

Б.С.Флейшман

ОСНОВЫ СИСТЕМОЛОГИИ

и-
ж-
и-
ня
а.
ос
б-
ю
в-
т-
и-

гь
и,
ль

о-
и-
у-
ге
а-
ш-
о-
е-
и
о,
н-
с-
е-
ля
о-
та
и
е

ле

з

МОСКВА "РАДИО И СВЯЗЬ" 1982.

УДК 681.5

Флейшман Б. С. Основы системологии. — М.: «Радио и связь». 1982. — 368 с., ил.

Излагаются концептуальные и математические основы системологии (теории сложных систем). Приводится краткий критический обзор литературы в этой области. Демонстрируется (с помощью расчетных формул и графиков) использование системологии в актуальных областях экологии и охраны окружающей среды.

Теория сложных систем излагается как теория их потенциальной эффективности, устанавливающая пределы надежности, помехоустойчивости, управляемости, самоорганизации.

Используемый в книге комбинаторный аппарат является оригинальным.

Автор известен своими работами по теории информации и кибернетике.

Книга рассчитана на научных работников, инженеров-системотехников, экологов и математиков. Ее с интересом прочтут студенты старших курсов и аспиранты.

18 рис., 1 табл., библи. 136 назв.

Рецензенты: профессора В. Д. Зубаков, Ю. Н. Мельников

Редакция литературы по кибернетике и вычислительной технике

Бенцион Семенович Флейшман
Основы системологии

Редактор Н. Д. Иванушко

Художник Н. К. Кутилов

Художественный редактор Н. А. Игнатьев

Технические редакторы Г. З. Кузнецова, Л. К. Грачева

Корректор Н. М. Давыдова

ИБ № 146

Сдано в набор 02.11.81.	Подписано в печать 25.05.82.	Т 10 043	
Формат 84×108 ¹ / ₃₂	Бумага кн.-журн.	Гарнитура литературная	Печать высокая
Усл. печ. л. 19,32	Усл. кр.-отт. 19,32	Уч.-изд. л. 19,84	Тираж 6000 экз.
Изд. № 19581	Зак. № 1350	Цена 2 р. 50 к.	

Издательство «Радио и связь». 101000 Москва, Главпочтамт, а/я 693

Ф 270408330-113
046(01)-82—96-82

© Издательство «Радио и связь». 1982 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Системное движение, системный подход, анализ систем, системный анализ, теория систем, теория сложных систем, системология — вот метаморфозы терминов, в которых чувствуется все бóльшая претензия системологов на фундаментальность своего детища. Обоснована ли такая претензия? Ответ на этот вопрос возможен лишь при точном определении широты области системологии и рассмотрении достигнутых ею результатов. Претензия фундаментальности предъявляет к ним требования общности (широты) и конструктивности (глубины). Эти требования всегда противоречивы.

Целью этой книги является попытка обосновать претензии системологов при точном указании области, охватываемой системологией, рассматривающей лишь сложные вещественные (материальные) системы.

Очень удачный, как нам кажется, термин «системология» был впервые использован в 1971 г. В. Т. Куликом* для названия широкой области теории систем в духе Л. фон Берталанфи. Предлагаемое в данной книге сужение этой области ближе всего к кибернетике, какой она должна быть в широком понимании У. Р. Эшби. В нашей стране понимание кибернетики носит более широкий характер, чем на западе, где кибернетика часто отождествляется с теорией управления и связи в первоначальном понимании Н. Винера. Однако, включив в себя впоследствии теории надежности, информации, управления, самоорганизации и другие дисциплины, кибернетика оставалась конгломератом нефизических направлений науки до тех пор, пока для всех них не была найдена единая концептуальная основа — понятие сложной системы. Это произошло, когда стало ясным, что отдельные направления кибернетики исследуют лишь различные качества одного и того же целостного объекта — сложной системы.

* В философской литературе термин «системология» впервые был введен И. Б. Новиком (1965 г.).

Став стержневым понятием кибернетики и придав ей тем самым недостающее концептуальное единство, понятие сложной системы оправдало отождествление современной кибернетики с системологией. При этом теорию простых материальных систем — физику — естественно называть процессологией. Знаковые, языковые, логические, математические и другие идеальные системы остаются вне рамок рассмотрения этих двух наук, являясь для них лишь модельным аппаратом для исследования материальных систем. Такое сужение диктуется требованием конструктивности для любой фундаментальной науки, т. е. необходимостью формулирования (желательно в математической форме) не только общих, но и достаточно глубоких законов для рассматриваемых объектов.

В указанных рамках системология действительно предстает перед нами как фундаментальная инженерная наука, устанавливающая общие законы потенциальной эффективности сложных материальных систем как технической, так и биологической природы. При такой трактовке системологии оказывается не случайным, что у истоков ее наиболее существенного начала — теории потенциальной помехоустойчивости — стояли выдающиеся инженеры современности: В. А. Котельников [1] и К. Шеннон [2]. Единая системная интерпретация их результатов вместе с теоретико-игровыми результатами Дж. фон Неймана [3], а также наших собственных результатов в форме предельных законов потенциальной эффективности сложных систем была дана в монографии [4]. Однако в ней уделялось мало внимания концептуальным основам системологии, ее математическому аппарату, а также наиболее актуальным сейчас экологическим приложениям. Следует отметить, что на важность концептуальных основ системологии обращено внимание широких инженерных кругов сравнительно недавно [5]. В предлагаемой вниманию читателей книге делается попытка восполнить пробелы по всем трем перечисленным вопросам — каждому из них посвящается по одной из трех глав книги.

В первой главе рассмотрены концептуальные основы системологии, в том числе и ее принципы, кардинально отличающиеся от принципов физикализма, во второй, начинающейся с теоретико-множественной формализации основных понятий системологии, — ее комбина-

торный математический аппарат. В третьей главе изложены применения системологии в экологии. Оригинальный материал книги в основном доводится до простых расчетных формул и графиков. Сложные выкладки вынесены в приложения.

Книга рассчитана на научных работников, инженеров-системотехников и экологов и может быть использована студентами и аспирантами, специализирующимися в новых областях приложений системологии: системотехники, экологии и рационального природопользования.

Книга построена так, что допускает различное чтение специалистами в указанных областях. Инженеры могут ограничиться чтением гл. 1 и § 3.6, экологи — гл. 1 и 3, а математики — гл. 1 и 2. Обращение к приложениям требуется лишь при узкопрофессиональном интересе к соответствующим вопросам, а также полезно студентам и аспирантам при решении практических и смежных задач, не затронутых в основном тексте.

В заключение выражаю благодарность профессорам В. Д. Зубакову и Ю. Н. Мельникову за ценные замечания, способствовавшие улучшению структуры книги, и проф. И. Б. Новику за полезные редакционные замечания, а также аспирантке С. А. Сильяновой за расчет графиков § 3.6.

В будущем наука будет концентрироваться больше вокруг проблем организации, структуры, языка, информации, программирования и управления и меньше — вокруг проблем силы, движения, вещества, реакции, работы и энергии.

Дж. фон Нейман

1. КОНЦЕПТУАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ

1.1. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ

Лишь иерархическая упорядоченность мира позволяет обозреть его многообразие. В его части, известной нам, сосуществуют, взаимодействуя, три последовательно возникшие иерархии (рис. 1.1). Это естественно возникшие иерархии: физико-биологическая (А, Б) и социальная (В) — и искусственно возникшая техническая иерархия (Г). На рис. 1.1 приведены лишь бесспорно выделяемые классы систем, составляющие иерархии, а промежуточные классы опущены.

Объединение классов систем из разных иерархий или их частей приводит к «смешанным» классам. Например, объединение «неживых» классов систем из физической части иерархии А с «живыми» классами систем биологической части иерархии Б приводит к смешанному классу систем, называемому *экосистемами*. Объединения из классов систем, принадлежащих иерархиям Б, В и Г, приводят к промыслово-хозяйственным классам систем и т. д.

Эмпирически установлено, что классы систем указанных иерархий с повышением их уровня обнаруживают следующие закономерности (рис. 1.2).

1. *Разнообразие* (число a различных типов систем данного класса) *возрастает*. Так, различных типов атомов $a \approx 10^2$, различных типов неорганических молекул $a \approx 10^4$ [6], различных видов животных $a \approx 10^6$ [7]. Хотя классификация биоценозов (сообществ популяций организмов) еще не проведена, но априори можно экстраполировать их разнообразие числом порядка $a \approx 10^8$, учитывая лишь «комбинаторику» связей входящих в них популяций, но без учета принадлежности

6

✗ или, скорее (Коррелю и Дилетас)
Вспомогательные классы иерархий
гниз, микр, омпн, сол.

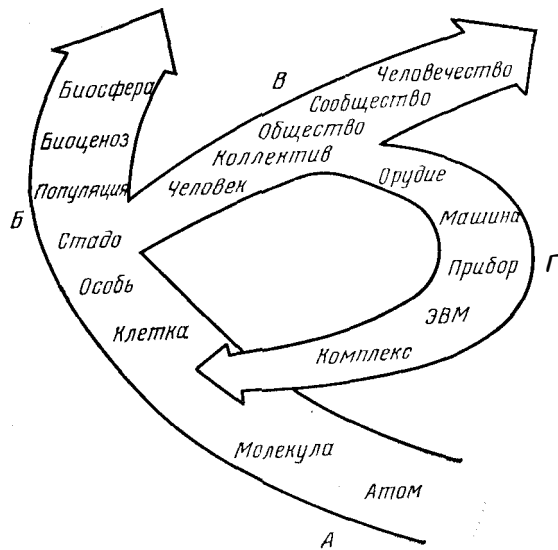


Рис. 1.1

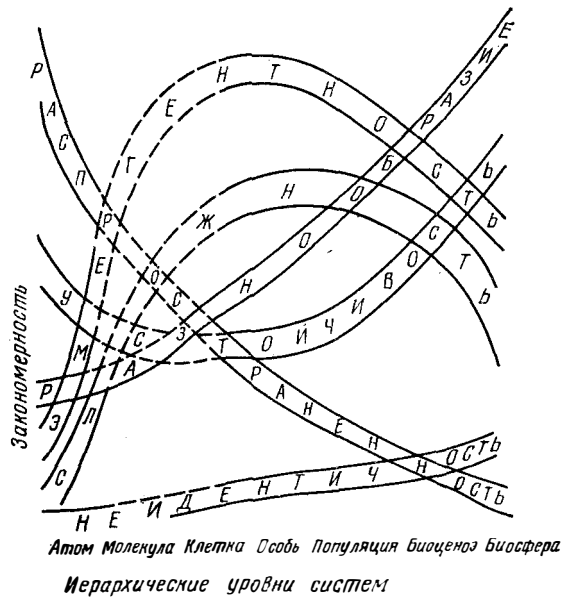


Рис. 1.2

популяций к конкретным видам. Учет же последнего фактора делает разнообразие a биоценозов при всех мыслимых ограничениях астрономическим числом. Разнообразие одновременно существующих на Земле биоценозов всегда может составить лишь весьма незначительную долю их потенциального разнообразия.

2. *Обилие или распространенность* (число N однотипных систем данного типа (вида) в заданном пространстве (например, на Земле или в известной нам части Вселенной) *убывает*, что связано с возрастанием их размеров. В предельном случае — для высших уровней биологической и технической иерархий (некоторые биоценозы, биосфера, глобальные технические системы) — распространенность соответствующих систем выражается в единичных экземплярах. Такие системы называют *уникальными*.

3. *Сложность* (для структуры системы определяется числом n ее элементов и числом m связей между ними, для поведения системы определяется характером и разнообразием реакций на внешние воздействия). Неоднозначность определения элементов системы и связей между ними не всегда позволяет однозначно определять n и m , а тем более характер реакций. Однако общая тенденция состоит в том, что при некотором возрастании средней сложности структуры классов внутри них еще в большей степени возрастает ее переменность по отдельным типам систем, составляющим класс. Так, например, биоценозы имеют от двух до тысяч популяций (n). Замечено возрастание сложности поведения у классов систем физико-биологической иерархии, по крайней мере до уровня особи. При этом наблюдается невероятно большой скачок сложности поведения при переходе от иерархии А к иерархии Б. Только в настоящее время этот скачок постепенно заполняется классами искусственных технических систем иерархии Г.

4. *Устойчивость* (способность системы противостоять внешним возмущающим воздействиям для самосохранения). От нее зависит продолжительность жизни системы, а от последней и их распространенность. Средняя устойчивость систем в рассмотренных иерархиях имеет явную тенденцию к понижению при переходе от физико-биологической иерархии к социальной и далее к технической. Замечены две формы устойчивости систем. Для физических и простых технических систем это консервативная вещественно-энергетическая

устойчивость элементов внутри системы, связанная с прочностью и сбалансированностью. Для более сложных систем это динамическая структурная устойчивость, сохраняемая непрерывной заменой элементов этих систем. При учете этих двух качественно различных видов устойчивости известный феномен Фёрстера [8] (см. подробнее п. 3.2.5) не кажется неожиданным. Устойчивость физических систем уменьшается, а биологических возрастает с ростом их сложности. Фёрстер объясняет это неаддитивностью свойств частей и всей биологической системы, связанной с эмергентностью ее свойств.

5. *Эмергентность* (степень несводимости свойств системы к свойствам отдельных элементов, из которых она состоит) *возрастает* в физико-биологической иерархии по крайней мере до уровня особи [9]. Однако не ясна степень нивелирования этого свойства от уровня особи до уровня биосферы.

6. *Неидентичность* (степень отличия систем одного и того же типа (вида) друг от друга) *возрастает*. Так, однотипные атомы или молекулы более идентичны, чем одновидовые клетки. Последние в свою очередь идентичны особей одного вида. Неидентичность однотипных популяций и биоценозов также возрастает.

Приведенные иерархии, как уже упоминалось, возникали последовательно друг из друга. Точнее, каждая иерархия имела свой особый класс систем, который порождал следующую ветвь. Так, стадо породило человека, наделив его новым социальным качеством. И уже в новом качестве, образуя коллектив, человек породил новую иерархию — техническую, начиная с орудий труда и кончая современными глобальными техническими системами.

Может создаться впечатление, что технические системы лишь слепой придаток человечества, недостойный выделения в самостоятельную иерархию наряду с другими бесспорными иерархиями. Конечно, отдельные технические системы были и остаются продуктом деятельности человечества. Однако нельзя не заметить, что с ростом обилия и сложности отдельных технических систем вся техническая иерархия их как бы начинает ускользать из-под контроля человечества. Угрожающим признаком этого является неконтролируемое глобальное воздействие современной техники и технологии на естественные иерархии (нижняя стрелка на

рис. 1.1), в результате происходит нарастающее ухудшение окружающей человека естественной среды (экоцид), не компенсируемое иллюзорным индустриальным комфортом.

По-видимому, последние обстоятельства более чем какие-либо другие заставляют человечество, и притом безотлагательно, посмотреть на этот мир и свою деятельность в нем сверху вниз сквозь призму трех указанных иерархий, на наших глазах вступающих в экологический конфликт (экоцид).

1.2. ПОЛОЖЕНИЯ СИСТЕМОЛОГИИ

1.2.1. Три периода развития науки. Античный период науки характерен умозрительным подходом, оторванным от экспериментального подхода, а также использованием категории цели. Накопившийся к тому времени запас эмпирических знаний в земледелии, скотоводстве, примитивных ремеслах и астрономии регламентировался религией, а не наукой. Лишь землемерие и астрономия, породившие геометрию, сами в какой-то мере пользовались ею. Все же знания об элементах механики, не говоря уже об элементах химии, основывались на эмпиризме и умозрительных аналогиях, которые являлись основой научной аргументации того времени.

Нерасчленяемость тогдашних первичных элементов Вселенной, например земли, воды, воздуха и огня, т.е. их целостное рассмотрение, диктовалось просто недостаточностью химических знаний (см. рис. 1.3). Пожалуй, наиболее развитой областью приложений математики оказалась тогда теория музыки, индуцировавшая мистику чисел пифагорейцев (последователи школы древнегреческого мыслителя Пифагора).

Категория цели использовалась повсеместно [10]. Например, падение камня, поднятого над землей, объяснялось его желанием вернуться на старое место.

В основном умозрительные построения античной науки сменились в XVII в. современным естественно-научным подходом, когда, завершая усилия гениев Возрождения, Ньютон соединил экспериментальные методы с новым математическим методом анализа бесконечно малых. Для продолжающегося ньютоновского периода с его методологией физикализма характерно соединение экспериментального и умозри-

гельного (математического) подходов, «изгнание» категории цели и сведение изучения целого к изучению его частей. Утвердившийся в образовании и науке физикализм оказался чрезвычайно плодотворным при изучении вещественно-энергетических свойств простых систем. Физикализм можно определить как методологию надежды построить здание науки не только простых, но и сложных систем на основе известных и еще не

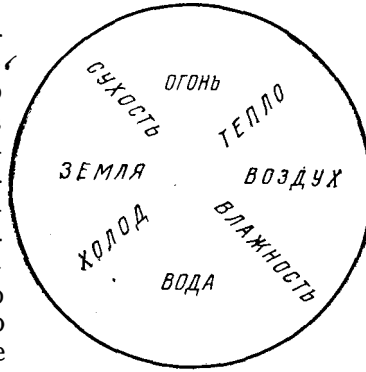


Рис. 1.3

открытых законов физики. Несостоятельность физикализма в указанном его понимании полностью обнаружилась при попытке атаки сложных систем, для которых определяющими оказались не вещественно-энергетические, а структурно-поведенческие свойства.

Современный новейший системный подход знаменует начало нового, третьего периода развития науки. Он возник из потребности научной атаки сложных систем. Объект исследования потребовал целостного рассмотрения его частей, отказа от невозможного (например, для сложных уникальных систем) классического эксперимента над ним, а также восстановления в правах категории цели. Это означало отказ от физикализма во всех его трех пунктах (рис. 1.4) и возврат к античной методологии в форме методологии системологии. В связи с этим античную науку можно было бы назвать наивной системологией.

Поскольку для сложных систем определяющими оказались не вещественно-энергетические, а структурно-поведенческие качества, последние стали основным объектом исследования системологии, соединившей в себе, таким образом, более ранние методологии структурализма и бихевиоризма [11]*.

Вместе с тем основанная на системологии теория сложных систем явилась, как это уже упоминалось в предисловии, наследницей кибернетики в ее широком

* От английского слова behaviour — поведение.

понимании. В самом деле, стержневым понятием системологии является понятие сложной системы, в то время как кибернетика исследовала отдельные качества последней, сначала управления и гомеостазиса, а потом и информации. Только теперь наступает период зрелого понимания кибернетикой своего предмета исследования — сложной системы — и она сама может быть отождествлена с системологией — теорией сложных систем.

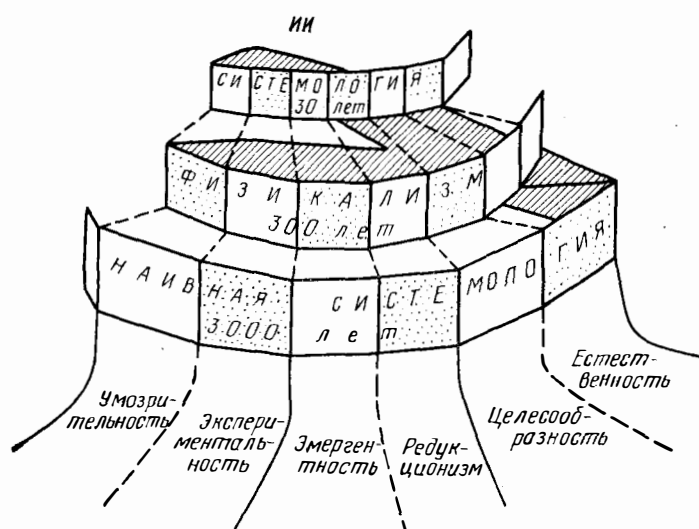


Рис. 1.4

Все это возродило интерес к общей теории систем Л. фон Берталанфи, не имевшей в довоенный период широкого резонанса из-за отсутствия содержательных результатов, лишь в послевоенный период накопленных теоретической кибернетикой (теории надежности, информации, управления и др.)

Мы уже упоминали, что для конструктивности системологии следует ограничиться рассмотрением лишь сложных материальных систем. Тогда наряду с современным делением естественных наук по конкретным видам исследуемых систем: физика (в узком смысле), химия, биология, социология и др. — возникает параллельное деление науки на две части по методам их исследования. Это теория *простых систем* — физика в широком смысле со своей методологией физикализма и

теория сложных систем — кибернетика в широком смысле со своей методологией системологии.

Таким образом, новый системный период развития науки в отличие от ньютоновского характеризуется не дифференциацией, а интеграцией науки, что также сближает его с единой античной наукой периода наивной системологии. При этом свое место под солнцем приобретает и наука об искусственном [12], в частности системотехника. Она вместе с биологией и социологией подпадает под методологическое влияние системологии и вместе с ними оказывается ареной проявления конкретных общесистемных законов.

И, наконец, еще одно обстоятельство, сближающее современную и наивную системологию. Речь идет об идейной близости основных методов исследования в обоих направлениях: аналогии и моделирования (в частности, на ЭВМ). Дело в том, что математические описания связей отдельных измеряемых характеристик простых систем были им столь адекватны, что могли рассматриваться как «исчерпывающие» законы природы. Сложные системы не допускают таких простых и вместе с тем столь адекватно исчерпывающих описаний. Вместо них для описания функционирования сложных систем строятся сложные математические модели, учитывающие, как правило, не все богатство существенных связей между элементами системы (имитационное моделирование). Таких моделей может быть много, и каждая в отдельности не является «исчерпывающей». Поэтому любые заключения по ним о действительном функционировании моделируемого оригинала напоминают заключения по аналогии, которые делались древними при сопоставлении двух объектов, подобных в их представлении друг другу.

В настоящее время физикализм и системология используются как две различные методологии исследования простых и сложных систем соответственно. Рассмотрим подробнее, в чем состоит это отличие и, главное, чем оно оправдывается.

1.2.2. Умозрительность вместо экспериментальности.

Новая системная методология не сводится лишь к новой классификации наук, она вкладывает новый смысл в традиционные для физикализма представления об эмпирическом (экспериментальном) и теоретическом (математическом) разделах традиционных естественных наук. Системология в корне меняет представления

об этих традиционных разделах. Еще Карл Маркс заметил, что при исследовании таких сложных уникальных систем, как социальные, «нельзя пользоваться ни микроскопом, ни химическими реактивами. То и другое должна заменить сила абстракции» [13].

Сейчас для анализа сложных систем повсеместно роль классического экспериментатора выполняет математик, моделирующий на ЭВМ эти объекты, а роль теоретика — интерпретирующий численные эксперименты на ЭВМ эмпирик, «хорошо знающий натуральный объект».

Поистине все стало в нашем современном мире с ног на голову! Потребность в такого рода умозрачном экспериментировании происходит не из-за несовершенства экспериментальных средств, как в античный период, а из-за специфики исследуемых объектов — сложных и особенно сложных уникальных систем. Классический эксперимент над ними в целом невозможен, в частности для уникальных систем из-за их масштабности. Эксперимент над их частями из-за их эмергентности не может заменить невозможного эксперимента над ними в целом.

1.2.3. Эмергентность вместо редукционизма. Итак, один из основных принципов физикализма — редукционизм — гласит, что целое можно изучать, расчленив его (редуцируя) на части, а затем, изучив их свойства, определить свойство целого. Важнейшим качеством сложных систем, отличающим их от простых, является эмергентность, отрицающая возможность применения редукционизма к сложным системам. Например, в наше время, несмотря на казалось бы обнадеживающие успехи молекулярной биологии (редукция клетки к молекулам), вряд ли кто-либо надеется на успехи редукционизма в попытках объяснить собственно биологические функции, не говоря уже о более высоких уровнях биологической иерархии.

1.2.4. Целесообразность вместо естественности. Физикализм основывается на естественных законах природы, обнаруживаемых в результате обобщения многочисленных экспериментов над простыми системами. Законы постулируются на основе этих экспериментов, как правило, в виде простых математических зависимостей. Это не имеет места для сложных систем. Простые объяснения свойств сложных систем (законы), изложенные в математической форме, могут быть получе-

ны, как будет показано далее, лишь при гипотезе о целесообразном поведении сложных систем.

1.2.5. Объяснение и предсказание. Привычные для традиционной науки, покоящейся на методологии физикализма, понятия объяснения и предсказания и их отношение к теории и эксперименту реформированы в системологии. Это связано со следующими обстоятельствами. Чем адекватнее сложной системе ее имитационная модель, тем выше ее предсказательные качества, но тем ниже ее объяснительные качества (модель по сложности приближается к оригиналу). Таким образом, в системологии в отличие от физикализма теория не является единственной носительницей и предсказательного и объяснительного элементов. Последний для системологии имеет другой смысл, чем для физикализма. В самом деле, физикализм, следуя редукционизму, имеет тенденцию объяснять явления на данном системном уровне явлениями на предельно низших системных уровнях вплоть до атомного.

В отличие от этого основным принципом объяснения системологии следует считать *рекуррентный одношаговый принцип*. Он состоит в принятии в качестве постулатов свойств и взаимодействий систем непосредственно нижестоящего уровня и вывода из них в виде теорем свойств систем данного уровня. Более подробно эти вопросы будут рассмотрены далее. Что касается предсказательного элемента, то физикализм придает ему привычный смысл, связанный с понятием физического закона, предопределяющего будущее поведение простой системы или его вероятность. Упомянутый «экспериментальный» метод предсказания с помощью имитационного моделирования в системологии состоит в «розыгрыше» различных ситуаций в ускоренном по сравнению с реальным течением «машинного» времени. Однако на пути этого метода стоит так называемое «проклятие размерности» пространства, в которое погружена модель. Этот эффект сопровождается быстрым переполнением памяти ЭВМ и чрезмерной нагрузкой выдачи ею результатов, как только делаются попытки разумной детализации модели. Поэтому сейчас наряду с имитационным моделированием для прогнозирования поведения сложных систем пользуются полунтуитивным экспертным методом, называемым дельфийским, воскрешая тем самым античную практику дельфийских оракулов.

1.2.6. Критический обзор различных оценок системологии. Как уже отмечалось, попытки физикализма исследовать своими методами интимные стороны поведения сложных систем оказались безрезультатными. С другой стороны, столь же несостоятельными оказались и попытки общей теории систем добавить что-либо нетривиальное к физическим представлениям о поведении простых систем. По-видимому, такие попытки связаны просто с нечетким пониманием возможностей этих наук. Кстати, и среди системологов нет четкого понимания места их науки среди других. Например, в работе [14] говорится: «Теория систем как теория математических отношений, безусловно, является отраслью прикладной математики». С другой стороны, теория систем, фигурируя в контексте цитированного автора в духе Бергаланфи, должна охватывать и знаковые, в том числе и математические, системы. В результате получается порочный круг. Некоторые авторы не видят фундаментального значения системологии и в лучшем случае причисляют некоторые ее разделы, такие, например, как теория информации и теория игр, к новым направлениям математики. Но здесь их позиция по абсурдности не отличается от позиции предлагающего отнести теоретическую физику к разделу уравнений математической физики.

Многие высказывания как апологетов, так и оппонентов системологии и кибернетики страдают половинчатостью и эклектичностью. Как понять иначе такие высказывания? С одной стороны, «по своему составу живые объекты не отличаются от неживых. Отличие состоит в структуре, связях, взаимодействии и организации. Физические и химические законы не отражают этого взаимодействия» [5, с. 7]. И, с другой стороны, на следующей странице читаем: «Было бы заманчиво назвать системологию разделом физики, изучающим проблемы организации и развития. К сожалению, претендовать на столь высокий научный ранг при современном уровне развития системология не может». Другие высказывания о системологии уличают ее в том, что она не нова. Так, в предисловии к книге [11] читаем: «Системный подход, системные исследования не являются чем-то принципиально новым, возникшим в последние годы». Двусмысленность такого высказывания обнаруживается в зависимости от того, что понимается под системологией. Если это лишь методология, то это утверждение верно при учете наивной системологии древних. Если иметь в виду

не только методологию, но и конструктивную часть системологии, то это утверждение неверно.

Из всех разделов системологии, видимо, меньше всего повезло в смысле понимания ее содержания теории информации. Широкие научные круги и даже некоторые специалисты до сих пор не восприняли ее основную содержательную часть, связанную с предельным законом помехоустойчивости (см. далее). В результате повсеместно нещадно эксплуатируются энтропийные формулы Шеннона, а сама теория информации неправильно воспринимается как теория «измерения» информации с помощью этих формул. По нашему мнению, если бы теория информации Шеннона сводилась лишь к предложению такого рода формул, то о ней все бы давно уже забыли. По-видимому, здесь основное влияние оказывает одна из центральных догм физикализма: «наука начинается тогда, когда начинаются измерения». Внутри физики эта догма имеет, безусловно, важнейшее значение, индуцируя экспериментальное открытие новых законов физики. Кроме того, она связана с важнейшим для теоретической физики операционным принципом определения используемых в теории величин (достаточностью для определения указания способа их измерения). В наше время, когда происходит часто неоправданная экспансия формально-аксиоматических методов во все области знания, операционный принцип верно защищает физику от такого рода неоправданных посягательств.

Однако тот же операционный принцип применительно к системологии отражает неоправданную экспансию физикализма в эту область (см. п. 1.6.3). Дело в том, что теоретическая системология основывает свои законы на модельной, а не на измерительной основе и поэтому вводит свои фундаментальные величины не «формально», а как некоторые характерные параметры моделей (это подробнее будет обсуждаться далее). Поэтому, как правило, всякого рода предложения о тех или иных мерах информации носят легковесный характер. Они не имеют модельного обоснования или же рассматриваются в отрыве от него, как это делается с шенноновской «мерой» информации.

1.3. ПРИНЦИПЫ СИСТЕМОЛОГИИ

Описанные в предыдущем параграфе основные положения системологии позволяют сформулировать ее прин-

ципы на содержательном уровне. Однако их формулировке следует предпослать некоторые содержательные же определения. Заметим, что определения элемента, связи и системы, так же как, например, в математике определения множества, носят, скорее, характер разъяснения, чем формального определения.

1.3.1. Системы. Под *системой* понимается множество элементов со связями между ними. Следует сразу же оговорить относительность этих понятий. Так, элемент данной системы из-за иерархической структуры мира сам оказывается системой со своими элементами. Фиксация системы делит мир на две части — систему и среду. При этом подчеркивают большую силу связей элементов внутри системы, чем с элементами среды.

Система определяется структурой и поведением (функционированием). Эти понятия для системологии являются такими же фундаментальными, как для физикализма пространство и время. Для последнего они являются изначальными, неопределяемыми понятиями. В системологии под *структурой* понимается инвариантная во времени фиксация связей между элементами системы, формализуемая математическим понятием графа. Под *поведением* системы понимается ее действие во времени. Изменение структуры системы во времени можно рассматривать как ее эволюцию. Следует различать неформальную структуру системы, для которой в качестве элементов фигурируют «первичные» элементы (вплоть до атомов), и формальную. В последней в качестве неделимых элементов фигурируют системы непосредственно нижестоящего иерархического уровня.

Такая относительность понятия структуры системы заставляет отказаться от него при определении сложности системы и использовать для этого понятие поведения системы. Заметим, что с возрастанием иерархического уровня системы возрастает и сложность ее поведения (по крайней мере до уровня особи). Это связано с возрастанием сложности неформальной структуры систем.

Для определения сложности системы определим *акт решения* как выбор альтернатив, в том числе и с помощью случайного механизма (т. е. при этом вовсе не обязательно интеллектуальный выбор). *Решающей* системой назовем систему, поведению которой присущ акт решения. Системы, включающие в себя в качестве хотя бы одной подсистемы решающую систему, будем называть

сложными. В частности, к ним относятся сами решающие системы. Системы, не способные к акту решения, будем называть *простыми*. Стремление системы достигнуть предпочтительного для нее состояния называют ее целенаправленным поведением, а это состояние — ее *целью*. Целями обладают лишь сложные системы.

Простые системы, так же как и сложные, могут иметь стохастическое поведение, регулируемое случайным механизмом. В обоих случаях этот механизм формально описывается одними и теми же математическими вероятностями. Различие здесь в их эмпирической интерпретации, имеющей кардинальное значение.

Вероятности спонтанного выбора альтернатив простой системой имеют обычно физическую интерпретацию частот. Вероятности выбора альтернатив согласно акту решения сложной системы имеют так называемую субъективную интерпретацию. Эта интерпретация восходит к шкалированию психофизических эффектов «стимул — реакция» Вебера и Фехнера, субъективным вероятностям Б. де Финетти и Л. Севиджа в связи с теорией полезности, вплоть до недавно введенной Л. Заде функции принадлежности для исследования введенных им же так называемых нечетких множеств. Оттенок субъективизма запечатлен и в теории вероятностей в термине «математическое ожидание». Однако указанные авторы строят для субъективных вероятностей новый формализм, мы же их рассматриваем как специальную интерпретацию математических вероятностей, оставаясь в рамках формализма теории вероятностей.

Субъективная интерпретация математических вероятностей, так же как и частотная, получается в результате массовых экспериментов, например экспертными оценками (дельфийский метод), а также современным опросом общественного мнения. Поэтому она имеет вполне объективный характер. В связи с этим будем называть первую интерпретацию математической вероятности *физической* вероятностью, а вторую — *системной*.

Мощная память сложных систем (в том числе и технических) позволяет им формировать системные вероятности на основе существующего опыта. Например, для биологических систем они формируются на основе массового опыта себе подобных систем с использованием генетической памяти. В частном случае, когда вероятности вырождаются в нули и единицы, стохастические системы вырождаются в детерминированные. Поэтому в нашей классификации сложные системы могут быть детерминированными, а простые — стохастическими.

1.3.2. Модели. Системы делятся на *материальные* и *знаковые*. Последние, в той или иной мере отражающие первые, называются их знаковыми моделями. Незнаковые модели (отражение материальных систем в материальных же) называются *аналоговыми*. Поскольку далее рассматриваются лишь знаковые модели, будем их далее называть просто *моделями*. Системология рассматривает модели не только существующих материальных систем, но и систем, которые могут быть осуществлены

в реальном физическом мире (осуществимые модели *). Таким образом, ее предметом, как и кибернетики, является «не то, что есть, а то, что может быть» [15]. Осуществимые модели делятся на *имитационные (портретные)* и *оптимизационные*, на чем подробнее мы остановимся несколько ниже.

1.3.3. Законы. С категорией закона связано представление о его большей или меньшей всеобщности для целых классов систем. Физикализм обнаружил еще и простоту всеобщих естественных законов природы. Причина этого состоит в том, что изучаемые им простые системы имеют практически независимые качества. Простые портретные модели таких отдельных качеств простых систем были им столь адекватны, что могли рассматриваться как простые законы природы.

Сложные системы в отличие от простых имеют большое число существенно взаимосвязанных качеств. Поэтому портретные (имитационные) модели отдельных их качеств не адекватны им, а портретные модели достаточно большой совокупности их качеств сложны и недостаточно общи. Что же можно считать законами системологии? Ответ на этот непростой вопрос мы попытаемся дать дальше.

1.3.4. Формулировка принципов системологии [16, 17]. Введенных понятий достаточно для формулировки принципов системологии, которые мы приведем, сопоставляя с соответствующими принципами физикализма.

Физикализм формулирует законы природы на основе экспериментов. Другими словами, законы являются постулатами, установленными на основе всех предшествующих экспериментов, для прогнозирования будущих. Здесь достаточно одного эксперимента, не соответствующего закону, чтобы **опровергнуть его**.

Системология устанавливает законы, управляющие сложными системами, на принципиально иной логической основе.

1-й принцип (формирования законов). Постулируются осуществимые модели, а из них в виде теорем выводятся законы сложных систем.

Следствие 1.1. Законы касаются имеющих место или будущих естественных и искусственных систем. Они

* Конструктивное определение понятия осуществимой модели приводится в п. 1.5.3.

могут объяснить структуру и поведение первых и индуцировать построение вторых.

Следствие 1.2. Никакие реальные явления не могут опровергнуть или подтвердить законы системологии, имеющие дедуктивный характер.

Это утверждение следует понимать так. Несоответствие между экспериментом над реальной сложной системой и законом может говорить лишь о несоответствии реальной системы тому классу моделей, для которых выведен закон, но не о его опровержении. С другой стороны, соответствие эксперимента закону никак не связывают с его подтверждением (он в этом не нуждается, будучи дедуктивным). Такое соответствие говорит лишь о том, что гипотеза о соответствии реальной системы классу моделей, для которых выведен закон, не опровергнута и может оставаться в качестве рабочей гипотезы.

Физикализму присуща тенденция редукционизма — объяснять явления на высших иерархических уровнях явлениями на предельно низких уровнях вплоть до атомного. Принятие такой тенденции для системологии, изучающей системы высших иерархических уровней, было бы нереалистичным. Поэтому системология вынуждена довольствоваться предельно ослабленным принципом объяснения [18], который можно назвать рекуррентным.

2-й принцип (рекуррентного объяснения). Свойства систем данного уровня выводятся в виде теорем (объясняются), исходя из постулируемых свойств элементов — систем непосредственно нижестоящего уровня и связей между ними. Например, вывод свойств биоценоза из постулируемых свойств и связей составляющих его популяций; вывод свойств популяций из постулируемых свойств и связей составляющих ее особей и т. д.

Следствие 2.1. При каждом восхождении на следующий иерархический уровень система предшествующего уровня делается элементом системы следующего уровня. Поэтому не обязательно усложнение формальной структуры последней.

Эмпирически обнаруженное усложнение поведения систем с повышением их иерархического уровня по крайней мере до уровня особи связано с усложнением их неформальной структуры. Поэтому естественно определять сложность системы сложностью ее поведения, как это и было сделано выше. В связи с этим представление о том, что построение моделей усложняющихся систем сводится лишь к формальному увеличению числа и (или)

сложности «описывающих их уравнений», является вульгарным. На самом деле такие модели должны экономно отражать принципы усложняющегося поведения систем. Этот принцип построения моделей является современным кибернетическим вариантом принципа «бритвы Оккама»*. Он состоит в следующем.

3-й принцип (минимаксного построения моделей). Теория должна состоять из простейших моделей систем нарастающей сложности. Каждая из них должна хотя бы в минимальной (мин) степени отражать каждый из нарастающих (макс) уровней сложности поведения систем. Другими словами, формальная сложность модели (например, число описывающих ее уравнений) не должна соответствовать неформальной сложности системы (сложности ее поведения). Именно в этом смысле следует понимать.

Следствие 3.1. Грубая модель более сложной системы может оказаться проще более точной модели более простой системы. Это вселяет оптимизм при исследовании сложных систем.

Таким образом, для построения теоретических моделей систем, в том числе и сложных, необходимо знание принципов их усложняющегося поведения.

1.3.5. Принципы усложняющегося поведения. Пока эмпирически обнаружены следующие основные принципы усложняющегося поведения систем:

- 1) вещественно-энергетического баланса (на основе законов сохранения);
- 2) гомеостазиса (на основе обратных связей [15]);
- 3) выбора решений (на основе индуктивного поведения [19]);
- 4) перспективной активности или потребного будущего (преадаптация [20], опережающая реакция [21]);
- 5) рефлексии (опережающее отражение).

Замечено, что принципы поведения, впервые обнаруживаемые у систем данного уровня, продолжают сохраняться у всех систем более высокого уровня сложности. Однако определяющим в поведении системы оказывается принцип, впервые возникший на ее уровне сложности. Так, принцип вещественно-энергетического баланса при-

* Принцип «бритвы Оккама», известный в науке также как «принцип бережливости» или принцип простоты, формулировался У. Оккамом (1290—1350) в следующем виде: не следует делать посредством большего то, чего можно достичь посредством меньшего.

сущ системам самого низкого уровня сложности и сохраняется для всех систем вплоть до систем высших уровней сложности. Однако определяющим он является лишь для простейших систем. Уже для так называемых автоматических систем определяющим оказывается принцип гомеостазиса. Эти системы по нашей классификации [4] остаются еще в классе простых систем, так как им не присущ акт решения. Принцип гомеостазиса сохраняется для всех систем, более сложных, чем автоматические.

Для так называемых *решающих систем* определяющим оказывается принцип поведения, основанный на акте решения. Он же сохраняется для всех систем, превосходящих по сложности поведения решающие системы, например *самоорганизующиеся*. Его особое место среди принципов усложняющегося поведения определяется хотя бы тем, что он является простейшим проявлением поведения живого по сравнению с неживым в физико-биологической иерархии (сложным техническим системам также присущ акт решения).

Важнейшим, особенно для биосистем (у них он и был впервые обнаружен), является принцип *перспективной активности*. Он возникает на уровне биосистем более сложных, чем простейшие, но еще таких, которые не обладают интеллектом. Такого рода системы условно называются *предвидящими*. Уровень их сложности должен превышать уровень сложности среды, и они должны обладать достаточно мощной памятью (например, генетической). Помня исходы своих взаимодействий со средой до данного момента времени и полагаясь на то, что «завтра будет примерно то же, что и сегодня», они могут заранее подготовить свою реакцию на возможные будущие воздействия среды. Для особой этот принцип известен как эффект перспективной активности [21], для популяций — как эффект преадаптации [20]. Четкое выделение подобного эффекта для биоценозов до сих пор не проведено.

Наконец, принцип рефлексии связан с поведением интеллектуальных партнеров, основанным на рассуждениях типа «он думает, что я думаю» и т. д., и, очевидно, не имеет отношения к поведению систем, не обладающих интеллектом.

Резюмируем соображения о характере возможностей теории в плане использования принципов системологии.

1. Согласно 1-му принципу теория состоит из гипотез,

формализованных в виде математических моделей. Выводимые из них теоремы (законы) должны допускать возможность сличения части следствий из них с некоторыми доступными для эксперимента характеристиками оригинала. Другая часть следствий может быть использована для теоретического прогнозирования соответствующих характеристик оригинала. Для сложных уникальных систем сличаться с теоретическими могут лишь их нецелостные характеристики. Достоверность прогнозов зависит от адекватности теоретических и допускающих экспериментальное определение характеристик.

2. Согласно 2-му принципу в моделях сложных систем в качестве исходных элементов должны рассматриваться достаточно интегрированные их подсистемы с постулируемыми свойствами и связями между ними. Это соответствует имеющейся системной практике, избегающей глубоких проникновений в уровни, нижестоящие по сравнению с уровнем, непосредственно предшествующим рассматриваемому.

3. Согласно 3-му принципу математические модели теории должны быть «простыми». Принцип содержит лишь пожелания на этот счет без каких-либо конкретных конструктивных предложений, кроме ссылки на принципы усложняющегося поведения как основы построения простых моделей.

Понятие модели оказывается основным и для эксперимента (численное моделирование на ЭВМ), и для теории, когда речь идет, например, об уникальной системе. Поэтому понятие «математического моделирования вообще» не является здесь корректным. Понятие оптимизационной модели является основным для построения простых моделей теории.

1.3.6. Оптимизационные модели — основа теории сложных систем [4]. Для простейшего изложения удобно воспользоваться самым распространенным структурно-аморфным динамическим описанием систем (см. п. 1.6.3). Пусть система отождествляется с N «фазовыми» координатами $x = \{x_i\}$ ($i = \overline{1, N}$) функциями времени t , отражающими изменение ее элементов во времени. Пусть связи между элементами можно описать M зависимостями $G_j(x) = 0$ ($j = \overline{1, M}$), содержащими L параметров. Тогда система имеет $N - M$ степеней свободы, а с учетом неопределенности параметров $N - M + L$ степеней свободы.

Здесь моделью системы называется абстрактное об-
разование, состоящее из $N' < N$ координат \tilde{x} , связанных
лишь $M' < M$ зависимостями, содержащими $L' < L$ пара-
метров. Модель имеет $N' - M' + L'$ степеней свободы.

Формальное задание цели в системологии сводится
к заданию «целевых» функционалов $v = F(x)$ и $\tilde{v} = \tilde{F}(\tilde{x})$
для системы и ее модели соответственно. Их экстремумы
(максимумы или минимумы в зависимости от их смыс-
ла) при соответствующих
условиях достигаются для
системы $x = x_0$ и ее модели
 $\tilde{x} = \tilde{x}_0$ (их будем называть
оптимальной и оптимизаци-
онной соответственно). Оче-
видно, что они являются
функциями L и L' параме-
тров соответственно, т. е.
соответствуют числу степе-
ней свободы.

В системологии исполь-
зуются два принципиально
разных подхода в прибли-
жении модели к системе.
Первый (портретный) под-
ход применим к любым си-
стемам и состоит в прибли-
жении модели \tilde{x} к системе x
за счет приближения N' к N
(для трехмерного случая
это показано на рис. 1.5,а).

Используемые при этом мо-
дели называются имитационными (портретными). Вто-
рой (оптимизационный) подход применим лишь к слож-
ным системам, которые имеют цель и достаточно при-
близилась к своим оптимальным прототипам x_0 .

Оценим теперь условия адекватности моделей систе-
мам для каждого из рассмотренных подходов. Для пер-
вого необходимо требовать близости N' к N , M' к M и
 L' к L , а для второго — только L' к L . Практическая не-
возможность приближения N' к N для большинства ин-
тересных случаев получила в системологии специальное
название «проклятие размерности» [23]. Однако за воз-
можность преодоления проклятия размерности при вто-
ром подходе приходится платить ограничением его при-

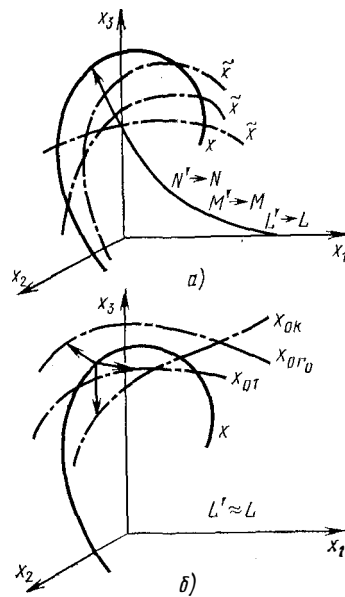


Рис. 1.5

менимости лишь к системам, близким к своим оптимальным прототипам. Интерпретация приведенных соображений для технических систем очевидна.

Биологическая интерпретация приведенных системологических представлений очевидна, по крайней мере для первого подхода. Численное моделирование биосистем на ЭВМ соответствует имитационному подходу, наиболее распространенному сейчас в биологии. Применение оптимизационного подхода в биологии осложнено методологическими проблемами цели биосистем, о которых уже упоминалось выше. Кроме того, эффективность его использования зависит от степени «рассогласования» траекторий биосистемы x и ее оптимизационной модели \tilde{x}_0 . Рассмотрим факторы, влияющие на это рассогласование, когда $L' \approx L$. Во-первых, оно зависит от степени соответствия выбранного целевого функционала $\tilde{v} = \tilde{F}(\tilde{x})$ действительному $v = F(x)$, зависящей от наших знаний цели биосистемы. Во-вторых, в случае его правильного выбора ($\tilde{F} \approx F$) рассогласование зависит от близости биосистемы к своему оптимальному прототипу, что мы заранее предполагали, ограничиваясь рассмотрением лишь таких биосистем.

Таким образом, определяющим источником рассогласования может оказаться лишь неправильный выбор целевого функционала ($\tilde{F} \neq F$), связанный с неправильными представлениями о тактической цели биосистемы. К счастью, как представляется, множество правдоподобных тактических целей биосистемы не так уже велико и они допускают экспериментальную проверку и уточнение (см. далее).

Можно считать, что между разнящимися целями g_r и соответствующими оптимальными системами x_{0r} ($r = \overline{1, k}$) имеет место взаимоднозначное соответствие $x_{0r} \longleftrightarrow g_r$. Таким образом, мы приходим к ограниченному набору возможных моделей оптимальных систем, траектории которых x_{0r} вместе с траекторией биосистемы x можно рассматривать в многомерном пространстве (для трехмерного случая это изображено на рис. 1.5,б). Траектория x_{0r_0} , имеющая в некотором смысле минимальное рассогласование с x , может рассматриваться как подходящая модель биосистемы x , а цель g_{r_0} как наиболее правдоподобная цель биосистемы. В этом можно видеть возможность экспериментального определения

цели биосистемы, т. е. того, что можно было бы назвать *объективной* телеологией. В своей повседневной практике биологи хорошо справляются с телеологическими (целевыми) трудностями. Считается, что стратегической целью биологических систем является стремление к выживанию самим или способствованию выживанию систем вышестоящего уровня (при подчинении системе вышестоящего уровня). Что касается тактических целей (обеспечивающих стратегическую цель), то разнообразие их несколько повышается. Например, для популяций это стремление к расширению своего ареала, к увеличению численности и др.; для биоценозов это достижение наибольшей устойчивости, успешное прохождение своего цикла [24], сохранение функций даже ценой изменения структуры [25].

Заметим, что для решения проблемы целеобразования важно системологическое понимание целесообразности, целенаправленности и даже разумности просто как эффективности [15] и более конкретно как оптимальности, так как последней можно придать точный математический смысл [26, 4].

Следующей существенной проблемой при построении простых оптимизационных моделей сложных систем является, как уже отмечалось, проблема многокачественности последних, в то время как их простая модель строится, как правило, для некоторого одного качества системы. Это обстоятельство всегда учитывается в системологии тем, что ее простые модели являются не точными, а оценочными. Они оценивают эффективность сложных систем по одному из рассматриваемых качеств, считая ее идеальной по всем другим, нерассматриваемым. Таким образом, получаются верхние оценки эффективности рассматриваемого качества (все реальные системы имеют лишь меньшую эффективность).

Оценке эффективности сложной системы сразу по нескольким качествам способствует стохастический подход. Стохастический подход позволяет делать достаточно вероятные утверждения для моделей сложных систем и в предельно неопределенных ситуациях, понижая точности этих утверждений. Здесь мы снова сталкиваемся с оценочным характером оптимизационных моделей. В предельном случае такие утверждения находятся на грани тривиальных. Например, априори можно утверждать, что численность N любой популяции с вероятностью $P=1$ находится в пределах $0 \leq N < \infty$. Оценки, сле-

Дующие из теории простых оптимизационных моделей сложных систем, имеют вид: с вероятностью $P=1-\varepsilon$ величина N находится в пределах $N_1(\varepsilon) \leq N \leq N_2(\varepsilon)$, причем при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $N_1(\varepsilon) \rightarrow 0$ и $N_2(\varepsilon) \rightarrow \infty$. Подробно такого рода вопросы с примерами, в том числе биологическими, рассматриваются в теории потенциальной эффективности сложных систем [26—29, 4].

Вернемся к сопоставлению сложных и простых моделей сложных систем в связи с вопросом объяснения и предсказания в системологии [16]. Как уже упоминалось, чем адекватнее сложной системе ее сложная модель (численный эксперимент на ЭВМ), тем, естественно, больше ее предсказательная сила, но вместе с тем меньше объяснительная сила (модель по сложности приближается к своему оригиналу). С другой стороны, простые модели системологии (теория) имеют в первую очередь объяснительную силу именно из-за своей неадекватности (оценочности) оригиналу и понижения предсказательной силы (часто слишком широкие пределы достоверных оценок).

Таким образом, в отличие от физикализма теория в системологии не является единственной носительницей объяснительного и предсказательного элементов. Численный эксперимент на ЭВМ в ускоренном по сравнению с естественным временем позволяет предсказать поведение оригинала. Литература по таким имитационным (портретным) моделям уже сейчас (в том числе в системотехнике и биологии) весьма многочисленна и продолжает бурно расти. Литература же по построению оптимизационных моделей технических и особенно биологических систем очень бедна. Из биологических моделей можно указать на модель живучести [30], следствие из которой объясняет упомянутый выше эффект Фёрстера [8]. Следует также отметить подходы к построению оптимизационной модели фитоценоза [31].

Резюмируем возможности построения теории сложных систем, на основе их простых оптимизационных моделей.

1. Двум путям построения моделей системологии соответствуют имитационные (портретные) сложные модели численного экспериментирования на ЭВМ над сложными системами и простые оптимизационные модели их теории.

2. Имеющаяся возможность построения теоретических моделей сложных целенаправленных систем требует

конкретной формулировки целей как для технических, так и для биологических систем, что не вызывает непреодолимых затруднений.

3. Построенная таким образом теория будет страдать всеми неизбежными пороками теории сложных систем—оценочным характером своих простых моделей и неизбежным стохастическим характером выводов, когда их достоверность будет определяться допустимой грубостью оценок.

4. Эта теория, как и всякая системологическая теория, не будет единственной носительницей и объяснительного и предсказательного элемента. Последним она должна будет поделиться с численным экспериментом на ЭВМ.

1.4. СИСТЕМА И СРЕДА

1.4.1. Упорядочение качеств сложных систем. По мере возрастания сложности систем у них возникают новые все более эмергентные качества. При этом сохраняются качества более простых систем. Поэтому общее разнообразие качеств системы возрастает с ростом ее сложности. В порядке возрастания активности качеств оправдано следующее их упорядочение: устойчивость (R-качество), помехоустойчивость (I-качество), управляемость (C-качество) и самоорганизация (L-качество)*. Здесь каждое последующее качество имеет смысл лишь при наличии предыдущего. Действительно, без наличия устойчивого образования из связанных между собой элементов вообще не имеет смысла говорить о существовании системы. Далее, простейшее проявление сложности системы, выражающееся в акте решения, немислимо без правильной информированности системы о среде, связанной с помехоустойчивой ориентацией в ней. Также очевидно, что без наличия последнего качества любые активные действия системы в среде (управляемость) оказываются малоэффективными. И, наконец, такое качество, как самоорганизация, является результатом накопления опыта использования всех перечисленных качеств во времени, его переработки и коррекции в зависимости от изменяющегося состояния среды.

* Символические обозначения различных качеств взяты в соответствии с первыми буквами английских слов: Reliability, Information, Controlability, Learning.

Все перечисленные качества сложных систем явились предметом исследования кибернетики, однако хронологически не в указанном выше порядке.

На кардинальное для сложных систем, в отличие от простых, качество — управляемость — обратил внимание Н. Винер. Однако на конструктивном уровне (в смысле открытия предельного закона эффективности управляемости сложных систем) следует считать, что начало таких исследований было предпринято в теории игр Э. Борелом и Дж. фон Нейманом. Долголетние исследования в области связи были увенчаны В. А. Котельниковым и К. Шенноном открытиями предельных законов помехоустойчивости. И, наконец, несколько позднее, уже в 50-е годы, всеобщее внимание было привлечено к новой, специфичной лишь для сложных систем форме устойчивости — надежности в связи с резким возрастанием сложности радиоэлектронных систем. Соответствующий предельный закон был открыт лишь в 60-е годы [32]. Следует отметить, что вся новая техника явилась как бы огромной, вселенской лабораторией, где на первых порах делались попытки выделения и обособленного изучения перечисленных качеств на «примере» технических систем в «чистом» виде. Эта массовая практика велась обособленно инженерами — «надежностниками», связистами и «управленцами». Лишь для сложных технических систем такая практика вычленения отдельных подсистем, ответственных за обеспечение указанных качеств, могла в конце концов привести к открытию соответствующих предельных законов, имеющих общесистемное значение. Вместе с тем очевидно, что сложное переплетение этих качеств в биологических системах, связанное с их многофункциональностью, не позволило биологам четко выявить эти качества и приступить к их количественному изучению.

1.4.2. Устойчивость — первичное качество систем. Устойчивость, как уже отмечалось выше, является важнейшим качеством систем, в том числе и сложных. Можно даже считать его первичным, так как без него системы как таковые не могут существовать. Простые системы имеют пассивные формы устойчивости: прочность, сбалансированность, гомеостазис (возврат в равновесное состояние при выводе из него), а для сложных определяющими являются активные формы: надежность, живучесть и др. Если перечисленные формы устойчивости простых систем (кроме прочности) касаются их поведе-

ния, то определяющие формы устойчивости сложных систем носят в основном структурный характер. *Надежность* определяется как сохранение структуры системы несмотря на гибель отдельных ее элементов с помощью их замены и (или) дублирования, а *живучесть* как активное подавление вредных факторов. Таким образом, надежность является более пассивной формой структурной устойчивости, чем живучесть. После появления работы [30] развитию теории живучести были посвящены главы монографий [4, 33]. Однако как теория надежности, так и теория живучести в этих работах развивалась лишь с точки зрения уязвимости элементов сложной системы без явного учета уязвимости связей между элементами. Поэтому необходимо специальное исследование структурной устойчивости сложной системы с учетом уязвимости как ее элементов, так и связей между ними. Методически естественной была бы частная постановка задачи — исследование структурной устойчивости сложной системы при уязвимости лишь связей между ее элементами, когда сами ее элементы считаются практически неуязвимыми. Такую форму устойчивости можно было бы назвать *связностью*, поскольку ее исследование сводится к исследованию вероятности связности соответствующего случайного графа. Результатом такого рода исследований посвящен § 2.4 настоящей книги. Общий случай уязвимости как элементов сложной системы, так и связей между ними до сих пор не исследован. Однако, предполагая его дальнейшее исследование, ему можно было бы присвоить название *целостности* сложной системы. И, наконец, все еще не исследованной является высшая форма структурной устойчивости сложной системы — помехоустойчивое перекодирование постоянной структуры, осуществляемое произвольными элементами и связями между ними. Эта высшая форма структурной устойчивости определяет также и высшую форму сложных систем, которые в работе [27] были названы *превращающимися* или, точнее, *перевоплощающимися*.

Гипотетическая возможность существования таких сложных систем, отмеченная в работах [27, 4], не сопровождалась известными автору в то время примерами реальных систем такого рода. Однако в работе К. В. Беклемишева [24] был указан пример такой системы — биоценоз. В этом случае под биоценозом нужно понимать систему, фиксирующую лишь тип связей между компонентами — «специальностями». о веществе

в ходе эволюции произвольными, но специализированными популяциями, т. е. использовать то определение, которое было дано в § 1.1. Например, можно считать тождественными биоценозы с одними и теми же связями между популяциями, когда сами популяции могут быть представлены либо сумчатыми, либо высшими млекопитающими.

1.4.3. Катастрофы и потенциальная приспособляемость жизни. Вариабельность параметров среды требует пластичности поведения и структуры сложных систем. На уровне решающих и самоорганизующихся систем их внутренняя устойчивость дополняется внешней — переходу к массовому воспроизведению, когда гибель отдельной системы компенсируется их быстрым воспроизведением в популяции. Этот универсальный тип популяционной устойчивости не требует прогнозирования катастрофических воздействий внешней среды. Он характерен для одноклеточных организмов и в некотором смысле для массового производства сравнительно простых технических систем. Однако на более высоком уровне предвидящих систем «предвиденье» катастрофических воздействий среды оказывается определяющей способностью, и не только предвиденье, но и активная подготовка к ним [30, 34]. Другими словами, эти системы обладают принципиально новым типом поведения — перспективной активностью, о которой мы уже упоминали.

Здесь следует уточнить, что понимается под катастрофическими воздействиями среды на систему. Поскольку мы живем в вероятностном мире, естественно перейти к вероятностным определениям.

Рассмотрим какой-либо параметр внешней среды, оказывающий существенное воздействие на данную систему, например температуру. Такой параметр можно рассматривать как случайную величину, имеющую математическое ожидание (среднее значение), равное $\bar{\xi}$. Тогда вероятность того, что случайная величина ξ отклонится от своего среднего значения $\bar{\xi}$ в ту или другую сторону более чем на некоторое фиксированное «пороговое» значение x тем меньше, чем больше порог x . Другими словами, в нашем вероятностном мире имеет место закон малой вероятности больших отклонений параметра среды ξ от своего среднего значения $\bar{\xi}$. В зависимости от специфики системы некоторое критическое значение порога $x=x_0$ можно считать определяющим для отличия

катастрофических воздействий на нее среды ($x > x_0$) от некатастрофических ($x \leq x_0$). Это значение порога x_0 можно назвать уровнем катастроф для системы по параметру ξ среды. Он приводит к некоторой убывающей с ростом x_0 вероятности $P(x_0)$ того, что параметр ξ отклонится от $\bar{\xi}$ более чем на x_0 . Если рассмотреть последовательность значений параметра ξ через интервал времени Δt , обеспечивающий их независимость, то при постоянстве распределения случайной величины ξ среднее время между катастрофами уровня x_0 для системы равно величине $T_0 = \Delta t / P(x_0)$, возрастающей с ростом x_0 . Поэтому можно говорить о том, что среднее время между катастрофами уровня x_0 растет с ростом x_0 . Отсюда становится ясным, что если средняя продолжительность жизни системы A равна $T_A \ll T_0$, то ей бессмысленно готовиться к встрече с катастрофой уровня x_0 , однако если $T_0 < T_A$, то она должна готовить себя к этой встрече.

Само понятие среднего времени T_A жизни системы в условиях ее приспособляемости (пластичности, трансформации) к варьирующимся параметрам среды таит в себе много неясностей. Действительно, непрерывная изменчивость системы, накапливаясь, может привести к системе, существенно отличающейся от исходной. Иногда изменчивость, в частности, биологических систем из-за мутационных механизмов может носить не непрерывный, а скачкообразный характер. В этом случае, говоря о среднем времени T_A жизни системы, нужно точно знать, что мы считаем одной и той же (пусть трансформированной) системой, а что уже новой системой, появившейся после гибели исходной. Далее, говоря о среднем времени T_A жизни системы, мы предполагаем, что все эти вопросы выяснены, т. е. эта величина включает в себя возможность пластических деформаций системы в соответствии с вариабельностью параметров внешней

среды. Очевидно, что потенциальные возможности такой пластичности не безграничны и все зависит от быстроты и интенсивности вариабельности параметров внешней среды, определяемых нами катастрофами уровня x_0 . К этому вопросу мы еще вернемся, а пока заметим, что выше был рассмотрен простейший случай воздействия на систему одного параметра среды (одной причины). Далее (см. п. 3.4.2) эти рассмотрения обобщаются на воздействия многих причин, приводящих к гибели системы.

Приведенное определение катастроф является слишком формальным. Оно ставит больше вопросов, чем дает ответов. Здесь затрагиваются следующие принципиальные вопросы. Что является характерным параметром (параметрами) ξ для системы? Какой смысл имеет наделение ξ стохастическими свойствами? Как оценивать величину среднего времени T_A жизни системы в связи с возможностями ее самоорганизации?

На некоторые из этих вопросов можно ответить качественно, на другие (например, на последний) — количественно, указывая верхние оценки (см. п. 3.2.1). Например, для ответов на первые два поставленных вопроса весьма полезно использовать принцип А. Д. Арманды — разбиение всех процессов, протекающих в среде **B**, на три класса по отношению к процессам, протекающим в системе **A** фиксированного иерархического уровня. Именно, пусть средняя скорость протекания процессов в системе **A** есть $\omega_A = \Delta x / \Delta t$, где Δx — существенное приращение значения параметра, характеризующего процесс, а Δt — характерное время, имеющее порядок среднего времени существования системы. Тогда для аналогичных скоростей ω_B процессов среды произойдет их разбиение на три класса, в зависимости от того, какое одно из трех соотношений для них выполняется: $\omega_B \ll \omega_A$, $\omega_B \approx \omega_A$ или $\omega_B \gg \omega_A$.

Процессы среды, для которых выполняется первое соотношение, должны рассматриваться для систем как *константы*, процессы, для которых выполняется второе соотношение, как *существенные параметры* и, наконец, процессы, для которых выполняется третье соотношение, как *шумы*. Оценка среднего времени T_A существования системы, подстраивающейся к некатастрофическим изменениям существенных для нее параметров среды, является важнейшей и вместе с тем труднейшей задачей. В частности, если это касается жизни на всех уровнях ее организации, то этот вопрос столь важен для нее, что имеет прямое отношение к самому определению феномена жизни.

Физикалистский аспект определения жизни, настаивающий на специфичности для нее белкового субстрата, в настоящее время расширен кибернетическим аспектом, связанным с сосредоточением внимания на структурно-функциональной стороне. При этом можно исходить из постулата о потенциальной приспособляемости (адаптации) жизни к любым достаточно стабильным условиям

среды, т. е. существование жизни ставится в зависимость лишь от соотношения характерных времен: средней продолжительности T_A жизни биологической системы в изменяющихся условиях (времени успешной приспособляемости) и средним временем T_0 между катастрофами уровня x_0 для биологической системы А, происходящими в среде В (вариабельности среды $T_B = T_0$). Жизнь может существовать там, где $T_A \ll T_B$. Известная нам биоценотическая форма жизни в достаточно стабильных для нее естественных земных условиях отвечает на их ограниченную естественную вариабельность T_B сравнительно быстрой адаптацией ($T_A \ll T_B$), приводящей к естественной гибели данной системы, в недрах которой успевают зародиться новые истоки жизни для других «родственных» ей систем. Если же $T_A \gg T_B$, то жизнь оказалась бы прерванной с гибелью данной системы.

Похожие на эти соображения сформулированы Россом У. Эшби [15] в виде закона необходимого разнообразия. Во всех этих рассуждениях не обсуждаются побудительные причины столь целесообразных адаптивных свойств жизни. Они просто постулируются, и основанием для этого являются эмпирические факты. Сами же понятия цели и целесообразности формализуются стремлением сложных систем достигнуть определенного, в некотором смысле предпочтительного для них состояния. Это находит свое формальное математическое описание в терминах потенциальной эффективности и оптимальности. Не вызывая особых возражений для сложных технических систем, смысл этих понятий для биологических систем (особенно высших иерархических уровней) все еще подвергается критическому обсуждению. Следует ожидать прогресса в решении этих вопросов, в частности, из-за установления возможности общекосмической информационной связи биогенеза [35]. Имеется в виду не упрощенный прямой перенос «спор жизни», а ее информационное наведение, например электромагнитными сигналами. В этом случае теряют свою уникальность и биосфера, и биосфера и открываются возможности для обнаружения новых биосистем более высокого уровня, чем биосфера, для которых она является одним из элементов.

1.4.4. Потенциальная эффективность человечества. Человек и человечество, как и высшие животные и их популяции, являются предвидящими системами в том определении, которое было дано таким системам в п.

«Преадаптация, как
кратчайший путь к
выживанию в
длительном периоде
жизни»

1.3.5. Очевидно, что упреждающие способности особи и популяции регламентируются средними временами их жизни. Ясно, что особи не должны ориентироваться на редкие, но мощные катастрофы уровня x_0 со средним периодом T_0 , соизмеримым с геологическими периодами. Однако для популяции со средним временем жизни порядка T_0 такие катастрофы представляют прямую угрозу. Не является ли преадаптация [20], упомянутая в п. 1.3.5, проявлением такого «предвиденья»? Это явление состоит в резервировании популяцией для своих особей бесполезных им в данной среде признаков. Однако в другой среде, возникающей после катастрофы, эти признаки оказываются жизненно полезными. Популяция людей (человечество) сейчас осознала надвигающуюся экологическую катастрофу и, видимо, начинает готовиться к ней, пытаясь, если не предотвратить, то по крайней мере смягчить ее действие, изменив свое «индустриальное» поведение.

Присущий предвидящим системам акт решения имеет специфическую форму — прогнозирующий стимул (блок предиктора) вырабатывает упреждающую его реакцию (блок управления). При этом, вообще говоря, из-за диспропорции эффективностей этих двух блоков возможны две различные ситуации. Так, предвидя неизбежность смерти, человек, как правило, не может продлить свою жизнь до желаемых для него и реальных при этом пределов. Здесь блок предвиденья эффективнее блока управления. В последние десятилетия в связи со второй технической революцией у всего человечества возникла противоположная диспропорция. Имея мощные технические средства воздействия на биосферу, человечество не может пока надежно научно прогнозировать результаты таких воздействий на достаточно большой период времени. Ни одна из существующих традиционных наук (физика, химия, биология и социология) каждая в отдельности сейчас и в будущем не сможет осуществить такой прогноз, требующий системного подхода.

Таким образом, несмотря на грандиозные успехи каждой из традиционных наук, особенно в анализе свойств простых систем, человечество для решения указанной проблемы экоцида оказалось в научном плане фактически безоружным. Конечно, имеются попытки решения проблемы экоцида исходя из «здравого смысла», но они на фоне научного физикализма выглядят столь

«нереспектабельными», что вряд ли кто-либо сочтет их убедительными. Альтернативой создавшемуся положению может явиться лишь ставка на создание новой фундаментальной науки — системологии. При этом надо оценить, возможно ли полное решение проблемы экоцида естественным интеллектом человечества в сжатые сроки и не потребуется ли для этого создания искусственного интеллекта (ИИ) (см. рис. 1.4).

Нужно иметь в виду принципиальное отличие используемой сейчас машинной вычислительной техники и тем, что можно назвать ИИ в современном его понимании. Первую можно считать Вычислителем или в лучшем случае Решателем задач, поставленных человеком, например доказательство теорем, сформулированных человеком в виде гипотез при заданных им же аксиомах.

Сейчас ИИ понимается как искусственный Исследователь неведомой человеку среды или искусственный Проектировщик искусственных же систем. При этом всякий раз человек определяет лишь область исследования или проектирования и конечную эффективность их, но не приводит точной формулировки решаемой задачи.

ИИ, видимо не без блока эмоций (простоты, красоты, неожиданности, комфортности и т. д.), должен сам регулировать свои мотивации в выборе тех или иных постановок и решений задач.

В этом месте мы подходим к ответу на вопрос, который, по-видимому, уже давно начал мучить читателя, после того как он постиг красивую диалектическую спиральную триаду «наивная системология — физикализм — системология». Автора неоднократно спрашивали: «А что же дальше? Тысячелетний рейх?» Действительно, что может быть дальше? И нет ли намеков на будущее в окружающей нас действительности?

По-видимому, дальше будет то, что можно было бы назвать «детским вариантом», связанным с ИИ. После создания самоорганизующегося ИИ на достаточно продвинутой технической (а может быть, и на биологической) базе человек сможет задавать ему вопросы нарастающей сложности и получать ответы на них до поры до времени на понятном ему языке. Для того чтобы уверовать в правильность таких ответов, человек сначала будет спрашивать ИИ о известных ему вещах, и если он убедится в том, что ИИ все это знает, т. е. выдерживает экзамен на интеллектуальность сначала человека, а потом и всего человечества, лишь после этого он будет

иметь основания верить ИИ. Эта вера весьма укрепит-ся, когда на вопросы людей ИИ сможет дать ответы, неведомые человечеству, и сможет еще объяснить людям, почему это так. Однако по мере возрастания сложности вопросов сначала наступит период понятных ответов с объяснениями, выходящими за пределы понимания людей, а затем и сами ответы окажутся для них невразумительными.

Описанные гипотетические возможности того, что может быть после красивой триады, названы детским вариантом потому, что в нем человечество выступает перед ИИ в роли ребенка, вопрошающего родителей. Однако интересно было бы оценить возможности детского варианта в научном плане. Ответ на этот вопрос в рамках системологии может показаться слишком простым.

Существование в рамках системологии теории потенциальной эффективности сложных систем любой технической или биологической природы распространяет ее предельные законы и на человечество как специфическую сложную систему, и на ИИ. Эффективность любой сложной системы ограничена ее потенциальной эффективностью. Биологические ограничения, лимитирующие эффективность деятельности человека и человечества, являются дополнительными, не позволяющими им приблизиться к потенциальной эффективности сложных систем без таких ограничений.

Что касается ИИ, то оценка его эффективности невозможна до тех пор, пока не будут открыты достаточно глубокие предельные законы потенциальной эффективности самоорганизующихся систем. Пока же мы обладаем знаниями лишь предельных законов потенциальной эффективности решающих систем — простейшего класса сложных систем.

1.4.5. Исследования самоорганизации сложных систем. По-видимому, проблеме самоорганизации сложных систем было посвящено больше исследований, чем другим проблемам сложных систем. Началом этих исследований следует считать попытку американца Ф. Розенблата в 1957 г. построить модель физиологического восприятия — так называемый перцептрон. С тех пор развилось целое направление распознавания образов, имеющее в основном экспериментальный характер. Лишь совсем недавно выяснилось [37], что можно построить теорию распознавания образов на четкой ста-

гнетической основе. Несмотря на это до сих пор не установлены предельные законы распознавания для сколько-нибудь нетривиального случая.

Более широкая концепция самоорганизации исследуется до сих пор на экспериментальном уровне. При этом численное моделирование процессов самоорганизации на ЭВМ использует биологические аналогии отбора (селекции) и случайных генераций (мутации). В отечественной литературе наиболее известен метод самоорганизации, разработанный А. Г. Ивахненко [38] и названный методом группового учета аргументов (МГУА). В зарубежной литературе известен метод эволюционного моделирования [39]. Оба метода являются естественной альтернативной теорией самоорганизации.

Действительно, самоорганизация биологических систем до интеллектуального уровня возникла в ходе «слепой» эволюции, управляемой неосознанными целями. Здесь целью являлось построение предельно эффективных для данных условий среды биологических систем с помощью отбора, закрепляющего полезные признаки. Широкое понимание этого механизма, выходящее за узкие биологические рамки, и составляет основу указанных двух методов моделирования [38, 39]. Имитируя мутации и отбор на полиномах, конечных автоматах и других математических объектах, эти методы стремятся настолько это возможно повысить эффективность распознавания, предсказания и других процедур с помощью указанных математических объектов. При этом такой вид моделирования тем эффективнее по сравнению с другими, чем нестационарнее среда. В отличие от других моделей, в самоорганизующихся моделях их структура и поведение заранее не фиксируются, а все время обновляются в ходе эксперимента, приближаясь к предельно эффективным для данного уровня нестационарности среды. Пока оценки хода сходимости процесса самоорганизации и получаемой при этом предельной эффективности носят, как правило, экспериментальный характер. Попытки некоторых теоретических оценок в этой области содержатся в работах [38, 40, 41].

Длительное топтание на месте теории самоорганизации, по-видимому, связано с наличием каких-то неясных пока принципиальных трудностей в этой области. Далее в п. 1.6.1 мы вернемся к этому вопросу в связи с рассмотрением других, принципиально отличных от рассматриваемой, концепций исследования сложных систем.

1.5. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ

Теория потенциальной эффективности сложных систем [4] занимает промежуточное положение между концептуальной частью системологии, изложенной выше, и более конкретными и поэтому менее общими расчетными методами анализа систем [36] — современного варианта исследования операций. Целью этой теории является формулировка общих предельных законов, ограничивающих эффективность сложных систем любой природы. В этом параграфе будут изложены концептуальные основы теории потенциальной эффективности. Подробное изложение результативной части этой теории содержится в монографии [4], поэтому далее в гл. 3 будут приведены лишь одни формулировки предельных законов с их экологическими интерпретациями.

1.5.1. Общая форма предельного закона. Для простых систем определяющими оказываются законы сохранения вещества и энергии. Например, если в изолированную систему из среды регулярно через интервал времени, принятый за единицу, поступают порции энергии Δv_i и всего за n моментов времени в нее поступило $v = \Delta v_1 + \dots + \Delta v_i + \dots + \Delta v_n$ энергии, то общее количество энергии u , которое система может выделить в среду за то же время не может быть больше v ($u \leq v$). Любые нарушения этого фундаментального закона сохранения обнаруживают, что система имела некоторую запасенную энергию, которую она выделяла в это время в среду, независимо от того, что она получила от среды. В любых (u, v) -обменах такого рода всегда оказывается, что общее количество энергии не возникает и не исчезает, а лишь обменивается. Закон сохранения является физическим постулатом, основанным на нашем эмпирическом опыте.

Рассмотрим пример другого фундаментального закона, на этот раз не физического, а системного характера. Пусть сложная система регулярно через интервал времени, принятый за единицу, воспринимает искажаемые средой символы 0 и 1, причем их перепутывание в различные моменты времени происходит независимо друг от друга с постоянной вероятностью p ($0 < p < 0,5$). Системе известны v сигналов $x_1, \dots, x_k, \dots, x_v$, взаимно-однозначно закодированных v последовательностями из u бинарных символов 0 и 1 (длиной u). Известно, что принятая после искажений отдельных бинарных символов

последовательность y образовалась из одной из v последовательностей, закодировавших сигнал x_i , но неизвестно, какой именно. Система должна произвести акт решения (декодирования) — выбрать при наличии y одну из v последовательностей, кодировавшей сигнал x_i и этим указать передававшийся, по ее мнению, сигнал x_i , что может быть верным лишь с некоторой вероятностью $P < 1$. Согласно одному из предельных законов потенциальной эффективности (здесь помехоустойчивости), открытому К. Шенноном в 1948 г. [2] (здесь мы его приводим в простейшей форме), имеется фундаментальная величина $v_0 = 2^{uC(p)}$, где $C(p) = 1 + p \log_2 p + (1-p) \log_2 (1-p)$, такая, что при $v < v_0$ существуют такие способы кодирования и декодирования, при которых вероятность правильного декодирования P с ростом u приближается к единице. Если же $v > v_0$, то при любых способах кодирования и декодирования P с ростом u стремится к нулю.

Так как маловероятные события практически не осуществляются, то можно утверждать, что при заданных p и большом u система может различать $v < v_0$ сигналов, а $v > v_0$ не может. Например, при $p = 0,1$ и $u = 100$, фундаментальная величина v_0 , как легко подсчитать по приведенной выше формуле, равна $0,3 \cdot 10^{16}$.

Какой бы ни была реальная сложная система, биологической или технической, если она удовлетворяет условиям, при которых была построена соответствующая модель, то она не может различать больше чем v_0 сигналов. Одним из условий, молчаливо предполагаемым, является условие информационной замкнутости системы, т. е. в систему не поступает никакая информация, кроме указанной.

Такого рода общие и вместе с тем конкретные заключения трудно переоценить, если иметь в виду, что они сделаны без исследования конкретной структуры и поведения сложных (например, биологических) систем. Однако они сделаны совсем на другой основе, чем в первом примере с законом сохранения (не на эмпирической, а на логической) и в соответствии с первым принципом системологии (см. п. 1.3.4) они подчиняются всем следствиям из этого принципа, трактующим об их отношении к действительности.

Мы не видим, почему фундаментальность (т. е. общность и конструктивность) такого рода заключений для сложных систем не может конкурировать с фундаментальностью физических законов для простых систем

(например, законов сохранения). Поэтому мы относим такого рода заключения к рангу законов сложных систем. Приведенный пример имеет более широкую трактовку, используемую автором в теории потенциальной эффективности сложных систем [4]. Ее основным понятием является понятие так называемого (u, v) -обмена между системой **A** и средой **B**, где u — некоторое количество абстрактных ресурсов, расходуемых системой, которые система «платит» среде за количество v приобретаемых абстрактных ресурсов.

Так, за сохранение своей надежности на время $v=t$ система должна платить среде своими выходящими из строя элементами в количестве $u=n$. Для различения $v=M$ сигналов на фоне шумов среды (как в рассмотренном примере) система расходует часть $u=t'$ приобретенного ею времени своей жизни ($t' < t$). Для приобретения у среды некоторого количества v необходимых системе ресурсов (например, порции $v=n'$ собственных элементов) система снова расходует свой «жизненный» ресурс — часть времени жизни $u=t''$ ($t' + t'' \leq t$), например в конфликтной игре со «злонамеренной» средой и т. д.

Эффективность системы всегда ограничивается предельно выгодным для нее (u, v_0) -обменом, т. е. обменом, при котором за данное u она получает предельно большое v_0 или фиксированное v_0 , тратя предельно малое u .

Величина $v=v(u, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ зависит от величины u и структур и поведений системы **A** и среды **B**. Фундаментальная величина v_0 , фигурирующая в выгодном (u, v_0) -обмене, имеет следующее общее определение.

Для широких классов \mathfrak{X} и \mathfrak{Y} систем $A \in \mathfrak{X}$ и сред $B \in \mathfrak{Y}$ существует фундаментальная величина

$$v_0 = v(u, A_0, B_0) = \max_{A \in \mathfrak{X}} \min_{B \in \mathfrak{Y}} v(u, A, B), \quad (1.5.1)$$

где A_0 и B_0 — экстремальные (оптимальные) в классах \mathfrak{X} и \mathfrak{Y} система и среда соответственно. В случае бесконфликтного взаимодействия системы со средой в соотношении (1.5.1) не берется второго экстремума и вместо «наихудшей» для системы среды B_0 фигурирует фиксированная среда **B**.

Проблема сохранения значения v_0 при перемене местами экстремумов в соотношении (1.5.1) обсуждается далее в п. 3.2.3.

Целью системы A , обозначаемой \underline{A} , можно считать стремлением ее достигнуть наилучшего для себя состояния, определяемого выгодным (u, v_0) -обменом.

Как правило, взаимодействие системы со средой носит стохастический характер, и поэтому можно говорить лишь о вероятности $P(u, v)$, с которой имеет место (u, v) -обмен. Величину $P(u, v)$ называют эффективностью системы. Отождествляя цель системы A с выгодным (u, v_0) -обменом или близким к нему (u, v) -обменом, вероятность $P(u, v) = P(A)$ можно считать вероятностью достижения системой своей цели. В этом случае такую вероятность называют *потенциальной эффективностью* системы. Иногда эффективностью системы называют саму величину v , а фундаментальную величину v_0 — ее потенциальной эффективностью.

Для больших значений u , которым соответствуют большие значения v , и всех известных моделей отдельных качеств сложных систем, приводящих к предельным законам их эффективности по этим качествам, имеет место следующее асимптотическое соотношение [4]:

$$P(u, v) \approx \begin{cases} 0 & \text{при } v > v_0, \\ 1 & \text{при } v < v_0. \end{cases} \quad (1.5.2)$$

В частности, для рассмотренного выше случая различения системой $v=M$ сигналов, закодированных последовательностями длиной $u=t$, на фоне шумов вероятность P правильного декодирования, играющая роль эффективности, имеет вид

$$P = P(t, M) \approx \begin{cases} 2^{-tk(p_R, p)} & \text{при } M > 2^{tC(p)}, \\ 1 - 2^{-tk(p_R, p)} & \text{при } M < 2^{tC(p)}, \end{cases} \quad (1.5.3)$$

где $k = (x, y) = x \log_2(x/y) + (1-x) \log_2[(1-x)/(1-y)]$ ($0 \leq x, y \leq 1$) и p_R является решением уравнения $R = C(p_R)$, причем $R = (\log_2 M) / t$ и $C(p) = k(p; 0,5)$.

Ясно, что приведенный в начале этого пункта второй пример следует рассматривать как асимптотический случай ($t \rightarrow \infty$) соотношения (1.5.3), а также как частный случай общего соотношения (1.5.2).

1.5.2. Конструктивность. Приведенное в предыдущем пункте обсуждение общей формы предельного закона потенциальной эффективности (соотношения (1.5.1) и (1.5.2)) было бы неполным без следующих замечаний. По сути дела это компактная общая форма записи более

конкретных соотношений, которые независимо и в разное время были открыты в теориях надежности, информации, игр и других областях системологии (см. § 3.2). Тем более замечательным является то, что всех их постигла одна и та же участь. Вначале они открывались в известной математической форме теорем существования, т. е. доказывалось лишь существование оптимальной системы A_0 или оптимальных системы A_0 и среды B_0 , удовлетворяющих, например, соотношению (1.5.1). Далее делались попытки конструктивного доказательства тех же законов, т. е. попытки найти алгоритмы построения оптимальных объектов, о которых известно лишь то, что они существуют. Эти попытки в ряде случаев до сих пор не увенчались успехом.

Важность конструктивной формы предельных законов трудно переоценить. Действительно, эти законы в форме теорем существования имеют лишь негативный смысл, указывая предельные значения эффективности сложных систем и тем самым исключая неоправданные утверждения и поиски типа поисков перпетуум-мобиле.

Конструктивная форма предельных законов имеет позитивный смысл. Для построения новых сложных технических систем она указывает их оптимальные варианты. Для исследования существующих биологических систем, подошедших близко к своим оптимальным прототипам в ходе естественной эволюции, конструктивная форма предельных законов также представляет огромный интерес. Если сопоставление эффективности реальной биосистемы с ее потенциальной эффективностью показывает, что они близки, то отсюда следует и близость оптимальной модели A_0 к ее оригиналу A^* . Другими словами, можно утверждать, что A_0 и A^* имеют близкие структуру и поведение. Здесь мы не касаемся проблемы многозначности таких утверждений. Несмотря на это, любая определенность относительно структуры и поведения биологической системы, полученная не традиционными экспериментальными методами, а «на кончике пера», весьма заманчива и существенно дополняет традиционные методы.

Желательность конструктивной формы предельных законов не исчерпывает требования к ним в системологии. Дело в том, что когда в математике формулируется алгоритм, приводящий к построению некоторого объекта, то даже при требовании, чтобы это построение проводилось за конечное число шагов, не оговаривается,

какое конечное число шагов является приемлемым, а какое нет. Более того, поскольку в системологии ограничиваются лишь конечными множествами, в частности конечными классами систем \mathfrak{A} , то доказательство существования в таком классе оптимальной системы A_0 с точки зрения математики одновременно является конструктивным, так как искомый объект может быть найден за конечное число шагов простым перебором элементов множества \mathfrak{A} . Однако, как правило, такого рода переборы, да и многие более изощренные математические алгоритмы требуют практически неосуществимого числа шагов. В связи с этим возникает проблема уточнения самого понятия осуществимости.

1.5.3. Осуществимость. Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть в урне содержится N шаров, среди которых лишь один белый, а все остальные черные. Пусть целью системы является выбор из урны белого шара при возможности многократных попыток такого выбора без возвращения вынутых шаров в урну. Тогда вероятность P_t достижения цели в точности при t -м вынимании имеет вид

$$P_t = \frac{N-1}{N} \frac{N-2}{N-1} \cdots \frac{N-(t-1)}{N-(t-2)} \frac{1}{N-(t-1)} = \frac{1}{N}.$$

Вероятность же достижения цели в одном из T первых выниманий имеет вид

$$P(T) = \sum_{t=1}^T P_t = T/N.$$

Пусть на одно вынимание тратится время $\Delta t = 1$ с. Тогда можно гарантировать, что за время T цель будет достигнута с вероятностью $P(T) = T/N$. При $T=1$ с мы можем гарантировать достижение цели лишь с вероятностью $P(1) = 1/N$. А для того чтобы вероятность $P(t)$ была близка к единице, необходимо, чтобы T было близко к N . При достаточно большом N (например, $N = 10^{100}$) ни первый, ни второй варианты систему не устраивают: первый из-за практической невозможности наступления маловероятных событий, второй из-за практической неприемлемости времени ожидания достижения цели.

Описанная ситуация оправдывает следующее общее определение понятия осуществимости [26, 42]. Пусть задана вероятность $P(T)$ осуществления цели A системой A за время T . Пусть заданы приемлемые вероятности P_0 и

время T_0 достижения цели. Пару (P_0, T_0) будем называть порогами осуществимости. По определению, цель осуществима для системы, если одновременно выполняются два неравенства

$$P(T) \geq P_0 \text{ и } T \leq T_0. \quad (1.5.4)$$

Понятие неосуществимости труднее определить, чем понятие осуществимости. По определению, цель неосуществима для системы, если нарушается хотя бы одно из неравенств (1.5.4) для оптимальной в смысле соотношения (1.5.1) системы A_0 . Таким образом, понятие осуществимости требует предварительно ввести понятие оптимальной системы. Понятие осуществимости (неосуществимости) имеет важнейшее методологическое значение для всей системологии, о котором мы скажем далее.

Существование природных материальных систем является эмпирическим доказательством их осуществимости. Создание искусственных материальных систем, а также моделей природных систем (в зависимости от степени их адекватности оригиналу) может оказаться осуществимым и неосуществимым. Следует различать проблему осуществимости построения адекватной модели природной системы от проблемы осуществимости модели (проекта) материальной искусственной системы. В первом случае исследуется существующая система, во втором требуется создать осуществимый проект построения искусственной системы. Все это указывает на практическую важность понятия осуществимости. Однако это понятие имеет и важнейшее теоретическое значение. Собственно лишь оно выделяет основную теоретическую базу системологии — теорию потенциальной эффективности, а с ней и всю системологию в безбрежном море современной математики.

Действительно, построение теории потенциальной эффективности дедуктивно. В ней постулируется в математической форме класс моделей, а на его основе в виде теоремы выводится соответствующий предельный закон, ограничивающий эффективность систем этого класса по рассматриваемому качеству (1-й принцип системологии). Если при этом не вводилось бы никаких ограничений на постулируемый класс, кроме обычных математических ограничений, из которых важнейшим является требование логической непротиворечивости, то системология ничем бы не отличалась от обычной математической тео-

рии. В самом деле, в математике имеют право на существование любые непротиворечивые объекты. Системология предъявляет к своим объектам более жесткие требования. Кроме того, чтобы быть непротиворечивыми, они должны еще быть и осуществимыми в том смысле, как это было изложено. Понятие осуществимости труднее формализовать, чем, например, понятие непротиворечивости. Однако на инженерном уровне строгости, как это было сделано, понятие осуществимости имеет точную конструктивную формулировку, позволяющую использовать ее при расчетах.

1.5.4. Комфортность среды и компенсационная характеристика. Рассмотрим ситуацию, когда сложная система A приобретает нужные ей ресурсы v (например, пищу) у индифферентной к ней среды B , тратя на это ресурсы u (например, время). Как и ранее, рассмотрим v как функцию $v=v(u, A, B)$, однако в специальном случае, когда она распадается в произведение двух множителей. В большинстве конкретных случаев, рассматриваемых в гл. 3, такое представление функции v имеет место. Итак, пусть

$$v=v(u, A, B)=v_1(u, A)v_2(B). \quad (1.5.5)$$

Другими словами, мы считаем, что величина v пропорциональна величине $v_2(B)$, отражающей наличие этих ресурсов в данной среде B или ее комфортности для системы A по этим ресурсам (среда B может быть бедна или богата ими). В качестве коэффициента пропорциональности здесь фигурирует величина $v_1(u, A)$, которая при фиксации платы u за ресурсы зависит лишь от умения системы A добывать их.

Зафиксируем теперь потребности системы A в необходимых ей ресурсах $v=v_0=\text{const}$ и ресурсы, которые она в состоянии за них платить, $u=\text{const}$, где

$$v_0 = \max_{A \in \mathfrak{A}} \min_{B \in \mathfrak{B}} v_1(u, A)v_2(B) = v_1(u, A_0)v_2(B_0). \quad (1.5.6)$$

Фиксированное значение v_0 имеет различное представление для различных сред B, \dots, B', \dots, B_0 и соответствующих им систем A, \dots, A', \dots, A_0 :

$$v_1(u, A)v_2(B) = \dots = v_1(u, A')v_2(B') = v_1(u, A_0)v_2(B_0) = v_0. \quad (1.5.7)$$

Пусть для определенности среды $\mathbf{B}, \dots, \mathbf{B}', \dots, \mathbf{B}_0$ приводят к убывающей для систем $\mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}', \dots, \mathbf{A}_0$ последовательности комфортностей

$$v_2(\mathbf{B}) \geq \dots \geq v_2(\mathbf{B}') \geq \dots \geq v_2(\mathbf{B}_0). \quad (1.5.8)$$

Из соотношений (1.5.7) и (1.5.8) можно образовать убывающую последовательность отношений, не превышающих единицы:

$$1 \geq \xi = \frac{v_1(u, \mathbf{A})}{v_1(u, \mathbf{A}_0)} = \frac{v_2(\mathbf{B}_0)}{v_2(\mathbf{B})} \geq \dots \geq \xi' = \frac{v_1(u, \mathbf{A}')}{v_1(u, \mathbf{A}_0)} = \frac{v_2(\mathbf{B}_0)}{v_2(\mathbf{B}')}. \quad (1.5.9)$$

Отношение $\xi = \xi(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, определяемое (1.5.9), будем называть *компенсационной характеристикой*. Она показывает, как система своим умением добывать дефицитные для нее ресурсы компенсирует их нехватку в доступном для нее виде в среде. Компенсационная характеристика дает, например, возможность количественно оценить влияние вещественно-энергетических факторов на эффективность сложной системы (см. гл. 3).

1.5.5. Неоднозначность и вырождение оптимизационной модели. Оперативная характеристика. Относительность понятий системы и среды (см. п. 1.3.1) в еще большей степени относится к понятиям оптимальной системы и экстремальной среды, определяемых соотношением (1.5.1). Надо иметь в виду, что экстремумы соотношения (1.5.1) приурочены к фиксированным классам систем $\mathbf{A} \in \mathfrak{A}$ и сред $\mathbf{B} \in \mathfrak{B}$ и одна и та же функция $v = v(u, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ на различных классах (\mathfrak{A} , \mathfrak{B}) и (\mathfrak{A}' , \mathfrak{B}') может иметь, вообще говоря, различные экстремумы, достигаемые различными системами и средами; (\mathbf{A}_0 , \mathbf{B}_0) и (\mathbf{A}'_0 , \mathbf{B}'_0) соответственно. Рассмотрим, однако, тот случай, когда этого не происходит и «гладкость» и монотонность функции $v = v(u, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ вне окрестности ее единственных экстремумов по \mathbf{A} и \mathbf{B} приводят к тому, что для вложенных друг в друга классов $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}'$ эти экстремумы совпадают. Однако и в этом случае неоднозначность экстремумов может возникнуть из-за изменения порядка взятия максимума и минимума в соотношении (1.5.1). Однако остановимся на том случае, когда этого не происходит.

В этом случае нас подстерегает тривиальное вырождение оптимизационной модели на этот раз уже не из-за расширения классов \mathfrak{A} и \mathfrak{B} , а из-за их сужения.

диктуемого конкретными задачами. Следует заметить, что само понятие широты и узости классов \mathfrak{A} и \mathfrak{B} является относительным и тесно связанным с видом функции $v=v(u, \mathbf{A}, \mathbf{B})$. Все зависит от «остроты» или «тупости» соответствующих экстремумов этой функции в пределах рассматриваемых классов. В предельном тривиальном случае постоянства функции $v=v(u, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ на этих классах, т. е. независимости ее от аргументов \mathbf{A} и \mathbf{B} , происходит вырождение оптимизационной модели. Поэтому классы \mathfrak{A} и \mathfrak{B} должны быть достаточно широкими, чтобы вариации значений функции $v=v(u, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ на них в зависимости от \mathbf{A} и \mathbf{B} были достаточно значимыми.

В связи с рассматриваемыми вопросами находится различная интерпретация второго экстремума соотношения (1.5.1). Первая интерпретация связана с конфликтной ситуацией, когда «злонамеренная» среда \mathbf{B} стремится предельно уменьшить количество v ресурсов, отдаваемых системе \mathbf{A} . Вторая интерпретация связана с индифферентной ситуацией, когда среда \mathbf{B} нейтральна к системе \mathbf{A} , но система информирована лишь о классе сред \mathfrak{B} , а не о той среде \mathbf{B} из этого класса, которая имеет место на самом деле, т. е. это ситуация неопределенности. Поэтому для гарантированности заключений о взаимодействии со средой система должна рассчитывать на худшую для себя среду \mathbf{B}_0 в рассматриваемом классе \mathfrak{B} , что опять оправдывает соотношение (1.5.1), но уже в новой ситуации неопределенности, а не «злонамеренности» среды.

В этом случае возникает проблема оценки потерь, которые несет система \mathbf{A} , настраиваясь лучшим образом не на истинную среду \mathbf{B} , а на предполагаемую среду \mathbf{B}' . Для оценки таких потерь при фиксированном значении платы u рассмотрим соотношение

$$v[u, \mathbf{A}_0(\mathbf{B}'), \mathbf{B}] \leq v[u, \mathbf{A}_0(\mathbf{B}), \mathbf{B}] = \max_{\mathbf{A} \in \mathfrak{A}} v(u, \mathbf{A}, \mathbf{B}),$$

у которого равенство достигается при $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$. При фиксированном значении \mathbf{B} и переменных значениях \mathbf{B}' величина $v[u, \mathbf{A}_0(\mathbf{B}'), \mathbf{B}]$ аналогична оперативной характеристике теории выбора между гипотезами [43]. Однако для дальнейшего изложения удобнее использовать относительное приращение этой величины

$$\eta = \frac{v[u, \mathbf{A}_0(\mathbf{B}), \mathbf{B}] - v[u, \mathbf{A}_0(\mathbf{B}'), \mathbf{B}]}{v[u, \mathbf{A}_0(\mathbf{B}), \mathbf{B}]}, \quad (1.5.10)$$

которое всегда заключено между нулем и единицей.

Иногда удобнее двойственная постановка задачи, т. е. минимизация расходуемых ресурсов $u = u(v, A, B)$ при фиксации потребляемых ресурсов v . В этом случае, если соответствующие оптимальные системы не совпадают, то будем иметь

$$u[v, A_0(B'), B] \geq u[v, A_0(B), B] = \min_{A \in \mathfrak{A}} u[v, A, B]$$

и соответствующее относительное приращение, заключенное между нулем и единицей, имеет вид

$$\tilde{\eta} = \frac{u[v, A_0(B'), B] - u[v, A_0(B), B]}{u[v, A_0(B'), B]}. \quad (1.5.11)$$

Выражение η или $\tilde{\eta}$ будем называть *оперативной характеристикой* потерь от неточности знания состояния среды.

1.6. ДРУГИЕ КОНЦЕПЦИИ

У читателя не должно создаваться впечатления о единственности приведенной концептуальной схемы возможной теоретической атаки сложных систем. Имеются и другие концепции как внутри системологии, так и в несколько расширенных рамках физикализма. Не претендуя на полноту обзора этих концепций, остановимся лишь на некоторых, имеющих, по нашему мнению, первостепенное значение.

В первые послевоенные годы сразу же после успешных продвижений в разработке теории решающих систем, связанной с именами В. А. Котельникова, К. Шеннона и Дж. фон Неймана, в 50-е годы делается попытка, особенно интенсивная последним из перечисленных ученых, теоретической атаки самоорганизующихся систем. Однако несоизмеримые трудности, возникшие при переходе от исследования решающих к исследованию самоорганизующихся систем моментально сказались на соответствующих результатах. Если в первом случае они носили характер изящных законченных аналитических теорий, во втором — это были фрагментарные исследования, ограничивающиеся в ряде случаев лишь частными примерами. Как часто бывает даже при неудачных попытках решения действительно крупной проблемы, в ходе ее исследования возникают интересные побочные построения. Таковыми оказались клеточные автоматы Дж. фон Неймана [44]. Они были все еще четко опре-

деленными детерминированными моделями, о них все еще доказывались труднейшие теоремы, но самое главное было не это. Рассматриваемые объекты были нового качества. Клеточные автоматы были системами, пространственное перемещение элементов которых определялось не физическими, а *логическими причинами*. Это позволяло с их помощью строить примеры самоорганизации в «чистом» виде и улавливать самую суть этого явления.

1.6.1. Янус-космология. Следующим новым качественным скачком было помещение образований, подобных клеточным автоматам Дж. фон Неймана, на каждую из сторон некоторой двусторонней поверхности (игроки-антиподы). Их функционирование на каждой из сторон и взаимодействие, связанное с самоорганизацией, описаны в ряде монографий и названы там янус-космологией. Рассматриваются примеры такого функционирования и на односторонних поверхностях.

Оказалось возможным определить такие симметричные правила игры между игроками-антиподами, которые позволили ответить на вопросы, запретные в физике. Например, удалось логически «объяснить» закон сохранения энергии, силовые поля и «принципиальную» стохастичность физических объектов. Все эти феномены, постулируемые физикой, объясняются в янус-космологии исходя из единой системной конструкции. При этом и живые, и неживые системы выступают лишь как различные проявления ее. Таким образом, мы видим, что янус-космология претендует на построение *единой* картины мира на системной основе, т. е. является антиподом физикализма.

Грандиозность такого замысла на фоне наших скудных знаний в этой области оправдывает стиль изложения идей янус-космологии. Это примеры и аналогии, а иногда трудноуловимые намеки. И вместе с тем смысловая нагруженность каждого слова и фразы янус-космологии роднит ее с поэтическим произведением, вызывающим не только эмоциональные, но и глубокие научные размышления читателя.

1.6.2. Неоструктурализм. Широкая концепция, претендующая на открытие всеобщих законов, управляющих неживыми, живыми и знаковыми системами, была разработана Ю. А. Урманцевым [45, с. 50, 51]. Эти законы выводятся из всеобщей структурной характеристики систем Вселенной любой природы — симметрии. Это и послужи-

ло нам основанием для того, чтобы отнести рассматриваемое направление к неоструктурализму*. Это направление статично, а не динамично, в нем нет поведенческого элемента, а поэтому и телеологии. Поэтому неоструктурализм скорее физикалистская, чем системологическая концепция в том смысле, как нами была определена системология.

Конструктивность концепции неоструктурализма (и в ней немалую роль играют исследования М. А. Марутаева [46]) демонстрируется впечатляющей «сводкой» констант для систем самой разнообразной природы. «Распутывание» этих констант ведется на основе проявления симметрии в законах «золотого сечения», рядов Фибоначчи и т. д. Все это трактуется как следствие постулируемого всеобщего структурного свойства Вселенной — симметрии или гармонии.

В нашей концепции системологии постулируется наличие цели у сложных систем и, как следствие этого, их целенаправленное (оптимальное) поведение и целесообразная (оптимальная) структура. Кстати, последняя, как правило, оказывается симметричной. Таким образом, то, что постулируется в неоструктурализме, у нас является следствием другого постулата. Однако наша концепция является более узкой, так как не распространяется на простые системы. Но легкость, с которой возникают всеобщие утверждения неоструктурализма, покупается, как всегда (см. введение), дорогой ценой — снижением их конструктивности по сравнению с предельными законами системологии. Ограничиваясь лишь выявлением структурных закономерностей симметрии на основе теории групп (основной конструктивный элемент) неоструктурализм не сопоставим с общей теорией систем (ОТС) и никак уж не может быть отождествлен, по нашему мнению, с ней, что делает автор монографии [45]. Все эти сопоставления ни в коей мере не направлены на умаление важности неоструктурализма как одного из вполне равноправных направлений, пытающихся теоретически осмыслить всеобщие закономерности, управляющие системами любой природы.

Говоря о неоструктурализме, нельзя не вспомнить о пифагорейцах, которые неоднократно упоминаются в работе [45]. Наш вариант системологии ближе к телеологической концепции Аристотеля.

* Структурализм — известное направление в лингвистике.

1.6.3. Необихевиоризм. Сейчас в недрах физикализма намечается направление, которое пытается использовать экстремальные принципы физики в широкой интерпретации, допускающей их применение для исследования не только простых, но и сложных систем. Здесь имеют место два варианта. Первый вариант придает телеологический характер естественным формулировкам экстремальных принципов физики [47]. Например, принцип наименьшего действия звучит так: «Система выбирает такую траекторию, на которой действие минимально», или второе начало термодинамики звучит так: «Замкнутая система стремится к состоянию с наибольшей энтропией» и т. д. Второй вариант, развитый В. Ф. Кротовым [48], целевые функционалы теории сложных систем (см. п. 1.3.6) трактует как потенциалы физики (теория простых систем). Однако ни первый, ни второй варианты не вносят ничего принципиально нового в концепции и аппарат физикализма — все сводится лишь к терминологическим новшествам. Впрочем, второй вариант вносит новый конструктивный элемент, рекомендуя распространить физикалистский операционный принцип с простых систем на сложные (см. [22], гл. 7). При этом оба варианта, не реформируя аппарата теоретической физики (дифференциальные уравнения), фактически остаются в рамках динамической процессологии, т. е. изучения систем без проникновения в их дискретную структуру. Это дало повод автору назвать указанное выше направление необихевиоризмом.

Чтобы проиллюстрировать структурную аморфность этого направления, следует вернуться к упрощенному заданию системы в виде координат в «фазовом» пространстве (п. 1.3.6). Это задание является основным в необихевиоризме, и его «бесструктурность» является следствием того, что вместо связей между элементами системы задаются соотношения между ее фазовыми координатами. К этому же направлению относится с большой долей энергетизма концепция, блестяще изложенная в приложении к книге [49] П. Г. Кузнецовым. При этом подчеркивается роль в формировании этой концепции Р. О. ди Бартини в его знаменитой таблице операционного определения терминов и записи законов природы. Здесь всеобщий операционализм В. Ф. Кротова достигает своей кульминационной законченности. Попытки внести структурный элемент в эту концепцию идут в направлении использования тензорного анализа Г. Крона, распростра-

няемого, как и у В. Ф. Кротова, с анализа электрических сетей на анализ биологических и экономических систем. Идеологи необихевиоризма полны энтузиазма и уверенности в перспективности их концепции. Она представляется нам весьма продуктивной, если даже и не для продвижения в новые области, то по крайней мере для широкого и нового осмысления возможностей физикализма.

1.6.4. Кое-что о математике и физике. Заметим, что из всех перечисленных концепций лишь янус-космология не возводит в культ ни одну из ветвей математики, хотя весьма умело использует изящные топологические конструкции типа листа Мёбиуса и его многомерные обобщения. Что касается неоструктурализма и необихевиоризма, то их объектам надлежит быть в согласии с геометрией, теорией групп и тензорами, при этом с любой «модерной» геометрией, в крайнем случае с топологией. Но уж от непрерывности деформаций своих объектов они не отказываются. Это, конечно, слишком стеснительные ограничения для сложных систем в нашем понимании. Но для простых систем они привели к конструктивным методам теоретической физики.

Но какой же раздел математики свободен от указанных ограничений, например непрерывности своих объектов или законов их композиции? Таким разделом математики является комбинаторика или теория конечных множеств без правил композиции между их элементами логического или алгебраического характера. Свободная от указанных ограничений комбинаторика может менее предвзятая, чем другие разделы математики, приступить к решению системных задач. Изложению комбинаторных основ теории информации была посвящена монография автора [42]. Вторая глава этой книги посвящена изложению комбинаторных основ системологии.

При чтении этой главы у читателя ни в коей мере не должно создаться ложного впечатления о противопоставлении физики системологии. На самом деле всюду в главе речь идет о том, что физика успешно занимается и должна впредь заниматься простыми системами, а системология — сложными в указанных на с. 18 и 19 смыслах. Нарушение прерогатив каждой из них приводит к неэффективным результатам для обеих сторон (примером этого может быть физикализм). Однако это не означает, что один и тот же объект не может успешно исследоваться обоими этими направлениями. Например, биологические системы — биофизикой и системологией.

По моему мнению, различные понятия определяются не столько словами, каждое из которых может, в свою очередь, потребовать определения, как нашим отношениям к ним, которое выясняется постепенно.

А. А. Марков. Исчисление вероятностей, 1924 г.

2. КОМБИНАТОРНЫЕ ОСНОВАНИЯ

В предыдущей главе на качественном уровне рассматривались системные свойства оригиналов (материальных систем) и их моделей (идеальных систем). В этой главе рассматриваются лишь последние, начиная с их формального определения, при этом вместо слов «модель» или «идеальная система» употребляется слово «система».

Исследователь является творцом модели, и поэтому сама по себе модель не может сделать ничего, что бы не было заложено явно или неявно в нее создателем, например выбирать решения, иметь поведение и т. д. Однако все время оговаривать это технически трудно. Поэтому далее допускаются такие обороты, как «система выбирает свое действие», «системе присущ акт решения», «система обладает целенаправленным поведением» и т. д.

2.1. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ

Целью параграфа является введение предельного экономного понятия сложной системы, достаточного для дальнейшего конструктивного использования.

2.1.1. Множества и отношения. Неопределяемые понятия элемента и множества предполагаются известными читателю. Множества обозначаются прописными буквами, а их элементы, как правило, соответствующими строчными буквами, например $X = \{x\}$.

Иногда, чтобы подчеркнуть наличие равенства по определению, особенно когда оно вводится впервые, вместо символа « $=$ » используется символ « $\stackrel{\Delta}{=}$ ».

Предполагаются известными понятия принадлежности элемента x множеству X и включения подмножества L в множество X , а также операции над подмножествами L и соответствующие им символы \cup , \cap и \setminus . Совокупность всех подмножеств $L \subseteq X$, включая пустое множество \emptyset , обозначаемая $\mathfrak{X} = \mathfrak{L}(X)$, замкнута относительно указанных операций и называется *алгеброй* множеств. Подмножество $\mathfrak{X}_k \subseteq \mathfrak{X}$ называется *k-разбиением*, если оно состоит из k непустых попарно непересекающихся множеств, объединения которых дает все множество X , или в символической записи

$$\mathfrak{X}_k = \left\{ L_i : L_i \neq \emptyset, L_i \cap L_j = \emptyset (i \neq j), \bigcup_{i=1}^k L_i = X \right\}.$$

Конечное множество $X = \{x\}$, состоящее из N элементов, назовем *N-множеством*. Множество, состоящее из всех N -множеств обозначим $\mathfrak{X}^{(N)}$. Ясно, что $\mathfrak{X}^{(N)} \subseteq \mathfrak{X}$.

Графом $|X|$ называют пару $|X| = (X, G_X)$, где $G_X \subseteq \mathfrak{X}^{(2)}$; при этом элементы x называют *вершинами* графа, а X — множеством его вершин; 2-множества (x, x') называют *ребрами* графа, соединяющими вершины x и x' , а G_X — множеством его ребер.

Если в графе $|X|$ имеется вершина x , для которой во множестве его ребер G_X не найдется ни одного ребра $(x, x') \in G_X$, то такая вершина называется *изолированной*. Граф $|X|$ называется *связным*, если не существует никакого 2-разбиения $\mathfrak{X}_2 = (X \setminus X', X')$ множества его вершин X , при котором среди ребер $(x, x') \in G_X$ не найдется такого, что $x \in X \setminus X'$ и одновременно $x' \in X'$. В противном случае граф называется *несвязным*. Граф $|X'|$ называется *подграфом* графа $|X|$, если $X' \subseteq X$ и $G_{X'} \subseteq G_X$. При этом используется запись $|X'| \subseteq |X|$. Множество X при задании графа $|X|$ называется *структурированным*. Если заданы два множества $X = \{x\}$ и $Y = \{y\}$, то их *произведением* $X \times Y$ называется множество всех упорядоченных пар $\langle x, y \rangle$, где $x \in X$, а $y \in Y$.

Отношением R называют тройку $R \triangleq (X, Y, G_{XY})$, где подмножество $G_{XY} \subseteq X \times Y$ называется *графиком*.

В общем случае $X \neq Y$ множества

$$Y_x = \{y : \langle x, y \rangle \in G_{XY}, y \in Y\} (x \in X);$$

$$X_y = \{x : \langle x, y \rangle \in G_{XY}, x \in X\} (y \in Y)$$

называются *сечениями* графика G_{XY} элементами x и y соответственно.

Если среди пар $\langle x, y \rangle \in G_{XY}$ имеются все элементы $x \in X$ и $y \in Y$, т. е. для всех $x \in X$ и $y \in Y$ имеем $Y_x \neq \emptyset$ и $X_y \neq \emptyset$, то соответствующее отношение называется *многозначной функцией* F или просто функцией. Так как для функции F задание X и G_{XY} однозначно определяет Y , то примем для нее запись $F = (X, G_{XY})$.

Для сечений в этом случае приняты обозначения $Y_x = F(x)$ и $X_y = F^{-1}(y)$. Если сечения Y_x ($x \in X$) состоят в точности из одного элемента $y_x = F(x)$, то такая функция называется *однозначной*. Если, кроме того, еще и все сечения X_y ($y \in Y$) состоят в точности из одного элемента $x_y = F^{-1}(y)$, то такая функция называется *взаимно-однозначной* и говорят, что между элементами множеств X и Y имеет место взаимно-однозначное соответствие, обозначаемое $X \longleftrightarrow Y$. Если же при этом $X = Y$, то F называется *подстановкой* и обозначается $x' = d[x]$, где x и $x' \in X$. Последовательное применение подстановок $d_1[x] = x'$ и $d_2[x'] = x''$ эквивалентно применению одной подстановки $d[x] = d_2[d_1[x]] = x''$, называемой их *итерацией* или *произведением* и обозначаемой $d = d_2 d_1$. Заметим, что, вообще говоря, $d_2 d_1 \neq d_1 d_2$, т. е. это произведение не коммутативное.

2.1.2. Вероятность. Рассмотрим *конечное* множество $X = \{x\} = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_N\}$, состоящее из конечного числа N элементов и алгебру множеств $\mathfrak{X} = \{L\}$, состоящую из 2^N подмножеств $L \subseteq X$, включая пустое множество \emptyset . Элементы x будем называть *элементарными событиями*, а подмножества L, M — *событиями*. Определим на событиях $L \in \mathfrak{X}$ однозначную неотрицательную действительную функцию $p_L = P(L)$. Число p_L будем называть *вероятностью* события L , если функция $P(L)$ удовлетворяет двум аксиомам.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Аксиома 1 (нормирующие условия).} \\ P(X) = 1. \\ \text{Аксиома 2 (аддитивность). Для любых} \\ L \text{ и } L' \in \mathfrak{X} \text{ равенство } L \cap L' = \emptyset \text{ влечет} \\ P(L \cup L') = P(L) + P(L'). \end{array} \right\} (2.1.1)$$

Аксиомы 1 и 2 являются частным случаем более общих аксиом А. Н. Колмогорова [50], охватывающих случай бесконечных множеств X . Эти аксиомы *непротиворечивы*, что иллюстрируется примером их выполнения для

простейшего вырожденного случая $X = \{x\}$, $\mathfrak{X} = (\emptyset, \{x\})$, когда $p_\emptyset = 0$ и $p_x = 1$. Если $L \cap L' \neq \emptyset$, то, используя тождества $L \cup L' = L \cup L''$, $L' = (L \cap L') \cup L''$, где $L'' = L' \setminus L \cap L'$, и аксиому 2, легко показать, что

$$P(L \cup L') = P(L) + P(L') - P(L \cap L').$$

Событие $\bar{L} = X \setminus L$ называется *противоположным* событию L . Так как $L \cap \bar{L} = \emptyset$, то $p_{\bar{L}} + p_L = 1$, откуда $p_{\bar{L}} = 1 - p_L$. Из аксиом 1 и 2 следует, что для событий $L \in \mathfrak{X}_k$, принадлежащих k -разбиению,

$$\sum_{L \in \mathfrak{X}_k} p_L = 1. \quad (2.1.2)$$

Набор вероятностей $P = (p_L)$ ($L \in \mathfrak{X}_k$) называется *распределением вероятностей* или просто *распределением*.

Случайная величина определяется парой $\xi = \{P, \mathbb{E}(x)\}$, где P называется *распределением случайной величины*, а

$$\mathbb{E}(x) = \sum_{L \in \mathfrak{X}_k} z_L I_L(x)$$

— однозначная функция, принимающая на каждом элементарном событии $x \in L \in \mathfrak{X}_k$ действительное значение z_L , называемое *значением случайной величины*, причем $I_L(x)$ — характеристическая функция (индикатриса) множества L :

$$I_L(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in L, \\ 0, & \text{если } x \notin L. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Заметим, что если $N(L)$ означает число элементов подмножества L , то

$$N(L) = \sum_{x \in X} I_L(x). \quad (2.1.4)$$

Математическим ожиданием случайной величины ξ будем называть сумму

$$E\xi = \sum_{L \in \mathfrak{X}_k} z_L p_L. \quad (2.1.5)$$

Легко показать, что $E \sum_{i=1}^r \xi_i = \sum_{i=1}^r E\xi_i$ (правило аддитивности). В частности, можно определить случайную ве-

роятность $\xi_M = \{P_M, E_M(x)\}$, где $P_M = (p_{M/L})$ и $E_M(x) = \sum_{L \in \mathcal{X}_k} p_{M/L} I_L(x)$, приняв в качестве ее значений $p_{M/L}$ — вероятности событий $M \in Y_l$ l -разбиения множества $Y \neq X$, зависящие от фиксированного события $L \in \mathcal{X}_k$. Поэтому для каждого $L \in \mathcal{X}_k$

$$\sum_{M \in Y_l} p_{M/L} = 1. \quad (2.1.6)$$

Обозначим математическое ожидание $E\xi_M = q_M$. Тогда согласно соотношению (2.1.5)

$$q_M = \sum_{L \in \mathcal{X}_k} p_{M/L} p_L (M \in Y_l). \quad (2.1.7)$$

Суммируя обе части соотношения (2.1.7) по M и используя соотношения (2.1.2) и (2.1.6), получим

$$\sum_{M \in Y_l} q_M = 1, \text{ т. е. неотрицательные действительные числа}$$

q_M снова составляют распределение вероятностей $Q = (q_M)$. Результат вышеприведенных выкладок можно резюмировать следующим образом.

Математическое ожидание распределения случайной вероятности снова оказывается распределением вероятностей.

Это свойство вероятностей и математических ожиданий будем называть свойством *замкнутости* теории вероятностей относительно вероятности и математического ожидания. В теории вероятностей принята следующая терминология. Вероятности p_L , $p_{M/L}$ и q_M называются *вероятностями условий L , условными вероятностями событий M при условиях L и безусловными (абсолютными) вероятностями событий M соответственно*. Вероятность $p_{L \cap M}$ пересечения $L \cap M$ двух событий L и M , когда $X=Y$, по определению, полагается равной

$$p_{L \cap M} = p_L p_{M/L}. \quad (2.1.8)$$

Если $p_{M/L} = p_M$, то $p_{L \cap M} = p_L p_M$ и события L и M называются *независимыми*.

Аксиоматика (2.1.1) непротиворечива, но не полна, т. е. возможны различные задания вероятностей $p_L = P(L)$ событий. Одно из них таково. задается распределение $P = (p_x)$ N вероятностей элементарных событий $x \in \mathfrak{X}_N = X$, для чего полагаем

$$\sum_{x \in X} p_x = 1. \quad (2.1.9)$$

Соответствующее множество X будем называть *пробабелизованным*. Далее полагаем

$$P(L) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{x \in X} I_L(x) p_x = \sum_{x \in L} p_x. \quad (2.1.10)$$

Очевидно, что определенная соотношениями (2.1.9) и 2.1.10) функция $p_L = P(L)$ удовлетворяет аксиомам 1 и 2, и поэтому числа p_L являются вероятностями событий L . В частности, распределение $P = (p_x)$ может вырождаться в одно из N распределений:

$$P_{x'} = (p_x^{x'}) \quad (x' \in X), \quad (2.1.11)$$

у которых вероятности $p_x^{x'}$ элементарных событий x имеют вид

$$p_x^{x'} = I_{x'}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = x', \\ 0, & \text{если } x \neq x'. \end{cases}$$

Эти случаи распределения $P_{x'} = (p_x)$ будем называть *детерминированными*. Если вместо детерминированной индикатрисы $I_L(x)$, определяемой соотношением (2.1.3), ввести случайную индикатрису

$$J_L(x) = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p_L(x), \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - p_L(x), \end{cases} \quad (2.1.12) \\ (x \in X)$$

где $p_L(x)$ — вероятность принадлежности x к L , то по аналогии с детерминированным числом $N(L)$ и вероятностью $P(L)$ (см. (2.1.4) (2.1.10)) определяются их

случайные обобщения

$$N(L) = \sum_{x \in X}^{\Delta} J_L(x); \quad (2.1.13)$$

$$\Pi(L) = \sum_{x \in X}^{\Delta} J_L(x) p_x. \quad (2.1.14)$$

Так как математическое ожидание $EJ_L(x) = \rho_L(x)$, то, используя аддитивность математических ожиданий, получаем из соотношений (2.1.13) и (2.1.14)

$$EN(L) = \sum_{x \in X}^{\Delta} \rho_L(x); \quad (2.1.15)$$

$$E\Pi(L) = \sum_{x \in X} \rho_L(x) p_x. \quad (2.1.16)$$

Заметим, что, если $\rho_L(x) = I_L(x)$, то $J_L(x) = I_L(x)$ и как соотношения (2.1.4), (2.1.13), (2.1.15), так и соотношения (2.1.10), (2.1.14), (2.1.16) совпадают.

2.1.3. Нечеткие множества. В недавнее время всеобщий интерес привлекли исследования Л. Заде [51] по теории так называемых нечетких множеств. Они касаются обобщения классического понятия принадлежности элемента x подмножеству L множества X . В классическом случае имеются лишь две возможности. Элемент x либо принадлежит, либо не принадлежит подмножеству $L \subseteq X$ (либо $x \in L$, либо $x \notin L$). Л. Заде обобщил понятие принадлежности элемента x подмножеству L (в его символической записи $x \overset{\mu}{\in} L$) введением для каждого $L \in X$ действительной неотрицательной функции принадлежности $\mu = \mu_L(x)$, принимающей значения в интервале $[0, 1]$. При этом $x \overset{\mu}{\in} L$ означает $x \notin L$ и $x \overset{1}{\in} L$ означает $x \in L$, а величина $\mu = \mu_L(x)$ ($0 < \mu < 1$) характеризует «степень» принадлежности элемента x подмножеству L , называемому *нечетким*.

Пусть классическая многозначная функция $Y_x = F(x)$ ($x \in X$) задана совокупностью сечений Y_x — обычных подмножеств $Y_x \subseteq Y$ (см. п. 2.1.1). Нечеткую функцию зададим совокупностью функций принадлежности $\mu^x = \mu_{Y_x}^x(y)$ ($x \in X$) элементов $y \overset{\mu^x}{\in} Y_x$ ($y \in Y$) сечениям Y_x .

В более общем случае значениями функции принадлежности $\mu = \mu_L(x)$ могут быть элементы любого аб-

структного множества. В частности, ими могут быть подмножества $M \subseteq [0, 1]$ интервала $[0, 1]$, тогда функция принадлежности становится многозначной: $M_x = \mu_L(x)$. Далее можно определить *нечеткую функцию принадлежности*, полагая подмножества M_x (из интервала $[0, 1]$) нечеткими, как это было сделано выше.

Нечеткие множества с нечеткими функциями принадлежности называются нечеткими множествами второго типа, в отличие от нечетких множеств с обычными функциями принадлежности, которые называются нечеткими множествами первого типа. Л. Заде ввел рекуррентное определение нечеткого множества типа $n \geq 1$ [51, с. 52], когда значениями функции принадлежности являются нечеткие множества $(n-1)$ -го типа. После этого определяется *нечеткая функция* типа n как функция, значениями которой являются нечеткие множества типа n . Здесь следует заметить, что в теории нечетких множеств все еще не введены общие понятия, которые бы позволяли сформулировать свойство замкнутости понятия нечеткости, аналогичное свойству замкнутости понятия вероятности, сформулированному нами в п. 2.1.2. Другими словами, пока в теории нечетких множеств мы имеем лишь понятие нечеткости нарастающего типа n .

Если задано конечное множество $X = \{x\}$, состоящее из N элементов, то $N_\mu(L)$ — число элементов L его нечеткого подмножества задается по определению следующим выражением (см. [51, (7.70)]):

$$N_\mu(L) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{x \in X} \mu_L(x), \quad (2.1.17)$$

а вероятность $P_\mu(L)$ соответствующего нечеткого события L задается по определению следующим выражением (см. [51, (7.54)]):

$$P_\mu(L) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{x \in X} \mu_L(x) p_x. \quad (2.1.18)$$

Сравнение выражения для математических ожиданий (2.1.15) и (2.1.16) с определениями $N_\mu(L)$ и $P_\mu(L)$ показывает, что они совпадают, если формально положить функцию принадлежности $\mu_L(x)$ равной вероятности $p_L(x)$ принадлежности элемента x подмножеству L . Так же, как и для последней, в случае вырождения функции

принадлежности $\mu_L(x) = I_L(x)$ числа элементов и вероятности нечетких множеств и событий переходят в числа элементов и вероятности обычных множеств и событий. Для функции принадлежности, так же как и для вероятностей, $\mu_{\bar{L}}(x) \stackrel{\Delta}{=} 1 - \mu_L(x)$. Однако, в отличие от приведенных аксиом для вероятностей, для функций принадлежности полагают

$$\mu_{L \cup M}(x) \stackrel{\Delta}{=} \max(\mu_L(x), \mu_M(x)); \quad (2.1.19)$$

$$\mu_{L \cap M}(x) \stackrel{\Delta}{=} \min(\mu_L(x), \mu_M(x)).$$

Понятие нечеткого множества и нечеткой функции являются основой для введения понятия нечеткого отношения и, как частный случай последнего, нечетких отображений (функциональных зависимостей). Л. Заде использует эти понятия для введения более сложного понятия лингвистической переменной [51]. Здесь мы не будем касаться этих определений, которые в принципе позволяют школе Л. Заде обобщить, по-видимому, все классические понятия математики, в том числе и теории вероятностей. Однако для теории нечетких множеств, как и для любой формальной математической теории, всегда возникает вопрос о соотношении между объемом ее определений и аксиом и объемом ее конструктивной части. Например, все богатство и специфика теории вероятностей определяется не аксиомами 1 и 2, а связано с соотношением (2.1.9) мультипликативности вероятностей так называемых независимых событий.

К сколь богатым конструктивным результатам теории нечетких множеств могут привести определения типа (2.1.19) — пока не ясно. Незамкнутость в указанном выше смысле понятийных основ теории нечетких множеств не кажется нам достоинством этой теории. Тривиальным образом напрашивающаяся вероятностная трактовка функции принадлежности $\mu_L(x) = \rho_L(x)$ является заведомо узкой. Она покушается на оригинальность всей теории нечетких множеств и с полным основанием отвергнута школой Л. Заде. Однако мы не можем отказаться от такого соблазна, исходящего из сопоставления соотношений (2.1.15), (2.1.16) с определениями (2.1.17), (2.1.18). Именно часть теории нечетких множеств, не касающуюся понятия лингвистической переменной, с содержательными определениями (2.1.17) и (2.1.18) мы

будем рассматривать как теорию вероятностей с субъективной трактовкой вероятности $p_L(x)$ функцией принадлежности $\mu_L(x)$. Такая трактовка, как будет показано ниже, имеет немаловажное значение для определения понятия сложной системы.

Итак, высказав все свои сомнения о конструктивности теории нечетких множеств, мы воспользуемся ею лишь в связи с важнейшим для дальнейшего изложения вопросом о двух кардинально различающихся экспериментальных интерпретациях формального математического понятия вероятности.

2.1.4. Две экспериментальные интерпретации математического понятия вероятности. Формальные математические понятия вероятностей p_x и $p_L(x)$ внутри самой теории вероятностей сопровождаются рядом «модельных» интерпретаций этих величин. Так, о первой говорят как о вероятности появления, или осуществления, или выбора элементарного события x из множества X . О второй говорят как о вероятности принадлежности элементарного события x событию L . Имеются и другие теоретические интерпретации этих вероятностей, например известные урновые схемы, трактуемые как «мысленные» эксперименты. Здесь мы будем говорить о действительно экспериментальных интерпретациях математического понятия вероятности p , которые приводят к их эмпирическим аналогам.

Начнем с первой наиболее распространенной физической интерпретации понятия вероятности p_x элементарного события. Для нее необходимо требование возможности проведения массовых экспериментов над элементарными событиями $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N)$ при постоянных условиях. Если при n -кратном повторении такого эксперимента элементарное событие x_i появится m_i раз, то отношение m_i/n , называемое *частотой* этого события, с ростом n приближающейся в некотором смысле к вероятности p_{x_i} (см. [52]). Частность m_i/n является статистическим аналогом вероятности p_{x_i} и может служить ее эмпирической интерпретацией. При этом говорят о *спонтанном* появлении или выборе элементарного события x из множества X .

Пусть аналогичная возможность организации массового просмотра элементов множества L с целью обна-

ружения в нем фиксированного элементарного события x при n -кратном просмотре приводит к появлению в них последнего m раз. Частота m/n является статистическим аналогом вероятности $p_L(x)$ и может служить ее эмпирической интерпретацией.

Вторая, менее распространенная нефизическая, интерпретация вероятности рассматривает вероятность p_x как меру «уверенности» некоторой системы в появлении элементарного события x из множества X или меру «предпочтительности выбора» некоторой системой элементарного события x из множества X . Аналогично вероятность $p_L(x)$ рассматривается как мера «уверенности» системы в принадлежности элементарного события x событию L . При этом обязательна индивидуальность системы, наделенной своим собственным отношением к элементарным событиям x типа уверенности в их появлении, или принадлежности событию L , или предпочтительности их выбора.

Теория нечетких множеств, как указывает ее создатель Л. Заде, нацелена именно на исследование *отношений* персонизированных систем к появлению некоторых элементов x или их принадлежности к некоторым множествам L . Впрочем, вряд ли оправдано ограничение исследований таких отношений только людьми. Подобные отношения наблюдаются и у животных. Более того, сложное поведение современных технических систем также имеет внешние проявления, которые можно интерпретировать как «внутренние склонности». Далее мы будем рассматривать теорию нечетких множеств лишь как *нефизическую интерпретацию формального понятия вероятности*, которая имеет свою историю в концепциях субъективной вероятности Б. де Финетти с аксиоматической формализацией Л. Сэвиджа, связанной с теорией полезности [53]. Оттенок субъективизма теории вероятностей запечатлен и в термине «математическое ожидание».

В любом случае для нефизической интерпретации вероятности, которую мы будем называть *системной*, необходимо требование возможности *объективной* экспериментальной фиксации субъективных отношений системы к элементарным событиям. Техника такой фиксации в настоящее время весьма разработана и восходит еще к фехнеровским шкалам ощущений [53]. Такого рода эксперименты, как правило, носят массовый характер.

Прямые массовые эксперименты также реализуются

в дельфийском методе опроса экспертов и способах выявления общественного мнения.

Косвенные массовые эксперименты таковы, что «прошлые их исходы» хранятся в онтогенетической памяти особей и через нее формируют индивидуальные отношения к текущим элементарным событиям x . Наличие активно используемой памяти характерно и для поведения сложных технических систем. И, наконец, на такое отношение влияет массовый в смысле многократного повторения индивидуальный опыт системы.

Наличие возможности прямых массовых экспериментов приводит к частотам m/n , интерпретирующим вероятности p в статистическом смысле. Косвенный массовый эксперимент априори формирует вероятность p как меру уверенности наступления или предпочтительности элементарных событий x .

2.1.5. Система, среда и их взаимодействие. Простые и сложные системы. Рассмотрим конечное универсальное множество $Z = \{x\}$ элементов x . Графы $|X| = (X, G_x)$ будем называть *элементарными структурами*, их ребра (x, x') — *связями между элементами x и x'* . Множество всех элементарных структур обозначим S . Если граф, соответствующий элементарной структуре, связный, то ее тоже будем называть *связной*. Множество всех связных элементарных структур обозначим $S_{св}$. Если $X=Z$, то соответствующая элементарная структура $|Z|$ называется *полной*. Если $|X| \subseteq |Z|$, то будем говорить, что элементарная структура $|X|$ является *подструктурой* элементарной структуры $|Z|$. Обозначим $S_{св}$ и $S_{пол}$ множества всех связных и полных элементарных структур соответственно. Рассмотрим множество $D = \{d\}$ всех подстановок d , определенных на элементарных структурах $d[|X|] = |X'|$. ($|X|, |X'| \in S$). Подстановки d будем называть *действиями*. Далее рассматривается принимающая значение подмножеств $D_{|X|} \subseteq D_A \subseteq D$ функция $D_{|X|} = A(|X|)$, определенная на множестве $|A|$ элементарных структур $|X| \in |A| \subseteq S$. Или в другой записи функция $A = (|A|, \bar{A})$, где множество $|A|$ называется ее *структурой*, а $\bar{A} = G_{|A|, D_A}$ — ее *графиком поведения*.

Если зафиксирована элементарная структура $|X|$ и выбрано действие $d_A \in D_{|X|} = A(|X|)$, то пару $(|X|, d_A)$ будем называть *состоянием* функции A .

Миром называется функция $\mathbf{C}=(|C|, \bar{C})$ с непустой структурой $|C| \in S_{\text{пол}}$, состоящей из полных элементарных структур. Допустимой в мире \mathbf{C} функцией A называется функция, для которой имеет место взаимно-однозначное соответствие между элементарными структурами структур $|A|$ и $|C|$ ($|A| \leftrightarrow |C|$) и для соответствующих элементарных структур $|X| \in |A|$ и $|Z| \in |C|$ первая является подструктурой второй.

Состояния $(|Z|, d)$ и $(|X|, d_A)$ мира \mathbf{C} и допустимой в нем функции A будем называть *соответствующими*, если соответствующими являются их элементарные структуры $|Z|$ и $|X|$.

Состояния $(|X|, d_A)$ и $(|Y|, d_B)$ двух допустимых в мире \mathbf{C} функций A и B называются *соответствующими*, если каждая из них соответствует одному и тому же состоянию $(|Z|, d)$ мира \mathbf{C} .

Соответствующие состоянию $(|Z|, d)$ мира и друг другу состояния $(|X|, d_A)$ и $(|Y|, d_B)$ функций A и B называются *сопряженными*, если выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} XUY=Z; G_XUG_YUG_{X,Y}=G_Z; \\ d_Ad_B=d \text{ или } d_Bd_A=d, \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

где $G_{X,Y}$ — множество связей между элементами множеств X и Y . Если положено $d_Ad_B=d$, то состояние $(|Y|, d_B)$ называется *правым косостоянием* состояния $(|X|, d_A)$, если положено $d_Bd_A=d$, то *левым косостоянием*.

Системой $\mathbf{A}=(|A|, \bar{A})$ называется допустимая в мире \mathbf{C} функция со структурой $|A| \in S_{\text{св}}$, состоящей из связанных элементарных структур.

Средой $\mathbf{B}=(|B|, \bar{B})$ системы \mathbf{A} называется функция, состояния которой $(|Y|, d_B)$ являются сопряженными с состояниями системы \mathbf{A} . Из определения среды \mathbf{B} следует, что она является допустимой в мире \mathbf{C} функцией, и поэтому, если $|B| \in S_{\text{св}}$, то среда \mathbf{B} является системой.

Действия среды d_B и системы d_A в их сопряженных состояниях называются *стимулом* и *реакцией* соответственно.

Взаимодействие системы \mathbf{A} со средой \mathbf{B} рассматривается как взаимодействие их сопряженных состояний, приводящее по определению к новым сопряженным состояниям:

$$\langle (|X|, d_A), (|Y|, d_B) \rangle \rightarrow \langle (|X'|, d'_A), (|Y'|, d'_B) \rangle$$

в соответствии с соотношениями

$$\begin{aligned} |X'| &= d[|X|], \quad d'_A \in D_{|X'|} = A(|X'|) = A(d[|X|]); \\ |Y'| &= d[|Y|], \quad d'_B \in D_{|Y'|} = B(|Y'|) = B(d[|Y|]), \end{aligned}$$

(2.1.21)

$$d = d_A d_B \text{ или } d = d_B d_A.$$

Для сопряженных новых состояний необходимо, чтобы $X' \cup Y' = Z$ и $|Z'| = d[|Z|] \subset |C|$, (2.1.22)

причем

$$G_{|Z'|} = G_{|X'|} \cup G_{|Y'|} \cup G_{|X'|, |Y'|}$$

Заметим, что из-за некоммутативности операций итерации (умножения) подстановок, вообще говоря, $d_A d_B \neq d_B d_A$, и взаимодействие системы со средой в каждом из этих случаев происходит по-разному.

Первый вариант будем называть «*стимул — реакция*», второй «*реакция — стимул*» (им соответствуют правое и левое косостояния среды).

Для дальнейшего изложения важно различать эти два варианта взаимодействия, не различаемые при так называемом терминальном или автоматном задании системы. В последнем объединяются действия функций A и d_A в первом и B и d_B во втором вариантах взаимодействия. Тогда можно записать преобразования (2.1.21) в виде

$$\begin{aligned} d'_A &= T_{|X|}^A(d_B), \quad |X'| = Q_{|X|}^A(d_B); \\ d'_B &= T_{|Y|}^B(d_A), \quad |Y'| = Q_{|Y|}^B(d_A), \end{aligned}$$

(2.1.23)

где d_B называется «*входом*» системы, d'_A — ее «*выходом*», а $|X|$ и $|X'|$ — ее *состояниями*. Аналогичная терминология используется и для среды.

Соотношения (2.1.21) как и (2.1.23) имеют рекуррентный характер. Задав начальные сопряженные состояния системы и среды, можно получить последовательность сопряженных состояний.

Считается, что появление в состоянии $(|X|, d_A)$ системы A элементарной структуры $|X| \notin |A|$ означает гибель системы или превращение ее в другую систему A' . Другими словами, можно считать структуру $|A|$

системы A множеством «допустимых» элементарных структур $|X|$ системы A и в соответствии с представлениями Росса У. Эшби [15] полагать, что система существует лишь до тех пор, пока ее взаимодействие со средой не выводит ее элементарные структуры из допустимого множества $|A|$.

До сих пор система A определялась как многозначная функция $A = (|A|, \bar{A})$, сопоставляющая элементарной структуре $|X| \in |A|$ множество реакций $D_{|X|} = (A|X|)$; при этом не уточнялся механизм выбора конкретной реакции d_A из множества $D_{|X|}$. Теперь будем считать, что такой выбор происходит с помощью стохастического механизма, определяемого распределением вероятностей $P_{|X|} = (p_{|X|d_A})$, где $\sum_{d_A \in D_{|X|}} p_{|X|d_A} = 1$ ($|X| \in |A|$). Дру-

гими словами, будем считать множества $D_{|X|}$ пробабилизированными, а рассматриваемые системы называть *стохастическими*.

Произведем разбиение всех стохастических систем $\mathcal{A}_s = (A)$ на два класса. Класс систем \mathcal{A}_n , для которых распределение P имеет физическую (спонтанную) интерпретацию, будем называть классом *простых* систем, а класс систем \mathcal{A}_c , для которых распределение P имеет системную (индивидуальную) интерпретацию — классом *сложных* систем.

Таким образом в нашей классификации простые и сложные системы имеют одно и то же математическое формальное вероятностное описание. Они отличаются лишь двумя принципиально различимыми экспериментальными интерпретациями стохастического выбора реакций d_A из множества $D_{|X|}$ в соответствии с распределением $P_{|X|} = (p_{|X|d_A})$. Подчеркнем это различие. Стохастический механизм выбора реакции d_A для сложных систем, когда распределение $P_{|X|}$ имеет системную интерпретацию, будем называть *актом решения*, для простых систем, когда распределение $P_{|X|}$ имеет физическую интерпретацию, — *спонтанным актом*. В частном случае вырождения стохастического выбора в детерминированный соответствующие системы будем называть

детерминированными, продолжая различать среди них простые и сложные системы в указанном выше смысле. Таким образом, простая система может быть стохастической, а сложная — детерминированной.

Отличие спонтанного акта от акта решения состоит в том, что лишь последний связан с понятием «целенаправленности», т. е. лишь для сложных систем имеет смысл понятие «цели». Приступим к формальному определению этого понятия.

2.1.6. (U, V)-обмен, понятие цели и оптимальная система. Для дальнейшего изложения удобна символическая запись произвольной бинарной операции «*» на элементарных структурах $|X| = (X, G_X)$ и $|X'|' = (X', G'_{X'})$. По определению, операция * выполняется покомпонентно и приводит снова к элементарной структуре

$$|X| * |X'|' = (X * X', G_X * G'_{X'}).$$

Пусть заданы две элементарные структуры $|X|$ и $|X'|' \in |A|$. Определим по ним две другие элементарные структуры:

$$\begin{aligned} U &= |X| \setminus (|X| \cap |X'|') \text{ и} \\ V &= |X'|' \setminus (|X| \cap |X'|') \in |A|, \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

считая по определению их также принадлежащими структуре $|A|$ системы A. Заметим, что имеют место и такие представления

$$U = |X| \setminus (|X'|' \setminus V) \text{ и } V = |X'|' \setminus (|X| \setminus U). \quad (2.1.25)$$

Пусть все пары $(U, V) \in |A|^2$ частично упорядочены, так, что две любые пары (U, V) и (U, V') , а также (U, V) и (U', V) всегда находятся в одном из отношений

$$(U, V) \leq (U, V') \text{ и } (U, V) \leq (U', V),$$

где $<, =, >$ — символы «больше», «равно» и «меньше» соответственно. Поэтому из-за конечности всех рассматриваемых множеств для любого подмножества $W = \{(U, V)\} \subset |A|^2$ пар (U, V) при фиксированном U или V существуют соответствующие минимальные и макси-

мальные пары, для которых

$$(U, V_{\min}) \preceq (U, V) \preceq UV$$

$$(U_{\min}, V) \preceq (U, V) \preceq (U_{\max}, V).$$

Если задана система A и стимул d_B среды B , то согласно (2.1.21) $|X'|' = d[|X|]$, где

$$d[|X|] = \begin{cases} d_A[d_B[|X|]], & d_A \in D_{|X|} = A(|X|), \\ d_B[d_A[|X|]], & d_B \in D_{|Y|} = B(|Y|). \end{cases}$$

В этом случае согласно (2.1.25)

$$U = |X| \setminus (d[|X|] \setminus V), \quad V = d[|X|] \setminus (|X| \setminus U) \quad (2.1.26)$$

и пару (U, V) будем называть (U, V) -обменом между системой и средой. Компонента U указывает на элементы и связи, которые система «теряет» («оставляет» среде), компонента V — на элементы и связи, «приобретаемые» системой у среды или при другой интерпретации «воспроизводимые» самой системой.

Будем рассматривать подмножества всех линейно упорядоченных (U, V) -обменов

$$W_{V, |A|}^{d_B} = \{(U, V) : U = |X| \setminus (d[|X|] \setminus V),$$

$$d_A \in D_{|X|} = A(|X|), d[|X|], |X| \in |A|\};$$

$$W_{U, |A|}^{d_B} = \{(U, V) : V = d[|X|] \setminus (|X| \setminus U),$$

$$d_A \in D_{|X|} = A(|X|), d[|X|], |X| \in |A|\},$$

которые система A может производить со средой B при фиксированном стимуле d_B последней, оставаясь при этом в своем допустимом множестве структур $|A|$ ($d[|X|]$, $|X| \in |A|$). (U, V) -обмены, принадлежащие этим подмножествам, будем называть *допустимыми* для системы A . *Выгодными* (U, V) -обменами для системы A будем называть допустимые (U, V_*) -обмен и (U_*, V) -обмен, в которых

$$V_* = V(U, A, B) = \max_{\substack{|X| \in W_{U, |A|}^{d_B} \\ d_A \in D_{|X|}}} \{d[|X|] \setminus (|X| \setminus U)\}, \quad (2.1.27)$$

$$U_* = U(V, A, B) = \min_{\substack{|X| \in W_{V, |A|}^{d_B} \\ d_A \in D_{|X|}}} \{ |X| \setminus (d \setminus |X| \setminus V) \}, \quad (2.1.27)$$

причем система $A(|X|) = D_{|X|}$ при фиксации стимула $d_B \in D_{|Y|}$ среды $B(|Y|) = D_{|Y|}$ выбирает такую элементарную структуру $|X| \in W_{U, |A|}^{d_B}$ или $|X| \in W_{V, |A|}^{d_B}$ и реакцию $d_A \in D_{|X|}$, которые обращают в тах или min выражения, стоящие в соответствующих фигурных скобках соотношений (2.1.27).

Целью системы A , обозначаемой A , будем называть выгодный (U, V_*) - или (U_*, V) -обмен, обозначаемый $(U, V)_*$.

Пусть заданы классы системы $\mathfrak{A} = (A)$ и сред $\mathfrak{B} = (B)$ с сопряженными структурами $|A|$ и $|B|$, т. е. некоторой функции $D_{|X|} = A(|X|)$ и $D_{|Y|} = B(|Y|)$ с сопряженными состояниями $(|X|, d_A)$ и $(|Y|, d_B)$.

Оптимальными системами $A_{\text{opt}}^{(i)}$ и средами $B_{\text{opt}}^{(i)}$ ($i=1, 2$) назовем, вообще говоря, не совпадающие при $i=1$ и $i=2$ системы A и среды B , доставляющие экстремумы

$$V_0 = V(U, A_{\text{opt}}^1, B) = \max_{A \in \mathfrak{A}} V(U, A, B), \quad (2.1.28)$$

$$(U_0 = U(V, A_{\text{opt}}^2, B) = \min_{A \in \mathfrak{A}} U(V, A, B);$$

$$V_{00} = V(U, A_{\text{opt}}^1, B_{\text{opt}}^1) = \min_{B \in \mathfrak{B}} V(U, A_{\text{opt}}^1, B), \quad (2.1.29)$$

$$U_{00} = U(V, A_{\text{opt}}^2, B_{\text{opt}}^2) = \max_{B \in \mathfrak{B}} U(V, A_{\text{opt}}^2, B),$$

где в первом случае варьируются структуры $|A|$ систем класса \mathfrak{A} , а во втором — стимулы d_B сред класса \mathfrak{B} (см. (2.1.27)).

Соотношения (2.1.28) и (2.1.29) имеют следующие две интерпретации. *Определенная* или *индифферентная* интерпретация состоит в том, что в случае (2.1.28) система A информирована о стимуле d_B среды B , а в слу-

чае (2.1.29) она о нем не информирована и в лучшем случае знает лишь множество $D_{|Y|}$, которому d_B должно принадлежать. Поэтому во втором случае для гарантированности (U, V) -обмена система должна рассчитывать на самый невыгодный для себя вариант.

Неопределенная или *игровая* (конфликтная) интерпретация состоит в том, что среда **B** рассматривается как другая система, которая находится в конфликте с системой **A**, т. е. стремится нанести ущерб системе **A**, минимизируя (максимизируя) максимальное (минимальное) значение $V(U)$.

Мы уже упоминали о стохастическом механизме выбора стимула d_B и реакции d_A из соответствующих множеств $D_{|Y|}$ и $D_{|X|}$, определяемого распределениями $P_{|Y|} = (p_{|Y|}^{d_B})$ и $P_{|X|} = (p_{|X|}^{d_A})$. Таким образом, пробабиллизация множеств $D_{|Y|}$ и $D_{|X|}$ индуцирует пробабиллизацию множеств $W_{V, |A|}^{d_B}$ и $W_{U, |A|}^{d_B}$ допустимых (U, V) -обменов. Например, для $(U, V) \in W_{U, |A|}^{d_B}$

$$P((U, V)) = P(V = d | |X| \setminus (|X| \setminus U)) = p_{d_A}.$$

Таким образом, можно говорить о вероятности $P = P((U, V)_*) = P(\bar{A})$ выгодного $(U, V)_*$ -обмена или достижения цели \bar{A} системой **A**.

Пусть фиксированы среда **B** и некоторый выгодный $(U, V)_*$ -обмен для системы **A**. Рассмотрим класс

$$\mathfrak{A}_{U, V}^B = \{A : U(V, A, B) = U, V(U, A, B) = V\}$$

систем **A**, приводящих к фиксированному выгодному $(U, V)_*$ -обмену $(U, V)_* = (U, V)$. Вероятность фиксированного выгодного $(U, V)_*$ -обмена будет зависеть от выделения системы **A** из класса $\mathfrak{A}_{U, V}^B$, т. е. является условной вероятностью $P((U, V) | A, B)$.

Оптимальными назовем систему A_{opt} и среду B_{opt} , обрещающих в экстремумы выражения

$$P((U, V) | A_{opt}, B) = \max_{A \in \mathfrak{A}_{U, V}^B} P((U, V) | A, B);$$

(2.1.30)

$$P((U, V) | A_{\text{opt}}, B_{\text{opt}}) = \min_{B \in \mathfrak{B}} P((U, V) | A_{\text{opt}}, B).$$

Рассмотренные различные критерии оптимальности (2.1.28) — (2.1.30) (лишь в последнем случае это целевой функционал) приводят, вообще говоря, к различным оптимальным системам и средам. Однако в ряде практически интересных случаях оптимальные по разным критериям системы совпадают [4].

Рекуррентные соотношения (2.1.21) позволяют описать динамическую картину взаимодействия системы A со средой B . Рассмотрим последовательность

$$(A^T, B^T) = ((A_1, B_1), \dots, (A_t, B_t), \dots, (A_T, B_T)). \quad (2.1.31)$$

T пар (A_t, B_t) систем и сред, получающихся при задании первой пары (A_1, B_1) и получении пары (A_{t+1}, B_{t+1}) с помощью рекуррентных соотношений (2.1.21) вида

$$|X_{t+1}|_{t+1} = d^t [|X_t|_t], \quad d_A^{t+1} \in D_{|Y_{t+1}|_{t+1}}^{t+1} = A_t(d^t [|X_t|_t]); \quad (2.1.32)$$

$$|Y_{t+1}|_{t+1} = d^t [|Y_t|_t], \quad d_B^{t+1} \in D_{|Y_{t+1}|_{t+1}}^{t+1} = B_t(d^t [|Y_t|_t]),$$

где

$$d^t [|X_t|_t] = \begin{cases} d_A^t [d_B^t [|X_t|_t]] \text{ или} \\ d_B^t [d_A^t [|X_t|_t]], \end{cases}$$

с дополнительными ограничениями (2.1.22) для сопряженности состояний системы и среды. Целочисленные индексы t интерпретируются дискретными моментами времени.

Соотношения (2.1.24) позволяют по последовательности (2.1.31) получить последовательность (U_t, V_t) -обменов:

$$(U^T, V^T) = ((U_1, V_1), \dots, (U_t, V_t), \dots, (U_T, V_T)). \quad (2.1.33)$$

Запишем последовательность (2.1.31) в более детализированной форме

$$(A^T, B^T) = (|A|^T, \bar{A}^T), (|B|^T, \bar{B}^T). \quad (2.1.33')$$

В последнем случае структура системы $|A|$ полагается неизменной, а постоянство структуры среды $|B|$, вообще говоря, не обязано соблюдаться. Последовательность

графиков поведения \bar{A}^T системы называется *поведением* системы **A**.

Пусть найдется такое t , что при данных стимуле d^t_B , реакции d^t_A и элементарной структуре $|X_t|_t$ выполняется соотношение

$$|X_{t+1}|_{t+1} = d^t [|X_t|_t] \notin |A|. \quad (2.1.34)$$

Соотношение (2.1.34) интерпретируется как несуществование в момент t системы **A** (в этот момент она находится в состоянии гибели или переходит в другую систему). Пусть для всех значений $t=1, 2, \dots, T$ соотношение (2.1.34) не имеет места и лишь для $t=T+1$ оно впервые выполняется, тогда величину T будем называть *временем существования* системы **A**.

Введенное выше в общей теоретико-множественной форме понятие (U, V) -обмена пока используется практически лишь в частном векторном, а наиболее продуктивно в скалярном виде [4]. Другими словами, рассматриваются действительные векторные функции

$$\mathbf{u} = u(U) \text{ и } \mathbf{v} = v(V) \text{ (} \mathbf{u}^T = u(U^T) \text{ и } \mathbf{v}^T = v(V^T)\text{)}, \quad (2.1.35)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ и $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_l)$ — векторы с действительными компонентами. Тогда линейное упорядочение (U, V) -обменов с учетом соотношения (2.1.35) индуцирует соответствующее линейное упорядочение (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -обменов. В том случае, когда векторы \mathbf{u} и \mathbf{v} вырождаются в скаляры u и v , имеем скалярный (u, v) -обмен с естественным порядком в множестве действительных чисел, соответствующим обычным понятиям больше ($>$), равно ($=$) и меньше ($<$).

Здесь все критерии оптимальности (2.1.28) — (2.1.30) оказываются целевыми функционалами. Чаще всего в этом случае скаляры u и v интерпретируются все еще абстрактным понятием ресурсов (вещественных или информационных), которыми обменивается система со средой. Важнейшими являются временные интерпретации (u^T, v^T) -обмена, когда T не превышает времени существования системы и

$$v^T = v(V^T) = T \text{ или } u^T = u(U^T) = T, \quad (2.1.35')$$

т. е. имеем либо (u^T, T) -обмен, либо (T, v^T) -обмен. Первый случай понимается как приобретение системой **A** времени жизни T за счет отдачи среде **B** своих ресурсов u^T (например, в виде элементов), а второй — как добы-

ча системы A у системы B u^T жизненно важных для нее ресурсов (например, в виде элементов за счет затраты на это своего невосполнимого ресурса — времени жизни T).

2.1.7. Заключительные замечания. При фиксации универсальных множеств мира C $Z=\{x\}$ и $S=\{|Z|\}$ понятие системы A , как видно из ее определения, носит относительный характер в том смысле, что ее вычленение из мира C сводится формально к произвольному разбиению мира C на две части: систему A (здесь требуется лишь связность ее элементарных структур) и среду B . Аналогичное разбиение мира C может быть произведено и на $N+1$ частей, в результате чего могут образоваться N систем $A_1, \dots, A_j, \dots, A_N$ и среда B . Эти системы могут быть изолированными или открытыми по отношению друг к другу и к среде в смысле, указанном в п. 2.1.5. Одна из совокупностей открытых друг по отношению к другу систем $A=\{A_{j1}, \dots, A_{js}, \dots, A_{jk}\}$ может рассматриваться как единая система, расчлененная на k «подсистем»: $A_{js}=(|A_{js}|, \bar{A}_{js})$, где $|A_{js}|=\{|X|\}$, $|X|=(X, G_X)$ и $X=\{x\}$ состоит из «первичных» элементов. С другой стороны, формально можно считать подсистемы $A_{js}=y_s$ «вторичными» элементами системы $A=\{y_1, \dots, y_s, \dots, y_t, \dots, y_k\}$, а связями между ними (y_s, y_t) — объединения всех связей между первичными элементами соответствующих подсистем A_{js} и A_{jt} .

Таким образом, относительность понятия системы влечет за собой, как следствие, относительность понятия элемента. Эта относительность связана со свойством иерархичности мира C , которое постулируется следующим образом.

Существует бесконечная в обе стороны последовательность $\dots, C_{-k}, \dots, C_{-1}, C_0, C_1, \dots, C_k$ объектов C_i , называемых *мирами уровня i* . Связь между мирами C_i и C_{i+1} «соседних» уровней сводится к тому, что элементы x_{i+1} мира C_{i+1} являются, по определению, системами A_i мира C_i ($x_{i+1}=A_i$). В основе всех таких построений лежит постулируемая возможность вычленения системы $A=(|A|, \bar{A})$ из мира C . Эта возможность отражена и в символике оператора вычленения \boxed{A} системы A из среды B , элементы которого доставляют обозначения атрибутам системы: структуре $|A|$ графику поведения \bar{A} и цели A , если она сложная.

Понятие связи (x, x') между элементами x и x' выступает в наших построениях весьма абстрактно и аморфно. На самом деле многокачественная природа связей должна быть формализована набором h видов связей $((x, x')_1, \dots, (x, x')_g, \dots, (x, x')_h)$ (g -связей). Каждая g -связь может структурировать (g -структурировать) одно и то же множество $X = \{x\}$ элементов своим способом $|X|_g$, что приводит к g -структурированному миру S_g , который будем называть g -сечением мира S по g -качеству $(g = \overline{1, h})$.

В теории потенциальной эффективности сложных систем [4] рассматриваются R-, I-, C- и L-качества, а также качества, являющиеся парными комбинациями исходных. Эти качества, связанные с устойчивостью, помехоустойчивостью, действенностью (управляемостью) и самоорганизацией сложной системы соответственно, считаются в указанной теории основными атрибутивными качествами последней.

Большинство современных математиков согласно с тем, что важнейшим основополагающим понятием современной математики является понятие отношения. Мы использовали его не в полной мере, в частности не использовали для формализации понятия упорядоченности. С другой стороны, нам казалось явно недостаточно глубоким определение М. Месаревичем [14] системы лишь как отношения. Ограниченность наших рассмотрений конечными множествами имеет принципиальное значение, связанное с проблемой осуществимости [4]. По-видимому, немалую роль в этом играют и личная склонность автора избегать слишком общих современных математических построений.

2.2. КОМБИНАТОРИКА РАСПОЛОЖЕНИЙ

Комбинаторика или комбинаторный анализ — один из древнейших разделов математики. В наше время он обрел новую жизнь. По сравнению с другими разделами математики комбинаторика развивается при наименее стеснительных ограничениях, что обеспечивает ей пальму первенства в приложениях, в том числе и как аппарата для многих других разделов математики, и в первую очередь теории вероятностей и теории графов. Вместе с тем в самом комбинаторном анализе в настоящее время используются почти все сколько-нибудь конструктивные аналитические методы традиционного непрерыв-

ного анализа (дифференциальные и конечно-разностные уравнения, производящие функции, неравенства, метод перевала и др.) [54, 55].

Настоящий параграф посвящен комбинаторике расположений — разделу комбинаторики, который достаточно в качестве основы для дальнейшего изложения и вместе с тем может быть построен на аксиоматической основе, имеющей операционный характер. В этом параграфе излагаются результаты автора [56, 42].

2.2.1. Аксиоматика. Рассмотрим два конечных множества

$$A = \{A_1, \dots, A_\alpha, \dots, A_a\} \text{ и } \sigma = \{1, 2, \dots, t, \dots, s\}.$$

Элементы $A_\alpha \in A (\alpha = \overline{1, a})$ будем называть *предметами*, и иногда вместо них писать их индексы α . Элементы $t \in \sigma (t = \overline{1, s})$ будем называть *местами* и считать упорядоченными. В соответствии с этим множество A будем называть *множеством предметов*, а упорядоченное множество σ — *множеством мест*.

Рассмотрим произвольное подмножество множества σ

$$\tau = \{i_1, \dots, i_k, \dots, i_t\} \subseteq \sigma,$$

в котором элементы i_k упорядочены так же, как и в σ . Определим, вообще говоря, многозначную функцию F множества A со значениями из множества τ , которая каждому элементу $A_\alpha \in A$ ставит в соответствие некоторое подмножество $F(A_\alpha) \subseteq \tau$, при этом не исключается возможность $F(A_\alpha) = \emptyset$. Однако с одним требованием, чтобы обратная функция F^{-1} была однозначна, т. е. каждому элементу $\tau_k \in \tau$ соответствовал один и только один элемент A_α .

Отображение $F(A) = \tau$ будем называть τ -*проекцией* и обозначать ρ_τ . Ясно, что отображение A на τ есть вместе с тем отображение A в σ , ибо $\tau \subseteq \sigma$. В частности, когда $\tau = \sigma$, то ρ_σ будем называть *расположением* и обозначать ρ .

Множество всех расположений ρ назовем *пространством расположений* и обозначим через R . Множество всех τ -проекций ρ_τ назовем *пространством τ -проекций* и будем обозначать R_τ . Ясно, что R и R_τ являются ко-

нечными множествами, содержащими соответственно a^s и a^t элементов. Если $\tau = \{i\}$, то единственному месту i соответствует, согласно определению, лишь один предмет A_α , и $\rho_{\{i\}} = \rho_{\{i\}}^\alpha$ будем называть *элементарной τ -проекцией*. τ -проекцию можно записать в виде таблицы:

$$\rho_\tau = \begin{Bmatrix} \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \dots & \alpha_{i_k} & \dots & \alpha_{i_t} \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k & \dots & i_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_{i_k} \\ i_k \end{Bmatrix},$$

столбцы которой, следуя порядку мест, указывают на соответствующие предметы. Другая запись ρ_τ упорядочена по предметам:

$$\rho_\tau = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\alpha, \dots, \tau_a\} \left(\bigcup_{\alpha=1}^a \tau_\alpha = \tau \right),$$

где τ_α — подмножество мест, в которые отображается один и тот же предмет A_α . В частности, расположение ρ имеет двойное представление:

$$\rho = \begin{Bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_t & \dots & \alpha_s \\ 1 & \dots & t & \dots & s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_t \\ t \end{Bmatrix} \quad (2.2.1a)$$

и

$$\rho = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\alpha, \dots, \tau_a\} \left(\bigcup_{\alpha=1}^a \tau_\alpha = \sigma \right). \quad (2.2.1б)$$

Для иллюстрации общности понятия расположения покажем, что граф можно рассматривать как частный случай расположения. В дальнейшем такое представление будет использовано (см. п. 2.4.1). Рассмотрим множество G_n всех неориентированных графов $|X| = (X, G_X)$ без петель, имеющих фиксированное множество вершин $X = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$ и всевозможные подмножества ребер $G_X \subseteq \mathfrak{X}^{(2)} = ((x_i, x_j) : 1 \leq i < j \leq n)$.

Примем за множество предметов $A = (0, 1)$ и за множество мест $\sigma = ((1, 1), (1, 2), \dots, (i, j), \dots, (n-1, n))$ $s = n(n-1)/2$ пар индексов $(i, j) (1 \leq i < j \leq n)$, указывающих на пары вершин x_i и x_j , которые могут быть либо соединены, либо не соединены ребрами (x_i, x_j) . Отождествим каждое подмножество G_X с компонентой τ_1 расположения $\rho = (\tau_0, \tau_1)$, записанного в форме

(2.2.1б), при этом в форме (2.2.1а) будем записывать ρ так:

$$\rho = \left\{ \begin{array}{l} \alpha(i, j) \\ (i, j) \end{array} \right\} \quad ((i, j) \in \sigma), \quad (2.2.2)$$

где $\alpha(i, j)$ определяется с помощью индикатрисы:

$$\alpha(i, j) = I_{G_X}((x_i, x_j)) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_i, x_j) \in G_X, \\ 0, & \text{если } (x_i, x_j) \notin G_X. \end{cases} \quad (2.2.2')$$

Ясно, что указанное соответствие взаимно-однозначно.

Пусть \mathcal{E}_τ — подмножество пространства R_τ τ -проекций и $\mathcal{F} = \{\mathcal{E}_\tau\}$ — совокупность всех подмножеств $\mathcal{E}_\tau \subseteq R_\tau$, включая пустое множество \emptyset , т. е. алгебра множеств.

Зададим на алгебре \mathcal{F} числовую функцию $N(\mathcal{E}_\tau)$, удовлетворяющую следующим свойствам.

Аксиома 1 (начальные условия). Для элементарных τ -проекций $\rho_{\{t\}}^\alpha$ ($\alpha = \overline{1, d}$, $t = \overline{1, s}$) положим $N(\rho_{\{t\}}^\alpha) = 1$.

Аксиома 2 (аддитивность). Если $\mathcal{E}'_\tau \cap \mathcal{E}''_\tau = \emptyset$, то

$$N(\mathcal{E}'_\tau \cup \mathcal{E}''_\tau) = N(\mathcal{E}'_\tau) + N(\mathcal{E}''_\tau). \quad (2.2.3)$$

Тройку (R_τ, \mathcal{F}, N) будем называть *комбинаторным пространством*. Далее, пусть имеются пространства R_{τ_1} (τ_1 -проекций) и R_{τ_2} (τ_2 -проекций), причем $\tau_1 \cap \tau_2 \equiv \emptyset$, и соответствующие комбинаторные пространства $(R_{\tau_1}, \mathcal{F}_1, N_1)$ и $(R_{\tau_2}, \mathcal{F}_2, N_2)$.

Рассмотрим пространство (R_τ, \mathcal{F}, N) , где $R_\tau = R_{\tau_1} \times R_{\tau_2}$ и $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ есть прямые произведения соответственно пространства R_{τ_1} , R_{τ_2} и алгебр \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 . Для $\mathcal{E}_{\tau_1} \subseteq R_{\tau_1}$ и $\mathcal{E}_{\tau_2} \subseteq R_{\tau_2}$, где $\tau_1 \cap \tau_2 = \emptyset$, операция прямого произведения

$$\mathcal{E}_{\tau_1} \times \mathcal{E}_{\tau_2} = \mathcal{E}_{\tau_1 \cup \tau_2}$$

заключается в образовании из каждой пары τ -проекций $(\rho_{\tau_1}, \rho_{\tau_2})$, где $\rho_{\tau_1} \in \mathcal{E}_{\tau_1}$ и $\rho_{\tau_2} \in \mathcal{E}_{\tau_2}$, новой „составной“ $\tau_1 \cup \tau_2$ -проекции $\rho_{\tau_1 \cup \tau_2} \in \mathcal{E}_{\tau_1 \cup \tau_2}$ с общим упорядочением мест $\tau_1 \cup \tau_2$ согласно упорядочению в σ . Для комбинаторного пространства (R_τ, \mathcal{F}, N) числовая функция N удовлетворяет следующему свойству.

Аксиома 3 (мультипликативность)

$$N(\mathcal{E}_{\tau_1} \times \mathcal{E}_{\tau_2}) = N_1(\mathcal{E}_{\tau_1}) N_2(\mathcal{E}_{\tau_2}) (\tau_1 \cap \tau_2 = \emptyset). \quad (2.2.4)$$

Рассмотренная операция прямого произведения для двух множеств легко обобщается на k таких множеств:

$$\times_{i=1}^k \mathcal{E}_{\tau_i} = \mathcal{E}_{\tau_1} \times \mathcal{E}_{\tau_2} \times \dots \times \mathcal{E}_{\tau_k} = \mathcal{E}'_{\tau},$$

где $\tau = \bigcup_{i=1}^k \tau_i$ и $\tau_{i_1} \cap \tau_{i_2} = \emptyset$ для любых $i_1 \neq i_2$ ($1 \leq i_1, i_2 \leq k$).

Используя запись (2.2.1), легко получаем соотношение

$$\rho_{\tau} = \times_{k=1}^t \rho_{\{i_k\}}^{\alpha_{i_k}}. \quad (2.2.5)$$

Из сформулированных аксиом можно вывести следующие следствия:

1) $N(\emptyset) \equiv 0$. Имеем очевидное равенство $\rho_{\{t\}}^{\alpha} = \rho_{\{t\}}^{\alpha} \cup \emptyset$.

По аксиоме 1

$$N(\rho_{\{t\}}^{\alpha}) = N(\rho_{\{t\}}^{\alpha}) + N(\emptyset).$$

Следовательно, $N(\emptyset) \equiv 0$.

2) Если $\mathcal{E}'_{\tau} \cap \mathcal{E}''_{\tau} \neq \emptyset$, то

$$N(\mathcal{E}'_{\tau} \cup \mathcal{E}''_{\tau}) = N(\mathcal{E}'_{\tau}) + N(\mathcal{E}''_{\tau}) - N(\mathcal{E}'_{\tau} \cap \mathcal{E}''_{\tau}).$$

Имеем равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_{\tau} \cup \mathcal{E}''_{\tau} &= \mathcal{E}'_{\tau} \cup (\mathcal{E}''_{\tau} \setminus \mathcal{E}'_{\tau} \cap \mathcal{E}''_{\tau}); \\ \mathcal{E}''_{\tau} &= (\mathcal{E}'_{\tau} \cap \mathcal{E}''_{\tau}) \cup (\mathcal{E}''_{\tau} \setminus \mathcal{E}'_{\tau} \cap \mathcal{E}''_{\tau}), \end{aligned}$$

из которых в соответствии с аксиомой 2 получим

$$N(\mathcal{E}'_{\tau} \cup \mathcal{E}''_{\tau}) = N(\mathcal{E}'_{\tau}) + N(\mathcal{E}''_{\tau} \setminus \mathcal{E}'_{\tau} \cap \mathcal{E}''_{\tau});$$

$$N(\mathcal{E}''_{\tau}) = N(\mathcal{E}'_{\tau} \cap \mathcal{E}''_{\tau}) + N(\mathcal{E}''_{\tau} \setminus \mathcal{E}'_{\tau} \cap \mathcal{E}''_{\tau}).$$

Отсюда вытекает следствие 2.

Используя соотношения (2.2.3), (2.2.4), по индукции получим обобщение на случай k слагаемых и сомножителей:

$$N\left(\bigcup_{l=1}^k \mathcal{E}_{\tau}^{(l)}\right) = \sum_{l=1}^k N(\mathcal{E}_{\tau}^{(l)}) - \sum_{l_1 < l_2} N(\mathcal{E}_{\tau}^{(l_1)} \cap \mathcal{E}_{\tau}^{(l_2)}) + \dots \\ \dots + (-1)^{k-1} N\left(\bigcap_{l=1}^k \mathcal{E}_{\tau}^{(l)}\right), \quad (2.2.6)$$

$$N\left(\bigotimes_{l=1}^k \mathcal{E}_{\tau_{l_i}}\right) = \prod_{l=1}^k N_l(\mathcal{E}_{\tau_{l_i}}) \quad (\tau_{l_1} \cap \tau_{l_2} = \emptyset \text{ для } l_1 \neq l_2, \\ 1 \leq l_1, l_2 \leq k). \quad (2.2.7)$$

Если $\mathcal{E}_{\tau_{l_1}} \cap \mathcal{E}_{\tau_{l_2}} = \emptyset$ для $l_1 \neq l_2$ ($1 \leq l_1, l_2 \leq k$), то соотношение (2.2.6) упрощается:

$$N\left(\bigcup_{l=1}^k \mathcal{E}_{\tau}^{(l)}\right) = \sum_{l=1}^k N(\mathcal{E}_{\tau}^{(l)}). \quad (2.2.8)$$

Приведенная выше система аксиом непротиворечива. Это следует из теоремы.

Теорема. $N(\mathcal{E}_{\tau})$ равно числу элементов множества \mathcal{E}_{τ} .

Доказательство. Пусть множество

$$\mathcal{E}_{\tau} = \{\rho_{\tau}^{(1)}, \rho_{\tau}^{(2)}, \dots, \rho_{\tau}^{(m)}, \dots, \rho_{\tau}^{(M)}\}$$

состоит из M различных τ -проекций. Представим согласно (2.2.5) каждую τ -проекцию $\rho_{\tau}^{(m)}$ в виде произведения элементарных τ -проекций:

$$\rho_{\tau}^{(m)} = \left\{ \begin{matrix} \alpha_{i_k}^{(m)} \\ i_k \end{matrix} \right\} = \bigotimes_{k=1}^t \rho_{\{i_k\}}^{\alpha_{i_k}^{(m)}},$$

тогда

$$\mathcal{E}_{\tau} = \bigcup_{m=1}^M \bigotimes_{k=1}^t \rho_{\{i_k\}}^{\alpha_{i_k}^{(m)}}. \quad (2.2.9)$$

Используя аксиомы 2 и 3, из соотношения (2.2.9) будем иметь

$$N(\mathcal{E}_{\tau}) = N\left(\bigcup_{m=1}^M \bigotimes_{k=1}^t \rho_{\{i_k\}}^{\alpha_{i_k}^{(m)}}\right) = \sum_{m=1}^M \prod_{k=1}^t N(\rho_{\{i_k\}}^{\alpha_{i_k}^{(m)}}). \quad (2.2.10)$$

Далее, используя аксиому 1, согласно которой

$N(\rho_{\{i_k\}}^{\alpha}) \equiv 1$, из (2.2.10) получаем

$$N(\mathcal{E}_\tau) = \sum_{m=1}^M \prod_{k=1}^t 1 = \sum_{m=1}^M 1 = M,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Важность доказанной теоремы заведомо не ограничивается иллюстрацией непротиворечивости введенных аксиом. Теорема указывает на операционный характер введенной аксиоматики, состоящий в следующем. Приведенные аксиомы позволяют, используя теоретико-множественные соотношения между комбинаторными множествами, чисто формально получить соответствующие числовые соотношения. Однако это достигается ценой предельной «жесткости» введенных аксиом. Именно введение аксиом 1 и 3 приводит к тому, что вся система аксиом делается *полной* (функция $N(\mathcal{E}_\tau)$ определяется однозначно). Первая аксиома вероятностной аксиоматики (2.1.1), требуя, чтобы $P(X) \equiv 1$, оставляет достаточную свободу в определении вероятностей $P(L)$ событий $L \subseteq X$.

Иллюстрируя операционный характер введенной комбинаторной аксиоматики, вычислим величину $N(R_\tau)$. Имеем

$$R_\tau = \times_{k=1}^t \cup_{\alpha=1}^a \rho_{\{i_k\}}^\alpha.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} N(R_\tau) &= N\left(\times_{k=1}^t \cup_{\alpha=1}^a \rho_{\{i_k\}}^\alpha\right) = \prod_{k=1}^t \sum_{\alpha=1}^a N(\rho_{\{i_k\}}^\alpha) = \\ &= \prod_{k=1}^t \sum_{\alpha=1}^a 1 = a^t. \end{aligned}$$

Дальнейшие иллюстрации касаются более сложных комбинаторных множеств.

2.2.2. Множества $\mathcal{E}_\tau^{\vec{t}}$. По определению, множество $\mathcal{E}_\tau^{\vec{t}}$ состоит из всех τ -проекции, для которых $F(\rho_\tau) \equiv \vec{t}$,
6*

где $F(\rho_\tau)$ — векторная функция, сопоставляющая каждой τ -проекции $\rho_\tau = (\tau_1, \dots, \tau_\alpha, \dots, \tau_a)$ a -мерный вектор $\vec{t} = (t_1, \dots, t_\alpha, \dots, t_a)$ с координатами $t_\alpha = N(\tau_\alpha)$ ($\alpha = \overline{1, a}$), причем $N(\tau_\alpha)$ по-прежнему означает число элементов множества τ_α . Итак,

$$\mathcal{E}_\tau^{\vec{t}} = \{\rho_\tau : F(\rho_\tau) = \vec{t} = \text{const}\}$$

или

$$\mathcal{E}_\tau^{\vec{t}} = \bigcup_{F(\rho_\tau) = \vec{t}} \rho_\tau.$$

Заметим, что из соотношения $\bigcup_{\alpha=1}^a \tau_\alpha = \tau$ следует, что целые неотрицательные числа $t_\alpha \geq 0$ ($\alpha = \overline{1, a}$) удовлетворяют соотношению $\sum_{\alpha=1}^a t_\alpha = t$. Множество $\mathcal{E}_\tau^{\vec{t}}$ содержит в себе как частный случай элементарную τ -проекцию. В самом деле, имеем

$$\mathcal{E}_{\{i\}}^{\vec{e}_\alpha} = \rho_{\{i\}}^\alpha,$$

где $\vec{e}_\alpha = (\underbrace{0, \dots, 0}_\alpha, 1, 0, \dots, 0)$. В частном случае $a = 2$

вектор \vec{t} определяется одной (например, первой) компонентой t_1 ($t_2 = t - t_1$). Поэтому будем записывать $\mathcal{E}_\tau^{\vec{t}} = \mathcal{E}_\tau^{t_1}$.

Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{M}_{a, s}$ всех векторов \vec{m} с неотрицательными целочисленными компонентами,

удовлетворяющими соотношению $\sum_{\alpha=1}^a m_\alpha = s$ или в символической записи скалярного произведения $(\vec{m} \vec{e}) = s$, где

$\vec{e} = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_a, 1)$.

Нетрудно показать, что множества $\mathcal{E}_\sigma^{\vec{m}} (\vec{m} \in \mathfrak{M}_{a, s})$ составляют C_{s+a-1}^{a-1} — разбиение пространства расположений R . Действительно, из простых комбинаторных соотношений имеем

$$N(\mathfrak{M}_{a, s}) = C_{s+a-1}^{a-1}; \quad \mathcal{E}_\sigma^{\vec{m}} \neq \emptyset (\vec{m} \in \mathfrak{M}_{a, s}); \quad (2.2.11)$$

$$\bigcup_{\vec{m} \in R} \mathcal{E}_\sigma^{\vec{m}} = R; \quad \mathcal{E}_\sigma^{\vec{m}_1} \cap \mathcal{E}_\sigma^{\vec{m}_2} = \emptyset (\vec{m}_1 \neq \vec{m}_2).$$

Вычислим число элементов $N(\mathcal{E}_\sigma^{\vec{m}})$. Для этого покажем, что число $N(\mathcal{E}_\sigma^{\vec{m}}) = C_s^n$ является симметричной функцией координат $m_\alpha (\alpha = \overline{1, a})$ вектора \vec{m} , зависящей от числа элементов $N(\sigma) = s$.

Пусть заданы два множества $\mathcal{E}_\sigma^{\vec{m}}$ и $\mathcal{E}_{\sigma'}^{\vec{m}'}$, где $N(\sigma) = N(\sigma') = s$ и вектор \vec{m}' получается перестановкой $L = (i_1, i_2, \dots, i_a)$ координат вектора \vec{m} . Установим произвольное взаимно-однозначное соответствие между элементами множеств мест σ и σ' и осуществим над предметами расположений $\mathcal{E}_\sigma^{\vec{m}}$ преобразование согласно подстановке L , размещая их на соответствующих местах σ' . Этим осуществится взаимно-однозначное соответствие между расположениями $\rho \in \mathcal{E}_\sigma^{\vec{m}}$ и $\rho' \in \mathcal{E}_{\sigma'}^{\vec{m}'}$, что обеспечивает равночисленность элементов $\mathcal{E}_\sigma^{\vec{m}}$ и $\mathcal{E}_{\sigma'}^{\vec{m}'}$, т. е. $N(\mathcal{E}_\sigma^{\vec{m}}) = N(\mathcal{E}_{\sigma'}^{\vec{m}'})$. Поэтому обозначим $N(\mathcal{E}_\sigma^{\vec{m}}) = C_s^{\vec{m}}$, где $C_s^{\vec{m}}$ — симметричная функция координат вектора \vec{m} . Найдем ее явное выражение через \vec{m} и s . Для этого заметим, что

$$\mathcal{E}_\sigma^{\vec{m}} = \bigcup_{\sum_{x=1}^k i_x = \vec{m}} \times_{x=1}^k \mathcal{E}_{\sigma_x}^{i_x}, \quad (2.2.12)$$

где $\{\tau_x\}$ — произвольное фиксированное k -разбиение множества σ и суммирование ведется по всем векторам \vec{t}_x с неотрицательными целочисленными компонентами t_x^* , удовлетворяющими условиям

$$\sum_{\alpha=1}^a t_\alpha^* = t^* \quad (\alpha = \overline{1, k}); \quad \sum_{x=1}^k t^* = s.$$

В частности, при $k=2$

$$\mathcal{G}_\sigma^{\vec{m}} = \bigcup_{\vec{t}}^a \mathcal{G}_{\tau}^{\vec{t}} \times \mathcal{G}_{\sigma \setminus \tau}^{\vec{m}-\vec{t}},$$

где $\tau \subset \sigma$ — произвольное подмножество σ и суммирование ведется по всем векторам \vec{t} с неотрицательными целочисленными компонентами, удовлетворяющими условиям

$$\sum_{\alpha=1}^a t_\alpha = t \quad \text{и} \quad 0 \leq t_\alpha \leq m_\alpha \quad (\alpha = \overline{1, a}).$$

В частности, при $\tau = \{i\}$

$$\mathcal{G}_\sigma^{\vec{m}} = \bigcup_{\alpha=1}^a \mathcal{G}_{\{i\}}^{\vec{e}_\alpha} \times \mathcal{G}_{\sigma \setminus \{i\}}^{\vec{m}-\vec{e}_\alpha}.$$

Отсюда

$$N(\mathcal{G}_\sigma^{\vec{m}}) = \sum_{\alpha=1}^a N(\mathcal{G}_{\{i\}}^{\vec{e}_\alpha}) N(\mathcal{G}_{\sigma \setminus \{i\}}^{\vec{m}-\vec{e}_\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^a N(\mathcal{G}_{\sigma \setminus \{i\}}^{\vec{m}-\vec{e}_\alpha}),$$

так как $N(\mathcal{G}_{\{i\}}^{\vec{e}_\alpha}) = N(\rho_{\{i\}}^\alpha) = 1$.

Итак,

$$C_s^{\vec{m}} = \sum_{\alpha=1}^a C_{s-1}^{\vec{m}-\vec{e}_\alpha}. \quad (2.2.13)$$

Для решения конечно-разностного уравнения (2.2.13) введем производящую функцию чисел $C_s^{\vec{m}}$

$$g_s(u_1, u_2, \dots, u_a, \dots, u_a) \triangleq \sum_{\substack{\vec{m} \\ (m \ e)=s}} C_s^{m_1, \dots, m_a} u_1^{m_1} \dots u_a^{m_a}, \quad (2.2.14)$$

где u_1, \dots, u_a — формальные действительные аргументы, или в векторной записи

$$g_s(\vec{u}) \triangleq \sum_{\substack{\vec{m} \\ (m \ e)=s}} C_s^{\vec{m}} \vec{u}^{\vec{m}}. \quad (2.2.14')$$

Числа $C_s^{\vec{m}}$ однозначно определяют $g_s(\vec{u})$, и наоборот. Умножая обе части соотношения (2.2.13) на $\vec{u}^{\vec{m}}$ и суммируя по всем \vec{m} , получаем конечно-разностное уравнение для $g_s(\vec{u})$:

$$g_s(\vec{u}) = g_{s-1}(\vec{u}) \sum_{\alpha=1}^a u_\alpha. \quad (2.2.15)$$

Последовательное применение соотношения (2.2.15) приводит к соотношению

$$g_s(\vec{u}) = g_1(\vec{u}) \left(\sum_{\alpha=1}^a u_\alpha \right)^{s-1}$$

но

$$g_1(\vec{u}) = \sum_{\alpha=1}^a C_1^{e_\alpha} u_\alpha,$$

и так как

$$C_1^{e_\alpha} = N(\rho_{\{i\}}^{e_\alpha}) = N(\rho_{\{i\}}^\alpha) = 1,$$

то

$$g_1(\vec{u}) = \sum_{\alpha=1}^a u_\alpha,$$

$$g_s(\vec{u}) = \sum_{\substack{\vec{m} \\ (m \ e)=s}} C_s^{\vec{m}} \vec{u}^{\vec{m}} = \left(\sum_{\alpha=1}^a u_\alpha \right)^s. \quad (2.2.16)$$

Дифференцируя обе части соотношения (2.2.16) μ_α раз по u_α так, чтобы $\sum_{\alpha=1}^a \mu_\alpha = s$, итого s раз, получаем

$$s! = \sum_{\vec{m} \geq \vec{\mu}} C_s^{\vec{m}} \prod_{\alpha=1}^a m_\alpha \dots (m_\alpha - \mu_\alpha + 1) u_\alpha^{m_\alpha - \mu_\alpha}, \quad (2.2.17)$$

где $\vec{m} \geq \vec{\mu}$ означает $m_\alpha \geq \mu_\alpha$ ($\alpha = \overline{1, a}$). Полагая в соотношении (2.2.17) $u_\alpha = 0$ ($\alpha = \overline{1, a}$), получаем

$$s! = C_s^{\vec{m}} \prod_{\alpha=1}^a m_\alpha!$$

или

$$C_s^{\vec{m}} = s! / \prod_{\alpha=1}^a m_\alpha! \quad (2.2.18)$$

В частности, при $a=2$ для числа элементов множеств $\mathcal{C}_s^{(m, s-m)} = \mathcal{C}_s^m$ имеем

$$C_s^{m, s-m} = C_s^m = s! / m! (s-m)!,$$

т. е. выражение обычного биномиального коэффициента. Далее исследуются комбинаторные множества, имеющие для последующего изложения

2.2.3. Множества $\mathcal{C}_{A, \sigma}^{\vec{k}}$ и m -разбиения. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}_{a, s}^*$ a -мерных векторов $\vec{m} = (m_1, \dots, m_a, \dots, m_a)$ с целочисленными неотрицательными компонентами, принимающими значения от 0 до s . Векторы \vec{m} можно рассматривать как расположения $(s+1)$ -го предмета (числа) $\sigma' = (0, 1, \dots, t, \dots, s)$ на $A = (1, \dots, a, \dots, a)$ местах.

Рассмотрим подмножество $\mathfrak{M}_{a, s} \subset \mathfrak{M}_{a, s}^*$, состоящее из всех векторов, удовлетворяющих условию

$$\sum_{\alpha=1}^a m_\alpha = s. \quad (2.2.19)$$

Далее рассмотрим введенное в предыдущем пункте множество $\mathcal{C}_A^{\vec{k}} \subset \mathfrak{M}_{a, s}$, где $\vec{k} - (s+1)$ -мерный вектор. Здесь $\mathcal{C}_A^{\vec{k}}$ — множество векторов \vec{m} , у которых значение компоненты $m_\alpha = t$ встречается в точности k_t раз. Заметим

что компоненты вектора \vec{k} должны удовлетворять двум соотношениям

$$\sum_{t=0}^s k_t = a \text{ и } \sum_{t=0}^s tk_t = s, \quad (2.2.20)$$

из которых второе является следствием соотношения (2.2.19).

Определим теперь множество $\mathcal{E}_{A, \sigma}^{\vec{k}}$ расположений $\rho \in R$: соотношением

$$\mathcal{E}_{A, \sigma}^{\vec{k}} = \bigcup_{\vec{m} \in \mathcal{E}_A^{\vec{k}}} \mathcal{E}_\sigma^{\vec{m}}. \quad (2.2.21)$$

Вычислим $N(\mathcal{E}_{A, \sigma}^{\vec{k}})$. Из (2.2.21) имеем

$$N(\mathcal{E}_{A, \sigma}^{\vec{k}}) = \sum_{\vec{m} \in \mathcal{E}_A^{\vec{k}}} N(\mathcal{E}_\sigma^{\vec{m}}) = \sum_{\vec{m} \in \mathcal{E}_A^{\vec{k}}} C_s^{\vec{m}}, \quad (2.2.22)$$

но $C_s^{\vec{m}}$ — симметричная функция координат вектора \vec{m} , по этому для всех $\vec{m} \in \mathcal{E}_A^{\vec{k}}$

$$C_s^{\vec{m}} = C_s^{\overbrace{0 \dots 0}^{k_0}, \dots, \overbrace{t \dots t}^{k_t}, \dots, \overbrace{s \dots s}^{k_s}} = C_s^{\vec{m}_0} = \text{const}$$

и из (2.2.22) имеем

$$N(\mathcal{E}_{A, \sigma}^{\vec{k}}) = \sum_{\vec{m} \in \mathcal{E}_A^{\vec{k}}} C_s^{\vec{m}} = C_s^{\vec{m}_0} \sum_{\vec{m} \in \mathcal{E}_A^{\vec{k}}} 1 = C_s^{\vec{m}_0} N(\mathcal{E}_A^{\vec{k}}) = C_s^{\vec{m}_0} C_a^{\vec{k}}. \quad (2.2.23)$$

Итак,

$$\begin{aligned} N(\mathcal{E}_{A, \sigma}^{\vec{k}}) &= C_s^{\vec{m}_0} C_a^{\vec{k}} = C_a^{\vec{k}} s! \left/ \prod_{t=0}^s (t!)^{k_t} \right. = \\ &= a! s! \left/ \prod_{t=0}^s k_t! (t!)^{k_t} \right. \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

Очевидно, что

$$\mathcal{E}_{A, \sigma}^{\vec{k}} \neq \emptyset; R = \bigcup_{\vec{k}} \mathcal{E}_{A, \sigma}^{\vec{k}} \text{ и } \mathcal{E}_{A, \sigma}^{\vec{k}_1} \cap \mathcal{E}_{A, \sigma}^{\vec{k}_2} = \emptyset \text{ при } \vec{k}_1 \neq \vec{k}_2, \quad (2.2.20)$$

т. е. множества $\mathcal{E}_{A, \sigma}^{\vec{k}}$ составляют разбиение пространства расположений R . Поэтому, беря функцию $N(\cdot)$ от обеих частей второго из приведенных выше соотношений, получим

$$a^s = \sum_{\vec{k}} C_a^{\vec{k}} C_s^{\vec{m}_0}. \quad (2.2.20)$$

Заметим, что множества $\mathcal{E}_{\sigma}^{\vec{m}}$ ($\mathcal{E}_{A, \sigma}^{\vec{k}}$) инвариантны относительно любого взаимно-однозначного преобразования множества мест σ самого в себя (множеств мест σ и предметов A самих в себя).

Множества $\mathcal{E}_{A, \sigma}^{\vec{k}}$ связаны с m -разбиениями конечного неупорядоченного множества $A = (A_1, \dots, A_v, \dots, A_n)$. Пусть дано m -разбиение множества A с k_t подмножествами, содержащими точно по t элементов. Тогда компоненты вектора $\vec{k} = (k_1, \dots, k_t, \dots, k_n)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sum_{t=1}^n k_t = m; \quad \sum_{t=1}^n t k_t = n. \quad (2.2.25)$$

Обозначим через $N_{nm}(\vec{k})$ — число m -разбиений множества A при фиксированном векторе \vec{k} . Для того чтобы найти это число, выберем произвольное m -разбиение множества A и переставим его элементы всеми возможными $n!$ способами. При этом не все получающиеся в результате этой операции m -разбиения окажутся различными из-за двух обстоятельств: во-первых, все подмножества с равным числом элементов не отличаются друг от друга, число таких дубликатов равно $\prod_{t=1}^n k_t!$; во-вторых,

порядок расположения элементов в подмножествах

m -разбиения несуществен, поэтому число таких дубликатов равно $\prod_{t=1}^n (t!)^{k_t}$. Следовательно,

$$N_{nm}(\vec{k}) = n! \prod_{t=1}^n (t!)^{k_t} k_t! \quad (2.2.26)$$

Обозначим через N_n число различных m -разбиений множества A . Тогда

$$N_n = \sum_{m=1}^n \sum_{\substack{\vec{k} \\ (2.2.25)}} N_{nm}(\vec{k}), \quad (2.2.26')$$

где суммирование ведется по всем векторам, удовлетворяющим системе уравнений (2.2.25) при фиксированном значении n и $1 \leq m \leq n$ (причем при $m > n$ полагаем $N_{nm}(\vec{k}) = 0$).

Сравнивая системы уравнений (2.2.20) и (2.2.25), видим, что они совпадают, если положить $m = a - k_0$ и $n = s$. Это связано с тем, что система (2.2.20) допускает нулевые решения в соответствующей ей системе (2.2.19), а система (2.2.25) таких решений не допускает, так как s -разбиения не содержат пустых множеств по определению.

Введем важную для дальнейшего изложения вторую производящую функцию чисел $N_{nn}^{(\vec{k})}$ вида

$$g_m(\vec{u}, v) \stackrel{\Delta}{=} m! \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{\vec{k} \\ (2.2.25)}} N_{nm}(\vec{k}) \vec{u}^{\vec{k}} \right) \frac{v^n}{n!}. \quad (2.2.27)$$

Можно показать, что она имеет следующее представление [42, стр. 27]:

$$g_m(\vec{u}, v) = \left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t!} u_t v^t \right)^m. \quad (2.2.28)$$

В самом деле, имеем

$$\left(\sum_{t=1}^r \frac{1}{t!} k_t v^t \right)^m = \sum_{\substack{r \\ \sum_{t=1}^r k_t = m}} C_m^{\vec{k}} \prod_{t=1}^r \left(\frac{1}{t!} u_t v^t \right)^{k_t} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t=1}^r \sum_{k_t=m} \frac{m!}{\prod_{t=1}^r (t!)^{k_t} k_t!} \prod_{t=1}^r u_t^{k_t} v^{\sum_{t=1}^r t k_t} = \\
&= \sum_{n=0}^{rm} \left(\sum_{\substack{k_t=m, \\ t=1}}^r \frac{m!}{\prod_{t=1}^r (t!)^{k_t} k_t!} \prod_{t=1}^r u_t^{k_t} \right) v^n. \quad (2.2.29) \\
&\quad \sum_{t=1}^r t k_t = n
\end{aligned}$$

Переходя к пределу в выражении (2.2.29) при $r \rightarrow \infty$ с учетом того, что $N_{nm}(\vec{k}) = 0$ при $m > n$, получим соотношение (2.2.28).

Полагая в выражениях (2.2.27) и (2.2.28) $u_t = 1$ и суммируя их по m с весами $1/m!$ от 0 до ∞ , получаем известную производящую чисел N_n

$$g(v) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{N_m}{m!} v^m = e^{e^v - 1}. \quad (2.2.30)$$

Здесь и далее, если ряды в соотношениях для производящих не сходятся, то соответствующие вероятности можно определять приравниванием коэффициентов при одних и тех же степенях формальных аргументов.

2.2.4. Двойные расположения и пересечения комбинаторных сфер. Рассмотрим два множества предметов $A = (A_1, \dots, A_a, \dots, A_a)$ и $B = (B_1, \dots, B_b, \dots, B_b)$

и их расположения $\rho \in R$ и $\rho^* \in R^*$ на одном и том же множестве мест $\sigma = (1, \dots, t, \dots, s)$. Они имеют представления (2.2.1б) вида

$$\begin{aligned}
\rho &= (\tau_1, \dots, \tau_a, \dots, \tau_a) \text{ и } \rho^* = (\tau_1^*, \dots, \tau_b^*, \dots, \tau_b^*) \\
&\quad \left(\bigcup_{\alpha=1}^a \tau_\alpha = \bigcup_{\beta=1}^b \tau_\beta^* = \sigma \right).
\end{aligned}$$

Пару расположений $(\rho, \rho^*) \in R \times R^*$ можно рассматривать как одно двойное расположение $r = (\rho, \rho^*)$ «со-

ставного» множества предметов $A \times B = \{A_\alpha B_\beta\}$ на местах $\sigma = (1, \dots, t, \dots, s)$ с соответствующим представлением

$$r = \{\tau_{\alpha\beta}\} \left(\bigcup_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta} = \sigma \right),$$

где

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta} &= \tau_\alpha \cap \tau_\beta; \quad \bigcup_\beta \tau_{\alpha\beta} = \tau_\alpha; \\ \bigcup_\alpha \tau_{\alpha\beta} &= \tau_\beta^*; \quad \bigcup_\alpha \tau_\alpha = \bigcup_\beta \tau_\beta^* = \sigma. \end{aligned}$$

Введем числа

$$N(\tau_{\alpha\beta}) = m_{\alpha\beta}; \quad N(\tau_\alpha) = m_\alpha; \quad N(\tau_\beta^*) = m_\beta^*, \quad (2.2.31)$$

которые в соответствии с соотношениями (2.2.31) удовлетворяют соотношениям

$$\sum_\beta m_{\alpha\beta} = m_\alpha; \quad \sum_\alpha m_{\alpha\beta} = m_\beta^*; \quad \sum_\alpha m_\alpha = \sum_\beta m_\beta^* = s. \quad (2.2.32)$$

Матрицу $\mathbf{m} = \|m_{\alpha\beta}\| = (\vec{m}_\alpha)$ с неотрицательными целочисленными элементами будем называть расстоянием между расположениями ρ и ρ^* и обозначать $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\rho, \rho^*) = \|m_{\alpha\beta}\|$. Соотношения (2.2.32) в матричной форме имеют вид

$$\vec{m} e_b = \vec{m}; \quad \vec{m} e_a = \vec{m}^*; \quad e_a \vec{m} e_b = e_a \vec{m} = \vec{m}^* e_b = s,$$

где

$$\vec{e}_b = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Bigg\} b \quad \text{и} \quad \vec{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_a \end{pmatrix}$$

— вектор-столбцы; а $\vec{e}_a = \overbrace{(1, \dots, 1)}^a$ и $\vec{m}^* = (m_1^*, \dots, m_b^*)$ — вектор-строки. Штрихом будем обозначать операцию транспонирования.

Зафиксируем множества расположений $\mathcal{E}_\sigma^{\vec{m}} \subset R$ и $\mathcal{E}_\tau^{\vec{m}^*} \subset R^*$ и рассмотрим множество $\mathcal{E}_\rho^{\mathbf{m}}$ расположений $\rho^* \in \mathcal{E}_\tau^{\vec{m}^*} \subset R^*$ с расстоянием $\mathbf{m}(\rho, \rho^*)$ до $\rho = (\tau_1, \dots, \tau_\alpha, \dots$

..., $\tau_a) \in R$ в точности равным \mathbf{m} и имеющим следующее определение:

$$\mathcal{E}_\rho^{\mathbf{m}} = \bigtimes_{\alpha=1}^a \mathcal{E}_{\tau_\alpha}^{\vec{m}_\alpha}. \quad (2.2.33)$$

Будем называть множество $\mathcal{E}_\rho^{\mathbf{m}}$ расположений ρ^* *комбинаторной сферой* с центром в ρ и радиусом \mathbf{m} . Из соотношения (2.2.33) имеем

$$N(\mathcal{E}_\rho^{\mathbf{m}}) = \prod_{\alpha=1}^a C_{m_\alpha}^{\vec{m}_\alpha}. \quad (2.2.33')$$

Изучим пересечение комбинаторных сфер $\mathcal{E}_{\rho_1}^{\mathbf{m}_1}$ и $\mathcal{E}_{\rho_2}^{\mathbf{m}_2}$, где $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}(\rho_1, \rho^*) = \|m_{\alpha\beta}^{(1)}\|$; $\mathbf{m}_2 = \mathbf{m}(\rho_2, \rho^*) = \|m_{\alpha'\beta'}^{(2)}\|$ при условии, что расстояние между ρ_1 и $\rho_2 \in R$ в точности равно $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\rho_1, \rho_2) = \|m_{\alpha\alpha'}\|$. При этом обязательно выполнение условий

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha\beta}^{(1)} = \sum_{\alpha'} m_{\alpha'\beta}^{(2)} = m_{\beta}^*. \quad (2.2.34)$$

Введем в рассмотрение трехиндексные неотрицательные целые числа $m_{\alpha\alpha'\beta} \geq 0$ ($\alpha, \alpha' = \overline{1, a}$; $\beta = \overline{1, b}$), удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^a m_{\alpha\alpha'\beta} &= m_{\alpha'\beta}^{(2)}; & \sum_{\alpha'=1}^a m_{\alpha\alpha'\beta} &= m_{\alpha\beta}^{(1)}; \\ \sum_{\beta=1}^b m_{\alpha\alpha'\beta} &= m_{\alpha\alpha'}. \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

Введя векторы $\vec{m}_{\alpha\alpha'} = (m_{\alpha\alpha'\beta})$ и матрицы $\mathbf{m}_1 = (\vec{m}_{\alpha}^{(1)})$ и $\mathbf{m}_2 = (\vec{m}_{\alpha'}^{(2)})$, запишем соотношения (2.2.35) в виде

$$\sum_{\alpha=1}^a \vec{m}_{\alpha\alpha'} = \vec{m}_{\alpha'}^{(2)}; \quad \sum_{\alpha'=1}^a \vec{m}_{\alpha\alpha'} = \vec{m}_{\alpha}^{(1)}; \quad \vec{m}_{\alpha\alpha'} e_b = m_{\alpha\alpha'}. \quad (2.2.36)$$

При этом условия (2.2.34) имеют вид

$$\vec{e}_a \mathbf{m}_1 = \vec{e}_a \mathbf{m}_2 = \vec{m}^*. \quad (2.2.37)$$

Пересечение комбинаторных сфер имеет следующее представление:

$$\mathcal{E}_{\rho_1}^{\mathbf{m}_1} \cap \mathcal{E}_{\rho_2}^{\mathbf{m}_2} = \begin{cases} \bigcup_{\substack{\vec{m}_{\alpha\alpha'} \\ (2.2.36)}} \times_{\alpha\alpha'} \mathcal{E}_{\tau_{\alpha\alpha'}}^{\vec{m}_{\alpha\alpha'}} & \text{при } \vec{e}_a \mathbf{m}_1 = \vec{e}_a \mathbf{m}_2 = \vec{m}^*, \\ \emptyset & \text{при } \vec{e}_a \mathbf{m}_1 \neq \vec{e}_a \mathbf{m}_2, \end{cases} \quad (2.2.38)$$

где

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}(\rho_1, \rho_2) = \|m_{\alpha\alpha'}\|; \quad \mathbf{m}_1 = \mathbf{m}(\rho_1, \rho^*) = \|m_{\alpha\beta}^{(1)}\|;$$

$$\mathbf{m}_2 = \mathbf{m}(\rho_2, \rho^*) = \|m_{\alpha'\beta}^{(2)}\|$$

и суммирование ведется по всем решениям $\vec{m}_{\alpha\alpha'}$ системы (2.2.36).

Проведем доказательство представления (2.2.38). Согласно соотношениям (2.2.33) и (2.2.12) имеем с учетом перестановочности операций \cup и \times

$$\mathcal{E}_{\rho_1}^{\mathbf{m}_1} = \times_{\alpha=1}^a \mathcal{E}_{\tau_\alpha}^{\vec{m}_\alpha^{(1)}} = \bigcup_{\sum_{\alpha'} \vec{m}_{\alpha\alpha'}^{(1)} = \vec{m}_\alpha^{(1)}} \times_{\alpha\alpha'} \mathcal{E}_{\tau_{\alpha\alpha'}}^{\vec{m}_{\alpha\alpha'}^{(1)}}; \quad (2.2.39)$$

$$\mathcal{E}_{\rho_2}^{\mathbf{m}_2} = \times_{\alpha'=1}^a \mathcal{E}_{\tau_{\alpha'}}^{\vec{m}_{\alpha'}^{(2)}} = \bigcup_{\sum_{\alpha} \vec{m}_{\alpha\alpha'}^{(2)} = \vec{m}_{\alpha'}^{(2)}} \times_{\alpha\alpha'} \mathcal{E}_{\tau_{\alpha\alpha'}}^{\vec{m}_{\alpha\alpha'}^{(2)}}.$$

Беря пересечение $\mathcal{E}_{\rho_1}^{\mathbf{m}_1} \cap \mathcal{E}_{\rho_2}^{\mathbf{m}_2}$ комбинаторных сфер $\mathcal{E}_{\rho_1}^{\mathbf{m}_1}$ и $\mathcal{E}_{\rho_2}^{\mathbf{m}_2}$, представленных в виде (2.2.39), получим

$$\mathcal{E}_{\rho_1}^{\mathbf{m}_1} \cap \mathcal{E}_{\rho_2}^{\mathbf{m}_2} = \bigcup_{\sum_{\alpha} \vec{m}_{\alpha\alpha'}^{(1)} = \vec{m}_\alpha^{(1)}} \times_{\alpha\alpha'} \mathcal{E}_{\tau_{\alpha\alpha'}}^{\vec{m}_{\alpha\alpha'}^{(1)}} \cap \bigcup_{\sum_{\alpha'} \vec{m}_{\alpha\alpha'}^{(2)} = \vec{m}_{\alpha'}^{(2)}} \times_{\alpha\alpha'} \mathcal{E}_{\tau_{\alpha\alpha'}}^{\vec{m}_{\alpha\alpha'}^{(2)}}, \quad (2.2.40)$$

но согласно соотношениям (2.2.11)

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{\tau_{\alpha\alpha'}}^{\vec{m}_{\alpha\alpha'}^{(1)}} \cap \mathcal{E}_{\tau_{\alpha\alpha'}}^{\vec{m}_{\alpha\alpha'}^{(2)}} = \\ & = \begin{cases} \mathcal{E}_{\tau_{\alpha\alpha'}}^{\vec{m}_{\alpha\alpha'}} & \text{при } \vec{m}_{\alpha\alpha'}^{(1)} = \vec{m}_{\alpha\alpha'}^{(2)} = \vec{m}_{\alpha\alpha'}, \\ \emptyset & \text{при } \vec{m}_{\alpha\alpha'}^{(1)} \neq \vec{m}_{\alpha\alpha'}^{(2)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Поэтому из соотношения (2.2.40) получается соотношение (2.2.38), при этом совпадают условия суммирования в соотношениях (2.2.40) и (2.2.36) и для наличия непустого пересечения комбинаторных сфер должны удовлетворяться условия $\vec{e}_a \mathbf{m}_1 = \vec{e}_a \mathbf{m}_2 = \vec{m}^*$. Таким образом, соотношение (2.2.38) доказано полностью.

Обозначим $N(\mathcal{E}_{\rho_1}^{\mathbf{m}_1} \cap \mathcal{E}_{\rho_2}^{\mathbf{m}_2}) = D_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)$, тогда из теоретико-множественного соотношения (2.2.38) получим основное соотношение

$$\begin{aligned} & D_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = \\ & = \begin{cases} \sum_{\vec{m}_{\alpha\alpha'}} \prod_{\alpha\alpha'} C_{m_{\alpha\alpha'}}^{\vec{m}_{\alpha\alpha'}} & \text{при } \vec{e}_a \mathbf{m}_1 = \vec{e}_a \mathbf{m}_2 = \vec{m}^*, \\ 0 & \text{при } \vec{e}_a \mathbf{m}_1 \neq \vec{e}_a \mathbf{m}_2 \end{cases} \quad (2.2.41) \end{aligned}$$

для числа расположений в пересечении комбинаторных сфер.

Для записи производящих функций чисел $D_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)$ удобна следующая матричная символика. Введем следующую запись для формального матричного аргумента $\mathbf{u} = \|u_{\alpha\alpha'}\|$ с действительными элементами и матрицы $\mathbf{m} = \|m_{\alpha\alpha'}\|$ с неотрицательными целочисленными элементами

$$\mathbf{u}^{\mathbf{m}} = \prod_{\alpha\alpha'} u_{\alpha\alpha'}^{m_{\alpha\alpha'}} \quad \text{и} \quad C_s^{\mathbf{m}} = s! / \prod_{\alpha\alpha'} m_{\alpha\alpha'}!$$

Введем производящую чисел

$$g_{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{m}} C_s^{\mathbf{m}} \mathbf{u}^{\mathbf{m}} D_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) \quad (2.2.42)$$

и обозначим

$$g_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \sum_{\alpha\alpha'} u_{\alpha\alpha'} \sum_{\beta} u_{\alpha\beta}^{(1)} u_{\alpha'\beta}^{(2)}, \quad (2.2.43)$$

где $\mathbf{u} = \|u_{\alpha\alpha'}\|$; $\mathbf{u}_1 = \|u_{\alpha\beta}^{(1)}\|$; $\mathbf{u}_2 = \|u_{\alpha'\beta}^{(2)}\|$ — формальные матричные аргументы с действительными элементами.

Введем вторую производящую чисел $D_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)$:

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{m}_2} g_{\mathbf{m}, \mathbf{m}_2}(\mathbf{u}) \mathbf{u}_1^{\mathbf{m}_1} \mathbf{u}_2^{\mathbf{m}_2}. \quad (2.2.44)$$

Тогда, используя формулу (2.2.16), получаем основное выражение для производящей функции чисел расположений в пересечении комбинаторных сфер

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = [g_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)]^s. \quad (2.2.45)$$

Подставив в соотношение (2.2.45) соотношение (2.2.43), получим

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) &= \left[\sum_{\alpha\alpha'} u_{\alpha\alpha'} \sum_{\beta} u_{\alpha\beta}^{(1)} u_{\alpha'\beta}^{(2)} \right]^s = \\ &= \sum_{\mathbf{m}} C_s^{\mathbf{m}} \mathbf{u}^{\mathbf{m}} \prod_{\alpha\alpha'} \left(\sum_{\beta} u_{\alpha\beta}^{(1)} u_{\alpha'\beta}^{(2)} \right)^{m_{\alpha\alpha'}} = \\ &= \sum_{\mathbf{m}} C_s^{\mathbf{m}} \mathbf{u}^{\mathbf{m}} \prod_{\alpha\alpha'} \sum_{\sum_{\beta} m_{\alpha\alpha'\beta} = m_{\alpha\alpha'}} C_{m_{\alpha\alpha'}}^{m_{\alpha\alpha'}} \prod_{\beta} (u_{\alpha\beta}^{(1)} u_{\alpha'\beta}^{(2)})^{m_{\alpha\alpha'\beta}} = \\ &= \sum_{\mathbf{m}} C_s^{\mathbf{m}} \mathbf{u}^{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \rightarrow \mathbf{m}} \prod_{\alpha\alpha'} C_{m_{\alpha\alpha'}}^{m_{\alpha\alpha'}} \mathbf{u}_1^{\mathbf{m}_1} \mathbf{u}_2^{\mathbf{m}_2} = \\ &= \sum_{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2} \mathbf{u}_1^{\mathbf{m}_1} \mathbf{u}_2^{\mathbf{m}_2} \sum_{\mathbf{m}} C_s^{\mathbf{m}} \mathbf{u}^{\mathbf{m}} D_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = \\ &= \sum_{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2} g_{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(\mathbf{u}) \mathbf{u}_1^{\mathbf{m}_1} \mathbf{u}_2^{\mathbf{m}_2}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что вторая производящая $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ чисел $D_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)$ имеет второе представление (см. предыдущую выкладку)

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \sum_{\mathbf{m}} C_s^{\mathbf{m}} \mathbf{u}^{\mathbf{m}} g_{\mathbf{m}}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \quad (2.2.46)$$

где

$$g_{\mathbf{m}}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \prod_{\alpha\alpha'} \left(\sum_{\beta} u_{\alpha\beta}^{(1)} u_{\alpha'\beta}^{(2)} \right)^{m_{\alpha\alpha'}} =$$

$$= \sum_{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2} D_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) \mathbf{u}_1^{\mathbf{m}_1} \mathbf{u}_2^{\mathbf{m}_2} \quad (2.2.47)$$

— производящая функция чисел $D_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)$.

Рассмотрим производящую функцию $g_{\mathbf{m}}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ для случая $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 2$:

$$g_{\mathbf{m}}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (u_{11}^{(1)} u_{11}^{(2)} + u_{12}^{(1)} u_{12}^{(2)})^{m_{11}} \times$$

$$\times (u_{11}^{(1)} u_{21}^{(2)} + u_{12}^{(1)} u_{22}^{(2)})^{m_{12}} (u_{21}^{(1)} u_{11}^{(2)} + u_{22}^{(1)} u_{12}^{(2)})^{m_{21}} \times$$

$$\times (u_{21}^{(1)} u_{21}^{(2)} + u_{22}^{(1)} u_{22}^{(2)})^{m_{22}} =$$

$$= \sum_{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2} D_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) \mathbf{u}_1^{\mathbf{m}_1} \mathbf{u}_2^{\mathbf{m}_2}. \quad (2.2.48)$$

Введем новые переменные, положив

$$d = m_{12} + m_{21}; \quad d_1 = m_{12}^{(1)} + m_{21}^{(1)}; \quad d_2 = m_{12}^{(2)} + m_{21}^{(2)} \quad (2.2.49)$$

и обозначив

$$D_d(d_1, d_2) = \sum_{\substack{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \\ (2.2.49)}} D_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2). \quad (2.2.50)$$

Легко видеть, что для получения производящей функции

$$g_d(u, v) \leftarrow \sum_{d_1, d_2} D_d(d_1, d_2) u^{d_1} v^{d_2} \quad (2.2.51)$$

чисел $D_d(d_1, d_2)$ достаточно положить в производящей функции (2.2.48)

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & u \\ u & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$g_{\mathbf{m}}(\mathbf{u}_1^{(0)}, \mathbf{u}_2^{(0)}) = g_d(u, v) = \sum_{d_1, d_2} D_d(d_1, d_2) u^{d_1} v^{d_2} =$$

$$= (uv + 1)^{s-d} (u + v)^d. \quad (2.2.52)$$

Преобразуем выражение (2.2.52), используя бином Ньютона. Имеем

$$g_d(u, v) = \sum_{kl} C_d^k C_{s-d}^l u^{k+l} v^{l+d-k}.$$

Положим

$$k+l=d_1; \quad d-(k-l)=d_2. \quad (2.2.53)$$

Заметим, что если $d+d_1+d_2 \equiv 0 \pmod{2}$ и $d \leq d_1+d_2$, то у системы (2.2.53) существует единственное целочисленное решение: $k=(d_1-d_2+d)/2$; $l=(d_1+d_2-d)/2$. Если $d+d_1+d_2 \equiv 1 \pmod{2}$ или $d > d_1+d_2$, то система (2.2.53) не имеет целочисленных решений.

Итак,

$$\begin{aligned} g_d(u, v) &= \sum_{d_1 d_2} C_d^{(d_1-d_2+d)/2} C_{s-d}^{(d_1+d_2-d)/2} u^{d_1} v^{d_2} = \\ &= \sum_{d_1 d_2} D_d(d_1, d_2) u^{d_1} v^{d_2}. \end{aligned}$$

Отсюда окончательно получаем

$$\begin{aligned} D_d(d_1, d_2) &= \\ &= \begin{cases} C_d^{(d_1-d_2+d)/2} C_{s-d}^{(d_1+d_2-d)/2} & \text{при } d+d_1+d_2 \equiv 0 \pmod{2}, \\ 0 & \text{при } d+d_1+d_2 \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.54)$$

Впервые прямой вывод соотношения (2.2.54) был дан в работе [56]. Число $D_d(d_1, d_2)$ указывает на число расположений ρ (бинарных последовательностей длины s), находящихся в пересечении двух комбинаторных сфер $\mathcal{C}_{\rho_1}^{d_1}$ и $\mathcal{C}_{\rho_2}^{d_2}$ с центрами в ρ_1 и ρ_2 на расстоянии $d = d(\rho_1, \rho_2)$, имеющих радиусы d_1 и d_2 соответственно. Здесь $d = d(\rho_1, \rho_2)$ — число соответствующих мест расположений ρ_1 и ρ_2 с несовпадающими символами (так называемое хемминговское расстояние). Проблема пересечения комбинаторных сфер является центральной во многих приложениях, к которым мы вернемся далее.

2.3. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Понятие стохастической функции является естественным обобщением понятия детерминированной функции случайного аргумента и случайной функциональной зависимости при детерминированном аргументе. Стохастич-

ческая функция дважды случайна: из-за случайности аргумента и случайности функциональной зависимости. Вместе с тем рассматриваемые далее дискретные стохастические функции являются пробабиллизацией комбинаторных множеств двойных расположений.

Впервые схема стохастических функций встречается в работе А. А. Маркова 1912 г. «Об испытаниях, связанных в цепь ненаблюдаемыми событиями» [57]. Вследствии в монографии В. И. Романовского 1949 г. «Дискретные цепи Маркова» [58] этой схеме посвящена вся пятая глава. Этой же схеме посвящена вся вторая глава монографии автора 1963 г. [42]. Основному ее результату — связи между производящими функциями и аргумента — посвящен настоящий параграф.

2.3.1. Дискретный стохастический аргумент. Элементы t упорядоченного множества мест $\sigma = \{1, \dots, t, \dots, s\}$ будем называть моментами времени. Обобщая рассмотрение п. 2.2.1, соотнесем каждому моменту t неупорядоченное множество предметов $A^t = \{A^t_\alpha\} \{\alpha = \overline{1, a}\}$.

Рассмотрим множество R обобщенных расположений $x \in R$, определяемых обобщенным представлением (2.2.1a):

$$x = (A^t_{\alpha_t}) = \prod_{t=1}^s \rho_{\{t\}}^{\alpha_t} \quad (2.3.1)$$

(представление (2.2.1б) в общем случае не имеет смысла).

Аналогично определяется множество R_τ обобщенных τ -проекций:

$$x_\tau = \{A_{\alpha_{i_k}}^{i_k}\} = \prod_{i_k \in \tau} \rho_{\{i_k\}}^{\alpha_{i_k}}, \quad (2.3.2)$$

где $\tau = \{i_1, \dots, i_k, \dots, i_t\} \subseteq \sigma$ и $x_\sigma = x$.

Зададим вероятности $p(x_\tau)$ обобщенных τ -проекций x_τ для всех $x_\tau \in R_\tau$ и $\tau \subseteq \sigma$ следующим образом. Набор вероятностей ($p(x)$) может быть произвольным распределением, т. е. $p(x)$ — произвольные числа $0 \leq p(x) \leq 1$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{x \in R} p(x) = 1. \quad (2.3.3)$$

Все остальные вероятности $p(x_\tau)$ получаются суммированием $p(x)$ по всем α_t с $t \in \sigma \setminus \tau$:

$$\sum_{\sigma \in \tau} p(x) = p(x_\tau). \quad (2.3.4)$$

Из соотношений (2.3.3) и (2.3.4) следует, что набор вероятностей $(p(x_\tau))$ ($x_\tau \in R_\tau$, $\tau = \text{const}$) является распределением. Набор распределений $(p(x_\tau))$ при всех $\tau \in \sigma$ будем называть *стохастическим аргументом* (СА) и обозначать $\mathcal{P}(A)$.

Обобщенные расположения x будем называть *значениями СА*, x_τ — τ -значениями СА, а предметы $A_\alpha^{(t)}$ — *элементарными значениями СА*.

Если все множества $A^t = A$ ($t = \overline{1, s}$) тождественны, то будем говорить, что СА *однороден*. В этом случае τ -значения СА соответствуют τ -проекциям p_τ п. 2.2.1 и имеет смысл их представление (2.2.1б):

$$x_\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_\alpha, \dots, \tau_a\} \left(\bigcup_{\alpha=1}^a \tau_\alpha = \tau, \tau_\alpha \cap \tau_{\alpha'} = \emptyset (\alpha \neq \alpha') \right).$$

Числа $N(\tau_\alpha) = t_\alpha$ ($\alpha = \overline{1, a}$) будем называть *частотами* СА. Вектор $\vec{t} = (t_\alpha)$ таков, что $\sum_{\alpha=1}^a t_\alpha = t = N(\tau)$.

Наряду с распределением $(p(x_\tau))$ определим распределение $(P_t(\vec{t}))$ частот СА:

$$P_t(\vec{t}) = \sum_{x_\tau \in \vec{t}} p(x_\tau). \quad (2.3.5)$$

2.3.2. Производящая функция СА. Будем представлять элементарное значение СА A_α^t ($\alpha = \overline{1, a}$) a -мерным вектор-столбцом

$$\vec{e}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \right\} a \quad (\alpha = \overline{1, a}),$$

Тогда представлению (2.3.1) значения СА x соответствует матричное представление

$$x = (\vec{e}_{\alpha_1}, \dots, \vec{e}_{\alpha_t}, \dots, \vec{e}_{\alpha_s})$$

в виде $(a \times s)$ -матрицы, состоящей из s вектор-столбцов.

Аналогично τ -значение СА x_τ имеет представление, соответствующее (2.3.2),

$$\underline{x}_\tau = (\vec{e}_{\alpha_{i_1}}, \dots, \vec{e}_{\alpha_{i_k}}, \dots, \vec{e}_{\alpha_{i_t}})$$

в виде $(a \times t)$ -подматрицы матрицы x .

Рассмотрим формальный матричный аргумент $u = (u_1, \dots, u_t, \dots, u_s)$ в виде $(a \times s)$ -матрицы, состоящей из s вектор-столбцов,

$$\vec{u}_t = \begin{pmatrix} u_1^{(t)} \\ \vdots \\ u_\alpha^{(t)} \\ \vdots \\ u_a^{(t)} \end{pmatrix}.$$

Тогда производящая функция (или коротко производящая) СА с учетом принятой матричной символики имеет вид

$$g(u) = \sum_{x \in R} p(x) u^x = \sum_{x \in R} p(x) \prod_{t=1}^s \vec{u}_t^{\vec{e}_{\alpha_t}}. \quad (2.3.6)$$

Для $a=2$ впервые такого рода производящие были рассмотрены М. Фреше [59].

Обозначим через \underline{u}_τ $(a \times s)$ -матрицу, получающуюся из матрицы u приравниванием в последней столбцов, стоящих на местах τ , a -мерным единичным вектор-столбцам

$$\vec{e} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) a.$$

Тогда, подставив в соотношение (2.3.6) \mathbf{u}_τ вместо \mathbf{u} с учетом соотношения (2.3.4), получим

$$g(\mathbf{u}_\tau) = \sum_{\mathbf{x}_\tau \in R_\tau} p(\mathbf{x}_\tau) \mathbf{u}_\tau^{\mathbf{x}_\tau}. \quad (2.3.7)$$

Рассмотрим однородный случай СА, когда $A^{(t)} = A$ ($t = \overline{1, s}$). Тогда a -мерный вектор-столбец частот \vec{t} имеет следующее выражение:

$$\vec{t} = x_\tau \vec{e} = \sum_{k=1}^t e_{\alpha_{t_k}}, \quad (2.3.7')$$

где \vec{e} — t -мерный единичный вектор-столбец.

Из соотношений (2.3.5) и (2.3.7) следует выражение производящей частот \vec{t} через производящую τ -значений СА:

$$g_\tau(\vec{u}) = g(\mathbf{u}_\tau) \Big|_{\substack{\rightarrow \\ u_{\alpha_{t_k}} = u}} = \sum_{\vec{t}} P_t(\vec{t}) \vec{u}^{\vec{t}}, \quad (2.3.8)$$

в которой все вектор-столбцы матрицы \mathbf{u}_τ заменены постоянным вектор-столбцом \vec{u} .

Подчеркнем, что во всем дальнейшем изложении вероятностные и частотные векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{m}, \vec{m}^*, \dots$ рассматриваются как вектор-строки, а формальные векторы производящих функций $\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \dots$ как вектор-столбцы, матрица, транспонированная по отношению к матрице \mathbf{p} , обозначается \mathbf{p}' (штрих у вектора означает переход вектор-столбца в вектор-строку, и наоборот).

В качестве важного случая СА рассмотрим так называемый марковский аргумент. Для его задания рассмотрим a -мерный вероятностный вектор $\vec{p}_1 = (p_{\alpha_1}^{(1)})$ с компонентами — вероятностями, дающими в сумме единицу, и $(s-1)$ -вероятностных $(a \times a)$ -матриц $\mathbf{P}(t) = \|p_{\alpha_{t-1}}^{\alpha_t}(t)\|$ ($t = \overline{2, s}$) с элементами-вероятностями, дающими в сумме по строкам единицу. По определению, здесь будем полагать для $\mathbf{x} = (A_{\alpha_t}^{(t)})$ ($t = \overline{1, s}$)

$$p(\mathbf{x}) = p_{\alpha_1}^{(1)} \prod_{t=2}^s p_{\alpha_{t-1}}^{\alpha_t}(t). \quad (2.3.9)$$

совпадает со строкой матрицы $\vec{e} = \lim_{t \rightarrow \infty} P^t$, состоящей из постоянных столбцов. Марковский однородный аргумент, обладающий таким вектором \vec{p} , будем называть устойчивым. Для него производящая (2.3.11) имеет вид

$$g(\mathbf{u}) = \vec{p} D(\vec{u}^{(1)}) \prod_{t=2}^s PD(\vec{u}^{(t)}) \vec{e} = \vec{p} \prod_{t=1}^s PD(\vec{u}^{(t)}) \vec{e}, \quad (2.3.12)$$

а производящая частот согласно соотношениям (2.3.8) и (2.3.12) имеет вид

$$g(\vec{u}) = g_s(\vec{u}) \triangleq \sum_{\vec{m}} P_s(\vec{m}) \vec{u}^{\vec{m}} = \vec{p} [PD(\vec{u})]^s \vec{e}. \quad (2.3.13)$$

Выражение, соответствующее соотношению (2.3.13), но не для производящих, а для так называемых характеристических функций приводится в работе В. И. Романовского [58].

Рассмотрим вторую производящую частот марковского однородного устойчивого аргумента, используя первую производящую (2.3.13). Положим

$$g(\vec{u}, \vec{v}) \triangleq \sum_{s=0}^{\infty} g_s(\vec{u}) v^s. \quad (2.3.14)$$

Тогда, используя явное матричное выражение (2.3.13), из соотношения (2.3.14) получаем основное выражение для второй производящей

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{p} [E - PD(\vec{u})v]^{-1} \vec{e}, \quad (2.3.15)$$

где E — единичная $(a \times a)$ -матрица, а « -1 » — символ обратной матрицы.

Рассмотрим простейший бинарный случай соотношения (2.3.15), полагая $a = 2$; $\vec{m} = (m, s - m)$; $\vec{p} = (p, q)$; $\vec{u} = (u, 1)$;

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}; \\ D(\vec{u}) = D(u) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.3.16)$$

В этом случае

$$g_s(\vec{u}) = g_s(u) = \sum_{m=0}^s P_s(m) u^m; \quad (2.3.17)$$

$$\left. \begin{aligned} E - PD(u)v &= \begin{pmatrix} 1 - p_{11}uv & -p_{12}v \\ -p_{21}uv & 1 - p_{22}v \end{pmatrix}; \\ |E - PD(u)v| &= 1 - (p_{11}u + p_{22})v - (p_{21} - p_{11})uv^2; \\ (E - PD(u)v)^{-1} &= \frac{\begin{pmatrix} 1 - p_{22}v & p_{12}v \\ p_{21}uv & 1 - p_{11}uv \end{pmatrix}}{|E - PD(u)v|}. \end{aligned} \right\} (2.3.18)$$

Используя соотношение (2.3.15) с учетом соотношений (2.3.18), после несложных преобразований получаем для второй производящей (2.3.14) следующее выражение:

$$g(u, v) = \sum_{s=0}^{\infty} g_s(u) v^s = \frac{1 + [(p - p_{11})u + q - p_{22}]v}{1 - (p_{11}u + p_{22})v - (p_{21} - p_{11})uv^2}. \quad (2.3.19)$$

В обозначениях А. А. Маркова

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + \delta q & q - \delta q \\ p - \delta p & q + \delta p \end{pmatrix}.$$

Соотношение (2.3.19) для второй производящей имеет вид

$$g(u, v) = \frac{1 - \delta(qu + p)v}{1 - [(p + \delta q)u + q + \delta p]v + \delta uv^2}. \quad (2.3.20)$$

Оно впервые было получено А. А. Марковым в 1907 г. в работе [60].

Рассмотрим вырожденный случай марковского СА, когда, оставаясь неоднородными, значения СА оказываются *независимыми*, так как вероятностные $(a \times a)$ -матрицы $P(t) = \vec{e} \vec{p}_t$ ($t = \overline{2, s}$) вырождаются в матрицы с постоянными столбцами, другими словами, каждая из них состоит из a одинаковых a -мерных вероятностных вектор-строк $\vec{p}_t = (p_1^{(t)}, \dots, p_a^{(t)}, \dots, p_a^{(t)})$. Этот случай будем называть *пуассоновским СА*. При нем (см. соотношение (2.3.11)) производящая значений СА имеет вид

$$g(\mathbf{u}) = g(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_t, \dots, \vec{u}_s) = \prod_{t=1}^s \vec{p}_t \vec{u}_t, \quad (2.3.21)$$

а производящая частот СА

$$g(\vec{u}) = \prod_{t=1}^s \vec{p}_t \vec{u}. \quad (2.3.22)$$

Наконец, в *бернуллиевском* случае СА, когда кроме независимости имеет место еще и однородность, т. е.

$$\vec{p}_t = \vec{p} \quad (t = \overline{1, s}),$$

$$g(\mathbf{u}) = \prod_{t=1}^s \vec{p} \vec{u}_t, \quad (2.3.23)$$

и производящую частот

$$g(\vec{u}) = \prod_{t=1}^s \vec{p} \vec{u} = (\vec{p} \vec{u})^s = \left(\sum_{\alpha=1}^a p_{\alpha} u_{\alpha} \right)^s, \quad (2.3.24)$$

из вида которой следует, согласно соотношению (2.2.16), что распределение частот бернуллиевского СА полиномиально:

$$P_s(\vec{m}) = C_s^{\vec{m}} \vec{p}^{\vec{m}}. \quad (2.3.25)$$

2.3.3. Дискретная стохастическая зависимость. Пусть одним и тем же моментам времени $\sigma = \{1, 2, \dots, t, \dots, s\}$ соотнесены два набора множеств предметов

$$A^{(t)} = \{A_{\alpha}^{(t)}\} \text{ и } B^{(t)} = \{B_{\beta}^{(t)}\} \quad (\alpha = \overline{1, a}; \beta = \overline{1, b}; t = \overline{1, s}),$$

где, вообще говоря, $a \neq b$.

Определим на множестве моментов времени σ обобщенные расположения $\mathbf{y} \in R^*$ и τ -проекции $\mathbf{y}_{\tau} \in R^*_{\tau}$:

$$\mathbf{y}_{\sigma} = \{B_{\beta_t}^{(t)}\} \quad (t = \overline{1, s}) \text{ и } \mathbf{y}_{\tau} = \{B_{\beta_{t_k}}^{(t_k)}\} \quad (k = \overline{1, t}) \quad (2.3.26)$$

в смысле определений п. 2.3.1, где $\mathbf{y}_{\sigma} = \mathbf{y}$.

Определим для обобщенных τ -проекций \mathbf{y}_{τ} при фиксированном обобщенном расположении $\mathbf{x} \in R$ условные вероятности $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}_{\tau})$ для $\mathbf{y}_{\tau} \in R^*_{\tau}$ и $\tau \subseteq \sigma$.

Так же как и набор вероятностей $p(\mathbf{x}_{\tau})$, удовлетворяющий условиям (2.3.3) и (2.3.4), набор вероятностей $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}_{\tau})$ должен удовлетворять аналогичным условиям:

$$\sum_{\mathbf{y} \in R^*} p_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = 1; \quad \sum_{\sigma \setminus \tau} p_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = p_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}_{\tau}), \quad (2.3.27)$$

где суммирование ведется по всем β_t с $t \in \sigma \setminus \tau$. Из соотношений (2.3.27) следует, что набор условных вероятностей $(p_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}_{\tau}))$ является распределением. Набор распределений $(p_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}_{\tau}))$ при всех $\tau \subseteq \sigma$ и $\mathbf{x} \in R$ будем назы-

вать *стохастической зависимостью* (СЗ) и обозначать $\mathcal{P}(B|A)$. Обобщенные расположения \mathbf{y} , τ -проекций \mathbf{y}_τ и предметы B_β^t будем называть *значениями*, τ -*значениями* и *элементарными значениями* случайной функции значения аргумента x .

Если все множества $B^{(t)} = B \ (t = \overline{1, s})$ тождественны, то будем говорить, что СЗ *однородна*. В этом случае \mathbf{y}_τ допускает представление (2.2.1б):

$$\mathbf{y}_\tau = (\tau^*_1, \dots, \tau^*_\beta, \dots, \tau^*_b) \left(\bigcup_{\beta=1}^b \tau^*_\beta = \tau, \tau^*_\beta \cap \tau^*_{\beta'} = \emptyset \ (\beta \neq \beta') \right).$$

Числа $N(\tau^*_\beta) = t^*_\beta \ (\beta = \overline{1, b})$ будем называть *частотами* случайной функции. Вектор $\vec{t}^* = (t^*_\beta)$ таков, что

$$\sum_{\beta=1}^b t^*_\beta = t = N(\tau).$$

Наряду с распределением $(\dot{p}_x(\mathbf{y}_\tau))$ определим распределение $(P_{tx}(\vec{t}^*))$ частот случайной функции

$$P_{tx}(\vec{t}) = \sum_{\mathbf{y}_\tau \in \mathcal{E}_\tau^{\vec{t}^*}} p(\mathbf{y}_\tau). \quad (2.3.28)$$

Как и в п. 2.3.2, перейдем к матричному представлению значения \mathbf{y} случайной функции

$$\mathbf{y} = (\vec{e}_{\beta_1}, \dots, \vec{e}_{\beta_t}, \dots, \vec{e}_{\beta_s})$$

в виде $(b \times s)$ -матрицы, состоящей из s вектор-столбцов

$$\vec{e}_\beta = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{array} \right\} b,$$

ассоциированных элементарным значениям $B_3^{(t)}$ случайной функции.

Аналогичное представление имеет τ -значение \mathbf{y}_τ случайной функции

$$\mathbf{y}_\tau = (\vec{e}_{\beta_{i_1}}, \dots, \vec{e}_{\beta_{i_k}}, \dots, \vec{e}_{\beta_{i_t}})$$

в виде $(b \times s)$ -подматрицы матрицы \mathbf{y} .

Введем формальный матричный аргумент $\mathbf{v} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_t, \dots, \vec{v}_s)$ в виде $(b \times s)$ -матрицы, состоящей из s b -мерных вектор-столбцов

$$\vec{v}_t = \begin{pmatrix} v_1^{(t)} \\ \vdots \\ v_\beta^{(t)} \\ \vdots \\ v_b^{(t)} \end{pmatrix}.$$

Тогда производящая значений случайной функции

$$g_x(\mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{y} \in R^s} p_x(\mathbf{y}) \mathbf{v}^{\mathbf{y}}, \quad (2.3.29)$$

и производящая τ -значений случайной функции

$$g_x(\mathbf{v}_\tau) = \sum_{\mathbf{y}_\tau \in R_\tau^s} p_x(\mathbf{y}_\tau) \mathbf{v}_\tau^{\mathbf{y}_\tau} \quad (2.3.30)$$

получается из производящей (2.3.29) заменой столбцов матрицы \mathbf{v} , стоящих на местах τ , b -мерными единичными вектор-столбцами, в результате чего получается матрица \mathbf{v}_τ .

Если множества $B^{(t)} = B$ ($t = \overline{1, s}$) тождественны, то b -мерный вектор частот \vec{t}^* имеет представление

$$\vec{t}^* = \mathbf{y}_\tau \vec{e} = \sum_{k=1}^t \vec{e}_{\alpha_{i_k}}, \quad (2.3.31)$$

где \vec{e} — t -мерный единичный вектор-столбец. Тогда производящая частот \vec{t}^* случайной функции с учетом соот-

ношений (2.3.28), (2.3.30) и (2.3.31) имеет вид

$$g_{tx}(\vec{v}) = g_x(\mathbf{v}_\tau) \Big|_{\substack{\vec{v}_{\alpha_{i_k}} = \vec{v} \\ \vec{t}^*}} = \sum_{\vec{t}^*} P_{tx}(\vec{t}^*) \vec{v}^{\vec{t}^*}, \quad (2.3.32)$$

где все вектор-столбцы матрицы \mathbf{v}_τ заменены на один и тот же вектор-столбец \vec{v} .

2.3.4. Общее определение стохастической функции. На основании формулы (2.1.7) для безусловной (абсолютной) вероятности вычислим безусловные вероятности y :

$$p^*(y) = \sum_{x \in R} p(x) p_x(y). \quad (2.3.33)$$

На их основе с помощью соотношений, аналогичных соотношениям (2.3.27), можно вычислить вероятности $p(\mathbf{y}_\tau)$. Так, определенную совокупность распределений $(p(\mathbf{y}_\tau))$ при всех $\tau \in \mathcal{J}$ будем называть *стохастической функцией* (СФ) и обозначать $\mathcal{P}(B)$. Обобщенное расположение y , обобщенную τ -проекцию \mathbf{y}_τ и предмет $B_p^{(t)}$ назовем значением, τ -значением и элементарным значением СФ соответственно.

Аналогично производящим СА определяются производящие СФ. Производящая значений

$$g^*(\mathbf{v}) = \sum_{y \in R^*} p^*(y) \mathbf{v}^y = \sum_{x \in R} p(x) g_x(\mathbf{v}). \quad (2.3.34)$$

Производящая τ -значений

$$g^*(\mathbf{v}_\tau) = \sum_{\mathbf{y}_\tau \in R^*_{\tau}} p^*(\mathbf{y}_\tau) \mathbf{v}_\tau^{\mathbf{y}_\tau} = \sum_{x \in R} p(x) g_x(\mathbf{v}_\tau). \quad (2.3.35)$$

Производящая частот

$$g^*(\vec{v}) = \sum_{\vec{t}^*} P_{tx}(\vec{t}^*) \vec{v}^{\vec{t}^*} = \sum_{x \in R} p(x) g_{tx}(\vec{v}). \quad (2.3.36)$$

2.3.5. СЗ с независимыми переходами. Положительное изучение СЗ требует задания специального вида условных вероятностей $p(y)$. В дальнейшем мы ограничимся простейшим случаем СЗ с независимыми

переходами, когда

$$p_x(y) = \prod_{t=1}^s p_{\alpha_t}^{\beta_t}(t) = \prod_{t=1}^s \vec{p}_{\alpha_t}^{\beta_t}(t), \quad (2.3.37)$$

где \vec{p}_{α_t} — вероятностный вектор-столбец, а \vec{e}_{β_t} — вектор-столбец с нулевыми компонентами, кроме β_t -й, равной единице, причем $p_{\alpha_t}^{\beta_t}(t)$ является условной вероятностью элементарного значения $B_{\beta_t}^{(t)}$ при условии $A_{\alpha_t}^{(t)}$, и называется вероятностью перехода $A_{\alpha_t}^{(t)}$ в $B_{\beta_t}^{(t)}$. Итак, здесь СЗ определена набором матриц переходов

$$\mathbf{p}(t) = \|\|p_{\alpha}^{\beta}(t)\|\| = \{\vec{p}_{\alpha}^{\beta}(t)\} \quad (t = \overline{1, s}).$$

В этом случае производящая СЗ имеет особо простой вид. В самом деле из соотношений (2.3.29) и (2.3.37) имеем условную производящую

$$\begin{aligned} g_x(\mathbf{v}) &= \sum_y p_x(y) \mathbf{v}^y = \sum_y p_x(y) \prod_{t=1}^s v_t^{\beta_t} = \\ &= \sum_y \prod_{t=1}^s (\vec{p}_{\alpha_t}(t) \cdot \vec{v}_t)^{\beta_t}. \end{aligned} \quad (2.3.38)$$

Заметим здесь, что скалярное произведение $\vec{p} \cdot \vec{v}$ выражается через векторное покомпонентное произведение $(\vec{p} \cdot \vec{v})$ по формуле

$$\vec{p} \cdot \vec{v} = \sum_{\alpha=1}^a (\vec{p} \cdot \vec{e}_{\alpha}) v_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^a p_{\alpha} v_{\alpha}. \quad (2.3.39)$$

Используя тождество (2.3.39), преобразуем соотношение (2.3.38):

$$\begin{aligned} \sum_y \prod_{t=1}^s (\vec{p}_{\alpha_t}(t) \cdot \vec{v}_t)^{\beta_t} &= \prod_{t=1}^s \left(\sum_{\beta_t=1}^b p_{\alpha_t}^{\beta_t}(t) v_{\beta_t}^{(t)} \right) = \\ &= \prod_{t=1}^s (\mathbf{p}(t) \cdot \vec{v}_t)^{\beta_t}. \end{aligned}$$

Итак, имеем окончательное выражение для соотношения (2.3.38)

$$g_x(\mathbf{v}) = g_x(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s) = \prod_{t=1}^s (\mathbf{p}(t) \vec{v}_t)^{e_{\alpha t}}, \quad (2.3.40)$$

важное для дальнейшего изложения.

2.3.6. Основное соотношение между производящими значениями СА и СФ для СЗ с независимыми переходами. Покажем, что производящая СФ $g^*(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_t, \dots, \vec{v}_s)$ связана с производящей СА $g(u_1, \dots, u_t, \dots, u_s)$ основным соотношением [42, с. 75]

$$\begin{aligned} g^*(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_t, \dots, \vec{v}_s) &= \\ &= g(p(1)\vec{v}_1, \dots, p(t)\vec{v}_t, \dots, p(s)\vec{v}_s). \end{aligned} \quad (2.3.41)$$

Согласно соотношениям (2.3.34) и (2.3.40)

$$\begin{aligned} g^*(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_t, \dots, \vec{v}_s) &= \sum_{\mathbf{y} \in R^s} p(\mathbf{y}) \prod_{t=1}^s \vec{v}_t^{e_{\beta t}} = \\ &= \sum_{\mathbf{x} \in R} p(\mathbf{x}) g_x(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_t, \dots, \vec{v}_s) = \\ &= \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \prod_{t=1}^s (\mathbf{p}(t) \vec{v}_t)^{e_{\alpha t}}. \end{aligned}$$

Сравнив полученное выражение с выражением (2.3.6) для производящей СА, убеждаемся в справедливости соотношения (2.3.41).

Получим некоторые следствия из соотношения (2.3.41). Покажем, что если СА является марковским, то СФ не является марковской. Для того чтобы обнаружить это, достаточно получить выражение производящей СФ (2.3.41) с учетом вида производящей для марковского СА (2.3.11) и заметить, что полученная производящая не марковского типа (2.3.11).

Прямыми методами этот результат был получен впервые В. И. Романовским [58, с. 270], показавшим, что в этом случае СФ образует так называемую бесконечно усложняющуюся цепь, в которой вероятность появления события $B_{\beta t}^{(t)}$ зависит от всех событий, имевших место до него (при $t' < t$).

В отличие от марковского случая СА, пуассоновский случай СЗ с независимыми переходами приводит снова к пуассоновскому случаю СФ (инвариантность пуассоновского случая по отношению к рассматриваемому виду СЗ). В самом деле, подставив в основное соотношение (2.3.41) выражение (2.3.21) с параметрами \vec{p}_t ($t = \overline{1, s}$), убеждаемся, что значения ОФ оказываются снова пуассоновскими с параметрами $\vec{q}_t = \vec{p}_t \mathbf{p}(t)$ ($t = \overline{1, s}$). Отсюда следует инвариантность и бернуллиевского случая, при котором, если СА определяется постоянным векторным параметром \vec{p} , СЗ — постоянной матрицей \mathbf{p} , то СФ определяется постоянным векторным параметром $\vec{q} = \vec{p}\mathbf{p}$.

В заключение остановимся на следующем общем свойстве СФ.

Каков бы ни был СА, если СЗ определяется вероятностной $(a \times b)$ -матрицей переходов с постоянными столбцами

$$\mathbf{p}(t) = \vec{e} \vec{p}_t \quad (t = \overline{1, s}), \quad (2.3.42)$$

где $\vec{p}_t = (p_1^{(t)}, \dots, p_b^{(t)})$, то СФ имеет пуассоновский вид вероятностей значений

$$p^*(\mathbf{y}) = \prod_{t=1}^s \vec{p}_t^{\vec{e}_t}. \quad (2.3.43)$$

В самом деле, из основного соотношения (2.3.41) с учетом соотношения (2.3.42) имеем

$$\begin{aligned} g^*(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_t, \dots, \vec{v}_s) &= g(\mathbf{p}(1) \vec{v}_1, \dots, \mathbf{p}(t) \vec{v}_t, \dots, \mathbf{p}(s) \vec{v}_s) = \\ &= g(\vec{e} \vec{p}_1 \vec{v}_1, \dots, \vec{e} \vec{p}_t \vec{v}_t, \dots, \vec{e} \vec{p}_s \vec{v}_s) = \prod_{t=1}^s (\vec{p}_t \vec{v}_t) \underbrace{g(\vec{e}, \dots, \vec{e})}_s = \\ &= \prod_{t=1}^s (\vec{p}_t \vec{v}_t). \end{aligned}$$

Сопоставляя последнее выражение с соотношением (2.3.21), убеждаемся в справедливости соотношения (2.3.43).

2.3.7. Заключительные замечания. Дискретный аппарат теории стохастических функций в более детализированной и полной форме

Изложен в монографии автора [42], где ему посвящена вся вторая глава. Там он применялся для развития методов конструктивной теории информации, но там уже указывалось на более широкие возможности его применения. Покажем, что определение стохастической системы, данное в п. 2.1.5, является частным случаем СЗ. Для простоты рассмотрим случай не динамического задания системы, полагая $T=s=1$.

Обозначим конечные числа элементов $N(|A|) = a$, $N(D) = b$; положим $|X| = A_\alpha$ и $d_A = B_\beta$ ($\alpha = 1, a$, $\beta = 1, b$). Тогда система $D_{|X|} = A(|X|)$ как многозначная функция, пробабализирующая множества $D_{|X|} \in D$ ($a \times b$)-матрицей $\mathbf{p} = (P_{|X|})$, состоящей из распределений $P_{|X|} = (p_{|X|}^A)$, интерпретируется СЗ с матрицей переходов $\mathbf{p} = \|\|p_\alpha^\beta\|$, где $p_{|X|}^A = p_\alpha^\beta$. Динамический случай задания системы интерпретируется общим случаем СЗ с параметрами $T=s>1$. Общая интерпретация неоднозначна и имеет много вариантов. Здесь мы на ней не будем останавливаться. Конструктивные результаты могут быть достигнуты при ряде допущений, например рассмотрением случая СЗ с независимыми переходами. Однако для полноты рассмотрений, связанных с СФ, необходима пробабализация множества аргумента $|A|$ (СА). Это связано также с необходимостью учета взаимодействия системы A со средой B , имеющей в общем случае случайные стимулы \mathcal{A}'_B . Другими словами, необходимо исследовать случайные графы $|X|$. К их исследованию мы и перейдем в следующем параграфе.

2.4. СЛУЧАЙНЫЕ ГРАФЫ

Литература по случайным графам существенно беднее литературы по детерминированным графам. Имеются два направления теории случайных графов. Первое, развитое венгерскими математиками П. Эрдемем и А. Реньи [61, 62], рассматривает случайные графы, возникающие при случайном соединении n вершин фиксированным числом ребер. Второе, восходящее к работе Е. Гильберта [63], рассматривает случайные графы с фиксированным числом вершин n , ребра между которыми возникают независимо друг от друга с некоторыми вероятностями. Существенные результаты в этом направлении были получены А. К. Кальмансом [64], В. Е. Степановым [65, 68], И. Н. Коваленко [69].

В этом параграфе приводятся результаты, относящиеся ко второму направлению теории случайных графов. Они касаются обобщения результатов работы [70], полученного теми же двумя авторами. Эти результаты получены общим комбинаторным методом, использующим высшие производящие, из которого следуют известные и новые результаты.

2.4.1. Общее определение случайного графа. Зададим множество $G = (|L|)$ всех неориентированных графов $|L|$ без петель, являющихся подграфами полного графа $|X| = (X, \bar{X}^2)$, где $X = \{x_1, \dots, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n\}$, $\bar{X}^2 = \{(x_i, x_j) : 1 \leq i \leq j \leq n\}$ и $|L| = (L, G_L)$, причем $L \subseteq X$ и $G_L \subseteq \bar{X}^2$. Только такие графы мы и будем далее рассматривать. На каждом графе $|L|$ как на элементарном событии определим вероятность $P(|L|)$, полагая $\sum_{|L| \in G} P(|L|) = 1$. Удобно следующее представление вероятности

$$P(|L|) = P(L, G_L) = P(L) \cdot P(G_L|L), \quad (2.4.1)$$

где $P(L)$ — безусловная вероятность, а $P(G_L|L)$ — условная.

В общем случае необходим учет безусловных вероятностей $P(L)$ для исследования полностью пробабализированного графа. Однако в дальнейшем мы ограничимся случаем, когда множество вершин L графа не пробабализировано, а детерминировано:

$$P(L) = \begin{cases} 1 & \text{при } L = X, \\ 0 & \text{при } L \neq X. \end{cases}$$

Другими словами, рассматривается случайный граф $\Gamma_n = (X, \Gamma_X)$ с детерминированным множеством вершин и пробабализированным множеством Γ_X ребер с множеством элементарных событий $G_n \subset G$, состоящего из всех графов $|X| = (X, G_X)$, $G_X \subseteq \bar{X}^2$.

Для дальнейшего изложения удобно представление множества $G_X = \tau_1$ компонентой τ_1 расположения $\rho = (\tau_0, \tau_1)$, однозначно ею определяемого. Соотношения (2.2.2) и (2.2.2') позволяют представить ρ в виде

$$\rho = (\tau_0, \tau_1) = \left\{ \begin{matrix} \alpha(i, j) \\ (i, j) \end{matrix} \right\}, (i, j) \in \sigma = ((1, 1), (1, 2), \dots, \\ \dots, (n-1, n)).$$

Причем

$$\alpha(i, j) = I_{G_X}((x_i, x_j)) = \begin{cases} 1 & \text{при } (x_i, x_j) \in G_X, \\ 0 & \text{при } (x_i, x_j) \notin G_X. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

В общем случае пробабилзация множества G_n задается распределением вероятностей $P=(p(\tau_1))$, $\tau_1 \in \sigma$,

$$\sum_{\tau_1 \in \sigma} p(\tau_1) = 1. \quad (2.4.3)$$

В частном пуассоновском случае вероятность $p(\tau_1) = p(G_X)$ задается соотношением

$$p(G_X) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} p_{ij}^{\alpha(i,j)} q_{ij}^{1-\alpha(i,j)}, \quad (2.4.4)$$

где $q_{ij} = 1 - p_{ij}$; p_{ij} — вероятность соединения вершин x_i и x_j ребром (x_i, x_j) , и такие соединения для различных вершин считаются независимыми. Граф Γ_n в этом случае обозначается Γ_{np} , где $\mathbf{p} = \|p_{ij}\|$ — симметричная матрица, составленная из вероятностей p_{ij} с нулевой диагональю.

Рассмотрим некоторые частные случаи графа Γ_{np} . Каждой его вершине x_i сопоставим множество $\mathcal{E}_{x_i} = \{(x_i, x_j)\}$ ребер (x_i, x_j) , соединяющих ее с другими вершинами $x_j \in X$. Эти ребра будем называть *инцидентными* вершине x_i .

Рассмотрим тот случай, когда все множества \mathcal{E}_{x_i} равночисленны:

$$N(\mathcal{E}_{x_i}) = k = \text{const} \quad (0 \leq k \leq n-1)$$

и

$$p_{ij} = \begin{cases} p = \text{const}, & \text{если } (x_i, x_j) \in \mathcal{E}_{x_i}, \\ 0, & \text{если } (x_i, x_j) \notin \mathcal{E}_{x_i}. \end{cases} \quad (2.4.5)$$

В этом случае граф Γ_{np} будем обозначать Γ_{nkp} . Если $k = n-1$, то соответствующий граф $\Gamma_{n(n-1)p}$ будем обозначать Γ_{np} . Частным случаем графа Γ_{nkp} является r -мерная целочисленная решетка, каждая вершина которой может быть соединена ребрами лишь со смежными вершинами (с евклидовым расстоянием до каждой из них, равным единице). Далее для однородности рассмотрений предполагается, что r -мерная решетка (r -решетка) расположена на r -мерном торе (конечна и не имеет границ).

И, наконец, в бернуллиевском случае, когда все $p_{ij} = p$ ($q = 1 - p$), соответствующем рассмотренному графу Γ_{np} ,

так как

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x(i, j) = l,$$

где $l = N(G_X)$ — число ребер, принадлежащих множеству G_X , соотношение (2.4.4) переходит в соотношение

$$p(G_X) = p^l q^{n(n-1)/2-l}. \quad (2.4.6)$$

Ограничимся далее рассмотрением бернуллиевского случая графа Γ_{np} .

Рассмотрим подмножество

$$\mathcal{G}_\sigma^l = \{X: N(G_X) = l = \text{const}\} \quad (l = 0, n(n-1)/2)$$

графов $|X|$, имеющих в точности l ребер. Ясно, что множества $\{\mathcal{G}_\sigma^l\} \quad (l = 0, n(n-1)/2)$ составляют разбиение множества G_n и поэтому для любого подмножества $G_n^* \subseteq G_n$ совокупность его подмножеств $\{G_n^{*l}\}$, где $G_n^{*l} = G_n^* \cap \mathcal{G}_\sigma^l \quad (l = 0, n(n-1)/2)$, являются разбиением множества G_n^* .

Обозначим числа элементов $N(G_n^*) = c_n^*$ и $N(G_n^{*l}) = c_{nl}^*$. Тогда с учетом соотношения (2.4.6) имеем

$$c_n^* = \sum_{l=0}^{n(n-1)/2} c_{nl}^* \quad \text{и}$$

$$p(G_n^*) = \sum_{l=0}^{n(n-1)/2} c_{nl}^* p^l q^{n(n-1)/2-l}.$$

В частности, если $G_n^* \subseteq G_{n \text{ св}}$ является подмножеством $G_{n \text{ св}}$ всех связных графов, имеющих n вершин, то, обозначив $p(G_n^*) = P_n^*(1)$, получим из предыдущего соотношения

$$P_n^*(1) = \sum_{l=n-1}^{n(n-1)/2} c_{nl}^* p^l q^{n(n-1)/2-l}, \quad (2.4.7)$$

где c_{nl}^* — числа соответствующих подмножеству G_n^* связных графов, имеющих n вершин и l ребер (при $l < n-1$ здесь $c_{nl}^* \equiv 0$). При $G_n^* = G_{n \text{ св}}$ для соответствующих чисел c_{nl}^* и вероятностей $P_n^*(1)$ принята запись c_{nl} и $P_n(1)$.

Заметим, что для несвязности графа $|X| \subseteq G_n$ необходимо и достаточно, чтобы он имел хотя бы один какой-

либо изолированный связный подграф. Отсюда следует известное рекуррентное соотношение Е. Гильберта [63]

$$P_n(1) = 1 - \sum_{s=1}^{n-1} C_{n-1}^s P_s(1) q^s (P_1(1) \equiv 1). \quad (2.4.8)$$

2.4.2. Основные точные выражения для вероятностей m -компонентности случайных графов Γ_{np} . Сформулируем основной результат, полученный авторами работы [70], обобщающий ее. Рассмотрим k подмножеств $G_n^* = \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_k \subseteq G_{n \text{ св}}$ множества связных графов $G_{n \text{ св}}$, которые не пересекаются между собой, но, вообще говоря, не составляют его разбиения. Будем называть их *классами связных графов*, а их совокупность обозначать $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_i)$. Например, класс деревьев (T), класс циклов (Z) и т. д. Мы скажем, что граф $|X| \in G_n$ *m -компонентен* ($\vec{m} = (m_i), i = \overline{1, k}$), если он допускает разбиение на

$m = \sum_{i=1}^k m_i$ подграфов (компонент), m_i из которых при-

надлежат классу связных графов \mathcal{F}_i и отсутствуют ребра, соединяющие вершины любых двух из них (подграфы изолированы). Если $k=1$, то граф называется *m_1 -компонентным*. Если при этом $m_1=1$, то граф называется *связным*.

Рассматривается вероятность $P_n^{\mathcal{F}}(\vec{m})$ \vec{m} -компонентности случайного графа Γ_{np} с компонентами из классов $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_i)$, а также вероятности

$$P_n^{\mathcal{F}}(m) = \sum_{\vec{m}, \vec{m} \in m} P_n^{\mathcal{F}}(\vec{m}) \quad \text{и} \quad P_n^{\mathcal{F}} = \sum_{m=1}^n P_n^{\mathcal{F}}(m).$$

Исходными для вычисления этих вероятностей являются выражения, полученные для их производящих,

$$\begin{aligned} Q_m^{\mathcal{F}}(v) &= \sum_{n=m}^{\infty} P_n^{\mathcal{F}}(m) q^{-n(n-1)/2} v^n / n! = \\ &= \frac{1}{m!} [Q_1^{\mathcal{F}}(v)]^m, \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

$$Q^{\mathcal{F}}(v) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{\mathcal{F}} q^{-n(n-1)/2} v^n / n! = \exp Q_1^{\mathcal{F}}(v),$$

где

$$Q_1^{\mathcal{F}}(v) = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k P_t^{\mathcal{F}_i}(1) q^{-t(t-1)/2} v^t / t! =$$

$$= \sum_{i=1}^k \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{l=t-1}^{t(t-1)/2} C_{il}^{\mathcal{F}_i} (p/q)^l v^t / t! \quad (2.4.10)$$

и $C_{il}^{\mathcal{F}_i}$ — число графов класса \mathcal{F}_i имеющих в точности t вершин и l ребер. Особо важна аддитивность последних выражений по классам \mathcal{F}_i .

Из соотношений (2.4.9) имеем

$$P_n^{\mathcal{F}}(m) = \frac{n!}{m!} q^{n(n-1)/2} \frac{1}{2\pi i} \oint \{ [Q_1^{\mathcal{F}}(v)]^m / v^{n+1} \} dv, \quad (2.4.11a)$$

$$P_n^{\mathcal{F}} = n! q^{n(n-1)/2} \frac{1}{2\pi i} \oint \{ [\exp Q_1^{\mathcal{F}}(v)] / v^{n+1} \} dv, \quad (2.4.11b)$$

и окончательное решение зависит от возможности суммирования последнего выражения в соотношении (2.4.10) и взятия контурных интегралов соотношений (2.4.11). Преодолению указанных аналитических трудностей для конкретных классов \mathcal{F}_i и посвящено дальнейшее изложение этого параграфа.

2.4.3. Комбинаторные выражения для вероятностей \vec{m} -компонентности. Рассмотрим случай \vec{m} -компонентности, когда рассматривается один класс связности \mathcal{F}_1 ($k=1$). В этом случае положим $m_1=m$, будем говорить о m -компонентности и обозначать вероятность случайного графа Γ_{np} через $P_n^*(m)$, если $\mathcal{F}_1 \subset G_{n \text{ с в}}$ и $P_n(m)$, если $\mathcal{F}_1 = G_{n \text{ с в}}$.

Пусть m компонент графа, содержащего n вершин, имеют по v_r вершин каждая $\left(\sum_{r=1}^m v_r = n \right)$. Вычислим вероятность $Q(\vec{v})$ их изолированности ($\vec{v} = (v_i)$). Для случайного графа Γ_{np} эта вероятность имеет вид

$$Q(\vec{v}) = q^{\sum_{1 \leq r < r' \leq m} v_r v_{r'}}.$$

Используя арифметическое тождество

$$\sum_{1 \leq r < r' \leq m} v_r v_{r'} \equiv n(n-1)/2 - \sum_{r=1}^m v_r(v_r-1), \quad (2.4.12)$$

будем иметь окончательно

$$Q(\vec{v}) = q^{n(n-1)/2 - \sum_{r=1}^m v_r(v_r-1)} \quad (2.4.13)$$

Вероятность $P_n(m)$ m -компонентности случайного графа Γ_{np} , т. е. его разбиение на m изолированных связных компонент, при $N(\vec{v})$ таких разбиений имеет вид

$$P_n(m) = \sum_{\substack{\vec{v}, \vec{v} \in n \\ \vec{v} \in n}} N(\vec{v}) Q(\vec{v}) \prod_{r=1}^m P_{v_r}(1). \quad (2.4.14)$$

Перейдем от векторов $\vec{v} = (v_r)$, состоящих из положительных целых чисел v_r , удовлетворяющих условию $\vec{v} \in n$, к векторам $\vec{k} = (k_t)$, состоящим из неотрицательных целых чисел k_t , удовлетворяющих условиям (2.2.25), отчего выражение под знаком суммы в соотношении (2.4.14) не изменится. При этом согласно соотношению (2.2.26)

$$N(\vec{v}) = N_{nm}(\vec{k}) = n! \prod_{t=1}^n (t!)^{k_t} k_t! \quad (2.4.15)$$

Подставив выражения (2.4.13) и (2.4.15) в соотношение (2.4.14) и переходя от векторов \vec{v} к векторам \vec{k} , окончательно получим

$$P_n(m) = \sum_{\substack{\vec{k} \\ (2.2.26)}} \prod_{t=1}^n [P_t(1) q^{-t(t-1)/2} / t!]^{k_t} n! q^{n(n-1)/2} \quad (2.4.16)$$

Аналогичное выражение получим и для вероятности $P_n^*(m)$, если в соотношении (2.4.16) заменить $P_t(1)$ на $P_t^*(1)$.

Перейдем теперь к отысканию комбинаторных выражений для вероятностей m -компонентности графа Γ_{np} . Начнем с определения вероятности $P_{\vec{n}}^{\mathcal{F}}(m)$ m -компонентности при фиксированном векторе $\vec{n} = (n_i)$ ($i = \overline{1, k}$) из чисел n_i вершин компонент, принадлежащих классу \mathcal{F}_i ($n \in n$). Если зафиксировать конкретные вер-

шины компонент \vec{m} -компонентного графа, то вероятность их появления для случайного графа Γ_{np} имеет вид

$$\prod_{i=1}^k P_{n_i}^{\mathcal{F}_i}(m_i) Q(\vec{n}),$$

где

$$Q(\vec{n}) = q^{n(n-1)/2 - \sum_{i=1}^k n_i(n_i-1)/2}.$$

При фиксации вектора $\vec{n} = (n_i)$ для всевозможных компонент с различными вершинами эта вероятность остается неизменной. Поэтому искомая вероятность имеет вид

$$P_{\vec{n}}^{\mathcal{F}}(\vec{m}) = C_{\vec{n}}^{\vec{m}} \prod_{i=1}^k P_{n_i}^{\mathcal{F}_i}(m_i) Q(\vec{n}). \quad (2.4.17)$$

Если не фиксировать конкретный вектор $\vec{n} = (n_i)$, а интересоваться \vec{m} -компонентностью графа Γ_{np} лишь при фиксации числа его вершин n , то соответствующая вероятность такого графа имеет вид

$$\begin{aligned} P_n^{\mathcal{F}}(\vec{m}) &= \sum_{\vec{n}, \vec{n} \in n} P_{\vec{n}}^{\mathcal{F}}(\vec{m}) = \\ &= \sum_{\vec{n}, \vec{n} \in n} C_{\vec{n}}^{\vec{m}} \prod_{i=1}^k P_{n_i}^{\mathcal{F}_i}(m_i) Q(\vec{n}). \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

Рассмотрим вероятность $P_n^{\mathcal{F}}(\vec{m})$ \vec{m} -компонентности графа Γ_{np} при условии, что m_i его компонент принадлежат классу \mathcal{F}_i ($i = \overline{1, k}$), $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_i)$ и $\sum_{i=1}^k m_i = m$. Ясно,

что

$$\begin{aligned} P_n^{\mathcal{F}}(\vec{m}) &= \sum_{\vec{m}, \vec{m} \in m} P_{\vec{m}}^{\mathcal{F}}(\vec{m}) = \sum_{\vec{m}, \vec{m} \in m} \sum_{\vec{n}, \vec{n} \in n} C_{\vec{n}}^{\vec{m}} \times \\ &\times \prod_{i=1}^k P_{n_i}^{\mathcal{F}_i}(m_i) Q(\vec{n}). \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

Наконец, рассмотрим вероятность $P_n^{\mathcal{F}}$ того, что случайный граф Γ_{np} имеет компоненты в любом числе m

$(m=\overline{1, n})$, но обязательно из классов $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_i, \dots, \mathcal{F}_k)$. (Без такого условия эта вероятность равнялась бы единице.) Ясно, что

$$P_n^{\mathcal{F}} = \sum_{m=1}^n P_n^{\mathcal{F}}(m) = \sum_{m=1}^n \sum_{\substack{\vec{m}, \vec{e} \\ m, e=m}} \sum_{\substack{\vec{n}, \vec{e} \\ n, e=n}} C_n^{\vec{n}} \prod_{i=1}^k P_{n_i}^{\mathcal{F}_i}(m_i) Q(\vec{n}). \quad (2.4.20)$$

Таким образом, вычисление вероятностей $P_n^{\mathcal{F}}(\vec{m})$, $P_n^{\mathcal{F}}(m)$ и $P_n^{\mathcal{F}}$ свелось к вычислению вероятностей $P_{n_i}^{\mathcal{F}_i}(m_i)$.

Последние являются частными случаями вероятности $P_n^*(m)$, определяемой по вероятностям $P_t^*(1)$ с помощью соотношения (2.4.16), если положить $n=n_i$, $m=m_i$ и $G_n^*=\mathcal{F}_i$ ($i=\overline{1, k}$). Вероятности $P_t^*(1)$ определяются по числам c_{nl}^* связных графов с n вершинами и l ребрами по формуле (2.4.7). Таким образом, окончательно все величины в принципе могут быть определены, если известны числа $c_{nl}^* = c_{nl}^{\mathcal{F}_i}$ для классов связности \mathcal{F}_i ($i=\overline{1, k}$). Очевидно, что практически провести такие вычисления невозможно. Поэтому соотношения этого пункта необходимы лишь как промежуточные для перехода к производящим функциям, с помощью которых можно перейти к эффективным расчетам указанных вероятностей.

2.4.4. Основные производящие функции. Начнем с вычисления производящих функций для вероятностей $P_n(\mathbf{m})$, используя производящую $g_m(\vec{u}, v)$ (см. соотношения (2.2.27) и (2.2.28)).

Введем производящую

$$Q_m(v) = \sum_{n=m}^{\infty} P_n(m) q^{-n(n-1)/2} v^n / n! \quad (2.4.21)$$

Тогда, используя для $P_n(m)$ выражение (2.4.16) и подставляя в $g_m(\vec{u}, v)$ значения $u_t = P_t(1) q^{-t(t-1)/2}$, получаем

$$Q_m(v) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{n=m}^{\infty} P_n(m) q^{-n(n-1)/2} v^n/n! = \frac{1}{m!} Q^m(v), \quad (2.4.22)$$

где

$$Q_1(v) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{t=1}^{\infty} P_t(1) q^{-t(t-1)/2} v^t/t! \quad (2.4.23)$$

С учетом соотношения (2.4.7)

$$Q_1(v) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t!} \sum_{i=t-1}^{t(t-1)/2} c_{ti} (p/q)^i v^t. \quad (2.4.24)$$

Вторая производящая $Q(u, v)$ вероятностей $P_n(m)$ с учетом соотношения (2.4.22) имеет вид

$$\begin{aligned} Q(u, v) &\stackrel{\Delta}{=} \sum_{m=0}^{\infty} Q_m(v) u^m = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} P_n(m) q^{-n(n-1)/2} v^n u^m/n! = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^n P_n(m) u^m \right) q^{-n(n-1)/2} v^n/n! = \exp u Q_1(v). \quad (2.4.24') \end{aligned}$$

Теперь перейдем к вычислению производящих вероятностей $P_n^{\mathcal{F}_i}(m)$, определяемых соотношением (2.4.18). Используя соотношение (2.4.22), получаем

$$\begin{aligned} Q_{m_i}^{\mathcal{F}_i}(v_i) &\stackrel{\Delta}{=} \sum_{n_i} P_{n_i}^{\mathcal{F}_i}(m_i) q^{-n_i(n_i-1)/2} v_i^{n_i}/n_i! = \\ &= [Q_1^{\mathcal{F}_i}(v_i)]^{m_i}/m_i! \quad (2.4.25) \end{aligned}$$

Беря произведение соотношений (2.4.25), получаем

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k Q_{m_i}^{\mathcal{F}_i}(v_i) &= \sum_{n_1, \dots, n_k} \prod_{i=1}^k P_{n_i}^{\mathcal{F}_i}(m_i) \times \\ &\times q^{-\sum_{i=1}^k n_i(n_i-1)/2} \prod_{i=1}^k v_i^{n_i}/n_i! = \\ &= \prod_{i=1}^k [Q_1^{\mathcal{F}_i}(v_i)]^{m_i}/m_i! \quad (2.4.26) \end{aligned}$$

Учитывая обозначение (2.4.12) и соотношение (2.4.13), а также полагая $v_i = v = \text{const}$ и фиксируя сумму $\sum_{i=1}^k n_i = n$, из соотношения (2.4.26) получаем

$$\prod_{i=1}^k Q_{m_i}^{\mathcal{F}_i}(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{\substack{\vec{n} \\ n, \vec{n} e=n}} C_n^{\vec{n}} \prod_{i=1}^k P_{n_i}^{\mathcal{F}_i}(\vec{m}_i) \times \right. \\ \left. \times Q(\vec{n}) \right] b^{-n(n-1)/2} v^n / n! = \prod_{i=1}^k [Q_1^{\mathcal{F}_i}(v)]^{m_i} / m_i!$$

Отсюда с учетом соотношения (2.4.18) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{\mathcal{F}}(\vec{m}) q^{-n(n-1)/2} v^n / n! = \prod_{i=1}^k [Q_1^{\mathcal{F}_i}(v)]^{m_i} / m_i! \quad (2.4.27)$$

Введем производящую

$$Q_{nm}^{\mathcal{F}}(\vec{u}) = \sum_{\substack{\vec{m}, \vec{m} \\ e=m}} P_n^{\mathcal{F}}(\vec{m}) \vec{u}^{\vec{m}}, \quad (2.4.28)$$

где $\vec{u} = (u_i)$ и $\vec{m} = (m_i)$.

Умножая обе части соотношения (2.4.27) на $\vec{u}^{\vec{m}}$ и суммируя их по \vec{m} с условием $\vec{m} e = m$, получаем основное выражение для второй производящей

$$Q_m^{\mathcal{F}}(\vec{u}, v) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{nm}^{\mathcal{F}}(\vec{u}) q^{-n(n-1)/2} v^n / n! = \\ = \frac{1}{m!} \left[\sum_{i=1}^k Q_1^{\mathcal{F}_i}(v) u_i \right]^m. \quad (2.4.29)$$

Умножая обе части соотношения (2.4.29) на u^m и суммируя по m , получаем третью производящую функцию

$$Q^{\mathcal{F}}(\vec{u}, u, v) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m^{\mathcal{F}}(\vec{u}, v) u^m = \exp u \sum_{i=1}^k Q_1^{\mathcal{F}_i}(v) u_i. \quad (2.4.30)$$

Заметим, что производящая $Q_{nm}^{\mathcal{F}}(\vec{u})$ согласно соотношению (2.4.28) при $\vec{u} = \underbrace{(1, \dots, 1)}_k$ имеет вид

$$Q_{nn}^{\mathcal{F}}(\underbrace{(1, \dots, 1)}_k) = P_n^{\mathcal{F}}(m). \quad (2.4.31)$$

Поэтому, положив в производящей $Q_m^{\mathcal{F}}(\vec{u}, v)$, $\vec{u} = \underbrace{(1, \dots, 1)}_k$,

имеем согласно соотношениям (2.4.29) и (2.4.31)

$$\begin{aligned} Q_m^{\mathcal{F}}(v) &\stackrel{\Delta}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{\mathcal{F}}(m) q^{-n(n-1)/2} v^n / n! = \\ &= \left[\sum_{i=1}^k Q_1^{\mathcal{F}i}(v) \right]^m / m! \end{aligned} \quad (2.4.32)$$

Положив в производящей $Q^{\mathcal{F}}(\vec{u}, u, v)$, $\vec{u} = \underbrace{(1, \dots, 1)}_k$ и

$u=1$, согласно соотношениям (2.4.30) и (2.4.31) имеем

$$Q^{\mathcal{F}}(v) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{\mathcal{F}} q^{-n(n-1)/2} v^n / n! = \exp \sum_{i=1}^k Q_1^{\mathcal{F}i}(v). \quad (2.4.33)$$

Полученные в этом пункте основные производящие зависят от функций $Q_1(v)$ и $Q_1^{\mathcal{F}i}(v)$. В следующем пункте мы рассмотрим их конкретные выражения.

2.4.5. Явные выражения производящих. До сих пор мы имели неявные соотношения для производящих, выражающие их через вероятности $P_i(1)$ или числа c_{ii} . Найдем их явные выражения. Прежде всего, полагая в (2.4.24') $u=1$ с учетом того, что при $G^*_n = G_n$

$$\sum_{m=0}^n P_n(m) = 1,$$

потенцируя обе его части, получаем

$$Q_1(v) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n q^{-n(n-1)/2} v^n / n! = \ln \left(1 + \sum_{t=1}^{\infty} q^{-t(t-1)/2} v^t / t! \right). \quad (2.4.34)$$

Отсюда, используя формулу (2.4.22), имеем

$$\begin{aligned} Q_m(v) &= \sum_{n=m}^{\infty} P_n(m) q^{-n(n-1)/2} v^n / n! = \\ &= \left[\ln \left(1 + \sum_{t=1}^{\infty} q^{-t(t-1)/2} v^t / t! \right) \right]^m / m!. \end{aligned} \quad (2.4.35)$$

Заметим, что суммирование обеих частей соотношения (2.4.35) по m от 0 до ∞ приводит к тождеству.

Далее, полагая в соотношении (2.4.34) $q=1/(1+w)$ и используя представление (2.4.24), получаем вторую производящую чисел c_{nl} , впервые найденную Е. Гильбертом [71],

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=n-1}^{n(n-1)/2} c_{nl} w^l v^n / n! = \ln \left[1 + \sum_{t=1}^{\infty} (1+w)^t (t-1)/2 v^t / t! \right]. \quad (2.4.36)$$

Далее явные выражения получаем, рассматривая конкретные множества $G_n^* \subset G_n$ деревьев G_n^T , циклов G_n^Z и других множеств G_n^* , а также вычисляя для них соответствующие числа c_{nl}^* с последующим использованием их в соотношении (2.4.24) для вычисления производящей $Q_1(v)$. Известные нам из литературы явные выражения для чисел c_{tl}^* таковы.

Согласно формуле Кэли [72] для деревьев $c_{tl}^T=0$ при $l \neq t-1$

$$c_{t, t-1}^T = t^{t-2}. \quad (2.4.37)$$

Согласно известной, легко получаемой формуле для циклов $c_{tl}^Z=0$ при $t=l=1, 2$ и $l \neq t$ и

$$c_{tt}^Z = (t-1)!/2. \quad (2.4.38)$$

Согласно формуле А. Реньи [73] для класса связанных графов с одинаковым числом вершин и ребер, обозначаемого H ($Z \subset H$),

$$c_{tl}^H = 0 \text{ при } t=l=1, 2 \text{ и } l \neq t,$$

$$c_{tt}^H = t^{t-1} \sum_{k=3}^t \prod_{h=1}^{k-1} (1-h/t)/2. \quad (2.4.39)$$

В работе Г. Н. Богачева [74] приводится явное выражение для числа связанных графов с числом ребер, на единицу больше, чем число вершин. Однако оно слишком громоздко. И хотя с помощью нашего метода удается получить явные выражения для искомых вероятностей, их мы здесь из-за громоздкости приводить не будем.

Для суммирования приведенных выше чисел основное значение имеет функция $\theta(x)$, определяемая рядом

$$\theta(x) = \sum_{t=1}^{\infty} t^{t-1} x^t / t! \quad (2.4.40)$$

Эта функция является обратной функции $x = z e^{-z}$ и определена для $|x| \leq e^{-1}$ [75]. Легко проверить, что

$$\sum_{t=1}^{\infty} t^{t-2} x^t / t! = \theta(x) - \theta^2(x)/2, \quad (2.4.41)$$

что следует из рекуррентного выражения [76]

$$\theta^k(x) = \frac{k}{k-1} \theta^{k-1}(x) - k \int_0^x \frac{\theta^{k-1}(t)}{t} dt. \quad (2.4.42)$$

Кроме того, известно [76], что

$$\theta^k(x) = \sum_{t=1}^{\infty} A_{tk} x^t / t! \quad (2.4.43)$$

где

$$A_{tk} = kt^{t-1} \prod_{h=1}^{k-1} (1 - h/t). \quad (2.4.44)$$

Заметим, что поскольку из соотношения (2.4.39) следует, что

$$c_{tt}^H = \frac{1}{2} \sum_{k=3}^t A_{tk} / k,$$

имеем

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{\infty} c_{tt}^H w^t / t! &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t!} \sum_{k=3}^t A_{tk} w^t / k = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{t=1}^{\infty} A_{tk} w^t / t! = \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\theta^k(w)}{k} = \\ &= \frac{1}{2} \left[-\ln(1 - \theta(w)) - \theta(w) - \frac{1}{2} \theta^2(w) \right]. \quad (2.4.45) \end{aligned}$$

Далее, используя соотношение (2.4.37) и (2.4.41), получаем

$$\sum_{t=1}^{\infty} c_{t,t-1}^T \omega^t/t! = \sum_{t=1}^{\infty} t^{t-2} \omega^t/t! = \theta(\omega) - \theta^2(\omega)/2. \quad (2.4.46)$$

И, наконец, используя соотношение (2.4.38), получаем

$$\sum_{t=1}^{\infty} c_{tt}^Z \omega^t/t! = \frac{1}{2} \sum_{t=3}^{\infty} \omega^t/t = 1/2 [-\ln(1-\omega) - \omega - \omega^2/2]. \quad (2.4.47)$$

Используя соотношение (2.4.24) и явные выражения сумм (2.4.45) — (2.4.47), получаем

$$Q_1^T(v) = \left[\theta\left(\frac{pv}{q}\right) - \frac{1}{2} \theta^2\left(\frac{pv}{q}\right) \right] / \frac{p}{q}; \quad (2.4.48)$$

$$Q_1^Z(v) = \left[-\ln\left(1 - \frac{pv}{q}\right) - \frac{pv}{q} - \frac{1}{2} \left(\frac{pv}{q}\right)^2 \right] / 2; \quad (2.4.49)$$

$$Q_1^H(v) = Q_1^Z \left[\theta\left(\frac{pv}{q}\right) / \frac{pv}{q} \right]. \quad (2.4.50)$$

Кроме того, в силу того, что $Z \subset H$, для класса $\Pi = H \setminus Z$ имеем $c_{tt}^{\Pi} = c_{tt}^H - c_{tt}^Z$, и как следствие этого

$$Q_1^{\Pi}(v) = Q_1^H(v) - Q_1^Z(v) = Q_1^Z \left[\theta\left(\frac{pv}{q}\right) / \frac{pv}{q} \right] - Q_1^Z(v). \quad (2.4.51)$$

И наконец, для класса всех связных графов $G_{n,св}$ согласно соотношению (2.4.34) имеем явное выражение

$$Q_1(v) = \ln \left(1 + \sum_{t=1}^{\infty} q^{-t(t-1)/2} v^t/t! \right).$$

Все пять явных выражений для производящих $Q_1^*(v)$ и $Q_1(v)$ приводят к явным выражениям для производящих $Q_m^*(v)$, $Q^*(v)$ и $Q_m(v)$ согласно соотношениям (2.4.32), (2.4.33) и (2.4.35). Более того, три производящих $Q_1^T(v)$, $Q_1^Z(v)$ и $Q_1^{\Pi}(v)$ относятся к непересекающимся классам связности T , Z , $\Pi \subset G_{n,св}$ и поэтому могут быть использованы в силу аддитивности вхождения этих производящих в выражения производящих $Q_m^{\mathcal{F}}(m)$ и $Q^{\mathcal{F}}$ (см. (2.4.32) и (2.4.33)) для сочетаний $\mathcal{F} = (T, Z)$, (T, Π) и (Z, Π) .

2.4.6. Асимптотически точные оценки вероятностей

$P_n^{\mathcal{F}}$. Используя неравенства Бонферони и рекуррентное соотношение (2.4.8), можно получить асимптотически точную при $p = \text{const}$ и $n \rightarrow \infty$ оценку вероятностей $P_n(1)$ [63]

$$P_n(1) = 1 - nq^{n-1} + O(n^2q^{3n/2}). \quad (2.4.52)$$

Из этой оценки следует, что при фиксированном значении $p = \text{const}$ все вероятности m -компонентности случайного графа при $m = \sum_{i=1}^k m_i > 1$ стремятся к нулю.

Поэтому в дальнейшем мы рассмотрим случай, когда с ростом $n \rightarrow \infty$ $p = p(n) \rightarrow 1$ ($q = q(n) \rightarrow 0$). Из-за громоздкости выражений для $P_n^{\mathcal{F}}(m)$ приведем лишь асимптотически точные выражения для вероятностей $P_n^{\mathcal{F}}$. Все дальнейшие оценки касаются случая $n \rightarrow \infty$, когда

$$np/q = c = \text{const}. \quad (2.4.53)$$

Можно показать [70], что

$$P_n^{\mathcal{F}} \sim \begin{cases} \sqrt{1-c} e^{c/2+c^2/4} & \text{при } 0 \leq c < 1, \\ 0 & \text{при } c = 1. \end{cases} \quad (2.4.54)$$

Соответствующий график изображен на рис. 2.1. Формула (2.4.54) выводится следующим образом. Соотношение для $Q^{\mathcal{F}}(v)$ (2.4.48) подставляется в экспоненту контурного интеграла (2.4.116) с контуром интегрирования $|pv/q| = r \leq e^{-1}$. Далее делается подстановка $pv/q = ze^{-z}$ и используется соотношение $\theta(ze^{-z}) = z$. Это приводит к необходимости оценки интеграла

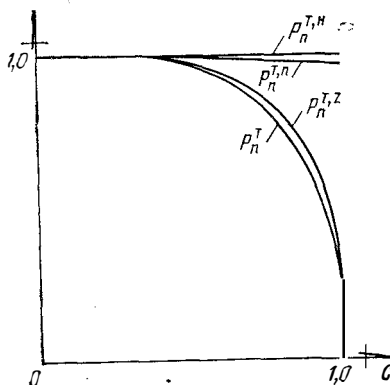


Рис. 2.1

$$I_T = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r \leq 1} \frac{1-z}{z} \exp \left\{ n \left[z - \ln z + \right. \right.$$

$$+ \frac{q}{pn} z \left(1 - \frac{z}{2}\right) \Big] dz$$

при $np/q=c=\text{const}$. Положим $F(z)=(1-z)/z$, $f(z)=z-\ln z+(q/pn)(z-1/2z^2)$. Уравнение для определения точки перевала $f'(z)=0$ имеет вид

$$qz^2-(pn+q)z+np=0$$

и дает две такие точки: $z_1=np/q$ и $z_2=1$. Проведем контур интегрирования через точку $z_1=np/q$ при $np<1$. Тогда имеем [77, 78] при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} I_T &\sim \frac{1}{2\pi i} \frac{2\pi i}{n} F(z_1) e^{nf(z_1)} |f''(z_1)|^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sqrt{1 - \frac{pn}{q}} e^n n^{-n} \left(\frac{p}{q}\right)^{-n} e^{pn^2/2q}. \end{aligned} \quad (2.4.55)$$

Если $z_1=np/q>1$, то контур интегрирования проводим через точку $z_2=1$ и получим при $n \rightarrow \infty$

$$I_T \sim \frac{e^n}{n^2 \sqrt{2\pi n}} \frac{q}{p} \frac{e^{q/2p}}{(1-q/pn)^2 \sqrt{1-q/pn}}. \quad (2.4.56)$$

Подставив значения контурных интегралов (2.4.55) и (2.4.56) в соотношение (2.4.116) и используя формулу Стирлинга в простейшей асимптотической форме $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$, получим окончательное асимптотическое соотношение (2.4.54). Это соотношение позволяет также дать асимптотическую оценку для вероятности P_{nz} того, что случайный граф Γ_{np} содержит хотя бы одну циклическую компоненту

$$P_{nz} = 1 - P_n^T, \quad (2.4.57)$$

поскольку указанное событие является противоположным событию, состоящему в том, что все компоненты случайного графа Γ_{np} являются деревьями.

Используя аналогичную технику асимптотических оценок контурных интегралов методом перевала, можно получить следующие асимптотические выражения:

$$P_n^Z \sim \exp[-n(c/2 + \ln(\epsilon/c))] \rightarrow 0, \quad (c \geq 0); \quad (2.4.58)$$

$$P_n^{r,z} \sim \begin{cases} \sqrt{\frac{1-c}{1-ce^{-c}}} \exp\left[\frac{1}{2}\left(c + \frac{c^2}{2} - ce^{-c} - \frac{1}{2}c^2e^{-2c}\right)\right] & \text{при } 0 \leq c < 1, \\ 0 & \text{при } c \geq 1; \end{cases} \quad (2.4.59)$$

$$P_n^{T, H} \sim \sqrt{1 - ce^{-c}} \exp \left[\frac{1}{2} \left(ce^{-c} + \frac{1}{2} c^2 e^{-2c} \right) \right] \quad (0 \leq c < 1); \quad (2.4.60)$$

$$P_n^{T, H} \sim \exp [c^2/n + O(1/n^2)] \rightarrow 1 \quad (0 \leq c < 1). \quad (2.4.61)$$

Заметим, что согласно результатам работы [79, с. 55] число n_z простых циклов (не содержащих подциклов) в m -компонентном графе с n вершинами и l ребрами имеет вид $n_z = l - n + m$. Поэтому в связном графе, имеющем равное число вершин и ребер (класс Π), число циклов в точности равно одному ($n_z \equiv 1$). Отсюда и из соотношения (2.4.61) следует, что при $np/q = c$ ($0 \leq c < 1$) все компоненты случайного графа Γ_{np} с вероятностью, стремящейся к единице при $n \rightarrow \infty$, являются либо деревьями, либо компонентами, содержащими ровно один цикл.

Сопоставляя соотношения (2.4.54), (2.4.58) — (2.4.61), убеждаемся, что асимптотически при $n \rightarrow \infty$ ($np/q = c$, $0 \leq c < 1$)

$$P_n^{T, H} P_n^{T, Z} \sim P_n^T \quad (2.4.62)$$

и, как и следовало ожидать,

$$P_n^{T, H} > P_n^{T, \Pi} > P_n^{T, Z} > P_n^T > P_n^Z \quad (2.4.63)$$

для всех значений c при $0 \leq c < 1$ (см. рис. 2.1).

Интересно сопоставить эти результаты с результатами работы [62], полученными для другой модели случайного графа Γ_{nl} , упоминавшейся ранее. Из интуитивных соображений авторы этой работы утверждают об асимптотической эквивалентности случайных графов Γ_{np} и Γ_{nl} при $l = nc/2$ и $np/q = c$.

И действительно, в этом случае асимптотические формулы (2.4.54) и (2.4.61) для случайного графа Γ_{np} и Γ_{nl} в работе [62] совпадают. Однако, так как для графа Γ_{nl} не известны асимптотические выражения для $P_n^{T, Z}$ и $P_n^{T, \Pi}$, то сопоставлять их с асимптотическими выражениями (2.4.59) и (2.4.60) для случайного графа Γ_{np} невозможно.

2.5. ДИСКРЕТНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Дискретная оптимизация, т. е. поиск экстремумов функции n дискретных переменных, принципиально

отличается от непрерывного случая, даже если функция непрерывна. В самом деле если для соответствующих непрерывных переменных традиционными методами найден экстремум и он не «падает» в дискретное значение аргументов, то для поиска соответствующих дискретных экстремумов необходим перебор 2^n вершин соответствующего n -мерного куба. Связанные с ним так называемые экспоненциальные трудности повсеместно выступают в различных алгоритмах дискретной оптимизации, как только встает вопрос не о доказательстве их существования или конструктивного описания, а об их осуществимости [4]. В этой главе мы не будем касаться проблемы преодоления экспоненциальных трудностей [80—84], связанных с важнейшей для всей системологии проблемой осуществимости [4], о которой мы упоминали в предыдущей главе, потому что эта проблема еще недостаточно формализована. Кроме того, для приводимых в гл. 3 приложений, в основном экологических, она не так актуальна, как для технических приложений (наличие оптимальных биологических систем в отличие от проектируемых технических не требует доказательства их осуществимости).

Однако одно лишь доказательство существования алгоритмов дискретной оптимизации и оценка параметров их потенциальной эффективности имеет чрезвычайно большое значение, так как избавляет от попыток решения задач типа перпетуум-мобиле. Более того, конструктивные решения здесь иногда оказываются осуществимыми. Далее рассматриваются некоторые алгоритмы дискретной оптимизации и развивается комбинаторный аппарат оценок их эффективности. При этом мы вовсе не касаемся вычислительных методов математического программирования, имеющего совсем другие общие вычислительные цели, связанные с использованием ЭВМ. В силу тех же экспоненциальных трудностей никакой прогресс ЭВМ не может заменить аналитического решения рассматриваемых далее задач.

2.5.1. Максимальная лемма и h -функция. Производящие функции являются основным инструментом исследований этой главы. Однако их использование для получения соответствующих чисел или вероятностей является сложной задачей, например интегральные асимптотически точные оценки предыдущего параграфа. Вместе с тем часто оказываются достаточными верхние

оценки чисел, вероятностей или их сумм. Такие оценки можно проводить гораздо проще с помощью тех же производящих, и иногда они оказываются асимптотически точными.

Рассмотрим два произвольных множества $R = \{r\}$ и $V = \{v\}$, из которых первое конечно. Зададим на элементах r и v две действительные функции: неотрицательную $A(r)$ и положительную $B(r, v)$. Определим функцию

$$g(u) = \sum_{r \in R} A(r) B(r, v), \quad (2.5.1)$$

которую будем называть *производящей* функции $A(r)$. Рассмотрим подмножество $\mathcal{E} \subseteq R$ и сумму

$$A(\mathcal{E}) \triangleq \sum_{r \in \mathcal{E}} A(r).$$

Верхнюю оценку суммы $A(\mathcal{E})$ дает следующая «максиминная»

Лемма 1.

$$A(\mathcal{E}) \leq \max_{r \in \mathcal{E}} \min_{v \in V} [g(v)/B(r, v)], \quad (2.5.2)$$

где в случае отсутствия \min берется соответствующий \inf .

Доказательство. Зафиксируем произвольное значение $v \in V$. Тогда из соотношения (2.5.1) имеем

$$\begin{aligned} g(v) &= \sum_{r \in R} A(r) B(r, v) \geq \sum_{r \in \mathcal{E}} A(r) B(r, v) \geq \\ &\geq \min_{r \in \mathcal{E}} B(r, v) A(\mathcal{E}), \end{aligned}$$

отсюда

$$A(\mathcal{E}) \leq g(v) / \min_{r \in \mathcal{E}} B(r, v) = \max_{r \in \mathcal{E}} [g(v) / B(r, v)].$$

Полученное неравенство выполняется для любого $v \in V$, и в частности для $v = v_0 \in V$, при котором дробь под знаком \max в предыдущем неравенстве обращается в минимум. Таким образом, неравенство (2.5.2) доказано.

Если множество R счетно или континуально, то оценка (2.5.2) остается в силе при замене суммы соответствующим рядом или интегралом. При этом необходимо оговаривать их сходимость и при отсутствии $\max \min$ брать соответствующий $\sup \inf$. Рассмотрим конкретный

вид множества R и V . Пусть задано конечное множество $S = \{s\}$, элементы которого будем называть индексами. Определим на элементах $s \in S$ две действительные функции $N(s)$ и $u(s)$, неотрицательную и положительную соответственно. Обозначим значения этих функций $N_s = N(s)$ и $u_s = u(s)$, а их наборы обозначим соответствующими жирными буквами $\mathbf{N} = (N_s)$ и $\mathbf{u} = (u_s)$. Пусть задано некоторое фиксированное неотрицательное число N и выполняется условие $\sum_{s \in S} N_s = N$.

Функцию $u(s)$ будем называть *вероятностной*, если $\sum_{s \in S} u_s = 1$. Ясно, что функция $v(s) = N(s)/N$, принимающая значения $v_s = N_s/N$, является вероятностной. Набор ее значений будем обозначать $\mathbf{v} = (v_s)$. Множества всех определенных выше функций $N(s)$, $v(s)$ и $u(s)$ будем обозначать $\tilde{\mathfrak{R}}_N$, $\tilde{\mathfrak{R}}$ и $\tilde{\mathfrak{W}}$ соответственно.

Определим элементы r , ρ и v как наборы T функций $N(s)$, $v(s)$, $u(s)$ соответственно:

$$r = \{N_t(s)\}, \quad \rho = \{v_t(s)\} \quad \text{и} \quad v = \{u_t(s)\}, \quad (2.5.3)$$

где $N_t(s) \in \tilde{\mathfrak{R}}_N$; $v_t(s) \in \tilde{\mathfrak{R}}$ и $u_t(s) \in \tilde{\mathfrak{W}}$ ($t = \overline{1, T}$).

Множества определенных выше наборов r , ρ и v будем обозначать $\tilde{\mathfrak{R}}_N^T = R$, $\tilde{\mathfrak{R}}^T$ и $\tilde{\mathfrak{W}}^T = V$ соответственно. Используя символическую запись

$$\mathbf{u}^N = \prod_{s \in S} \mathbf{u}_s^{N_s},$$

определим функцию $B(r, v)$ в следующем конкретном виде:

$$B(r, v) = \prod_{t=1}^T \mathbf{u}_t^{N_t} = \prod_{t=1}^T \prod_{s \in S} u_{ts}^{N_{ts}}, \quad (2.5.4)$$

где $u_{ts} = u_t(s)$ и $N_{ts} = N_t(s)$.

Введем в рассмотрение так называемую h -функцию

$$h(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = - \sum_{s \in S} v_s \ln u_s, \quad (2.5.5)$$

обозначая $h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = h(\mathbf{v})$. Тогда соотношение (2.5.4) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} B(r, v) &= \exp \left[-N \sum_{t=1}^T h(\mathbf{v}_t, \mathbf{u}_t) \right] = \\ &= \exp \left[-N \sum_{t=1}^T \sum_{s \in S} v_{ts} \ln u_{ts} \right], \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

где $v_{ts} = v_t(s)$.

Пусть теперь дано произвольное подмножество $\mathfrak{R}_N^T \subseteq \tilde{\mathfrak{R}}_N^T$ и соответствующее ему подмножество $\mathfrak{R}^T \subseteq \tilde{\mathfrak{R}}^T$ (их элементы связаны соотношением $v_{ts} = N_{ts}/N$). Тогда с учетом соотношения (2.5.6) оценка (2.5.2) в рассматриваемом случае примет следующий экспоненциальный вид:

$$A(\mathfrak{R}_N^T) = \sum_{r \in \mathfrak{R}_N^T} A(r) \leq \exp [Na(\mathfrak{R}^T)], \quad (2.5.7)$$

где

$$a(\mathfrak{R}^T) = \max_{v \in \mathfrak{R}^T} \min_{v \in \mathcal{V}} \left\{ \ln \sqrt[N]{g(v)} + \sum_{t=1}^T h(\mathbf{v}_t, \mathbf{u}_t) \right\} \quad (2.5.8)$$

и

$$g(v) = \sum_{r \in \tilde{\mathfrak{R}}_N^T} A(r) \prod_{t=1}^T u_t^{N_{ts}}. \quad (2.5.9)$$

2.5.2. Полиномиальные суммы. k -функция. Рассмотрим случай $T=1$, когда N является целым неотрицательным числом, а $r=N(s)$ является целочисленной неотрицательной функцией. Функции $r=N(s)$, $\rho=v(s)=N(s)/N$ и $v=u(s)$ берутся из множеств $\tilde{\mathfrak{R}}_N$, $\tilde{\mathfrak{R}}$ и $\tilde{\mathcal{W}}$ соответственно.

Зададим функцию $A(\mathbf{N})$ в виде так называемого полиномиального распределения:

$$A(\mathbf{N}) = C_N^{\mathbf{N}} \mathbf{P}^{\mathbf{N}} \quad (2.5.10)$$

с параметром $\mathbf{P} = (P_s)$, где P_s — значения вероятностной функции $P(s) = P_s$, а $C_N^{\mathbf{N}}$ — символическое обозначение

полиномиального коэффициента:

$$C_N^{\mathbf{N}} = N! / \prod_{s \in S} N_s! \quad (2.5.11)$$

Производящая функция $A(\mathbf{N})$ имеет вид

$$g(\mathbf{u}) = \left(\sum_{s \in S} P_s u_s \right)^N. \quad (2.5.12)$$

Для $u_s \equiv 1$ ($s \in S$), обозначая соответствующий набор $\mathbf{u} = \mathbf{1}$, имеем

$$g(\mathbf{1}) = \sum_{\mathbf{N} \in \tilde{\mathfrak{N}}_N} A(\mathbf{N}) \equiv 1. \quad (2.5.13)$$

Зададим действительное число X и действительную функцию $D(s)$, набор значений которой будем обозначать $\mathbf{D} = (D_s)$. Определим подмножество \mathfrak{N}_N множества $\tilde{\mathfrak{N}}_N$ функций следующим линейным соотношением:

$$\mathfrak{N}_N = \left\{ \mathbf{N} : \sum_{s \in S} N_s D_s \leq NX \right\}. \quad (2.5.14)$$

Подмножество $\mathcal{W} \subset \tilde{\mathcal{W}}$ определим в виде однопараметрического набора значений $\mathbf{u} = (u_s)$:

$$\mathcal{W} = \{ \mathbf{u} : u_s = \exp \lambda D_s, s \in S, \lambda < 0 \} \quad (2.5.15)$$

для всех действительных отрицательных значений параметра $\lambda < 0$. Последнее определение, как будет показано ниже, удобно для отыскания максимина в соотношении (2.5.8). В самом деле, в рассматриваемом случае оценка (2.5.7) касается полиномиальной суммы

$$A(\mathfrak{N}_N) = \sum_{\mathbf{N} \in \mathfrak{N}_N} A(\mathbf{N}) \leq \exp [N a^*(\mathfrak{N})], \quad (2.5.16)$$

где \mathfrak{N} — подмножество наборов \mathbf{v} , соответствующее подмножеству \mathfrak{N}_N наборов \mathbf{N} . С учетом соотношений (2.5.8), (2.5.14) и (2.5.15) получим

$$a^*(\mathfrak{N}) = \max_{\mathbf{v} \in \mathfrak{N}} \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{W}} \left[\ln \sum_{s \in S} P_s \exp(\lambda D_s) - \lambda \sum_{s \in S} v_s D_s \right]. \quad (2.5.17)$$

В рассматриваемом случае конечных множеств вместо максимина в выражении (2.5.17) можно взять минимакс

и, используя определения множеств \mathcal{W} и \mathfrak{R}_N , найти выражение максимума. В результате будем иметь

$$a^*(\mathfrak{R}) = \min_{\lambda < 0} \left[\ln \sum_{s \in S} P_s \exp(\lambda D_s) - \lambda X \right]. \quad (2.5.18)$$

Рассмотрим дополнение $\bar{\mathfrak{R}}_N$ множества \mathfrak{R}_N

$$\bar{\mathfrak{R}}_N = \left\{ \mathbf{N}: \sum_{s \in S} N_s D_s > NX \right\}. \quad (2.5.19)$$

В этом случае определим подмножество $\mathcal{W} \subset \bar{\mathcal{W}}$ в виде

$$\mathcal{W} = \{ \mathbf{u}: u_s = \exp \lambda D_s, s \in S, \lambda > 0 \} \quad (2.5.20)$$

и аналогично предыдущему случаю получим

$$A(\bar{\mathfrak{R}}_N) \leq \exp [Na^{**}(\bar{\mathfrak{R}})], \quad (2.5.21)$$

где

$$a^{**}(\bar{\mathfrak{R}}) = \min_{\lambda > 0} \left[\ln \sum_{s \in S} P_s \exp(\lambda D_s) - \lambda X \right]. \quad (2.5.22)$$

Соотношения (2.5.17), (2.5.18), (2.5.21) и (2.5.22) с учетом тождества (2.5.13) можно записать более компактно:

$$\exp Na(\mathbf{n}) > \begin{cases} A(\mathfrak{R}_N) & \text{при } \lambda < 0, \\ A(\bar{\mathfrak{R}}_N) & \text{при } \lambda > 0, \end{cases} \quad (2.5.23)$$

где

$$a(\mathfrak{R}) = \min_{\lambda} [\gamma(\lambda) - \lambda X], \quad (2.5.24)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma(\lambda) &= \ln \sum_{s \in S} P_s \exp \lambda D_s; \\ \gamma'(\lambda) &= \sum_{s \in S} D_s P_s(\lambda), \end{aligned} \right\} \quad (2.5.25)$$

$$\gamma''(\lambda) = \sum_{s \in S} [D_s \gamma'(\lambda)]^2 P_s(\lambda) \geq 0;$$

$$P_s(\lambda) = P_s \exp(\lambda D_s) / \sum_{s \in S} P_s \exp(\lambda D_s).$$

Найдем минимум выражения в квадратной скобке соотношения (2.5.24). Дифференцируя это выражение по λ , находим, что минимум достигается при значении $\lambda = \lambda(X)$, удовлетворяющем уравнению

$$\gamma'(\lambda) = X. \quad (2.5.26)$$

Заметим, что согласно соотношениям (2.5.25) и (2.5.26) $\gamma'(\lambda) \geq 0$ и $\gamma'(\lambda) = X$, поэтому с ростом λ растет и X и

$$X = \gamma'(\lambda) \begin{cases} < \gamma'(0) = E & \text{при } \lambda < 0, \\ > \gamma'(0) = E & \text{при } \lambda > 0, \end{cases} \quad (2.5.27)$$

где введено обозначение

$$E = \gamma'(0) = \sum_{s \in S} P_s D_s. \quad (2.5.28)$$

Используем для величины $-a(\mathfrak{R})$ обозначение в виде так называемой k -функции [42]

$$-a(\mathfrak{R}) = \lambda(X)X - \gamma[\lambda(X)] \stackrel{\Delta}{=} k_{\text{PD}}(X - E). \quad (2.5.29)$$

Тогда оценка (2.5.23) с учетом неравенств (2.5.27) и обозначений (2.5.28) и (2.5.29) может быть записана в форме известных оценок Чернова [80]:

$$\begin{aligned} & \exp[-Nk_{\text{PD}}(X - E)] \geq \\ & \geq \begin{cases} A(\mathfrak{R}_N) & \text{при } X < E, \\ A(\overline{\mathfrak{R}}_N) = 1 - A(\mathfrak{R}_N) & \text{при } X > E. \end{cases} \quad (2.5.30) \end{aligned}$$

Свойства k -функции имеют важное значение для дальнейшего изложения. Поэтому рассмотрим некоторые из них. Из определения (2.5.29) k -функции и соотношений (2.5.25) и (2.5.26) имеем

$$\frac{dk_{\text{PD}}(X - E)}{dX} = \lambda(X); \quad (2.5.31)$$

$$\frac{d^2k_{\text{PD}}(X - E)}{dX^2} = \lambda'(X) = \frac{1}{\gamma''[\lambda(X)]}.$$

Учитывая, что при $X = E$ имеем $\lambda(X) = \lambda(E) = 0$ (см. (2.5.26) и (2.5.28)), получим из соотношений (2.5.29) и (2.5.31)

$$k_{\text{PD}}(X - E)|_{X=E} = \frac{dk_{\text{PD}}(X - E)}{dX} \Big|_{X=E} = 0. \quad (2.5.32)$$

Соотношения (2.5.31) и (2.5.32) показывают, что k -функция $k_{\mathbf{PD}}(X-E)$ обращается при значении $X=E$ в минимум, равный нулю (следовательно, при любых значениях X она неотрицательна) и что для положительного значения $k > 0$ уравнение

$$k_{\mathbf{PD}}(X-E) = k \quad (2.5.33)$$

имеет два корня $X_1 < E < X_2$.

Легко проверить следующее известное [80] представление k -функции, тождественное представлению (2.5.29),

$$k_{\mathbf{PD}}(X-E) = h[\mathbf{P}(\lambda), \mathbf{P}] - h[\mathbf{P}(\lambda)], \quad (2.5.34)$$

где $\mathbf{P}(\lambda)$ — набор значений $P_s(\lambda)$, определяемых соотношениями (2.5.25), а $\lambda = \lambda(X)$ определяется из уравнения (2.5.26). Из соотношения (2.5.34), используя формулу Тейлора, получим

$$k_{\mathbf{PD}}(X-E) = \frac{1}{2} \sum_{s \in S} |P_s(\lambda) - P_s|^2 / \theta_s, \quad (2.5.35)$$

где

$$\min [P_s(\lambda), P_s] \leq \theta_s \leq \max [P_s(\lambda), P_s]. \quad (2.5.36)$$

Пусть $\max |P_s(\lambda) - P_s| = \epsilon$, тогда при $X \rightarrow E$ имеем $\lambda = \lambda(X) \rightarrow 0$, отсюда $P_s(\lambda) \rightarrow P_s$ (см. (2.5.25)) и из соотношения (2.5.35) получим

$$k_{\mathbf{PD}}(X-E) = O(\epsilon^2). \quad (2.5.37)$$

Отметим, что верхняя оценка (2.5.30) является при больших значениях N асимптотически точной, так как с помощью формулы Стирлинга и метода множителей Лагранжа легко получить следующее асимптотическое соотношение [80]:

$$\begin{aligned} & \exp[-Nk_{\mathbf{PD}}(X-E) + O(\ln N)] = \\ & = \begin{cases} A(\mathfrak{R}_N) & \text{при } X < E, \\ A(\overline{\mathfrak{R}}_N) = 1 - A(\mathfrak{R}_N) & \text{при } X > E. \end{cases} \quad (2.5.38) \end{aligned}$$

Пусть рассмотренное выше множество $S = \{s\}$ индексов имеет F -разбиение $S_F = \{S_f\}$, $f = \overline{1, F}$, соответствующий набор $\mathbf{N} = (N_s)$ распадается в этом случае на F наборов $\mathbf{N}_f = (N_{fs})$ значений $N_{fs} = N(s)$, где $s \in S_f$.

Введем обозначения

$$\sum_{s \in S_f} N_{fs} = N_f \left(\sum_{f=1}^F N_f = N \right);$$

$$v_f = N_f/N; \quad v_{fs} = N_{fs}/N_f \left(\sum_{f=1}^F v_f = \sum_{s \in S_f} v_{fs} = 1 \right).$$

Зададим функцию $A(\mathbf{N})$ в виде произведения F полиномиальных распределений (2.5.10)

$$A(\mathbf{N}) = \prod_{f=1}^F C_{N_f}^{N_f} P_f^{N_f}, \quad (2.5.39)$$

где $\mathbf{P}_f = \{P_{fs}\}$ — наборы значений $P_{fs} = P_f(s)$ F вероятностных функций ($f = \overline{1, F}$), а $C_{N_f}^{N_f}$ — полиномиальный коэффициент.

Производящая функция $A(\mathbf{N})$ в рассматриваемом случае имеет вид

$$g(\mathbf{u}) = \prod_{f=1}^F \left(\sum_{s \in S_f} P_{fs} u_{fs} \right)^{N_f}$$

Здесь оценка (2.5.7) имеет вид

$$A(\mathfrak{N}_N) \leq \exp [N \tilde{a}(\mathfrak{N})] \leq \exp [Na(\mathfrak{N})],$$

где

$$\tilde{a}(\mathfrak{N}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathfrak{N}} \max_{\mathbf{u} \in \mathfrak{W}} \left\{ \sum_{f=1}^F v_f \ln \sum_{s \in S_f} P_{fs} u_{fs} - \right.$$

$$\left. - \sum_{f=1}^F \sum_{s \in S_f} v_f P_{fs} \ln u_{fs} \right\} \leq a(\mathfrak{N}) =$$

$$= \min_{\mathbf{v} \in \mathfrak{N}} \max_{\mathbf{u} \in \mathfrak{W}} \left\{ \ln \sum_{s \in S} P_s u_s - \sum_{s \in S} v_s \ln u_s \right\},$$

причем

$$P_s = v_f P_{fs} \text{ и } v_s = v_f v_{fs}$$

$$\left(\sum_{s \in S} P_s = \sum_{s \in S} v_s = 1 \right), \quad (2.5.40)$$

и указанное выше неравенство следует из того, что среднее геометрическое не превышает среднего арифметиче-

ского. Из него вытекает, что если задать подмножество \mathfrak{N}_N соотношением (2.5.14), то для функций $A(\mathbf{N})$, определяемых соотношением (2.5.39), верны оценки (2.5.30).

2.5.3. Пересечения комбинаторных сфер. К-функция. В п. 2.2.4 для расположений $\rho \in R$ и $\rho^* \in R^*$ и их пар $(\rho, \rho^*) \in R \times R^*$ были определены матричные расстояния $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\rho_1, \rho_2) = \|m_{\alpha\alpha'}\|$, $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}(\rho_1, \rho^*) = \|m_{\alpha\beta}^{(1)}\|$ и $\mathbf{m}_2 = \mathbf{m}(\rho_2, \rho^*) = \|m_{\alpha'\beta}^{(2)}\|$ и вычислено число $D_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)$ расположений ρ^* в пересечении комбинаторных сфер $\mathcal{C}_{\rho_1}^{\mathbf{m}_1}$ и $\mathcal{C}_{\rho_2}^{\mathbf{m}_2}$ (см. соотношение (2.2.41) при произвольных ρ_1 и ρ_2). Рассмотрим тот случай, когда $\rho_1 \in \mathcal{C}_{\sigma}^{\vec{m}^{(1)}}$, а $\rho_2 \in \mathcal{C}_{\sigma}^{\vec{m}^{(2)}}$, где $\sigma = (1, 2, \dots, i, \dots, s)$:

$$\begin{aligned} \vec{e}_a \mathbf{m}_1 &= \vec{e}_a \mathbf{m}_2 = \vec{m}^* = (m_{\beta}^*), \\ \mathbf{m} \vec{e}'_a &= \vec{m}^{(1)} = (m_{\alpha}^{(1)}), \\ \vec{e}_a \mathbf{m} &= \vec{m}^{(2)} = (m_{\alpha'}^{(2)}), \\ \vec{e}_a \vec{m}^{(1)} &= \vec{m}^{(2)} \vec{e}'_a = \vec{m}^* \vec{e}_b = s. \end{aligned} \quad (2.5.41)$$

Для дальнейшего изложения удобны следующие обозначения, учитывающие соотношения (2.5.41):

$$\begin{aligned} M_1 &= \|\mu_{\alpha\beta}^{(1)}\| = \|\mu_{\alpha}^{\beta}(1)\|, \quad \mu_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{m_{\alpha\beta}^{(1)}}{s}; \\ \mu_1 &= (\mu_{\alpha}^{\beta}) = \|\mu_{\alpha}^{\beta}(1)\|, \quad \mu_{\alpha}^{\beta}(1) = \frac{m_{\alpha\beta}^{(1)}}{m_{\alpha}^{(1)}}; \\ \vec{\mu} &= (\mu_{\alpha}), \quad \mu_{\alpha} = m_{\alpha}^{(1)}/s; \\ M_2 &= \|\mu_{\alpha'\beta}^{(2)}\| = \|\mu'_{\alpha'}^{\beta}(2)\|, \quad \mu_{\alpha'\beta}^{(2)} = \frac{m_{\alpha'\beta}^{(2)}}{s}; \\ \mu_2 &= (\mu_{\alpha'}^{\beta}) = \|\mu_{\alpha'}^{\beta}(2)\|, \quad \mu_{\alpha'}^{\beta}(2) = \frac{m_{\alpha'\beta}^{(2)}}{m_{\alpha'}^{(2)}}; \\ \vec{\mu}' &= (\mu'_{\alpha}), \quad \mu'_{\alpha} = \frac{m_{\alpha'}^{(2)}}{s}; \end{aligned} \quad (2.5.42)$$

$$\vec{\mu}_1 = \vec{\mu}'_1 \mu_2 = \vec{v} = (v_\beta), \quad v_\beta = \frac{m^*_\beta}{s},$$

где все векторы являются вероятностными. В силу принадлежности расположений $\rho_1 \in \mathcal{G}_\sigma^{\vec{m}^{(1)}}$ и $\rho_2 \in \mathcal{G}_\sigma^{\vec{m}^{(2)}}$ их пара (ρ_1, ρ_2) приводит к фиксации пары векторов $(\vec{\mu}, \vec{\mu}')$.

Рассмотрим взвешенную сумму чисел $D_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)$ вида

$$A(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathfrak{M}_s} C_s^{\mathbf{m}} u^{\mathbf{m}} D_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2), \quad (2.5.43)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{M} \equiv \|\mu_{\alpha'} \mu'_{\alpha'}\|$ и \mathfrak{M}'_s — совокупность всевозможных матриц \mathbf{m} . Для получения производящей этих чисел положим $\mathbf{u} = \mathbf{M}$ в производящей $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ (см. соотношения (2.2.45) и (2.2.43)).

Будем иметь для производящих

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) &= g(\mathbf{M}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \\ &= \sum_{(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) \in \tilde{\mathfrak{M}}_s^2} A(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) u_1^{\mathbf{m}_1} u_2^{\mathbf{m}_2} = \\ &= \left(\sum_{\beta} \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} u_{\alpha\beta}^{(1)} \sum_{\alpha'} \mu'_{\alpha'} u_{\alpha'\beta}^{(2)} \right)^s, \end{aligned} \quad (2.5.44)$$

где $\mathbf{u}_1 = \|u_{\alpha\beta}^{(1)}\|$ и $\mathbf{u}_2 = \|u_{\alpha'\beta}^{(2)}\|$ — матрицы с действительными положительными элементами, а $\tilde{\mathfrak{M}}_s^2$ — совокупность всевозможных пар матриц $(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)$.

Пусть \mathfrak{M}_s^2 — произвольное подмножество $\tilde{\mathfrak{M}}_s^2$. Дадим верхнюю оценку суммы

$$A(\mathfrak{M}_s^2) = \sum_{(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) \in \mathfrak{M}_s^2} A(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2). \quad (2.5.45)$$

Для этого воспользуемся соотношением (2.5.7) для случая $T=2$. В качестве индексов s примем пары индексов (α, β) . Далее положим

$$N_1(s_1) = m_{\alpha\beta}^{(1)}, \quad N_2(s_2) = m_{\alpha'\beta}^{(2)}, \quad N = s;$$

$$v_1(s_1) = \mu_{\alpha} \mu_{\alpha}^{\beta}(1) = \mu_{\alpha\beta}(1), \quad v_2(s_2) = \mu_{\alpha'} \mu_{\alpha'}^{\beta}(2) = \mu_{\alpha'\beta}(2);$$

$$u_1(s_1) = u_{\alpha\beta}^{(1)} \quad \text{и} \quad u_2(s_2) = u_{\alpha'\beta}^{(2)}.$$

Тогда с учетом выражения производящей (2.5.44) оценка (2.5.7) примет вид

$$A(\mathfrak{M}^2_s) \leq \exp [sa(\mathfrak{M}^2)], \quad (2.5.46)$$

где

$$a(\mathfrak{M}^2) = \max_{(\mu_1, \mu_2) \in \mathfrak{M}^2} \min_{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in U^2} \left[\ln \left(\sum_{\beta} \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} u_{\alpha\beta}^{(1)} \sum_{\alpha'} \mu'_{\alpha'} u_{\alpha'\beta}^{(2)} \right) + \right. \\ \left. + h(\|\mu_{\alpha} u_{\alpha}^{\beta}(1)\|, \mathbf{u}_1) + \right. \\ \left. + h(\|\mu'_{\alpha'} u_{\alpha'}^{\beta}(2)\|, \mathbf{u}_2) \right], \quad (2.5.47)$$

U^2 — совокупность всевозможных пар матриц $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$.

Найдем минимум выражения, стоящего в квадратной скобке соотношения (2.5.47) по переменным $\mathbf{u}_1 = \|\mu_{\alpha\beta}^{(1)}\|$ и $\mathbf{u}_2 = \|\mu'_{\alpha'\beta}^{(2)}\|$. Для этого, приравняв соответствующие частные производные нулю, получим систему уравнений

$$\mu_{\alpha} u_{\alpha\beta}^{(1)} v_{\beta}^{(2)} = \mu_{\alpha} u_{\alpha}^{\beta}(1) \sum_{\beta'} v_{\beta'}^{(1)} v_{\beta'}^{(2)}; \quad (2.5.48)$$

$$\mu'_{\alpha'} u_{\alpha'\beta}^{(2)} v_{\beta}^{(1)} = \mu'_{\alpha'} u_{\alpha'}^{\beta}(2) \sum_{\beta'} v_{\beta'}^{(1)} v_{\beta'}^{(2)},$$

где

$$\alpha, \alpha' = \overline{1, a}; \quad \beta = \overline{1, b}; \quad (2.5.49)$$

$$v_{\beta}^{(1)} = \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} u_{\alpha\beta}^{(1)} \quad \text{и} \quad v_{\beta}^{(2)} = \sum_{\alpha'} \mu'_{\alpha'} u_{\alpha'\beta}^{(2)},$$

которым должны удовлетворять экстремальные значения

$$\mathbf{u}_1 = \|\widehat{u}_{\alpha\beta}^{(1)}\| \quad \text{и} \quad \mathbf{u}_2 = \|\widehat{u}_{\alpha'\beta}^{(2)}\|.$$

Суммируя правые и левые части соотношений (2.5.48), первое по α , а второе по α' , и учитывая условия непустоты пересечения комбинаторных сфер $\vec{\mu}\mu_1 = \vec{\mu}'\mu_2 = \vec{v}$, получаем систему уравнений

$$v_{\beta}^{(1)} v_{\beta}^{(2)} = v_{\beta} \sum_{\beta'} v_{\beta'}^{(1)} v_{\beta'}^{(2)} \quad (\beta = \overline{1, b}) \quad (2.5.50)$$

для соответствующих экстремальных значений $\widehat{v}_\beta^{(1)}$ и $\widehat{v}_\beta^{(2)}$.

Можно показать, что значениями, соответствующими минимуму квадратной скобки соотношения (2.5.47), являются

$$\widehat{v}_\beta^{(1)} \equiv \widehat{v}_\beta^{(2)} = \sqrt{v_\beta}, \quad (2.5.51)$$

при которых

$$\sum_{\beta'} \widehat{v}_{\beta'}^{(1)} \widehat{v}_{\beta'}^{(2)} \equiv 1. \quad (2.5.51')$$

Подставив соотношения (2.5.51) и (2.5.51') в соотношение (2.5.48), получим

$$\widehat{u}_{\alpha\beta}^{(1)} = \mu_\alpha^\beta(1)/\sqrt{v_\beta} \quad \text{и} \quad \widehat{u}_{\alpha'\beta}^{(2)} = \mu_{\alpha'}^\beta(2)/\sqrt{v_\beta}. \quad (2.5.52)$$

Полагая в соотношении (2.5.47) $u_{\alpha\beta}^{(1)} = \widehat{u}_{\alpha\beta}^{(1)}$ и $u_{\alpha'\beta}^{(2)} = \widehat{u}_{\alpha'\beta}^{(2)}$ и вводя специальное обозначение для получившегося выражения, будем иметь

$$\begin{aligned} \alpha(\mathfrak{M}^2) \triangleq K_{\mu, \mu'} \rightarrow (\mathfrak{M}^2) = \max_{(\mu_1, \mu_2) \in \mathfrak{M}^2} [& h(\|\mu_\alpha^\beta(1)\|, \\ & \|\mu_\alpha^\beta(1)/\sqrt{v_\beta}\|) + h(\|\mu_{\alpha'}^\beta(2)\|, \\ & \|\mu_{\alpha'}^\beta(2)/\sqrt{v_\beta}\|)]. \end{aligned} \quad (2.5.53)$$

С учетом (2.5.53), определения (2.5.5) h -функции и обозначений (2.5.42) после несложных преобразований будем иметь оценку (2.5.46) в следующей окончательной форме

$$A(\mathfrak{M}_s^2) \leq \exp[sK_{\mu, \mu'} \rightarrow (\mathfrak{M}^2)], \quad (2.5.54)$$

где

$$\begin{aligned} K_{\mu, \mu'} \rightarrow (\mathfrak{M}^2) = \max_{(\mu_1, \mu_2) \in \mathfrak{M}^2} [& \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} h(\vec{\mu}_{\alpha}) + \\ & + \sum_{\alpha'} \mu_{\alpha'} h(\vec{\mu}_{\alpha'}) - h(\vec{v})]. \end{aligned} \quad (2.5.55)$$

Функцию $K_{\mu, \mu'} \rightarrow (\mathfrak{M}^2)$ подмножества \mathfrak{M}^2 будем называть K -функцией.

2.5.4. Совместные оценки для стохастических функций. k^0 - и k^1 -функции. Рассмотрим случай детерминированного аргумента со значением $\mathbf{x} \in R$ и однородной стохастической зависимости (СЗ) с независимыми переходами, определяемой $(a \times b)$ -матрицей переходов $\mathbf{p} = (\vec{p}_\alpha) = \|\vec{p}_{\alpha\beta}^p\|$, состоящей из a вероятностных вектор-строк $\vec{p}_\alpha = (p_\alpha^\beta)$ ($\alpha = \overline{1, a}$). Зафиксируем значения аргумента $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_x^m \subset R$, где $\vec{m} = (m_\alpha)$ и для всех значений функции $\mathbf{y} \in R^*$ определим условные вероятности $P(\mathbf{y}/\mathbf{x})$ вида

$$P(\mathbf{y}/\mathbf{x}) = \prod_\alpha \vec{p}_\alpha^{\vec{m}_\alpha} \equiv \exp \left[-s \sum_\alpha \mu_\alpha h(\vec{\mu}_\alpha, \vec{p}_\alpha) \right], \quad (2.5.56)$$

где $\vec{m}_\alpha = (m_{\alpha\beta})$ — векторы, составляющие матричное расстояние $\mathbf{m} = (\vec{m}_\alpha) = \mathbf{m}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ между \mathbf{x} и \mathbf{y} .

Построим теперь подмножества $\mathcal{E} \subseteq R^*$, имеющие условные вероятности $P(\mathcal{E}/\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{E}} P(\mathbf{y}/\mathbf{x})$, близкие к нулю или единице. Из соотношений (2.2.33') и (2.5.56) следует, что

$$P(\mathcal{E}_x^m/\mathbf{x}) = \prod_\alpha C_{m_\alpha}^{\vec{m}_\alpha} \vec{p}_\alpha^{\vec{m}_\alpha}. \quad (2.5.57)$$

Пусть $\tilde{\mathfrak{M}}_m$ — множество всевозможных матриц $\mathbf{m} = (\vec{m}_\alpha) = \|\vec{m}_{\alpha\beta}\|$ с фиксированными суммами элементов по строкам $\vec{m} e_\beta = \vec{m}$, приводящими к компонентам вектора $\vec{m} = (m_\alpha)$. Пусть задано произвольное подмножество \mathfrak{M}_m множества $\tilde{\mathfrak{M}}_m$.

Введем в рассмотрение множество $\mathcal{E}_x^m = \bigcup_{\mathbf{m} \in \mathfrak{M}_m} \mathcal{E}_x^{\mathbf{m}}$.

Для вычисления его условной вероятности используем соотношение (2.5.57). Получим

$$P(\mathcal{E}_x^m / \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathfrak{M}_m} \prod_{\alpha} C_{m_{\alpha}}^{\vec{m}_{\alpha}} P_{\alpha}^{\vec{m}_{\alpha}}. \quad (2.5.58)$$

Рассмотрим подмножества \mathfrak{M}_m двух типов

$$\mathfrak{M}_{m, a}^{\rightarrow} = \left\{ \vec{m}_{\alpha} : m_{\alpha} X_{\alpha} < \sum_{\beta} d_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}, \alpha = \overline{1, a} \right\},$$

$$\mathfrak{M}_{m, a}^{\leftarrow} = \left\{ \vec{m}_{\alpha} : \sum_{\beta} d_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} \leq m_{\alpha} X_{\alpha}, \alpha = \overline{1, a} \right\}; \quad (2.5.59)$$

$$\mathcal{L}_{m, T}^{\rightarrow} = \left\{ \mathbf{m} : sX^t < \sum_{\alpha\beta} d_{\alpha\beta}^t m_{\alpha\beta}, t = \overline{1, T} \right\},$$

$$\mathcal{L}_{m, T}^{\leftarrow} = \left\{ \mathbf{m} : \sum_{\alpha\beta} d_{\alpha\beta}^t m_{\alpha\beta} \leq sX^t, t = \overline{1, T} \right\}, \quad (2.5.60)$$

где X_i и X^t — действительные числа, а $\mathbf{d} = (\vec{d}_{\alpha}) = \|d_{\alpha\beta}\|$ и $\mathbf{d}^t = \|d_{\alpha\beta}^t\|$ — матрицы с действительными элементами.

Дальнейшие рассмотрения связаны с использованием следующих легкопроверяемых неравенств для произвольных множеств

\mathcal{E}_u ($u = \overline{1, M}$):

$$\sum_{u=1}^M P(\mathcal{E}_u) \geq P\left(\bigcup_{n=1}^M \mathcal{E}_u\right); \quad \sum_{u=1}^M P(\overline{\mathcal{E}}_u) \geq P\left(\overline{\bigcap_{u=1}^M \mathcal{E}_u}\right)$$

(неравенство Буля).

Используя эти неравенства и соотношения (2.5.58), (2.5.59), (2.5.60) и (2.5.30), получаем для заданного числа $\varepsilon > 0$ следующие оценки:

$$\geq \left\{ \begin{array}{l} a \exp(-s\varepsilon^2) \geq \\ \overline{\mathfrak{M}_{m, a}^{\rightarrow}}, \overline{\mathfrak{M}_{m, a}^{\leftarrow}} \\ P(\mathcal{E}_x^{\overline{\mathfrak{M}_{m, a}^{\rightarrow}}} / \mathbf{x}), P(\mathcal{E}_x^{\overline{\mathfrak{M}_{m, a}^{\leftarrow}}} / \mathbf{x}) \\ \text{при } X_{\alpha} = E_{\alpha} - \varepsilon'_{\alpha} \quad (\alpha = \overline{1, a}), \\ \\ \overline{\mathfrak{M}_{m, a}^{\rightarrow}}, \overline{\mathfrak{M}_{m, a}^{\leftarrow}} \\ P(\mathcal{E}_x^{\overline{\mathfrak{M}_{m, a}^{\rightarrow}}} / \mathbf{x}), P(\mathcal{E}_x^{\overline{\mathfrak{M}_{m, a}^{\leftarrow}}} / \mathbf{x}) \\ \text{при } X_{\alpha} = E_{\alpha} + \varepsilon_{\alpha} \quad (\alpha = \overline{1, a}), \end{array} \right. \quad (2.5.61)$$

где

$$E_\alpha = \sum_{\beta} d_{\alpha\beta} p_\alpha^\beta \quad \text{и} \quad -\varepsilon'_\alpha < 0 < \varepsilon_\alpha$$

(см. (2.5.33)) удовлетворяют уравнениям

$$\mu_\alpha k_{P_\alpha d_\alpha}(-\varepsilon'_\alpha) = \mu_\alpha k_{P_\alpha d_\alpha}(\varepsilon_\alpha) = \varepsilon^2 \quad (\alpha = \overline{1, a}), \quad (2.5.62)$$

$$T \exp(s\varepsilon^2) \geq \begin{cases} P(\mathcal{E}_x^{\overline{m, T}} | \mathbf{x}), P(\mathcal{L}_x^{\overline{m, T}} | \mathbf{x}) \\ \text{при } X^t = E^t - \varepsilon^t \quad (t = \overline{1, T}), \\ P(\mathcal{E}_x^{\overline{m, T}} | \mathbf{x}), P(\mathcal{L}_x^{\overline{m, T}} | \mathbf{x}) \\ \text{при } X^t = E^t + \varepsilon^t \quad (t = \overline{1, T}), \end{cases} \quad (2.5.63)$$

где $E^t = \sum_{\alpha\beta} d_{\alpha\beta}^t \mu_\alpha p_\alpha^\beta$ и $-\varepsilon^t_1 < 0 < \varepsilon^t$ удовлетворяют уравнениям

$$k_{\mathcal{G}^t}(-\varepsilon^t_1) = k_{\mathcal{G}^t}(\varepsilon^t) = \varepsilon^2 \quad (t = \overline{1, T}), \quad (2.5.64)$$

причем $\mathcal{G}^t = \|\mu_\alpha p_\alpha^\beta\|$.

Соответствующие множества $\mathfrak{M}_{m, a}(\varepsilon)$, $\mathfrak{M}'_{m, a}(\varepsilon)$, $\mathcal{L}_{m, T}(\varepsilon)$ и $\mathcal{L}'_{m, T}(\varepsilon)$ зависят в рассматриваемом случае от числа ε .

Докажем теперь общую лемму о связи между числом элементов $N(\mathcal{E})$ произвольного подмножества $\mathcal{E} \subseteq R^*$ и его условной вероятностью $P(\mathcal{E}/\mathbf{x})$. Имеет место

Лемма 2 [42]. Рассмотрим произвольное значение аргумента $\mathbf{x} \in R$ и $\mathcal{E}_1 \subseteq R^*$, тогда для любого $\mathcal{E} \subseteq R^*$, если

$$N(\mathcal{E}) \leq P(\overline{\mathcal{E}}_1/\mathbf{x}) / \max_{y \in \mathcal{E}_1} P(y/\mathbf{x}), \quad (2.5.65)$$

то

$$P(\mathcal{E}/\mathbf{x}) \leq 2P(\overline{\mathcal{E}}_1/\mathbf{x}). \quad (2.5.66)$$

Доказательство. Для произвольных подмножеств $\mathcal{E}, \mathcal{E}_1 \subseteq R^*$

$$\mathcal{E} \equiv (\mathcal{E} \cap \mathcal{E}_1) \cup (\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{E}}_1) \quad \text{и} \quad (\mathcal{E} \cap \mathcal{E}_1) \cap (\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{E}}_1) = \emptyset$$

10*

147

Отсюда

$$\begin{aligned} P(\mathcal{E}/\mathbf{x}) &= P(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}_1/\mathbf{x}) + P(\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{E}}_1/\mathbf{x}) \leq \\ &\leq N(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}_1) \max_{\mathbf{y} \in \mathcal{E} \cap \mathcal{E}_1} P(\mathbf{y}/\mathbf{x}) + P(\overline{\mathcal{E}}_1/\mathbf{x}) \leq \\ &\leq N(\mathcal{E}) \max_{\mathbf{y} \in \mathcal{E}_1} P(\mathbf{y}/\mathbf{x}) + P(\overline{\mathcal{E}}_1/\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Подставив в последнюю оценку условия (2.5.65), получим утверждение (2.5.66) леммы 2.

Рассмотрим теперь оценку (2.5.66) для конкретно выбранного подмножества \mathcal{E}_1 и $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_\sigma^m \subset R$.

Пусть $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_x^{\mathfrak{M}'_{\mu, a}(\varepsilon)}$ при $\mathbf{d} = \|d_{\alpha\beta}\| = \|-\ln p_\alpha^b\|$ и $X_\alpha = E_\alpha - \varepsilon'_\alpha$, где E_α и ε'_α удовлетворяют условиям (2.5.62). Тогда согласно соотношению (2.5.61)

$$P(\overline{\mathcal{E}}_1/\mathbf{x}) = P(\overline{\mathcal{E}}_x^{\mathfrak{M}'_{\mu, a}(\varepsilon)}/\mathbf{x}) \leq a \exp(-s\varepsilon^2), \quad (2.5.67)$$

а подмножество $\mathfrak{M}'_{\mu, a}(\varepsilon)$ матриц μ при фиксированном μ , соответствующее подмножеству $\mathfrak{M}'_{m, a}(\varepsilon)$ матриц m при фиксированном m , имеет вид

$$\mathfrak{M}'_{\mu, a}(\varepsilon) = \{\mu_\alpha : h(\vec{p}_\alpha) - \varepsilon'_\alpha \leq h(\vec{\mu}_\alpha, \vec{p}_\alpha), \alpha = \overline{1, a}\}. \quad (2.5.68)$$

Используя соотношения (2.5.56) и (2.5.68), получим

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{y} \in \mathcal{E}_1} P(\mathbf{y}/\mathbf{x}) &= \max_{\mathbf{y} \in \mathcal{E}_x^{\mathfrak{M}'_{\mu, a}(\varepsilon)}} P(\mathbf{y}/\mathbf{x}) \leq \\ &\leq \exp \left\{ -s \left[\sum_\alpha \mu_\alpha h(\vec{p}_\alpha) - \sum_\alpha \mu_\alpha \varepsilon'_\alpha \right] \right\}. \quad (2.5.69) \end{aligned}$$

Подставив оценки (2.5.67) и (2.5.69) в оценки (2.5.65) и (2.5.66), получим, что для любого подмножества $\mathcal{E} \subset R^*$ и $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_\sigma^m$, если

$$N(\mathcal{E}) \leq a \exp \left\{ s \left[\sum_\alpha \mu_\alpha h(\vec{p}_\alpha) - \varepsilon^2 - \sum_\alpha \mu_\alpha \varepsilon'_\alpha \right] \right\}, \quad (2.5.70)$$

то

$$P(\mathcal{E}/\mathbf{x}) \leq 2a \exp(-s\varepsilon^2). \quad (2.5.71)$$

Аналогичные оценки получаются, если положить

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_x^{\mathcal{L}' \rightarrow m, 1^{(\varepsilon)}}$$

при

$$d^1 = \|d_{\alpha\beta}^1\| = \|\ln p_\alpha^3\| \text{ и } X^1 = E^1 - \varepsilon^1,$$

где E^1 и ε^1 удовлетворяют условиям (2.5.64). Здесь для любого подмножества $\mathcal{E} \subset R^*$ и $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_\sigma^m$, если

$$N(\mathcal{E}) \leq a \exp s \left[\sum_\alpha \mu_\alpha h(\vec{p}_\alpha) - \varepsilon^2 - \varepsilon^1_1 \right], \quad (2.5.72)$$

то

$$P(\mathcal{E}/\mathbf{x}) \leq 2 \exp(-s\varepsilon^2) < 2T \exp(-s\varepsilon^2). \quad (2.5.73)$$

Рассмотрим теперь множества

$$\mathcal{E}^* = \begin{cases} \mathcal{M}_x^{\mathcal{M}' \rightarrow m, a^{(\varepsilon)}} & \text{при } X_\alpha = E_\alpha - \varepsilon'_\alpha, \\ \mathcal{M}_x^{\mathcal{M} \rightarrow m, a^{(\varepsilon)}} & \text{при } X_\alpha = E_\alpha + \varepsilon_\alpha; \end{cases}$$

$$\mathcal{E}^{**} = \begin{cases} \mathcal{E}_x^{\mathcal{L}' \rightarrow m, \tau^{(\varepsilon)}} & \text{при } X^t = E^t - \varepsilon^t_1, \\ \mathcal{E}_x^{\mathcal{L} \rightarrow m, \tau^{(\varepsilon)}} & \text{при } X^t = E^t + \varepsilon^t \end{cases}$$

и подмножества $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}^*$ и $\mathcal{E}'' \subseteq \mathcal{E}^{**}$, удовлетворяющие ограничениям (2.5.70), (2.5.72) соответственно. Тогда из оценок (2.5.61), (2.5.71) и (2.6.63), (2.5.73) получим

$$P(\mathcal{E}^* \setminus \mathcal{E}'/\mathbf{x}) \geq 1 - 3a \exp(-s\varepsilon^2), \quad (2.5.74)$$

$$P(\mathcal{E}^{**} \setminus \mathcal{E}''/\mathbf{x}) \geq 1 - 3T \exp(-s\varepsilon^2).$$

Теперь можно произвести совместные оценки, имеющие основное значение для дальнейшего изложения. Для этого прежде всего получим верхнюю оценку K -функции, удобную для использования. Именно, положим

в квадратной скобке соотношения (2.5.47) вместо экстремальных значений (2.5.52)

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \|p_\alpha^\beta / \sqrt{v_1^\beta}\|, \quad (2.5.75)$$

где $\vec{v}_1 = \vec{\mu} \mathbf{p} = (v_1^\beta)$, получим [42]

$$\begin{aligned} K_{\vec{\mu}, \vec{\mu}'}(\mathfrak{M}^2) &\leq \tilde{K}_{\vec{\mu}, \vec{\mu}'}(\mathfrak{M}^2) = \\ &= \max_{\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}^2} \left[\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} h(\vec{\mu}_{\alpha}(1), \vec{p}_{\alpha}) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\alpha'} \mu'_{\alpha'} h(\vec{\mu}_{\alpha'}(2), \vec{p}_{\alpha'}) - h(\vec{v}, \vec{v}_1) \right]. \end{aligned} \quad (2.5.76)$$

Удобство оценки (2.5.76) по сравнению с выражением (2.5.55) состоит в том, что величины $\mu_{\alpha}^{\beta}(1)$ и $\mu_{\alpha}^{\beta}(2)$ входят в нее линейно.

Определим конкретный вид множества $\mathfrak{M}_{m, a}^{\rightarrow} = \mathfrak{M}_{m, a}^{\rightarrow}(\varepsilon)$ при $X_{\alpha} = E_{\alpha} + \varepsilon_{\alpha}$ ($\alpha = \overline{1, a}$), положив в соотношении (2.5.59) $\mathbf{d} = \|d_{\alpha\beta}\| = \|-\ln(p_{\alpha}^{\beta} / \sqrt{v_1^{\beta}})\|$.

Тогда можно представить соответствующее множество $\mathfrak{M}_{\mu, a}^{\rightarrow}(\varepsilon)$ матриц μ в виде

$$\mathfrak{M}_{\mu, a}^{\rightarrow}(\varepsilon) = \left\{ \mu : h(\vec{\mu}_{\alpha}, \vec{p}_{\alpha}) - \frac{1}{2} h(\vec{v}, \vec{v}_1) \leq h(\vec{p}_{\alpha}) - \frac{1}{2} h(\vec{v}_1) + \varepsilon_{\alpha}, \alpha = \overline{1, a} \right\}. \quad (2.5.77)$$

В работе [42] рассматривался частный случай множества $\mathfrak{M}_{\mu, a}^{\rightarrow}(\varepsilon)$ при $\vec{v}_1 = \underbrace{(1/b, \dots, 1/b)}_b$ (там это условие не было оговорено). В этом случае, как легко видеть,

$$\mathfrak{M}_{\mu, a}^{\rightarrow}(\varepsilon) = \{ \mu : h(\vec{\mu}_{\alpha}, \vec{p}_{\alpha}) \leq h(\vec{p}_{\alpha}) + \varepsilon_{\alpha}, \alpha = \overline{1, a} \}. \quad (2.5.78)$$

Все практически интересные случаи матрицы $\mathbf{p} = \|p_{\alpha}^{\beta}\|$ (см. далее) приводят именно к этому случаю.

Определим конкретный вид множества $\mathcal{L}_{m, 2}^{\rightarrow} = \mathcal{L}_{m, 2}^{\rightarrow}(\varepsilon)$

при $X^t = E^t + \varepsilon^t$ ($t = \overline{1, 2}$), положив в соотношении (2.5.63) $\mathbf{d}^1 = \|d'_{\alpha\beta}\| = \|-\ln p_\alpha^3\|$ и $\mathbf{d}^2 = \|d^2_{\alpha\beta}\| = \|-\ln(p_\alpha^3/v'_\beta)\|$. Тогда соответствующее множество $\mathcal{L}'_{\mu, 2}(\varepsilon)$ матриц μ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\mu, 2}(\varepsilon) = \left\{ \mu : \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} h(\vec{\mu}_{\alpha}, \vec{p}_{\alpha}) \leq \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} h(\vec{p}_{\alpha}) + \right. \\ \left. + \varepsilon^1, \sum_{\alpha'} \mu_{\alpha'} h(\vec{\mu}_{\alpha'}, \vec{p}_{\alpha'}) - h(\vec{v}_1, \vec{v}_1) \leq \right. \\ \left. \leq \sum_{\alpha'} \mu'_{\alpha'} h(\vec{p}_{\alpha'}) - h(\vec{v}_1) + \varepsilon^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.5.79)$$

Пусть множество \mathfrak{M}^2 , на котором определена K -функция и ее верхняя оценка (2.5.76), имеет вид

$$\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{M}^2_1 = \{\mu_1 \in \mathfrak{M}_{\mu, a}, \mu_2 \in \mathfrak{M}_{\mu', a}\}. \quad (2.5.80)$$

Тогда из соотношений (2.5.76) и (2.5.77) имеем

$$\begin{aligned} K_{\mu, \mu'}(\mathfrak{M}^2_1) \leq \tilde{K}_{\mu, \mu'}(\mathfrak{M}^2_1) = \sum_{\alpha'} \mu'_{\alpha'} h(\vec{p}_{\alpha'}) - \\ - C(\vec{\mu}) + \bar{\varepsilon}^{(1)} + \bar{\varepsilon}^{(2)}, \end{aligned} \quad (2.5.81)$$

где

$$C(\vec{\mu}) = h(\vec{\mu}p) - \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} h(\vec{p}_{\alpha}); \quad (2.5.82)$$

$$\bar{\varepsilon}^{(1)} = \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \varepsilon_{\alpha}, \quad \bar{\varepsilon}^{(2)} = \sum_{\alpha'} \mu'_{\alpha'} \varepsilon'_{\alpha'};$$

ε_{α} и ε'_{α} ($i = \overline{1, a}$) определены соотношениями (2.5.62).

Пусть множество \mathfrak{M}^2 имеет вид

$$\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{M}^2_2 = \{\mu_1 \in \mathcal{L}'_{\mu, 2}(\varepsilon), \mu_2 \in \mathcal{L}'_{\mu', 2}(\varepsilon)\}. \quad (2.5.83)$$

Тогда из соотношений (2.5.76) и (2.5.79) имеем

$$\begin{aligned} K_{\mu, \mu'}(\mathfrak{M}^2_2) \leq \tilde{K}_{\mu, \mu'}(\mathfrak{M}^2_2) = \sum_{\alpha'} \mu'_{\alpha'} h(\vec{p}_{\alpha'}) - \\ - C(\vec{\mu}) + \varepsilon^1 + \varepsilon^2, \end{aligned} \quad (2.5.84)$$

где ε^1 и ε^2 определены соотношением (2.5.64).

Итак, нами получены совместные оценки, на основании которых может быть сформулирована следующая лемма.

Лемма 3. Пусть фиксированы вероятностные векторы $\vec{\mu}$ и $\vec{\mu}'$ и матрица $\mathbf{p} = (\vec{p}_\alpha) = \|\rho_\alpha^{\beta}\|$, задана произвольная величина $\varepsilon > 0$ и выбраны множества $\mathfrak{M}_{\rightarrow}(\varepsilon)$ и $\mathcal{L}_{\rightarrow}(\varepsilon)$ матриц μ , определяемые соотношениями (2.5.77), (2.5.79) соответственно. Тогда (см. соотношения (2.5.61), (2.5.63))

$$P(\mathfrak{M}_{\rightarrow}^{m, a} / x) \geq 1 - a \exp(-s\varepsilon^2); \quad (2.5.85)$$

$$P(\mathcal{L}_{\rightarrow}^{m, 2} / x) \geq 1 - 2 \exp(-s\varepsilon^2). \quad (2.5.86)$$

Если удалить из рассмотренных множеств произвольные подмножества \mathcal{E}' и \mathcal{E}'' , удовлетворяющие соответственно условиям (2.5.70), (2.5.72), то (см. оценки (2.5.74)) имеем

$$P(\mathfrak{M}_{\rightarrow}^{m, a} \setminus \mathcal{E}' / x) \geq 1 - 3a \exp(-s\varepsilon^2); \quad (2.5.87)$$

$$P(\mathcal{L}_{\rightarrow}^{m, 2} \setminus \mathcal{E}'' / x) \geq 1 - 6 \exp(-s\varepsilon^2). \quad (2.5.88)$$

При этом взвешенные суммы чисел $D_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)$ расположений в пересечении комбинаторных сфер по рассмотренным множествам имеют оценки

$$\begin{aligned} & \sum_{\vec{\mu}, \vec{\mu}'} C_n^{\mathbf{m}} \|\mu_\alpha \mu'_{\alpha'}\|^{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \in \mathfrak{M}_{\rightarrow}^{m, a}} D_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) \leq \\ & \leq \exp \left\{ s \left[-C(\vec{\mu}) + \sum_{\alpha'} \mu'_{\alpha'} h(\vec{p}_\alpha) + \bar{\varepsilon}^{(1)} + \bar{\varepsilon}^{(2)} \right] \right\}; \quad (2.5.89) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\vec{\mu}, \vec{\mu}'} C_n^{\mathbf{m}} \|\mu_\alpha \mu'_{\alpha'}\| \sum_{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \in \mathcal{L}_{\rightarrow}^{m, a}(\varepsilon)} D_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) \leq \\ & \leq \exp \left\{ s \left[-C(\vec{\mu}) + \sum_{\alpha'} \mu'_{\alpha'} h(\vec{p}_\alpha) + \varepsilon^1 + \varepsilon^2 \right] \right\}, \quad (2.5.90) \end{aligned}$$

где $C(\vec{\mu})$, $\bar{\varepsilon}^{(1)}$ и $\bar{\varepsilon}^{(2)}$ определены соотношениями (2.5.82), а ε^1 и ε^2 — соотношениями (2.5.64).

До сих пор все оценки проводились при пробабиллизации множества R^* . Пробабилизуем теперь еще и множество R . Другими словами, зададим распределение на всех значениях аргумента $\mathbf{x} \in R$ вида

$$P(\mathbf{x}) = \vec{p}^{\vec{m}} \equiv \exp[-sh(\vec{\mu}, \vec{p})], \quad (2.5.91)$$

где $\vec{p} = (p_\alpha)$ — вероятностный вектор, а $\vec{\mu} = \vec{m}/s$ при $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_s^{\vec{m}} \subset R$, т. е. $P(\mathbf{x}) = \text{const}$ для $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_s^{\vec{m}}$. Этим мы пробабилизуем все множество

$$R = \bigcup_{\vec{m}} \mathcal{E}_s^{\vec{m}}. \quad (2.5.92)$$

Совместная пробабиллизация множеств $R \times R^*$ достигается заданием вероятности $P(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, которая с учетом соотношений (2.5.56) и (2.5.91) имеет вид

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= P(\mathbf{x}) P(\mathbf{y}/\mathbf{x}) = \mathbf{P}_1^{\vec{m}} = \\ &= \exp \left\{ -s \left[h(\vec{\mu}, \vec{p}) + \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} h(\vec{\mu}_{\alpha}, \vec{p}_{\alpha}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.5.93)$$

где $\vec{\mu} = (\mu_{\alpha}) = \|\mu_{\alpha}^{\beta}\|$, $\vec{p} = (p_{\alpha}) = \|p_{\alpha}^{\beta}\|$, а матрица \mathbf{P}_1 имеет вид

$$\mathbf{P}_1 = \|p_{\alpha\beta}^{(1)}\| = \|p_{\alpha} p_{\alpha}^{\beta}\|. \quad (2.5.94)$$

Пусть $\mathbf{y} \in \mathcal{E}_s^{\vec{m}^*} \subset R^*$, тогда легко определить вероятность

$$P(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{x} \in R} P(\mathbf{x}) P(\mathbf{y}/\mathbf{x}) = \vec{q}^{\vec{m}^*} = \exp[-sh(\vec{\nu}, \vec{q})], \quad (2.5.95)$$

где $\vec{\nu} = \vec{\mu}\vec{\mu} = \vec{m}^*/s$ и $\vec{q} = \vec{p}\vec{p}$.

Можно осуществить независимую в вероятностном смысле пробабиллизацию множеств R и R^* , используя соотношения (2.5.91) и (2.5.95), для задания вероятности

сти $P(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в виде

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = P(\mathbf{x}) \cdot P(\mathbf{y}) = \mathbf{P}_n^{\mathbf{m}} = \exp \{-s [h(\vec{\mu}, \vec{p}) + h(\vec{v}, \vec{q})]\}, \quad (2.5.96)$$

где матрица \mathbf{P}_n имеет вид

$$\mathbf{P}_n = \|\rho_{\alpha\beta}^{(0)}\| = \|p_\alpha q_\beta\|. \quad (2.5.97)$$

Отношение вероятностей $P(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, заданных соотношениями (2.5.93) и (2.5.96),

$$L = P(\mathbf{v}/\mathbf{x})/P(\mathbf{y}) = \exp \left\{ s \left[h(\vec{v}, \vec{q}) - \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} h(\vec{\mu}_{\alpha}, \vec{p}_{\alpha}) \right] \right\},$$

называют в статистике *отношением правдоподобия* (см. п. 2.5.5). Основным для дальнейшего изложения является множество \mathcal{L}_s матриц $\mathbf{m} = \|m_{\alpha\beta}\| = \mathbf{m}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, определяемых одним линейным отношением ее компонент соотношением. Соответствующее множество \mathcal{L} , определяемое для соответствующих компонент матрицы $\boldsymbol{\mu} = \|\mu_{\alpha\beta}\| = \|\mu_{\alpha} \mu_{\beta}\| = \mathbf{m}/s$, ограничивает величину $(\ln L)/s$ в виде

$$\mathcal{L} = \left\{ \boldsymbol{\mu} : h(\vec{v}, \vec{q}) - \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} h(\vec{\mu}_{\alpha}, \vec{p}_{\alpha}) \leq X \right\}, \quad (2.5.98)$$

где X — произвольное действительное число.

Соответствующее множество \mathcal{L}_s матриц \mathbf{m} имеет вид

$$\mathcal{L}_s = \left\{ \mathbf{m} : \sum_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} \ln(p_{\alpha}^{\beta}/q_{\beta}) \leq sX \right\}. \quad (2.5.99)$$

Рассмотрим две вероятности

$$\alpha(X) = P(\bar{\mathcal{L}}/H_0) \text{ и } \beta(X) = P(\mathcal{L}/H_1), \quad (2.5.100)$$

которые называются в статистике вероятностями ошибок *первого* и *второго* родов при выборе между двумя гипотезами H_0 и H_1 . Гипотезы H_1 и H_0 означают, что пары индексов (α, β) имеют распределения P_0 и P_1 соответственно. Приведем верхние оценки вероятностей $\alpha(X)$ и $\beta(X)$. Для этого воспользуемся оценкой (2.5.30), полагая $N=s$, $s=(\alpha, \beta)$,

$$\mathbf{D} = \{\log(p_{\alpha}^{\beta}/q_{\beta})\}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$$

и вводя обозначения

$$E_0 = \sum_{\alpha\beta} p_{\alpha} q_{\beta} \log(p_{\alpha}^{\beta}/q_{\beta}) = h(\vec{q}) - \sum_{\alpha} p_{\alpha} h(\vec{q}, \vec{p}), \quad (2.5.101)$$

$$E_1 = \sum_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta^3 \log(p_\alpha^3 / q_\beta) = h(\vec{q}) - \sum_{\alpha} p_\alpha h(\vec{p}_\alpha).$$

Легко показать, что $E_0 < 0 < E_1$. Тогда, используя оценки (2.5.30) и определение (2.5.100) вероятностей $\alpha(X)$ и $\beta(X)$, получаем

$$\exp[-sk^0(X - E_0)] \geq \begin{cases} \alpha(X) & \text{при } X > E_0, \\ 1 - \alpha(X) & \text{при } X < E_0; \end{cases} \quad (2.5.102)$$

$$\exp[-sk^1(X - E_1)] \geq \begin{cases} \beta(X) & \text{при } X < E_1, \\ 1 - \beta(X) & \text{при } X > E_1, \end{cases}$$

где обозначено (см. (2.5.94), (2.5.97) и (2.5.25))

$$\left. \begin{aligned} k^0(X - E_0) &= k_{\mathbf{P}_0 \mathbf{D}}(X - E_0) = X\lambda_0(X) - \\ &\quad - \gamma_0[\lambda_0(X)], \quad \gamma'_0[\lambda_0(X)] = X, \\ k^1(X - E_1) &= k_{\mathbf{P}_1 \mathbf{D}}(X - E_1) = X\lambda_1(X) - \\ &\quad - \gamma_1[\lambda_1(X)], \quad \gamma'_1[\lambda_1(X)] = X, \\ \gamma_0(\lambda) &= \ln \sum_{\alpha\beta} p_\alpha q_\beta (p_\alpha^3 / q_\beta)^\lambda, \\ \gamma_1(\lambda) &= \ln \sum_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta^3 (p_\alpha^3 / q_\beta)^\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (2.5.103)$$

Оценки (2.5.102) при больших значениях s согласно соотношению (2.5.38) асимптотически точные. Заметим, что если положить в соотношении (2.5.64) $T = 1$, $\mathbf{d}^1 = \mathbf{D}$ и $\vec{\mu} = \vec{p}$, то $\mathcal{P} = \mathbf{P}_1$ и $k^1(X - E_1) = k_{\mathbf{P}_1 \mathbf{D}}(X - E_1) = \epsilon^2$. Поэтому из оценок (2.5.102) получим

$$\beta(X) \leq \exp(-s\epsilon^2). \quad (2.5.104)$$

Приведем некоторые специальные свойства k -функций $k^0(X - E_0)$ и $k^1(X - E_1)$.

Из определений (2.5.103) функций $\gamma_0(\lambda)$ и $\gamma_1(\lambda)$ легко следует следующее тождество [81]:

$$\gamma_1(\lambda) \equiv \gamma_0(\lambda + 1). \quad (2.5.105)$$

Используя тождество (2.5.105), покажем, что

$$k^0(E_1 - E_0) \equiv E_1 \text{ и } k_1(E_0 - E_1) \equiv |E_0|. \quad (2.5.106)$$

Начем с доказательства первого тождества. Из определений (2.5.101) и (2.5.103) констант E_0 и E_1 и функций $\gamma_0(\lambda)$ и $\gamma_1(\lambda)$, а также тождества (2.5.105) следует, что $E_1 = \gamma'_1(0) = \gamma'_0(1)$. Положим во втором из соотношений (2.5.103) $X = E_1 \equiv \gamma'_1(0) \equiv \gamma'_0(1)$. Тогда

$$\gamma'_0[\lambda_0(E_1)] \equiv E_1 = \gamma'_0(1).$$

Отсюда из-за однозначности функции $\gamma'_0(X)$ получим

$$\lambda_0(E_1) = 1 \text{ при } X = E_1. \quad (2.5.107)$$

Аналогично можно показать, что

$$\lambda_1(E_0) = -1 \text{ при } X = E_0. \quad (2.5.108)$$

Подставив соотношение (2.5.107) в первое из соотношений (2.5.103), получим первое из тождеств (2.5.106). Аналогично доказывается и второе тождество (2.5.106): подстановкой во второе из соотношений (2.5.103) соотношения (2.5.108).

Покажем теперь, что

$$k^0(0) = k^0(X - E_0)|_{X=E_0} = \frac{d}{dX} k^0(X - E_0)|_{X=E_0} = 0,$$

$$\frac{d}{dX} k^0(X - E_0)|_{X=E_1} = 1; \quad (2.5.109)$$

$$k^1(0) = k^1(X - E_1)|_{X=E_1} = \frac{d}{dX} k^1(X - E_1)|_{X=E_1} = 0,$$

$$\frac{d}{dX} k^1(X - E_1)|_{X=E_0} = -1. \quad (2.5.110)$$

Первое нулевое значение в соотношениях (2.5.109) и (2.5.110) следует из соотношения (2.5.32). Чтобы доказать последнее из соотношений (2.5.109), достаточно положить в соотношении (2.5.31) $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$ и $X = E_1$ и воспользоваться соотношением (2.5.107). Аналогично доказывается последнее из соотношений (2.5.110) с помощью соотношения (2.5.108) и соотношения (2.5.31) при $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$ и $X = E_0$. Полученные соотношения позволяют качественно проследить поведение k -функций $k^0(X - E_0)$ и $k^1(X - E_1)$ в зависимости от изменения X в пределах $E_0 < X < E_1$. С ростом X в интервале (E_0, E_1) функция $k^0(X - E_0)$ монотонно возрастает от нуля до E_1 , при этом функция $k_1(X - E_1)$ монотонно убывает от $-E_0$ до нуля.

2.5.5. Экстремальные разбиения. Рассмотрим конечное множество $X = \{x\}$ и k его произвольных непустых подмножеств $\mathfrak{X}_k = \{L_i\}$ ($i = \overline{1, k}$), таких, что $\bigcup_{i=1}^k L_i = X$ и, вообще говоря, $L_i \cap L_j \neq \emptyset$ ($i \neq j$). Набор \mathfrak{X}_k будем называть k -покрытием множества X . В частности, если $L_i \cap L_j = \emptyset$ ($i \neq j$), то такое k -покрытие называется k -разбиением, обозначаемым \mathfrak{X}_k и введенным нами ранее.

Рассмотрим конкретные примеры k -разбиений.

1. Пусть $Y = \{y_i\}$ — конечное множество ($i = \overline{1, k}$) и на $X = \{x\}$ задана однозначная функция $y_i = f(x)$. Тогда, как легко видеть, множества $L_i = \{x : f(x) = y_i\}$ составляют k -разбиений $\mathfrak{X}_k = \{L_i\}$ множества X .

2. Пусть $Y = \{y\}$ — упорядоченное, не обязательно конечное множество с отношением порядка \geq . Пусть на $X = \{x\}$ заданы k однозначных функций $y = f_i(x)$ ($i = \overline{1, k}$). Определим подмножества $L_i \subset X$:

$$L_i = \{x : f_i(x) \geq f_j(x) \quad (j \neq i)\}, \quad (2.5.111)$$

такие, чтобы хотя бы для одного $x \in X$ для каждого $i = \overline{1, k}$

$$f_i(x) > \max_{j \neq i} f_j(x). \quad (2.5.112)$$

Тогда $L_i \neq \emptyset$ ($i = \overline{1, k}$). Если $f_i(x) = f_j(x) = \dots = f_r(x)$, то x произвольно относится к одному из L_i, L_j или L_r . То, что $L_i \cap L_j = \emptyset$, вытекает из следующих соображений. Если $L_i \cap L_j \neq \emptyset$, то найдется хотя бы один элемент $x \in L_i \cap L_j$. Но это, по определению (2.5.111), подмножеств L_i и L_j приводит к одновременному выполнению соотношений $f_i(x) \geq f_j(x)$ и $f_j(x) \geq f_i(x)$, что из-за упорядоченности множества Y приводит к одной возможности $f_i(x) = f_j(x)$, но тогда из-за условия формирования множеств L_i следует, что либо $x \in L_i$ и $x \notin L_j$, либо $x \in L_i$ и $x \in L_j$, либо $x \notin L_i$ и $x \in L_j$, т. е. $L_i \cap L_j = \emptyset$.

Доказательство соотношения $\bigcup_{i=1}^k L_i = X$ элементарно.

Таким образом, совокупность множеств $\{L_i\}$ является k -разбиением. Его мы будем обозначать \mathfrak{X}_k^i . Заметим, что множества L_i , определяемые соотношением (2.5.111),

в котором вместо знака « \leq » стоит знак « \geq », снова является k -разбиением.

Докажем экстремальные свойства k -разбиения \mathfrak{X}^f_k . Пусть $Y = \{y\}$ — множество действительных неотрицательных чисел и $f_i(L)$ ($i = \overline{1, k}$) — аддитивные функции на подмножествах $L \subseteq X$. В частности,

$$f_i(L) = \sum_{x \in L} f_i(x). \quad (2.5.113)$$

Рассмотрим множество $\Sigma_k = \{\mathfrak{X}_k\}$ всех k -разбиений множества X и определим на его элементах $\mathfrak{X}_k = (L_i)$ функцию

$$F(\mathfrak{X}_k) = \sum_{i=1}^k f_i(L_i) = \sum_{i=1}^k \sum_{x \in L_i} f_i(x). \quad (2.5.114)$$

Два разбиения $\mathfrak{X}_k = \{L_i\}$ и $\mathfrak{X}'_k = \{L'_i\}$ будем называть *тождественными*: $\mathfrak{X}_k \equiv \mathfrak{X}'_k$, если $L_i = L'_i$ или $L_i \cap L'_i = \emptyset$ ($j \neq i$) для всех $i = \overline{1, k}$. Два разбиения не тождественны, если найдется хотя бы одно значение i ($i = \overline{1, k}$) и $x \in X$, что $x \in L_i \cap L'_j$ или $L'_i \cap L'_j \neq \emptyset$. Два разбиения \mathfrak{X} и \mathfrak{X}' будем называть *эквивалентными*: $\mathfrak{X}_k \sim \mathfrak{X}'_k$, если $F(\mathfrak{X}_k) = F(\mathfrak{X}'_k)$. Рассмотрим $\mathfrak{X}^f_k = (L^f_i)$ и произвольное $\mathfrak{X}_k = (L_i)$.

Покажем, что $F(\mathfrak{X}^f_k) \geq F(\mathfrak{X})$ для всех $\mathfrak{X} \in \Sigma_k$, что эквивалентно записи

$$F(\mathfrak{X}^f_k) = \max_{\mathfrak{X}_k \in \Sigma_k} F(\mathfrak{X}). \quad (2.5.115)$$

В самом деле, имеем из (2.5.114)

$$F(\mathfrak{X}^f_k) = \sum_{i=1}^k \sum_{x \in L^f_i} f_i(x) \equiv \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \sum_{x \in L^f_i \cap L_j} f_i(x);$$

$$F(\mathfrak{X}_k) = \sum_{j=1}^k \sum_{x \in L_j} f_j(x) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \sum_{x \in L_j \cap L^f_i} f_j(x).$$

Поэтому, учитывая, что $L^f_i \cap L_j \equiv L_j \cap L^f_i$ и $\sum_{x \in L^f_i \cap L_j} [f_i(x) - f_j(x)] \equiv 0$, получим, вычитая из первого

соотношения второе:

$$F(\mathfrak{X}_k^i) = F(\mathfrak{X}_k) = \sum_{i \neq j} \sum_{x \in L_i^f \cap L_j} [f_i(x) - f_j(x)]. \quad (2.5.116)$$

Поскольку $\mathfrak{X}_k^i \neq \mathfrak{X}_k$, то хотя бы для одной пары индексов (i, j) ($i \neq j$) имеем $L_i^f \cap L_j \neq \emptyset$, но тогда по самому определению разбиения \mathfrak{X}^f имеем $f_i(x) - f_j(x) \geq 0$. Поэтому $F(\mathfrak{X}_k^i) - F(\mathfrak{X}_k) \geq 0$ для всех $\mathfrak{X}_k \in \Sigma_k$.

Итак, утверждение (2.5.115) доказано полностью.

Заметим, что если функции $f_i(x)$ являются вероятностными, т. е. $\sum_{x \in X} f_i(x) = 1$ ($i = \overline{1, 2}$), то условия

(2.5.112) для них всегда выполняются. Далее будем рассматривать только вероятностные функции $f_i(x)$. Рассмотрим случай $k=2$, когда заданы две функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ и исследуем некоторые односторонние экстремальные неравенства.

Пусть $\mathcal{E} \subset X$ — произвольное подмножество $\mathcal{E} \in \mathfrak{X}$ всех подмножеств \mathfrak{X} множества X . Покажем, что есть такое $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{кр}$, которое обладает следующим свойством. Зафиксируем некоторое число α ($0 < \alpha < 1$) и рассмотрим все подмножества $\mathfrak{X}_\alpha = \{\mathcal{E}\}$, удовлетворяющие условию $\mathfrak{X}_\alpha = \{\mathcal{E} : f_0(\mathcal{E}) = \alpha\} \subset \mathfrak{X}$.

Определим $\mathcal{E}_{кр}$ следующим образом:

$$f_1(\mathcal{E}_{кр}) = \max_{\mathcal{E} \in \mathfrak{X}_\alpha} f_1(\mathcal{E}). \quad (2.5.117)$$

имеет место известная лемма Ю. Неймана и Э. Пирсона

Лемма 4.

$$\mathcal{E}_{кр} = \{x : f_1(x) \geq A f_0(x)\}, \quad (2.5.118)$$

где $A = A(\alpha)$ — некоторая константа, зависящая от величины α .

Доказательство. Пусть произвольное подмножество $\mathcal{E} \subset \mathfrak{X}_\alpha$ но $\mathcal{E} \neq \mathcal{E}_{кр}$. Имеем

$$f_0(\mathcal{E}_{кр} \setminus \mathcal{E}_{кр} \cap \mathcal{E}) = f_0(\mathcal{E}_{кр}) - f_0(\mathcal{E}_{кр} \cap \mathcal{E}),$$

$$f_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{кр} \cap \mathcal{E}) = f_0(\mathcal{E}) - f_0(\mathcal{E}_{кр} \cap \mathcal{E}),$$

но поскольку $f_0(\mathcal{E}_{кр}) = f_0(\mathcal{E}) = \alpha$, то

$$f_0(\mathcal{E}_{кр} \setminus \mathcal{E}_{кр} \cap \mathcal{E}) = f_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{кр} \cap \mathcal{E}).$$

Отсюда, используя условия (2.5.118), имеем

$$f_1(\mathcal{E}_{кр} \setminus \mathcal{E}_{кр} \cap \mathcal{E}) \geq Af_0(\mathcal{E}_{кр} \setminus \mathcal{E}_{кр} \cap \mathcal{E}) = Af_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{кр} \cap \mathcal{E}).$$

Снова используя условия (2.5.118), но теперь уже для множества $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{кр} \cap \mathcal{E} \subset \mathcal{E}_{кр}$, имеем

$$Af_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{кр} \cap \mathcal{E}) > f_1(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{кр} \cap \mathcal{E}).$$

Поэтому, объединяя последние неравенства, получаем

$$f_1(\mathcal{E}_{кр} \setminus \mathcal{E}_{кр} \cap \mathcal{E}) > f_1(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{кр} \cap \mathcal{E}).$$

Отсюда

$f_1(\mathcal{E}_{кр}) > f_1(\mathcal{E})$ и как следствие выполнение соотношения (2.5.117).

Итак, лемма 3 доказана полностью. Заметим, что из определения (2.5.118) следует монотонное убывание $A=A(\alpha)$ с ростом α . В самом деле чем больше A , тем меньше элементов удовлетворяет условию (2.5.117), т. е. тем меньше элементов во множестве $\mathcal{E}_{кр}$ и поэтому тем меньше величина α . Итак, существует обратная функция $\alpha=\Psi(A)$, убывающая с ростом A . Ясно, что $\Psi(0)=1$, поскольку для всех $x \in X$ имеем $f_0(X)=1$ и $X=\{x: f_1(x) \geq 0, f_0(x)=0\}$. Кроме того, $1 \geq f_1(\mathcal{E}_{кр}) \geq A \times \times f_0(\mathcal{E}_{кр}) = A\Psi(A)$. Отсюда $0 \leq \Psi(A) \leq A^{-1}$. Итак,

$$0 \leq \alpha = \Psi(A) \leq A^{-1}. \quad (2.5.119)$$

Так как с ростом A функция $\Psi(A)$ монотонно убывает, то при любом $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$ найдется такое A , что $\Psi(A) = \alpha$, при непрерывности функции $\Psi(A)$. Если функция $\Psi(A)$ дискретна, то необходимо назначать значения α в соответствии с набором ее дискретных значений. В статистике элементы x рассматриваются как случайные выборки, имеющие распределения $f_0(x)$ или $f_1(x)$, и ставится задача выбора между двумя гипотезами H_0 или H_1 о том, при каком из двух распределений получена выборка x . При этом оказывается существенным объем выборки n , который здесь не фигурирует. В статистике $f_1(\overline{\mathcal{E}}_{кр}) = 1 - f_1(\mathcal{E}_{кр}) = \beta$ называется вероятностью ошибки второго рода, а $\alpha = f_0(\mathcal{E}_{кр})$ — вероятностью ошибки первого рода.

Пусть по-прежнему $f_0(\mathcal{E}_{кр}) = \alpha$, $f_0(\overline{\mathcal{E}}_{кр}) = 1 - \alpha$, $f_1(\mathcal{E}_{кр}) = 1 - \beta$ и $f_1(\overline{\mathcal{E}}_{кр}) = \beta$.

Определим, однако, критическое множество $\mathcal{E}_{кр}$ не односторонним неравенством (2.5.118), а двусторонним не-

равенством для его дополнения $\bar{\mathcal{E}}_{кр}$:

$$\bar{\mathcal{E}}_{кр} = \{x : B < [f_1(x)/f_0(x)] < A\}. \quad (2.5.120)$$

А. Вальдом [85] были найдены следующие оценки величин A и B через α и β при условии $B < 1 < A$, которое должно всегда выполняться из-за возможности $f_0(x) \equiv f_1(x)$,

$$B < \frac{\beta}{1-\alpha} < 1 < \frac{1-\beta}{\alpha} < A. \quad (2.5.121)$$

В тех случаях, когда оценки (2.5.121) близки к равенствам (а в рассматриваемых приложениях это действительно так),

$$\alpha \sim \frac{1-B}{A-B} \text{ и } \beta \sim \frac{A-1}{A-B}. \quad (2.5.122)$$

Наряду с вероятностными функциями $f_0(x)$ и $f_1(x)$ рассмотрим вероятностные функции

$$\tilde{f}_a(x) = \left[\frac{f_1(x)}{f_0(x)} \right]^{h(a)} f_a(x) \text{ и } f_a(x), \quad (2.5.123)$$

где a — некоторый действительный параметр; $f_a(x)$ и $h(a)$ — действительные функции этого параметра, причем последняя функция определяется из соотношения

$$\sum_{x \in X} \left[\frac{f_1(x)}{f_0(x)} \right]^{h(a)} f_a(x) \equiv 1, \quad (2.5.124)$$

следующего из требования к $\tilde{f}_a(x)$ быть вероятностной функцией.

Возводя в степень $h(a)$ все члены неравенства (2.5.120), от чего оно не нарушится, получаем

$$\bar{\mathcal{E}}_{кр} = \left\{ x : B^{h(a)} < \left(\frac{f_1(x)}{f_0(x)} \right)^{h(a)} < A^{h(a)} \right\} \quad (2.5.125)$$

— определение $\bar{\mathcal{E}}_{кр}$, эквивалентное определению (2.5.120).

Определим теперь $\bar{\mathcal{E}}_{кра}$ для вероятностных функций $\tilde{f}_a(x)$ и $f_a(x)$. Имеем

$$\bar{\mathcal{E}}_{кра} = \left\{ x : B_a < \frac{\tilde{f}_a(x)}{f_a(x)} < A_a \right\}. \quad (2.5.126)$$

Если теперь приравнять

$$B_a = B^{h(a)} \text{ и } A_a = A^{h(a)}, \quad (2.5.127)$$

то принадлежность $x \in \bar{\mathcal{E}}_{кр}$ эквивалентна принадлежности $x \in \bar{\mathcal{E}}_{кра}$. Отсюда соотношения (2.5.122) и (2.5.127)

приводит к следующим вероятностям: $\alpha(a) = f_a(\mathcal{E}_{\text{кра}})$ и $\beta(a) = \bar{f}_a(\bar{\mathcal{E}}_{\text{кра}})$

$$\alpha(a) \sim \frac{1 - B^h(a)}{A^h(a) - B^h(a)}; \quad \beta(a) = \frac{A^h(a) - 1}{A^h(a) - B^h(a)}, \quad (2.5.128)$$

найденным А. Вальдом [85]. Заметим, что им же была показана оптимальность отношения правдоподобия $f_1(x)/f_0(x)$ (так называется это отношение в статистике) при двухпороговых критериях (2.5.120) для выбора между двумя гипотезами H_0 и H_1 , как это было сделано Ю. Нейманом и Э. Пирсоном для однопорогового критерия (2.5.118). Однако, в отличие от их случая, ему было необходимо использовать конкретный вид элементов x в виде так называемых выборок нарастающего объема n . При этом оптимальность в первом случае понималась как максимизация $1 - \beta$ при $\alpha = \text{const}$ и во втором — как $\min En$ при $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$.

Для дальнейших содержательных экстремальных оценок необходима конкретизация элементов x абстрактного множества X . Будем в дальнейшем рассматривать элементы $x \in R$ как значения стохастического аргумента (СА), связанного со значениями $y \in R^*$ стохастической функции (СФ) стохастической зависимостью (СЗ).

2.5.6. Оптимальное (s, M, λ) -обращение. Теоремы существования. Общий случай стохастической функции. Итак, рассмотрим СА, заданный своими значениями $x = (\alpha_t)$ ($t = \overline{1, s}$) с их вероятностями $p(x)$, $\sum_{x \in R} p(x) = 1$,

СФ, заданную своими значениями $y = (\beta_t)$ ($t = \overline{1, s}$) с их вероятностями $p^*(y)$, $\sum_{y \in R^*} p^*(y) = 1$, и СЗ, определяемую

условными вероятностями переходов $p_x(y) = P(y|x)$. При этом рассматриваем a элементарных значений СА $A = (A_\alpha)$ ($\alpha = \overline{1, a}$) и b элементарных значений СФ $B = (B_\beta)$ ($\beta = \overline{1, b}$), причем, вообще говоря, $a \neq b$ и $R = A^s$, $R^* = B^s$.

Рассмотрим M -множество значений СА $x \in R$:

$$X_M = \{x_1, \dots, x_u, \dots, x_v, \dots, x_M\},$$

среди которых могут быть, вообще говоря, и повторяющиеся. Будем называть его $(s \times M)$ -таблицей.

Рассмотрим M -покрытие множества значений СФ R^* :

$$\tilde{Y}_M = \{\tilde{\mathcal{E}}_1, \dots, \tilde{\mathcal{E}}_u, \dots, \tilde{\mathcal{E}}_v, \dots, \tilde{\mathcal{E}}_M\}.$$

Тогда множество

$$Y_{M+1} = \{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_u, \dots, \mathcal{E}_v, \dots, \mathcal{E}_M, \mathcal{E}_{M+1}\},$$

где

$$\mathcal{E}_u = \tilde{\mathcal{E}}_u \setminus \tilde{\mathcal{E}}_u \cap \bigcup_{v \neq u} \tilde{\mathcal{E}}_v \quad (u = \overline{1, M})$$

и

$$\mathcal{E}_{M+1} = R^* \setminus \sum_{u=1}^M \mathcal{E}_u$$

составляют $(M+1)$ -разбиение множества R^* , если $\mathcal{E}_u \neq \emptyset$ ($u = \overline{1, M+1}$).

Обратной к СФ назовем детерминированную функцию $\varphi(y) = x$, определяемую на $y \in R^*$ и принимающую значение x_u , если имеет место значение $y \in \mathcal{E}_u$, о котором нам только и известно. Это решение будем называть *обращением*. Если $y \in \mathcal{E}_{M+1}$, то в этом случае мы отказываемся приписать значению y какое-либо значение x_u (случай неопределенности, отказ от обращения).

Пусть заранее задано множество X_M и известно, что имеет место некоторое одно значение $x_u \in X_M$, но какое именно неизвестно. Пусть при этом в точности известно значение $y \in \mathcal{E}_u$ и принято согласно нашему правилу, что имело место значение аргумента x_u . При этом могут быть как правильные, так и неправильные решения (обращения), а также отказы от него.

Условные вероятности

$$P(u) = P(y \in \mathcal{E}_u | x_u) = \sum_{y \in \mathcal{E}_u} P(y | x_u) \quad (u = \overline{1, M}),$$

$$Q(u) = P(y \in \mathcal{E}_{M+1} | x_u) = \sum_{y \in \mathcal{E}_{M+1}} P(y | x_u)$$

будем называть вероятностями *правильного обращения* и *отказа от обращения* значения СА x_u соответственно.

Условную вероятность

$$P_e(u) = P[y \in R^* \setminus (\mathcal{E}_u \cup \mathcal{E}_{M+1}) | x_u] = 1 - P(u) - Q(u)$$

будем называть *вероятностью ошибки* обращения значения СА x_u .

Величины $\bar{P} = \min_{u=1, M} P(u)$; $\bar{P}_e = \max_{u=1, M} P_e(u)$ и $\bar{Q} = \max_{u=1, M} Q(u)$ будем называть вероятностями *правильного обращения*, *ошибки обращения* и *отказа от обращения* $(s \times M)$ -таблицы X_M соответственно.

Пусть заданы вероятности $p(x_u) = P_u$. По условию только x_u могут иметь место. Поэтому $\sum_{u=1}^M P_u = 1$. Величины

$$\bar{P} = \sum_{u=1}^M P_u P(u); \quad \bar{P}_e = \sum_{u=1}^M P_u P_e(u) \quad \text{и}$$

$$\bar{Q} = \sum_{u=1}^M P_u Q(u)$$

будем называть *средними вероятностями правильного обращения*, *ошибки обращения* и *отказа от обращения* $(s \times M)$ -таблицы X_M соответственно при обратной функции $\varphi(y) = x_u$. Ясно, что все эти вероятности зависят от X_M и φ :

$$P = P(X_M, \varphi); \quad \bar{P} = \bar{P}(X_M, \varphi);$$

$$P_e = P_e(X_M, \varphi); \quad \bar{P}_e = \bar{P}_e(X_M, \varphi);$$

$$Q = Q(X_M, \varphi); \quad \bar{Q} = \bar{Q}(X_M, \varphi);$$

$$P_e, Q \leq 1 - P; \quad \bar{P}_e, \bar{Q} \leq 1 - \bar{P}. \quad (2.5.129)$$

Пусть заданы некоторая величина λ ($0 < \lambda < 1$). (s, M, λ) -обращением [86] будем называть $(s \times M)$ -таблицу X_M вместе с обратной функцией $\varphi(y) = x_u$, которые приводят к вероятностям (средним вероятностям) правильного обращения

$$P = P(X_M, \varphi) \geq 1 - \lambda \quad (\bar{P} = \bar{P}(X_M, \varphi) \geq 1 - \lambda). \quad (2.5.130)$$

Из соотношений (2.5.129) и (2.5.130) следует, что для (s, M, λ) -обращения имеем

$$P_e, Q, \bar{P}_e, \bar{Q} < \lambda. \quad (2.5.131)$$

Заметим, что существование (s, M, λ) -обращения с величиной $P \geq 1 - \lambda$ влечет за собой существование (s, M, λ) -обращения с величиной $\bar{P} \geq 1 - \lambda$, но не наоборот.

Зафиксируем некоторую $(s \times M)$ -таблицу X_M и рассмотрим класс Φ_0 обратных функций φ , для которых $\mathcal{E}_{M+1} = \emptyset$, т. е. $Q(u) = 0$. *Оптимальными* из класса Φ_0 назовем такие обратные функции φ_0 и $\tilde{\varphi}_0$, которые приводят к

$$P(X_M, \varphi_0) = \max_{\varphi \in \Phi_0} P(X_M, \varphi) \text{ и } \bar{P}(X_M, \tilde{\varphi}_0) = \\ = \max_{\varphi \in \Phi_0} \bar{P}(X_M, \varphi).$$

Существование максимумов здесь связано с конечностью класса Φ_0 . В статистической терминологии оптимальное обращение является частным случаем оптимального выбора между M гипотезами $H_u = H(x = x_u)$ ($u = \overline{1, M}$) по выборке y объемом s . Обратные функции φ_0 и $\tilde{\varphi}_0$ здесь называются процедурами выбора между гипотезами или решающими правилами. В статистике доказывается, что «границы» областей $\mathcal{E}_u \in R^*$ определяются по «отношению правдоподобия» (Для случая двух гипотез такое доказательство было нами приведено в п. 2.5.5, лемма 4.)

Оптимальными $(s \times M)$ -таблицами X_M^0 и \tilde{X}_M^0 называются такие, которые приводят к

$$P(X_M^0, \tilde{\varphi}_0) = \max_{X_M \in W} P(X_M, \varphi_0); \\ P(\tilde{X}_M^0, \tilde{\varphi}_0) = \max_{X_M \in W} \bar{P}(X_M, \tilde{\varphi}_0)$$

соответственно, где W — конечное множество всевозможных $(s \times M)$ -таблиц.

Перейдем, наконец, к основному определению.

Оптимальным в смысле К. Шеннона (s, M, λ) -обращением [86] называется (s, M, λ) -обращение, имеющее при фиксированных s и λ максимальное значение M .

Для широкого класса СФ доказана известная теорема Шеннона. Именно, каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и $\lambda > 0$ для любого целого s существует $(s, \lceil \exp s (C - k_1 / \sqrt{s}) \rceil, \lambda)$ -обращение и не для какого s не существует $(s, \exp s (C + k_2 / \sqrt{s}), \lambda)$ -обращение, где C , k_1 и k_2 не зависят от s [86]. Дальнейшее изложение касается конструктивного построения оптимальных $(s \times M)$ -таблиц и обрат-

ных функций φ . Если числа M не целые, то будем брать ближайшие к ним целые значения, не оговаривая этого особо.

Оптимальная обратная функция φ_0 определяется разбиением пространства R^* на непересекающиеся множества \mathcal{E}_u вида [80]

$$\mathcal{E}_u = \{y : P(y/x_u) \geq P(y/x_v), v \neq u\}, \quad (2.5.132)$$

т. е. считается, что имеет место x_u , для которого

$$P(y/x_u) = \max_{v=1, \dots, M} P(y/x_v). \quad (2.5.133)$$

Такая обратная функция называется функцией, построенной по *максимуму правдоподобия*. Доказывается ее оптимальность в смысле Шеннона.

Примером неоптимальной обратной функции φ_* может служить определяющее ее покрытие множества R^* вида

$$\mathcal{E}_u = \{y : P(y/x_u) \geq P_0\}. \quad (2.5.133')$$

Величина P_0 называется порогом, а φ_* *пороговой* обратной функцией.

Пусть $P(x)$ — вероятность значения x (не путать с вероятностью P_u использования u -го значения x_u !). Тогда вероятность P_y значения y функции имеет вид

$$P(y) = \sum_{x \in R} P(x) P(y/x).$$

Пусть имеет место x и выдвигается гипотеза H_1 о том, что имеет место x , тогда по определению $P(x, y) = P(x)P(y/x)$.

Пусть имеет место $x' \neq x$ и выдвигается гипотеза H_0 о том, что имеет место x , тогда по определению $P(x, y) = P(x)P(y)$. Итак, имеем [80]

$$P(x, y) = \begin{cases} P_0(x, y) = P(x)P(y) & \text{при гипотезе } H_0, \\ P_1(x, y) = P(x)P(y/x) & \text{при гипотезе } H_1. \end{cases} \quad (2.5.134)$$

Оптимальный классический выбор между двумя гипотезами H_0 и H_1 , как известно (см. п. 2.5.5, лемма 4), состоит в разбиении пространства R^* на два множества $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_{кр}$ и $\bar{\mathcal{E}}_0 = \mathcal{E}_1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \{y : L(x, y) < sX\}, \\ \mathcal{E}_1 &= \{y : L(x, y) \geq sX\}, \end{aligned} \quad (2.5.135)$$

где X — некоторое действительное число, называемое порогом, а $L(x, y) = \ln[P_1(x, y) / P_0(x, y)]$ ($P_0(x, y) > 0$) называется *отношением правдоподобия*. В рассматриваемом случае (см. (2.5.134)) величина $L(x, y)$ имеет вид

$$L(x, y) = \ln[P(y/x) / P(y)]. \quad (2.5.136)$$

В предыдущем пункте мы доказали оптимальность однопороговой обратной функции при $M=2$, которая здесь формулируется следующим образом. Зафиксируем вероятность α ошибки первого рода:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha(X) = P(y \in \mathcal{E}_1 / H_0) = \\ &= P(y : L(x, y) > sX / H_0). \end{aligned} \quad (2.5.137)$$

Тогда из всех возможных разбиений пространства R^* к минимуму вероятности β ошибки второго рода

$$\beta = \beta(X) = P(y \in \mathcal{E}_0 / H_1) = P(y : L(x, y) \leq sX / H_1) \quad (2.5.138)$$

приводит указанное разбиение (2.5.135). Заметим, что при фиксированном $y = \text{const}$ и переменном x величина $L(x, y)$ (см. (2.5.136)) является монотонной функцией $P(y/x)$. Поэтому для единообразия всюду, где это возможно, мы будем использовать величину $L(x, y)$ вместо $P(y/x)$.

Имеет место

Теорема 2 [80]. Пусть все $M = \exp(sR)$ значений x_u ($u = \overline{1, M}$) $(s \times M)$ -таблицы X_M используются равновероятно ($P_u = 1/M$) и вероятности $P(y/x_u)$ ($u = \overline{1, M}$) не зависят от u . Тогда при любой $(s \times M)$ -таблице X_M и любой обратной функции φ средняя вероятность правильного обращения

$$\bar{P}(X_M, \varphi) = \frac{1}{M} \sum_{u=1}^M \sum_{y \in \mathcal{E}_u} P(y/x_u) \leq 1 - \beta(X_R), \quad (2.5.139)$$

где величина X_R определяется из соотношения

$$\alpha(X_R) \leq M^{-1} = \exp(-sR), \quad (2.5.140)$$

а функции $\alpha(X)$ и $\beta(X)$ определяются соотношениями (2.5.137) и (2.5.138) соответственно.

Доказательство. Покажем, что $\bar{P}(X_M, \varphi)$ при фиксированной $(s \times M)$ -таблице X_M достигает максимума при $\varphi = \varphi_0$, когда множества \mathcal{E}_u при фиксированных

y и переменных x_u строятся согласно соотношению (2.5.132) или, что эквивалентно, по максимуму правдоподобия

$$\mathcal{E}_u = \{y: L(x_u, y) \geq L(x_v, y), v \neq u\}, \quad (2.5.141)$$

причем произвольно зачислим y в множества $\mathcal{E}_u, \mathcal{E}_v$ или \mathcal{E}_w , если

$$L(x_u, y) = L(x_v, y) = \dots = L(x_w, y).$$

В самом деле, пусть произвольная функция $\varphi \neq \varphi_0$, тогда найдется в соответствующем ей разбиении множество $\mathcal{E}'_u \neq \mathcal{E}_u$, т. е. существует $y \in \mathcal{E}'_u$ и $y \notin \mathcal{E}_u$. Но так как $\{\mathcal{E}_u\}$ составляют разбиение, то найдется такое $v \neq u$, что $y \in \mathcal{E}_v$ и из самого определения множества \mathcal{E}_v имеем $P(y/x_v) \geq P(y/x_u)$. Поэтому слагаемое в сумме (2.5.139), соответствующее y , будет больше или равно для разбиения, соответствующего φ_0 , чем для разбиения, соответствующего φ , т. е. $\bar{P}(X_M, \varphi_0) \geq \bar{P}(X_M, \varphi)$.

Рассмотрим теперь покрытие множества R^* множествами

$$\tilde{\mathcal{E}}_u = \{y: L(x_u, y) > sX\}, \quad (2.5.142)$$

где $sX = \max_{u \neq v} \max_{y \in \mathcal{E}_u} L(x_v, y)$. Тогда очевидно, что если

$y \in \mathcal{E}_u$, то $y \in \tilde{\mathcal{E}}_u$, поэтому $\mathcal{E}_u \subseteq \tilde{\mathcal{E}}_u$, и отсюда, обозначив

$$P(\mathcal{E}/x) = \sum_{y \in \mathcal{E}} P(y/x) \text{ и } P(\mathcal{E}) = \sum_{y \in \mathcal{E}} P(y),$$

получим

$$P(\mathcal{E}_u/x_u) \leq P(\tilde{\mathcal{E}}_u/x_u) \text{ и } P(\mathcal{E}_u) \leq P(\tilde{\mathcal{E}}_u). \quad (2.5.143)$$

Используем полученные оценки (2.5.143). По условиям теоремы условные вероятности $P(y/x_u)$ не зависят от u , поэтому и безусловные вероятности $P(y)$ не зависят от u . Используя соотношения (2.5.139), (2.5.142) и (2.5.143), получаем

$$\begin{aligned} \bar{P}(X_M, \varphi_0) &= \frac{1}{M} \sum_{u=1}^M P(\mathcal{E}_u/x_u) \leq \frac{1}{M} \sum_{u=1}^M P(\tilde{\mathcal{E}}_u/x_u) = \\ &= \frac{1}{M} \sum_{u=1}^M P(L(x_u, y) > sX) = P(L(x, y) > sX/H_1); \end{aligned}$$

$$1 = \sum_{u=1}^M P(\mathcal{E}_u) \leq \sum_{u=1}^M P(\tilde{\mathcal{E}}_u) = MP(L(x, y) > sX/H_0),$$

из которых следует утверждение теоремы 2.

Заметим, что оптимальное в смысле Шеннона обращение можно получить с помощью следующего построения. Пусть задана величина $P(X_M, \varphi) = P$. Берем произвольное $x'_1 \in R$. Зачислим в множество $\mathcal{E}_{x'_1}$ все те $y' \in R^*$, для которых неубывающие вероятности

$$P(y'_1/x'_1) \geq P(y'_2/x'_1) \geq \dots \geq P(y'_{m(x'_1)}/x'_1)$$

в нарастающей с ростом $m(x'_1)$ сумме впервые дают при некотором значении $m(x'_1)$ величину

$$P(\mathcal{E}_{x'_1}/x'_1) = \begin{cases} \sum_{u=1}^{m(x'_1)} P(y'_u/x'_1) \geq P, \\ m(x'_1)-1 \\ \sum_{u=1} P(y'_u/x'_1) < P. \end{cases} \quad (2.5.144)$$

При этом число $N(\mathcal{E}_{x'_1})$ элементов множества $\mathcal{E}_{x'_1}$ равно $m(x'_1)$. Определим x_1 следующим образом:

$$N(\mathcal{E}_{x_1}) = \min_{x'_1 \in R} N(\mathcal{E}_{x'_1})$$

и обозначим $\mathcal{E}_{x_1} = \mathcal{E}_1$.

Аналогично определим $x_2 \in R \setminus x_1$ и соответствующее ему $\mathcal{E}_2 = R^* \setminus \mathcal{E}_1$, для которого невозрастающие вероятности $P(y'_u/x_2)$ в сумме с минимальным числом членов дают впервые величину, большую или равную P , и т. д. В результате после M шагов мы либо в точности исчерпаем все множество R^* , либо еще останется его часть

$$\mathcal{E}_{M+1} = R^* \setminus \sum_{u=1}^M \mathcal{E}_u \neq \emptyset,$$

для которой не найдется значения $x_{M+1} \in R \setminus X^0_M$ ($X^0_M = \{x_1, \dots, x_M\}$), удовлетворяющее условию $P(\mathcal{E}_{M+1}/x_{M+1}) \geq P$.

По самому построению $(s \times M)$ -таблицы X^0_M ясно, что при фиксированных s и P она приводит к максимальному числу M , так как требует предельно малочисленных множеств \mathcal{E}_u . Итак, $(s \times M)$ -таблица X^0_M явля-

ется оптимальной в смысле Шеннона. В литературе она получила название *плотно-упакованной*. Однако получение ее неосуществимо, так как с вероятностью $P(N)=1$ число N операций для получения X_M^0 приводит к цели, но $N > \max(a^s, b^s)$ (необходим перебор всех элементов R и R^*). Сразу случайно получить требуемое X_M^0 можно лишь с вероятностью порядка N^{-1} .

Теорема 2 касалась верхней оценки вероятности $\bar{P}(X_M, \varphi)$. Нижнюю оценку вероятности $P(X_M, \varphi)$ содержит

Теорема 3 [81]. Существует $(s, \exp(sR), \lambda)$ -обращение с обратной функцией φ_0 , построенной по максимуму правдоподобия, когда

$$\mathcal{E}_u = \{y : L(x_u, y) \geq \max_{v \neq u} L(x_v, y)\}; \quad (2.5.145)$$

и

$$\lambda = 2 \max \left\{ \beta(X_R), M \sum_{x > X_R} \alpha(X) \beta(X) \right\}, \quad (2.5.146)$$

где $X = L(x, y)/s$;

$$\alpha(X_R) \leq M^{-1}. \quad (2.5.147)$$

Доказательство. Для доказательства будем значения x заносить в $(s \times M)$ -таблицу $X_M = \{x_u\}$ независимо друг от друга с вероятностью $P(x)$. Зафиксируем пару значений (x, y) ($x \in R, y \in R^*$). Тогда полную вероятность правильного обращения $EP(X_M, \varphi)$ по максимуму правдоподобия (2.5.145) можно рассматривать как математическое ожидание вида

$$\begin{aligned} EP(X_M, \varphi) &= \sum_{\substack{x, y \\ L(x, y) \geq \max_{x' \in X_M \setminus x} L(x', y)}} P(x, y, X_M \setminus x) = \\ &= \sum_{x, y} P(x, y) \sum_{\substack{L(x, y) \geq \max_{x' \in X_M \setminus x} L(x', y)}} P(X_M \setminus x / x, y), \end{aligned} \quad (2.5.148)$$

но (см. (2.5.137) и (2.5.138))

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{L(x, y) < \\ < \max_{x' \in X_M \setminus x} L(x', y)}} P(X_M \setminus x / x, y) &= P(\max_{x' \in X_M \setminus x} L(x', y) > L(x, y)) \leq \\ &\leq \begin{cases} M\alpha(L(x, y)/s) & \text{при } L(x, y) > sX_R, \\ 1 & \text{при } L(x, y) \leq sX_R, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5.149)$$

где X_R определяется соотношением (2.5.147). Подставив оценки (2.5.149) в соотношение (2.4.148), получим

$$\begin{aligned}
 EP(X_M, \varphi) &= \\
 &= 1 - \sum_{x, y} P(x, y) \sum_{\substack{\max L(x', y) > L(x, y) \\ x' \in X_M \setminus x}} P(X_M \setminus x/x, y) \geq \\
 &\geq 1 - \sum_{L(x, y) \leq sX_R} P(x, y) \cdot 1 - \\
 &- \sum_{L(x, y) > sX_R} P(x, y) M \alpha(L(x, y)/s) = 1 - \beta(X_R) - \\
 &- M \sum_{X > X_R} \alpha(X) \sum_{L(x, y) = sX} P(x, y) \geq 1 - \beta(X_R) - \\
 &- M \sum_{X > X_R} \alpha(X) \sum_{L(x, y) \leq sX} P(x, y) = 1 - \beta(X_R) - \\
 &- M \sum_{X > X_R} \alpha(X) \beta(X) \geq 1 - 2 \max \left\{ \beta(X_R), \right. \\
 &\quad \left. M \sum_{X > X_R} \alpha(X) \beta(X) \right\}. \quad (2.5.150)
 \end{aligned}$$

Величина $EP(X_M, \varphi)$ является математическим ожиданием функции $P(X_M, \varphi)$ случайной $(s \times M)$ -таблицы X_M . Поэтому существует хотя бы одна конкретная $(s \times M)$ -таблица X_M^* , содержащаяся в $(s, \exp(sR), \lambda)$ -обращении, у которого величина $1 - \lambda$ удовлетворяет, как и величина $EP(X_M, \varphi)$, неравенству (2.5.150), что и доказывает теорему 3.

Оценкам теоремы 3 можно придать более конкретный вид, если имеет место соотношение

$$\gamma(X_R) = M \sum_{X > X_R} \alpha(X) \beta(X) \begin{cases} < \beta(X_R) & \text{при } R < R_{кр}, \\ > \beta(X_R) & \text{при } R > R_{кр}, \end{cases} \quad (2.5.151)$$

где $R_{кр}$ определяется соотношением

$$\beta(X_{R_{кр}}) = M \sum_{X > X_{R_{кр}}} \alpha(X) \beta(X). \quad (2.5.152)$$

Подставив оценку (2.5.151) в соотношения (2.5.150), получим для параметра λ ($s, \exp(sR), \lambda$)-обращения выражение

$$\lambda = \begin{cases} 2M \sum_{x > X_R} \alpha(X) \beta(X) & \text{при } R < R_{кр}, \\ 2\beta(X_R) & \text{при } R > R_{кр}, \end{cases} \quad (2.5.153)$$

где величина $R_{кр}$ определяется соотношением (2.5.152).

Соотношения (2.5.139), (2.5.153) и (2.5.151) показывают, что для $R < R_{кр}$ вероятность правильного обращения для плотно-упакованной таблицы может оказаться существенно большей, чем аналогичная вероятность для случайно образованной таблицы. Дальнейшее уменьшение этой вероятности связано с использованием порогового обращения вместо максимально правдоподобного. Имеет место

Теорема 4. Существует ($s, \exp(sR), \lambda$)-обращение с пороговой обратной функцией $\varphi_{пор}$, когда

$$\mathcal{E}_u = \{y: L(x_u, y) \geq sX(R)\}; \quad (2.5.154)$$

$$\lambda \leq 2\beta[X(R)], \quad (2.5.155)$$

где величина $X(R)$ порога определяется из соотношения

$$\beta[X(R)] = \alpha[X(R)] \exp(sR). \quad (2.5.156)$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 3, будем заносить значения x в ($s \times M$)-таблицу X_M независимо с вероятностями $P(x)$. Тогда в рассматриваемом случае порогового обращения полная вероятность правильного обращения имеет вид

$$\begin{aligned} EP(X_M, \varphi) &= \sum_{\substack{\max \\ x' \in X_M \setminus x}}^{L(x, y) \geq sX} P(x, y, X_M \setminus x) = \\ &= 1 - \sum_{L(x, y) < sX} P(x, y) \sum_{\substack{\max \\ x' \in X_M \setminus x}}^{L(x', y) \geq sX} P(X_M \setminus x/x, y) \geq \\ &\geq 1 - \beta(X) - M\alpha(X). \end{aligned} \quad (2.5.157)$$

Выбрав порог $X = X(R)$, удовлетворяющий соотношению (2.5.156), получим из соотношения (2.5.157) оценку

$$EP(X_M, \varphi) \geq 1 - 2\beta[X(R)]. \quad (2.5.158)$$

Соображения, аналогичные приведенным при доказательстве теоремы 3, говорят о том, что существует хотя бы

одно $(s, \exp(sR), \lambda)$ -обращение, у которого параметр $1-\lambda$ удовлетворяет, как и величина $EP(X_M, \varphi)$, неравенству (2.5.158), что и доказывает теорему 4.

Эта теорема впервые была доказана в работе [42] для частного случая СФ с независимыми переходами (см. далее) с излишними ограничениями. Для того же частного случая эти ограничения были сняты в работе [87].

Снова, как и при доказательстве теоремы 2, возникает вопрос: не содержат ли теоремы 3 и 4 конструктивного элемента, связанного с рекомендацией случайного выбора $(s \times M)$ -таблицы X_M ? Для этого было бы достаточно иметь алгоритм получения псевдослучайных значений $f(u) = x_u$ для СА и сопоставления их со значением y СФ. Однако при этом надо быть уверенным, что случайное значение $P(X_M, \varphi) > P_0$, где вероятность P_0 достаточно близка к единице. Другими словами, надо оценить значение вероятности $P' = P[P(X_M, \varphi) \geq P_0] > P'_0$.

Используя неравенство Чебышева, легко получить оценку

$$P' = P[P(X_M, \varphi) \geq 1 - t(1 - EP(X_M, \varphi))] > 1 - t^{-1},$$

нетривиальную для $t \geq 1$, поэтому всегда имеем $P_0 \leq EP(X_M, \varphi)$. При этом для достаточно близких к единице значений $EP(X_M, \varphi) \geq 1 - t^{-2}$ всегда имеем

$$P'_0 < P_0 \leq EP(X_M, \varphi). \quad (2.5.159)$$

Таким образом (см. соотношения (2.5.131)), гарантировать получение $(s, \exp(sR), \lambda)$ -обращения для случайного выбора $(s \times M)$ -таблицы можно лишь с вероятностью $P' < 1 - \lambda$. Можно показать, что использование усиленного С. Н. Бернштейном [88] неравенства Чебышева в рассматриваемом случае вероятности P' , близкой к единице, приводит к тривиальным результатам.

Итак, имеющиеся оценки могут гарантировать получение «хороших» случайных $(s \times M)$ -таблиц с вероятностью P'_0 , меньшей, чем гарантированная вероятность P_0 правильного обращения с ее помощью. Это обстоятельство тем более неприятно, что экспериментальное определение неизвестной вероятности правильного обращения $P(X_M, \varphi)$ по мере приближения ее к единице, делается все более трудоемким.

Таким образом, теперь не из-за трудоемкости алгоритма теоремы 2, а из-за малости оцененной вероятности

P'_0 алгоритм получения случайной $(s \times M)$ -таблицы в теоремах 3 и 4 не может рассматриваться как действительно гарантирующий получение оптимальной $(s \times M)$ -таблицы.

Оценки, полученные в теоремах 2—4, рассматривались при произвольном распределении $P(x)$. В последних двух теоремах, при фиксированном условном распределении $P(y/x)$ распределение $P(y)$ однозначно определялось распределением $P(x)$. Можно формально считать, что и для теоремы 1 имеет место та же зависимость между $P(y)$ и $P(x)$. Поэтому примем за исходное распределение $P(x)$. Пусть задано (s, M_s, λ_s) -обращение с параметрами M_s и λ_s , в общем случае зависящими от s . Пусть существуют пределы

$$C_\lambda = \lim_{s \rightarrow \infty} [(\ln M_s)/s] \quad \text{при } \lambda_s = \lambda = \text{const},$$

$$\lambda(M) = \lim_{s \rightarrow \infty} [(\ln \lambda_s/s)] \quad \text{при } M_s = M = \text{const}.$$

Полученные пределы C_λ и $\lambda(M)$, не зависящие от s , являются функционалами, заданными на распределениях $P(x)$ и $P(y/x)$, из которых лишь первое мы можем варьировать:

$$C_\lambda = C_\lambda [P(x)] \quad \text{и} \quad \lambda(M) = \lambda [M, P(x)].$$

Ясно, что важно добиться выбором $P(x)$ возможно большего значения $C_\lambda [P(x)]$ и возможно меньшего значения $\lambda [M, P(x)]$. Вопрос о том, можно ли этого добиться одновременно, в общем случае не ясен. Поэтому, как правило, выбирается то распределение $P(x) = P^*_\lambda(x)$, которое обращает в максимум величину $C_\lambda [P(x)]$:

$$C_\lambda = \max_{P(x)} C_\lambda [P(x)] = C_\lambda [P^*_\lambda(x)].$$

Ясно, что это распределение $P^*_\lambda(x)$ зависит лишь от λ и условного распределения $P(y/x)$. Рассмотрим величину

$$C = C_0 [P^*_0(x)] = \lim_{\lambda \rightarrow 0} C_\lambda [P^*_\lambda(x)],$$

которая, как и соответствующее распределение $P^*_0(x)$, зависит теперь лишь от условного распределения $P(y/x)$. Величина C называется *пропускной способностью* СФ, а распределение $P^*_0(x)$ — *оптимальным*.

2.5.7. Теоремы существования. Стохастическая функция с независимыми переходами. Полученные в предыдущем пункте оценки имеют слишком общий характер для сколько-нибудь эффективных расчетов. Единственным частным случаем, в котором можно получить эффективные оценки, является случай СФ с независимыми переходами, рассмотренный в п. 2.3.5. В этом случае

$$P(y/x) = \prod_{t=1}^s p_{\alpha_t}^{\beta_t} = \prod_{\alpha\beta} (p_{\alpha}^{\beta})^{m_{\alpha\beta}} = \prod_{\alpha} \vec{p}_{\alpha}^{m_{\alpha}}, \quad (2.5.160)$$

где числа $m_{\alpha\beta}$ являются элементами матричного расстояния $\mathbf{m} = \mathbf{m}(x, y) = \|m_{\alpha\beta}\|$ между x и y . Вероятности p_{α}^{β} являются элементами вероятностной $(a \times b)$ -матрицы $\mathbf{p} = \|p_{\alpha}^{\beta}\| = (\vec{p}_{\alpha}) \left(\sum_{\beta} p_{\alpha}^{\beta} = 1 \right)$. Рассмотрим бернуллевский случай СА, когда

$$P(x) = \prod_{t=1}^s p_{\alpha_t} = \prod_{\alpha} p_{\alpha}^{m_{\alpha}} = \vec{p}^{\vec{m}}, \quad (2.5.161)$$

где числа $m_{\alpha} = \sum_{\beta} m_{\alpha\beta}$ — компоненты вектора $\vec{m} = (m_{\alpha})$, а вероятности p_{α} — компоненты вероятностного вектора

$$\vec{p} = (p_{\alpha}) \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} = s, \sum_{\alpha} p_{\alpha} = 1 \right).$$

Из соотношений (2.5.160) и (2.5.161) получим

$$P(y) = \sum_{x \in R} P(x) P(y/x) = \prod_{t=1}^s q_{\beta_t} = \prod_{\beta} q_{\beta}^{m_{\beta}^*}, \quad (2.5.162)$$

где $q_{\beta} = \sum_{\alpha} p_{\alpha} p_{\alpha}^{\beta}$; $m_{\beta}^* = \sum_{\alpha} m_{\alpha\beta}$ или в матричной записи

$$\vec{q} = \vec{p} \mathbf{p} \quad \text{и} \quad \vec{m}^* = (m_{\beta}^*) \left(\sum_{\beta} m_{\beta}^* = s, \sum_{\beta} q_{\beta} = 1 \right).$$

Заметим, что величина $L(x, y)$, определяемая соотношением (2.5.136), в рассматриваемом случае (см. выражения (2.5.160) и (2.5.162)) имеет вид

$$L(x, y) = \sum_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} \ln(p_{\alpha}^{\beta}/q_{\beta}). \quad (2.5.163)$$

Поэтому из сопоставления соотношений (2.5.163) и (2.5.100) следует, что для определяемых соотношениями (2.5.137) и (2.5.138) вероятностей $\alpha(X)$ и $\beta(X)$ имеют место оценки (2.5.102). Воспользуемся последними для определения характерных констант X_R , $X(R)$ и $R_{кр}$. Заменяя в соотношении (2.5.140) $\alpha(X_R)$ ее верхней оценкой (2.5.102) при $X_R < E_1$, получим

$$k^0(X_R - E_0) = R. \quad (2.5.164)$$

Произведя аналогичные замены в соотношении (2.5.156) при $E_0 < X(R) < E_1$, получим

$$k^0[X(R) - E_0] - k^1[X(R) - E_1] = R. \quad (2.5.165)$$

Исследуем теперь сумму в левой части оценки (2.5.151), используя оценки (2.5.102) при $E_0 < X < E_1$. Для этого заметим, что в этой сумме содержится слагаемых не более, чем различных значений неотрицательной целочисленной $(a \times b)$ -матриц $m = \|m_{\alpha\beta}\|$ ($\sum_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} = s$), т. е.

заведомо не более s^{ab} . Поэтому имеем

$$\sum_{X > X_R} \alpha(X) \beta(X) = \exp[-sR_{\text{впч}} + O(\ln s)], \quad (2.5.166)$$

где

$$\begin{aligned} R_{\text{впч}} &= \min_X [k^0(X - E_0) + k^1(X - E_1)] = \\ &= k^0(X_{R_{кр}} - E_0) + k^1(X_{R_{кр}} - E_1), \end{aligned} \quad (2.5.166)$$

и существование минимума связано с характером зависимости k^0 - и k^1 -функций от X (см. конец п. 2.5.4). При этом

$$k^0(X_R - E_0) = R \text{ и } k^0(X_{R_{кр}} - E_0) = R_{кр}. \quad (2.5.167)$$

Заметим, что так определенные значения $X_{R_{кр}}$ и $R_{кр}$ удовлетворяют соотношению (2.5.152). Легко видеть, что при изменении X_R от E_0 до E_1 величина R меняется от 0 до E_1 . Это следует из связи между величинами X_R и R , заданной соотношением (2.5.167) и из соотношений (2.5.106).

Покажем теперь, что при $R = R_{кр}$ выражения $k^1(X_R - E_1)$ и $R_{\text{впч}} - R$ совпадают и имеют одну и ту же производную по R , равную -1 . Первая часть утвержде-

няя очевидна, вторая — требует доказательства. В самом деле, из соотношения (2.5.166') следует, что сумма $k^0(X-E_0) + k^1(X-E_1)$ при $X=X_{кр}$ достигает своего экстремального значения. Поэтому

$$\left. \frac{dk^0(X-E_0)}{dX} \right|_{X=X_{кр}} + \left. \frac{dk^1(X-E_1)}{dX} \right|_{X=X_{кр}} = 0.$$

Отсюда

$$\left. \frac{dk^1(X-E_1)}{dX} \right|_{X=X_{кр}} / \left. \frac{dk^0(X-E_0)}{dX} \right|_{X=X_{кр}} = -1. \quad (2.5.168)$$

Дифференцируя по R соотношение (2.5.164), получаем соотношение

$$1 \equiv \frac{dk^0(X_R-E_0)}{dR} = \frac{dk^0(X_R-E_0)}{dX_R} \frac{dX_R}{dR}. \quad (2.5.169)$$

Имеем также

$$\frac{dk^1(X_R-E_1)}{dR} = \frac{dk^1(X_R-E_1)}{dX_R} \frac{dX_R}{dR}.$$

Поделив обе части второго из соотношений (2.5.169) на соответствующие части первого, получим

$$\frac{dk^1(X_R-E_1)}{dR} = \frac{dk^1(X_R-E_1)}{dX_R} / \frac{dk^0(X_R-E_0)}{dX_R}. \quad (2.5.170)$$

Отсюда, используя соотношения (2.5.168) и (2.5.170), получаем окончательно

$$\left. \frac{dk^1(X_R-E_1)}{dR} \right|_{X_R=X_{кр}} = \frac{d}{dR} (R_{выч} - R) \equiv -1. \quad (2.5.171)$$

Определим теперь пропускную способность C СФ с независимыми переходами и соответствующее оптимальное распределение $P_0(x)$, которое в рассматриваемом случае задается вероятностным вектором $\vec{p}^{(0)} = (p_\alpha^{(0)})$.

Используя общее определение пропускной способности, приведенное в конце предыдущего пункта, с учетом соотношения (2.5.101) будем иметь в рассматриваемом случае

$$C = \max_{\vec{p}} E_1 = h(\vec{q}^{(0)}) - \sum_{\alpha} p_{\alpha}^{(0)} h(\vec{p}_{\alpha}), \quad (2.5.172)$$

где $\vec{q}^{(0)} = \vec{p}^{(0)} \mathbf{p}$. Введем специальные обозначения для выражений $k^1(X_R-C)$ и $k^1(X(R)-C)$ при оптимальном

распределении $p^{(0)}$ как функции R :

$$k^1(X_R - C) = E_{\text{opt}}(R); \quad k^1(X(R) - C) = k(R). \quad (2.5.173)$$

Положим также

$$E(R) = \begin{cases} R_{\text{выч}} - R & \text{при } 0 \leq R < R_{\text{кр}}, \\ E_{\text{opt}}(R) & \text{при } R_{\text{кр}} < R < C. \end{cases} \quad (2.5.174)$$

Используя оценки (2.5.102) соотношения (2.5.139), (2.5.146) и (2.5.155) и обозначения (2.5.173) и (2.5.174), получаем следующий вывод.

Для $0 < R < C$ существует $(s, \exp(sR), \lambda)$ -обращение с параметром λ , удовлетворяющим соотношениям для различных $(s \times M)$ -таблиц и обратных функций φ :

$$\lambda = \begin{cases} \exp[-sE_{\text{opt}}(R)], \\ (1 + s^{ab}) \exp[-sE(R)], \\ 2 \exp[-sk(R)]. \end{cases} \quad (2.5.175)$$

Здесь первое соотношение имеет место для плотно-упакованной, а два последних — для случайной $(s \times M)$ -таблицы. Далее первые два соотношения имеют место для обратной функции φ по максимуму правдоподобия, а последнее при пороговой обратной функции $\varphi_{\text{пор}}$.

Если $R > C$, то, как следует из оценок (2.5.102),

$$\lambda \geq 1 - 2 \exp[-sk(R)] \quad (2.5.176)$$

и вероятность ошибки обращения с ростом s делается сколь угодно близкой к единице.

Из определений (2.5.164) и (2.5.165) величин X_R и $X(R)$ следует, что $X_R < X(R)$. Поэтому из соотношений (2.5.27) и (2.5.31) при $X < C$

$$\frac{dk^1(X - C)}{dX} \leq 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2k^1(X - C)}{dX^2} \geq 0.$$

Отсюда, а также из соотношений (2.5.171) и (2.5.173) и определения (2.5.174) следует, что для любых R ($0 \leq R \leq C$) имеет место неравенство

$$0 \leq k(R) \leq E(R) \leq E_{\text{opt}}(R). \quad (2.5.177)$$

Неравенство (2.5.177) согласуется с интуитивными представлениями об обратных функциях φ_0 и $\varphi_{\text{пор}}$, связанных со случайным образованием $(s \times M)$ -таблиц, как о все более и более отличающихся от обратной функции φ_0 , которая связана с плотно-упакованной $(s \times M)$ -таблицей.

В работе [80] показано, что оптимальное распределение $\vec{p}^{(0)}$ одновременно с E_1 обращает в максимум и функцию $E(R)$ для всех значений R ($0 \leq R \leq E_1$).

Рассмотренный общий случай СФ с независимыми переходами все еще приводит к достаточно громоздким трансцендентным уравнениям для оценки основных параметров. Поэтому целесообразно рассмотреть и его частные случаи.

Пусть матрица $\mathbf{p} = \|\|p_{\alpha}^{\beta}\|\| = (\vec{p}_{\alpha})$ такова, что

$$h(\vec{p}_{\alpha}) = h = \text{const} \quad (\alpha = \overline{1, a}). \quad (2.5.178)$$

Такой случай будем называть *эквизентропийным* [42].

Величина E_1 (см. соотношение (2.5.101)) в этом случае имеет вид

$$E_1 = h(\vec{p}\vec{p}) = h, \quad (2.5.179)$$

но так как

$$\max_{\vec{q}} h(\vec{q}) = h \frac{b}{(1/b, \dots, 1/b)} = \ln b, \quad (2.5.180)$$

то для определения оптимального распределения $\vec{p} = \vec{p}^{(0)}$ имеем уравнение

$$\vec{p}^{(0)}\mathbf{p} = \frac{b}{(1/b, \dots, 1/b)}. \quad (2.5.181)$$

Подставив в соотношение (2.5.179) решение уравнения (2.5.181) с учетом соотношения (2.5.180), будем иметь

$$C = \max_{\vec{p}} E_1 = \ln b - h. \quad (2.5.182)$$

В частности, для дважды вероятностной матрицы $\mathbf{p} = (\vec{p}_{\alpha}) = \|\|p_{\alpha}^{\beta}\|\|$, для которой

$$\sum_{\alpha} p_{\alpha}^{\beta} = \sum_{\beta} p_{\alpha}^{\beta} = 1 \quad (\alpha = \overline{1, a}, \beta = \overline{1, b}),$$

уравнение (2.5.181) имеет решение

$$\vec{p}^{(0)} = \frac{a}{(1/a, \dots, 1/a)}.$$

В частности, симметричная вероятностная матрица $\mathbf{p} = \|\|p_{\alpha}^{\beta}\|\|$, для которой $p_{\alpha}^{\beta} = p_{\beta}^{\alpha}$, является дважды вероятностной.

Пусть задана СФ с матрицей переходов $\mathbf{p} = \|\|p_{\alpha}^{\beta}\|\| = (\vec{p}_{\alpha})$. Ее *стирающим расширением* будем называть СФ с множеством значений $B' = B \cup (b+1) = (1, 2, \dots, \beta, \dots, b, b+1)$ и матрицей переходов

\mathbf{p}_r , получающейся из матрицы \mathbf{p} следующим образом:

$$\mathbf{p}_r = \begin{pmatrix} p^1_1(1-r), \dots, p^b_1(1-r), r \\ \dots \\ p^1_a(1-r), \dots, p^b_a(1-r), r \end{pmatrix}.$$

Значение $b+1$ называется *значением стирания*, а r ($0 < r < 1$) — вероятностью стирания. В частности, когда

$$\mathbf{p}_r = \underbrace{\left(\begin{array}{cccc} 1-p-r & \dots & \frac{p}{a-1} & \dots & r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{p}{a-1} & \dots & 1-p-r & \dots & r \end{array} \right)}_{a+1} \Bigg|_a, \quad (2.5.183)$$

соответствующая СФ называется *симметричной стирающей*, при $r=0$, $p>0$ — симметричной, а при $r>0$, $p=0$ — стирающей.

Величина E_1 для $r, p \geq 0$ может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_1 &= h(\vec{p} \mathbf{p}_r) - \sum_{\alpha} p_{\alpha} h(\vec{p}_{r\alpha}) = h \left[(1-p-r) p_1 + \frac{p}{a-1} (1-p_1), \dots \right. \\ &\quad \left. \dots, (1-p-r) p_a + \frac{p}{a-1} (1-p_a), r \right] - \\ &= h \left(1-p-r, \underbrace{\frac{p}{a-1}, \dots, \frac{p}{a-1}}_{a-1}, r \right) = \\ &= (1-r) h \left[\frac{(1-p-r) p_1 + \frac{p}{a-1} (1-p_1)}{1-r}, \dots \right. \\ &\quad \left. \dots, \frac{(1-p-r) p_a + \frac{p}{a-1} (1-p_a)}{1-r} \right] + \\ &+ h(r) - (1-r) h \left[\frac{1-p-r}{1-r}, \underbrace{\frac{p/(a-1)}{1-r}, \dots, \frac{p/(a-1)}{1-r}}_{a-1} \right] = \\ &= (1-r) \left\{ h \left[\frac{(1-p-r) p_1 + \frac{p}{a-1} (1-p_1)}{1-r}, \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots, \frac{(1-p-r) p_a + \frac{p}{a-1} (1-p_a)}{1-r} \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{p}{1-r} \log_a \frac{1}{a-1} - h\left(\frac{p}{1-r}\right) \right\},$$

причем здесь во всех h -функциях логарифмы берутся по основанию $a(\log_a)$. Легко видеть, что величина E_1 обращается в максимум:

$$C = \max_{\vec{p}} E_1 = (1-r) \left[1 + \frac{p}{1-r} \log_a \frac{1}{a-1} - h\left(\frac{p}{1-r}\right) \right], \quad (2.5.184)$$

когда $p_\alpha = 1/a$, при этом $q_\beta = (1-r)/a$

$$(\beta = \overline{1, a}) \text{ и } q_{a+1} = r.$$

Используя общие соотношения (2.5.166) и (2.5.103), для соответствующих величин $R_{кр}$ и $R_{выч}$ получим

$$R_{кр} = \frac{[1-r + (a-2)p + 2\sqrt{(a-1)p(1-p-r)}] \times}{\times \left[1 - h\left(\frac{\sqrt{1-p-r}}{\sqrt{1-p-r} + \sqrt{(a-1)p}}\right) \right]} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1 + (a-1)r + (a-2)p + 2\sqrt{(a-1)p(1-p-r)}}{1 + (a-1)r + (a-2)p + 2\sqrt{(a-1)p(1-p-r)}}; \quad (2.5.185)$$

$$R_{выч} = 1 - \log_a [1 + (a-1)r + (a-2)p + 2\sqrt{(a-1)p(1-p-r)}]. \quad (2.5.186)$$

Таким образом, здесь можно получить явные выражения для $E(R) = R_{выч} - R$ при $0 < R < R_{кр}$. Явные выражения для функций $E(R)$ и $K(R)$ при $0 < R < C$ в общем случае здесь получить не удастся.

Рассмотрим случай симметричной СФ при $r=0$ с матрицей переходов

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1-p & \dots & \frac{p}{a-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{p}{a-1} & \dots & 1-p \end{pmatrix}.$$

Здесь $\vec{p} = \vec{q} = (\frac{1}{a}, \dots, \frac{1}{a})$.

Поэтому в соответствии с соотношениями (2.5.94) и (2.5.97) имеем

$$P_0 = \|p_\alpha q_\beta\| = \|1/a^2\|;$$

$$P_1 = \|p_\alpha p_\alpha^\beta\| = \begin{pmatrix} \frac{1-p}{a} & \dots & \frac{p}{a(a-1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{p}{a(a-1)} & \dots & \frac{1-p}{a} \end{pmatrix};$$

$$D = \left\| \log_a \left(\frac{p_\alpha^\beta}{q_\beta} \right) \right\| =$$

$$= \begin{pmatrix} \log_a a(1-p) & \dots & \log_a \frac{ap}{a-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \log_a \frac{ap}{a-1} & \dots & \log_a a(1-p) \end{pmatrix}. \quad (2.5.187)$$

Логарифм отношения правдоподобия имеет вид

$$L = \sum_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} \log_a \left(\frac{p_\alpha^\beta}{q_\beta} \right) = d \log_a \left(\frac{ap}{a-1} \right) +$$

$$+ (s-d) \log_a [a(1-p)] = s \log_a a(1-p) -$$

$$- d \log_a \left[\frac{(a-1)(1-p)}{p} \right], \quad (2.5.188)$$

где

$$d = d(x, y) = \sum_{\alpha \neq \beta} m_{\alpha\beta} = s - \sum_{\alpha} m_{\alpha\alpha} \quad (2.5.189)$$

— так называемое расстояние Хэмминга между X и Y .

Здесь k -функции удобно исследовать в форме (2.5.34):

$$k_{PD}(X-E) = h[P(\lambda), P(0)] - h[P(\lambda)]. \quad (2.5.190)$$

В самом деле, из-за соотношения (2.5.188) пороги X и δ для L/s и d/s соответственно связаны соотношениями

$$X = \delta \log_a \left(\frac{ap}{a-1} \right) + (1-\delta) \log_a [a(1-p)] =$$

$$= \log_a [a(1-p)] - \delta \log_a \left[\frac{(a-1)(1-p)}{p} \right]. \quad (2.5.191)$$

Здесь из соотношений (2.5.25) и (2.5.103) имеем

$$\gamma_0(\lambda) = \log_a \left\{ \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(\frac{ap}{a-1}\right)^\lambda + \frac{1}{a} [a(1-p)]^\lambda \right\},$$

$$\gamma_1(\lambda) = \log_a \left\{ p \left(\frac{ap}{a-1}\right)^\lambda + (1-p) [a(1-p)]^\lambda \right\}; \quad (2.5.192)$$

$$\gamma'_0(\lambda) = P_0(\lambda) \log_a \left(\frac{ap}{a-1} \right) + [1 - P_0(\lambda)] \log_a \left(\frac{a}{1-p} \right),$$

$$\bullet \gamma'_1(\lambda) = P_1(\lambda) \log_a \left(\frac{ap}{a-1} \right) + [1 - P_1(\lambda)] \log_a \left(\frac{a}{1-p} \right). \quad (2.5.193)$$

Поэтому уравнения (2.5.26) для определения λ_0 и λ_1 имеют вид

$\psi'_0(\lambda) = X$ и $\psi'_1(\lambda) = X$ и при подстановке в них выражений (2.5.191) и (2.5.193) приводят соотношением $\delta = P_0(\lambda)$ и $\delta = P_1(\lambda)$ соответственно.

Подставив эти значения в соотношение (2.5.190) с учетом того, что $P_0(0) = 1 - 1/a$ и $P_1(0) = p$, получим

$$k^0(X - E_0) = h\left(\delta, \frac{a-1}{a}\right) - h(\delta), \quad (2.5.194)$$

$$k^1(X - E_1) = h(\delta, p) - h(\delta). \quad (2.5.195)$$

В рассматриваемом случае удобно ввести величину δ_R (соответствующую величине X_R), удовлетворяющую уравнению (2.5.164), которое с учетом соотношения (2.5.194) имеет вид

$$h(\delta_R, (a-1)/a) - h(\delta_R) = R. \quad (2.5.196)$$

Тогда из соотношений (2.5.174) и (2.5.195) имеем

$$E(R) = E_p(R) = \begin{cases} R_{\text{выч}} - R & \text{при } 0 < R \leq R_{\text{кр}}, \\ h(\delta_R, p) - h(\delta_R) & \text{при } R_{\text{кр}} < R < C, \end{cases} \quad (2.5.197)$$

где согласно соотношениям (2.5.184), (2.5.185) и (2.5.186) при $r=0$ имеем

$$C = 1 + p \log_a [1/(a-1)] - h(p); \quad (2.5.198)$$

$$R_{\text{кр}} = 1 - h\left(\frac{\sqrt{1-p}}{\sqrt{1-p} + \sqrt{(a-1)p}}\right); \quad (2.5.199)$$

$$R_{\text{выч}} = 1 - \log_a [1 + (a-2)p + 2\sqrt{(a-1)p(1-p)}]. \quad (2.5.200)$$

Для вычисления функции $k(R)$ необходимо найти величину $\delta(R)$ (соответствует величине $X(R)$), удовлетворяющую уравнению (2.5.165), которое с учетом соотношений (2.5.194) и (2.5.195) имеет вид

$$h[\delta(R), (a-1)/a] - h[\delta(R), p] = R, \quad (2.5.201)$$

линейный относительно $\delta(R)$. Решая его относительно $\delta(R)$ с учетом соотношения (2.5.198), получим

$$\delta(R) = p + (C - R) / \log_a \frac{(a-1)(1-p)}{p}. \quad (2.5.202)$$

Тогда из соотношений (2.5.173) и (2.5.195) имеем

$$k(R) = h[\delta(R), p] - h[\delta(R)]. \quad (2.5.203)$$

Рассмотрим теперь бинарный случай ($a=2$) симметричной ($r=0$) и стирающей ($p=0$) СФ, обозначаемых БССФ и БСтСФ соответственно.

Для случая БССФ расстояние $d(x, y)$ (2.5.189) переходит в обычное хэмминговское (см. пп. 2.2.11), из соотношений (2.5.198), (2.5.199) и (2.5.200) при $r=0$ имеем $0 \leq p \leq 0,5$ и оптимальные $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 0,5$

$$\begin{aligned} 0 \leq R_{\text{кр}} &= 1 - h\left(\frac{p}{\sqrt{p} + \sqrt{1-p}}\right) \leq R_{\text{выч}} = \\ &= 1 - \log_2 (1 + 2\sqrt{p(1-p)}) \leq C = 1 - h(p). \end{aligned} \quad (2.5.204)$$

Из соотношений (2.5.196) и (2.5.197) имеем

$$E(R) = E_p(R) = \begin{cases} R_{\text{выч}} - R & \text{при } 0 \leq R \leq R_{\text{кр}} \\ h(\delta_{R^*}, p) - h(\delta_R) & \text{при } R_{\text{кр}} < R < C, \end{cases} \quad (2.5.205)$$

где величина δ определяется из уравнения

$$1 - h(\delta_R) = R. \quad (2.5.206)$$

Из соотношений (2.5.202) и (2.5.203) имеем

$$k(R) = h(\delta(R), p) - h[\delta(R)], \quad (2.5.207)$$

где $\delta(R)$ имеет вид [83]

$$\delta(R) = p + \frac{C - R}{h'(p)} = \frac{h(p_R) - h(p)}{h'(p)}. \quad (2.5.208)$$

Подробным, в том числе и численным, расчетам параметров (s, M, λ) -обращения для случая БССФ посвящена вся 8 гл. монографии [42] и гл. 3 монографии [4].

Рассмотрим случай БСтСФ. Здесь из соотношений (2.5.198), (2.5.199) и (2.5.200) имеем ($0 < r < 1$ и оптимальные $p_1 = p_2 = 0,5$, $q_1 = q_2 = (1-r)/2$, $q_3 = r$)

$$0 \leq R_{\text{кр}} = (1-r)/(1+r) \leq R_{\text{выч}} = 1 - \log_2(1+r) \leq C = 1-r. \quad (2.5.209)$$

Матрица $D = \|\log_2(p_\alpha^s/q_\beta^s)\|$ имеет следующую формальную запись:

$$D = \begin{pmatrix} \log_2 2 & \log_2 0 & \log_2 1 \\ \log_2 0 & \log_2 2 & \log_2 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, используя общее выражение (2.5.103) для $\gamma_0(\lambda)$, получаем

$$\gamma_0(\lambda) = \log_2 \left[r + (1-r) \frac{2^\lambda + 0^\lambda}{2} \right], \quad (2.5.210)$$

где при $\lambda=0$ полагаем $0^0=1$. Используя тождество (2.5.105), получаем из соотношения (2.5.210)

$$\gamma_1(\lambda) = \gamma_0(\lambda+1) = \log_2 [r + (1-r) \cdot 2^\lambda]. \quad (2.5.211)$$

Приравняв производные $\gamma'_0(\lambda)$ и $\gamma'_1(\lambda)$ (для $\lambda \neq 0$) величине порога X , находим выражения корней

$$\lambda_1(X) = \log_2 \frac{r}{1-r} \frac{X}{1-X} \quad \text{и} \quad \lambda_0(X) = 1 + \lambda_1(X). \quad (2.5.212)$$

Отсюда, используя представления k -функций (2.5.103), получаем с учетом соотношений (2.5.210), (2.5.211) и (2.5.212)

$$k^1(X-E_1) = h(X, 1-r) - h(X), \quad (2.5.213)$$

$$k^0(X-E_0) = X + k^1(X-E_1) = X + h(X, 1-r) - h(X).$$

В рассматриваемом вырожденном случае отсутствия искажений ($p=0$) требуется особая интерпретация полученных результатов. Здесь обращение производится следующим образом. После фиксации m стертых элементарных значений значения СФ y длины s среди оставшихся $s-m$ нестертых элементарных значений y' не

должно быть искажений. Если значение аргумента было x' , то $d' = d(x', y') = 0$ и объявляется имевшим место x , для которого $x' = y'$ (обращение). Поэтому по характеристике d' оптимальное обращение совпадает с пороговым, где порог $X' = 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае $k(R) = E(R)$ и $X(R) = X_R$. Но из соотношений (2.5.165) и (2.5.213) имеем

$$k^1[X(R) - E_1] - k^0[X(R) - E_0] = X(R) - R.$$

Поэтому из соотношений (2.5.173) и (2.5.213) имеем для $R_{кр} < R < C$,

$$E_{opt}(R) = h(R, 1-r) - h(R) \quad (2.5.214)$$

и окончательно для $0 < R < C$ из соотношений (2.5.174) и (2.5.212) имеем

$$E(R) = k(R) = \begin{cases} R_{выч} - R & \text{при } 0 \leq R \leq R_{кр} \\ h(R, 1-r) - h(R) & \text{при } R_{кр} < R < C, \end{cases} \quad (2.5.215)$$

где $R_{кр}$, $R_{выч}$ и C определены соотношением (2.5.209). Численные расчеты, связанные с рассматриваемым случаем БСтСф, приведены в гл. 3 монографии [4].

Рассмотрим некоторые соотношения для $p, r \rightarrow 0$ и $p \rightarrow 1/2, r \rightarrow 1$. Первый случай будем называть *слабостохастическим*, а второй — *сильностохастическим*. Из соотношений (2.5.204), (2.5.205), (2.5.209) и (2.5.213) имеем для слабостохастического случая

$$R_{кр} \rightarrow R_{выч} \rightarrow C \rightarrow 1 \text{ и } k(R) \rightarrow E(R) \rightarrow 1 - R, \quad (2.5.216)$$

для сильностохастического

$$R_{выч} \rightarrow C/2; R_{кр} \rightarrow C/2 \ln 2, C \rightarrow 0. \quad (2.5.217)$$

Для БССФ и БСтСф из соотношений (2.5.216) следует, что в слабостохастическом случае обратная функция по максимуму правдоподобия и пороговая функция асимптотически эквивалентны по вероятности правильного обращения. Общий сильностохастический случай СФ определяется следующим соотношением:

$$\max_{\substack{1 < \beta < b \\ 1 < \alpha < a}} |p_\alpha^\beta - q_\beta| = \Delta \rightarrow 0. \quad (2.5.218)$$

Другими словами, в этом случае требуется поэлементная близость матрицы $\mathbf{p} = (\vec{p}_\alpha) = \|p_\alpha^\beta\|$ матрице $\|q_\beta\| = (\vec{q})$ с постоянными элементами по столбцам. Полагая $q_\beta > 0$ и используя разложение логарифма

$$\ln(p_\alpha^\beta / q_\beta) = \ln[1 + (p_\alpha^\beta - q_\beta) / q_\beta]$$

по степеням выражения $(p_\alpha^\beta - q_\beta) / q_\beta$, легко получить из соотношений (2.5.101) с учетом соотношений (2.5.25) частный случай известных формул Барглетта [4]:

$$-2E_q \sim 2E_1 \sim \gamma''_0(0) \sim \gamma''_1(0) \approx \sum_{\alpha\beta} \frac{(p_\alpha^\beta - q_\beta)^2}{q_\beta} = O(\Delta^2), \quad (2.5.219)$$

где здесь и далее приближение берется с точностью до величин $O(\Delta^3)$.

Так как $E_0 \sim E_1 \sim O(\Delta^2)$ и $E_0 < X < E_1$, то аргументы функций $k^0(X - E_0)$ и $k^1(X - E_1)$

$$X - E_0 \sim X - E_1 \sim O(\Delta^2).$$

В связи с этим рассмотрим разложение k -функции $k_{pd} \rightarrow (X - E)$ в ряд Маклорена:

$$k_{pd} \rightarrow (X - E) = k_{pd} \rightarrow (0) + (X - E) k'_{pd} \rightarrow (0) + \frac{(X - E)^2}{2} k''_{pd} \rightarrow (0) + O[(X - E)^3]. \quad (2.5.220)$$

Подставив в соотношение (2.5.220) соотношения (2.5.31) и (2.5.32), получим

$$k_{pd} \rightarrow (X - E) = (X - E)^2 / 2\gamma''(0) + O[(X - E)^3] \quad (2.5.221)$$

Используя соотношения (2.5.219), получим из соотношения (2.5.221) в оптимальном случае ($E_1 = C$)

$$k^0(X + C) \sim (X + C)^2 / 4C, \\ k^1(X - C) \sim (X - C)^2 / 4C. \quad (2.5.222)$$

Вычислим $E(R)$ и $k(R)$ в рассматриваемом случае. Для этого найдем величины X_R и $X(R)$, определяемые уравнениями (2.5.164) и (2.5.165), имеющими здесь вид

$$\frac{(X_R + C)^2}{4C} = R \quad \text{и} \quad \frac{[X(R) + C]^2}{4C} - \frac{[X(R) - C]^2}{4C} = R. \quad (2.5.223)$$

Решая уравнения (2.5.223), получаем

$$X_R = -C + 2\sqrt{RC} \quad \text{и} \quad X(R) = R. \quad (2.5.224)$$

Подставив выражения X_R и $X(R)$ из соотношений (2.5.224) в соотношения (2.5.173), получим [80]

$$E_{\text{opt}}(R) = (\sqrt{C} - \sqrt{R})^2, \quad (2.5.225)$$

а также [42]

$$k(R) = (C - R)^2 / 4C. \quad (2.5.226)$$

Для подсчета величины $E(R)$ найдем значение $R_{\text{выч}}$ в рассматриваемом случае. Так как $E'_{\text{opt}}(R_{\text{кр}}) = -1$, то, используя соотношение (2.5.225), получим $R_{\text{кр}} = C/4$ и $X_{\text{кр}} = 0$. Кроме того, из соотношения (2.5.166), используя выражения (2.5.222), получим

$$R_{\text{выч}} = \frac{(0 + C)^2}{4C} + \frac{(0 - C)^2}{4C} = \frac{C}{2}.$$

Поэтому выражение $E(R)$, определяемое соотношением (2.5.174), в рассматриваемом случае имеет вид [80]

$$E(R) = \begin{cases} C/4 - R & \text{при } 0 < R < C/4, \\ (\sqrt{C} - \sqrt{R})^2 & \text{при } C/4 \leq R < C. \end{cases} \quad (2.5.227)$$

Вводя удобное обозначение $\eta = R/C$, запишем соотношения (2.5.226) и (2.5.227) в виде

$$k(R)/C \sim (1-\eta)^2/4 \text{ при } 0 < \eta < 1, \quad (2.5.228)$$

$$E(R)/C \sim \begin{cases} 0,5 - \eta & \text{при } 0 < \eta < 0,25, \\ (1 - \sqrt{1-\eta})^2 & \text{при } 0,25 < \eta < 1. \end{cases} \quad (2.5.229)$$

Заметим, что приближенные для сильностохастического случая соотношения (2.5.228) и (2.5.229) являются точными для непрерывных СФ с аддитивными гауссовскими СЗ в нашей терминологии [80].

Интересна статистическая интерпретация параметров R и C в рассматриваемом сильностохастическом случае для пороговой обратной функции Φ [42]. Здесь R является единственным порогом для M случайных величин $L(x_u, y)/s$ ($u = \overline{1, M}$), соответствующих M значениям СА $X_M = \{x_u\}$. Значения $-C$ и C являются математическими ожиданиями этих величин при гипотезах H_0 и H_1 соответственно. В обоих случаях эти случайные величины имеют одну и ту же дисперсию, равную $2C$. Качественно имеющая здесь место ситуация изображена на рис. 2.2.

2.5.8. Конструктивные методы построения оптимальных $(s \times M)$ -таблиц. В предыдущих пунктах были исчерпаны статистические средства в ходе построения оптимального (s, M, λ) -обращения СФ. Конструктивными оказались лишь обратные функции: оптимальная по максимуму правдоподобия и асимптотически оптимальная для сильностохастического случая пороговая обратная функция. Однако не был указан способ построения оптимальной $(s \times M)$ -таблицы X_M , т. е. такой таблицы X_M , которая приводит к оптимальному (s, M, λ) -обращению. Было доказано лишь ее существование.

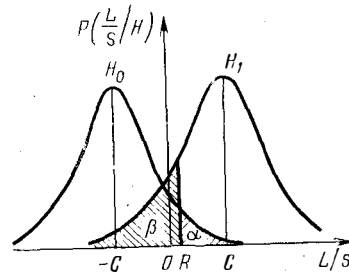


Рис. 2.2

Нижняя оценка вероятности того, что конкретная случайно выбранная $(s \times M)$ -таблица будет оптимальной, оказалась принципиально неудовлетворительной. Однако осталось неясным, связано ли это с грубостью используемых оценок Чебышева или оцениваемая вероятность на самом деле близка к своей нижней оценке.

Для выяснения этого вопроса необходим более тонкий анализ комбинаторной структуры $(s \times M)$ -таблицы X_M с целью отыскания условий ее опти-

мальности в том смысле, что она вместе с обратной функцией φ приводит к оптимальному (s, M, λ) -обращению СФ. Далее будут сформулированы эти условия, а уж потом вероятность их выполнения при случайном выборе $(s \times M)$ -таблицы X_M .

Предварительно оценим сверху число M значений СА, правильно обрабатываемых по значению СФ y с вероятностью, сколь угодно близкой к единице при достаточно большом значении s . Для этого рассмотрим оптимальное $(s, \exp(sR), \exp(-sE_{\text{opt}}(R)))$ -обращение с обратной функцией φ_0 и плотно-упакованной $(s \times M)$ -таблицей X_M , существование которой было доказано в п. 2.5.6. Множества \mathcal{E}_u ($u = \overline{1, M}$) разбиения пространства R^* , определяющего обратную функцию φ_0 , обладает свойством $\mathcal{E}_u \cap \mathcal{E}_v = \emptyset$ ($u = \overline{1, M}$).

Соотнесем значениям СА x_u множества значений СФ y :

$$\mathcal{E}_{x_u}^{\mathfrak{M}_m^* \rightarrow (\varepsilon)} = \bigcup_{\mathbf{m} \in \mathfrak{M}_m^* \rightarrow (\varepsilon)} \mathcal{E}_{x_u}^{\mathbf{m}},$$

где множество $\mathfrak{M}_m^* \rightarrow (\varepsilon)$ матриц \mathbf{m} определяется соотношением (см. соотношения (2.5.68) и (2.5.78))

$$\mathfrak{M}_m^* \rightarrow (\varepsilon) = \mathfrak{M}_{ma} \rightarrow (\varepsilon) \setminus \mathfrak{M}'_{ma} \rightarrow (\varepsilon),$$

так что соответствующее множество $\mathfrak{M}_{\mu a}^* \rightarrow$ матриц μ имеет вид

$$\mathfrak{M}_{\mu a}^* \rightarrow (\varepsilon) = \{\mu : -\varepsilon'_\alpha \leq h(\vec{\mu}_\alpha, \vec{p}_\alpha) - h(\vec{p}_\alpha) < \varepsilon_\alpha (\alpha = \overline{1, a})\}, \quad (2.5.230)$$

где величины ε'_α и ε_α связаны с ε соотношениями (2.5.62)

$d_{\alpha\beta} = (-\ln p_\alpha^\beta)$ и $x_u \in \mathcal{E}_\alpha^{\vec{m}}$, что требует выполнения соотношений $\sum_{\beta} m_{\alpha\beta} = m_\alpha$ ($\alpha = \overline{1, a}$).

Рассмотрим множество $\mathfrak{N}_m \rightarrow (\varepsilon)$ векторов \vec{m}^*

$$\mathfrak{N}_m \rightarrow (\varepsilon) = \{\vec{m}^* : \vec{m}^* = \vec{m}\mu, \mu \in \mathfrak{M}_\mu^* \rightarrow (\varepsilon)\} \quad (2.5.231)$$

и множества значений СФ y

$$\mathfrak{R}_{\sigma}^{\rightarrow(\varepsilon)} = \bigcup_{\vec{m}^* \in \mathfrak{R}_{\sigma}^{\rightarrow(\varepsilon)}} \mathfrak{E}_{\sigma}^{\vec{m}^*}; \quad (2.5.232)$$

$$\mathfrak{M}_{\sigma}^{\rightarrow(\varepsilon)} = \bigcup_{x \in \mathfrak{E}_{\sigma}^{\vec{m}}} \mathfrak{E}_x^{\vec{m}}. \quad (2.5.233)$$

Можно показать, что если $y \in \mathfrak{E}_{\sigma}^{\vec{m}}$, то $y \in \mathfrak{E}_{\sigma}^{\vec{m}}$, и наоборот. Поэтому

$$\mathfrak{E}_{\sigma}^{\vec{m}} = \mathfrak{E}_{\sigma}^{\vec{m}} \supseteq \bigcup_{x_u \in \mathfrak{E}_{\sigma}^{\vec{m}} \cap X_M} \mathfrak{E}_{x_u}^{\vec{m}} \cap \mathfrak{E}_u, \quad (2.5.234)$$

где последнее включение очевидно из-за определения (2.5.233).

Ввиду того, что по определению множества \mathfrak{E}_u ($u = \overline{1, M}$) не пересекаются, имеем из соотношения (2.5.234)

$$N(\mathfrak{E}_{\sigma}^{\vec{m}}) \geq \sum_{x_u \in \mathfrak{E}_{\sigma}^{\vec{m}} \cap X_M} N(\mathfrak{E}_{x_u}^{\vec{m}} \cap \mathfrak{E}_u). \quad (2.5.235)$$

Но при любом сколь угодно малом значении $\varepsilon > 0$ имеем, во-первых, из определений (2.5.230) и (2.5.231)

$$N(\mathfrak{E}_{\sigma}^{\vec{m}}) = \exp [sh(\vec{\mu} \mathbf{p}) + O(\ln s)], \quad (2.5.236)$$

так как $\mathfrak{R}_{\sigma}^{\rightarrow(0)} = \vec{m} \mathbf{p}$, и, во-вторых, из соотношений (2.5.70) и (2.5.71)

$$\begin{aligned} N(\mathfrak{E}_{x_u}^{\vec{m}} \cap \mathfrak{E}_u) &\geq \\ &\geq \exp \left\{ s \left[\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} h(\vec{p}_{\alpha}) - \varepsilon^2 - \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \varepsilon'_{\alpha} \right] \right\}, \quad (2.5.237) \end{aligned}$$

так как легко показать, что

$$P(\mathcal{E}_{x_u}^{m \rightarrow (\varepsilon)} \cap \mathcal{G}_u/x_u) \geq 1 - P(\overline{\mathcal{E}}_{x_u}^{m \rightarrow (\varepsilon)} | x_u) - P(\overline{\mathcal{G}}_u/x_u) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 1.$$

Оценка (2.5.237) верна при любом $\varepsilon \geq 0$, поэтому, подставив ее при $\varepsilon=0$ вместе с оценкой (2.5.236) в соотношение (2.5.235), получим

$$\begin{aligned} & \exp(sh(\vec{\mu p}) + O(\ln s)) \geq \\ & \geq M_{\vec{m}} \exp \left[s \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} h(\vec{p}_{\alpha}) \right], \end{aligned} \quad (2.5.238)$$

где

$$M_{\vec{m}} = N(\mathcal{E}_{\sigma_s}^{\vec{m}} \cap X_M) \quad (2.5.239)$$

— число значений СА x_u , в которых элементарное значение A_{α} встречается в точности m_{α} ($\alpha = \overline{1, a}$) раз.

Из оценки (2.5.238), полагая $\vec{\mu p} = \vec{v}_1$, имеем

$$M_{\vec{m}} \leq \exp \left\{ s \left[h(\vec{v}_1) - \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} h(\vec{p}_{\alpha}) \right] + O(\ln s) \right\}. \quad (2.5.240)$$

Суммируя каждую из частей неравенства (2.5.240) по \vec{m} ($\mu = \vec{m}/s$), учитывая неэкспоненциальную зависимость от s числа слагаемых (их будет заведомо меньше s^a) и то, что $\sum_{\vec{m}} M_{\vec{m}} = M$, получаем

$$M \leq \exp[sC + O(\ln s)], \quad (2.5.241)$$

где

$$C = \max_{\vec{\mu}} \left[h(\vec{\mu p}) - \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} h(\vec{p}_{\alpha}) \right] = h(\vec{p p}) - \sum_{\alpha} p_{\alpha} h(\vec{p}_{\alpha}) \quad (2.5.242)$$

— величина так называемой пропускной способности [2] СФ с независимыми переходами, определенная нами в общем случае СФ в конце п. 2.5.6; $\vec{p} = (p_{\alpha})$ — вероятност-

ный вектор, обращающий в максимум величину $C(\mu) = h(\vec{\mu p}) - \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} h(\vec{p}_{\alpha})$.

Таким образом, из чисто комбинаторных соображений получено число M надежно обращаемых значений СА для СФ с независимыми переходами. Заметим, что величина C впервые встретилась в п. 2.5.4 в связи с задачей пересечения комбинаторных сфер (2.5.82). Далее в п. 2.5.7 величина C фигурирует как математическое ожидание логарифма отношения правдоподобия при гипотезе H_1 (2.5.172). Указанные три конструктивные математические схемы, порождающие одно и то же выражение для функции C , вполне достаточны для обоснования ее важности. К сожалению, эти конструктивные схемы гораздо менее известны, нежели легковесные соображения по поводу пропускной способности C в связи с пресловутым «измерением» количества информации. Критика такого рода рассуждений содержится в предисловии к монографии автора [42, с. 6], и поэтому здесь мы не будем ее повторять.

Приступим теперь к формулировке достаточных условий оптимальности $(s \times M)$ -таблиц X_M . Определим для каждого значения $x_u \in X_M$ и всевозможных матриц

$\mathbf{m} = \|m_{\alpha\alpha'}\|$ набор чисел $\{M_{x_u}^{\mathbf{m}}\}$, где $M_{x_u}^{\mathbf{m}} = N(\mathcal{E}_{x_u}^{\mathbf{m}} \cap X_M)$ означает число значений $x_v \in X_M$ ($v \neq u$), имеющих с x_u расстояние $\mathbf{m}(x_u, x_v)$, в точности равное \mathbf{m} . Ясно, что $\sum_{\mathbf{m}} M_{x_u}^{\mathbf{m}} = M - 1$.

Доказываемые далее теоремы являются прямым обобщением соответствующих теорем, приведенных в монографии [42] для случая $\vec{v}_1 = \vec{\mu p} = 1/b$.

Теорема 5. Для того чтобы $(s \times M)$ -таблица $X_M = \{x_1, \dots, x_u, \dots, x_v, \dots, x_M\}$, значениям которой x_u сопоставляются множества $\mathcal{E}_u = \mathcal{E}_{x_u}^{\mathbf{m}}$, приводила к $(s, M, r \exp(-s\varepsilon^2))$ -обращению, достаточно выполнение M неравенств

$$\sum_{\mathbf{m}} M_{x_u}^{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \in \mathfrak{M}} D_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) \leq$$

$$\leq \exp \left\{ s \left[\sum_{\alpha} \mu_{\alpha}^{(u)} h(\vec{p}_{\alpha}) - \eta \right] + O(\ln s) \right\}, \quad (u = \overline{1, M}),$$

(2.5.243)

где

$$x_u \in \mathcal{E}_{\alpha}^{\vec{m}^{(u)}} (\mu_{\alpha}^{(u)} = \vec{m}^{(u)}/s);$$

$$D_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = N(\mathcal{E}_{x_1}^{\mathbf{m}_1} \cap \mathcal{E}_{x_2}^{\mathbf{m}_2}), \quad \mathbf{m} = \mathbf{m}(x_1, x_2),$$

причем величины r и η в зависимости от выбора множества \mathfrak{M} имеют следующие значения.

Если $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{\vec{m}^{(u)}, a}(\varepsilon)$ (соответствующее множество $\mathfrak{M}_{\vec{m}^{(u)}, a}(\varepsilon)$ определяется соотношением (2.5.78)), то

$$r = 3a, \quad \eta = \varepsilon^2 + \varepsilon', \quad (2.5.244)$$

где $\varepsilon' = \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \varepsilon'_{\alpha}$ и ε'_{α} определяется соотношением (2.5.62).

Если множество $\mathfrak{M} = \mathcal{L}_{\vec{m}^{(u)}, 2}(\varepsilon)$ (соответствующее множество $\mathcal{L}_{\vec{m}^{(u)}, 2}(\varepsilon)$ определяется соотношением (2.5.79)), то

$$r = 6 \text{ и } \eta = \varepsilon^2 + \varepsilon'_1, \quad (2.5.245)$$

где ε'_1 определяется соотношением (2.5.64).

Доказательство. Множество \mathcal{E}'_u определяется соотношением

$$\mathcal{E}'_u = \mathcal{E}_u \cap \bigcup_{v \neq u} \mathcal{E}_v = \bigcup_{v \neq u} \mathcal{E}_u \cap \mathcal{E}_v.$$

Отсюда, учитывая возможность пересечений множеств $\mathcal{E}_u \cap \mathcal{E}_v$ для различных $v \neq u$, получаем

$$\begin{aligned} N(\mathcal{E}'_u) &\leq \sum_{v \neq u} N(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{E}_v) = \\ &= \sum_{\mathbf{m}} M_{x_u}^{\mathbf{m}} N(\mathcal{E}_{x_u}^{\mathbf{m}} \cap \mathcal{E}_{x_v}^{\mathbf{m}} / \mathbf{m}(x_u, x_v) = \mathbf{m}) = \\ &= \sum_{\mathbf{m}} M_{x_u}^{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \in \mathfrak{M}} D_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2). \end{aligned} \quad (2.5.246)$$

Из соотношений (2.5.70), (2.5.72) и (2.5.74) при $T=2$ следует, что если

$$N(\mathcal{G}'_u) < \begin{cases} \exp \left[s \sum_{\alpha} \mu_{\alpha}^{(u)} h(\vec{p}_{\alpha}) - \varepsilon^2 - \varepsilon' \right] & \text{при } \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{m, a}^{\rightarrow(u)}(\varepsilon), \\ \exp \left[s \sum_{\alpha} \mu_{\alpha}^{(u)} h(\vec{p}_{\alpha}) - \varepsilon^2 - \varepsilon'_1 \right] & \text{при } \mathfrak{M} = \mathcal{L}_{m, 2}^{\rightarrow(u)}(\varepsilon), \end{cases} \quad (2.5.247)$$

то

$$P(\mathcal{G}_{x_u}^{\mathfrak{M}} \setminus \mathcal{G}'_u / x_u) \geq \begin{cases} 1 - 3a \exp(-s\varepsilon^2) & \text{при } \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{m, a}^{\rightarrow(u)}(\varepsilon), \\ 1 - 6 \exp(-s\varepsilon^2) & \text{при } \mathfrak{M} = \mathcal{L}_{m, 2}^{\rightarrow(u)}(\varepsilon). \end{cases} \quad (2.5.248)$$

Ограничивая правую часть оценки (2.5.246) правыми частями оценки (2.5.247) с учетом оценок (2.5.248), получаем утверждение теоремы 5.

Рассмотрим пример наборов чисел $\{M_{x_u}^m\}$ ($u=1, \overline{M}$), для которых выполняются достаточные условия оптимальности (2.5.243) соответствующей $(s \times M)$ -таблицы $X_M = \{x_u\}$. Этот пример имеет и самостоятельное значение для дальнейшего изложения. Положим

$$M_{x_u}^m = MC_s^m \prod_{\alpha\alpha'} (\mu_{\alpha} \mu_{\alpha'})^{m_{\alpha\alpha'}}, \quad (2.5.249)$$

где

$$M = \exp\{s[C(\vec{\mu}) - \eta]\}, \quad (2.5.250)$$

и в случае нецелой правой части соотношения (2.5.250) для M берется ближайшее целое число.

Умножим обе части соотношений (2.5.90) и (2.5.91) при $\vec{\mu}' = \vec{\mu}$ на M , определяемое соотношением (2.5.250), где

$$\eta = \begin{cases} \varepsilon^2 + \varepsilon' & \text{при } \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{m, a}^{\rightarrow}(\varepsilon), \\ \varepsilon^2 + \varepsilon'_1 & \text{при } \mathfrak{M} = \mathcal{L}_{m, 2}^{\rightarrow}(\varepsilon) \end{cases} \quad (2.5.251)$$

соответственно. Тогда для чисел $M_{x_u}^m$, определяемых соотношением (2.5.249), как легко видеть, выполняются условия (2.5.243).

В качестве примера эффективного использования соотношения (2.5.249) и условий (2.5.243) рассмотрим асимптотический случай БССФ при $s \rightarrow \infty$, когда $d/s = \theta$ и $(\log_2 M_{x_u}^d)/s = \omega$ не зависят от s .

Здесь числа $M_{x_u}^d$, соответствующие в случае БССФ числам $M_{x_u}^m$, означают количество значений $x_v \in X_M$ ($v \neq u$), имеющих с x_u хэмминговское расстояние $d(x_u, x_v)$, в точности равное d .

Можно показать [42, теорема 8.2, с. 182], что в этом случае соотношение (2.5.249) соответствует соотношению

$$\omega = \omega(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \theta < p < 0,5 < q < \theta \leq 1, \\ h(\theta) - h(p) & \text{при } p \leq \theta \leq q = 1 - p, \end{cases} \quad (2.5.249')$$

а условия (2.5.243) следующему условию для значений θ в интервале $0 \leq \theta \leq 2p$:

$$\omega(\theta) \leq f_p(\bar{\theta}) \triangleq h(\theta) - ph\left(\frac{\theta}{2p}\right) - qh\left(\frac{\theta}{2q}\right) \equiv h(p) - \theta - (1 - \theta)h\left[\frac{2p - \theta}{2(1 - \theta)}\right], \quad (2.5.243')$$

и имеют место обязательные условия $\omega(\theta) \leq C = 1 - h(p)$ для всех значений θ в интервале $0 \leq \theta \leq 1$.

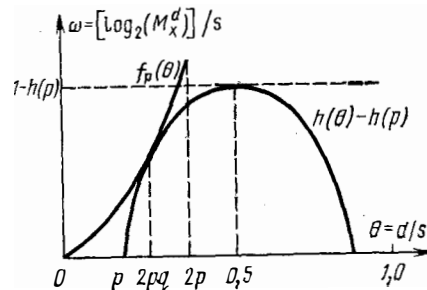


Рис. 2.3

Геометрическая интерпретация достаточных условий в рассматриваемом случае изображена на рис. 2.3. В теории так называемых корректирующих кодов (см., например, [80]) требовалось, чтобы $\omega(\theta) \equiv 0$ для $0 \leq \theta \leq 2p$, для чего вместо предельно допустимого вида функции $\omega(\theta) = h(\theta) - h(p) \leq C = 1 - h(p)$ приходилось брать существенно меньшую функцию $\omega(\theta) = h(\theta) - h(2pq) \leq 1 - h(2pq) < C$. Наличие точки касания кривых рис. 2.3 при $\theta = 2pq$ указывает на предельный характер рассматриваемых оценок.

Заметим, что выражения (2.5.249) для чисел $M_{x_u}^m$ можно рассматривать как математическое **ожидание** числа значений x_v ($s \times M$)-таблицы X_M , имеющих до значения x_u матричное расстояние $\mathbf{m}(x_u, x_v)$ ($v \neq u$), в точности равное \mathbf{m} . При этом считается, что элементарные значения A_α , входящие в x_v , появляются независимо друг от друга с вероятностями μ_α ($\mu_\alpha \geq 0$, $\sum_\alpha \mu_\alpha = 1$). Это

наводит на мысль, что вероятность P , с которой удовлетворяются условия (2.5.243) для конкретной ($s \times M$)-таблицы X_M , случайно выбранной согласно указанному выше правилу, близка к единице.

Оказывается, что это имеет место на самом деле и порядок близости вероятности P' к единице сверхэкспоненциальный.

Имеет место

Теорема 6. Пусть $M = \exp[s(C - \eta')]$ значений x_u ($s \times M$)-таблицы X_M выбираются случайно так, что элементарные значения A_α возникают независимо друг от друга с вероятностью p_α ($\alpha = \overline{1, a}$). Пусть значениям x_u сопоставляются множества $\mathfrak{M}_{x_u}^{\mathfrak{M}}$ значений y , где $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{m, a}(\epsilon)$, либо $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}_{m, 2}(\epsilon)$.

Тогда вероятность P' того, что при таком сопоставлении получается ($s, M, r \exp(-s\epsilon^2)$)-обращение имеет оценку

$$P' \geq 1 - \exp[-Mk_{\text{PD}}(\Delta) + O(\ln M)], \quad (2.5.252)$$

где

$$P = \left\{ C_s^m \prod_{\alpha\alpha'} (p_\alpha p_{\alpha'})^{m_{\alpha\alpha'}} \right\}, \quad (2.5.253)$$

$$D = \left\{ \sum_{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \in \mathfrak{M}} D_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) \right\}, \quad (2.5.254)$$

C и p_α определяются соотношением (2.5.242);

$$\Delta = \exp \left\{ s \left[\sum_\alpha p_\alpha h(\vec{p}_\alpha) - C - \eta \right] \right\}; \quad (2.5.255)$$

$$\eta' = \eta + (\ln 2)/s, \quad (2.5.256)$$

величины r и η в зависимости от двух вариантов рассматриваемого множества \mathfrak{M} определяются соотношениями (2.5.244) или (2.5.245).

Доказательство. Будем составлять значения $x_u(s \times M)$ -таблицы X_M из элементарных значений A_α , выбранных независимо друг от друга с вероятностями p_α . Тогда случайные числа $\{M_{x_u}^m\}$, как легко видеть, имеют полиномиальное распределение с параметрами \mathbf{P} , определяемыми соотношением (2.5.253). В силу случайности чисел $\{M_{x_u}^m\}$ случайными оказываются и числа $N(\mathcal{G}'_u)$, и ограничивающие их сверху числа

$$Z_u = \sum_{\mathbf{m}} M_{x_u}^{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \in \mathfrak{M}} D_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) \quad (2.5.257)$$

(см. соотношение (2.5.246) в доказательстве теоремы 5). Последние, как это видно из соотношения (2.5.257), оказываются (что чрезвычайно важно) линейными функциями полиномиально распределенных случайных чисел $\{M_{x_u}^m\}$ с коэффициентами \mathbf{D} , определяемыми соотношениями (2.5.254). Поэтому для них согласно (2.5.30) имеет место оценка

$$P_u = P(Z_u < MX) \geq 1 - \exp[-Mk_{\mathbf{P}, \mathbf{D}}(X - E)] \quad (2.5.258)$$

при условии

$$\begin{aligned} X > E &= E(Z_u/M) = \\ &= \sum_{\mathbf{m}} C_s^{\mathbf{m}} \prod_{\alpha, \alpha'} (p_\alpha p_{\alpha'})^{m_{\alpha\alpha'}} \sum_{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \in \mathfrak{M}} D_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2). \end{aligned} \quad (2.5.259)$$

Заметим, что согласно неравенствам (2.5.90) и (2.5.91) в рассматриваемом случае $\vec{\mu} = \vec{\mu}' = \vec{p}$ и величины η' , определяемой соотношениями (2.5.244) и (2.5.245), имеем

$$E \leq \exp \left[s \sum_{\alpha} p_{\alpha} h(\vec{p}_{\alpha}) - C - \eta \right]. \quad (2.5.260)$$

Положим

$$X = E + \Delta, \quad (2.5.261)$$

где

$$\Delta = \exp \left\{ s \left[\sum_{\alpha} p_{\alpha} h(\vec{p}_{\alpha}) - C - \eta \right] \right\}. \quad (2.5.262)$$

Тогда из соотношений (2.5.260) и (2.5.262) имеем

$$\Delta < X < 2\Delta. \quad (2.5.263)$$

Поэтому с учетом соотношений (2.5.256), (2.5.262) и (2.5.263) произведение MX , где $M = \exp[(C - \eta')s]$, имеет оценку

$$MX \leq \exp \left[s \sum_{\alpha} p_{\alpha} h(\vec{p}_{\alpha}) - \eta \right]. \quad (2.5.264)$$

Используя формулу Буля, получим оценку снизу вероятности P' одновременного выполнения M неравенств $Z_u < MX$ ($u = \overline{1, M}$):

$$P' = P(Z_u < MX, u = \overline{1, M}) > 1 - M(1 - P_u), \quad (2.5.264')$$

где P_u — вероятность выполнения одного такого неравенства, не зависящая согласно соотношению (2.5.258) от u . Подставив в оценку (2.5.264) соотношения (2.5.258), (2.5.261) и (2.5.264), получим оценку для вероятности P'

$$\begin{aligned} P' &\leq P \left\{ Z_u < \exp \left[s \sum_{\alpha} p_{\alpha} h(\vec{p}_{\alpha}) - \eta \right], u = \overline{1, M} \right\} \geq \\ &\geq 1 - \exp[-Mk_{\text{р.д}}(\Delta) + O(\ln M)], \end{aligned}$$

которая согласно утверждению теоремы 5 является вероятностью получения с помощью описанной конструкции $(s, M, r \exp(-s\varepsilon^2))$ -обращения, что и требовалось доказать.

Проанализируем поведение оценки (2.5.252) для больших значений s . Здесь возможны два случая

$$C < \sum_{\alpha} p_{\alpha} h(\vec{p}_{\alpha}); \quad (2.5.265)$$

$$C > \sum_{\alpha} p_{\alpha} h(\vec{p}_{\alpha}). \quad (2.5.266)$$

Из соотношения (2.5.255) следует, что при достаточно малом значении η величина Δ экспоненциально зависит от s в первом случае с положительным показателем, а во втором — с отрицательным. Поэтому в первом случае оценка (2.5.252) вероятности P' носит «сверхэкспоненциальный» характер, так как $M = \exp[s(C - \eta')]$. Второй случай требует дополнительного анализа, так как величина Δ с ростом s делается сколь угодно малой. Если

воспользоваться оценкой (2.5.37) и тем, что $M = \exp [s (C - \eta')]$, то в этом случае

$$Mk_{p_d}(\Delta) = MA\Delta^2 = A \exp \left\{ s \left[2 \sum_{\alpha} p_{\alpha} h(\vec{p}_{\alpha}) - 2\eta - \eta' - C \right] \right\}, \quad (2.5.267)$$

где A — некоторая константа, и знак выражения в квадратной скобке соотношения (2.5.267) при достаточно малых значениях η и η' определяется знаком выражения

$$2 \sum_{\alpha} p_{\alpha} h(\vec{p}_{\alpha}) - C.$$

Если это выражение отрицательно или равно нулю, то оценка (2.5.252) делается тривиальной. Если же это выражение положительно, то оценка (2.5.252) продолжает оставаться «сверхэкспоненциальной». Итак, окончательным условием «сверхэкспоненциальности» оценки (2.5.252) является условие

$$C < 2 \sum_{\alpha} p_{\alpha} h(\vec{p}_{\alpha}) \quad (2.5.268)$$

или с учетом выражения (2.5.242)

$$h(\vec{p}_p) \leq 3 \sum_{\alpha} p_{\alpha} h(\vec{p}_{\alpha}). \quad (2.6.269)$$

Соотношения (2.5.268) и (2.5.269) выполняются, если

$$C < \frac{2}{3} h(\vec{p}_p). \quad (2.5.270)$$

В частности, при $\vec{p}_p = \overbrace{(1/b, \dots, 1/b)}^b$ условие (2.5.270) переходит в условие

$$C < \frac{2}{3} \ln b. \quad (2.5.271)$$

Выведем условия, эквивалентные условиям (2.5.268) для случаев БССФ и БСтСФ. В самом деле, в этих случаях условия (2.5.268) переходят в условия

$$1 - h(p) < 2h(p) \text{ и } 1 - r < 2h(r) \quad (2.5.272)$$

соответственно (см. (2.5.204) и (2.5.209)) или эквивалентные им условия

$$p > 0,0615 \text{ и } r > 0,095. \quad (2.5.273)$$

Условия (2.5.268) исключают случай слабостохастической СФ и охватывают, таким образом, наиболее интересный случай.

В частности, для случаев БССФ и БСтСФ охватываются основные интервалы возможных изменений параметров p и r : $0,0615 < p < 0,5$ и $0,095 < r < 1,0$.

Таким образом, если исключить малоинтересный случай слабостохастической СФ, то конкретная случайно выбранная $(s \times M)$ -таблица X_M со сверхэкспоненциально стремящейся с ростом s к единице вероятностью является оптимальной. Поэтому можно считать конструктивным ее случайное получение. Заметим, что этот результат не может быть получен без установления комбинаторных условий, достаточных для ее оптимальности.

2.6. НЕКОТОРЫЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

2.6.1. Общематематические интерпретации. В п. 2.1.1 использовался ставший традиционным не только в математической литературе формализм, в котором изначальную роль играет понятие отношения R . В частности, с его помощью можно формализовать использованное в п. 2.1.5 понятие частично упорядоченного множества $X = (x)$ и другие полезные для системологии математические понятия. Рассмотрение этого не займет много места, поэтому не будем отсылать читателя к другим источникам.

Для данного множества $X = (x)$ рассмотрим отношение $R = (X, G_X)$, где $G_X \subseteq X^2$. Говорят, что отношение R обладает свойством

- 1) рефлексивности, если для всякого $x \in X$ пары $(x, x) \in G_X$;
- 2) симметричности, если $(x, x') \in G_X$ влечет $(x', x) \in G_X$;
- 3) антисимметричности, если одновременно $(x, x') \in G_X$ и $(x', x) \in G_X$ могут быть только, если $x = x'$;
- 4) транзитивности, если $(x, x') \in G_X$ и $(x', x'') \in G_X$ влечет $(x, x'') \in G_X$.

В зависимости от наличия у отношения R тех или иных из перечисленных свойств его относят к одному из трех типов отношений, называемых *эквивалентностью*, *толерантностью* и *порядком*.

В приведенной ниже таблице знаком «+» показано, какими свойствами должно обладать отношение R , чтобы принадлежать одному из указанных типов.

Тип отношения	Рефлексивность	Симметричность	Антисимметричность	Транзитивность
Эквивалентность	+	+		+
Толерантность	+	+		
Порядок	+		+	+

Из таблицы следует, что эквивалентность есть частный случай толерантности. Пары (x, x') — отношения эквивалентности (толерантности) обозначаются $x = x'$ ($x \sim x'$), и о их элементах говорят, что они эквивалентны (толерантны) друг другу. Пары (x, x') и (x', x) — отношения порядка, обозначаются $x < x'$ и $x' < x$, и о их элементах говорят „ x меньше x' “ и „ x' меньше x “ соответственно. Если одновременно $x < x'$ и $x' < x$, то в этом случае записывают $x = x'$ и говорят, что элемент x равен элементу x' . Символическая запись $x \leq x'$ ($x \geq x'$) соответствует „меньше или равен“ („больше или равен“).

Смежным классом L_x или просто классом эквивалентности элемента $x' \in X$ называется подмножество всех элементов $x' \in X$, эквивалентных x .

Рассмотрим конечное множество X , состоящее из N элементов, тогда в нем будет конечное же число $k \leq N$ классов эквивалентности. Выберем в каждом из них по одному произвольному элементу x_i ($i = \overline{1, k}$). Тогда очевидно, что классы эквивалентности L_{x_i} ($i = \overline{1, k}$) являются k -разбиением множества X . Если в каждом

классе L_{x_i} эквивалентности N_i элементов, то $\sum_{i=1}^k N_i = N$. Заметим,

что можно интерпретировать k -разбиение множества X , индуцированное k классами эквивалентности $\{L_{x_i}\}$, k -компонентным графом. При этом каждая из его компонент является полным графом с N_i вершинами и $N_i(N_i - 1)/2$ ребрами. Эквивалентность $x = x'$ между элементами i -го класса L_{x_i} эквивалентности интерпретируется ребром, соединяющим вершины x и x' i -й компоненты (вершин самих с собой можно не соединять ребрами). Много других примеров разбиений, которые можно интерпретировать как классы эквивалентности, содержится в п. 2.5.5.

О связи классов L_x толерантности элемента x с k -покрытиями можно прочесть в прекрасной монографии [89]. На этом вопросе здесь мы не будем подробно останавливаться. Заметим лишь, что когда толерантность становится транзитивной, т. е. превращается в свой частный случай — эквивалентность, то, вообще говоря, пересекающиеся классы толерантности становятся непересекающимися, т. е. классами эквивалентности.

Важной интерпретацией толерантности является классификация объектов $x \in R$, имеющих некоторые признаки $y \in R^*$, где R — множество признаков. Если рассматривается подмножество $X_M = (x_u)$ из M объектов x_u ($u = \overline{1, M}$) и каждому из них сопоставлено подмножество $\mathcal{E}_u \subset R^*$ его признаков y , то толерантными по определению считаются те объекты x_u и x_v , у которых имеются общие признаки, т. е.

$\mathcal{E}_u \cap \mathcal{E}_v \neq \emptyset$, если $\mathcal{E}_u \cap \mathcal{E}_v = \emptyset$, то они не считаются толерантными. Очевидно, что решенная в пп. 2.5.6—2.5.8 задача оптимального (s, M, λ) -обращения может рассматриваться как задача оптимального различения (классификация) объектов x_u , случайно наделяемых признаками y (СЗ). В силу этого ее можно также трактовать как задачу асимптотического (с ростом числа s признаков) перехода «случайно» толерантных объектов в «случайно» экви-

валентные (вероятности пересечений $\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_s$ с ростом s стремятся к нулю согласно теоремам 5 и 6 предыдущего пункта).

Перейдем к рассмотрению отношения порядка. Множество $X = \{x\}$ называется *частично упорядоченным*, если на его элементах определен порядок. Элементы x и x' частично упорядоченного множества X называются *сравнимыми*, если имеет место или $x < x'$, или $x > x'$, или $x = x'$.

Рассмотрим конечное частично упорядоченное множество X и k его подмножеств L_i ($i = \overline{1, k}$), в каждое из которых входят все элементы $x \in X$, сравнимые между собой. Будем называть эти подмножества *классами порядка* или просто классами. В частности, *непустым классом* будем формально считать вырожденный класс, состоящий из одного элемента $x \in X$, не сравнимого ни с одним элементом $x' \in X$. Тогда очевидно, что классы порядка L_i ($i = \overline{1, k}$) составляют k -разбиение частично упорядоченного множества X . В каждом из них существуют такие элементы $x^{i_{\min}}$ и $x^{i_{\max}}$, называемые минимальным и максимальным, что $x^{i_{\min}} \leq x'$ и $x' \leq x^{i_{\max}}$ для любого $x' \in L_i$. Для вырожденного класса $L_i = \{x\}$ имеем $x^{i_{\max}} = x^{i_{\min}} = x$.

Частично упорядоченное множество X , в котором два любых элемента сравнимы, называется *упорядоченным* или линейно упорядоченным множеством (оно состоит из одного класса ($k=1$)).

Определенное в п. 2.1.5 множество (U, V) -обменов является примером частично упорядоченного множества. На содержательном уровне эквивалентность соответствует неразличимости объектов (совпадению их признаков), а толерантность — их похожести (совпадению некоторых признаков). В пп. 2.5.6—2.5.8 рассматривались задачи вероятностной различимости объектов случайно наделяемых некоторыми признаками.

Следует отметить, что понятие толерантности было навеяно биологической проблематикой [90], так же как и понятие нечеткого множества — социальной проблематикой. В этом можно видеть благоприятное влияние современных приложений на модернизацию основ математики.

2.6.2. Об оптимизационных задачах на случайных графах. Оптимизационные задачи на детерминированных графах занимают одно из важнейших мест в теории дискретной оптимизации, достаточно упомянуть известную задачу коммивояжера. Однако все они имеют сугубо вычислительный аспект и в них не может быть и речи о каких-либо аналитических решениях. В лучшем случае имеют место некоторые грубые аналитические оценки. Впрочем, они весьма полезны для использования в известном универсальном методе ветвей и границ для решения экстремальных задач дискретного программирования, к которым сводятся многие задачи дискретной оптимизации, в частности на детерминированных графах.

Оптимизационные задачи на случайных графах почти не рассматривались. В конце следующей главы этой книги будет рассмотрена такая задача. Однако она носит слишком специальный характер, и поэтому мы не сочли уместным рассматривать ее в общем контексте этой главы. В начале следующей главы в связи с проблемой устойчивости сложных системы рассматриваются оптимизационные модели надежности (R-качество) и живучести (RC-качество). Однако все эти модели устойчивости сложной системы не касаются устойчивости связей между ее элементами. Поэтому оценки целостности системы в последнем из указанных аспектов имеет большое

значение. Более того, важно знать структуру частей системы после потери его целостности. Все эти проблемы решаются после формализации понятия целостности системы как связности соответствующего случайного графа Γ_{np} в § 2.4. Там же проблема структуры частей системы после потери ею целостности сведена к оценке вероятности m -компонентности случайного графа Γ_{np} .

Следует отметить простоту постановок задач оценок вероятностей m -компонентности случайного графа Γ_{np} и оптимального (s, M, λ) -обращения в простейшем случае БССФ, определяемых всего двумя параметрами (n, p) и (s, p) соответственно. Однако их решение находится на грани аналитических возможностей. Это связано с чрезвычайной сложностью математического описания связности графов и плотной упаковки множеств.

2.6.3. Теория информации. Статистика и математическая экология. Теория стохастических функций имеет описательный характер. Оптимизационные задачи в ней, связанные с обращением СФ, были индуцированы теорией информации. Автор всегда использовал для них теоретико-информационную терминологию [42], однако убедился, что она формирует неверные ассоциации у неспециалистов в области теории информации. Им кажется, что оптимизационные задачи этой теории сугубо специфичны. На самом деле эти задачи имеют общесистемное значение и базируются на общих асимптотических свойствах вероятностей, когда они приближаются к нулю или единице, что позволяет делать надежные заключения. В теории информации [80] $(s \times M)$ -таблица X_M называется *кодом*, обратная функция ϕ — *декодированием*, а (s, M, λ) -обращение — (s, M, λ) -*кодом*. СА называют *входом канала*, СЗ — *каналом с шумами*, СФ — *выходом канала*. Элементарные значения СА и СФ называют *входными* и *выходными символами*, а значения СА и СФ — *входными* и *выходными словами* длиной s .

Имеется еще и статистическая терминология. Значения СА x называются *параметрами распределения* $P(y/x)$, значение СФ y — *выборкой* объемом s , $(s \times M)$ -таблица X_M трактуется как M гипотез $H_u = H(x = x_u)$ о M возможных значениях параметра x . Процедура (s, M, λ) -обращения рассматривается как процедура выбора между M гипотезами со средней вероятностью ошибки выбора, равной λ . В случае $M=2$ говорят о выборе между двумя гипотезами H_1 и H_2 с вероятностями ошибок первого и второго родов α и β при заданном объеме s выборки y .

Отличие статистических постановок задач от теоретико-информационных состоит в том, что при первых оптимизируется только выбор между M гипотезами $H_u = H(x = x_u)$ ($u = \overline{1, M}$), когда сами гипотезы фиксированы $X_M = \{x_u\} = \text{const}$. Во втором случае производится еще и оптимальный выбор $(s \times M)$ -таблицы X_M в асимптотическом смысле, указанном в конце п. 2.5.6.

В последние годы выявились глубокие связи между задачей плотной упаковки и некоторыми экологическими представлениями. Дело в том, что в математической экологии утвердилось представление Хатчисона [91] об органиченной части s -мерного «экологического» пространства R^* «потребностей» у M отдельных популяций, составляющих сообщество. Каждая i -я популяция представлена допустимым в смысле Р. У. Эшби множеством $\mathcal{E}_i \subset R^*$ s -мерных потребностей, вне которого особи i -го вида не могут существовать. Множество \mathcal{E}_i называется нишей i -го вида. Ставятся задачи о размещении ниш в органиченной части экологического пространства R^*

с определенными перекрытиями и без них, с полным заполнением R^* и без него. Очевидно, что эти задачи весьма близки по поставкам к задачам, решаемым в пп. 2.5.6—2.5.8. В математической экологии они решались в одномерном случае МакАртуром [92], а для s -мерного случая проводились некоторые рассуждения по аналогии, которые подвергались критике экологов. Поэтому весьма заманчивым было бы решение указанных задач в s -мерном случае.

2.6.4. Игровая оптимизация. Рассмотрим вырожденный случай системы **A** и среды **B** (см. п. 2.1.5), когда они как функции своих элементарных структур $|X|$ и $|Y|$

$$A(|X|)=D_A \text{ и } B(|Y|)=D_B \quad (2.6.1)$$

вырождаются в «константные» множества $D_A=(d_A)$ реакций d_A и $D_B=(d_B)$ стимулов d_B , пробабилезированных распределениями

$$P_A=(p_{d_A}^A) \text{ и } P_B=(p_{d_B}^B) \\ \left(\sum_{d_A \in D_A} p_{d_A}^A = \sum_{d_B \in D_B} p_{d_B}^B = 1 \right) \quad (2.6.2)$$

В этом вырожденном случае взаимодействие системы **A** со средой **B**, определяемое соотношением (2.1.21) нивелируется в независимый друг от друга выбор стимула d_B и реакций d_A , регулируемый распределениями (2.6.2).

При фиксации начальных структур $|X_0|$ системы и $|Y_0|$ среды (U, V) -обмен согласно соотношению (2.1.24) делается функцией лишь стимула d_B и реакции d_A для системы **A**

$$(U, V)_A=[U(d_A, d_B), V(d_A, d_B)]_A \quad (2.6.3)$$

и среды **B**

$$(U, V)_B=[U(d_A, d_B), V(d_A, d_B)]_B.$$

Будем рассматривать (U, V) -обмены, определенные соотношениями (2.6.3), как две однозначные функции

$$\omega_A(d_A, d_B)=(U, V)_A \text{ и } \omega_B(d_A, d_B)=(U, V)_B, \quad (2.6.4)$$

значения которых упорядочены в соответствии с тем, как были упорядочены (U, V) -обмены в п. 2.1.6. В рассматриваемом вырожденном случае реакция d_A и стимул d_B перестают содержательно рассматриваться как подстановки и могут здесь рассматриваться как абстрактные элементы, приводящие к некоторым упорядоченным значениям функций ω_A и ω_B .

При такой интерпретации взаимодействия системы **A** со средой **B** мы приходим к известному понятию игры. В игровой терминологии система **A** и среда **B** называются *игроками A и B*, стимулы d_B и реакции d_A — *чистыми стратегиями*, а пробабилезированные множества D_A и D_B — смешанными стратегиями. Функции $\omega_A(d_A, d_B)$ и $\omega_B(d_A, d_B)$ называются *функциями выигрыша* игроков **A** и **B** соответственно. Конструктивные результаты теории игр имеют место для случая *действительных функций выигрыша*, причем основной результат теории сформулирован для частного случая *игр с нулевой суммой* (нуль-суммарных игр), когда имеет место соотношение

$$\omega_A(d_A, d_B)+\omega_B(d_A, d_B)=0 \text{ или } \omega_A(d_A, d_B)=-\omega_B(d_A, d_B)$$

и для задания игры достаточно задание только одной функции выигрыша, например $w_A(d_A, d_B)$, при записи которой можно опустить индекс A .

Основным результатом теории игр является теорема Дж. фон Неймана о минимаксе [3, 93]. Ее формулировка требует рассмотрения случайной величины функции выигрыша

$$\zeta = \zeta(d_A, d_B) = \sum_{(d'_A, d'_B)} w(d'_A, d'_B) I_{(d'_A, d'_B)}(d_A, d_B),$$

где суммирование ведется по всем неупорядоченным парам (d'_A, d'_B)

$$\begin{aligned} & \text{и} \\ & I_{(d'_A, d'_B)}(d_A, d_B) = \\ & = \begin{cases} 1, & \text{если } (d'_A, d'_B) = (d_A, d_B), \\ 0, & \text{если } (d'_A, d'_B) \neq (d_A, d_B). \end{cases} \end{aligned}$$

В случае непрерывности множеств D_A и D_B возникает необходимость в ряде непринципиальных оговорок, не проясняющих сути дела. Поэтому ограничимся рассмотрением лишь конечных множеств D_A и D_B . Вводится условие независимости в вероятностном смысле стохастического выбора значений d_A и d_B игроками A и B . Другими словами, считается, что вероятность $P(d_A, d_B)$ появления пары стратегий (d_A, d_B) , приводящих к функции выигрыша $w(d_A, d_B)$,

$$P(d_A, d_B) = p_{d_A}^A p_{d_B}^B.$$

Тогда согласно (2.1.3) математическое ожидание $E\zeta$ случайной величины функции выигрыша ζ имеет вид

$$E\zeta = \sum_{d_A, d_B} w(d_A, d_B) p_{d_A}^A p_{d_B}^B = F(p_A, p_B) \quad (2.6.5)$$

и при фиксации функции $w(d_A, d_B)$ является функционалом от двух распределений (2.6.2).

Основная теорема теории игр состоит в утверждении о существовании такой пары распределений (P^0_A, P^0_B) , которые удовлетворяют уравнению минимакса

$$\min_{P_B} \max_{P_A} F(P_A, P_B) = \max_{P_A} \min_{P_B} F(P_A, P_B) = F(P^0_A, P^0_B), \quad (2.6.6)$$

если экстремумы берутся в классе всевозможных дискретных распределений (смешанных стратегий). Если же экстремумы берутся в классе чистых стратегий, когда распределения вырождаются в детерминированные распределения (см. соотношение (2.1.11)), то общее уравнение минимакса (2.6.6) вырождается в уравнение

$$\min_{d_B} \max_{d_A} w(d_A, d_B) = \max_{d_A} \min_{d_B} w(d_A, d_B) = w(d^0_A, d^0_B),$$

где пара (d^0_A, d^0_B) называется *оптимальными чистыми стратегиями* или *седловой точкой*, причем, вообще говоря, седловая точка существует не для всех функций выигрыша $w(d_A, d_B)$.

В отличие от этого вырожденного случая смешанные стратегии (P^0_A, P^0_B) , называемые *оптимальными*, существуют при любой функции выигрыша $w(d_A, d_B)$. Поэтому следствием требования существования оптимальных стратегий в смысле минимакса является необходимость пробабиллизации множеств D_A и D_B чистых стратегий и переход к смешанным стратегиям. Это обстоятельство является дополнительным аргументом в пользу рассмотрения стохастических систем, когда возникает проблема их оптимизации. Важно отметить, что, как и оптимальное обращение стохастических функций, подробно рассмотренное в предыдущем параграфе, минимаксная оптимизация игр, решаемая в весьма общих вариантах основной теоремы Дж. фон Неймана, всегда остается теоремой существования. Некоторые редчайшие специальные случаи явного аналитического вычисления оптимальных смешанных стратегий только подчеркивают общую ситуацию неконструктивности этой теоремы. Здесь мы не будем подробно останавливаться на теории игр, составляющей важнейший раздел математического аппарата системологии, так как она имеет обширную литературу по аналитическим аспектам этой теории, не говоря уже о вычислительных аспектах, которых мы вообще здесь не касаемся.

2.6.5. Заключительные замечания. Введенное в § 2.1 формальное определение системы позволяет точно сформулировать общую проблему, которая естественно возникает по ходу изложения результатов этой главы и, по мнению автора, является основной проблемой системологии.

Рассмотрим динамическое задание пары «система — среда» (A^T, B^T) (см. соотношение (2.1.31), а также соотношения (2.1.33) или (2.1.35')), определяющие (U^T, V^T) -обмены. Необходимо найти оптимальный в смысле соотношений (2.1.28) или (2.1.29) (U^T, V^T) -обмен и соответствующую оптимальную систему. Решение этой экстремальной задачи необходимо найти при условии устойчивости (целостности) системы на фиксированном интервале $(1, T)$ дискретных моментов времени (определение неустойчивости понимается в смысле соотношения (2.1.34)).

Эта задача на условный дискретный экстремум, к сожалению, не может быть решена хорошо развитым аппаратом решения задач на условные экстремумы непрерывного анализа. Здесь также оказывается неадекватным задаче понятие устойчивости решений систем дифференциальных уравнений в смысле Ляпунова. Требование аналитических решений или хотя бы аналитических оценок исключает численное машинное решение как основной аппарат исследования.

Вместе с тем очевидно, что на решение поставленной проблемы в самой общей постановке, которая была приведена выше, не приходится рассчитывать. Например, вряд ли можно преодолеть аналитические трудности при описании системы общим случаем СФ. Мы уже видели, что даже фрагменты общей постановки оптимизационной проблемы имеют аналитическое решение лишь для СЗ с независимыми переходами. Поэтому необходимо пытаться решать разнообразные фрагменты общей проблемы при всякого рода частных допущениях, что и делается в последней третьей главе этой книги.

Итак, для Кювье жизнь есть морфо-процесс; сущность жизни — форма, длящаяся в потоке обмена ... А. А. Ляпунов стремится говорить о живом веществе... Это явно не вещество, а существо. Не существует живого вещества. Живые существа построены из неживых частей...

В. Н. Беклемишев [9]

3. СИСТЕМНАЯ ЭКОЛОГИЯ

Термин «экология» (от греческого слова «ойкос» — жилище) был введен биологом Э. Геккелем в 1869 г. для раздела биологии, изучающего связи особей со средой их обитания. Поскольку в среде обитания могут находиться особи того же и других видов, в дальнейшем в экологию были включены разделы биологии все более и более высоких биологических уровней: надорганизменного (популяционного) надпопуляционного (биоценотического, В. В. Докучаев, 1896) и надбиоценотического (биосферного, В. И. Вернадский, 1926).

Пионерские работы В. В. Докучаева и В. И. Вернадского получили достойный их резонанс лишь во второй половине нашего столетия в связи с надвигающимся экоцидом, а экология претерпела новую расширенную трактовку, выводящую ее за пределы традиционных естественнонаучных дисциплин: биологии, геохимии и геофизики. Это связано с проблемами охраны окружающей среды, ее контроля и управления ею, имеющими явный кибернетический характер. Таким образом, возникли предпосылки создания системной экологии.

3.1. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД И ПОНЯТИЕ БИОЦЕНОЗА

Сейчас в экологии безгранично господствуют энергетические концепции, которые играют весьма положительную роль до тех пор, пока их представители четко осознают ограниченность таких концепций.

Энергетический подход в экологии сводится к детализации физических законов сохранения вещества и энергии в форме трофических балансов*). Для расчета

* Экологический термин «трофический» означает «пищевой».

динамики биомасс компонент биогеоценозов широко и плодотворно используются дифференциальные уравнения типа уравнений химической кинетики. Для построения теории, адекватной неживому объекту исследования, такие рассмотрения являются, по-видимому, не только необходимыми, но и практически достаточными. Однако в экологии для построения теории, адекватной живому объекту исследования, такие рассмотрения, будучи необходимыми, далеко недостаточны. Например, применительно к водным биогеоценозам энергетическая концепция сводится в основном к следующим положениям [94]:

«При современном состоянии лимнологии и гидробиологии работа на уровне только накопления фактического материала или только сравнения отдельных факторов, наблюдаемых на разных водоемах, является анахронизмом и нецелесообразной растратой материальных и человеческих ресурсов» (стр. 39).

«Такой подход, помимо чисто экономической нереальности, противоречил бы самому духу науки, всегда стремящейся к обобщениям, к выявлению общих закономерностей ... По существу должна быть создана «теория подобия» пресноводных водоемов, в какой-то мере сходная (хотя бы по задачам и результатам) с теорией подобия, применяемой, например, в гидромеханике и теплотехнике» (стр. 38).

«Аналитическое исследование моделей не только водных экологических систем, но и отдельных популяций оказывается в большинстве случаев невозможным. Поэтому широкое распространение получили численные методы решения систем дифференциальных и конечно-разностных уравнений с помощью ЭВМ» (стр. 34).

Полностью присоединяясь к критической части приведенных цитат, трудно согласиться с их положительной частью, связанной с мечтой о создании экологической теории в духе гидромеханики и теплотехники и неоправданного противопоставления аналитической и машинной моделей, каждая из которых, как было показано, хороша на своем месте. Впрочем, нельзя быть придирчивым к цитированной выше работе больше, чем к другим экологическим работам энергетического направления. Проблемы, связанные со сложностью и упрощением, целостностью и устойчивостью, информацией и управлением системами и их моделями, и другие общесистемные проблемы не могут излагаться в них на достаточно высоком научном уровне, поскольку сама системология еще

находится в стадии становления. В результате такого рода вопросы часто трактуются в вульгарном стиле «применения математики к биологии» или в упрощенном и одностороннем сведении применения системологии в экологии к использованию в ней численного моделирования биоценозов на ЭВМ *).

Следует иметь в виду, что экология, понимаемая в узком биологическом смысле как биоценология, сама еще является сравнительно молодой ветвью биологии с еще вполне не устоявшимися собственно биологическими концепциями [95]. Все это, безусловно, создает дополнительные трудности в построении системной экологии, которая без своей экспериментальной и концептуальной базы — биоценологии — может оказаться подобной колосу на глиняных ногах. И первое, о чем здесь следует позаботиться — это о корректности определения биоценоза. Ясно, что оценке неидентичности однотипных биоценозов следует предпослать их типизацию. Последняя, в силу указанной в § 1.1 закономерности нарастания неидентичности, должна быть все более широкой (обобщенной). Так, для биоценозов, как уже отмечалось, она вполне может ограничиться лишь фиксацией их структуры, отражающей лишь отношения популяций между собой, без конкретизации (тем более видовой) самих популяций. В самом деле, вычленение элементов биоценоза определяется видом рассматриваемых связей (трофических, топических **) и др.). Так, при трофических рассмотрениях в качестве элемента фигурирует целая группа популяций. Это делает понятие элемента биоценоза достаточно широким. Поэтому при типизации биоценозов приходится полагаться лишь на их структуру, определяемую видом рассматриваемых связей.

Связи между элементами биоценоза по сравнению со связями между элементами других биосистем являются наиболее разнесенными во времени и пространстве. Это, впрочем, не влияет на их силу и регулярность, например, планетарные миграции популяций, приуроченные к одним и тем же биоценозам, сезонные изменения последних и др. Таким образом, биоценоз более чем другие биоси-

* В отличие от такого рода работ, особое место в биологической литературе занимает глубоко системологическая работа Л. И. Беклемишева [9].

** Топическими связями в экологии называются связи между отдельными особями и популяциями, лимитируемые конкуренцией за место обитания.

208 *и так в смысле Абамурат*
Риндзату — по определению, в смысле
эколог. ДС — по определению в смысле

стемы требует введения общего абстрактного понятия системы.

Для биоценоза второй вид устойчивости биосистем, связанный с переменностью состава их элементов, достигает своей кульминации, наделяя их новым качеством. Они, действительно, могут рассматриваться как пример превращающихся систем в нашей классификации, на что, как уже упоминалось, впервые обратил внимание К. В. Беклемишев [24].

Некоторое «заземление» понятия биоценоза идет по линии подчеркивания определяющего значения в нем понятия *биотопа* (места обитания), а затем и конкретного биотопа. Это действительно придает биоценозу биогеографическую определенность и конкретность, но лишь как объекта сбора материала о нем, почти неприступного для выявления управляющих им законов. Как уже упоминалось, большое разнообразие сопровождается малостью численности (обилия) однотипных биоценозов. Это относится в первую очередь к биоценозам, имеющим глобальные (сравнимые с биосферой) размеры. Такие биоценозы названы нами уникальными. Сделаем некоторые терминологические замечания.

Как уже упоминалось в § 1.1, экосистема содержит косные и живые компоненты. Исследование экосистем в зависимости от интересов исследователя порождает разнообразную проблематику. Крайними здесь являются позиции физикохимика (основное внимание к косным компонентам) и биолога (основное внимание к живым компонентам), всю промежуточную между ними позицию занимает географ. Эти позиции хорошо выражены в бытующих сейчас в литературе аспектах экосистемы: геосистема, геобиосистема (геобиоценоз), биогеосистема (биогеоценоз), биоценоз (биологическое сообщество).

В настоящее время в наиболее отчетливой форме с системных позиций теория геосистем изложена В. И. Беляевым [96]. Эта монография в основном посвящена имитационному моделированию геосистем. Автор разработал свой так называемый комбинированный вариант имитационного моделирования, имеющий стохастический характер. Кроме того, в монографии весьма подробно рассмотрены и самоорганизующиеся модели МГУА А. Г. Ивахненко [38], а также приводятся сведения о теории потенциальной эффективности сложных систем [4]. Таким образом, здесь впервые в мировой литературе делается попытка совместного рассмот-

рения трех известных типов моделирования [97]. В. И. Беляев удачно подчеркивает, что в отличие от других моделей, использующих априорные соображения, модели МГУА основаны на апостериорной информации, и поэтому он называет их *апостериорными*. Мы рассматриваем другой крайний случай экосистемы — биоценоз и ограничиваемся рассмотрением лишь априорных его моделей. Начнем с экологической интерпретации предельных законов теории потенциальной эффективности сложных систем.

3.2 ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ И ИХ ЭКОЛОГИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Предельные законы, ограничивающие потенциальную эффективность сложных систем любой природы, давно известны в системологии, так же, как и их многочисленные системотехнические интерпретации. Общая форма предельного закона, а также численный пример его использования были приведены в п. 1.5.1. Систематическое изложение теории потенциальной эффективности сложных систем с подробными математическими формулировками и полными доказательствами предельных законов содержится в монографии [4]. В этом параграфе без доказательств будут приведены основные предельные законы системологии и им будет дана экологическая интерпретация, важная и сама по себе, и для последующего изложения.

В п. 1.4.1 было проведено упорядочение основных качеств сложных систем: надежности (R-качества), помехоустойчивости (I-качества), управляемости (C-качества) и самоорганизации (L-качества). В дальнейшем мы будем их называть X-качествами и для каждого из них рассматривать некоторую подсистему A_X сложной системы A . Эту подсистему будем называть X-сечением системы A по X-качеству. В символической записи система A имеет структуру $|A|$, поведение \bar{A} и стратегическую цель \underline{A} . Аналогично вычлененная из нее подсистема A_X имеет структуру $|A_X|$, поведение \bar{A}_X , тактическую цель \underline{A}_X и конкретный вид $(u, v)_X$ -обмена. Предельные X-законы устанавливают явный аналитический вид выгодных (потенциально достижимых) (u, v_0) -обменов. Эти законы носят динамический характер, при этом всегда фигурирует дискретное время $t=0, 1, 2, \dots$ с интервалом дискретизации, принятым за единицу.

3.2.1. Модель R-сечения A_R . В момент t система A_R состоит из $n=n(t)$ элементов $\{e_i\}$ ($i=1, n(t)$), каждый из которых независимо от других в результате взаимодействия со средой \mathbf{B} погибает с вероятностью p_i (выживает с вероятностью $1-p_i$). Система A_R обнаруживает свое состояние (живые и погибшие элементы) с опозданием на интервал времени, принятый за единицу. При этом живая система может пополниться любым числом элементов (или воспроизвести их), в чем среда \mathbf{B} ей не мешает (она к ней индифферентна). Гибель системы фиксируется в тот момент, когда погибла $(1-\theta)$ -я доля ее элементов, т. е. считается, что система жива, если жива θ -я доля ее элементов. R -цель системы A_R совпадает со стратегической целью системы A — выжить, т. е. как можно дольше просуществовать. Можно считать, что система A_R приобретает у среды \mathbf{B} время жизни t , откупаясь гибелью своих элементов $e_i((u, v) = (n, t))$. Таким образом, здесь имеет место (n, t) -обмен.

Каков в рассматриваемом случае оптимальный (n, t_0) -обмен? Другими словами, до какого минимального числа элементов $n(t)$ должна пополняться система A_R , компенсируя погибшие в предыдущий момент элементы, чтобы с вероятностью, сколь угодно близкой к единице (см. соотношение (1.6)), существовать сколь угодно длительное время t_0 ?

R -закон [32, 27, 4]. Оптимальный (n, t) -обмен имеет место при

$$t_0 = t(n) = \exp(C_R n), \quad (3.2.1)$$

где $C_R = C_R(\{p_i\})$ — фундаментальная величина, зависящая от вероятностей $\{p_i\}$ гибели элементов. Другими словами, для неограниченно долгого существования (бессмертия) системы A_R необходим, но не достаточен по крайней мере логарифмический со временем t рост числа ее элементов $n(t) = \ln t / C_R$. Конечные же системы (с фиксированным числом элементов) заведомо смертны.

Биологические проявления R -закона. Устойчивость простых реальных систем основана на постоянстве их вещественных носителей и принципе обратной связи (O -закон). Устойчивость реальных сложных систем (в частности, биосистем) имеет качественно иной характер — на фоне переменных вещественных носителей сохраняется их неизменная структура [9].

В этом отношении R -закон касается как раз высшей формы устойчивости сложных реальных систем (в частности, биосистем). Он применим как к бесконечно растущим, так и к конечным системам на уровне особей и к иерархически более высоким уровням биосистем начиная с популяций. Известно, что последние потенциально предрасположены к неограниченному росту, но внешние условия воздействуют на них так, что они всегда остаются в конечных пределах. Не является ли конечность особей одной из причин их смертности? Что касается видов и биоценозов, то некоторые из них могут рассматриваться как относительно долгоживущие, а биосфера может служить примером наиболее долгоживущей биосистемы, т. е. наблюдается увеличение времени жизни биосистем с повышением их иерархического уровня.

Для того чтобы судить о темпе роста последних двух биосистем, нужно определить, что понимается под элементом в них: вид, часть биоценоза и т. д. Все эти вопросы в широком биологическом плане поставлены в работе [24] и требуют дальнейших исследований.

Следует отметить, что «пассивный» рост числа элементов — не единственный способ обеспечения надежности (устойчивости) биосистем (см. далее об активном качестве — живучести системы в п. 3.2.5).

3.2.2. Модель I -сечения A_I . Система A_I имеет тактическую цель A_I — различать некоторое число M важных для нее сигналов, поступающих из среды B . Этому препятствует следующее обстоятельство. Связь между ее входом, на который поступают сигналы, и выходом, где происходит их различение, не изолирована от мешающего влияния шумов среды B . Таким образом, имеется следующая модель. Вход системы состоит из a символов $i = \overline{1, a}$, а выход — из b символов $j = \overline{1, b}$, и передача входных символов ведется по одному символу в каждый дискретный момент времени $s = 1, 2, \dots$

Действие шумов состоит в том, что в каждый момент времени s независимо от того, что происходило в другие; если на входе имеет место символ i , то на выходе с вероятностью p^j_i имеет место символ j .

Система A_I на своем входе может кодировать каждый из $M = a^{tR}$ ($0 \leq R \leq 1$) поступающих сигналов входными словами длиной t (совокупностями t входных символов). M кодирующих входных слов длиной t составляют структуру $|A_I|$ системы A_I .

Процедура различения (декодирования) M сигналов, один из которых (неизвестно какой из M) имеет место на входе, по его искаженному шумами прообразу — выходному слову длиной t — составляет поведение \bar{A}_I системы A_I . Чем больше длина выходного слова t (продолжительность различения), тем больше сигналов M может различать система A_I с вероятностью, сколь угодно близкой к единице. Можно считать, что система A_I приобретает у среды \mathbf{B} некоторое число M сигналов, платя за это некоторым интервалом времени t своего существования $((u, v) = (t, M))$. Таким образом, здесь имеет место (t, M) -обмен.

Каков в рассматриваемом случае оптимальный (t, M_0) -обмен? Другими словами, какое при фиксированном времени различения t максимальное число M_0 почти достоверно различимых сигналов?

I-з а к о н [2]. Оптимальный (t, M_0) -обмен имеет место при

$$M_0 = M(t) = \exp(C_I t), \quad (3.2.2)$$

где $C_I = C_I(\{p^j_i\})$ — фундаментальная величина, зависящая от вероятностей $\{p^j_i\}$ (пропускная способность в терминологии теории информации).

Биологические проявления *I-з а к о н а*. Прямые проявления *I-з а к о н а* имеют место в рецепторных механизмах любых особей (см. § 3.5). Поиски косвенного проявления *I-з а к о н а* в биоценозах (например, интерпретация их как текста, закодированного с целью повышения помехоустойчивости в шумящей среде [98]) пока не привели к сколько-нибудь полезным биологическим результатам. Следует заметить, что использование теоретико-информационного выражения энтропии для «измерения разнообразия» биоценоза [99] не имеет никакого отношения к проявлению *I-з а к о н а* и кажется нам бесперспективным из-за неконструктивности (не связано с содержательной моделью A_I).

3.2.3. Модель *C-сечения* A_C . Здесь впервые рассматривается конфликтная ситуация между системами A_C и B_C в борьбе за важные для них ресурсы, имеющиеся в ограниченном количестве K . Для тех борющихся систем, для которых эти ресурсы жизненно важны, борьба имеет стратегическую цель, для других — она тактическая. Борьба ведется отдельными схватками в последовательные дискретные моменты времени. Каждая из систем A_C и B_C имеет совокупности возможных действий

$X=\{x\}$ и $Y=\{y\}$ соответственно. На каждой паре действий (x, y) определена некоторая функция выигрыша, указывающая количество ресурсов $M(x, y)$, получаемое системой A_C (при этом система B_C «получает» $-M(x, y)$ ресурсов, с обычной интерпретацией их отрицательного количества). Структуры систем $|A_C|$ и $|B_C|$ не определены (они структурно аморфны). Поведение их \bar{A}_C и \bar{B}_C состоит в выборе (без оповещения друг друга заранее) действий x и y в каждой отдельной схватке соответственно. В общем случае предусматривается выбор не самих действий x и y , а вероятностей их использования $p_A(x)$ и $p_B(y)$ системами A_C и B_C соответственно, что охватывает детерминированный случай выбора, когда эти вероятности вырождаются в единичные для некоторых фиксированных x и y . Борьба не ограничивается во времени и ведется до полного захвата ресурсов в количестве K одной из систем (полное разорение другой системы, отождествляемое с ее гибелью, если ресурсы для нее жизненно важны).

Предполагается, что $|M(x, y)| \ll K$, т. е. что при каждой схватке «разыгрывается» лишь малая доля всех ресурсов. В этом случае оптимальным поведением каждой из систем является стремление выиграть каждую отдельную схватку, не задумываясь о битве в целом (каждодневный мелочный успех в «серой жизни» [23]). Оптимальным оказывается рандомизированное поведение систем, т. е. их поведение, определяемое вероятностями $p_A(x)$ и $p_B(y)$. Тогда средний выигрыш системы A_C в отдельной схватке

$$H = H(p_A, p_B) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} M(x, y) p_A(x) p_B(y). \quad (3.2.3)$$

При этом система B_C получает в среднем величину $-H$. Фиксированное значение K ресурсов может быть выиграно A_C или B_C за случайное время t (среднее время \bar{t}). Причем в зависимости от того, больше или меньше нуля величина H с вероятностью, близкой к единице, выигрывает система A_C или B_C соответственно. Можно считать, что за приобретение некоторого количества K ресурсов система A_C (или B_C) платит некоторым средним временем \bar{t} своего существования $((u, v) = (\bar{t}, K))$.

Каков в рассматриваемом случае оптимальный (\bar{t}, K_0) -обмен? Другими словами, какое при фиксированном среднем времени борьбы \bar{t} максимальное количество ре-

сурсов K_0 , которое может выиграть почти достоверно одна из борющихся систем? Ответ на этот вопрос был получен в работе [27] с использованием результатов Р. Беллмана [23] в следующем виде [4].

С-закон. Оптимальный (\bar{t}, K_0) -обмен имеет место при

$$K_0 = K(\bar{t}) = C\bar{t}, \quad (3.2.4)$$

где

$$\begin{aligned} C_C = C_C(M(\cdot, \cdot)) &= \max_{p_A} \min_{p_B} H(p_A, p_B) = \\ &= \min_{p_B} \max_{p_A} H(p_A, p_B) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

— фундаментальная величина, зависящая от функции выигрыша $M(\cdot, \cdot)$ (*величина игры* в терминологии теории игр [3, 93]), а функционал $H(p_A, p_B)$ определяется соотношением (3.2.3).

В теории игр доказывается, что величина игры C_C при широких допущениях о свойствах функции выигрыша $M(\cdot, \cdot)$ не зависит от порядка, в котором берутся экстремумы $\max \min$ или $\min \max$ определяющего ее выражения. Например, для этого достаточно, чтобы функция выигрыша $M(x, y)$ была непрерывна по каждому аргументу x и y .

Если рандомизированные поведения систем A_C и B_C вырождаются в детерминированные $(p_A(x)) = p_B(y) = 1$ для некоторой пары (x, y) и при этом имеется решение уравнения (3.2.4'), то точка (x, y) называется *седловой точкой* функции $M(x, y)$. Детерминированные поведения называют *чистыми* стратегиями, а рандомизированные — *смешанными*.

Остановимся на экологической интерпретации минимаксного соотношения (3.2.4'), используемого в объективной телеологии. Действие среды y можно рассматривать как стимул, а действие биосистемы x как реакции. Величина $M(x, y)$ может рассматриваться как эффект от взаимодействия биосистемы со средой. При этом $\max_{p_A} \min_{p_B}$ рассматривается как принцип поведения «сти-

мул — реакция» гомеостатического типа, а $\min_{p_B} \max_{p_A}$ как

более сложный принцип поведения «реакция — стимул», связанный с перспективной активностью сложной биоси-

стемы. Очевидно, что для экологических приложений наибольший интерес представляет случай отсутствия седловой точки у функции выигрыша $M(x, y)$, когда обнаруживается разница между этими двумя кардинально различными принципами поведения биосистем. Заметим, что часто рандомизированное поведение (смешанные стратегии) оказывается для биосистем неприемлемым, если оно связано с резкими перестройками, особенно перестройками структурных параметров. Тогда решение уравнений (3.2.4') приходится искать в детерминированных поведении (чистых стратегиях), что увеличивает шансы на отсутствие седловой точки у функции $M(x, y)$, важное для экологии.

Следует заметить, что модель I -сечения глубже модели C -сечения, так как первая включает в себя и структуру $|A_I|$ и поведение \bar{A}_I и далее оптимизируется по ним обоим, а модель C -сечения, как уже упоминалось, является структурно аморфной и оптимизируется только по поведению \bar{A}_C .

Биологические проявления C -закона. По сути дела C -закон является общесистемным количественным обобщением известного качественного биологического закона конкурентного вытеснения, найденного Г. Ф. Гаузе [100], который констатирует следующее. Два вида с перекрывающимися нишами* не могут сосуществовать длительное время, не вытесняя один другого. При этом конкурента вытесняет вид, имеющий перед ним хотя бы минимальное преимущество. Последнее обстоятельство отражено в C -законе условиями $H \geq 0$. Абстрактные ресурсы можно интерпретировать ограниченными запасами пищи, которой питаются два вида, ведущие борьбу за них. Р. Мак Артур [92] рассмотрел случай конкурентного вытеснения видов в биоценозе с тремя типами все более перекрывающихся ниш. Случай Г. Ф. Гаузе относится к последнему типу наиболее перекрытых ниш. Два первых типа расположения ниш Мак Артура не подпадают под действия C -закона, характеризуют переходные процессы, и требуют специальных исследований.

Среди существующих моделей L -сечений A_L системы A нам неизвестно ни одной, которая хотя бы для некоторого (u, v) -обмена приводила бы к L -закону в форме (1.2). Быть может, L -закон в указанной форме в полной

* Точное определение понятия «ниши» содержится в п. 3.3.1.

мере проявляется лишь на уровне самоорганизующихся систем, о предельных законах которых в настоящее время почти ничего не известно.

Особенностью рассматриваемых (u , v)-обменов X -сечений A_X решающей системы A является то, что ее R -сечение A_R добывает универсальные, невозполнимые и необратимые ресурсы — время ее жизни t в обмен на растрату собственных элементов.

Дальнейшие ее жизненные проявления в информационном I -сечении A_I (ориентация во внешней среде B) и в действенном C -сечении A_C (борьба за ресурсы, в том числе восполняющие ее же элементы) приводят только к растрате времени ее жизни.

3.2.4. Модели XU -сечений. Вычлененные из системы A ее «одномерные» X -сечения A_X грубо объясняют ее целостную структуру и поведение. Поэтому в последнее время рассматриваются «двумерные» XU -сечения A_{XU} решающей системы A . Например, в модели RI -сечения A_{RI} учитываются мешающие воздействия среды B на систему A_{RI} , различающую сигналы (внешние шумы) и свои элементы (внутренние шумы). Некоторые подходы к решению возникающих здесь задач содержатся в работах [101, 102].

В модели IC -сечения A_{IC} наряду с противодействием системе A_{IC} со стороны системы B_{IC} учитывается еще мешающее воздействие шумов среды на точную фиксацию системами своего и чужого состояний [33].

Наконец, в модели RC -сечения A_{RC} рассматривается надежность системы A_{RC} в случае конфликтной ситуации между ней и системой B [30]. RC -качество системы получило специальное название *живучести* [30]. Остановимся на нем подробнее ввиду его очевидной биологической интерпретации.

3.2.5. Модель RC -сечения A_{RC} . Система A_{RC} состоит из равномерно ее заполняющих жизненно важных a -элементов и активных защитных R -элементов. Рассматривается конфликтная ситуация, в которой система B имеет c -элементы, уничтожающие a - и R -элементы системы A_{RC} . Последние, в свою очередь, могут препятствовать действиям c -элементов, уничтожая их или нейтрализуя их действия.

Каждая из систем A_{RC} и B имеют до взаимодействия друг с другом ограниченное число a -, R - и c -элементов N_a , N_R и N_C соответственно. В дискретные моменты времени происходят отдельные схватки между системами

A_{RC} и \mathbf{B} , при которых система \mathbf{B} распределяет отдельные порции своих c -элементов для уничтожения определенных количеств a - и R -элементов системы A_{RC} (поведение \bar{B} системы \mathbf{B}). При этом планы системы \mathbf{B} осуществляются, не будь противодействия системы A_{RC} . Последнее определяется вероятностью $p = p(N_R(t))$ уничтожения (или нейтрализации) одного c -элемента R -элементами, имеющимися у системы A_{RC} в момент t . В отличие от R -сечения A_R предполагается отсутствие регенерации (ее можно пренебречь из-за кратковременности взаимодействия систем).

Фиксируется некоторое ограниченное количество E_R активного защитного субстрата (например, энергии), который равномерно распределен между N_R R -элементами и определяет их индивидуальную активность. При этом не имеет места его суперпозиция в том смысле, что дробление субстрата на отдельные R -элементы снижает их совместную активность по сравнению с его сосредоточением в одном R -элементе. С другой стороны, такое рассредоточение R -элементов затрудняет действие c -элементов и до некоторых пределов повышает живучесть систем A_{RC} . Такого рода ситуация имеет достаточно общий характер. Структура $|A_{RC}|$ системы A_{RC} при фиксированных значениях N_a и количестве защитного субстрата E_R определяется выбором начального числа N_R R -элементов.

Эффект действия системы \mathbf{B} на систему A_{RC} происходит с запозданием на интервал времени, принятый за единицу. Это означает, что планы системы \mathbf{B} относительно системы A_{RC} могут осуществляться только через указанный интервал времени, например, из-за необходимости преодоления c -элементами некоторого расстояния. Борьба между системами A_{RC} и \mathbf{B} считается законченной, после того как система \mathbf{B} израсходовала на систему A_{RC} все свои c -элементы. Если после этого система A_{RC} еще содержит некоторую θ_a -ю долю первоначального количества своих a -элементов, то считается, что она жива, если меньшую долю, то считается, что она погибла. Таким образом, система A_{RC} имеет стратегическую цель — выжить. Цель системы \mathbf{B} , состоящая в уничтожении системы A_{RC} , может рассматриваться как тактическая. Можно рассматривать симметричный случай борьбы двух систем A_{RC} и B_{RC} , когда возможны различные варианты их целей [103].

Система A_{RC} стремится дорогой ценой отдать свои a - и R -элементы за возможно большее число c -элементов системы B , так как их исчерпывание при сохранении θ_a -й доли первоначального числа a -элементов сохраняет ее жизнь. Таким образом, здесь происходит (\vec{N}, N_C) -обмен, где вектор $\vec{N} = (N_a, N_R)$ определяет первоначальную структуру $|A_{RC}|$ системы A_{RC} .

Каков в рассматриваемом случае оптимальный (\vec{N}, N^0_C) -обмен? Другими словами, каково максимальное значение числа N^0_C c -элементов, соответствующее оптимальному числу N^0_R R -элементов при фиксированных значениях N_a и E_R , когда вероятность гибели системы A_{RC} близка к единице? Оптимальный (\vec{N}, N^0_C) -обмен найден в предположении независимости действий отдельных R -элементов.

RC -закон [30, 29, 4]. Оптимальный (\vec{N}, N^0_C) -обмен имеет место при

$$N^0_C = N_C(N_a) = (1 - \theta_a) N_a \exp(C_{RC} E_R), \quad (3.2.5)$$

где C_{RC} — фундаментальная величина, зависящая от качества R -элементов и оптимальное значение $N^0_R = (1 - \theta_a) N_a C_{RC} E_R$.

Из RC -закона следует, что при наличии у системы B числа c -элементов $N_C < N^0_C$ оптимальная система A_{RC} выживает с вероятностью, близкой к единице.

Можно представить себе, что до борьбы системы A_{RC} и B изолированы, но, зная, что в будущем такая борьба неизбежна, каждая в своей среде долговременно производит (\vec{N}, t) - и (N_C, t) -обмены, накапливая свои a -, R - и c -элементы соответственно. Затем, когда система B решает, что настал момент ее активных действий против системы A_{RC} , происходит кратковременная борьба, приводящая к (\vec{N}, N_C) -обмену (системы обладают перспективной активностью). Кратковременность борьбы определяется тем, что оптимальное поведение \vec{B} системы B является, как можно доказать, двухшаговым ($t=0, 1$) [30]. На первом шаге определенная доля начального числа c -элементов расходуется только на R -элементы, а на втором — оставшаяся часть c -элементов расходуется только на a -элементы.

Важнейшее следствие из RC -закона можно получить при содержательном анализе предыстории образования

структуры $|A_{RC}|$ до периода борьбы с системой В (содержательное включение в модель живучести перспективной активности).

Можно предположить, что система A_{RC} располагает фиксированным количеством E первоначального жизненного субстрата (например, белка), который она может распределить между некоторым числом N_a своих жизненно важных a -элементов. Последние могут воспроизводить вторичные субстраты, в том числе и защитный субстрат E_R . При этом естественно допустить закон сверхаддитивности такого воспроизведения

$$E_R = g_E(N_a) = N_a f(E/N_a), \quad (3.2.5')$$

когда убывание функции $g_E(N_a)$ с ростом N_a является следствием более медленного, чем линейный, роста функции $f(x)$ с ростом x . С учетом соотношения (3.2.5') при фиксированном E величина N^0_C становится функцией одного параметра N_a . Оптимальное значение N^0_a , максимизирующее величину N^0_C , определяет оптимальную структуру $|A_{RC}|$.

Если принять простейшую гиперболическую форму зависимости

$$g_E(N_a) = \beta E (N_a + \gamma)^{-1} \quad (\beta, \gamma > 0) \quad (3.2.5'')$$

от N_a , то при $\beta = \gamma = 10$ и $\theta_a = 0,5$ зависимость $\log_{10} N^0_C$ от $\log_{10} N_a$ имеет вид, изображенный на рис. 3.1.

При этом оптимальные значения N^0_a , приводящие к максимальным значениям N^0_C (рис. 3.1, штрихпунктирная линия) в общем случае можно получить дифференцированием выражения (3.2.5) по N_a с учетом (3.2.5') и (3.2.5''). В результате получим

$$N^0_a = \frac{C_{RC} E}{4} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\gamma}{C_{RC} E}} \right) \approx \frac{\gamma^2}{C_{RC} E} \quad (3.2.6)$$

при $E \gg E_{кр} = 4\gamma/C_{RC}$.

Рассмотрение рис. 3.1 показывает, что количество имеющегося у системы субстрата E определяет пути, по которым может идти система A_{RC} для обеспечения своей живучести. При $E < E_{кр}$ единственный путь состоит в увеличении числа a -элементов, все более и более беззащитных. При $E > E_{кр}$ имеется еще один путь. Он состоит в построении сравнительно небольшого числа хорошо защищенных элементов (рис. 3.1, штрихпунктирная линия). Заметим, что первый из указанных путей следует из R -закона.

Биологическое проявление RC -закона. На уровне особи RC -закон можно интерпретировать, считая биомассы ее жизненно важных и защитных частей пропорциональными числам a - и R -элементов соответственно. Активность хищника, нападающего на особь, можно считать зависящей от числа ее s -элементов. Прямые биоценотические интерпретации RC -закона менее очевидны, чем популяционные, связанные, например, с нападением стаи хищников на стадо жертв. Интересно провести популяционную интерпретацию следствия (3.2.6) из RC -закона, объясняющую некоторые общие биологические количественные закономерности.

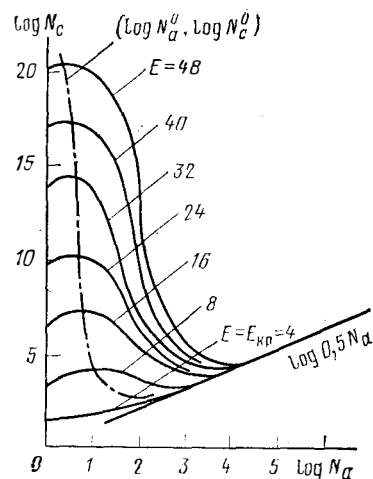


Рис. 3.1

В работе Г. Фёрстера [8] приводятся следующие грубые данные о распространенности клеток, принадлежащих организмам различных видов (см. рис. 3.2), где n — среднее число клеток особи данного вида, а N — число особей данного вида. Распространенность клеток характеризует в определенной степени устойчивость (живучесть) соответствующего вида. Как видно из рис. 3.2 устойчивость растет вместе со сложностью вида, что соответствует как раз обратной тенденции, например химических элементов неживой природы, где наибольшее распространение имеет одноатомный водород.

Покажем, как при биологической интерпретации соотношения (3.2.6) можно получить теоретическую зависимость, близкую к экспериментальной зависимости рис. 3.2. Для этого будем интерпретировать величину E биомассой вида, a - и R -элементы ассоциируем с одной особью вида и ввиду пропорциональности их чисел в оптимальном случае можно отождествить число особей вида N с числом a -элементов $N_a^a = N$. Далее будем считать, что a - и R -элементы, составляющие особь, в свою очередь, состоят из n подэлементов (клеток), имеющих среднюю биомассу b . В этом случае

$$E = N^0_a n b. \quad (3.2.7)$$

Подставив соотношение (3.2.7) в соотношение (3.2.6) после логарифмирования последнего получим

$$\log_{10} N^0_a n = C + \frac{1}{2} \log_{10} n, \quad (3.2.8)$$

где $C = \log_{10} (\gamma / \sqrt{C_{RC} b})$. Важно отметить, что тангенс угла наклона линейной зависимости $\log_{10} N^0_a n$ от $\log_{10} n$, равный согласно соотношению (3.2.8) $\frac{1}{2}$, весьма

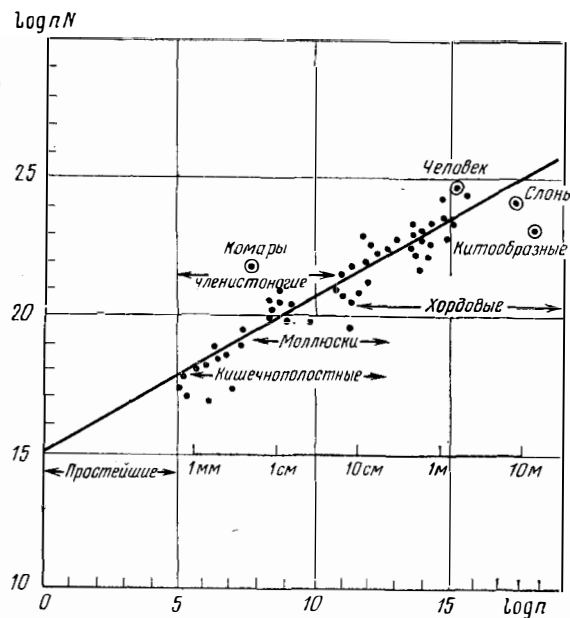


Рис. 3.2

близок к экспериментальному значению этой величины 0,56 (см. рис 3.2). Поэтому достаточно принять $C=15$ для хорошего согласования теоретических и экспериментальных зависимостей. И, наконец, об экологической интерпретации значения константы $C=15$. Для одноклеточных животных ($n=1$) C можно интерпретировать как параметр критической для них «тесноты». При $C=14-15$ имеем примерно одно одноклеточное животное на 1 м^2 земной поверхности.

Таким образом, рассматриваемая модель учитывает специфику именно земной жизни популяций животных (на других планетах она могла быть иной). Видимо, аналогичных закономерностей нет у популяций растений, так как им, в отличие от популяций животных, не присуща в такой мере внешняя активная форма обеспечения устойчивости — живучесть (активное подавление вредных агентов внешней среды). Кроме того, им не в такой степени присуща перспективная активность, как популяциям животных (явления преадаптации [20]).

Многие экологи весьма скептически относятся к данным, на основе которых Г. Фёрстером была построена диаграмма, приведенная на рис. 3.2, особенно в ее части, касающейся одноклеточных животных (простейшие). Однако следует иметь в виду, что дважды логарифмический масштаб существенно скрадывает ее неточности, переводя десятки в единицы. Кроме того, диаграмма не претендует на точное положение входящих в нее точек. Важно лишь положение «спрямляющей» их «облако» линии, проведенной методом наименьших квадратов.

Заметим, что в нашей модели, объясняющей положение спрямляющей линии, вызывающая главное возращение точка, соответствующая простейшим, является особой. Мы уже говорили, что она регламентируется не RC -законом, а R -законом. Использование в модели живучести принципа перспективной активности, по-видимому, является решающим для последующей удачной интерпретации следствий из нее для популяций животных. Таким образом, оптимальные в смысле живучести системы можно рассматривать как оптимальные прототипы видов животных. Соответствующие сдвинутые вверх на один иерархический уровень рассмотрения (вид, популяция, биоценоз) могли бы стать исходными для оценки аналогичных свойств биоценозов. Однако до сих пор такие рассмотрения не привели к сколько-нибудь конструктивным результатам, и здесь приходится строить более специализированные оптимизационные модели (см. § 3.3).

3.2.6. О возможности целостного рассмотрения биосистемы на основе ее отдельных X -сечений. Правило Либиха. Вернемся теперь к вопросу о возможностях целостных рассмотрений на основе моделей отдельных X -сечений (или XU -сечений).

Прежде всего, отметим, что естественное иерархическое и функциональное расчленение биосистем способст-

вует такого рода рассмотрением, часто избавляющим от проклятия размерности (см. п. 1.3.6). Однако изучение биосистем на уровне биоценозов редко приводит к «правильным» образованиям. Здесь отдельные X - и XU -сечения могут весьма сложно вычлениваться из целостной биосистемы A , пересекаясь по одним и тем же ее элементам, вовсе не следуя ее «естественному» членению. И все же даже при этих обстоятельствах исследование целостной биосистемы на уровне XU - или даже X -сечений может привести к важным оценкам. Их можно получить, используя известные вероятностные оценки Буля.

Здесь важно выбрать в качестве целевого функционала вероятность $P((u, v)_X)$ $(u, v)_X$ -обмена, связанного с X -сечением (см. (1.2)). Будем считать $(u, v)_X$ -обмен целью \underline{A}_X X -сечения. Тогда цель A целостной системы A есть совокупность целей $\{\underline{A}_X\}$ ее X -сечений, где символ X пробегает значения некоторого конечного множества $\mathfrak{X} = \{X\}$, имеющего N элементов. Используя формулу Буля, получаем следующую оценку:

$$1 - \min_{X \in \mathfrak{X}} P(\underline{A}_X) \leq 1 - P(\underline{A}) \leq N(1 - \min_{X \in \mathfrak{X}} P(\underline{A}_X)). \quad (3.2.9)$$

Эта оценка нетривиальна при близости левой части (3.2.9) к единице. Но последнее обстоятельство всегда имеет место при выполнении второго из условий соотношения (1.5.2). Поэтому при естественном условии

$$1 - \min_{X \in \mathfrak{X}} P(\underline{A}_X) \ll N^{-1}$$

получим из оценки (3.2.9) следующую:

$$P(\underline{A}) \approx \min_{X \in \mathfrak{X}} P(\underline{A}_X). \quad (3.2.10)$$

Таким образом, вероятность достижения системой A своей цели совпадает с вероятностью достижения своей X -цели наиболее «слабого» ее X -сечения. Последняя формулировка отражается в известном биологическом правиле Либиха.

Одновременно соотношение (3.2.10) указывает на то, что биосистеме неэкономно иметь различные вероятности $P(\underline{A}_X)$, так как величина $P(\underline{A})$ определяется минимальной из них, т. е. наиболее экономны биосистемы, состоящие из «равнопрочных» частей. В общем случае

оптимальность сложной системы в ее частях не соответствует оптимальности ее в целом. Однако в рассматриваемом асимптотическом случае больших значений u и v , при которых имеет место соотношение (1.5.2), эти оптимальности приближаются друг к другу. Чтобы не создавалось впечатления о нарушении свойства эмергентности реальных сложных систем, следует иметь в виду, что здесь всюду речь идет об их простых оценочных моделях, оценивающих сверху их реальную эффективность. Таким образом, вся тяжесть вопроса об объективности полученных оценок для системы в целом переносится на вопрос об объективности таких оценок для ее X -сечений. Их объективность оправдывается следующим образом.

В самом деле, X -сечение A_X системы A можно рассматривать как систему, идеальную по всем другим качествам, кроме рассматриваемого X -качества. Поэтому эффективность системы A по X -качеству при его оценке по X -сечению может быть только завышенной (т. е. здесь имеется полная определенность).

Далее, не имея достаточно определенных знаний о факторах среды B^* , воздействующих на реальную систему A^* , эти факторы в модели B полагаются наиболее неблагоприятными для системы A , что для биосистем не является неправомерным, так как по Либиху среда воздействует на них в первую очередь лимитирующими их факторами.

В свете вышеизложенного вскрытие структуры и поведения конкретных биосистем мыслится как серия согласованных между собой теоретических и экспериментальных исследований.

Вначале на основе имеющихся экспериментальных данных создаются эмпирические представления (предтеория) в виде более или менее заполненной граф-схемы или эквивалентной ей матрицы структуры (морфологии) биосистемы с фиксацией известных ее элементов и связей между ними.

Затем происходит вычленение фрагментов подсистем, более или менее соответствующих гипотетическим X -сечениям (соответствуют различным X -целям A_X). Если детальность знаний о них достаточна для сравнения их структуры и поведения с соответствующими оптимальными прототипами, то такие сравнения производятся. В противном случае проводятся по возможности экономные новые натурные испытания. Сопоставление соответ-

ствующих параметров эффективности фрагментов биосистем и их оптимальных прототипов может явиться дополнительным подтверждением или опровержением близости соответствующих целей, структур и поведений (объективная телеология). Целостные рассуждения ведутся с использованием соотношения (3.2.10). Однако для более точных (менее завышенных) оценок потенциальной эффективности биосистем (в частности, биоценозов) нужны более сложные модели, учитывающие их специфику. На основе объективной телеологии [4, 104] такие модели также позволяют оценивать правдоподобность тех или иных гипотез о тактических целях биосистем, сравнивая соответствующие структуры и поведения моделей и оригиналов. Они же в случае их неопровержения играют роль рабочих гипотез и моделей для объяснения и предсказания структуры и поведения оригинала.

Все рассмотренные выше простые модели относились к классу стохастических динамических моделей. Далее проводится рассмотрение более сложных моделей биоценозов из того же класса на различных пространственно-временных уровнях — макроуровне (§ 3.4) и микроуровне (§ 3.5).

3.3. БИОЦЕНОЗЫ

3.3.1. Основные понятия. Биоценоз состоит из a компонент — популяций или их группировок, выделенных по какому-нибудь общему признаку.

Начнем с наиболее абстрактного математического описания биоценоза. Пусть для компонент биоценоза существенно всего n действительных параметров среды $\vec{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, вообще говоря, не для каждой компоненты все эти параметры. Совокупность всех точек \vec{x} заполняет n -мерное пространство E_n , которое мы будем называть *экологическим*. Каждой α -й компоненте соотнесем область $S_\alpha \subset E_n$, точки которой «благоприятны» α -й компоненте, а точки вне области S_α «неблагоприятны». Можно усилить это высказывание, считая, что для сочетаний параметров среды, определяемых точками \vec{x} вне области S_α , α -я компонента не может существовать. В этом случае область S_α называется экологической нишей

или просто *нишей* α -й компоненты. Ниши S_α для различных компонент могут пересекаться и не пересекаться, могут заполнять все экологическое пространство, а могут оставлять в нем «свободные места». Такие геометрические представления весьма полезны при описании взаимодействий компонент биоценоза, и в частности их конкуренции. Как уже отмечалось, они были впервые введены в экологию Г. Хатчисоном [91] для оценки числа компонент биоценоза, сосуществующих в ограниченном экологическом пространстве. Эти оценки требуют привлечения сложного математического аппарата «плотной упаковки» a областей в ограниченном объеме, и пока здесь нет существенных продвижений [105].

Второе описание биоценоза менее абстрактно. Оно рассматривает биоценоз в двумерном (плоском) или трехмерном (объемном) биотопе*. Однако для общности рассматриваются, вообще говоря, не отдельные особи α -й компоненты, а некоторое их устойчивое образование (например, стая). Такое образование будем называть *α -особью*. Их численность в некотором биотопе объема V будем обозначать N_α . Для теоретических рассуждений этот объем расчленяется на N элементов объема ΔV , каждый из которых занимает, по определению, лишь одной α -особью или пустует. Тогда $V_\alpha = \Delta V N_\alpha$ — объем, занимаемый α -особьями; $V_0 = \Delta N_0$ — объем, состоящий из

$$N_0 \text{ пустых элементов } \left(\sum_{\alpha=0}^a N_\alpha = N, \text{ где } N = V/\Delta V \right).$$

В экологии используются плотности численности $\rho'_\alpha = N_\alpha/V$ и биомассы $\tilde{\rho}'_\alpha = \rho'_\alpha e_\alpha$ α -особей, где e_α — биомасса α -особи. Иногда удобно рассматривать относительные плотности $\rho_\alpha = N_\alpha/(V - V_0)$ и $\tilde{\rho}_\alpha = \rho_\alpha e_\alpha$. Размерность этих величин штука/м³ и калория/м³ соответственно.

В наших модельных рассуждениях биоценоза без учета агрегированности α -особей считается, что любое расположение N_α α -особей в N элементах биотопа равно возможно. Отсюда следует, что вероятность присутствия

* Как уже упоминалось, биотопом в экологии называется местообитание биоценоза.

α -особи в любом элементе (вероятность α -особи p'_α) постоянна и равна $p'_\alpha = N'_\alpha/N$, а вероятность того, что элемент пуст, равна $p_0 = N_0/N > 0$ ($\sum_{\alpha=1}^a p'_\alpha + p_0 = 1$).

Легко показать, что вероятности пропорциональны плотностям:

$$p'_\alpha = p'_\alpha \Delta V = \tilde{p}'_\alpha \Delta V / e_\alpha.$$

Однако введение вероятностей (они являются безразмерными величинами) важно из-за возможности оперировать ими, используя аппарат теории вероятностей. Наряду с абсолютными вероятностями p_0 и p'_α рассмотрим условные вероятности p_α появления α -особей в элементе при условии, что он не пуст. Эта вероятность имеет вид $p_\alpha = p'_\alpha / (1 - p_0)$ ($\sum_{\alpha=1}^a p_\alpha = 1$). Условные вероятности выражаются через относительные плотности, так же как и абсолютные вероятности — через плотности.

Сам биоценоз характеризуется средними условной вероятности и биомассы α -особи:

$$\bar{p} = \frac{1}{a} \sum_{\alpha=1}^a p'_\alpha = \frac{1-p_0}{a} \quad \text{и} \quad \bar{e} = \frac{1}{a} \sum_{\alpha=1}^a e_\alpha$$

соответственно.

Биоценоз в данном биотопе характеризуется своей средней биомассой \bar{e} в нем. Ее можно определить по формуле

$$\bar{e} = N(1-p_0)\bar{e}^p/V.$$

Здесь введено специальное обозначение

$$\bar{e}^p = \sum_{\alpha=1}^a p_\alpha e_\alpha, \quad (3.3.1)$$

где $p = (p_\alpha)$ — вероятностный вектор. Если вектор $p = (1/a)$, т. е. определяет равномерное распределение, то его будем опускать в записи (3.3.1). Запись (3.3.1) широко используется в этой главе для компактного обозначения разнообразных биоценологических характеристик, и поэтому ее нужно твердо запомнить.

Важнейшей является трофическая структура биоценоза A , т. е. структура пищевых связей, составляющих биоценоз α -особей. Трофическую структуру $|A|$ биоценоза A описывают ориентированным графом G_α [79]. В зависимости от ориентации его ребер $\alpha \rightarrow \beta$ ($\alpha \leftarrow \beta$) соответствующие α - и β -особи называют α -хищником и β -жертвой (α -жертвой и β -хищником). В графе G_α допускаются петли ($\alpha \rightarrow \alpha$), что интерпретируется как наличие каннибализма. В общем случае удобно для описания трофической структуры биоценоза A использовать случайный ориентированный граф $\Gamma_{\alpha\pi}$, где симметричная матрица $\pi = \|\pi_{\alpha\beta}\|$ в качестве элементов $\pi_{\alpha\beta}$ имеет вероятности наличия соответствующих ориентированных ребер, которые соединяют наши вершины α и β . Если имеем β -хищника и α -жертву, то будем говорить, что $\pi_{\beta\alpha}$ является вероятностью *доступности* второй первому. Если $\pi_{\beta\alpha} = 0$, то будем говорить, что α -жертва недоступна β -хищнику. Вероятность $\pi_{\beta\alpha}$ считается фиксированным параметром задачи, зависящим от морфологии α -хищника и β -жертвы (в частности, от их специализации). Имея в виду изучение не только трофической структуры $|A|$ биоценоза $A = (|A|, \bar{A})$, но и его трофического поведения \bar{A} , будем характеризовать среду $B = (|B|, \bar{B})$ обитания биоценоза ее трофностью (вариабельностью концентрации пищи) \bar{B} и ее агрегированностью $|B|$. В этой ситуации под тактической целью A биоценоза понимается его стремление обеспечить всех α -особей достаточной для их существования пищей. Понятие (u, v) -обмена биоценоза A со средой B имеет здесь, например, следующую специфическую трактовку. Под платой u биоценоза среде понимается время t (или путь $L = \omega t$, где ω — средняя скорость), которое тратят его α -особи на поиски, обнаружение и отлов пищи. Под приобретенным ресурсом v понимается рацион, необходимый α -особи биоценоза для поддержания своего существования.

Зная трофическую структуру биоценоза, можно вычленив из него β -ю компоненту с ее «ближайшим окружением», т. е. теми α -компонентами, которые находятся к ней в отношениях хищников или жертв. При этом иногда удобно и тех, и других относить к среде, в которой функционирует β -я компонента. Такой вырожденный случай биоценоза будем называть *триатрофом*. Вырож-

дённый случай триотрофа, в котором учтены только жертвы или только хищники β -й компоненты, называется *диатрофом*. Во всех этих вырожденных случаях индекс β опускается, и о β -й компоненте будем говорить как о жертве или хищнике по отношению к своему ближайшему окружению. В общем случае α -особь — это совокупность (агрегация) n_α однотипных особей (стая) или их неоднородная трофическая группировка.

3.3.2. Аналитические модели биоценозов. Биоценоз является сложной динамической стохастической системой. Его рассмотрение в детерминированном плане оправдано в первом приближении законом больших чисел. Таким рассмотрениям посвящена обширная литература, использующая для описания биоценозов аппарат дифференциальных, конечно-разностных и матричных уравнений. В основном такое описание базируется на энергетическом балансовом подходе, связанном с законами сохранения вещества и энергии. Оптимизационные задачи здесь также формулируются лишь в энергетическом плане. Трофо-энергетические связи между компонентами биоценоза, учитывающие его конкретную специфику, приводят к системам дифференциальных уравнений, решаемых, как правило, лишь численными методами на ЭВМ. В связи с этим для теории биоценозов важнейшими оказываются аналитические исследования при ряде упрощенных предположений [106]. Упрощенные качественные исследования таких уравнений приходится искать в известной схеме Вольтерра, а устойчивость в узком смысле как устойчивость по Ляпунову.

Имеется обширная литература по стохастическим динамическим моделям отдельных биологических процессов, происходящих внутри биоценоза, таких как рождение и гибель, хищничество и паразитизм и др. [107]. Однако здесь нас интересуют целостные рассмотрения биоценозов. Попытки рассмотрения биоценоза в целом с термодинамических позиций [108], а также привлечение для этих целей энтропийного «измерения» информации [109] встречают принципиальные возражения, указанные в п. 3.2.2 (см. также введение к монографии [42]). Имеются различные пути вероятностного описания биоценоза. Один из них — пробабиллизация детерминированного описания заменой некоторых детерминированных параметров случайными [110]. В результате компоненты биоценоза становятся детерминирован-

ными функциями случайного аргумента. На самом деле они являются случайными функциями случайного аргумента. Такие функции называются стохастическими и описываются специальным матричным аппаратом [42]. Однако далее мы не будем пользоваться столь широкой моделью биоценоза, ограничившись использованием специального случая неоднородной цепи Маркова [58].

Основным отличием рассматриваемой далее стохастической модели биоценоза от других моделей является особая роль в ней процессов рождения и гибели. Фактически они интегрируют в модели разнообразие влияний как среды, так и внутрибиоценозических факторов. С их помощью можно построить универсальную матричную модель биоценоза и аналитически исследовать ее. Специфика же конкретных биоценозов определяется специальным вероятностным заданием связей между элементами вероятностной матрицы модели. Эта динамическая модель не учитывает агрегированности компонент биоценоза и соответствует его рассмотрению на макроуровне (§ 3.4). Далее рассматривается простейшая стохастическая статическая модель биоценоза на микроуровне (триотрофа) — модель стаеобразования (§ 3.5).

3.4. МАКРОУРОВЕНЬ

3.4.1. Общая динамическая модель биоценоза [11].

Будем рассматривать биоценоз, состоящий из a компонент — популяций или их группировок, выделенных по какому-нибудь признаку. Особи α -й компоненты, в свою очередь, могут группироваться в устойчивые образования. Такие образования будем называть α -особями α -компоненты ($\alpha=1, a$). Если α -компонента содержит одну популяцию данного вида, то ее можно рассматривать как совокупность b_α возрастных групп α -особей, обозначаемых индексами $1, 2, \dots, s, \dots, b_\alpha$. В экологии изменение α -компонент во времени называют сукцессией [95]. Далее сукцессия описывается стохастической моделью с дискретным временем $t=1, 2, \dots$. Временной шаг, принятый за единицу, соответствует характерному для биоценоза интервалу времени — дню, месяцу или году.

Состояние биоценоза описывается в дискретный момент времени t вероятностным вектором

$$\vec{p}^t = (\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_\alpha, \dots, \vec{p}_a, p_{a+1})$$

с суммой компонент, равной единице, где $\vec{p}_\alpha = (p_{\alpha 1}, \dots, p_{\alpha s}, \dots, p_{\alpha b_\alpha})$; $p_{\alpha s}$ — вероятность присутствия α -особи s -й возрастной группы в «элементарной ячейке» биотопа (местообитания) биоценоза и $p_{\alpha+1}$ — вероятность того, что она оказывается пустой (предполагается, что в одной элементарной ячейке не может быть более одной α -особи). Здесь $p_0 = p_{\alpha+1}$ и опущен штрих у вероятности $p_{\alpha s}$ (см. п. 3.3.1).

Естественная гипотеза о зависимости последующего состояния биоценоза от предшествующих приводит к описанию его развития во времени — так называемой сукцессии известной в теории вероятностей моделью цепей Маркова. В этом случае связь между состояниями биоценоза в моменты времени t и $t+1$ описывается соотношением

$$\vec{p}^{t+1} = \vec{p}^t P_t, \quad (3.4.1)$$

где $P_t = \| p^t_{ij} \| \left(i, j = \overline{1, N}, N = \sum_{\alpha=1}^a b_\alpha + 1 \right)$ — стохастическая $(N \times N)$ -матрица с неотрицательными элементами, дающими в сумме по строкам единицу. Чтобы учесть эффект запаздывания реакции биоценоза, можно требовать зависимость вероятностей p^t_{ij} от k состояний $\vec{p}^{t-k}, \dots, \vec{p}^{t-1}$, предшествующих t -му

$$p^t_{ij} = p^t_{ij}(\vec{p}^{t-k}, \dots, \vec{p}^{t-1}) \text{ или } P_t = P_t(\vec{p}^{t-k}, \dots, \vec{p}^{t-1}). \quad (3.4.2)$$

Специфика каждого конкретного биоценоза, связанная с трофической и топической структурой взаимодействия его компонент, а также его взаимодействия со средой, описывается нестационарными зависимостями (3.4.2). Их фиксация вместе с k первыми состояниями биоценоза $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}^t$ однозначно определяет все последующие состояния биоценоза. Однако всегда возможны некоторые модификации указанных зависимостей, которые экологи считают допустимыми внутри данного биоценоза (не приводящими с их точки зрения к новому биоценозу). В нашей модели это формализуется заданием некоторого множества W_a допустимых функций

нальных преобразований (3.4.2), описывающих один и тот же биоценоз.

В экологии конечное состояние биоценоза после сукцессии, обладающее определенной устойчивостью во времени при стационарном состоянии среды, называют *климаксом* [95]. В рассматриваемой модели климаксу соответствует предельное состояние биоценоза

$\vec{p} = \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{p}^t$. Оно существует, если существует предел $P(\cdot, \dots, \cdot) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_t(\cdot, \dots, \cdot)$, соответствующий стационарным воздействиям среды и внутрибиоценозическим взаимоотношениям при климаксе. Предельное состояние не зависит от k начальных состояний и может быть найдено из уравнения

$$\vec{p} = \vec{p}P(\underbrace{\vec{p}, \dots, \vec{p}}_k) \quad (3.4.3)$$

относительно вектора \vec{p} .

Решение последнего удобно проводить в два этапа. На первом этапе находится решение линейного однородного уравнения $\vec{p} = \vec{p}\|p_{ij}\|$ для выражения \vec{p} через p_{ij} :

$$\vec{p} = F(p_{ij}), \quad (3.4.4)$$

на втором этапе решается трансцендентное уравнение

$$\vec{p} = F[p_{ij}(\underbrace{\vec{p}, \dots, \vec{p}}_k)] \quad (3.4.5)$$

относительно вектора \vec{p} . Итак, биоценоз в климаксе имеет множества $U = \{\vec{p}\}$ и $V = \{\|p_{ij}\|\}$ предельных значений, соответствующих допустимому множеству $W_a = \{p_{ij}(\cdot, \dots, \cdot)\}$ функциональных преобразований $p_{ij}(\cdot, \dots, \cdot)$. Заметим, что часть функции $p_{ij}(\cdot, \dots, \cdot)$ может не зависеть от \vec{p} .

Рассмотрим явное решение приведенных соотношений для модели биоценоза, основанной на характеристиках рождаемости и смертности α -особей. Эти характеристики как итоговые показатели взаимодействия α -компонент биоценоза между собой и со средой широко используются в экологии преимущественно для описания высших трофических уровней биоценозов. Введем условные вероят-

ности рождения α -особи λ_{α}^t , возникновения $\lambda_{\alpha s}^t$ и гибели $\mu_{\alpha s}^t$ α -особи s -й возрастной группы за один временной шаг от $(t-1)$ -го до t -го моментов времени. Тогда из определения введенных вероятностей нетрудно показать, что [111]

$$P_t = \begin{pmatrix} p_{11}^t & & & & p_{1a+1}^t \\ & \ddots & & 0 & \vdots \\ & & p_{\alpha\alpha}^t & & p_{\alpha a+1}^t \\ & & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & & p_{aa}^t & p_{a a+1}^t \\ p_{a+1 1}^t \cdots p_{a+1 \alpha}^t \cdots p_{a+1 a}^t & & & & p_{a+1 a+1}^t \end{pmatrix},$$

$$p_{a+1 \alpha}^t = (\underbrace{\lambda_{\alpha}^t}_{b_{\alpha}}, 0, \dots, 0), p_{a+1 a+1}^t = 1 - \sum_{\alpha=1}^a \lambda_{\alpha}^t \quad (3.4.6)$$

$$p_{\alpha\alpha}^t = \begin{pmatrix} 1 - \mu_{\alpha 1}^t - \lambda_{\alpha 1}^t & \lambda_{\alpha 1}^t & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 - \mu_{\alpha s}^t - \lambda_{\alpha s}^t & \lambda_{\alpha s}^t & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 - \mu_{\alpha b_{\alpha}-1}^t - \lambda_{\alpha b_{\alpha}-1}^t & \lambda_{\alpha b_{\alpha}-1}^t \\ & & & & & 1 - \mu_{\alpha b_{\alpha}}^t \end{pmatrix},$$

$$p_{\alpha a+1}^t = \begin{pmatrix} \mu_{\alpha 1}^t \\ \vdots \\ \mu_{\alpha s}^t \\ \vdots \\ \mu_{\alpha b_{\alpha}-1}^t \\ \mu_{\alpha b_{\alpha}}^t \end{pmatrix}$$

$$(\alpha = \overline{1, a})$$

В рассматриваемом случае уравнения (3.4.3) имеют простое решение (3.4.4). Имеем

$$\left. \begin{aligned} p_{\alpha 1}^{t+1} &= p_{\alpha 1}^t (1 - \lambda_{\alpha 1}^t - \nu_{\alpha 1}^t) + p_{\alpha+1}^t \lambda_{\alpha}^t, \\ p_{\alpha s}^{t+1} &= p_{\alpha s-1}^t \lambda_{\alpha s-1}^t + p_{\alpha s}^t (1 - \lambda_{\alpha s}^t - \nu_{\alpha s}^t), \\ p_{\alpha b_{\alpha}}^{t+1} &= p_{\alpha b_{\alpha}-1}^t \lambda_{\alpha b_{\alpha}-1}^t + p_{\alpha b_{\alpha}}^t (1 - \nu_{\alpha b_{\alpha}}^t). \end{aligned} \right\} \quad (3.4.7)$$

В предельном случае ($t \rightarrow \infty$) получим те же уравнения, но для вероятностей без верхних индексов $t+1$ и t . Из последних получим рекуррентные соотношения

$$\left. \begin{aligned} p_{\alpha 1} &= [\lambda_{\alpha} / (\lambda_{\alpha 1} + \nu_{\alpha 1})] p_{\alpha+1}, \\ p_{\alpha s} &= [\lambda_{\alpha s-1} / (\lambda_{\alpha s} + \nu_{\alpha s})] p_{\alpha s-1}, \\ p_{\alpha b_{\alpha}} &= [\lambda_{\alpha b_{\alpha}-1} / \nu_{\alpha b_{\alpha}}] p_{\alpha b_{\alpha}-1}, \end{aligned} \right\} \quad (3.4.8)$$

$$(s = \overline{2, b_{\alpha} - 1}).$$

Используя соотношение $\sum_{\alpha s} p_{\alpha s} + p_{\alpha+1} = 1$ и полученное рекуррентные соотношения (3.4.8), а также полагая формально $\lambda_{\alpha 0} \equiv \lambda_{\alpha}$ и $\lambda_{\alpha b_{\alpha}} = 0$, получим окончательно [111]:

$$p_{\alpha s} = \prod_{u=1}^s [\lambda_{\alpha u-1} / (\lambda_{\alpha u} + \nu_{\alpha u})] p_{\alpha+1} \quad (\alpha = \overline{1, a}; s = \overline{1, b_{\alpha}}),$$

$$p_{\alpha+1} = \left[1 + \sum_{\alpha=1}^a \sum_{s=1}^{b_{\alpha}} \prod_{u=1}^s \lambda_{\alpha u-1} / (\lambda_{\alpha u} + \nu_{\alpha u}) \right]^{-1}. \quad (3.4.9)$$

Далее система (3.4.9) согласно соотношениям (3.4.5) должна решаться относительно вероятностей $p_{\alpha s}$ и $p_{\alpha+1}$ как система трансцендентных уравнений (3.4.5) при заданных зависимостях

$$\lambda_{\alpha} = \lambda_{\alpha}(\underbrace{\vec{p}, \dots, \vec{p}}_k); \quad \lambda_{\alpha s} = \lambda_{\alpha s}(\underbrace{\vec{p}, \dots, \vec{p}}_k);$$

$$\nu_{\alpha s} = \nu_{\alpha s}(\underbrace{\vec{p}, \dots, \vec{p}}_k), \quad (3.4.9')$$

учитывающих конкретную специфику биоценоза. Помимо массы специальных зависимостей (3.4.9') по крайней мере две являются общими для всех биоценозов. Приведем их. Пусть заданы условные вероятности λ_{α}^s рождения α -особей от α -особей s -й возрастной группы (вероятности плодовитости). Тогда

$$\lambda_{\alpha} = \sum_{s=1}^{b_{\alpha}} \lambda_{\alpha}^s p_{\alpha s}. \quad (3.4.10)$$

С другой стороны, пусть гибель α -особи s -й возрастной группы, определяемая вероятностью $\mu_{\alpha s}$, зависит от n независимых событий — как внешней среды, так и внутрибиоценологических (катастрофы, замор, отлов, хищничество, паразитизм, нехватка пищи, естественная смерть и т. д.). Вероятности этих губительных событий обозначим $\mu_{\alpha si}$ ($i = \overline{1, n}$). Часть из них, в свою очередь, может зависеть от состояний \vec{p} биоценоза. Очевидно, что α -особь гибнет лишь от одной из n причин (не может быть убита многократно). Здесь возникает схема так называемых квазинезависимых событий (см. приложение 1). В работе [111] показано, что вероятность гибели α -особи $\mu_{\alpha s}^{-}$.

$$\mu_{\alpha s}^{-} = \left\{ 1 + \left[\sum_{i=1}^n (\mu_{\alpha si}^{-1} - 1)^{-1} \right]^{-1} \right\}^{-1}. \quad (3.4.11)$$

Пусть имеется m β -особей (жертв) и одна α -особь s -й возрастной группы, рассматриваемая как хищник. Пусть заданы вероятности $v_{\alpha sj}$ ($j = \overline{1, m}$) поимки хищником j -й жертвы. Рассмотрим тот случай, когда хищник одновременно не может поймать сразу более одной жертвы. Как заметила А. П. Кибзун, и этот случай можно рассматривать как случай псевдонезависимых событий и вероятность $v_{\alpha s}$ поимки хищником какой-либо жертвы выражать через вероятности $v_{\alpha sj}$ по формуле, аналогичной формуле (3.4.11). Вероятность $1 - v_{\alpha s}$ того, что хищник не поймал никакой жертвы может рассматриваться как одна из причин его гибели, и поэтому одна из вероятностей, $\mu_{\alpha si}$ может быть приравнена величине $1 - v_{\alpha s}^{-1}$.

В общем случае трофический граф биоценоза доставляет группу из n хищников одного трофического уровня, охотящихся за одними и теми же m жертвами низшего трофического уровня ($n, m \leq a$). Задается $(n \times m)$ -матрица $\pi = \|\pi_{ij}\|$ вероятностей поимки (и уничтожения) j -й жертвы i -м хищником ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$). С помощью матрицы π может быть найдено распределение $\tilde{P}_{nm}(t)$ случайного числа $\tau = t \leq m$ пойманных жертв n хищниками (см. приложение 1). Считается, что каждая жертва может погибнуть лишь один раз и каждый хищник одновременно не может поймать сразу более одной жертвы. В частности, вероятность $\mu = 1 - \tilde{P}_{nm}(0)$ может интерпретироваться как вероятность гибели хотя бы одной из m жертв в рассматриваемом случае.

В приложении 1 рассмотрен общий случай псевдонезависимых событий в модели n потребителей m сортов ресурсов и различные предельные случаи соответствующих распределений. Эти результаты нашли применение в теории катастроф [34, 112] и при построении глобальных динамических моделей [113].

Рассмотрим некоторые частные случаи полученных соотношений. Начнем с вырожденного случая биоценоза, состоящего из одной популяции ($a=1$), разбитой на b_1 возрастных групп. Используя (3.4.7), в нашем случае получим для вероятности первой возрастной группы ($s=1$)

$$p_{11}^{t+1} = p_{11}^t (1 - \mu_{11}^t - \lambda_{11}^t) + p_2^t \lambda_1^t. \quad (3.4.12)$$

Будем считать, что воспроизводительной способностью в равной степени обладают лишь возрастные группы начиная с s_0 -й. Это можно записать так:

$$\lambda_{11}^s = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leq s \leq s_0 - 1, \\ f & \text{для } s_0 \leq s \leq b. \end{cases} \quad (3.4.13)$$

Кроме того, будем считать величину f , характеризующую эту воспроизводительную способность, функцией

$f(S_t)$ суммарной вероятности $S_t = \sum_{s=s_0}^b p_{1s}^t$ воспроизводящих групп. Тогда из соотношения (3.4.12) с учетом (3.4.10) и (3.4.13) получим рекуррентное соотношение

$$R_{t+1} = Sif(S_t), \quad (3.4.14)$$

где

$$R_{t+1} = [p_{11}^{t+1} - p_{11}^t (1 - \mu_{11}^t - \lambda_{11}^t)] / p_2^t$$

имеет смысл «пополнения», а S_t — «запаса». Рекуррентные соотношения такого рода широко используются в экологической литературе без вероятностного обоснования. Их обоснование с помощью детерминированной матричной модели Лесли содержится в книге [114], при этом для $f(S) = a \exp(-\beta S)$ имеет место модель Рикера, а при $f(S) = (\alpha S + \beta)^{-1}$ — модель Бивертон и Хольта [115].

Дальнейшее изложение касается случая a -компонентного биоценоза ($a > 1$) с компонентами, не расчлененными на возрастные группы ($b_\alpha = 1$). Обозначив $\mu_{\alpha 1} = \mu_\alpha$ и $p_{\alpha 1} = p_\alpha$, из (3.4.9) получим

$$p_\alpha = (\lambda_\alpha / \mu_\alpha) p_{\alpha+1}, \quad p_{\alpha+1} = \left(1 + \sum_{\alpha=1}^a \frac{\lambda_\alpha}{\mu_\alpha} \right)^{-1},$$

$$\bar{a} \bar{p} = \left(\sum_{\alpha=1}^a \lambda_\alpha / \mu_\alpha \right) \left(1 + \sum_{\alpha=1}^a \lambda_\alpha / \mu_\alpha \right)^{-1}. \quad (3.4.15)$$

Для дальнейшего изложения важен частный случай соотношения (3.4.11) при $n = 2$.

$$\mu_\alpha = \mu_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) = \left[1 + \left(\frac{x_\alpha}{1-x_\alpha} + \frac{y_\alpha}{1-y_\alpha} \right)^{-1} \right]^{-1} \equiv$$

$$\equiv \frac{x_\alpha + y_\alpha - 2x_\alpha y_\alpha}{1 - x_\alpha y_\alpha}, \quad (3.4.16)$$

где x_α и y_α — вероятности гибели α -особей соответственно от внутри- и внебиоценотических причин, связанных, в частности, с губительными воздействиями среды.

3.4.2. Оптимизация модели биоценоза. Рассмотрим биоценоз как сложную систему A , определяемую ее структурой $|A|$ и поведением \bar{A} . Вектор смертности от внутрибиоценотических причин $x = (x_\alpha)$ по сравнению с вектором рождаемости $\lambda = (\lambda_\alpha)$ менее изменчив во времени и менее подвержен влиянию со стороны α -особей, в частности естественная смертность генетически обусловлена. Поэтому примем вектор x за структуру $|A|$ биоценоза и будем считать его фиксированным, а вектор λ — за поведение \bar{A} биоценоза и будем считать его

переменным. В качестве поведения \bar{B} среды \bar{B} примем вектор смертности от внебиоценотических причин $y = (y_\alpha)$.

Лимитирующее воздействие среды на биоценоз можно описать допустимым фиксированным значением средней рождаемости $\bar{\lambda}$ α -особей. В качестве показателя интенсивности (тоже ограниченной) губительных воздействий на биоценоз можно принять среднее значение \bar{y} смертности α -особей от внебиоценотических причин. Множества векторов λ и y с неотрицательными и не превышающими единицу компонентами с фиксированными значениями $\bar{\lambda}$ и \bar{y} обозначим $W_{\bar{\lambda}}$ и $W_{\bar{y}}$ соответственно. Кроме того, на вектор λ накладываются дополнительные ограничения (3.4.10). Поэтому множество $W'_{\bar{\lambda}}$ его значений входит во множество $W_{\bar{\lambda}}$ ($W'_{\bar{\lambda}} \subset W_{\bar{\lambda}}$). Заметим, что ограничения (3.4.16), накладываемые на вектор $\mu = \mu(x, y)$, в нашем случае будем распространять лишь на вектор x , считая вектор y свободным от такого рода ограничений.

Как всегда, наибольшая неопределенность возникает в вопросе о цели биоценоза A . Однако принципы объективной телеологии позволяют, как это было показано выше, сделать этот вопрос предметом научного исследования. Для гипотезы о цели биоценоза обратимся к современным экологическим представлениям, наиболее отчетливо изложенным Ю. Одумом [95].

В качестве целевой стратегии биоценоза Ю. Одум рассматривает [95, с. 345] так называемый сукцессионный S-образный рост суммарной биомассы биоценоза, сопровождаемый колебаниями биомасс отдельных компонент, вплоть до предельного климаксового значения, лимитируемого стационарными условиями среды. В экологии, как уже упоминалось, сукцессией биоценоза называют его развитие во времени, а климаксом — его окончательное устойчивое состояние.

Формализуем эти общие экологические представления о цели биоценоза в рамках рассматриваемой модели для количественного анализа. Группируя популяции в компоненты биоценоза, можно добиться не слишком большой разницы в средних плотностях \bar{p}_α биомасс α -особей. Если это по каким-либо причинам сделать не удастся, то придется ограничиться рассмотрением лишь

высших трофических уровней многокомпонентных биоценозов, для которых величины $\bar{\rho}_\alpha$ не разнятся на порядки. Принятые допущения позволяют тенденцию роста суммарной (или средней) биомассы биоценоза распространить на среднюю плотность численности $\bar{\rho}$, которая пропорциональна средней вероятности \bar{p} (см. п. 3.3.1). Таким образом, за значение «целевого функционала» биоценоза может быть окончательно принята монотонно возрастающая с ростом \bar{p} функция

$$M = M(\lambda, \mu) = \frac{\bar{p}}{\lambda(1-\bar{p})} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \quad (3.4.17)$$

(см. (3.4.15)).

Таким образом, целью биоценоза является максимизация величины M по всем значениям $\lambda \in W'_\lambda$.

Заранее нет оснований для определения степени индифферентности среды по отношению к биоценозу, поэтому для гарантированности последующих следствий и выводов следует рассчитывать на предельно «плохие» для биоценоза воздействия среды y , т. е. минимизировать величину M по всем значениям $y \in W_y$.

Таким образом, следует рассматривать, вообще говоря, разнящиеся выражения

$$\min_{y \in W_y} \max_{\lambda \in W'_\lambda} M[\lambda, \mu(x, y)] \leq \min_{y \in W_y} \max_{\lambda \in W_\lambda} M[\lambda, \mu(x, y)]; \quad (3.4.18)$$

$$\max_{\lambda \in W'_\lambda} \min_{y \in W_y} M[\lambda, \mu(x, y)] \leq \max_{\lambda \in W_\lambda} \min_{y \in W_y} M[\lambda, \mu(x, y)].$$

Заметим, что если у функции M при расширении области определения от W'_λ до W_λ не возникают новые максимумы по λ , то приведенные выше неравенства обращаются в равенства. Это имеет место для всех практически интересных случаев, поэтому далее за области определения функции M по переменным λ и y приняты множества W_λ и W_y .

Предварительно произведем общие оценки выражения $M = M(\lambda, \mu)$, варьируя λ и μ . Можно показать, исполь-

зую неравенство Буняковского, что

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \min_{\mu} M(\lambda, \mu) &= \min_{\mu} \max_{\lambda} M(\lambda, \mu) = \\ &= M(\bar{\lambda}e, \bar{\mu}e) = \frac{1}{\mu}, \end{aligned}$$

где $e = \overbrace{(1, \dots, 1)}^a$. Таким образом, по векторам λ и μ функция $M(\lambda, \mu)$ имеет седловую точку (см. п. 3.2.3), однако требование постоянства $\mu_{\alpha} = \mu(x_{\alpha}, y_{\alpha}) = \bar{\mu}$ нереалистично, если учесть независимую вариабельность компонент векторов x и y . Заметим, что выражение $M = M[\lambda, \mu(x, y)]$, рассматриваемое при фиксированном значении x как функция λ и y :

$$M = M[\lambda, \mu(x, y)] = M_x(\lambda, y),$$

при решении соответствующих минимаксных уравнений (3.4.18) по переменным x и y не имеет седловой точки, и поэтому эти уравнения решаются лишь для смешанных рандомизированных стратегий (см. п. 3.2.3). Последние трудно интерпретировать в рассматриваемой экологической ситуации. Случайный выбор биоценозом вектора рождаемости λ , учитывая сравнительно большое время между последовательными генерациями, кажется малооправданным. Поэтому ограничимся рассмотрением решений минимаксного и максиминного уравнений (3.4.18) в чистых стратегиях. Первое (минимаксное) из-за линейности функции $M_x(\lambda, y)$ по компонентам вектора λ дает вырожденное решение, при котором часть компонент вектора обращается в нуль (см. приложение 2). Такое решение экологически не оправдано еще и потому, что наделяет наибольшей рождаемостью (плодовитостью) α -особей, имеющих наименьшую смертность (наиболее долго живущих). В действительности же имеет место как раз обратное — наиболее плодовитыми оказываются недолго живущие животные. Второе уравнение (3.4.18) (максиминное) приводит к экологически содержательным результатам. Его решение, связанное с некоторыми аналитическими трудностями, дается в приложении 2. Приведем здесь лишь окончательные результаты, используя следующие обозначения:

$$X_{\alpha} = x_{\alpha} / (1 - 2x_{\alpha}); z_{\alpha} = 1 - y_{\alpha};$$

$$M(\lambda, \mu) = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda \bar{p}}{\lambda(1-\bar{p})};$$

$$M_x(\lambda, y) = M[\lambda, \mu(x, y)];$$

$$M_x[\lambda, y(\lambda, \bar{y})] = \min_{y \in W_y} M_x(\lambda, y);$$

$$M_x\{\lambda(\bar{\lambda}, \bar{y}), y[\lambda(\bar{\lambda}, \bar{y}), \bar{y}]\} = \max_{\lambda \in W_{\bar{\lambda}}} M_x[\lambda, y(\lambda, \bar{y})];$$

$$m(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = M_x\{\lambda(\bar{\lambda}, \bar{y}_2), y[\lambda(\bar{\lambda}, \bar{y}_2), \bar{y}_1]\} \quad (3.4.19)$$

Последняя функция имеет для дальнейшего изложения основное значение. Она получается, когда вместо экстремального значения $\lambda = \lambda(\lambda, \bar{y}_1)$ в выражение $M_x[y(\lambda, \bar{y}_1), \lambda]$ поставлено экстремальное значение $\lambda = \lambda(\lambda, \bar{y}_2)$, где $\bar{y}_2 \neq \bar{y}_1$.

По аналогии с оперативной характеристикой теории оптимального выбора между гипотезами [43, 85] будем называть функцию $m(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ также *оперативной характеристикой*. Методом множителей Лагранжа в приложении 2 найдено следующее основное представление оперативной характеристики:

$$m(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = 1 + v(\bar{z}_2) + \gamma(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \sqrt{v'(\bar{z}_1) v'(\bar{z}_2) (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}, \quad (3.4.20)$$

где функция $v(\bar{z})$ является решением трансцендентного уравнения

$$\bar{z} = [(1+X)^{-1} + v^{-1}]^{-1}; \quad (3.4.21)$$

$$\gamma = \gamma(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \sqrt{\frac{v'(\bar{z}_2)}{v'(\bar{z}_1)}} \bigg/ \sqrt{\frac{v'_0(\bar{z}_2)}{v'_0(\bar{z}_1)}} \leq 1 \quad (3.4.22)$$

при $\bar{z}_1 \geq \bar{z}_2$, причем функция

$$v_0(\bar{z}) = [(\bar{z})^{-1} - (1+X)^{-1}]^{-1}, \quad (3.4.23)$$

т. е. является решением уравнения (3.4.21) в вырожденном случае „равномерного“ биоценоза с идентичными компонентами, когда $X_a = \bar{X} = \text{const}$ ($a = 1, a$).

Уравнение (3.4.21) имеет решение и в более общем случае „линейной структуры“ биоценоза, когда, по определению,

$$(1 + X_\alpha)^{-1} = c + \Delta \frac{\alpha - 1}{\alpha - \bar{1}} \quad (\alpha = \overline{1, a}), \quad (3.4.21)$$

где $c = (1 + X_1)^{-1}$;

$$\Delta = (1 + X_a)^{-1} - (1 + X_1)^{-1} = \frac{x_1 - x_a}{(1 - x_1)(1 - x_a)}$$

— «нормированный размах» вероятностей смертности компонент биоценоза. Здесь и далее предполагается нумерация компонент биоценоза в порядке убывания величин x_α ($\alpha = \overline{1, a}$), а компоненты с тождественными значениями x_α не различаются. В приложении 2 дано интегральное представление суммы (3.4.21) в рассматриваемом линейном случае и показано, что при больших значениях a можно получить явное выражение для $v(\bar{z})$ в виде

$$v(\bar{z}) = v_\Delta(\bar{z}) = [g_\Delta(\bar{z})^{-1} - g_\Delta((\overline{1 + X}))^{-1}]^{-1}, \quad (3.4.25)$$

где

$$g_\Delta(\bar{z}) = (e^{\Delta \bar{z}} - 1) / \Delta. \quad (3.4.26)$$

При $\Delta = 0$ имеем $g_0(\bar{z}) = \bar{z}$ и одновременно с вырождением линейного биоценоза в равномерное соотношение (3.4.25) вырождается в соотношение (3.4.23). Для дальнейшего изложения удобно ввести в рассмотрение следующую симметричную функцию:

$$\delta(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = [v(\bar{z}_1) - v(\bar{z}_2)] / \sqrt{v'(\bar{z}_1)v'(\bar{z}_2)} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2). \quad (3.4.27)$$

В приложении 2 приведено следующее ее представление:

$$\delta(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \sqrt{\bar{z}_1^2 \bar{z}_2^2 / \bar{z}_1 \bar{z}_2} \geq 1.$$

Можно показать, что в линейном случае, когда $v'(\bar{z}) = v_\Delta(\bar{z})$, соответствующие выражения $\gamma = \gamma_\Delta$ и $\xi = \delta_\Delta$ имеют вид

$$\gamma_\Delta = \frac{(1 + \Delta/c) - e^{\Delta \bar{z}_1}}{(1 + \Delta/c) - e^{\Delta \bar{z}_2}} \frac{\ln(1 + \Delta/c) - \Delta \bar{z}_2}{\ln(1 + \Delta/c) - \Delta \bar{z}_1} e^{-\Delta(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)/2}; \quad (3.4.28)$$

$$\delta_{\Delta} = \frac{e^{\Delta (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)/2} - e^{-\Delta (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)/2}}{\Delta (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)} = \frac{\text{Sh } |\Delta (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)/2|}{\Delta (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)/2}. \quad (3.4.29)$$

В приложении 2 подсчитаны экстремальные значения условных

$$y(\lambda, \bar{y}_1) = (y_{\alpha}^0), \quad y[\lambda(\bar{\lambda}, \bar{y}_2), \bar{y}_1] = (y_{\alpha}^{00}), \quad \lambda(\bar{\lambda}, \bar{y}_2) = (\lambda_{\alpha}^0)$$

и абсолютных $p = (p_{\alpha}^0)$ вероятностей. Они имеют вид

$$\begin{aligned} y_{\alpha}^0 &= \bar{y}_1 - (X_{\alpha} - \bar{X}) + (\bar{X} + \bar{y}_1) \left[\frac{(1 + X_{\alpha}) \sqrt{\bar{\lambda}_{\alpha}}}{(1 + X) \sqrt{\bar{\lambda}}} - 1 \right]; \\ y_{\alpha}^{00} &= \bar{y}_1 - (X_{\alpha} - \bar{X}) + \frac{\bar{X} + \bar{y}_1}{\bar{X} + \bar{y}_2} \left[\frac{(1 + X_{\alpha})^2}{1 + X_{\alpha} + v(\bar{z}_2)} - \right. \\ &\quad \left. - (\bar{X} + \bar{y}_2) \right]; \\ \lambda_{\alpha}^0 &= \lambda \left(\frac{1 + X_{\alpha}}{1 + X_{\alpha} + v(\bar{z}_2)} \right)^2 / \left(\frac{1 + X}{1 + X + v(\bar{z}_2)} \right)^2; \\ p_{\alpha}^0 &= \bar{p} \lambda_{\alpha}^0 / \bar{\lambda}. \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

Анализ выражений (3.4.30) в рассматриваемом максимумном случае, в отличие от минимумного, не выявляет каких-либо расхождений с установившимися экологическими представлениями. Так, доминантность отдельных компонент биоценоза, имеющая место из-за неравномерности вероятностей p_{α}^0 (или соответствующих плотностей ρ_{α}), является следствием неравномерности распределения компонент вектора λ^0 . Последняя является следствием неоднородности структурного вектора. В случае однородности последнего ($x_{\alpha} \equiv x$, $\gamma_1 = \delta_0 = 1$) все характеристики биоценоза становятся однородными ($y_{\alpha}^0 = y_{\alpha}^{00} \equiv \bar{y}_1$, $\lambda_{\alpha}^0 = \bar{\lambda}$ и $p_{\alpha}^0 \equiv \bar{p}$). Кроме того, согласно соотношению (3.4.30) оптимальная вероятность рождаемости λ_{α}^0 монотонно возрастает с ростом вероятности естественной смертности x_{α} . Это обстоятельство, в отличие от обратного эффекта при минимумной оптимизации, также говорит в пользу максимумной оптимизации, согласуясь с экологической действительностью.

Рассмотрим полученные общие соотношения (3.4.30) для практически интересного случая малых значений $x_\alpha \ll 1/2$, когда $X_\alpha \sim x_\alpha$. Этот случай всегда имеет место при экологически оправданном выборе интервала дискретного времени, существенно меньшего средней продолжительности жизни в нормальных условиях α -особей, включаемых в компоненты биоценоза. Для получения приближенных с точностью до величин меньшего порядка, чем x_α , соотношений воспользуемся очевидным приближением

$$\begin{aligned} \frac{1+X}{1+X+v} &\equiv \frac{1}{1+v} \left[1 + \frac{v}{1+v} \frac{X}{1+X/(1+v)} \right] \approx \\ &\approx \frac{1}{1+v} \left[1 + \frac{v}{1+v} X - \frac{v}{(1+v)^2} X^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

Тогда трансцендентное уравнение (3.4.21), как легко показать, примет вид

$$\bar{z} \approx \frac{v}{1+v} \left(1 + \frac{v}{1+v} \bar{x} \right),$$

отсюда

$$v \approx \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} \left(1 - \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} \bar{x} \right) \approx [(\bar{z})^{-1} - (1+\bar{x})^{-1}]^{-1}.$$

Далее рассмотрим значение y_α^{00} при $\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = \bar{y} = 1 - \bar{z}$. Имеем здесь $v = v(\bar{y})$ и

$$\begin{aligned} y_\alpha^{00} &= 1 - v \frac{1+X_\alpha}{1+X_\alpha+v} \approx 1 - \frac{v}{1+v} \left(1 + \frac{v}{1+v} x_\alpha \right) = \\ &= \bar{y} \left[1 - \left(\frac{v}{1+v} \right)^2 (x_\alpha - \bar{x}) / \bar{y} \right]; \end{aligned} \quad (3.4.32)$$

$$\lambda_\alpha^0 \approx \bar{\lambda} \left[1 + 2 \frac{v}{1+v} (x_\alpha - \bar{x}) \right];$$

$$p_\alpha^0 \approx \bar{p} \left[1 + 2 \frac{v}{1+v} (x_\alpha - \bar{x}) \right].$$

Отсюда видно, что относительные отклонения

$$\delta y_\alpha^{00} = \frac{y_\alpha^{00} - \bar{y}}{\bar{y}}; \quad \delta \lambda_\alpha^0 = \frac{\lambda_\alpha^0 - \bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}; \quad \delta p_\alpha^0 = \frac{p_\alpha^0 - \bar{p}}{\bar{p}}$$

выражаются линейно через отклонения $\Delta x_\alpha = x_\alpha - \bar{x}$:

$$\begin{aligned}\delta y_\alpha^{00} &\approx -\bar{z}^2 \Delta x_\alpha / (1 - \bar{z}); \\ \delta \lambda_\alpha^0 &= \delta \bar{p}_\alpha^0 \approx 2\bar{z} \Delta x_\alpha \quad (\alpha = \overline{1, a}).\end{aligned}\quad (3.4.33)$$

Соотношения (3.4.32), как и общие соотношения (3.4.30), соответствуют известным экологическим представлениям, указанным при обсуждении соотношений (3.4.30). Так как эти соотношения являются следствием гипотезы о гомеостатическом принципе поведения биоценоза («стимул—реакция»), а гипотеза о перспективной активности биоценоза («реакция—стимул») привела к экологически неоправданным следствиям, то в рамках рассматриваемой модели неопровергнутой можно считать лишь первую гипотезу.

Таким образом, в отличие от популяций животных (см. п. 3.2.5), правдоподобность гипотезы о перспективной активности биоценозов отвергнута результатами этого пункта. Это говорит о некотором регрессе сложности поведения биоценоза по сравнению с популяцией. Приведенные в настоящем пункте соотношения имеют не только качественное значение. Как будет показано далее, их можно использовать и для количественного анализа поведения биоценозов в так называемом адаптационном цикле, связанном с их импульсной стабильностью [95, с. 347].

3.4.3. Импульсная стабильность и адаптационный цикл биоценоза. Говоря в цитированной выше работе об импульсной стабильности экосистемы, Ю. Одум подчеркивает, что импульсная стабильность действует лишь в том случае, когда более или менее регулярные резкие внешние возмущения разделены интервалами времени, достаточными для адаптации биоценоза к возникающим новым условиям. Эти представления вполне согласуются с вероятностными представлениями о частоте катастрофических для биоценоза возмущений внешней среды. В естественной среде при отсутствии антропогенных факторов имеет место закон малой вероятности больших отклонений, т. е. большие значения $\bar{y} \gg \bar{x}$ маловероятны и поэтому возникают редко (разделены большими средними интервалами времени). За эти промежутки времени биоценоз успевает прийти в достаточно близкое к стационарному состояние (климаксу). Это обстоятель-

ство оправдывает рассмотрение в дальнейшем лишь стационарных случаев целевого функционала (3.4.17).

Вместе с тем в связи с постулатом о потенциальной приспособляемости жизни (см. п. 1.4.3) понятия нормы и угнетенного состояния биоценоза нельзя связывать с каким-либо конкретным значением губительного воздействия среды \bar{y} . Более того, любые такие воздействия при условии их достаточно долговременной стабильности после адаптации к ним биоценоза ($\lambda = \lambda(\bar{\lambda}, \bar{y})$) могут рассматриваться как нормальные, а биоценоз — находящимся в норме. Это положение можно назвать *адаптивной аккумуляцией* биоценозом губительных воздействий среды. В рассматриваемой модели это соответствует формальному соотношению (см. соотношение (3.4.16))

$$\mu(x_\alpha, y_\alpha) \equiv \mu[\mu(x_\alpha, y_\alpha), 0]. \quad (3.4.34)$$

Проведем следующий мысленный эксперимент (используя оперативную характеристику). Пусть долговременная адаптация, отражаемая вектором $\lambda = \lambda(\bar{\lambda}, \bar{y})$, приводит биоценоз в состояние нормы, которому соответствует при заданной его структуре x значение оперативной характеристики $m(1, 1)$. Это ее значение является идеальным. На самом деле всегда существуют некоторые слабые возмущения среды $\bar{y} \neq 0$, но в состоянии нормы $\bar{y} \ll \bar{x}$, и мы можем ими пренебречь, так как в этом случае $m(1 - \bar{y}, 1 - \bar{y}) \sim m(1, 1)$. Пусть среда внезапно обрушивается на биоценоз сильное губительное воздействие $\bar{y} \gg \bar{x}$. В худшем варианте этому случаю соответствует значение оперативной характеристики $m(\bar{z}, 1)$, где $\bar{z} = 1 - \bar{y} < 1 - \bar{x}$. Сразу же после этого будем считать биоценоз пребывающим в угнетенном состоянии. Затем по прошествии достаточно долгого времени благодаря адаптации, отражаемой вектором $\lambda = \lambda(\bar{\lambda}, \bar{y})$, происходит *первый адаптивный подъем* биоценоза (рост средней численности α -особей). Этому соответствует значение оперативной характеристики $m(\bar{z}, \bar{z})$. Пусть теперь с биоценоза снят губительный процесс интенсивности $\bar{y} = 1 - \bar{z}$. Сразу же после этого произойдет *пассивный подъем* биоценоза (рост средней численности его α -особей). Этому соответствует значение оперативной характеристики $m(1, \bar{z})$. Однако это не исчерпывает возможностей биоценоза, так как за достаточно большое время он, пере-

адаптируясь вектором λ от значения $\lambda(\lambda, \bar{y})$ к значению $\lambda(\lambda, 0)$, снова придет к прежнему состоянию, определяемому значением оперативной характеристики $m(1, 1)$, совершив *второй адаптивный подъем*. Указанную последовательность воздействий среды и адаптаций к ним биоценоза будем называть адаптационным циклом. В приложении 2 показано, что в соответствии с экологическими представлениями значения оперативной характеристики (3.4.20) удовлетворяют неравенствам

$$m(1, 1) \geq m(1, \bar{z}) \geq m(\bar{z}, \bar{z}) \geq m(\bar{z}, 1). \quad (3.4.35)$$

Введем относительные разности

$$\Delta_{a1} = \frac{m(\bar{z}, \bar{z}) - m(\bar{z}, 1)}{m(1, 1) - m(\bar{z}, 1)}; \quad \Delta_n = \frac{m(1, \bar{z}) - m(\bar{z}, \bar{z})}{m(1, 1) - m(\bar{z}, 1)};$$

$$\Delta_{a2} = 1 - \Delta_{a1} - \Delta_n.$$

Разности Δ_{a1} и Δ_{a2} будем называть *1-м* и *2-м адаптивным подъемом*, разность Δ_n — *пассивным подъемом*. Используем также отношения

$$1 \geq \mu_2 \equiv \frac{m(1, \bar{z})}{m(1, 1)} \geq \mu_3 = \frac{m(\bar{z}, \bar{z})}{m(1, 1)} \geq \mu_4 = \frac{m(\bar{z}, 1)}{m(1, 1)}$$

и отношения

$$1 \geq \pi_2 = \frac{\bar{p}_2}{p_1} \geq \pi_3 = \frac{\bar{p}_3}{p_1} \geq \pi_4 = \frac{\bar{p}_4}{p_1}$$

средних вероятностей $\bar{p}_1 \geq \bar{p}_2 \geq \bar{p}_3 \geq \bar{p}_4$, соответствующих значениям оперативной характеристики (3.4.35). Используя выражение (3.4.17), получаем

$$\pi_i = \frac{\mu_i}{1 - a p_1 (1 - \mu_i)} \geq \mu_i \quad (i = 2, 3, 4). \quad (3.4.36)$$

Кроме того, легко показать, что

$$\mu_2 \geq \Delta_{a1} + \Delta_n \text{ и } \mu_3 \geq \Delta_{a1}. \quad (3.4.37)$$

Поэтому из неравенств (3.4.36) и (3.4.37) имеем

$$\pi_2 \geq \Delta_{a1} + \Delta_n \text{ и } \pi_3 \geq \Delta_{a1}. \quad (3.4.38)$$

Используя соотношения (3.4.20), (3.4.22) и (3.4.27) с учетом свойств $\delta = \delta(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \delta(\bar{z}_2, \bar{z}_1)$ и $\gamma(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = 1/\gamma(\bar{z}_2, \bar{z}_1)$, получаем

$$\Delta_{a1} = 1 - \delta\gamma, \quad \Delta_n = \gamma^2 \text{ и } \Delta_{a2} = 1 - \Delta_{a1} - \Delta_n. \quad (3.4.39)$$

При фиксированном значении вектора x между парой значений \bar{z}_1 и \bar{z}_2 и парой значений функций $\gamma = \gamma(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ и $\delta = \delta(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ имеет место взаимно-однозначное соответствие.

Поэтому можно производить расчет параметров Δ_{a1} , Δ_n и Δ_{a2} по промежуточным параметрам γ и δ , используя соотношения (3.4.39) согласно номограмме рис. 3.3, а далее производить нижние оценки параметров π_2 и π_3 согласно неравенствам (3.4.38). Для того чтобы расчет начинался с исходных параметров x , \bar{z}_1 и \bar{z}_2 , необходимо по ним вычислять промежуточные параметры γ и δ , для чего в общем случае

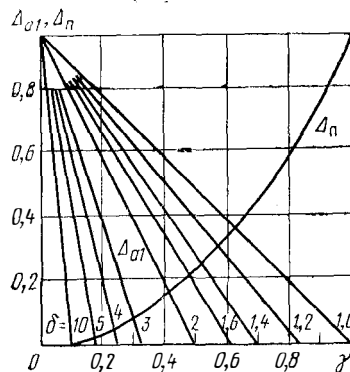


Рис. 3.3

нужно решать громоздкое трансцендентное уравнение (3.4.21). Вместе с тем линейный случай $v(\bar{z}) = v_\Delta(\bar{z})$ практически вполне укладывается в пределы неточностей исходных эмпирических данных о величинах x^* ($\alpha = \overline{1, a}$).

Пронумеруем α -компоненты биоценоза в порядке убывания эмпирических вероятностей смертностей их α -особей: $1 \gg x^*_1 \gg x^*_2 \gg \dots \gg x^*_\alpha \gg \dots \gg x^*_a$, а затем, например, методом наименьших квадратов „спрямим“ их функцию:

$$\frac{1 - 2x^*_\alpha}{1 - x^*_\alpha} \approx c^* + \Delta^* \frac{\alpha - 1}{a - 1} \quad (\alpha = \overline{1, a}).$$

Тогда величины c^* и Δ^* могут служить эмпирическими оценками теоретических значений параметров

$$c = \frac{1 - 2x_1}{1 - x_1} \quad \text{и} \quad \Delta = \frac{x_1 - x_a}{(1 - x_1)(1 - x_a)}.$$

Затем для расчета параметров γ_Δ и δ_Δ можно воспользоваться соотношениями (3.4.28) и (3.4.29). В частном случае малых значений Δ они упрощаются:

$$\gamma_\Delta = \frac{\frac{1}{c} - \bar{z}_1 - \frac{\Delta \bar{z}_1^2}{2}}{\frac{1}{c} - \bar{z}_2 - \frac{\Delta \bar{z}_2^2}{2}} \frac{\frac{1}{c} - \bar{z}_2 - \frac{\Delta}{2c^2}}{\frac{1}{c} - \bar{z}_1 - \frac{\Delta}{2c^2}} \times \left(1 - \frac{\Delta(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{2} + \frac{\Delta^2(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^2}{24} \right); \quad (3.4.40)$$

* от него зависит от
вращения

$$\delta_{\Delta} \approx 1 + \frac{\Delta^2 (\bar{x}_1 - \bar{x}^2)^2}{24}. \quad (3.4.41)$$

Для оценки абсолютных значений средних вероятностей α -особей биоценоза \bar{p} необходима оценка значения средней вероятности их рождаемости $\bar{\lambda}$, лимитируемой в немалой степени трофностью их местообитания. Эти оценки являются специальной проблемой трофодинамики. Важность приведенных выше соотношений для относительных показателей Δ_{a1} , Δ_n , Δ_{a2} , π_i состоит в том, что они могут быть рассчитаны без знания абсолютного значения $\bar{\lambda}$ и до его получения.

Рассмотрим числовой пример использования приведенных соотношений. Пусть внутри α -компонентного биоценоза ($a=10$) со средней вероятностью α -особей в нем $\bar{p}_1=0,01$ и заданными параметрами $c=0,1$ и $\Delta=0,15$ имеется интересующая нас промысловая популяция (α -компонента) и мы намерены ежегодно (временной шаг модели 1 год) эксплуатировать ее так, что соответствующий параметр $y_{\alpha}=0,4$, оставляя в покое другие компоненты биоценоза ($\bar{y}=y_{\alpha}=0,4=1-z_{\alpha}$). Каково при этом предельно возможное значение относительной средней вероятности α -особей биоценоза $\pi_2=\bar{p}_2/\bar{p}_1$ и каково возможное увеличение π_4 до величины $\pi_3=\bar{p}_3/\bar{p}_1$ после некоторого достаточно большого времени перадаптации биоценоза к новым условиям стабильного (с характеристикой \bar{y}) промысла?

Для ответа на поставленный вопрос, используя значения $c=0,1$ и $\Delta=0,15$ по формулам (3.4.40) и (3.4.41), находим $\gamma \approx 0,5$ и $\delta \approx 1$, затем по ним с помощью номограммы рис. 3.3 находим $\Delta_{a1}=0,5$ и $\Delta_n=0,25$ и далее по формулам (3.4.38) — искомые оценки $\pi_3 \geq 0,5$ и $\pi_2 = 0,75$.

Очевидно, что подобные оценки можно проводить и для предсказания других сильных воздействий на биоценоз, связанных с загрязнениями, катастрофами и другими стихийными явлениями.

3.4.4. Дальнейшая детализация взаимодействия α -особей. Рассмотренная макро модель биоценоза не учитывает пространственной неоднородности (агрегированности) α -компонент. Для ее учета необходимо построить специальные модели на микроуровне «стай и пятен» (см. § 3.5), которые могут конкретизировать значения векторов λ и x макро модели.

Взаимодействие между α -компонентами макромодели учтено косвенно ограничением $\bar{\lambda} = \text{const}$ возможных значений вектора вероятностей рождаемостей $\lambda = (\lambda_\alpha)$. Здесь увеличение λ_α для α -особи влечет за собой уменьшение некоторых λ_β ($\beta \neq \alpha$) для других β -особей. Это обстоятельство отражает внутробиоценотическую конкуренцию за лимитированные пищу и места размножения и обитания.

Более явный учет взаимодействия между α -особями биоценоза можно осуществить детализацией структурного вектора $x = (x_\alpha)$ вероятностей смертности от внутробиоценологических причин: хищники ($x' = (x'_\alpha)$), недоедание ($x'' = (x''_\alpha)$) и естественная смерть ($x''' = (x'''_\alpha)$). Иногда первые две причины объединяют в понятие экологической смерти, а последнюю называют физиологической смертью [106]. Согласно соотношению (3.4.11)

$$x_\alpha = \left[1 + \left(\frac{x'_\alpha}{1-x'_\alpha} + \frac{x''_\alpha}{1-x''_\alpha} + \frac{x'''_\alpha}{1-x'''_\alpha} \right)^{-1} \right]^{-1} (\alpha - \overline{1, a}). \quad (3.4.42)$$

Вероятность x'''_α может быть оценена с помощью статистического эксперимента над α -особями, живущими в нормальных физиологических условиях без хищников.

Вероятности x'_α и x''_α рассчитываются на основе рассмотрения трофического графа Γ_α биоценоза. Пусть α -особь в числе m' жертв оказывается j -й добычей для n' хищников и сама в числе n'' хищников является i -м хищником, охотящимся за m'' жертвами. Пусть на основе экспериментальных исследований задаются две матрицы: $(n' \times m')$ -матрица $\pi' = (\pi'_{ij})$ и $(n'' \times m'')$ -матрица $\pi'' = (\pi''_{ij})$ вероятностей π'_{ij} и π''_{ij} поимок хищниками соответствующих жертв. Тогда согласно (П.1.26) для псевдонезависимых событий поимки жертв хищниками имеем

$$x'_\alpha = \frac{N_{n'm'} - 1}{m' N_{n'm'}} \omega_{n'm'j},$$

$$x''_\alpha = 1 - \frac{N_{n''m''} - 1}{n'' N_{n''m''}} \omega_{n''m''i}, \quad (3.4.43)$$

где

$$N_{nm} = \sum_{k=0}^l N_{nm}(k), \quad N_{nm}(k) = k! C_n^k C_m^k$$

$$(k = \overline{0, l}; \quad l = \min(n, m)); \quad (3.4.44)$$

и величины $\omega_{n'm'j}$ и $\omega_{n''m''i}$ равны единице в однородном случае, а в неоднородном — определяются матрицами $\underline{\pi}'$ и $\underline{\pi}''$ согласно соотношениям (П.1.26) при $p_{ij} = \pi'_{ij}$, π''_{ij} .

Все рассмотрения этого пункта пока носили статический характер. Перейдем к динамическим рассмотрениям.

Рассмотрим диатроф, в котором активный хищник без каннибализма охотится за доступными ему α -жертвами с вероятностями доступности $\vec{\pi} = \{\pi_\alpha\}$. Считается, что охота хищника проходит в местообитание α -жертв, где они встречаются в каждом его элементе с вероятностями (условными вероятностями) $p'_\alpha(p_\alpha)$ и имеют биомассы

$e'_\alpha (\alpha = \overline{1, a})$. Здесь $\sum_{\alpha=1}^a p'_\alpha + p_0 = 1$, где p_0 — вероятность того, что элемент пуст, а $p_\alpha = p'_\alpha / (1 - p_0)$ — условная вероятность того, что в элементе находится α -особь при условии, что он не пуст.

Стратегия охоты хищника такова. Он последовательно обходит N элементов местообитания α -жертв в их поиске. Обнаруживая в элементе α -жертву, он ее преследует на повышенной по сравнению с поиском скорости в течение не более чем t_α интервалов времени, принятых за единицу (загоняет α -жертву). Эту же величину t_α можно интерпретировать как максимальное число бросков, которое хищнику энергетически выгодно произвести в попытках контакта с α -жертвой. Каждая из таких попыток независимо от других с постоянной вероятностью π_α оканчивается успехом и с вероятностью $1 - \pi_\alpha$ — неудачей. Пусть хищник, охотясь таким образом и обойдя N элементов местообитания α -жертв, совершил случайное число τ бросков или активно преследовал своих α -жертв в течение случайного времени, равного τ . При

Этом он будет иметь некоторый случайный суммарный рацион r (общая биомасса всех пойманных им α -жертв).

В приложении 1 (см. (П.1.51)) показано, что математическое ожидание этих величин

$$\begin{aligned} E\tau &= N(1 - p_0) \overline{\pi^{-1} [1 - t\pi(1 - s)s^{-1}]^p}; \\ Er &= N(1 - p_0) \overline{e'^p} \bar{s}^e, \end{aligned} \quad (3.4.45)$$

где

$$\begin{aligned} s_\alpha &= 1 - \exp(-t_\alpha/u_\alpha), \quad u_\alpha = [\ln(1 - \pi_\alpha)^{-1}]^{-1}; \quad p = (p_\alpha); \\ e &= (e_\alpha); \quad p_\alpha = p'_\alpha/(1 - p_0); \quad e_\alpha = p_\alpha e'_\alpha / \overline{e'^p}. \end{aligned}$$

Пару значений $(E\tau, Er)$ в соответствии с определением п. 1.5.1 можно рассматривать как пару (u, v) -обмена. В соответствии с отношением (1.5.5) $Er = v$ разбивается на два множителя: $\bar{s}^e = v_1(u, \bar{A})$ — множитель, зависящий от стратегии хищника $\bar{A} = \bar{t} = (t_\alpha)$ и $v_2(|B|) = N(1 - p_0) \overline{e'^p}$ — множитель, зависящий от трофности среды $|B|$.

Если $\pi_\alpha \rightarrow 1$, то $u_\alpha \rightarrow 0$, $s_\alpha \rightarrow 1$ и величины $E\tau$ и Er стремятся к константам $N(1 - p_0)$ и $N(1 - p_0) \overline{e'^p}$, не зависящим от стратегии $\bar{t} = (t_\alpha)$ хищника. Этот случай «легкой охоты» мы не будем рассматривать, так как он нетипичен для экологической действительности.

Рассмотрим случай «тяжелой охоты», когда π_α не близки к единице, и такие, что $t_\alpha \pi_\alpha \ll 1$ ($\pi_\alpha \ll 1/t_\alpha$). В этом случае, как показано в приложении 1 (см. (П.1.52))

$$\begin{aligned} E\tau &\approx N(1 - p_0) \bar{t}^p / 2; \\ Er &\approx N(1 - p_0) \overline{e'^p} [1 - \exp(-t/u)^e], \end{aligned} \quad (3.4.46)$$

где $u_\alpha \approx \pi_\alpha^{-1}$.

Максимизация величины рациона $v = Er$ при фиксации длительности охоты $u = E\tau$ и варьировании вектора $\bar{t} = (t_\alpha)$ эквивалентна минимизации величины

$$J = \exp(-t/u)^e \text{ при } \bar{t}^p = t = \text{const.} \quad (3.4.47)$$

Эта задача решается в приложении 2 (см. п. П.2.3). В результате максимальное значение среднего рациона

хищника имеет вид

$$(Er)_{\max} = N (1 - p_0) \bar{e}^{\bar{p}} \{1 - \exp[-t/\bar{u}^{\bar{p}} - k(u', e)]\} \quad (3.4.48)$$

и достигается при значениях $t_\alpha = t_\alpha(p, u, e)$ вида

$$t_\alpha = tu'_\alpha + \bar{u}^{\bar{p}} k(u', e) [u'_\alpha - u''_\alpha], \quad (3.4.49)$$

где

$$u'_\alpha = p_\alpha u_\alpha / \bar{u}^{\bar{p}}; \quad u''_\alpha = u'_\alpha [\ln(u'_\alpha / e_\alpha)] / k(u', e);$$

$$k(u', e) = \sum_{\alpha=1}^a u'_\alpha \ln(u'_\alpha / e_\alpha) = \overline{u' \ln(u'/e)} \geq 0.$$

В качестве подоптимального значения вектора $\vec{t} = (t_\alpha)$ можно выбрать вектор с координатами

$$t^*_\alpha = tu'_\alpha, \quad (3.4.50)$$

равными первому члену соотношения (3.4.50). Тогда соответствующее значение

$$(Er)_* N = (1 - p_0) \bar{e}^{\bar{p}} [1 - \exp(-t/\bar{u}^{\bar{p}})]. \quad (3.4.51)$$

Пусть при фиксированном значении вектора \vec{p} трофность среды определяется средними значениями $e'^{\bar{p}}$ биомассы жертв в оптимальном случае и $e'^{\bar{p}}_* \geq e'^{\bar{p}}$ в подоптимальном.

Тогда коэффициент компенсации см. (1.5.9) имеет вид

$$\xi = \frac{\bar{e}^{\bar{p}}}{e'^{\bar{p}}_*} \frac{1 - \exp(-t/\bar{u}^{\bar{p}})}{1 - \exp[-t/\bar{u}^{\bar{p}} - k(u', e)]}. \quad (3.4.52)$$

Он показывает, как с помощью оптимальной стратегии поведения ($1 - J_{\min} \geq 1 - J$) можно компенсировать недостаток пищи ($\bar{e}'^{\bar{p}} \leq e'^{\bar{p}}_*$), чтобы получить в точности одно и то же среднее количество рациона $(Er)_{\max} = (Er)_*$.

Численный анализ выражения (3.4.52) изображен на рис. 3.4, где показана зависимость ξ от нормированного времени $T = t/\bar{u}^{\bar{p}}$ при различных значениях параметра $k = k(u', e)$. При не слишком больших значениях T (время охоты лимитировано) величина ξ может меняться в зависимости от параметра k , определяемого опти-

мальной стратегией охоты, как видно из графиков рис. 3.4, на несколько порядков.

Споры трофологов и этологов (специалистов по поведению животных) бесплодны потому, что там, где кончаются задачи трофологов, начинаются задачи этологов. О том, что они касаются количественно существенных эффектов как раз и указывают кривые рис. 3.4. Типичность же экологической ситуации нехватки пищи, преодолеваемой искусством охотника, вряд ли вызывает сомнение.

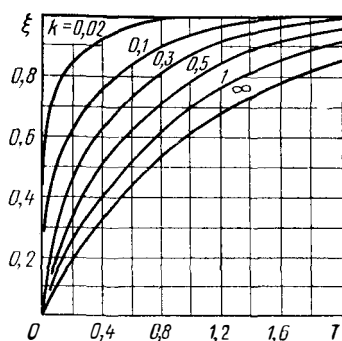


Рис. 3.4

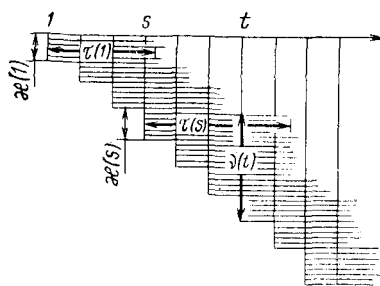


Рис. 3.5

3.4.5. Статистическая динамика многовозрастной популяции. В п. 3.4.1 было приведено вероятностное обоснование упрощенной модели «запас — пополнение», восходящей к работам Бивертон и Холта [115], по динамике численности многовозрастной популяции ($s > 1$, $a = 1$). К сожалению, эти давно бытующие в рыбохозяйственной науке методы оторваны от современных хорошо развитых вероятностных моделей. Остановимся на одной из них, возникшей в связи с теорией различения информационных потоков [43, доп. 3]. В конце п. П.1.6 дано математическое описание этой модели. Ниже приводится ее экологическая интерпретация.

Рассмотрим популяцию, состоящую из одновозрастных групп α -особей. Эти группы будем называть s -когортами, если их α -особи родились в момент s дискретного времени $1, \dots, s, \dots, t, \dots$. Примем интервал дискретизации, равный суткам, месяцу или году в зависимости от специфики решаемой задачи.

Пусть в каждый момент s возникает случайное число $\kappa(s)$ α -особей s -когорты и каждая i -я из них живет свое

случайное время $\tau_i(s)$ ($i=1, \dots, \kappa(s)$). Тогда в произвольный момент времени t случайная численность $v(t)$ популяции является суммой:

$$v(t) = \sum_{s=1}^t v_s(t)$$
 случайных численностей $v_s(t)$ s -когорт, состоящих из тех α -особей, которые дожили до момента t (см. рис. 3.5).

Основным характерным интервалом времени для популяции является год. С его сезонами (за исключением тропиков) связана периодичность большинства функций популяции. В частности, режим размножения у различных популяций неодинаков. Одни размножаются в течение коротких интервалов времени сезона года. Другие на протяжении года размножаются примерно с одинаковой интенсивностью (растянутый период размножения). Все эти особенности размножения учитываются спецификой распределения $P^*_s = \{P^*_s(m)\}$ случайных величин $\kappa(s)$. Так, если для некоторого множества S моментов времени $s \in S$ популяция не размножается, то формально полагаем $P^*_s(0) \equiv 1$ для $s \in S$. Для популяций с растянутым периодом размножения считаем, что случайные величины $\kappa(s)$ имеют примерно одни и те же невырожденные распределения вероятностей P^*_s .

В общем случае, считая случайные величины $\kappa(s)$ и $\tau_i(s)$ ($i=0, \dots, \kappa(s)$, $s=1, \dots, t$) независимыми в совокупности, удастся найти по их распределениям $P^*_s = \{P^*_s(m)\}$ и $P_s = \{P_s(u)\}$ распределение случайной величины $v(t)$. В частности, в п. П.1.6 дан вывод связи между математическими ожиданиями и приводится связь между дисперсиями соответствующих случайных величин:

$$E v(t) = \sum_{s=1}^t E \kappa(s) [1 - F_s(t-s)];$$

$$D v(t) = E v(t) + \sum_{s=1}^t [D \kappa(s) - E \kappa(s)] [1 - F_s(t-s)]^2,$$

(3.4.53)

где $F_s(u)$ является функцией распределения случайных

$$v_i(s) \quad (F_s(u) = \sum_{v=1}^{u-1} P_s(v)).$$

Рассмотрим конкретный случай распределений P^*_s и P_s , когда они являются бинарными однородными рас

пределениями в схемах Бернулли и Паскаля соответственно (см. пп. П.1.3 и П.1.5). Тогда

$$P_s^*(m) = P_{N, \lambda(s)}(m) \quad (0 \leq m \leq N) \quad \text{и} \quad P_s(u) = P_{\mu(s)}(u),$$

где $\lambda(s)$ и $\mu(s)$ интерпретируются вероятностями рождения и гибели особи s -когорты.

Будем считать, что внутри- и внепопуляционные процессы внутри годового периода следуют сезонным изменениям и периодически повторяются из года в год (вообще говоря, можно было бы выбрать, например, и 11-летний период). Итак, полагаем, что функции $\lambda(s)$ и $\mu(s)$ имеют некоторый положительный целочисленный период h , т. е. для $s = \sigma + kh$, где $0 \leq \sigma \leq h-1$ и k — произвольное число, имеем $\lambda(\sigma + kh) = \lambda(\sigma)$ и $\mu(\sigma + kh) = \mu(\sigma)$, используя полученное в приложении 1 соотношение (П.1.63), легко показать, что в стационарном случае при $t \rightarrow \infty$, соответствующем климаксу популяции, и при достаточно малых значениях $\mu(\sigma)$ предел $\lim Ev(t) = Ev(\infty)$ имеет вид

$$Ev(\infty) = \frac{N}{h} \sum_{\sigma=0}^{h-1} \frac{\lambda(\sigma)}{\mu(\sigma)}. \quad (3.4.54)$$

Сравнивая соотношения (3.4.54) и (3.4.17), видим, что они аналогичны и по форме, и по смыслу входящих в них под знаком суммы параметров λ и μ (оба эти выражения растут с ростом средней численности соответствующих биосистем). Поэтому, вводя для $\mu(\sigma) = \mu(x(\sigma), y(\sigma))$ ту же зависимость от вероятностей гибели $x(\sigma)$ и $y(\sigma)$, что и зависимость $\mu_\alpha = \mu(x_\alpha, y_\alpha)$ от x_α и y_α , а также соответствующие ограничения

$$\frac{1}{h} \sum_{\sigma=0}^{h-1} \lambda(\sigma) = \bar{\lambda} = \text{const} \quad \text{и} \quad \frac{1}{h} \sum_{\sigma=1}^{h-1} y(\sigma) = \bar{y} = \text{const},$$

можно все результаты, касающиеся климакса a -компонентного биоценоза, перенести на многовозрастную популяцию, рассматриваемую в климаксе после достаточно продолжительных периодических изменений ее параметров (например, внутригодичными сезонными изменениями, повторяющимися из года в год). Следует иметь в виду, что соотношение (3.4.54) имеет место лишь при достаточно малых значениях $\mu(\sigma)$. Этого всегда можно

добиться, выбрав достаточно малый интервал дискретизации времени. Так, если среднее время жизни α -особей популяции равно в нормальных условиях двум годам, то, для того чтобы пользоваться соотношением (3.4.54), достаточно положить интервал временной дискретизации равным одной неделе (2 г./96). Тогда вероятность естественной смертности α -особей $x(\sigma)$ окажется равной $1/96 \approx 0,01$ и $\mu(\sigma) \leq x(\sigma) \approx 0,01$.

Выражение (3.4.53) для дисперсии $Dv(t)$ в случае распределения Бернулли $P_s^* = P_{N\lambda(s)}^*$, когда $E\kappa(s) = N\lambda(s)$ и $D\kappa(s) = N\lambda(s) - (1 - \lambda(s))$, приводит к оценке $Dv(t) \leq Ev(t)$. При этом можно получить, используя оценку Чебышева, простые оценки для высоковероятного интервала, заключающего случайную численность $v(t)$ α -особей популяции,

$$P [Ev(t) - U \sqrt{Ev(t)} \leq v(t) \leq Ev(t) + U \sqrt{Ev(t)}] \geq 1 - U^{-2}. \quad (3.4.55)$$

В качестве примера использования приведенных оценок рассмотрим популяцию рыб со стабильными жизненными условиями, имеющими среднее время жизни особей, равное двум годам. Тогда при отсутствии хищников и вероятности естественной смерти $\kappa(\sigma) = 0,01$ имеем $\mu = \mu(\sigma) = \kappa(\sigma) = 0,01$. Пусть рассматриваемая популяция рыб имеет растянутый период размножения ($\lambda(\sigma) = \lambda = \text{const}$) и вероятность λ «рождения» малька из икринки 10^{-5} . Пусть среднегодовой объем выметаемой искры $N = 10^{11}$. Тогда в стационарном случае $t \rightarrow \infty$ на основании соотношений (3.4.54)

$$Ev(\infty) = N \frac{\lambda}{\mu} = 10^{11} \frac{10^{-5}}{10^{-2}} = 10^8.$$

Используем эту оценку для оценки высоковероятного интервала возможных значений случайной численности $v(\infty)$ популяции рыб в стационарном случае. Примем 1%-ный уровень значимости $U^{-2} = 0,01$. Тогда из соотношения (3.4.55) следует, что с вероятностью $P \geq 1 - U^{-2} = 0,9$ имеем $10^8 (1 - 0,1) \leq v(\infty) \leq 10^8 (1 + 0,1)$, т. е. с 10%-ной точностью численность $v(\infty)$ популяции рыб будет равна 100 млн.

В заключении этого параграфа вернемся к вопросу о правдоподобности гипотез о принципах поведения «стимул — реакция» и «реакция — стимул» для биоценоза и популяции,

Модель живучести в качестве следствия содержит подтверждение правдоподобности второй гипотезы для популяций животных, объясняя эмпирическую диаграмму Г. Фёрстера. Последняя в качестве механизма образования могла использовать преадаптацию видов, имеющую структурный характер. Макромодель биоценоза, рассмотренная в этом параграфе, в качестве следствия содержала подтверждение первой гипотезы для биоценоза и, касаясь адаптации рождаемости α -особей его компонент, снова имела структурный характер.

Рассмотренная модель многовозрастной популяции привела к выражению (3.4.54) для математического ожидания стационарной численности популяции, аналогичному выражению для монотонной функции средней вероятности α -особей биоценоза. Это обстоятельство моментально приводит к популяционной интерпретации всех выводов, сделанных относительно биоценоза и его адаптационного цикла, в частности к утверждению о большей правдоподобности гипотезы о наличии принципа поведения «стимул — реакция» для многовидовой популяции. Это может восприниматься как противоречие противоположным выводам относительно популяций животных, сделанных из модели живучести. Однако все три рассмотренные модели касаются лишь отдельных аспектов двух указанных принципов поведения и поэтому могут говорить лишь о противоречивости этих аспектов. Прежде всего, в отличие от первых двух моделей, где адаптация относится к структурным аспектам популяций и биоценозов, в последней модели адаптация касается не глубоких структурно-морфологических изменений популяций, а ее тактических сезонных изменений рождаемости, связанных, например, с оптимальным выбором нерестилищ у рыб. В то время как характерные времена первых двух моделей имеют геологические порядки, адаптационный цикл популяции имеет существенно меньшее характерное время и ряд эмпирических фактов, подтверждает его периодичность, связанную, например, с 11-летними периодами солнечной активности. У первых двух моделей из-за геологических порядков их характерных времен трудно предположить наличие периодичности их адаптационных циклов.

Поэтому лишь для третьей модели можно предполагать адаптацию, основанную на активном использовании памяти о сравнительно недавно прошедших, периодиче-

17* \times Средняя \approx эволюция фрактал 259
 \times \times в эволюции адаптации
или как функция времени \rightarrow небольшой

ски повторяющихся событиях во внешней среде. Использовании не в направлении глубоких структурно-морфологических изменений, а в собственно поведенческих тактических подстройках к периодическим изменениям среды. В этом случае каждый адаптационный цикл в модели основан на схеме «стимул — реакция», но при многократной периодической последовательности таких циклов «реакция», основанная на памяти о стимулах прошедших циклов, упреждает «стимул» очередного цикла, и здесь мы снова получаем схему «реакция — стимул».

Заметим, что в биологической литературе обращается внимание на отличие причинно-следственных отношений для биологических и косных объектов. Если для косных объектов следствие следует за причиной, характерной особенностью биологических объектов является упреждение следствиями причин. Выше мы обсуждали тот же эффект в терминах стимула (причины) и реакции (следствия).

3.5. МИКРОУРОВЕНЬ

Дальнейшие рассуждения учитывают агрегированность биологических объектов и здесь α -особь является группой из m однородных особей (m -стаей). Исследуется возможность оптимизации не индивидуального, а коллективного поведения.

Представления о равномерном распределении пищи в бедных ею районах приводят к известному энергетическому парадоксу, так как потери от отлова такой пищи не компенсировались бы ее усвоением. На самом деле даже в таких районах существует бурная жизнь. Лишь факт агрегированности пищи может объяснять этот парадокс. Вместе с тем оптимальное использование агрегированной пищи требует агрегированности и хищников. Такой ответ агрегированностью на агрегированность требует исследования оптимального группового поведения хищников, их стайного поведения. Проблема обеспечения целостности m -стаи, ее эффективной охоты и защиты от хищников связана с информационными проблемами обнаружения особями m -стаи себе подобных и всей m -стаей внешних для нее объектов.

Основным объектом исследования настоящего параграфа является целостная совокупность m однородных особей, что входит в понятие α -особи. Однако здесь мы будем называть это образование m -стаей, так как его

260

* *т.е. агрегированность проявляется при взаимодействии в среде поведенческих элементов.*

реальным прообразом явилась однородная стая животных (например, рыб). Основное внимание будет уделяться коллективному поведению m -стаи.

Традиционные кибернетические модели коллективного поведения элементов сложной системы предполагали однородность среды и либо вовсе не учитывали необходимости обеспечения целостности системы [116], либо касались лишь этой проблемы введением специализированных защитных элементов [30]. Среда являлась в первом случае источником полезных ресурсов, а во втором — губительных воздействий. Считалось, что управление элементами лучше всего обеспечивается иерархической структурой с лидерами.

В настоящем параграфе рассмотрена модель коллективного поведения однородной m -стаи, функционирующей в неоднородной среде, являющейся источником как полезных ресурсов, так и губительных воздействий. При этом явно учитывается необходимость обеспечения целостности m -стаи. Управление особями m -стаи обходится без лидеров и основано на подражании особей себе подобным. Каждая особь полифункциональна.

Рассматриваемые модели, оценивая потенциальную эффективность m -стай на основе последовательного обнаружения сигналов на фоне шумов и оценок вероятностей связностей случайных графов, имеют оптимизационный характер.

3.5.1. Индивидуальное сенсорное обнаружение сигналов. Эффективность обнаружения особью внешних сигналов может быть оценена теоретически на основе теории оптимального обнаружения сигналов на фоне шумов. Последняя основана на математической теории оптимального выбора между двумя гипотезами и поэтому применима к обнаружителям любой природы, как искусственной (техсистемы), так и естественной (биосистемы). Оптимальность обнаружения жизненно важна особям. Особи с пониженной эффективностью обнаружения внешних сигналов нивелируются. В теории оптимального обнаружения сигналов на фоне шумов имеется два метода обнаружения. Классический метод Неймана и Пирсона [43] основан на заранее фиксированном времени обнаружения, последовательный метод А. Вальда [85] заранее не фиксирует время обнаружения и в среднем приводит к меньшему времени обнаружения, чем классический метод. Поэтому будем рассчитывать эффек-

*все же проблема в том, что
полностью не решена.*

тивность сенсорного обнаружения на основе последовательного метода. К этому имеются еще и более важные основания. Обозначим через F и D вероятности ложных тревог и правильного обнаружения соответственно. Пусть решение о наличии или отсутствии сигнала особь в среднем выносит при n_1 и n_0 наблюдениях, когда сигнал имеет место или отсутствует соответственно.

Для последовательного обнаружения в отличие от классического характерна несимметричность ситуации при различных порядках малости показателей эффективности: F — вероятности ложной тревоги и $1-D$ — вероятности пропуска сигнала [43]. Эта специфика поразительно соответствует специфике обнаружения особью себе подобных в m -стае (ближнее внутреннее обнаружение) и m -стаей внешних объектов (дальнее внешнее обнаружение). В самом деле, внутренние сигналы в m -стае, как правило, присутствуют и ложные тревоги о них не опасны (приводят к небольшим перемещениям). Здесь нужно полагать $F_1 = (1-D_1)^u > 1-D_1$ при $u < 1$. Эта ситуация приводит к быстрому обнаружению сигнала ($n_1^1 = un_0^1 < n_0^1$), редкие задержки которого говорят об отсутствии сигнала (см. приложение 3 (П.3.15)). Наоборот, внешние сигналы, например, исходящие от пищи и хищников, как правило, отсутствуют и ложные тревоги, связанные с ними, приводят к неоправданно дорогостоящим действиям m -стаи (большие перемещения) и весьма опасны. Здесь нужно полагать $F_0 = (1-D_0)^u < 1-D_0$ при $u > 1$. Эта ситуация приводит к быстрому выявлению отсутствия сигнала ($n_0^0 = n_0^0/u < n_0^0$), редкие задержки которого говорят о присутствии сигнала (см. приложение 3 (П.3.15)).

Поэтому именно такого рода задержки в обнаружении отсутствия и присутствия сигнала могут явиться наиболее естественным критерием для различения особью этих событий.

Сигнал, имеющий интенсивность E_* на близком от источника расстоянии, далее с ростом этого расстояния $r > r_*$ имеет интенсивность

$$E(r) = \begin{cases} E_* \exp[-\lambda(r-r_*)], \\ E_* (r/r_*)^{-s}, \end{cases} \quad (3.5.1)$$

затухающую по экспоненциальному или показательному законам соответственно с параметрами затухания λ и s . Прием сигналов особью на сенсорном уровне возможен

лишь в диапазоне $E_0 \leq E(r) \leq E_1$ по закону Вебера — Фехнера с интенсивностью

$$I = I(r) = I_* [\ln(E(r)/E_0)] / \ln(E_1/E_0), \quad (3.5.2)$$

где I_* — максимальная сенсорная интенсивность.

Последовательное обнаружение сводится к выбору двумя гипотезами о значении параметра

$$a(r) = I(r) / \sqrt{\sigma^2 + I_{ш}^2}, \quad (3.5.3)$$

называемого отношением сигнал-шум, где $I(r)$, σ и $I_{ш}$ — интенсивности сигнала, внутренних и внешних шумов соответственно. Гипотеза H_0 состоит в том, что $a(r) = 0$ (отсутствие сигнала), гипотеза H_1 — в том, что $a(r) = a_1$, где a_1 — некоторое фиксированное значение (присутствие сигнала фиксированной интенсивности). На самом деле значение параметра $a(r)$ может быть произвольным в пределах $0 \leq a(r) \leq I_* / \sqrt{\sigma^2 + I_{ш}^2}$. Поэтому вводится вероятность $D(a)$ принятия гипотезы о наличии сигнала, когда имеет место отношение сигнал-шум $a(r)$, вообще говоря, отличное от 0 до a_1 . Эта вероятность называется *оперативной характеристикой*. Из ее определения и определения вероятностей ложной тревоги F и правильного обнаружения D следует, что $D(0) = F$ и $D(a_1) = D$.

Основной практический интерес представляет случай близких гипотез H_0 и H_1 , когда отношение сигнал-шум a_1 близко к нулю (случай слабых сигналов). Для этого случая в приложении 3 (соотношения (П.3.11) и (П.3.16)) найдены выражения оперативной характеристики

$$D(a, a_1) \approx D - \frac{2(1 - a/a_1)k(F, D)D(1 - D)}{D - F} \quad (3.5.4)$$

и ее значения, когда a находится в окрестностях 0 и a_1

$$D(a) \approx 1 - \exp[-n_0 a^2 I_2(0) / 2], \quad (3.5.5)$$

где $I_2(0)$ — некоторая константа, зависящая от специфики распределения случайных шумов и сигналов (см. (П.3.13)). Первое соотношение справедливо для значений a в окрестности $a = a_1$, второе — для $a = 0$ и $a = a_1$ при $F \ll 1 - D$ и $F \gg 1 - D$ соответственно, т. е. для рассматривавшихся выше несимметричных условий обнаружения. Явные зависимости вероятностей $D(a(h), a(h_1)) = D(h, h_1)$ и $D(a(r)) = D(r)$ от расстояний h, h_1 и r от источника сигнала, можно получить, подставив

соотношение (3.5.1) в соотношение (3.5.2), а затем полученные выражения (3.5.3) параметра a подставить в соотношения (3.5.4) и (3.5.5). В результате получим (см. (П.3.21)) выражение $D(r)$, не зависящее от параметров затухания λ и s :

$$D(r) \approx \begin{cases} 1 - \exp\left(-c_1 \frac{1-r/r_0}{1-r_1/r_0}\right), \\ 1 - \exp\left[-c_1 \frac{\ln(r_0/r)}{\ln(r_0/r_1)}\right], \end{cases} \quad (3.5.6)$$

где $r_1 \leq r \leq r_0$, значения r_0 и r_1 предельных дальностей обнаружения соответствуют значениям $E_0 = E(r_0)$ и $E_1 = E(r_1)$, вычисляемым по формулам (3.5.1) и

$$c_1 = n_0 I_* I_2(0) / 2 \sqrt{\sigma^2 + I_{ш}^2}. \quad (3.5.7)$$

В практически важном случае, когда одна особь находится в тяжелых (неопределенных) условиях обнаружения $D(r) \approx 0,5 \ll 1 - F$ (при этом $r \approx r_0$), соотношение (3.5.6) переходит в соотношение

$$D(r) \approx 1 - \exp[-c_2(1-r/r_0)] \approx c_2(1-r/r_0), \quad (3.5.8)$$

где

$$c_2 = \begin{cases} c_1 / (1 - r_1/r_0), \\ c_1 / (\ln(r_0/r_1)) \end{cases} \quad (3.5.9)$$

соответственно для экспоненциальной и показательной зависимостей затухания интенсивности сигнала. Важно заметить, что зависимость $D(r)$ при этом в обоих случаях одна и та же. Здесь мы не касаемся физико-химической природы сигналов, принимаемых особями m -стаи. Они могут иметь оптическую, акустическую, электромагнитную, химическую и другую природу.

Доминирование того или другого физического канала связи между особями m -стаи и между особями и внешними объектами зависит и от среды обитания. Так, для наземных и воздушных животных доминирующими являются оптический и акустический канал связи. Для водных животных особенно при дальней связи доминирующую роль играет химический канал [117, 118]. Имеется обширная литература по поведению и ориентации животных. Однако очень мало работ по стайному поведению. Из животных с преобладанием однородных стай без лидеров наиболее характерными являются рыбы. У них

же, по-видимому, наблюдается максимальная вариабельность численности стай от десятков до десятков тысяч. Фундаментальной монографией, оказавшей основное влияние на формирование экологических представлений автора о стайном поведении животных явилась монография Д. В. Радакова [119].

3.5.2. Коллективное экологическое обнаружение сигналов. В качестве пространственной модели m -стай примем некоторое множество, состоящее из m узлов α -мерной h -решетки $R_{\alpha, h}$, определенной в п. П.1.3. Считаем, что особи стай располагаются в узлах h -решетки, причем расстояние h между узлами соответствует среднему расстоянию между особями m -стай. При $\alpha=2$ m -стая называется плоской, при $\alpha=3$ — объемной. Объем V , занимаемый m -стаей, равен

$$V = h^{\alpha} m. \quad (3.5.10)$$

Коллективное поведение особей m -стай проявляется как при передаче, так и при приеме сигналов.

Начнем рассмотрение со случая передачи сигнала. Считается возможным образование суммарного внутреннего сигнала m -стай, который является суммой сигналов от отдельных особей и каждый из них предназначен для подтверждения их присутствия в m -стае. Этот суммарный сигнал необходим для поддержания целостности m -стай и известен, например, для стай рыб как эффект так называемого «хора». В приложении 3 показано, что при экспоненциальном затухании сигнала образование суммарного сигнала не приводит к его возрастанию с ростом m . Для случая показательного затухания сигнала с параметром затухания $s < \alpha$ и больших значений m , если особи m -стай расположены в узлах h -решетки согласно соотношению (П.3.33) интенсивность суммарного сигнала, мало меняющаяся в пределах m -стай, имеет вид

$$E_m(h) \approx c_{\alpha s} E(h) m^{1-s/\alpha}, \quad (3.5.11)$$

где $c_{\alpha s} = 2(\alpha - 1) \pi^{1/2} (\alpha - s) [(\alpha + 1) \pi/3]^{1-s/\alpha}$ и $E(h)$ определено соотношением (3.5.1)

Особь m -стай адаптированы к оптимальному обнаружению суммарного сигнала, поступающего от особей m -стай, расположенных в узлах h_1 -решетки. Пусть про-

исходит некоторое рассредоточение особей m -стаи. В результате среднее расстояние между ними становится равным $h > h_1$, т. е. особи m -стаи располагаются в узлах h -решетки. Используя соотношение (3.5.4), в этом случае получим следующее выражение для вероятности пропуска сигнала

$$1 - D(h, h_1) \approx (1 - D_1) \left\{ 1 + 2 \left[1 - \frac{a(h)}{a(h_1)} \right] k [F_1, D_1] \right\}, \quad (3.5.12)$$

где величину $a(h)$, используя второе из соотношений (3.5.1), а также (3.5.11), (3.5.2) и (3.5.3), можно представить так:

$$a(h) = \frac{I_*}{V \sigma^2 + I_{ш}^2 \ln(E_1/E_0)} \left[\ln \frac{E_* c_{\alpha s}}{E_0} - s \ln \frac{h}{r_*} + \left(1 - \frac{s}{\alpha} \right) \ln m \right].$$

Отсюда окончательно выражение (3.5.12) имеет вид

$$1 - D(h, h_1) \approx (1 - D_1) \left(1 + \frac{d_1}{\ln m - d_2} \right), \quad (3.5.13)$$

где

$$d_1 = 2k(F_1, D_1) [\ln(h/h_1)] (s^{-1} - \alpha^{-1})^{-1} > 0; \quad (3.5.14)$$

$$d_2 = \left[\ln(h_1/r_*) - s^{-1} \ln(E_* c_{\alpha s}/E_0) \right] (s^{-1} - \alpha^{-1})^{-1}.$$

Из соотношения (3.5.13) следует, что с ростом m вероятность пропуска особью сигнала в m -стае с эффектом хора убывает. Формула (3.5.13) количественно оценивает этот эффект.

Рассмотрим теперь коллективное поведение особей в m -стае при дальнем обнаружении сигнала от внешнего объекта, когда средний диаметр m -стаи имеет меньший порядок, чем расстояние между центрами тяжести m -стаи и внешнего объекта. Поэтому в рассматриваемом случае расстояния от различных особей m -стаи до внешнего объекта считаются неразличимыми.

Хотя прием сигнала производится каждой особью независимо от других, решение о его наличии принимается совместно. Оно основано на эффекте подражания. Именно, внешний объект считается обнаруженным, если его обнаруживает не менее чем θ -я доля осо-

бей m -стаи. В этом случае θ -я доля особей m -стаи устремляется к нему, а остальная $(1-\theta)$ -я доля особей, не обнаруживших его, устремляется к нему «подражая» θ -й доле, повинуюсь стайному чувству. Конкретное значение θ является важным экологическим параметром конкретных стай определенных видов животных. Чем дальше объект от m -стаи, тем значение θ должно быть больше, так как это сопряжено с ненадежностью отдельных обнаружений и увеличению энергетических потерь от ложных тревог. В рассматриваемом случае θ -я доля особей, обнаруживших внешний объект, всякий раз случайным образом распределяется между всеми m особями m -стаи, и поэтому здесь имеет место типичное управление подражанием без иерархии постоянных лидеров.

Вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги здесь имеют вид (см. (П.3.34))

$$\begin{aligned} D_m(r) &\approx 1 - \exp[-mk(\theta, D(r))]; \\ F_m &\approx \exp[-mk(\theta, F_0)] \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

при $F_0 \wedge \theta < D(r)$, где F_0 — фиксированная вероятность ложной тревоги и $D(r)$ — вероятность обнаружения для одной особи; r — расстояние между m -стаей и внешним объектом.

Из соотношения (3.5.8) и того, что $D(r) > \theta$, следует, что $r < r_\theta < r_0$, где r_θ — значение, при котором $D(r_\theta) = \theta$, т. е. коллективное обнаружение не может преодолеть предельного для особи расстояния обнаружения r_0 . Однако сколь бы мало не было $\varepsilon > 0$, при достаточно большом значении m существует такое значение $r(m) = r_{\theta+\varepsilon}$, что согласно соотношению (3.5.15) $D_m(r, m)$ близко к единице, а F_m — к нулю.

Соотношение (3.5.15) позволяет вычислить значение $r(m)$. Для этого зададим значение $D_m(r) = 1 - \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число (уровень значимости), и воспользуемся первым из выражений (П.3.6) для k -функции и выражением (3.5.8) для вероятности $D(r)$. Тогда после несложных преобразований получим

$$r(m) = r_0(c_3 - c_4/\sqrt{m}), \quad (3.5.16)$$

где

$$c_3 = 1 - \theta/c_2 \text{ и } c_4 = \sqrt{2\theta(1-\theta) \ln \varepsilon^{-1}/c_2} \quad (3.5.17)$$

— положительные константы. Поскольку все используемые формулы относятся к случаю близких гипотез (сла-

бого сигнала) среднее число наблюдений n_0 является весьма большим, а поэтому и величина $c_2 \gg 1$ (см. соотношения (3.5.7) и (3.5.9), отсюда следует, что константа c_3 близка к единице и с ростом m величина $r(m)$ приближается к $r_0 c_3 \approx r_0$.

3.5.3. Формализация понятия целостности m -стаи.
Оптимизационная модель. Целостность m -стаи рассматривается нами как долговременная локализация всех ее особей в некотором α -мерном объеме $V = h^\alpha m$ с переменным средним расстоянием h между особями. Считается, что целостная стая может перемещаться в α -мерном пространстве как единое целое.

Все это предполагает наличие некоторого информационного контакта между особями m -стаи. Здесь мы рассматриваем простейший контакт — обнаружение особью сигнала от себе подобных особей или хора всей m -стаи. Эти две возможности формализуются двумя моделями m -стаи: локализованной (малое среднее расстояние между особями) и разреженной (среднее расстояние между особями $h > h_1$). Если в первом случае контакт каждой особи с любой особью m -стаи считается примерно равнодоступным, то во втором — такой контакт возможен для каждой особи лишь со своими k ближайшими соседями (для α -мерной h -решетки $k=4$ при $\alpha=2$ и $k=6$ при $\alpha=3$). В случае эффекта хора мы формально, оставаясь в рамках последней модели, считаем, что здесь происходит простое усиление сигналов от ближайших соседей, сумма интенсивностей которых равна сумме интенсивности хора всей m -стаи.

Если хотя бы две части m -стаи не коммуникабельны (их особи не обмениваются сигналами), то такая m -стая не считается целостной. Поэтому, если формализовать коммуникабельность m -стаи графом, вершины которого изображают особей, а ребра — наличие информационных связей между ними, то целостность стаи может быть формализована связностью соответствующего графа. В нашей модели информационная связь между особями, трактуемая как обнаружение себе подобной, имеет место с вероятностью D и не имеет места с вероятностью $1-D$. В предположении независимости обнаружения себе подобных для каждой особи m -стаи коммуникабельность ее формализуется так называемым случайным графом Γ_{mD} [70], а целостность — связанностью этого графа.

В общем случае вероятность P_{mD} связности случай-

ного графа Γ_{mD} при фиксированном значении D и больших значениях m имеет асимптотически точную оценку (см. (П.3.41), (П.3.43) и (П.3.44))

$$P_{mD} \approx 1 - m(1-D)^k, \quad (3.5.18)$$

где $k = m - 1$, когда каждая вершина графа Γ_{mD} может быть соединена ребрами с любой из его $(m - 1)$ -й вершиной, и $k = 2\alpha$ ($\alpha = 2, 3$), когда она может быть соединена ребрами лишь с ближайшими ей вершинами. Этому соответствуют локализованные m -стаи, когда $h = 0$ ($m^{-1/\alpha}$) и объем V m -стаи согласно формуле (3.5.10) с ростом m остается постоянным, и разреженные m -стаи, когда $h > 0$ ($m^{-(1-\omega)/\alpha}$), где $\omega > 0$, и объем V m -стаи имеет порядок $O(m^\omega)$ и с ростом m растет.

Формула (3.5.18) имеет простое интуитивное оправдание, указывая на то, что в нарушение связанности графа Γ_{mD} основной вклад вносит изоляция любой из его m вершин (изоляция большей совокупности вершин менее вероятна). Заметим, что при фиксированном значении D , не зависящем от m , из соотношения (3.5.18) следует два различных асимптотических при $m \rightarrow \infty$ поведения вероятности целостности m -стаи. В случае локализованной m -стаи, когда $k = m - 1$, $P_{mD} \rightarrow 1$, а в случае разреженной m -стаи, когда $k = 2\alpha = \text{const}$, $P_{mD} \rightarrow 0$.

Рассмотрим случай, разреженной m -стаи при наличии хора, когда согласно соотношению (3.5.13) с ростом m вероятность пропуска сигнала $1 - D = 1 - D(h, h_1)$ (отсутствия ребра) убывает, асимптотически стремясь к $1 - D_1$.

В приложении 3 (п. П.3.6) показано, что в этом случае существует оптимальная численность m -стаи $m = m_{\text{opt}}^I$, при которой вероятность P_{mD} ее целостности обращается в максимум P_{max} . Явные выражения этих величин имеют вид [120]

$$m_{\text{opt}}^I = \exp [d_2 + d_1 (\sqrt{1 + 4k/d_1} - 1)/2]; \quad (3.5.19)$$

$$P_{\text{max}} \approx 1 - m_{\text{opt}}^I (1 - D_1)^k [1 + 2/(\sqrt{1 + 4k/d_1} - 1)]^k, \quad (3.5.20)$$

где константы d_1 и d_2 определяются соотношением (3.5.14). Соотношение (3.5.14) имеет смысл лишь для случая не слишком разреженной m -стаи, для которого оно и выводилось ($h \geq h_1$). Это требует ограниченности величины $d_1 \ll 4k$. Для этого случая, а также при требо-

вании $P_{\max} \geq 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — любое малое число, и наличия максимального значения P_{\max} в приложении 3 (см. (П.3.53)) приведены условия, ограничивающие значения параметров d_1 и d_2 :

$$\alpha \ln \ln \frac{l}{\varepsilon} \leq d_2 + \sqrt{kd_1} \leq \alpha \ln \ln \frac{1}{[3(1-D_1)]^k}. \quad (3.5.21)$$

В частности, эти соотношения выполняются, если

$$d_2 = \alpha \ln \ln \frac{e}{\varepsilon} \text{ и } d_1 = \frac{1}{k} \left\{ \alpha \ln \ln \frac{e/\varepsilon}{[3(1-D_1)]^k} \right\}^2.$$

Учитывая соотношения (3.5.14), получаем формулы для вычисления коэффициентов $\ln(h/h_1)$ и $\ln(h_1/h_*)$, которые мы будем называть коэффициентом *подвижности* особи в m -стае и коэффициентом *разреженности* m -стаи соответственно. Имеем

$$\ln \frac{h}{h_1} = \frac{s^{-1} - \alpha^{-1}}{2kk(F_1, D_1)} \left\{ \alpha \ln \ln \frac{e/\varepsilon}{[3(1-D_1)]^k} \right\}^2,$$

$$\ln \frac{h_1}{r_*} = \left(\frac{\alpha}{s} - 1 \right) \ln \ln \frac{e}{\varepsilon} + \frac{1}{s} \ln \frac{E_* c_{\alpha s}}{E_0}.$$

Заметим, что вероятность $1 - D_1$ согласно соотношению (3.5.5) при $a = a_1 = a(h_1)$ может быть сделана сколь угодно малой увеличением параметра $n_0 = \alpha n_1$, пропорционального среднему времени наблюдения особи m -стаи за себе подобными.

3.5.4. Коллективный поиск и обнаружение пятен пищи. Будем считать, что m -стая как единое целое перемещается в α -мерном пространстве ($\alpha = 1, 2, 3$) в поиске пищи. Пища агрегирована в пятна шаровидной формы с радиусом r_{Π} и минимальными расстояниями между центрами агрегаций, равными l . Другими словами, будем считать, что центры пятен (агрегаций) находятся в узлах α -мерной l -решетки $R_{\alpha, l}$. В п. П.3.7 рассмотрена более общая модель случайного распределения агрегаций, эквивалентная указанной «в среднем».

Определим плотности пищевых частиц ρ и ρ_{Π} в α -мерной области ограниченного объема V и внутри пищевой агрегации соответственно:

$$\rho = V/N = n/l^{\alpha} \text{ и } \rho_{\Pi} = n/r_{\Pi}^{\alpha},$$

где N — общее число пищевых частиц в объеме V , а n — среднее их число в агрегации. Отсюда

$$r_{\Pi} = (\rho/\rho_{\Pi})^{1/\alpha} l. \quad (3.5.22)$$

Коллективное обнаружение особями m -стаи внешних агрегаций пищи «увеличивает» радиус r_{Π} агрегации до радиуса r_m их уверенного обнаружения:

$$r_m = r_{\Pi} + r(m), \quad (3.5.23)$$

где $r(m) = r_0(c_3 - c_4/\sqrt{m})$ и константы c_3 и c_4 определяются соотношениями (3.5.17).

Двигаясь со скоростью ω каждая особь m -стаи несет энергетические потери на единице пути, эквивалентные в среднем потерям $z = z(\omega)$ пищевых частиц.

Возможны два принципиально различных режима поиска пищи стаей. Первый, при $l \leq r_m$, наиболее эффективный «зрячий облов», когда агрегации все время находятся в поле обнаружения m -стаи и она их последовательно выедает. Второй, при $l > r_m$, менее эффективный «слепой рыск», когда m -стая при своем движении случайно «натывается» на зону обнаружения, окружающую агрегацию пищи радиусом r_m . Этот режим наиболее типичен, так как m -стаи, выедая агрегации пищи, постепенно «разрезают» медленно восстанавливаемые пищевые скопления. Для обоих этих случаев основной является формула среднего потенциального удельного «рациона» R особи m -стаи, т. е. количество пищевых частиц, приходящееся в среднем одной особи m -стаи в единицу времени [121, 111],

$$R = (\rho y^{\alpha-1} / m - z) \omega, \quad (3.5.24)$$

где $y = \min(l, r_m)$, т. е. $y = l$ при $l \leq r_m$ (в случае зрячего облова) и $y = r_m$ при $l > r_m$ (в случае слепого рыска). Вывод формулы (3.5.24) приводится в п. П.3.7.

Пусть фиксированы параметры плотности ρ и ρ_{Π} , все параметры, кроме параметра агрегирования l или среднего количества пищевых частиц в агрегации $n = \rho l^{\alpha}$. Тогда при изменении n в пределах $1 \leq n \leq N$ величины l и r_{Π} меняются в пределах

$$(1/\rho)^{1/\alpha} \leq l \leq (N/\rho)^{1/\alpha} \quad \text{и} \quad (1/\rho_{\Pi})^{1/\alpha} \leq r_{\Pi} \leq (N/\rho_{\Pi})^{1/\alpha},$$

при этом $y = \min(l, r_m)$ согласно соотношениям (3.5.22) и (3.5.23) линейно возрастает с ростом l по следующему

закону:

$$y = \begin{cases} l & \text{при } l \leq l_{\text{кр}} \text{ (зрячий облов),} \\ r(m) + (\rho/\rho_{\text{п}})^{1/\alpha} l & \text{при } l > l_{\text{кр}} \text{ (слепой рыск),} \end{cases} \quad (3.5.25)$$

где $l_{\text{кр}} = r(m) / [1 - (\rho - \rho_{\text{п}})^{1/\alpha}]$.

Соотношения (3.5.24) и (3.5.25) показывают, что величина R при фиксированных плотностях пищевых частиц монотонно возрастает с ростом l в обоих режимах поиска, но более интенсивно при первом, так как $\rho/\rho_{\text{п}} < 1$. В плоском случае ($\alpha=2$) возрастание идет по линейному закону, а в объемном ($\alpha=3$) — по квадратичному.

Зафиксируем теперь параметр агрегированности l и найдем оптимальное значение $m = m_{\text{opt}}^I$, приводящее к максимуму рациона $R_m = R_{m_{\text{opt}}^I}$, рассматриваемого как функция m .

Согласно соотношениям (П.3.72) и (П.3.74) можно определить абсолютное значение $R_{m_{\text{opt}}^{\text{II}}}$, а также относительные потери в рационе особи в неоптимальной по численности m -стае при малых значениях $z \ll 1$

$$\eta = 1 - \frac{R_m}{R_{m_{\text{opt}}^{\text{II}}}} \approx 1 - \exp\left[-(\alpha + 1) k \left(\frac{2}{\alpha + 1}, x\right)\right], \quad (3.5.26)$$

где $x = A_1 / \sqrt{m}$ и

$$A_1 = c_4 / [(r_{\text{п}}/r_0) + c_3], \quad (3.5.27)$$

при этом согласно соотношению (П.3.73)

$$m_{\text{opt}}^{\text{II}} = \left\{ \frac{(\alpha + 1) c_4}{2 [(r_{\text{п}}/r_0) + c_3]} \right\}^2. \quad (3.5.28)$$

Далее можно искать максимум рациона $R_{m_{\text{opt}}^{\text{II}}} = R_{m_{\text{opt}}^{\text{II}}}(\omega)$, рассматриваемого как функция скорости ω движения m -стаи, если вести зависимость энергетических потерь особи от скорости ее движения ω :

$$z = z(\omega) = E_0 + E_1 \omega^\beta. \quad (3.5.29)$$

Неотрицательные коэффициенты E_0 , E_1 и β , из которых первый отражает потери при покое, определяются методом наименьших квадратов по соответствующим экспе-

риментальным данным. Согласно соотношениям (П.3.77), (П.3.78) и (П.3.79) можно найти абсолютные значения максимума $R_{m_{\text{opt}}^{\text{II}}}(\omega_{\text{opt}}) = \max_{\omega} R_{m_{\text{opt}}^{\text{II}}}(\omega)$, а также относитель-

ные потери в рационе особи в оптимальный $m_{\text{opt}}^{\text{II}}$ -стае, движущейся с неоптимальной скоростью $\omega \neq \omega_{\text{opt}}$,

$$\eta_1 = 1 - \frac{R_{m_{\text{opt}}^{\text{II}}}(\omega)}{R_{m_{\text{opt}}^{\text{II}}}(\omega_{\text{opt}})} = 1 - \exp \left[-\frac{1+\beta}{\beta} k \left(\frac{1}{1+\beta}, x \right) \right], \quad (3.5.30)$$

где $x = A_2 \omega^{1/\beta}$,

$$A_2 = \frac{E_1}{B - E_0}; \quad B = \rho \left(\frac{r_0 c_3}{A_1} \right)^{-(\alpha+1)} \left(\frac{2}{\alpha+1} \right) \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right)^{\alpha-1} A_1^{-2}, \quad (3.5.31)$$

при этом согласно соотношению (П.3.79)

$$\omega_{\text{opt}} = (1 + \beta)^{-1/\beta} A_2^{-1/\beta}, \quad (3.5.32)$$

где A_2 определяется соотношением (3.5.31).

Численный анализ проигрышей в рационе особей m -стаи от неоптимальной их численности в стае и неоптимальной скорости движения ω может быть проведен на основе соотношений (3.5.26) и (3.5.30) и по графикам рис. 3.4. Однако здесь мы не будем проводить такого анализа из-за большого числа неопределенных коэффициентов, ожидая их будущего экспериментального определения. Аналогичные соображения относятся и к численному анализу выражения (3.5.32) для оптимальной скорости ω_{opt} $m_{\text{opt}}^{\text{II}}$ -стаи. Ограничимся качественным анализом важнейшего соотношения (3.5.28) для оптимальной численности $m_{\text{opt}}^{\text{II}}$ -стаи. Согласно соотношениям (3.5.9) и (3.5.17) коэффициент c_3 порядка единицы, а коэффициент $c_4 \approx 0(\ln(r_0/r_1))$ пропорционален логарифму отношения расстояний неуверенного r_0 и уверенного $r_1 < r_0$ различения сигналов, соответствующих интервалу (E_0, E_1) интенсивности сигналов $E_0 = E(r_0) < E_1 = E(r_1)$, различаемых особью. Коллективное обнаружение агрегаций пищи m -стаей не может привести к расстоянию уверенного обнаружения сигналов m -стаей $r_m > r_0$, но

может приблизиться к нему $r_m \sim r_0$. Если интервал (E_0, E_1) мал, т. е. $r_1 \sim r_0$, то коллективное обнаружение сигналов m -стаей ничего не дает по сравнению с индивидуальным обнаружением сигнала отдельной особью. Это все учитывается соотношением (3.5.28), в котором при $r_1 \rightarrow r_0$ имеем $c_4 \rightarrow 0$ и $m_{\text{opt}}^{\text{II}} \rightarrow 1$, что указывает на оптимальность нестайного поведения особей, имеющих узкий интервал (E_0, E_1) обнаружения сигналов от агрегаций пищи. Аналогичный эффект имеет место и при больших значениях отношения $r_{\text{II}}/r_0 \rightarrow \infty$, указывающих на существенно большие размеры r_{II} агрегаций пищи по сравнению с расстояниями r_0 , на которых они могут быть обнаружены m -стаей. Это также согласуется с тем, что такая ситуация эквивалентна «слепому натеканию» отдельных особей на пищевые агрегаты, чему практически не помогает такое «натекание» m -стаи малого (и потому неучитываемого) размера.

Рассмотрим теперь случай слепого рыска, когда размеры m -стаи соизмеримы с размерами r_m агрегаций пищи и расстояниями l между ними. Пусть оптимизированы численность m -стаи ($m = m_{\text{opt}}^{\text{II}}$) и скорость ее движения ($\omega = \omega_{\text{opt}}$) и фиксировано расстояние $h = \text{const}$ между особями m -стаи. Возможен ли такой оптимальный выбор формы m -стаи, который привел бы к переходу от менее эффективного слепого рыска к более эффективному зрячему отлову?

Для выяснения этого вопроса будем «сплюснутость» или «вытянутость» m -стаи схематически характеризовать формой стаи в виде α -мерного параллелепипеда ($\alpha = 2$ — прямоугольник, $\alpha = 3$ — параллелепипед) с высотой H и основанием площади $d^{\alpha-1}$, соответствующим фронту движения m -стаи. Если особи m -стаи располагаются в узлах h -решетки $R_{\alpha, h}$, то объем V_m , занимаемый m -стаей, имеет вид

$$Hd^{\alpha-1} = h^{\alpha} m_{\text{opt}}^{\text{II}} = V_m. \quad (3.5.33)$$

В рассматриваемом случае параметры r_m и l соотношения (3.5.24) следует заменить параметрами

$$\tilde{r}_m = r_m + d \text{ и } \tilde{l} = l - H. \quad (3.5.34)$$

Если без учета размеров m -стаи имеет место зрячий отлов при $l \leq r_m$ или $l - r_m \leq 0$, то учет ее размеров не существен. Однако если имеет место слепой рыск при

$l > r_m$ или $l - r_m > 0$, то ситуация меняется. Условия зрячего отлова для новых параметров \tilde{r}_m и \tilde{l} имеют вид

$$\tilde{l} = l - H \leq \tilde{r} = r_m + d \text{ или } 0 < l - r_m \leq d + H.$$

Поэтому переход от слепого рыска к зрячему отлову возможен, если

$$d + H \geq l - r_m \quad (3.5.35)$$

при выполнении условия (3.5.33). Очевидно, что такая возможность возрастает с ростом значения $m_{\text{opt}}^{\text{II}}$. Чтобы найти минимальное значение $m_{\text{opt}}^{\text{II}} = m_{\text{opt min}}^{\text{II}}$, при котором выполняется условие (3.5.35) нужно решить одну из эквивалентных экстремальных задач:

$$\max\{d + H\} \text{ при } Hd^{\alpha-1} = V_m = \text{const}$$

или

$$\max Hd^{\alpha-1} \text{ при } d + H = C \geq l - r_m.$$

Решение последней задачи в приложении 3 приводит согласно соотношению (П.3.87) к выражению

$$m_{\text{opt min}}^{\text{II}} = \frac{1}{\alpha-1} \left[(l - r_m) / \frac{\alpha}{\alpha-1} h \right]^\alpha. \quad (3.5.36)$$

Из соотношения (3.5.36) следует, что чем дальше на ходится стая от условий зрячего облова (чем больше $l - r_m$) и чем она плотнее (чем меньше h), тем большим должно быть критическое минимальное значение $m_{\text{opt min}}^{\text{II}}$, начиная с которого $m_{\text{opt}}^{\text{II}} \geq m_{\text{opt min}}^{\text{II}}$ оптимальная численность m -стай может при оптимальной форме, определяемой H_{opt} и d_{opt} , привести к переходу от слепого рыска к зрячему отлову. Согласно соотношению (П.3.87)

$$H_{\text{opt}} = \frac{1}{\alpha} (l - r_m); \quad d_{\text{opt}} = \frac{\alpha-1}{\alpha} (l - r_m). \quad (3.5.37)$$

3.5.5. Объяснение эффекта неравномерности распределения плотности летучих рыб [111]. В январе 1974 г. во время 17-го рейса научно-исследовательского судна «Академик Курчатов», в котором автор принимал участие, велись стандартные ихтиологические работы по количественному учету вспугнутых судном стай летучих рыб. Визуально определялось количество рыб в стае, а также временной интервал между их вылетами (последний с учетом скорости судна переводился в расстоя-

ние между стаями). В результате статистической обработки часовых интервалов, соответствующих в среднем 30 км пути судна (средняя скорость судна 30 км/ч), получались средние числа m рыб в стаях и средние расстояния λ (км) между стаями. Такие исследования проводились на разрезе вдоль экватора по ходу движения судна от берегов Ю. Америки на запад, и вычислялась средняя плотность ρ_p (км⁻²) численности рыб на 1 км², так как летучие рыбы обитают в основном в приповерхностном слое. Все средние вычислялись для каждого дня пути. Результаты приведены на рис. 3.6, где величина ρ вычисляется по величинам m и λ по очевидной формуле

$$\rho_p = m/\lambda^2. \quad (3.5.38)$$

Из рассмотрения рис. 3.6,а видно, что стая летучих рыб практически встречались только к западу от 120° з. д.

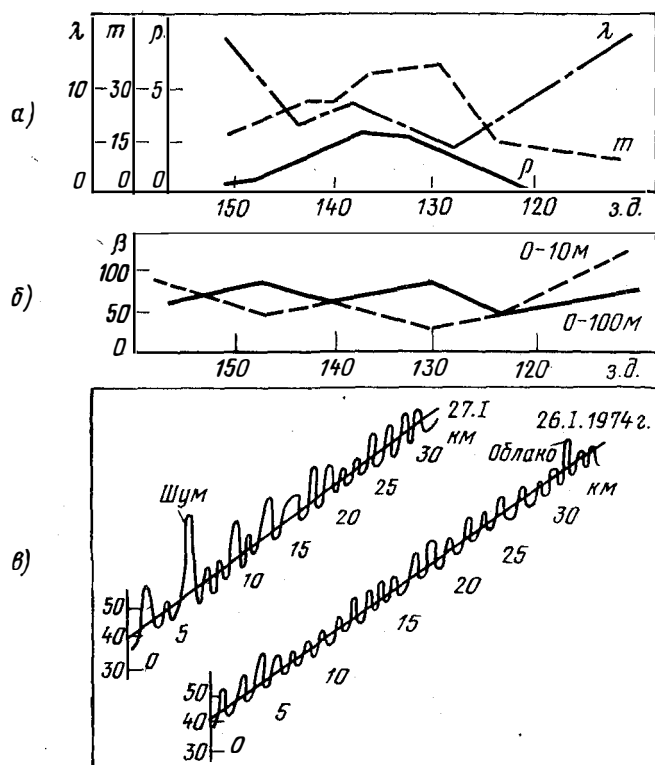


Рис. 3.6

с четким максимумом плотности ρ_p около 130° з. д. Первой гипотезой, объясняющей этот эффект, была, естественно, гипотеза приуроченности плотности ρ_p к плотностям приповерхностного зоопланктона $\rho_z = \beta/b$, которым питаются летучие рыбы, где β — плотность биомассы зоопланктона, $\text{мг}/\text{м}^3$, а b — средняя биомасса одного зоопланктона, мг . Однако из данных, любезно представленных нам А. Г. Тимониным (см. рис. 3.6, б), видно, что между 120° и 155° з. д. биомасса зоопланктона в верхнем 100- и 10-метровом слое практически постоянна ($\beta = 75 \text{ мг}/\text{м}^3$), а повышенные значения β восточнее 120° з. д. расположены в зоне со слишком низкой для летучих рыб температурой ($< 21^\circ\text{C}$). Итак, практическое постоянство плотности ρ_z (м^{-3}) заставляло отвергнуть первую гипотезу.

Второй гипотезой, объясняющей этот эффект, могла быть гипотеза о зависимости плотности ρ_p летучих рыб от агрегированности зоопланктона при постоянстве его плотности $\rho_z = \text{const}$, т. е. при условиях, для которых и была выведена основная формула (3.5.24), интерпретируемая здесь как средний удельный рацион летучей рыбы из m -стаи, питающейся зоопланктоном,

$$R = (\rho_z y^2 / m - z) w. \quad (3.5.39)$$

Пространственное распределение зоопланктона в слое 0—100 м, обловливаемое летучими рыбами, требовало рассмотрение пространственной модели поиска ($\alpha = 3$). Без каких-либо дополнительных гипотез о режиме поиска, из рассмотрения соотношений (3.5.25) можно заключить, что при достаточно больших значениях l величина y , фигурирующая в соотношении (3.5.39), пропорциональна l : $y \sim cl$. Поскольку все величины, входящие в это соотношение, постоянны, кроме m и y , то из него следует теоретическое соотношение

$$m = cl^2, \quad (3.5.40)$$

где c — некоторый постоянный коэффициент, зависящий от постоянных констант R , ρ_z , z и w .

Из определения (3.5.38) и теоретической зависимости (3.5.40) следует теоретическая зависимость плотности ρ_p летучих рыб от агрегированности их пищи — зоопланктонов, определяемой параметром l :

$$\rho_p = c(l/\lambda^2). \quad (3.5.41)$$

Для экспериментальной проверки теоретической зависимости (3.5.41) или эквивалентной ей зависимости (3.5.40) необходимо иметь значения среднего расстояния l между пятнами зоопланктона вдоль исследованного разреза. Однако такого рода исследования не проводились. Поэтому о агрегированности зоопланктона можно судить лишь косвенно по агрегированности его пищи — фитопланктона (водорослей), т. е. продолжая использовать ту же вторую гипотезу.

Пятнистость (агрегированность) фитопланктона в интересующем нас районе измерялась по ходу судна оптическим методом (по поглощению света хлорофиллом). Такого рода непрерывные записи были любезно предоставлены нам В. Н. Пелевиным (см. рис. 3.6, в). Для оценки числа пятен (агрегаций) был выбран порог на уровне 40 условных единиц, расположенный в середине размаха двух кривых примерно часовых записей, полученных 26.1.1974 г. и 27.1.1974 г. Выбросов за порог, интерпретируемых как пятна фитопланктона, за первый день оказалось 23, а за второй — 16. При средней скорости судна 30 км/ч среднее расстояние между пятнами фитопланктона l оказалось 1,3 и 1,9 км, а среднее число летучих рыб в стаях m за эти же дни составляло 12 и 23 соответственно. Для проверки согласования полученных данных с теоретической зависимостью (3.5.40) при неизвестном значении константы c приходится проверять верность соотношения

$$c = m_1/l_1^2 = m_2/l_2^2, \quad (3.5.42)$$

где $(m_1; l_1) = (12; 1,3)$ и $(m_2; l_2) = (23; 1,9)$ — соответствующие значения параметров в первый и второй день. Подставив их в соотношения (3.5.42), получим $c \sim 7,1 \sim \sim 6,7$, что находится в пределах точности рассматриваемых величин.

3.5.6. Коллективная защита от хищника [122]. Экологами давно обнаружено, что внутри m -стаи особь менее доступна хищнику, чем вне ее [123]. Причем для однородных стай без лидеров это связано не с объединенным «силовым» противостоянием хищнику, а со специфическими информационными приемами коллективного рассосредоточения внимания и дезориентации хищника для того, чтобы он не мог совершать направленные броски на отдельные особи (ненаправленные броски приводят к маловероятному успеху и поэтому энергетически не оправданы). Специфика информационной обороны

m-стаи, присущая лишь однородным стаям, состоит в непрерывном движении ее переменной периферийной части со скоростью, достаточной для создания так называемого эффекта «мелькания», при котором хищник не видит отдельную особь. Поэтому информационной обороне *m*-стаи хищник вынужден противопоставить информационное же нападение. Типична стратегия нападения хищника на *m*-стаю, состоящая из серии двухэтапных атак. Информационная атака первого этапа состоит из многократных попыток нарушения целостности *m*-стаи распугивающими действиями, отвлекающими ее особей от постоянной связи между собой, для поддержания целостности *m*-стаи. Этот этап формализуется «зашумлением» хищником каналов связи между особями *m*-стаи. Он является долговременным с малыми энергозатратами хищника в единицу времени. После того как он приводит к распаду *m*-стаи, начинается «силовая» атака — второй этап. Силовая атака этапа состоит в преследовании хищником отдельных особей, отбившихся от *m*-стаи, и поимке части из них. Этот этап является кратковременным с большими энергозатратами хищника в единицу времени.

После этого оставшиеся непойманными $m' < m$ особей снова образуют целостную m' -стаю и хищник снова продолжает за ней охоту в двухэтапном режиме и т. д.

В соответствии со сказанным рассматривается динамическая информационная модель взаимодействия хищника с *m*-стаей в плотном (неразрезанном) варианте последней (см. п. 3.5.3). В этом случае *m*-стая описывается случайным графом, в котором допустимы связи между любыми его вершинами. Вероятность целостности такой *m*-стаи соответствует вероятности P_{mD} связности соответствующего случайного графа и имеет асимптотическое выражение (П.3.41)

$$P_{mD} \approx 1 - m(1 - D)^{m-1}, \quad (3.5.43)$$

где D — вероятность обнаружения особи себе подобной. Согласно соотношению (П.3.16) она имеет вид

$$D(a) \approx 1 - \exp[-n_0 a^2 I_2(0)/2], \quad (3.5.44)$$

где $a = I_c / \sqrt{\sigma^2 + I_{ш}^2}$ — отношение сигнал-шум; I_c , σ^2 , $I_{ш}^2$ — интенсивности сигнала, внутренних и внешних шумов на сенсорном уровне; $I_2(0)$ — константа, связанная с распределением шумов и сигналов; n_0 — среднее число

наблюдений для принятия решения об отсутствии сигнала. Все рассмотрения ведутся для практически интересного случая слабых сигналов и разного порядка малостей вероятности ложной тревоги F и пропуска сигнала $1-D$.

Пусть τ_i — случайное число дискретных моментов времени i -й информационной атаки хищника, приводящей к i -му распаду первоначальной m -стаи, в результате которого хищник изымает из стаи очередную порцию Δm_i особей. Интервал дискретизации времени Δt примем равным среднему времени, необходимому хищнику на такое изъятие (силовая атака второго этапа).

Зафиксируем число k таких распадов, на которое идет случайное время $\tau = \sum_{i=1}^k \tau_i$. Тогда энергетические потери ξ и приобретения v хищника составят

$$\xi = e_m \tau + e_6 \sum_{i=1}^k \Delta m_i = e_m \tau + (e_6/e_0)v, \quad v = e_0 \sum_{i=1}^k \Delta m_i, \quad (3.5.45)$$

где $e_m = c_m E_m$ — энергетические потери хищника в единицу времени для создания внешних физических шумов интенсивностью E_m^2 в каналах связи между особями m -стаи; c_m — физиологическая константа; $e_6 \gg e_m$ — средняя энергопотеря хищника для поимки одной особи m -стаи. Заметим, что согласно закону Вебера — Фехнера (3.5.2)

$$E_m = E_0 e^{c_5 I_m}, \quad (3.5.46)$$

где $c_5 = [\ln(E_1/E_0)]/I_*$.

Если в различные дискретные моменты времени попытки хищника нарушить целостность m -стаи независимы друг от друга в смысле теории вероятностей, то случайные величины τ_i геометрически распределены и имеют математические ожидания $E\tau_i = (1 - P_{m_i,D})^{-1}$. Здесь вероятность $P_{m_i,D}$ определена соотношением (3.5.43), а вели-

чины m_i имеют вид $m_0 = m$ и $m_i = m - \sum_{j=1}^i \Delta m_j$ ($j = \overline{1, k}$).

При больших значениях m_i , когда $m \gg k \Delta m$,

$$E\tau_i = (1 - P_{m_i,D})^{-1} \approx e^{m_i D - \ln m_i} \approx e^{m_i D}.$$

Рассмотрим случай постоянных изъятий $\Delta m_i = m_* = \text{const}$, тогда $m_i = m - (i - 1)m_*$ и, как легко показать,

$$E\tau = \sum_{i=1}^k E\tau_i = \sum_{i=1}^k e^{m_i D} \approx \gamma e^{mD}, \quad (3.5.47)$$

где

$$\gamma \approx \begin{cases} 1 & \text{при } mD \gg 1 \gg km_*D, \\ 1/(m_*D) & \text{при } km_*D \gg 1 \gg m_*D, \\ k & \text{при } m_*D \gg 1. \end{cases}$$

Охота имеет смысл, если хищнику удастся создать сильные внешние шумы, приводящие к большой интенсивности $I_{\text{ш}}^2 \gg \sigma^2$, т. е. к малым значениям $D = D(a) \ll 1$. В этом случае из соотношения (3.5.44) имеем

$$D = D(a) \approx c_6 I_c^2 / I_{\text{ш}}^2, \quad (3.5.48)$$

где $c_6 = n_0 I_2(0) / 2$.

Используя соотношения (3.5.45) — (3.5.48), получаем для математического ожидания $u = E\xi$ энергетической платы хищника

$$u = c_7 \exp(c_5 I_{\text{ш}} + c_6 m I_c^2 / I_{\text{ш}}^2) + c_8 v \quad (3.5.49)$$

и его рацион $v = e_0 k m_*$, где $c_7 = c_{\text{ш}} E_0 \gamma$ и $c_8 = e_6 / e_0$.

При фиксированном значении рациона v для хищника естественно варьировать величиной $e_{\text{ш}}$ (соответствующей вариациям $I_{\text{ш}}$), так, чтобы обратить в минимум энергетическую плату u за него. Приравнявая нулю производную показателя экспоненты выражения (3.5.49), получаем

$$\begin{aligned} \min_{I_{\text{ш}}} u &= c_7 \exp(3c_5 I_{\text{ш}}^0 / 2) + c_8 v = \\ &= c_7 \exp(3 \sqrt[3]{2c_5 c_6^2} \sqrt[3]{m I_c^2} / 2) + c_8 v, \end{aligned} \quad (3.5.50)$$

достигаемый при оптимальном значении

$$I_{\text{ш}}^0 = \sqrt[3]{2c_5 / c_6} \sqrt[3]{m I_c^2}. \quad (3.5.51)$$

Для m -стаи выгодно, варьируя своими параметрами m и E_c (соответствующего вариации I_c), максимизировать минимальную плату ($\min u$) хищника за его фиксированный рацион ($v = \text{const}$). При этом m -стае естествен-

но фиксировать суммарную интенсивность своих энергетических затрат

$$mE^2_c = E^2 = \text{const} \quad (3.5.52)$$

на внутривидовой сигнальный обмен, поддерживающий ее целостность.

Используя выражение (3.5.46) для связи между E_c и I_c , из соотношения (3.5.52) получаем

$$m = (E/E_0)^2 e^{-2c_5 I_c}$$

Подставив полученное выражение в экспоненту соотношения (3.5.50), легко найти максимум $\max_{I_c} (\min_{I_{ш}} u)$. Соответствующий максимум имеет вид

$$\max_{I_c} \min_{I_{ш}} u = c_7 \exp(3 \sqrt[3]{c_5 (E/2E_0 e)^2}) + c_8 v, \quad (3.5.53)$$

достигаемый при оптимальном значении $I_c = I_c^0 = 1/c_5$, при этом

$$m = m_{\text{opt}}^{\text{III}} = (E/(E_0 e))^2. \quad (3.5.54)$$

Заметим, что минимаксное значение платы u за рацион v и оптимальная численность $m_{\text{opt}}^{\text{III}}$ -стаи не зависят от коэффициента c_5 , равного нулю при $E_0 = E_1$, а $I_c = I_c^0$ только от него и зависит и стремится к бесконечности, когда $E_0 \rightarrow E_1$.

3.5.7. Адаптивная роль численности m -стаи. Бернуллиевские m -стаи и эргодичность. Вычисленные нами оптимальные значения $m_{\text{opt}}^{\text{I}}$, $m_{\text{opt}}^{\text{II}}$ и $m_{\text{opt}}^{\text{III}}$ относятся к оптимальным размерам m -стаи для поддержания их целостности, а также для взаимодействия с пищей и хищниками. Кроме того, эти оптимальные значения зависят от физиологических и экологических параметров, изменяющихся в весьма широких пределах. При этом целевые функционалы, которым они доставляли экстремальные значения, также изменяются в широких пределах. Это указывает на важное адаптивное значение оптимальных численностей m_{opt} m -стаи как откликов на физиологию особей, тактические запросы популяции и меняющуюся внешнюю обстановку среды. Выражения для m_{opt} могут объяснить видимую регулярность численностей однородных m -стаи, например косяков рыб, периодически генерируемых большими скоплениями рыб. Информационное

наведение оптимального числа пчел из улья на медообразующие объекты пчелами-разведчиками весьма поучительно. Например, косяки рыб, питаюсь в новом для них районе, объединяясь или распадаясь, постепенно принимают оптимальную численность m_{opt}^{II} , соответствующую агрегированности пищи. Возвращаясь в скопление рыб, они, как это замечено, расформируются. Однако вполне возможно, что они индуцируют для вновь формирующихся из скопления косяков оптимальную численность m_{opt} , которая была у пришедших косяков. Замечено ежесуточное разбиение скоплений животных на одно-возрастные m -стаи разной численности в разные дни [124].

В этой главе, касающейся микроуровня популяций исследовались лишь однородные m -стаи с управлением без лидеров, основанным на подражании. Это означает, что каждая особь m -стаи в данный момент может проявить инициативу в определенном действии и остальные особи могут последовать ее примеру, повинувшись стайному чувству. Однако такая инициатива не закреплена за одними и теми же особями, а случайным образом может быть связана с любой из них. Поэтому особи таких m -стай называются в экологии *эквипотенциальными*. Это понятие может иметь следующую вероятностную формализацию.

Пусть особи m -стаи в каждый дискретный момент времени t могут находиться в одном и только одном из a состояний $\alpha = 1, 2, \dots, a$ с вероятностями p_α , $\sum_{\alpha=1}^a p_\alpha = 1$.

Если при этом пребывания их в определенных состояниях в различные моменты времени являются независимыми событиями, то состоящая из них m -стая называется *бернуллиевской*. Бернуллиевская m -стая обладает важным свойством *эргодичностью*. В самом деле, рассмотрим T дискретных моментов времени, тогда из бернуллиевости m -стаи следует, что математическое ожидание числа τ_α моментов времени, в которые ее особь находится в α -м состоянии $E\tau_\alpha = Tp_\alpha$. Зафиксируем некоторый момент дискретного времени, тогда математическое ожидание числа μ_α особей m -стаи, находящихся в α -м состоянии, имеет вид $E\mu_\alpha = mp_\alpha$. Отсюда имеем

тождества, характеризующие эргодичность бернуллиевской m -стаи,

$$\frac{E t_\alpha}{T} \equiv \frac{E \mu_\alpha}{m} \equiv p_\alpha \quad (\alpha = \overline{1, a}).$$

Помимо теоретического использования эти тождества могут иметь и практическое использование. Так, пусть имеются основания считать m -стаю или любую другую группировку особей бернуллиевской и сделан единовременный отлов m таких однородных особей, из которых m_α

зафиксированы в α -м состоянии $\left(\sum_{\alpha=1}^a m_\alpha = m \right)$. Тогда с точностями, с которыми можно принять $m_\alpha \sim E \mu_\alpha$, можно утверждать, что доля времени t_α/T , в которой одна особь этой группы пребывает в α -м состоянии удовлетворяет приближенному равенству $t_\alpha/T \sim m_\alpha/m$.

3.6. МОНИТОРИНГ

Технический прогресс, приведший к экологическому кризису, сам же представляет средства к его преодолению. Но одни технические средства без теории их использования малоэффективны. Поэтому первейшим шагом теории рационального природопользования является оценка потенциальной эффективности контроля и управления биосферой с учетом принципиальной ограниченности располагаемых человечеством технических средств. Контроль за состоянием окружающей среды (и, в частности, биосферы) в современной научной литературе получил специальное название *мониторинга*. Если придать этому понятию более широкий смысл не только контроля, но и управления внешней средой, то фактически оно совпадает с понятием инженерной экологии, т. е. теории рационального природопользования. В этом параграфе мы в основном ограничимся рассмотрением лишь сравнительно узкой системотехнической части мониторинга — оценки потенциальной эффективности технических мониторинговых систем контроля за состоянием окружающей среды.

3.6.1. Теория рационального природопользования. Поскольку сама биосфера и мониторинговые системы (МС) являются сложными био- и техсистемами соответ-

ственно, то теория рационального природопользования должна основываться на теории сложных систем (системологии). При этом необходим совместный учет всех трех аспектов проблемы: экологического, технического и социального, включающего экономические и правовые вопросы [125]. Системология для каждого из перечисленных аспектов составляет теоретическую основу для развития системной экологии (см. § 3.1—3.5), системотехники [4] и экономико-юрдического комплекса наук. При этом системотехника является лишь средством для обеспечения экономико-эстетических целей рационального природопользования с учетом экологических ограничений.

Общая задача в терминах теории потенциальной эффективности ставится так [126]. Рассматривается взаимодействие человечества (система $A = (|A|, \bar{A})$) со средой его обитания (система $B = (|B|, \bar{B})$), имеющих свои цели \bar{A} и \bar{B} , структуры $|A|$ и $|B|$ и поведения \bar{A} и \bar{B} . Это взаимодействие описывается так называемым (u, v)-обменом, где u и v — некоторые абстрактные (в частности, векторные) ресурсы материального и информационного характера. Системы A и B обмениваются друг с другом ресурсами u и v добровольно, принудительно или произвольно. Требуется найти оптимальный (u, v)-обмен, обращающий в экстремум целевые функционалы, индуцируемые экономико-эстетическими целями при экологических ограничениях.

В настоящее время системная экология переживает мощный подъем в связи с внедрением в ее практику методов машинного эксперимента в виде имитационного моделирования. Экономический аспект теории оптимального природопользования пока идет по пути трансформации теорий традиционных экономических объектов (промышленность, сельское хозяйство, транспорт и т. д.) в теории новых объектов типа лесоводства, рыбоводства, промыслового хозяйства и др. Системотехнические аспекты теории оптимального природопользования не следуют ассоциировать лишь с прогрессом технологии безотходного производства, основанного на замкнутых производственных циклах. Такого рода задачи решаются традиционными физико-техническими методами. Собственно системотехнический вклад связан с разработкой теории глобальных МС контроля биосферы и управления ею.

Первейшей задачей такой теории являются оценки потенциальной эффективности МС, поскольку без них некоторые требования к эффективности МС могут оказаться просто недостижимыми при сколь угодно высоком уровне техники [4].

Известные законы естествознания позволяют предвидеть место и время появления событий, зависящих от протекания лишь простейших физико-химических процессов, например затмений. Сколь-нибудь эффективный прогноз более сложных явлений, например погоды, находится на грани современных возможностей. Эффективное прогнозирование состояния биосферы остается проблемой, сроки решения которой трудно предвидеть. В настоящее время доступны лишь более или менее эффективный контроль состояния биосферы в расчете на возможности упреждения не слишком быстрых губительных процессов. Этим целям служит система глобального мониторинга.

Проектирование МС, как и любой сложной технической системы, должно вестись не снизу вверх, а сверху вниз. Разработка МС состоит из этапов: предпроектирования, включающего составление ТЗ, проектирования, включающего имитационное моделирование небольшого числа конкурирующих вариантов проекта, и, наконец, технической реализации наилучшего проекта.

Чрезвычайно большая стоимость МС, составляющая значительную долю национальных бюджетов высокоразвитых стран, требует особо тщательной проработки первого стратегического этапа создания МС на стадии ТЗ и предпроекта.

Теория потенциальной эффективности сложных систем позволяет сравнительно небольшой группе исследователей осуществить этот этап. Поэтому он требует гораздо меньше затрат средств и времени, чем разработка окончательного этапа проектирования, осуществляемого большими коллективами инженеров и программистов.

Таким образом, МС выступает как технический локализатор места и времени возникновения непрогнозируемых событий глобальных масштабов, в частности аномалий.

3.6.2. Мониторинговые системы обнаружения аномалий на поверхности Земли. В настоящее время контроль за состоянием внешней среды приобретает глобальные масштабы [127]. Этому способствует развитие спутниковой и вычислительной техники, на базе которых создаются региональные и глобальные МС обнаружения аномалий на поверхности Земли. Аномалиями называют любые в определенном смысле ненормальные изменения биоценозов или среды их обитания. Различают неподвижные и подвижные аномалии. К первым условно относят массивы и акватории, подверженные загрязнению, пожарам, засухам, потравам и т. д., ко второй — ураганы, вихри, цунами и т. д. Аномалии имеют как естественное, так и искусственное (антропогенное) происхождение. МС разделяются на универсальные и специализи-

рованные, например специально предназначенные для контроля за океаническими аномалиями или специализированные МС раннего обнаружения подвижных аномалий. Повышенная эффективность требуется именно для последнего вида МС. Предварительный расчет таких МС сталкивается с задачами, выходящими за рамки стандартных статистических задач выбора между гипотезами и распознавания образов, из-за необходимости учета ограниченности технических средств, отпускаемых для создания любой реальной МС, и практической неограниченности предъявляемых требований к ее эффективности. Место и время появления аномалий неизвестно. Это требует постоянного контроля за обширными территориями, «фоновые» характеристики которых, как правило, весьма близки к аномальным. Это приводит к нежелательному накоплению в памяти МС ложных сигналов о мнимых аномалиях. Ужестчение требований к занесению в память сигналов с поверхности Земли для разгрузки памяти МС от фоновых сигналов, близких к аномальным, приводит к другому нежелательному эффекту — увеличению возможности пропуска аномального сигнала. В этой противоречивой ситуации основными факторами, ограничивающими эффективность МС, оказывается объем ее памяти и количество используемых ею искусственных спутников земли (ИСЗ). Вследствие этого процедура обнаружения аномалий распадается на два этапа. На первом память МС заполняется координатами «подозрительных» элементов региона, на втором, накопив достаточно данных о них, выносится окончательное решение о их фоновом или аномальном характере. Описанная ситуация в точности соответствует той, которая привела автора к построению модели различения информационных потоков [43, доп. II].

3.6.3. Функциональная схема МС. Функциональная схема МС соответствует описанной в мониторинговой терминологии функциональной схеме системы различения информационных потоков [43, рис. II.1, с. 245]. В этой терминологии функции подсистем МС, изображенные на рис. 3.7, таковы.

Фиксатор. Состоит из сканера (Ф1) и памяти (Ф2). Предназначен для сканирования дискретных элементов региона с засылкой координат «подозрительных» элементов в свободные ячейки памяти. Подозрительными считаются элементы, вообще говоря, многоканальная

характеристика которых по некоторому первичному критерию может рассматриваться как «сигнальная» (аномальная).

Решатель. Состоит из анализатора (P1) и формирователя (P2) следов аномалии (если она подвижная). Предназначен для окончательного вынесения решения по вторичному критерию о сигнальном или шумовом (фоновом) характере подозрительных элементов региона. Эти решения выносятся по данным, накапливаемым в ячейках памяти с соответствующими координатами

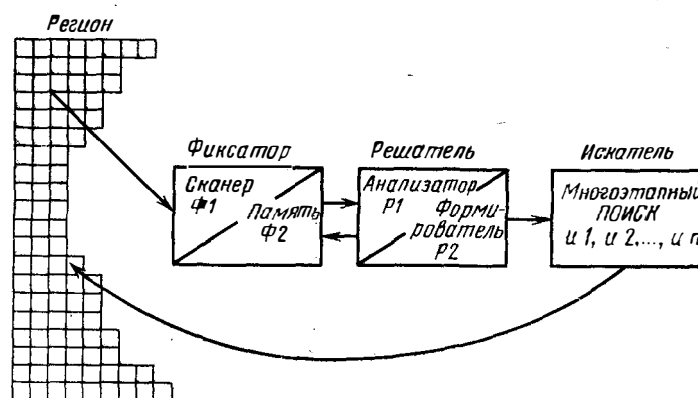


Рис. 3.7

подозрительных элементов, накопление ведется в темпе сканирования теми же средствами или в более быстром темпе другими средствами. После вынесения решения о шумовом характере анализируемого элемента соответствующая ячейка очищается и может воспринимать новые данные (см. обратную стрелку на рис. 3.7). Если выносятся решение о сигнальном характере анализируемого элемента, то соответствующая ячейка памяти также очищается и одновременно дается сигнал мобильной поисковой аппаратуре МС для более точной локализации места возникновения аномалии.

И с к а т е л ь. Состоит из n устройств, вообще говоря, многоэтапного поиска (I_1, I_2, \dots, I_n). Их функции состоят в последовательном уточнении координат аномалии.

Далее оптимизируются лишь первые две подсистемы, а не МС в целом. Поэтому полученную модель МС следует считать подоптимальной.

3.6.4. Модель контроля [128]. Неподвижные или подвижные со скоростью w аномалии необходимо обнаруживать МС на маскирующем фоне поверхности Земли в заданном регионе площадью S по k -мерным характеристикам $y = (y_1, \dots, y_k)$, имеющим различные функции распределения $F_0(y)$ для фона и $F_1(y)$ для аномалии. МС должна располагать m движущимися со скоростью w_* однотипными ИСЗ, равномерно расположенными на циклической орбите длиной L . В этом случае МС возвращается к одному и тому же месту региона через интервал времени h , который должен удовлетворять соотношению

$$h = L / (m w_*) \ll \Delta w, \quad (3.6.1)$$

где Δ — первичная линейная разрешающая способность МС. Качество МС определяется также вероятностями ложной тревоги F и правильного обнаружения D , средним временем обнаружения аномалии th , не включающим время уточняющего поиска, и высоковероятным временем Th безотказного функционирования МС.

Качество МС обеспечивается кинематическим параметром h , энергетическим параметром E , определяющим отношение сигнал/шум при обнаружении аномалии по характеристике y , объемом памяти, т. е. количеством M ее ячеек, и технологическим параметром надежности R , т. е. вероятности безотказного функционирования МС за время Th .

Число элементов разрешения региона

$$N = S / \Delta^2, \quad (3.6.2)$$

потребность в высокой точности обнаружения практически всегда приводит к тому, что $N \gg M$. Вследствие этого процедура обнаружения распадается, как уже отмечалось, на два этапа [43]. На первом производится заполнение ячеек памяти координатами «подозрительных» элементов региона, характеристики y которых попадают в критическую область $\mathcal{E}_{кр}$ с вероятностями

$$P_r = P_r(\mathcal{E}_{кр}) = \int_{\mathcal{E}_{кр}} dF_r(y) \quad (r = 0, 1). \quad (3.6.3)$$

На втором этапе выносится окончательное решение о фоновом или аномальном характере элемента региона по

накопленным в соответствующих ячейках памяти через интервал времени h выборочным значениям y среднего объема

$$n_r = f_r(F, D, E) \quad (r=0, 1), \quad (3.6.4)$$

где вид функции f_r зависит от специфики статистической процедуры обнаружения. После вынесения решений соответствующие ячейки памяти очищаются.

Обозначим через $\mathcal{E}^i_{кр}$ и E^i значения $\mathcal{E}_{кр}$ и E , приуроченные к i -му элементу региона. Им соответствуют значения p^i_r и n^i_r ($i=1, \bar{N}$), которые удовлетворяют соотношениям [42, (II.38) с. 218]

$$N\bar{p}_r \bar{n}_0 = \Lambda = M - \sqrt{M} \Phi^{-1} [1 - (1-R)^{1/T}], \quad (3.6.5)$$

$$t = g(\mathcal{E}_{кр}, \mathcal{P}) = (\bar{1/p}_1)^{\mathcal{P}} + \bar{n}_1^{\mathcal{P}}, \quad (3.6.6)$$

где Λ — среднее число заполненных ячеек памяти; $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_i)$ — априорные вероятности появления аномалии в i -м элементе региона; $\mathcal{E}_{кр} = \{\mathcal{E}^i_{кр}\}$; Φ — функция (0, 1)-нормального распределения, здесь и далее используются введенные ранее обозначения

$$\bar{x}^{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^N \mathcal{P}_i x_i \quad \text{и} \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Соотношения (3.6.1)–(3.6.6) основаны на теории различения информационных потоков [42, 43, 3]. Они связывают в общем случае параметры эффективности МС (t, T, Δ, F, D, R) с параметрами среды ($S, F_r(y), \omega$) и параметрами технических средств (ω^*, M, E, m), а также нашими априорными знаниями (определяются распределением \mathcal{P}). Если рассмотреть одномерный случай — высокого уровня фоновых шумов ($F^i_0(y) \sim F^i_1(y)$) жест $\mathcal{E}^i_{кр} = \{y^i : y^i > X^i\}$, то $p^i_r = p^i_r(X^i)$ и $t = g(X, \mathcal{P})$, где $X = \{X^i\}$. При этом для практически важного случая — высокого уровня фоновых шумов ($F^i_0(y) \approx F^i_1(y)$) величина $t = g(X, \mathcal{P})$ оптимальным выбором порогов $X = X_0(\mathcal{P})$ при фиксации $\Lambda \approx M$ обращается в минимум $t(\mathcal{P}) = g[X_0(\mathcal{P}), \mathcal{P}]$, равный [4, (7.91) с. 181], (п. П.3.9)

$$t(\mathcal{P}) = N\bar{n}_0^{\mathcal{P}} (\xi + \theta)/M, \quad (3.6.7)$$

где $\theta = M\bar{n}_1^{\mathcal{P}} / (N\bar{n}_0^{\mathcal{P}})$ — параметр, равный $\theta = M/N$ при

классическом обнаружении и $\theta = M \ln F^{-1} / [N \ln(1-D)^{-1}]$ при последовательном обнаружении; $\xi = N(\sqrt{\Pi})^2$, причем $\Pi_i = \mathcal{P}_i n_0^i / \bar{n}_0^{\mathcal{P}}$ ($N^{-1} \leq \xi \leq 1$). Можно показать, что если вместо истинного распределения \mathcal{P} мы предполагаем наличие распределения $Q \neq \mathcal{P}$ и проводим для него оптимальный выбор порогов $X_0 = X_0(Q) \neq X_0(\mathcal{P})$, то вместо минимального значения $t = t(\mathcal{P})$ получится значение $t = t(\mathcal{P}, Q)$, равное [128], (п. П.3.9)

$$t(\mathcal{P}, Q) = t(\mathcal{P}) [1 + u/4(1+v)], \quad (3.6.8)$$

где

$$v = \theta/\xi;$$

$$u = \frac{[(V_{\mathcal{P}} + V_Q)/\sqrt{V_{\mathcal{P}}Q}]^{\pi} \cdot [(V_{\mathcal{P}} - V_Q)/\sqrt{V_{\mathcal{P}}Q}]^{\pi} - [(V_{\mathcal{P}} - Q)/\sqrt{V_{\mathcal{P}}Q}]^{\pi}}{[(V_{\mathcal{P}} + V_Q)/\sqrt{V_{\mathcal{P}}Q}]^{\pi} + [(V_{\mathcal{P}} - V_Q)/\sqrt{V_{\mathcal{P}}Q}]^{\pi}}, \quad (3.6.9)$$

причем $\pi_i = \sqrt{\Pi_i / (N \sqrt{\Pi})}$, и если $\mathcal{P}_i, Q_i > 0$, а также $|\mathcal{P}_i - Q_i| / \sqrt{\mathcal{P}_i Q_i} \leq \varepsilon < 4$, то

$$0 \leq u \leq \tilde{u} = \varepsilon^2 [(1 + \varepsilon/4)/(1 - \varepsilon/4)]^2. \quad (3.6.9')$$

Найдем из соотношения (3.6.8) относительный проигрыш в среднем времени обнаружения аномалии из-за неточного знания априорного распределения места ее появления $\eta \triangleq [t(\mathcal{P}, Q) - t(\mathcal{P})] / t(\mathcal{P}, Q)$. Имеем

$$\eta = [1 + 4(1+v)/u]^{-1}. \quad (3.6.10)$$

Соотношения (3.6.10) и (3.6.7) позволяют вычислять относительные и абсолютные проигрыши от неточного знания априорного распределения \mathcal{P} . Заметим, что параметр ξ растет с ростом однородности характеристик региона и априорной неопределенности возникновения в нем аномалий от $1/N$ (при $\Pi_{i_0} = 1, \Pi_i = 0$ для $i \neq i_0$) до 1 (при $\Pi_i = 1/N$). Будем называть этот параметр параметром *однородности*. Из формулы (3.6.7) следует, что среднее время обнаружения $t(\mathcal{P})$ растет линейно с ростом параметра однородности ξ и для практически интересного значения $M/N = 10^{-2}$ и классического или последовательного обнаружения с несимметричным заданием величин $F < 1 - \mathcal{L}$ возрастание ξ на один поря-

Док — от 10^{-1} до 1 — приводит к увеличению $t(\mathcal{P})$ тоже на один порядок. Параметр $v = \theta/\xi$ будем называть параметром *неоднородности* (он обратно пропорционален параметру ξ). Параметр $u \geq 0$ определяет расхождение между распределениями \mathcal{P} и Q ($u=0$ при $\mathcal{P}=Q$), поэтому будем называть его параметром *неточности* априорных знаний места возникновения аномалии. Для численных оценок удобно пользоваться вместо выражения (3.6.9) параметра u его верхней оценкой \tilde{u} , завися-

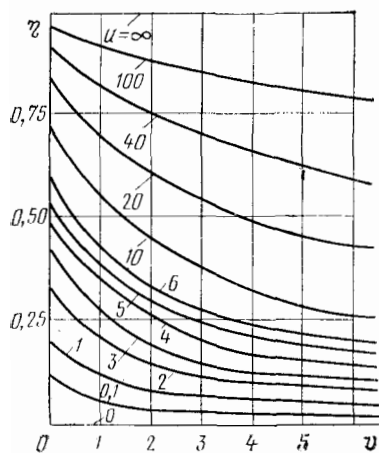


Рис. 3.8

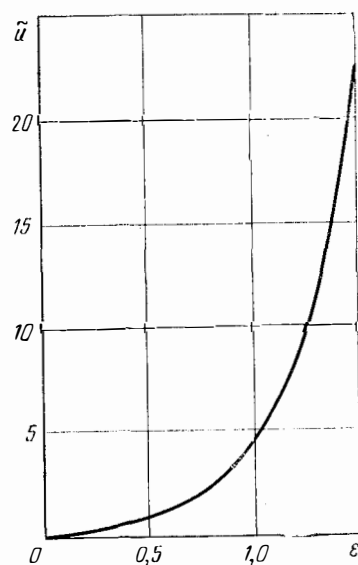


Рис. 3.9

щей лишь от одного параметра ε (см. (3.6.9')). Для анализа полученных соотношений воспользуемся графиками рис. 3.8 и 3.9. Из них, например, следует, что при большом значении параметра неоднородности ($v=4$) для уменьшения относительных потерь η с 50 до 5% (т. е. на один порядок) необходимо такое увеличение точности знания априорного распределения мест возникновения аномалий, которое приводит к уменьшению значения параметра неточности u от 20 до 0,1 соответственно (см. рис. 3.8). Последние значения соответствуют нормированным отклонениям априорных распределений $\varepsilon=1,45$ и $\varepsilon=0,15$ соответственно (см. рис. 3.9), т. е. то-

же примерно на один порядок. Приведенные примеры показывают существенное влияние параметров u и v на относительные потери η от неточности задания априорного распределения \mathcal{P} . Заметим, что величина η вовсе не зависит от масштабного параметра h и слабо зависит от вида статистических процедур различения аномали ($n^i = g_i(\dots)$).

В заключение остановимся на статистической интерпретации параметра u . Будем считать распределение Q гистограммой теоретического распределения \mathcal{P} . Тогда параметр u согласно соотношению (3.6.9) оценивает их близость по форме, весьма близкой к форме критерия χ -квадрат.

3.6.5. Метамодел ь управления [128]. Глобальные биоценозы являются сложными уникальными системами. Как уже упоминалось, экспериментировать над их целостными характеристиками, такими, например, как их устойчивость, невозможно из-за их большой протяженности (уникальность). Вместе с тем эксперименты над их частями не эквивалентны экспериментам над ними в целом (сложность). Единственным видом «псевдоэкспериментирования» над такими системами, как уже упоминалось, является экспериментирование над более или менее адекватными им моделями, т. е. численное экспериментирование над их машинными имитационными моделями. Однако даже такой наиболее дешевый из известных нам видов псевдоэкспериментирования становится все более и более дорогим по мере возрастания сложности моделируемых систем. Это связано со спецификой имитационных моделей, усложняющихся по мере усложнения моделируемой системы. Как следствие этого, возрастает объем работ по построению модели и длительность машинного времени, необходимого для численного экспериментирования над ней.

В частности, и управление сложными уникальными системами, гарантирующее сохранение их устойчивости, должно отрабатываться до своего фактического применения на моделях, по возможности адекватных оригиналу. При этом из-за нестационарности среды и адаптивных изменений биоценозов необходима непрерывная подстройка к ним соответствующих моделей.

Рассмотрим ситуацию управления глобальным биоценозом на временном интервале $[0, Th]$, где он контролируется МС. Назовем доходом при управлении u дей-

ствительную функцию $Q(u)$, определенную на абстрактном множестве $U=\{u\}$, элементы которого и будем называть управлениями. Оптимальным назовем управление $u=u_{\text{opt}}$, для которого $Q(u_{\text{opt}}) \geq Q(u)$ при любых $u \in U$. Пусть управление ведется непрерывно во времени t , т. е. $u=u(t)$. Назовем функцию $q(t) = Q[u_{\text{opt}}(t) - u(t)] > 0$ потерями от неоптимального управления. Тогда суммарные потери от неоптимальности управления на интервале времени $(0, T_1)$, где $T_1=Th$, имеют вид

$$\int_0^{T_1} q(t) dt.$$

Пусть начиная с момента времени $t_1=0$ было проведено всего n подстроек модели к оригиналу в моменты $\vec{t}=(t_1, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots, t_n)$, причем стоимость каждой подстройки равнялась C . Тогда общие затраты на управление составляют

$$V = V(q, \vec{t}) = \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} q(t) dt + nC,$$

где $t_{n+1}=T_1$.

Рассмотрим самый общий стохастический случай задания функции $q(t)$. Будем предполагать, что с большой вероятностью $P(k)$ (например, $P(k) \geq R$) на интервале $[0, T_1]$ функция $q(t)$ имеет константу Липшица, не превышающую k . Если $q(t)$ имеет производную, то это эквивалентно условию $q'(t) \leq k$ на том же интервале и с той же вероятностью. Естественно считать, что в моменты подстройки модели к оригиналу t_i ($i=\overline{1, n}$) функция $q(t)$ достигает минимального значения, которое можно принять равным нулю $q(t_i)=0$. Тогда с вероятностью $P(k)$, можно гарантировать, что

$$V(q, \vec{t}) \leq V(k, \vec{t}) = \max_q V(q, \vec{t}) = \frac{k}{2} \sum_{i=1}^n (t_{i+1} - t_i)^2 + nC. \quad (3.6.11)$$

Легко показать, что при фиксированном значении n минимум $V_n(k)$ величины $V(k, \vec{t})$ достигается при $t_{i+1}-t_i=\Delta t=T_1/n$:

$$V_n(k) = \min_{\vec{t}, n=\text{const}} \max_q V(q, \vec{t}) = \frac{T_1^2 k}{2n} + nC. \quad (3.6.12)$$

Ясно, что минимум $V_{n(k)}(k)$ величины $V_n(k)$ достигается при ближайшем целом значении n к величине

$$n(k) = T_1 \sqrt{k/2C}. \quad (3.6.13)$$

При этом

$$\Delta t = \sqrt{2C/k} \text{ и } V(k) = V_{n(k)}(k) = T_1 \sqrt{2kC}. \quad (3.6.14)$$

До сих пор рассматривались лишь априорные оценки эффективности управления. Можно рассмотреть алгоритм управления, использующий текущую информацию о значении величины $q=q(t)$. При этом можно показать, что оптимальным в прежнем смысле оказывается пороговый алгоритм с порогом $q_{\text{пор}} = \Delta tk = \sqrt{2kC}$, когда подстройка модели производится в моменты достижения функцией $q(t)$ порога $q_{\text{пор}}$. Очевидно, что при этом могут быть лишь уменьшены по сравнению с априорным случаем потери от неоптимальности управления, так как лишь в наилучшем случае равенства $q(t) = k(t-t_i)$ при $(i-1)\Delta t \leq t < i\Delta t$ ($i=1, n$) будет получен прежний наилучший результат.

Заметим, что мы никогда заранее в точности не знаем истинного значения константы k . Если мы считаем, что значением константы является $k' \neq k$, то, вычислив по формуле (3.6.13) соответствующее значение $n(k') = T_1 \sqrt{k'/2C}$ и подставив его в соотношение (3.6.12), получим величину потерь от неоптимальности управления

$$V_{n(k')} \overset{\Delta}{=} V_{n(k)}(k) (\sqrt{k/k'} + \sqrt{k'/k}). \quad (3.6.15)$$

Отсюда относительная величина увеличения потерь от неоптимальности управления при неточности априорных значений константы k

$$\eta^* \overset{\Delta}{=} [V_{n(k')} \overset{\Delta}{=} V_{n(k)}(k)] / V_{n(k')} \overset{\Delta}{=} (k)$$

имеет вид

$$\eta^* = \left[1 + \frac{1}{2} (\kappa^{1/4} - \kappa^{-1/4})^{-2} \right]^{-1} = \frac{(\sqrt{\kappa} - 1)^2}{\kappa + 1}, \quad (3.6.16)$$

где $\kappa = k/k'$. Как и для модели контроля, соотношения (3.6.16) и (3.6.14) позволяют вычислять относительные и абсолютные увеличения потерь от неточности задания априорных ограничений на функцию потерь $q(t)$.

Поскольку оцененное в предыдущем пункте запаздывание th в обнаружении аномалии МС отражается на

рассогласовании модели и оригинала и в конечном счете на виде функции $q(t)$, то в будущем предстоит решение задачи совместной оптимизации распределения ограниченных средств на контроль и управление биосферой.

3.6.6. Техничко-экономическая оптимизация модели МС [129]. В п. 3.6.4 была проведена техническая оптимизация модели МС. Проведем дальнейшую технико-экономическую оптимизацию, оставляя по-прежнему в качестве целевого функционала технический параметр среднего времени th обнаружения аномалий, но оптимизируя его при дополнительных экономических ограничениях. Для этого составим произведение $t(\mathcal{P}, Q)$, определяемое соотношением (3.6.8), и $h=L/(mw^*)$, определяемое соотношением (3.6.1), и запишем его в следующем виде:

$$t(\mathcal{P}, Q)h = \frac{C'}{mM}(1 + Cu) = f[m, M, u(\mathcal{P}, Q)], \quad (3.6.17)$$

где $C' = NL(\xi + \theta) \sum_{i=1}^N \mathcal{P}_i n_i^t / w^*$ и $C = 1/4(1 + \theta/\xi)$ — парамет-

ры, мало меняющиеся с изменением M и \mathcal{P} при не слишком неоднородном регионе ($n_i^t \sim n_0 = \text{const}$), когда

$\sum_{i=1}^N \mathcal{P}_i n_i^t \sim n_0$ и $\xi \sim 1$. В таком случае их можно считать

константами и поставить задачу оптимизации величины $f(m, M, u)$ как функции трех параметров m , M и u при некоторых разумных ограничениях на них. Первые два параметра: число m спутников и объем памяти (число M ее ячеек) — связаны с капитальными затратами на построение МС. Параметр неточности u имеет глубокие интерпретации и связан, как будет показано далее, с эксплуатационными затратами на функционирование МС.

Мы уже упоминали о статистической интерпретации параметра u , когда Q рассматривается как «гистограмма» теоретического распределения \mathcal{P} . Согласно известным результатам математической статистики можно считать, что параметр u , как и критерии хи-квадрат или λ -критерий Колмогорова — Смирнова обратно пропорционален числу наблюдений n . Если наблюдения ведутся через интервал Δt времени, то параметр u оказывается обратно пропорциональным времени наблюдения $\tau(u = c''/\tau)$. Предположим, что такие наблюдения (стацио-

нарные или экспедиционные) требуют некоторых затрат k в единицу времени, а стоимости одного ИСЗ и ячейки памяти равны k_c и k_n соответственно. Тогда, если фиксировать общую сумму K капитальных затрат на построение МС и эксплуатационных расходов на уточнение u априорных сведений о распределении \mathcal{P} , то будем иметь ограничение вида

$$k_c m + k_n M + k_p / u = K, \quad (3.6.18)$$

где $k_p = c'' k$.

Решение экстремальной задачи минимизации функции $f(m, M, u)$ (см. (3.6.17)) по переменным (m, M, u) , удовлетворяющим условию (3.6.18), было проведено автором совместно с С. А. Сильяновой и привело к следующим результатам (см. п. П. 3.9).

Введем новые переменные (x, y, z) , функцию w и параметры κ и ζ , положив $k_c m = x$, $k_n M = y$, $k_p / u = z$:

$$\begin{aligned} \frac{K^2}{4C'} \frac{t(\mathcal{P}, Q) h}{k_n k_c} = w; \quad \kappa = \frac{C k_p}{K} \quad (\text{см. (3.6.17)}); \\ \zeta = \frac{z}{K}; \quad w_x(\zeta) = \frac{1 + \kappa / \zeta}{(1 - \zeta)^2}. \end{aligned} \quad (3.6.19)$$

Тогда, как легко показать, минимальное значение w достигается, когда $x = y = \frac{1}{2} K(1 - \zeta)$, и равно $w_x(\zeta_x)$, когда $\zeta = \zeta_x$, где

$$\zeta_x = (3\kappa/4) (\sqrt{1 + 8/9\kappa} - 1). \quad (3.6.20)$$

С помощью элементарных, но весьма громоздких выкладок можно оценить потери η^{**} в среднем времени обнаружения, которые имеют место при неоптимальном распределении средств на создание МС и получении априорных данных о местах возникновения аномалий. Эти потери имеют вид (см. (П. 3.94))

$$\eta^{**} \triangleq 1 - \frac{w_x(\zeta_x)}{w_x(\zeta)} \approx \frac{3\kappa + 4\zeta_x}{2\zeta_x(1 - \zeta_x)(\kappa + \zeta_x)} (\zeta - \zeta_x)^2, \quad (3.6.21)$$

причем $0 \leq \zeta_x \leq 1/3$, $0 \leq \zeta \leq 1$, и ζ и близко к ζ_x .

Можно найти асимптотические значения ζ_x и $w_x(\zeta_x)$ при $\kappa \rightarrow 0$ и $\kappa \rightarrow \infty$:

$$\zeta_x = \begin{cases} \sqrt{\kappa/2}, & \text{при } \kappa \rightarrow 0, \\ 1/5, & \text{при } \kappa = 1/5, \\ 1/2(1 - 2/3\kappa), & \text{при } \kappa \rightarrow \infty. \end{cases} \quad w_x(\zeta_x) = \begin{cases} 1 + 2\sqrt{2\kappa} & \text{при } \kappa \rightarrow 0, \\ 25/8 & \text{при } \kappa = 1/5, \\ 27\kappa/4 & \text{при } \kappa \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3.6.22)$$

В частности, если κ достаточно велико (например, $\kappa \approx 2$) и $|\zeta - \zeta_*| \approx 10^{-1}$, то $\eta^{**} \sim 10^{-1}$, т. е. для больших значений κ 10%-ная неточность задания \mathcal{P} , определяемая $\zeta = k_p / Ku$, приводит к 10%-ным потерям в среднем времени обнаружения. Частный случай рассмотренной задачи без учета затрат на уточнение априорного распределения \mathcal{P} был решен в работе [130]. Приведенное обобщение было сделано автором совместно с автором работы [130].

3.6.7. Оценка потенциальной надежности МС [131].

В предыдущих пунктах была оценена потенциальная эффективность и проведен подоптимальный синтез важного типа МС дистанционного обнаружения аномалий на поверхности Земли по техническим и технико-экономическим критериям. Любые оценки такого рода нереалистичны без учета надежности МС. Некоторые аспекты надежности учтены соотношением (3.6.5), которое является следствием требования «равнопрочности» МС по надежности $1 - R \sim 1 - P_M$ (R и P_M — технологическая надежность и вероятность непереполнения памяти МС соответственно). В данном пункте основное внимание уделяется функциональной надежности МС в связи с неопределенностью времени возникновения аномалии. В предыдущих пунктах основное внимание уделялось преодолению трудностей, связанных с неопределенностью места возникновения аномалии.

Будем вести отсчет времени с момента начала функционирования МС. Моменты времени τ и τ' возникновения аномалий и выхода МС из строя будем считать независимыми случайными величинами с функциями распределения $F(t)$ и $G(t)$ соответственно. Считается, что с вероятностью, равной единице, случайная величина $\tau \leq T$, где T — весьма большое время, и среднее время обнаружения аномалии $\bar{t} \ll T$, и поэтому ими пренебрегаем в дальнейших расчетах. В предыдущих пунктах \bar{t} являлось основным критерием эффективности МС. Здесь в качестве критерия эффективности МС примем вероятность P того, что МС обнаружит аномалию до того, как выйдет из строя. Тогда

$$P = \mathcal{P}(\tau < \tau') = \int_0^T [1 - G(t)] dF(t). \quad (3.6.23)$$

Используем известное в теории надежности (см., например, [131]) представление функции надежности че-

рез так называемую опасность отказа $\lambda(s)$ — плотность условной вероятности выхода МС из строя в момент t при условии, что до этого момента она работала безотказно:

$$1 - G(t) = \exp \left[- \int_0^t \lambda(s) ds \right]. \quad (3.6.24)$$

Подставив соотношение (3.6.24) в соотношение (3.6.23), после несложных преобразований получим

$$P = \int_0^T [1 - G(t)] dF(t) = 1 - \int_0^T \int_0^t \lambda(s) ds dF(t) + \\ + \int_0^T \left[\exp \left(- \int_0^t \lambda(s) ds \right) - 1 + \int_0^t \lambda(s) ds \right] dF(t). \quad (3.6.25)$$

Из соотношения (3.6.25) интегрированием по частям получим

$$P = 1 - \int_0^T \lambda(t) [1 - F(t)] dt + O[(\bar{\lambda}T)^2] = \\ = 1 - \bar{\lambda} E\tau + O[(\bar{\lambda}T)^2], \quad (3.6.26)$$

где

$$\bar{\lambda} = \frac{\int_0^T \lambda(t) [1 - F(t)] dt}{\int_0^T [1 - F(t)] dt}; \\ \bar{\lambda} = \int_0^T \lambda(t) dt / T; \quad E\tau = \int_0^T [1 - F(t)] dt.$$

Поскольку практический интерес представляют лишь значения $P \approx 1$, то будем полагать, что величина $\bar{\lambda}T$ мала, т. е. $\bar{\lambda} = o(T^{-1})$.

Будем считать, что без проведения мероприятий по повышению готовности МС к обнаружению аномалий опасность отказа равна λ , а в случае их проведения в моменты времени $s \in \mathcal{E} \subseteq [0, T]$ она уменьшается на Δ ($0 < \Delta < \lambda$). В соответствии с этим опасность отказа

$$\lambda(s) = (\lambda - \Delta) I_{\mathcal{E}}(s) + \lambda I_{\mathcal{E}^c}(s) \equiv \lambda - \Delta I_{\mathcal{E}}(s), \quad (3.6.27)$$

где $I_{\mathcal{E}}(s)$ — характеристическая функция множества \mathcal{E} .

Подставив соотношение (3.6.27) в первое из соотношений (3.6.26), получим

$$P = P(\lambda, F) \approx 1 - \lambda E\tau + \Delta \int_0^T \text{mes} \{ \mathcal{E} \cap [0, t] \} dF(t), \quad (3.6.28)$$

где $\text{mes} \{ \mathcal{E} \}$ — мера множества \mathcal{E} .

Рассмотрим класс Λ_b всех определяемых соотношением (3.6.27) опасностей отказов $\lambda(s)$, когда \mathcal{E} пробегает все множества интервала $[0, T]$, имеющие фиксированную меру $\text{mes} \{ \mathcal{E} \} = bT$ ($0 \leq b \leq 1$). Тогда легко показать, что для

$$\lambda_0(s) = (\lambda - \Delta) I_{[0, bT]}(s) + \lambda I_{[bT, T]}(s) \in \Lambda_b$$

и любого $\lambda(s) \in \Lambda_b$ имеет место оценка

$$P(\lambda_0, F) - P(\lambda, F) \approx \Delta \left[\int_0^{bT} (t - \text{mes} \{ \mathcal{E} \cap [0, t] \}) dF(t) + \int_{bT}^T (bT - \text{mes} \{ \mathcal{E} \cap [0, t] \}) dF(t) \right] \geq 0.$$

Отсюда

$$\max_{\lambda(s) \in \Lambda_b} P(\lambda, F) = P(\lambda_0, F) \approx 1 - \lambda E\tau + \Delta \left[E\tau - \int_{bT}^T (t - bT) dF(t) \right]. \quad (3.6.29)$$

Рассмотрим класс \mathcal{F}_a всех функций распределения $F(t)$, определенных на интервале $[0, T]$ с фиксированным значением $E\tau = aT$ ($0 \leq a \leq 1$). Тогда легко показать, что для $F_0(t) \in \mathcal{F}_a$, для которой

$$dF_0(t) = (1 - a) I_{\{0\}}(t) + a I_{\{T\}}(t)$$

и любого $F(t) \in \mathcal{F}_a$ имеет место оценка

$$\int_{bT}^T (t - bT) dF(t) \leq (T - bT) dF_0(T) = aT(1 - b).$$

Отсюда

$$P = \min_{F(t) \in \mathcal{F}_a} \max_{\lambda(s) \in \Lambda_b} P(\lambda, F) = P(\lambda_0, F_0) \approx 1 - \lambda aT + \Delta baT. \quad (3.6.30)$$

Полученные результаты интуитивно оправданы. Кажется естественным уменьшать опасность отказа в начале работы МС ($\lambda(s) = \lambda_0(s)$) для того, чтобы успеть обнаружить аномалию, а наиболее неблагоприятным для этих целей является возникновение аномалий в самом конце временного интервала $[0, T]$, регулируемое функцией распределения $F_0(t)$. При этом предельно неопределенная равномерная функция распределения оказывается не наиболее благоприятной.

На уменьшение опасности отказа МС $\Delta = \Delta(b)$ влияет продолжительность bT напряженного состояния ее повышенной готовности обнаружения аномалии, так как для этого могут быть выделены лишь ограниченные ресурсы. Очевидно, что с ростом b от 0 до 1 $\Delta(b)$ монотонно убывает от $\Delta(0)$ до $\Delta(1)$. Поэтому $\Delta(b)$ может быть приближенно представлена в виде

$$\Delta = \Delta(b) = \Delta(0) - [\Delta(0) - \Delta(1)] b^\alpha, \quad (3.6.31)$$

где α — некоторая неотрицательная константа.

Подставив соотношение (3.6.31) в (3.6.30), получим

$$P = P(b) \approx 1 - \lambda a T + \Delta(0) [1 - (1 - \Delta(1)/\Delta(0)) b^\alpha] b a T. \quad (3.6.32)$$

Для отыскания максимума $P(b)$ по b воспользуемся соотношениями (П.3.67), полагая в них $X=b$, $a=\alpha$, $b=1$ и $A=1 - \Delta(1)/\Delta(0)$.

Получим

$$P = P_{\max} = P(b_{\text{opt}}) \approx 1 - \lambda a T + \Delta(0) \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} \right) b_{\text{opt}} a T, \quad (3.6.33)$$

где

$$b_{\text{opt}} = (1 + \alpha)^{-1/\alpha} [1 - \Delta(1)/\Delta(0)]^{-1/\alpha}.$$

Имеем также из соотношения (3.6.32)

$$P(0) \approx 1 - \lambda a T < P(1) \approx 1 - \lambda a T + \Delta(1) a T. \quad (3.6.34)$$

Для численных оценок рассмотрим случай $\alpha=1$. Введем относительные потери ξ' в «близости к единице» $Q(b) = 1 - P(b)$ критерия эффективности МС от неоптимальности введения режима ее готовности к обнаружению аномалий. Положим $\xi' \triangleq [Q(1) - Q(b_{\text{opt}})] / Q(1)$. Исполни-

зую (3.6.33) и (3.6.34), получаем

$$\zeta' = (1 - 2\varphi)^2 / 4(1 - \varphi)(\psi - \varphi),$$

$$b_{\text{opt}} = \begin{cases} 1 & \text{при } \varphi > 1/2, \\ 1/2(1 - \varphi) \leq 1 & \text{при } \varphi \leq 1/2, \end{cases} \quad (3.6.35)$$

где $\varphi = \Delta(1)/\Delta(0) \leq 1$ и $\psi = \lambda/\Delta(0) \geq \max\{1, 1/4(1 - \varphi)\}$. При $\varphi = 1/2$ имеем $b_{\text{opt}} = 1$ и $\zeta' = 0$. При малых значениях $\varphi \ll 1/2$ имеем $\zeta' \approx [1 - (3 - \psi^{-1})\varphi]/4\psi$. Для не слишком больших значений $\psi \geq 1$ и малых значений $\varphi \ll 1/2$ потери ζ' 100% достигают 25%, что является весьма ощутимым.

Рассмотрим предельный экспоненциальный случай функций распределений $G(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ и $F(t) = 1 - \exp(-\mu t)$, когда $E\tau' = \lambda^{-1}$ и $E\tau = \mu^{-1}$ и $T \rightarrow \infty$. В этом случае критерий (3.6.23) имеет точное аналитическое выражение

$$P = (1 + E\tau/E\tau')^{-1} = (1 + \lambda E\tau)^{-1} = (1 + \lambda/\mu)^{-1}, \quad (3.6.36)$$

которое при $\lambda E\tau = E\tau/E\tau' \ll 1$ или $E\tau \ll E\tau' \ll T$ имеет вид

$$P \approx 1 - E\tau/E\tau' = 1 - \lambda E\tau, \quad (3.6.37)$$

являющийся частным случаем последнего соотношения (3.6.26) при постоянной опасности отказа $\lambda(s) = \lambda = \text{const}$.

Интересно сопоставить выражение (3.6.37) для вероятности P успеть обнаружить аномалию МС в любой из моментов интервала $[0, T]$ с выражением для оптимальной вероятности P_1 осуществимости той же цели, но при оптимальной фиксации момента T_1 ($0 < T_1 < T$), до которого необходимо сделать обнаружение. Как следует из соотношений (7.15) работы [4],

$$P_1 \approx 1 - T_1/E\tau' = 1 - (E\tau/E\tau') \ln(E\tau'/E\tau). \quad (3.6.38)$$

Соотношение (3.6.38) показывает, что для практически интересного случая $E\tau \ll E\tau' \ll T_1 \ll T$

$$1 - P_1 \approx (1 - P) \ln(E\tau'/E\tau), \quad (3.6.39)$$

т. е. эффективность более жесткого критерия уменьшается.

3.6.8. Оптимальное распределение затрат на обеспечение технической и эксплуатационной надежности МС [132]. Рассмотрим практически интересный случай ли-

нейной зависимости (3.6.31) Δ от b ($\alpha=1$). В этом случае соотношение (3.6.33) примет вид

$$P(b_{\text{opt}}) = \max_b P(b) \approx 1 - \lambda a T + [\Delta(0)]^2 a T / 4 [\Delta(0) - \Delta(1)]. \quad (3.6.40)$$

Выясним вероятностный смысл параметров $\Delta(0)$ и $\Delta(1)$. Поскольку мгновенный отказ может произойти как от технического отказа (с вероятностью q_T), так и от эксплуатационного (функционального) сбоя (с вероятностью q_3), то согласно (3.4.16)

$$\lambda - \Delta = (q_T + q_3 - 2q_T q_3) / (1 - q_T q_3). \quad (3.6.41)$$

Поскольку рассматривается случай малых значений $\lambda = O(T)^{-1}$, то из (3.6.41) имеем

$$\lambda - \Delta \approx q_T + q_3. \quad (3.6.42)$$

Величина $\Delta = \Delta(b)$ при изменении b от 0 до 1 монотонно убывает от $\Delta(0)$ до $\Delta(1)$. Поэтому практически можно считать, что в крайних случаях $\Delta = \Delta(0)$ и $\Delta = \Delta(1)$ нивелируются и не нивелируются эксплуатационные сбои соответственно. С учетом соотношения (3.6.42) это приводит к выражениям

$$\lambda - \Delta(0) = q_T \text{ и } \lambda - \Delta(1) = q_T + q_3,$$

отсюда

$$\Delta(0) - \Delta(1) = q_3 \text{ и } \Delta(1) = \lambda - q_T.$$

Поэтому в новых переменных соотношение (3.6.40) примет вид

$$P(b_{\text{opt}}) = P(q_T, q_3) \approx 1 - \lambda a T - (\lambda - q_T)^2 a T / 4 q_3. \quad (3.6.43)$$

Перейдем к выводу экономических ограничений на затраты по обеспечению технической и эксплуатационной надежности. Специфика капитальных K_T и эксплуатационных K_3 затрат здесь состоит в эмпирически установленной экспоненциальной зависимости $K = A 10^{Bs}$ ($A, B > 0$) затрат на обеспечение количества s „девяток после запятой“ в выражении вероятности отсутствия отказа МС

$$P = 1 - Q \approx 1 - Tq = 1 - 10^{-s}.$$

Отсюда следуют зависимости соответствующих затрат

$$A_T (Tq_T)^{-B_T} + A_3 (Tq_3)^{-B_3} = K, \quad (3.6.44)$$

где K — общие затраты, отводимые на обеспечение общей надежности МС.

Зафиксируем теперь значение вероятности $P(b_{\text{opt}}) = \text{const}$ и обратим в минимум выражение $K = K_{\text{min}}$, варьируя q_{τ} и q_{β} . Для этого из (3.6.43) получим

$$q_{\beta} = C(\lambda - q_{\tau})^2, \quad (3.6.45)$$

где $C = aT/4[\lambda aT - (1 - P(b_{\text{opt}}))]$.

Подставив выражение (3.6.45) в (3.6.44), получим

$$K = K(q_{\tau}) = A_{\tau}(Tq_{\tau})^{-B_{\tau}} + A_{\beta}[V\overline{TC}(\lambda - q_{\tau})]^{-2B_{\beta}}.$$

Как можно показать, $K(q_{\tau})$ имеет единственный минимум при оптимальном значении q_{τ} , равном q_{τ}^0 , являющимся решением уравнения

$$Lq^{\gamma} + q - \lambda = 0, \quad (3.6.46)$$

где

$$L = [2A_{\beta}B_{\beta}(TC)^{-B_{\beta}}/A_{\tau}B_{\tau}T^{-B_{\tau}}]^{1/(1+2B_{\beta})}; \quad \gamma = (1+B_{\tau})/(1+2B_{\beta}).$$

В частности, для практически интересного случая малых значений $B_{\tau} \sim B_{\beta} \ll 1$, когда $\gamma \approx 1$,

$$q_{\tau}^0 \approx \lambda/(1+L);$$

$$K_{\text{min}} = K(q_{\tau}^0) \approx A_{\tau} \left(T \frac{\lambda}{1+L} \right)^{-B_{\tau}} + A_{\beta} \left(V\overline{TC} \frac{\lambda L}{1+L} \right)^{-2B_{\beta}}. \quad (3.6.47)$$

Численный анализ полученных соотношений представляет самостоятельный интерес.

3.6.9. Оценка общей эффективности МС [133]. Общий критерий эффективности МС состоит в совмещении двух частных рассмотренных ранее критериев. Другими словами, требуется, чтобы случайное время обнаружения аномалии τ'' удовлетворяло неравенству $\tau'' \leq t$ и одновременно выполнялось неравенство $\tau \leq \tau'$ между случайными временами появления аномалии τ и выхода МС из строя τ' . Поэтому общая эффективность МС определяется вероятностью $P_2(t) = \mathcal{P}(\tau \leq \tau', \tau'' \leq t)$ совмещения указанных событий. Используя неравенства Буля и Чебышева, будем иметь соответственно

$$P_2(t) \geq 1 - \mathcal{P}(\tau > \tau') - \mathcal{P}(\tau'' > t), \\ \mathcal{P}(\tau'' > t) < [V\overline{D\tau''}/(t - E\tau'')]^2. \quad (3.6.48)$$

Рассмотрим практически интересный случай, когда случайная величина τ'' ограничена константой $E\tau'' + T_2$, т. е. $\mathcal{P}(\tau'' > E\tau'' + T_2) = 0$. Тогда имеет смысл рас-

рассматривать лишь $t \leq \bar{E}\tau'' + T_2$ и легко показать, что $D\tau'' \leq \leq T_2 \bar{E}\tau''$. Поскольку имеет смысл рассматривать лишь значения $P_2(t)$, близкие к единице, целесообразны лишь «равнопрочные» частные критерии, т. е. будем полагать

$$\mathcal{P}(\tau > \tau') = \mathcal{P}(\tau'' > t) < [V \bar{T}_2 \bar{E}\tau'' / (t - E\tau'')]^2. \quad (3.6.49)$$

Пусть заданы пороги осуществимости (P_0, T_0) обнаружения аномалий МС, требующие выполнения неравенств $\tau'' \leq T_0$ и $P_2(T_0) > P_0$ (см. п. 1.5.3). Для этого, используя соотношения (3.6.48) и (3.6.49), достаточно положить

$$V \bar{T}_2 \bar{E}\tau'' / (T_0 - E\tau'') = V(1 - P_0) / 2. \quad (3.6.50)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} E\tau'' &= \left[V \sqrt{\frac{T_2}{2(1-P_0)} + T_0} - V \sqrt{\frac{T_2}{2(1-P_0)}} \right]^2 \approx \\ &\approx \frac{[T_0 V(1-P_0)]^2}{2T_2}, \end{aligned} \quad (3.6.51)$$

причем последнее приближение всегда имеет место из-за малости значений $T_0(1-P_0)/T_2 \ll 1$. Выражения (3.6.49) — (3.6.51) можно использовать совместно с (3.6.17) и (3.6.33) для оценки параметров $m, M, u, \lambda, \Delta(0)$ и $\Delta(1)$. В частности, из (3.6.33), а также соображений «равнопрочности» и рассмотрения наихудшего случая $E\tau = T$ (для гарантированных оценок) имеем

$$\lambda \approx 2\Delta(0) \frac{\alpha}{1+\alpha} b_{\text{opt}} = \frac{1-P_0}{T}, \quad (3.6.52)$$

где T — большое время работы МС, в течение которого появляется аномалия.

Для реально заданных $T = 10^9 \text{ с} \sim 10 \text{ лет}$, $T_0 \ll T_2 = = 10^6 \text{ с} \sim 10 \text{ сут}$ и $P_0 = 1 - 10^{-s}$ имеем из (3.6.51) и (3.6.52) $E\tau'' = 0,5 \cdot 10^{6-s}$ и $\lambda = 10^{-9-s}$, что приводит, например, при $s=2$ к $E\tau'' = 0,5 \cdot 10^4 \text{ с}$ и $\lambda = 10^{-11}$. Таким образом, даже приведенные грубые оценки не выходят за пределы реальности.

Технико-экономическая оптимизация МС по общему критерию требует дальнейших исследований.

3.6.10. (l^+, l^-)-характеристики пятнистости поверхности Земли [129]. Для обнаружения аномалий на поверхности Земли необходимо знать соответствующие фоновые характеристики. Последние имеют ярко выражен-

ную пятнистость. Пятнистость суши уже давно была исследована геоботаниками [134—136] методом так называемых трансектов, имеющим общее статистическое значение. Пятнистость морской поверхности лишь начинает исследоваться. В океане линия трансекта соответствует галсу судна.

Пусть $y = y(x_1, x_2)$ — функция координат (x_1, x_2) точек исследуемого региона. Если провести поверхность „уровня“ $y = \text{const}$ от поверхности региона, то на нее спроецируются замкнутые кривые уровня y , ограничивающие „пятна“. Обозначим их средние диаметры \tilde{l}_{yi}^+ ($i = \overline{1, n_y}$). Соединим центры тяжести площадей ближайших соседних пятен отрезками. Обозначим длины их частей, находящиеся вне пятен \tilde{l}_{yi}^- ($i = \overline{1, n_y}$). Будем считать рассматриваемые последовательности реализациями случайного вектора $(\tilde{\lambda}_y^+, \tilde{\lambda}_y^-)$ с двумерной функцией распределения $F_y(l^+, l^-)$, зависящей от y .

Проведем внутри региона отрезок длиной L , называемый галсом, и через него плоскость, перпендикулярную поверхности региона. В пересечении с поверхностью $y = y(x_1, x_2)$ она образует кривую $y = y(x)$, пересекаемую прямой „уровня“ y . При этом образуются пары отрезков (l_{yi}^+, l_{yi}^-) , соответствующие парам $(\tilde{l}_{yi}^+, \tilde{l}_{yi}^-)$. Первые пары можно считать реализациями случайного вектора $(\lambda_y^+, \lambda_y^-)$. Стандартные гипотезы метода Монте-Карло могут оправдать допущение об одинаковой распределенности случайных векторов $(\tilde{\lambda}_y^+, \tilde{\lambda}_y^-)$ и $(\lambda_y^+, \lambda_y^-)$ и замены изучения первого вторым. Эмпирическим аналогом функции распределения последнего является двумерная гистограмма $\{m_{l_y^+, l_y^-}\} \left(\sum_{l_y^+, l_y^-} m_{l_y^+, l_y^-} = n_y \right)$ с частотами, обозначающими число пар (l_{yi}^+, l_{yi}^-) выборки объемом n_y , в точности равных (l_y^+, l_y^-) .

Если компоненты вектора $(\lambda_y^+, \lambda_y^-)$ независимы, то достаточно рассматривать две одномерные гистограммы $\{m_{l_y^+}\}$ и $\{m_{l_y^-}\}$, где $m_{l_y^+} = \sum_{l_y^-} m_{l_y^+, l_y^-}$ и $m_{l_y^-} = \sum_{l_y^+} m_{l_y^+, l_y^-}$.

Пусть выбором масштабов по осям абсцисс x и ординат y весь график функции $y = y(x)$ помещается в минимальный $L \times M =$ прямоугольник плоской целочисленной 1-решетки ($x = \overline{1, L}, y = \overline{1, M}$). Дискретизацию графика проведем так. Заменяем каждую его непрерывную часть, помещающуюся в минимальном $1 \times h$ -прямоугольнике с минимальными координатами вершин (x, y) , единичным квадратом с минимальными координатами вершин $(x, y \pm h - 1)$, где $h \geq 1$. Здесь в качестве l_{yi}^{\pm} -характеристик фигурируют числа единичных квадратов, непрерывно следующих над (под) прямой, параллельной оси абсцисс, отстоящей от нее на расстоянии y .

Рассмотрим средние

$$\bar{l}_y^{\pm} = \frac{1}{n_y^{\pm}} \sum_{i=1}^{n_y^{\pm}} l_{yi}^{\pm} = \sum_{l_y^{\pm}} l_y^{\pm} m_{l_y^{\pm}}.$$

Ясно, что при $y \geq 2$

$$n_y^+ \bar{l}_y^+ + n_y^- \bar{l}_y^- = L = \text{const} \text{ и } n_1^+ \bar{l}_1^+ = L.$$

Введем по определению частоты

$$m_y \triangleq n_y^+ \bar{l}_y^+ - n_{y+1}^+ \bar{l}_{y+1}^+; \quad m_M \triangleq n_M^+ \bar{l}_M^+.$$

Тогда $n_y^+ \bar{l}_y^+ = \sum_{z=y}^M m_z$ и поэтому

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \sum_{y=1}^M y m_y = \frac{1}{M} \sum_{y=1}^M \sum_{z=y}^M m_z = \frac{1}{M} \sum_{y=1}^M n_y^+ \bar{l}_y^+.$$

Таким образом, гистограммы $\{m_{l^+}\}$ и $\{m_{l^-}\}$ богаче гистограмм $\{m_y\}$, так как из первых можно получить вторые, но не наоборот, и статистика пятен требует специального исследования.

В 16-м рейсе научно-исследовательского судна „Дмитрий Менделеев“ в 1976 г. в Японском море отрабатывалась методика многопороговой (с порогами y) обработки записей, отображающих концентрацию фитопланктона (морских водорослей) с целью получения гистограмм

(l^+, l^-) -характеристик, связанных с каждым значением порога $y = \overline{I}, \overline{M}$. Типичный пример такой гистограммы приведен на рис. 3.10. Следует заметить, что такого рода гистограммы пятнистости необходимы для экспериментальной оценки плотностей вероятностей $f_0(l^\pm)$ фоновых характеристик с последующими оценками плотностей вероятности $f_1(l^\pm)$ для аномалии. Без такого рода ис-

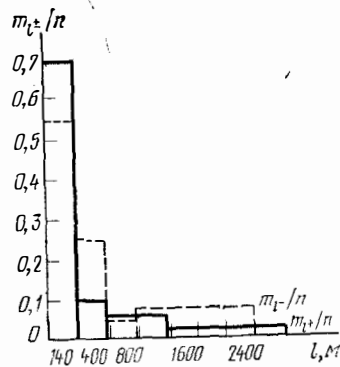


Рис. 3.10

следований невозможно практическое использование развитой теории потенциальной эффективности МС. Кроме того, сами по себе фоновые (l^+, l^-) -характеристики, их вероятностные плотности и средние значения важны для теории стаеобразования. Заметим, что между ними и параметрами l и r_{II} , используемыми в этой теории, имеют место очевидные соотношения $l^- = l - 2r_{II}$ и $l^+ = 2r_{II}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

УСЕЧЕННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПСЕВДОНЕЗАВИСИМЫЕ СОБЫТИЯ

П.1.1. Распределения. Рассмотрим конечное или счетное множество $R = \{B_e\}$. Элементы B_e будем называть *событиями*, а элементы $e \in I$ — их *индексами*. В частности, если $I = \{n, n+1, \dots, N\}$ — множество целых чисел, то примем для него запись $I = \overline{n, N}$. Совокупность непустых подмножеств $\{I_r\}$, таких, что $I_r \cap I_{r'} = \emptyset$ при $r \neq r'$ и $\bigcup_r I_r = I$, будем называть *разбиением множества I*.

Вероятность события B_e будем обозначать $P(e)$ и полагать $0 \leq P(e) \leq 1$ и $\sum_{e \in I} P(e) = 1$. Совокупность $P = \{P(e)\}$ будем на-

зывать распределением вероятностей или просто *распределением*.

Рассмотрим произвольное непустое подмножество $\mathcal{E} \subseteq I$ и соответствующее ему подмножество $M = \{B_e : e \in \mathcal{E}\}$.

Для вероятности появления одного из событий B_e , принадлежащих M , введем обозначение

$$P(\mathcal{E}) = \sum_{e \in \mathcal{E}} P(e).$$

По вероятностям $P(e)$ событий B_e определим новые их вероятности:

$$\tilde{P}(e) = \begin{cases} P(e)/P(\mathcal{E}), & \text{если } e \in \mathcal{E}, \\ 0, & \text{если } e \notin \mathcal{E}. \end{cases} \quad (\text{П.1.1})$$

Ясно, что совокупность $\tilde{P} = \{\tilde{P}(e)\}$ вероятностей $\tilde{P}(e)$ является распределением. Это распределение будем называть распределением, усеченным множеством \mathcal{E} или просто *усеченным распределением*. В частности, при $\mathcal{E} = I$ имеем $\tilde{P} = P$.

П.1.2. Независимые и псевдонезависимые события. Рассмотрим конечное множество $A = \{A_\alpha : \alpha = \overline{0, a}\}$ элементов A_α , называемых *элементарными событиями*. Пусть задано n распределений

$$p_t = \{p_t(\alpha)\} \quad (\alpha = \overline{0, a}; \quad t = \overline{1, n}),$$

где $p_t(\alpha)$ — вероятность элементарного события A_α . Рассмотрим также n вырожденных распределений

$$e_t = \{e_t(\alpha)\} = \left\{ \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{\alpha_t} \right\} \quad (t = \overline{1, n}).$$

Составим из распределений p_t и e_t как из столбцов две прямоугольные $[(a+1) \times n]$ -матрицы $\mathbf{p} = \{p_t\}$ и $\mathbf{e} = \{e_t\}$.

Первую зафиксируем, а вторую будем считать переменной. Введем следующее обозначение:

$$p^e = \prod_{t=1}^n \prod_{\alpha=0}^a p_t(\alpha) e_t^{(\alpha)}, \quad (\text{П.1.2})$$

причем считаем $0^0 \equiv 1$.

Пусть $B_e = \{A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_t}, \dots, A_{\alpha_n}\}$ — событие, состоящее из упорядоченной последовательности n элементарных событий, где матричный индекс e события B_e однозначно определяется индексами элементарных событий ($\alpha_t \leftrightarrow e_t(\alpha)$).

Если принять, что события B_e имеют вероятности

$$P_p(e) = p^e, \quad (\text{П.1.3})$$

соответствующие распределению $P_p = \{P_p(e)\}$, то элементарные события $A = \{A_\alpha : \alpha = \overline{0, a}\}$ будем называть *независимыми*.

Пусть задано усеченное подмножеством $\mathcal{E} = \{e\}$ распределение $\tilde{P}_p = \{\tilde{P}_p(e)\}$, определяемое соотношением (П.1.1). Тогда элементарные события $A = \{A_\alpha : \alpha = \overline{0, a}\}$ будем называть *псевдонезависимыми*.

Если вероятности $p_t(\alpha)$ зависят (не зависят) от индекса t , то имеет место неоднородный (однородный) случай. При $a > 1$ будем говорить о $(a+1)$ -арном случае при $a=1$ — о-бинарном.

Рассмотрим важные для приложений распределения P_p , а также их усечения специальными подмножествами, исследуя сначала неоднородный, а затем однородный случай в их $(a+1)$ -арном и бинарном вариантах.

П.1.3. Схема Бернулли. Независимые события. Схема Бернулли определяется следующим образом. Пусть $n = \text{const}$ и множество $R_n = \{B_e : e \in I_{a,n}\}$ событий B_e с индексами e из множества $I_{a,n}$ в с е х $a^n = e^{n \ln a}$ возможных $|(a+1) \times n|$ -матриц, рассмотренных в предыдущем пункте. Если вероятности событий B_e обозначить $P_{np}(e)$ и положить

$$P_{np}(e) = p^e, \quad (\text{П.1.4})$$

то они составляют распределение $P_{np} = \{P_{np}(e)\}$, так как имеет место легкопроверяемое тождество

$$\sum_{e \in I_{a,n}} p^e = \prod_{t=1}^n \left[\sum_{\alpha=0}^a p_t(\alpha) \right] \equiv 1. \quad (\text{П.1.5})$$

Распределение P_{np} называется *распределением последовательностей*.

Рассмотрим множество $M_{an} = \{\vec{m}\}$ всех векторов $\vec{m} = (m_\alpha)$ с неотрицательными целочисленными компонентами m_α , удовлетворяющими условию $m_0 + m_1 + \dots + m_\alpha + \dots + m_a = n$. Можно показать, что число всех таких векторов $C_{n+a}^a \sim n^a = e^{a \ln n}$. Определим множество $\mathcal{E}_n^{\vec{m}}$ матриц \mathbf{e} следующим образом:

$$\mathcal{E}_n^{\vec{m}} = \left\{ \mathbf{e}: \sum_{t=1}^n e_t(\alpha) = m_\alpha, \alpha = \overline{0, n} \right\}. \quad (\text{П.1.6})$$

Ясно, что

$$\bigcup_{\vec{m} \in M_{an}} \mathcal{E}_n^{\vec{m}} = I_{a,n}, \quad \mathcal{E}_n^{\vec{m}_1} \cap \mathcal{E}_n^{\vec{m}_2} = \emptyset \quad (\vec{m}_1 \neq \vec{m}_2). \quad (\text{П.1.7})$$

Для вероятностей появления какого-либо одного из элементов подмножества $R' = \{B_e: \mathbf{e} \in \mathcal{E}_n^{\vec{m}}\}$ введем обозначение

$$P_{np}(\vec{m}) = P_{np}(\mathcal{E}_n^{\vec{m}}) = \sum_{\mathbf{e} \in \mathcal{E}_n^{\vec{m}}} P_{np}(\mathbf{e}). \quad (\text{П.1.8})$$

Их совокупность $P_{np}^* = \{P_{np}(\vec{m})\} (\vec{m} \in M_{an})$ составляет распределение, что следует из соотношений (П.1.5) и (П.1.7). Векторы \vec{m} называются векторами частот появления событий $A = \{A_\alpha\}$, распределение P_{np}^* — распределением частот.

Рассмотрим бинарный случай распределений P_{np} и P_{np}^* , когда $A = \{A_0, A_1\}$. В этом случае можно упростить обозначения, полагая

$$p_t(1) = p_t, \quad p_t(0) = q_t = 1 - p_t, \quad e_t(1) = \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t = 0, 1, \quad m_1 = m, \quad m_0 = n - m.$$

Матрицы

$$\mathbf{p} = \left\{ \begin{pmatrix} q_t \\ p_t \end{pmatrix} \right\} \quad \text{и} \quad \mathbf{e} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} \right\}$$

здесь определяются n -мерными векторами $\vec{p}' = (p_t)$ и $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_t)$ соответственно, вектор $\vec{m} = \{n - m, m\}$ — своей второй компонентой m ,

$$M_{1n} = \{m: m = \overline{0, n}\} \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_n^{\vec{m}} = \mathcal{E}_n^m = \left\{ \mathbf{e}: \sum_{t=1}^n \varepsilon_t = m \right\}.$$

В рассматриваемом случае вероятности распределений $P_{np'} \rightarrow$ и $P_{np'}^* \rightarrow$ имеют вид

$$P_{np'} \rightarrow (\vec{e}) = \prod_{t=1}^n p_t^{e_t} q_t^{1-e_t}; \quad (\text{П.1.9})$$

$$P_{np'} \rightarrow (m) = \sum_{m = \sum_{t=1}^n e_t} \prod_{t=1}^n p_t^{e_t} q_t^{1-e_t}. \quad (\text{П.1.10})$$

Выше был рассмотрен неоднородный случай схемы Бернулли. Рассмотрим ее однородный случай, когда вероятности $p_t(\alpha) = p(\alpha)$ не зависят от t , а в матрице $p = \|p_t(\alpha)\| = \overbrace{(p, \dots, p)}^{\alpha}$ все столбцы равны одному α -мерному вектор-столбцу $\vec{p} = \begin{pmatrix} p(0) \\ \vdots \\ p(\alpha) \end{pmatrix}$, т. е. она полностью определяется в $(\alpha + 1)$ -арном случае, а в бинарном — единственной вероятностью $p = p(1)$, так как $p(0) = q = 1 - p$.

Примем следующие обозначения:

$$P_{np} \rightarrow = \{P_{np} \rightarrow (\mathbf{e})\}; \quad P_{np}^* \rightarrow = \{P_{np}^* \rightarrow (\vec{m})\};$$

$$P_{np} = \{P_{np}(\mathbf{e})\}; \quad P_{np}^* = \{P_{np}^*(m)\}.$$

Используя соотношения (П.1.4), (П.1.8) — (П.1.10), получаем

$$P_{np} \rightarrow (\mathbf{e}) = \vec{p}^{\vec{m}} \quad (\mathbf{e} \in \mathcal{E}_n^m, \vec{m} \in M_{an}), \quad (\text{П.1.11})$$

$$P_{np} \rightarrow (\vec{m}) = C_n^{\vec{m}} \vec{p}^{\vec{m}} \quad (\vec{m} \in M_{an}),$$

где $C_n^{\vec{m}}$ — число элементов множества \mathcal{E}_n^m , равное полиномиальному коэффициенту:

$$C_n^{\vec{m}} = n! / \prod_{\alpha=0}^a m_{\alpha}!, \quad (\text{П.1.12})$$

поэтому распределение $P_{np}^* \rightarrow$ называется **полиномиальным** с параметрами n и p . Для бинарного случая

$$P_{np}(\vec{\varepsilon}) = p^n q^{n-m} \vec{\varepsilon} \in \mathcal{E}_{an}^m; \quad m = \overline{0, n}; \quad (\text{П.1.13})$$

$$P_{np}(m) = C_{np}^m p^m q^{n-m} \quad (m = \overline{0, n}),$$

где C_{np}^m — число элементов множества \mathcal{E}_{an}^m , равное биномиальному коэффициенту:

$$C_{np}^m = n! / (m!(n-m)!), \quad (\text{П.1.14})$$

поэтому распределение P_{np}^* называется *биномиальным* с параметрами n и p .

В асимптотическом случае $n \rightarrow \infty$, $p = \text{const}$ для полиномиального распределения [42, с. 30—31]

$$P_{np}(\vec{m}) = \exp[-k(\vec{\mu}, \vec{p})n + O(\ln n)];$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\vec{m} \in M'_{an}} P_{np}(\vec{m}) = \\ & = \begin{cases} 1 - \exp[-k(\vec{\mu}_*, \vec{p})n + O(\ln n)] & \text{при } n\vec{p} \in \tilde{M}'_{an}, \\ \exp[-k(\vec{\mu}_*, \vec{p})n + O(\ln n)] & \text{при } n\vec{p} \notin \tilde{M}'_{an}. \end{cases} \quad (\text{П.1.15}) \end{aligned}$$

где

$$\vec{\mu} = \vec{m}/n;$$

$$\begin{aligned} k(\vec{\mu}, \vec{p}) &= \sum_{\alpha=1}^a \mu_{\alpha} \ln(\mu_{\alpha}/p_{\alpha}) = h(\vec{\mu}, \vec{p}) - \\ & - h(\vec{\mu}, \vec{p}) \geq k(\vec{p}, \vec{p}) = 0, \end{aligned}$$

$$h(\vec{\mu}, \vec{p}) = - \sum_{\alpha=1}^a \mu_{\alpha} \ln p_{\alpha}; \quad h(\vec{\mu}) = h(\vec{\mu}, \vec{\mu}); \quad (\text{П.1.16})$$

$$k(\vec{\mu}_*, \vec{p}) = \inf_{n\vec{\mu} \in \tilde{M}'_{an} \setminus \tilde{M}'_{an}} k(\vec{\mu}, \vec{p}), \quad (\text{П.1.17})$$

причем множества $M'_{an} \subset \tilde{M}_{an}$ a -мерного евклидова пространства получаются из соответствующих множеств $M'_{an} \subset M_{an}$ a -мерной целочисленной решетки их «объемным» заполнением. При этом вектор $n\vec{p}$ не должен принадлежать границе множеств M'_{an} и $\tilde{M}'_{an} \setminus \tilde{M}_{an}$.

В частности, для биномиального случая

$$P_{np}(m) = 2^{-k(\mu, p)n + O(\ln n)};$$

$$\sum_{m \in M'_{1n}} P_{np}(m) =$$

$$= \begin{cases} 1 - 2^{-k(\mu_*, p)n + O(\ln n)} & \text{при } np \in M'_{1n}, \\ 2^{-k(\mu_*, p)n + O(\ln n)} & \text{при } np \notin M'_{1n}, \end{cases} \quad (\text{П.1.18})$$

где $\mu = m/n$;

$$k(\mu, p) = \mu \log_2 \frac{\mu}{p} + (1 - \mu) \log_2 \frac{1 - \mu}{1 - p} =$$

$$= h(\mu, p) - h(\mu) \geq k(p, p) = 0,$$

$$h(\mu, p) = -\mu \log_2 p - (1 - \mu) \log_2 (1 - p);$$

$$h(\mu) = h(\mu, \mu); \quad (\text{П.1.19})$$

$$k(\mu_*, p) = \inf_{n\mu \in \overline{M}_{1n} \setminus M'_{1n}} k(\mu, p) \quad (\text{П.1.20})$$

причем здесь $M_{1n} = \{\overline{0}, \overline{n}\}$ и $M'_{1n} \subset M_{1n}$.

Рассмотрим неоднородный бинарный случай распределения $P_{n'p'} \rightarrow = \{P_{n'p'} \rightarrow (\epsilon)\}$ (см. (П.1.9), где $\vec{p}' = (p_t)$, $\vec{\epsilon} = (\epsilon_t)$, при специальном двумерном задании индекса $t = (i, j)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, $n' = nm$, $l = \min(n, m)$. В этом случае $p_t = p_{ij}$, $q_t = q_{ij} = 1 - p_{ij}$ (считаем $q_{ij} > 0$, $\epsilon_t = \epsilon_{ij} = 0, 1$, векторы $\vec{p}' = (p_t)$ и $\vec{\epsilon} = (\epsilon_t)$ однозначно определяются прямоугольными $(n \times m)$ -матрицами $\mathbf{p} = \|p_{ij}\|$ и $\mathbf{\epsilon} = \|\epsilon_{ij}\|$ и пары независимых элементарных событий обозначим A_{ij} и \bar{A}_{ij} . В соответствии с новыми обозначениями распределение $P_{n'p'} \rightarrow = \{P_{n'p'} \rightarrow (\epsilon)\}$ будем обозначать $P_{nmp} = \{P_{nmp}(\epsilon)\}$, причем (см. (П.1.9))

$$P_{nmp}(\epsilon) = \prod_{ij} p_{ij}^{\epsilon_{ij}} q_{ij}^{1 - \epsilon_{ij}} = P_{nmp}(\mathbf{0}) \mathbf{c}^\epsilon, \quad (\text{П.1.21})$$

где $\mathbf{0} = \|0\|$ — $(n \times m)$ -матрица со всеми нулевыми элементами;

$$\tilde{P}_{nmp}(0) = \prod_{ij} q_{ij}; \quad \mathbf{c} = \|\epsilon_{ij}\|, \quad c_{ij} = \frac{p_{ij}}{q_{ij}} = (p_{ij}^{-1} - 1); \quad (\text{П.1.22})$$

$$\mathbf{c}^{\mathcal{E}} = \prod_{ij} c_{ij}^{\epsilon_{ij}}.$$

П.1.4. Схема Бернулли. Псевдонезависимые события A_{ij} и \bar{A}_{ij} . Рассмотрим множество $I_{nm} = \{\mathcal{E}\}$ всех 2^{nm} матриц $\mathcal{E} = \|\epsilon_{ij}\|$ и его подмножество

$$\mathcal{E} = \left\{ \mathcal{E}: \sum_{i=1}^n \epsilon_{ij} = 1, \sum_{j=1}^m \epsilon_{ij} = 0, 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m} \right\}, \quad (\text{П.1.23})$$

состоящее из матриц \mathcal{E} , имеющих не более одной единицы по строкам и столбцам.

Рассмотрим подмножества

$$\mathcal{E}_{ij} = \left\{ \mathcal{E}: \epsilon_{ij} = 1, \sum_{i'=1}^n \epsilon_{i'j''} = 0, 1, \sum_{j'=1}^m \epsilon_{i''j'} = 0, 1, \quad i'' \neq i, \quad j'' \neq j \right\};$$

$$\mathcal{E}_{i*} = \bigcup_j \mathcal{E}_{ij}, \quad \mathcal{E}_{*j} = \bigcup_i \mathcal{E}_{ij}$$

подмножество

$$\mathcal{E}_k = \left\{ \mathcal{E}: \sum_{ij} \epsilon_{ij} = k, \sum_{i=1}^n \epsilon_{ij} = 0, 1, \sum_{j=1}^m \epsilon_{ij} = 0, 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m} \right\},$$

состоящее из матриц \mathcal{E} , имеющих точно k единиц ($k = \overline{0, l}$). В частности, множество $\mathcal{E}_0 = \{0\}$ состоит из одной матрицы $0 = \|0\|$. Легко видеть, что совокупности множеств $\{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_{ij}\}$ ($i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}$) и $\{\mathcal{E}_k\}$ ($k = \overline{1, l}$) являются разбиениями множества \mathcal{E} . Из простых комбинаторных соображений следует, что соответствующие числа элементов $N_{nm}(ij)$, $N_{nm}(i*)$, $N_{nm}(*j)$, $N_{nn}(k)$ и N_{nm} множеств \mathcal{E}_{ij} , \mathcal{E}_{i*} , \mathcal{E}_{*j} , \mathcal{E}_k , \mathcal{E} равны

$$N_{nm}(ij) = (N_{nm} - 1)/nm; \quad N_{nm}(i*) = (N_{nm} - 1)/n;$$

$$N_{nm}(*j) = (N_{nm} - 1)/m; \quad N_{nn}(k) = k! C_n^k C_m^k \quad (k = \overline{0, l}); \quad (\text{П.1.24})$$

$$N_{nm} = \sum_{k=0}^l N_{nm}(k) = \sum_{k=0}^l k! C_n^k C_m^k.$$

В соответствии с соотношениями (П.1.1), (П.1.21) и (П.1.23) для усеченного множеством \mathcal{E} распределения $\tilde{P}_{nmp} = \{P_{nmp}^{\sim}(\mathcal{E})\}$ имеем от-

личные при $\varepsilon \in \mathcal{E}$ от нуля вероятности

$$\tilde{P}_{nm\mathbf{p}}(\varepsilon) = c^\varepsilon \tilde{P}_{nm\mathbf{p}}(0); \quad \tilde{P}_{nm\mathbf{p}}(0) = \left(\sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} c^\varepsilon \right)^{-1}. \quad (\text{П.1.25})$$

Введем обозначения для вероятностей

$$P_{nm\mathbf{p}}(i*) = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}_{i*}} \tilde{P}_{nm\mathbf{p}}(\varepsilon);$$

$$\tilde{P}_{nm\mathbf{p}}(*j) = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}_{*j}} \tilde{P}_{nm\mathbf{p}}(\varepsilon);$$

$$\tilde{P}_{nm\mathbf{p}}(k) = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}_k} \tilde{P}_{nm\mathbf{p}}(\varepsilon)$$

и средних арифметических

$$\overline{c^\varepsilon} = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} c^\varepsilon / N_{nm}; \quad \overline{(c^\varepsilon)_i} = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}_{i*}} c^\varepsilon / N_{nm}(i*);$$

$$\overline{(c^\varepsilon)_j} = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}_{*j}} c^\varepsilon / N_{nm}(*j); \quad \overline{(c^\varepsilon)_k} = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}_k} c^\varepsilon / N_{nm}(k).$$

Тогда с учетом соотношений (П.1.24) и (П.1.25) будем иметь

$$P_{nm\mathbf{p}}(i*) = \frac{N_{nm} - 1}{nN_{nm}} \omega_{nmi};$$

$$P_{nm\mathbf{p}}(*j) = \frac{N_{nm} - 1}{mN_{nm}} \omega_{nmj}; \quad (\text{П.1.26})$$

$$P_{nm\mathbf{p}}(k) = \frac{N_{nm}(k)}{N_{nm}} \omega_{nmk},$$

где

$$\omega_{nmi} = \overline{(c^\varepsilon)_i} / \overline{c^\varepsilon}; \quad \omega_{nmj} = \overline{(c^\varepsilon)_j} / \overline{c^\varepsilon}; \quad \omega_{nmk} = \overline{(c^\varepsilon)_k} / \overline{c^\varepsilon}.$$

Нетрудно заметить, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_{nm\mathbf{p}}(i*) = \omega_{ni}/n \text{ при } \lim_{m \rightarrow \infty} \omega_{nmi} = \omega_{ni}; \quad (\text{П.1.27})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{nm\mathbf{p}}(*j) = \omega_{mj}/m \text{ при } \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{nmj} = \omega_{mj},$$

и если ω_{ni} и ω_{mj} не зависят от i и j , то они должны быть единицами и соответствующие предельные распределения переходят в равномерные.

Рассмотрим частный случай распределений

$$\tilde{P}_{1mp} \rightarrow = \{P_{1mp} \rightarrow (\vec{\varepsilon})\} \text{ и } \tilde{P}^*_{1mp} \rightarrow = \{P_{1mp} \rightarrow (k)\}$$

при $n = l = 1$ и $m > 1$,

когда $(n \times m)$ -матрицы \mathbf{p} , \mathbf{e} и \mathbf{c} вырождаются в m -мерные вектор-строки \vec{p} , \vec{e} и \vec{c} соответственно. Упростим обозначение их компонент $\vec{p} = (p_{1j}) = (p_j)$, $\vec{e} = (\varepsilon_{1j}) = (\varepsilon_j)$, $\vec{c} = (c_{1j}) = (c_j)$, где $c_j = (p_j^{-1} - 1)^{-1}$. Кроме того, $m + 1$ вектор, входящий в множество $\mathcal{E} = \{\vec{\varepsilon}\} = \{\vec{\varepsilon}_j; j = \overline{0, m}\}$ запишем в следующем виде:

$$\vec{\varepsilon}_0 = \overbrace{(0, \dots, 0)}^m, \vec{\varepsilon}_j = \overbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}^m \quad (j = \overline{1, m}).$$

Поэтому здесь

$$\{\mathbf{c}^{\mathcal{E}}: \mathbf{e} \in \mathcal{E}\} = \{\vec{c}^{\varepsilon_j}; j = \overline{0, m}\} = \{1, c_j (j = \overline{1, m})\}$$

и соотношения (П.1.25) и (П.1.26) примут вид

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{1mp} \rightarrow (\vec{\varepsilon}_0) &= \tilde{P}_{1mp} \rightarrow (0) = \left(1 + \sum_{j=1}^m c_j\right)^{-1}; \\ \tilde{P}_{1mp} \rightarrow (\vec{\varepsilon}_j) &= c_j \left(1 + \sum_{j=1}^m c_j\right)^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{П.1.28})$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{1mp} (1) &= \sum_{j=1}^m c_j \left(1 + \sum_{j=1}^m c_j\right)^{-1} = \\ &= \begin{cases} \sum_{j=1}^m p_j \text{ при } \sum_{j=1}^m p_j \rightarrow 0, \\ 1 - \left(\sum_{j=1}^m \frac{p_j}{1-p_j}\right)^{-1} \text{ при } \sum_{j=1}^m \frac{p_j}{1-p_j} \rightarrow \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{П.1.29})$$

Соотношения, аналогичные соотношениям (П.1.28) и (П.1.29), имеют место из распределений $\tilde{P}_{n1p'} \rightarrow$ и $\tilde{P}^*_{n1p'} \rightarrow$, если в предыдущих распределениях заменить j на i и m на n . При этом вектор-строка \vec{p} перейдет в вектор-столбец \vec{p}' . Соотношения (П.1.28) были получены автором [111] в связи с вычислением вероятности гибели системы от m причин, если вероятность гибели ее от j -й причины равна p_j ($j = \overline{1, m}$) и она может погибнуть только один раз. Обобщающие их соотношения (П.1.25) и выражения $P_{nm}(k)$ с их асимптотикой были получены автором совместно с А. П. Кибзун.

Рассмотрим выражения $P_{nmp}(k)$ в однородном случае $p_{ij}=p=\text{const}$ и $c_{ij}=c=(p^{-1}-1)^{-1}=\text{const}$. Из соотношения (П.1.26) имеем

$$P_{nmp}(k) = c^k N_{nm}(k) P_{nm}(0) \quad (k = \overline{1, l});$$

$$P_{nmp}(0) = \left[1 + \sum_{k=1}^l c^k N_{nm}(k) \right]^{-1}. \quad (\text{П.1.30})$$

Рассмотрим асимптотический случай соотношений (П.1.30) при $m \gg n^2$ ($m \rightarrow \infty$), $n=l=\text{const}$ и $c=\text{const}$. Можно показать, что в этом случае (см. (П.1.24))

$$c^k N_{nm}(k) = c^k k! C_n^k C_m^k = C_n^k (mc)^k [1 + O(n^2/m)].$$

Отсюда следует, что распределение

$$P_{nmp}(k) = C_n^k \left(\frac{mc}{1+mc} \right)^k \left(\frac{1}{1+mc} \right)^{n-k} \times$$

$$\times \left[1 + O\left(\frac{n}{m} \right)^2 \right] \quad (k = \overline{0, n}) \quad (\text{П.1.31})$$

оказывается асимптотически биномиальным распределением. Аналогично, при $n \gg m^2$ ($n \rightarrow \infty$), $m=l=\text{const}$, $c=\text{const}$

$$P_{nmp}(k) = C_m^k \left(\frac{nc}{1+nc} \right)^k \left(\frac{1}{1+nc} \right)^{m-k}. \quad (\text{П.1.32})$$

И, наконец, рассмотрим симметричный случай $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$ и $c \rightarrow 0$, но так, что $cnm = \lambda = \text{const}$ ($c = \lambda/nm$). В этом случае $l = \min(n, m) \rightarrow \infty$, $c^k N_{nm}(k) \rightarrow \lambda^k/k!$ и распределение

$$P_{nmp}(k) \rightarrow \lambda^k e^{-\lambda}/k! \quad (\text{П.1.33})$$

асимптотически стремится к распределению Пуассона с параметром λ .

Для каждого из трех рассматриваемых случаев математическое ожидание $E\kappa$ случайной величины κ , имеющей соответствующее распределение, вычисляется по формуле

$$E_n \kappa \sim \frac{nm c}{1+mc} \quad (m \gg n^2),$$

$$E_m \kappa = \frac{nm c}{1+nc} \quad (n \gg m^2), \quad (\text{П.1.34})$$

$$E \kappa = \lambda = nm c.$$

П.1.5. Схема Паскаля. Распределение первого благоприятного исхода. Схема Паскаля определяется следующим образом. Рассмотрим неоднородный бинарный случай независимых элементарных событий $A = (A_0, A_1)$ со счетным множеством $R_\infty = \{B_t : t = \overline{1, \infty}\}$ событий B_t , определяемых через элементарные события следующим образом:

$$B_1 = \{A_1\}, \quad B_2 = \{A_0, A_1\}, \quad \dots, \quad B_t = \{\overbrace{A_0, \dots, A_0}^{t-1}, A_1\}, \dots$$

Обозначим вероятность события B_t через $P_{\vec{p}}(t)$, где $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_t, \dots)$ — бесконечномерный вектор. Тогда, как легко показать,

$$P_{\vec{p}}(1) = p_1 = 1 - q_1; \quad P_{\vec{p}}(t) = \prod_{u=1}^{t-1} q_u p_t = \prod_{u=1}^{t-1} q_u - \prod_{u=1}^t q_u. \quad (\text{П.1.35})$$

Потребуем, чтобы в счетной последовательности $\{q_t\}$ существовала счетная подпоследовательность, все элементы которой не превосходили бы некоторого произвольного, но фиксированного положительного числа ε , меньшего единицы. Тогда

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \prod_{t=1}^T q_t = 0.$$

Используя соотношение (П.1.35), отсюда получим

$$\sum_{t=1}^{\infty} P_{\vec{p}}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T P_{\vec{p}}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(1 - \prod_{t=1}^T q_t \right) = 1,$$

т. е. совокупность $P_{\vec{p}} = \{P_{\vec{p}}(t)\}$ вероятностей $P_{\vec{p}}(t)$ является распределением, называемым распределением *первого благоприятного исхода*. Усечем распределение $P_{\vec{p}}$ множеством $\mathcal{E}_T = \{B_1, B_2, \dots, B_T\}$. Вычислим его вероятность $P(\mathcal{E}_T)$, используя соотношения (П.1.35). Имеем

$$P(\mathcal{E}_T) = \sum_{t=1}^T P_{\vec{p}}(t) = 1 - \prod_{t=1}^T q_t. \quad (\text{П.1.36})$$

Построим теперь усеченное распределение $\tilde{P}_{\vec{p}} = \{\tilde{P}_{\vec{p}}(t)\}$, используя соотношения (П.1.35) и (П.1.36). Имеем $P_{\vec{p}}(t) = 0$ для $t > T$. Для $t \leq T$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{\vec{p}}(1) &= p_1 \left(1 - \prod_{t=1}^T q_t \right)^{-1}; \\ \tilde{P}_{\vec{p}}(t) &= \prod_{u=1}^{t-1} q_u p_t \left(1 - \prod_{t=1}^T q_t \right)^{-1} \quad (t = \overline{1, T}). \end{aligned} \quad (\text{П.1.37})$$

Из соотношений (П.1.37), полагая формально $\prod_{u=1}^{-1} q_u = 1$, получаем

$$\sum_{t=s}^T \tilde{P}_{\vec{p}}(t) = \left(\prod_{t=1}^{s-1} q_t - \prod_{t=1}^T q_t \right) \left(1 - \prod_{t=1}^T q_t \right)^{-1} \quad (s = \overline{1, T}). \quad (\text{П.1.38})$$

Рассмотрим ограниченную целочисленную случайную величину τ , имеющую распределение $P = \{P(t)\}$. Тогда ее математическое ожидание $E\tau$, имеет, как легко показать, следующее представление:

$$E\tau \triangleq \sum_{t=1}^T tP_t \equiv \sum_{t=1}^T \sum_{s=t}^T P(s). \quad (\text{П.1.39})$$

Если случайная величина τ имеет счетное число значений ($T = \infty$), то соотношение (П.1.39) имеет место при сходимости соответствующих рядов. Подставив в (П.1.39) соотношение (П.1.38), получим

$$E_T\tau = \left(\sum_{t=1}^T \prod_{i=1}^{s-1} q_i - T \prod_{i=1}^T q_i \right) \left(1 - \prod_{i=1}^T q_i \right)^{-1}. \quad (\text{П.1.40})$$

Рассмотрим однородный случай схемы Паскаля, когда $p_t = p = \text{const}$, $q_t = q = 1 - p$ и распределения P_p и \tilde{P}_p определяются единственным параметром p . В этом случае будем их обозначать P_p и \tilde{P}_p соответственно. Вероятности $P_p(t)$ и $\tilde{P}_p(t)$ согласно соотношениям (П.1.35) и (П.1.37) имеют вид

$$P_p(t) = q^{t-1}p, \quad \sum_{t=1}^T P_p(t) = 1 - q^T; \quad (\text{П.1.41})$$

$$\tilde{P}_p(t) = q^{t-1}p(1 - q^T)^{-1},$$

и их распределения называются *геометрическим* и *усеченным геометрическим* соответственно.

Математическое ожидание $E_T\tau$, определяемое соотношением (П.1.39), в рассматриваемом случае имеет вид

$$E_T\tau = \frac{1}{p} - \frac{Tq^T}{1 - q^T} \equiv \frac{1 - Tp(1 - s)/s}{p}, \quad (\text{П.1.42})$$

где $s = 1 - q^T$. Ясно, что при $T \rightarrow \infty$ распределение \tilde{P}_p и математическое ожидание $E_T\tau$ переходят в распределение P_p и математическое ожидание $E\tau = 1/p$ соответственно.

Рассмотрим другой асимптотический случай, когда $p \rightarrow 0$ так, что $Tp \rightarrow 0$. Имеем

$$q^T = 1 - Tp + \frac{T(T-1)}{2} p^2 - \dots$$

Отсюда после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \tilde{P}_p(t) &= (1 + O(Tp))/T; \\ E_T\tau &= (T+1)(1 + O(Tp))/2. \end{aligned} \quad (\text{П.1.43})$$

Таким образом, в этом асимптотическом случае усеченное геометрическое распределение ($T = \text{const}$, $p \rightarrow 0$) и геометрическое распределение ($T \rightarrow \infty$, $Tp \rightarrow 0$) стремятся к равномерному распределению $1/T$, а их математические ожидания — к математическому ожиданию равномерного распределения $(T+1)/2$.

П.1.6. Некоторые специальные суммы случайного числа случайных слагаемых. Введем обозначение $\xi = \begin{pmatrix} x_i \\ P_i \end{pmatrix}$ для дискретной случайной величины ξ , принимающей действительные значения x_i с вероятностями P_i (имеющей распределение $P=(P_i)$). Ее математическое ожидание $E\xi$, по определению, имеет вид

$$E\xi \triangleq \sum_i x_i P_i. \quad (\text{П.1.44})$$

Известно, что для суммы $\sum_{i=1}^n \xi_i$, вообще говоря, зависимых случайных величин ξ_i

$$E \sum_{i=1}^n \xi_i = \sum_{i=1}^n E\xi_i. \quad (\text{П.1.45})$$

Если число слагаемых суммы само является случайной величиной ν , не зависящей от независимых между собой одинаково распределенных слагаемых ξ_i , то [85]

$$E \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i = E\nu E\xi, \quad (\text{П.1.46})$$

где $E\xi_i = E\xi = \text{const}$.

Рассмотрим случайный вектор $\vec{\nu} = (\nu_\alpha)$, компоненты которого имеют полиномиальное распределение с параметрами N и $\vec{p} = (p_0, p'_1, \dots, p'_\alpha, \dots, p'_a)$ (см. (П.1.11)). Известно, что

$$E\nu_0 = Np_0; \quad E\nu_\alpha = Np'_\alpha \quad (\alpha = \overline{1, a}).$$

Введем в рассмотрение две суммы случайного числа случайных слагаемых

$$\tau = \sum_{\alpha=0}^a \sum_{i=0}^{\nu_\alpha} \tau_{\alpha i} \quad \text{и} \quad r = \sum_{\alpha=0}^a \sum_{i=0}^{\nu_\alpha} r_{\alpha i}, \quad (\text{П.1.47})$$

где $\tau_{0i} = r_{0i} \equiv 0$, а $\tau_{\alpha i}$, как и $r_{\alpha i}$, при фиксированном $\alpha = \overline{1, a}$ и переменном i являются независимыми от ν_α и между собой одинаково распределенными случайными величинами. Тогда, используя соотношения (П.1.45) и (П.1.46), получаем

$$E\tau = N(1-p_0) \sum_{\alpha=1}^a p_\alpha E\nu_\alpha; \quad (\text{П.1.48})$$

$$Er = N(1-p_0) \sum_{\alpha=1}^a p_\alpha Er_\alpha,$$

где $p_\alpha = p'/(1 - p_\alpha)$; $E\tau_{\alpha i} = E\tau_\alpha = \text{const}$; $Er_{\alpha i} = Er_\alpha = \text{const}$.

Будем интерпретировать параметр N как число ячеек местообитания α -жертв, p'_α — вероятность того, что в ячейке находится α -жертва ($\alpha = \overline{1, a}$), p_0 — вероятность того, что она пуста. Рассматривается случай преследования хищником α -жертв, продолжающегося не более t_α ($\alpha = \overline{1, a}$) дискретных множеств времени. При этом возникает усеченное геометрическое распределение времени τ_α (см. (П.1.41)) до первого благоприятного исхода. Полагается, что случайная величина

$$r_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & e'_\alpha \\ 1 - s_\alpha & s_\alpha \end{pmatrix} \quad (\text{П.1.49})$$

имеет смысл случайного рациона хищника, с вероятностью $s_\alpha = 1 - (1 - \pi_\alpha)^{t_\alpha}$ догоняющего за время $\tau_\alpha \leq t_\alpha$ α -жертву с биомассой e'_α и с вероятностью $1 - s_\alpha$ не достигающего ее за время $\tau_\alpha \leq t_\alpha$, вероятность π_α интерпретируется как вероятность хищника вступить в контакт с α -жертвой за один временной шаг. Используя соотношения (П.1.41) и определения (П.1.44) и (П.1.49), будем иметь

$$E\tau_\alpha = \pi_\alpha^{-1} [1 - t_\alpha \pi_\alpha (1 - s_\alpha) s_\alpha^{-1}], \quad Er_\alpha = e'_\alpha s_\alpha, \quad (\text{П.1.50})$$

где $s_\alpha = 1 - (1 - \pi_\alpha)^{t_\alpha}$ и полагаем $E\tau_0 = Er_0 = 0$.

Подставив соотношение (П.1.50) в (П.1.48), получим

$$E\tau = N (1 - p_0) \pi^{-1} [1 - t\pi(1 - s)s^{-1}]^p; \quad (\text{П.1.51})$$

$$Er = N (1 - p_0) \bar{e}'^p \bar{s}^{-p}.$$

где

$$s_\alpha = 1 - \exp(-t_\alpha/u_\alpha), \quad u_\alpha = [\ln(1 - \pi_\alpha)^{-1}]^{-1};$$

$$p = (p_\alpha); \quad e = (e_\alpha), \quad p_\alpha = p'_\alpha/(1 - p_0); \quad e_\alpha = p_\alpha e'_\alpha / \bar{e}'^p.$$

В рассматриваемом случае суммы (П.1.47) интерпретируются как случайное время охоты и случайный рацион хищника, а суммы (П.1.48) — соответствующие математические ожидания.

Для случая тяжелого режима охоты ($t_\alpha \pi_\alpha \rightarrow 0$), используя соотношение (П.1.43), получаем из соотношений (П.1.51)

$$E\tau \approx N (1 - p_0) \bar{t}^p / 2;$$

$$Er = N (1 - p_0) \bar{e}'^p [1 - \exp(-\bar{t}/u)^e], \quad (\text{П.1.52})$$

где $u_\alpha \approx \pi_\alpha^{-1}$ ($\alpha = \overline{1, a}$).

Приступим к исследованию еще одной специальной суммы $v(t)$ случайного числа случайных слагаемых. Для ее определения рассмотрим неотрицательные, целочисленные, случайные величины $\kappa(s)$ и $\tau_i(s)$ ($i = \overline{0, \kappa(s)}$; $s = \overline{1, t}$). Предполагается, что они незави-

симы в совокупности, $\kappa(s)$ имеет распределение $P^*_s = \{P^*_s(m)\}$ и $\tau_i(s)$ имеют одно и то же распределение $P_s = \{P_s(u)\}$ при различных i . Тогда по определению

$$v(t) = \sum_{s=1}^t \sum_{i=1}^{\kappa(s)} \varepsilon_i(s, t), \quad (\text{П.1.53})$$

где $\varepsilon_i(s, t)$ — бинарная случайная величина, которая является функцией случайной величины $\tau_i(s)$:

$$\varepsilon_i(s, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau_i(s) > t-s \\ 0, & \text{если } \tau_i(s) \leq t-s, \end{cases} \quad (\text{П.1.54})$$

т. е.

$$\varepsilon_i(s, t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ F_s(t-s) & 1 - F_s(t-s) \end{pmatrix}, \quad (\text{П.1.55})$$

где

$$F_s(t) = \sum_{u=1}^t P_s(u). \quad (\text{П.1.56})$$

Используя определение (П.1.53) и соотношения (П.1.45) и (П.1.46), получаем основное соотношение между математическими ожиданиями

$$Ev(t) = \sum_{s=1}^t E\kappa(s) [1 - F_s(t-s)], \quad (\text{П.1.57})$$

полученное в работе [4, с. 251]. Там же приведены найденные автором соотношения между производящими функциями распределений случайных величин $v(t)$ и $\kappa(s)$ и соотношение между их дисперсиями

$$Dv(t) = Ev(t) + \sum_{s=1}^t [D\kappa(s) - E\kappa(s)] [1 - F_s(t-s)]^2. \quad (\text{П.1.58})$$

Рассмотрим несколько специальных случаев соотношений (П.1.57), (П.1.58). Пусть распределение $P^*_s = \{P^*_s(m)\}$ случайной величины $\kappa(s)$ является бинарным неоднородным распределением частот m в схеме Бернулли (см. (П.1.10)) $P^*_s(m) = P_{n(s)}(m)$, где $0 \leq m \leq n(s)$, $\vec{p}'(s) = (p_1(s), p_2(s), \dots, p_i(s), \dots, p_{n(s)}(s))$ и $p_i(s)$, $1 - p_i(s)$ — вероятности появления событий A_1 и A_0 соответственно.

Легко показать, что в этом случае

$$E\kappa(s) = \sum_{i=1}^{n(s)} p_i(s) = n(s) \overline{p(s)}; \quad (\text{П.1.59})$$

$$D\kappa(s) = \sum_{i=1}^{n(s)} p_i(s) (1 - p_i(s)).$$

В частности, в однородном случае ($p_i(s) = \lambda(s) = \text{const}$)

$$E\kappa(s) = n(s)\lambda(s); D\kappa(s) = n(s)\lambda(s)(1-\lambda(s)). \quad (\text{П.1.60})$$

Пусть распределение $P_s = \{P_s(u)\}$ случайных величин $\tau_i(s)$ является бинарным неоднородным распределением первого благоприятного испытания с номером u в схеме Паскаля (см. П.1.35).

$$P_s(u) = P_{\vec{p}(s)}(u),$$

где $u=1, 2, \dots, i, \dots$; $\vec{p}(s) = (p_1(s), p_2(s), \dots, p_u(s), \dots)$; $p_u(s)$ и $1-p_u(s) = q_u(s)$ — вероятности появления событий A_1 и A_0 соответственно. В этом случае согласно соотношениям (П.1.36) и (П.1.56)

$$1 - F_s(t-s) = \prod_{u=1}^{t-s} q_u(s) = \exp[(t-s) \overline{\ln q(s)}]. \quad (\text{П.1.61})$$

В частности, в однородном случае, когда $p_u(s) = \mu(s) = \text{const}$

$$1 - F_s(t-s) = (1-\mu(s))^{t-s}. \quad (\text{П.1.62})$$

Рассмотрим теперь выражения $E\nu(t)$ и $D\nu(t)$, когда случайные величины $\kappa(s)$ и $\tau_i(s)$ имеют однородные распределения в схемах Бернулли и Паскаля соответственно. Положив для простоты $n(s) = N = \text{const}$ и подставив в соотношения (П.1.57) и (П.1.58) соответствующие выражения из соотношений (П.1.60) и (П.1.62), получим

$$E\nu(t) = E\nu(t) - N \sum_{s=1}^t \lambda(s) [1 - \mu(s)]^{t-s}; \quad (\text{П.1.63})$$

$$D\nu(t) = E\nu(t) - N \sum_{s=1}^t \{\lambda(s) [1 - \mu(s)]^{t-s}\}^2 \leq E\nu(t). \quad (\text{П.1.64})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СИСТЕМНОЙ ЭКОЛОГИИ (МАКРОУРОВЕНЬ)

П.2.1. Используем запись (3.11) для средних с упрощением для средних арифметических. Так, основное выражение (3.28) имеет запись

$$M = M(\lambda, \mu) = M_x(\lambda, y) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) = \frac{1}{\lambda \sigma} \sum_{\alpha=1}^{\sigma} \frac{\lambda_{\alpha}}{\mu_{\alpha}}, \quad (\text{П.2.1})$$

где

$$\mu = \mu(x, y) = \left[1 + \left(\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} \right)^{-1} \right]^{-1} \quad (\text{П.2.2})$$

(здесь и далее у компонент x_{α} , y_{α} , μ_{α} и λ_{α} под знаком усреднения опускаются индексы).

При фиксированном векторе $x = (x_\alpha) = \text{const}$ найдем решение минимаксной задачи

$$\min_{y \in W_{\bar{y}}} \max_{\lambda \in W_{\bar{\lambda}}} \sum_{\alpha=1}^a \frac{\lambda_\alpha}{\mu_\alpha}, \quad (\text{П.2.3})$$

где

$$W_{\bar{y}} = \{y: 0 \leq y_\alpha \leq 1 \ (\alpha = \overline{1, a}), \frac{1}{a} \sum_{\alpha=1}^a y_\alpha = \bar{y} = \text{const}\},$$

к которой сводится аналогичная задача для величины M (см. (П.2.1)).

Легко показать, что соотношение (П.2.3) эквивалентно соотношению

$$\min_{\mu \in W'_{\bar{y}}} \max_{\lambda \in W_{\bar{\lambda}}} \sum_{\alpha=1}^a \frac{\lambda_\alpha}{\mu_\alpha}, \quad (\text{П.2.4})$$

где

$$W'_{\bar{y}} = \left\{ \mu: 0 \leq \mu_\alpha \leq 1 \ (\alpha = \overline{1, a}), \right. \\ \left. \left[1 + \left(\frac{\mu}{1-\mu} - \frac{x}{1-x} \right)^{-1} \right]^{-1} = \bar{y} = \text{const} \right\}.$$

Поскольку от перестановки слагаемых в сумме выражения (П.2.4) его значение не меняется, расположим их в порядке неубывания, нумеруя возрастающими индексами:

$$0 < \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_\gamma < \mu_{\gamma+1} \leq \dots \leq \mu_a < 1,$$

где $1 \leq \gamma \leq a$ (рассматриваем случай $0 < \mu_\alpha < 1$, $\alpha = \overline{1, a}$). Легко видеть, что в этом случае решение уравнения (П.2.4) имеет вид

$$\min_{\mu \in W'_{\bar{y}}} \max_{\lambda \in W_{\bar{\lambda}}} \sum_{\alpha=1}^a \frac{\lambda_\alpha}{\mu_\alpha} = \frac{a\bar{\lambda}}{\max_{\mu \in W'_{\bar{y}}} \mu_\gamma}$$

и достигается при любом векторе $\lambda = \underbrace{(\lambda_1, \dots, \lambda_\gamma, 0, \dots, 0)}_a$ с произ-

вольными неотрицательными компонентами λ_α , удовлетворяющими

соотношению $\sum_{\alpha=1}^{\gamma} \lambda_\alpha = a\bar{\lambda}$. Ясно, что, когда величина \bar{y} растет от

нуля до единицы, величина γ растет от $\delta < a$ до a , где δ — величина, зависящая от возможности упорядочения компонент вектора $x = (x_\alpha)$ вида $0 < x_1 = x_2 = \dots = x_\delta < x_{\delta+1} \leq \dots \leq x_a < 1$.

Маловероятность совпадения компонент вектора x делает типичным случай $\delta=1$. Тогда при достаточно малых значениях вели-

Чины \bar{y} величина y становится отличной от a , т. е. у вектора λ появляются нулевые компоненты.

При фиксированном векторе $x = (x_\alpha) = \text{const}$ найдем решение на этот раз максиминной задачи

$$\max_{\lambda \in W_{\bar{x}}} \min_{y \in W_y} \sum_{\alpha=1}^a \frac{\lambda_\alpha}{\mu_\alpha}. \quad (\text{П.2.5})$$

Удобно следующее обозначение:

$$X = x/(1-2x) \text{ или } 1+X = (1-x)/(1-2x).$$

Из соотношения (П.22) следует, что

$$\mu^{-1} = [1+X+X(1-y)]/(X+y). \quad (\text{П.2.6})$$

Для отыскания условного экстремума (минимума) выражения (П.2.5) найдем абсолютный экстремум выражения

$$R = \sum_{\alpha=1}^a \frac{\lambda_\alpha}{\mu_\alpha} + u \sum_{\alpha=1}^a y_\alpha,$$

где u — множитель Лагранжа.

Используя соотношение (П.2.6), получаем

$$\frac{\partial R}{\partial y} = -\lambda \left(\frac{1+X}{y+X} \right)^2 + u = 0. \quad (\text{П.2.7})$$

Отсюда при $u \left(\frac{X}{1+X} \right)^2 < \lambda < u$ имеем для экстремального значения $y=y^0$

$$y^0 = (1+X) \sqrt{\lambda/u} - X \leq 1. \quad (\text{П.2.8})$$

Используя соотношение (П.2.6), отсюда для экстремального значения $1/\mu^0$ имеем

$$1/\mu^0 = (1+X) \sqrt{u/\lambda} - X \geq 1. \quad (\text{П.2.9})$$

Из соотношений (П.2.8) и (П.2.9) имеем

$$(y^0+X)(1/\mu^0+X) = (1+X)^2. \quad (\text{П.2.10})$$

Отсюда

$$\frac{1}{\mu^0} = \frac{(1+X)^2}{y^0+X} - X \text{ и } \frac{\lambda}{\mu^0} = \frac{[(1+X)\sqrt{\lambda}]^2}{y^0+X} - X\lambda. \quad (\text{П.2.11})$$

Из соотношения (П.2.8) имеем

$$\sqrt{u} = \frac{(1+X)\sqrt{\lambda}}{y^0+X} = \text{const}. \quad (\text{П.2.12})$$

Беря среднее арифметическое от обеих частей (П.2.8), получаем

$$\bar{y} = \frac{(1+X)\sqrt{\lambda}}{\sqrt{u}} - \bar{X}.$$

Отсюда

$$V\bar{u} = \frac{(1+X)V\bar{\lambda}}{\bar{y} + \bar{X}}. \quad (\text{П.2.13})$$

Беря среднее арифметическое от обеих частей соотношения (П.2.9), умноженных на $\bar{\lambda}$, получаем

$$\begin{aligned} M_0 = \bar{\lambda} M_x(\lambda, y^0) &= (1+X)V\bar{\lambda} V\bar{u} - \bar{X}\bar{\lambda} = \\ &= \frac{[(1+X)V\bar{\lambda}]^2}{\bar{y} + \bar{X}} - \bar{X}\bar{\lambda} \equiv \bar{\lambda} + \frac{[(1+X)V\bar{\lambda}]^2}{\bar{y} + \bar{X}} - (1+X)\bar{\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{П.2.14})$$

Экстремальные значения M_0 , являющиеся минимумом, достигаются для

$$y^0 = \frac{(1+X)V\bar{\lambda}}{(1+X)V\bar{\lambda}} (\bar{y} + \bar{X}) - X. \quad (\text{П.2.15})$$

Найдем теперь условный экстремум (максимум) выражения (П.2.5) от $M_0 = \bar{\lambda} M_x(\lambda, y^0)$. Для этого найдем абсолютный экстремум выражения

$$Q = M_0 - (1+v) \frac{1}{a} \sum_{\alpha=1}^a \lambda_{\alpha} = \frac{[(1+X)V\bar{\lambda}]^2}{\bar{y} + \bar{X}} - \bar{X}\bar{\lambda} - (1+v) \frac{1}{a} \sum_{\alpha=1}^a \lambda_{\alpha}, \quad (\text{П.2.16})$$

где $-(1+v)$ — множитель Лагранжа, записанный в удобной для нас форме.

Имеем уравнения экстремума

$$\frac{\partial Q}{\partial \bar{\lambda}} = \frac{2}{a} \frac{(1+X)V\bar{\lambda}}{\bar{y} + \bar{X}} - \frac{1+X}{2V\bar{\lambda}} - \frac{X}{a} - \frac{(1+v)}{a} = 0. \quad (\text{П.2.17})$$

Отсюда экстремальные значения $\bar{\lambda} = \lambda^0$ удовлетворяет соотношениям

$$V\bar{\lambda}^0 = \frac{(1+X)V\bar{\lambda}^0}{\bar{X} + \bar{y}} \frac{1+X}{1+X+v}; \quad (\text{П.2.18})$$

или

$$\lambda^0 = \left[\frac{(1+X)V\bar{\lambda}^0}{\bar{X} + \bar{y}} \right]^2 \left(\frac{1+X}{1+X+v} \right)^2. \quad (\text{П.2.19})$$

Если умножить обе части (П.2.17), в котором положено $\bar{\lambda} = \lambda^0$, на λ^0 и взять среднее арифметическое от обеих частей, то получим, что правая часть (П.2.16) оказывается тождественно равной нулю. Отсюда получим экстремальное (максимальное) значение

$$M_{00} = \bar{\lambda} M(\lambda^0, y^0(\lambda^0)) = \bar{\lambda}(1+v). \quad (\text{П.2.20})$$

Умножив обе части (П.2.18) на $1+X$ и взяв от обеих частей среднее арифметическое, получим

$$\bar{X} + \bar{y} = \left(\frac{(1+X)^2}{1+X+v} \right) \equiv 1 + \bar{X} - v \left(\frac{1+X}{1+X+v} \right). \quad (\text{П.2.21})$$

Далее, взяв среднее арифметическое от обеих частей соотношения (П.2.19), получим

$$\bar{\lambda} = \left[\frac{(1+X)\sqrt{\bar{\lambda}^0}}{\bar{X} + \bar{y}} \right]^2 \left(\frac{1+X}{1+X+v} \right)^2. \quad (\text{П.2.22})$$

Из соотношений (П.2.19) и (П.2.22) получим

$$\lambda^0 = \bar{\lambda} \left(\frac{1+X}{1+X+v} \right)^2 / \left(\frac{1+X}{1+X+v} \right)^2. \quad (\text{П.2.23})$$

Умножив обе части (П.2.18) на $1+X$, получим

$$(1+X)\sqrt{\bar{\lambda}^0} / \frac{(1+X)\sqrt{\bar{\lambda}^0}}{\bar{X} + \bar{y}} = \frac{(1+X)^2}{1+X+v}.$$

Подставив последнее соотношение в (П.2.8), с учетом выражения (П.2.13) получим

$$y^{00} = \frac{(1+X)^2}{1+X+v} - X \equiv 1 - (1+X) + \quad (\text{П.2.24}) \\ + \frac{(1+X)^2}{1+X+v} \equiv 1 - v \frac{1+X}{1+X+v}.$$

Беря среднее арифметическое от обеих частей (П.2.24), получим соотношение (П.2.21). Кроме того,

$$1+X+v = \frac{(1+X)^2}{X+y^{00}} + v = \frac{(1+X)(1-y^{00})}{(1+X) - (1-y^{00})}. \quad (\text{П.2.25})$$

Подставив первое из этих выражений в первое из соотношений (П.2.11), получим для экстремального значения $1/\mu^0 = 1/\mu^{00}$

$$\frac{1}{\mu^{00}} = 1+X+v - X \equiv 1+v \text{ и } \frac{\lambda_0}{\mu_{00}} = \lambda^0(1+v). \quad (\text{П.2.26})$$

Теперь основное трансцендентное уравнение для определения параметра v можно получить из соотношения (П.2.21), если положить $\bar{z} = 1 - \bar{y}$,

$$\bar{z} = \left(\frac{1}{(1+X)^{-1} + v^{-1}} \right) \equiv v \left(\frac{1+X}{1+X+v} \right). \quad (\text{П.2.27})$$

Из (П.2.24) и (П.2.25) имеем, полагая $z = 1 - y^{00}$,

$$z = v \frac{1+X}{1+X+v}, \quad \frac{z^2}{v^2} = \left(\frac{1+X}{1+X+v} \right)^2; \quad (\text{П.2.28})$$

$$X + y^{00} = \frac{(1+X)^2}{1+X+v}.$$

Отсюда, в частности, имеем

$$\frac{\bar{z}^2}{v^2} = \left(\frac{1+X}{1+X+v} \right)^2. \quad (\text{П.2.29})$$

Трансцендентное уравнение (П.2.27) приводит к зависимости $v=v(\bar{z})$ и обратной зависимости $\bar{z}=\bar{z}(v)$, поэтому $v'(\bar{z})=1/\bar{z}'(v)$ и (см. (П.2.27) и (П.2.29))

$$\bar{z}' = \left(\frac{1+X}{1+X+v} \right)^2 = \frac{\bar{z}^2}{v^2(\bar{z})} = \frac{1}{v'(\bar{z})}. \quad (\text{П.2.30})$$

Далее будут использованы следующие тождества:

$$\begin{aligned} \frac{(1+X)^2}{1+X+v} &= 1+X-v \frac{1+X}{1+X+v}; \\ \frac{(1+X)^3}{(1+X+v)^2} &= \frac{(1+X)^2}{1+X+v} - v \left(\frac{1+X}{1+X+v} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{П.2.31})$$

П.2.2. Исследуем возможности решения трансцендентного уравнения (П.2.27). Прежде всего, заметим, что в «равномерном» случае $X=\bar{X}=\text{const}$ из уравнения (П.2.27) имеем

$$v = v_0 = v_0(\bar{z}) = \frac{(1+\bar{X})\bar{z}}{1+\bar{X}-\bar{z}} \quad \text{и} \quad v'_0(\bar{z}) = \left(\frac{1+\bar{X}}{1+\bar{X}-\bar{z}} \right)^2. \quad (\text{П.2.32})$$

Уравнение (П.2.27) имеет решение и в более общем случае так называемого «линейного биоценоза», когда полагают, по определению,

$$(1+X_a)^{-1} = c + \Delta(\alpha-1)/(\alpha-1) \quad (\alpha = \overline{1, a}), \quad (\text{П.2.33})$$

где

$$\begin{aligned} c &= (1+X_1)^{-1} = 1 - \frac{x_1}{1-x_1} \quad \text{и} \quad \Delta = (1+X_a)^{-1} - \\ &- (1+X_1)^{-1} = \frac{x_1-x_a}{(1-x_1)(1-x_a)} \end{aligned} \quad (\text{П.2.34})$$

— «нормированный размах» вероятностей смертностей особой компонент биоценоза. Сумма (П.2.27) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\bar{z} = \frac{1}{\sigma} \sum_{\alpha=1}^a \frac{1}{c + v^{-1} + \Delta(\alpha-1)/(\alpha-1)}. \quad (\text{П.2.35})$$

Согласно первому из соотношений (П.2.32) при $\bar{z}=1+\bar{X}$ имеем $v=\infty$, отсюда $v^{-1}=0$, и при этих значениях (П.2.35) имеет вид

$$1 + \bar{X} = \frac{1}{a} \sum_{\alpha=1}^a \frac{1}{c + \Delta(\alpha-1)/(\alpha-1)}. \quad (\text{П.2.36})$$

Рассмотрим приближенное интегральное представление суммы (П.2.35) при больших значениях a . Положим $\xi = (\alpha-1)/a$ и $d\xi \approx 1/a$, тогда

$$\bar{z} \sim \int_0^{1-1/a} \frac{d\xi}{c + v^{-1} + \frac{a}{a-1} \Delta \xi} = \frac{1}{a/(a-1)\Delta} \times \\ \times \ln \left(c + v^{-1} + \frac{a}{a-1} \Delta \xi \right) \Big|_0^{1-1/a},$$

т. е.

$$\bar{z} = \frac{1}{\frac{a-1}{a} \Delta} \ln \left(1 + \frac{\Delta}{c + v^{-1}} \right).$$

Удобнее использовать выражение

$$\bar{z} = \frac{1}{\frac{a-1}{a} \Delta} \ln \left(1 + \frac{\frac{a-1}{a} \Delta}{c + v^{-1}} \right),$$

которое, как и предыдущее, при $a \rightarrow \infty$ стремится к предельному выражению:

$$\bar{z} = \frac{1}{\Delta} \ln \left(1 + \frac{\Delta}{c + v^{-1}} \right). \quad (\text{П.2.37})$$

Его мы и будем использовать.

Введем функцию

$$g_{\Delta}(w) = (e^{\Delta w} - 1)/\Delta. \quad (\text{П.2.38})$$

Используя ее, будем иметь

$$\bar{z} = \frac{1}{\Delta} \ln \left(1 + \frac{\Delta}{c + v^{-1}} \right), \quad \frac{1}{c + v^{-1}} = g_{\Delta}(\bar{z}); \quad (\text{П.2.39})$$

$$1 + \bar{X} = \frac{1}{\Delta} \ln \left(1 + \frac{\Delta}{c} \right), \quad \frac{1}{c} = g_{\Delta}(1 + \bar{X}).$$

Из (П.2.39) имеем

$$v = \frac{1}{\frac{g_{\Delta}^{-1}(\bar{z}) - g_{\Delta}^{-1}(1 + \bar{X})}{g_{\Delta}(1 + \bar{X}) - g_{\Delta}(\bar{z})}} = \frac{g_{\Delta}(1 + \bar{X}) g_{\Delta}(\bar{z})}{g_{\Delta}(1 + \bar{X}) - g_{\Delta}(\bar{z})}. \quad (\text{П.2.40})$$

В частности, для равномерного случая ($\Delta=0$) $g_0(w)=w$ и из соотношения (П.2.40) следует первое из соотношений (П.2.32). Заметим, что

$$g'_{\Delta}(w) = e^{\Delta w} \text{ и } g_{\Delta}(w) - g_{\Delta}(-w) = 2 \frac{\text{sh } \Delta w}{\Delta}. \quad (\text{П.2.41})$$

Для дальнейшего изложения удобно рассмотреть функцию двух переменных

$$V = V(c, w) = cw/(c-w). \quad (\text{П.2.42})$$

Для нее имеем

$$V'_w = [c/(c-w)]^2 \text{ и } w^2 = V^2/V'_w. \quad (\text{П.2.43})$$

Кроме того, из определения (П.2.42) следует основное тождество

$$V = [V(c, w_1), V(c, w_2)] \equiv V(w_1, w_2), \quad (\text{П.2.44})$$

из которого с учетом (П.2.43) следует соотношение

$$\begin{aligned} V(c, w_1) - V(c, w_2) &\equiv V(c, w_1)V(c, w_2) \frac{w_1 - w_2}{w_1 w_2} \equiv \\ &\equiv \sqrt{V'_w(c, w_1)V'_w(c, w_2)} (w_1 - w_2). \end{aligned} \quad (\text{П.2.45})$$

П.2.3. Используем удобную символику (П.2.1)

$$M(\lambda, \mu) \equiv M[\lambda, \mu(x, y)] = M_x(\lambda, y).$$

$$M_x[\lambda, y(\bar{\lambda}, \bar{y})] = \min_{y \in \mathbb{W}_{\bar{y}}} M_x(\lambda, y);$$

$$M_x\{\lambda(\bar{\lambda}, \bar{y}), y[\lambda(\bar{\lambda}, \bar{y}), \bar{y}]\} = \max_{\lambda \in \mathbb{W}_{\bar{\lambda}}} M_x[\lambda, y(\lambda, \bar{y})];$$

$$m(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = M_x\{\lambda(\bar{\lambda}, \bar{y}_2), y[\lambda(\bar{\lambda}, \bar{y}_2), \bar{y}_1]\}, \quad (\text{П.2.46})$$

где $\bar{z}_1 = 1 - \bar{y}_1$; $\bar{z}_2 = 1 - \bar{y}_2$.

Из соотношений (П.2.23) и (П.2.30) имеем

$$\lambda(\bar{\lambda}, \bar{y}_2) = \bar{\lambda} \left[\frac{1 + X}{1 + X + v(\bar{z}_2)} \right]^2 v'(\bar{z}_2); \quad (\text{П.2.47})$$

$$\sqrt{\lambda(\bar{\lambda}, \bar{y}_2)} = \sqrt{\bar{\lambda}} \left(\frac{1 + X}{1 + X + v(\bar{z}_2)} \right) \sqrt{v'(\bar{z}_2)}.$$

Из (П.2.47) получим

$$(1 + X) \lambda(\bar{\lambda}, \bar{y}_2) = \bar{\lambda} \left[\frac{(1 + X)^2}{(1 + X + v(\bar{z}_2))^2} \right] v'(\bar{z}_2); \quad (\text{П.2.48})$$

$$(1 + X) \sqrt{\lambda(\bar{\lambda}, \bar{y}_2)} = \sqrt{\bar{\lambda}} \left[\frac{(1 + X)^2}{1 + X + v(\bar{z}_2)} \right] \sqrt{v'(\bar{z}_2)}.$$

Используя последнее из соотношений (П.2.14), а также тождества (П.2.31) и соотношения (П.2.48), преобразуем выражение (П.2.46):

$$\begin{aligned} m(\bar{z}_1, \bar{z}_2) &= 1 + \frac{\left[\frac{(1 + X)^2}{1 + X + v(\bar{z}_2)} \right]^2 v'(\bar{z}_2)}{1 + X - \bar{z}_1} - \\ &- \left\{ \left[\frac{(1 + X)^2}{1 + X + v(\bar{z}_2)} \right] - \frac{v(\bar{z}_2)}{v'(\bar{z}_2)} \right\} v'(\bar{z}_2). \end{aligned}$$

Используя (П.2.21), получаем

$$m(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = 1 + v(\bar{z}_2) \frac{(1 + \bar{X} - \bar{z}_2)^2}{1 + \bar{X} - \bar{z}_1} v'(\bar{z}_2) - \\ - (1 + \bar{X} - \bar{z}_2) v'(\bar{z}_2) = 1 + v(\bar{z}_2) + \frac{1 + \bar{X} - \bar{z}_2}{1 + \bar{X} - \bar{z}_1} v'(\bar{z}_2) (\bar{z}_1 - \bar{z}_2). \quad (\text{П.2.49})$$

Проведем некоторую симметризацию полученной формулы. Для случая равномерного биоценоза из (П.2.32) имеем

$$\frac{1 + \bar{X} - \bar{z}_2}{1 + \bar{X} - \bar{z}_1} = \sqrt{\frac{v'(\bar{z}_1)}{v'(\bar{z}_2)}}.$$

Кроме того, формально имеем

$$v'(\bar{z}_2) \equiv \sqrt{\frac{v'(\bar{z}_2)}{v'(\bar{z}_1)}} \sqrt{v'(\bar{z}_1) v'(\bar{z}_2)},$$

поэтому, вводя коэффициент неоднородности биоценоза

$$\gamma(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{v'(\bar{z}_2)}{v'(\bar{z}_1)} \sqrt{\frac{v'(\bar{z}_1)}{v'(\bar{z}_2)}} = \gamma^{-1}(\bar{z}_2, \bar{z}_1), \quad (\text{П.2.50})$$

равный единице для равномерного биоценоза, имеем окончательную запись выражения (П.2.49)

$$m(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = 1 + v(\bar{z}_2) + \gamma(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \sqrt{v'(\bar{z}_1) v'(\bar{z}_2)} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2). \quad (\text{П.2.51})$$

Введем важный для дальнейшего изложения коэффициент

$$\delta(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{v(\bar{z}_1) - v(\bar{z}_2)}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_1) \sqrt{v'(\bar{z}_1) v'(\bar{z}_2)}} = \delta(\bar{z}_2, \bar{z}_1). \quad (\text{П.2.52})$$

Покажем, что $\delta(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \geq 1$. Используя (П.2.30), имеем

$$\delta(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{v(\bar{z}_1) - v(\bar{z}_2)}{v(\bar{z}_1) v(\bar{z}_2) (\bar{z}_1 - \bar{z}_2) / \sqrt{\bar{z}_1^2 \cdot \bar{z}_2^2}}.$$

Кроме того, из соотношений (П.2.28) имеем

$$\bar{z}_1 - \bar{z}_2 = \frac{(1 + X)^2 (v_1 - v_2)}{(1 + X + v_1)(1 + X + v_2)}, \\ \frac{\bar{z}_1}{v_1} \frac{\bar{z}_2}{v_2} = \frac{(1 + X)^2}{(1 + X + v_1)(1 + X + v_2)}.$$

Отсюда

$$\bar{z}_1 - \bar{z}_2 = \frac{\bar{z}_1 \bar{z}_2}{v_1 v_2} (v_1 - v_2) \text{ и } \bar{z}_1 - \bar{z}_2 = \frac{\bar{z}_1 \bar{z}_2}{v_1 v_2} (v_1 - v_2),$$

поэтому

$$\delta(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{\sqrt{z_1^2 z_2^2}}{z_1 z_2} \geq 1.$$

Вычислим введенные коэффициенты $\gamma = \gamma_\Delta$ и $\delta = \delta_\Delta$ для случая линейного биоценоза. Имеем из (П.2.40) и (П.2.41)

$$\begin{aligned} \gamma_\Delta &= \frac{g_\Delta(1+\bar{X}) - g_\Delta(\bar{z}_1) e^{\Delta \bar{z}_2/2}}{g_\Delta(1+\bar{X}) - g_\Delta(\bar{z}_2) e^{\Delta \bar{z}_1/2}} \frac{1 + \bar{X} - \bar{z}_2}{1 + \bar{X} - \bar{z}_1} = \\ &= \frac{e^{\Delta(1+\bar{X})} - e^{\Delta \bar{z}_1} e^{\Delta \bar{z}_2/2}}{e^{\Delta(1+\bar{X})} - e^{\Delta \bar{z}_2} e^{\Delta \bar{z}_1/2}} \frac{1 + \bar{X} - \bar{z}_2}{1 + \bar{X} - \bar{z}_1} = \\ &= \frac{[e^{\Delta(1+\bar{X}-\bar{z}_1)} - 1] / [e^{\Delta(1+\bar{X}-\bar{z}_2)} - 1]}{[\Delta(1+\bar{X}-\bar{z}_1) / \Delta(1+\bar{X}-\bar{z}_2)]} e^{\Delta(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)/2}. \end{aligned}$$

Из соотношения (П.2.39) имеем $\Delta(1+\bar{X}) = \ln(1+\Delta/c)$, поэтому

$$\gamma_\Delta = \frac{(1+\Delta/c) - e^{\Delta \bar{z}_1}}{(1+\Delta/c) - e^{\Delta \bar{z}_2}} e^{-\Delta(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)} \frac{\ln(1+\Delta/c) - \Delta \bar{z}_2}{\ln(1+\Delta/c) - \Delta \bar{z}_1}. \quad (\text{П.2.53})$$

Из (П.2.52), (П.2.40), (П.2.43) и (П.2.45) имеем

$$v_\Delta(\bar{z}) = V(g_\Delta(1+\bar{X}), g_\Delta(\bar{z}));$$

$$v'_\Delta(\bar{z}) = V'_{g_\Delta(\bar{z})} g'_\Delta(\bar{z}) = \frac{V^2}{g_\Delta^2(\bar{z})} g'_\Delta(\bar{z});$$

$$\begin{aligned} \delta_\Delta &= \frac{V[g_\Delta(1+\bar{X}), g_\Delta(\bar{z}_1)] - V[g_\Delta(1+\bar{X}), g_\Delta(\bar{z}_2)]}{\sqrt{V'_{g_\Delta(\bar{z}_1)}(g_\Delta(1+\bar{X}), g_\Delta(\bar{z}_1)) V'_{g_\Delta(\bar{z}_2)}(g_\Delta(1+\bar{X}), g_\Delta(\bar{z}_2))}} \frac{1}{\sqrt{g'_\Delta(\bar{z}_1) g'_\Delta(\bar{z}_2) (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}}. \end{aligned}$$

Снова используя тождество (П.2.45), получаем

$$\begin{aligned} \delta_\Delta &= \frac{g_\Delta(\bar{z}_1) - g_\Delta(\bar{z}_2)}{\sqrt{g'_\Delta(\bar{z}_1) g'_\Delta(\bar{z}_2) (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}} = \\ &= \frac{e^{\Delta \bar{z}_1} - e^{\Delta \bar{z}_2}}{\Delta(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)} e^{-\Delta(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)/2} = \frac{e^{-\Delta(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)/2} - e^{-\Delta(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)/2}}{2\Delta(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)/2}. \end{aligned}$$

Итак, имеем окончательно

$$\delta_{\Delta}(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{e^{\Delta(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)/2} - e^{\Delta(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)/2}}{2\Delta(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)/2} \equiv \frac{\text{Sh}(\Delta(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)/2)}{\Delta(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)/2}. \quad (\text{П.2.54})$$

Рассмотрим случай малых значений $\Delta \ll 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \gamma_{\Delta} &\approx \frac{c^{-1} - \bar{z}_1 - \Delta \bar{z}_1^2/2}{c^{-1} - \bar{z}_2 - \Delta \bar{z}_2^2/2} \frac{c^{-1} - \bar{z}_2 - \Delta/2c^2}{c^{-1} - \bar{z}_1 - \Delta/2c^2} \times \\ &\times \left(1 - \frac{\Delta(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{2} + \frac{\Delta^2(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^2}{24} \right); \\ \delta_{\Delta} &\approx 1 + \frac{[\Delta(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)/2]^2}{6} = 1 + \frac{\Delta^2(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^2}{24}. \end{aligned} \quad (\text{П.2.55})$$

Ранее было показано, что в общем случае $\delta \geq 1$. Из соотношений (П.2.55) следует, что для малых значений $\Delta \ll 1$

$$\gamma < 1 \text{ и } 0 \leq (\delta - \gamma)\gamma < \delta\gamma < 1. \quad (\text{П.2.56})$$

Покажем, что следствием неравенств (П.2.56) являются неравенства

$$m(1, 1) \geq m(1, \bar{z}) \geq m(\bar{z}, \bar{z}) \geq m(\bar{z}, 1),$$

связанные со значениями оперативной характеристики $m(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ для адаптационного цикла. В самом деле, из (П.2.51) имеем

$$m(1, 1) = 1 + v(1);$$

$$m(1, \bar{z}) = 1 + v(\bar{z}) + \gamma(1, \bar{z}) \sqrt{v'(1)v'(\bar{z})} (1 - \bar{z});$$

$$m(\bar{z}, \bar{z}) = 1 + v(\bar{z});$$

$$m(\bar{z}, 1) = 1 + v(1) + \gamma(\bar{z}, 1) \sqrt{v'(1)v'(\bar{z})} (\bar{z} - 1).$$

Отсюда, обозначив $\gamma(1, \bar{z}) = \gamma$ и $\delta(1, \bar{z}) = \delta$, имеем

$$m(\bar{z}, \bar{z}) - m(\bar{z}, 1) = (-\delta + \gamma^{-1}) \sqrt{v'(1)v'(\bar{z})} (1 - \bar{z});$$

$$m(1, \bar{z}) - m(\bar{z}, \bar{z}) = \gamma \sqrt{v'(1)v'(\bar{z})} (1 - \bar{z});$$

$$m(1, 1) - m(1, \bar{z}) = (\delta - \gamma) \sqrt{v'(1)v'(\bar{z})} (1 - \bar{z});$$

$$m(1, 1) - m(\bar{z}, 1) = \gamma^{-1} \sqrt{v'(1)v'(\bar{z})} (1 - \bar{z}).$$

Отсюда

$$\Delta_{a1} = \frac{m(\bar{z}, \bar{z}) - m(\bar{z}, 1)}{m(1, 1) - m(\bar{z}, 1)} = 1 - \delta\gamma; \quad \Delta_n = \frac{m(1, \bar{z}) - m(\bar{z}, \bar{z})}{m(1, 1) - m(\bar{z}, 1)} = \gamma^2;$$

$$\Delta_{a2} = \frac{m(1, 1) - m(1, \bar{z})}{m(1, 1) - m(\bar{z}, 1)} = (\delta - \gamma)\gamma = 1 - \Delta_{a1} - \Delta_n. \quad (\text{П.2.57})$$

П.2.3. Найдем условный экстремум (минимум) функции

$$V = V(\vec{u}) = \sum_{\alpha=1}^a v^*_\alpha \exp\left(-\frac{u_\alpha}{u^*_\alpha}\right)$$

вектора $\vec{u} = (u_\alpha)$, зависящей от двух векторных параметров $\vec{u}^* = (u^*_\alpha)$ и $\vec{v}^* = (v^*_\alpha)$ ($\alpha = \overline{1, a}$) при условии, что $\vec{u} \in W_u$, где

$$W_u = \left\{ \vec{u}: u_\alpha > 0 \ (\alpha = \overline{1, a}), \sum_{\alpha=1}^a u_\alpha = U \right\}.$$

Будем считать, что u^*_α и $v^*_\alpha > 0$. Задача сводится к отысканию безусловного экстремума функции

$$Q = V + \lambda \sum_{\alpha=1}^a u_\alpha,$$

где λ — множитель Лагранжа.

Координаты вектора $\vec{u} = \vec{u}^0 = (u^0_\alpha)$, при которых функция V достигает своего экстремального значения, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial Q}{\partial u_\alpha} = -v^*_\alpha [\exp(-u_\alpha/u^*_\alpha)]/u^*_\alpha + \lambda = 0.$$

Отсюда после несложных преобразований находим

$$u^0_\alpha = Ux_\alpha + [x_\alpha - x^*_\alpha] \left[k(x, y) + \sum_{\alpha=1}^a u^*_\alpha \ln \left(\frac{\sum_{\alpha=1}^a u^*_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^a v^*_\alpha} \right) \right] \sum_{\alpha=1}^a u^*_\alpha; \quad (\text{П.2.58})$$

$$V^0 = V(\vec{u}^0) = \min_{\vec{u} \in W_u} V_{\vec{u}^*, \vec{v}^*}(\vec{u}) = \sum_{\alpha=1}^a v^*_\alpha \exp [Ux_\alpha - k(x, y)], \quad (\text{П.2.59})$$

где

$$x_\alpha = u^*_\alpha \left/ \sum_{\alpha=1}^a u^*_\alpha \right.; \quad y_\alpha = v^*_\alpha \left/ \sum_{\alpha=1}^a v^*_\alpha \right.;$$

$$x^*_\alpha = u^*_\alpha \ln \frac{u^*_\alpha}{v^*_\alpha} \left/ \sum_{\alpha=1}^a u^*_\alpha \ln \frac{u^*_\alpha}{v^*_\alpha} \right.;$$

$$k(x, y) = \sum_{\alpha=1}^a x_{\alpha} \ln \frac{x_{\alpha}}{y_{\alpha}} \geq 0.$$

Будем считать $u_{\alpha}^* > 0$ и $v_{\alpha}^* > 0$ ($\alpha = \overline{1, a}$). Тогда при достаточно больших значениях $U > 0$ будем иметь из (П.2.58) $u_{\alpha}^0 > 0$ ($\alpha = \overline{1, a}$). В теории оптимального распределения ресурсов эта задача на экстремум решается без ограничений на $U > 0$. Однако мы будем рассматривать лишь случай достаточно больших значений $U > 0$.

Если вектор $\vec{v}^* = \text{const}$ (тогда и $\vec{y} = \text{const}$), то как легко видеть,

$$V^{00} = \max_{\vec{u}^*} V(\vec{u}^0) = \sum_{\alpha=1}^a v_{\alpha}^* \exp(-U x_{\alpha}) \text{ при } x_{\alpha} = y_{\alpha} \text{ } (\alpha = \overline{1, a}).$$

(П.2.60)

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СИСТЕМНОЙ ЭКОЛОГИИ (МИКРОУРОВЕНЬ) И МОНИТОРИНГА

П.3.1. Последовательное обнаружение. Пусть задано распределение $P_{\alpha} = \{P_{\alpha}(x)\}$ случайной величины ξ , зависящее от действительного параметра a . Выдвигаются две гипотезы о двух значениях параметра a : $H_0 = H(a = a_0)$ и $H_1 = H(a = a_1)$. Требуется по выборке нарастающего объема $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n \dots$ вынести решение о том значении параметра a_0 или a_1 , при котором была получена выборка. Другими словами, необходим выбор между двумя гипотезами H_0 или H_1 . Следует произвести оптимальный выбор в следующем смысле. Зафиксируем две вероятности $F = P(H_1/H_0)$ и $1-D = P(H_0/H_1)$ — принять гипотезу H_1 , когда имеет место гипотеза H_0 и, наоборот, принять гипотезу H_0 , когда имеет место гипотеза H_1 . Эти вероятности называют вероятностями ошибок 1-го и 2-го рода соответственно. В приложениях вероятность F называется *вероятностью ложной тревоги*, а вероятность D — *вероятностью правильного обнаружения*. Тогда объем нарастающей выборки n , по которой выносится решение, оказывается случайной величиной, имеющей математические ожидания $E_0 n$ и $E_1 n$ в зависимости от того, какая из гипотез H_0 или H_1 имеет место.

Оптимальной называется такая процедура выбора между гипотезами H_0 и H_1 , при которой для пары фиксированных значений F и D величины $E_0 n$ и $E_1 n$ одновременно оказываются минимальными. А. Вальд [85] показал, что такой процедурой является последовательное суммирование величин $\zeta_i = \ln(P_{a_1}(x_i)/P_{a_0}(x_i))$ до первого

пересечения их суммы $\sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i$ одного из порогов $\ln B < 0 < \ln A$,

где

$$B \approx \frac{1-D}{1-F} < 1 < \frac{D}{F} \approx A. \quad (\text{П.3.1})$$

Если параметр a , при котором получена выборка, вообще говоря, отличается от a_0 и a_1 , то вероятность $D(a)$ принятия гипотезы H_1 и математическое ожидание $E_a \nu$ необходимого для этого объема выборки имеют вид [85, с. 26, 27]

$$\begin{aligned} D(a) &\approx (1-B^h)/(A^h-B^h); \\ E_a \nu &\approx [(1-D(a)) \ln B + D(a) \ln A]/E_a \xi; \\ E_a \xi &= \sum_x P_a(x) \ln [P_{a_1}(x)/P_{a_0}(x)], \end{aligned} \quad (\text{П.3.2})$$

и величина $h=h(a)$ как функция параметра a определяется из трансцендентного уравнения

$$\sum_x [P_{a_1}(x)/P_{a_0}(x)]^h P_a(x) = 1, \quad (\text{П.3.3})$$

причем в случае непрерывности случайной величины ξ суммы в соотношениях (П.3.2) и (П.3.3) заменяются соответствующими интегралами от плотностей вероятностей $P_a(x)$. Величину $D(a)$ в последовательном обнаружении называют *оперативной характеристикой*. Из соотношения (П.3.3) следует, что

$$D(a_0) = F, \quad h(a_0) = 1 \quad \text{и} \quad D(a_1) = D, \quad h(a_1) = -1, \quad (\text{П.3.4})$$

при этом выражения $E_{a_0} \xi$, $E_{a_1} \xi$ и $n_0 = E_{a_0} \nu$, $n_1 = E_{a_1} \nu$ имеют особую компактный вид:

$$\begin{aligned} E_{a_0} \xi &= k(P_{a_0}, P_{a_1}) \quad \text{и} \quad E_{a_1} \xi = k(P_{a_1}, P_{a_0}); \\ n_0 &= k(F, D)/k(P_{a_0}, P_{a_1}) \quad \text{и} \quad n_1 = k(D, F)/k(P_{a_1}, P_{a_0}), \end{aligned} \quad (\text{П.3.5})$$

где $k(x, y) = \sum_i x_i \ln(x_i/y_i)$, и в непрерывном случае сумма заменяется соответствующим интегралом. Заметим, что в бинарном случае

$$\begin{aligned} k(x, y) &= x \ln \frac{x}{y} + (1-x) \ln \frac{1-x}{1-y} \approx \\ &\approx \begin{cases} \frac{(x-y)^2}{2y(1-y)} \approx \frac{(x-y)^2}{2x(1-x)} & \text{при } x \rightarrow y, \\ \ln \frac{1}{1-y} & \text{при } x \rightarrow 0, \\ \ln \frac{1}{y} & \text{при } x \rightarrow 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{П.3.6})$$

Найдем выражение $D(a)$ для $a+\Delta a$, когда параметр $h=h(a)$ имеет соответствующее значение $h+\Delta h$. Для этого воспользуемся формулой Тейлора

$$D[a(h+\Delta h)] = D[a(h)] + \Delta h D'_h[a(h)] + O[(\Delta h)^2] \quad (\text{П.3.7})$$

и первым из соотношений (П.3.2). Получим

$$D'h = \begin{cases} -k(F, D) D(1-D)/(D-F) & \text{при } a = a_1 (h = -1), \\ -k(D, F) F(1-F)/(D-F) & \text{при } a = a_0 (h = 1). \end{cases} \quad (\text{П.3.8})$$

В работе [43, с. 40, 316] показано, что для случая близких гипотез H_0 и H_1 (при малых значениях $|a_1 - a_0|$) имеет место асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned} h &\approx 1 - \frac{a - a_0}{a_1 - a_0} + O\left(\frac{a - a_0}{a_1 - a_0}\right), \\ h &\approx -1 + 2 \frac{a_1 - a}{a_1 - a_0} + O\left(\frac{a_1 - a}{a_1 - a_0}\right). \end{aligned} \quad (\text{П.3.9})$$

В случае нормального распределения $P_a(x)$ со средним a и дисперсией $\sigma^2=1$ это соотношение является точным. Поэтому Δh , соответствующее Δa в точках a_0 и a_1 , когда $h=1$ и -1 соответственно, имеет вид

$$\Delta h = \begin{cases} -\frac{a - a_0}{a_1 - a_0} & \text{при } a = a_0, \\ 2 \frac{a_1 - a}{a_1 - a_0} & \text{при } a = a_1. \end{cases} \quad (\text{П.3.10})$$

Подставив соотношения (П.3.8) и (П.3.10) в (П.3.7), получим

$$\begin{aligned} D(a + \Delta a) &\approx \\ &\approx \begin{cases} F + \frac{a - a_0}{a_1 - a_0} k(D, F) F(1-F)/(D-F) & \text{при } a = a_0, \\ D - 2 \frac{a_1 - a}{a_1 - a_0} k(F, D) D(1-D)/(D-F) & \text{при } a = a_1. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{П.3.11})$$

Для случая близких гипотез [43, с. 34]

$$E_a \xi \approx \Delta^2_1 \left(\frac{\Delta}{\Delta_1} - 0,5 \right) I_2(a_0) + O(\Delta^3), \quad (\text{П.3.12})$$

где

$$I_2(a_0) = \sum_x \left| \frac{\partial \ln P_a(x)}{\partial a} \right|^2 P_{a_0}(x) \quad (\text{П.3.13})$$

— константа, учитывающая вид распределения $P_a(x)$. Если ξ — непрерывная случайная величина, то сумма в (П.3.13) заменяется соответствующим интегралом. В частности, для $a=a_1$ и $a=a_0$ из (П.3.12) имеем

$$E_{a_1} \xi \approx -E_{a_0} \xi = \Delta^2_1 I_2(a_0) / 2, \quad (\text{П.3.14})$$

Отсюда из (П.3.5) имеем

$$\frac{n_0}{n_1} \approx \frac{k(F, D)}{k(D, F)} = \frac{F \ln \frac{F}{D} + (1-F) \ln \frac{1-F}{1-D}}{D \ln \frac{D}{F} + (1-D) \ln \frac{1-D}{1-F}} \approx \frac{\ln \frac{1}{1-D}}{\ln \frac{1}{F}} = u, \quad (\text{П.3.15})$$

и если $1-D=F^u \gg F$ ($u < 1$), то $n_0=un_1 < n_1$, если $1-D=F^u \ll F$ ($u > 1$), то $n_0=un_1 > n_1$. В частности, для $a_0=0$, когда параметр a находится в окрестностях значений a_1 и 0 , соответствующие соотношения

$$\frac{a^2}{2} I_2(0) n_1 \approx \ln \frac{1}{F} \quad \text{и} \quad \frac{a^2}{2} I_2(0) n_0 \approx \ln \frac{1}{1-D}$$

эквивалентны друг другу (первое следует из второго делением обеих частей последнего на u). Поэтому для обоих случаев имеем одно выражение для вероятности обнаружения сигнала

$$D(a) \approx 1 - \exp[-n_0 a^2 I_2(0) / 2]. \quad (\text{П.3.16})$$

В качестве примеров рассмотрим случай нормального распределения

$$P_{a, \sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left[-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2\right] \quad (\text{П.3.17})$$

и два варианта гипотез о его параметрах:

- 1) $\sigma = \sigma_{ш} = \text{const}$, $H_0 = H(a=0)$, $H_1 = H(a=a_1)$;
- 2) $a = 0 = \text{const}$, $H_0 = H(\sigma^2 = \sigma_{ш}^2)$, $H_1 = H(\sigma^2 = \sigma_c^2 + \sigma_{ш}^2)$

Используя интегральный аналог сумм $E a \zeta$ в выражении (П.3.2), для двух вариантов рассмотренных гипотез будем иметь выражение $E_1 \zeta$ для значений параметров при гипотезе H_1 для первого и второго вариантов

$$E_1 \zeta = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{a_1}{\sigma_{ш}}\right)^2, \\ \frac{1}{2} \left[\ln \left(1 + \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_{ш}}\right)^2\right) - 1 + \left(1 + \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_{ш}}\right)^2\right)^{-1} \right] \approx \\ \approx \frac{1}{4} \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_{ш}}\right)^4 \quad \text{при} \quad \frac{\sigma_c}{\sigma_{ш}} \ll 1. \end{cases}$$

Поскольку в рассматриваемом случае $I_2(0)=1$, приближенное для близких гипотез выражение (П.3.14) здесь в первом случае становится точным.

П.3.2. Зависимость вероятности обнаружения особью сигнала от расстояния до его источника. Рассмотрим две зависимости затухания интенсивности $E(x)$ сигнала от расстояния $r \gg r_*$ до его источника:

$$E(r) = \begin{cases} E_* \exp[-\lambda(r-r_*)], \\ E_* (r/r_*)^{-s}, \end{cases} \quad (\text{П.3.18})$$

экспоненциальную и показательную, соответствующие затуханию физических сигналов.

Согласно закону Вебера — Фехнера особь принимает сигналы интенсивностью E , находящейся в диапазоне $E_0 \leq E \leq E_1$, производя над ними логарифмическое преобразование:

$$I = I(r) = I_* [\ln(E(r)/E_0)] / \ln(E_1/E_0), \quad (\text{П.3.19})$$

где I_* — максимальная сенсорная интенсивность.

Подставив соотношения (П.3.18) в (П.3.19), получим

$$I = I_* \begin{cases} \frac{r_0 - r}{r_0 - r_1} = \frac{1 - (r/r_0)}{1 - (r_1/r_0)}, \\ \frac{\ln(r_0/r)}{\ln(r_0/r_1)}, \end{cases} \quad (\text{П.3.20})$$

где r_0 и r_1 соответствуют значениям $E_0 = E(r_0)$ и $E_1 = E(r_1)$, определяемым по формулам (П.3.18). Важно, что соотношения (П.3.20) не зависят от параметров λ и s . Будем интерпретировать параметр a безразмерным параметром отношения сигнала-шум. Поскольку в нормальном случае $I_2(0) = 1$ и для случая слабых сигналов все характеристики обнаружения нормализуются [43], положим

$$a = I / \sqrt{\sigma^2 + I_{\text{ш}}^2},$$

где I^2 — сигнальная, а σ^2 и $I_{\text{ш}}^2$ — внутренняя и внешняя шумовые интенсивности на сенсорном уровне соответственно. Тогда, используя соотношения (П.3.16) и (П.3.20), получим

$$D(r) \approx \begin{cases} 1 - \exp\left(-c_1 \frac{1 - r/r_0}{1 - r_1/r_0}\right), \\ 1 - \exp\left[-c_1 \frac{\ln(r_0/r)}{\ln(r_0/r_1)}\right], \end{cases} \quad (\text{П.3.21})$$

где

$$c_1 = n_s I_* J_2(0) / 2 \sqrt{\sigma^2 + I_{\text{ш}}^2}. \quad (\text{П.3.22})$$

Заметим, что при $r \rightarrow r_0$ (а этот случай и имеет основной практический интерес), когда $D(r) \sim 0,5$, в обоих случаях закона затухания сигнала имеем

$$D(r) \approx 1 - \exp[-c_2(1 - r/r_0)] \sim c_2(1 - r/r_0), \quad (\text{П.3.23})$$

где

$$c_2 = \begin{cases} c_1 / (1 - r_1/r_0), \\ c_1 / \ln(r_0/r_1), \end{cases} \quad (\text{П.3.24})$$

для каждого из случаев затухания сигнала соответственно.

П.3.3. Суммарная интенсивность точечных источников h -решетки. Рассмотрим α -мерную h -решетку и множество узлов внутри сферы радиусом R с центром в фиксированном узле. Пусть в каждом из узлов внутри сферы помещен источник сигналов интенсивностью E_* с законом затухания $E(\rho)$, где ρ — расстояние от источника до приемника сигналов.

Очевидно, что максимальная суммарная интенсивность приходится на центр сферы, а минимальная — на ее периферию, однако можно показать, что их отношение не превышает 3. Поэтому для оценки порядка величины суммарной интенсивности достаточно про-

известна ее оценка в центре сферы. Обозначим ее для m источников через $E_m(h)$. Будем иметь

$$E_m(h) = \sum_{\rho=h}^R n_\alpha(\rho, h) E(\rho), \quad (\text{П.3.25})$$

где $n_\alpha(\rho, h)$ — число точек h -решетки в ε -окрестностях ($\varepsilon < h$) окружности ($\alpha=2$) или сферы ($\alpha=3$) радиусом ρ . Так как длина окружности (площадь сферы) радиусом ρ равна $2\pi\rho$ ($4\pi\rho^2$), то

$$n_\alpha(\rho, h) \approx c'_\alpha (\rho/h)^{\alpha-1}, \quad (\text{П.3.26})$$

где

$$c'_\alpha = \begin{cases} 2\pi & \text{при } \alpha = 2, \\ 4\pi & \text{при } \alpha = 3. \end{cases} \quad (\text{П.3.27})$$

Поэтому окончательно имеем

$$E_m(h) \approx c'_\alpha \sum_{\rho=h}^R \left(\frac{\rho}{h}\right)^{\alpha-1} E(\rho). \quad (\text{П.3.28})$$

Рассмотрим показательный случай (П.3.18) закона затухания

$$E(\rho) = (\rho/h)^{-s} E(h) \quad (\text{П.3.29})$$

и найдем связь между параметрами R , m и h . Легко видеть, что

$$mh^\alpha = c_\alpha R^\alpha, \quad (\text{П.3.30})$$

где

$$c_\alpha = \begin{cases} \pi & \text{при } \alpha = 2, \\ \frac{4}{3}\pi & \text{при } \alpha = 3. \end{cases} \quad (\text{П.3.31})$$

Из соотношения (П.3.30) имеем

$$R = (m^{1/\alpha}/c_\alpha^{1/\alpha}) h. \quad (\text{П.3.32})$$

Произведем теперь интегральную оценку суммы (П.3.28) для больших значений m ($R \gg h$), полагая $\rho = ih$ ($i = 1, [m^{1/\alpha}/c_\alpha^{1/\alpha}]$). Будем иметь, используя соотношения (П.3.26) и (П.3.29),

$$\begin{aligned} E_m(h) &\approx E(h) c'_\alpha \sum_{i=1}^{[m^{1/\alpha}/c_\alpha^{1/\alpha}]} i^{\alpha-s-1} \approx E(h) c'_\alpha \int_1^{m^{1/\alpha}/c_\alpha^{1/\alpha}} x^{\alpha-s-1} dx = \\ &= E(h) c'_\alpha \frac{x^{\alpha-s}}{\alpha-s} \Big|_{x=1}^{x=m^{1/\alpha}/c_\alpha^{1/\alpha}} = \\ &= E(h) c'_\alpha \frac{(m^{1/\alpha}/c_\alpha^{1/\alpha})^{1-s/\alpha} - 1}{\alpha-s} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E(h) \frac{c'_\alpha}{\alpha c_\alpha^{1-s/\alpha}} \frac{m^{1-s/\alpha} - c_\alpha^{1-s/\alpha}}{1-s/\alpha} \\
&= E(h) \frac{c'_\alpha}{\alpha c_\alpha^{1-s/\alpha}} \begin{cases} \frac{m^{1-s/\alpha} - c_\alpha^{1-s/\alpha}}{1-s/\alpha} & \text{при } 1-s/\alpha > 0, \\ c_\alpha^{1-s/\alpha} (\ln m - c_\alpha) & \text{при } 1-s/\alpha = 0, \\ \frac{c_\alpha^{1-s/\alpha} - m^{-(s/\alpha-1)}}{s/\alpha-1} & \text{при } 1-s/\alpha < 0 \end{cases} \\
&\hspace{15em} ((s/\alpha - 1) > 0).
\end{aligned}$$

Таким образом, для больших значений $m \gg c_\alpha$ имеем

$$E_m(h) = E(h) c_{\alpha s} \begin{cases} m^{1-s/\alpha} + O(1) & \text{при } 1-s/\alpha > 0, \\ c_\alpha^{1-s/\alpha} \ln m & \text{при } 1-s/\alpha = 0, \\ \frac{\alpha c_\alpha^{1-s/\alpha}}{s-\alpha} - O(m^{-(s/\alpha-1)}) & \text{при } s/\alpha - 1 > 0, \end{cases} \quad (\text{П.3.33})$$

где константа $c_{\alpha s} = c'_\alpha / (\alpha c_\alpha^{1-s/\alpha})$ имеет вид

$$c_{\alpha s} = 2(\alpha - 1) \pi / (\alpha - s) [(\alpha + 1) \pi / 3]^{1-s/\alpha}.$$

П.3.4. Вероятности обнаружения и ложной тревоги m -стаи. Рассмотрим случай тяжелых для отдельной особи m -стаи условий обнаружения внешних сигналов, когда имеются высокие требования к вероятностям ложной тревоги F_0 , а вероятности правильного обнаружения D_0 из-за дальности внешних объектов, находящихся на расстоянии r , не могут быть близкими к единице из-за ограниченности времени накопления сигналов (m -стая находится в движении). Итак, пусть $F_0 \ll 1 - D_0 \sim 0,5$ и оперативная характеристика $D(r)$ (вероятность обнаружения), близкая к D_0 , определяется соотношением (П.3.23), когда каждая из особей m -стаи независимо от других ведет последовательное обнаружение внешних сигналов. Однако, по определению, решение о наличии внешнего сигнала выносится коллективно. m -стая выносит решение о его наличии, когда не менее чем θ -я доля ее особей выносит такое решение. Введенная модель коллективного решения соответствует схеме Бернулли в бинарном случае, рассмотренном в п. П.1.3. Параметром числа n независимых испытаний является величина m , вероятностью p появления события A_1 в случае наличия внешнего объекта — величина $D(r)$, а в случае его отсутствия — величина F_0 . Суммирование же соответствующих биномиальных вероятностей $P_{m,p}(k)$ ведется от $k = [m\theta]$ до $k = m$. Тогда в соответствии с соотношением (П.1.18) при условии, что $F_0 < \theta < D(r)$, будем иметь для вероятностей обнаружения $D_m(r)$ и ложной тревоги F_m m -стаи

$$D_m(r) \approx 1 - \exp(-mk(\theta, D(r))) \text{ и } F_m \approx \exp(-mk(\theta, F_0)). \quad (\text{П.3.34})$$

П.3.5. Оценка вероятности связности случайного графа. Произведем оценки связности случайного графа $\Gamma_{m,D}$ [70], в котором ребра, соединяющие пары из его m вершин, могут быть с вероятностью

D и не быть с вероятностью $1-D$ независимо друг от друга и каждая вершина в общем случае может быть соединена ребрами лишь с k фиксированными вершинами. Такого рода оценки восходят к работам Гильберта [63] (см. также [64]). Введем события A_i ($i=1, m$). Событие A_i состоит в том, что i -я вершина не соединена ребром ни с какой другой, т. е. изолирована. Пусть событие S_m означает, что граф Γ_{mD} не связан. Тогда очевидно, что

$$S_m \supseteq \bigcup_{i=1}^m A_i. \quad (\text{П.3.35})$$

Введем события \bar{B}_i ($i=1, m$). Событие \bar{B}_i состоит в том, что i -я вершина соединена ребрами со всеми $(m-1)$ -й вершиной графа Γ_{mD} . Тогда для события \bar{S}_m , состоящего в связности графа, имеем

$$\bar{S}_m \supseteq \bigcap_{i=1}^m \bar{B}_i. \quad (\text{П.3.36})$$

Используя известные неравенства Буля и Бонферрони, будем иметь

$$P\left(\bigcap_{i=1}^m \bar{B}_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^m P(\bar{B}_i);$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = P\left(\overline{\bigcap_{i=1}^m \bar{A}_i}\right) \geq \sum_{i=1}^m P(A_i) - \sum_{1 < i < j < m} P(A_i \cap A_j).$$

Отсюда, используя соотношения (П.3.35) и (П.3.36), получаем оценки для вероятности P_{mD} связности графа Γ_{mD}

$$1 - \sum_{i=1}^m P(\bar{B}_i) \leq P_{mD} \leq 1 - \sum_{i=1}^m P(A_i) + \sum_{1 < i < j < m} P(A_i \cap A_j). \quad (\text{П.3.37})$$

Очевидно, что $P(A_i) = (1-D)^k$ ($k=1, m$). Вычислим вероятность $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j/A_i)$. Легко показать, что $P(A_j/A_i) = (1-D)^{k-1}$, если i -я вершина не входит в k фиксированных вершин, с которыми j -я вершина может соединяться ребрами, и $P(A_j/A_i) = (1-D)^{k-1}$ в противном случае. Поэтому

$$P(A_j/A_i) \leq (1-D)^{k-1} \text{ и } P(A_i \cap A_j) \leq (1-D)^{2k-1}.$$

Ясно, что $P(\bar{B}_i) = D^k$ и $P(\bar{B}_i) = 1 - D^k$. Поэтому оценка (П.3.37) имеет вид

$$1 - m(1-D)^k \leq P_{mD} \leq 1 - m(1-D)^k + \frac{m(m-1)}{2} (1-D)^{2k-1}. \quad (\text{П.3.38})$$

Для больших значений k нижняя оценка (П.3.38) слабая, поэтому требуются дополнительные исследования для ее усиления. Например, следующие. Граф Γ_{mD} связан тогда и только тогда, когда для любого разбиения множества его вершин X на два подмножества X_1 и X_2 существует хотя бы одно ребро, соединяющее некоторую вершину из X_1 с некоторой вершиной из X_2 . В связи с этим соображе-

нием имеет место неравенство

$$1 - P_{mD} \leq \sum_{s=1}^{[m/2]} C_m^s (1-D)^{\omega_s} = m(1-D)^k + \sum_{s=2}^{[m/2]} C_m^s (1-D)^{\omega_s}, \quad (\text{П.3.39})$$

где ω_s — минимальное число ребер, удаление которых разбивает граф Γ_{mD} на две части X_1 и X_2 с числом вершин s и $n-s$ соответственно. Из соотношений (П.3.38) и (П.3.39) будем окончательно иметь

$$1 - m(1-D)^k - \sum_{s=2}^{[m/2]} C_m^s (1-D)^{\omega_s} \leq P_{mD} \leq 1 - m(1-D)^k + \frac{m(m-1)}{2} (1-D)^{2k-1}. \quad (\text{П.3.40})$$

Для случая $k=m-1$ Гильбертом [63] было показано, что первые два члена оценок (П.3.40) являются асимптотически точными при $m \rightarrow \infty$ и $D = \text{const}$:

$$P_{mD} \approx 1 - m(1-D)^{m-1}. \quad (\text{П.3.41})$$

Для двумерных и трехмерных h -решеток имеют место следующие оценки, полученные авторами работы [70]. Пусть вершины графа Γ_{mD} расположены на двумерном торе, полученном склеиванием противоположных сторон прямоугольника, содержащих m_1 и m_2 вершин ($m = m_1 \times m_2$). Такие рассмотрения не меняют асимптотики (при $m \rightarrow \infty$), но упрощают рассмотрение (не нужен учет граничных эффектов). Если множество X_1 из s вершин является квадратом, то оно имеет наименьший периметр, составляющий $4\sqrt{s}$ вершин, и поэтому по определению числа ω_s имеем $\omega_s \geq 4\sqrt{s}$. Поэтому оценка третьего члена нижней оценки (П.3.40) имеет вид

$$\sum_{s=2}^{[m/2]} C_m^s (1-D)^{\omega_s} \leq \sum_{s=2}^{[m/2]} C_m^s (1-D)^4 \sqrt{s}. \quad (\text{П.3.42})$$

Из вогнутости функции \sqrt{x} следует, что на отрезке $2 \leq s \leq m/2$

$$\sqrt{s} \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m+2}} s + \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{m+2}} \geq \frac{s}{\sqrt{m}} + 1, \quad (\text{П.3.43})$$

где последняя оценка имеет место для достаточно больших значений $m \geq 25$. Используя оценки (П.3.42) и (П.3.43), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{s=2}^{[m/2]} C_m^s (1-D)^{\omega_s} &\leq (1-D)^4 \sum_{s=2}^{[m/2]} C_m^s (1-D)^{4s/\sqrt{m}} \leq \\ &\leq (1-D)^4 [1 + (1-D)^{4/\sqrt{m}}]^m. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы

$$1 - D \leq \exp(-\sqrt{m} \ln m/4). \quad (\text{П.3.44})$$

Подставив требование (П.3.44) в предыдущую оценку, видим, что с ростом m она возрастает, стремясь к пределу $(1-D)^4 e^{-1}$. Поэтому при соблюдении условия (П.3.44) оцениваемая сумма (П.3.42) имеет порядок $o((1-D)^4)$ и первые два члена нижней и верхней оценок (П.3.40) являются асимптотически точными. Итак, для $\alpha=2$

$$P_{mD} = 1 - m(1-D)^4 + o((1-D)^4).$$

Аналогично для трехмерного тора, если потребовать, чтобы $1-D \leq \exp(-\sqrt[3]{m} \ln m/6)$, то для $\alpha=3$ будем иметь $P_{mD} = 1 - m(1-D)^6 + o((1-D)^6)$.

Объединяя оценки для $k=4$ и $k=6$, при выполнении условия

$$1-D \leq \exp(-m^{1/\alpha} \ln m/k), \quad (\text{П.3.45})$$

будем иметь

$$P_{mD} \approx 1 - m(1-D)^k \geq 1 - \exp(-(m^{1/\alpha} - 1) \ln m). \quad (\text{П.3.46})$$

Потребуем, чтобы при соблюдении условий (П.3.45) для некоторого малого числа $\varepsilon > 0$ выполнялось условие $P_{mD} \geq 1 - \varepsilon$. Тогда из (П.3.45) и (П.3.46) будем иметь

$$(1-D)^k \leq \exp(-m^{1/\alpha} \ln m) \leq \varepsilon/m.$$

Отсюда, логарифмируя, имеем

$$\alpha \ln \left(1 + \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln m} \right) \leq \ln m \leq \alpha \ln \ln \frac{1}{(1-D)^k} - \alpha \ln \ln m.$$

Полагая $\eta > 0$ сколь угодно малым, усилим оба неравенства:

$$\alpha \ln \ln \frac{e}{\varepsilon} \leq \ln m \leq \alpha \ln \ln \frac{1}{(1-D)^k} - \alpha \eta \ln m.$$

Окончательно будем иметь

$$\alpha \ln \ln \frac{e}{\varepsilon} \leq \ln m \leq \alpha \ln \ln \frac{1}{(1-D)^k}. \quad (\text{П.3.47})$$

П.3.6. Максимальное значение вероятности связности случайного графа. Подставив выражение (3.5.13) для $1-D$ в (П.3.46), получим

$$P_{mD}(h, h_1) \approx 1 - m(1-D_1)^k \left(1 + \frac{d_1}{\ln m - d_2} \right)^k. \quad (\text{П.3.48})$$

Считая величину m непрерывной, приравняем производную выражения (П.3.48) по ней к нулю. Получим квадратное уравнение, из которого находим значение $m = m_{\text{opt}}^I$, обращающее выражение $P_{mD}(h, h_1)$ в максимум P_{max} . Имеем

$$P_{\text{max}} \approx 1 - m_{\text{opt}}^I (1-D_1)^k [1 + 2/(\sqrt{1 + 4k/d_1} - 1)]^k, \quad (\text{П.3.49})$$

где

$$\ln m_{\text{opt}}^I = d_2 + d_1 (\sqrt{1 + 4k/d_1} - 1)/2; \quad (\text{П.3.50})$$

$$1 - D \approx 1 - D(h, h_1) \approx (1 - D_1) [1 + 2/\sqrt{1 + 4k/d_1} - 1]. \quad (\text{П.3.51})$$

Рассмотрим практически интересный случай ограниченных значений $d_1 \ll 4k$. Тогда $(\sqrt{1 + 4kd_1} - 1)/2 \approx \sqrt{k/d_1}$, $\sqrt{d_1/k} \ll 2$, $\sqrt{kd_1} \ll 2k$ и соотношения (П.3.49) — (П.3.51) приводят к оценкам

$$P_{\max} \approx 1 - m_{\text{opt}}^I (1 - D_1)^k (1 + \sqrt{d_1/k})^k > 1 - m_{\text{opt}}^I [3(1 - D_1)]^k, \quad (\text{П.3.52})$$

$$\ln m_{\text{opt}}^I \approx d_2 + \sqrt{kd_1};$$

$$1 - D \approx (1 - D_1) (1 + \sqrt{d_1/k}) < 3(1 - D_1).$$

Подставив два последних выражения в оценки (П.3.47), усилив верхнюю из них, получим оценки

$$\alpha \ln \ln \frac{e}{\varepsilon} \leq d_2 + \sqrt{kd_1} < \alpha \ln \ln \frac{1}{[3(1 - D_1)]^k}. \quad (\text{П.3.53})$$

П.3.7. Вывод формулы среднего удельного рациона особи m -стаи. Рассмотрим α -мерную r -решетку на α -мерном торе ограниченного объема V . Как уже отмечалось в п. П.3.5, многие рассмотрения удобно проводить на торе для того, чтобы избежать неprincipиальных граничных эффектов.

Узлом элементарной ячейки назовем тот из 2^α принадлежащих ей узлов, который имеет минимальные координаты. Пусть агрегации пищи возникают в $N = V/h^\alpha$ узлах r -решетки с вероятностью p^α и не возникают с вероятностью $q = 1 - p^\alpha$ независимо друг от друга так, что в одном узле может возникнуть только одна агрегация (α -мерная схема Бернулли). Тогда число агрегаций, возникших в d узлах r -решетки, является случайной величиной μ_d^α , имеющей биномиальное распределение с параметрами d и p^α , и математическое ожидание $E\mu_d^\alpha = dp^\alpha$. В частности, обозначив $E\mu_N^\alpha = M$, имеем

$$M = Np^\alpha = Vp^\alpha/h^\alpha. \quad (\text{П.3.54})$$

Отсюда

$$p^\alpha = Mh^\alpha/V.$$

Пусть i -я агрегация имеет случайное число \mathbf{v}_i пищевых частиц и \mathbf{v}_i независимы между собой и одинаково распределены. Обозначим их математические ожидания $E\mathbf{v}_i = \mathbf{n}$. Соотнесем каждой i -й агрегации множество элементарных ячеек объемом ω_i , состоящее из всех элементарных ячеек, узлы которых имеют к ней более близкое евклидово расстояние, чем к остальным агрегациям. Если f -агрегаций имеют до данного узла одно и то же расстояние, то такой узел с вероятностью $1/f$ будем относить к любой из них. Ясно, что случайные объемы ω_i не пересекаются, заполняют весь объем V , одинаково распределены и поэтому имеют одно и то же математическое ожидание, которое мы будем обозначать $E\omega_i = \mathbf{v}$. Потребуем, чтобы \mathbf{v} и \mathbf{v}_i не зависели от случайной величины μ_N^α .

Рассмотрим суммы случайного числа случайных слагаемых:

$$\sum_{i=1}^{\mu_N^\alpha} v_i = v \text{ и } \sum_{i=1}^{\mu_N^\alpha} \omega_i = V = \text{const.} \quad (\text{П.3.55})$$

Тогда их математические ожидания удовлетворяют следующим соотношениям:

$$Mn = K \text{ и } Mv = V, \quad (\text{П.3.56})$$

где $K = Ev$. Заметим, что последнее соотношение имеет место, несмотря на то, что ω_i являются зависимыми случайными величинами. В самом деле, если зафиксировать $\mu_N^\alpha = m$, то для условных математических ожиданий $E_m \omega_i = v_m$ имеем $mv_m = V$. Обозначим $\mathcal{P}(\mu = m) = p_m$ и возьмем математические ожидания от обеих частей последнего тождества. Будем иметь $\sum_m mv_m p_m = V$. Если $v_m = v$ не зависит от m , то, вынося его за знак суммы, получим второе из соотношений (П.3.56).

Введем определения плотностей пищевых частиц:

$$\rho = K/V \text{ и } \rho^* = n/r^\alpha \quad (\text{П.3.57})$$

во всем объеме V и в элементарной ячейке, содержащей агрегацию, соответственно. Кроме того, введем величину

$$l = v^{1/\alpha}, \quad (\text{П.3.58})$$

являющуюся стороной куба, имеющего тот же объем, что и математическое ожидание v случайного объема ω_i . Используя соотношения (П.3.55), (П.3.56) и определения (П.3.57) и (П.3.58), получаем

$$\rho^\alpha = (r/l)^\alpha \text{ и } \rho = n/l^\alpha = \rho^\alpha \rho^*. \quad (\text{П.3.59})$$

Теперь рассмотрим два режима поиска пищи m -стаей при блуждании по r -решетке: первый режим «зрячего облова», когда в ее поле обнаружения всегда находится агрегация, и второй режим «слепого рыска», когда она на них случайно «натывается», имея произвольную, в частности прямолинейную, траекторию движения. И так, как в первом, так и во втором случае будем считать, что m -стая движется прямолинейно с постоянной скоростью $w = \text{const}$ по прямой, пересекающей ближайшие соседние узлы r -решетки.

Пусть пройдено d узлов. Тогда количество пищевых частиц, собранных m -стаей, имеет вид

$$v_d^\alpha = \sum_{i=1}^{\mu_d^\alpha} v_i, \quad (\text{П.3.60})$$

где μ_d^α — биномиально распределенная случайная величина с параметрами d и $p^\alpha = (r/l)^\alpha$, где $\alpha = 1$ в первом случае и $\alpha \geq 1$ во втором. В первом случае, двигаясь в направлении обнаруживаемой

агрегации линейно от другой такой же агрегации, m -стая находится в условиях одномерной схемы Бернулли. Во втором случае имеет место α -мерная схема Бернулли ($\alpha \geq 1$). В одномерном случае слепой рыск и зрячий облов неразличимы.

Пусть при прохождении с фиксированной скоростью w ребра r -решетки длиной r j -я особь m -стай несет энергетические потери, эквивалентные потерям случайного числа ξ_j пищевых частиц. Будем считать эти числа одинаково распределенными с математическими ожиданиями $E\xi_j = Z(w) = Z$.

Предполагается, что при обнаружении m -стай пищевой агрегации она выедается m -стай полностью и каждой ее особи в среднем достается m -я доля пищевых частиц. Тогда случайный рацион ξ_d особи m -стай при прохождении d узлов имеет вид

$$\xi_d = \begin{cases} v^1_d/m - \sum_{j=1}^d \xi_j, \\ v^{\alpha}_d/m - \sum_{j=1}^d \xi_j \end{cases}$$

в первом и во втором случаях соответственно. Отсюда

$$E\xi_d = \begin{cases} d \left(\frac{n}{m} \frac{r}{l} - Z \right) = dr \left(\frac{n}{lm} - \frac{Z}{r} \right), \\ \left[d \frac{n}{m} \left(\frac{r}{l} \right)^{\alpha} - Z \right] = dr \left(\frac{nr^{\alpha-1}}{l^{\alpha}m} - \frac{Z}{r} \right) \end{cases} \quad (\text{П.3.61})$$

в первом и во втором случаях соответственно.

Обозначим время прохождения m -стай d узлов через T . Тогда $dr = Tw$. Определим средний удельный потенциальный рацион R особи m -стай как отношение $R = E\xi_d/T$, имеющее размерность частица/с. Тогда, используя обозначения (П.3.59) и соотношения (П.3.61), получим

$$R = [(py^{\alpha-1}/m) - z] w, \quad (\text{П.3.62})$$

где $z = Z/r$ — средняя величина энергетических потерь особи m -стай при прохождении ею 1 м пути (эта величина выражения имеет размерность частица/м, $y = \min(l, r)$, т. е. $y = l$ при $l \leq r$ (в случае зрячего облова) и $y = r$ при $r < l$ (в случае слепого рыска).

В рассмотренных этом пункта не учитывались размеры агрегации. Полученные здесь результаты использованы в п. 3.5.4, где агрегации наделены размером. Там получается, что агрегация имеет форму α -мерного шара радиусом r_{π} с центром в узле r -решетки, где $r = r_m = r_{\pi} + r(m)$, причем $r(m)$ — расстояние уверенного обнаружения m -стай кромки агрегации. При этом вводится плотность ρ_{π} пищевых частиц в агрегации $\rho_{\pi} = n/r_{\pi}^{\alpha} \geq \rho^*$.

П.3.8. Максимизация среднего удельного рациона особи m -стай. Для обращения в максимум величины R , определяемой соотношением (П.3.62), рассмотрим общую задачу обращения в максимум действительной функции

$$Y = X(1 - X^{\alpha}A)^b \quad (\text{П.3.63})$$

действительного аргумента X . Параметры A , a и b будем считать неотрицательными и $0 \leq X \leq A^{-1/a}$, вследствие чего $Y \geq 0$. Для исследования функции Y в окрестности ее максимума удобно следующее ее преобразование:

$$AY^a = AX^a (1 - AX^a)^{ab}. \quad (\text{П.3.63}')$$

Введем новые переменные x , y и параметр c : $0 \leq x = AX^a \leq 1$, $0 \leq y = AY^a$, $0 \leq c = (1 + ab)^{-1} \leq 1$, откуда

$$X = (x/A)^{1/a}, \quad Y = (y/A)^{1/a}, \quad Y = (y/x)^{1/a} X \\ \text{и } ab = (1 - c)/c. \quad (\text{П.3.64})$$

Используя новые переменные и определение k -функции (см. (П.3.6)), получим из соотношения (П.3.63')

$$y = x(1 - x)^{(1-c)/c} = [x^c (1 - x)^{1-c}]^{1/c} = \\ = \left[c^c (1 - c)^{1-c} \left(\frac{x}{c} \right)^c \left(\frac{1 - x}{1 - c} \right)^{1-c} \right]^{1/c} = \\ = [2^{-k(c)} e^{-k(c, x)}]^{1/c} = c(1 - c)^{(1-c)/c} e^{-k(c, x)/c}.$$

Итак,

$$y = c(1 - c)^{(1-c)/c} e^{-k(c, x)/c}. \quad (\text{П.3.65})$$

Поскольку $k(c, x) \geq k(c, c) = 0$, то из (П.3.65) имеем

$$y_{\max} = c(1 - c)^{(1-c)/c}; \quad x_{\text{opt}} = c. \quad (\text{П.3.66})$$

Из соотношений (П.3.64), (П.3.65) и (П.3.66) получим

$$Y_{\max} = (1 - c)^{(1-c)/ac} X_{\text{opt}}^a = [c(1 - c)^{(1-c)/c}]^{1/a} A^{-1/a}, \\ X_{\text{opt}} = c^{1/a} A^{-1/a}, \quad (\text{П.3.67}) \\ \eta = 1 - Y/Y_{\max} = 1 - e^{-k(c, x)/ca}, \\ x = AX^a.$$

Используем (П.3.67) для исследования максимума выражения R по m в случае слепого риска. В том случае согласно (3.5.23)

$$y = r_m = r_n + r_0 c_3 - r_0 c_4 / \sqrt{m} = (r_0 c_4 / A_1) [1 - A_1 (1/m)^{1/2}], \quad (\text{П.3.68})$$

где

$$A_1 = c_4 / (r_n / r_0 + c_3). \quad (\text{П.3.69})$$

Из соотношения (П.3.62) имеем

$$R = [\rho (r_0 c_4 / A_1)^{(\alpha-1)} Y - z] w, \quad (\text{П.3.70})$$

где

$$Y = \frac{1}{m} \left[1 - A_1 \left(\frac{1}{m} \right)^{1/2} \right]^{\alpha-1} \quad (\text{П.3.71})$$

— функция величины $1/m$, обращающаяся в максимум при $1/m_{\text{opt}}^{\text{II}}$ вместе с величиной R .

В рассматриваемом случае $a = 1/2$, $b = \alpha - 1$, $c = 1/(1 + ab) = 2/(\alpha + 1)$ и $(1 - c)^{(1-c)/ac} = [(\alpha - 1)/(\alpha + 1)]^{\alpha-1}$.

Используя (П.3.67), в этом случае получаем

$$Y_{\max} = \left(\frac{2}{\alpha+1}\right)^2 \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^{\alpha-1} A_1^{-2} = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^{\alpha-1} X_{\text{opt}},$$

$$X_{\text{opt}} = (m_{\text{opt}}^{\text{II}})^{-1} = \left(\frac{2}{\alpha+1}\right)^2 A_1^{-2}; \quad (\text{П.3.72})$$

$$\eta \approx 1 - \frac{R_m}{R m_{\text{opt}}^{\text{II}}} = 1 - \exp \left[-(\alpha+1) k \left(\frac{2}{\alpha+1}, x \right) \right]$$

при $Y_{\max} \gg z$, $x = \frac{A_1}{\sqrt{m}}$.

Отсюда, в частности, имеем

$$m_{\text{opt}}^{\text{II}} = \left(\frac{\alpha+1}{2} A_1\right)^2 = \left[\frac{(\alpha+1) c_4}{2(r_n/r_0 + c_3)} \right]^2; \quad (\text{П.3.73})$$

$$R(w) = R_{m_{\text{opt}}^{\text{II}}} = (B - z) w, \quad (\text{П.3.74})$$

где согласно (П.3.70)

$$B = \rho(r_0 c_4 / A_1)^{(\alpha-1)} Y_{\max}. \quad (\text{П.3.75})$$

Обратим в максимум выражение $R(w)$ по w , используя зависимость

$$z = z(w) = E_0 + E_1 w^\beta, \quad (\text{П.3.76})$$

где E_0 , E_1 и β — неотрицательные константы, определяемые методом наименьших квадратов по экспериментальным данным о зависимости энергетических потерь особи от скорости ее движения. Из (П.3.74) и (П.3.76) имеем

$$R(w) = (E_1/A_2) Y, \quad (\text{П.3.77})$$

где

$$A_2 = [E_1 / (B - E_0)]; \quad (\text{П.3.78})$$

$Y = w(1 - A_2 w^\beta)$ — функция w , обращающаяся в максимум при $w = w_{\text{opt}}$ вместе с функцией $R(w)$.

В рассматриваемом случае $a = \beta$, $b = 1$, $c = 1/(1 + ab) = 1/(1 + \beta)$ и $(1-c)^{(1-c)/ac} = \beta/(1 + \beta)$.

Используя соотношения (П.3.67), получаем в этом случае

$$Y_{\max} = \beta(1 + \beta)^{-(1+\beta)/\beta} A_2^{-1/\beta} = \beta X_{\text{opt}} / (1 + \beta),$$

$$X_{\text{opt}} = w_{\text{opt}} = (1 + \beta)^{-1/\beta} A_2^{-1/\beta}; \quad (\text{П.3.79})$$

$$\eta = 1 - \frac{R(w)}{R(w_{\text{opt}})} = 1 - \exp \left[-\frac{1 + \beta}{\beta} k \left(\frac{1}{1 + \beta}, x \right) \right], \quad x = A_2 w^{1/\beta}.$$

В п. 3.5.4 показано, что при оптимальном размере m -стай $m_{\text{opt}}^{\text{II}}$ в режиме слепого риска с оптимальной скоростью ω_{opt} при фиксированном расстоянии ($h = \text{const}$) между ближайшими особями m -стай возможен переход в более эффективный режим зрячего облова при некоторой оптимальной форме m -стай. Эта возможность достигается при $m_{\text{opt}}^{\text{II}} \geq m_{\text{opt}}^{\text{II min}}$, где нижняя оценка имеет определенное значение. Форма стай ищется в виде параллелепипеда ($\alpha = 3$) (прямоугольника ($\alpha = 2$)) с высотой H и основанием $d^{\alpha-1}$ (имеющим сторону d). Задача отыскания оптимальной формы стай сводится к нахождению пары величин (H, h) , доставляющих максимум произведения

$$Hd^{\alpha-1} = V = h^{\alpha} m_{\text{opt}}^{\text{II}} \quad (\text{П.3.80})$$

при фиксации их суммы

$$H + d = C \geq l - r, \quad (\text{П.3.81})$$

где l и $r = r_m$ — исходные параметры, определяющие режим слепого риска ($l > r$) без учета размеров m -стай. Рассматриваемая задача эквивалентна отысканию максимума функции

$$V = H(C - H)^{\alpha-1} = C^{\alpha-1} Y, \quad (\text{П.3.82})$$

где

$$Y = H(1 - A_3 H)^{\alpha-1} \quad (\text{П.3.83})$$

— функция H , обращающаяся в максимум при $H = H_{\text{opt}}$ вместе с исходной функцией V , а

$$A_3 = C^{-1}. \quad (\text{П.3.84})$$

В рассматриваемом случае $a = 1$, $b = \alpha - 1$, $c = 1/(1 + ab) = 1/\alpha$
 $(1 - c)^{(1-c)/ac} = [(\alpha - 1)/\alpha]^{\alpha-1}$.

Используя соотношения (П.3.67), получим в этом случае

$$Y_{\text{max}} = [(\alpha - 1)/\alpha]^{\alpha-1} X_{\text{opt}} = [(\alpha - 1)/\alpha]^{\alpha-1} C/\alpha,$$

$$X_{\text{opt}} = H_{\text{opt}} = A_3^{-1}/\alpha = C/\alpha. \quad (\text{П.3.85})$$

Из (П.3.80), (П.3.82) и (П.3.85) следует, что

$$V_{\text{opt}} = h^{\alpha} m_{\text{opt}}^{\text{II}} = C^{\alpha-1} Y_{\text{max}} = C^{\alpha} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \right)^{\alpha-1}. \quad (\text{П.3.86})$$

Согласно (П.3.81) минимальное значение $m_{\text{opt}}^{\text{II}} = m_{\text{opt}}^{\text{II min}}$ имеет место, если положить $C = l - r$. Поэтому из соотношений (П.3.85) и (П.3.86) получим соответствующие значения

$$m_{\text{opt}}^{\text{II min}} = \frac{1}{\alpha - 1} \left[\frac{l - r}{\alpha h / (\alpha - 1)} \right]^{\alpha}; \quad (\text{П.3.86'})$$

$$H_{\text{opt}} = \frac{l - r}{\alpha} \text{ и } d_{\text{opt}} = \frac{(\alpha - 1)(l - r)}{\alpha}. \quad (\text{П.3.87})$$

П.3.9. Некоторые экстремальные задачи мониторинга. Как уже упоминалось в п. 3.6.4, модель МС является специальной интерпретацией общей модели различения информационных потоков, исследованной автором [42, 43, 4]. В частности, в работе [4, с. 180, (7.80)] найдено среднее время t_h обнаружения слабого сигнала (аномалии в мониторинговой терминологии), для которого

$$t = t(\mathcal{P}, X) = \sum_{i=1}^N \mathcal{P}_i \left(\frac{1}{p_{i_1}(X_i)} + n_{i_1}^i \right), \quad (\text{П.3.88})$$

и показано, что она обращается в минимум выбором первичных порогов $X = X(\mathcal{P}) = \{X_i(\mathcal{P})\}$, удовлетворяющих уравнениям

$$p_{i_1}(X_i) \approx M \sqrt{\mathcal{P}_i / n_{i_0}^i} \left/ \sum_{i=1}^N \sqrt{\mathcal{P}_i n_{i_0}^i} \right. \quad (\text{П.3.89})$$

Здесь и далее приняты обозначения п. 3.6.4. Подставив в (П.3.89) значения $p_{i_1}(X_i(\mathcal{P}))$, равные правым частям выражения (П.3.89), получим искомый минимум

$$t(\mathcal{P}) = t[\mathcal{P}, X(\mathcal{P})] = \frac{1}{M} \left(\sum_{i=1}^N \sqrt{\mathcal{P}_i n_{i_0}^i} \right)^2 + \sum_{i=1}^N \mathcal{P}_i n_{i_1}^i, \quad (\text{П.3.90})$$

который после несложных преобразований обращается в выражение (3.6.7).

Если вместо $X(\mathcal{P})$ подставить в (П.3.88) выражение $X(Q)$, то с учетом (П.3.89) получим

$$\begin{aligned} t(\mathcal{P}, Q) = t(\mathcal{P}, X(Q)) &= \frac{1}{M} \left(\sum_{i=1}^N \mathcal{P}_i \sqrt{\frac{n_{i_0}^i}{Q_i}} \right) \left(\sum_{i=1}^N \sqrt{Q_i n_{i_0}^i} \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^N \mathcal{P}_i n_{i_1}^i = \frac{1}{M} \left(\sum_{i=1}^N \sqrt{\mathcal{P}_i n_{i_0}^i} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^N \pi_i \sqrt{\frac{\mathcal{P}_i}{Q_i}} \right) \times \\ &\times \left(\sum_{i=1}^N \pi_i \sqrt{\frac{Q_i}{\mathcal{P}_i}} \right) + \sum_{i=1}^N \mathcal{P}_i n_{i_1}^i, \end{aligned}$$

где $\pi_i = \sqrt{\mathcal{P}_i n_{i_0}^i} \left/ \sum_{i=1}^N \sqrt{\mathcal{P}_i n_{i_0}^i} \right.$. Проведем дальнейшие преобразования. Имеем

$$\begin{aligned} t(\mathcal{P}, Q) &= [t(\mathcal{P}) - \bar{n}_1^{\mathcal{P}}] u + t(\mathcal{P}) = \\ &= t(\mathcal{P}) \{1 + [1 - \bar{n}_1^{\mathcal{P}} / t(\mathcal{P})] u\}, \end{aligned}$$

где

$$\bar{n}_1^{\mathcal{J}^0} = \sum_{i=1}^N \mathcal{J}^0 n_i^1;$$

$$u = \left(\sum_{i=1}^N \pi_i \sqrt{\frac{\mathcal{J}^0}{Q_i}} \right) \left(\sum_{i=1}^N \pi_i \sqrt{\frac{Q_i}{\mathcal{J}^0}} \right) - 1.$$

Из последнего соотношения после несложных преобразований получим соотношение (3.6.8). Далее имеем

$$\begin{aligned} u &= \left(\sqrt{\frac{\mathcal{J}^0}{Q}} \right) \left(\sqrt{\frac{Q}{\mathcal{J}^0}} \right) - 1 = \frac{1}{4} \left[\left(\sqrt{\frac{\mathcal{J}^0}{Q}} + \sqrt{\frac{Q}{\mathcal{J}^0}} \right)^2 - 2^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left(\sqrt{\frac{\mathcal{J}^0}{Q}} - \sqrt{\frac{Q}{\mathcal{J}^0}} \right)^2 \right] = \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{V_{\mathcal{J}^0} + V_Q}{V_{\mathcal{J}^0} Q} \right)^2 \left(\frac{V_{\mathcal{J}^0} - V_Q}{V_{\mathcal{J}^0} Q} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left[\left(\frac{\mathcal{J}^0 - Q}{V_{\mathcal{J}^0} Q} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.3.91})$$

Проведем оценку последнего выражения при условии $\left| \frac{\mathcal{J}^0 - Q}{V_{\mathcal{J}^0} Q} \right| \leq \varepsilon$. Имеем

$$\varepsilon \geq \left| \frac{\mathcal{J}^0 - Q}{V_{\mathcal{J}^0} Q} \right| = \left| \frac{V_{\mathcal{J}^0} - V_Q}{V_{\mathcal{J}^0} Q} \right| \left| \frac{V_{\mathcal{J}^0} + V_Q}{V_{\mathcal{J}^0} Q} \right| \geq 2 \left| \frac{V_{\mathcal{J}^0} - V_Q}{V_{\mathcal{J}^0} Q} \right|,$$

отсюда

$$\frac{\varepsilon}{2} \geq \left| \frac{V_{\mathcal{J}^0} - V_Q}{V_{\mathcal{J}^0} Q} \right| \geq \frac{|V_{\mathcal{J}^0} - V_Q|}{(V_{\mathcal{J}^0} + V_Q)/2}$$

или

$$\frac{\varepsilon}{4} (V_{\mathcal{J}^0} + V_Q) \geq |V_{\mathcal{J}^0} - V_Q|.$$

Далее имеем

$$-\frac{\varepsilon}{4} (V_{\mathcal{J}^0} + V_Q) \leq V_{\mathcal{J}^0} - V_Q \leq \frac{\varepsilon}{4} (V_{\mathcal{J}^0} + V_Q),$$

отсюда

$$V_{\mathcal{J}^0} \frac{1 - \varepsilon/4}{1 + \varepsilon/4} \leq V_Q \leq V_{\mathcal{J}^0} \frac{1 + \varepsilon/4}{1 - \varepsilon/4}, \quad (\text{П.3.92})$$

или, умножая на $V_{\mathcal{J}^0}$,

$$\mathcal{J}^0 \frac{1 - \varepsilon/4}{1 + \varepsilon/4} \leq V_{\mathcal{J}^0} Q < \mathcal{J}^0 \frac{1 + \varepsilon/4}{1 - \varepsilon/4},$$

и, извлекая корень,

$$\sqrt{y^0} \sqrt{\frac{1-\varepsilon/4}{1+\varepsilon/4}} \leq \sqrt{y^0 Q} \leq \sqrt{y^0} \sqrt{\frac{1+\varepsilon/4}{1-\varepsilon/4}}$$

Отсюда и из (П.3.92)

$$\begin{aligned} 2 &\leq \frac{\sqrt{y^0} + \sqrt{Q}}{\sqrt{y^0 Q}} \leq \frac{\sqrt{y^0} + \sqrt{y^0} \frac{1+\varepsilon/4}{1-\varepsilon/4}}{\sqrt{y^0} \sqrt{\frac{1-\varepsilon/4}{1+\varepsilon/4}}} = \\ &= \sqrt{\frac{1+\varepsilon/4}{1-\varepsilon/4}} + \left(\frac{1+\varepsilon/4}{1-\varepsilon/4}\right)^{3/2} \leq 2 \left(\frac{1+\varepsilon/4}{1-\varepsilon/4}\right)^{3/2}. \quad (\text{П.3.93}) \end{aligned}$$

Подставив оценки (П.3.92) и (П.3.93) в соотношение (П.3.91), получим оценку

$$u \leq \varepsilon^2 [(1+\varepsilon/4)/(1-\varepsilon/4)]^3,$$

соответствующую оценке (3.6.9').

Перейдем теперь к оценке относительных потерь η^{**} , определенных в п. 3.6.6, выражением

$$\eta^{**} = \frac{\Delta w_x(\zeta) - w_x(\zeta_x)}{w_x(\zeta)},$$

где

$$\begin{aligned} w_x(\zeta) &= \frac{1+\kappa/\zeta}{(1-\zeta)^2}; \quad w'_x(\zeta) = \frac{-\kappa(1-\zeta) + 2\zeta(\zeta+\kappa)}{\zeta^2(1-\zeta)^3}; \\ w''_x(\zeta) &= \frac{(3\kappa+4\zeta)\zeta^2(1-\zeta)^3}{[\zeta^2(1-\zeta)^3]^2} + [-\kappa(1-\zeta) + 2\zeta(\zeta+\kappa)]f(\zeta). \end{aligned}$$

Приравняв $w'_x(\zeta) = 0$, находим корень

$$\zeta = \zeta_x = (3\kappa/4)(\sqrt{1+8/9\kappa} - 1),$$

обращающий $w_x(\zeta)$ в минимум. При этом $2\zeta_x^2 + 3\kappa\zeta_x - \kappa = 0$, отсюда $(2\zeta_x + 3\kappa)\zeta_x = \kappa$ и $3\kappa + 4\zeta_x = \kappa/\zeta_x + 2\zeta_x$. Поэтому

$$w''_x(\zeta_x) = (3\kappa + 4\zeta_x)/[\zeta_x^2(1-\zeta_x)^3],$$

и

$$\begin{aligned} \eta^{**} &= \frac{\Delta w_x(\zeta) - w_x(\zeta_x)}{w_x(\zeta)} \approx \frac{(\zeta - \zeta_x)^2 w''_x(\zeta_x)/2}{w_x(\zeta_x)} = \\ &= \frac{3\kappa + 4\zeta_x}{2\zeta_x(1-\zeta_x)(\kappa + \zeta_x)} (\zeta - \zeta_x)^2. \quad (\text{П.3.94}) \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Котельников В. А. Теория потенциальной помехоустойчивости. — М.: Госэнергоиздат, 1956.
2. Шеннон К. Математическая теория связи: Работы по теории информации и кибернетике: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1963.
3. фон Нейман Дж., Моргенштейн О. Теория игр и экономическое поведение: Пер. с англ. — М.: Наука, 1978.
4. Флейшман Б. С. Теория потенциальной эффективности сложных систем. — М.: Сов. радио, 1971.
5. Дружинин В. В., Конторов Д. С. Проблемы системологии. — М.: Сов. радио, 1976.
6. Чичибабин А. Е. Основные начала органической химии. — М. — Л.: Госиздат, 1929.
7. Завадский К. М. Вид и видеообразование — Л.: Наука, 1968.
8. фон Фёрстер Г. Биологика. — В кн.: Проблемы бионики. — М.: Мир, 1965.
9. Беклемишев В. Н. Об общих принципах организации жизни. — Бюл. МОИП. Сер. биол., 1964, т. 69 (2).
10. Аристотель. Соч. в 4-х т. — М.: Мысль, 1976. — Т. 1, Метафизика.
11. Акофф Р., Эмери Ф. О целеустремленных системах. Пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1974.
12. Саймон Г. Науки об искусственном: Пер. с англ. — М.: Мир, 1972.
13. Маркс К. Предисловие к первому изданию «Капитала». — Соч. 2-е изд., т. 23.
14. Месарович М. Теория систем и биология. Точка зрения теоретика. — В кн.: Теория систем и биология: Пер. с англ. — М.: Мир, 1971.
15. Эшби Росс У. Введение в кибернетику: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1959.
16. Флейшман Б. С. Объяснение и предсказание в системологии. — Общая теория систем и интеграция знаний: Материалы семинара/ МДНТП им. Ф. Э. Дзержинского. — М., 1974.
17. Fleishman B. S. Philosophy of systemology. — *Cybernetica*, 1976, № 4, p. 261.
18. Бредли Д. Ф. Многоуровневые системы и биология. Точка зрения специалиста по субмолекулярному уровню. — В кн.: Теория систем и биология: Пер. с англ. — М.: Мир, 1971.
19. Нейман Ю. Вводный курс теории вероятностей и математической статистики: Пер. с англ. — М.: Наука, 1969.
20. Георгиевский А. Б. Проблемы преадаптации. — Л.: Наука, 1974.
21. Бернштейн Н. А. Новые линии развития в физиологии и их соотношения с кибернетикой. — Вопросы философии, 1962, № 3.
22. Денисов А. А., Колесников Д. Н. Теория больших систем управления. — Л.: Энергоиздат, 1982.
23. Беллман Р. Динамическое программирование: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1960.
24. Беклемишев К. В. Регуляция на биоэкологическом уровне организации жизни. — Бюл. МОИП. Сер. биол. 1969, т. 74 (3).
25. Федоров В. Д., Соколова С. С. Об устойчивости планктонного сообщества и некоторых характеристик внешней среды. — Океанология, 1972, т. 12, вып. 6.

26. Флейшман Б. С. Об оптимальной структуре сложных решающих систем. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1963, № 3.
27. Флейшман Б. С. Статистические пределы эффективности сложных систем. — В кн.: Прикладные задачи технической кибернетики. — М.: Сов. радио, 1966.
28. Флейшман Б. С. Теория потенциальной эффективности сложных систем. Итоги и проблемы. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1970, № 4.
29. Fleischman B. S. Die potentielle Effektivität komplizierter Systeme. — Ideen des exakten Wissens, 1971, № 10.
30. Флейшман Б. С. О живучести сложных систем. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1966, № 5.
31. Гринберг В. М., Утехин В. Д. Некоторые подходы к математической интерпретации внутренней структуры фитоценоза. — Изв. АН СССР, Сер. географ., 1974, № 2.
32. Флейшман Б. С. Статистический последовательный анализ и автоматический самоконтроль. — Ученые записки по статистике. — М.: Наука, 1964, т. 8.
33. Крапивин В. Ф. Теоретико-игровые методы синтеза сложных систем в конфликтных ситуациях. — М.: Сов. радио, 1972.
34. Флейшман Б. С., Рудерман С. Ю., Брусиловский П. М. Оптимизация системы к наступлению катастроф. — В кн.: Математическая теория биологических процессов. — Калининград, 1976.
35. Пресман А. С. Планетарно-космические основы организации жизни. — В кн.: Космос и эволюция организмов. — М.: Наука, 1974.
36. Квейд Э. Анализ сложных систем: Пер. с англ. — М., Сов. радио, 1969.
37. Валник В. Н., Червоненкис А. Я. Теория распознавания образов. — М.: Наука, 1974.
38. Ивахненко А. Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами. — Киев: Техніка, 1975.
39. Фогель Л., Оуэнс А., Уолш М. Искусственный интеллект и эволюционное моделирование: Пер. с англ. — М.: Мир, 1969.
40. Флейшман Б. С., Букатова Н. Л. О некоторых аналитических оценках параметров эволюционного моделирования. — Автоматика и вычислительная техника, 1974, № 4.
41. Казанский А. В. Стандартная задача отбора в методах эвристической самоорганизации. — Автоматика, 1976, № 1.
42. Флейшман Б. С. Конструктивные методы оптимального кодирования для каналов с шумами. — М.: Изд-во АН СССР, 1963.
43. Башаринов А. Е., Флейшман Б. С. Методы статистического последовательного анализа и их приложения. — М.: Сов. радио, 1962.
44. Мур Э. Математические модели самовоспроизведения. — В кн.: Математические проблемы в биологии. — М.: Мир, 1966.
45. Урманцев Ю. А. Симметрия природы и природа симметрии. — М.: Мысль, 1974.
46. Маругаев М. А. О гармонии как закономерности. — В кн.: Принцип симметрии. — М.: Наука, 1978.
47. Чернавский Д. С. Термодинамика и биология. — Теоретическая и экспериментальная биофизика: Межвуз. сб., Калининград, 1975, вып. 5.
48. Кротов В. Ф. Вариационные принципы математического естествознания. — В кн.: Оптимальные системы автоматического управления. — М.: Наука, 1967.

49. Александров Е. А. Основы теории эвристических решений.— М.: Сов. радио, 1975.
50. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей.— М.: Наука, 1974.
51. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений.— Математика. Новое в зарубежной науке, вып. 3. Пер. с англ.— Л.—М.: Мир, 1976.
52. Марков А. А. Исчисление вероятностей.— Петроград, 1912.
53. Льюс Р. Д., Райфа Х. Игры и решения.— М.: ИЛ, 1961.
54. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики.— М.: Наука, 1977.
55. Сачков В. Н. Вероятностные методы в комбинаторном анализе.— М.: Наука, 1978.
56. Флейшман Б. С. Комбинаторика расположений.— Ученые записки Моск. обл. педагог. ин-та. Труды кафедр математики, 1957, вып. 4, Т. 57.
57. Марков А. А. Об испытаниях, связанных в цепь ненаблюдаемыми событиями.— Изв. Рос. акад. наук, Спб, 1912, (6), 6.
58. Романовский В. И. Дискретные цепи Маркова.— М.: Гостехиздат, 1949.
59. Frechet M. Les probabilités associées a un système d'évenements compatibles et dependants.— Actualités scientifiques et Industrielles, Paris, 1940, № 859, 1943, № 942.
60. Марков А. А. Исследование замечательного случая зависимых испытаний.— Изв. АН, (6) 1, 1907, с. 61—80 (см. также его Исчисление вероятностей. Изд. 4-е.— М.: Госиздат, 1924, с. 552—581).
61. Erdős P., Renyi A. On random graphs.— Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. (Debrecen), 1959, № 6, p. 290—297.
62. Erdős P., Renyi A. On the evolution of random graphs.— Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., 1960, № 5, p. 17—61.
63. Gilbert E. N. Random graphs.— Ann. Math. Statistics, 1959, v. 30, № 4, p. 1141—1144.
64. Кальманс А. К. Некоторые вопросы анализа надежности сетей.— Автоматика и телемеханика, 1965, т. 26, № 3, с. 567—574.
65. Степанов В. Е. Комбинаторная алгебра и случайные графы.— Теория вероятностей и ее применения, 1969, т. 14, № 3, с. 393—420.
66. Степанов В. Е. О вероятности связности случайного графа.— Теория вероятностей и ее применения, 1970, т. 15, № 1, с. 56—68.
67. Степанов В. Е. Фазовые переходы в случайных графах.— Теория вероятностей и ее применения, 1970, т. 15, № 2, с. 200—216.
68. Степанов В. Е. Строение случайного графа $\varphi_m(x/r)$.— Теория вероятностей и ее применения, 1972, т. 17, № 2, с. 238—252.
69. Коваленко И. Н. К теории случайных графов.— Кибернетика, 1971, № 4, с. 1—4.
70. Флейшман Б. С., Агаджанян Ш. М. О некоторых аналитических методах в теории случайных графов.— Сб. науч. тр. аспирантов Армян. педагог. ин-та. Естественные науки, 1975, № 7, вып. 4, с. 251—262.
71. Gilbert E. N. Enumeration of labeled graphs.— Canadian J. Math., 1956, v. 8, p. 405—411.
72. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ.— М.: ИЛ, 1963.

73. **Renyi A.** On connected graphs. I.—Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., 1959, № 4, p. 385—388.
74. **Богачев Г. Н.** Случайные графы со степенью связности 2. — Дискретный анализ, 1973, 22, с. 3—14.
75. **Маркушевич А. И.** Теория аналитических функций. — М.: Наука, 1967, т. 1.
76. **Renyi A.** Some remarks on the theory of trees. — Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., 1959, № 4, p. 73—85.
77. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973.
78. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. — М.: Наука, 1974, т. III, ч. II.
79. **Харари Ф.** Теория графов: Пер. с англ. — М.: Мир, 1973.
80. **Фано Р.** Передача информации: Статистическая теория связи: Пер. с англ. — М.: Мир, 1965.
81. **Возенкрафт Дж., Рейфен Б.** Последовательное декодирование: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1963.
82. **Флейшман Б. С.** Параллельное декодирование. — ДАН, 1965, т. 163, № 6.
83. **Флейшман Б. С.** Параллельное декодирование для дискретного канала с шумами. — Радиотехника и электроника, 1965, т. 10, вып. 5.
84. **Флейшман Б. С., Мкртчян Ф. А.** Оценка сложности реализации параллельного декодирования при равномерном кодировании. — Автоматика и вычислительная техника, 1973, № 5, с. 23—34.
85. **Вальд А.** Последовательный анализ: Пер. с англ. — М.: Физматгиз, 1960.
86. **Вольфовиц Дж.** Теоремы кодирования теории информации: Пер. с англ. — М.: Мир, 1967.
87. **Хазен Э. М.** Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. — М.: Сов. радио, 1968.
88. **Бернштейн С. Н.** Теория вероятностей. — М.: Гостехиздат, 1946.
89. **Шрейдер Ю. А.** Равенство, сходство, порядок. — М.: Наука, 1971.
90. **Зиман Э., Бьюнеман О.** Толерантные пространства и мозг. — В кн.: На пути к теоретической биологии: Пер. с англ. — М.: Мир, 1970.
91. **Hutchison G. E.** Concluden remarks. — Gold Spring Harb. Symp. Quant. Biol., 1957, v. 22, p. 364.
92. **MacArthur R. H.** On the relative abundance of bird species. — Proc. Nat. Acad. Sci., 1957, v. 43, p. 293—295.
93. **Мак Кинси Дж.** Введение в теорию игр: Пер. с англ. — М.: Физматгиз, 1960.
94. **Винберг Г. Г., Меншуткин В. В.** Значение математического моделирования для разработки научных основ рационального использования биологических ресурсов пресных вод. — Проблемы долгосрочного планирования биологических исследований. Зоология. — Л.: Наука, 1974, вып. 1, с. 25—44.
95. **Одум Ю.** Основы экологии: Пер. с англ. — М.: Мир, 1975.
96. **Беляев В. И.** Теория сложных геосистем. — Киев: Наукова думка, 1978.
97. **Флейшман Б. С.** Об имитационном и оптимизационном моделировании экосистем. — В кн.: Биогеофизические и математические методы исследования геосистем. — М.: Наука, 1978.

98. Margalef R. Communication of structure in planctonic populations. — *Limnol. and Ocean*, 1961, v. 6, № 2.

99. Паттен Б. Концепция информации в экологии. Некоторые аспекты поведения планктонных сообществ. — В кн.: Концепция информации в биологических системах: Пер. с англ. — М.: Мир, 1966.

100. Гаузе Г. Ф. О некоторых основных проблемах биоценологии. — *Зоол. журн.*, 1936, т. 15, вып. 3, с. 363—381.

101. Мельников Ю. Н. Достоверность информации в сложных системах. — М.: Сов. радио, 1972.

102. Виноград С., Коуэн Дж. Надежные вычисления при наличии шумов: Пер. с англ. — М.: Наука, 1968.

103. Флейшман Б. С., Крапивин В. Ф. Применение теоретико-игровых методов к оценке живучести сложных систем. — *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1967, № 6.

104. Fleishman B. S. Control over the Biosystems and their objective teleology. IFAC—Symposium on Control Mechanisms in Bio— and Ecosystems, Biocommunication. Ecosystems, vol. 5, DDR, Leipzig, 1977, p. 76—80.

105. Mac Arthur R. H. Geographical ecology. Pattern in the Distribution of Species. Harper Row Publishers, 1972.

106. Свирежев Ю. М., Лагофер Д. О. Устойчивость биологических сообществ. — М.: Наука, 1978.

107. Баруча — Рид. Элементы теории марковских процессов и их приложения: Пер. с англ. — М.: Наука, 1969.

108. Kerner E. H. A statistical mechanisms of interacting biological species. — *Bull. Math. Biophys.* 1957, № 19, p. 121—146.

109. Бриллюэн Л. Наука и теория информации: Пер. с англ. — М.: Физматгиз, 1963.

110. Динамическая теория биологических популяций/ Под ред. Р. А. Полуэктова. — М.: Наука, 1974.

111. Флейшман Б. С. Стохастические модели сообществ. — *Океанология. Биология океана. Биологическая продуктивность океана*. Т. 2. — М.: Наука, 1977, с. 276—288.

112. Брусиловский П. М., Розенберг Г. С. Вероятностные модели предотвращения катаклизмов. УФА. Препринт. Ин-т биологии Башкирского филиала АН ССР, 1979, с. 28.

113. Флейшман Б. С., Гульдин А. Н., Сильянова С. А., Кибзун А. П. Оптимизационные модели в экологии и мониторинге. — Тез. докл. 34-й Всесоюз. науч. сессии, посвященной дню радио. — М., 1979, с. 92—94.

114. Fish stocks and Recruitment. — *Proc. Symp. held Aarhus*, 7—10 July 1970. Ed. B. V. Parish, v. 164.

115. Рикер У. Е. Методы оценки и интерпретация биологических показателей популяции рыб: Пер. с англ./ Под ред. Булгаковой Т. И. и Ефимова Ю. Н. — М.: Пищевая промышленность, 1979, с. 408.

116. Цетлин М. Л. Исследования по теории автоматов и моделированию в биологических науках. — М.: Наука, 1969.

117. Малютина Г. А., Девячина Г. В., Марусов Е. А. Обоняние рыб. — В кн.: Основные особенности поведения и ориентации рыб. — М.: Наука, 1974.

118. Василевская Н. Е. О химической необонятельной рецепции рыб. — В кн.: Основные особенности поведения и ориентации рыб. — М.: Наука, 1974.

119. **Радаков Д. В.** Стайность рыб как экологическое явление. — М.: Наука, 1972.
120. **Флейшман Б. С., Вершинский А. Н.** Теоретико-информационные оценки коммуникабельности систем. — VII симп. по проблемам избыточности в информационных системах: Тез. докл. Л., 1976, Ч. 4.
121. **Флейшман Б. С.** Об оптимизации модели «стая — агрегированная пища» — Тез. докл. Всесоюз. семинара «Математическое моделирование морских экосистем», Севастополь. — Киев: Наукова думка, 1974.
122. **Флейшман Б. С.** Стохастические модели биоценозов. Оптимизационные модели. — В кн.: Итоги науки и техники по биологии. Сер. Общая экология, биоценология, гидробиология. Т. 5. Моделирование водных экосистем. — М.: ВИНТИ, 1980.
123. **Мантейфель Б. Н.** Биологические основы управления поведением рыб. — М.: Наука, 1970.
124. **Ayala E. J.** Environmental fluctuations and populations size. — Nature, 1971, № 5298, p. 231.
125. **Ананичев К. В.** Проблемы окружающей среды энергии и природных ресурсов. Международный аспект. — М.: Прогресс, 1974.
126. **Флейшман Б. С.** Системные аспекты рационального природоиспользования. — Всесоюз. конф. «Экономические проблемы мирового океана», Одесса, 1977, с. 16—17.
127. **Израэль Ю. А.** Об оценке состояния биосферы и обосновании мониторинга. — ДАН СССР, 1976, т. 226, № 4, с. 955—957.
128. **Флейшман Б. С., Флейшман С. Б.** Некоторые оценки эффективности мониторинга. — В кн.: Проблемы экологического мониторинга и моделирование экосистем. — Л.: Гидрометеиздат, 1978, с. 57—63, т. 1.
129. **Флейшман Б. С.** Подоптимальный синтез мониторинговой системы. — В кн.: Проблемы экологического мониторинга и моделирование экосистем. — Л.: Гидрометеиздат, 1979, т. 2, с. 64—73.
130. **Сильянова С. А.** Оценка эффективности использования мониторинговых систем для обнаружения пространственных аномалий. — Всесоюз. конф. «Экономические проблемы мирового океана», Одесса, 1977, с. 29—31.
131. **Флейшман Б. С.** Оценка потенциальной надежности технической системы мониторинга. — В кн.: Проблемы экологического мониторинга и моделирование экосистем. — Л.: Гидрометиздат, 1980, т. 3.
132. **Сильянова С. А.** Оптимальное распределение затрат на обеспечение надежности технической системы мониторинга. — В кн.: Проблемы экологического мониторинга и моделирование экосистем. — Л.: Гидрометеиздат, 1980, т. 3.
133. **Флейшман Б. С.** О формализме и оценках потенциальной эффективности сложных систем. — Тез. докл. 35-й Всесоюз. науч. сессии, посвященной дню радио. М.: с. 80—82, 1980.
134. **Василевич В. И.** Статистические методы в геоботанике. — М.: Наука, 1969.
135. **Piolon E. C.** An Introduction to mathematical ecology. — Wiley Sons, 1968.
136. **Миркин Б. М., Розенберг Г. С.** Фитоценология: Принципы и методы. — М.: Наука, 1978.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Агаджанян Ш. М. 114, 129, 268, 343
 Акофф Р. 11, 16, 231
 Александров Е. А. 53
 Ананичев К. В. 285
 Аристотель 10, 52
 ди Бартини Р. О. 53
 Баруча — Рид 230
 Башаринов А. Е. 49, 255, 261, 262, 287, 289, 338, 340
 Беклемишев В. Н. 206, 208, 211
 Беклемишев К. В. 27, 31, 209, 212
 Беллман Р. 214, 215
 Беляев В. И. 209, 210
 Бернштейн Н. А. 22, 23
 Бернштейн С. Н. 173
 Берталанфи Л. фон 3, 12, 16
 Богачев Г. Н. 126
 Бредли Д. Ф. 21
 Бриллюэн Л. 230
 Брусиловский П. М. 32, 237
 Букатова Н. И. 39
 Вальд А. 162, 261, 336, 337
 Вашник В. Н. 38
 Василевская Н. Е. 264
 Вебер 19
 Вернадский В. И. 206
 Вершинский А. Н. 269
 Винберг Г. Г. 207
 Винер Н. 3, 30
 Виноград С. 217
 Везенкрафт Дж. 132, 170
 Вольтерра 230
 Вольфович Дж. 164, 165
 Гаузе Г. Ф. 216
 Геккель Э. 206
 Георгиевский А. Б. 22, 23, 36, 223
 Гильберт Е. Н. 114, 129, 343
 Гринберг В. М. 28
 Гульдин А. Н. 237
 Девнщина Г. В. 264
 Денисов А. А. 53
 Докучаев В. В. 206
 Дружинин В. В. 4, 16
 Заде Л. 19, 61, 62, 63, 65
 Зубаков В. Д. 2, 5
 Ивахненко А. Г. 39, 209
 Израэль Ю. А. 286
 Казанский А. В. 39
 Кальманс А. К. 114, 343
 Квейд Э. 40
 Кернер Е. Х. 230
 Кибзун А. П. 236, 237, 317
 Коваленко И. Н. 114
 Колесников Д. Н. 53
 Колмогоров А. Н. 67
 Конторов Д. С. 4, 16
 Котельников В. А. 4, 30
 Коуэн Дж. 217
 Крапивин В. Ф. 31, 217, 218
 Крон Г. 53
 Кротов В. Ф. 53, 54
 Кузнецов П. Г. 53
 Кулик В. Т. 3
 Кэли 126
 Лаврентьев М. А. 130
 Лагофет Д. О. 230, 251
 Лесли 238
 Льюс Р. Д. 65
 Ляпунов А. 205
 Мак Артур 203, 216
 Мак Кинси 215
 Малютина Г. А. 264
 Мантейфель Б. Н. 278
 Маргалев Р. 64, 213
 Марков А. А. 55, 100, 106, 230
 Маркс К. 14
 Маркушевич А. И. 127
 Марусов Е. А. 264
 Марутаев М. А. 46, 52
 Мельников Ю. Н. 2, 5, 217

Меншуткин В. В. 207
Месарович М. 16, 77
Мкртчян Ф. А. 132
Моргенштерн О. 215
фон Нейман Дж. 4, 6, 30, 50,
51, 201, 205, 215, 261
Нейман Ю. 22, 159, 162
Новик И. Б. 3, 5
Ньютон И. 10
Одум Ю. 239, 246, 208, 231,
233
Оккам У. 22
Оуэнс А. 39
Паттен Б. 213
Пелевин В. Н. 273
Пирсон Э. 159, 162, 261
Пифагор 10
Полуэктов Р. А. 230
Пресман А. С. 35
Радаков Д. В. 265
Райфа Х. 65
Рейфен Б. 132, 170
Реньи А. 114, 126, 127, 131
Рнкер 238, 255
Риордан Дж. 126
Розенберг Г. С. 237
Розенблат Ф. 38
Романовский В. И. 100, 105,
112, 231
Рудерман С. Ю. 32, 237
Саймон Г. 13
Сачков В. Н. 78
Свирижев Ю. М. 230, 251
Севидж Л. 19, 65
Сильянова С. А. 5, 237, 298
Смирнов В. И. 130
Соколова С. С. 27
Степанов В. Е. 114
Тимонин А. Г. 277
Уолш М. 39
Урманцев Ю. А. 51, 52
Фано Р. 132, 138, 139, 166,
167, 179, 186, 187, 202
Федоров В. Д. 27
фон Ферстер Г. 28, 221, 259
Фехнер 19
Финетти Б. де 19, 65
Флейшман С. Б. 289, 293
Фогель Л. 39
Фреше М. 102
Хазен Э. М. 173
Харари Ф. 131, 229
Хатчисон 202
Цетлин М. Л. 261
Чебышев П. Л. 173
Червоненкис А. Я. 38
Чернавский Д. С. 53
Чернов 138
Шабат Б. В. 130
Шеннон К. 4, 17, 30, 41, 165,
169, 213
Шрейдер Ю. А. 200
Эмери Ф. 11, 16, 22, 231
Эрдеш П. 114, 131
Эшби У. Р. 3, 20, 27, 35, 69,
202

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Адаптационный цикл 248
 Адаптивная аккумуляция 247
 Адаптивный подъем 248
 Аксиоматика вероятностей 57
 Активный подъем 248
 Акт решения 18, 23, 69
 Алгебра множеств 56

Б

Биосистема 223
 Биосфера 284
 Биотоп 209
 Биоценоз 31, 36, 206, 226, 230, 231, 246, 293
 Бихевиоризм 11, 51

В

Вероятности ошибки обращения СА 163
 — ошибок двух родов 160, 262, 290, 336
 Вероятность 57
 — больших уклонов 32
 — гибели особи от действия нескольких причин 236, 238, 247
 —, интерпретация системная (субъективная) 19, 64
 — инцидентов двух вершин 116
 — физическая (спонтанная) 19, 64
 — искажений символов 41
 — m -компонентности случайного графа 119
 — обнаружения ложной тревоги m -стаи 342
 — осуществления цели 43
 — правильного обращения 163

Г

Гомеостазис 22
 Граф 114

— детерминированный 114
 — —, вершина 56, 115
 — — деревьев 126
 — —, ребро 56, 115
 — — связный 118
 — — — класса 118
 — — циклов 126
 — случайный 114
 График 56
 — поведения 66

Д

Действие 66
 Диатроф 230, 252
 Дискретная оптимизация 131

Е

Естественность 14

Ж

Живучесть (RC -качество) 31, 217

З

Закон 20
 — предельный 40
 — — C -закон 213
 — — I -закон 212
 — — R -закон 211
 — — RC -закон 217
 Закономерность системы 6
 — —, неидентичность 9
 — —, обилие (распространенность) 8
 — —, разнообразие 6
 — —, сложность 8
 — —, устойчивость 8, 30
 — —, экологическая интерпретация 210
 — —, эмергентность 9
 Защита от хищника 278

И

Игра 30, 73, 203, 214, 215
 Иерархия систем 6

Импульсная стабильность 246
Искусственный интеллект (ИИ)
37, 38

К

Катастрофы 32
Качество сложной системы 29
— — — *S*-качество (управляемость) 29, 213
— — — *I*-качество (помехоустойчивость) 29, 213
— — — *L*-качество (самоорганизация) 29
— — — *R*-качество (надежность) 29, 211
— — — *RC*-качество (живучесть) 217
Кибернетика 3, 11, 12
Комбинаторика 54, 77
— расположений 78
—, аксиоматика 78
—, основная теорема о числе расположений 82
Комбинаторная сфера 94
K-функция 144
k-функция 43, 138, 254, 263, 266, 267, 313, 336, 337, 349
k^o-функция 155
k'-функция 155

М

Метод группового учета аргументов (МГУА) 39
Множество 55
— мест 78
— нечеткое 19, 61
— предметов 78
Модель 19, 25
— аналоговая 19
— знаковая 19
— биосеноза 230
— — — аналитическая 230
— — — динамическая 231
— — — оптимизационная 238, 268
— — имитационная (портретная) 20, 25, 28, 29
— — оптимизационная (оценочная) 20, 27, 28, 29
— — контроля 289
— — многовозрастной популяции 255
— — надежности 298, 302
— — управления 287
— — *m*-стая бернуллевская 285

— — — защиты от хищника 278
— — — обнаружения хищника 270
— — — целостности 268
— — охоты хищника 252
Мониторинг 284
Мониторинговая система (МС) 286

Н

Надежность (*R*-качество) 29, 211
— МС 298
Необихевиоризм 51
Неоструктурализм 51
Неравенство Бонферони 129
— Буля 146, 197
— Чебышева 173
Ниша 216, 227

О

Обнаружение аномалий 286
— последовательное 336
— пятен пищи 270
— — — *m*-стаей 265
— — — особью 261
— сигналов 336
Объективная телеология 27
Объяснение 15, 28
Осуществимость 45
Отношение 56, 199

П

Пассивный подъем 248
Периоды развития науки 10
Перцептрон 38
Перспективная активность (перeadaptация) 22, 23
Плотная упаковка 170, 227
Правило Арманда А. Д. 34
— Либиха 223
Предсказание 15, 28
Принцип бритвы Оккама 22
— минимаксного построения моделей 22
— равнопрочности 305
— рекуррентного объяснения 21
— усложняющегося поведения 22
— формирования законов 20
Производящая (производящая функции) 86

- вероятностей m -компонентности 123, 125
- — связности 133
- — частот СА 105, 106, 107
- — СФ СФ 110
- — элементарных значений
- — — СФ 110
- — — СФ 110, 112
- , максиминная лемма чисел 86, 91, 97, 126
- Проклятие размерности 25
- Поведение 18
- Подстановка 66
- Подход системный 3, 11
- энергетический 206
- Помехоустойчивость (I-качество) 29, 212
- Потенциальная приспособляемость 32
- эффективность 4
- — человечества 35

Р

- Распознавание образов 38
- Распределение 58, 309
- биномиальное 318
- геометрическое 320
- нормальное 290
- первого благоприятного испытания 318
- полиномиальное 31
- последовательностей 310
- Пуассона 318
- равномерное 320
- усеченное 309
- — геометрическое 320
- экспоненциальное 302
- Реакция-стимул 215, 246
- Редукционизм 14
- Рефлексия 22, 23

С

- Самоорганизация (L -качество) 29
- Система 18
- знаковая (идеальная) 19
- —, модель 19
- материальная (вещественная) 19
- — детерминированная 19
- — стохастическая 19
- — простая 19
- — — автоматическая 23
- — сложная 19

- — — превращающаяся 31
- — — решающая 18
- — — самоорганизующаяся 38
- — — уникальная 8
- Системный анализ 3
- Системология 3
- наивная 11
- , основы 6
- , основания 6
- , положения 10
- , принципы 17
- События 309
- независимые 59, 310
- псевдонезависимые 310
- Состояния системы 66
- — сопряженные 67
- Спонтанный акт 69
- Среда 29
- , комфортность 47
- Среднее время жизни 33
- — между катастрофами 33
- Средний удельный рацион 348
- Статистическая динамика 255
- Стимул-реакция 215, 246
- Стохастический аргумент (СА) 100
- Бернуллиевский 107
- Марковский 103
- Пуассоновский 106
- , частота 103
- — —, вероятность 103
- — —, производящая 103
- , элементарное значение 101
- —, вероятности 100
- — —, производящая 101
- Стохастическая зависимость (СЗ) 107
- — с независимыми переходами 110
- — —, производящая 109, 111
- Стохастическая функция (СФ) 99, 110
- —, бинарная симметричная (БССФ) 183
- —, бинарная стирающая (БСтСФ) 183
- —, связь между производящими СФ и СА 112
- —, (s, M, λ) -обращение 164
- — —, оптимальное 165
- — —, основная теорема 167

— — сильностохастическая
185
— — стирающее расширение
179
— — эквизетропийная 179
Структура 18
Структурализм 11, 52

Т

Теория информации 202
— потенциальной эффективности 340
— рационального природопользования 284
Триатроф 229

У

Умозрительность 13
Упорядоченность качеств 29
Управляемость (С-качество)
29, 213
(u, v)-обмен 42
(U, V)-обмен 71

Ф

Физика (теория простых систем) 12
Физикализм 11

Х

Характеристика компенсационная 47
— (l^+, l^-) 305
— оперативная 48, 247, 263
Характерные времена 34, 35
 h -функция 134, 194

Ц

Цель 43, 72
Целесообразность, 14
Целостность 31

Э

Эволюционное моделирование 39
Экология 206
— инженерная 284
— системная 206
Экоцид 10
Экспериментальность 13
Эмергентность 14
Эргодичность 282

Я

Янус-космология 51

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. Концептуальные основы	6
1.1. Эмпирические основания	6
1.2. Положения системологии	10
1.2.1. Три периода развития науки (10). 1.2.2. Умозрительность вместо экспериментальности (13). 1.2.3. Эмергентность вместо редукционизма (14). 1.2.4. Целесообразность вместо естественности (14). 1.2.5. Объяснение и предсказание (15). 1.2.6. Критический обзор различных оценок системологии (16).	
1.3. Принципы системологии	17
1.3.1. Системы (18). 1.3.2. Модели (19). 1.3.3. Законы (20). 1.3.4. Формулировка принципов системологии (20). 1.3.5. Принципы усложняющегося поведения (22). 1.3.6. Оптимизационные модели — основа теории сложных систем (24).	
1.4. Система и среда	29
1.4.1. Упорядочение качеств сложных систем (29). 1.4.2. Устойчивость — первичное качество систем (30). 1.4.3. Катастрофы и потенциальная приспособляемость жизни (32). 1.4.4. Потенциальная эффективность человечества (35). 1.4.5. Исследования самоорганизации сложных систем (38).	
1.5. Потенциальная эффективность	40
1.5.1. Общая форма предельного закона (40). 1.5.2. Конструктивность (43). 1.5.3. Осуществимость (45). 1.5.4. Комфортность среды и компенсационная характеристика (47). 1.5.5. Неоднозначность и вырождение оптимизационной модели. Оперативная характеристика (48).	
1.6. Другие концепции	05
1.6.1. Янус-космология (51). 1.6.2. Неоструктурализм (51). 1.6.3. Необиохевиоризм (53). Кое-что о математике и физике (54).	
2. Комбинаторные основания	55
2.1. Формализация основных понятий	55
2.1.1. Множества и отношения (55). 2.1.2. Вероятность (57). 2.1.3. Нечеткие множества (61). 2.1.4. Две экспериментальные интерпретации математического понятия вероятности (64). 2.1.5. Система, среда и их взаимодействие. Простые и сложные системы (66). 2.1.6. (U, V) -обмен, понятие цели и оптимальная система (70). 2.1.7. Заключительные замечания (76).	
2.2. Комбинаторика расположений	77
2.2.1. Аксиоматика (78). 2.2.2. Множества \mathcal{E}_τ^t (83). 2.2.3. Множества $\mathcal{E}_{A,\sigma}^k$ и m -разбиения (88). 2.2.4. Двойные расположения и пересечения комбинаторных сфер (92).	
2.3. Стохастические функции	99
2.3.1. Дискретный стохастический аргумент (100). 2.3.2. Производящая функция СА (101). 2.3.3. Дискретная стохастическая зависимость (107). 2.3.4. Общее определение стохастической функции (110). 2.3.5. СЗ с независимыми переходами (110). 2.3.6. Основное соотношение между производящими значениями СА и СФ для СЗ с независимыми переходами (112). 2.3.7. Заключительные замечания (113).	
2.4. Случайные графы	114
2.4.1. Общее определение случайного графа (115). 2.4.2. Основные точные выражения для вероятностей m -компонентности случайных графов $\Gamma_{n,p}$ (118). 2.4.3. Комбинаторные выражения для вероятностей m -компонентности (119). 2.4.4. Основные производящие функции (122). 2.4.5. Явные выражения производящих (125). 2.4.6. Асимптотически точные оценки вероятностей $P_n^{\mathcal{K}}$ (129).	
2.5. Дискретная оптимизация	131
2.5.1. Максимальная лемма и h -функция (132). 2.5.2. Полиномиальные суммы. h -функция (135). 2.5.3. Пересечения комбинаторных сфер. K -функция (141). 2.5.4. Совместные оценки для стохастических функций k^0 - и k^1 -функции (145). 2.5.5. Экстремальные разбиения (157). 2.5.6. Оптимальное (s, M, λ) -обращение. Теоремы существования. Общий случай стохастической функции (162). 2.5.7. Теоремы существования. Стохастическая функция с независимыми переходами (175). 2.5.8. Конструктивные методы построения оптимальных $(s \times M)$ -таблиц (187).	

2.6. Некоторые интерпретации	199
2.6.1. Общематематические интерпретации (199).	
2.6.2. Об оптимизационных задачах на случайных графах (201).	
2.6.3. Теория информации. Статистика и математическая экология (202).	
2.6.4. Игровая оптимизация (203).	
2.6.5. Заключительные замечания (205).	
3. Системная экология	206
3.1. Энергетический подход и понятие биоценоза	206
3.2. Предельные законы и их экологическая интерпретация	210
3.2.1. Модель R -сечения A_R (211).	
3.2.2. Модель I -сечения A_I (212).	
3.2.3. Модель G -сечения A_G (213).	
3.2.4. Модели XU -сечений (217).	
3.2.5. Модель RC -сечения A_{RC} (217).	
3.2.6. О возможности целостного рассмотрения биосистемы на основе ее отдельных X -сечений. Правило Либиха (223).	
3.3. Биоценозы	226
3.3.1. Основные понятия (226).	
3.3.2. Аналитические модели биоценозов (230).	
3.4. Макроуровень	231
3.4.1. Общая динамическая модель биоценоза (231).	
3.4.2. Оптимизация модели биоценоза (238).	
3.4.3. Импульсная стабильность и адаптационный цикл биоценоза (246).	
3.4.4. Дальнейшая детализация взаимодействия α -особей (250).	
3.4.5. Статистическая динамика многовозрастной популяции (255).	
3.5. Микроуровень	260
3.5.1. Индивидуальное сенсорное обнаружение сигналов (261).	
3.5.2. Коллективное экологическое обнаружение пятен пищи (270).	
3.5.3. Формализация понятия целостности m -стаи. Оптимизационная модель (268).	
3.5.4. Коллективный поиск и обнаружение пятен пищи (270).	
3.5.5. Объяснение эффекта неравномерности распределения плотности летучих рыб (275).	
3.5.6. Коллективная защита от хищника (278).	
3.5.7. Адаптивная роль численности m -стаи. Бернуллиевские m -стаи и эргодичность (282).	
3.6. Мониторинг	284
3.6.1. Теория рационального природопользования (284).	
3.6.2. Мониторинговые системы обнаружения аномалий на поверхности Земли (286).	
3.6.3. Функциональная схема МС (287).	
3.6.4. Модель контроля (289).	
3.6.5. Метамоделю управления (293).	
3.6.6. Технико-экономическая оптимизация модели МС (296).	
3.6.7. Оценка потенциальной надежности МС (298).	
3.6.8. Оптимальное распределение затрат на обеспечение технической и эксплуатационной надежности МС (302).	
3.6.9. Оценка общей эффективности МС (304).	
3.6.10. (t_+, t_-) -характеристики пятнистости поверхности Земли (305).	
Приложения	
Приложение 1. Усеченные распределения и псевдонезависимые события	
П.1.1. Распределения (309).	
П.1.2. Независимые и псевдонезависимые события (309).	
П.1.3. Схема Бернулли. Независимые события (310).	
П.1.4. Схема Бернулли. Псевдонезависимые события A_{ij} и A_{ij} (315).	
П.1.5. Схема Паскаля. Распределение первого благоприятного исхода (318).	
П.1.6. Некоторые специальные суммы случайного числа случайных слагаемых (321).	
Приложение 2. Экстремальные задачи системной экологии (макроуровень)	324
Приложение 3. Экстремальные задачи системной экологии (микроуровень) и мониторинга	336
П.3.1. Последовательное обнаружение (336).	
П.3.2. Зависимость вероятности обнаружения особью сигнала от расстояния до его источника (339).	
П.3.3. Суммарная интенсивность точечных источников h -решетки (340).	
П.3.4. Вероятности обнаружения и ложной тревоги m -стаи (342).	
П.3.5. Оценка вероятностей связности случайного графа (342).	
П.3.6. Максимальное значение вероятности связности случайного графа (345).	
П.3.7. Вывод формулы среднего удельного рациона особи m -стаи (346).	
П.3.8. Максимизация среднего удельного рациона особи m -стаи (348).	
П.3.9. Некоторые экстремальные задачи мониторинга (352).	
Список литературы	355
Именной указатель	361
Предметный указатель	363

