>
LOSCHMIDTSche Zahl (AVOGADROsche Konstante) . . . . .	$L = 6,06 \cdot 10^{23}$ Mol <sup>-1</sup>
STEFANSche Konstante . . . . .	$\sigma = 7,624 \cdot 10^{-15}$ erg cm <sup>-3</sup> Grad <sup>-4</sup>
Gravitationskonstante . . . . .	$G = 6,66 \cdot 10^{-8}$ g <sup>-1</sup> cm <sup>3</sup> sec <sup>-2</sup>

Eine ausführliche Diskussion der wahrscheinlichsten Werte für die universellen Konstanten findet man bei R. T. BIRGE: Rev. of Modern Physics, Vol. 1,1 (1929).

## Literaturverzeichnis.

Im folgenden sind einige Bücher angegeben, aus denen man sich über Einzelheiten informieren kann, deren Darstellung den für dies Buch gezogenen Rahmen überschreiten würde. Eine Vollständigkeit in den Literaturangaben wird dabei in keiner Weise angestrebt.

Erster Teil.

### Mathematik.

An zusammenfassenden Darstellungen, die den größten Teil des behandelten Stoffes umfassen, seien genannt:

COURANT, R. u. D. HILBERT: Methoden der mathematischen Physik, 2. Aufl., Bd. 1. Berlin: Julius Springer 1931.

FRANK, PH. u. R. V. MISES: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik (zugleich 7. Aufl. von RIEMANN-WEBERS Partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik). Bd. 1: Mathematischer Teil. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn 1931.

PASCAL, E.: Repertorium der höheren Mathematik. Bd. 1: Analysis, 2. Aufl., 3 Teilbde. Berlin: B. G. Teubner 1910—29.

WHITTAKER, E. T. and G. N. WATSON: A Course of Modern Analysis. Fourth Edition. Cambridge, University Press 1927.

Zu den einzelnen Abschnitten sei auf folgende Werke hingewiesen:

#### 1. Abschnitt: Differential- und Integralrechnung.

BIEBERBACH, L.: Differential- und Integralrechnung, 3. Aufl., 2 Bde. Berlin: Julius Springer 1928.

COURANT, R.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, 2. Aufl., 2 Bde. Berlin: Julius Springer 1930/31.

MANGOLDT, H. v.: Einführung in die höhere Mathematik, 3 Bde, 4. Aufl. Leipzig: S. Hirzel 1923—27.

SERRET-SCHEFFERS: Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, 6. und 7. Aufl., 3 Bde. Leipzig: B. G. Teubner 1914—21.

#### 2. Abschnitt: Reihen und Reihenentwicklungen.

KNOPP, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl. Berlin: Julius Springer 1931.

#### 3. Abschnitt: Funktionen.

BURKHARDT, H.: Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, 5. Aufl. (besorgt von G. FABER). Berlin 1921.

HURWITZ, A. † u. R. COURANT: Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 3. Aufl. Berlin: Julius Springer 1929.

KNOPP, K.: Funktionentheorie. Sammlung GÖSCHEN Nr. 668 und 703.

#### *Speziell zu den Kugelfunktionen.*

HEINE, E.: Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl., 2 Bde. Berlin: Reimer 1878—81.



*Zu den Zylinderfunktionen.*

NIELSEN, N.: Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. Leipzig: B. G. Teubner 1904.

SCHAFHEITLIN, P.: Die Theorie der BESSELSchen Funktionen. Leipzig: B. G. Teubner 1908.

WATSON, G. N.: A treatise on the theory of BESSEL functions. Cambridge: University Press 1922.

*Zu den elliptischen Funktionen.*

FRICKE, R.: Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen, 2 Bde. Leipzig: B. G. Teubner 1916—22.

HURWITZ, A. † u. R. COURANT: Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 2. Aufl. Berlin: Julius Springer 1929.

KRAUSE, M. u. E. NAETSCH: Theorie der elliptischen Funktionen. Leipzig: B. G. Teubner 1912.

*Zu sonstigen speziellen Funktionen.*

STRUTT, M. J. O.: LAMESche, MATHIEUSche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. Ergebnisse der Mathematik, Bd. 1, H. 3. Berlin: Julius Springer 1932.

*Funktionentafeln.*

HAYASHI, K.: Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen, sowie der Funktionen  $e^{-x}$  und  $e^x$  mit den natürlichen Zahlen als Argument. Berlin u. Leipzig: de Gruyter & Co. 1921.

JAHNKE, E. u. F. EMDE: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, 2. Aufl. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1933.

## 4. Abschnitt: Algebra.

BORN, M. u. P. JORDAN: Elementare Quantenmechanik. Berlin: Julius Springer 1930. 2. Kapitel: Matrizenrechnung.

KOWALEWSKI, G.: Einführung in die Determinantentheorie. Leipzig: de Gruyter & Co. 1909.

MUIR: Theory of Determinants.

NETTO, E.: Die Determinanten. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1910.

WINTNER, A.: Spektraltheorie der unendlichen Matrizen. Leipzig: S. Hirzel 1929.

## 6. Abschnitt: Vektoranalysis.

## A. Koordinatenfreie Formulierung.

ABRAHAM, M. u. R. BECKER: Theorie der Elektrizität, 9. Aufl., Bd. 1. Leipzig: B. G. Teubner 1932.

GANS, R.: Vektoranalysis (mit Anwendungen), 6. Aufl. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1929.

IGNATOWSKI, W. v.: Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik, 2 Teile. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1926.

LAGALLY, M.: Vorlesungen über Vektorrechnung. Leipzig: AVG 1928, 2. Aufl. 1934.

RUNGE, C.: Vektoranalysis. Leipzig: S. Hirzel 1921.

SPIELREIN, J.: Vektorrechnung. Stuttgart: Konrad Wittwer 1927.

## B. Koordinatenmäßige Formulierung.

SCHOUTEN, J. A.: Der RICCI-Kalkül. Berlin: Julius Springer 1924.

Sämtliche Lehrbücher der allgemeinen Relativitätstheorie (s. u.).

## 8. Abschnitt: Gruppentheorie.

SPEISER, A.: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Berlin: Julius Springer 1923.

WAERDEN, B. L. VAN DER: Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik. Berlin: Julius Springer 1932.

WEYL, H.: Gruppentheorie und Quantenmechanik, 2. Aufl. Leipzig: S. Hirzel 1931.

WIGNER, E.: Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn 1931.

Originalabhandlungen zur Darstellungstheorie.

Darstellungen der orthogonalen Gruppe.

SCHUR, I.: Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie. 1. Mitteilung. Sitzsber. Akad. Berlin 1924, 189—208; 2. Mitteilung. Sitzsber. Akad. Berlin 1924, 297—321. Über die Darstellung der Drehungsgruppe durch lineare homogene Substitutionen. 3. Mitteilung. Sitzsber. Akad. Berlin 1924, 346—355. Vereinfachung des Integralkalküls. Realitätsfragen.

Darstellungen der symmetrischen und linearen Gruppen.

SCHUR, I.: Über die rationalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe. Sitzsber. Akad. Berlin 1927, 58.

Darstellungstheorie kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen.

WEYL, H.: Math. Z. **23**, 271 (1925); **24**, 328, 377 (1926).

## 9. Abschnitt: Differentialgleichungen.

BATEMAN, H.: Partial differential equations of mathematical physics. Cambridge: University Press 1932.

HORN, J.: Gewöhnliche Differentialgleichungen (Sammlung SCHUBERT, Bd. 50) und partielle Differentialgleichungen (Sammlung SCHUBERT, Bd. 60). Leipzig: de Gruyter & Co.

JORDAN, C.: Cours d'analyse. Paris: Gauthier-Villars.

VALLEE-POUSSIN, DE LA: Cours d'analyse, Tome 2. Paris: Gauthier-Villars.

WEBSTER, A. G. u. G. SZEGÖ: Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1930.

## 10. Abschnitt: Integralgleichungen.

HELLINGER, E. u. O. TOEPLITZ: Artikel in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner.

HILBERT, D.: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen (6 Abhandlungen). Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1912.

KNESER, A.: Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik, 2. Aufl. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn 1922.

WIARDA, G.: Integralgleichungen. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1930.

## 11. Abschnitt: Variationsrechnung.

BOLZA, O.: Vorlesungen über Variationsrechnung. Leipzig u. Berlin: Köhler 1909.

KNESER, A.: Lehrbuch der Variationsrechnung. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn 1925.

## 12. Abschnitt: Wahrscheinlichkeitsrechnung.

CZUBER, W. R.: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig: B. G. Teubner.

LORENTZ, H. A.: Les théories statistiques en thermodynamique. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1916.

- MARKOFF: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig: B. G. Teubner.  
 MISES, R. v.: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig u. Wien: Franz Deuticke  
 1931.  
 POINCARÉ, H.: Calcul de probabilité. Paris: Gauthier-Villars.

## Zweiter Teil.

**Physik.**

- An zusammenfassenden Darstellungen seien genannt:  
 Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. 4 (Mechanik) und Bd. 5  
 (Physik). Leipzig: B. G. Teubner 1901—26.  
 GANS, R. u. H. WEBER: Repertorium der mathematischen Physik, Bd. 1: Me-  
 chanik und Wärme, 2 Teile. Leipzig: B. G. Teubner 1915/16.  
 GEIGER, H. u. K. SCHEEL: Handbuch der Physik, 24 Bde, zum Teil in 2. Aufl.  
 Berlin: Julius Springer seit 1926.  
 JOOS, G.: Lehrbuch der theoretischen Physik, 2. Aufl. Leipzig: AVG 1934,  
 2. Aufl.  
 PLANCK, M.: Einführung in die theoretische Physik, 5 Bde. Leipzig: S. Hirzel  
 1922—30.

Zu den einzelnen Abschnitten seien die folgenden Werke erwähnt:

## 1. Abschnitt: Mechanik.

- KLEIN, F. u. A. SOMMERFELD: Über die Theorie des Kreisels, 4 Hefte. Leipzig:  
 B. G. Teubner 1910—23.  
 ROUTH: Dynamik der Systeme starrer Körper. Leipzig: B. G. Teubner.  
 LAMB, H.: Lehrbuch der Hydrodynamik, 2. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner 1931.  
 LOVE, A. E. H.: Lehrbuch der Elastizität. Deutsch von A. TIMPE. Leipzig:  
 B. G. Teubner 1907. (Neueste, englische Auflage: 1927.)  
 PRANDTL, L. u. O. TIETJENS: Hydro- und Aeromechanik nach Vorlesungen  
 von L. PRANDTL, 2 Bde. Berlin: Julius Springer 1929/31.  
 WHITTAKER, E. T.: Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper.  
 Berlin: Julius Springer 1924.

## 2. Abschnitt: Elektrodynamik (einschließlich Optik).

- ABRAHAM, M. u. R. BECKER: Theorie der Elektrizität. Bd. 1: Einführung  
 in die MAXWELLSche Theorie, 9. Aufl., 1932. Bd. 2: Elektronentheorie, 6. Aufl.,  
 Leipzig: B. G. Teubner 1933.  
 BORN, M.: Optik. Berlin: Julius Springer 1933.  
 FRENKEL, J.: Lehrbuch der Elektrodynamik. 2 Bde. Berlin: Julius Springer  
 1926/28.  
 SCHAEFER, C.: Einführung in die MAXWELLSche Theorie der Elektrizität und  
 des Magnetismus. Leipzig: B. G. Teubner 1929.

## 3. Abschnitt: Relativitätstheorie.

- EDDINGTON, SIR A.: Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung. Berlin:  
 Julius Springer 1925.  
 EINSTEIN, A.: Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie, 2. Aufl. Braunschweig:  
 F. Vieweg & Sohn 1923.  
 LAUE, M. v.: Die Relativitätstheorie, 2 Bde. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn  
 1921/23.  
 LORENTZ, H. A., A. EINSTEIN u. H. MINKOWSKI: Das Relativitätsprinzip.  
 Eine Sammlung von Abhandlungen, 4. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner 1922.  
 PAULI, W. jr.: Relativitätstheorie. Artikel in der Enzyklopädie der mathe-  
 matischen Wissenschaften, Bd. 5, Teil 2, H. 4. Leipzig: B. G. Teubner 1922.  
 WEYL, H.: Raum, Zeit, Materie, 5. Aufl. Berlin: Julius Springer 1923.

## 4. Abschnitt: Quantentheorie.

## Zur „alten“ Quantentheorie:

BORN, M.: Vorlesungen über Atommechanik, Bd. 1. Berlin: Julius Springer 1925.

SOMMERFELD, A.: Atombau und Spektrallinien, 5. Aufl. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn 1933.

## Zur Quantenmechanik:

Ausführliches Sammelwerk: Handbuch der Physik, Bd. 24, 1. und 2. Aufl. Berlin: Julius Springer 1933/34.

BORN, M. u. P. JORDAN: Elementare Quantenmechanik. Berlin: Julius Springer 1930.

DIRAC, P. A. M.: Die Prinzipien der Quantenmechanik. Leipzig: S. Hirzel 1930.

HEISENBERG, W.: Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie. Leipzig: S. Hirzel 1930.

SCHRÖDINGER, E.: Abhandlungen zur Wellenmechanik, 2. Aufl. Leipzig: Johann Ambrosius Barth 1928.

SOMMERFELD, A.: Atombau und Spektrallinien, wellenmechanischer Ergänzungsband. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn 1929.

WEYL, H.: Gruppentheorie und Quantenmechanik, 2. Aufl. Leipzig: S. Hirzel 1931.

## 5. Abschnitt: Thermodynamik.

GIBBS, J. W.: The Collected Works, Vol. 1. London 1928.

SACKUR, O. †: Lehrbuch der Thermochemie und Thermodynamik, 2. Aufl. von CL. v. SIMSON. Berlin: Julius Springer 1928.

## 6. Abschnitt: Statistische Methoden.

BRILLOUIN, L.: Die Quantenstatistik und ihre Anwendung auf die Elektronentheorie der Metalle. Berlin: Julius Springer 1931.

GIBBS, J. W.: The Collected Works, Vol. 2. London 1928.

JORDAN, P.: Statistik auf quantentheoretischer Grundlage. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn 1933.

LORENTZ, A. H.: Les théories statistiques en thermodynamique. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1916.

## Sachverzeichnis.

- Abbildung 37, 42, 98.  
ABELSche Gruppen 152.  
Abgeschlossenes Intervall 34.  
Abgeschlossenheit eines Orthogonalsystems 25.  
Abhängigkeit, lineare 24.  
Abschätzung bestimmter Integrale 11.  
Abschnitt einer unendlichen Matrix 91.  
Absolut integrierbar 34.  
Absoluter Betrag 35.  
Absorption von Strahlung 311f.  
Additionstheorem der Geschwindigkeiten 274.  
Adiabatenhypothese 289.  
Adiabatisch 318, 332.  
Adjungierte Matrix 87.  
Adjungierter Differentialausdruck 174.  
Ähnlichkeitstransformation 101.  
Äquivalenz von Darstellungen 157.  
Äußeres Produkt 111.  
Algebraische Funktion 45.  
Allgemeine Lösung linearer homogener Gleichungen 80.  
Alternativsatz 80f., 196, 209f.  
Alternierende Matrix 88.  
Amplitude 35.  
Analytische Fortsetzung 38.  
— Funktion 36.  
Anfangsbedingungen 170.  
Anfangsstreifen 204.  
Anfangswertprobleme 204.  
Angenäherte Berechnung von Funktionswerten 23.  
Anregungswahrscheinlichkeit 311.  
Antimetrische Matrix 88.  
Antimetrischer Tensor 124, 133, 140.  
Approximation von Funktionen durch lineare Kombinationen 22.  
— durch gebrochene Linienzüge 221.  
—, gleichmäßige 22.  
—, mittlere 22, 25.  
— von Integralen 12, 18.  
Arbeit 230.  
Arcussinus, -cosinus 50.  
Aresinus, -cosinus 51.  
Argument 35.  
Arkus 35.  
Asymptotische Darstellung von Kugelfunktionen 63.  
— Reihen 23.  
Aufbauprinzip von BOHR 359.  
Ausdehnungskoeffizient 318, 322.  
Ausgearteter Kern 221.  
Außerwesentlich singular 36.  
Austausch 300.  
Auswahlprinzip 291.  
Axiale Vektoren 140.  
Axiome 4.  
Azimutalquantenzahl 357.  
Bahnimpuls 307.  
Bedingung A 23.  
— B 26.  
— D 26.  
Belegungsfunktion 24.  
Benachbarte Gruppenelemente 156.  
BERNOULLISCHE Zahlen 21.  
Berührungstransformation 104.  
Beschränkte Matrix 91.  
BESSEL-Funktionen 67.  
—, Entwicklung nach 30.  
BESSELSche Differentialgleichung 67, 68, 184.  
— Ungleichung 25.  
Bestimmte Integrale 41.  
Betafunktion 13.  
Betrag eines Vektors 130.  
Betragsfläche 44.  
Bewegungsgröße 230.  
Bezugssystem, bewegtes 129, 232, 271.  
Bilinearreihe 211.  
Binomialkoeffizienten 96.  
BIOT-SAVARTSches Gesetz 255.  
BOLTZMANNsche Konstante 336.  
BOSE-Statistik 341f.  
Brechungsindex, komplexer 265.  
BRUNSSche Reihe 31.

- CARNOTScher Prozeß 319.  
 CAUCHY-RIEMANNSche Gleichungen 36.  
 CAUCHYSche Integralformel 37.  
 CAUCHYScher Integralsatz 37.  
 Charakter einer Darstellung 157.  
 Charaktere der symmetrischen Gruppen 164.  
 Charakteristische Gleichung einer Matrix 89.  
 Charakteristisches Polynom 89.  
 — System (partielle Differentialgleichungen) 190.  
 Charakteristiken 191.  
 Chemische Konstante 331.  
 CHISTOFFELSche Formeln 135.  
 — Klammersymbole 351.  
 CLAIRAUTSche Differentialgleichung 171.  
 CLAUDIUS-CLAPEYRONSche Gleichung 327.  
 COMPTON-Wellenlänge 305.  
  
 D'ALEMBERTSches Prinzip 237.  
 DALTONSches Gesetz 323.  
 Darstellung beliebig gegebener Funktionen 22.  
 — durch Reihenentwicklungen 25.  
 — linearer Transformationen durch Operatoren 100.  
 Darstellungen einer Gruppe 157.  
 —, beschränkte 157.  
 —, irreduzible des direkten Produkts 160.  
 — der Drehungsgruppen 163.  
 — der symmetrischen Gruppen 164.  
 Deduktion 1.  
 Defekt eines Gleichungssystems 79.  
 — eines Integralkerns 209.  
 — einer unendlichen Matrix 91.  
 Definit 88.  
 Definite Formen 104.  
 — Kerne 211.  
 Deformationstensor 243.  
 Determinante 92f.  
 — eines Tensors 125, 135.  
 Determinanten-Abschätzung 93.  
 Determinanten-Differentiation 93.  
 Determinanten-Multiplikation 93.  
 —, unendliche, normale unendliche 94.  
 —, zyklische 94.  
 Diagonalmatrix 87.  
 Dielektrizitätskonstante 252.  
 Differentialgleichung, gleichdimensionale 167.  
 Differentialgleichung, Integral einer 167.  
 —, intermediäres Integral einer 168.  
 —, Systeme linearer Differentialgleichungen 186.  
 — — — von elliptischem, hyperbolischem, parabolischem Typ 191.  
 Differential totales 5.  
 Differentiation 4f.  
 — einer Matrix 85.  
 —, gliedweise 19, 20.  
 —, logarithmische 4.  
 —, numerische 18.  
 Differenzenquotient 16.  
 Differenzierbar 34.  
 Dilatation 243, 247.  
 Dilatationskern 247.  
 Dimensionen elektrischer Größen 354.  
 —, physikalische 228.  
 Dipol 120, 251.  
 Dipolstrahlung 264.  
 DIRACsche Gleichung 304f.  
 Direktes Produkt von Gruppen 154.  
 — — von Matrizen 85.  
 DIRICHLETSche Bedingungen 26.  
 — Funktion (diskontinuierlicher Faktor) 14.  
 Dispersion der Wahrscheinlichkeit 224.  
 Divergent 19.  
 Divergenz eines Vektors 113.  
 — bei speziellen Koordinaten 143f.  
 Doppelquelle 44, 120.  
 Doppelschicht 121.  
 Doppeltperiodische Funktionen 75f.  
 Drehimpuls 239, 296f., 306f.  
 Drehimpulsoperator 296f.  
 Drehmoment 240, 295.  
 Drehspiegelungsgruppe 155, 163.  
 Drehung 102.  
 Drehungsgruppe 163.  
 Drehungskern 247.  
 Drei-Indizes-Symbole 135, 351.  
 — bei orthogonalen Koordinaten 139.  
 — bei speziellen Koordinaten 141f.  
 Druck 244, 249.  
 Dynamische Grundgleichung 229, 236.  
  
 Ebene Welle 265.  
 Eigenfunktionen 170, 198f., 210, 294f.  
 Eigenlösungen 82, 90, 170, 210.  
 Eigenwerte 82, 89, 170, 210, 294f.  
 —, einfache 206.  
 —, mehrfache 207.

- Eigenwertprobleme 161, 170.  
 Eigenwert- und Variationsprobleme 217.  
 Eigenzeit 273.  
 Eikonal 267.  
 Einfache Gruppen 155.  
 Einheitselement 152.  
 Einheitsensor 125.  
 Einheitsvektor 110.  
 EINSTEIN-Effekte 355f.  
 Elastizitätsmodul 245, 318.  
 Elastizitätstheorie 244f.  
 Elektronengas 359.  
 Elektronentheorie, klassische 263f.  
 Elementare transzendente Funktionen 49.  
 Elliptische Funktionen 75f.  
 — —, Reihendarstellung 33.  
 — Integrale 14f., 74.  
 — —, unvollständige, vollständige 75.  
 — Koordinaten 148f.  
 Elliptischer Typ (einer Differentialgleichung) 191, 201.  
 Emission von Strahlung 311f.  
 EMK. 254, 260, 279.  
 Energieoperator 296.  
 Energiesatz 230.  
 Entartet (Eigenwert) 170, 299.  
 Enthalpie 317.  
 Entropie 316, 333, 340, 342.  
 Entwicklungen nach BESSEL-Funktionen 30.  
 — nach Eigenlösungen 82.  
 — nach HERMITESchen Polynomen 31.  
 — nach LAGUERRESchen Polynomen 31.  
 — nach Orthogonalsystemen 24.  
 —, spezielle orthogonale 26.  
 — nach TSCHEBYSCHEFFSchen Polynomen 31.  
 Entwicklungskoeffizienten 25.  
 Entwicklungssatz 214.  
 — für Determinanten 92.  
 Enveloppe 169.  
 Ergiebigkeit einer Quelle 120.  
 Ergodisches System 332.  
 Erwartungswert 222, 295.  
 Erweiterung eines Tensors 136.  
 Erzeugende Funktion 55, 58, 105.  
 EULERSche Gleichungen der Hydrodynamik 249.  
 — — des starren Körpers 241.  
 — — der Variationsrechnung 215.  
 — Homogenitätsrelationen 34.  
 — Konstante 32, 68, 73.  
 EULERS Integral 13, 73.  
 — Summenformel 21.  
 Exakte Differentialgleichungen 180.  
 Exaktes Differential 5, 6.  
 Exponentialfunktion 49.  
 Extremalen 215.  
 Faktorgruppe 155.  
 Fakultät 73.  
 Fehlstände 96.  
 Feld, quellenfreies 117.  
 —, skalares 109.  
 —, Vektor- 109, 116.  
 —, wirbelfreies 116.  
 Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie 283.  
 Feldstärke, elektrische 251.  
 —, magnetische 254.  
 FERMATSches Prinzip 238, 267.  
 FERMI-Statistik 341f.  
 Flächendivergenz 121.  
 Flächengradient 121.  
 Flächenintegral 122.  
 Flächenrotation 122.  
 Flächensatz 230.  
 Flächentheorie 142.  
 Fließende Koordinaten 232.  
 FOURIER-Integral 27f., 345.  
 FOURIER-Koeffizienten 25.  
 FOURIER-Reihe 27f.  
 —, gemischte 29.  
 Freie Energie 317.  
 Freier Vektor 110.  
 Freiheitsgrad 235.  
 FRESNELSche Gleichung 269.  
 — Integrale 32.  
 Führungswelle 309f.  
 Fundamentaltensor 133.  
 — bei orthogonalen Koordinaten 139.  
 Funktion, algebraische, lineare, transzendente 45.  
 — auf einer Gruppe 153.  
 —, ganze, meromorphe 46.  
 —, rationale 9, 45.  
 Funktionaldeterminante 97.  
 Gammafunktion 73f.  
 Gas, ideales 321f.  
 Gasentartung 331.  
 Gaskonstante 317, 322.  
 Gastheorie, kinetische 337f.  
 GAUSSSche Differentialgleichung 184, 200  
 (s. auch hypergeometrische Reihen).

- GAUSSsche Funktion 73.  
 — Zahlenebene 35, 141.  
 GAUSSscher Satz 113, 144.  
 GAUSSsches Fehlergesetz 224.  
 — Fehlerintegral 32.  
 Gemischte Komponenten eines Tensors 133.  
 Generalisierte Koordinaten 233.  
 Geodätische Linie 285.  
 Gewicht, statistisches 332, 336f.  
 GIBBSsches Paradoxon 323.  
 Gleichdimensionale Differentialgleichung 167, 179.  
 Gleichgewicht, mechanisches 236.  
 —, thermodynamisches 319f., 326f., 334.  
 Gleichmäßige Konvergenz 19, 20.  
 Gradient 112, 143f.  
 Gradiententensor 128.  
 GRAMSche Determinante 94.  
 Gravitation 283f., 286.  
 Gravitationsradius 286.  
 GREENSche Formel 196, 197.  
 — Funktion 177, 183, 201, 351.  
 GREENScher Satz 113.  
 Grundgebiet 170.  
 Grundvektoren 132.  
 Gruppe 152.  
 Gruppenpostulate 152.  
  
 HADAMARDSche Determinantenabschätzung 93.  
 Halbkonvergent 23.  
 HAMILTON-Funktion 105, 233, 282, 335.  
 HAMILTON-JACOBISCHE Gleichung 234.  
 HAMILTON-Operator 297.  
 HAMILTONSche Gleichung 107.  
 HAMILTONSches Prinzip 237, 281.  
 HANKELSche Zylinderfunktionen 68.  
 Hauptachsen eines Tensors 126.  
 Hauptachsentransformation 82.  
 Hauptquantenzahl 357.  
 Hauptsatz der Thermodynamik, erster und zweiter 314f.  
 — — dritter 329f.  
 Heaviside-Ellipsoid 264.  
 HEISENBERGSche Unschärferelationen 312, 337.  
 HERMITESche Differentialgleichung 59, 200.  
 — Einheitsform 99.  
 — Form 88, 103.  
 — Funktionen 59.  
  
 HERMITESche Matrix 87.  
 — Polynome 58f., 199.  
 — Polynomen, Entwicklung nach 31.  
 Herpolhodiekurve 241.  
 HERTZscher Vektor 263, 278.  
 HILBERT-Raum 100, 104.  
 Hohlraumstrahlung 309f., 324.  
 Homogene Differentialgleichung 166.  
 — Funktion 34.  
 — Gleichungen 80.  
 Homogenes Problem 170.  
 Homomorph 153.  
 HOOKESches Gesetz 245.  
 H-Theorem 340.  
 HURWITZSches Integral 156.  
 Hydrodynamik 248f.  
 Hyperbolische Funktionen 51.  
 Hyperbolischer Typ einer Differentialgleichung 191.  
 Hypergeometrische Polynome 57, 200.  
 — Reihe 184.  
  
 Identische Transformation 98.  
 — Untergruppe 154.  
 Imaginärteil 35.  
 Impuls 230, 281.  
 Impuls-Energie-Tensor 277, 282.  
 Impulsoperator 296.  
 —, verallgemeinerter 302.  
 Index einer Untergruppe 154.  
 Induktion 1, 252, 254, 261.  
 Induktionsgesetz 256.  
 Influenz 253.  
 Inhomogene Gleichungen 80, 176.  
 Inneres Produkt 100, 110.  
 Instantane Drehachse 239.  
 Integrale, Annäherung durch Summen 12, 18.  
 —, bestimmte 11, 115.  
 —, Differentiation von 6.  
 —, elliptische 14.  
 —, skalare, vektorielle 114, 115.  
 Integralcosinus 32.  
 Integralform, quadratische 211.  
 Integralformel CAUCHYS 37.  
 Integralgleichungen 1. Art 214.  
 — 2. Art 209.  
 — und Variationsprobleme 217.  
 Integrallogarithmus 32.  
 Integralsinus 32.  
 Integraltransformation 11.  
 Integration, gliedweise 19.  
 —, numerische 18.



- Integration, partielle 9.  
 Integrierender Faktor 180.  
 Intensität von Spektrallinien 311.  
 Intermediäres Integral 168.  
 Interpolation 18.  
 Invariante Untergruppe 155.  
 Invarianten 98f.  
 --- elliptischer Funktionen 78.  
 --- der Matrixtransformation 89.  
 --- eines Tensors 125, 135.  
 Inverse Matrix 86.  
 --- Transformation 97.  
 Inverses Gruppenelement 152.  
 Irreduzibel 158.  
 Irreversibel 319f.  
 Isomorphie 3, 153.  
 Isoperimetrisches Problem 220.  
 Isotherm 318.  
 Iterierter Kern 212, 213.  
 --- Tensor 125.
- JACOBIsche elliptische Funktionen 33, 76, 78.  
 --- Polynome 57, 200.  
 JACOBIches Prinzip der Mechanik 238.  
 JOULEsche Wärme 260.
- Kanonische Gleichungen 105, 233, 282, 335.  
 --- Matrix 86.  
 --- Transformation 105, 108.  
 --- Verteilung 334.  
 Kapazität 261.  
 Kartesische Koordinaten 141, 143.  
 KEPLER-Problem der klassischen Mechanik 349f., 352f.  
 --- der Quantenmechanik 356f.  
 Kern einer Integralgleichung 209.  
 Kettenregel 5.  
 Kinetische Energie 230, 295.  
 --- Potentiale 263.  
 KLEIN-GORDONSche Gleichung 308.  
 Kohlestäubchen, PLANCKsches 310.  
 Kollineation 101.  
 Kombinationen 96.  
 Kombinationsprinzip 291.  
 Komponenten eines Tensors 133.  
 --- eines Vektors 131.  
 Komplexe Zahl 35.  
 Kompressibilität 245, 318.  
 Konforme Abbildung 37, 42.  
 Konjugiert komplex 35.  
 Konjugierte Elemente einer Gruppe 155.  
 --- Potentialfunktion 36.  
 --- Untergruppen 155.  
 Konormale 196.  
 Konservative Kraft 230.  
 Kontinuierliche Gruppen 156f.  
 Kontinuitätsgleichung 242, 253, 282, 293, 340.  
 Kontragrediente Matrix 87.  
 Kontravariante Komponenten 131f.  
 Konvektionspotential 264.  
 Konvektionsstrom 253, 280.  
 Konvergenz 19.  
 ---, absolute 19, 20.  
 ---, bedingte 19.  
 ---, gewöhnliche 22.  
 ---, gleichmäßige 19, 20.  
 ---kreis 38, 346.  
 ---kriterien 20.  
 ---radius 38.  
 --- im TCHEBYSCHEFFschen Sinn 22.  
 Konzentration 323.  
 Korrelation 225.  
 Korrespondenzprinzip 291.  
 Kosmologische Konstante 283.  
 Kovariant 99.  
 Kovariante Gleichungen 99.  
 --- Komponenten 131f.  
 Kraftdichte 257, 280, 340.  
 Kreisel 240.  
 Kreisfunktionen im Komplexen 50.  
 ---, Formelschatz 51f.  
 Kreisprozeß 319.  
 Kreuzungspunkte 43.  
 Kristalloptik 268f.  
 Kritische Temperatur 325.  
 Krümmungstensor 137, 283f.  
 Kugelfläche, Koordinaten auf einer 142.  
 Kugelfunktionen 33, 60f., 200.  
 ---, allgemeine 64.  
 ---, asymptotische Darstellung der 63.  
 ---, Differentialgleichung der 65, 200.  
 ---, einfache oder LEGENDRESche 60, 65.  
 ---, Entwicklung nach 29.  
 ---, Orthogonalität der 62, 66.  
 ---, Reihendarstellung 33.  
 ---, symmetrische 65.  
 ---, zugeordnete 66.  
 ---, zweiter Art 61, 63.  
 Kugelkoordinaten 145.  
 Kugelwelle 266.  
 Kugelwelt 288.

- Ladung 250, 252.  
 LAGRANGE-Funktion 107, 232, 282.  
 LAGRANGESCHE Gleichungen der Variationsrechnung 215, 216.  
 — — — erster Art der Mechanik 231, 236.  
 — — — zweiter Art der Mechanik 232.  
 — — — Klammer 109.  
 — — — Multiplikatoren 216.  
 LAGUERRESCHE Differentialgleichung 58, 200, 357.  
 — — — Funktionen 58.  
 — — — Polynome 57.  
 — — — Polynomen, Entwicklung nach 31.  
 LAPLACE-Operator in speziellen Koordinaten 143f.  
 LAPLACESCHE Differentialgleichung 36, 193.  
 — — —, zweidimensional 203.  
 LAPLACESCHER Entwicklungssatz 92.  
 LAURENTSche Reihe 39.  
 LEGENDRESCHE Differentialgleichung 61, 184.  
 — — — Normalintegrale 16.  
 — — — Polynome 55, 57, 60, 65.  
 — — — Reihe 29.  
 — — — Transformation 105, 173.  
 LEGENDRESCHER Modul 15.  
 Leiter 253.  
 Leitfähigkeit, elektrische 253.  
 Lichtquant 308f.  
 Linear abhängig, unabhängig 24, 80.  
 Lineare Differentialgleichungen 173f.  
 — — — Gleichungen 79.  
 — — — mit unendlich vielen Unbekannten 81.  
 — — — Räume 99.  
 Linearer Operator 161.  
 Linienelement 132.  
 Linienintegral 112.  
 Linksinverse 91.  
 LIOUVILLESche Sätze über elliptische Funktionen 76.  
 LIOUVILLESCHER Satz der Statistik 332, 335.  
 LIPSCHITZ-Bedingung 211.  
 Logarithmische Differentiation 4.  
 Logarithmus (im Komplexen) 49.  
 Longitudinalwelle 247.  
 LORENTZ-Konvention 263.  
 LORENTZ-Kraft 259.  
 LORENTZ-Transformation 272f.  
 Lösender Kern 209.  
 Magnetisches Moment 300.  
 Magneton, BOHRSCHE 300.  
 MALUSSCHER Satz 267.  
 Masse, longitudinale 281.  
 — — —, transversale 281.  
 Massenwirkungsgesetz 328f.  
 Maßsysteme, elektrische 354f.  
 Matrix 83.  
 — — —, adjungierte 87.  
 — — —, alternierende 87.  
 — — —, begleitende 87.  
 — — —, beschränkte 91.  
 — — —, diagonale 87.  
 — — —, entartete 85.  
 — — —, gestürzte 87.  
 — — —, hermitesche 87.  
 — — —, iterierte 86.  
 — — —, kanonische 86.  
 — — —, konjugiert-komplexe 87.  
 — — —, kontragrediente 87.  
 — — —, nichtentartete 85.  
 — — —, quadratische 83.  
 — — —, reguläre 85.  
 — — —, reziproke 86.  
 — — —, schiefsymmetrische 87.  
 — — —, symmetrische 87.  
 — — —, transponierte 87.  
 — — —, unendliche 90.  
 — — —, unitäre 88, 90.  
 MAXWELLSche Gleichungen 256.  
 Mehrkörperproblem der Mechanik 234f.  
 — — — der Quantenmechanik 298f.  
 MERCERSCHER Satz 211.  
 Meromorph 46.  
 Metrischer Fundamentaltensor  $g_{ik}$  133, 137f., 139, 283f.  
 Metronomie 227.  
 Mikrokanonische Gesamtheit 335.  
 Minor 92.  
 — — —, konjugierter 92.  
 Mitführungskoeffizient 274.  
 Mittelwert 222.  
 — — — in einer Gruppe 153, 156.  
 Mittelwerte, quantenmechanische 295.  
 Mittelwertsatz der Funktionentheorie 37.  
 Modul, LEGENDRESCHER 15.  
 Moment 120.  
 Monoton gegen 0, 20.  
 — — — wachsend, fallend 34.  
 Monotone Welt erster und zweiter Art 288.  
 Multiplizität 359.

- Nabla 350.  
 NAVIER-STOKESSche Gleichung 248.  
 Nebenklasse 154.  
 NERNSTsches Wärmetheorem 329f.  
 NEUMANNsche Reihe 212.  
 — Zylinderfunktionen 68.  
 NEWTONsche Formel 222.  
 NEWTONsches Gravitationsgesetz 283.  
 Normalform einer Matrix 89.  
 — der linearen Transformationen 101.  
 Normalintegrale, elliptische 75.  
 —, LEGENDRESche 16.  
 —, Reduktion elliptischer Integrale auf 14f.  
 Normalkoordinaten 236.  
 Normalteiler 155.  
 Normiertheit eines Orthogonalsystems 23.  
 Nullmatrix 86.  
 Nulllösungen 210.  
 Nullteiler 86.  
 Nullvektor 130.  
 Nutation 242.
- Offenes Intervall 34.  
 OHMSches Gesetz 254.  
 Operator 4, 296.  
 —, linearer 161.  
 Optik 266f.  
 Optische Achsen 269.  
 Ordnung einer Gruppe 152.  
 — eines Gruppenelements 154.  
 Orthogonale Funktionen 23f., 198.  
 — Koordinaten 138.  
 — Matrix 88.  
 — Polynome 54.  
 — Transformation 102.  
 Orthogonaler Tensor 125.  
 Orthogonales Vektorsystem 100.  
 Orthogonalisierung 24.  
 Orthogonalitätsrelationen 159.  
 Orthogonalsystem 23.  
 Ortsvektor 118f.  
 Oszillator 309, 348.
- Parabolische Koordinaten 147.  
 PARSEVALSche Gleichung 25.  
 Partialbruchzerlegung 9.  
 Partialdruck 323.  
 Partialsumme 19.  
 Partielle Integration 9.  
 Partikuläre Lösungen 168.  
 PAULI-Prinzip 300f., 342.
- PAULISche Zweikomponententheorie 307f.  
 Periheldrehung 356.  
 Periode eines Gruppenelements 154.  
 Periodisch 49.  
 Periodische Welten 288.  
 Periodisches System der Elemente 359.  
 Permeabilität 254.  
 Permutation 95, 164, 301.  
 PFAFFsche Gleichungen 187, 315.  
 $\varphi$ -Funktion 77f.  
 Phasengeschwindigkeit 265.  
 Phasenmatrix 87, 90.  
 Phasenpunkt 335.  
 Phasenraum 335.  
 Phasenregel von GIBBS 328.  
 Phasentheorie 327f.  
 Phasenvolumen 332.  
 Physikalische Komponenten 138.  
 PLANCKsche Strahlungsformel 312.  
 Plangröße 351.  
 POISSONSche Gleichung 251.  
 — Integralformeln 203.  
 — Summenformel 28.  
 Pol 40, 44.  
 Polare Vektoren 140.  
 Polarisation, dielektrische 251.  
 Polarkoordinaten, ebene 141.  
 —, räumliche s. Kugelkoordinaten 145.  
 Polhodiekurve 241.  
 Polstärke 254.  
 Polynome, HERMITESche 58.  
 —, hypergeometrische 57.  
 —, JACOBISche 57.  
 —, LAGUERRESche 57.  
 —, LEGENDRESche 55.  
 —, orthogonale 54.  
 —, TSCHEBYSCHEFFSche 55.  
 Polynommethode 198.  
 Ponderomotorische Kraft 257.  
 Potential 117, 251.  
 —, skalares, vektoriell 117.  
 —, thermodynamisches 317.  
 Potentialgleichung 202.  
 Potentiallinien 43.  
 Potentialschwelle 357f.  
 Potentialströmung 249.  
 Potentielle Energie 230.  
 Potenzreihen 31.  
 Potenzreihenentwicklung analytischer Funktionen 38.  
 POYNTINGScher Vektor 260, 278.

- Praktische Berechnung von Determinanten 95.  
 — Lösung linearer Gleichungen 81.  
 Präzession 131, 242.  
 Produkt, direktes von Gruppen 154.  
 —, skalares von Tensoren 126.  
 — — (inneres) von Vektoren 110.  
 —, tensorielles 125.  
 —, vektorielles (äußeres) 111.  
 — — in kartesischen Koordinaten 143.  
 Projektive Abbildung 101.  
 Punktspektrum 198.
- Quadrate, Methode der kleinsten 22.  
 Quadratische Form 103.  
 — Matrix 83.  
 Quadraturen 168.  
 Quantensprung 289.  
 Quantenzahl 290, 294.  
 Quasieuklidische Welt 285.  
 Quelle 120.  
 Quellenfreies Feld 117, 144.  
 Quellenmäßig darstellbare Funktionen 214.  
 Quellsenke 44.  
 Querkontraktionskoeffizient 245.  
 Quotient, vorderer, hinterer 152.
- Randbedingungen 170, 195.  
 Randwertprobleme, erste bis dritte 201f.  
 Rang eines Gleichungssystems 79.  
 — einer quadratischen Form 103.  
 — einer unendlichen Matrix 91.  
 Rationale Funktionen 45.  
 Raumladung 251.  
 Realteil 35.  
 Rechtsinverse 91.  
 Reduzible Darstellungen 158.  
 Regularität einer Funktion 36.  
 Reibungskoeffizient 248.  
 Reihen 19.  
 — analytischer Funktionen 19.  
 — stetiger Funktionen 19.  
 Reihensumme von unendlichen Reihen 20, 21.  
 Relativitätsprinzip, spezielles 272.  
 —, allgemeines 283.  
 Relaxationszeit 248.  
 Residuensatz 40, 41.  
 Residuum 40.  
 Resolvente zu einer Matrix 89.  
 Resonanz, quantenmechanische 299.  
 Restklasse 154.
- RICCATISCHE Differentialgleichung 170.  
 Reziproke, vordere, hintere 91.  
 Reziprokes Gruppenelement 152.  
 RIEMANNSCHE Fläche 42, 43.  
 — Integrationsmethode 205.  
 — Kugel 45.  
 RITZSCHE Verfahren 217f.  
 Rotation 143.  
 — eines Vektors 113.  
 Ruhenergie 281.  
 Ruhmasse 280.
- Säkulargleichung 82, 89, 207.  
 Sattelpunkte 43.  
 Scherung 243.  
 Scherungswelle 247.  
 Schiefsymmetrische Matrix 88.  
 SCHMIDTSche Auflösungsformel 211.  
 Schraubung 239.  
 SCHRÖDINGER-Gleichung, zeitabhängige 293.  
 —, zeitunabhängige 294.  
 SCHURSCHE Lemma 158.  
 Schwankung 223, 341.  
 SCHWARZSCHE Ungleichung 11.  
 SCHWARZSCHILDSCHE Maßbestimmungen 286f.  
 Schwerpunkt 239.  
 Schwingung, mechanische 235, 315f.  
 Schwingungskreis, elektrischer 262.  
 Selbstadjungiert 87, 174.  
 Selbstinduktion 261.  
 Semidefinit 88.  
 Semikonvergent 23.  
 Separation der Variablen 192.  
 SIMPSONSCHE Regel 12.  
 Simultane Transformation mehrerer Matrizen 90.  
 Singuläre Lösung einer Differentialgleichung 168, 171.  
 Singularitäten 36.  
 Skalar 99, 109.  
 Skalares Produkt 100, 110.  
 Spannungskoeffizient 318, 322.  
 Spannungstensor, MAXWELLSCHER 258, 278.  
 —, mechanischer 244, 340.  
 Spektralterm 291.  
 Spektrum einer Matrix 89.  
 Spektroskopie 291, 312.  
 Spezifische Wärme 318, 322.  
 Spiegelungsprinzip 36.  
 Spin 300.

- Spinmatrizen von PAULI 305, 307.  
 Spinvariable 300.  
 Spinvektor 305.  
 Spur einer Matrix 85.  
 — eines Tensors 126, 135.  
 Stabil 236.  
 Starrer Körper 239.  
 Staupunkte 43.  
 STEFAN-BOLTZMANNSches Gesetz 313, 324.  
 Stereographische Projektion 45.  
 Stetigkeit 34.  
 STIRLINGSche Formel 74, 334.  
 STOKESScher Satz 113, 144.  
 Störungsfunktion 108.  
 Störungsrechnung 205f.  
 Stoßgleichung von MAXWELL-BOLTZMANN 339.  
 Strahl 267.  
 Strahlenfläche 270.  
 Strahlungstheorie 309f.  
 Streckenspektrum 91, 198.  
 Stromlinien 43.  
 Stückweise glatt 34.  
 — stetig 34.  
 Stufenmatrix 87.  
 STURM-LIOUVILLESches Problem 198.  
 Sukzessive Approximation 211.  
 Summenformel, EULERSche 21.  
 Summenwerte 17.  
 Symmetriegruppe eines Operators 161.  
 Symmetrische Gruppe 164.  
 — Matrix 87.  
 Symmetrischer Kern 210.  
  
 TAYLOR-Reihe 31, 38, 174.  
 Temperatur, empirische 314.  
 —, thermodynamische 316, 322.  
 Tensor 109, 123f.  
 —, antimetrischer 124, 133.  
 —, Einheits- 125.  
 —, iterierter 125.  
 —, konjugierter 124.  
 —, orthogonaler 125.  
 —, symmetrischer 124, 133.  
 Tensorellipsoid 126.  
 THOMSONSche Schwingungsformel 262.  
 Totale Differentialgleichung 187.  
 Totales Differential 5f.  
 Trägheitsellipsoid 241.  
 Trägheitsindex einer quadratischen Form 104.  
  
 Transformation von Gruppenelementen 155.  
 — der Variablen 5.  
 — von Vektoren auf beliebige Koordinaten 134.  
 — — auf bewegtes Bezugssystem 129.  
 Transformationen 97f.  
 —, affine 101.  
 —, infinitesimal-kanonische 106.  
 —, kanonische 105, 108.  
 —, LEGENDRESche 105, 108.  
 —, lineare 99.  
 —, orthogonale 102.  
 —, projektive 101.  
 — quadratischer und hermitescher Formen 103.  
 —, unitäre 90.  
 Transformationsdeterminante 97f.  
 Transformator 262.  
 Translation 102.  
 Transponierte Matrix 87.  
 Transponiertes Gleichungssystem 80, 81.  
 Transpositionen 95.  
 Transversalwelle 247.  
 Transzendenz 45.  
 Trapezformel 12.  
 Trigonometrische Funktionen im (Komplexen) 50.  
 — —, Formelschatz 51f.  
 TSCHEBYSCHEFFSche Approximation 22.  
 — Differentialgleichung 56, 200.  
 — Funktionen 56.  
 — Polynome 55, 57.  
 — —, Entwicklung nach 31.  
  
 Übergangswahrscheinlichkeit 291, 332, 338f.  
 Übermatrix 83.  
 Umwandlungswärme 327.  
 Unabhängigkeit, lineare 80.  
 Unitäre Darstellungen 157, 158.  
 — Matrix 88.  
 — Transformationen 90, 102.  
 Unitärer Raum 99.  
 Unsymmetrischer Kern 213.  
 Unterdeterminante 79, 92.  
 Untergruppe 154.  
  
 VANDERMONDSche Determinante 94.  
 Variationen (Kombinatorik) 96.  
 Variation der Konstanten 108, 181, 208.  
 Vektor 109.  
 —, komplexer 130.

- Vektorfeld 116.  
 Vektorfeldfunktion 123.  
 Vektorpotential 117, 255.  
 Vektorprodukt 111.  
 Verbiegung, dehnungslose einer Fläche 142.  
 Verdampfung 326f.  
 Verdichtungswelle 247.  
 Verjüngung des RIEMANN-CHRISTOFFEL-  
 schen Krümmungstensors 137.  
 — eines Tensors 136.  
 Verpflanzung eines Vektors 138.  
 Verschiebungsstrom 253.  
 Vertauschbarkeit von Matrizen 84.  
 Vertauschungsrelationen 297, 303, 305.  
 Verteilung, BOLTZMANNsche 335.  
 —, MAXWELLSche 341.  
 Verzweigungspunkt 40.  
 Virtuelle Verrückung 237.  
 Viskosität 248.  
 Vollständigkeit eines Funktionensystems 23.  
 — eines Invariantensystems 99.  
 Vollständigkeitsrelation 25.  
 Volumenvergrößerungsverhältnis 98.  
  
**W**ahrscheinlichkeit 221, 294, 298, 334, 343.  
 Wahrscheinlichkeitsnachwirkung 225.  
 Wand, thermodynamische 313.  
 Wärmefunktion 317.  
 WEIERSTRASSSches Normalintegral 75.  
 Wellenfunktion  $\psi$  292f.  
 Wellenzahl, komplexe 265.  
 Weltlinie 271.  
 Weltpunkt 271.  
 Welttensoren 275, 277.  
  
 Weltvektoren 272, 276.  
 Wesentlich singular 36, 40.  
 WIENSches Verschiebungsgesetz 312.  
 Windungspunkte 42.  
 Winkelvariable 107, 290.  
 Wirbelfreies Feld 116, 144.  
 Wirbellinie 122.  
 Wirbelsätze, HELMHOLTZsche, der Hydrodynamik 249.  
 Wirkung, Prinzip der kleinsten 238.  
 Wirkungsfunktion 107, 233.  
 Wirkungsquant 290.  
 Wirkungsvariable 290.  
 WRONSKISCHE Determinante 177.  
  
**Z**ähigkeit 248.  
 Zelle 336f.  
 Zentralkraft 230.  
 Zentrifugalkraft 230.  
 Zerlegung eines Vektorfeldes in quellen- und wirbelfreies Feld 144.  
 Zirkulante 94.  
 Zustandsgleichung 324f.  
 — von VAN DER WAALS 325f.  
 Zustandsvariable 313.  
 Zwang, Prinzip des kleinsten 237.  
 Zwangskraft 231.  
 Zweite Quantelung 310.  
 Zyklische Determinante 94.  
 — Gruppe 154.  
 Zylinderfunktionen 33, 66f.  
 — mit halbzahligem Parameter 70f.  
 —, Orthogonalität 70.  
 —, Reihendarstellung 33.  
 Zylinderkoordinaten 146.  
 Zylinderwelle 266.  
 Zylinderwelt 287f.