М.А. ЕВГРАФОВ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

М.А. ЕВГРАФОВ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

М. А. ЕВГРАФОВ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебного пособия для студентов вузов,
обучающихся по специальностям:
«Математика», «Прикладная математика», «Физика»*

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1991

ББК 22.161.5
Е14
УДК 517.54(075.8)

Евграфов М. А. **Аналитические функции:** Учеб. пособие для вузов.— 3-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука. **Гл.** ред. физ.-мат. лит., 1991.— 448 с.— ISBN 5-02-014200-X.

Первое издание вышло в 1965 году, второе — в 1968 году, и оба издания быстро разошлись. Книга пользуется большим спросом, но стала библиографической редкостью. Своим содержанием, методическим подходом она по-прежнему сильно отличается от других учебников по теории аналитических функций, хотя за истекшее время их появилось много.

В третьем издании исправлены замеченные неточности и внесены улучшения в некоторые доказательства.

Для студентов вузов с повышенной программой по математике.

Ил. 10. Библиогр. 44 назв.

Рецензент
доктор физико-математических наук профессор *В. А. Зорич*

Е $\frac{1602070000—011}{053(02)\text{-}91}$ 51-90

ISBN 5-02-014200-X

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Первое издание этой книги вышло в свет в 1965 году, второе — в 1968 году, и оба издания быстро разошлись. Поскольку тираж был совсем не малым, книга еще имеется в библиотеках, однако новое поколение математиков уже давно лишено возможности купить ее. По своему содержанию эта книга сильно отличается от других учебников по теории аналитических функций, хотя за истекшее время появилось немало новых учебников. Мне трудно судить, хороша ли эта книга, но она, по-видимому, нашла своего читателя (возможно, и не того, для которого я ее писал).

За четверть века, прошедшие с того времени, когда я начал писать эту книгу, мои взгляды на то, кого, чему и как надо учить в теории аналитических функций, сильно изменились. Однако написанная книга существует в том виде, в котором она есть, и притом вполне успешно (в Чехословакии ее перевели в 1981 году, наверное, из-за невозможности достать ее на русском или английском языке). Поэтому я не стал вносить в третье издание сколько-нибудь серьезных изменений, а ограничился лишь исправлением замеченных неточностей и улучшениями отдельных доказательств.

М. А. Евграфов

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемый учебник рассчитан на студентов и других читателей, владеющих основами математического анализа в объеме первых двух курсов университета.

Порядок изложения материала в настоящем учебнике существенно отличается от других учебников по теории аналитических функций. Речь идет о месте строгой теории многозначных аналитических функций, излагаемой на основе аналитического продолжения. Во всех принятых учебниках эта теория излагается лишь в самом конце, а в предлагаемой книге она помещена значительно ближе к началу (глава III). Для такого расположения материала имеются достаточные основания. Во-первых, с точки зрения логики изложения аналитическое продолжение играет в теории аналитических функций не меньшую роль, чем теория пределов в анализе. Во-вторых, это очень выгодно с чисто практической точки зрения, так как раннее использование аналитического продолжения позволяет сэкономить много места и времени в дальнейшем. Обычные возражения против такого расположения основаны на мнении о трудности этих вопросов для понимания. Однако их трудность сильно преувеличена. Кроме того, при введении элементарных многозначных функций те же трудности все равно приходится преодолевать, причем более искусственным (а потому и менее понятным) способом. Во всяком случае опыт чтения лекций по теории аналитических функций в Московском физико-техническом институте убедил меня в том, что две-три трудные (но вполне доступные) лекции вполне оправдываются лучшим пониманием всего дальнейшего материала. Значительно легче проходили и упражнения, так как вопрос о выделении регулярной ветви переставал быть трудоемким и малопонятным.

Немалое значение имеет и то, что у учащихся с самого начала вырабатывается правильная и четкая точка зрения на изучаемый предмет.

При написании книги я стремился к возможно большей независимости отдельных глав, чтобы на основе книги можно было строить много различных по содержанию курсов. Объем материала, изложенного в учебнике, значительно превышает содержание обычно читаемых курсов ТФКП. Стоит подчеркнуть, что все главы написаны на уровне, вполне доступном для студентов III курса.

Отмечу имеющиеся связи между главами.

К главе I следует обращаться только за справками. Главы II—IV совершенно необходимы для всего дальнейшего. Главы VI и VII совершенно не связаны с главами V и VIII — X. Глава VIII существенно опирается на главу V, а сама служит основой для глав IX и X. Главы IX и X довольно слабо связаны между собой.

Глава I

ВВЕДЕНИЕ

Изучение теории аналитических функций требует от изучающего хорошего владения всем курсом математического анализа, и хотелось бы предполагать у читателя все необходимые знания. К сожалению, в курсах анализа принято излагать все вопросы для действительных функций действительных переменных. Из-за этого становится необходимым привести хотя бы формулировки основных сведений о пределах, непрерывности, интегралах для комплекснозначных функций комплексной переменной. В главу включены также некоторые элементарные сведения о топологии. Чтение этой главы не обязательно для понимания, но в случаях неясностей к ней полезно обращаться за справками.

§ 1. Комплексные числа

Рассмотрим множество, элементами которого являются всевозможные пары (a, b), где a и b — действительные числа. Будем считать две пары (a, b) и (c, d) равными, если $a = b$ и $c = d$. На множестве этих пар введем операции сложения и умножения формулами

$$(a, b)+(c, d)=(a+b, c+d),$$
$$(a, b)(c, d)=(ac-bd, ad+bc).$$

Полученный таким образом объект назовем *полем комплексных чисел*, а каждый его элемент — *комплексным числом.*

Исходя из определения, нетрудно проверить, что введенные операции сложения и умножения комплексных чисел обладают свойствами:

1. Ассоциативности, т. е.

$$(z+\zeta)+w=z+(\zeta+w),$$
$$(z\zeta)w=z(\zeta w).$$

2. Коммутативности, т. е.

$$z+\zeta=\zeta+z, \quad z\zeta=\zeta z.$$

3. Дистрибутивности, т. е.

$$z(\zeta+w)=z\zeta+zw.$$

Определим умножение комплексного числа $z=(a, b)$ на действительное число c равенством

$$c(a, b)=(ca, cb).$$

Тогда любое комплексное число можно записать в виде

$$(a, b)=ae_1+be_2, \quad e_1=(1, 0), \quad e_2=(0, 1).$$

Число e_1 ведет себя при умножении как единица, так как $ze_1=z$. Поэтому разумно отождествить e_1 с единицей. Для числа e_2 обычно употребляется обозначение $e_2=i$, а называется оно мнимой единицей. Нетрудно проверить, что $i^2=-1$. Таким образом, комплексное число записывается в виде

$$(a, b)=a+bi.$$

Комплексное число $a+0i$ отождествляется с действительным числом a, а комплексное число $0+ib$ называется *чисто мнимым.*

Комплексное число можно рассматривать как расширение понятия действительного числа. Для комплексных чисел справедливы те же основные аксиомы, что и для действительных чисел, за исключением аксиомы Архимеда об упорядоченности. Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел смысла не имеют.

Действительные числа изображаются точками прямой. Комплексные числа естественно изображать точками плоскости. Именно, комплексное число $a+bi$ мы будем изображать точкой плоскости с абсциссой a и ординатой b. Комплексное число можно также изображать и вектором, тем более что комплексные числа складываются как векторы. Впрочем, аналогией между комплексными числами и векторами увлекаться не следует. Ни скалярное, ни векторное произведения не имеют никакого отношения к умножению комплексных чисел.

Приведем ряд традиционных названий и обозначений, относящихся к комплексным числам.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью.*

Ось абсцисс в комплексной плоскости называется *действительной осью*, а ось ординат — *мнимой осью*.

Пусть $z = a + bi$. Употребляются следующие названия и обозначения:

$a = \operatorname{Re} z$ — *действительная часть* z;

$b = \operatorname{Im} z$ — *мнимая часть* z *);

$a - bi = \bar{z}$ — *число, комплексно сопряженное с* z;

$\sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ — *модуль* z (абсолютная величина z);

$\arg z$ — *аргумент* z; это — число φ, определяемое из равенств

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Аргумент z определяется с точностью до прибавления целого кратного 2π.

Все введенные величины имеют простой геометрический смысл на комплексной плоскости. Так, модуль z — это расстояние от начала координат до точки z, аргумент z — это угол от положительного направления действительной оси к вектору, идущему из начала координат в точку z.

Отметим два важных неравенства для модуля.

Теорема 1.1. *Для любых комплексных чисел* z_1 *и* z_2

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

Доказательство. Рассмотрим треугольник с вершинами 0, z_1, $z_1 + z_2$. Длины его сторон равны: $|z_1|$ (от 0 до z_1), $|z_2|$ (от z_1 до $z_1 + z_2$) и $|z_1 + z_2|$ (от $z_1 + z_2$ до 0), так как расстояние между точками z и ζ равно $|z - \zeta|$. Мы знаем, что длина стороны треугольника не больше суммы длин двух других сторон и не меньше абсолютной величины их разности. Применяя эти утверждения к стороне от $z_1 + z_2$ до 0, получаем требуемые неравенства.

С помощью введенных обозначений легко записываются различные области комплексной плоскости (или линии на ней). Например:

Неравенству $|z - z_0| < R$ удовлетворяют точки z, лежащие в круге радиуса R с центром в точке z_0.

---

*) Обозначения Re и Im появились как сокращения французских слов *Reel* (действительный) и *Imaginaire* (мнимый).

Неравенству $\operatorname{Im} z > 0$ удовлетворяют точки z, лежащие в верхней полуплоскости, т. е. выше действительной оси.

Неравенству $|\arg z - \theta| < \eta$ удовлетворяют точки z, лежащие внутри угла раствора 2η с вершиной в начале координат и с биссектрисой, образующей угол θ с положительной частью действительной оси. Точки биссектрисы описываются равенством $\arg z = \theta$.

Для комплексных чисел часто употребляется так называемая показательная или тригонометрическая запись:

$$z = re^{i\varphi}$$

(здесь $e^{i\varphi}$ понимается согласно формуле Эйлера как $\cos\varphi + i\sin\varphi$). Нетрудно видеть, что

$$\operatorname{Re} z = r\cos\varphi, \quad \operatorname{Im} z = r\sin\varphi,$$
$$|z| = r, \quad \arg z = \varphi + 2\pi k, \quad \bar{z} = re^{-i\varphi}.$$

Из определения произведения комплексных чисел можно вывести следующий результат:

При перемножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются.

Обычно мы будем иметь дело с так называемой *расширенной комплексной плоскостью*, дополнив комплексную плоскость *бесконечно удаленной точкой*, соответствующей условному комплексному числу ∞. Расширенную комплексную плоскость называют также *комплексной сферой* или *сферой Римана*. Это название оправдывается следующей геометрической интерпретацией (*стереографическая проекция*).

Представим себе плоскость в трехмерном пространстве и сферу радиуса $1/2$, лежащую на этой плоскости и касающуюся ее в начале координат. Обозначим начало координат через O, а диаметрально противоположную точку сферы через P. Каждой точке z нашей плоскости поставим в соответствие точку $A(z)$ сферы, являющуюся пересечением сферы с прямой, соединяющей точки z и P. При этом каждая точка сферы кроме точки P находится во взаимно однозначном соответствии с точками плоскости. Нетрудно заметить, что когда $|z| \to \infty$, точка $A(z)$ стремится к точке P. Поэтому естественно считать, что точка P сферы соответствует бесконечно удаленной точке расширенной плоскости.

Иногда бывают полезны формулы, выражающие координаты точки $A(z)$ сферы Римана через координаты точки плоскости.

Теорема 1.2. *При стереографической проекции точке $z=x+iy$ ставится в соответствие точка $A(z)$ сферы $\xi^2+\eta^2+\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ с координатами*

$$\xi=\frac{x}{1+|z|^2},\quad \eta=\frac{y}{1+|z|^2},\quad \zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2}.$$

Доказательство. Поскольку проекция точки A лежит на прямой Oz, от $\xi=\lambda x$, $\eta=\lambda y$, где λ — некоторый действительный множитель. Для его определения найдем ζ. Рассмотрим сечение сферы и плоскости плоскостью, проходящей через точки O, P и z (рис. 1). Прямоугольные треугольники OPz и OAz подобны. Высота треугольника OAz равна ζ, а гипотенуза $|z|$. Отрезок OA является катетом треугольника OAz и высотой треугольника OPz. Из подобия треугольников OPz и OAz имеем

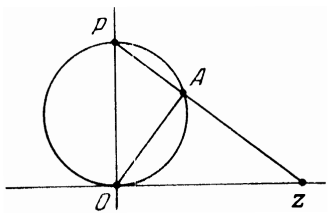

Рис. 1

$$\frac{\zeta}{OA}=\frac{OA}{OP},\quad \frac{\zeta}{Oz}=\frac{OA}{Pz};$$

$$Oz=|z|,\quad OP=1,\quad Pz=\sqrt{1+|z|^2},$$

откуда находим $\zeta=\dfrac{|z|^2}{1+|z|^2}$.

С помощью уравнения сферы легко определяем величину $\lambda=\dfrac{1}{1+|z|^2}$, а затем ξ и η.

Следствие. *Пусть $k(w, z)$ — расстояние между точками $A(z)$ и $A(w)$. Тогда*

$$k(w, z)=\frac{|w-z|}{\sqrt{1+|w|^2}\sqrt{1+|z|^2}},\quad k(w, \infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|w|^2}}.$$

Это утверждение легко получается из формул теоремы 1.2.

Величина $k(w, z)$ называется *хордальным расстоянием* между точками w и z.

§ 2. Множества, функции и кривые

Нам придется иметь дело с различными множествами на расширенной комплексной плоскости, и во избежание недоразумений определим здесь смысл терминов, которыми будем пользоваться.

Вместо слов «точка z принадлежит множеству E» мы обычно будем писать формулу $z \in E$, а вместо слов «точка z не принадлежит множеству E»— формулу $z \notin E$.

Пересечением множеств E_1 и E_2 мы назовем множество E, состоящее из точек, принадлежащих как E_1, так и E_2.

Расстоянием между множествами E_1 и E_2 назовем величину

$$\rho(E_1, E_2) = \inf_{z \in E_1, \zeta \in E_2} |z - \zeta|.$$

Диаметром множества E мы назовем величину $\sup\limits_{z \in E, z' \in E} |z - z'|$.

Окрестностью точки z_0 будем называть круг $|z - z_0| < r$, где r — любое положительное число.

Окрестностью бесконечно удаленной точки будем называть множество $|z| > R$ при любом R (внешность круга)*).

Точку z назовем *предельной точкой множества* E, если в любой окрестности точки z бесконечно много точек множества E.

Точка z называется *внутренней точкой множества* E, если имеется ее окрестность, состоящая только из точек E.

Точка z называется *внешней к множеству* E, если имеется окрестность точки z, состоящая только из точек, не принадлежащих E.

Точка z называется *граничной точкой множества* E, если в любой окрестности точки z есть точки и принадлежащие, и не принадлежащие E.

Совокупность всех граничных точек множества называется его *границей*.

Границу множества E будем обозначать символом ∂E.

Множество называется *замкнутым*, если оно содержит свою границу.

---

*) *Окрестностью* точки z_0 можно назвать и круг $k(z, z_0) < r$ при любом $r > 0$. Тогда нет нужды выделять бесконечно удаленную точку.

Можно показать, что граница множества всегда является замкнутым множеством.

Множество, получающееся присоединением к E его границы, называется *замыканием* E и обозначается $\bar{E}$.

Множество называется *открытым*, если все его точки внутренние.

Открытое множество называется *связным*, если его нельзя разбить на два открытых множества, не имеющих общих точек. Связное открытое множество называется *областью*.

Замкнутое множество называется *связным*, если его нельзя разбить на два замкнутых множества, не имеющих общих точек.

Область расширенной комплексной плоскости называется *n-связной областью*, если ее граница состоит из n связных замкнутых множеств (называемых *компонентами границы*).

Любую n-связную область можно представлять себе как односвязную область, в которой прорезано $n-1$ дырок.

Отметим еще, что для расширенной комплексной плоскости так называемая лемма Гейне — Бореля имеет место в следующей формулировке.

Пусть имеется множество окрестностей, покрывающих в совокупности замкнутое множество E. Из этого множества всегда можно выбрать конечное подмножество окрестностей, покрывающих в совокупности множество E.

В теории аналитических функций часто приходится иметь дело с различными видами кривых на плоскости. Поэтому обсудим понятие кривой несколько подробнее, чем это обычно делается в анализе.

Начнем с определения *непрерывной кривой* на плоскости.

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные на отрезке $[0, 1]$ функции параметра t. Уравнение

$$z = x(t) + iy(t) = z(t)$$

назовем *параметрическим уравнением* кривой. Будем считать, что два параметрических уравнения $z = z_1(t)$ и $z = z_2(t)$ определяют одну и ту же *непрерывную кривую* в том и только в том случае, когда существует такая непрерывная на отрезке $[0, 1]$ монотонно возрастающая от

0 до 1 функция $\varphi(t)$, что $z_2(t) \equiv z_1(\varphi(t))$. Направление движения точки $z(t)$, отвечающее возрастанию параметра t, мы будем называть *положительным.*

Замечание 1. Ясно, что параметр t можно с тем же успехом считать меняющимся не на отрезке $[0, 1]$, а на любом другом отрезке действительной оси. Отрезок $[0, 1]$ выбран только с целью некоторого упрощения формулировки.

Замечание 2. Совершенно аналогичным образом можно определить непрерывную кривую не в конечной части плоскости, а во всей расширенной комплексной плоскости. Для этой цели необходимо потребовать, чтобы точка $z(t)$, как точка на сфере Римана, непрерывно зависела от параметра t (более общий подход к понятию кривой изложен в § 8).

Не следует смешивать понятие кривой с множеством точек, через которые эта кривая проходит. Согласно данному определению понятие кривой включает в себя еще и порядок прохождения точек этого множества. Более того, одна и та же точка плоскости может отвечать нескольким точкам кривой. В этом случае будем говорить, что кривая имеет *точки самопересечения.* Произвольная непрерывная кривая может иметь произвольное число точек самопересечения (известен даже пример кривой, заполняющей целую область плоскости). Наглядно кривую можно представлять себе в виде спутанной нитки с отмеченными началом и концом, лежащей на плоскости.

Кривую, не имеющую самопересечений, будем называть *простой кривой.*

Кривую, у которой конец совпадает с началом, называют *замкнутой кривой.*

Совпадение начала и конца кривой не будем считать самопересечением, так что имеет право на существование понятие *простой замкнутой кривой.*

С помощью понятия кривой можно дать следующий удобный критерий связности открытого множества:

Для того чтобы открытое множество E было связным, необходимо и достаточно, чтобы любые две его точки можно было соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству.

Произвольные непрерывные кривые могут иметь довольно сложное строение (например, существует непрерывная кривая, заполняющая плоскую область). Поэтому мы будем иметь дело с существенно более узким классом кусочно гладких кривых, который сейчас определим.

Кривую C будем называть *гладкой кривой*, если среди ее параметрических уравнений найдется такое, в котором функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0, 1]$, а их производные отличны от нуля на этом отрезке.

Гладкая кривая может быть, а может и не быть простой кривой. Если C — простая гладкая кривая, то она имеет в каждой своей точке касательную.

Кривую C будем называть *кусочно гладкой кривой*, если ее можно разбить на конечное число частей, каждая из которых является простой гладкой кривой. (Согласно этому определению не каждая гладкая кривая является кусочно гладкой.)

Для кусочно гладкой кривой легко определить понятие *точки кривой*. Именно, для простой кривой определяем точку кривой как точку плоскости, лежащую на этой кривой. Для произвольной кусочно гладкой кривой C, разбитой на простые гладкие части, считаем точкой C точку каждой из этих частей, причем точки разных частей считаем разными точками C, даже если они отвечают одной точке плоскости (конец одной из частей, совпадающий с началом следующей части, считаем одной и той же точкой C).

Предложенное определение позволяет разделить точки самопересечения кусочно гладкой кривой на несколько точек кривой. Ясно, что разные точки кривой отвечают разным значениям параметра в параметрическом уравнении, а разные значения параметра всегда отвечают разным точкам кривой.

Понятие кривой довольно близко связано с понятием границы плоской области, хотя, вообще говоря, строение границы произвольной плоской области существенно сложнее. Простейший пример такой связи дает известная *теорема Жордана*:

Каждая простая замкнутая кривая разбивает расширенную комплексную плоскость на две области и представляет собой границу каждой из этих областей.

Доказательство теоремы Жордана в случае произвольной простой кривой представляет довольно трудную задачу, но для кусочно гладких кривых она геометрически очевидна.

В анализе обычно используются области, ограниченные конечным числом попарно непересекающихся кусочно гладких простых кривых. В теории аналитических функций часто приходится иметь дело с несколько более сложными областями. Эти области получаются из областей описанного вида проведением конечного числа дополнительных разрезов по кусочно-гладким кривым и выкалыванием счетного числа изолированных точек. Разрезы можно включить в граничные кривые, но тогда граничные кривые уже перестают быть простыми кривыми. Кривые, получаемые таким образом, мы будем называть *кривыми со складками*. Кривая со складками разбивается на простые участки, каждый из которых проходится не более двух раз. Участок, проходимый дважды, проходится один раз в одном направлении, а второй раз — в противоположном. Отдельные точки могут проходиться любое конечное число раз.

Пример 1. Пусть $m > 2$ — целое число. Обозначим через D всю расширенную комплексную плоскость, из которой удалены отрезки

$$l_k = \left[0, \exp\frac{2k\pi i}{m}\right], \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Ясно, что D — односвязная область, а ее граница состоит из объединения удаленных отрезков, и она представляется в виде кривой со складками следующим образом.

Проходим отрезок l_0 от точки $z = 0$ к точке $z = 1$, а затем в обратном направлении — от точки $z = 1$ к точке $z = 0$. После этого совершаем аналогичный проход по отрезку l_1, затем по отрезку l_2, и т. д., кончая проходом отрезка l_{m-1}.

Каждый отрезок l_k представляет собой простой участок рассматриваемой кривой со складками, проходимый дважды, т. е. складку. При полном обходе кривой точка $z = 0$ проходится $2m$ раз.

Области интересующего нас типа всегда можно разбить на конечное число односвязных частей, ограниченных простыми кусочно гладкими кривыми, таким образом, чтобы эти части не имели попарно общих внутренних точек (они должны прилегать друг к другу по границам). Для областей описанного типа введем несколько позже понятие, заменяющее равномерную непрерывность функции в такой области.

Введем еще один класс кривых, широко используемый при интегрировании.

Возьмем на кривой C произвольное конечное число точек и соединим их прямолинейными отрезками в порядке следования по кривой. Если при любом выборе точек на кривой длины ломаных ограничены, назовем кривую C *спрямляемой*. Верхнюю грань длин ломаных при всевозможном выборе точек назовем *длиной кривой*.

Очевидно, что любая кусочно гладкая кривая, лежащая в конечной части плоскости, спрямляема.

О некоторых свойствах кривых мы еще будем говорить ниже, в § 5 и 7.

Дадим еще определение функции комплексного переменного $z = x + iy$.

Пусть каждой точке z множества E поставлено в соответствие комплексное число $f(z)$. Тогда будем говорить, что задана *функция* $f(z)$, определенная на множестве E. Множество E называется *областью определения функции* (хотя оно, вообще говоря, не обязано быть областью).

Обозначая $f(z) = u + iv$, видим, что любую функцию $f(z)$ комплексного переменного z можно рассматривать как пару функций u и v двух действительных переменных x и y.

Часто бывает удобно рассматривать функцию $f(z)$ геометрически как *отображение*, переводящее точки одной комплексной плоскости в точки другой комплексной плоскости.

Отображение $w = f(z)$ называется *дифференцируемым*, если функции

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$$

имеют непрерывные частные производные по x и по y. Величина

$$D(x, y) = u'_x v'_y - v'_x u'_y$$

называется *якобианом* дифференцируемого отображения $w = f(z)$.

Линейное отображение

$$u = b_{10} + b_{11}(x - x_0) + b_{12}(y - y_0),$$
$$v = b_{20} + b_{21}(x - x_0) + b_{22}(y - y_0),$$

где
$$b_{10} = u(x_0, y_0), \quad b_{11} = u'_x(x_0, y_0), \quad b_{12} = u'_y(x_0, y_0),$$
$$b_{20} = v(x_0, y_0), \quad b_{21} = v'_x(x_0, y_0), \quad b_{22} = v'_y(x_0, y_0),$$
называется *главной линейной частью отображения* $w = f(z)$ *в точке* $z_0 = x_0 + iy_0$.

Условие $D(x_0, y_0) \neq 0$ означает, что главная линейная часть отображения в точке z_0 является невырожденным линейным отображением. В этом случае мы говорим, что отображение $w = f(z)$ *не вырождено в точке* z_0.

О более общем подходе к понятию отображения мы будем еще говорить в § 8 этой главы.

§ 3. Пределы и ряды

Поскольку в анализе обычно изучаются лишь пределы действительных функций, изложим кратко основные сведения о пределах функций комплексного переменного.

Пусть функция $f(z)$ определена на множестве E, ζ — предельная точка множества E, и пусть существует число A, удовлетворяющее условию:

Для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при $0 < |z - \zeta| < \delta$, $z \in E$, выполняется неравенство
$$|f(z) - A| < \varepsilon.$$

Тогда будем говорить, что при $z \to \zeta$ по множеству E существует *предел функции* $f(z)$, равный числу A. Этот факт будем записывать одной из двух формул:
$$\lim_{z \to \zeta, z \in E} f(z) = A, \quad f(z) \to A \qquad (z \to \zeta,\ z \in E).$$

Если множество E содержит какую-либо окрестность точки ζ, то указание $z \in E$ в этих формулах будем опускать.

Формулировка легко видоизменяется для случая, когда $\zeta = \infty$ или $A = \infty$ (или оба вместе). При $\zeta = \infty$ нужно писать
$$|z| > R,\ z \in E, \quad \text{вместо } 0 < |z - \zeta| < \delta,\ z \in E,$$
а при $A = \infty$ нужно писать
$$|f(z)| > R \quad \text{вместо } |f(z) - A| < \varepsilon.$$

Предел последовательности является частным случаем предела функции, когда E совпадает с множеством целых положительных чисел.

Приведем несколько свойств пределов, доказательство которых предоставим читателю. (Здесь речь идет только о *конечных* пределах.)

Предел суммы конечного числа слагаемых существует, если существуют пределы слагаемых, и равен сумме этих пределов.

Предел произведения конечного числа сомножителей существует, если существуют пределы сомножителей, и равен произведению этих пределов.

Предел частного существует и равен частному пределов, если существуют пределы числителя и знаменателя и если предел знаменателя отличен от нуля.

Для существования предела комплексной величины необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы ее действительной и мнимой части.

Для существования предела $f(z)$ при z, стремящемся к ζ по множеству E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при любых $z \in E$, $z' \in E$, $|z-\zeta| < \delta$, $|z'-\zeta| < \delta$, имеет место неравенство

$$|f(z) - f(z')| < \varepsilon$$

(*критерий Коши*).

В дальнейшем часто придется пользоваться символами $\sim$, o, O. Смысл этих символов такой:

Формула $f(z) \sim \varphi(z)$ $(z \to \zeta,\ z \in E)$ означает, что

$$\lim \frac{f(z)}{\varphi(z)} = 1.$$

Формула $f(z) = o(\varphi(z))$ $(z \to \zeta,\ z \in E)$ означает, что

$$\lim \frac{f(z)}{\varphi(z)} = 0.$$

Формула $f(z) = O(\varphi(z))$ $(z \in E)$ означает, что

$$|f(z)| < C|\varphi(z)| \qquad (z \in E).$$

(Иначе говоря, $f(z) = O(\varphi(z))$ $(z \in E)$ означает, что отношение $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ ограничено на множестве E *).)

Большое значение имеет понятие равномерного стремления к пределу.

*) Наряду с формулой $f(z) = O(\varphi(z))$ $(z \in E)$ часто используется и формула

$$f(z) = O(\varphi(z)) \qquad (z \to \zeta,\ z \in E),$$

смысл которой определяется понятным образом.

Пусть нам дана функция $f(z, w)$, зависящая помимо z еще и от параметра w, и пусть

$$f(z, w) \to \varphi(w) \qquad (z \to \zeta,\ z \in G)$$

при любом фиксированном $w \in E$. Будем говорить, что *стремление к пределу равномерно по* $w \in E$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, зависящее только от ε, но не от w, что при $z \in G$, $0 < |z - \zeta| < \delta$, и при всех $w \in E$ выполняется неравенство

$$|f(z, w) - \varphi(w)| < \varepsilon.$$

Понятие равномерности применимо и к символам o и $\sim$. Оно означает, что стремление к пределу, входящему в определение символа, равномерно по указываемому параметру. Для символа O равномерность означает, что постоянную C, входящую в его определение, можно выбрать не зависящей от указываемого параметра (иначе говоря, что отношение $\dfrac{f(z, w)}{\varphi(z, w)}$ равномерно ограничено по указываемому параметру.)

Будем говорить, что *ряд* $\sum\limits_1^\infty u_n$ *сходится*, если последовательность $U_n = \sum\limits_1^n u_k$ имеет предел при $n \to \infty$. Этот предел называется *суммой ряда*.

Ряд $\sum\limits_1^\infty u_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд из модулей его членов $\sum\limits_1^\infty |u_n|$. Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Приведем основные сведения о числовых рядах.

1. *Для сходимости ряда* $\sum u_n$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое число* N, *что при любых* $n > N$ *и* $n' > N$ *имеет место неравенство* $\left|\sum\limits_n^{n'} u_k\right| < \varepsilon$.

2. *Для сходимости ряда* $\sum u_n$ *необходимо, чтобы* $u_n \to 0$.

3. *Если ряд* $\sum u_n$ *абсолютно сходится и* $|v_n| < |u_n|$, *то и ряд* $\sum v_n$ *абсолютно сходится.*

Часто рассматриваются и функциональные ряды $\sum u_n(z)$. Для функциональных рядов большое значение имеет понятие равномерной сходимости.

Будем говорить, что ряд $\sum u_n(z)$, сходящийся при каждом $z \in G$, *равномерно сходится по* $z \in G$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число N, зависящее только от ε, но не от z, что при $n > N$, $n' > N$ и при любых $z \in G$ выполняется неравенство $\left|\sum\limits_n^{n'} u_n(z)\right| < \varepsilon$.

Очень употребителен следующий простой признак равномерной сходимости функциональных рядов, носящий название *признака Вейерштрасса*:

Если $|u_n(z)| < u_n$ *при всех* $z \in G$ *и ряд* $\sum u_n$ *сходится, то ряд* $\sum u_n(z)$ *равномерно сходится по* $z \in G$.

В заключение приведем необходимые сведения о *степенных рядах*, т. е. о рядах вида

$$\sum_0^\infty c_n (z-a)^n, \tag{3.1}$$

где z, a и c_n — комплексные числа.

Следующее утверждение носит название *первой теоремы Абеля.*

Теорема 3.1. *Если ряд* (3.1) *сходится при* $z = z_1$, *то он абсолютно и равномерно по* z *сходится в любом круге* $|z-a| \leqslant R$, *где* $R < |z_1 - a|$.

Доказательство. Так как ряд (3.1) сходится при $z = z_1$, то согласно свойству 2 $c_n(z_1-a)^n \to 0$. Но последовательность, стремящаяся к нулю, ограничена по модулю. Значит,

$$|c_n(z_1-a)^n| \leqslant M \qquad (n \geqslant 0).$$

Далее, для любого z из круга $|z-a| \leqslant R$, $R < |z_1-a|$, имеем неравенство

$$\left|\frac{z-a}{z_1-a}\right| \leqslant \frac{R}{|z_1-a|} = \theta, \qquad 0 \leqslant \theta < 1.$$

Поэтому

$$|c_n(z-a)^n| = |c_n(z_1-a)^n| \cdot \left|\frac{z-a}{z_1-a}\right|^n \leqslant M\theta^n.$$

Но при $0 \leqslant \theta < 1$ ряд $\sum M\theta^n$ абсолютно сходится. Применяя признак Вейерштрасса, получаем утверждение теоремы.

Из первой теоремы Абеля следует важный вывод. Существует число R, обладающее свойством: при $|z-a| < R$ ряд (3.1) сходится, а при $|z-a| > R$ расходится. (Число R может быть и нулем или бесконечностью.) Это число R называется *радиусом сходимости* ряда (3.1), а круг $|z-a| < R$ — *кругом сходимости ряда* (3.1).

Для определения радиуса сходимости ряда (3.1) по его коэффициентам c_n имеется формула $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$, носящая название *формулы Коши — Адамара*.

§ 4. Непрерывные функции

Функция $f(z)$, определенная на множестве E, называется *непрерывной в точке* $\zeta \in E$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при $z \in E$, $|z-\zeta| < \delta$, имеем $|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon$.

Функция $f(z)$, определенная на множестве E, называется *непрерывной на этом множестве*, если она непрерывна в каждой его точке.

Отметим ряд свойств непрерывных функций.

Непрерывность функции $f(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ эквивалентна непрерывности действительных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x+iy), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x+iy),$$

двух действительных переменных x и y.

Сумма и произведение двух непрерывных функций непрерывны.

Частное двух непрерывных функций непрерывно в точках, где знаменатель не обращается в нуль.

Если значения непрерывной на множестве E функции $f(z)$ попадают в множество E, на котором непрерывна функция $F(z)$, то функция $\varphi(z) = F(f(z))$ непрерывна на множестве E.

Теорема 4.1. *Если функция $f(z, w)$ при всех $w \in G$ непрерывна на множестве E как функция z и*

$$f(z, w) \to \varphi(z) \qquad (w \to w_0,\ w \in G)$$

равномерно по $z \in E$, то функция $\varphi(z)$ непрерывна на множестве E.

Следствие. *Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций — непрерывная функция.*

Доказательство всех этих утверждений предоставим читателю.

Отметим еще один результат, который обычно не излагается в курсах анализа *).

Последовательность функций $f_n(z)$, определенных на множестве E, называется *равностепенно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, зависящее от ε, но не от n, что при $z \in E$, $z' \in E$, $|z - z'| < \delta$, имеем при всех n неравенства

$$|f_n(z) - f_n(z')| < \varepsilon.$$

Теорема Арцела. *Из равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной на множестве E последовательности функций $f_n(z)$ можно выделить подпоследовательность $f_{n_k}(z)$, равномерно сходящуюся по $z \in E$.*

Легко определяется непрерывность функций двух и более комплексных переменных. Например:

Функция $f(z, \zeta)$, определенная при $z \in G$, $\zeta \in \Gamma$, называется *непрерывной в точке* $z_0 \in G$, $\zeta_0 \in \Gamma$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при $z \in G$, $\zeta \in \Gamma$, $|z - z_0| + |\zeta - \zeta_0| < \delta$, имеем $|f(z, \zeta) - f(z_0, \zeta_0)| < \varepsilon$.

Ясно, что для функций двух или более комплексных переменных остаются в силе все перечисленные свойства непрерывных функций.

Обычным образом вводится понятие равномерной непрерывности.

Функция $f(z)$ называется *равномерно непрерывной на множестве* E, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при $|z - z'| < \delta$, $z \in E$, $z' \in E$, имеем неравенство $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$.

Функция, непрерывная на замкнутом множестве, равномерно непрерывна на нем.

Если функция равномерно непрерывна на множестве E, то ее можно доопределить на границе E так, чтобы полученная функция была непрерывна на $\bar{E}$.

Для удобства изучения функций, непрерывных в областях с разрезами, понадобится понятие, близкое к рав-

*) В курсе [14] эти вопросы освещены достаточно полно.

номерной непрерывности, но менее ограничивающее функцию.

Расстоянием по области D между точками $z \in D$ *и* $\zeta \in D$ назовем точную нижнюю грань диаметров ломаных, соединяющих точки z и ζ и лежащих в области D. Обозначать его будем $\rho_D(z, \zeta)$. (Такое определение расстояния называется *метрикой Мазуркевича.*)

Пусть функция $f(z)$ непрерывна в области D. Мы скажем, что $f(z)$ *непрерывна в области D вплоть до ее границы*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при $\rho_D(z, z') < \delta$, $z \in D$, $z' \in D$, имеем неравенство $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$.

Так как $\rho_D(z, \zeta) \geqslant |z - \zeta|$, то ясно, что непрерывность функции вплоть до границы области является более слабым требованием, чем равномерная непрерывность функции в области. С другой стороны:

Если область D ограничена простой кривой, то из непрерывности $f(z)$ в D вплоть до ее границы следует равномерная непрерывность $f(z)$ в D.

Этот результат для любых простых кривых является довольно тонким фактом, примерно соответствующим теореме Жордана (см. § 2), но для кусочно гладких кривых он почти очевиден. Читатель может попытаться доказать его для этого случая сам.

Для областей с разрезами непрерывность функции вплоть до границы области уже не равносильна равномерной непрерывности. Причина этого в том, что для областей с разрезами имеются точки, для которых $|z - \zeta|$ сколь угодно мал, а $\rho_D(z, \zeta)$ больше некоторой положительной постоянной. Такие точки расположены с разных сторон разреза. Поэтому различие между равномерной непрерывностью и непрерывностью вплоть до границы для областей с разрезами заключается в том, что равномерно непрерывная в области функция обязана иметь одинаковые пределы при стремлении точки к точке границы независимо от того, с какой стороны разреза происходит стремление, а функция, непрерывная вплоть до границы, может иметь разные пределы при стремлении с разных сторон разреза.

Расскажем подробнее о том, как доопределить на граничной кривой функцию, непрерывную вплоть до границы области.

Пусть область D ограничена замкнутой кусочно гладкой кривой со складками (или конечным числом таких кривых, не пересекающихся между собой), а функция $f(z)$ непрерывна в области D вплоть до ее границы.

Возьмем какую-либо часть D' области D, чтобы область D' была ограничена уже *простой* кусочно гладкой кривой. В границу D' может входить часть граничной кривой области D. В области D' функция $f(z)$ по-прежнему непрерывна вплоть до границы, так как, очевидно, $\rho_{D'}(z, \zeta) \geqslant \rho_D(z, \zeta)$. Согласно приведенному выше утверждению отсюда вытекает равномерная непрерывность $f(z)$ в D'. Следовательно, как отмечалось выше, $f(z)$ имеет предел при стремлении z к любой точке границы D', и доопределив $f(z)$ на границе D' этими предельными значениями, мы получим функцию, непрерывную в $\overline{D}'$. В частности, таким образом мы доопределяем $f(z)$ на той части граничной кривой области D, которая входит в границу D'. При этом полученная функция будет непрерывна на этой части граничной кривой.

Поскольку любую точку граничной кривой вместе с прилегающим к ней участком этой кривой можно включить в границу какой-либо части области D, то доопределяем $f(z)$ и на всей граничной кривой. Полученная на граничной кривой функция будет непрерывна. Конечно, в точках на разных сторонах разреза значения функции могут быть различны, так как эти точки отвечают разным точкам граничной кривой.

В дальнейшем будем считать, что функции, непрерывные вплоть до границы области, определены и на граничной кривой.

§ 5. Криволинейные интегралы

Дадим определение интеграла от функции комплексного переменного по спрямляемой кривой (см. § 2).

Пусть Γ — спрямляемая кривая, заданная уравнением

$$z = z(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b.$$

Возьмем произвольное число точек кривой $z_k = z(t_k)$ так, чтобы при любом k точка z_k следовала за точкой z_{k-1}, первая точка совпадала с началом кривой, а последняя — с ее концом. Сумму $\sum\limits_{1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$, где $\xi_k =$

$= z(t'_k)$ — любые точки кривой Г, лежащие между z_k и z_{k-1}, назовем *интегральной суммой*.

Интегралом от функции $f(z)$ по кривой Г

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz$$

назовем предел интегральных сумм при стремлении к нулю $\max\limits_k |t_k - t_{k-1}| \to 0$, если этот предел существует независимо от выбора точек z_k и ξ_k. (Можно было бы дать и другое определение, вводя суммы, аналогичные верхним и нижним суммам Дарбу.)

Интеграл от функции $f(z)$ по кривой Г легко может быть выражен через интегралы от действительных функций. В самом деле, если $f(z) = u + iv$, $z = x + iy$, то и

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma} u\,dx - v\,dy + i\int_{\Gamma} v\,dx + u\,dy.$$

В вопросе существования интеграла ограничимся одним простейшим результатом:

Если $f(z)$ непрерывна на Г, *то интеграл от $f(z)$ по* Г *существует.*

Заметим, что при изменении направления на кривой Г на противоположное интеграл меняет знак, так как меняют знак разности $z_k - z_{k-1}$.

Пределом интегральных сумм вида $\sum\limits_1^n f(\xi_k)\,|z_k - z_{k-1}|$ является интеграл, не меняющийся при изменении направления кривой на противоположное. Этот интеграл будем обозначать

$$\int_{\Gamma} f(z)\,|dz|.$$

Он выражается через действительные криволинейные интегралы первого рода

$$\int_{\Gamma} f(z)\,|dz| = \int_{\Gamma} u\,ds + i\int_{\Gamma} v\,ds.$$

Если кривая Г не только спрямляемая, но и кусочно гладкая, то интегралы сводятся к интегралам от функций действительного параметра t:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{a}^{b} f(z(t))\,z'(t)\,dt.$$

В анализе играет большую роль интегральная теорема о среднем. Для интегралов от комплексных функций она неверна. В самом деле, интеграл

$$\int_{0}^{2\pi} e^{it}\,dt = \int_{0}^{2\pi} \cos t\,dt + i\int_{0}^{2\pi} \sin t\,dt$$

равен нулю, а подынтегральная функция не обращается в нуль на отрезке интегрирования.

Следующее утверждение до некоторой степени заменяет интегральную теорему о среднем.

Теорема 5.1. *Модуль интеграла не превосходит максимума модуля подынтегральной функции, умноженного на длину пути интегрирования.*

Доказательство. Пусть дан интеграл

$$I = \int_{\Gamma} f(z)\,dz.$$

Обозначим $\max\limits_{z\in\Gamma} |f(z)| = M$, а длину кривой Γ через L. Рассмотрим любую интегральную сумму

$$S_n = \sum_{1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}).$$

В силу определения длины кривой (см. конец § 2) имеем

$$|S_n| \leqslant M \sum_{1}^{n} |z_k - z_{k-1}| \leqslant ML.$$

Следовательно, и $|I| \leqslant ML$. Теорема доказана.

Иногда приходится пользоваться более точным неравенством

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)\,dz\right| \leqslant \int_{\Gamma} |f(z)|\,|dz|, \tag{5.1}$$

тоже сразу получающимся из сравнения интегральных сумм.

Обычно криволинейные интегралы вычисляются сведением к интегралам от функций одного переменного через уравнение кривой (по формуле, приведенной выше). Однако иногда имеет смысл и непосредственное вычисление интеграла с помощью интегральных сумм. Приведем один пример такого вычисления, чтобы сразу использовать его результат.

Пример 1. Пусть Γ — произвольная кривая с началом в точке A и концом в точке B. Покажем, что интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} dz$$

существует и равен $B - A$.

Действительно, возьмем любую интегральную сумму. Имеем

$$S_n = \sum_{1}^{n} (z_k - z_{k-1}) = z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \ldots + z_n - z_{n-1} = \\ = z_n - z_0 = B - A,$$

так как первая точка совпадает с началом, а последняя — с концом кривой Γ. Следовательно, и интеграл равен $B - A$.

Теорема 5.2. *Пусть функция $f(z)$ непрерывна в некоторой области D, содержащей спрямляемую кривую Γ. Тогда интеграл от $f(z)$ по Γ можно с любой точностью приблизить интегралом от $f(z)$ по некоторой ломаной Γ_n, тоже лежащей в D.*

Доказательство. Разобьем кривую Γ на участки γ_k точками $z_0, z_1, \ldots, z_n$, следующими друг за другом (участок γ_k заключен между точками z_{k-1} и z_k). Обозначим длину γ_k через ρ_k, а длину Γ — через ρ. Величины ρ_k выберем столь малыми, чтобы все круги $|z - z_{k-1}| < \rho_k$ лежали в D и чтобы в этих кругах выполнялись неравенства

$$|f(z) - f(z_{k-1})| < \frac{\varepsilon}{2\rho} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\varepsilon > 0$ — заданное число. Через Γ_n обозначим ломаную с вершинами в точках $z_0, z_1, \ldots, z_n$ (в порядке следования), а через γ_k' — звенья Γ_n, соединяющие z_{k-1} и z_k.

Можно написать

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz - \int_{\Gamma_n} f(z)\,dz = \sum_{1}^{n} \left\{ \int_{\gamma_k} f(z)\,dz - \int_{\gamma'_k} f(z)\,dz \right\} =$$

$$= \sum_{1}^{n} \int_{\gamma_k} [f(z) - f(z_{k-1})]\,dz - \sum_{1}^{n} \int_{\gamma'_k} [f(z) - f(z_{k-1})]\,dz,$$

так как согласно примеру 1

$$\int_{\gamma_k} f(z_{k-1})\,dz = \int_{\gamma'_k} f(z_{k-1})\,dz = f(z_{k-1})(z_k - z_{k-1}).$$

Но по условиям выбора величин ρ_k подынтегральные функции не превосходят $\varepsilon/(2\rho)$, так что, оценивая интегралы с помощью теоремы 5.1, получаем

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)\,dz - \int_{\Gamma_n} f(z)\,dz \right| \leqslant \sum_{1}^{n} \frac{\varepsilon}{2\rho}\,\rho_k + \sum_{1}^{n} \frac{\varepsilon}{2\rho}\,\rho_k \leqslant \varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно мало, теорема доказана.

Среди криволинейных интегралов наиболее интересны интегралы по кривым, являющимся границей области. Пусть D — область, граница которой состоит из конечного числа замкнутых спрямляемых кривых. Если функция $f(z)$ непрерывна в области D вплоть до ее границы Γ (см. § 4), то определим *интеграл от $f(z)$ по Γ в положительном направлении* как сумму интегралов по всем кривым, составляющим Γ. Направление на этих кривых должно быть таким, чтобы при движении по любой кривой область оставалась слева.

Отметим еще одно утверждение, аналогичное теореме 5.2.

Теорема 5.3. *Пусть D — односвязная область, ограниченная кусочно гладкой кривой C. Если функция $f(z)$ непрерывна в области D вплоть до ее границы C, то интеграл от $f(z)$ по кривой C можно с любой точностью приблизить интегралом от $f(z)$ по некоторой замкнутой ломаной, лежащей в области D.*

Доказательство. Любую кусочно гладкую кривую C можно разбить на простые гладкие дуги $l_1, l_2, \ldots$ $\ldots, l_m$, обладающие тем свойством, что изменение угла наклона касательной вдоль каждой из этих дуг не превышает заданного числа $0<\eta<\pi$ (при желании мы могли бы считать число η сколь угодно малым, но нам достаточно, чтобы оно было меньше π). Тогда для каждой дуги l_k существует такое направление, что все прямые, параллельные этому направлению, пересекают дугу l_k не более одного раза.

Выберем достаточно малое число $\delta>0$ и удалим из кривой C точки, отстоящие от концов дуг l_k на расстояние, меньшее δ. Тогда оставшаяся часть кривой C распадется на m дуг $l_1^*, l_2^*, \ldots, l_m^*$ (дуга l_k^* лежит внутри дуги l_k). Ясно, что при $\delta\to 0$ общая длина выброшенных участков кривой C стремится к нулю, и потому имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{m}\int_{l_k^*} f(z)\,dz \to \int_C f(z)\,dz \qquad (\delta\to 0). \tag{5.2}$$

Обозначим символом $E+a$ множество, получаемое из множества E сдвигом на комплексное число a. Согласно выбору разбиения кривой C на дуги l_k построенные дуги l_k^* обладают следующим свойством.

Для каждого $k=1, 2, \ldots, m$ существует такое комплексное число ω_k, $|\omega_k|=1$, что дуга $l_k^*+\alpha\omega_k$ при любом достаточно малом значении $\alpha>0$ лежит в области D.

Из этого свойства и из непрерывности функции $f(z)$ в области D вплоть до ее границы следует, что

$$f(z+\alpha\omega_k)\to f(z) \qquad (\alpha\to 0,\ \alpha>0)$$

для каждого $z\in l_k^*$. Более того, ясно, что стремление к пределу равномерно по $z\in l_k^*$. Поэтому

$$\int_{l_k^*} f(z)\,dz - \int_{l_k^*+\alpha\omega_k} f(z)\,dz = \int_{l_k^*} f(z)\,dz - \int_{l_k^*} f(z+\alpha\omega_k)\,dz =$$

$$= \int_{l_k^*} [f(z)-f(z+\alpha\omega_k)]\,dz \to 0 \qquad (\alpha\to 0, \alpha>0). \tag{5.3}$$

Соотношения (5.2) и (5.3) показывают, что интеграл от функции $f(z)$ по кривой C можно с любой точностью приблизить суммой интегралов от той же функции по дугам $l_k^*+\alpha\omega_k$, лежащим уже внутри области D. Чтобы сделать из совокупности дуг $l_1^*, l_2^*, \ldots, l_m^*$ замкнутую кривую, лежащую в области D, надо дополнить эту совокупность какими-либо дугами γ_k, лежащими в области D и соединяющими между собой соответствующие концы дуг $l_s^* + \alpha\omega_s$ (именно, те концы, которые стремятся к одной и той же точке кривой C при $\alpha \to 0$ и $\delta \to 0$). Минимальную длину дуги γ_k, при которой такое соединение становится возможным, оценить нетрудно: эта минимальная длина не превосходит величины $2\delta + 2\alpha$. Следовательно, выбирая числа α и δ достаточно малыми, можно сделать сколь угодно малым интеграл по добавляемой части.

Таким образом, интеграл от функции $f(z)$ по граничной кривой C области D можно с любой точностью приблизить интегралом от той же функции по некоторой замкнутой кривой, лежащей в области D. Согласно теореме 5.2 последний интеграл можно с любой точностью приблизить интегралом от функции $f(z)$ по некоторой замкнутой ломаной, лежащей в области D. Тем самым теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Доказанная теорема остается справедливой, если предположить кривую C не кусочно гладкой, а спрямляемой. Доказательство теоремы 5.3 в таком виде потребовало бы ряда сведений из теории функций действительного переменного, и потому не станем приводить его здесь. □

Интеграл по границе области от функции, непрерывной вплоть до границы этой области, часто бывает удобно рассматривать как функцию области. Отметим одно важное свойство интеграла в этой роли.

Т е о р е м а 5.4. *Пусть функция $f(z)$ непрерывна в области D вплоть до ее границы Γ, состоящей из конечного числа спрямляемых кривых. Если область D разбита спрямляемыми кривыми на конечное число неперекрывающихся областей D_k с границами Γ_k, то*

$$\varphi(D) = \varphi(D_1) + \ldots + \varphi(D_n),$$

где

$$\varphi(D_k) = \int_{\Gamma_k} f(z)\,dz.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно рассмотреть случай, когда D разбита на две непересекающиеся области D_1

и D_2 Через Γ_1' обозначим часть границы D, являющуюся и границей D, через Γ_1'' — остальную часть границы D (аналогично для границы D_2). Ясно, что Γ_1'' и Γ_2'' отличаются лишь направлением обхода, так как при движении вдоль Γ_1'' область D_1 остается слева, а область D_2 — справа, при движении же по Γ_2'' — наоборот. Из тех же соображений ясно, что направление обхода Γ_1' и Γ_2' то же, что и направление обхода Γ. Ясно также, что Γ_1' и Γ_2' в сумме составляют Γ. Поэтому

$$\varphi(D) = \int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1'} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2'} f(z)\,dz =$$

$$= \int_{\Gamma_1'} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_1''} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2''} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2'} f(z)\,dz =$$

$$= \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = \varphi(D_1) + \varphi(D_2),$$

что и доказывает теорему.

Доказанное свойство называется *аддитивностью интеграла как функции области.*

З а м е ч а н и е. Легко убедиться, что при разбиении D на счетное число неперекрывающихся частей свойство аддитивности интеграла как функции области сохраняется, если сумма длин Γ_n конечна.

§ 6. Интегралы, зависящие от параметра

Нам придется привести доказательство двух теорем относительно интегралов, зависящих от параметра, так как в анализе они доказываются для слишком простых случаев.

Т е о р е м а 6.1. *Пусть функция $f(z, w)$ определена и непрерывна при $z \in \Gamma$, $w \in E$, где E — некоторое множество, а Γ — спрямляемая кривая. Если*

$$f(z, w) \to \varphi(z) \qquad (w \to w_0,\ w \in E)$$

равномерно по $z \in \Gamma$, то

$$\int_{\Gamma} f(z, w)\,dz \to \int_{\Gamma} \varphi(z)\,dz \qquad (w \to w_0,\ w \in E).$$

Доказательство. Согласно определению равномерного стремления к пределу для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при всех $z \in \Gamma$

$$|f(z, w) - \varphi(z)| < \frac{\varepsilon}{L} \qquad (|w - w_0| < \delta,\ w \in E)$$

(L — длина Γ). Применяя теорему 5.1 об оценке интеграла, имеем

$$\left|\int\limits_{\Gamma} [f(z, w) - \varphi(z)]\, dz\right| < \frac{\varepsilon}{L} L = \varepsilon \qquad (|w - w_0| < \delta,\ w \in E).$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, получаем утверждение теоремы.

Частным случаем доказанной теоремы является утверждение:

Ряд $\sum u_n(z)$ непрерывных функций $u_n(z)$ можно почленно интегрировать по любой кривой, на которой этот ряд равномерно сходится.

Теорема 6.2. *Пусть функция $f(z, w)$ определена и непрерывна при $z \in \Gamma$, $w \in C$ (Γ и C — спрямляемые кривые). Тогда функция*

$$F(w) = \int\limits_{\Gamma} f(z, w)\, dz$$

непрерывна при $w \in C$ и

$$\int\limits_{C}\int\limits_{\Gamma} f(z, w)\, dz\, dw = \int\limits_{\Gamma}\int\limits_{C} f(z, w)\, dw\, dz.$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что функция $f(z, w)$ равномерно непрерывна по совокупности своих переменных при $z \in \Gamma$, $w \in C$, так как кривые Γ и C — замкнутые множества (это не имеет отношения к тому, замкнутые ли они кривые!). Это значит, что $|f(z_1, w_1) - f(z_2, w_2)| < \varepsilon$, если только $|z_1 - z_2| + |w_1 - w_2| < \delta$ независимо от положения точек z_1 и z_2 на Γ и w_1 и w_2 на C.

Рассмотрим разность $F(w) - F(\zeta)$. По определению $F(w)$ имеем

$$F(w) - F(\zeta) = \int\limits_{\Gamma} [f(z, w) - f(z, \zeta)]\, dz.$$

Выбирая δ так, чтобы $|f(z, w) - f(z, \zeta)| < \frac{\varepsilon}{L}$ (L — длина Γ) при $|w - \zeta| < \delta$ и при любом $z \in \Gamma$, получаем неравенство $|F(w) - F(\zeta)| < \varepsilon$.

Непрерывность $F(w)$ доказана.

Найдем интеграл от $F(w)$ по C. Напишем интегральную сумму

$$S_n = \sum_1^n F(\theta_k)(w_k - w_{k-1}) = \int_\Gamma \sum_1^n f(z, \theta_k)(w_k - w_{k-1})\,dz.$$

Но, используя результат примера 1 § 5, можно написать

$$\sum_1^n f(z, \theta_k)(w_k - w_{k-1}) - \int_C f(z, w)\,dw =$$
$$= \sum_1^n \int_{C_k} [f(z, \theta_k) - f(z, w)]\,dw,$$

где через C_k обозначен участок кривой C между w_{k-1} и w_k. Выберем теперь разбиение кривой C на участки C_k столь мелким, чтобы при всех k

$$\max_{z \in \Gamma, w \in C_k} |f(z, \theta_k) - f(z, w)| < \frac{\varepsilon}{LL_1}$$

(L — длина Γ, L_1 — длина C). Тогда согласно теореме 5.1 об оценке интеграла можно написать, обозначая длину C_k через ρ_k:

$$\left| S_n - \int_\Gamma \int_C f(z, w)\,dz\,dw \right| < \frac{\varepsilon}{LL_1} L \sum_1^n \rho_k \leqslant \varepsilon.$$

Но при измельчении разбиения

$$S_n \to \int_C F(w)\,dw = \int_C \int_\Gamma f(z, w)\,dz\,dw.$$

Следовательно,

$$\int_C \int_\Gamma f(z, w)\,dz\,dw = \int_\Gamma \int_C f(z, w)\,dw\,dz,$$

и теорема доказана.

В заключение скажем еще несколько слов о несобственных криволинейных интегралах.

Если подынтегральная функция в некоторых точках контура интегрирования обращается в бесконечность или если контур интегрирования имеет бесконечную длину, то интеграл в том смысле, в котором мы его определили, не существует. Для этих случаев необходимо ввести понятие несобственного интеграла или интеграла с особенностями.

Мы определим несобственный интеграл для случая, когда подынтегральная функция непрерывна на контуре интегрирования, за исключением конечного числа точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а концы контура интегрирования могут уходить в бесконечность. В этом случае будем говорить об интеграле с особенностями в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и в бесконечности.

Ясно, что достаточно определить понятие несобственного интеграла с одной особенностью, расположенной в одном из концов контура, так как интеграл с несколькими особенностями можно разбить на сумму конечного числа интегралов, каждый из которых имеет такой вид. Итак, пусть функция $f(z)$ непрерывна во всех точках конечного контура C, за исключением одного из его концов, скажем a. Обозначим через C_ε часть контура C, лежащую вне круга $|z-a|<\varepsilon$. Если существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz,$$

то назовем его *несобственным интегралом от* $f(z)$ *по контуру* C *(с особенностью в точке* a*)*.

Аналогично определяется и несобственный интеграл по контуру, один из концов которого уходит в бесконечность (интеграл с особенностью в бесконечности).

Если несобственный интеграл от $f(z)$ по контуру C существует, то будем говорить, что $f(z)$ *интегрируема по контуру* C.

Если существует несобственный интеграл $\int\limits_C |f(z)|\,|dz|$, то будем говорить, что $f(z)$ *абсолютно интегрируема по контуру* C.

Нетрудно показать, что функция, абсолютно интегрируемая по контуру C, интегрируема по этому контуру.

Пусть теперь функция $f(z, w)$ при любых значениях параметра $w\in E$ непрерывна по z во всех точках контура C, за исключением его конца a. Если предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} f(z, w)\,dz = \int_C f(z, w)\,dz$$

существует равномерно по $w \in E$, то будем говорить, что несобственный интеграл *равномерно сходится по* $w \in E$. (Интеграл с несколькими особенностями называется равномерно сходящимся, если он может быть представлен в виде суммы равномерно сходящихся интегралов с одной особенностью.)

Теоремы 6.1 и 6.2 для равномерно сходящихся несобственных интегралов остаются в силе. $\square$

Сформулируем один признак равномерной сходимости несобственных интегралов, аналогичный признаку Вейерштрасса равномерной сходимости рядов.

Теорема 6.3. *Если при всех* $z \in C$ *и* $w \in E$ *непрерывная функция* $f(z, w)$ *удовлетворяет неравенству* $|f(z, w)| \leqslant \varphi(z)$ *и функция* $\varphi(z)$ *интегрируема по контуру* C, *то интеграл* $\int_C f(z, w)\,dz$ *равномерно сходится по* $w \in E$.

§ 7. Гомотопность кривых в областях на сфере

Рассмотрим некоторые простые геометрические свойства кривых, лежащих в заданной области комплексной плоскости (или сферы Римана). Интересующие нас факты в курсах анализа излагаются редко *), а при изучении теории аналитических функций знакомство с ними весьма полезно. В отдельных вопросах такое знакомство даже необходимо.

Мы будем использовать следующее определение гомотопности кривых:

Кривые C и C', лежащие в данной области D, называются *гомотопными* в этой области, если их можно перевести друг в друга непрерывной деформацией, не выходя за пределы области D и не двигая ни начало, ни конец кривой.

Предложенное определение вполне корректно (если его аккуратно формализовать), и для нас оно удобнее

*) В курсе математического анализа [14] эти вопросы освещены достаточно подробно в современном изложении.

тем, что использует наглядно-геометрические термины. С точки зрения формальных доказательств у него много недостатков, и в настоящее время его почти не используют.

Современный подход состоит в отказе от понятия кривой и в использовании вместо него того объекта, который мы назвали параметрическим уравнением кривой. Определение гомотопности параметрических уравнений состоит в следующем.

Два параметрических уравнения

$$z = z_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1; \qquad z = z_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

называются *гомотопными* в области D, если существует функция $\Phi(t, s)$, обладающая такими свойствами:

1. Функция $\Phi(t, s)$ непрерывна по t и s при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant s \leqslant 1$.
2. $\Phi(t, s) \in D$ при всех $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant s \leqslant 1$.
3. Величины $\Phi(0, s)$ и $\Phi(1, s)$ не зависят от s.
4. Имеют место равенства $\Phi(t, 0) = z_1(t)$, $\Phi(t, 1) = z_2(t)$.

Предложенное выше определение гомотопности кривых можно заменить следующим равносильным утверждением более формального типа:

Две кривые гомотопны в области D, если у них найдутся гомотопные параметрические уравнения.

Действительно, обозначим через C_s кривую с параметрическим уравнением $z = \Phi(t, s)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. При изменении s от 0 до 1 кривая C_s непрерывно деформируется, оставаясь в области D (условия 1 и 2), а ее начало и ее конец не меняются (условие 3). При $s = 0$ кривая C_s совпадает с одной кривой, а при $s = 1$ — с другой (условие 4). $\square$

Перечислим некоторые факты о гомотопности кривых, которыми сравнительно часто будем пользоваться. Для их формулировки удобно ввести ряд обозначений.

Символом C_1C_2 будем обозначать кривую, полученную прохождением сначала кривой C_1, а затем — кривой C_2. Этим символом следует пользоваться лишь в случае, когда конец кривой C_1 совпадает с началом кривой C_2 (в этом случае C_1C_2 действительно представляет собой непрерывную кривую). Символом C^{-1} будем обозначать кривую C, проходимую в обратном направлении (от конца к началу). Начало кривой C будем обозначать символом $\alpha(C)$, а ее конец — символом $\omega(C)$. Гомотопность кривых C и C' в области D будем записывать формулой

$$C \approx C'(D).$$

1. *Если* $C \approx C'(D)$, *то* $\alpha(C)=\alpha(C')$ *и* $\omega(C)=\omega(C')$.

2. *Если* $C = C_1 \ldots C_n$, $C' = C_1' \ldots C_n'$ *и* $C_k \approx C_k'(D)$, $k = 1, \ldots, n$, *то* $C \approx C'(D)$.

3. *Если* $D_1 \subset D$ *и* $C \approx C'(D_1)$, *то* $C \approx C'(D)$.

4. *Если* D — *выпуклая область, то* $C \approx C'(D)$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha(C)=\alpha(C')$ *и* $\omega(C)=\omega(C')$.

Утверждения 2 и 3 вполне очевидны геометрически, а их доказательства через параметрические уравнения довольно кропотливы, хотя и нетрудны. Геометрическая наглядность утверждения 4, пожалуй, спорна, а его доказательство через параметрические уравнения совершенно тривиально. Действительно, если

$$z = z_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \qquad z = z_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

— параметрические уравнения кривых C и C', то достаточно положить

$$\Phi(t, s) = (1-s) z_1(t) + s z_2(t).$$

Из утверждения 4 видно, в частности, что любую кривую, лежащую в данной области, всегда можно заменить гомотопной ей гладкой кривой (или, если это удобнее, ломаной с конечным числом звеньев). $\square$

Гомотопическим классом кривой C в области D называют совокупность всех кривых, лежащих в области D и гомотопных кривой C. Гомотопический класс кривой C будем обозначать через $[C]$.

Обозначим через $\pi(D; z_0)$ множество гомотопических классов всех замкнутых кривых, лежащих в области D и проходящих через фиксированную точку $z_0 \in D$. На множестве $\pi(D; z_0)$ можно определить операцию *умножения гомотопических классов*, положив $[C_1][C_2] = [C_1 C_2]$. (Умножение гомотопических классов некоммутативно!)

Множество $\pi(D; z_0)$ представляет собой группу относительно введенной таким способом операции. Эта группа называется *фундаментальной группой области* D (относительно точки z_0). Единицей фундаментальной группы является гомотопический класс, состоящий из кривых, стягиваемых в точку z_0 непрерывной деформацией (не выводящей за пределы области D).

Нам будет нужен для ссылок следующий результат: *Фундаментальная группа m-связной области D является свободной группой с $m-1$ образующими.*

Что такое свободная группа, поясним ниже, но сначала изложим необходимую информацию о построении образующих.

Согласно определению граница m-связной области D на сфере Римана состоит из m компонент. С каждой компонентой границы связана ровно одна компонента дополнения к области D до всей сферы Римана.

Обозначим эти компоненты дополнения через $\gamma_0, \ldots$ $\ldots, \gamma_{m-1}$. Заключим каждую компоненту γ_k в область G_k, ограниченную простой замкнутой кривой Γ_k, лежащей в области D. Области G_k выберем такими, чтобы их замыкания не имели общих точек. На каждой кривой Γ_k выберем точку $\overset{*}{z}_k$, которую будем считать началом и концом кривой Γ_k. Из точки z_0 проведем в выбранную точку $\overset{*}{z}_k$ какую-либо кривую l_k, лежащую в области D, и обозначим

$$C_k = l_k \Gamma_k l_k^{-1}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Гомотопические классы $[C_1], \ldots, [C_{m-1}]$ можно взять в качестве образующих фундаментальной группы $\pi(D; z_0)$. Это означает, что каждый элемент $[C]$ фундаментальной группы можно представить в виде

$$[C] = \left[C_{i_1}^{\varepsilon_1}\right] \ldots \left[C_{i_n}^{\varepsilon_n}\right], \tag{7.1}$$

где числа i_k могут принимать значения $1, \ldots, m-1$, а числа ε_k — значения 1 или -1. Иными словами, каждая замкнутая кривая C, лежащая в области D и проходящая через точку z_0, гомотопна кривой $C' = C_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots C_{i_n}^{\varepsilon_n}$.

Утверждение, что фундаментальная группа является *свободной группой*, означает, что представление (7.1) единственно, если произвести все естественные сокращения — выбросить все встречающиеся рядом пары взаимно обратных элементов группы.

Доказательство приведенного утверждения вполне элементарно, но достаточно громоздко. Наиболее трудной его частью является доказательство единственности представления (7.1). $\square$

Особо выделим два наиболее простых случая приведенного утверждения.

Если область D односвязна, то множество образующих пусто, и фундаментальная группа $\pi(D;\ z_0)$ состоит только из единичного элемента. Иными словами, каждая замкнутая кривая, лежащая в области D, может быть стянута в точку, а любые две кривые, лежащие в односвязной области D, гомотоппы, если у них совпадают начальные и конечные точки.

Если область D двусвязна, то фундаментальная группа $\pi(D;\ z_0)$ состоит из степеней одного элемента $[C_1]$. Это означает, что каждая замкнутая кривая C, лежащая в двусвязной области D, гомотопна кривой C_1^{ν}, где ν — некоторое целое число. Чтобы лучше понять геометрический смысл этого числа ν, рассмотрим простейший частный случай, когда область D — это вся комплексная плоскость с выколотой точкой, которую обозначим через a. В этом случае в качестве кривой C_1 можно взять окружность с центром в точке a, обходимую один раз против часовой стрелки. Интересующее нас число ν представляет собой не что иное, как число обходов кривой C вокруг точки a против часовой стрелки. Это число принято называть *индексом точки a относительно кривой C*, и оно обозначается символом $\nu(C,\ a)$.

Для вычисления величины $\nu(C,\ a)$ в конкретных задачах имеются различные способы. Опишем один из них.

Проведем из точки a луч, идущий в бесконечность. Число точек, в которых кривая C пересекает этот луч справа налево, мы обозначим через ν^+, а число точек, в которых она пересекает этот луч слева направо,— через ν^-. Если числа ν^+ и ν^- конечны, то

$$\nu(C,\ a) = \nu^+ - \nu^-.$$

Формула остается в силе, если заменить луч любой простой кривой, идущей из точки a в бесконечность.

Для общей двусвязной области можно предложить аналогичную формулу, характеризующую гомотопический класс данной кривой C. Для этой цели заметим, что величина $\nu(C,\ a)$ одинакова при всех a из компоненты γ_1. Поэтому для замкнутых кривых C, лежащих в двусвязной области D, имеет смысл обозначение $\nu(C,\ \gamma_1)$. Эта величина и характеризует гомотопический класс кривой C в области D.

С помощью величины $\nu(C, \gamma_1)$ можно дать полное решение задачи о гомотопности кривых C и C' в двусвязной области D.

В двусвязной области D с компонентами дополнения γ_0 и γ_1 (до всей сферы Римана) кривые C и C' гомотопны тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\alpha(C)=\alpha(C'), \qquad \omega(C)=\omega(C'), \qquad \nu(C'C^{-1}, \gamma_1)=0.$$

В m-связных областях с $m>2$ столь простых критериев гомотопности кривых уже нет. Условия

$$\alpha(C)=\alpha(C'), \quad \omega(C)=\omega(C'),$$

и

$$\nu(C^{-1}C', \gamma_k)=0, \quad k=1, \ldots, m-1,$$

являются уже только необходимыми, но не достаточными условиями гомотопности кривых C и C'.

§ 8. Топологические пространства

В заключение этой вводной главы расскажем вкратце еще о некоторых элементарных понятиях из топологии. Знакомство с этими понятиями не обязательно для понимания дальнейшего изложения, хотя и полезно. Содержанием этого параграфа являются не доказательства, а только определения, позволяющие иногда взглянуть на известные факты с новой точки зрения.

Пусть дано множество каких-либо объектов, которые мы будем называть для удобства *точками* (а само множество — *пространством*). Это пространство называется топологическим пространством, если в нем определена *топология*, т. е., грубо говоря, если в нем определено понятие близости точек. Задавать в пространстве топологию можно разными способами. Наиболее естественный способ состоит в том, что определяется понятие сходимости последовательности точек. Этот способ нехорош тем, что понятие сходимости должно удовлетворять ряду условий, смысл которых не слишком нагляден. Тем не менее при изучении пространств, точками которых являются функции, этот способ задания топологии имеет свои преимущества. Очень употребителен способ задания топологии в пространстве с помощью системы окрестностей. Можно задать топологию, объявив, какие подмножества пространства являются открытыми множествами.

Еще один способ задать топологию состоит в том, чтобы описать функции на пространстве, которые являются непрерывными функциями.

Приведем определение топологического пространства через систему окрестностей, так как эта схема ближе всего подходит к схеме изложения элементов теоретико-множественной топологии в анализе.

Множество H называется *хаусдорфовым топологическим пространством*, если в нем выделена система подмножеств $\{U_\alpha\}$ (система окрестностей), обладающая свойствами:

1. Пересечение любых двух окрестностей U_α и U_β или пусто, или содержит некоторую окрестность U_γ.

2. Для любых двух различных точек a и b из множества H существует окрестность U_α, содержащая точку a и не содержащая точку b.

Будем считать, что две системы окрестностей $\{U_\alpha\}$ и и $\{U_\alpha^*\}$ определяют одинаковую топологию в пространстве H, если для любой окрестности системы $\{U_\alpha\}$ существует содержащая ее окрестность системы $\{U_\alpha^*\}$, и наоборот.

Топология в пространстве H вводится особенно просто, если в этом пространстве определена *метрика*, т. е. если определено расстояние $\rho(a, b)$ между любыми двумя точками a и b пространства H, удовлетворяющее условиям:

$$\rho(a, a) = 0; \quad \rho(a, b) > 0 \quad (a \neq b);$$
$$\rho(a, b) = \rho(b, a);$$
$$\rho(a, b) \leqslant \rho(a, c) + \rho(c, b).$$

Действительно, в этом случае в качестве системы окрестностей $\{U_\alpha\}$ можно взять совокупность множеств $U_{a,\varepsilon}$, состоящих из точек $x \in H$, удовлетворяющих неравенству

$$\rho(x, a) < \varepsilon,$$

при всех $a \in H$ и при достаточно малых ε (не превышающих некоторого значения, зависящего от a). Именно таким способом мы определяли окрестности на комплексной плоскости и на сфере Римана.

Следует иметь в виду, что задание топологии не влечет за собой задание метрики.

Когда в пространстве H задана топология с помощью системы окрестностей, привычным образом (ср. § 2) определяются понятия открытого и замкнутого множества, границы множества и т. д. Именно:

Точка a множества $E \subset H$ называется *внутренней* точкой этого множества, если множество E содержит некоторую окрестность U_α, содержащую точку a.

Точка $a \in H$ называется *внешней* по отношению к множеству $E \subset H$, если существует окрестность U_α, содержащая точку a и не имеющая общих точек с множеством E.

Точка $a \in H$ называется *граничной* точкой множества E, если любая окрестность U_α, содержащая точку a, содержит как внутренние, так и внешние точки множества E.

Множество E называется *открытым*, если все его точки внутренние.

Множество E называется *замкнутым*, если оно содержит все свои граничные точки.

Множество граничных точек множества E называется его *границей*.

Легко доказать, что *граница множества — всегда замкнутое множество.*

Полезно заметить, что, задав топологию в пространстве, мы задаем тем самым некоторую топологию в любом множестве этого пространства. Разумеется, при желании можно было бы задать на данном открытом подмножестве и другую топологию. В качестве примера можно указать на топологию, определяемую в области на комплексной плоскости с помощью метрики Мазуркевича (см. § 4). Если эта область ограничена кривой со складками, то точки, близкие на плоскости, могут не быть близкими в метрике Мазуркевича. Это и означает, что топология, определяемая этой метрикой, отлична от обычной топологии на плоскости (определяемой евклидовой метрикой).

На топологических пространствах можно рассматривать функции, причем их значения могут быть точками любого другого топологического пространства (и даже не обязательно топологического). Для функций, определенных на топологическом пространстве, обычно употребляется термин «отображение». Дадим точное определение этого термина и некоторых других.

Пусть каждой точке a топологического пространства H поставлена в соответствие точка $f(a)$ топологического пространства H'. Тогда будем говорить, что *задано ото-*

бражение f топологического пространства H в топологическое пространство H', и записывать этот факт с помощью формулы

$$H \xrightarrow{f} H'.$$

Точка $f(a) \in H'$ называется *образом* точки $a \in H$ при отображении f, а точка a — *прообразом* точки $f(a)$.

Образом множества $E \subset H$ при отображении $H \xrightarrow{f} H'$ называется множество E', состоящее из образов точек множества E. *Прообразом множества* E' при отображении называется множество всех прообразов его точек. Образ множества E при отображении f обычно обозначают символом $f(E)$.

Отображение $H \xrightarrow{f} H'$ называется *непрерывным*, если прообраз любого открытого множества — открытое множество.

Нетрудно проверить, что это определение непрерывности равносильно определению непрерывности, построенному по аналогии с определением, используемым в анализе.

Если f — отображение топологического пространства H в топологическое пространство H' и если $f(H) = H'$, то говорят, что f — отображение топологического пространства H *на* топологическое пространство H'.

Отображение f топологического пространства H на топологическое пространство H' называется *взаимно однозначным*, если образы различных точек различны. Для взаимно однозначного отображения f всегда есть обратное отображение, которое обозначается f^{-1}. Для обозначения взаимно однозначного отображения используются формулы

$$H \xleftrightarrow{f} H', \quad H' \xleftrightarrow{f^{-1}} H.$$

Взаимно однозначное отображение $H \leftrightarrow H'$ называется *топологическим отображением* или *гомеоморфизмом*, если оба отображения f и f^{-1} непрерывны.

Пусть даны два отображения

$$H \xrightarrow{f} H' \xrightarrow{g} H''.$$

Результирующее отображение топологического пространства H в топологическое пространство H'' называется *композицией* отображений f и g и обозначается символом $g \circ f$.

Ясно, что образ точки $a \in H$ при отображении $g \circ f$ выражается формулой $g(f(a))$. Таким образом, композиция отображений — это не что иное, как сложная функция.

Следующие два утверждения доказываются без труда:

Если отображения f и g непрерывны, то непрерывно и отображение $g \circ f$.

Если f и g — гомеоморфизмы, то отображение $g \circ f$ — также гомеоморфизм.

Действительно, пусть E'' — произвольное замкнутое множество пространства H''. Его прообраз при отображении $H' \xrightarrow{g} H''$ мы обозначим через E', а прообраз множества E' при отображении $H \xrightarrow{f} H'$ — через E. Ясно, что множество E является прообразом множества E'' при отображении $g \circ f$. Согласно определепию отображение $g \circ f$ непрерывно, если множество E замкнуто для любого замкнутого множества E''. Но из замкнутости множества E'' и непрерывности отображения g следует замкнутость множества E', а из замкнутости множества E' и непрерывности отображения f — замкнутость множества E. Тем самым доказано первое утверждение. Применяя это утверждение к обратным отображениям, получаем второе утверждение. $\square$

С помощью понятия отображения легко определяется понятие кривой в любом топологическом пространстве. Именно:

Непрерывной кривой в топологическом пространстве H назовем образ отрезка $[0, 1]$ действительной оси при непрерывном отображении этого отрезка в топологическое пространство H. *Замкнутой непрерывной кривой* назовем образ окружности при непрерывном отображении этой окружности в топологическое пространство H.

Простой кривой в топологическом пространстве H назовем образ отрезка $[0, 1]$ при топологическом отображении этого отрезка в пространство H, а *простой замкнутой кривой* — образ окружности при топологическом отображении этой окружности в пространство H.

Здесь следовало бы добавить все, что было сказано о кривых на плоскости (см. § 2). Каждое отображение отрезка или окружности в топологическое пространство

H есть не что иное, как параметрическое уравнение кривой. □

Открытое множество в топологическом пространстве H называется *областью*, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой, лежащей в этом множестве.

Как и в предыдущем параграфе, можно определить понятие гомотопности двух кривых в данном топологическом пространстве, а также понятие фундаментальной группы топологического пространства.

Область G топологического пространства H называется *односвязной*, если любая замкнутая кривая, лежащая в этой области, гомотопна нулю. □

При изучении множеств в топологических пространствах большое значение имеет понятие компактного множества.

Множество E топологического пространства H называется *компактным*, если из любого семейства окрестностей из системы $\{U_\alpha\}$, покрывающих в совокупности это множество, можно выделить конечное число окрестностей, покрывающих это множество. В частности, все пространство H называется *компактным*, если из системы окрестностей $\{U_\alpha\}$ можно выбрать конечное покрытие всего пространства.

Легко проверить, что сфера Римана является компактным топологическим пространством, а комплексная плоскость не является. Легко устанавливается также, что множество E на сфере Римана компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто, а на комплексной плоскости — тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. □

Топологическое пространство H будем называть *поверхностью*, если оно является областью и если для каждой окрестности U_α существует гомеоморфизм π_α этой окрестности на некоторый круг в плоскости.

Пусть H — поверхность, а U_α и U_β — две окрестности, имеющие непустое пересечение $V_{\alpha\beta}$. Введем обозначения

$$D_{\alpha\beta} = \pi_\alpha(V_{\alpha\beta}), \quad D_{\beta\alpha} = \pi_\beta(V_{\alpha\beta}), \quad \chi_{\alpha\beta} = \pi_\alpha \circ \pi_\beta^{-1}.$$

Ясно, что $\chi_{\alpha\beta}$ — гомеоморфизм плоской области $D_{\beta\alpha}$ на плоскую область $D_{\alpha\beta}$.

Поверхность H называется *ориентируемой*, если при любом выборе окрестностей U_α и U_β отображение $\chi_{\alpha\beta}$ сохраняет направление обхода любой простой замкнутой кривой относительно области, ограничиваемой этой кривой.

Приведенное определение близко подходит к интуитивному представлению о понятии поверхности. Легко видеть, что сфера, тор, лист Мёбиуса являются поверхностями в смысле данного определения. При этом сфера и тор — ориентируемые поверхности, а лист Мёбиуса — неориентируемая поверхность.

Мы будем изучать аналитические функции на комплексной плоскости или на сфере Римана. Однако иногда полезно рассматривать аналитические функции на других поверхностях. Мы только вскользь коснемся этого вопроса в конце гл. III.

Глава II

ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

В теории аналитических функций изучаются далеко не все функции комплексного переменного, а лишь довольно узкий их класс. Тем не менее в этот класс входят почти все встречающиеся в анализе функции. Изучению простейших свойств функций этого класса — голоморфных функций — посвящена эта глава. Одна из основных задач главы — доказательство удобных признаков голоморфности. В процессе доказательств будут доказаны теоремы, имеющие фундаментальное значепие для всей теории.

§ 1. Дифференцируемые и голоморфные функции

Функция комплексного переменного $f(z)$, определенная в некоторой окрестности точки ζ, называется *дифференцируемой в точке* ζ, если существует предел

$$f'(\zeta) = \lim_{z\to\zeta} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z-\zeta},$$

называемый *производной* функции $f(z)$ в точке ζ.

Ясно, что условие дифференцируемости $f(z)$ в точке ζ можно записать в виде

$$f(z) - f(\zeta) - (z-\zeta)f'(\zeta) = o(|z-\zeta|) \quad (z\to\zeta). \tag{1.1}$$

Функция $f(z)$ называется *дифференцируемой в области* D, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Следующие простейшие свойства дифференцируемых функций легко доказываются, исходя из определения.

Если функции $f(z)$ *и* $g(z)$ *дифференцируемы в точке* ζ, *то их сумма и произведение тоже дифференцируемы в точке* ζ, *причем*

$$(f+g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

Если функции $f(z)$ *и* $g(z)$ *дифференцируемы в точке* ζ *и* $g(\zeta)\neq 0$, *то функция* $F(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ *тоже дифференцируема в точке* ζ, *причем*

$$F'=\frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

Если функция $f(z)$ *дифференцируема в точке* ζ, *а функция* $\varphi(z)$ *дифференцируема в точке* $\zeta_1=f(\zeta)$, *то функция* $F(z)=\varphi(f(z))$ *тоже дифференцируема в точке* ζ. *При этом*

$$F'(\zeta)=\varphi'(f(\zeta))f'(\zeta).$$

Дифференцируемость функции комплексного переменного очень сильное требование. Чтобы яснее представить себе его смысл, запишем функцию $f(z)$ в виде $f(x+iy)=u(x, y)+iv(x, y)$ и выясним, какие условия налагает на функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ требование дифференцируемости функции $f(z)$. (Первое впечатление, что дифференцируемость $f(z)$ равносильна дифференцируемости $u(x, y)$ и $v(x, y)$, совершенно не соответствует действительности.)

Теорема 1.1. *Для дифференцируемости функции* $f(z)$ *в точке* $\zeta=\xi+i\eta$ *необходимо и достаточно, чтобы функции* $u(x, y)=\operatorname{Re} f(x+iy)$ *и* $v(x, y)=\operatorname{Im} f(x+iy)$ *были дифференцируемы в точке* (ξ, η) *и чтобы их частные производные в этой точке были связаны соотношениями*

$$u'_x(\xi, \eta)=v'_y(\xi, \eta), \qquad u'_y(\xi, \eta)=-v'_x(\xi, \eta).$$

(Эти соотношения носят название *уравнений Коши — Римана.*)

Доказательство. Докажем необходимость. Дифференцируемость функции $f(z)$ в точке ζ равносильна равенству

$$f(z)-f(\zeta)=(z-\zeta)f'(\zeta)+o(|z-\zeta|) \quad (z\to\zeta). \qquad (1.2)$$

Отделяя в этом равенстве действительную и мнимую части и обозначая $f'(\zeta)=A+iB$, получаем при $x\to\xi$, $y\to\eta$

$$\begin{aligned} u(x, y)-u(\xi, \eta)&=A(x-\xi)-B(y-\eta)+o(\rho),\\ v(x, y)-v(\xi, \eta)&=B(x-\xi)+A(y-\eta)+o(\rho) \end{aligned} \qquad (1.3)$$

(ρ — расстояние между точками (x, y) и (ξ, η), т. е. $\rho = |z - \zeta|$). Равенства (1.3) означают, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы и что

$$u'_x(\xi, \eta) = A, \qquad u'_y(\xi, \eta) = -B,$$
$$v'_x(\xi, \eta) = B, \qquad v'_y(\xi, \eta) = A,$$

т. е. что выполняются соотношения Коши — Римана. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы и удовлетворяют уравнениям Коши — Римана, то, обозначив $u'_x(\xi, \eta) = A$, $v'_x(\xi, \eta) = B$, можно написать равенства (1.3). Умножая второе из равенств (1.3) на i и прибавляя его к первому, получаем равенство (1.2), равносильное дифференцируемости функции $f(z)$ в точке ζ. Теорема доказана.

Итак, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы, то дифференцируемость функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ еще не обеспечена; нужно еще, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ удовлетворяли системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(уравнения Коши — Римана). Коротко отметим некоторые интересные свойства этой системы уравнений.

Если одна из функций $u(x, y)$ или $v(x, y)$ известна, то уравнения Коши — Римана дают обе частные производные второй из этих функций. Это позволяет восстановить вторую функцию, скажем, $u(x, y)$, с помощью интеграла от полного дифференциала

$$u(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} u'_x\, dx + u'_y\, dy + C$$

с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

Таким образом, действительная и мнимая части дифференцируемой функции $f(z)$ не независимы. Зная одну из них, можно восстановить другую с точностью до постоянного слагаемого.

Если предположить, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дважды дифференцируемы, то, исключая из уравнений Коши — Римана одну из функций (дифференцируя одно уравнение по x, другое — по y и складывая), получаем для функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Дифференциальное уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ называется *уравнением Лапласа*, а его решения — *гармоническими функциями*. Уравнение Лапласа встречается во многих вопросах математической физики.

Таким образом, действительная и мнимая части дифференцируемой функции являются гармоническими функциями (если они дважды дифференцируемы). Поскольку они еще и связаны между собой, то их называют *сопряженными гармоническими функциями*. □

Из определения дифференцируемости видно, что многочлен от z является дифференцируемой функцией во всей комплексной плоскости. Рациональная функция (как отношение двух многочленов) тоже дифференцируема во всей комплексной плоскости, за исключением точек, где ее знаменатель обращается в нуль.

Определим более широкий класс функций, заведомо являющихся дифференцируемыми.

Функцию $f(z)$ назовем *голоморфной в точке* ζ, если $f(z)$ представляется рядом

$$f(z) = \sum_0^\infty c_n (z - \zeta)^n,$$

сходящимся в какой-либо окрестности этой точки (т. е. в каком-либо круге $|z - \zeta| < r$, $r > 0$).

Функцию $f(z)$ назовем *голоморфной* в области D, если она определена в этой области и голоморфна в каждой ее точке.

Функция $f(z)$, голоморфная в точке ζ, дифференцируема в этой точке. Действительно, из равенства

$$f(z) = c_0 + c_1 (z - \zeta) + \ldots \qquad (|z - \zeta| < r)$$

находим $f(\zeta) = c_0$ и

$$\frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = c_1 + c_2 (z - \zeta) + \ldots \qquad (|z - \zeta| < r).$$

Отсюда видно, что предел левой части при $z \to \zeta$ существует и равен коэффициенту c_1. □

Несколько ниже мы докажем, что *функция, дифференцируемая в области, голоморфна в этой области.* По этой причине понятие голоморфности и дифференцируемости часто не отделяют друг от друга.

Определим еще понятие голоморфности функции в бесконечности.

Функцию $f(z)$, определенную в какой-либо окрестности точки ∞, называют *голоморфной в точке* $z=\infty$, если

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}\qquad(|z|>R).$$

Другими словами, функция $f(z)$ голоморфна в точке $z=$ $=\infty$, если функция $g(\zeta)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ голоморфна в точке $\zeta=0$.

§ 2. Теорема Коши

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в конечной точке z_0 и

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\qquad(|z-z_0|<r)\tag{2.1}$$

— ее разложение в степенной ряд в окрестности этой точки. При любом значении постоянной C функция

$$F(z)=C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}(|z-z_0|<r)\tag{2.2}$$

также голоморфна в точке z_0 и легко проверить, что для нее выполняется равенство $F'(z)=f(z)$. Каждую из таких функций $F(z)$ будем называть *локальной первообразной* функции $f(z)$.

Подчеркнем, что локальная первообразная суммы степенного ряда определена и голоморфна во всем круге сходимости этого ряда, так как круги сходимости рядов (2.1) и (2.2) совпадают.

Покажем, что для степенных рядов имеет место аналог формулы Ньютона — Лейбница. Сначала докажем лемму, дающую нам частный случай этой формулы.

Лемма 1. *Пусть $n\geqslant 0$ — целое число, а C — спрямляемая кривая с началом в точке $z=a$ и концом в точке $z=b$. Тогда*

$$\int_C z^n\,dz=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}.$$

Доказательство. Функция z^n очевидно непрерывна во всей комплексной плоскости. Поэтому интеграл от нее по любой спрямляемой кривой существует и равен пределу интегральной суммы при любом допустимом выборе точек разбиения. Следовательно, искомый интеграл равен пределу суммы

$$S_n = \sum_{k=1}^{N} z_{k-1}^n (z_k - z_{k-1})$$

при выполнении следующих условий:

1. Точки z_k следуют по кривой C в порядке их номеров.
2. $z_0 = a$, $z_N = b$.
3. Величина $\delta_N = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant N} |z_k - z_{k-1}|$ стремится к нулю, когда $N \to \infty$.

Согласно формуле бинома Ньютона имеем равенство

$$z_k^{n+1} = (z_{k-1} + z_k - z_{k-1})^{n+1} = \\ = z_{k-1}^{n+1} + (n+1) z_{k-1}^n (z_k - z_{k-1}) + \ldots$$

Из этого равенства нетрудно вывести, что

$$z_{k-1}^n (z_k - z_{k-1}) = \frac{z_k^{n+1} - z_{k-1}^{n+1}}{n+1} + \varepsilon_k, \tag{2.3}$$

где для величины ε_k имеет место оценка

$$|\varepsilon_k| \leqslant M |z_k - z_{k-1}|^2 \leqslant M\delta_N |z_k - z_{k-1}| \tag{2.4}$$

с постоянной M, зависящей от кривой C, но не зависящей от выбора точек разбиения z_k.

Легко проверить, что

$$\sum_{k=1}^{N} \left(z_k^{n+1} - z_{k-1}^{n+1}\right) = z_N^{n+1} - z_0^{n+1} = b^{n+1} - a^{n+1}.$$

Поэтому получаем из формулы (2.3) неравенство

$$\left| S_N - \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |\varepsilon_k|,$$

из которого с помощью оценки (2.4) находим

$$\left| S_N - \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \right| \leqslant M\delta_N \sum_{k=1}^{N} |z_k - z_{k-1}| \leqslant Ml\delta_N$$

(l — длина кривой C). Отсюда, переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем утверждение леммы.

Переход от доказанного в лемме частного случая *формулы Ньютона — Лейбница* к общей формулировке довольно прост.

Лемма 2. *Пусть $f(z)$ — сумма степенного ряда* (2.1), *$F(z)$ — какая-либо локальная первообразная функции $f(z)$, а C — спрямляемая кривая с началом в точке $z = a$ и концом в точке $z = b$, лежащая в круге сходимости ряда* (2.1). *Тогда*

$$\int_C f(z)\,dz = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Ряд (2.1) равномерно сходится на каждом замкнутом множестве, лежащем в круге его сходимости. В частности, он равномерно сходится на кривой C. Поэтому ряд (2.1) можно почленно интегрировать по кривой C. Почленное интегрирование легко выполняется с помощью леммы 1, и, используя представление локальной первообразной рядом (2.2), получаем утверждение леммы.

Следствие. *Интеграл от суммы степенного ряда по любой замкнутой спрямляемой кривой, лежащей в круге сходимости этого ряда, равен нулю.*

Действительно, у замкнутой кривой начало совпадает с концом и потому величина $F(b) - F(a)$ равна нулю.

Следующее утверждение называется *теоремой Коши*.

Теорема 2.1. *Пусть D — конечная область, ограниченная конечным числом кусочно гладких кривых, а функция $f(z)$ голоморфна в области D и на ее границе. Тогда*

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0.$$

(*Напоминаем, что направление кривых, входящих в ∂D, выбирается таким образом, чтобы область оставалась слева.*)

Доказательство. Поскольку функция $f(z)$ голоморфна в области D и на ее границе, можно покрыть замыкание области D конечным числом кругов, в каждом из которых функция $f(z)$ представляется сходящимся степенным рядом. Далее, можно разбить область D в сумму неперекрывающихся областей $D_1, \ldots, D_N$, каждая из которых целиком лежит в одном из таких кругов. При этом можно считать, что каждая из областей D_k односвязна и ограничена простой замкнутой кусочно гладкой кривой. Интеграл по границе области является аддитивной функцией области (см. § 5 гл. I), так что

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\partial D_k} f(z)\,dz.$$

Каждый из интегралов в правой части этого равенства равен нулю согласно следствию из леммы 2. Отсюда и вытекает утверждение теоремы.

Отметим два обобщения теоремы Коши.

Теорема 2.1*. *Пусть D — конечная область, ограниченная конечным числом кусочно гладких кривых, а функция $f(z)$ голоморфна в области D и непрерывна вплоть до ее границы. Тогда*

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 0.$$

Доказательство. Так как функция $f(z)$ непрерывна вплоть до границы области D, то можно для любого $\varepsilon > 0$ подобрать область D_ε, лежащую строго внутри области D (и также ограниченную конечным числом кусочно гладких кривых) таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\left| \int\limits_{\partial D} f(z)\,dz - \int\limits_{\partial D_\varepsilon} f(z)\,dz \right| < \varepsilon$$

(см. теорему 5.2 из гл. I). Функция $f(z)$ голоморфна в области D_ε и на ее границе, так что по теореме 2.1 имеем $\int\limits_{\partial D_\varepsilon} f(z)\,dz = 0$. Следовательно,

$$\left| \int\limits_{\partial D} f(z)\,dz \right| < \varepsilon.$$

Поскольку величина $\varepsilon > 0$ произвольна, а рассматриваемый интеграл не зависит от ε, получаем, что он равен нулю. Теорема доказана.

Еще одно обобщение теоремы Коши, называемое *теоремой Гурса*, является важным этапом в доказательстве голоморфности функции, дифференцируемой в области.

Теорема 2.2. *Пусть D — конечная область, ограниченная конечным числом кусочно гладких кривых, а функция $f(z)$ непрерывна вплоть до границы области D и дифференцируема в каждой ее точке. Тогда*

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0.$$

Доказательство. Заметим, что достаточно доказать утверждение теоремы для случая, когда область D представляет собой треугольник. Действительно, в силу аддитивности интеграла как функции области можно перейти от треугольника к произвольному многоугольнику, а доказав утверждение для произвольного многоугольника, можно перейти и к любой области, ограниченной конечным числом кусочно гладких кривых, с помощью теоремы 5.2 гл. I (как и в доказательстве предыдущей теоремы).

Итак, пусть D — треугольник. Обозначим

$$\mu = \int_{\partial D} f(z)\,dz. \tag{2.5}$$

Проведем в треугольнике D все четыре средние линии. Они разобьют его на четыре конгруэнтных треугольника $D^{(1)}$, $D^{(2)}$, $D^{(3)}$, $D^{(4)}$, подобных треугольнику D. Так как интеграл по границе треугольника D равен сумме интегралов по границам всех четырех треугольников $D^{(k)}$, хотя бы для одного из последних интегралов должно выполняться неравенство

$$\left|\int_{\partial D^{(k)}} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{\mu}{4}.$$

Треугольник $D^{(k)}$, для которого это неравенство выполняется, обозначим через D_1.

Треугольник D_1 опять разобьем средними линиями на четыре конгруэнтных треугольника и выберем из них треугольник D_2, для которого выполняется неравенство

$$\left|\int_{\partial D_2} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{\mu}{4^2}.$$

Продолжая этот процесс, построим последовательность $\{D_n\}$ вложенных друг в друга подобных треугольников, для которых выполняются неравенства

$$\left| \int_{\partial D_n} f(z)\,dz \right| \geqslant \frac{\mu}{4^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2.6}$$

Ясно, что линейные размеры треугольников D_n уменьшаются вдвое при увеличении номера n на единицу. Поэтому периметр p_n треугольника D_n равен $p \cdot 2^{-n}$, где p — периметр треугольника D.

У последовательности вложенных друг в друга треугольников D_n существует единственная общая точка, которую обозначим через ξ. Эта точка лежит в треугольнике D (или на его границе), и функция $f(z)$ по условию должна быть дифференцируема в этой точке. Поэтому

$$f(z) - f(\xi) = (z - \xi) f'(\xi) + o(z - \xi) \qquad (z \to \xi).$$

Когда точка z лежит на границе треугольника D_n, величина $|z - \xi|$ не превосходит периметра треугольника D_n (который равен $p \cdot 2^{-n}$). Следовательно,

$$f(z) - f(\xi) - (z - \xi) f'(\xi) = o(2^{-n}), \qquad z \in \partial D_n, \quad n \to \infty.$$

Из леммы 1 мы знаем, что интеграл от линейной функции по замкнутой кривой равен нулю. Это соображение позволяет написать равенство

$$\int_{\partial D_n} [f(\xi) + (z - \xi) f'(\xi)]\,dz = 0,$$

из которого вытекает, что

$$\int_{\partial D_n} f(z)\,dz = \int_{\partial D_n} [f(z) - f(\xi) - (z - \xi) f'(\xi)]\,dz.$$

Используя полученную выше оценку для выражения, стоящего под интегралом в правой части равенства, получаем, что

$$\left| \int_{\partial D_n} f(z)\,dz \right| \leqslant p_n \cdot o\left(2^{-n}\right) = o\left(4^{-n}\right) \qquad (n \to \infty).$$

Сравнивая полученную оценку с неравенством (2.6), видим, что они совместимы лишь в случае, когда $\mu = 0$. Тем самым теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В теореме Гурса требуется только дифференцируемость функции $f(z)$ в каждой точке области, а не непрерывность ее производной во всей области. Если предположить, что функция $f(z)$ непрерывно дифференцируема в области D, то утверждение о равенстве нулю интеграла от $f(z)$ по границе области D легко получается прямо из формулы Грина — Остроградского. □

Теорема Коши часто используется и в еще одном виде, обобщающем лемму 2 в несколько ином направлении. Лемма 2 утверждает, что интегал от суммы степенного ряда по кривой, лежащей в круге сходимости этого ряда, не зависит от формы кривой, а зависит лишь от начальной и конечной точек этой кривой. Именно это утверждение обобщается следующей теоремой:

Теорема 2.3. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в конечной области G. Если кривые C_0 и C_1 гомотопны в области G, то*

$$\int_{C_0} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz.$$

Доказательство. Напомним, что кривые C_0 и C_1 называются гомотопными в области G, если их можно непрерывно деформировать друг в друга, не выходя из области G и не двигая их концов (см. § 7 гл. I). Иными словами, если кривые C_0 и C_1 гомотопны, то существует семейство кривых C_s, непрерывно зависящее от параметра s на отрезке $0 \leqslant s \leqslant 1$ и обладающее тем свойством, что все кривые C_s имеют одинаковое начало и одинаковый конец и лежат в области G. (При $s=0$ кривая C_s обращается в кривую C_0, а при $s=1$ — в кривую C_1.)

Обозначим

$$I(s) = \int_{C_s} f(z)\,dz.$$

Как уже отмечалось в замечании к лемме 2, каждую кривую, лежащую в области G, в частности кривую C_s, можно покрыть конечным числом окрестностей, в каждой из которых функция $f(z)$ представляется равномерно сходящимся степенным рядом. По лемме 2 участок кривой C_s, попадающий в одну из таких окрестностей, можно произвольно деформировать в пределах этой окрестности, и интеграл не изменится, если не двигать концы этого участка. Последовательно деформируя кривую C_s в каждой из окрестностей покрытия, можно заменить кривую C_s любой другой кривой, достаточно близкой к ней. Интеграл не изменится, если не двигать концы кривой C_s (этапы последовательпых деформаций показаны на рис. 2). В частности, можно заменить кривую C_s кривой $C_{s'}$, где число s' достаточно близко к числу s. Следовательно, $I(s')=I(s)$ при любом s', достаточно

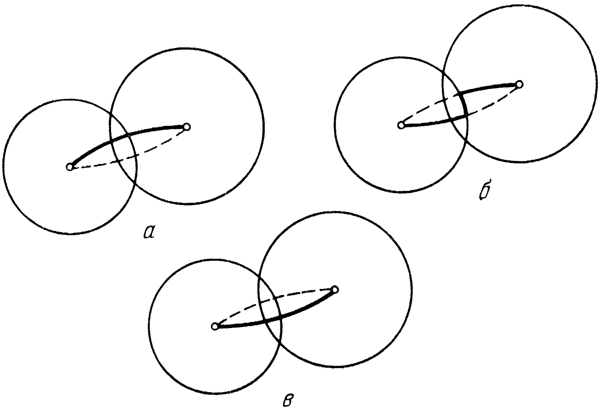

Рис. 2

близком к s. Поскольку s — любая точка отрезка $[0, 1]$, это означает, что функция $I(s)$ тождественно постоянна. Отсюда вытекает и равенство $I(1)=I(0)$, равносильное утверждению теоремы.

В качестве очевидного следствия теоремы 2.3 получаем утверждение:

Теорема 2.3*. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в конечной односвязной области, а C — произвольная спрямляемая кривая, лежащая в этой области. Тогда интеграл $\int_C f(z)\,dz$ зависит лишь от начальной и конечной точек кривой C, но не зависит от ее формы. Если кривая C замкнута, то интеграл равен нулю.*

Чтобы вывести теорему 2.3* из теоремы 2.3, достаточно вспомнить, что в односвязной области две кривые гомотопны тогда и только тогда, когда совпадают их начальные и конечные точки. Из теоремы 2.3* видно, что у каждой функции, голоморфной в конечной односвязной области, существует первообразная, также голоморфная в этой области. □

Теорему Коши при некоторых дополнительных предположениях можно перенести и на случай, когда граница области содержит бесконечно удаленную точку. Мы будем обобщать таким образом только теорему 2.2.

Нетрудно построить примеры, показывающие, что без дополнительных предположений на функцию $f(z)$ теорема 2.2 перестает быть справедливой, когда область D содержит бесконечно удаленную точку внутри или на границе. Однако легко указать дополнительные условия, при выполнении которых теорема остается в силе. Первое очевидное условие состоит в существовании интеграла

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz, \tag{2.7}$$

который будет несобственным интегралом, если точка $z = \infty$ лежит на границе области D. Однако легко показать, что выполнения этого условия недостаточно. Следующая теорема дает простые достаточные (но не необходимые) условия для справедливости теоремы Коши в бесконечных областях.

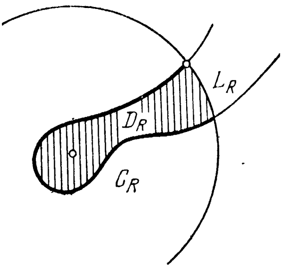

Рис. 3

Теорема 2.4. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в конечносвязной области D и непрерывна вплоть до ее границы. Если несобственный (вообще говоря) интеграл* (2.7) *сходится, а функция $f(z)$ удовлетворяет дополнительному условию*

$$f(z) = o\left(\frac{1}{z}\right) \qquad (z \to \infty,\ z \in \overline{G}) \tag{2.8}$$

в окрестности бесконечно удаленной точки, то интеграл (2.7) *равен нулю.*

Доказательство. Обозначим через D_R часть области D, лежащую в круге $|z| < R$, а через C_R — часть границы области D, лежащую в том же круге. Согласно определению (см. § 6 гл. I) из существования несобственного интеграла (2.7) следует, что

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz.$$

Кроме того, по теореме 2.2*

$$\int_{\partial D_R} f(z)\,dz = 0. \tag{2.9}$$

Поэтому, обозначив через L_R часть границы области D_R, отличную от кривых C_R (рис. 3), мы можем записать равенство (2.9) в виде

$$\int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{L_R} f(z)\,dz = 0.$$

Множество L_R составлено из дуг окружности $|z| = R$, так что его длина не превосходит $2\pi R$. Оценивая модуль интеграла от функции $f(z)$ по дугам L_R произведением максимума модуля подынтегральной функции на длину пути интегрирования, мы получаем неравенство

$$\left|\int_{L_R} f(z)\,dz\right| \leqslant 2\pi R\cdot o\left(\frac{1}{R}\right) \to 0 \qquad (R\to\infty).$$

Следовательно,

$$\left|\int_{\partial D} f(z)\,dz\right| = \left|\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz\right| = \lim_{R\to\infty}\left|\int_{L_R} f(z)\,dz\right| = 0,$$

и теорема доказана.

§ 3. Интегральная формула Коши

С помощью теоремы Коши легко доказывается так называемая *интегральная формула Коши*. Она позволяет выразить значение голоморфной функции в любой точке области через значения функции на границе этой области. Поскольку эта формула понадобится и для доказательства эквивалентности дифференцируемости и голоморфности, докажем ее для дифференцируемых функций.

Теорема 3.1. *Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в области D. Если конечная область G лежит вместе со своей границей C в области D, а $\zeta \in G$, то*

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta} = 2\pi i f(\zeta).$$

Доказательство. Функция $\varphi(z)=\frac{f(z)}{z-\zeta}$ является отношением двух дифференцируемых функций, причем знаменатель обращается в нуль только при $z=\zeta$. Поэтому функция $\varphi(z)$ дифференцируема во всех точках области D, за исключением точки $z=\zeta$. Возьмем $\rho>0$ настолько малым, чтобы круг $|z-\zeta|\leqslant\rho$ лежал в области G, и обозначим через D' область D, из которой удалена точка ζ, а через G_ρ — область G, из которой удален круг $|z-\zeta|\leqslant\rho$.

Функция $\varphi(z)$ дифференцируема в области D', и область G_ρ лежит в области D' вместе с границей (которую обозначим C_ρ). Следовательно, по замечанию 1 к теореме Коши интеграл от $\varphi(z)$ по C_ρ равен нулю. Но C_ρ состоит из C и из окружности $|z-\zeta|=\rho$, причем интегрирование по окружности производится в таком направлении, чтобы область G_ρ оставалась слева (а круг $|z-\zeta|<\rho$ — справа). Поэтому, обозначив через Γ_ρ границу круга $|z-\zeta|<\rho$, можем написать

$$\int\limits_{\partial D}\varphi(z)\,dz=\int\limits_{\Gamma_\rho}\varphi(z)\,dz.$$

Считая $\rho>0$ достаточно малым, вычислим интеграл, стоящий в правой части последнего равенства. Имеем

$$\int\limits_{\Gamma_\rho}\varphi(z)\,dz=\varphi(\zeta)I_1+I_2,$$

где

$$I_1=\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{dz}{z-\zeta},\quad I_2=\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{\varphi(z)-\varphi(\zeta)}{z-\zeta}\,dz.$$

Функция, стоящая под знаком интеграла в I_2, ограничена, так как при $z\to\zeta$ она стремится к $f'(\zeta)$. Поскольку длина окружности Γ_ρ равна $2\pi\rho$, а модуль интеграла не превосходит произведения длины пути интегрирования на максимум модуля подынтегральной функции, то

$$I_2=O(\rho)\qquad(\rho\to 0).$$

Интеграл I_1 легко вычисляется. Действительно, параметрическое уравнение окружности Γ_ρ имеет вид $z=\zeta+\rho e^{i\theta}$,

$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Поэтому

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta}}\, d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

Следовательно,

$$\int_{\Gamma_\rho} \varphi(z)\, dz = 2\pi i f(\zeta) + O(\rho) \qquad (\rho \to 0),$$

а значит, и

$$\int_{\partial D} \varphi(z)\, dz = 2\pi i f(\zeta) + O(\rho) \qquad (\rho \to 0).$$

Интеграл в левой части равенства не зависит от ρ, которое можно считать произвольно малым положительным числом. Поэтому, переходя к пределу при $\rho \to 0$, приходим к утверждению теоремы.

Кроме интегральной формулы Коши в последующих утверждениях будет играть важную роль еще и следующее утверждение:

Теорема 3.2. *Пусть C — спрямляемая кривая, а $\varphi(t)$ — функция, непрерывная на кривой C. Функция*

$$f(z) = \int_C \frac{\varphi(t)\, dt}{t - z}$$

определена во всей комплексной плоскости, за исключением точек кривой C. В окрестности каждой точки $z_0 \notin C$ функция $f(z)$ разлагается в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{3.1}$$

где

$$c_n = \int_C \frac{\varphi(t)\, dt}{(t - z_0)^{n+1}}, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{3.2}$$

При этом ряд (3.1) сходится в каждом круге $|z - z_0| < r$, не содержащем точек кривой C.

Доказательство. Утверждение, относящееся к области определения функции $f(z)$, очевидно. Займемся разложением функции $f(z)$ в ряд. Воспользуемся равенством

$$\frac{1}{t-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}}, \tag{3.3}$$

справедливым при выполнении условия

$$\left|\frac{z-z_0}{t-z_0}\right|<1. \tag{3.4}$$

Ряд (3.3) представляет собой геометрическую прогрессию, и по признаку Вейерштрасса он равномерно сходится по z и t, если существует число $0<q<1$ (не зависящее от z и t), для которого

$$\left|\frac{z-z_0}{t-z_0}\right|\leqslant q. \tag{3.4*}$$

Условие (3.4*) заведомо выполняется, когда точка t лежит на кривой C, а точка z лежит в круге $|z-z_0|\leqslant r$, не содержащем точек этой кривой. Умножение равномерно сходящегося ряда (3.3) на непрерывную функцию $\varphi(t)$ не нарушит его равномерной сходимости. Почленно интегрируя равномерно сходящийся ряд

$$\frac{\varphi(t)}{t-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n\varphi(t)}{(t-z_0)^{n+1}}$$

по кривой C, получаем ряд (3.1) с коэффициентами (3.2), равномерно сходящийся в каждом круге $|z-z_0|\leqslant$ $\leqslant r$, не содержащем точек кривой C.

Отметим ряд следствий из доказанных теорем.

Следствие 1. *Функция*

$$f(z)=\int\limits_C\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}$$

голоморфна в каждой области, не содержащей точек кривой C.

Следствие 2. *Функция, дифференцируемая в конечной области, голоморфна в этой области.*

Действительно, по теореме 3.1 функция $f(z)$, дифференцируемая в области D (которую можно, не ограничивая общности, считать ограниченной кусочно гладкими кривыми), представима в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(t)\,dt}{t - z}.$$

Область D не содержит точек ее границы ∂D, и потому в силу следствия 1 функция $f(z)$ голоморфна в области D.

Следствие 3. *Если функция $f(z)$ голоморфна в конечной области D, ограниченной конечным числом кусочно гладких кривых, и непрерывна вплоть до границы этой области, то в каждой точке $z_0 \in D$ она разлагается в степенной ряд*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

сходящийся в каждом круге $|z - z_0| < R$, лежащем в этой области. Для коэффициентов ряда имеют место формулы

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Действительно, согласно теореме 3.1 можно написать для функции $f(z)$ представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(t)\,dt}{t - z}, \qquad z \in D,$$

а затем применить теорему 3.2.

Следствие 4. *При выполнении условий следствия 3 имеет место формула*

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(t)\,dt}{(t - z)^2}, \qquad z \in D. \tag{3.5}$$

Действительно, из разложения в ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

легко находим, что $f'(z_0) = c_1$, и, применяя формулу для коэффициента c_1, получаем требуемую формулу.

Замечание. Формула для производной голоморфной функции остается в силе и для случая, когда область D содержит бесконечно удаленную точку. Это связано с наличием под интегралом множителя $(t-z)^{-2}$, достаточно быстро стремящегося к нулю при $t \to \infty$. $\square$

Следующая теорема несколько дополняет следствие 4.

Теорема 3.3. *Если функция $f(z)$ голоморфна в области D, то ее производная $f'(z)$ также голоморфна в этой области. Степенной ряд для функции $f'(z)$ в окрестности точки $z_0 \in D$ можно получить почленным дифференцированием соответствующего степенного ряда для функции $f(z)$.*

Доказательство. Ограничимся случаем, когда $z_0 \neq \infty$. Область можно, не ограничивая общности, считать конечной и ограниченной конечным числом кусочно гладких кривых, а функцию $f(z)$ — непрерывной вплоть до границы области D (в противном случае можно было бы выбрать меньшую область, содержащую точку z_0).

Рассмотрим ряд $\psi(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} M(n+1)s^n$. Радиус сходимости этого ряда равен 1, так что он равномерно сходится в каждом круге $|s| \leqslant q < 1$. Сумму этого ряда можно найти, написав

$$\psi(s) = M \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} s^k = M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{1-s} = \frac{M}{(1-s)^2}.$$

Поэтому, положив $s = \dfrac{z-z_0}{t-z_0}$, $M = \dfrac{1}{(t-z_0)^2}$, получим формулу

$$\frac{1}{(t-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+2}}, \tag{3.6}$$

справедливую при $\left|\dfrac{z-z_0}{t-z_0}\right| < 1$. При выполнении условия (3.4*) ряд в правой части формулы (3.6) равномерно сходится по z и t. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 3.2, получаем из формулы (3.5) разложение производной $f'(z)$ в степенной ряд

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

с коэффициентами

$$b_n = \frac{n+1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+2}}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Сравнивая это разложение с разложением функции $f(z)$, полученным в следствии 3, приходим к утверждениям теоремы.

Следствие. *Если функция $f(z)$ голоморфна в области D, то она имеет там производные любого порядка, и эти производные голоморфны в области D. Степенной ряд для производной $f^{(m)}(z)$ в окрестности точки $z_0 \in D$ получается m-кратным почленным дифференцированием соответствующего степенного ряда для функции $f(z)$.*

Степенной ряд $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ для функции $f(z)$, голоморфной в точке z_0, называют *рядом Тейлора*.

Из сформулированного выше следствия вытекают формулы

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{3.7}$$

Сравнивая эти формулы с формулами (3.2), получаем (как и в следствии 4) формулу

$$f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{m+1}}, \qquad z \in D, \quad m = 0, 1, \ldots \tag{3.8}$$

для m-й производной функции, голоморфной в области D.

§ 4. Критерии голоморфности

Из эквивалентности понятий дифференцируемости и голоморфности, доказанной в предыдущем параграфе, сразу же вытекает несколько простых признаков голоморфности функций. Из теорем о дифференцируемости суммы, произведения и частного имеем:

Сумма и произведение конечного числа функций, голоморфных в области D, являются функциями, голоморфными в области D.

Отношение двух функций, голоморфных в области D, голоморфно в области D за исключением тех ее точек, где знаменатель обращается в нуль.

Теорема о дифференцировании сложной функции дает, что:

Если функция $f(z)$ *голоморфна в точке* ζ, *а функция* $F(w)$ *голоморфна в точке* $f(\zeta)$, *то функция* $\varphi(z) = F(f(z))$ *голоморфна в точке* ζ.

Следующий более тонкий признак называется *теоремой Морера.*

Теорема 4.1. *Пусть функция* $f(z)$ *непрерывна в области* D. *Если для любой спрямляемой кривой* C, *лежащей в области* D, *интеграл*

$$\int_C f(z)\,dz$$

зависит только от начальной и конечной точки кривой C, *то функция* $f(z)$ *голоморфна в области* D.

Доказательство. Зафиксируем в области D какую-либо точку a и определим функцию $F(z)$ равенством $F(z) = \int\limits_a^z f(t)\,dt$. Покажем, что эта функция дифференцируема в области D и найдем ее производную.

Поскольку путь интегрирования в интеграле для функции $F(z)$ можно выбирать произвольно, имеем

$$F(z+h) - F(z) = \int_a^{z+h} f(t)\,dt - \int_a^z f(t)\,dt = \int_z^{z+h} f(t)\,dt.$$

Последний интеграл при значениях h, достаточно малых по модулю, можно считать взятым по прямолинейному отрезку. Так как

$$\int_z^{z+h} dt = h,$$

то получаем равенство

$$F(z+h) - F(z) = f(z)\,h + \int_z^{z+h} [f(t) - f(z)]\,dt.$$

Очевидно, что

$$\int_z^{z+h} [f(t) - f(z)]\,dt = o(h) \qquad (h \to 0)$$

и, следовательно,

$$F(z+h) - F(z) = hf(z) + o(h) \qquad (h \to 0).$$

Это означает, что функция $F(z)$ дифференцируема в точке z, а ее производная равна $f(z)$.

Согласно следствию 2 из теоремы 3.2 выводим отсюда, что функция $F(z)$ голоморфна в области D, и получаем по теореме 3.3, что и функция $f(z)$ голоморфна в той же области.

Теорему Морера удобно использовать для доказательства многих других признаков голоморфности функций.

Теорема 4.2. *Если функция $f(z, w)$ голоморфна по z в области D при всех $w \in E$ и если*

$$f(z, w) \to \varphi(z) \qquad (w \to w_0, \quad w \in E)$$

равномерно по z на любой замкнутой части области D, то и функция $\varphi(z)$ голоморфна в области D.

Доказательство. Функция $f(z, w)$ очевидно непрерывна по z в области D, а потому и предельная функция $\varphi(z)$ непрерывна в этой области (см. § 4 гл. I). Кроме того, равномерность стремления к пределу позволяет нам перейти к пределу под знаком интеграла по любой спрямляемой кривой C, лежащей в области D (см. § 6 гл. I). Поэтому

$$\int\limits_C \varphi(z)\,dz = \lim_{w \to w_0} \int\limits_C f(z, w)\,dz.$$

Возьмем произвольную односвязную область D', лежащую строго внутри области D. Из сказанного выше следует, что функция $\varphi(z)$ непрерывна в области D', а интеграл от нее по любой спрямляемой кривой, лежащей в области D', зависит только от начальной и конечной точек этой кривой. По теореме Морера функция $\varphi(z)$ обязана быть голоморфной в области D'. Поскольку D' — произвольная односвязная часть области D, теорема доказана.

Наиболее распространенным частным случаем теоремы 4.2 является следующее утверждение:

Следствие. *Сумма равномерно сходящегося ряда голоморфных функций является голоморфной функцией во всех внутренних точках того множества, на котором этот ряд равномерно сходится.*

Широко употребляется и следующий признак голоморфности:

Теорема 4.3. *Пусть L — спрямляемая кривая в плоскости w, а D — область в плоскости z. Функцию $f(z, w)$ мы предположим определенной и непрерывной по сово-*

купности переменных при $z \in D$, $w \in L$. *Если при любом* $w \in L$ *функция* $f(z, w)$ *голоморфна по* z *в области* D, *то функция* $\varphi(z) = \int\limits_L f(z, w)\, dw$ *также голоморфна в области* D.

Доказательство. Из теорем § 6 гл. I об интегралах, зависящих от параметра, вытекает, что функция $\varphi(z)$ непрерывна в области D и что

$$\int\limits_C \varphi(z)\, dz = \int\limits_L \left\{\int\limits_C f(z, w)\, dz\right\} dw$$

для любой спрямляемой кривой C, лежащей в области D.

Если кривая C лежит в односвязной подобласти D' области D, то интеграл

$$\int\limits_C f(z, w)\, dz$$

зависит лишь от начальной и конечной точек кривой C. По теореме Морера отсюда следует, что функция $\varphi(z)$ обязана быть голоморфной в области D'. Так как D' — произвольная односвязная подобласть области D, то функция $\varphi(z)$ голоморфна и в области D.

Замечание. Объединяя теоремы 4.2 и 4.3, видим, что утверждение теоремы 4.3 остается в силе и для несобственных интегралов, если они равномерно сходятся по z на любой замкнутой части области D.

Для доказательства приведенных выше признаков голоморфности можно было бы использовать не теорему Морера, а интегральную формулу Коши (в сочетании с теоремой 3.2). В следующем признаке использование интегральной формулы Коши уже необходимо.

Теорема 4.4. *Если функция* $f(z, w)$ *голоморфна по* z *при любых значениях* $w \in E$ *и* $f(z, w) \to \varphi(z)$ $(w \to w_0,$ $w \in E)$ *равномерно по* z *в каждой замкнутой части области* D, *то и*

$$f'_z(z, w) \to \varphi'(z) \qquad (w \to w_0,\ w \in E)$$

равномерно по z *в каждой замкнутой части области* D.

Доказательство. Обозначим через B какую-либо замкнутую часть области D, а через G — область, лежащую в D вместе с границей (состоящей из конечного числа кусочно гладких кривых), но содержащую множество B. Тогда при $z \in B$ и $t \in \partial G$ имеем

$$\frac{f(t, w)}{(t-z)^2} \to \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} \qquad (w \to w_0, \quad w \in E)$$

равномерно по $z \in B$ и по $t \in \partial G$. Так как сходимость равномерна, то можно написать

$$\int\limits_{\partial G} \frac{f(t, w)\, dt}{(t-z)^2} \to \int\limits_{\partial G} \frac{\varphi(t)\, dt}{(t-z)^2} \qquad (w \to w_0, \quad w \in E).$$

Используя следствие 3 теоремы 3.2 и теорему 4.2, мы приходим к нашему утверждению.

Следствие. *Ряд голоморфных функций, равномерно сходящийся в каждой замкнутой части области D, можно почленно дифференцировать, и продифференцированный ряд опять будет равномерно сходиться в каждой замкнутой части области D.*

Совершенно аналогично доказывается и следующее утверждение.

Теорема 4.5. *Пусть L — спрямляемая кривая в плоскости w, а D — область в плоскости z. Функцию $f(z, w)$ мы предположим непрерывной по совокупности переменных при любых $z \in D$ и $w \in L$. Если функция $f(z, w)$ голоморфна по z при всех $w \in L$ и $\varphi(z) = \int\limits_L f(z, w)\, dw$, то*

$$\varphi'(z) = \int\limits_L f'_z(z, w)\, dw.$$

Замечание. Эта теорема также сохраняет силу для равномерно сходящихся несобственных интегралов. □

В заключение приведем еще один результат несколько иного рода. Его обычно называют *принципом компактности* голоморфных функций.

Теорема 4.6. *Пусть $\{f_n(z)\}$ — последовательность функций, голоморфных в области D и удовлетворяющих условию:*

для каждого замкнутого множества $B \subset D$ существует такая постоянная $M(B)$, что для всех функций последовательности $\{f_n(z)\}$ имеет место неравенство

$$|f_n(z)| \leqslant M(B), \qquad z \in B.$$

Тогда из последовательности $\{f_n(z)\}$ можно выделить под-

последовательность, равномерно сходящуюся на каждой замкнутой части области D.

Доказательство. Для простоты будем считать, что область D не содержит бесконечно удаленную точку (это допущение не ограничивает общности; исключительный случай, когда D совпадает со всей расширенной комплексной плоскостью, мало интересен). Построим по области D исчерпывающую ее последовательность областей $\{G_m\}$, обладающую свойствами:

1. Все области G_m лежат в области D вместе с их границами, состоящими из конечного числа кусочно гладких кривых.

2. При каждом значении m область G_{m+1} содержит замыкание области G_m.

3. Каждая точка области D попадает в какую-либо из областей G_m.

Обозначим через l_m длину границы области G_m, а через ρ_m — расстояние от области G_m до границы области G_{m+1}. Согласно условию 2 величина ρ_m положительна.

Согласно формуле для производной голоморфной функции (следствие 3 теоремы 3.2) справедлива формула

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_{m+1}} \frac{f_n(t)\,dt}{(t-z)^2} \qquad (z \in G_m).$$

Из этой формулы легко получаем оценку

$$|f_n'(z)| \leqslant \frac{l_{m+1}}{\rho_m^2} \frac{M(\overline{G}_{m+1})}{2\pi} \qquad (z \in G_m),$$

показывающую, что последовательность $\{f_n(z)\}$ равностепенно непрерывна в каждой из областей G_m (при фиксированном значении m). Поэтому согласно теореме Арцела (см. § 4 гл. I) из последовательности функций $\{f_n(z)\}$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся в области G_m с произвольно выбранным номером.

Выбрав последовательность $\left\{f_{n_k^{(1)}}(z)\right\}$, равномерно сходящуюся в области G_1, выбираем из нее последовательность $\left\{f_{n_k^{(2)}}(z)\right\}$, равномерно сходящуюся в области G_2, и т. д. Легко убедиться, что последовательность $\left\{f_{n_k^{(k)}}(z)\right\}$ обладает нужным свойством.

§ 5. Теорема единственности

Докажем одно из наиболее важных свойств голоморфных функций, называемое *теоремой единственности.*

Теорема 5.1. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D, а $\{z_n\}$ — бесконечная последовательность попарно различных точек, имеющая хотя бы одну предельную точку в области D. Если*

$$f(z_n) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

то функция $f(z)$ равна нулю во всей области D.

Доказательство. Обозначим через a предельную точку последовательности $\{z_n\}$, лежащую в области D. Покажем сначала, что функция $f(z)$ равна нулю в некоторой окрестности точки a. Мы знаем, что функция $f(z)$ голоморфна в точке a, т. е.

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (|z-a| < r).$$

Без ограничения общности можно считать, что $z_n \to a$ и что при всех n имеем $|z_n - a| < r$. Полагая $z = z_n$ и вспоминая, что $f(z_n) = 0$, получаем

$$0 = c_0 + c_1 (z_n - a) + \ldots$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, находим, что $c_0 = 0$. Используя это, можем написать

$$\frac{f(z)}{z-a} = c_1 + c_2 (z-a) + \ldots \qquad (|z-a| < r).$$

Полагая снова $z = z_n$, а затем $n \to \infty$, находим, что $c_1 = 0$. Повторяя этот процесс, убеждаемся, что все c_n равны нулю, т. е. что функция $f(z)$ равна нулю при $|z-a| < r$.

Теперь покажем, что функция $f(z)$ равна нулю в любой точке области D. Для этого возьмем любую точку $\zeta \in D$ и соединим ее с точкой a простой ломаной L, лежащей в D (это возможно, так как область — связное множество). Допустим теперь, что $f(\zeta) \neq 0$. Тогда на ломаной L найдется точка a' со следующими свойствами:

На участке L между точками a и a' функция $f(z)$ равна нулю. В круге $|z - a'| < \rho$ при любом $\rho > 0$ найдется хотя бы одна точка, в которой функция $f(z)$ отлична от нуля.

Тогда можно взять последовательность $\{z_n'\}$ точек L, для которых $z_n' \to a'$ и $f(z_n') = 0$. Затем возьмем вместо точки a точку a', а вместо последовательности $\{z_n\}$ — последовательность $\{z_n'\}$ и повторим проведенные выше рассуждения. Получим, что $f(z) = 0$ при $|z - a'| < r'$. Это противоречит второму свойству точки a'.

Таким образом, предположение, что найдется точка $\zeta \in D$, в которой $f(\zeta) \neq 0$, привело нас к противоречию. Теорема доказана. $\square$

В применениях теоремы единственности большую роль играет понятие аналитического продолжения.

Пусть даны: множество E, функция $f(z)$, определенная на E, и область D, содержащая множество E. Голоморфную в области D функцию $F(z)$, совпадающую с $f(z)$ на множестве E, назовем *аналитическим продолжением функции* $f(z)$ *на область* D.

Из теоремы единственности сразу следует утверждение, носящее название *принципа аналитического продолжения*:

Если множество E имеет хотя бы одну предельную точку, лежащую внутри области D, то функция $f(z)$ имеет не больше одного аналитического продолжения в область D.

Действительно, если бы существовали два различных аналитических продолжения функции $f(z)$ в область D, то, рассмотрев их разность, мы пришли бы к противоречию с теоремой единственности. $\square$

Покажем, как с помощью принципа аналитического продолжения можно распространить некоторые элементарные функции на комплексные значения переменного и исследовать их свойства в комплексной плоскости.

Из анализа известно, что функции e^x, $\sin x$, $\cos x$ разлагаются в степенные ряды

$$e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}, \qquad \sin x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

сходящиеся для всех действительных x. Эти ряды сходятся и для всех комплексных значений переменного. Поэтому естественно определить функции e^z, $\sin z$, $\cos z$

для комплексных z теми же рядами. По следствию 2 теоремы 4.2 суммы этих рядов являются функциями, голоморфными во всей комплексной плоскости, т. е. дают аналитическое продолжение функций e^x, $\sin x$, $\cos x$ на всю комплексную плоскость. По принципу аналитического продолжения других продолжений не может быть.

Покажем теперь, как исследовать возникшие в качестве аналитического продолжения функции комплексного переменного. В частности, покажем, как переносятся на комплексные значения переменного формулы, известные для действительных значений. Поскольку рассуждения для любых формул почти абсолютно одинаковы, ограничимся одной формулой.

Пример 1. Покажем, что для любых комплексных z и ζ справедлива формула

$$e^{z+\zeta} = e^z e^\zeta. \tag{5.1}$$

В обеих частях формулы (5.1) стоят функции, голоморфные по z при любых фиксированных ζ и по ζ при любых фиксированных z. Нам нужно доказать, что эти функции совпадают при всех z и ζ. Рассмотрим сначала действительные значения ζ. Если при этом еще и z действительно, то формула, очевидно, справедлива. Но в силу теоремы единственности две функции комплексного переменного z, голоморфные во всей плоскости и совпадающие при всех действительных значениях z, совпадают тождественно. Следовательно, формула (5.1) доказана при любых комплексных z и при любых действительных ζ.

Фиксируя теперь любое комплексное z и проводя аналогичное рассуждение с рассматриваемыми функциями как функциями ζ, убеждаемся, что формула (5.1) справедлива при любых комплексных z и ζ.

Разумеется, формулу (5.1) нетрудно доказать и непосредственным перемножением рядов, однако приведенный способ рассуждений замечателен не только (и не столько) простотой, но и общностью. $\square$

С помощью формулы (5.1) легко получить простую формулу для вычисления значений функции e^z при любых комплексных z. Действительно, положим $z = x + iy$. Тогда согласно формуле (5.1) имеем $e^z = e^x e^{iy}$. Для вычисления e^{iy} подставим iy вместо z в ряд для e^z и отделим действительную и мнимую части. Это даст *формулу*

Эйлера

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

С ее помощью находим

$$e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y. \tag{5.2}$$

Из формулы (5.2) следует, в частности, что

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}. \tag{5.3}$$

Большинство функций, встречающихся в анализе, можно аналитически продолжить на комплексные значения переменного. Для показательной и тригонометрических функций это делается совсем просто, для других — сложнее. Так, например, много хлопот доставит нам аналитическое продолжение функции $\ln x$, которым мы будем заниматься в следующей главе. □

Приведем еще один пример аналитического продолжения функции, определенной для действительных значений переменного уже не рядом, а интегралом.

Пример 2. Найдем аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость *гамма-функции Эйлера* $\Gamma(z)$, определяемой для действительных положительных z интегралом

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

Функцию t^{z-1} при любом $t > 0$ легко аналитически продолжить на всю комплексную плоскость, так как

$$t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t},$$

а с аналитическим продолжением показательной функции мы уже знакомы. Поэтому, применяя теорему 4.3, видим, что интеграл

$$\int_a^b t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

при $a > 0$ и $b < \infty$ является функцией z, голоморфной во всей комплексной плоскости. Однако при $a = 0$ и $b = \infty$ интеграл становится несобственным, и придется выяснять, при каких z он равномерно сходится. Поскольку интеграл, определяющий $\Gamma(z)$, имеет две особенности (в нуле и в бесконечности), его лучше разбить на сумму двух интегралов и отдельно исследовать сходимость каждого из них.

Положим $\Gamma(z) = \alpha(z) + \beta(z)$, где

$$\alpha(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t}\, dt, \quad \beta(z) = \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

Сначала исследуем интеграл $\beta(z)$. При $\operatorname{Re} z \leqslant R$ в силу формулы (5.3) можно написать для подынтегральной функции неравенство

$$|t^{z-1} e^{-t}| \leqslant t^{R-1} e^{-t},$$

так как на промежутке интегрирования $t \geqslant 1$ и $\ln t > 0$. Но

$$\int_1^\infty t^{R-1} e^{-t}\, dt < \infty,$$

так как функция e^{-t} при $t \to +\infty$ стремится к нулю быстрее любой степени t. Следовательно, по признаку равномерной сходимости интегралов (конец § 6 гл. I) интеграл, определяющий функцию $\beta(z)$, сходится равномерно по z в полуплоскости $\operatorname{Re} z \leqslant R$ при любом R. Используя замечание к теореме 4.3, получаем, что функция $\beta(z)$ голоморфна во всей комплексной плоскости.

Перейдем к интегралу для $\alpha(z)$. При $\operatorname{Re} z \geqslant \delta$ можно написать для подынтегральной функции неравенство

$$|t^{z-1} e^{-t}| \leqslant t^{\delta-1} e^{-t} < t^{\delta-1},$$

так как на промежутке интегрирования $0 < t < 1$ и $\ln t \leqslant \leqslant 0$. Но при $\delta > 0$ имеем

$$\int_0^1 t^{\delta-1}\, dt = \frac{1}{\delta} < \infty.$$

Поэтому из тех же соображений, что и выше, получаем голоморфность функции $\alpha(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$.

Итак, мы аналитически продолжили функцию $\Gamma(z) = \alpha(z) + \beta(z)$ в полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$. Можно показать, что за пределами этой полуплоскости интеграл, определяющий функцию $\Gamma(z)$, уже расходится. Поэтому **дальнейшие рассуждения являются совершенно нестандартными.**

Так как функция $\beta(z)$ голоморфна во всей плоскости, нужно продолжить лишь функцию $\alpha(z)$. Разложим функцию e^{-t} в ряд

$$e^{-t}=\sum_0^\infty(-1)^n\frac{t^n}{n!},$$

равномерно сходящийся на отрезке $(0, 1)$. При $z>1$ функция t^{z-1} непрерывна на этом отрезке и умножение ряда на t^{z-1} не нарушает его равномерной сходимости. Интегрируя почленно, получаем

$$\alpha(z)=\int_0^1 t^{z-1}\sum_0^\infty(-1)^n\frac{t^n}{n!}\,dt=\sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{n+z}\frac{1}{n!}\qquad(z>1).$$

Члены ряда $\sum\limits_0^\infty\frac{(-1)^n}{n+z}\frac{1}{n!}$ являются функциями, голоморфными во всей плоскости, за исключением точек $z=0, -1, -2, \ldots$, и ряд равномерно сходится в любой конечной части плоскости, не содержащей этих точек $\left(\text{все члены ряда, начиная с некоторого, не превосходят членов сходящегося числового ряда } \sum\limits_0^\infty\frac{c}{n!}\right)$. Следовательно, сумма ряда $\sum\limits_0^\infty\frac{(-1)^n}{n+z}\frac{1}{n!}$ голоморфна во всей комплексной плоскости, за исключением точек $z=0, -1, -2, \ldots$ Поскольку при $z>1$ эта сумма совпадает с функцией $\alpha(z)$, она дает нам аналитическое продолжение функции $\alpha(z)$.

Формула

$$\Gamma(z)=\sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{n+z}\frac{1}{n!}+\int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$$

дает нам искомое аналитическое продолжение функции $\Gamma(z)$ на всю комплексную плоскость, за исключением точек $z=0, -1, -2, \ldots$ Нетрудно убедиться, что при стремлении к этим точкам функция $\Gamma(z)$ стремится к бесконечности.

§ 6. Поведение основных элементарных функций

Сейчас мы имеем уже довольно большой запас голоморфных функций. В § 1 отмечалось, что многочлены и рациональные функции являются функциями, голоморфными во всей комплексной плоскости (за исключением, быть может, нулей знаменателя для рациональных функций). В предыдущем параграфе показано, что функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ тоже являются голоморфными во всей плоскости. Это позволяет говорить о любых тригонометрических функциях в комплексной плоскости. С помощью теоремы о голоморфности сложной функции (начало § 4) можно еще больше расширить запас голоморфных функций. Эти способы расширения запаса голоморфных функций не требуют никаких особых сведений о поведении функций. Однако при исследовании рядов и интегралов уже нужно уметь оценивать члены ряда и подынтегральные функции. С такого рода необходимостью мы уже столкнулись в примере 2 предыдущего параграфа. Поэтому сейчас изложим некоторые свойства основных элементарных функций, полезные для различных оценок.

1. *Степенная функция* cz^n (n — целое положительное число). Положим $z = re^{i\varphi}$ и обозначим $\arg c = \alpha$. Тогда имеем

$$|cz^n| = |c|r^n, \qquad \arg(cz^n) = \alpha + n\varphi,$$

$$\operatorname{Re}(cz^n) = |c|r^n\cos(n\varphi + \alpha), \qquad \operatorname{Im}(cz^n) = |c|r^n\sin(n\varphi + \alpha).$$

Достаточно исследовать лишь свойства $\operatorname{Re}(cz^n)$. Функция $\cos(n\varphi + \alpha)$ положительна в углах

$$-\alpha - \frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n} < \arg z < -\alpha + \frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi k}{n} \tag{6.1}$$
$$(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$$

и отрицательна в углах

$$-\alpha + \frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi k}{n} < \arg z < -\alpha + \frac{3\pi}{2n} + \frac{2\pi k}{n} \tag{6.2}$$
$$(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Следовательно, в углах, определяемых неравенствами (6.1), функция cz^n имеет положительную действительную часть, а в углах, определяемых неравенствами (6.2),— отрицательную. Эти углы делят плоскость на $2n$ равных частей. Знаки $\operatorname{Re}(cz^n)$ чередуются.

Обозначим через D какой-либо из углов, определенных неравенствами (6.1), а через D' — угол с той же вершиной, лежащий внутри D. Тогда в D' имеем $\cos(n\varphi+\alpha) > \eta > 0$ и

$$\operatorname{Re}(cz^n) > |c|\eta r^n,$$

т. е. при $z \to \infty$, $z \in D'$, действительная часть функции cz^n стремится к $+\infty$. Аналогично в угле D'', лежащем внутри угла, определенного неравенствами (6.2), $\operatorname{Re}(cz^n) \to -\infty$ $(z \to \infty,\ z \in D'')$.

Заметим, что, зная поведение функции cz^n, можно судить о поведении при $z \to \infty$ любого многочлена (и даже рациональной функции), так как если

$$P(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n,$$

то

$$P(z) \sim c_0 z^n \qquad (z \to \infty).$$

2. *Функция* e^z. Прежде всего напомним уже доказанное в предыдущем параграфе равенство

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}. \tag{6.3}$$

Из этого равенства сразу видно, что функция e^z не обращается в нуль ни при каких комплексных значениях z.

Далее, из равенства (6.3) видно, что $|e^z| < 1$ в левой полуплоскости и что $e^z \to 0$ при $\operatorname{Re} z \to -\infty$ равномерно по $\operatorname{Im} z$. В правой полуплоскости $|e^z| > 1$ и $e^z \to \infty$ при $\operatorname{Re} z \to +\infty$ равномерно по $\operatorname{Im} z$.

Отметим еще, что уравнение $e^z = A$ при любом $A \neq 0$ имеет бесконечно много решений. Действительно, из уравнения $e^z = A$, обозначая $z = x + iy$, находим

$$e^x = |A|, \quad e^{iy} = e^{i \arg A},$$

откуда

$$x = \ln |A|, \qquad y = \arg A + 2\pi k.$$

Функция e^z периодична с периодом $2\pi i$. Действительно,

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z,$$

так как из формулы Эйлера сразу видно, что $e^{2\pi i} = 1$.

Комбинируя сведения, полученные нами о степенной и показательной функциях, нетрудно исследовать функцию e^{cz^n}.

3. *Функция* $\sin z$. Исследование функции $\sin z$ легко сводится к исследованию показательной функции. Действительно, в предыдущем параграфе доказана формула

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

(Она доказана для действительных z, но по принципу аналитического продолжения она верна и при всех z).

Заменяя в этой формуле z на $-z$ и выражая из полученных двух формул $\sin z$ и $\cos z$, находим

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Положим теперь $z = x + iy$ и исследуем $|\sin z|$.

Из неравенств теоремы 1.1 гл. I имеем

$$\big|\,|e^{iz}| - |e^{-iz}|\,\big| \leqslant |e^{iz} - e^{-iz}| \leqslant |e^{iz}| + |e^{-iz}|,$$

а в силу (6.3) $|e^{iz}| = e^{-y}$, $|e^{-iz}| = e^{y}$. Поэтому

$$\frac{e^{|y|} - e^{-|y|}}{2} \leqslant |\sin(x + iy)| \leqslant \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}. \tag{6.4}$$

Из этой формулы сразу видно, что функция $\sin z$ обращается в нуль только при действительных z, т. е. при $z = \pi n$ (n — целое число), так как действительные нули $\sin z$ нам хорошо известны.

Далее, из формулы (6.4) легко получаем, что

$$|\sin(x + iy)| \sim \frac{1}{2} e^{|y|} \qquad (y \to \pm\infty)$$

равномерно по x.

Функция $\sin z$ периодична с периодом 2π, что сразу следует из принципа аналитического продолжения.

Уравнение $\sin z = A$ при любом A имеет бесконечно много решений. Действительно, это уравнение можно записать в виде

$$\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = A,$$

откуда, обозначая $e^{iz} = \zeta$, приходим к уравнению для ζ:

$$\zeta^2 - 2iA\zeta - 1 = 0.$$

Это уравнение при любых A имеет два корня ζ_1 и ζ_2 (по основной теореме алгебры), причем эти корни отличны от нуля (их произведение по теореме Виета равно -1).

Следовательно, уравнения $e^{iz} = \zeta_1$ и $e^{-iz} = \zeta_2$ имеют бесконечно много решений.

Функция $\cos z$ тоже обладает перечисленными свойствами, в чем проще всего убедиться с помощью формулы $\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$.

4. *Функции* $\operatorname{tg} z$ *и* $\operatorname{ctg} z$. Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются для всех комплексных z с помощью равенств

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Поскольку $\sin z$ и $\cos z$ обращаются в нуль лишь при действительных z, то $\operatorname{tg} z$ является голоморфной функцией во всей плоскости z, за исключением точек $z = \frac{\pi}{2} + \pi n$ (n — целое число), а $\operatorname{ctg} z$ — во всей плоскости z, за исключением точек $z = \pi n$.

Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ периодичны с периодом π, что сразу следует из принципа аналитического продолжения.

Выражая $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ через показательную функцию, приходим к формулам

$$\operatorname{tg} z = -i\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, \qquad \operatorname{ctg} z = i\,\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

Тем же путем, что и при оценке $|\sin z|$, получаем из этих формул неравенства

$$\frac{2e^{-2y}}{1+e^{-2y}} < |\operatorname{tg}(x+iy) - i| < \frac{2e^{-2y}}{1-e^{-2y}} \qquad (y > 0),$$

$$\frac{2e^{-2y}}{1+e^{-2y}} < |\operatorname{ctg}(x+iy) + i| < \frac{2e^{-2y}}{1-e^{-2y}} \qquad (y > 0)$$

и

$$\frac{2e^{2y}}{1+e^{2y}} < |\operatorname{tg}(x+iy) + i| < \frac{2e^{2y}}{1-e^{2y}} \qquad (y < 0),$$

$$\frac{2e^{2y}}{1+e^{2y}} < |\operatorname{ctg}(x+iy) - i| < \frac{2e^{2y}}{1-e^{2y}} \qquad (y < 0).$$

Из полученных неравенств вытекает, в частности, что

$$\operatorname{tg} z \to i, \qquad \operatorname{ctg} z \to -i \qquad (\operatorname{Im} z \to +\infty)$$

равномерно по $\operatorname{Re} z$ и

$$\operatorname{tg} z \to -i, \qquad \operatorname{ctg} z \to i \qquad (\operatorname{Im} z \to -\infty)$$

равномерно по $\operatorname{Re} z$.

Глава III

МНОГОЗНАЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Естественным логическим следствием принципа аналитического продолжения является новое понятие функции. У функций этого нового рода область определения не задается заранее, а определяется с помощью аналитического продолжения. Основная трудность, возникающая при изучении таких функций — их многозначность. Оказывается, что от многозначности можно освободиться, если рассматривать функцию нового рода как функцию не от точки комплексной плоскости, а от кривой, ведущей в эту точку из некоторой заданной точки.

§ 1. Понятие аналитической функции

Согласно теореме единственности голоморфная функция полностью определяется ее значениями в сколь угодно малой окрестности какой-либо одной точки. Во времена Ньютона считалось, что все функции только такие, а трудности видели лишь в вычислении значений функции там, где исходная формула ее не определяла, т. е. в аналитическом продолжении. Многие математики XVIII века были весьма искусны в аналитическом продолжении. Особым мастерством отличался Эйлер.

Основная логическая трудность, связанная с аналитическим продолжением, состоит в его неоднозначности. При этом неоднозначность — не редкое или нетипичное явление. Она возникает даже при аналитическом продолжении таких простых функций, как логарифм или квадратный корень.

В XIX веке к результатам, использующим аналитическое продолжение, начали относиться с подозрением. Немалую роль сыграли в этом тригонометрические ряды, давшие простые аналитические выражения для записи функций, равных одной голоморфной функции на одной части отрезка и другой голоморфной функции на другой его части. Тогда и было предложено современное понятие функции, включающее идею области определения. Однако сильные и глубокие результаты, полученные математиками XVIII века, заставляли искать обоснования использованных ими методов. Путь к строгому обоснованию действий, основанных на аналитическом продолжении, был предложен во второй половине XIX века Вейерштрассом.

Вейерштрасс предложил считать голоморфную функцию частью (элементом) некоторого иного объекта, который он назвал *полной аналитической функцией*. Этот объект содержит наряду с исходной функцией и любые другие голоморфные функции, получаемые из нее аналитическим продолжением. При этом Вейерштрасс конкретизировал способы получения аналитических продолжений, что дало возможность их описания. Предложенный Вейерштрассом способ состоит в следующем.

Пусть $f_0(z)$ — исходная функция, голоморфная в точке z_0. Разлагаем $f_0(z)$ в ряд по степеням $z-z_0$ и обозначаем через K_0 круг сходимости этого ряда. (Для суммы ряда сохраняем обозначение $f_0(z)$.) Выбираем произвольную точку $z_1 \in K_0$ и разлагаем функцию $f_0(z)$ в ряд по степеням $z-z_1$. Круг сходимости этого ряда обозначаем через K_1, а сумму ряда — через $f_1(z)$. Этот процесс очевидным образом продолжается. Вейерштрасс показал, что любое аналитическое продолжение исходной голоморфной функции $f_0(z)$ в точку ζ можно получить описанным путем, связав его с цепочкой точек

$$z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_N, \qquad z_N = \zeta.$$

При таком подходе становится очевидно, что аналитическое продолжение исходной функции $f_0(z)$ в точку ζ зависит не только от конечной точки ζ, но и от промежуточных точек цепочки.

Идея Вейерштрасса остается основой любого современного подхода к понятию многозначной аналитической функции, хотя описание способа аналитического продолжения меняется. Дело в том, что переразложение степенных рядов — крайне непрактичный способ аналитического продолжения, его лучше заменить каким-либо другим способом, более приспособленным для конкретных задач.

Обратимся к тому способу описания аналитического продолжения, который мы будем использовать в дальнейшем.

Согласимся с тем, что результат произвольного аналитического продолжения исходной голоморфной функции в данную точку плоскости зависит не только от самой этой точки, но и от пути, ведущего в эту точку. Основная задача, возникающая при определении понятия аналитической функции, состоит в том, чтобы придать четкий математический смысл выражению «зависит от пути продолжения». Именно этой задачей мы сейчас и займемся.

Легко видеть, что общая причина возникновения неоднозначности аналитического продолжения кроется в том, что точки плоскости не образуют упорядоченного множества, а продолжение можно сделать однозначным только в том случае, когда у нас есть твердая очередность прохождения точек, в которые мы продолжаем. Простейшим упорядоченным множеством на плоскости является кривая. Высказанные соображения наводят на мысль, что аналитическое продолжение заданной голоморфной функции по кривой будет всегда однозначно. Поэтому надо попробовать определить такое понятие. Имея в виду эту цель, поговорим о понятии *функции, определенной на данной кривой.*

Пусть дана кривая Γ с параметрическим уравнением

$$z = \varphi(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{1.1}$$

Точки кривой Γ (но не точки плоскости, через которые эта кривая проходит) находятся во взаимно однозначном соответствии с точками отрезка $0 \leqslant t \leqslant 1$. Поэтому задание функции на кривой Γ сводится к заданию числа $\psi(t)$, отвечающего каждому значению t из этого отрезка. Иными словами, функция $\zeta = \Phi(z)$ на кривой Γ задается параметрически, заданием пары функций

$$z = \varphi(t), \qquad \zeta = \psi(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Подчеркнем, что заданная таким образом на кривой Γ функция $\zeta = \Phi(z)$ не является, вообще говоря, однозначной функцией точки z (как точки плоскости), если кривая Γ имеет самопересечения.

Введем теперь понятие функции, аналитической на данной кривой Γ.

Функцию $\zeta = F(z)$, определенную на кривой Γ, назовем *функцией, аналитической на кривой* Γ, если для каждой точки $\alpha \in \Gamma$ существует функция $f_\alpha(z)$, голоморфная в некоторой окрестности этой точки (рассматриваемой теперь как точка плоскости) и совпадающая с функцией $\zeta = F(z)$ на какой-либо дуге кривой Г, содержащей точку α.

Еще раз подчеркнем, что функция $\zeta = F(z)$, даже если она аналитична на кривой Г, не обязана быть однозначной функцией точки плоскости (если кривая Г имеет самопересечения).

Отметим несколько важных свойств функций, аналитических на кривых.

1. *Если функции* $F(z)$ *и* $G(z)$ *аналитичны на кривой* Г, *то функции*

$$H(z) = F(z) + G(z), \qquad H(z) = F(z)\,G(z)$$

также аналитичны на кривой Г.

2. *Если функции* $F(z)$ *и* $G(z)$ *аналитичны на кривой* Г *и если функция* $G(z)$ *не обращается в нуль на кривой* Г, *то функция*

$$H(z) = \frac{F(z)}{G(z)}$$

также аналитична на кривой Г.

3. *Если функция* $F(z)$ *аналитична на кривой* Г, *то и все ее производные аналитичны на кривой* Г.

4. *Обозначим через* Γ_ξ *участок кривой* Г *от ее начала до точки* $\xi \in \Gamma$. *Если функция* $F(z)$ *аналитична на кривой* Г, *то и функция*

$$H(z) = \int\limits_{\Gamma_2} F(t)\,dt \qquad (z \in \Gamma)$$

аналитична на кривой Г (если кривая Г не проходит через точку $z = \infty$).

5. *Пусть функция* $G(z)$ *аналитична на кривой* Г. *Обозначим через* C *кривую, которую проходит точка* $\zeta = G(z)$, *когда точка* z *проходит кривую* Г. *Если функция* $F(\zeta)$ *аналитична на кривой* C, *то функция* $H(z) = F(G(z))$ *аналитична на кривой* Г.

Все эти свойства доказываются очень просто. Заметим прежде всего, что все функции $H(z)$:

$$F(z) + G(z), \quad F(z)\,G(z), \ \frac{F(z)}{G(z)}, \quad F^{(n)}(z), \ \int\limits_{\Gamma_z} F(t)\,dt, \quad F(G(z))$$

— определены на кривой Г. Каждой точке α кривой Г ставим в соответствие функции $h_\alpha(z)$, равные

$$f_\alpha(z)+g_\alpha(z),\quad f_\alpha(z)\,g_\alpha(z),\quad \frac{f_\alpha(z)}{g_\alpha(z)},\quad f_\alpha^{(n)}(z)$$

(для первых трех свойств). Для свойства 4 положим

$$h_\alpha(z)=\int_{\Gamma_\alpha} F(t)\,dt+\int_\alpha^z F(t)\,dt$$

(второй интеграл берется по любому пути, лежащему в достаточно малой окрестности точки α). Для свойства 5 берем

$$h_\alpha(z)=f_\beta(g_\alpha(z)),$$

где $\beta=G(\alpha)$.

Для функций, аналитических на данной кривой, легко доказывается теорема единственности:

Теорема 1.1. *Если функция $\zeta=F(z)$, определенная на кривой Γ и аналитическая на этой кривой, равна нулю на некоторой дуге кривой Γ, то она равна нулю тождественно.*

Доказательство. Точки кривой Γ находятся во взаимно однозначном соответствии с точками отрезка $0\leqslant t\leqslant 1$. Обозначим через E множество точек этого отрезка, которым отвечают значения функции $\zeta=F(z)$, равные нулю (в соответствующих точках кривой Γ). По предположению теоремы множество E непусто. Если допустим, что теорема неверна, то множество E будет отлично от всего отрезка $(0, 1)$, и потому некоторая точка t_0 этого отрезка будет граничной точкой множества E. Обозначим через α_0 точку кривой Γ, отвечающую значению t_0. Согласно определению множества E на сколь угодно малой дуге, содержащей точку α_0, будут и точки, где $F(z)=0$, и точки, где $F(z)\neq 0$. Но $\zeta=F(z)$ — функция, аналитическая на кривой Γ, и по определению на достаточно малой дуге, содержащей точку α_0, она совпадает с некоторой функцией $f_{\alpha_0}(z)$, голоморфной в окрестности точки α_0. По теореме единственности эта функция $f_{\alpha_0}(z)$ должна быть тождественным нулем (так как она равна нулю в точках кривой Γ, сколь угодно близких к точке α_0). Но это невозможно, так как эта же функция должна быть отлична от нуля в точках кривой Г, сколь угодно близких к точке α_0. Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы.

Теперь мы в состоянии определить понятие аналитического продолжения по кривой, но для удобства определим сначала еще один термин.

Элементом в точке α мы будем называть функцию $f_\alpha(z)$, голоморфную в некоторой области, содержащей точку $z=\alpha$. При этом два элемента $f_\alpha(z)$ и $f_\alpha^*(z)$ в одной и той же точке α будем называть *эквивалентными*, если функции $f_\alpha(z)$ и $f_\alpha^*(z)$ совпадают в некоторой окрестности точки $z=\alpha$.

Из определения видно, что каждый элемент $f_\alpha(z)$ в точке $z=\alpha$ можно рассматривать как элемент в каждой точке α', достаточно близкой к точке α.

В этих терминах функцию $\zeta=F(z)$, аналитическую на кривой Г, можно рассматривать как совокупность элементов $f_\alpha(z)$ в каждой точке $\alpha\in\Gamma$, обладающих тем свойством, что элементы в достаточно близких точках этой кривой (близость понимается по кривой, а не по плоскости) эквивалентны.

Функция $\zeta=F(z)$, аналитическая на кривой Г, называется *аналитическим продолжением элемента* $f_a(z)$, заданного в начале этой кривой. Элемент $f_b(z)$, отвечающий концу кривой Г, мы будем называть *результатом аналитического продолжения элемента* $f_a(z)$ *по кривой* Г.

Естественно возникает вопрос о существовании какого-либо регулярного процесса построения аналитического продолжения элемента по кривой. Опишем сейчас один такой процесс, теоретически пригодный в любом случае, но слишком громоздкий, чтобы применять его в конкретных задачах. Для простоты ограничимся случаем, когда кривая не проходит через бесконечно удаленную точку.

Итак, пусть дан произвольный исходный элемент $f_{z_0}(z)$ и кривая Г, начинающаяся в точке z_0. Разложим исходный элемент в ряд Тейлора

$$f_{z_0}(z)=\sum_0^\infty c_n^{(0)}(z-z_0)^n \tag{1.2}$$

и обозначим через R_0 радиус сходимости этого ряда. Через γ_0 обозначим участок кривой Г от точки z_0 до первой точки пересечения этой кривой с окружностью

$|z - z_0| = R_0$. Для всех точек участка γ_0 положим

$$F(z) = f_{z_0}(z), \qquad f_\alpha(z) = f_{z_0}(z) \qquad (\alpha \in \gamma_0).$$

Далее возьмем на участке γ_0 точку z_1, отличную от конечной точки этого участка, но достаточно близкую к ней. Функция $f_{z_0}(z)$ голоморфна в точке $z = z_1$, так что ее можно разложить в окрестности этой точки в ряд Тейлора

$$\sum_0^\infty c_n^{(1)} (z - z_1)^n.$$

Сумму этого ряда обозначим через $f_{z_1}(z)$, а его радиус сходимости — через R_1. Через γ_1 обозначим участок кривой Γ с началом в точке z_1 и с концом в ближайшей точке пересечения кривой Γ с окружностью $|z - z_1| = R_1$ (впереди по направлению кривой Γ по отношению к точке z_1). На участке γ_1 положим

$$F(z) = f_{z_1}(z), \qquad f_\alpha(z) = f_{z_1}(z) \qquad (\alpha \in \gamma_1)$$

(противоречия с предыдущим определением мы не боимся, так как на общей части участков γ_0 и γ_1 элементы $f_{z_0}(z)$ и $f_{z_1}(z)$ эквивалентны). Выбирая затем точку z_2 и т. д., шаг за шагом будем двигаться по кривой Γ. Нетрудно показать, что мы пройдем всю кривую Γ за конечное число шагов, если только существует функция $\zeta = F(z)$, аналитическая на кривой Γ (и совпадающая с элементом $f_{z_0}(z)$ в начале этой кривой). $\square$

Теперь можно перейти к определению понятия аналитической функции.

Пусть дан какой-либо элемент $f_a(z)$ в некоторой точке a расширенной комплексной плоскости. Этот элемент определяет некоторое множество K кривых Γ, лежащих в расширенной комплексной плоскости и начинающихся в точке a, по которым этот элемент можно аналитически продолжить. Аналитическая функция, порожденная элементом $f_a(z)$, определена для каждой кривой $\Gamma \in K$. Значением этой аналитической функции, отвечающим кривой $\Gamma \in K$, будем считать значение в конце кривой Γ результата аналитического продолжения исходного элемента $f_a(z)$ по кривой Γ.

Итак, аналитическая функция — это функция, определенная на кривых Γ из некоторого множества K. Часто удобнее будет говорить, что аналитическая функция определена на множестве, элементами которого являются точка z комплексной плоскости и кривая Γ, идущая в эту точку из фиксированной точки a. По традиции будем записывать аналитическую функцию символом $F(z)$, опуская указание на кривую Γ. Если же указание на кривую Γ необходимо, будем использовать символ $(F(z))_\Gamma$. $\square$

Аналитическая функция $F(z)$, как функция только точки z, является многозначной функцией. Под исследованием характера многозначности аналитической функции обычно понимают исследование зависимости значений аналитической функции от кривой Γ при фиксированном конце этой кривой (т. е. при фиксированной точке z). Фундаментальным результатом в этом направлении является так называемая *теорема о монодромии*:

Теорема 1.2. *Пусть исходный элемент $f_a(z)$ аналитической функции можно аналитически продолжить по любой кривой Γ, лежащей в области D. Если кривые Γ и Γ' гомотопны в области D, то*

$$(F(z))_\Gamma = (F(z))_{\Gamma'}.$$

Доказательство. Напомним, что две кривые Γ и Γ' называются гомотопными в области D, если существует семейство непрерывно зависящих от параметра s, $0 \leqslant s \leqslant 1$, кривых Γ_s, лежащих в области D и имеющих одинаковое начало и одинаковый конец (при $s=0$ кривая Γ_s обращается в Γ, а при $s=1$ — в Γ'). Для доказательства теоремы достаточно показать, что результат продолжения исходного элемента $f_a(z)$ по кривой Γ_s не зависит от параметра s.

По предположению теоремы для каждого значения s, $0 \leqslant s \leqslant 1$, существует функция $F_s(z)$, аналитическая на кривой Γ_s (и совпадающая с исходным элементом $f_a(z)$ в окрестности начала этой кривой). Возьмем произвольную точку α кривой Γ_s. Этой точке отвечает элемент $f_\alpha^{(s)}(z)$, который представляет собой функцию, голоморфную в некоторой окрестности D_α точки α (рассматриваемой как точка плоскости). Окрестность D_α содержит некоторую дугу $\gamma_\alpha^{(s)}$ кривой Γ_s, содержащую точку α. На этой дуге имеет место равенство

$$F_s(z) = f_\alpha^{(s)}(z), \tag{1.3}$$

а также равенства

$$f_{\beta}^{(s)}(z) = f_{\alpha}^{(s)}(z) \qquad (\beta \in \gamma_{\alpha}^{(s)}), \tag{1.4}$$

где $f_{\beta}^{(s)}(z)$ — элемент, отвечающий точке β кривой Γ_s. Если заменить дугу $\gamma_{\alpha}^{(s)}$ любой другой кривой $\widetilde{\gamma}_{\alpha}$, лежащей в окрестности D_{α} и имеющей то же начало и тот же конец, и определить на этой новой кривой функцию $F(z)$ равенством (1.3), а элементы $f_{\beta}(z)$ — равенством (1.4), мы получим функцию, аналитическую на несколько деформированной кривой Γ_s. Деформация сводится к тому, что участок $\gamma_{\alpha}^{(s)}$ заменяется кривой $\widetilde{\gamma}_{\alpha}$ (имеющей те же концы). При таком изменении функция $F_s(z)$ на остальной части кривой Γ_s не меняется, так что не меняется и результат продолжения.

Итак, мы показали, что результат продолжения по кривой Γ_s не изменится, если эту кривую произвольно деформировать, не выходя из области голоморфности фиксированного элемента, отвечающего какой-либо точке кривой Γ_s. Но по лемме Гейне — Бореля всю кривую Γ_s можно покрыть конечным числом областей голоморфности элементов, отвечающих точкам этой кривой. Поочередно деформируя кривую Γ_s в каждой из этих областей голоморфности, мы можем получить из кривой Γ_s произвольную, достаточно близкую к ней кривую с теми же концами (гомотопную ей в объединении областей голоморфности этих элементов). В частности, можно получить таким способом из кривой Γ_s любую кривую $\Gamma_{s'}$ со значением s, достаточно близким к s'. Следовательно, результат аналитического продолжения исходного элемента по кривой Γ_s не зависит от параметра s, и теорема доказана.

Замечание. Попутно мы доказали еще одно утверждение, которое стоит выделить особо:

Если элемент $f_a(z)$ можно аналитически продолжить по кривой Γ, *то его можно аналитически продолжить и по любой кривой, достаточно близкой к* Γ. *Результат продолжения будет при этом тот же, если новая кривая имеет тот же конец, что и* Γ.

В качестве простого следствия из последнего утверждения легко получается следующий результат:

Теорема 1.3. *Каждой точке комплексной плоскости отвечает не более счетного множества различных значений данной аналитической функции.*

Доказательство. Каждое значение данной аналитической функции в данной точке плоскости получается в результате аналитического продолжения исходного элемента по некоторой кривой с концом в этой точке. Согласно сделанному замечанию каждую кривую мы можем немного деформировать, не меняя результата продолжения. В частности, всегда можно считать, что аналитическое продолжение производится по ломаной с вершинами в точках плоскости, имеющих рациональные координаты. Таких ломаных счетное множество. Отсюда немедленно вытекает утверждение теоремы.

Легко заметить, что доказательство теоремы о монодромии напоминает доказательство гомотопического варианта теоремы Коши (теорема 2.3 гл. II). Это сходство не случайно. Теорема Коши (в гомотопическом варианте) является частным случаем теоремы о монодромии, если в качестве аналитической функции взять первообразную от интегрируемой функции. Однако не любой вариант теоремы Коши может восприниматься таким образом — теорема 2.1 гл. II основана на специфических свойствах интеграла, и ее нельзя рассматривать как частный случай теоремы о монодромии.

В заключение определим, что мы будем понимать под теми или иными действиями над аналитическими функциями.

Пусть $F(z)$ — аналитическая функция, порожденная исходным элементом $f(z)$. Символом $F'(z)$ будем обозначать аналитическую функцию, порожденную элементом $f'(z)$.

Первообразной аналитической функции $F(z)$ будем называть аналитическую функцию, порожденную первообразной ее исходного элемента.

Если $F(z)$ и $G(z)$ — две аналитические функции, порожденные исходными элементами $f(z)$ и $g(z)$, заданными в одной и той же точке, то символами

$$F(z)+G(z), \qquad F(z)\,G(z), \qquad \frac{F(z)}{G(z)}$$

будем обозначать аналитические функции, порожденные элементами

$$f(z)+g(z), \qquad f(z)\,g(z), \qquad \frac{f(z)}{g(z)}$$

соответственно.

Если аналитическая функция $G(z)$ порождена исходным элементом $g(z)$ в точке a, а аналитическая функция $F(z)$ порождена элементом $f(z)$ в точке $b=g(a)$, то символом $F(G(z))$ будем обозначать аналитическую функцию, порожденную элементом $f(g(z))$.

Отметим еще формулировку теоремы единственности для аналитических функций:

Если какой-либо элемент аналитической функции эквивалентен тождественному нулю, то и все элементы аналитической функции — тождественные нули.

§ 2. Основные элементарные многозначные функции

Как уже говорилось в § 1, при исследовании аналитических функций возникают две основные задачи. Первая из этих задач состоит в том, чтобы описать множество тех кривых, по которым можно продолжить исходный элемент аналитической функции, а вторая — в том, чтобы найти зависимость значения $(F(z))_\Gamma$ аналитической функции $F(z)$ от кривой Γ (при условии, что ее конец фиксирован). В этом параграфе мы решим обе эти задачи для логарифма и степени (не целой). Кроме того, выведем формулы, позволяющие выразить остальные элементарные многозначные функции через логарифм, но решение поставленных задач для них мы отложим до следующих параграфов, где будут изложены некоторые общие соображения.

1. *Функция* $\ln z$. Согласно теореме единственности функцию $\ln z$, определяемую в анализе для положительных значений z, можно распространить на комплексные значения z (как аналитическую функцию) не более чем одним способом. С другой стороны, ясно, что хотя бы один способ заведомо есть, так как функция $\ln z$ в окрестности каждой точки $z=a$ положительной части действительной оси разлагается в степенной ряд

$$\ln z = \ln a + \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-a)^n. \tag{2.1}$$

Этот степенной ряд сходится в круге $|z-a|<a$ (если заменить действительное переменное z комплексным переменным z). Можно было бы получить аналитическое продолжение суммы этого ряда с помощью процесса, описанного в § 1, но использование свойства 4 функций,

аналитических на кривой, приведет к цели значительно быстрее, так как функцию $\ln z$ можно рассматривать как первообразную функцию $1/z$.

Итак, в качестве исходного элемента аналитической функции $\ln z$ возьмем функцию $\int\limits_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$, определенную в любой конечной односвязной области, содержащей точку $\zeta = 1$ и не содержащей точку $\zeta = 0$. По теореме 3.4 гл. II эта функция голоморфна и интеграл не зависит от пути интегрирования.

Функция $g(\zeta) = 1/\zeta$ голоморфна при всех значениях ζ, за исключением $\zeta = 0$. Обозначим через Γ произвольную кривую с началом в точке $\zeta = 1$, не проходящую через точки $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$, а через Γ_z — участок этой кривой от точки $\zeta = 1$ до некоторой точки $z \in \Gamma$. По свойству 4 функций, аналитических на кривой, функция $F(z) = \int\limits_{\Gamma_z} \frac{d\zeta}{\zeta}$ аналитична на кривой Γ. Кроме того, при z, достаточно близких к началу кривой, функция $F(z)$ совпадает, очевидно, с исходным элементом функции $\ln z$. Следовательно, формула

$$(\ln z)_\Gamma = \int\limits_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta} \tag{2.2}$$

дает нам значение аналитической функции $\ln z$, полученное в результате аналитического продолжения исходного элемента в точку z по кривой Γ. Поскольку Γ — произвольная кривая с началом в точке $\zeta = 1$, не проходящая через точки $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$, приходим к утверждению:

Теорема 2.1. *Исходный элемент аналитической функции $\ln z$ можно аналитически продолжить по любой кривой Γ с началом в точке $\zeta = 1$, не проходящей через точки $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$. Результат продолжения дается формулой* (2.2).

Тем самым решена первая задача для аналитической функции.

Прежде чем переходить к решению второй задачи, надо получить более удобный способ вычисления значений функции $\ln z$ для комплексных значений z, чем формула (2.2). В первую очередь найдем значение аналитической функции $\ln z$, отвечающее наиболее простому выбору кривой Γ, идущей из точки 1 в точку z. В качестве такой простейшей кривой Γ возьмем кривую γ_z, составленную из

1) прямолинейного отрезка с началом в точке $\zeta = 1$ и концом в точке $\zeta = |z|$;

2) кратчайшей дуги окружности $|\zeta| = |z|$ с началом в точке $\zeta = |z|$ и концом в точке $\zeta = z$ (при действительных отрицательных z, когда имеются две кратчайшие дуги, мы берем верхнюю полуокружность).

Для сокращения записи обозначим $|z| = r$, $\arg z = \varphi$ $(-\pi < \varphi \leqslant \pi)$. Тогда имеем

$$(\ln z)_{\gamma_z} = \int\limits_{\gamma_2} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int\limits_1^r \frac{dx}{x} + \int\limits_0^\varphi \frac{ire^\theta\, d\theta}{r} = \ln r + i\varphi.$$

Значение $(\ln z)_{\gamma_z}$ аналитической функции $\ln z$ называется ее *главным значением*. Для главного значения логарифма будем использовать символ $(\ln z)$. Легко убедиться, что функция $(\ln z)$ голоморфна в комплексной плоскости с разрезом по отрицательной части действительной оси. Согласно проведенным вычислениям справедлива формула

$$(\ln z) = \ln |z| + i \arg z \qquad (-\pi < \arg z \leqslant \pi). \tag{2.3}$$

Напомним теперь обозначения, которыми часто пользовались в § 7 гл. I.

Пусть конец кривой Γ_1 совпадает с началом кривой Γ_2, Тогда символом $\Gamma_1\Gamma_2$ обозначим кривую, полученную прохождением сначала кривой Γ_1, а затем — кривой Γ_2. Символом Γ^{-1} обозначим кривую Γ, проходимую в обратном направлении.

Символом $\nu(\Gamma, a)$ обозначалось число обходов в положительном направлении точки $z = a$ замкнутой кривою Γ (лежащей в конечной части плоскости и не проходящей через точку $z = a$). В § 7 гл. I показано, что величина $\nu(\Gamma, a)$, определенная для всех замкнутых кривых, лежащих в области D_a (комплексная плоскость с выколотой точкой a), единственным образом определяется следующими свойствами:

1. Если кривые Γ и Γ' гомотопны в области D_a, то

$$\nu(\Gamma, a) = \nu(\Gamma', a).$$

2. $\nu(\Gamma_1\Gamma_2, a) = \nu(\Gamma_1, a) + \nu(\Gamma_2, a)$.

3. Для кривой Γ, гомотопной нулю, $\nu(\Gamma, a) = 0$, а для любой окружности $|z-a| = \rho$ величина $\nu(\Gamma, a)$ равна единице.

Теорема 2.2. *Пусть Γ — произвольная кривая, имеющая начало в точке $\zeta = 1$ и конец в точке $\zeta = z$, которая не проходит через точки $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$. Тогда*

$$(\ln z)_\Gamma = (\ln z) + 2\pi i \nu\left(\Gamma\gamma_z^{-1},\ 0\right).$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что для любой замкнутой кривой C, лежащей в области D_0 (комплексная плоскость с выколотой точкой $z = 0$), справедлива формула

$$\nu(C,\ 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Действительно, функция $\mu(C) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{d\zeta}{\zeta}$ определена для всех замкнутых кривых C, лежащих в области D_0, и удовлетворяет всем трем условиям, определяющим величину $\nu(C, 0)$.

Если Γ — произвольная кривая с началом в точке $\zeta = 1$ и с концом в точке $\zeta = z$ (не проходящая через точки $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$), а γ_z — простейшая кривая такого рода, описанная выше, то кривая $\Gamma\gamma_z^{-1}$ является замкнутой кривой, лежащей в области D_0. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\gamma_z^{-1}} \frac{d\zeta}{\zeta} = \nu\left(\Gamma\gamma_z^{-1},\ 0\right).$$

Но, с другой стороны,

$$\int_{\Gamma\gamma_z^{-1}} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\gamma_z^{-1}} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta} - \int_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

а, согласно формуле (2.2),

$$\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = (\ln z)_\Gamma, \qquad \int_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{\zeta} = (\ln z).$$

Отсюда немедленно вытекает утверждение теоремы.

Тем самым мы решили для аналитической функции $\ln z$ и вторую задачу.

Сделаем несколько заключительных замечаний об аналитической функции $\ln z$.

Из теоремы 2.2 следует, что *аналитическую функцию $\ln z$ нельзя продолжить ни по одной кривой через точки $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$*, так как

$$\operatorname{Re} \ln z = \ln |z|,$$

а величина $\ln |z|$ стремится к $+\infty$ при $z \to \infty$ и к $-\infty$ при $z \to 0$.

Далее, из теоремы 2.2 мы легко получаем, что

Значения $(\ln z)_{\Gamma_1}$ и $(\ln z)_{\Gamma_2}$ равны в том и только в том случае, когда кривые Γ_1 и Γ_2 гомотопны в области D_0.

Действительно, необходимым и достаточным условием равенства значений $(\ln z)_{\Gamma_1}$ и $(\ln z)_{\Gamma_2}$, согласно теореме 2.2, является равенство $\nu(\Gamma_1, 0) = \nu(\Gamma_2, 0)$. Но из теоремы 7.2 гл. I нетрудно вывести, что кривые Γ_2 и Γ_1 гомотопны в области D_0 тогда и только тогда, когда $\nu(\Gamma_1, 0) = \nu(\Gamma_2, 0)$.

Заметим еще, что формуле теоремы 2.2 для $(\ln z)_\Gamma$ можно придать вид

$$(\ln z)_\Gamma = \ln |z| + i \arg z, \tag{2.3*}$$

где $\arg z = (\arg z)_\Gamma = \int\limits_\Gamma d \arg \zeta$.

Действительно, обозначим $|\zeta| = \rho$, $\arg \zeta = \vartheta$. Тогда

$$\zeta = \rho e^{i\theta}, \quad d\zeta = e^{i\theta}\, d\rho + i\rho e^{i\theta}\, d\theta.$$

и потому (согласно формуле 2.2)

$$(\ln z)_\Gamma = \int\limits_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \int\limits_\Gamma \frac{d\rho}{\rho} + i \int\limits_\Gamma d\vartheta = \int\limits_\Gamma d \ln |\zeta| + i \int\limits_\Gamma d \arg \zeta =$$

$$= \ln |z| + i \int\limits_\Gamma d \arg \zeta.$$

Формула (2.3*) менее удобна, чем формула теоремы 2.2, так как вычисление значения $(\arg z)_\Gamma$ требует продолжения функции $\arg \zeta$ по кривой Γ, а величина $\nu(C, 0)$ — простая геометрическая характеристика этой кривой. Однако в некоторых случаях формула (2.3*) может быть полезна. □

Отметим еще, что как из формулы (2.3*), так и из принципа аналитического продолжения немедленно вытекает равенство $e^{\ln z} = z$. Тем же способом можно перенести на комплексные значения переменного и другие соотношения для функции $\ln z$, имеющиеся для положительных значений переменного.

2. *Функция* z^α. При действительных значениях показателя α и при положительных значениях переменного z функция z^α определяется равенством

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}. \tag{2.4}$$

Это равенство естественно принять за определение степенной функции с нецелым показателем (при целых α эта функция уже определена) и при любых комплексных значениях показателя α и переменного z.

В качестве исходного элемента аналитической функции возьмем функцию

$$(z^\alpha) = e^{\alpha\,(\ln z)}$$

(здесь $(\ln z)$ — главное значение логарифма). Этот исходный элемент будем называть *главным значением* аналитической функции z^α. Уже отмечалось, что функция $(\ln z)$ голоморфна в комплексной плоскости с разрезом по отрицательной части действительной оси. Поэтому функция (z^α) также будет голоморфна в комплексной плоскости с разрезом по отрицательной части действительной оси.

Равенство (2.4) и теорема 2.1 сразу же дают:

Теорема 2.3. *Исходный элемент аналитической функции z^α можно аналитически продолжать по любой кривой Γ, не проходящей через точки $z = 0$ и $z = \infty$.*

Из равенства (2.4) и теоремы 2.2 следует

Теорема 2.4. *Для значения $(z^\alpha)_\Gamma$ аналитической функции z^α, полученного аналитическим продолжением исходного элемента (z^α) по кривой Γ* (с началом в точке $z = 1$ и концом в точке z), *справедлива формула*

$$(z^\alpha)_\Gamma = (z^\alpha) \exp\{2\pi i\alpha \cdot \nu(\Gamma\gamma_z^{-1},\ 0)\}$$

(здесь γ_z, как и в теореме 2.2,— простейшая кривая с началом в точке $\zeta = 1$ и концом в точке $\zeta = z$).

Совершенно аналогично с помощью формулы (2.4) и формул (2.3) и (2.3*) получаем равенства

$$(z^\alpha) = |z|^a \exp\{-b \arg z + i(a \arg z + b \ln|z|)\}, \tag{2.5}$$

где

$$a = \operatorname{Re} \alpha, \quad b = \operatorname{Im} \alpha, \quad -\pi < \arg z \leqslant \pi,$$

и

$$(z^\alpha)_\Gamma = |z|^\alpha \exp\{-b \arg z + (a \arg z + b \ln z)\}, \quad (2.5^*)$$

где

$$a = \operatorname{Re} \alpha, \quad b = \operatorname{Im} \alpha, \quad \arg z = (\arg z)_\Gamma = \int_\Gamma d \arg \zeta$$

(эти формулы принимают особенно простой вид, когда α — действительное число).

Исследуем теперь вопрос о том, когда может иметь место равенство

$$(z^\alpha)_{\Gamma_1} = (z^\alpha)_{\Gamma_2}. \quad (2.6)$$

Из формулы теоремы 2.4 сразу же получаем, что для справедливости равенства (2.6) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\exp\{2\pi i\alpha \cdot \nu(\Gamma_1\gamma_z^{-1},\ 0)\} = \exp\{2\pi i\alpha \cdot \nu(\Gamma_2\gamma_z^{-1},\ 0)\},$$

которое выполняется тогда и только тогда, когда величина $\alpha\{\nu(\Gamma_1\gamma_z^{-1},\ 0) - \nu(\Gamma_2\gamma_z^{-1},\ 0)\}$ является целым числом. Это в свою очередь возможно лишь в случае, когда показатель α равен рациональному числу p/q, а целое число

$$\nu(\Gamma_1\gamma_z^{-1},\ 0) - \nu(\Gamma_2\gamma_z^{-1},\ 0)$$

делится на знаменатель q этого рационального числа. В частности, равенство (2.6) будет иметь место для любых двух кривых Γ_1 и Γ_2 в том и только в том случае, когда показатель α является целым числом.

Таким образом, мы пришли к утверждению:

Если $\alpha = \frac{p}{q}$, *где* p *и* q — *взаимно простые целые числа, то равенство* (2.6) *имеет место в том и только в том случае, когда*

$$\nu(\Gamma_1\gamma_z^{-1},\ 0) \equiv \nu(\Gamma_2\gamma_z^{-1},\ 0) \quad (\mathrm{mod}\ q).$$

Из этого утверждения следует, что каждой точке комплексной плоскости отвечает ровно q различных значений аналитической функции $z^{p/q}$. Такие аналитические функции называются иногда *q-значными*. Простейшей m-значной функцией является функция $\sqrt[m]{z}$.

Пока мы говорили только об аналитическом продолжении исходного элемента аналитических функций $\ln z$ и z^α. Однако формулы, полученные для значений $(\ln z)_\Gamma$, позволяют говорить и об аналитическом продолжении произвольных элементов этих функций, так как аналитическое продолжение любого элемента можно составить из аналитического продолжения этого элемента в исходный и из продолжения исходного элемента. В связи с вопросом об аналитическом продолжении элемента, отличного от исходного, отметим одно утверждение, которым приходится часто пользоваться:

При аналитическом продолжении любого элемента аналитической функции z^α (здесь α — любое действительное число) *из точки $z = re^{i\vartheta}$ в точку $z = re^{i\varphi}$ по дуге окружности*

$$|z| = r, \quad \vartheta \leqslant \arg z \leqslant \varphi,$$

модуль функции z^α не меняется, а аргумент непрерывно и монотонно изменяется на величину $\alpha(\varphi - \vartheta)$.

Это утверждение немедленно вытекает из формулы (2.5*).

Кроме функций $\ln z$ и z^α среди элементарных функций многозначными аналитическими функциями являются еще обратные тригонометрические функции. В этом параграфе мы не будем решать для обратных тригонометрических функций задачи, поставленные в начале параграфа. Удобнее будет сделать это в следующих параграфах, демонстрируя более общие методы. Сейчас ограничимся лишь выводом формул, связывающих обратные тригонометрические функции с логарифмом.

3. *Функция* $\operatorname{arctg} z$. Главное значение функции $\operatorname{arctg} z$ при действительных z определяется интегралом $\int\limits_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}$ или рядом

$$\operatorname{arctg} z = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}.$$

Оба эти выражения пригодны для аналитического продолжения функции $\operatorname{arctg} z$ на комплексные значения переменного. Написанный выше ряд (или интеграл) будем считать исходным элементом аналитической функции

$\operatorname{arctg} z$ (для интеграла делаем дополнительное ограничение, что путь интегрирования лежит в некоторой достаточно малой окрестности точки $\zeta = 0$).

Для вывода формулы, выражающей функцию $\operatorname{arctg} z$ через логарифм, воспользуемся интегралом. Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1}{1+\zeta^2} = \frac{1}{2i}\frac{1}{\zeta - i} - \frac{1}{2i}\frac{1}{\zeta + i}.$$

Тогда для z, лежащих в достаточно малой окрестности точки $z = 0$, получим равенство

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i}\int_0^z \frac{d\zeta}{\zeta - i} - \frac{1}{2i}\int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\zeta + i} = \frac{1}{2i}\ln\frac{z-i}{-i} - \frac{1}{2i}\ln\frac{z+i}{i}$$

которое можно записать в виде

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz}. \tag{2.7}$$

По принципу аналитического продолжения это равенство справедливо и для всех z. Тем самым мы получили искомую формулу.

4. *Функция* $\arcsin z$. Главное значение функции $\arcsin z$ при действительных значениях z, лежащих на отрезке $(-1, 1)$, определяется интегралом $\arcsin z = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ или рядом $\arcsin z = \sum_0^\infty \frac{(2n)!}{(2n+1)\cdot 2^{2n}\cdot (n!)^2} z^{2n+1}$.

За исходный элемент аналитической функции $\arcsin z$ удобнее всего принять именно ряд, так как под интегралом стоит многозначная функция. Однако для вывода интересующей нас формулы удобнее всего воспользоваться равенством $\sin(\arcsin z) = z$ (по принципу аналитического продолжения оно сохраняет силу и для комплексных значений переменного). По формуле Эйлера $\sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$, так что равенство, определяющее функцию $w = \arcsin z$, можно записать в виде $e^{iw} - e^{-iw} = 2iz$. Решая квадратное уравнение относительно функции e^{iw}, получаем, что

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}.$$

Отсюда без труда находим интересующую нас формулу:

$$\arcsin z = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right). \tag{2.8}$$

§ 3. Ветви аналитической функции

Перейдем к изложению некоторых общих приемов исследования многозначных аналитических функций. Для упрощения формулировок удобно пользоваться терминами, которые мы определим.

Пусть нам дана аналитическая функция $F(z)$, порожденная исходным элементом $f(z)$ в точке $z=a$. Возьмем некоторую область D, содержащую точку $z=a$, и рассмотрим аналитические продолжения элемента $f(z)$ не по всем возможным кривым, выходящим из точки a, а только по тем, которые лежат в области D. В результате таких продолжений мы получим функцию $\Phi(z)$, отличающуюся от всей аналитической функции $F(z)$, тем, что ее область определения несколько сужена. Эту функцию $\Phi(z)$ будем называть *ветвью аналитической функции $F(z)$ в области D*.

Подчеркнем, что ветвь аналитической функции в области D, как и сама аналитическая функция, порождается заданием исходного элемента $f(z)$.

Особо выделим случай, когда исходный элемент $f(z)$ можно аналитически продолжить по любой кривой Γ, лежащей в области D. В этом случае ветвь аналитической функции в области D мы будем называть *функцией, аналитической в области D*.

Если функция $\Phi(z)$, аналитическая в области D, однозначна (как функция одной лишь точки z) в этой области, будем называть эту функцию *голоморфной ветвью аналитической функции $F(z)$* (в области D). □

Из теоремы о монодромии (теорема 1.2) немедленно вытекает следующее важное утверждение (часто именно это утверждение называют теоремой о монодромии):

Теорема 3.1. *Функция, аналитическая в односвязной области, голоморфна в этой области.*

Действительно, по теореме о монодромии результат продолжения исходного элемента по кривым, гомотопным в области, одинаков. Но мы знаем (см. теорему 7.1 гл. 1), что в односвязной области гомотопны все кривые, имеющие одинаковое начало и одинаковый конец. Поэтому результат продолжения исходного элемента по кривой, лежащей в односвязной области, зависит только от конца этой кривой. Это и дает утверждение теоремы. □

Оперировать с понятием функции, аналитической в области, часто бывает значительно удобнее, чем с понятием аналитической функции, так как термин «функция, аналитическая в области D» уже несет в себе информацию о множестве кривых, по которым можно аналитически продолжить исходный элемент. Отметим некоторые свойства функций, аналитических в области:

1. *Если функции* $\Phi_1(z)$ *и* $\Phi_2(z)$ *аналитичны в области* D, *то и функции*

$$\Phi_1(z)+\Phi_2(z), \quad \Phi_1(z)\Phi_2(z)$$

аналитичны в области D.

2. *Если функции* $\Phi_1(z)$ *и* $\Phi_2(z)$ *аналитичны в области* D *и все значения функции* $\Phi_2(z)$ *отличны от нуля, то функция* $\frac{\Phi_1(z)}{\Phi_2(z)}$ *аналитична в области* D.

3. *Пусть функция* $\Psi(\zeta)$ *аналитична в области* G, *а функция* $\Phi(z)$ *аналитична в области* D *и все ее значения лежат в области* G. *Тогда функция*

$$\Psi(\Phi(z))$$

аналитична в области D.

4. *Если функция* $\Phi(z)$ *аналитична в области* D, *то и все ее производные аналитичны в области* D.

5. *Если функция* $\Phi(z)$ *аналитична в конечной области* D, *то и ее первообразная аналитична в области* D.

Перечисленные свойства очевидным образом вытекают из приведенных в § 1 свойств функций, аналитических на кривых. $\square$

В качестве примера использования свойств 1—3 решим задачу об определении множества кривых, по которым можно аналитически продолжить функции $\operatorname{arctg} z$ и $\arcsin z$.

1. *Функция* $\operatorname{arctg} z$. Воспользуемся формулой $\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz}$, полученной в § 2 (см. формулу (2.7)). Функция

$$\Phi(z)=\frac{1+iz}{1-iz}$$

голоморфна на всей расширенной комплексной плоскости, за исключением точки $z=-i$, и обращается в нуль только в точке $z=i$. Обозначим через G всю конечную комплексную плоскость с выколотой точкой $\zeta=0$, а через D — расширенную комплексную плоскость с выколотыми точками $z=i$ и $z=-i$. Тогда можно сказать, что функция $\Phi(z)=\frac{1+iz}{1-iz}$ аналитична в области D и что ее значения лежат в области G. Кроме того, мы знаем из теоремы 2.1, что функция $\Psi(\zeta)=\ln\zeta$ аналитична в области G. Следовательно, по свойству 3° функция

$$\Psi(\Phi(z))=\ln\frac{1+iz}{1-iz}$$

аналитична в области D. Иными словами:

Функция $\operatorname{arctg} z$ *аналитична в расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками* $z=i$ *и* $z=-i$.

2. *Функция* $\arcsin z$. Воспользуемся формулой $\arcsin z=\frac{1}{i}\ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$ (см. формулу (2.8)). Функция $\zeta=1-z^2$ голоморфна во всей конечной области и обращается в нуль только в точках $z=1$ и $z=-1$, а функция $\sqrt{\zeta}$ аналитична во всей конечной плоскости с выколотой точкой $\zeta=0$ (см. теорему 2.3). Поэтому, согласно свойству 3, функция $iz+\sqrt{1-z^2}$ аналитична во всей конечной плоскости с выколотыми точками $z=1$ и $z=-i$. Легко проверить также, что эта функция не обращается в нуль в указанной области. Действительно, из равенства $iz+\sqrt{1-z^2}=0$ мы сразу получаем равенство $-z^2=1-z^2$, которое не может выполняться ни для одного конечного значения z. Поэтому, еще раз применяя свойство 3 $\left(\text{на этот раз с } \Phi(z)=iz+\sqrt{1-z^2} \text{ и } \Psi(\zeta)=\frac{1}{i}\ln\zeta\right)$, приходим к утверждению:

Функция $\arcsin z$ *аналитична в комплексной плоскости с выколотыми точками* $z=1$ *и* $z=-1$.

При помощи свойств 1—5 обычно легко удается определить область, в которой аналитична функция, представленная через элементарные функции той или иной формулой.

Укажем (без доказательства) еще на один интересный критерий аналитичности:

6. *Пусть функции* $p_1(z), \ldots, p_n(z)$, $q(z)$ *аналитичны в области* D. *Тогда любое решение дифференциального уравнения*

$$w^{(n)}+p_1(z)\,w^{(n-1)}+\ldots+p_n(z)\,w=q(z)$$

также является функцией, аналитической в области D. $\square$

Часто приходится сталкиваться со следующей задачей.

Дана функция, аналитическая в области D. Выяснить, будет ли эта функция голоморфна в области D.

В случае, когда область D односвязна, эта задача сразу решается ссылкой на теорему о монодромии (см. теорему 3.1). Однако иногда приходится решать эту задачу и для случая многосвязной области D. Обычный прием доказательства голоморфности состоит в том, что заданную функцию представляют в виде той или иной комбинации функций, аналитических в более широких односвязных областях. Приведем несколько примеров такого рода.

Пример 1. Рассмотрим функцию $F(z)=\sqrt[3]{z^2(1-z}$ в области D, представляющей собой всю конечную плоскость с разрезом по отрезку [0, 1] действительной оси.

Заметим прежде всего, что наша функция аналитична в области D. Действительно, функция $z^2(1-z)$ голоморфна в области D и не обращается в нуль, а функция $\sqrt[3]{\zeta}$ аналитична во всей конечной плоскости с выколотой точкой $\zeta=0$. Согласно свойству 3 и суперпозиция этих функций аналитична в области D.

Применить теорему 3.1 для доказательства голоморфности нашей функции в области D нельзя, так как область D двухсвязна. Однако мы можем представить нашу функцию $F(z)$ в виде произведения $F(z)=F_1(z)F_2(z)$, где

$$F_1(z)=z, \qquad F_2(z)=\sqrt[3]{1-\frac{1}{z}}.$$

Функция $F_1(z)=z$, очевидно, голоморфна в области D. Функция $F_2(z)=\sqrt[3]{1-\frac{1}{z}}$ аналитична в области D по тем же соображениям, что и сама функция $F(z)$. Однако легко видеть, что функция $F_2(z)$ аналитична и в более широкой области, получающейся добавлением к области D точки $z=\infty$. Эта область уже односвязна, и потому функция $F_2(z)$ голоморфна в этой области по теореме о монодромии. Следовательно, она голоморфна и в более узкой области D. Таким образом, мы показали, что функция $F(z)$ является произведением двух функций, голоморфных в области D, и потому голоморфна в этой области.

Пример 2. Рассмотрим функцию

$$F(z)=\sqrt{(z^2-1)(z^2-4)}$$

в области D, представляющей собой всю конечную плоскость с разрезами по отрезкам $(-2, -1)$ и $(1, 2)$ действительной оси.

Как и в предыдущем примере, легко доказывается, что функция $F(z)$ аналитична в области D. Представим ее в виде $F(z)=F_1(z)F_2(z)F_3(z)$, где

$$F_1(z)=z^2-1,\quad F_2(z)=\sqrt{1-\frac{1}{z-1}},\quad F_3(z)=\sqrt{1+\frac{1}{z+1}}.$$

Из тех же соображений, что и в примере 1, убеждаемся, что все сомножители голоморфны в области D, поэтому и наша функция $F(z)$ голоморфна в этой области.

Задача о выделении голоморфных ветвей аналитической функции является важной составной частью задачи об исследовании характера многозначности этой аналитической функции. Однако при этом мы обычно не бываем связаны выбором области D. Чаще всего задача состоит в том, чтобы в данной области провести разрезы таким образом, чтобы в разрезанной области рассматриваемая аналитическая функция «распалась» на голоморфные ветви. Для этого достаточно взять разрезанную область односвязной. Задача о выделении голоморфной ветви в многосвязной области возникает, когда по каким-либо побочным соображениям надо уменьшить число разрезов.

§ 4. Исследование характера многозначности

В предыдущем параграфе изложен ряд приемов, позволяющих установить, по каким кривым можно продолжить аналитическую функцию, заданную той или иной формулой. В этом параграфе мы займемся исследованием характера многозначности данной аналитической функции в предположении, что задача предыдущего параграфа уже решена. Иными словами, будем исследовать зависимость значения аналитической функции в данной точке плоскости от формы кривой, по которой наша аналитическая функция продолжается в эту точку. Чтобы учесть информацию о возможности продолжения по кривым, будем иметь дело только с функциями, аналитическими в данной области. Как и в предыдущем параграфе, наше внимание будут привлекать главным образом функции, заданные той или иной формулой.

Изложим два способа исследования характера многозначности функции, аналитической в данной области. Один из этих способов использует довольно серьезные предположения о строении функции, а другой применим к самым общим случаям. Достоинство первого способа — в полноте получаемой информации о функции, а второго — в его общности.

Начнем с изложения некоторых фактов, имеющих отношение к обоим способам.

Пусть задана функция $F(z)$, аналитическая в n-связной области D. В первую очередь придется напомнить некоторые сведения о строении множества гомотопических классов замкнутых кривых, лежащих в n-связной области.

Согласно определению числа связности (см. § 2 гл. I) n-связная область D имеет границу, состоящую из n компонент

$$\gamma_0,\ \gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_{n-1}.$$

Компоненту γ_0 назовем внешней компонентой границы, а остальные $n-1$ компонент — внутренними. С каждой внутренней компонентой γ_k мы связали в § 7 гл. I гомотопический класс $\mathfrak{a}_k$. Этот гомотопический класс определяется следующим образом.

Через C_k обозначали простую замкнутую ломаную, лежащую в области D и обладающую тем свойством, что область, ограниченная ломаной C_k (лежащая слева при движении по C_k), содержит внутри себя компоненту γ_k и не содержит других компонент границы области D. Через $\mathfrak{a}_k$ мы обозначали гомотопический класс $[C_k]$, состоящий из кривых, гомотопных ломаной C_k.

Согласно теореме 7.3 гл. 1 любую замкнутую кривую Γ, лежащую в области D и проходящую через фиксированную точку $a \in D$, можно заменить гомотопной ей кривой

$$\Gamma_{i_1}\Gamma_{i_2}\ldots\Gamma_{i_r},$$

где кривые Γ_{i_k} таковы, что или кривая $\Gamma_{i_k}^{-1}$, или кривая Γ_{i_k} принадлежит одному из гомотопических классов $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{n-1}$.

Иными словами, это утверждение можно сформулировать так:

Гомотопический класс [Г] можно представить в виде

$$\mathfrak{a}_{i_1}^{m_1}\mathfrak{a}_{i_2}^{m_2}\ldots\mathfrak{a}_{i_r}^{m_r},$$

где числа m_k равны 1 или -1, а индексы i_k принимают значения $1, 2, \ldots, n-1$.

Проведем теперь в области D попарно непересекающиеся разрезы, соединяющие внешнюю компоненту γ_0 с каждой из внутренних компонент. Таких разрезов ровно $n-1$, и после их проведения область D превратится в односвязную область D'. Если взять в какой-либо точке $a \in D'$ произвольный элемент функции $F(z)$, аналитической в области D, то можно аналитически продолжить его на всю область D'. По теореме о монодромии (теорема 3.1) мы получим в результате продолжения некоторую функцию, голоморфную в области D'. Различным элементам аналитической функции $F(z)$ в точке a будут отвечать различные голоморфные в области D' функции. По теореме 1.3 таких функций счетное множество, и их можно занумеровать:

$$F_0(z),\ F_1(z),\ F_2(z),\ \ldots$$

При этом символом $F_0(z)$ обозначим функцию, возникающую из исходного элемента аналитической функции $F(z)$. Таким образом, после проведения в области D разрезов функция $F(z)$, аналитическая в области D, «распалась» на счетное (или конечное) множество голоморфных в области D' ветвей $F_k(z)$. При аналитическом продолжении по любой замкнутой кривой Г, лежащей в области D, эти ветви каким-то образом переходят друг в друга. Для полного исследования характера многозначности нам нужно выяснить, в какую ветвь $F_k(z)$ переходит ветвь $F_0(z)$ при аналитическом продолжении по замкнутой кривой Г. $\square$

Перейдем теперь к изложению условий, которые накладываются на функцию $F(z)$ в первом способе.

Будем предполагать, что исходная голоморфная ветвь $F_0(z)$ нашей аналитической функции $F(z)$ принимает в области D значения, лежащие в некоторой области G. Кроме того, мы предположим, что результат аналитического продолжения ветви $F_0(z)$ по замкнутой кривой $\Gamma \in \mathfrak{a}_k$ имеет вид

$$\tau_k(F_0(z)) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

где функции $\tau_k(\zeta)$ удовлетворяют условиям:

1. Функции $\tau_k(\zeta)$ голоморфны в области G, и принимаемые ими значения лежат в области G.

2. Функции $\tau_k(\zeta)$ имеют обратные функции $\tau_k^{-1}(\zeta)$, также голоморфные в области G.

Для сокращения записи будем употреблять символ $\varphi \circ \psi$ для обозначения функции $\varphi(\psi(\xi))$. Кроме того, будем считать, что символ φ^m определяется равенствами

$$\varphi^0(\zeta) \equiv \zeta, \quad \varphi^{m+1} = \varphi \circ \varphi^m \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

При сделанных предположениях относительно функции справедлива

Теорема 4.1. *Пусть гомотопический класс* $[\Gamma]$, *содержащий кривую* Γ, *имеет вид*

$$\mathfrak{a}_{i_1}^{m_1} \mathfrak{a}_{i_2}^{m_2} \ldots \mathfrak{a}_{i_r}^{m_r}.$$

Тогда результат продолжения голоморфной ветви $F_0(z)$ *функции* $F(z)$ *равен*

$$\left(\tau_{i_1}^{m_1} \circ \tau_{i_2}^{m_2} \circ \ldots \circ \tau_{i_r}^{m_r}\right)(F_0(z))$$

(здесь, как и раньше, числа m_k равны 1 или -1, а индексы i_k принимают значения $1, 2, \ldots, n-1$).

Доказательство. Согласно предположению результат аналитического продолжения голоморфной ветви $F_0(z)$ по кривой $\Gamma \in \mathfrak{a}_k$ равен $\tau_k(F_0(z))$. Отсюда мы без труда выводим, что результат продолжения ветви $F_0(z)$ по кривой $\Gamma_1\Gamma_2$, где $\Gamma_1 \in \mathfrak{a}_k$, а $\Gamma_2 \in \mathfrak{a}_m$, равен

$$\tau_k(\tau_m(F_0(z))) = (\tau_k \circ \tau_m)(F_0(z)).$$

Далее, легко убедиться, что результат продолжения ветви $F_0(z)$ по кривой $\Gamma \in \mathfrak{a}_k^{-1}$ равен $\tau_k^{-1}(F_0(z))$. Действительно, продолжая функцию $\tau_k^{-1}(F_0(z))$ по кривой $\Gamma_1 \in \mathfrak{a}_k$, получаем функцию

$$\tau_k^{-1}(\tau_k(F_0(z))) = F_0(z).$$

Следовательно, продолжение ветви $F_0(z)$ по той же кривой Γ_1 в обратном направлении даст нам функцию $\tau_k^{-1}(F_0(z))$, а кривая Γ_1, проходимая в обратном направлении, принадлежит гомотопическому классу $\mathfrak{a}_k^{-1}$.

Последовательно применяя полученные формулы, приходим к утверждению теоремы.

В теореме 4.1 дается формула для вычисления результата аналитического продолжения исходного элемента функции $F(z)$, аналитической в области D, по произвольной замкнутой кривой Г. Эта формула имеет довольно сложный вид, и без дополнительной информации о функциях $\tau_k(\zeta)$ ее нельзя упростить. Однако в конкретных задачах, когда функции $\tau_k(\zeta)$ довольно просты, эта формула также может быть значительно упрощена. Отметим один довольно общий случай, когда формула теоремы 4.1 принимает совсем простой вид.

Теорема 4.2. *Пусть функция $F(z)$, аналитическая в области D, удовлетворяет всем условиям, наложенным выше, и пусть, кроме того, функции $\tau_k(\zeta)$ обладают тем свойством, что*

$$\tau_k \circ \tau_m = \tau_m \circ \tau_k \qquad (m,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Тогда результат аналитического продолжения ветви $F_0(z)$ по произвольной замкнутой кривой Γ, лежащей в области D, равен

$$\left(\tau_1^{\nu_1} \circ \tau_2^{\nu_2} \circ \ldots \circ \tau_{n-1}^{\nu_{n-1}}\right)(F_0(z)),$$

где

$$\nu_k = \nu(\Gamma,\ \gamma_k).$$

(Напомним, что $\nu(\Gamma,\ \gamma_k)$ — число обходов в положительном направлении компоненты γ_k кривой Г.)

Доказательство. В силу перестановочности функций $\tau_k(\zeta)$ мы можем написать

$$\tau_{i_1}^{m_1} \circ \ldots \circ \tau_{i_r}^{m_r} = \tau_1^{\nu_1} \circ \ldots \circ \tau_{n-1}^{\nu_{n-1}},$$

где

$$\nu_s = \sum_{i_p = s} m_p.$$

Но

$$\nu(C,\ \gamma_k) = \begin{cases} 0, & C \in \mathfrak{a}_m \qquad (m \neq k), \\ 1, & C \in \mathfrak{a}_k. \end{cases}$$

Поэтому

$$\nu(\Gamma,\ \gamma_k) = \sum_{i_p = k} m_p = \nu_k,$$

и теорема доказана. $\square$

Легко видеть, что формулы для значения функций $(\ln z)_\Gamma$ и $(z^\alpha)_\Gamma$ являются частными случаями формулы теоремы 4.2. Действительно, для этих функций область

D — это вся конечная плоскость с выколотой точкой $z = 0$. Взяв в качестве компоненты γ_0 точку $z=\infty$, а в качестве компоненты γ_1 — точку $z=0$, получаем, что $\nu(\Gamma, \gamma_1) = \nu(\Gamma, 0)$. Кроме того, для функции $\ln z$ имеем

$$\tau_1(\zeta) = \zeta + 2\pi i,$$

а для функции z^α

$$\tau_1(\zeta) = \zeta e^{2\pi i\alpha}.$$

В обоих случаях функция $\tau_1(\zeta)$ только одна, так что условие перестановочности бессодержательно. Поэтому, применяя теорему 4.2, мы немедленно получаем формулы

$$(\ln z)_\Gamma = (\ln z) + 2\pi i \cdot \nu(\Gamma, 0),$$
$$(z^\alpha)_\Gamma = (z^\alpha)\exp\{2\pi i\alpha \cdot \nu(\Gamma, 0)\}.$$

Эти формулы несколько отличаются от формул, полученных в § 2, так как теперь мы считаем кривую Γ имеющей и начало, и конец в точке z. $\square$

Рассмотрим несколько более сложных примеров применения формул теорем 4.1 и 4.2.

Пример 1. Рассмотрим функцию $\operatorname{arctg} z$. Мы знаем, что она является функцией, аналитической в области D, представляющей собой расширенную комплексную плоскость с выколотыми точками $z=i$ и $z=-i$ (см. § 3). В качестве компонент γ_0 и γ_1 возьмем точки $z=-i$ и $z = i$ соответственно. Из формулы

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i}\ln\frac{z-i}{-i} - \frac{1}{2i}\ln\frac{z+i}{i}$$

видно, что аналитическое продолжение любого элемента функции $\operatorname{arctg} z$ по достаточно малой окружности $|z-i| = \rho$ (проходимой один раз в положительном направлении) прибавляет к этому элементу слагаемое, равное π. Это означает, что

$$\tau_1(\zeta) = \zeta + \pi, \quad \tau_1^m(\zeta) = \zeta + m\pi.$$

Поэтому теорема 4.2 дает формулу

$$(\operatorname{arctg} z)_\Gamma = (\operatorname{arctg} z) + \pi\nu(\Gamma, \gamma_1),$$

где символом $(\operatorname{arctg} z)$ обозначено *главное значение* аналитической функции $\operatorname{arctg} z$ (обычно под главным значением арктангенса понимают ветвь, голоморфную в комплексной плоскости с разрезом $(-i\infty, -i)$ и $(i, +i\infty)$, отвечающую исходному элементу, совпадающему с главным значением арктангенса на действительной оси). Легко проверить, что $\nu(\Gamma, \gamma_1)=\nu(\Gamma, i)-\nu(\Gamma, -i)$, так как полученную формулу можно записать в виде

$$(\operatorname{arctg} z)_\Gamma=(\operatorname{arctg} z)+\pi(\nu(\Gamma, i)-\nu(\Gamma, -i)).$$

Следующий пример носит более общий характер.

Пример 2. Пусть D — произвольная n-связная область, внешняя компонента которой содержит бесконечно удаленную точку. Возьмем функцию $g(z)$, голоморфную в области D, и точку $a \in D$ и определим исходный элемент аналитической функции $F(z)$ в точке $z=a$ равенством

$$f(z)=\int_a^z g(\zeta)\,d\zeta$$

(путь интегрирования лежит в достаточно малой окрестности точки $z=a$).

Мы знаем (см. § 3, свойство 5), что построенная функция $F(z)$ аналитична в области D. В результате аналитического продолжения любого элемента функции $F(z)$ по замкнутой кривой C мы получаем тот же элемент с добавлением слагаемого

$$\int_C g(\zeta)\,d\zeta.$$

Следовательно,

$$\tau_k(\zeta)=\zeta+A_k \qquad (k=1, 2, \ldots, n-1),$$

где $A_k=\int_C g(\zeta)\,d\zeta \quad (C \in \mathfrak{A}_k)$ (по теореме Коши интеграл не зависит от выбора кривой из гомотопического класса $\mathfrak{A}_k$). Легко видеть, что

$$(\tau_k \circ \tau_m)(\zeta)=(\tau_m \circ \tau_k)(\zeta)=\zeta+A_k+A_m.$$

Поэтому теорема 4.2 применима, и мы получаем, что

$$(F(z))_\Gamma=f(z)+\sum_{k=1}^{n-1} A_k \cdot \nu(\Gamma, \gamma_k).$$

Пример 3. Рассмотрим функцию $\arcsin z$. Мы знаем (см. § 3), что функция $\arcsin z$ является функцией, аналитической в трехсвязной области D, представляющей собой всю конечную плоскость с выколотыми точками $z=1$ и $z=-1$. В качестве компоненты γ_0 возьмем точку $z=\infty$, а в качестве компонент γ_1 и γ_2 — точки $z=1$ и $z=-1$ соответственно. В качестве области D' возьмем комплексную плоскость с разрезами по лучам $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$, а в качестве ветви $F_0(z)$ — *главное значение* арксинуса, представляющее собой голоморфную в области D ветвь $\arcsin z$, отвечающую исходному элементу

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2k+1)\cdot 2^{2k}\cdot (k!)^2} z^{2k+1}.$$

При $-1 \leqslant z \leqslant 1$ этот ряд сходится к главному значению арксинуса (принимающего значения между $-\pi/2$ и $\pi/2$).

Для вычисления функций $\tau_1(\zeta)$ и $\tau_2(\zeta)$ воспользуемся формулой $\arcsin z = \frac{1}{i} \ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$, полученной в конце § 2. Эта формула справедлива и для функции $(\arcsin z)$, если выбрать надлежащие ветви корня и логарифма.

При аналитическом продолжении по достаточно малой окружности $|z-1| = \rho$ (один раз против часовой стрелки) функция $\sqrt{1-z^2}$ умножается на -1, так как $\sqrt{1-z^2} = \sqrt{1+z}\cdot\sqrt{1-z}$, а для функций $\sqrt{1+z}$ и $\sqrt{1-z}$ можно воспользоваться формулами, выведенными в § 2. Поскольку окружность $|z-1| = \rho$ достаточно мала, при обходе точкой z этой окружности точка $iz + \sqrt{1-z^2}$ остается вблизи точки $z = 1$ и потому не обходит точку $z = 0$. Это означает, что выбранную нами голоморфную ветвь логарифма можно считать прежней. Следовательно, в результате аналитического продолжения функции

$$\frac{1}{i} \ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) = (\arcsin z)$$

по достаточно малой окружности $|z-1| = \rho$ (один раз против часовой стрелки) получаем функцию

$$\frac{1}{i} \ln\left(iz - \sqrt{1-z^2}\right) = \frac{1}{i} \ln \frac{\left(iz - \sqrt{1-z^2}\right)\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)}{iz + \sqrt{1-z^2}} =$$

$$= \frac{1}{i} \ln \frac{-1}{iz + \sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{i} \ln(-1) - (\arcsin z),$$

где для $\ln(-1)$ берется одно из возможных значений. Чтобы определить, какое именно значение надо взять для $\ln(-1)$, заметим, что при $z \to 1$ функция $\frac{1}{i} \ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$ имеет предел, не зависящий от способа стремления точки z к 1, если только не выходить из некоторой окрестности точки $z=1$. Поэтому и $(\arcsin z)$ и ветвь, полученная его продолжением по достаточно малой окружности $|z-1|=\rho$, должны иметь одинаковый предел при $z\to 1$. Поскольку $(\arcsin 1)=\frac{\pi}{2}$, получаем, что

$$\lim_{z\to 1}\frac{1}{i}\ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{i}\ln\left(iz-\sqrt{1-z^2}\right)=\frac{\pi}{2},$$

и потому равенство

$$\frac{1}{i}\ln\left(iz-\sqrt{1-z^2}\right)=\frac{1}{i}\ln(-1)-\frac{1}{i}\ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$$

при $z\to 1$ дает, что величина $\frac{1}{i}\ln(-1)$ должна быть равна π.

Таким образом, в результате продолжения функции $(\arcsin z)$ по любой кривой $\Gamma\in\mathfrak{A}_1$ мы получаем функцию $\pi-(\arcsin z)$. Иными словами,

$$\tau_1(\zeta)=\pi-\zeta.$$

С помощью совершенно аналогичных рассуждений находим, что

$$\tau_2(\zeta)=-\pi-\zeta.$$

Нетрудно проверить, что функции τ_1 и τ_2 неперестановочны. Действительно,

$$(\tau_1\circ\tau_2)(\zeta)=\zeta+2\pi,\quad (\tau_2\circ\tau_1)(\zeta)=\zeta-2\pi. \tag{4.1}$$

Нетрудно проверить также, что имеют место соотношения

$$\tau_1^2(\zeta)=\zeta,\qquad \tau_2^2(\zeta)=\zeta. \tag{4.2}$$

С помощью соотношений (4.1) и (4.2) нетрудно вычислить любое выражение вида

$$\tau_{i_1}^{m_1}\circ\tau_{i_2}^{m_2}\circ\ldots\circ\tau_{i_r}^{m_r}, \tag{4.3}$$

где числа m_k равны 1 или -1, а индексы i_k принимают значения 1 или -1. Например, используя соотношения

$$\tau_1^{-1}=\tau_1,\qquad \tau_2^{-1}=\tau_2,$$

вытекающие из равенств (4.2), мы заменяем выражение (4.3) выражением

$$\tau_{i_1}\circ\tau_{i_2}\circ\ldots\circ\tau_{i_r}. \tag{4.4}$$

Далее, опять используя соотношения (4.2), мы вычеркиваем все стоящие рядом пары функций с одинаковыми индексами. В результате таких операций выражение (4.4) (а следовательно, и выражение (4.3)) можно привести к одной из двух форм

$$(\tau_1 \circ \tau_2)^m, \quad \tau_1 \circ (\tau_1 \circ \tau_2)^m.$$

Это означает, в частности, что любой элемент функции $\arcsin z$ можно получить из ее исходного элемента одним из следующих способов:

1. Продолжением по замкнутой кривой $\Gamma \in (\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
2. Продолжением по замкнутой кривой $\Gamma \in \mathfrak{a}_1(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ □

Перейдем теперь к описанию второго способа исследования многозначности. На этот раз на функцию $F(z)$ не будем налагать никаких условий.

Выделим в области D голоморфные ветви

$$F_0(z),\ F_1(z),\ F_2(z),\ \ldots$$

функции $F(z)$, аналитической в области D. С каждым гомотопическим классом $\mathfrak{a} = [\Gamma]$ свяжем подстановку

$$S_{\mathfrak{a}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots \\ k_0 & k_1 & k_2 & \ldots \end{pmatrix},$$

где номер k_s определяется из условия: *при аналитическом продолжении ветви $F_s(z)$ по кривой Γ из гомотопического класса $\mathfrak{a}$ получаем ветвь $F_{k_s}(z)$.*

Легко видеть, что все подстановки $S_{\mathfrak{a}}$ обладают тем свойством, что номера k_s образуют весь натуральный ряд (начиная с нуля) и что среди них нет равных. Для таких подстановок легко определить операцию умножения, положив

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots \\ j_0 & j_1 & j_2 & \ldots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_0 & j_1 & j_2 & \ldots \\ k_0 & k_1 & k_2 & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots \\ k_0 & k_1 & k_2 & \ldots \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что множество подстановок, связанных с каждой функцией $F(z)$, аналитической в области D, образует группу относительно определенной таким образом операции умножения.

Теорема 4.3. *Если гомотопический класс $\mathfrak{a} = [\Gamma]$ имеет вид*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{i_1}^{m_1}\mathfrak{a}_{i_2}^{m_2}\ldots\mathfrak{a}_{i_r}^{m_r},$$

то соответствующая ему подстановка $S_{\mathfrak{a}}$ *имеет вид*

$$S_{\mathfrak{a}} = S_{\mathfrak{a}_{i_1}}^{m_1} S_{\mathfrak{a}_{i_2}}^{m_2} \ldots S_{\mathfrak{a}_{i_r}}^{m_r}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно установить справедливость соотношений

$$S_{\mathfrak{a}_p \mathfrak{a}_s} = S_{\mathfrak{a}_p} S_{\mathfrak{a}_s},$$

а эти соотношения немедленно вытекают из определения подстановки.

Справедливости ради отметим, что во всех конкретных задачах исследование многозначности аналитических функций осуществляется с помощью теоремы 4.1. Теорема 4.3 имеет чисто теоретический интерес.

§ 5. Римановы поверхности

До сих пор мы рассматривали аналитическую функцию как функцию, определенную на множестве, элементами которого являются пары (z, Γ), где z — точка плоскости, а Γ — кривая, идущая в точку z из некоторой фиксированной точки a. Однако множество, на котором определена аналитическая функция, можно представлять и в виде множества точек, только не точек плоскости, а точек некоторой поверхности. При этом поверхность, на которой определяется функция, опять-таки определяется самой функцией, т. е. уже ее исходным элементом. Эти два подхода совершенно эквивалентны, если рассматривать их только как способы придания смысла понятию многозначной функции на комплексной плоскости. Однако если говорить о дальнейшем развитии идей, то мысль рассматривать аналитические функции как функции на поверхности оказалась значительно плодотворнее.

Идея рассматривать многозначную аналитическую функцию как однозначную функцию на поверхности была впервые высказана замечательным немецким математиком Бернгардом Риманом. Поэтому поверхности, на которых определена аналитическая функция, принято называть *римановыми поверхностями*. Развитие идей, связанных с понятием римановой поверхности, не входит в план этой книги. Поэтому ограничимся самыми элементарными фактами, относящимся к этой теме.

Прежде всего попытаемся дать представление о римановой поверхности с помощью простой аналогии.

Возьмем на плоскости (x, y) окружность $x^2+y^2=1$. Как геометрический объект, эта окружность не имеет никаких особых точек. Однако если мы хотим записать уравнение этой окружности в виде $y=f(x)$, то придется использовать многозначную функцию $f(x)=\pm\sqrt{1-x^2}$. Эту функцию мы сможем рассматривать как однозначную, если будем рассматривать ее не как функцию точки отрезка $(-1, 1)$, а как функцию точки кривой, состоящей из этого отрезка, проходимого дважды (на одной половине кривой приписываем корню положительные значения, на другой — отрицательные).

Аналогичное рассуждение можно провести и для многозначных аналитических функций. Пусть дана какая-либо многозначная аналитическая функция $w=F(z)$. Изобразим все ее значения точками в четырехмерном пространстве (z, w). Множество всех точек вида $(z, F(z))$ образует в этом пространстве некоторую двумерную поверхность. Эта поверхность может оказаться вполне хорошим геометрическим объектом и в случае, когда аналитическая функция многозначна. По аналогии с разобранным выше примером кривой на плоскости можно попытаться сделать нашу многозначную функцию однозначной, рассматривая ее не на плоскости, а на некотором множестве, состоящем из многократно проходимых листов плоскости. Из общих соображений естественно ожидать, что это множество окажется поверхностью. Аналогия с разобранным примером позволяет даже предложить некоторый способ получения этой поверхности. Именно, на плоскости мы получили искомую кривую, сплющив окружность по вертикали. В четырехмерном пространстве нам нужно сплющить поверхность, состоящую из точек вида $(z, F(z))$ по двум лишним измерениям. Заметим, что в разобранном примере с окружностью не было особого смысла заниматься сплющиванием этой окружности, так как сама окружность не менее наглядна, чем дважды проходимый отрезок. Сплющивать четырехмерную поверхность уже имеет смысл, так как многократно проходимые листы плоскости можно представить себе (правда, с некоторыми натяжками) как поверхность в трехмерном пространстве. Это дает весьма существенный выигрыш в наглядности.

Грубо говоря, риманова поверхность — это сплющенный «график» аналитической функции.

Точное определение римановой поверхности мы дадим несколько ниже, а сейчас поговорим о конкретном построении римановых поверхностей, исходя из наших приблизительных представлений.

Пусть дана аналитическая в n-связной области D функция $F(z)$. Как и в предыдущем параграфе, обозначим через $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ компоненты границы области D, а через D' — односвязную область, полученную из области D проведением попарно непересекающихся разрезов l_k, идущих от компоненты γ_0 к компоненте γ_k ($k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$).

Как мы видели в предыдущем параграфе, функция $F(z)$ распадается в области D' на голоморфные ветви

$$F_0(z),\ F_1(z),\ F_2(z),\ \ldots$$

Ясно, что римановой поверхностью функции, голоморфной в области D, является экземпляр этой области (каждой точке z отвечает ровно одна точка $(z, F_m(z))$ «графика», так что при сплющивании мы получаем один лист плоскости). С другой стороны, различным голоморфным ветвям должны отвечать различные листы на римановой поверхности функции $F(z)$. Над областью D эти листы образовывали одну поверхность, а над областью D' они представляют собой стопку различных экземпляров области D'. Это происходит потому, что при переходе от области D к области D' мы удаляем из римановой поверхности точки, лежащие над разрезами $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}$. Тогда и наоборот, добавив к стопке экземпляров области D' точки, лежащие над разрезами l_k, мы должны получить из этой стопки риманову поверхность аналитической в области D функции $F(z)$. Добавление точек, лежащих над разрезом l_k, «склеивает» между собой некоторые экземпляры области D' по этому разрезу. Разберемся, какие именно листы нужно склеивать. Ясно, что склеиваемые листы должны представлять собой сплющенные части одного куска «графика» функции $F(z)$. Это означает, что значения функций $F_p(z)$ и $F_q(z)$ на разрезе l_k (по которому мы склеиваем) должны быть одинаковы, если склеиваются листы, отвечающие этим ветвям. Несколько уточним это высказывание, обозначив через l_k^+ край разреза l_k, лежащий справа при движении от γ_0 к γ_k, а через l_k^- — левый край того же разреза. Заметим, что края l_k^+ и l_k^+ (или l_k^- и l_k^-) никогда не склеиваются, ибо совпадение ветвей $F_p(z)$ и $F_q(z)$ на одноименных краях по теореме единственности означало бы тождественное совпадение этих функций (а тогда листы не были бы различными). Поэтому склеиваются лишь разноименные края разреза (т. е. l_k^+ с l_k^-). Подытоживая сказанное, кратко повторим рецепт построения римановой поверхности:

Обозначим через S_p экземпляр области D', отвечающий голоморфной ветви $F_p(z)$. Риманову поверхность функции $F(z)$, аналитической в области D, мы получаем, склеивая между собой листы S_p по разрезам l_k согласно следующему правилу.

Край l_k^+ разреза l_k на листе S_p приклеивается к краю l_k^- разреза l_k на листе S_q, если имеет место равенство

$$F_p(z)\,|_{l_k^+} = F_q(z)\,|_{l_k^-}.$$

Полезно отметить, что склеиваемая таким образом поверхность не вполне однозначно определяется функцией $F(z)$. Причины этого явления будут полностью ясны, когда мы дадим строгое определение понятия римановой поверхности. □

Приведем несколько примеров построения римановых поверхностей с помощью описанного способа.

Пример 1. Функция $\ln z$. В этом случае в качестве области D надо взять всю конечную плоскость с выколотой точкой $z=0$, а в качестве области D' можно взять плоскость с разрезом по отрицательной части действительной оси. Верхний край разреза мы обозначим через l^+, а нижний — через l^-. Тогда

$$F_m(z) = (\ln z) + 2\pi i m \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

(как обычно, через $(\ln z)$ обозначаем главное значение логарифма). Из формулы для главного значения логарифма, выведенной в § 2, легко получаем, что

$$F_m(z)\,|_{l^+} = \ln|z| + (2m+1)\pi i,$$

$$F_m(z)\,|_{l^-} = \ln|z| + (2m-1)\pi i.$$

Следовательно,

$$F_m(z)\,|_{l^+} = F_{m+1}(z)\,|_{l^-}.$$

Поэтому листы S_m экземпляров области D', отвечающие голоморфным ветвям $F_m(z)$, склеиваются следующим образом.

К краю l^+ разреза l на листе S_m приклеивается край l^- разреза l на листе S_{m+1} (здесь $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

В результате такого склеивания мы получаем винтообразную поверхность (см. рис. 4, *а*), называемую *римановой поверхностью логарифма*.

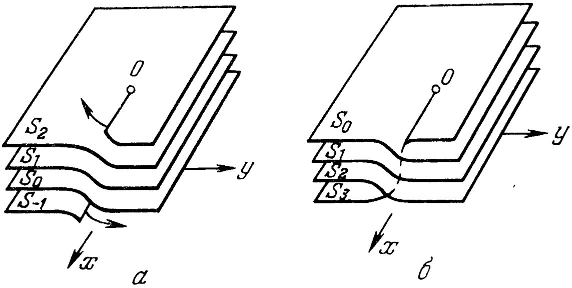

Рис. 4

Ясно, что направление закручивания винтовой поверхности мы можем с равным успехом считать как правым, так и левым.

Пример 2. Функция $\sqrt[n]{z}$. В качестве области D опять надо взять всю конечную плоскость с выколотой точкой $z=0$, а в качестве области D' опять возьмем плоскость с разрезом по отрицательной части действительной оси. Через l^+ обозначаем верхний край разреза l, а через l^- — его нижний край. Тогда

$$F_m(z) = \left(\sqrt[n]{z}\right) \exp\left(2\pi i \frac{m}{n}\right) \qquad (m = 0,1,\ldots, n-1).$$

Поскольку

$$\left(\sqrt[n]{z}\right) = \sqrt[n]{|z|} \exp\left(\frac{1}{n} \arg z\right) \qquad (-\pi < \arg z \leqslant \pi),$$

мы получаем, что

$$F_m(z)|_{l^+} = \sqrt[n]{|z|} \exp\left(\frac{2m+1}{n} \pi i\right),$$

$$F_m(z)|_{l^-} = \sqrt[n]{|z|} \exp\left(\frac{2m-1}{n} \pi i\right).$$

Следовательно,

$$F_m(z)|_{l^+} = F_{m+1}(z)|_{l^-} \qquad (m = 0, 1, \ldots, n-2),$$

$$F_{n-1}(z)|_{l^+} = F_0(z)|_{l^-}.$$

Поэтому листы S_m следует склеить следующим образом. При $m=0, 1, 2, \ldots, n-2$ к краю l^+ разреза l на листе S_m мы приклеиваем край l^- разреза l на листе S_{m+1}. Оставшиеся свободными верхний край разреза l на листе S_{n-1} и нижний край разреза на листе S_0 мы должны склеить между собой.

Заметим, что последнее склеивание не удастся осуществить, не пересекая уже склеенной части поверхности, хотя из общих соображений ясно, что риманова поверхность не может иметь точек самопересечения. Это противоречие кажущееся. Оно объясняется тем, что наша риманова поверхность является поверхностью из четырехмерного пространства. Для наглядности она изображена в трехмерном пространстве, а это не всегда позволяет передать все свойства.

Построенная риманова поверхность называется *римановой поверхностью корня n-й степени* (см. рис. 4, *б*).

Пример 3. Функция

$$F(z)=\int\limits_a^z g(\zeta)\,d\zeta,$$

где функция $g(\zeta)$ голоморфна в двухсвязной области D, внешняя компонента которой содержит точку $\zeta=\infty$, а внутренняя компонента содержит точку $\zeta=0$.

Область D' мы получим из области D, проведя какой-либо разрез l, соединяющий компоненту γ_0 с компонентой γ_1. Согласно примеру 2 § 4 можно написать

$$F_m(z)=F_0(z)+mA \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где величина A равна интегралу от функции $g(\zeta)$ по границе какой-либо односвязной области, содержащей компоненту γ_1 и не содержащей компоненту γ_0. Нетрудно показать, что

$$F_m(z)\,|_{l^+}=F_{m+1}(z)\,|_{l^-},$$

если через l^+ обозначен тот край разреза l, который лежит слева при движении от γ_0 к γ_1. Склеивание листов такое же, как и при склеивании римановой поверхности логарифма. Ясно, что в результате склеивания мы получим поверхность, представляющую собой часть римановой поверхности логарифма, лежащую над областью D.

Пример 4. Функция $\ln\frac{z-a}{z-b}$. Эту риманову поверхность можно было бы строить аналогично предыдущим, но проще воспользоваться несколько иным рассуждением. Функция

$$w = \frac{z-a}{z-b}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками расширенной комплексной плоскости z и расширенной комплексной плоскости w. Она же устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками римановых поверхностей функций $\ln\frac{z-a}{z-b}$ и $\ln w$. Поэтому риманова поверхность функции $\ln\frac{z-a}{z-b}$ отличается от римановой поверхности функции $\ln z$ только тем, что ее точки разветвления находятся не в точках $z=0$ и $z=\infty$, а в точках $z=a$ и $z=b$.

Риманову поверхность функции $\ln\frac{z-a}{z-b}$ мы также будем называть *римановой поверхностью логарифма* (отмечая, если это понадобится, положение точек разветвления).

Аналогичные соображения полностью справедливы и для римановой поверхности функции $\sqrt[n]{\frac{z-a}{z-b}}$, которую будем называть *римановой поверхностью корня n-й степени* (с точками разветвления a и b).

Из формулы $\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz}$ следует, что риманова поверхность функции $\operatorname{arctg} z$ совпадает с римановой поверхностью логарифма (точки ветвления i и $-i$).

Пример 5. Функция $\arcsin z$. На примере римановой поверхности арксинуса покажем, как можно строить римановы поверхности, не выделяя голоморфных ветвей аналитической функции.

В примере 3 § 4 исследовался характер многозначности аналитической функции $\arcsin z$. Мы установили там, что любой элемент функции $\arcsin z$ можно получить или аналитическим продолжением исходного элемента по кривой Г, принадлежащей гомотопическому классу $(\alpha_1\alpha_2)^m$, или аналитическим продолжением по кривой Г, принадлежащей гомотопическому классу $\alpha_1(\alpha_1\alpha_2)^m$. Мы знаем, что исходный элемент функции $\arcsin z$ можно взять в виде

$$(\arcsin z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}},$$

где интегрирование ведется по пути, лежащему в достаточно малой окрестности точки $z=0$, а для корня берется главное значение. Кроме того, в примере 3 § 4 было показано, что в результате аналитического продолжения исходного элемента $(\arcsin z)$ функции $\arcsin z$ по кривой $\Gamma \in \mathfrak{a}_1$ мы приходим к элементу $\pi-(\arcsin z)$. Далее, кривую из гомотопического класса $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^m$ можно считать лежащей в области D^*, представляющей собой плоскость с разрезом по отрезку $(-1, 1)$ действительной оси. Из всего сказанного следует, что аналитическая функция $\arcsin z$ в области D^* распадается на две функции, аналитические в области D^*. Одна из этих функций имеет вид

$$\int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}},$$

а другая —

$$\pi-\int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

(точка $\zeta=0$ считается лежащей на верхнем краю разреза $(-1, 1)$, а корень — имеющим на этом краю положительные значения).

Согласно примеру 3 обе функции имеют своими римановыми поверхностями часть римановой поверхности логарифма, лежащую над областью D^*. Поэтому вся риманова поверхность аналитической функции $\arcsin z$ может быть получена склеиванием двух экземпляров римановой поверхности логарифма с удаленными из нее точками, лежащими над отрезком $(-1, 1)$. Ясно, что склеивать нужно по разрезу, лежащему над отрезком $(-1, 1)$. Для наглядности, при склеивании нужно взять римановы поверхности логарифма закручивающимися в противоположных направлениях. $\square$

Римановы поверхности можно рассматривать как способ наглядного представления характера многозначности аналитической функции. Этот способ хорошо дополняет алгебраический метод исследования характера многозначности, изложенный в § 4, но отнюдь не заменяет его. Более того, когда функция довольно сложна, сама наглядность римановой поверхности весьма призрачна.

Плодотворность идеи римановой поверхности вовсе не в облегчении исследования характера многозначности, а в том, что она породила теорию аналитических функций на поверхностях. К сожалению, теория аналитических функций на римановых поверхностях выходит за рамки этой книги.

Перейдем теперь к строгому определению понятия римановой поверхности аналитической функции.

Сначала сделаем одно замечание, уводящее в несколько другую сторону. Именно, заметим, что для функции, аналитической в данной области D, можно было бы формально определить точку поверхности как пару (z, Γ), где z — точка области D, а Γ — кривая, идущая в точку z из фиксированной точки a. Мы получили бы некоторую область определения аналитической функции, если бы договорились считать две пары (z, Γ_1) и (z, Γ_2) совпадающими в том и только в том случае, когда кривые Γ_1 и Γ_2 гомотопны в области D. Без особого труда можно было бы показать, что определенная таким образом риманова поверхность действительно будет поверхностью в смысле определения § 8 гл. I. Не будем останавливаться на этом способе определения римановой поверхности, так как дадим сейчас более простое определение, пригодное не только для функций, аналитических в области.

Пусть дана аналитическая функция $F(z)$, определяемая исходным элементом $f_a(z)$. Точкой P римановой поверхности мы назовем пару $(\zeta, f_\zeta(z))$, где ζ — точка плоскости, а $f_\zeta(z)$ — какой-либо элемент нашей аналитической функции $F(z)$ в этой точке. Две пары $(\zeta, f_\zeta(z))$ и $(\zeta, f_\zeta^*(z))$ будем считать определяющими одну и ту же точку римановой поверхности в том и только в том случае, когда элементы $f_\zeta(z)$ и $f_\zeta^*(z)$ эквивалентны, т. е. совпадают в некоторой окрестности точки $z=\zeta$.

Нужно показать, что определенное таким образом множество точек можно рассматривать как поверхность. Для этой цели надо прежде всего ввести в этом множестве топологию (см. § 8 гл. I), задав систему окрестностей $\{U_\alpha\}$.

Пусть $P=(c, f_c(z))$ — точка римановой поверхности S аналитической функции $F(z)$. Элемент $f_c(z)$ является голоморфной функцией переменной z в любой достаточно малой окрестности $U_{c,\varepsilon}$ точки c, и его можно рассматривать как элемент аналитической функции $F(z)$ в любой из точек этой окрестности.

Множество точек $Q=(\zeta, f_\zeta(z))$, где $\zeta \in U_{c,\varepsilon}$, назовем *окрестностью* $U_{P,\varepsilon}$ *точки* P *римановой поверхности* S.

Систему окрестностей $\{U_\alpha\}$ будем считать состоящей из всех достаточно малых окрестностей всех точек римановой поверхности S.

Легко проверить, что заданная таким способом топология превращает риманову поверхность S в хаусдорфово топологическое пространство. Нетрудно убедиться, что непрерывной кривой на римановой поверхности S является функция, аналитическая на кривой Γ и обладающая тем свойством, что хотя бы один элемент этой функции совпадает с элементом нашей аналитической функции. Согласно определению аналитической функции любые две точки римановой поверхности S можно соединить непрерывной кривой. Тем самым доказано, что риманова поверхность S является областью.

Легко доказывается также, что окрестность $U_{P,\varepsilon}$ точки P римановой поверхности S гомеоморфна окрестности $U_{c,\varepsilon}$ точки c, т. е. кругу на плоскости.

Таким образом, риманова поверхность S действительно является поверхностью в смысле определения § 8 гл. I.

Точку ζ комплексной плоскости мы будем называть *проекцией точки* $(\zeta, f_\zeta(z))$ *римановой поверхности* S, а отображение

$$(\zeta, f_\zeta(z)) \xrightarrow{\pi} \zeta$$

— *проектированием* римановой поверхности S на комплексную плоскость. Отображение проектирования π осуществляет гомеоморфизм каждой окрестности $U_{P,\varepsilon}$ на окрестность $U_{c,\varepsilon}$. В терминах, которые использовались в § 8 гл. I, это означает, что отображение π_α окрестности U_α на круг плоскости для любой окрестности U_α совпадает с отображением проектирования π. Отсюда следует, что отображение $\chi_{\alpha\beta}=\pi_\alpha \circ \pi_\beta^{-1}$ (определенное для пересечения окрестностей U_α и U_β) является тождественным отображением. Следовательно:

Риманова поверхность аналитической функции всегда является ориентируемой поверхностью (см. § 8 гл. I).

В заключение скажем еще несколько слов о понятии римановой поверхности, не связанном с заданием какой-либо аналитической функции.

Поверхность S, у которой можно выбрать систему окрестностей таким образом, чтобы все отображения $\chi_{\alpha\beta}$

были тождественными отображениями, называется поверхностью, *накрывающей* комплексную плоскость. Мы показали, что каждой аналитической функции отвечает некоторая накрывающая комплексную плоскость поверхность S. Оказывается (это довольно глубокий и довольно трудно доказываемый факт), что для каждой поверхности, накрывающей плоскость, существует аналитическая функция, для которой заданная поверхность будет ее римановой поверхностью.

Если мы откажемся от тождественности отображений $\chi_{\alpha\beta}$, но потребуем, чтобы эти отображения всегда осуществлялись голоморфными функциями, то мы придем к общему понятию римановой поверхности. На любой общей римановой поверхности можно определить понятие голоморфной функции как функции, голоморфной от локальной переменной. Действительно, при переходе от одной локальной переменной к другой в силу сделанного предположения функция остается голоморфной.

С теорией римановых поверхностей, накрывающих поверхностей и с теорией голоморфных функций на этих поверхностях можно подробнее познакомиться по книгам [32] и [37].

Глава IV

ОСОБЫЕ ТОЧКИ И РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯДЫ

Степень сложности строения аналитической функции определяется ее особыми точками — точками потери голоморфности. В этой главе мы обсудим общее понятие особой точки, а затем исследуем поведение функций с наиболее простыми особыми точками. В этом исследовании будут демонстрироваться возможности использования основных теорем, полученных в гл. II.

§ 1. Понятие особой точки

Начнем с общего определения особой точки аналитической функции, хотя это определение довольно тяжеловесно, а само понятие во всей его общности используется довольно редко.

Пусть дана аналитическая функция $F(z)$, порожденная исходным элементом $f_a(z)$ в точке $z=a$, и пара (ζ, L), где ζ — некоторая точка расширенной комплексной плоскости, а L — кривая, идущая из точки a в точку ζ. Будем говорить, что пара (ζ, L) определяет *особую точку аналитической функции* $F(z)$, если исходный элемент $f_a(z)$ можно аналитически продолжить по кривой L в любую ее точку, кроме ее конца ζ.

Чтобы завершить определение, надо еще ответить на вопрос, когда две пары (ζ, L) и (ζ, L') определяют одну и ту же особую точку? Эта часть определения наиболее сложна.

Для произвольной кривой Γ будем обозначать символом Γ_ξ часть кривой Γ, заключенную между ее началом и некоторой точкой $\xi \in \Gamma$.

Две пары (ζ, L) и (ζ, L') будем считать определяющими *одну и ту же особую точку аналитической функции* $F(z)$, если для любых двух точек $\xi \in L$ и $\xi' \in L$ выполняется следующее условие.

Элементы $f_\xi(z)$ и $f_{\xi'}(z)$, полученные в результате аналитического продолжения исходного элемента $f_a(z)$ по кривым L_ξ и $L'_{\xi'}$ соответственно, можно аналитически продолжить друг в друга по некоторой кривой, лежащей в любой окрестности точки ζ, содержащей точки ξ и ξ'. (Сущность условия в том, что когда точки ξ и ξ' выбираются близко к точке ζ, окрестность можно выбирать очень малой.)

Про каждую особую точку, определяемую парой (ζ, L), будем говорить, что она *лежит над точкой* ζ.

Если любая пара (ζ, L) описанного выше вида определяет особую точку аналитической функции $F(z)$, и притом одну и ту же, будем говорить, что аналитическая функция $F(z)$ имеет *особую точку* ζ.

Немного ниже будет приведен пример, показывающий, что над данной точкой ζ может лежать много различных особых точек. Более того, некоторые пары (ζ, L) могут определять особые точки, а другие могут не определять (т. е. для них исходный элемент можно аналитически продолжить на всю кривую L).

Прежде чем переходить к рассмотрению примеров, мы приведем один простой достаточный признак, позволяющий во многих случаях установить, что пара (ζ, L) определяет особую точку аналитической функции $F(z)$.

Теорема 1.1. *Пусть $\Phi(z)$ — функция, аналитическая на кривой L, за исключением, быть может, ее конца ζ, порожденная элементом $f_a(z)$, заданным в начале этой кривой. Если*

$$\varlimsup_{\substack{\xi\to\zeta\\ \xi\in L}} |\Phi(\xi)| = \infty, \tag{1.1}$$

то пара (ζ, L) определяет особую точку аналитической функции, порожденной исходным элементом $f_a(z)$.

Доказательство. Нужно доказать, что из условия (1.1) вытекает невозможность аналитического продолжения функции $\Phi(z)$ в конечную точку кривой L (по этой кривой). Но если бы такое продолжение было возможно, мы, очевидно, имели бы равенство

$$\lim_{\substack{\xi\to\zeta\\ \xi\in L}} \Phi(\xi) = \Phi(\zeta),$$

которое противоречило бы условию (1.1).

Замечание 1. Доказанную теорему можно немного усилить, заменив условие (1.1) условием

$$\varlimsup_{\substack{\xi\to\zeta\\ \xi\in L}} |\Phi^{(k)}(\xi)| = \infty. \tag{1.1*}$$

где k — произвольное фиксированное целое число. Действительно, из аналитичности на кривой L функции $\Phi(z)$ вытекает аналитичность на этой кривой и всех ее производных.

Замечание 2. При исследовании пары (∞, L) для функции $F(z)$ часто бывает удобнее сделать замену $z=\frac{1}{w}$ и исследовать пару $(0, L')$ для функции $F_1(w)= = F\left(\frac{1}{w}\right)$.

В качестве первого примера мы исследуем особые точки одной из наиболее простых элементарных функций.

Пример 1. Рассмотрим функцию z^α, где α — действительное число.

Нам придется несколько по-разному исследовать функцию z^α при целых и при нецелых значениях показателя α.

При целых α имеются три возможности $\alpha=0$, $\alpha<0$ и $\alpha>0$. Случай $\alpha=0$ тривиален — функция $z^0=1$ голоморфна во всей расширенной комплексной плоскости. При целом отрицательном α функция z^α голоморфна во всей расширенной плоскости, за исключением точки $z= =0$. При $z\to 0$ имеем, очевидно, $z^\alpha\to\infty$. Следовательно, любая пара $(0, L)$ определяет особую точку. В силу однозначности функции z^α (при целом α) все пары определяют одну и ту же особую точку. Совершенно аналогично при целом положительном α функция z^α голоморфна во всей конечной плоскости, а все пары (∞, L) определяют одну и ту же особую точку.

Пусть теперь α — не целое число. Тогда можно написать

$$\frac{d^k}{dz^k} z^\alpha = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)z^{\alpha-k}.$$

Выбирая $k>\alpha$ и вспоминая, что $|z^{\alpha-k}|=|z|^{\alpha-k}$ (см. § 2 гл. III), видим, что

$$\left|\frac{d}{dz^k} z^\alpha\right|\to\infty \quad (z\to 0).$$

Согласно замечанию 1 к теореме 1.1 это означает, что каждая пара $(0, L)$ определяет особую точку функции z^α.

Покажем, что любые две пары определяют одну особую точку. С этой целью выберем произвольные точки $\xi_1\in L_1$ и $\xi_2\in L_2$ и обозначим через $f_1(z)$ и $f_2(z)$ элементы аналитической функции z^α в этих точках (элемент $f_1(z)$ считаем полученным из исходного элемента продолжением по отрезку кривой L_1, а элемент $f_2(z)$ — продолжением по отрезку кривой L_2). Согласно определению мы должны показать, что элементы $f_1(z)$ и $f_2(z)$ можно получить друг из друга аналитическим продолжением по некоторой кривой C, лежащей в любом круге $|\zeta| < R$, содержащем точки ξ_1 и ξ_2.

Мы знаем (см. § 2 гл. III), что любой элемент аналитической функции z^α можно аналитически продолжить по любой кривой, лежащей в области D_0 (вся конечная плоскость с выколотой точкой $z = 0$). Кроме того, мы знаем, что любые два элемента аналитической функции z^α можно получить друг из друга аналитическим продолжением по некоторой кривой Г, лежащей в области D_0, причем, согласно теореме о монодромии (теорема 1.2 гл. III), кривую Г можно заменить любой кривой, гомотопной ей в области D_0. Среди таких гомотопных кривых всегда найдется такая кривая, которая лежит в любом круге $|\zeta| < R$, если только этот круг содержит точки ξ_1 и ξ_2.

Тем самым доказано, что любые две пары $(0, L_1)$ и $(0, L_2)$ определяют одну и ту же особую точку функции z^α.

При исследовании точки $z = \infty$ удобнее всего воспользоваться замечанием 2 к теореме 1.1. Тогда это исследование сведется к уже проведенному исследованию точки $w = 0$ для функции $w^{-\alpha}$.

Подытоживая все сказанное выше, получаем:

При целых значениях $\alpha \neq 0$ *функция* z^α *имеет во всей расширенной плоскости одну особую точку* ($z = 0$ при $\alpha < 0$ и $z = \infty$ при $\alpha > 0$).

При нецелых значениях α *функция* z^α *имеет две особые точки* $z = 0$ *и* $z = \infty$.

Последнее утверждение остается в силе и для любых α с отличной от нуля мнимой частью, правда, доказательство этого факта несколько более громоздко. □

Совершенно аналогичными рассуждениями можно показать также, что:

Функция $\ln z$ *имеет во всей расширенной плоскости две особые точки* $z = 0$ *и* $z = \infty$.

Функция $\operatorname{arctg} z$ *имеет во всей расширенной плоскости две особые точки* $z = i$ *и* $z = -i$. □

Приведем теперь простой пример, когда над одной точкой плоскости лежит много различных особых точек аналитической функции (и даже есть не особые точки).

Пример 2. Рассмотрим аналитическую функцию, заданную в окрестности точки $z=1$ исходным элементом

$$f(z)=1-\frac{z-1}{2}+\frac{(z-1)^2}{3}-\ldots$$

Легко видеть, что эта функция равна $\frac{\ln z}{z-1}$. С помощью тех же рассуждений, что и в предыдущем примере, мы легко докажем, что точки $z=0$ и $z=\infty$ являются особыми точками этой аналитической функции (для функции $\ln z$ это верно, а умножение на однозначную функцию $\frac{1}{z-1}$, голоморфную в точках $z=0$ и $z=\infty$, не может ничего изменить). С особыми точками, расположенными над точкой $z=1$, дело обстоит иначе, что видно хотя бы из того, что исходный элемент голоморфен в точке $z=1$. В достаточно малой окрестности точки $z=1$ рассматриваемая аналитическая функция распадается на однозначные ветви

$$\frac{(\ln z)+2\pi i n}{z-1}=f(z)+\frac{2\pi i n}{z-1}.$$

Эти ветви нельзя получить друг из друга аналитическим продолжением по кривой, лежащей в достаточно малой окрестности точки $z=1$, так что каждой такой ветви отвечает своя особая точка, лежащая над точкой $z=1$ (ветви с $n=0$ отвечает точка голоморфности). Основываясь на этом соображении, легко описать пары $(1, L)$, определяющие одну и ту же особую точку:

Две пары $(1, L_1)$ и $(1, L_2)$, где $L_{1,2}$ — кривые с началом и концом в точке $z=1$, не проходящие через точки $z=0$ и $z=\infty$, определяют одну и ту же особую точку тогда и только тогда, когда эти кривые гомотопны между собой в области D_0, представляющей собой всю конечную плоскость с выколотой точкой $z=0$ (и не гомотопны нулю в области D_0).

Наибольшие осложнения с понятием особой точки связаны с многозначностью аналитической функции. При исследовании особых точек аналитических функций лучше выделять голоморфные ветви и исследовать их особые точки (правда, в некоторых случаях приходится выделять и многозначные ветви). В связи с этим дадим еще и более прозрачное определение особой точки голоморфной функции. Ясно, что особой точкой голоморфной функции может быть только точка границы области голоморфности. Поэтому для определения особой точки голоморфной функции придется ввести сначала одно вспомогательное понятие.

Пусть ζ — граничная точка области D, а L — простая кривая, лежащая в D, за исключением ее конца ζ. Совокупность (ζ, L) точки ζ и ведущей в нее кривой L назовем *достижимой граничной точкой области* D.

Пересечение области D с кругом $|z-\zeta|<\rho$ может распадаться на несколько связных частей. Если кривые L_1 и L_2, кончающиеся в точке ζ, таковы, что их части, лежащие в круге $|z-\zeta|<\rho$, попадают в одну и ту же связную часть упомянутого пересечения (при всех достаточно малых ρ), то будем считать достижимые граничные точки (ζ, L_1) *и* (ζ, L_2) *совпадающими.* $\square$

Если область D ограничена *простой* кусочно гладкой замкнутой кривой, то при достаточно малых ρ пересечение области D с кругом $|z-\zeta|<\rho$ состоит из одной связной части. Для таких областей нет разницы между достижимой граничной точкой и точкой границы.

Легко проверить, что для областей, ограниченных кусочно гладкими кривыми со складками, достижимые граничные точки области соответствуют уже не точкам границы области, а точкам граничной кривой. Иными словами, для областей с разрезами точки на разных сторонах разреза отвечают различным достижимым граничным точкам. $\square$

Достижимую граничную точку (ζ, L) области D мы назовем *особой точкой функции* $f(z)$, голоморфной в области D, если функцию $f(z)$ нельзя аналитически продолжить в точку ζ вдоль пути L.

Чтобы оправдать данное определение, убедимся, что возможность аналитического продолжения не зависит от выбора кривой L (определяющей данную достижимую граничную точку). В самом деле, если функцию $f(z)$ можно продолжить по пути L в точку ζ, то существует функция $f_1(z)$, голоморфная в круге $|z-\zeta|<\rho$ и совпадающая с $f(z)$ на L. По принципу аналитического продолжения $f_1(z)=f(z)$ и во всей той связной части пересечения области D с кругом $|z-\zeta|<\rho$, в которую попадает L. Следовательно, функцию $f(z)$ можно аналитически продолжить в точку ζ и по любому другому пути, лежащему в той же связной части.

Заметим, что теорема 1.1 пригодна и для отыскания особых точек голоморфной функции.

Приведем пример, показывающий, что для областей с разрезами из двух достижимых точек, отвечающих одной и той же точке разреза, одна может быть особой точкой, а другая может и не быть.

Пример 3. Пусть D — плоскость z с разрезом по отрицательной части действительной оси, $f(z)=\dfrac{1}{1+i\sqrt{z}}$ (для $\sqrt{z}$ берем главное значение). Выясним, какие достижимые граничные точки области D являются особыми точками функции $f(z)$.

Каждый достаточно малый круг $|z+x|<\rho$, $0<x<<\infty$, делится разрезом по отрицательной части действительной оси на две половины — верхнюю и нижнюю. Значит, каждой точке разреза $(-\infty, 0)$, кроме его концов, отвечают две достижимые граничные точки области D (сверху и снизу). Поэтому для краткости мы будем говорить о точках на верхнем и на нижнем крае разреза, а слово «достижимая» будем опускать.

Мы знаем (см. пример 1), что функцию $\sqrt{z}$ нельзя аналитически продолжить ни по какому пути в точки $z=0$ и $z=\infty$. Поскольку $\sqrt{z}=\frac{1}{i}\left(\frac{1}{f(z)}-1\right)$ и $f(0)=1\neq 0$, то, продолжив функцию $f(z)$ в точку $z=0$, мы продолжили бы в точку $z=0$ и $\sqrt{z}$, что невозможно. Следовательно, точка $z=0$ является особой точкой функции $f(z)$.

Далее, функцию $1+i\sqrt{z}$ можно аналитически продолжить по любому пути, не проходящему через точки $z=0$ и $z=\infty$, в частности и через точки разреза. Поэтому функцию $f(z)=\dfrac{1}{1+i\sqrt{z}}$ можно аналитически продолжить через все те точки, в которых $1+i\sqrt{z}$ не обращается в нуль. В точке $z=-x$ на верхнем крае разреза функция $\sqrt{z}$ принимает значение $i\sqrt{x}$, а на нижнем крае — значение $-i\sqrt{x}$. Следовательно, функцию $f(z)$ можно аналитически продолжить через все точки разреза, за исключением, быть может, точки $z=-1$ на его верхнем крае. Эта точка является особой точкой, так как $f(z)\to\infty$ при приближении к этой точке. $\square$

Пусть функция $F(z)$ голоморфна в каком-либо круге, скажем, в круге $|z| < R$. По теореме 3.2* гл. II функция $F(z)$ разлагается в ряд Тейлора

$$F(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n z^n, \qquad c_n = \frac{1}{n!} F^{(n)}(0),$$

сходящийся в этом круге. Этот ряд имеет определенный радиус сходимости R_0, который можно определить по коэффициентам c_n с помощью формулы Коши — Адамара $\frac{1}{R_0} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$ (см. § 3 гл. I). Теорема 3.2* гл. II дает неравенство $R \leqslant R_0$. Естественно возникает желание выяснить, с какими свойствами суммы ряда связана величина радиуса сходимости.

Теорема 1.2. *На окружности круга сходимости степенного ряда лежит хотя бы одна особая точка его суммы.*

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что имеем дело с рядом вида $\sum_{0}^{\infty} c_n z^n$ и что его радиус сходимости равен единице. В круге сходимости $|z| < 1$ сумма ряда (обозначим ее $f(z)$) голоморфна. Каждая точка окружности $|z| = 1$ является достижимой граничной точкой. Обозначим через $\rho(\varphi)$ верхнюю грань тех значений ρ, для которых функцию $f(z)$ можно аналитически продолжить в круг $|z - e^{i\varphi}| < \rho$. Ясно, что $\rho(\varphi_0) = 0$ в том и только в том случае, когда точка $z = e^{i\varphi_0}$ является особой точкой функции $f(z)$.

Заметим, что круг $|z - a| < r$ содержит круг $|z - b| < r - |a - b|$. Полагая $a = e^{i\varphi_1}$, $b = e^{i\varphi_2}$, $r = \rho(\varphi_1)$, получаем неравенство

$$\rho(\varphi_2) \geqslant \rho(\varphi_1) - |e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2}|.$$

Но φ_1 и φ_2 можно поменять местами, что даст неравенство

$$\rho(\varphi_1) \geqslant \rho(\varphi_2) - |e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2}|.$$

Из этих двух неравенств находим

$$|\rho(\varphi_1) - \rho(\varphi_2)| \leqslant 2\left|\sin\frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{2}\right|.$$

Последнее неравенство показывает, что $\rho(\varphi)$ — непрерывная функция. Обозначим $\rho_0 = \min\limits_{\varphi} \rho(\varphi)$. Функцию $f(z)$, можно аналитически продолжить в круг $|z| < 1 + \rho_0$, и аналитическое продолжение будет голоморфной в этом круге функцией. Ряд для нее совпадает с рядом для $f(z)$, но по теореме 3.2* он обязан сходиться в круге $|z| < 1 + \rho_0$. В силу определения радиуса сходимости (для нашего ряда радиус сходимости — единица) имеем $\rho_0 = 0$. Непрерывная функция $\rho(\varphi)$ обязана принимать свое минимальное значение, так что найдется такое φ_0, что $\rho(\varphi_0) = 0$. Следовательно, точка $z = e^{i\varphi_0}$ — особая точка $f(z)$. Теорема доказана.

Доказанную теорему иногда удобнее использовать в другой формулировке:

Радиус сходимости ряда Тейлора

$$F(z) = \sum_0^\infty c_n (z - a)^n$$

равен расстоянию от точки а до ближайшей особой точки $F(z)$. $\square$

Обратим теперь внимание на следующую задачу:

Пусть нам даны функция $f(z)$, голоморфная в некоторой области, и достижимая граничная точка этой области. Нужно определить, является ли эта точка особой точкой функции $f(z)$.

Эта задача очень сложна, и о ее решении в общем виде говорить не приходится. Речь идет о простых достаточных признаках. Довольно многие математики занимались этой задачей для случая, когда функция $f(z)$ задана степенным рядом, а условия нужно записать через коэффициенты ряда. Приведем три наиболее красивых результата (без доказательств)*).

Теорема Принсгейма. *Если* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = 1$ *и* $\operatorname{Re} c_n \geqslant 0$, *то сумма ряда* $\sum\limits_0^\infty c_n z^n$ *имеет точку* $z = 1$ *особой точкой.*

Теорема Фабри. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{c_{n+1}} = 1$, *то сумма ряда* $\sum\limits_0^\infty c_n z^n$ *имеет* $z = 1$ *особой точкой.*

*) Доказательства этих теорем (и многих других) можно найти в [2].

Теорема Полиа. *Если* $0<\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[\lambda_n]{|c_n|}=1$, *а* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=\sigma$, *то ряд* $\sum\limits_0^\infty c_n z^{\lambda_n}$ *имеет хотя бы одну особую точку на любой дуге окружности* $|z|=1$ *длины, большей* $2\pi\sigma$.

(Стоит посмотреть, что получается из утверждения теоремы Полиа при $\sigma=1$ и при $\sigma=0$.)

В связи с упомянутыми теоремами приведем один пример степенного ряда, для которого все точки его окружности сходимости будут особыми точками.

Пример 4. Покажем, что все точки окружности $|z|=1$ являются особыми точками суммы ряда $f(z)=$ $=\sum\limits_0^\infty z^{2^n}$.

Сначала убедимся, что точка $z=1$ является особой точкой функции $f(z)$. Для этой цели применим теорему 1.2, взяв в качестве L радиус $(0, 1)$ и положив $k=0$. Тогда

$$\overline{\lim_{x\to 1-0}}\, f(x)\geqslant \lim_{x\to 1-0}\sum_0^N x^{2^n}=N+1,$$

а поскольку N произвольно, то интересующий нас предел равен бесконечности, т. е. точка $z=1$ является особой точкой (z).

Далее, заметим, что функция $f(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению $f(z)=z+f(z^2)$. Поскольку точка $z=1$ является особой точкой функции $f(z)$, то для функции $f(z^2)$ будут особыми те точки, в которых $z^2=1$. Но в силу функционального уравнения эти точки обязаны быть особыми точками и для функции $f(z)$. Продолжая это рассуждение, приходим к выводу, что все точки, в которых $z^{2^k}=1$ (при каком-либо целом k), обязаны быть особыми точками функции $f(z)$. Эти точки образуют всюду плотное множество точек на окружности $|z|=1$, а очевидно, что точки, предельные для особых точек,— тоже особые точки. Следовательно, все точки окружности $|z|=1$ — особые точки функции $f(z)$. □

Подчеркнем, что теорема 1.1 дает лишь достаточное условие, отнюдь не являющееся необходимым. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим функцию $f(z)=\sum\limits_0^\infty e^{-\sqrt{n}}z^n$.

Она непрерывна в круге $|z| \leqslant 1$ со всеми своими производными. Тем не менее на окружности $|z| = 1$ эта функция обязана иметь хотя бы одну особую точку, так как радиус сходимости ряда равен единице. (Из теоремы Принсгейма или из теоремы Фабри сразу видно, что особой точкой является точка $z = 1$.) Методами, с которыми мы познакомимся в гл. VI, эту функцию можно аналитически продолжить и исследовать особую точку подробнее.

§ 2. Стирание особенностей

Перейдем к задаче, до некоторой степени противоположной той задаче, о которой мы говорили в конце предыдущего параграфа.

Пусть дана достижимая граничная точка (ζ, L) области D. Найти простые достаточные условия для того, чтобы (ζ, L) не была особой точкой функции $f(z)$, голоморфной в области D.

Эту задачу приходится решать, когда представление голоморфной функции дано какой-либо формулой и формула перестает представлять функцию в отдельных точках. Рассмотрим один типичный пример такого рода.

Пример 1. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ голоморфны в окрестности точки $z = a$, причем $f(a) = g(a) = 0$, а $g'(a) \neq 0$. Покажем, что функцию $\varphi(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ можно аналитически продолжить в точку $z = a$.

Формула $\varphi(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$, определяющая функцию $\varphi(z)$, перестает быть пригодной в точке $z = a$, так как числитель и знаменатель обращаются в нуль. Чтобы исправить формулу, напишем

$$f(z) = f(a) + (z - a) f'(a) + \ldots = (z - a) f_1(z),$$

$$g(z) = g(a) + (z - a) g'(a) + \ldots = (z - a) g_1(z).$$

Ясно, что функции $f_1(z)$ и $g_1(z)$ голоморфны в точке $z = a$ (напомним, что $f(a) = g(a) = 0$), причем $g_1(a) = g'(a) \neq 0$. При $z \neq a$ имеем

$$\varphi(z) = \frac{(z - a) f_1(z)}{(z - a) g_1(z)} = \frac{f_1(z)}{g_1(z)},$$

и эта формула пригодна уже и в самой точке $z=a$, так как знаменатель не обращается в нуль в этой точке. Таким образом, эта формула дает аналитическое продолжение функции $\varphi(z)$ в точку $z=a$. При этом, очевидно,

$$\varphi(a)=\frac{f_1(a)}{g_1(a)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Заметим, что до исследования каждую достижимую граничную точку области голоморфности можно подозревать в том, что она является особой точкой. Поэтому выполнение аналитического продолжения в граничную точку можно назвать устранением особой точки или стиранием особенности. $\square$

Теорема 2.1. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D_0, получающейся из области D удалением точки $a\in D$. Если*

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0}\varepsilon M(\varepsilon)=0, \qquad M(\varepsilon)=\max_{|z-a|=\varepsilon}|f(z)|, \tag{2.1}$$

то $f(z)$ можно аналитически продолжить в точку $z=a$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что область D ограничена простой замкнутой кривой C и что $f(z)$ непрерывна в $\overline{D}$, за исключением точки $z=a$. Возьмем число $\varepsilon>0$ столь малым, чтобы круг $|z-a|\leqslant\varepsilon$ лежал внутри D, и обозначим через D_ε область, полученную удалением из D этого круга, а через C_ε — границу D_ε. Поскольку функция $f(z)$ голоморфна в D и непрерывна вплоть до ее границы, интегральная формула Коши дает нам

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} \qquad (z\in D_\varepsilon)$$

или

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-a|=\varepsilon}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} \qquad (z\in D_\varepsilon). \tag{2.2}$$

Выберем в этой формуле $\varepsilon=\varepsilon_k$ так, чтобы $\varepsilon_k M(\varepsilon_k)\to 0$ при $k\to\infty$ (это возможно в силу условия (2.1)). Поскольку модуль интеграла по окружности $|\zeta-a|=\varepsilon_k$

не превосходит величины $2\pi\varepsilon_k M(\varepsilon_k)\frac{1}{|z-a|-\varepsilon_k}$, то, переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \qquad (z \in D_0).$$

Интеграл в правой части равенства согласно следствию 1 теоремы 4.3 гл. II является функцией, голоморфной в области D. Так как $f(z)$ совпадает с этим интегралом при $z \in D_0$, то мы получили искомое аналитическое продолжение. Теорема доказана.

Пример функции $f(z) = \frac{1}{z-a}$ показывает, что условие (2.1) нельзя заменить более слабым. □

Следующая теорема говорит о стирании особенностей на кривой.

Теорема 2.2. *Если функция $f(z)$ непрерывна в области D и голоморфна в каждой точке этой области, отличной от точек простой спрямляемой кривой L, то функция $f(z)$ голоморфна и во всей области D.*

Доказательство. В силу теоремы Морера (теорема 4.1 гл. II) достаточно доказать, что интеграл от $f(z)$ по границе любого многоугольника, лежащего в области D, равен нулю.

Пусть G — любой многоугольник, лежащий в D, Γ — его граница. Кривая L разбивает G на счетное число частей G_n с границами Γ_n. Сумма длин Γ_n конечна — она не превосходит суммы длины Γ с удвоенной длиной L. Интеграл по Γ равен сумме интегралов по Γ_n (см. замечание к теореме 5.4 гл. I). В областях G_n функция $f(z)$ голоморфна (они не содержат точек L) и непрерывна в $\overline{G}_n$. По теореме Коши интегралы от $f(z)$ по Γ_n равны нулю. Следовательно, равен нулю и интеграл от $f(z)$ по Γ. Теорема доказана.

Заметим, что условие непрерывности $f(z)$ в точках кривой L нельзя заменить условием ограниченности $f(z)$ в области D (а на L допустить разрывы), как показывает пример функции $f = \sqrt{z}$, голоморфной и ограниченной в круге $|z| < 1$ с разрезом по радиусу $(0, 1)$, но не голоморфной во всем круге $|z| < 1$. □

Есть и другая разновидность теорем о стирании особенностей. В них утверждается, что при выполнении условий теоремы функция не только аналитически продолжается, но и является постоянной или многочленом. Следующий результат такого рода обычно называется *теоремой Лиувилля.*

Теорема 2.3. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна во всей конечной плоскости. Если*

$$\lim_{\overline{R\to\infty}} \frac{M(R)}{R^n} = 0, \qquad M(R) = \max_{|z|=R} |f(z)|,$$

то $f(z)$ — многочлен степени не выше $n-1$.

Доказательство. По формуле для высших производных голоморфной функции (см. § 3 гл. II) имеем

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \qquad (|z| < R).$$

Согласно условию теоремы имеется последовательность R_k такая, что $M(R_k) = o\left(R_k^n\right)$ $(k\to\infty)$. Поэтому, оценивая модуль интеграла произведением максимума модуля подынтегральной функции на длину пути интегрирования, получаем

$$|f^{(n)}(z)| = o\left(R_k^n\right) \frac{R_k}{(R_k - |z|)^{n+1}} = o(1) \qquad (R_k \to \infty).$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$, находим $f^{(n)}(z) = 0$. Поскольку z — любая точка плоскости, $f^{(n)}(z) \equiv 0$. Следовательно, $f(z)$ является многочленом степени не выше $n-1$, и теорема доказана.

Из доказанной теоремы можно сделать вывод, что аналитическая функция тем сложнее, чем больше у нее особых точек и чем быстрее она растет при приближении к этим особым точкам. Единственная функция, не имеющая особенностей (в том числе и в бесконечности),— это тождественная постоянная.

Докажем еще одну теорему того же характера.

Теорема 2.4. *Пусть любой элемент аналитической функции $F(z)$ можно аналитически продолжить по любому пути, не проходящему через точки $z=0$ и $z=\infty$. Если при этом значения всех элементов $F(z)$ ограничены одной и той же постоянной, то $F(z)$ — тождественная постоянная.*

Доказательство. Рассмотрим аналитическую функцию $f(z) = F(e^z)$. Поскольку e^z не обращается ни в нуль, ни в бесконечность ни при каких конечных значениях z, то любой элемент аналитической функции $f(z)$ можно аналитически продолжить по любому конечному пути. Вся конечная плоскость является односвязной областью, так что согласно теореме о монодромии функция $f(z)$, аналитическая во всей конечной плоскости, голоморфна во всей конечной плоскости. Кроме того, из условий теоремы следует, что $f(z)$ ограничена. Согласно теореме Лиувилля она обязана быть тождественной постоянной. Следовательно, и $F(z)$ — тождественная постоянная. Теорема доказана.

Интересно заметить, что теорема неверна, если допустить, что кроме точек $z=0$ и $z=\infty$ аналитическая функция $F(z)$ имеет еще одну особую точку. Пример ограниченной многозначной аналитической функции, имеющей три особые точки, мы приведем в гл. IX.

§ 3. Изолированные особые точки

Наиболее важным классом особых точек являются так называемые *изолированные особые точки*. Все элементарные функции, да и подавляющее большинство специальных функций, имеют только такие особенности. Изолированными особыми точками называются и точки однозначного и точки многозначного характера.

Если функция $f(z)$ голоморфна в некотором кольце

$$0<|z-a|<r$$

и точка $z=a$ является особой точкой функции $f(z)$, то будем говорить, что точка $z=a$ является *изолированной особой точкой однозначного характера для функции* $f(z)$.

Изолированную особую точку однозначного характера $z=a$ назовем *полюсом*, если $f(z)\to\infty$ при $z\to a$; в противном случае точку $z=a$ назовем *существенно особой точкой*.

Полюсы являются очень простыми особыми точками. Во многих вопросах можно не различать полюсы от точек голоморфности. Причина этого в следующем их свойстве.

Теорема 3.1. *Пусть функция $f(z)$ имеет полюс в точке $z=a$, а функция $F(w)$ голоморфна в точке $w=\infty$. Тогда функция $\varphi(z)=F(f(z))$ голоморфна в точке $z=a$. Если же функция $F(w)$ имеет полюс в точке $w=\infty$, то функция $\varphi(z)$ также имеет полюс в точке $z=a$.*

Доказательство. Достаточно доказать лишь первое утверждение. Без ограничения общности можно считать, что $a \neq \infty$. Поскольку функция $f(z)$ имеет в точке $z=a$ полюс, то она голоморфна в некотором кольце $0 < |z-a| < r$, а значения, принимаемые ею в этом кольце, лежат вне круга $|w| \leqslant R(r)$, причем $R(r) \to \infty$ при $r \to 0$. При достаточно малом r область $|w| > R(r)$ попадает в область голоморфности функции $F(w)$. Следовательно, функция $\varphi(z)$ голоморфна в кольце $0 < |z-a| < r_0$ при достаточно малом r_0. Так как $f(z) \to \infty$ при $z \to a$, то $\varphi(z) \to F(\infty)$. Обозначая

$$M(\varepsilon) = \max_{|z-a|=\varepsilon} |\varphi(z)|,$$

видим, что $M(\varepsilon) \to |F(\infty)|$ $(\varepsilon \to 0)$, т. е. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon M(\varepsilon) = 0$. Поэтому согласно теореме 2.1 функцию $\varphi(z)$ можно аналитически продолжить в точку $z=a$. Теорема доказана.

Следствие. *Если функция $f(z)$ имеет в точке $z=a$ полюс, то функция $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ голоморфна в точке $z=a$ и $g(a)=0$.* □

Пусть n — целое положительное число.

Точка $z=a$ $(a \neq \infty)$ называется *нулем кратности n* (или *нулем порядка n*) функции $f(z)$, если $f(z)$ можно представить в виде $f(z)=(z-a)^n f_1(z)$, где функция $f_1(z)$ голоморфна в точке $z=a$ и $f_1(a) \neq 0$.

Точка $z=\infty$ называется *нулем кратности n* (или *нулем порядка n*) функции $f(z)$, если $f(z)$ можно представить в виде $f(z)=z^{-n} f_1(z)$, где функция $f_1(z)$ голоморфна в точке $z=\infty$ и $f_1(\infty) \neq 0$.

Кратностью (или *порядком*) *полюса* функции $f(z)$ в точке $z=a$ называется кратность нуля функции $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ в этой точке. Нули и полюсы первого порядка называют *простыми*.

Из определения порядка нуля видно, что полюс порядка n можно рассматривать как нуль отрицательного порядка $-n$.

Если $a \neq \infty$, то имеется удобный критерий для определения порядка нуля в точке $z=a$:

Пусть $f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0$, а $f^{(n)}(a) \neq 0$. Тогда точка $z=a$ является нулем кратности n функции $f(z)$ (голоморфной в точке $z=a$).

Этот критерий читатель легко докажет сам. □

Предоставим читателю доказать и следующее очевидное утверждение, на которое будем часто ссылаться:

Лемма. *Если функции $f(z)$ и $g(z)$ голоморфны в точке $z=a$, то функция $F(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ или голоморфна в точке $z=a$, или имеет в ней полюс.* □

Приведем еще один часто используемый термин.

Функция, голоморфная в любой замкнутой части области D, за исключением конечного числа полюсов (они могут накапливаться к границе D), называется *мероморфной в области D* функцией. □

Перейдем к существенно особым точкам. Напомним, что существенно особые точки — это изолированные особые точки однозначного характера, не являющиеся полюсами. Из такого определения сразу видно лишь одно: если $z=a$ — существенно особая точка функции $f(z)$, то $f(z)$ не стремится к бесконечности при $z\to a$. Это совсем не означает, что $f(z)$ ограничена в окрестности точки a.

Теорема 3.2. *Пусть точка $z=a$ является существенно особой точкой функции $f(z)$. Обозначим*

$$M(\varepsilon)=\max_{|z-a|=\varepsilon}|f(z)|.$$

Тогда при любом k

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^k M(\varepsilon)=\infty.$$

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдется такое k, что

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^k M(\varepsilon)<\infty.$$

Возьмем любое целое число $m>k$ и обозначим

$$g(z)=(z-a)^m f(z),\qquad M_g(\varepsilon)=\max_{|z-a|=\varepsilon}|g(z)|.$$

Ясно, что функция $g(z)$ голоморфна в кольце $0<|z-a|<r$ и

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0}\varepsilon M_g(\varepsilon)=\varliminf_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{m+1}M(\varepsilon)=0.$$

По теореме 2.1 функция $g(z)$ голоморфна в точке $z=a$, а следовательно, и функция $f(z)=\frac{g(z)}{(z-a)^m}$ согласно лемме имеет в точке $z=a$ полюс (или голоморфна), что противоречит условию. Полученное противоречие доказывает теорему.

Таким образом, функция $f(z)$, имеющая точку $z=a$ своей существенно особой точкой, обязана стремиться к бесконечности по некоторому множеству, имеющему точку $z=a$ своей предельной точкой и пересекаемому каждой окружностью $|z-a|=\varepsilon$. Однако это стремление к бесконечности не будет равномерным по всей окрестности точки $z=a$, как в случае полюса. Типичный пример — точка $z=\infty$ для функции e^z.

Поведение функции в окрестности существенно особой точки может быть очень сложным. Исследованием вопросов, связанных с функциями, имеющими существенно особые точки, занимается специальный раздел теории аналитических функций — теория целых функций. $\square$

Очень близки по своим свойствам к существенно особым точкам особые точки, предельные для полюсов.

Если функция $f(z)$ мероморфна в кольце $0<|z-a|<r$ и в любой окрестности точки $z=a$ имеет бесконечно много полюсов, то точка $z=a$ называется особой точкой функции $f(z)$, *предельной для полюсов.* $\square$

Следующий результат носит название *теоремы Сохоцкого.*

Теорема 3.3. *Если точка $z=a$ является существенно особой точкой функции $f(z)$ или предельной точкой для полюсов функции $f(z)$, то в любой окрестности точки $z=a$ функция $f(z)$ принимает значения, сколь угодно близкие к любому числу A.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся такие числа $\delta>0$, $\rho>0$ и A, что $|f(z)-A|>\delta$ при всех z, удовлетворяющих условию $|z-a|<\rho$. Тогда функция $g(z)=\dfrac{1}{f(z)-A}$ голоморфна и ограничена в кольце $0<|z-a|<\rho$. По теореме 2.1 функция $g(z)$ голоморфна в круге $|z-a|<\rho$, но

$$f(z)=A+\frac{1}{g(z)}.$$

Из леммы получаем, что функция $f(z)$ имеет в точке $z=a$ полюс (или голоморфна). Это противоречит условию, что $z=a$ — существенно особая точка или точка, предельная для полюсов. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

Перейдем к изолированным особым точкам многозначного характера. Они называются еще изолированными точками ветвления.

Пусть $F(z)$ — функция, аналитическая в каком-либо кольце $0 < |z-a| < r$. Если $F(z)$ не является функцией, голоморфной в этом кольце (т. е. если $F(z)$ многозначна), то мы будем говорить, что точка $z = a$ является *изолированной точкой ветвления.*

Если число различных элементов $F(z)$ в каждой точке кольца $0 < |z-a| < r$ конечно и равно n, то изолированная точка ветвления $z = a$ называется *точкой ветвления порядка n.* Если число различных элементов $F(z)$ в каждой точке кольца бесконечно, то изолированная точка ветвления называется *логарифмической точкой ветвления.*

Исследование точек ветвления конечного порядка сводится к исследованию изолированных особых точек однозначного характера с помощью следующей теоремы:

Теорема 3.4. *Пусть $F(z)$ — аналитическая функция в кольце $r < |z-a| < R$. Если в каждой точке кольца $F(z)$ имеет n различных элементов, то $F(z) = \varphi(\sqrt[n]{z-a})$, где $\varphi(\zeta)$ — функция, голоморфная в кольце $\sqrt[n]{r} < |\zeta| < \sqrt[n]{R}$.*

Доказательство. Проведем в кольце $r < |z-a| < R$ разрез по какому-либо радиусу. Тогда аналитическая в кольце функция $F(z)$ распадется на n голоморфных ветвей

$$F_1(z), \ldots, F_n(z).$$

Занумеруем эти ветви так, чтобы при аналитическом продолжении через разрез справа налево переходили $F_k(z)$ в $F_{k+1}(z)$ (при $1 \leqslant k \leqslant n-1$). Тогда $F_n(z)$ при этом продолжении обязана перейти в $F_1(z)$.

Рассмотрим теперь функцию $\varphi(\zeta) = F(a + \zeta^n)$. Она является аналитической функцией в кольце $\sqrt[n]{r} < |\zeta| < \sqrt[n]{R}$, так как любой точке ζ из этого кольца отвечает точка $z = a + \zeta^n$, лежащая в кольце $r < |z-a| < R$. Мы хотим доказать, что функция $\varphi(\zeta)$ голоморфна в своем кольце. Для этого нужно убедиться, что аналитическое продолжение любого элемента $\varphi(\zeta)$ по любому замкнутому пути, лежащему в кольце, приводит к прежнему элементу. Согласно теореме 3.2 гл. III результат продолжения по двум замкнутым кривым, выходящим из точки ζ_0, один и тот же, если эти две кривые одно и то же число раз обходят дырку кольца в положительном направлении. Поэтому мы можем продолжать по тем замкнутым кривым, по которым удобнее. Проще всего продолжать по окружности $|\zeta| = |\zeta_0|$. Выясним, как ведет себя точка $z = a + \zeta^n$, когда точка ζ обходит окружность $|\zeta| = |\zeta_0|$ в положительном направлении. Положим $\zeta = |\zeta_0| e^{i\theta}$. При обходе θ монотонно возрастает от нуля до 2π. При этом $z - a = |\zeta_0|^n e^{in\theta}$. Когда θ монотонно возрастает от нуля до 2π, точка z обходит окружность $|z - a| = |\zeta_0|^n$ в положительном направлении n раз. Таким образом, один обход точкой ζ окружности $|\zeta| = |\zeta_0|$ означает n обходов точкой z окружности $|z - a| = |\zeta_0|^n$. Но мы знаем, что после n обходов точкой z окружности $|z - a| = \rho$ элемент функции $F(z)$ возвращается к прежнему значению. Следовательно, элемент функции $\varphi(\zeta)$ возвращается к прежнему значению после первого же обхода. Это означает однозначность, а следовательно, и голоморфность функции $\varphi(\zeta)$ в ее кольце.

Теорема доказана. $\square$

Если $z = a$ — точка ветвления порядка n для аналитической в кольце $0 < |z - a| < r$ функции $F(z)$ и если функция $\varphi(\zeta) = F(a + \zeta^n)$ голоморфна в точке $\zeta = 0$ или имеет в ней полюс, то точка $z = a$ называется *алгебраической особой точкой* аналитической в кольце функции $F(z)$.

Это название объясняется тем, что алгебраические функции, т. е. корни многочленов, коэффициенты которых — рациональные функции, имеют только алгебраические особые точки. $\square$

Обсудим особые точки элементарных функций.

Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ голоморфны во всей конечной плоскости. Точка $z = \infty$ является для этих функций существенно особой точкой. Действительно, ни одна из этих функций не стремится к ∞ при $z \to \infty$ ($\sin z$ и $\cos z$ ограничены на действительной оси, e^z — на мнимой оси).

Функции $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\sec z$, $\operatorname{cosec} z$ мероморфны во всей конечной плоскости, так как они являются отношением функций, голоморфных во всей конечной плоскости. Точка $z = \infty$ — предельная точка полюсов этих функций.

Функция $\ln z$ имеет точки $z = 0$ и $z = \infty$ логарифмическими точками ветвления.

Функция $\sqrt[n]{z}$ имеет точки $z=0$ и $z=\infty$ точками ветвления порядка n.

Вообще, функция z^α при действительном рациональном α имеет точки $z=0$ и $z=\infty$ точками ветвления конечного порядка, а при всех прочих значениях α — логарифмическими точками ветвления.

Функция $\operatorname{arctg} z$ имеет точки $z=i$ и $z=-i$ логарифмическими точками ветвления (см. пример 2 § 2 гл. III).

Наиболее сложно устроенным множеством особых точек среди основных элементарных функций обладает функция $\arcsin z$. Она имеет две логарифмические точки ветвления над точкой ∞ (одна отвечает ветви $\frac{1}{i}\ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$, а другая — ветви с другим знаком корня в области $|z|>R>1$); над каждой из точек $z=1$ и $z=-1$ функция $\arcsin z$ имеет бесконечно много точек ветвления второго порядка (отвечающих ветвям $\frac{1}{i}\ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)+2\pi n$ в окрестности каждой из этих точек).

Гамма-функция Эйлера $\Gamma(z)$ мероморфна во всей конечной плоскости. Точка $z=\infty$ — предельная точка полюсов (см. пример 2 § 5 гл. II).

§ 4. Вычеты и ряд Лорана

Первой задачей, послужившей причиной возникновения теории аналитических функций как отдельной ветви анализа, была задача о вычислении интеграла по замкнутому контуру от функции, голоморфной внутри этого контура, за исключением конечного числа полюсов. На этой задаче в полной мере проявились выгоды от рассмотрения свойств голоморфных функций, с помощью которых сложный процесс вычисления интеграла удалось свести к нахождению так называемых вычетов. Вычеты в свою очередь вычислялись просто дифференцированием. По этой причине стали внимательно изучать приемы сведения различных задач к контурному интегрированию. Совокупность этих приемов получила название *теории вычетов*. □

Прежде чем определить понятие вычета, докажем одну несложную лемму.

Лемма 1. *Если функция $F(z)$ голоморфна в кольце*
$$r < |z-a| < R,$$
то интеграл
$$\int\limits_{|z-a|=\rho} F(z)\,dz, \quad r < \rho < R,$$
не зависит от ρ.

Доказательство. Пусть $r < \rho_1 < \rho_2 < R$. Разность интегралов от $F(z)$ по окружностям $|z-a| = \rho_1$ и $|z-a| = \rho_2$ можно рассматривать как интеграл от $F(z)$ по границе кольца, заключенного между этими двумя окружностями. Согласно теореме Коши этот интеграл равен нулю, так как это кольцо лежит внутри кольца голоморфности функции $F(z)$. Лемма доказана. $\square$

Теперь можно дать определение вычета.

Пусть функция $f(z)$ имеет точку $z=a$ изолированной особой точкой однозначного характера (или голоморфна в точке $z=a$). При конечном a *вычетом функции* $f(z)$ *в точке* $z=a$ называется величина *)
$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{\pi i 2} \int\limits_{|z-a|=\rho} f(z)\,dz$$
(ρ — любое достаточно малое положительное число). При $a=\infty$
$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=R} f(z)\,dz$$
(R — любое достаточно большое положительное число).

Независимость интегралов от ρ (или R) следует из леммы 1. Если $a \neq \infty$ и функция $f(z)$ голоморфна в точке $z=a$, то по теореме Коши $\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = 0$. Однако вычет в бесконечно удаленной точке может оказаться отличным от нуля и для функции, голоморфной в бесконечности $\left(\text{пример } f(z) = \frac{1}{z}\right)$.

Определение вычета нетрудно видоизменить таким образом, чтобы оно не ставило точку $z=\infty$ в исключительное положение:

Вычетом функции $f(z)$ *в точке* $z=a$ назовем интеграл от $f(z)$ по границе любой достаточно малой окрест-

*) Обозначение res происходит от французского слова *résidu* — остаток.

ности точки $z = a$, деленный на $2\pi i$. (Функция $f(z)$ предполагается голоморфной в некоторой окрестности точки $z = a$ кроме, быть может, самой точки $z = a$.)

Эквивалентность этих двух определений становится сразу ясна, если вспомнить, что мы договорились направление интегрирования по границе области выбирать так, чтобы область оставалась слева, а окружность $|z| = R$ считаем границей круга $|z| < R$ (если не оговорено противное). $\square$

Следующее утверждение называется *теоремой о вычетах.*

Теорема 4.1. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D и непрерывна вплоть до ее границы, за исключением конечного числа точек $z_k \in D$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), являющихся изолированными особыми точками однозначного характера. Тогда* (C — граница области D)

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

(Предполагается, что точка $z = \infty$ не лежит на границе D. Если точка $z = \infty$ лежит внутри D, то она должна быть включена в число точек z_k.)

Доказательство. Обозначим через $G_\varepsilon(z_k)$ круг $|z - z_k| < \varepsilon$ при $z_k \neq \infty$ и множество $|z| > \frac{1}{\varepsilon}$ при $z_k = \infty$, а через $\Gamma_k = \Gamma_{k,\varepsilon}$ — границу $G_\varepsilon(z_k)$. Согласно определению вычета при достаточно малых ε имеем

$$\int_{\Gamma_k} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{4.1}$$

Выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы все круги $G_\varepsilon(z_k)$ не имели попарно общих точек и лежали в области D. Далее, обозначим через D_ε область, полученную из D удалением всех наших кругов $G_\varepsilon(z_k)$. Область D_ε конечна, и функция $f(z)$ голоморфна в D_ε и непрерывна вплоть до ее границы. По теореме Коши интеграл от $f(z)$ по границе D_ε равен нулю. Но граница области D_ε состоит из границы области D и из границ областей $G_\varepsilon(z_k)$, проходимых в противоположном направлении. Следовательно,

$$\int_C f(z)\,dz - \sum_{1}^{n} \int_{\Gamma_k} f(z)\,dz = 0.$$

Принимая во внимание (4.1), получаем утверждение теоремы. □

Таким образом, задача о вычислении интеграла сводится к задаче о нахождении вычетов. Сейчас мы покажем, что если все особые точки $f(z)$ — полюсы, то нахождение вычетов легко сводится к дифференцированию.

Теорема 4.2 *Пусть* $F(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$, *где функции* $f(z)$ *и* $g(z)$ *голоморфны в точке* $z=a$, *причем* $g(z)$ *имеет в точке* $z=a$ *нуль порядка* n. *Тогда*

$$\operatorname*{res}_{z=a} F(z)=\lim_{z\to a}\left\{\frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-a)^n F(z)\right]\right\}.$$

Доказательство. Поскольку функция $g(z)$ имеет в точке $z=a$ нуль порядка n, ее можно представить в виде $g(z)=(z-a)^n g_1(z)$, где $g_1(a)\neq 0$. Следовательно, $F(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$, где функция $\varphi(z)=\frac{f(z)}{g_1(z)}$ голоморфна в точке $z=a$. Согласно определению вычета

$$\operatorname*{res}_{z=a} F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=\rho} F(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=\rho}\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}\,dz,$$

а последний интеграл равен $\frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(a)$ согласно формуле для высших производных (см. § 3 гл. II). Так как $\varphi(z)=(z-a)^n F(z)$ при $z\neq a$, то приходим к утверждению теоремы.

Замечание. Если функция $g(z)$ имеет в точке $z=a$ нуль первого порядка, то формула для вычета приобретает особенно простой вид:

$$\operatorname*{res}_{z=a}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f(a)}{g'(a)}.$$

Полученная формула непригодна для нахождения вычета в бесконечно удаленной точке. Непригодна она и для случая, когда $z=a$ — существенно особая точка функции $F(z)$. В этих случаях для нахождения вычета используется разложение в *ряд Лорана*. Впрочем, разложение в ряд Лорана часто удобно применять и для нахождения вычета в полюсе, находящемся на конечном расстоянии. □

Сначала придется доказать общую теорему о разложении функции в ряд Лорана.

Теорема 4.3. *Произвольная функция $f(z)$, голоморфная в кольце $r < |z-a| < R$, разлагается в ряд*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=\rho} f(z)(z-a)^{-n-1}\, dz \qquad (r < \rho < R),$$

равномерно сходящийся по z в любом внутреннем кольце.

Доказательство. Пусть $r_1 \leqslant |z-a| \leqslant R_1$, $r_1 > r$, $R_1 < R$. Возьмем $r < r_2 < r_1$, $R_1 < R_2 < R$, и обозначим через C границу кольца $r_2 < |\zeta - a| < R_2$. Согласно интегральной формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} \qquad (r_2 < |z-a| < R_2),$$

или

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-a|=R_2} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-a|=r_2} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}. \qquad (4.2)$$

Ряды

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} \qquad (|\zeta - a| = R_2, \qquad |z-a| \leqslant R_1)$$

и

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{0}^{\infty} \frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}} \qquad (|\zeta - a| = r_2, \qquad |z-a| \geqslant r_1)$$

равномерно сходятся по z и ζ при условиях, указанных в скобках. Подставляя первый ряд в первый интеграл формулы (4.2), второй ряд — во второй интеграл и интегрируя почленно, получаем

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{0}^{\infty} c_n' (z-a)^{-n-1},$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = R_2} f(\zeta)(\zeta - a)^{-n-1}\, d\zeta,$$

$$c_n' = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = r_2} f(\zeta)(\zeta - a)^{n}\, d\zeta.$$

Объединим обе суммы в одну, положив $c_n' = c_{-n-1}$. Интегралы в формулах для коэффициентов согласно лемме 1 можно брать по любой окружности $|\zeta - a| = \rho$, $r < \rho < R$. Теорема доказана. □

Если точка $z = a$ является изолированной особой точкой однозначного характера для функции $f(z)$, то $f(z)$ голоморфна в некотором кольце $0 < |z - a| < r$ и ее можно разложить в ряд Лорана, сходящийся в этом кольце. Этот ряд называется *рядом Лорана для функции* $f(z)$ *в окрестности точки* $z = a$.

Рядом Лорана для функции $f(z)$ *в окрестности бесконечно удаленной точки* называется ряд

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n \qquad (R < |z| < \infty).$$

Ряд Лорана составлен из двух рядов, аналогичных ряду Тейлора: один по степеням $z - a$, другой по степеням $\frac{1}{z-a}$. □

Если мы имеем ряд Лорана для функции $f(z)$ в окрестности конечной точки

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \qquad (0 < |z - a| < r),$$

то ряды

$$\sum_{-\infty}^{-1} c_n (z - a)^n \quad (|z - a| > 0), \qquad \sum_{0}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (|z - a| < r)$$

называются, соответственно, *главной частью* и голоморфной *частью ряда Лорана* для $f(z)$ в окрестности точки $z = a$.

Для ряда Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки *главной частью* называется часть ряда, состоящая из членов с положительными степенями z.

Главная часть ряда Лорана для функции $f(z)$ в окрестности точки $z = a$ — это простейшая функция, имеющая в точке $z=a$ ту же особенность, что и $f(z)$. Главная часть голоморфна во всей плоскости кроме точки $z=a$, а разность между $f(z)$ и главной частью голоморфна в точке $z=a$. $\square$

Применение разложения в ряд Лорана к нахождению вычетов основано на следующей теореме:

Теорема 4.4. *Если $z=a$ $(a\neq\infty)$ — изолированная особая точка однозначного характера для функции $f(z)$, а $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ — разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=a$, то*

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = c_{-1}.$$

Если $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$ — разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

Доказательство. Пусть $a\neq\infty$. Интегрируя почленно, находим

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=\rho} f(z)\,dz = \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{c_n}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=\rho}(z-a)^n\,dz.$$

Для вычисления интегралов, стоящих под знаком суммы, полагаем $z=a+\rho e^{i\theta}$, $0\leqslant\theta<2\pi$. Тогда $dz=i\rho e^{i\theta}$, и мы получаем

$$\int\limits_{|z-a|=\rho}(z-a)^n\,dz = i\rho^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}\,d\theta.$$

Последний интеграл равен нулю при $n\neq-1$ и 2π при $n=-1$. Следовательно, из всей суммы остается одно слагаемое, и мы приходим к утверждению теоремы. Случай $a=\infty$ исследуется совершенно аналогично. $\square$

Если бы разложение в ряд Лорана можно было бы производить лишь с помощью формул для коэффициентов, то теорема 4.4 не давала бы способа найти вычет. Однако разложение функций в ряд Лорана можно получать из посторонних соображений, например при помощи различных действий над рядами Тейлора. При этом приходится опираться на следующее утверждение:

Если два ряда $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ *и* $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n$, *равномерно сходящиеся на окружности* $|z-a|=\rho$, *сходятся к одной и той же сумме, то все коэффициенты этих рядов совпадают.*

Действительно, взяв разность этих рядов, получим

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (a_n - b_n)(z-a)^n = 0 \qquad (|z-a|=\rho).$$

Умножая это равенство на $(z-a)^{-m-1}$ и интегрируя почленно, в силу тех же соображений, что и при доказательстве теоремы 4.4, приходим к равенству $a_m - b_m = 0$. □

Часто изолированные особые точки однозначного характера классифицируются по свойствам разложения функции в ряд Лорана в окрестности этих точек. Предоставляем читателю самостоятельно доказать следующее утверждение, позволяющее перейти к этой классификации:

Для того чтобы точка $z=a$ *была полюсом* $f(z)$, *необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана в окрестности точки* $z=a$ *для функции* $f(z)$ *была отлична от нуля и состояла из конечного числа членов.*

§ 5. Разложение мероморфной функции в ряд простейших дробей

Уже говорилось, что теория вычетов — это совокупность приемов, используемых для сведения различного рода задач к контурному интегрированию. В дальнейшем изложению этих приемов будет посвящена целая глава, а сейчас ограничимся демонстрацией лишь одного из них.

Рассмотрим задачу разложения функции, мероморфной во всей конечной плоскости, в ряд простейших дробей. Эта задача имеет два аспекта. Первый аспект — это выяснение возможности построения функции, мероморфной во всей конечной плоскости (или даже в некоторой области) и имеющей в заданных точках полюсы с заданными главными частями ряда Лорана (в окрестности этих точек). Для решения этого вопроса теория вычетов не нужна. Второй аспект состоит в отыскании разложения в ряд дробей данной мероморфной функции. Решение этого вопроса даст новые формулы для многих элементарных функций. Им мы и будем заниматься.

Пусть $P(z)$ — правильная рациональная функция (степень числителя меньше степени знаменателя). В анализе доказывается, что такую рациональную функцию можно представить в виде суммы простейших дробей, т. е. дробей вида

$$\frac{A_{m,k}}{(z-a_k)^m}.$$

Числа a_k являются нулями знаменателя этой рациональной функции.

Если воспользоваться терминологией, введенной в предыдущем параграфе, то такое разложение имеет очень простой смысл. Каждый нуль знаменателя является полюсом рациональной функции. Разложим ее в ряд Лорана в окрестности этого полюса и возьмем главную часть этого разложения, обозначив ее $G(z;\, a_k)$. Имеем

$$G(z;\, a_k) = \sum_{m=1}^{m_k} \frac{A_{m,k}}{(z-a_k)^m}.$$

Разложение рациональной функции $P(z)$ на простейшие дроби означает, что

$$P(z) = \sum_{k=1}^{n} G(z;\, a_k).$$

Покажем, что это утверждение можно перенести и на многие функции, мероморфные во всей плоскости. Чтобы стало ясно, каким условием нужно заменить условие правильности рациональной функции, заметим, что правильная рациональная функция стремится к нулю при $z \to \infty$.

Теорема 5.1. *Пусть функция $f(z)$ мероморфна во всей конечной плоскости, точки $z = a_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — ее полюсы, $G(z;\, a_k)$ — главные части $f(z)$ в полюсах $z = a_k$. Если существует такая последовательность $r_\nu \to +\infty$, для которой*

$$M(r_\nu) \to 0 \quad (\nu \to \infty), \qquad M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

то

$$f(z) = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{|a_k|<r_\nu} G(z;\, a_k).$$

Стремление к пределу равномерно в любой конечной области, не содержащей точек a_k.

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$I_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r_\nu} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} \qquad (|z| < r_\nu).$$

Оценивая модуль интеграла произведением максимума модуля подынтегральной функции на длину пути интегрирования, получаем

$$|I_\nu(z)| \leqslant \frac{r_\nu}{r_\nu - |z|} \cdot M(r_\nu),$$

откуда видно, что $I_\nu(z) \to 0$ при $\nu \to \infty$ равномерно по z в любой конечной области.

С другой стороны, интеграл $I_\nu(z)$ можно вычислить с помощью теоремы о вычетах. Подынтегральная функция имеет в круге $|\zeta| < r_\nu$ полюсы в точках $\zeta = a_k$ (при $|a_k| < r_\nu$) и еще в точке $\zeta = z$, так что

$$I_\nu(z) = \operatorname*{res}_{\zeta=z} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \sum_{|a_k|<r_\nu} \operatorname*{res}_{\zeta=a_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Очевидно, что вычет в точке $\zeta = z$ равен $f(z)$ при $z \neq a_k$. Найдем вычеты в точках $\zeta = a_k$. Имеем

$$\operatorname*{res}_{\zeta=a_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \operatorname*{res}_{\zeta=a_k} \frac{G(\zeta; a_k)}{\zeta - z} \qquad (z \neq a_k),$$

так как по определению главной части разность $f(\zeta) - G(\zeta, a_k)$ голоморфна в точке $\zeta = a_k$. Чтобы найти последний вычет, рассмотрим интеграл

$$U_R(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=R} G(\zeta; a_k) \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

при достаточно большом R (настолько большом, чтобы точки $\zeta = a_k$ и $\zeta = z$ оказались обе внутри круга $|\zeta| < R$). Поскольку при $\zeta \to \infty$ имеем

$$G(\zeta; a_k) = O\left(\frac{1}{\zeta}\right), \qquad \frac{1}{\zeta - z} = O\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

то, оценивая модуль интеграла $U_R(z)$ произведением максимума модуля подынтегральной функции на длину пути интегрирования, получаем, что $U_R(z) = O\left(\frac{1}{R}\right) \to 0$ $(R \to \infty)$.

С другой стороны, по теореме о вычетах

$$U_R(z) = \operatorname*{res}_{\zeta=z} \frac{G(\zeta; a_k)}{\zeta - z} + \operatorname*{res}_{\zeta=a_k} \frac{G(\zeta; a_k)}{\zeta - z} = G(z; a_k) + \operatorname*{res}_{\zeta=a_k} \frac{G(\zeta; a_k)}{\zeta - z}$$

и величина, стоящая в правой части равенства, не зависит от R. Следовательно, $U_R(z) = 0$ при достаточно больших R и

$$\operatorname*{res}_{\zeta=a_k} \frac{G(\zeta;\, a_k)}{\zeta - z} = -G(z,\, a_k) \qquad (z \neq a_k).$$

Таким образом,

$$I_\nu(z) = f(z) - \sum_{|a_k|<r_\nu} G(z;\, a_k) \qquad (z \neq a_k,\ |z| < r_\nu).$$

Поскольку мы показали, что $I_\nu(z) \to 0$ при $\nu \to \infty$ равномерно по z в любой конечной области, теорема доказана.

Доказанную теорему можно обобщить и на случай, когда $f(z)$ не стремится к нулю на последовательности окружностей $|z| = r_\nu$, а растет не быстрее некоторой степени $|z|$. Этого мы делать не будем, ограничившись рассмотрением одного конкретного примера.

Пример 1. Разложим в ряд простейших дробей $\operatorname{ctg} z$. Поведение функции $\operatorname{ctg} z$ при больших z исследовалось в п. 4 § 6 гл. II. Там мы выяснили, что функция $\operatorname{ctg} z$ ограничена во всей плоскости, если удалить окрестности точек $z = \pi k$ (k — любое целое число), однако не стремится к нулю. Поэтому применим теорему 4.1 не к самой функции $\operatorname{ctg} z$, а к функции $\frac{\operatorname{ctg} z}{z}$. В качестве последовательности r_ν можно взять $r_\nu = \pi\left(\nu + \frac{1}{2}\right)$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$). Тогда теорема 4.1 даст нам

$$\frac{\operatorname{ctg} z}{z} = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{-\nu}^{\nu} G(z;\, \pi k),$$

так как функция $\frac{\operatorname{ctg} z}{z}$ имеет полюсы в точках $a_k = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ Найдем главные части $G(z;\, \pi k)$.

В окрестности точки $z = 0$ имеем

$$\frac{\operatorname{ctg} z}{z} = \frac{\cos z}{z \sin z} = \frac{1 - \frac{z^2}{2} + \ldots}{z^2\left(1 - \frac{z^2}{6} + \ldots\right)} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3} + \ldots,$$

т. е. $G(z;\, 0) = \frac{1}{z^2}$.

В окрестности точки $z = \pi k$, $k \neq 0$, имеем, обозначая для удобства $t = z - \pi k$:

$$\frac{\operatorname{ctg} z}{z} = \frac{\cos t}{(\pi k + t)\sin t} = \frac{1 - \frac{t^2}{2} + \ldots}{(\pi k + t)\left(t - \frac{t^3}{6} + \ldots\right)} = \frac{1}{\pi k t} - \frac{1}{\pi^2 k^2} + \ldots,$$

т. е. $G(z; \pi k) = \dfrac{1}{\pi k (z - \pi k)}$ $(k \neq 0)$.

Следовательно,

$$\operatorname{ctg} z = z \lim_{\nu \to \infty} \left\{ \frac{1}{z^2} + \sum_{1}^{\nu} \frac{1}{\pi k (z - \pi k)} + \sum_{-1}^{-\nu} \frac{1}{\pi k (z - \pi k)} \right\},$$

или, объединяя слагаемые с номерами k и $-k$, получаем

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 k^2} \qquad (z \neq \pi k). \tag{5.1}$$

Заметим еще, что

$$\operatorname{ctg} z = \frac{d}{dz} \ln \sin z, \qquad \ln \frac{\sin z}{z} = \int_0^z \left(\operatorname{ctg} t - \frac{1}{t} \right) dt.$$

Интегрируя ряд (5.1) почленно (что вполне законно ввиду его равномерной сходимости), приходим к формуле

$$\sin z = z \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2} \right). \tag{5.2}$$

Аналогичные разложения в ряды простейших дробей и бесконечные произведения можно получить и для многих других элементарных функций.

§ 6. Принцип аргумента и теорема Руше

Во многих случаях бывает необходимо сосчитать число нулей голоморфной функции в заданной области. Основная формула, обычно используемая для этой цели, легко доказывается с помощью теоремы о вычетах.

Теорема 6.1. *Пусть функция $f(z)$ и ее производная $f'(z)$ голоморфны в области D и непрерывны вплоть до ее границы C, за исключением конечного числа полюсов. Если на C функция $f(z)$ не обращается ни в нуль,* *ни в бесконечность, то*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \nu_f^+ - \nu_f^-, \tag{6.1}$$

где ν_f^+ *— число нулей, а* ν_f^- *— число полюсов функции* $f(z)$ *в области* D (и нули, и полюсы считаются столько раз, какова их кратность).

Доказательство. Функция $F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ голоморфна во всех точках области D, в которых $f(z)$ голоморфна и отлична от нуля. Следовательно, функция $F(z)$ имеет в области D лишь изолированные особые точки, причем они могут быть лишь в тех точках, где функция $f(z)$ имеет нуль или полюс. Ясно даже, что особые точки $F(z)$ должны быть полюсами, так как $F(z)$ является отношением двух мероморфных функций. Интересующий нас интеграл равен сумме вычетов $F(z)$ в этих полюсах. Остается найти вычеты.

Найдем, чему равен вычет $\operatorname*{res}\limits_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)}$, когда функция $f(z)$ имеет в точке $z = a$ нуль порядка n (чтобы не говорить отдельно о нулях и о полюсах, напомним, что полюс порядка n — это нуль порядка $-n$). Согласно определению порядка нуля имеем

$$f(z) = (z-a)^n f_1(z),$$

где функция $f_1(z)$ голоморфна в точке $z = a$ и $f_1(a) \neq 0$. Следовательно,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)},$$

и функция $\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$ голоморфна в точке $z = a$. Поэтому искомый вычет равен n.

Суммируя по всем нулям и полюсам, приходим к утверждению теоремы.

Замечание. Вместо формулы (6.1) можно пользоваться любой из двух следующих формул:

$$\nu_f^+ - \nu_f^- = \frac{1}{2\pi i}\operatorname*{var}_C \ln f(z), \tag{6.2}$$

$$\nu_f^+ - \nu_f^- = \frac{1}{2\pi}\operatorname*{var}_C \arg f(z). \tag{6.3}$$

Здесь $\operatorname*{var}_C F(z)$ означает изменение функции $F(z)$ (вообще говоря, неоднозначной в области D) при однократном обходе границы C области D в положительном направлении. Если область D многосвязна, то C состоит из нескольких связных кусков; под $\operatorname*{var}_C F(z)$ понимается сумма изменений по всем этим кускам.

Для доказательства формул (6.2) и (6.3) заметим, что $\frac{f'(z)}{f(z)} = (\ln f(z))'$, а $\int\limits_C (\ln f(z))'\,dz$ равен как раз изменению элемента аналитической функции $\ln f(z)$ при непрерывном продолжении по кривой C. Формула (6.3) сразу получается из формулы (6.2), если вспомнить, что $\ln w = \ln|w| + i\arg w$, и заметить, что изменение $\ln|f(z)|$ по замкнутому контуру равно нулю, так как различные значения $\ln w$ отличаются лишь чисто мнимым слагаемым $2\pi ik$.

Формула (6.3) носит название *принципа аргумента.* $\square$

Докажем еще две простые, но полезные теоремы о нулях голоморфных функций.

Следующая теорема обычно называется *теоремой Руше.*

Теорема 6.2. *Пусть функции $F(z)$ и $f(z)$ голоморфны в области D и непрерывны вплоть до ее границы C. Если на границе D имеет место неравенство $|f(z)| < |F(z)|$, то функции $F(z)+f(z)$ и $F(z)$ имеют в области D одинаковое число нулей. (Каждый нуль считается столько раз, какова его кратность.)*

Доказательство. Поскольку функции $F(z)$ и $f(z)$ голоморфны в D, то полюсов они не имеют. Из неравенства $|f(z)| < |F(z)|$, справедливого на C, видно, что функции $F(z)$ и $F(z)+f(z)$ на C не обращаются в нуль. Поэтому, применяя формулу (6.2), мы можем написать

$$\begin{aligned}\nu_{F+f} &= \frac{1}{2\pi i}\operatorname*{var}_C \ln[F(z)+f(z)] = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\operatorname*{var}_C \ln F(z) + \frac{1}{2\pi i}\operatorname*{var}_C \ln\left[1+\frac{f(z)}{F(z)}\right] = \\ &\qquad\qquad = \nu_F + \frac{1}{2\pi i}\operatorname*{var}_C \ln\left[1+\frac{f(z)}{F(z)}\right].\end{aligned}$$

Когда точка z обходит кривую C, точка $\zeta = 1 + \frac{f(z)}{F(z)}$ обходит некоторую кривую Г, лежащую в круге $|\zeta - 1| < 1$ (так как на C по условию $\left|\frac{f(z)}{F(z)}\right| < 1$), и

$$\frac{1}{2\pi i} \operatorname*{var}_C \ln\left[1 + \frac{f(z)}{F(z)}\right] = \frac{1}{2\pi i} \operatorname*{var}_\Gamma \ln \zeta.$$

Но кривая Г лежит в круге $|\zeta - 1| < 1$, так что она не может обходить точку $\zeta = 0$. Поэтому продолжение $\ln \zeta$ по Г возвращает нас к прежнему значению, т. е. $\operatorname*{var}_\Gamma \ln \zeta = 0$. Следовательно, $\nu_{F+f} = \nu_F$, и теорема доказана.

Теорема Руше в теории аналитических функций играет примерно такую же роль, какую играет в анализе теорема о том, что непрерывная функция, имеющая на концах отрезка значения разных знаков, обращается в нуль на этом отрезке. Покажем на одном известном примере, как используется теорема Руше.

Пример 1. Покажем, что многочлен $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ имеет в комплексной плоскости ровно n нулей (основная теорема алгебры).

Многочлен z^n имеет в комплексной плоскости n нулей (точка $z = 0$ является нулем порядка n). Положим $P(z) = F(z) + f(z)$, где $F(z) = z^n$, а $f(z) = a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$. В качестве области D возьмем круг $|z| < R$, а R выберем столь большим, чтобы

$$|F(z)| > |f(z)| \qquad (|z| = R).$$

Для этого достаточно взять, например,

$$R = 1 + |a_1| + \ldots + |a_n|.$$

Тогда по теореме Руше число нулей $F(z)$ и $P(z)$ в круге $|z| < R$ одинаково, т. е. $P(z)$ имеет n нулей. $\square$

Теорема 6.3. *Пусть последовательность функций $f_n(z)$, голоморфных в области G, равномерно сходится в любой замкнутой части G к функции $f(z)$, отличной от тождественной постоянной. Если все функции $f_n(z)$ таковы, что при любом w функция $f_n(z) - w$ имеет в области G не более m нулей, то и предельная функция $f(z)$ обладает этим свойством.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Тогда найдется такое a, что число нулей функции $f(z) - a$ в области G не меньше $m + 1$. Выберем такую область D, чтобы:

1. Область D лежала в области G вместе со своей границей C.

2. Функция $f(z)-a$ имела в области D не меньше $m+1$ нулей.

3. Функция $f(z)-a$ не обращалась в нуль на C.

Такой выбор возможен, так как мы предположили, что функция $f(z)$ отлична от тождественной постоянной.

По теореме 4.4 гл. II из равномерной сходимости последовательности $f_n(z)$ в любой замкнутой части области G следует равномерная сходимость последовательности $f_n'(z)$ на любой замкнутой части области G. Кривая C является замкнутой частью области G, так что

$$f_n(z)-a\to f(z)-a,\qquad f_n'(z)\to f'(z)\qquad (z\in C).$$

Поэтому все функции $f_n(z)-a$, начиная с некоторой, отличны от нуля на C и

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f_n'(z)}{f_n(z)-a}\,dz\to\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz.$$

Это значит, что $\nu_{f_n-a}\to\nu_{f-a}$ при $n\to\infty$. Поскольку ν_{f_n-a} и ν_{f-a} — целые числа, то отсюда следует, что $\nu_{f_n-a}=\nu_{f-a}>m$ при $n>N$, а это противоречит свойству функций $f_n(z)$. Полученное противоречие доказывает теорему.

§ 7. Обратная функция

В теории аналитических функций, как и в анализе, часто приходится иметь дело с функциями, значения которых в данной точке z определяются из уравнения

$$\varphi(w)=z,\tag{7.1}$$

где $\varphi(w)$ — данная функция. Исследованию решений такого уравнения (в предположении, что $\varphi(w)$ — голоморфная функция переменной w) и посвящен этот параграф.

В первую очередь докажем следующий простой результат.

Лемма 1. *Пусть функция* $\varphi(w)$ *голоморфна в точке* $w=b$, *и пусть* $\varphi'(b)\neq 0$. *Определим числа* $\rho>0$ *и* $\delta>0$ *равенствами*

$$\max_{|w-b|=\rho}\left|\frac{\varphi(w)-\varphi(b)}{w-b}-\varphi'(b)\right|\leqslant\frac{1}{3}\,|\varphi'(b)|,\tag{7.2}$$

$$\delta=\frac{1}{3}\,\rho\,|\varphi'(b)|.\tag{7.3}$$

Тогда при любом значении z из круга $|z - \varphi(b)| < \delta$ существует решение уравнения (7.1), *лежащее в круге $|w - b| < \rho$, и это решение единственно.*

Доказательство. Заметим, прежде всего, что равенство (7.2) действительно определяет некоторое положительное значение ρ, так как из существования производной $\varphi'(w)$ в точке $w = b$ вытекает, что

$$\frac{\varphi(w) - \varphi(b)}{w - b} - \varphi'(b) \to 0 \qquad (w \to b).$$

Введем вспомогательные функции

$$F(w) = (w - b)\varphi'(b), \quad f(w) = \varphi(w) - z - (w - b)\varphi'(b).$$

Тогда уравнение (7.1) можно записать в виде

$$F(w) + f(w) = 0.$$

Возьмем любое значение z из круга $|z - \varphi(b)| < \delta$ и сравним значения модулей функций $F(w)$ и $f(w)$ на окружности $|w - b| = \rho$. Очевидно, что на этой окружности

$$|F(w)| = \rho|\varphi'(b)|.$$

Для функции $f(w)$ можно написать

$$|f(w)| = |\varphi(w) - \varphi(b) - (w - b)\varphi'(b) - (z - \varphi(b))| \leqslant$$
$$\leqslant |w - b| \cdot \left| \frac{\varphi(w) - \varphi(b)}{w - b} - \varphi'(b) \right| + |z - \varphi(b)|,$$

откуда в силу равенств (7.2) и (7.3) следует, что при

$$|w - b| = \rho, \quad |z - \varphi(b)| \leqslant \delta$$

мы имеем неравенство

$$|f(w)| \leqslant \frac{2}{3}\rho|\varphi'(b)| < \rho|\varphi'(b)|.$$

Следовательно, при $|z - \varphi(b)| < \delta$ на окружности $|w - b| = \rho$ имеет место неравенство $|f(w)| < |F(w)|$. По теореме Руше (теорема 6.2) функция $F(w) + f(w)$, равная $\varphi(w) - z$, имеет в круге $|w - b| < \rho$ столько же нулей, сколько и функция $F(w)$, равная $(w - b)\varphi'(b)$, т. е. ровно один. Тем самым лемма полностью доказана. $\square$

Обозначив полученное единственное решение уравнения (7.1) символом $\psi(z)$, можно сформулировать доказанное утверждение следующим образом.

Пусть функция $\varphi(w)$ голоморфна в точке $w = b$, и пусть ее производная в этой точке отлична от нуля.

Тогда существуют такие положительные числа ρ *и* δ, *что функция* $w=\psi(z)$, *обратная к функции* $z=\varphi(w)$, *определена в круге* $|z-\varphi(b)|<\delta$ *и ее значения лежат в круге* $|w-b|<\rho$. *Поставленными условиями функция* $w=\psi(z)$ *определяется единственным образом.*

Следующая теорема существенным образом дополняет это утверждение.

Теорема 7.1. *Пусть функция* $\varphi(w)$ *голоморфна в точке* $w=b$, *и пусть* $\varphi'(b)\neq 0$, *а числа* ρ *и* δ *определены равенствами* (7.2) *и* (7.3). *Функция* $w=\psi(z)$, *определенная выше как функция, обратная к функции* $z=\varphi(w)$, *голоморфна в круге*

$$|z-\varphi(b)|<\delta.$$

Доказательство. Возьмем z из круга $|z-\varphi(b)|<\delta$ и рассмотрим интеграл

$$I(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w-b|=\rho}\frac{w\varphi'(w)}{\varphi(w)-z}\,dw.$$

Из равенства (7.2), определяющего число ρ, имеем

$$\left|\frac{\varphi(w)-\varphi(b)}{w-b}\right|\geqslant|\varphi'(b)|-\frac{1}{3}|\varphi'(b)|=\frac{2}{3}|\varphi'(b)|$$
$$(|w-b|=\rho),$$

или

$$|\varphi(w)-\varphi(b)|\geqslant\frac{2}{3}\rho|\varphi'(b)|\qquad(|w-b|=\rho).$$

Поэтому

$$|\varphi(w)-z|\geqslant|\varphi(w)-\varphi(b)|-|z-\varphi(b)|\geqslant$$
$$\geqslant\frac{2}{3}\rho|\varphi'(b)|-|z-\varphi(b)|.$$

Следовательно, при $|z-\varphi(b)|\leqslant\delta$ на окружности $|w-b|=\rho$ имеет место неравенство $|\varphi(w)-z|>\frac{1}{3}\rho|\varphi'(b)|$, т. е. функция $\varphi(w)-z$ не обращается в нуль на этой окружности. Отсюда следует, что функция

$$\frac{w\varphi'(w)}{\varphi(w)-z}$$

является голоморфной функцией переменных w и z при z, лежащих в круге $|z-\varphi(b)|<\delta$ и w, лежащем на окружности $|w-b|=\rho$. Согласно теореме 4.3 гл. II интеграл

$I(z)$ представляет функцию переменного z, голоморфную в круге $|z-\varphi(b)|<\delta$.

Покажем теперь, что при тех же условиях интеграл $I(z)$ совпадает с функцией $\psi(z)$, обратной к функции $\varphi(w)$. Для этой цели мы зафиксируем произвольное значение z из круга $|z-\varphi(b)|<\delta$ и вычислим этот интеграл с помощью вычетов. Функция

$$\frac{w\varphi'(w)}{\varphi(w)-z}$$

как функция от переменного w голоморфна в круге $|w-b|<\rho$, за исключением единственного простого полюса при $w=\psi(z)$, как вытекает из леммы 1. Согласно формуле для вычета в простом полюсе мы получаем

$$\operatorname*{res}_{w=\psi(z)} \frac{w\varphi'(w)}{\varphi(w)-z} = \left.\frac{w\varphi'(w)}{\varphi'(w)}\right|_{w=\psi(z)} = \psi(z).$$

Следовательно, по теореме о вычетах $I(z)=\psi(z)$. В силу доказанной выше голоморфности интеграла $I(z)$ в круге $|z-\varphi(b)|<\delta$ теорема доказана.

Замечание 1. Мы доказали не только голоморфность обратной функции $\psi(z)$, но и следующую полезную формулу для нее:

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w-b|=\rho} \frac{w\varphi'(w)}{\varphi(w)-z}\,dw. \tag{7.4}$$

Легко видеть, что с помощью тех же рассуждений можно было бы доказать и формулу

$$f(\psi(z))=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w-b|=\rho} \frac{f(w)\,\varphi'(w)}{\varphi(w)-z}\,dw, \tag{7.4*}$$

справедливую для любой функции $f(w)$, голоморфной в круге $|w-b|\leqslant\rho$.

Замечание 2. Из тождества $\varphi(\psi(z))=z$, дифференцируя по z, мы легко получаем формулу для производной обратной функции

$$\psi'(z)=\frac{1}{\varphi'(\psi(z))}. \tag{7.5}$$

Теперь покажем, что если $\varphi(w)$ — аналитическая функция, то функцию $\psi(z)$ также можно рассматривать как аналитическую функцию.

Теорема 7.2. *Пусть $\varphi_b(w)$ — произвольный элемент аналитической функции $\varphi(w)$ в точке $w=b$. По теоре-*

ме 7.1 *каждому такому элементу, удовлетворяющему условию* $\varphi_b'(b) \neq 0$, *отвечает функция* $\psi_a(z)$, *обратная к элементу* $\varphi_b(w)$. *Все функции* $\psi_a(z)$ *являются элементами в точках* $z = a = \varphi_b(b)$ *аналитической функции* $\psi(z)$, *которую естественно назвать аналитической функцией, обратной к аналитической функции* $\varphi(w)$.

Доказательство. Нам нужно установить, что любой элемент $\psi_{a_2}(z)$ можно получить из любого другого элемента $\psi_{a_1}(z)$ аналитическим продолжением по некоторой кривой. Пусть элемент $\psi_{a_1}(z)$ был получен как обратная функция к элементу $\varphi_{b_1}(w)$, а элемент $\psi_{a_2}(z)$ — как обратная функция к элементу $\varphi_{b_2}(w)$. Элемент $\varphi_{b_2}(w)$ можно получить из элемента $\varphi_{b_1}(w)$ аналитическим продолжением по некоторой кривой Γ, причем, без ограничения общности, можно считать, что элементы $\varphi_b(z)$ в каждой точке кривой Γ удовлетворяют условию $\varphi_b'(b) \neq 0$ (ибо по теореме единственности нули производной — изолированные точки, а кривую Γ в любом месте можно немного деформировать, не меняя результат продолжения). Когда точка b проходит кривую Γ, точка $a = \varphi(b)$ проходит некоторую кривую C. В каждой точке кривой C имеется элемент $\psi_a(z)$, причем началу кривой C отвечает элемент $\psi_{a_1}(z)$, а концу — элемент $\psi_{a_2}(z)$. Легко видеть, что совокупность элементов $\psi_a(z)$ образует функцию, аналитическую на кривой C. Следовательно, элемент $\psi_{a_2}(z)$ получается из элемента $\psi_{a_1}(z)$ аналитическим продолжением по кривой C. Поскольку $\psi_{a_1}(z)$ и $\psi_{a_2}(z)$ — произвольная пара элементов, теорема доказана.

Естественно возникает вопрос, что представляют собой для аналитической функции $\psi(z)$, обратной к аналитической функции $\varphi(w)$, те точки $w = a = \varphi_b(b)$, которые отвечают элементам $\varphi_b(w)$ с условием $\varphi_b'(b) = 0$. Рассмотрение функции $\varphi(w) = w^n$ наводит на мысль, что такие точки должны быть точками ветвления. Это доказывается без особого труда. Именно, справедлива следующая

Теорема 7.3. *Пусть функция* $\varphi(w)$ *голоморфна в точке* $w = b$, *а ее производная имеет в этой точке нуль порядка* $m - 1$. *Тогда существуют такие числа* $\rho > 0$ *и* $\delta > 0$, *что для любых* z *из круга* $|z - \varphi(b)| < \delta$ *уравнение* (7.1) *имеет в круге* $|w - b| < \rho$ *ровно* m *решений. Эти решения являются значениями функции* $\psi(z)$, *анали-*

тической в кольце $0<|z-\varphi(b)|<\delta$ *и разлагающейся в этом кольце в ряд*

$$\psi(z)=b+c_1(z-a)^{\frac{1}{m}}+c_2(z-a)^{\frac{2}{m}}+\ldots,\ c_1\neq 0\quad (a=\varphi(b)).$$

Доказательство. Из условий, наложенных на функцию $\varphi(w)$, следует, что в окрестности точки $w=b$ ее ряд Тейлора имеет вид

$$\varphi(w)=\varphi(b)+\alpha_m(w-b)^m+\alpha_{m+1}(w-b)^{m+1}+\ldots,$$

причем $\alpha_m=\dfrac{\varphi^{(m)}(b)}{m!}\neq 0$. Ввиду последнего неравенства мы можем выбрать число $\rho>0$ столь малым, чтобы в круге $|w-b|<\rho$ имело место неравенство

$$\left|\frac{\varphi(w)-\varphi(b)}{(w-b)^m}-\alpha_m\right|\leqslant\frac{1}{3}|\alpha_m|.$$

Число δ определим равенством $\delta=\frac{1}{3}\rho|\alpha_m|$. Вводя вспомогательные функции

$$F(w)=(w-b)^m\alpha_m,\qquad f(w)=\varphi(w)-z-\alpha_m(w-b)^m$$

и применяя теорему Руше, мы, как и в лемме 1, легко убеждаемся, что при $|z-\varphi(b)|<\delta$ функция

$$F(w)+f(w)=\varphi(w)-z$$

имеет в круге $|w-b|<\rho$ столько же нулей, сколько и функция $F(w)$ (считая кратность). Так как функция

$$F(w)=(w-b)^m\alpha_m$$

имеет в круге $|w-b|<\rho$ ровно m нулей (один нуль кратности m), мы получаем первое утверждение теоремы.

Для доказательства следующих утверждений теоремы рассмотрим функцию

$$\varphi_1(w)=\sqrt[m]{\varphi(w)-\varphi(b)}=\beta_1(w-b)+\beta_2(w-b)^2+\ldots,$$

где $\beta_1=\sqrt[m]{\alpha_m}\neq 0$. Эта функция голоморфна в точке $w=b$ и $\varphi_1'(b)=\beta_1\neq 0$. С помощью функции $\varphi_1(w)$ уравнение (7.1) записывается в виде

$$\varphi_1(w)=\sqrt[m]{z-a}\qquad (a=\varphi(b)). \tag{7.6}$$

Обозначим теперь через $w=\psi_1(\zeta)$ функцию, обратную к функции $\zeta=\varphi_1(w)$ (эта функция существует по лемме 1, и по теореме 7.1 она голоморфна в окрестности точки $\zeta=0$). С помощью функции $\psi_1(\zeta)$ мы можем записать решение уравнения (7.6) в виде

$$w = \psi_1(\sqrt[m]{z-a}) \qquad (a = \varphi(b)).$$

Следовательно,

$$\psi(z) = \psi_1(\sqrt[m]{z-a}),$$

где функция $\psi_1(\zeta)$ голоморфна в точке $\zeta = 0$. Отсюда уже легко получаем оставшиеся утверждения теоремы. □

В заключение выведем формулы, дающие явные выражения коэффициентов ряда Тейлора обратной функции $\psi(z)$ через значения функции $\varphi(w)$ и ее производных в соответствующей точке.

Теорема 7.4. *Пусть функция $\varphi(w)$ голоморфна в точке $w = b$, и пусть $\varphi'(b) \neq 0$, а $\psi(z)$ — функция, обратная к функции $\varphi(w)$. В окрестности точки $z = a$, где $a = \varphi(b)$, функция $\psi(z)$ разлагается в ряд*

$$\psi(z) = b + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

и для коэффициентов этого ряда имеют место формулы

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-b|=\rho} \frac{(w-b)\varphi'(w)}{[\varphi(w)-\varphi(b)]^{n+1}}\, dw =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}} \left\{ \left[\frac{w-b}{\varphi(w)-\varphi(b)} \right]^{n+1} \varphi'(w) \right\}_{w=b}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Доказательство. Возьмем в формуле (7.4*) $f(w) = w - b$. Это даст нам равенство

$$\psi(z) - b = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-b|=\rho} \frac{(w-b)\varphi'(w)}{\varphi(w)-z}\, dw.$$

При достаточно малых значениях $z - \varphi(b)$ подынтегральная функция разлагается в сходящийся ряд

$$\frac{(w-b)\varphi'(w)}{\varphi(w)-z} = \frac{(w-b)\varphi'(w)}{\varphi(w)-\varphi(b)} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-\varphi(b)}{\varphi(w)-\varphi(b)}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\varphi(b))^n}{(\varphi(w)-\varphi(b))^{n+1}} (w-b)\,\varphi'(w).$$

Почленно интегрируя этот ряд (и вспоминая, что $\varphi(b) = a$), мы получаем для функции $\psi(z) - b$ разложение

$$\psi(z) - b = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Формулы для коэффициентов имеют вид

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-b|=\rho} \frac{(w-b)\,\varphi'(w)}{[\varphi(w) - \varphi(b)]^{n+1}}\, dw.$$

Чтобы преобразовать эти формулы, заметим, что функция

$$F(w) = \left[\frac{w-b}{\varphi(w) - \varphi(b)}\right]^{n+1} \varphi'(w)$$

голоморфна в круге $|w-b| \leqslant \rho$ и что, согласно интегральной формуле Коши (точнее, согласно формулам для высших производных),

$$\frac{1}{(n-1)!} F^{(n-1)}(b) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-b|=\rho} \frac{F(w)}{(w-b)^n}\, dw.$$

Тем самым теорема полностью доказана.

Замечание. С помощью тех же рассуждений можно было бы получить и ряд

$$f(\psi(z)) = f(b) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n \qquad (a = \varphi(b)),$$

где

$$a_n = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}} \left\{ \left[\frac{w-b}{\varphi(w) - \varphi(b)}\right]^n \frac{f(w) - f(b)}{\varphi(w) - \varphi(b)}\, \varphi'(w) \right\}_{w=b}.$$

Этот ряд называется *рядом Бюрмана — Лагранжа.*

§ 8. Неявные функции

Теорема об обратной функции, доказанная в предыдущем параграфе, является частным случаем теоремы о неявной функции, доказательству которой мы посвятим настоящий параграф.

Теорема 8.1. *Пусть функция $F(z, w)$ определена в области $|z-a| < r$, $|w-b| < R$ и непрерывна в этой области по совокупности переменных. Пусть, кроме того, функция $F(z, w)$ голоморфна по переменной z в круге $|z-a| < r$ при любом w, $|w-b| < R$, а по переменной w — в круге $|w-b| < R$ при любом z, $|z-a| < r$. Если*

$F(a, b) = 0$, а $F'_w(a, b) \neq 0$, то существует единственная непрерывная в точке $z = a$ функция $w(z)$, удовлетворяющая условиям

$$F(z, w(z)) \equiv 0, \quad w(a) = b.$$

Эта функция $w(z)$ голоморфна в точке $z = a$ и

$$w'(z) = -\frac{F'_z(z, w(z))}{F'_w(z, w(z))}$$

для всех z в некоторой окрестности точки $z = a$.

Доказательство. Разобьем доказательство на несколько этапов.

1. Покажем, что функция $F(z, w)$ в малом линейна, т. е. что

$$F(z, w) = A(z - a) + B(w - b) + \varepsilon(z, w), \qquad (8.1)$$

где A и B — некоторые числа, а функция $\varepsilon(z, w)$ удовлетворяет условию

$$\varepsilon(z, w) = o(|z - a| + |w - b|) \quad (z \to a, w \to b). \qquad (8.2)$$

Ясно, что $\varepsilon(z, w)$ голоморфна по переменным z и w там же, где и $F(z, w)$. Так как $F(z, w)$ голоморфна по z в круге $|z - a| < r$ при любом w, то $(r_1 < r)$

$$F(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(w)(z - a)^n, \quad C_n(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r_1} \frac{F(z, w)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

Согласно теореме 4.3 гл. II коэффициенты $C_n(w)$ являются голоморфными функциями w в круге $|w - b| < R$, так как $F(z, w)$ голоморфна по w в этом круге. Разлагая функции $C_n(w)$ в ряды по степеням $w - b$, получаем двойной ряд

$$F(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k}(z - a)^n (w - b)^k,$$

абсолютно и равномерно сходящийся при $|z - a| \leqslant r_1$, $|w - b| \leqslant R_1$, $r_1 < r$, $R_1 < R$. Ясно, что сумма всех членов этого ряда с суммой номеров, большей единицы, равна

$$o(|z - a| + |z - b|) \qquad (z \to a, w \to b).$$

Свободный член равен нулю, так как $F(a, b) = 0$. Кроме того, ясно, что

$$A = F'_z(a, b), \qquad B = F'_w(a, b).$$

2. **Покажем,** что найдутся такие числа r_1, $0 < r_1 < r$, и R_1, $0 < R_1 < R$, что при любом z из круга $|z-a| < r_1$ уравнение $F(z, w) = 0$ имеет ровно одно решение, удовлетворяющее неравенству

$$|w(z)-b| < R_1. \tag{8.3}$$

Для этой цели воспользуемся теоремой Руше (теорема 6.2). Мы выберем r_1 и R_1 так, чтобы слагаемое $B(w-b)$ в правой части равенства (8.1) было по модулю больше суммы двух других на окружности $|w-b| = R_1$ (при любых z, $|z-a| < r_1$). Для этого возьмем r_1 и R_1, удовлетворяющие условиям

$$r_1 < R_1 \min\left(\frac{|B|}{2|A|},\ 1\right),$$

$$\max_{|z-a| \leqslant r_1, |w-b| \leqslant R_1} |\varepsilon(z, w)| < \frac{|B|}{2} R_1. \tag{8.4}$$

В силу (8.2) этим условиям можно удовлетворить (напомним, что $B \neq 0$ по условию теоремы, так как $B = F'_w(a, b)$).

Возьмем z в круге $|z-a| < r_1$ и рассмотрим $F(z, w)$ как функцию w в круге $|w-b| \leqslant R_1$. Согласно теореме Руше функция $F(z, w)$ имеет в этом круге столько же нулей, сколько и слагаемое $B(w-b)$, которое на окружности этого круга по модулю больше суммы двух других. Но функция $B(w-b)$ имеет всего один нуль: $w = b$. Значит, и функция $F(z, w)$ имеет в круге $|w-b| < R_1$ только один нуль. Для него и выполнено неравенство (8.3). Этот нуль обозначим $w(z)$.

3. Докажем дифференцируемость функции $w(z)$ в точке $z = a$.

Для этой цели придется оценить $w(z)$ несколько точнее. Воспользуемся опять теоремой Руше, но функцию $F(z, w)$ разобьем на несколько иные слагаемые. Ясно, что мы получим довольно хорошее приближение для функции $w(z)$, приравняв нулю линейную часть $F(z, w)$. Поэтому обозначим

$$w_0(z) = b - \frac{A}{B}(z-a)$$

($w = w_0(z)$ и есть нуль линейной части $F(z, w)$) и запишем $F(z, w)$ в виде

$$F(z, w) = B(w - w_0(z)) + \varepsilon(z, w).$$

Будем рассматривать $F(z, w)$ как функцию w на окружности $C=C(z, \varepsilon)$ (в плоскости w), имеющей уравнение

$$|w-w_0(z)|=\varepsilon|z-a|$$

(ε — заданное положительное число). Покажем, что при z, достаточно близких к a, слагаемое $B(w-w_0(z))$ на окружности C по модулю больше слагаемого $\varepsilon(z, w)$. Согласно (7.2) $\varepsilon(z, w)=o(|z-a|+|w-b|)$, а на окружности C имеем $|w-b|<M|z-a|$ (M — некоторое число). Поэтому

$$\varepsilon(z, w)=o(|z-a|) \quad (z\to a,\ w\in C(z, \varepsilon)).$$

Следовательно, можно взять $\delta>0$ так, чтобы при $|z-a|<$ $<\delta$ и $w\in C$ имело место неравенство

$$|\varepsilon(z, w)|<\varepsilon|B|\,|z-a|.$$

Но $|B(w-w_0(z))|=\varepsilon|B|\,|z-a|$ при $w\in C$ и при любых z. Таким образом, на окружности C слагаемое $B(w-w_0(z))$ по модулю больше, чем слагаемое $\varepsilon(z, w)$. Согласно теореме Руше функция $F(z, w)$ имеет внутри C столько же нулей, сколько и слагаемое $B(w-w_0(z))$, т. е. ровно один нуль. Видно, что при $z\to a$ этот нуль стремится к b, так что при z, достаточно близких к a, он обязан совпадать с $w(z)$ в силу утверждения, доказанного на втором этапе. Иными словами, точка $w=w(z)$ лежит внутри окружности C, а это дает нам неравенство

$$|w(z)-w_0(z)|<\varepsilon|z-a| \qquad (|z-a)<\delta)$$

или, раскрывая выражение $w_0(z)$,

$$\left|\frac{w(z)-b}{z-a}+\frac{A}{B}\right|<\varepsilon \qquad (|z-a|<\delta).$$

Так как $\varepsilon>0$ произвольно, это неравенство означает, что функция $w(z)$ дифференцируема в точке $z=a$ и что

$$w'(a)=-\frac{A}{B}=-\frac{F'_z(a, b)}{F'_w(a, b)}.$$

4. Осталось доказать голоморфность функции $w(z)$ в точке $z=a$.

Для этого докажем, что функция $w(z)$ дифференцируема не только в точке $z=a$, но и в некоторой ее окрестности. Поскольку функция $w(z)$ непрерывна в точке $z=a$, мы можем взять a_1 настолько близким к a, чтобы

$b_1 = w(a_1)$ было достаточно близким к b, именно, настолько близким, чтобы для всех z из круга $|z-a| < 2|a_1 - a|$ уравнение $F(z, w) = 0$ имело только один корень, лежащий в круге $|w-b| < 2|b_1 - b|$ (см. второй этап доказательства), и чтобы еще выполнялось неравенство

$$F'_w(a_1, b_1) \neq 0.$$

Тогда условия теоремы выполняются и после замены (a, b) на (a_1, b_1), а решением уравнения $F(z, w) = 0$, удовлетворяющим условию $w(a_1) = b_1$, является все та же функция $w(z)$. Отсюда мы получаем дифференцируемость $w(z)$ в точке $z = a_1$. Поскольку $z = a_1$ — любая точка, достаточно близкая к точке $z = a$, функция $w(z)$ голоморфна в точке $z = a$ (в силу эквивалентности понятий голоморфности и дифференцируемости в области).

Теорема полностью доказана. $\square$

С помощью теоремы 8.1 можно проводить исследование особых точек функции $w(z)$, определенной каким-либо неявным уравнением. Очевидно, что особые точки следует искать среди решений системы уравнений

$$F(z, w) = 0, \qquad F'_w(z, w) = 0.$$

Решениями такой системы являются пары чисел (z_k, w_k). Первое указывает точку плоскости, второе выделяет ветвь аналитической функции, для которой эта точка может оказаться особой точкой. Над одной и той же точкой плоскости могут лежать и особые и не особые точки.

Глава V

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Любую функцию комплексного переменного можно рассматривать как отображение одной комплексной плоскости в другую. Эта глава посвящена исследованию характерных свойств отображений, совершаемых голоморфными функциями, а также изложению практических приемов для отыскания отображения заданной области в другую с помощью голоморфной функции. С необходимостью решения таких задач мы столкнемся в дальнейшем.

§ 1. Общие сведения об отображениях

Напомним терминологию.

Пусть функция комплексного переменного $f(z)$ определена в области D, а E — некоторое множество, лежащее в D. Множество E', состоящее из значений w, принимаемых функцией $f(z)$ на множестве E, назовем *образом множества* E при отображении $w=f(z)$ и будем обозначать $E'=f(E)$. Множество E будем называть *прообразом множества* E' при отображении $w=f(z)$.

Всюду в дальнейшем рассматриваются лишь *непрерывные отображения*, т. е. функция $f(z)$ считается непрерывной. При этом непрерывность понимается на сфере Римана, т. е. точкам z_1 и z_2, близким на сфере Римана, должны отвечать значения функций $f(z_1)$ и $f(z_2)$, тоже близкие на сфере Римана. Таким образом, мы допускаем, что функция $f(z)$ может обращаться в бесконечность.

При непрерывном отображении прообразом открытого множества E является открытое множество. Образом открытого множества не обязано быть открытое множество, как показывает пример отображения круга $|z|<1$ функцией, равной z при $\operatorname{Im} z>0$ и $\bar{z}$ при $\operatorname{Im} z<0$.

Наибольший интерес представляют взаимно однозначные отображения.

Если функция $f(z)$ в различных точках множества E принимает различные значения, то мы скажем, что функция $f(z)$ *однолистна на множестве* E, а отображение $w = f(z)$ является *взаимно однозначным отображением* множества E на множество $E' = f(E)$. $\square$

Для доказательства однолистности функции $f(z)$ мы будем часто пользоваться следующими двумя очевидными признаками.

Для однолистности функции $f(z)$ *в области* E *необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная на множестве* $E' = f(E)$ *функция* $\varphi(w)$, *обратная к* $f(z)$, *т. е. такая, что*

$$\varphi(f(z)) = z \qquad (z \in E) \text{ и } f(\varphi(w)) = w \qquad (w \in E').$$

Если функция $f(z)$ *однолистна на множестве* E, *а функция* $F(z)$ *однолистна на множестве* $f(E)$, *то функция* $F(f(z))$ *однолистна на множестве* E. $\square$

Перейдем к отображениям *голоморфными* функциями.

Теорема 1.1. *Пусть функция* $f(z)$ *голоморфна в области* D, *и* $f(z) \not\equiv \text{const}$. *Обозначим через* G_m *множество тех значений* w, *для которых уравнение* $f(z) = w$ *имеет в области* D *не менее* m *решений. Тогда* G_m — *открытое множество.*

Доказательство. Нужно доказать, что все точки w, достаточно близкие к точке $w_0 \in G_m$, тоже входят в G_m. Пусть значение w_0 принимается функцией $f(z)$ в точках $z_s \in D$ с кратностью m_s $(s = 1, 2, \ldots, k)$ и $\sum\limits_1^k m_s \geqslant m$. В точке $z = z_s$ функция $f(z) - w_0$ имеет нуль кратности m_s, так что точка $z = z_s$ является нулем кратности $m_s - 1$ для функции $f'(z)$. Применяя теорему 7.3 гл. IV, видим, что функция $f(z) - w$ при всех w, достаточно близких к w_0, имеет m_s нулей в заданной окрестности точки z_s. Задавая окрестности точек z_s неперекрывающимися и лежащими в D, видим, что функция $f(z) - w$ имеет в D не менее $\sum\limits_1^k m_s \geqslant m$ нулей (при w, достаточно близких к w_0). Следовательно, все значения w, достаточно близкие к w_0, входят в G_m, и теорема доказана.

Следствие. *При отображении голоморфной функцией образом области является область.*

Действительно, в обозначениях теоремы образом области является открытое множество G_1. Связность образа области легко получаем из непрерывности отображения.

Обсудим теперь взаимно однозначные отображения, совершаемые голоморфными или мероморфными функциями (т. е. будем допускать наличие полюсов). При отображении $w = f(z)$ образом точки $z = a$, в которой $f(z)$ имеет полюс, считается точка $w = \infty$.

Такие отображения являются непрерывными отображениями сферы Римана на себя (в естественной топологии). Будем говорить, что функция $f(z)$ *однолистна в точке* $z = a$, если существует содержащая точку $z = a$ область D, в которой функция $f(z)$ однолистна.

Теорема 1.2. *Для того чтобы функция* $f(z)$, *голоморфная в точке* $z = a$ $(a \neq \infty)$, *была однолистна в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы* $f'(a) \neq 0$.

Доказательство сразу вытекает из теоремы 7.3 гл. IV.

Этот критерий без всякого труда переносится на случаи, когда $a = \infty$ и когда функция $f(z)$ имеет полюс в точке $z = a$. Для этого достаточно заметить, что функция $\zeta = 1/z$ совершает взаимно однозначное отображение окрестности точки $z = \infty$ на окрестность точки $\zeta = 0$. Применяя это преобразование к независимой переменной или к функции, получаем

Следствие 1. *Для того чтобы функция*

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots \qquad (|z| > R),$$

голоморфная в точке $z = \infty$, *была однолистна в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы* $c_1 \neq 0$.

Следствие 2. *Для того чтобы функция* $f(z)$, *имеющая в точке* $z = a$ *полюс, была однолистна в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы этот полюс был полюсом первого порядка.*

Замечание. Для однолистности функции $f(z)$ в области D необходимо (но не достаточно!), чтобы функция $f(z)$ была однолистна в каждой точке этой области.

Примером функции, однолистной в каждой конечной точке плоскости, но не однолистной во всей конечной плоскости, может служить функция e^z.

Проверка однолистности функции в области значительно сложнее, чем проверка однолистности в точке. Для голоморфных функций кроме признаков, предложенных в начале параграфа, имеется еще один признак, носящий название *принципа соответствия границ*.

Теорема 1.3. *Пусть* D *и* G — *конечные односвязные области, ограниченные замкнутыми кусочно гладки-*

ми кривыми C и Γ соответственно. Пусть, далее, функция $f(z)$ голоморфна в области D и непрерывна вплоть до ее границы. Если при движении точки z по кривой C в положительном направлении точка $w=f(z)$ движется по кривой Γ в положительном направлении и один обход C отвечает одному обходу Γ, то отображение $w=f(z)$ является взаимно однозначным отображением области D на область G.

Доказательство. Нам нужно доказать, что функция $f(z)$ однолистна в области D и что $f(D)=G$.

Обозначим через $\nu(\zeta)$ число нулей функции $f(z)-\zeta$ в области D. Однолистность $f(z)$ в D означает, что $\nu(\zeta)\leqslant 1$ для всех ζ. Для ζ будем различать три возможности: $\zeta\in G$, $\zeta\notin\overline{G}$ и $\zeta\in\Gamma$. При доказательстве однолистности возможность $\zeta\in\Gamma$ можно не исследовать, так как множество значений ζ, для которых $\nu(\zeta)\geqslant 2$, по теореме 1.1 является открытым множеством, т. е. состоит лишь из внутренних точек, а кривая Γ — замкнутое множество, не имеющее внутренних точек. Множество значений ζ, принимаемых функцией $f(z)$ на кривой C, по условию теоремы совпадает с кривой Γ. Поэтому при $\zeta\notin\Gamma$ функция $f(z)-\zeta$ не обращается в нуль на C. Применим принцип аргумента (см. формулу (6.3) гл. IV). Это даст

$$\nu(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\operatorname*{var}_{C}\arg\,[f(z)-\zeta].$$

По условию теоремы точка $w=f(z)$ один раз обходит в положительном направлении кривую Γ, когда точка z один раз обходит в положительном направлении кривую C. Значит

$$\nu(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\operatorname*{var}_{C}\arg\,[f(z)-\zeta]=\frac{1}{2\pi}\operatorname*{var}_{\Gamma}\arg\,(w-\zeta).$$

Последнее выражение согласно принципу аргумента равно числу нулей функции $w-\zeta$ в области G. Это число равно нулю при $\zeta\notin\overline{G}$ и единице при $\zeta\in G$. Таким образом, мы доказали, что $G\subset f(D)\subset\overline{G}$. Так как по теореме 1.1 множество $f(D)$ открыто, то $f(D)=G$, и теорема доказана. $\square$

Выясним теперь, какими геометрическими свойствами отличаются отображения голоморфными функциями. Рассмотрим главную линейную часть отображения $w=f(z)$ (см. § 2, гл. I). Если функция $f(z)$ голоморфна в точке z_0, то главная линейная часть этого отображения имеет вид

$$w - w_0 = A(z - z_0), \tag{1.1}$$

где $w_0 = f(z_0)$, $A = f'(z_0)$. Линейное отображение (1.1) является комбинацией поворота и подобия (если $A \neq 0$). Коэффициент подобия равен $|A|$, а угол поворота равен $\arg A$. Преобразования подобия и поворота сохраняют форму фигур. Условие $A \neq 0$ означает однолистность функции $f(z)$ в точке z_0. Поэтому отображения голоморфными однолистными функциями получили название *конформных отображений* (т. е. сохраняющих форму). Отображения, совершаемые однолистными мероморфными функциями, тоже называются *конформными отображениями* (они сохраняют форму бесконечно малых фигур на сфере Римана).

Из этих геометрических рассмотрений очевидным образом вытекает одно утверждение, которым часто приходится пользоваться:

При конформном отображении угол между двумя кривыми (в точке пересечения) *равен углу между образами этих кривых.*

Обычно вводится понятие угла между кривыми, пересекающимися в бесконечно удаленной точке, так чтобы сохранилось это утверждение и для отображений мероморфными функциями. Именно:

Пусть даны две кривые, уходящие в бесконечность. Если их образы при отображении $\zeta = 1/z$ имеют в точке $\zeta = 0$ касательные, то будем считать, что исходные кривые пересекаются в бесконечно удаленной точке под углом, равным углу между их образами.

Исходя из этого определения, нетрудно проверить, что *угол в бесконечно удаленной точке между двумя прямыми* равен углу между этими прямыми в конечной точке пересечения, взятому с обратным знаком. $\square$

Приведем еще две формулы, легко получающиеся из тех же геометрических соображений.

Пусть $w = f(z)$ — конформное отображение области D на область D'. Если L — кривая, лежащая в области D, L' — ее образ, а S' — длина L', то

$$S' = \int_L |f'(z)|\,|dz|. \tag{1.2}$$

Если G — область, лежащая в D, G' — ее образ, σ' — площадь G', то

$$\sigma' = \iint_D |f'(z)|^2\, dx\, dy. \qquad (1.3)$$

Обе эти формулы легко доказываются из следующих геометрических соображений: бесконечно малый элемент длины и бесконечно малый элемент площади не меняются при преобразовании поворота; при преобразовании подобия элемент длины умножается на коэффициент подобия, элемент площади — на его квадрат. Подробного доказательства формул мы приводить не будем. Читатель, освоившийся с понятием интеграла, легко докажет их сам. □

Заметим еще, что якобиан отображения $w = f(z)$ равен $|f'(z)|^2$. Действительно, отображение $w = f(z)$ можно записать в виде

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y),$$

где $w = u + iv$, $z = x + iy$; $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$. Тогда

$$\frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y},$$

что в силу уравнений Коши — Римана (§ 1 гл. II) равно $|f'(z)|^2$. □

В заключение приведем два важных результата, лежащих в основе всей теории конформных отображений.

Теорема Римана. *Для любой односвязной области, граница которой состоит более чем из одной точки, существует голоморфная в этой области функция $f(z)$, конформно отображающая ее на круг $|w| < 1$. Функция $f(z)$ единственным образом определяется условиями $f(a) = 0$, $\arg f'(a) = \theta$ (a — произвольная точка области, θ — произвольное действительное число).*

Эту теорему мы докажем в более общем виде в гл. IX, где будет исследоваться вопрос о конформном отображении многосвязных областей.

Теорема о соответствии границ. *Пусть D — конечная односвязная область, ограниченная кусочно гладкой кривой, а $f(z)$ — какая-либо функция, конформно отображающая область D на круг $|w| < 1$. Тогда функция $f(z)$ непрерывна вплоть до границы области D,* *а обратная к $f(z)$ функция $\varphi(w)$ равномерно непрерывна в круге $|w| < 1$.*

Эту теорему мы тоже докажем в гл. IX.

§ 2. Дробно-линейные отображения

Дробно-линейным отображением называется отображение, совершаемое функцией вида

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad - bc \neq 0) \tag{2.1}$$

(дробно-линейной функцией). Условие $ad - bc \neq 0$ означает, что функция $w(z)$ не сводится к тождественной постоянной. Формула не определяет функцию при $z = \infty$ и $z = -\frac{d}{c}$. Доопределяя по непрерывности, полагаем

$$w(\infty) = \frac{a}{c}, \quad w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

(если $c = 0$, то $w(\infty) = \infty$).

Определенная таким образом во всей расширенной плоскости z дробно-линейная функция является, очевидно, мероморфной функцией во всей расширенной плоскости. Равенство (2.1) можно разрешить относительно z, что даст

$$z(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Таким образом, дробно-линейная функция имеет обратную функцию, тоже являющуюся дробно-линейной. Следовательно, дробно-линейная функция однолистна во всей расширенной плоскости. Поэтому имеем:

Свойство 1. *Дробно-линейное отображение является конформным отображением расширенной плоскости z на расширенную плоскость w.*

Докажем еще одно свойство.

Свойство 2. *Результат двух последовательно выполненных дробно-линейных отображений тоже является дробно-линейным отображением. Отображение, обратное к дробно-линейному, тоже является дробно-линейным.*

(Это свойство часто формулируют так: *совокупность дробно-линейных отображений образует группу.*)

Вторую часть утверждения мы уже доказали выше. Для доказательства первой его части напишем

$$\zeta = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \qquad w = \frac{a_2 \zeta + b_2}{c_2 \zeta + d_2}.$$

Подставляя выражение для ζ в формулу для w, находим

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

где

$$a = a_1 a_2 + b_2 c_1, \quad b = a_2 b_1 + b_2 d_1,$$

$$c = a_1 c_2 + c_1 d_2, \quad d = b_1 c_2 + d_1 d_2.$$

Нетрудно проверить, что $ad - bc = (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2)$, откуда видно, что $ad - bc \neq 0$, если $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$ и $a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0$. □

Заметим, что если с дробно-линейным отображением $w = \frac{az + b}{cz + d}$ связать матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то обратному отображению отвечает обратная матрица, а последовательному выполнению двух отображений — произведение матриц. □

Свойство 3. *При дробно-линейном отображении образом любой окружности и прямой является тоже окружность или прямая.*

Докажем это свойство непосредственно. Возьмем какую-либо окружность $|z - z_0| = R$ и посмотрим, куда перейдет эта окружность при дробно-линейном отображении. Случай прямой можно отдельно не рассматривать, так как прямая является предельным случаем окружности. Пусть отображение имеет вид $z = \frac{aw + b}{cw + d}$. Подставив выражение для z в уравнение окружности, получим

$$|(a - cz_0) w + (b - dz_0)| = R|cw + d|$$

или

$$|a'w + b'|^2 = R^2 |cw + d|^2.$$

Квадрат модуля комплексного числа равен произведению этого числа на число, комплексно сопряженное с ним. Поэтому полученному уравнению можно придать вид

$$(a'w + b')(\bar{a}'\bar{w} + \bar{b}') = R^2 (\bar{c}\bar{w} + \bar{d})(cw + d)$$

или

$$|a'|^2|w|^2+|b'|^2+a'\bar{b}'w+\bar{a}'b'\bar{w}= \\ =R^2(|c|^2|w|^2+|d|^2+c\bar{d}w+\bar{c}d\bar{w}).$$

Если положить $w=u+iv$ и записать это уравнение в декартовых координатах на плоскости (u, v), то получим уравнение

$$A(u^2+v^2)+Bu+Cv+D=0,$$

которое является уравнением окружности или прямой. Свойство доказано. □

Для формулировки следующего свойства нужно сначала ввести понятие симметрии относительно окружности.

Точки z и ζ называются *симметричными относительно окружности* Γ, если они лежат на одном луче, выходящем из центра Γ, и произведение их расстояний от центра Γ равно квадрату радиуса Γ. Центр Γ считается симметричным с бесконечно удаленной точкой.

Симметрия относительно прямой понимается в обычном смысле:

Точки z и ζ называются *симметричными относительно прямой* Γ, если они лежат по разные стороны Γ на одном расстоянии от нее и соединяющий их отрезок перпендикулярен Γ.

Приведем типичные примеры симметричных точек. Точки z и $\bar{z}$ являются симметричными относительно действительной оси. Точки z и $-\bar{z}$ являются симметричными относительно мнимой оси. Точки z и $1/\bar{z}$ являются симметричными относительно окружности $|z|=1$.

Очевидным образом вводится понятие множеств, симметричных относительно окружности.

Симметрию относительно окружности можно рассматривать как отображение расширенной плоскости на расширенную плоскость. Формулы этого отображения находятся без труда:

Если $\zeta(z)$ — точка, симметричная с точкой z относительно окружности $|z-a|=R$, то $\zeta(z)=a+\dfrac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}}$.

Таким образом, преобразование симметрии относительно окружности отличается от дробно-линейного преобразования еще переходом к комплексно сопряженным величинам. Свойства преобразования симметрии тесно связаны со свойствами дробно-линейных преобразований. Так, свойство 3 означает:

Множество, симметричное с окружностью относительно окружности, является окружностью или прямой. □

Лемма. *Для того чтобы точки z и ζ были симметричны относительно окружности* Г, *необходимо и достаточно, чтобы любая окружность C, проходящая через эти точки, пересекала* Г *под прямым углом.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что центр окружности Г находится в начале координат.

Докажем достаточность. Поскольку любая окружность, проходящая через точки z и ζ, пересекает Г под прямым углом, то и прямая, соединяющая эти точки, обладает этим свойством. Следовательно, прямая, соединяющая точки z и ζ, обязана проходить через начало координат. Точки z и ζ должны лежать на одном луче, выходящем из начала, по разные стороны Г, так как в противном случае окружность, проходящая через z и ζ и имеющая отрезок (z, ζ) диаметром, не могла бы пересекать Г. Таким образом, начало лежит вне любой окружности C, проходящей через точки z и ζ, а луч, проходящий через эти точки, является для этой окружности секущей. Расстояние от начала до ближайшей из точек z и ζ является внешней частью секущей, а до более далекой — длиной секущей (по терминологии учебников элементарной геометрии). Известна теорема элементарной геометрии: произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной из той же точки. Касательная к C из начала имеет длину радиуса Г, так как C и Г по условию пересекаются под прямым углом. Достаточность доказана.

Необходимость доказывается тем же построением, так как произведение секущей на ее внешнюю часть может равняться квадрату внешней части другой секущей (радиус Г, проведенный в точку пересечения C и Г) только в том случае, когда эта вторая секущая является касательной. Лемма доказана.

Свойство 4. *Если точки z_1 и z_2 симметричны относительно прямой или окружности* Г, *а w_1, w_2 и L — образы z_1, z_2 и* Г *при дробно-линейном отображении, то точки w_1 и w_2 симметричны относительно окружности (или прямой) L.*

Согласно лемме для доказательства симметричности точек w_1 и w_2 относительно окружности L достаточно показать, что все окружности, проходящие через эти точки, пересекают L под прямым углом. Но окружности, проходящие через w_1 и w_2,— это образы окружностей, проходящих через z_1 и z_2. Точки z_1 и z_2 симметричны относительно Г, так что окружности, проходящие через z_1 и z_2, пересекают Г под прямым углом.

Поскольку дробно-линейное отображение является конформным, то угол между кривыми равен углу между их образами. Отсюда и следует утверждение свойства 4. $\square$

Докажем несколько формул, относящихся к дробно-линейным отображениям.

Теорема 2.1. *Пусть ни среди точек* z_1, z_2, z_3, *ни среди точек* w_1, w_2, w_3 *нет равных. Тогда существует единственное дробно-линейное отображение* $w = w(z)$, *переводящее точки* z_k *в точки* w_k. *Это отображение определяется формулой*

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Ясно, что функция $w(z)$, определяемая равенством (2.2), является дробно-линейной функцией и что она переводит точки z_k в точки w_k. Остается показать, что $w(z)$ — единственная дробно-линейная функция, обладающая этим свойством. Пусть даны две такие функции $w_1(z)$ и $w_2(z)$, а $\zeta_2(w)$ — функция, обратная к $w_2(z)$. Ясно, что отображение функцией $\zeta_2(w_1(z))$ оставляет на месте точки z_k, так как $w_1(z_k) = w_k$, а $\zeta_2(w_k) = z_k$. Согласно свойству 2 $\zeta_2(w_1(z))$ — дробно-линейная функция. Положим

$$\zeta_2(w_1(z)) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Записывая условие, что при отображении функцией $\zeta_2(w_1(z))$ точки z_k остаются на месте, получаем систему уравнений

$$\frac{az_k + b}{cz_k + d} = z_k \qquad (k = 1, 2, 3)$$

или

$$cz_k^2 + (d - a) z_k + b = 0 \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Многочлен второй степени $cz^2 + (d - a)z + b$ может иметь три различных корня лишь в том случае, если все его коэффициенты равны нулю. Следовательно, $\zeta_2(w_1(z)) \equiv z$ и $w_2(z) = w_1(z)$. Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Любое конформное отображение круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ имеет вид*

$$w(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-z\bar{a}}, \qquad (2.3)$$

где a — любая точка круга $|z| < 1$, а θ — любое действительное число.

Доказательство. Покажем сначала, что функция, определяемая равенством (2.3), действительно отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$. Для этого в силу взаимной однозначности дробно-линейного отображения достаточно показать, что окружность $|z| = 1$ переходит в окружность $|w| = 1$ (поскольку точка $z = a$ из круга $|z| < 1$ переходит в точку $w = 0$ из круга $|w| < 1$). Положим $z = e^{i\varphi}$. Тогда $|z| = 1$, $\bar{z} = e^{-i\varphi}$, и мы получаем

$$w = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}}\cdot\frac{e^{i\varphi}-a}{e^{-i\varphi}-\bar{a}} = e^{i(\theta-\varphi)}\cdot\frac{z-a}{\bar{z}-\bar{a}}, \qquad |w| = 1,$$

так как модуль комплексно сопряженного числа равен модулю самого числа.

Итак, мы доказали, что функция, определяемая равенством (2.3), отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$. Покажем, что других конформных отображений нет. По теореме Римана (см. конец § 1) конформное отображение любой односвязной области на круг $|w| < 1$ определяется единственным образом, если задать точку $z = a$ из отображаемой области, переходящей в точку $w = 0$, и аргумент производной отображающей функции в точке $z = a$. Для функции, определяемой равенством (2.3), $w(a) = 0$, $\arg w'(a) = \theta$. Следовательно, иных отображений нет, и теорема доказана. $\square$

Аналогично доказываются и следующие утверждения:

Любое конформное отображение круга $|z| < R$ на круг $|w| < 1$ имеет вид

$$w = Re^{i\theta}\frac{z-a}{R^2-z\bar{a}} \qquad (|a| < R). \qquad (2.4)$$

Любое конформное отображение полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ *на круг $|w| < 1$ имеет вид*

$$w = e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\bar{a}} \qquad (\operatorname{Im} a > 0). \qquad (2.5)$$

Любое конформное отображение полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ *на полуплоскость* $\operatorname{Im} w > 0$ *имеет вид*

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{2.6}$$

где a, b, c, d — *действительные числа и* $ad - bc > 0$.

§ 3. Конформные отображения элементарными функциями

Если дана некоторая область и голоморфная в ней функция $f(z)$, то сразу не видно алгоритма, который позволил бы найти образ данной области при отображении $w = f(z)$. С кривыми дело обстоит проще. Если $z = z(t)$ — уравнение кривой в плоскости z, то уравнение образа этой кривой $w = f(z(t))$. Поэтому исследование отображений, совершаемых данной функцией, лучше всего проводить следующим образом: выбираем семейство кривых, покрывающее интересующую нас область, и находим образы кривых этого семейства. Выбор семейства определяется, конечно, конкретным видом отображающей функции.

Покажем, как исследуются таким образом основные отображения, совершаемые элементарными функциями. Это даст некоторый запас простейших отображений, которыми мы будем оперировать в дальнейшем. □

1. *Функции* $w = e^z$ *и* $z = \ln w$. Для исследования отображения $w = e^z$ рассмотрим семейство прямых, параллельных действительной оси. Параметрическое уравнение этих прямых имеет вид $z = x + iC$, где C — произвольная действительная постоянная, а параметр x меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Когда x возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, точка z проходит прямую $\operatorname{Im} z = C$ слева направо. Уравнение образа этой прямой при отображении $w = e^z$ имеет вид $w = e^x \cdot e^{iC}$, $-\infty < x < \infty$, или $w = te^{iC}$, $0 < t < \infty$. Следовательно, при отображении $w = e^z$ образом прямой $\operatorname{Im} z = C$ является луч $\arg w = C$.

Будем теперь двигать прямую, непрерывно увеличивая C (начнем с $C = a$). Тогда луч, являющийся образом прямой, будет непрерывно поворачиваться против часовой стрелки. При таком движении прямая опишет полосу $a < \operatorname{Im} z < b$, а ее образ — луч — опишет угол $a < \arg w < b$, если только величина b не превзойдет значения $a + 2\pi$. При $b > a + 2\pi$ луч сделает полный оборот и опишет всю плоскость w с выколотой точкой $w = 0$. Следовательно, при отображении функцией $w = e^z$ образом полосы $a < \operatorname{Im} z < b$, $b - a \leqslant 2\pi$, является угол $a < \arg w < b$, а образом полосы $a < \operatorname{Im} z < b$, $b - a > 2\pi$, является вся конечная плоскость w с выколотой точкой $w = 0$.

Выясним, когда отображение будет взаимно однозначным, т. е. где функция e^z является однолистной. Совершенно очевидно, что необходимым и достаточным условием однолистности функции в области D служит существование обратной к ней функции, определенной в образе этой области. Функция e^z имеет обратную к ней аналитическую функцию $\ln w$. Обратная к e^z функция определена (т. е. однозначна) в области, если аналитическая функция $\ln w$ допускает выделение в этой области голоморфной ветви. Если $b - a \leqslant 2\pi$, то мы знаем, что функция $\ln w$ допускает выделение голоморфной ветви в угле $a < \arg w < b$. Выделение голоморфной ветви $\ln w$ в плоскости w с выколотой точкой $w = 0$ невозможно. Таким образом, мы пришли к следующим результатам:

Полоса

$$a + 2\pi k < \operatorname{Im} z < b + 2\pi k \qquad (b - a \leqslant 2\pi) \tag{3.1}$$

при любом целом k конформно отображается функцией $w = e^z$ на угол

$$a < \arg w < b. \tag{3.2}$$

Функция $\ln w$ *конформно отображает угол* (3.2) *на одну из полос* (3.1) (число k определяется выбором голоморфной ветви аналитической функции $\ln w$ в этом угле).

Отображение функцией $w = e^z$ полосы $a < \operatorname{Im} z < b$ ширины, большей 2π, на кольцо $0 < |w| < \infty$ уже не является взаимно однозначным.

Заметим, что последнее утверждение сразу следует и из периодичности функции e^z с периодом $2\pi i$.

Полезно знать также, куда переходят при отображении функцией $w = e^z$ прямые, параллельные мнимой оси. Записав их уравнения в виде $z = C + iy$, $-\infty < y < \infty$, получаем для их образов уравнения $w = e^C e^{iy}$, $-\infty < y < \infty$. Ясно, что это уравнение представляет собой уравнение окружности $|w| = e^C$, обходимой бесконечно много раз. Каждый отрезок прямой длины 2π отвечает полному обходу окружности.

Соединяя эти сведения с полученными выше, получаем:

Прямоугольник

$$c < \operatorname{Re} z < d,\ a + 2\pi k < \operatorname{Im} z < b + 2\pi k \qquad (b - a < 2\pi) \tag{3.3}$$

при любом целом k конформно отображается функцией $w = e^z$ на кольцевой сектор

$$e^c < |w| < e^d,\ a < \arg w < b. \tag{3.4}$$

Функция $z = \ln w$ конформно отображает кольцевой сектор (3.4) *на один из прямоугольников* (3.3) (число k определяется выбором голоморфной ветви аналитической функции $\ln w$ в секторе). $\square$

2. *Функция Жуковского* $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ *и функция* $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$. Исследуем обе функции вместе, так как они являются обратными одна к другой.

В качестве семейства кривых удобно взять лучи $\arg z = \varphi$ или окружности $|z| = r$. Рассмотреть придется оба семейства. Начнем с семейства окружностей.

Уравнение окружности $|z| = r$ запишем в виде $z = re^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Тогда уравнение образа этой окружности при отображении $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ получим в виде

$$w = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right), \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Поскольку это уравнение нам незнакомо, его стоит записать в координатах, положив $w = u + iv$. Тогда получим

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \tag{3.5}$$

Исключая из этой системы уравнений параметр φ, приходим к уравнению эллипса

$$\frac{u^2}{a_r^2} + \frac{v^2}{b_r^2} = 1 \quad \left(a_r = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \quad b_r = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\right),$$

имеющего фокусы в точках $w = 1$ и $w = -1$. Поэтому при отображении $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ образом окружности $|z| = r$ является этот эллипс (или его часть). Из уравнений (3.5) видно, что при φ, меняющемся от нуля до 2π, точка w обходит весь эллипс, причем при $r < 1$ эллипс обходится по часовой стрелке, а при $r > 1$ — против часовой стрелки.

Посмотрим, как меняются эллипсы, когда r монотонно и непрерывно возрастает от единицы до бесконечности. При $r = 1$ малая полуось эллипса равна нулю и эллипс вырождается в отрезок $(-1, 1)$, проходимый дважды. При возрастании r обе полуоси увеличиваются и при $r \to +\infty$ стремятся к бесконечности. Следовательно, образом области $|z| > 1$, заполняемой окружностями $|z| = r$, $r > 1$, является вся плоскость w с разрезом по отрезку $(-1, 1)$. Отображение является взаимно однозначным, так как функция $w + \sqrt{w^2 - 1}$, обратная к функции $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, допускает выделение голоморфной ветви в плоскости w с разрезом по отрезку $(-1, 1)$ $\Bigl($для этой цели функцию нужно представить в виде $w\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{w^2}}\right)$ и применить ко второму сомножителю теорему о монодромии в расширенной плоскости с разрезом по отрезку $(-1, 1)\Bigr)$.

Укажем еще и на другой способ исследования однолистности функции $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Значение этой функции не меняется от замены z на $\frac{1}{z}$. Поскольку обратная функция двузначна, то мы видим, что каждое значение принимается функцией Жуковского в двух точках z и $\frac{1}{z}$ (и только в них). Поэтому для однолистности функции Жуковского в области D необходимо и достаточно, чтобы область D и ее образ D' при отображении $\zeta = \frac{1}{z}$ не имели общих точек.

Из этого соображения следует, что функция Жуковского однолистна в областях $|z| < 1$ и $|z| > 1$ и что при отображении функцией Жуковского образом каждой из этих областей является вся плоскость w с разрезом по отрезку $(-1, 1)$.

Исследование образов лучей $\arg z = \varphi$ при отображении функцией $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ проводится совершенно аналогично. Исключая r из уравнений (3.5), приходим к уравнению гиперболы

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = 1$$

с фокусами в точках $w = 1$ и $w = -1$. Легко убеждаемся, что образом луча $\arg z = \varphi$ является одна из ветвей гиперболы. Эта ветвь при $\varphi = 0$ вырождается в луч $(1, +\infty)$, проходимый дважды, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ — во всю мнимую ось, при $\varphi = \pi$ — в луч $(-\infty, -1)$, проходимый дважды.

Проведенные исследования позволяют описать ряд конформных отображений, совершаемых функцией Жуковского $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$:

Круг $|z| < 1$ *на плоскость* w *с разрезом по отрезку* $(-1, 1)$.

Полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ *на плоскость* w *с разрезами по лучам* $(-\infty, -1)$ *и* $(1, +\infty)$.

Полукруг $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$, *на полуплоскость* $\operatorname{Im} w < 0$.

Круг $|z| < 1$ *с разрезами по отрезкам* $(b, 1)$, $0 < b < 1$, *и* $(-1, -a)$, $0 < a < 1$, *на плоскость* w *с разрезом по отрезку* $(-\alpha, \beta)$, *где* $\alpha = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$, $\beta = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right)$.

Каждую из областей в плоскости z можно заменить ее образом при отображении $\zeta = 1/z$, не меняя области, получающейся в плоскости w.

Функция $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$ совершает отображения, обратные указанным выше. $\square$

Отображения, описанные в п. 1 и 2, вместе с дробно-линейными отображениями дают нам значительный запас основных отображений. С их помощью можно строить отображения другими элементарными функциями. Дело в том, что, зная отображения, совершаемые функциями $f(z)$ и $F(z)$, мы знаем и отображение, совершаемое функцией $F(f(z))$ (суперпозицию первых двух отображений). Отображение любой из основных элементарных функций можно представить в виде суперпозиции какого-то числа уже изученных нами отображений. Например, отображение $w = \operatorname{tg} z$ можно записать в виде

$$w_1 = 2iz, \quad w_2 = e^{w_1}, \quad w = -i\frac{w_2 - 1}{w_2 + 1},$$

а отображение $w = \cos z$ — в виде

$$w_1 = iz, \quad w_2 = e^{w_1}, \quad w = \frac{1}{2}\left(w_2 + \frac{1}{w_2}\right).$$

Подробно разберем один простейший пример.

3. *Функция* $w = z^\alpha$ (α — действительное положительное число). Имеем $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$. Представим отображение функцией z^α в виде суперпозиции отображений

$$w_1 = \ln z, \quad w_2 = \alpha w_1, \quad w = e^{w_2}$$

и рассмотрим отображение угла $a < \arg z < b \quad (b - a \leqslant 2\pi)$.

Согласно п. 1 угол

$$a < \arg z < b \qquad (b - a \leqslant 2\pi)$$

переходит в одну из полос

$$a + 2\pi k < \operatorname{Im} w_1 < b + 2\pi k \tag{3.6}$$

(целое число k определяется выбором ветви $\ln z$ в угле).

Полоса (3.6) переходит в полосу

$$\alpha a + 2\pi\alpha k < \operatorname{Im} w_2 < \alpha b + 2\pi\alpha k. \tag{3.7}$$

Полоса (3.7) при $\alpha(b-a) \leqslant 2\pi$ переходит в угол

$$\alpha a + 2\pi\alpha k < \arg w < \alpha b + 2\pi\alpha k, \tag{3.8}$$

а при $\alpha(b-a) > 2\pi$ во всю плоскость w с выколотой точкой $w = 0$.

Следовательно:

Если $0 < b - a \leqslant 2\pi$ *и* $\alpha(b-a) \leqslant 2\pi$, *то угол*

$$a < \arg z < b$$

конформно отображается функцией $w = z^\alpha$ *на один из углов*

$$\alpha a + 2\pi\alpha k < \arg w < \alpha b + 2\pi\alpha k.$$

(Целое число k определяется выбором голоморфной ветви функции в исходном угле.)

Ясно, что исходный угол можно заменить кольцевым сектором и в результате отображения тоже получить некоторый другой кольцевой сектор. □

Если перед нами стоит задача найти функцию, конформно отображающую одну заданную область на другую, то мы поступаем примерно так же, как при отыскании неопределенного интеграла. Описанные выше отображения играют при этом примерно ту же роль, что и табличные интегралы при интегрировании.

§ 4. Принцип симметрии Римана — Шварца

Принципом симметрии Римана — Шварца называется один частный способ аналитического продолжения, замечательный своей простотой. Он имеет большое значение в теории конформных отображений.

Сначала докажем простейший результат.

Теорема 4.1. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D, частью границы которой является отрезок действительной оси L, и непрерывна вплоть до границы D. Если на отрезке L функция $f(z)$ принимает действительные значения, то ее можно аналитически продолжить через отрезок L в область D', симметричную с областью D относительно действительной оси. Продолжение дается формулой*

$$F(z)=\overline{f(\bar{z})}. \tag{4.1}$$

(*Если D и D' имеют общие точки, то значения $F(z)$ и $f(z)$ в этих точках не обязаны совпадать.*)

Доказательство. Прежде всего покажем, что функция $F(z)$, определенная равенством (4.1), голоморфна в области D' и непрерывна вплоть до границы D'. Непрерывность следует из очевидного равенства

$$|F(z_1)-F(z_2)| = |f(\bar{z}_1)-f(\bar{z}_2)|.$$

Для доказательства дифференцируемости $F(z)$ обозначим

$$A = \frac{F(z)-F(a)}{z-a}.$$

Тогда

$$\overline{A} = \frac{\overline{F(z)}-\overline{F(a)}}{\bar{z}-\bar{a}} = \frac{f(\bar{z})-f(\bar{a})}{\bar{z}-\bar{a}}$$

и $\lim\limits_{z\to a}\overline{A} = f'(\bar{a})$. Следовательно, предел $\lim\limits_{z\to a}\frac{F(z)-F(a)}{z-a}$ существует и равен $\overline{f'(\bar{a})}$, т. е. $F(z)$ дифференцируема в D', а значит, и голоморфна.

Возьмем теперь некоторую достаточно малую окрестность точки отрезка L. Одна половина этой окрестности входит в D, вторая — в D'. Рассмотрим функцию $\varphi(z)$, равную $f(z)$ в первой половине и $F(z)$ — во второй половине. Если мы докажем, что $\varphi(z)$ голоморфна во всей окрестности, то это будет означать, что $f(z)$ аналитически продолжается через L, и мы получим утверждение теоремы. Для этой цели заметим, что $\varphi(z)$ непрерывна в точках отрезка L (а значит, и во всей окрестности), так как $\lim\limits_{z\to x} f(z) = f(x)$, $\lim\limits_{z\to x} F(z) = \overline{f(x)}$, а $f(x) = \overline{f(x)}$ ввиду действительности $f(x)$ при $x \in L$. Применяя теорему 2.2 гл. IV о стирании особенностей, получаем голоморфность $\varphi(z)$. Теорема доказана.

Замечание. Если функция $f(x)$ конформно отображает область D на некоторую область B, то из формулы (4.1) легко следует, что функция $F(z)$ конформно отображает область D' на область B', симметричную с областью B относительно действительной оси. $\square$

С помощью дробно-линейных отображений теореме 4.1 можно придать значительно более общий вид.

Теорема 4.2. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D, граница которой содержит дугу окружности L, и непрерывна вплоть до границы D. Если значения, принимаемые функцией $f(z)$ на дуге L, лежат на окружности Γ, то функцию $f(z)$ можно аналитически продолжить через дугу L в область D', симметричную с областью D относительно окружности, содержащей дугу L. Функция $F(z)$, дающая аналитическое продолжение функции $f(z)$ в область D', определяется там следующим образом: значения $F(z')$ и $f(z)$ симметричны относительно окружности Γ, если точки z' и z симметричны относительно окружности, содержащей дугу L.*

Доказательство. Пусть

$$z(\zeta) = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}, \quad t(w) = \frac{a'w + b'}{c'w + d'},$$

а $\zeta(z)$ и $w(t)$ — обратные к ним дробно-линейные отображения. Подберем функции $z(\zeta)$ и $t(w)$ так, чтобы при отображении $z = z(\zeta)$ действительная ось плоскости ζ переходила в ту окружность плоскости z, которая содержит дугу L, а при отображении $t = t(w)$ окружность Γ в плоскости w переходила в действительную ось плоскости t. Этого всегда можно добиться, скажем, с помощью формул теоремы 2.1, задав соответствующие тройки точек.

Обозначим через D_1 ту область плоскости ζ, которая переходит в область D при отображении $z = z(\zeta)$, а через L_1 — прообраз дуги L при этом отображении. Согласно выбору функции $z(\zeta)$ этот прообраз является отрезком действительной оси. Таким образом, функция $f_1(\zeta)=f(z(\zeta))$ голоморфна в области D_1 и непрерывна вплоть до ее границы, а на отрезке действительной оси L_1 функция $f_1(\zeta)$ принимает значения, лежащие на окружности Г.

Далее, рассмотрим функцию

$$g(\zeta)=t(f_1(\zeta))=t(f(z(\zeta))).$$

Поскольку при отображении $t=t(w)$ окружность Г переходит в действительную ось, то функция $g(\zeta)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 4.1 и ее можно аналитически продолжить в область D_1', симметричную с D_1 относительно действительной оси. Следовательно, функцию $f(z)$, которая выражается через $g(\zeta)$ с помощью дробно-линейных отображений

$$f(z)=w(g(\zeta(z))),$$

можно аналитически продолжить в область D', являющуюся образом области D_1' при отображении $z=z(\zeta)$. Но дробно-линейные отображения сохраняют симметрию точек относительно прямых и окружностей. Поэтому область D' симметрична с областью D относительно образа действительной оси при отображении $z=z(\zeta)$, т. е. относительно окружности, содержащей дугу L. Таким образом, мы получили утверждение теоремы о возможности продолжения функции $f(z)$ в область D' через дугу L. Из тех же соображений получаем и формулу для продолжающей функции. Теорема доказана. $\square$

Ясно, что замечание к теореме 4.1 применимо и сейчас. Поскольку этим замечанием приходится часто пользоваться, сформулируем его отдельно:

Следствие. *Пусть функция* $f(z)$, *голоморфная в области* D *и непрерывная вплоть до ее границы, конформно отображает область* D *на область* B. *Пусть, далее, при отображении* $w=f(z)$ *дуга окружности* L, *входящая в границу* D, *переходит в дугу окружности* Г, *входящую в границу* B. *Обозначим через* D' *область, симметричную с областью* D *относительно окружности, содержащей дугу* L, *а через* B' — *область, симметричную с областью* B *относительно окружности, содержащей дугу* Г. *Допустим, что области* D *и* D', B *и* B' *не имеют* *общих точек, и обозначим через G область, состоящую из объединения D, D' и дуги L, входящей в их общую границу, а через K — область, состоящую из объединения B, B' и дуги Γ. Тогда функцию $f(z)$ можно аналитически продолжить в область G, и она конформно отображает ее на область K.* $\square$

Покажем, как применяется принцип симметрии при отыскании конформных отображений заданных областей.

Пример 1. Найдем какую-либо функцию, конформно отображающую плоскость z с разрезами по отрезкам $\left(0, e^{\frac{k\pi i}{n}}\right)$ $(k=1, 2, \ldots, 2n)$ на круг $|w|<1$.

И плоскость с разрезами, и круг делятся на $2n$ симметричных частей: углы

$$\frac{k-1}{n}\pi<\arg z<\frac{k}{n}\pi \qquad (k=1, 2, \ldots, 2n).$$

и секторы

$$|w|<1, \quad \frac{k-1}{n}\pi<\arg w<\frac{k}{n}\pi \qquad (k=1, 2, \ldots, 2n).$$

Естественно ожидать, что среди функций, конформно отображающих нашу область на круг, найдется такая, которая отображает каждый из углов на соответствующий сектор.

Действительно, докажем, что функцию $f(z)$, конформно отображающую угол

$$0<\arg z<\frac{\pi}{n} \tag{4.2}$$

на сектор

$$|w|<1, \qquad 0<\arg w<\frac{\pi}{n}, \tag{4.3}$$

и переводящую лучи $(1, +\infty)$ и $(e^{\pi i/n}, +\infty e^{\pi i/n})$ в радиусы сектора $(0, 1)$ и $(0, e^{\pi i/n})$, можно аналитически продолжить в плоскость с разрезами $(0, e^{k\pi i/n})$ $(k=1, 2, \ldots, 2n)$, и продолженная функция отображает ее на круг $|w|<1$.

Для доказательства применим принцип симметрии. Возьмем в качестве области D угол (4.2), в качестве B — сектор (4.3), а в качестве L и Γ — луч $(e^{\pi i/n}, +\infty e^{\pi i/n})$ и радиус $(0, e^{\pi i/n})$ соответственно. Тогда, применяя следствие теоремы 4.2, получаем, что функцию $f(z)$ можно аналитически продолжить через луч L в область G — угол $0<\arg z<\frac{2\pi}{n}$ с разрезом по отрезку $(0, e^{\pi i/n})$. Образом области G при отображении продолженной функцией является сектор $|w|<1$, $0<\arg w<\frac{2\pi}{n}$.

Проведенное рассуждение можно повторить, применив к области G и к продолженной функции, взяв в качестве новой дуги L луч $(e^{2\pi i/n}, +\infty e^{2\pi i/n})$, и т. д. В результате придем к продолжению функции $f(z)$ на всю плоскость с разрезами.

Таким образом, остается лишь найти отображение угла на сектор, удовлетворяющее указанным условиям, т. е. функцию $f(z)$. Заметим, что фактически никакого аналитического продолжения нам не придется делать. Рассуждения с аналитическим продолжением были необходимы только для оправдания условий, определяющих выбор отображения угла на сектор.

Для отыскания функции $f(z)$ поступим следующим образом.

Отображение $w_1=z^n$ переводит угол $0<\arg z<\frac{\pi}{n}$ в полуплоскость $\operatorname{Im} w_1>0$, причем лучи $(1, +\infty)$ и $(e^{\pi i/n}, +\infty e^{\pi i/n})$ переходят в лучи $(1, +\infty)$ и $(-1, -\infty)$ соответственно.

Отображение $w_2=w_1-\sqrt{w_1^2-1}$ (функция, обратная к функции Жуковского) переводит полуплоскость $\operatorname{Im} w_1>0$ в полукруг $|w_2|<1$, $\operatorname{Im} w_2<0$, причем луч $(1, +\infty)$ переходит в радиус $(0, 1)$, а луч $(-1, -\infty)$ — в радиус $(-1, 0)$.

Отображение $w_3=-w_2$ — это поворот на угол π вокруг начала координат против часовой стрелки.

Отображение $w=\sqrt[n]{w_3}$ переводит полукруг $|w_3|<1$, $\operatorname{Im} w_3>0$, в сектор $|w|<1$, $0<\arg w<\frac{\pi}{n}$, причем радиусы переходят в радиусы.

Искомое отображение получено. Выражая w непосредственно через z, получаем

$$w(z)=\sqrt[n]{z^n-\sqrt{z^{2n}-1}}.$$

Для функции $(z^n-\sqrt{z^{2n}-1})^{1/n}$ выбирается голоморфная в нашей плоскости с разрезами ветвь, принимающая для $z>1$ положительные значения. □

Не следует думать, что принцип симметрии лишь облегчает построение отображающей функции для областей с большим числом симметрий.

Пример 2. Найдем какую-либо функцию, конформно отображающую область D плоскости $z = x + iy$, определенную неравенствами

$$x^2 - y^2 > \frac{1}{2}, \quad x > 0,$$

на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$.

При исследовании функции Жуковского в § 3 мы видели, что граница области D $\left(\text{т. е. ветвь гиперболы } x^2 - y^2 = \frac{1}{2}, x > 0\right)$ отображается функцией $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ в луч $\arg w = \frac{\pi}{4}$. Однако всю область D нельзя отображать этой фукцией, так как она имеет в ней особую точку $z = 1$. Тем не менее отображение этой функцией можно использовать для отыскания отображения верхней половины области D, т. е. области, определенной неравенствами

$$x^2 - y^2 > \frac{1}{2}, \quad x > 0, \quad y > 0. \tag{4.4}$$

С помощью принципа симметрии легко найдем искомое отображение.

Те же соображения, что и в примере 1, показывают, что мы получим искомое отображение, если найдем отображение верхней половины области D на угол $0 < \arg w < \frac{\pi}{2}$. При этом нужно только потребовать, чтобы при отображении дополнительный разрез в области D, т. е. луч $(1/\sqrt{2}, +\infty)$, переходил в дополнительный разрез в полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$, т. е. в луч $\arg w = 0$, иными словами, чтобы часть гиперболы $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$, $x > 0$, $y > 0$, переходила в положительную часть действительной оси. Это отображение строим следующим образом.

Функция $w_1 = z + \sqrt{z^2 - 1}$ отображает область, определенную неравенствами (4.4), на сектор $|w_1| < 1$, $0 < \arg w_1 < \frac{\pi}{4}$, причем часть гиперболы, входящая в границу области, переходит в радиус $(0, e^{\pi i/4})$.

Функция $w_2 = w_1^4$ отображает сектор $|w_1| < 1$, $0 < \arg w_1 < \frac{\pi}{4}$, в полукруг $|w_2| < 1$, $\operatorname{Im} w_2 > 0$, причем радиус $(0, e^{\pi i/4})$ переходит в радиус $(0, -1)$.

Функция $\zeta = \frac{1}{2}\left(w_2 + \frac{1}{w_2}\right)$ отображает полукруг $|w_2| < 1$, $\operatorname{Im} w_2 > 0$, в полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta < 0$, причем радиус $(0, -1)$ переходит в луч $(-1, -\infty)$.

Итак, отображение $\zeta = \zeta(z)$ переводит верхнюю половину области D в полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta < 0$, причем часть гиперболы, входящая в границу этой половины, переходит в луч $(-1, -\infty)$, а луч $(1/\sqrt{2}, +\infty)$ — в остальную часть границы, т. е. в луч $(-1, +\infty)$. В силу принципа симметрии функцию $\zeta(z)$ можно аналитически продолжить через луч $(1/\sqrt{2}, +\infty)$ в область D и продолженная функция отображает область D на плоскость ζ с разрезом по лучу $(-1, -\infty)$. Для получения окончательного результата остается еще сделать отображение $w = \sqrt{2\zeta + 2}$, переводящее эту плоскость с разрезом в полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$.

Выражая w через z, получаем окончательное выражение для искомой отображающей функции

$$w = \sqrt{2 + (z + \sqrt{z^2 - 1})^4 + (z - \sqrt{z^2 - 1})^4}.$$

§ 5. Интеграл Кристоффеля — Шварца

Принцип симметрии можно применить для вывода формул, дающих аналитическое выражение функций, конформно отображающих круг или полуплоскость на многоугольник. Эти формулы известны под названием *формул Кристоффеля — Шварца* или *интеграла Кристоффеля — Шварца*. Полностью докажем лишь простейшую из них.

Теорема 5.1. *Пусть D — конечный многоугольник (односвязный) с вершинами в точках $w = A_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) и с внутренними углами в этих вершинах, равными $\pi\alpha_k$ $(0 < \alpha_k \leqslant 2)$. Если функция $f(z)$ конформно отображает круг $|z| < 1$ на многоугольник D в плоскости w, причем прообразами вершин A_k являются точки a_k, лежащие на окружности $|z| = 1$, то*

$$f(z) = C\int_0^z (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} \ldots (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1}\, d\zeta + C_1 \quad (|z| < 1), \tag{5.1}$$

где C и C_1 — некоторые постоянные.

Доказательство. Ввиду сложности теоремы разобьем доказательство на несколько этапов.

1. Функция $f(z)$, конформно отображающая круг $|z|<1$ на многоугольник D, существует по теореме Римана (см. конец § 1). Покажем, что функцию $f(z)$ можно аналитически продолжить по любому пути, не проходящему через точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и что любой элемент полученной аналитической функции однолистен в любой точке расширенной комплексной плоскости, за исключением точек $z=a_k$.

Окружность $|z|=1$ разбивается точками a_k на n дуг, которые мы обозначим $L_1, L_2, \ldots, L_n$. По теореме о соответствии границ (см. конец § 1) функция $f(z)$ непрерывна в круге $|z|\leqslant 1$ и дуги L_k отображаются ею в соответствующие стороны многоугольника D, которые мы будем обозначать Γ_k. Согласно принципу симметрии (см. теорему 4.2 и следствие из нее) функцию $f(z)$ можно аналитически продолжить в область $|z|>1$ через каждую из дуг L_k. В результате продолжения получаем функцию $F_k(z)$. голоморфную в области $|z|>1$, которая конформно отображает эту область на многоугольник D_k, симметричный с многоугольником D относительно стороны Γ_k.

Каждая из функций $F_k(z)$ обладает теми же свойствами, что и функция $f(z)$. Она голоморфна в области $|z|>$ >1 и конформно отображает эту область на многоугольник D_k, причем точки a_s переходят в вершины многоугольника, а дуги L_s — в его стороны. Поэтому каждая из функций $F_k(z)$ аналитически продолжается в круг $|z|<1$ через дуги L_s. В результате продолжения получаются функции $F_{k,s}(z)$, к которым применимы те же рассуждения, и т. д.

Проведенные рассуждения показывают, что функцию $f(z)$ можно аналитически продолжить по любому пути, не проходящему через точки $z=a_k$ — концы дуг L_k.

Исследуем однолистность получаемых элементов аналитической функции (будем обозначать ее $F(z)$).

В каждой точке, не лежащей на окружности $|z|=1$, однолистность любого элемента $F(z)$ очевидна. Действительно, выделяя по этому элементу голоморфную ветвь аналитической функции $F(z)$ в круге $|z|<1$ (или в области $|z|>1$), получим функцию, конформно отображающую эту область на многоугольник, полученный из многоугольника D каким-то числом симметрий. Отсюда по определению следует однолистность элемента в любой точке круга $|z| < 1$ (или области $|z| > 1$).

Если точка $z = a$ лежит на дуге L_k, то выделим голоморфную ветвь в плоскости, разрезанной по всей окружности $|z| = 1$, за исключением дуги L_k. Тогда круг $|z| < 1$ отображается выделенной ветвью на некоторый многоугольник, а область $|z| > 1$ — на многоугольник, симметричный с ним относительно соответствующей стороны. Ясно, что некоторая окрестность дуги L_k конформно отображается на некоторую область, содержащую соответствующую сторону, общую для обоих упомянутых многоугольников. Отсюда следует однолистность всех элементов $F(z)$ и во всех точках окружности $|z| = 1$, за исключением точек $z = a_k$.

Особо подчеркнем, что бесконечно удаленная точка не является исключением — все элементы $F(z)$ голоморфны и однолистны в бесконечно удаленной точке.

2. Исследуем подробнее характер многозначности аналитической функции $F(z)$ и покажем, что функция $g(z) = \frac{F''(z)}{F'(z)}$ голоморфна во всей плоскости за исключением, может быть, точек $z = a_k$ и точки $z = \infty$.

Чтобы получить из исходной функции $f(z)$ какую-либо другую голоморфную ветвь аналитической функции $F(z)$ в круге $|z| < 1$ (или в области $|z| > 1$), надо указать последовательность номеров дуг L_k, через которые мы аналитически продолжали функцию $f(z)$. При различных последовательностях номеров мы получаем, вообще говоря, различные голоморфные ветви функции $F(z)$. Выясним, чем они отличаются. Достаточно выяснить, чем отличаются функции $F_k(z)$ и $F_s(z)$, построенные на первом этапе.

Обозначим для краткости через $(A)_\Gamma$ точку, симметричную с точкой A относительно прямой Г. Ясно, что $((A)_\Gamma)_\Gamma = A$.

По принципу симметрии имеем

$$F_k(z) = \left(f\left(\frac{1}{\bar z}\right)\right)_{\Gamma_k}, \quad f\left(\frac{1}{\bar z}\right) = (F_s(z))_{\Gamma_s},$$

так как точки z и $1/\bar z$ симметричны относительно окружности $|z| = 1$. Отсюда находим

$$F_k(z) = ((F_s(z))_{\Gamma_s})_{\Gamma_k} = e^{i\varphi_{k,s}}F_s(z) + \gamma_{k,s}$$

($\varphi_{k,s}$ и $\gamma_{k,s}$ — постоянные), так как две последовательно выполненные симметрии относительно прямых равносильны переносу и повороту. Обозначим $T_{k,s}(w) = e^{i\varphi_{k,s}}w + \gamma_{k,s}$. Тогда полученное соотношение можно записать в виде

$$F_k(z) = T_{k,s}(F_s(z)).$$

Из этого соотношения легко получаем

$$F_{k,m}(z) = T_{k,p}(T_{p,s}(F_{s,m}(z))),$$

и аналогично для любого числа индексов.

Поскольку суперпозиция линейных функций снова является линейной функцией, мы видим, что любые две ветви аналитической функции $F(z)$, скажем, $f_1(z)$ и $f_2(z)$ связаны соотношением

$$f_2(z) = e^{i\varphi}f_1(z) + \gamma,$$

где φ и γ — некоторые постоянные. Поэтому $\dfrac{f_1''(z)}{f_1'(z)} = \dfrac{f_2''(z)}{f_2'(z)}$.

Последнее равенство показывает, что выражение $g(z) = \dfrac{F''(z)}{F'(z)}$ не зависит от выбора ветви $F(z)$. Это означает, что функция $g(z)$ однозначна во всей плоскости. В силу доказанной на первом этапе однолистности всех элементов $F(z)$ в точках, отличных от $z = a_k$, мы получаем согласно теореме 1.2, что $\mathbf{F}'(z) \neq 0$ при $z \neq a_k$ и при $z \neq \infty$. Следовательно, функция $g(z)$ голоморфна во всей плоскости, за исключением, быть может, точек $z = a_k$ и точки $z = \infty$.

3. Покажем, что для построенной однозначной функции $g(z) = \dfrac{F''(z)}{F'(z)}$ справедлива формула

$$g(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k}.$$

Исследуем поведение функции $g(z) = \dfrac{F''(z)}{F'(z)}$ в окрестности бесконечно удаленной точки и в окрестности точек $z = a_k$ (эти точки, как доказано на втором этапе, могут быть для $g(z)$ изолированными особыми точками однозначного характера). При этом исследовании можно пользоваться любой голоморфной ветвью аналитической функции $F(z)$, например исходной функцией $f(z)$.

Функцию $f(z)$, как показано на первом этапе, можно аналитически продолжить в окрестность бесконечно удаленной точки, и она однолистна там. Согласно следствию 1 теоремы 1.2 имеем

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots \qquad (c_1 \neq 0).$$

Отсюда

$$f'(z) = -\frac{c_1}{z^2} - \frac{2c_2}{z^3} - \ldots, \qquad f''(z) = \frac{2c_1}{z^3} + \frac{6c_3}{z^4} + \ldots$$

Следовательно,

$$g(z) = -\frac{2}{z} + \frac{c_2'}{z^2} + \ldots$$

Таким образом, функция $g(z)$ голоморфна в точке $z = \infty$.

Для исследования функции $g(z)$ в окрестности точки $z = a_k$ рассмотрим функцию $h_k(z) = [f(z) - A_k]^{1/\alpha_k}$ в достаточно малом «полукруге» $|z - a_k| < \rho$, $|z| < 1$. Функция $f(z)$ конформно отображает этот «полукруг» на область, ограниченную двумя сторонами многоугольника D, выходящими из точки A_k, и некоторой кривой (образом «полуокружности» $|z - a_k| = \rho$, $|z| < 1$). Но функция $w = (\zeta - A)^{1/\alpha}$ конформно отображает угол раствора $\alpha\pi$ с вершиной в точке $\zeta = A$ на угол раствора π с вершиной в точке $w = 0$, т. е. на полуплоскость. Следовательно, функция $h_k(z)$ конформно отображает наш полукруг на область, ограниченную отрезком прямой (образ «диаметра») и некоторой кривой (образ «полуокружности»). По принципу симметрии функцию $h_k(z)$ можно аналитически продолжить через диаметр полукруга и полученная аналитическим продолжением функция (обозначим ее попрежнему $h_k(z)$) будет конформно отображать круг $|z - a_k| < \rho$ на некоторую область, содержащую точку $w = 0$. Поэтому функция $h_k(z)$ голоморфна и однолистна в точке $z = a_k$. Следовательно, по теореме 1.2 имеем $h_k'(a_k) \neq 0$, и мы можем написать

$$h_k(z) = (z - a_k)\varphi_k(z),$$

где $\varphi_k(z)$ голоморфна в точке $z = a_k$ и $\varphi_k(a_k) \neq 0$. Отсюда имеем

$$f(z) = A_k + (z - a_k)\alpha_k\psi_k(z), \qquad g(z) = \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k} + \theta_k(z),$$

где $\theta_k(z)$ голоморфна в точке $z = a_k$.

Теперь рассмотрим функцию $\delta(z) = g(z) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k}$.
Эта функция голоморфна во всей расширенной плоскости, так что по теореме Лиувилля (теорема 2.3 гл. IV) имеем $\delta(z) \equiv \text{const}$. Кроме того, было показано, что $g(z) \sim -\frac{2}{z}$ при $z \to \infty$, а значит, $\delta(z) \to 0$ при $z \to \infty$. Следовательно, $\delta(z) \equiv 0$, и наше утверждение доказано.

4. Было доказано, что

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k}.$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$\ln f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k - 1) \ln (z - a_k) + \ln C$$

или

$$f'(z) = C (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1}.$$

Интегрируя еще раз, получаем утверждение теоремы. $\square$

Отметим различные модификации формулы (5.1).

Прежде всего заметим, что та же самая формула (5.1) пригодна и для определения функции, отображающей на многоугольник D любую полуплоскость или круг. Следует только считать точки $z = a_k$ расположенными на соответствующей окружности или прямой. $\square$

Если одна из точек a_k является бесконечно удаленной точкой, то формула (5.1) даже упрощается. Именно, если $a_n = \infty$, то

$$f(z) = C \int_0^z (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (\zeta - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} \, d\zeta + C_1. \quad (5.2)$$

Доказательство формулы (5.2) остается тем же, только на третьем этапе точку $z = \infty$ нужно исследовать так же, как и точки $z = a_k$. $\square$

Если одна или несколько вершин многоугольника D попадает в бесконечность, формулы (5.1) и (5.2) остаются без изменений. Нужно лишь для определения соответствующих углов $\pi\alpha_k$ пользоваться определением угла в бесконечно удаленной точке, которое приведено в § 1. Угол $\pi\alpha_k$ уже может быть равен нулю (вообще говоря, он отрицателен). Доказательство формулы остается без изменений. □

Если бесконечно удаленная точка лежит внутри многоугольника, то формула принимает вид

$$f(z)=\int_0^z (\zeta-a_1)^{\alpha_1-1}\ldots(\zeta-a_n)^{\alpha_n-1}\frac{d\zeta}{(\zeta-a)^2}+C_1, \quad (5.3)$$

где $z=a$ — точка, переходящая в бесконечность. Доказательство отличается лишь тем, что на третьем этапе нужно исследовать еще и точку $z=a$. □

Аналогичным методом можно получить формулы и для функции, конформно отображающей полуплоскость или круг на многоугольник, ограниченный дугами окружностей. Схема доказательства остается прежней, но все этапы кроме первого подвергаются значительным изменениям. На втором этапе приходится доказывать однозначность не функции $g(z;\,f)=\frac{f''(z)}{f'(z)}$, а более сложной функции

$$S(z;\,f)=\frac{f'''(z)}{f'(z)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2=\sqrt{f'(z)}\,\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{\sqrt{f'(z)}}\right),$$

остающейся неизменной не только при линейных, но и при любых дробно-линейных преобразованиях, совершаемых над функцией $f(z)$, т. е. удовлетворяющей соотношению

$$S(z;\,f)\equiv S(z,\,T(f)),\quad T(f)=\frac{af+b}{cf+d}.$$

(Выражение $S(z;\,f)$ называется *инвариантом Шварца.*) Третий этап доказательства меняется сравнительно мало. Теми же средствами доказывается равенство

$$S(z;\,f)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\alpha_k^2}{(z-a_k)^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{C_k}{z-a_k},$$

где постоянные C_k подбираются так, чтобы $S(z;\,f)=O(z^{-4})$ $(z\to\infty)$. Сильнее всего усложняется четвертый этап доказательства. Вместо легко интегрируемого равенства $g(z;\,f)=\frac{f''(z)}{f'(z)}$ получаем дифференциальное уравнение

$$q''=S(z;\,f)\,q,$$

где $q(z)=\frac{1}{\sqrt{f'(z)}}$. □

Интегралы, возникающие из формул Кристоффеля — Шварца, как правило, не берутся в элементарных функциях. Однако главная неприятность не в этом. Наибольшая трудность — в определении постоянных a_k (а для многоугольников, ограниченных дугами окружностей, еще и постоянных C_k). Произвольно задать можно лишь три постоянные a_k. Они уже полностью определяют все отображение, а значит, и остальные постоянные. Для их определения можно написать систему уравнений, но решить эту систему (не приближенно) обычно не удается. Поэтому явные формулы для отображающих функций интеграл Кристоффеля — Шварца дает лишь для треугольников или для многоугольников, сводящихся к треугольникам с помощью принципа симметрии. В случае прямолинейных треугольников отображающая функция выражается через эллиптические функции, в случае треугольников, ограниченных дугами окружностей,— через гипергеометрические функции. Если треугольники очень вырожденные, то удается найти интегралы и через элементарные функции.

§ 6. Оценки конформного отображения вблизи границы

Во многих случаях не обязательно точно знать отображающую функцию. Бывает достаточно иметь оценку поведения этой функции вблизи той или иной граничной точки. Для этого желательно иметь неравенства, позволяющие оценить функцию, отображающую данную область G на некоторую каноническую область через простые геометрические характеристики границы области G в окрестности интересующей нас точки.

Сначала разъясним смысл неравенств, которые мы будем доказывать, на простом примере.

Пусть часть области G, лежащая в окрестности граничной точки ζ, представляет собой сектор раствора π/α. Тогда функция $w(z)$, конформно отображающая область G на круг $|w|<1$, имеет вид

$$w(z)=w(\zeta)+(z-\zeta)^{\alpha}g(z), \tag{6.1}$$

где функция $g(z)$ голоморфна в точке ζ и $g(\zeta)\neq 0$. (Подобное утверждение доказывалось с помощью принципа симметрии в третьем этапе доказательства теоремы 5.1.)

Из представления (6.1) вытекают неравенства

$$C|z-\zeta|^{\alpha}<|w(z)-w(\zeta)|<C'|z-\zeta|^{\alpha}.$$

Наша основная цель — доказать аналогичные неравенства и для случая, когда в точке ζ соединяются не две прямые, а две более или менее произвольные кривые. При этом, конечно, функцию $|z-\zeta|^{\alpha}$ придется заменить какой-то другой функцией, определяемой по расстоянию между соединяющимися кривыми. □

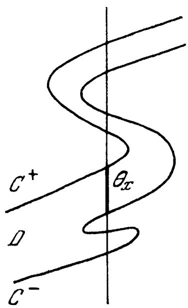

Рис. 5

Чтобы возможно больше упростить формулировки результатов, задача обычно рассматривается в следующем каноническом виде.

Всюду в дальнейшем будем считать, что область D односвязна и имеет конечное непустое пересечение с любой прямой $\operatorname{Re} z=x$, $-\infty<x<\infty$, и что функция $w(z)$ конформно отображает область D на полосу $|\operatorname{Im} w|<\frac{\pi}{2}$, причем $\operatorname{Re} w\to\pm\infty$ при $\operatorname{Re} z\to\to\pm\infty$. Через $z(w)$ будем обозначать функцию, обратную к $w(z)$.

Нетрудно убедиться, что функция $w(z)$ определяется наложенными условиями с точностью до аддитивной постоянной.

Граница области D распадается на две части, соединяющиеся лишь в бесконечности. Верхнюю граничную кривую мы будем обозначать C^+, а нижнюю — C^-. Ясно, что при отображении $w=w(z)$ кривая C^+ переходит в прямую $\operatorname{Im} w=\frac{\pi}{2}$, а кривая C^- — в прямую $\operatorname{Im} w=-\frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим сечение области D прямой $\operatorname{Re} z=x$. Это сечение состоит, вообще говоря, из счетного числа отрезков. Отберем среди этих отрезков те, которые соединяют C^+ и C^- (хотя бы один такой есть, и их конечное число). Тот отрезок, который встречается первым при движении вдоль области D от $\operatorname{Re} z=-\infty$ к $\operatorname{Re} z=+\infty$, обозначим θ_x (рис. 5), а его длину $\theta(x)$. □

Задача состоит в получении оценки для величины $\operatorname{Re}[w(z)-w(\zeta)]$ через $\theta(x)$ при больших значениях $\operatorname{Re}(z-\zeta)$.

К изложенной канонической постановке можно свести более или менее любую задачу. Например, при исследовании отображения $t = t(\zeta)$ области G на круг $|t| < 1$ в окрестности конечной точки $\zeta = a$ мы сводим задачу к канонической постановке с помощью замены переменных $z = \ln\frac{\zeta - a'}{\zeta - a}$, $w = \ln\frac{t - t(a')}{t - t(a)}$, где a и a' — граничные точки области G. Эта замена переводит область G в полосообразную область D, а круг — в полосу. □

Следующий результат носит название *теоремы Альфорса.*

Теорема 6.1. *Если* $z \in \theta_a$, $\zeta \in \theta_b$, *а*

$$\int_a^b \frac{dx}{\theta(x)} > 2,$$

то

$$\operatorname{Re}[w(\zeta) - w(z)] > \pi \int_a^b \frac{dx}{\theta(x)} - 4\pi.$$

Прежде чем приступать к доказательству теоремы, докажем одну элементарную лемму о неравенстве для интегралов, которой нам придется воспользоваться.

Лемма 1. *Пусть* $\theta(x)$ *и* $\omega(x)$ — *произвольные положительные функции. Если* $\int_a^b \frac{dx}{\theta(x)} > 2$, *то найдутся такие* ξ *и* η, *удовлетворяющие условию* $a < \xi < \eta < b$, *что*

$$\int_a^\xi \frac{dx}{\theta(x)} < 1, \quad \int_\eta^b \frac{dx}{\theta(x)} < 1,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_\xi^\eta \frac{\omega^2(t)}{\theta(t)}\, dt - \omega(\xi) - \omega(\eta) > -2\pi.$$

Доказательство леммы. Сначала приведем утверждение к виду, более удобному для доказательства.

Обозначим через c, a', b' числа, удовлетворяющие условиям $a < a' < c < b' < b$ и такие, что

$$\int_a^c \frac{dt}{\theta(t)} = \int_c^b \frac{dt}{\theta(t)} = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{dt}{\theta(t)} > 1, \quad \int_a^{a'} \frac{dt}{\theta(t)} = \int_{b'}^b \frac{dt}{\theta(t)} = 1.$$

Далее, обозначим

$$\varphi(x)=\left|\int_c^x \frac{\omega^2(t)}{\theta(t)}\,dt\right| \qquad (a<x<b).$$

Утверждение леммы заведомо вытекает из следующего утверждения:

Существуют точки ξ *и* η, $a<\xi<a'$, $b'<\eta<b$, *для которых*

$$\frac{1}{\pi}\varphi(\xi)>\omega(\xi)-\pi, \quad \frac{1}{\pi}\varphi(\eta)>\omega(\eta)-\pi.$$

Докажем существование η. Допустим противное. Тогда на всем отрезке (b', b) имеет место неравенство $\frac{1}{\pi}\varphi(x)<$ $<\omega(x)-\pi$, которое можно записать в виде

$$\omega^2(x)>\left[\frac{1}{\pi}\varphi(x)+\pi\right]^2 \qquad (b'<x<b).$$

При $x>c$, дифференцируя формулу для $\varphi(x)$, без труда находим $\omega^2(x)=\varphi'(x)\theta(x)$. Следовательно, мы получаем

$$\frac{1}{\theta(x)}<\frac{\pi^2\varphi'(x)}{[\varphi(x)+\pi^2]^2} \qquad (b'<x<b).$$

Интегрируя это неравенство от b' до b, получаем

$$\int_{b'}^{b}\frac{dx}{\theta(x)}<\pi^2\int_{\varphi(b')}^{\varphi(b)}\frac{d\varphi}{(\varphi+\pi^2)^2}<\pi^2\int_0^\infty\frac{d\varphi}{(\varphi+\pi^2)^2}=1.$$

Но согласно определению числа b' интеграл, стоящий слева, равен единице. Полученное противоречие доказывает существование постоянной η.

Аналогично доказывается существование ξ. $\square$

Доказательство теоремы. Обозначим через L_x образ отрезка θ_x при отображении $w=w(z)$ и положим (рис. 6)

$$u^+(x)=\sup_{w\in L_x}\operatorname{Re} w, \qquad u^-(x)=\inf_{w\in L_x}\operatorname{Re} w,$$

$$\omega(x)=u^+(x)-u^-(x).$$

Поскольку отрезок θ_x соединяет кривые C^+ и C^-, то кривая L_x соединяет прямые $\operatorname{Im} w=\frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{Im} w=-\frac{\pi}{2}$. Эта кривая лежит в прямоугольнике $|\operatorname{Im} w|<\frac{\pi}{2}$, $u^-(x)<$

$< \operatorname{Re} w < u^+(x)$, и имеет общие точки с каждой из его сторон (возможно, в их концах). Поэтому длина кривой L_x не меньше длины диагонали прямоугольника, которая равна $\sqrt{\pi^2 + \omega^2(x)}$. С другой стороны, длину кривой L_x можно записать в виде интеграла

$$\int_{L_x} |dw| = \int_{\theta_x} |dw(z)| =$$

$$= \int_{\theta_x} |w'(z)|\,|dz| = \int_{\theta_x} |w'(z)|\,dy.$$

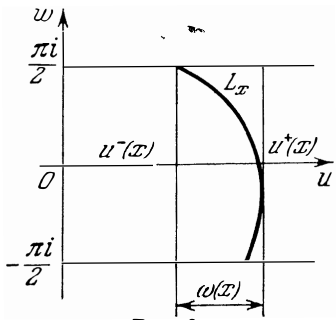

Рис. 6

Следовательно, мы имеем неравенство

$$\pi^2 + \omega^2(x) \leqslant \left\{\int_{\theta_x} |w'(z)|\,dy\right\}^2.$$

Но в силу неравенства Буняковского — Шварца

$$\left[\int fg\,dy\right]^2 \leqslant \int f^2\,dy \int g^2\,dy. \tag{6.2}$$

Поэтому, полагая $f = 1$, $g = |w'(z)|$ и учитывая, что $\int_{\theta_x} dy = \theta(x)$, приходим к неравенству

$$\pi^2 + \omega^2(x) \leqslant \theta(x) \int_{\theta_x} |w'(z)|^2\,dy.$$

Деля обе части этого неравенства на $\theta(x)$ и интегрируя по x от a до b, получаем

$$\int_a^b \int_{\theta_x} |w'(x+iy)|^2\,dx\,dy \geqslant \pi^2 \int_a^b \frac{dx}{\theta(x)} + \int_a^b \frac{\omega^2(x)}{\theta(x)}\,dx.$$

Интеграл, стоящий в левой части неравенства, есть не что иное, как площадь образа части области D, заключенной между θ_a и θ_b, при отображении $w = w(z)$ (см. § 1, формулу (1.3)). Этот образ является частью полосы $|\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2}$, заключенной между кривыми L_a и L_b, так что он заведомо лежит внутри прямоугольника

$$|\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2}, \quad u^-(a) < \operatorname{Re} w < u^+(b)$$

и его площадь не превосходит площади этого прямоугольника. Так как площадь прямоугольника равна

$$\pi[u^+(b)-u^-(a)]=\pi[u^-(b)-u^+(a)]+\pi[\omega(b)+\omega(a)],$$

получаем неравенство

$$u^-(b)-u^+(a)\geqslant\pi\int_a^b\frac{dx}{\theta(x)}+\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{\omega^2(x)}{\theta(x)}\,dx-\omega(a)-\omega(b).$$

Но $u^+(x)$ и $u^-(x)$ — возрастающие функции x. Поэтому при $a<\xi<\eta<b$ имеем $u^-(b)-u^+(a)>u^-(\eta)-u^+(\xi)$. Выбирая ξ и η удовлетворяющими условиям леммы, получаем

$$u^-(b)-u^+(a)>\pi\int_\xi^\eta\frac{dx}{\theta(x)}-2\pi>\pi\int_a^b\frac{dx}{\theta(x)}-4\pi.$$

Это дает утверждение теоремы, так как $\operatorname{Re}w(\zeta)>u^-(b)$ при $\zeta\in\theta_b$ и $\operatorname{Re}w(z)<u^+(a)$ при $z\in\theta_a$. $\square$

Следующий результат, принадлежащий Варшавскому, позволяет оценивать величину $\operatorname{Re}[w(\zeta)-w(z)]$ с другой стороны. В этом результате на кривые C^+ и C^- накладываются более жесткие условия.

Уравнения кривых C^+ и C^- будем предполагать имеющими вид

$$y=\varphi^+(x),\quad y=\varphi^-(x).$$

Ясно, что $\theta(x)=\varphi^+(x)-\varphi^-(x)$. Кроме того, будем обозначать $\varphi(x)=\frac{1}{2}[\varphi^+(x)+\varphi^-(x)]$. Тогда

$$\varphi^\pm(x)=\varphi(x)\pm\frac{1}{2}\theta(x).$$

Теорема 6.2. *Пусть для всех x имеем $|\varphi'(x)|<M$, $|\theta'(x)|<M$. Если $a<b$, $z\in\theta_a$, $\zeta\in\theta_b$, то*

$$\operatorname{Re}[w(\zeta)-w(z)]<$$
$$<\pi\int_a^b\frac{1+\varphi'^2(x)}{\theta(x)}\,dx+\frac{\pi}{12}\int_a^b\frac{\theta'^2(x)}{\theta(x)}\,dx+12\pi(1+M^2).$$

Доказательство. Обозначим через P_u образ отрезка $\operatorname{Re}w=u$, $|\operatorname{Im}w|<\pi/2$, при отображении $z=z(w)$. Ясно, что кривая P_u соединяет кривые C^+ и C^-. Обозначим $x^+(u)=\sup\limits_{z\in P_u}\operatorname{Re}z$, $x^-(u)=\inf\limits_{z\in P_u}\operatorname{Re}z$.

Заметим сначала, что

$$\int\limits_{x^-(u)}^{x^+(u)} \frac{dx}{\theta(x)} < 4. \qquad (6.3)$$

Действительно, если интересующий нас интеграл меньше двух, то говорить не о чем. Если он больше двух, то, взяв такие значения $y^{\pm}$, чтобы $\operatorname{Re} w(x^+ + iy^+) = \operatorname{Re} w(x^- + iy^-) = u$, мы получим согласно теореме 6.1

$$0 = u - u > \pi \int\limits_{x^-}^{x^+} \frac{dx}{\theta(x)} - 4\pi \qquad (x^{\pm} = x^{\pm}(u)),$$

откуда и следует неравенство (6.3).

Перейдем к основной части доказательства. Пусть $w = u + iv$ — любая точка полосы $|\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2}$. Положим

$$\xi(v) = \xi_u(v) = \tau(x(u, v), \quad y(u, v)), \quad \tau(x, y) = \frac{y - \varphi(x)}{\theta(x)},$$

где $x(u, v) = \operatorname{Re} z(u + iv)$, $y(u, v) = \operatorname{Im} z(u + iv)$. Так как точка $z(w) = x(u, v) + iy(u, v)$ лежит в области D, а эта область определяется неравенствами $\varphi^-(x) < y < \varphi^+(x)$, где $\varphi^{\pm}(x) = \varphi(x) \pm \frac{1}{2}\theta(x)$, то $-\frac{1}{2} < \xi(v) < \frac{1}{2}$ при $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$ и при любых u, а $\xi\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm\frac{1}{2}$. Поэтому

$$1 = \xi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \xi\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \xi'(v)\,dv \leqslant \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\xi'(v)|\,dv = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\partial\tau}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial\tau}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \right| dv,$$

или

$$1 \leqslant \left\{ \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\partial\tau}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial\tau}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \right| dv \right\}^2.$$

К последнему интегралу применим неравенство

Буняковского — Шварца (см. (6.2)), положив $f=1$, $g=\left|\frac{\partial\tau}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial\tau}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right|$.

Это даст $1\leqslant\pi\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left|\frac{\partial\tau}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial\tau}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right|^2 dv$. Но

$$\left|\frac{\partial\tau}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial\tau}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right|^2\leqslant\left[\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right].$$

Поэтому

$$1\leqslant\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right]dv.$$

Интегрируя последнее неравенство по u от $u_1=\operatorname{Re} w(z)$ до $u_2=\operatorname{Re} w(\zeta)$, получаем

$$u_2-u_1\leqslant\pi\int\limits_{u_1}^{u_2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right]du\,dv.$$

Сделаем в интеграле замену переменных $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$ (т. е. отображение $z=z(u+iv)$). Якобиан этой замены в силу уравнений Коши — Римана равен $\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2$, так что

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right]du\,dv=dx\,dy,$$

и неравенство приводится к виду

$$u_2-u_1\leqslant\pi\iint\limits_{D_{1,2}}\left[\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy.$$

Здесь $D_{1,2}$ — образ прямоугольника $|\operatorname{Im} w|<\frac{\pi}{2}$, $u_1<\operatorname{Re} w<u_2$, при отображении $z=z(w)$.

Заметим, что область $D_{1,2}$ заведомо содержится в области

$$\varphi^-(x)<y<\varphi^+(x),\qquad a^-<x<b^+,$$

где обозначено $a^- = x^-(u_1)$, $b^+ = x^+(u_2)$. Поэтому

$$u_2 - u_1 \leqslant \pi \int\limits_{a^-}^{b^+} \left\{ \int\limits_{\varphi^-(x)}^{\varphi^+(x)} \left[\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2 \right] dy \right\} dx. \qquad (6.4)$$

Теперь найдем $\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2$. Так как $\tau(x, y) = \frac{y - \varphi(x)}{\theta(x)}$, то

$$\frac{\partial\tau}{\partial x} = -\frac{\varphi'(x)}{\theta(x)} - \frac{y - \varphi(x)}{\theta^2(x)}\theta'(x), \quad \frac{\partial\tau}{\partial y} = \frac{1}{\theta(x)}$$

и

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2 = \frac{1 + \varphi'^2(x)}{\theta^2(x)} - \frac{y - \varphi(x)}{\theta^3(x)}\varphi'(x)\,\theta'(x) + \\ + \frac{[y - \varphi(x)]^2}{\theta^4(x)}\theta'^2(x).$$

Подставим это выражепие в (6.4) и выполним интегрирование по y. После несложных преобразований получим

$$u_2 - u_1 \leqslant \pi \int\limits_{a^-}^{b^+} \left\{ 1 + \varphi'^2(x) + \frac{1}{12}\theta'^2(x) \right\} \frac{dx}{\theta(x)}.$$

Поскольку из условий теоремы следует, что $1 + \varphi'^2(x) + \frac{1}{12}\theta'^2(x) < \frac{13}{12}(1 + M^2)$, а согласно неравенству (6.3)

$$\int\limits_{a^-}^{a} \frac{dx}{\theta(x)} + \int\limits_{b}^{b^+} \frac{dx}{\theta(x)} < 8,$$

мы приходим к утверждению теоремы. □

При тех же предположениях, что и в теореме 6.2, можно доказать и неравенство

$$\operatorname{Re}[w(\zeta) - w(z)] > \pi \int\limits_a^b \frac{1 + \varphi'^2(x)}{\theta(x)} dx - \frac{\pi}{4} \int\limits_a^b \frac{\theta'^2(x)}{\theta(x)} dx + C$$
$$(z \in \theta_a, \quad \zeta \in \theta_b),$$

уточняющее неравенство Альфорса. □

Предположив, что $\varphi'(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ и что

$$\int_0^\infty \frac{\theta'^2(x)}{\theta(x)}\,dx < \infty, \int_0^\infty (|\theta''(x)| + |\varphi''(x)|)\,dx < \infty,$$

можно получить формулу *)

$$w(x+iy) = C + \pi \int_0^x \frac{1+\varphi'^2(t)}{\theta(t)}\,dt + \pi i \frac{y-\varphi(x)}{\theta(x)} + o(1)$$
$$(x \to +\infty, \quad x+iy \in D).$$

*) Несколько иное изложение формул Варшавского имеется в [13]. Там же дана ссылка на оригинальную статью.

Глава VI

ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ

Теорема Коши и теорема о вычетах открывают широкие возможности для преобразования интегралов от аналитических функций. Кроме того, теорема о вычетах часто позволяет преобразовать различные суммы в интегралы. Вся совокупность приемов преобразования интегралов и сумм от аналитических функций получила название *теории вычетов*. В этой главе излагаются основные приемы такого рода на ряде конкретных задач.

§ 1. Несобственные контурные интегралы

Теория вычетов имеет дело главным образом с несобственными интегралами от голоморфных функций, т. е. с интегралами по контуру, концы которого находятся в особых точках подынтегральной функции. Это несколько осложняет применение теоремы Коши или теоремы о вычетах к таким интегралам. Чтобы пояснить, какого рода осложнения могут возникнуть, рассмотрим один простой пример:

Интеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ можно рассматривать как интеграл по границе полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ (или $\operatorname{Im} z < 0$) от функции $f(z) = e^{-z^2}$, голоморфной в этой полуплоскости и имеющей в точке $z = \infty$ (лежащей на границе этой полуплоскости) существенно особую точку. Если бы теорема Коши была применима, то интеграл был бы равен нулю. Но он, очевидно, положителен (из анализа известно, что он равен $\sqrt{\pi}$).

Естественно возникает вопрос, когда же можно применять теорему о вычетах (в частности, теорему Коши) к интегралу по замкнутому контуру, если этот контур проходит через особую точку подынтегральной функции. $\square$

Приведем несколько признаков, позволяющих ответить на этот вопрос. Однако прежде чем формулировать эти признаки, мы разъясним смысл явления, воспользовавшись для этого приведенным примером.

Рассмотрим поведение модуля функции e^{-z^2} в окрестности бесконечно удаленной точки. Полагая $z = re^{i\varphi}$, имеем

$$\left|e^{-z^2}\right| = e^{-r^2\cos 2\varphi}.$$

Поскольку $\cos 2\varphi > 0$ при $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$ и при $\frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4}$, а при остальных φ имеем $\cos 2\varphi < 0$, окрестность бесконечно удаленной точки распадается на четыре равных сектора. В двух секторах

$$|z| > R, \qquad -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4},$$
$$|z| > R, \qquad \frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4},$$

модуль функции e^{-z^2} мал, а в двух других

$$|z| > R, \qquad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4},$$
$$|z| > R, \qquad -\frac{3\pi}{4} < \arg z < -\frac{\pi}{4},$$

велик. Концы нашего контура (действительная ось) уходят в те секторы, где модуль функции e^{-z^2} мал, что и естественно, поскольку интеграл должен сходиться. Однако концы контура могли бы попасть как в один сектор, так и в разные. Они попали в разные секторы, и интеграл не равен нулю. Это наводит на мысль о существовании общей закономерности такого рода. Такая закономерность действительно существует для всех простых функций, с которыми приходится иметь дело в конкретных задачах. К сожалению, любая попытка описать тот класс функций, для которого эта закономерность имеет место, приводит к очень громоздким формулировкам. Поэтому лучше доказывать просто формулируемые достаточные условия, которые выглядят довольно простыми частными случаями, а общую закономерность иметь в виду, не требуя ее строгой формулировки. Общая закономерность состоит в следующем:

Любая достаточно малая окрестность особой точки функции $f(z)$ распадается на некоторое число связных *частей. В половине частей модуль функции* $f(z)$ *мал, а в другой половине велик. Если оба конца контура* C *попадают в одну связную часть, где* $|f(z)|$ *мал, то к интегралу от* $f(z)$ *по* C *можно применять теорему о вычетах, если в разные части — нельзя.*

Таким образом, если нас интересует интеграл от функции $f(z)$ по замкнутому контуру C, проходящему через особую точку $z=a$, то в первую очередь мы должны выяснить поведение модуля $f(z)$ в окрестности этой особой точки и найти те части окрестности, где он мал. Если оба конца контура попадают в одну связную часть окрестности, то возможность применения теоремы о вычетах легко доказывается с помощью одного из признаков, которые мы сейчас изложим. $\square$

Чтобы облегчить формулировки, договоримся о некоторых обозначениях.

Пусть область D ограничена кусочно гладкой кривой C, а $z=a$ — некоторая точка, лежащая на C.

Обозначим через K_ρ круг $|z-a|<\rho$ при $a\neq\infty$ и область $|z|>\frac{1}{\rho}$ при $a=\infty$.

Через D_ρ обозначим часть D, лежащую вне K_ρ, через C_ρ — часть C, лежащую вне K_ρ, через γ_ρ — часть границы K_ρ, лежащую в D. (Ясно, что граница D_ρ состоит из C_ρ и γ_ρ.)

Теорема 1.1. *Пусть функция* $f(z)$ *голоморфна в области* D, *за исключением конечного числа полюсов* z_1, z_2, …, z_n, *и непрерывна вплоть до ее границы, за исключением точки* $z=a$. *Если*

$$\left|\int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz\right| \to 0 \qquad (\rho\to 0) \tag{1.1}$$

и если несобственный интеграл от $f(z)$ *по* C *существует, то*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_1^n \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Доказательство. Если несобственный интеграл от $f(z)$ по C существует, то (см. § 6 гл. I)

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\,dz.$$

С другой стороны, согласно теореме о вычетах интеграл по границе области D_ρ от функции $f(z)$ при достаточно малых ρ (чтобы все полюсы $f(z)$ оказались в D_ρ) равен

$$2\pi i \sum_{1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Поскольку граница D_ρ состоит из C_ρ и γ_ρ, это означает

$$\int_{C_\rho} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) - \int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz.$$

Переходя к пределу при $\rho \to 0$, получаем утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е. Обозначим через $\gamma(\rho)$ длину γ_ρ, а

$$M(\rho) = \max_{z\in\gamma_\rho} |f(z)|.$$

Тогда выполнение условия (1.1) заведомо обеспечено, если

$$M(\rho)\gamma(\rho) \to 0 \qquad (\rho \to 0). \tag{1.2}$$

Ясно, что при $a \neq \infty$ имеем $\gamma(\rho) \leqslant 2\pi\rho$, а при $a = \infty$ имеем $\gamma(\rho) \leqslant \frac{2\pi}{\rho}$. Поэтому условие (1.2) можно заменить еще более простыми условиями:

$$\lim_{\rho\to 0} \rho M(\rho) = 0 \qquad (a \neq \infty), \tag{1.3}$$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{M(\rho)}{\rho} = 0 \qquad (a = \infty). \tag{1.4}$$

Иногда этих простых условий бывает недостаточно. Следующий результат, дающий более тонкое условие, достаточное для выполнения (1.1), называется *леммой Жордана*.

Л е м м а 1. *Пусть* Γ_R — *дуга окружности* $|z| = R$, $|\arg z - \varphi_0| < \frac{\pi}{2\nu}$, *а функция* $f(z)$ *удовлетворяет на этой дуге неравенству*

$$|f(Re^{i\varphi})| \leqslant \varepsilon(R)\, e^{-R^{\nu}\cos\nu(\varphi-\varphi_0)}.$$

Если $\varepsilon(R) R^{1-\nu} \to 0$ $(R \to \infty)$, *то*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} |f(z)|\,|dz| = 0.$$

Доказательство. Уравнение дуги Γ_R имеет вид $z = Re^{i\varphi}$, $|\varphi - \varphi_0| < \frac{\pi}{2\nu}$. Поэтому $|dz| = R\,d\varphi$ и

$$\int\limits_{\Gamma_R} |f(z)|\,|dz| \leqslant R\varepsilon(R) \int\limits_{\varphi_0 - \frac{\pi}{2\nu}}^{\varphi_0 + \frac{\pi}{2\nu}} e^{-R^{\nu}\cos\nu(\varphi - \varphi_0)}\,d\varphi =$$

$$= \frac{2}{\nu} R\varepsilon(R) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^{\nu}\sin\theta}\,d\theta.$$

Поскольку $\sin\theta > \frac{2}{\pi}\theta$ при $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, то при $R \to \infty$

$$\int\limits_{\Gamma_R} |f(z)|\,|dz| \leqslant \frac{2}{\nu} R\varepsilon(R) \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{2}{\pi}\theta R^{\nu}}\,d\theta = \frac{\pi}{\nu} R^{1-\nu}\varepsilon(R) \to 0,$$

и лемма доказана. □

Контуры C_1 и C_2, для которых

$$\int\limits_{C_1} f(z)\,dz = \int\limits_{C_2} f(z)\,dz,$$

мы часто будем называть для краткости *эквивалентными*.

Вопрос об эквивалентности двух контуров, имеющих общие начало и конец, решается сведением к интегралу по замкнутому контуру.

Приведем типичный пример рассуждения с доказательством эквивалентности контуров.

Пример 1. Покажем, что

$$\int\limits_0^{\infty} \sin x^2\,dx = \int\limits_0^{\infty} \cos x^2\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Из анализа известно, что $\int\limits_0^{\infty} e^{-z^2}\,dz = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Выше мы уже исследовали поведение модуля функции e^{-z^2} в окрестности бесконечно удаленной точки и показали, что он мал в угле $|\arg z| < \frac{\pi}{4}$. Покажем, что все лучи $\arg z = \varphi$, $|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{4}$ являются эквивалентными контурами. Возьмем

$-\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{4}$ и рассмотрим интеграл от e^{-z^2} по границе сектора $|z|<R$, $\alpha<\arg z<\beta$. По теореме Коши этот интеграл равен нулю. Если обозначить через L_{R_φ} отрезок $(0, Re^{i\varphi})$, а через $\Gamma_{R_{\alpha\beta}}$ — дугу $|z|=R$, $\alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta$, то этот факт можно записать формулой

$$\int\limits_{L_{R_\alpha}} e^{-z^2}\,dz+\int\limits_{\Gamma_{R_{\alpha\beta}}} e^{-z^2}\,dz-\int\limits_{L_{R_\beta}} e^{-z^2}\,dz=0.$$

Ясно, что при $R\to\infty$ интеграл по L_{R_φ} стремится к интегралу по лучу $\arg z=\varphi$ (если он существует). Остается оценить интеграл по дуге $\Gamma_{R_{\alpha\beta}}$. Если $\alpha>-\frac{\pi}{4}$, $\beta<\frac{\pi}{4}$, то стремление интеграла по $\Gamma_{R_{\alpha\beta}}$ к нулю при $R\to\infty$ легко получить из замечания к теореме 1.1. Однако при $\alpha=-\frac{\pi}{4}$ или $\beta=\frac{\pi}{4}$ это уже не удается. Поэтому лучше сразу применить лемму Жордана. Очевидно,

$$\left|e^{-z^2}\right|=e^{-R^2\cos 2\varphi}\qquad(|z|=R,\ \arg z=\varphi),$$

т. е. $\nu=2$, $\varepsilon(R)=1$ и $\varepsilon(R)\,R^{1-\nu}=\frac{1}{R}\to 0$. Следовательно,

$$\int\limits_{\Gamma_{R_{\alpha\beta}}}\left|e^{-z^2}\right||dz|\leqslant\int\limits_{\Gamma_{R,-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}}}\left|e^{-z^2}\right||dz|\to 0\qquad(R\to\infty).$$

Отсюда видим, что

$$\int\limits_0^{\infty e^{i\alpha}} e^{-z^2}\,dz=\int\limits_0^{\infty e^{i\beta}} e^{-z^2}\,dz\qquad\left(-\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{4}\right).$$

Положив, в частности, $\alpha=0$, а $\beta=\frac{\pi}{4}$. Это даст, что

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\int\limits_0^{\infty} e^{-z^2}\,dz=\int\limits_0^{\infty e^{\frac{\pi i}{4}}} e^{-z^2}\,dz.$$

Делая во втором интеграле замену переменной $z=xe^{\frac{\pi i}{4}}$,

$0 < x < \infty$, получаем

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^\infty e^{-ix^2}\, dx.$$

Отделяя действительную и мнимую части, получаем требуемые формулы.

§ 2. Аналитическое продолжение контурных интегралов

Подавляющее большинство функций, с которыми приходится иметь дело в анализе, удается представить в виде несобственных контурных интегралов. При их исследовании значительную роль играют соображения, изложенные в § 1. Замена контура интегрирования эквивалентным открывает широкие возможности для аналитического продолжения функций, представленных интегралами, и для получения оценок этих функций. Докажем две теоремы об аналитическом продолжении интегралов, на которые часто приходится опираться во многих вопросах.

Теорема 2.1. *Пусть функция* $f(\zeta)$ *голоморфна и ограничена в угле* $|\arg\zeta - \varphi| < \alpha, \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. *Тогда функция*

$$F(z) = \int_0^{\infty e^{i\varphi}} f(\zeta)\, e^{-z\zeta}\, d\zeta$$

может быть аналитически продолжена в угол $|\arg z + \varphi| < \frac{\pi}{2} + \alpha$.

Доказательство. Интеграл для функции $F(z)$ равномерно сходится по z в полуплоскости $\operatorname{Re}(ze^{i\varphi}) \geqslant \delta > 0$. Действительно, при $\operatorname{Re}(ze^{i\varphi}) \geqslant \delta$ и при $\arg\zeta = \varphi$ имеем

$$|f(\zeta)| \leqslant M, \quad |e^{-z\zeta}| \leqslant e^{-\delta|\zeta|},$$

т. е. подынтегральная функция не превосходит абсолютно интегрируемой функции $Me^{-\delta|\zeta|}$. По признаку Вейерштрасса (§ 6 гл. I) мы убеждаемся в равномерной сходимости интеграла. Следовательно, функция $F(z)$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re}(ze^{i\varphi}) > 0$.

Положим теперь $z = re^{-i\varphi}$, $r > 0$, и выясним, какие контуры интегрирования эквивалентны лучу $\arg\zeta = \varphi$. Если $\arg\zeta = \theta$, то

$$|e^{-z\zeta}| = e^{-r|\zeta|\cos(\varphi-\theta)},$$

т. е. подынтегральная функция $f(\zeta)e^{-z\zeta}$ стремится к нулю быстрее любой степени ζ в угле $|\arg\zeta - \varphi| < \alpha$. Это означает, что все лучи $\arg\zeta = \theta$ при $|\theta - \varphi| < \alpha$ являются эквивалентными контурами, т. е.

$$F(z) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} f(\zeta)\, e^{-z\zeta}\, d\zeta \qquad (\arg z = -\varphi, |\theta - \varphi| < \alpha).$$

Но по тем же соображениям, что и выше, последний интеграл представляет собой функцию, голоморфную в полуплоскости $\operatorname{Re}(ze^{i\theta}) > 0$. Таким образом, мы получили аналитическое продолжение функции $F(z)$ во все полуплоскости $\operatorname{Re}(ze^{i\theta}) > 0$, $|\theta - \varphi| < \alpha$. Легко убедиться, что все эти полуплоскости в совокупности образуют угол $|\arg z + \varphi| < \frac{\pi}{2} + \alpha$. Теорема доказана.

Замечание 1. Ясно, что условие ограниченности функции $f(\zeta)$ в угле $|\arg\zeta - \varphi| < \alpha$ не очень существенно для аналитического продолжения. Если потребовать, чтобы функция $f(\zeta)$ была голоморфна в угле $|\arg\zeta - \varphi| < \alpha$ и удовлетворяла условию

$$|f(re^{i\theta})| < g(r)\, e^{r\nu(\theta)}, \quad \int_0^\infty g(r)\, dr < \infty$$
$$\left(|\theta - \varphi| < \alpha < \frac{\pi}{2}\right),$$

мы теми же рассуждениями придем к выводу, что функцию $F(z)$ можно аналитически продолжить в область, являющуюся объединением полуплоскостей $\operatorname{Re}(ze^{i\theta}) > \nu(\theta)$, $|\theta - \varphi| < \alpha$.

Замечание 2. Вид подынтегральной функции не является строго обязательным. Например, можно было доказать аналогичную теорему для интегралов вида

$$F(z) = \int_0^{\infty e^{i\varphi}} f(\zeta) \frac{d\zeta}{1 - e^{z\zeta}} \qquad (\operatorname{Re}(ze^{i\varphi}) > 0).$$

Используя ту же идею, можно выполнить и более далекое аналитическое продолжение, связанное с обходом точки $z=0$, которая, вообще говоря, является особой точкой функции $F(z)$. Приведем один пример, в котором совершается такое исследование.

Пример 1. Пусть функция $F(z)$ задана для действительных положительных z равенством

$$F(z)=\int_0^\infty \frac{e^{-z\zeta}}{\sqrt{1+\zeta^2}}\,d\zeta \qquad (\sqrt{1+\zeta^2}>0).$$

Найдем аналитическую функцию, получающуюся аналитическим продолжением функции $F(z)$.

Поскольку функция $f(\zeta)=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta^2}}$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re}\zeta>0$ и ограничена в каждом угле $|\arg\zeta|\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$, мы получаем из теоремы 2.1 аналитическое продолжение функции $F(z)$ на всю плоскость z с разрезом по отрицательной части действительной оси.

Свяжем с каждым значением θ функцию $F_\theta(z)$, голоморфную в полуплоскости $\operatorname{Re}(ze^{-i\theta})>0$, которая получается из функции $F_0(z)=F(z)$ аналитическим продолжением из точки t ($\operatorname{Re}t>0$) в точку $te^{i\theta}$ по дуге окружности $|z|=|t|$, $0<\arg\frac{z}{t}<\theta$. Из теоремы 2.1 следует, что

$$F_\theta(z)=\int_0^{\infty e^{-i\theta}} \frac{e^{-z\zeta}}{\sqrt{1+\zeta^2}}\,d\zeta \qquad \left(|\theta|<\frac{\pi}{2}\right).$$

Построим теперь функцию $F_\theta(z)$ для любых θ. Для этой цели обозначим через L_θ следующий контур:

При $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ — луч $\arg\zeta=-\theta$.

При $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$ сделаем в плоскости разрез по отрезку $(-i, i)$ и составим контур L_θ из отрезка $(0, -i)$ правого края разреза, отрезка $(-i, 0)$ левого края разреза и из луча $\arg\zeta=-\theta$.

При $\frac{3\pi}{2}<\theta<\frac{5\pi}{2}$ составим контур из отрезка $(0, -i)$ правого края разреза, отрезка $(-i, i)$ левого края разреза, из отрезка $(i, 0)$ правого края разреза и из луча

$\arg\zeta = -\theta$. Положим

$$F_\theta(z) = \int\limits_{L_\theta} \frac{e^{-z\zeta}}{\sqrt{1+\zeta^2}}\, d\zeta \qquad (\operatorname{Re}(ze^{-i\theta}) > 0).$$

Легко убедиться, что если θ, θ' и $\arg z$ близки между собой, то контуры L_θ и $L_{\theta'}$ эквивалентны, т. е.

$$F_\theta(z) = F_{\theta'}(z)$$

при близких θ, θ' и $\arg z$. Поэтому совокупность функций $F_\theta(z)$ осуществляет аналитическое продолжение функции $F(z)$. Каждая функция $F_\theta(z)$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re}(ze^{-i\theta}) > 0$. Когда величина θ увеличивается на 2π, мы возвращаемся в прежнюю точку после аналитического продолжения по окружности, обходящей точку $z=0$ против часовой стрелки. При этом к исходному значению интеграла добавляется интеграл по обеим сторонам разреза $(-i, i)$, взятый в таком направлении: $(0, -i)$ по правой стороне разреза, $(-i, i)$ по левой стороне разреза и $(i, 0)$ по правой стороне разреза. Функцию $\sqrt{1+\zeta^2}$ мы считали положительной при $\zeta > 0$, так что она положительна и на правой стороне разреза. Поэтому, вычисляя добавляемый интеграл, получаем

$$F_{\theta+2\pi}(z) = F_\theta(z) - 2i \int\limits_{-1}^{1} \frac{e^{-iyz}}{\sqrt{1-y^2}}\, dy.$$

Задача об аналитическом продолжении функции $F(z)$ решена. □

Следующая теорема относится к вопросу об аналитическом продолжении *интегралов типа Коши*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{2.1}$$

Сначала докажем голоморфность функции, представленной этим интегралом.

Лемма. *Если* $\int\limits_C \frac{|f(\zeta)|}{1+|\zeta|}\,|d\zeta| < \infty$, *то интеграл* (2.1) *равномерно сходится по* z *на любом замкнутом множестве, не содержащем точек контура* C.

Доказательство. Пусть E — конечное замкнутое множество, не содержащее точек контура C. Обозначим через R радиус круга с центром в начале, в котором лежит множество E, а через ρ — расстояние от E до C. Если $\zeta \in C$, а $z \in E$, то $|\zeta - z| \geqslant \rho$ при всех ζ, а при $|\zeta| \geqslant 2R$ имеем $|\zeta - z| \geqslant |\zeta| - |z| \geqslant \frac{1}{2}|\zeta|$. Поэтому при некотором $M = M(R, \rho)$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right| \leqslant M \frac{|f(\zeta)|}{1 + |\zeta|} \qquad (\zeta \in C,\ z \in E).$$

Отсюда (в силу условия леммы) получаем с помощью признака Вейерштрасса равномерную сходимость интересующего нас интеграла.

Следствие. *Интеграл* (2.1) *представляет функцию, голоморфную в каждой области, не содержащей точек контура C.*

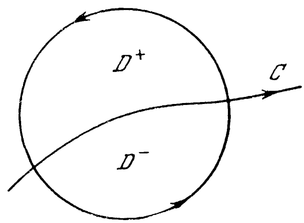

Рис. 7

Если контур C делит плоскость на части, то в каждой части мы имеем свою голоморфную функцию. В любом случае точки контура образуют границу области голоморфности интеграла (2.1).

Следующая теорема полностью решает вопрос об аналитическом продолжении интеграла типа Коши через точки контура интегрирования.

Теорема 2.2. *Пусть функция голоморфна в области D, содержащей кусок C_0 контура C (и не содержащей других точек C). Пусть, далее, C_0 делит область D на две части D^+ и D^-, лежащие, соответственно, слева от C_0 и справа от C_0, а $F^+(z)$ и $F^-(z)$ — функции, представленные интегралом* (2.1) *в D^+ и D^-. Тогда функция $F^-(z) + f(z)$ дает аналитическое продолжение функции $F^+(z)$ в область D^- через дугу C_0.*

Доказательство. Обозначим через C^* контур, отличающийся от контура C тем, что C_0 заменена частью границы D (той из двух возможных, для которой положительное направление обхода согласуется с направлением C^*). Ясно, что эта часть границы D является и частью границы D^- (рис. 7). Всю границу D^- обозначим L^-. Помимо упомянутой части границы D в L^- входит еще кривая C_0, проходимая в противоположном направлении. Поэтому для любых z из области D, не лежащих на C_0, имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^*}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^-}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \quad (2.2)$$

Обозначим интеграл, стоящий в левой части равенства, через $F(z)$. Поскольку в области D нет точек контура C^*, то $F(z)$ — голоморфная в области D функция.

При $z\in D^+$ имеем $F(z)=F^+(z)$, так как первый интеграл в правой части равенства равен $F^+(z)$ по определению, а второй по теореме Коши равен нулю.

При $z\in D^-$ имеем $F(z)=F^-(z)+f(z)$, так как первый интеграл по определению равен $F^-(z)$, а второй равен $f(z)$ согласно интегральной формуле Коши.

Следовательно, функция $F(z)$ аналитически продолжает функцию $F^+(z)$ на всю область D, и теорема доказана. $\square$

Интегралы типа Коши встречаются во многих вопросах теории аналитических функций. Например, мы уже использовали интеграл типа Коши при выводе разложения функции в ряд Лорана.

Одним из типичных применений интеграла типа Коши является задача о разбиении функции, заданной на границе области, на сумму двух функций, одна из которых голоморфна внутри области, а другая — вне ее. Эту задачу можно решать и без предположения голоморфности функции $f(\zeta)$ на контуре C (границе области). В этом случае функция $f(\zeta)$ предполагается обычно удовлетворяющей на контуре *условию Липшица* какого-либо положительного порядка α, т. е. условию

$$|f(\zeta)-f(\zeta')|<M|\zeta-\zeta'|^{\alpha} \quad (\zeta\in C,\ \zeta'\in C).$$

Об аналитическом продолжении таких интегралов Коши уже не приходится говорить. От теоремы остается только такое утверждение*):

Функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$ равномерно непрерывны в областях D^+ и D^- соответственно, и

$$F^+(\zeta)-F^-(\zeta)=f(\zeta) \qquad (\zeta\in C).$$

---

*) Подробнее этот вопрос освещен в [23, 24, 30].

§ 3. Вычисление определенных интегралов

Самой старой задачей, к которой применялась теория вычетов, является задача о вычислении в конечном виде интегралов, главным образом несобственных, от действительных функций. С помощью теории вычетов можно найти очень многие интегралы, но число приемов, употребляемых для этой цели, невелико. $\square$

Первый прием относится к интегралам вида

$$I = \int_{\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx, \tag{3.1}$$

где функция $\varphi(z)$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, за исключением конечного числа полюсов $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (лежащих в этой полуплоскости), непрерывна в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ (за исключением тех же полюсов) и удовлетворяет условию

$$\int_{\Gamma_R} \varphi(z)\, dz \to 0 \qquad (R \to \infty) \tag{3.2}$$

(Γ_R — полуокружность $|z| = R$, $\operatorname{Im} z > 0$).

Условия теоремы 1.1 выполнены, если взять в качестве области D полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$. Это значит, что интеграл (3.1) можно рассматривать как интеграл по границе полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и применять к нему теорему о вычетах. Это дает нам формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} \varphi(z). \ \square \tag{3.3}$$

Выясним возможности этого приема для нахождения интегралов от действительных функций. Ясно, что в качестве $\varphi(z)$ можно взять рациональную функцию, у которой степень числителя на две единицы меньше степени знаменателя (это необходимо и для сходимости интеграла и для выполнения условия (3.2)). С другой стороны, если предположить, что функция $\varphi(x)$ действительна при действительных x, то с помощью принципа симметрии нетрудно показать, что других возможностей нет. $\square$

Однако для получения интегралов от действительных функций не нужно предполагать действительность функции $\varphi(x)$ при действительных x. Можно написать

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,dx = \operatorname{Re}\left\{2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} \varphi(z)\right\}, \qquad u(x) = \operatorname{Re}\varphi(x). \quad (3.4)$$

Это соображение значительно расширяет класс тех интегралов, которые вычисляются с помощью теории вычетов, но делает процесс вычисления значительно сложнее. Дело в том, что в формуле (3.4) мы интегрируем функцию $u(x) = \operatorname{Re}\varphi(x)$, а вычеты берем от функции $\varphi(z)$. Таким образом, если задан интеграл, то мы знаем лишь функцию $u(x) = \operatorname{Re}\varphi(x)$ при действительных x, а нужно знать функцию $\varphi(z)$ при всех z. Решить эту задачу нисколько не проще (в общем виде), чем вычислить интеграл. Однако часто удается решить эту задачу подбором и угадыванием (как при отыскании первообразной). $\square$

Приведем два распространенных типа интегралов, которые получаются с помощью изложенных соображений.

Пусть $R(z)$ — рациональная функция, у которой степень числителя меньше степени знаменателя. Если функция $R(x)$ действительна при действительных x, не имеет полюсов на действительной оси, а в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ имеет полюсы $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то для любого $a > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos ax\,dx = -2\pi \operatorname{Im} \sum_{1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} R(z)\, e^{iaz}, \quad (3.5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin ax\,dx = 2\pi \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} R(z)\, e^{iaz}. \quad (3.6)$$

Если при прочих предположениях относительно $R(z)$ степень ее числителя на две единицы меньше степени знаменателя, то при любом $a > 0$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \ln(x^2 + a^2)\,dx =$$

$$= -4\pi \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} R(z) \ln(z + ia) \quad (3.7)$$

(для $\ln(z + ia)$ берется любая ветвь, голоморфная в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$).

Доказательство этих формул очевидным образом вытекает из соображений, изложенных выше. Для проверки выполнения условия (3.2) в первых двух формулах пользуемся леммой Жордана (§ 1), а в третьей — замечанием к теореме 1.1. □

Второй прием лишь немногим сложнее. В его основе лежит следующая лемма:

Лемма 1. *Пусть функции* $f(z)$ *и* $g(z)$ *голоморфны внутри полосы* $0 < \operatorname{Im} z < b$, *за исключением конечного числа полюсов* $z_1, z_2, \ldots, z_n$, *и непрерывны в замкнутой полосе (за исключением тех же полюсов). Если* $f(z)$ — *периодическая функция с периодом, равным* $i(b-a)$, *и выполняется условие*

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,g(z)\,dz \to 0 \qquad (R \to \pm\infty) \tag{3.8}$$

(Γ_R — отрезок $\operatorname{Re} z = R$, $a < \operatorname{Im} z < b$), *то*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,[g(x+ai) - g(x+bi)]\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)\,g(z).$$

Доказательство. В силу условия (3.8) разность интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,g(z)\,dz - \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} f(z)\,g(z)\,dz =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,[g(x+ai) - g(x+bi)]\,dx$$

можно рассматривать как интеграл по границе полосы $a < \operatorname{Im} z < b$. Применяя теорему 1.1, получаем утверждение леммы. □

Приведем два типа интегралов, которые вычисляются с помощью этого приема.

Пусть $R(z)$ — *рациональная функция с полюсами* z_1, $z_2, \ldots, z_n$, *у которой степень числителя на* m *единиц ниже степени знаменателя, причем* $R(z)$ *не имеет полюсов на отрицательной части действительной оси и при* $z = 0$.

Полагая $f(z)=R(-e^z)$, $g(z)=e^{\alpha z}$, $a=-\pi$, $b=\pi$, *получаем*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R\left(-e^x\right) e^{\alpha x}\, dx =$$

$$= -\frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \sum_1^n \operatorname*{res}_{z=\ln z_k} R\left(e^z\right) e^{\alpha z} \qquad (0<\alpha<m). \quad (3.9)$$

Условие $0<\alpha<m$ обеспечивает сходимость интеграла и выполнение условия (3.8).

Полагая $f(z)=R(-e^z)$, $g(z)=\frac{1}{z}$, $a=-\pi$, $b=\pi$ *и считая* $m\geqslant 2$, *имеем*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R\left(-e^x\right)}{x^2+\pi^2}\, dx = \frac{1}{2} \sum_1^n \operatorname*{res}_{z=\ln z_k} \frac{R\left(e^z\right)}{z}. \qquad (3.10)$$

В обеих формулах для $\ln z_k$ *следует брать главные значения.*

Применение второго приема связано примерно с теми же трудностями, что и применение первого приема. Интегрируется функция $f(x)\,[g(x)-g(x+bi)]$, а вычеты берутся у функции $f(z)g(z)$. □

Третий прием относится к интегралам вида

$$\int_0^{2\pi} \varphi\left(e^{ix}\right) dx, \qquad (3.11)$$

где функция $\varphi(z)$ голоморфна в круге $|z|<1$, за исключением конечного числа полюсов. Прием состоит в замене переменного $z=e^{ix}$, переводящей интеграл (3.11) в интеграл

$$\frac{1}{i} \int_{|z|=1} \varphi(z) \frac{dz}{z},$$

который вычисляется с помощью вычетов. Третий прием очень мало отличается от первого. □

Мы говорили о вычислении с помощью теории вычетов интегралов, приведенных к тому или иному каноническому виду. Практически всегда приходится или приводить интегралы к этому виду, или применять аналогичные приемы к интегралам прямо в том виде, в котором они даны. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Покажем, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Даже записав интеграл в виде интеграла по всей оси, мы не можем применить формулу (3.6), так как функция $R(z) = \frac{1}{z}$ имеет полюс на действительной оси. Но при $a > 0$

$$\left|\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx\right| = \left|a^2\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\frac{dx}{x^2+a^2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant a^2\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi a}{2},$$

так что

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{a\to 0}\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx.$$

Последний интеграл уже легко вычисляется с помощью формулы (3.6). Имеем

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx = 2\pi\,\mathrm{Re}\,\mathop{\mathrm{res}}_{z=ia}\frac{ze^{iz}}{z^2+a^2} = \pi e^{-a} \qquad (a > 0),$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{a\to 0}\frac{\pi}{2}\,e^{-a} = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 2. Вычислим интеграл

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\ln x}{x+1}\,dx \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Сделаем замену переменного $\ln x = t$. Это даст, что

$$I = \int_{-\infty}^\infty \frac{te^{\alpha t}}{1+e^t}\,dt = \frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\alpha t}}{1+e^t}\,dt.$$

Но с помощью формулы (3.9) получаем $\left(R(z)=\frac{1}{1-z}\right)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha t}}{1+e^{t}}\,dt=-\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\operatorname*{res}_{z=0}\frac{e^{\alpha z}}{1-e^{z}}=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}.$$

Следовательно, $I=-\frac{\pi^2\cos\alpha\pi}{\sin^2\alpha\pi}$. □

Пример 3. Вычислим интеграл

$$I=\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{1-\alpha}\,dx \qquad (-1<\alpha<2).$$

Интеграл I можно выразить через интеграл от функции

$$f(z)=z^{\alpha}(1-z)^{1-\alpha}$$

по границе C области D, являющейся расширенной плоскостью с разрезом по отрезку $(0,\ 1)$. Действительно, функция $f(z)$ допускает выделение в области D однозначной ветви (для этого достаточно представить ее в виде

$$f(z)=z\left(\frac{1}{z}-1\right)^{1-\alpha}$$

и применить ко второму сомножителю теорему о монодромии). Выберм ту ветвь, которая положительна на верхнем крае разреза. Тогда на нижнем крае разреза функция $f(z)$ равна $e^{2\pi i\alpha}z^{\alpha}(1-z)^{1-\alpha}$ (при обходе точки $z=0$ по малой окружности против часовой стрелки аргумент z^{α} возрастает на $2\pi\alpha$, а сомножитель $(1-z)^{1-\alpha}$ не меняется). Поэтому

$$\int_C f(z)\,dz=I-e^{2\pi i\alpha}I=I\left(1-e^{2\pi i\alpha}\right).$$

С другой стороны, по теореме о вычетах $\int_C f(z)\,dz=$ $=2\pi i\operatorname*{res}_{z=\infty}f(z)$. Чтобы найти вычет, найдем значения $f(z)$ при больших z. При $z>1$ имеем $f(z)=-e^{\pi i\alpha}z^{\alpha}(z-1)^{1-\alpha}$, так как на верхнем крае разреза $(0,\ 1)$ $f(z)>0$, а обходя точку $z=1$ по малой полуокружности сверху, мы уменьшаем $\arg(1-z)^{1-\alpha}$ на $\pi(1-\alpha)$ (и не меняем $\arg z^{\alpha}$).

Поэтому $f(z) = -e^{\pi i\alpha}z\left(1 - \frac{1}{z}\right)^{1-\alpha}$, и разлагая последний множитель в ряд по степеням $\frac{1}{z}$, получаем

$$f(z) = -e^{\pi i\alpha}z\left(1 - \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} - \ldots\right),$$

$$c_1 = 1 - \alpha,\ c_2 = \frac{(1-\alpha)(-\alpha)}{1\cdot 2},\ \ldots$$

Отсюда без труда находим $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -e^{\pi i\alpha}\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}$ и

$$I = -\frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i\alpha}}e^{\pi i\alpha}\frac{\alpha(1-\alpha)}{2} = \frac{\pi\alpha(1-\alpha)}{2\sin\alpha\pi}.$$

Пример 4. Вычислим интеграл

$$I = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\ln|\sin x|}{1 + a\cos x}\,dx \qquad (0 < a < 1).$$

Заметим, что

$$\ln|\sin x| = \ln\left|\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right| = \ln\left|\frac{1 - e^{2ix}}{2}\right| = \operatorname{Re}\ln\frac{1 - e^{2ix}}{2}.$$

Делая замену переменного $z = e^{ix}$ и принимая во внимание, что

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad dx = \frac{dz}{iz}, \quad \ln|\sin x| = \operatorname{Re}\ln\frac{1 - z^2}{2},$$

получаем

$$I = \operatorname{Re}\frac{2}{i}\int_{|z|=1}\ln\frac{1 - z^2}{2}\,\frac{dz}{2z + az^2 + a}.$$

Подынтегральная функция имеет в круге $|z| < 1$ один простой полюс в точке $z = \frac{\sqrt{1-a^2} - 1}{a}$. Находя вычет в этом полюсе, получаем

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}\left[\ln\frac{\sqrt{1-a^2} - 1 + a^2}{a^2} + \ln 2\right].$$

§ 4. Асимптотические формулы для интегралов

Применение теории вычетов к вычислению интегралов хотя и сыграло свою роль, но на современном этапе развития математики имеет не такое уж большое значение. Причина этого в том, что лишь немногие интегралы, с которыми приходится иметь дело, можно вычислить в конечном виде. Однако применения теории вычетов не исчерпываются вычислением интегралов. С помощью теории вычетов можно получать для интегралов так называемые асимптотические формулы.

Асимптотической формулой для функции $f(z)$ при $z \to \infty$ в области D назовем предельное соотношение

$$f(z) \sim \varphi(z) \qquad (z \to \infty,\ z \in D).$$

Имеется некоторый оттенок, отличающий асимптотическую формулу от любого другого предельного соотношения того же вида. В асимптотической формуле стороны не равноправны. Ее смысл в том, что сложная функция $f(z)$ заменяется простой функцией $\varphi(z)$ (сложность можно понимать с различных точек зрения, например с точки зрения вычисления значений). Обычное положение таково, что с увеличением z функция $f(z)$ становится все сложнее, асимптотическая формула все точнее. $\square$

Приведем два примера получения асимптотических формул с помощью теории вычетов.

Пример 1. Пусть функция $E(z)$ (функция Миттаг-Лефлера) определена для z, лежащих вне полуполосы $\operatorname{Re} z > 0$, $|\operatorname{Im} z| < \pi$ (обозначим ее G, а ее границу L), равенством

$$E(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{e^\zeta}}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Найдем аналитическое продолжение функции $E(z)$ на всю плоскость и получим для $E(z)$ асимптотическую формулу при $z \to \infty$.

Аналитическое продолжение функции $E(z)$ на всю плоскость мы получаем с помощью теоремы 2.2 об аналитическом продолжении интеграла типа Коши. Если обозначить через $I(z)$ значения интеграла Коши (определяющего функцию $E(z)$ для $z \notin \overline{G}$), то аналитическое продолжение функции $E(z)$ в полуполосу G дается формулой

$$E(z) = I(z) - e^{e^z} \qquad (z \in G).$$

Таким образом, для получения асимптотической формулы для функции $E(z)$ нам достаточно получить асимптотическую формулу для интеграла типа Коши $I(z)$.

С помощью равенства

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} - \frac{\zeta}{z^2} + \frac{\zeta^2}{\zeta^2(\zeta - z)}$$

легко получаем

$$I(z) = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{1}{z^2}\psi(z),$$

где

$$c_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L e^{e^\zeta}\,d\zeta, \quad c_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \zeta e^{e^\zeta}\,d\zeta,$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\zeta^2 e^{e^\zeta}}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Покажем, что $c_0 = 1$, а $\psi(z) = O(1)$ $(z \to \infty)$. Это даст асимптотическую формулу

$$I(z) = \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

откуда получим интересующую нас асимптотическую формулу

$$E(z) = \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \qquad (z \to \infty,\ z \notin G),$$

$$E(z) = \frac{1}{z} - e^{e^z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \qquad (z \to \infty,\ z \in G).$$

Сначала покажем, что $\psi(z) = O(1)$ $(z \to \infty)$. Для этой цели обозначим через L_1 часть контура L, лежащую в круге $|\zeta - z| < 1$, а через L_2 — остальную часть L. Очевидно, имеем

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} \frac{\zeta^2 e^{e^\zeta}}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} \frac{\zeta^2 e^{e^\zeta}}{\zeta - z}\,d\zeta = \psi_1(z) + \psi_2(z).$$

Сразу получаем

$$|\psi_2(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_L |\zeta|^2 \left| e^{e^\zeta} \right| |d\zeta| < \infty.$$

Для оценки $|\psi_1(z)|$ обозначим через ξ точку L_1, ближайшую к точке z, и напишем

$$\psi_1(z) = \frac{e^{e^\xi}}{2\pi i} \left\{ \int\limits_{L_1} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int\limits_{L_1} \frac{e^{e^\zeta - e^\xi} - 1}{\zeta - z} d\zeta \right\}.$$

Заметим, что

$$\left| \frac{e^{e^\zeta - e^\xi} - 1}{\zeta - z} \right| \leqslant M \, (|\zeta - z| < 1), \qquad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_1} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z - b}{z - a},$$

где a и b — концы L_1, т. е. точки пересечения L_1 с окружностью $|\zeta - z| = 1$. Поскольку $|z - a| = |z - b| = 1$, то $\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_1} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right| \leqslant 1$. Ясно также, что $e^{e^\xi} \leqslant 1$, так как ξ лежит на L. Поэтому $|\psi_1(z)| \leqslant M_1$, т. е. $\psi(z) = O(1)$ $(z \to \infty)$.

Остается показать, что $c_0 = 1$. С этой целью напишем

$$-c_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L e^{e^\zeta} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\pi i + \infty}^{\pi i} e^{e^\zeta} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\pi i}^{-\pi i} e^{e^\zeta} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\pi i}^{-\pi i + \infty} e^{e^\zeta} d\zeta.$$

Первый и третий интегралы в правой части взаимно уничтожаются в силу периодичности функции e^{e^ζ} с периодом $2\pi i$. Во втором интеграле сделаем замену $e^\zeta = w$ (третий прием § 3). Это даст

$$-c_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} \frac{e^w}{w} dw = -1.$$

Доказательство асимптотических формул для $E(z)$ закончено.

Ясно, что при желании мы могли бы получить и более точные асимптотические формулы:

$$I(z) = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \ldots + \frac{c_n}{z^{n+1}} + O\left(\frac{1}{z^{n+2}}\right) \qquad (z \to \infty),$$

где

$$c_n = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \zeta^n e^{e^\zeta}\, d\zeta.$$

Пример 2. Найдем асимптотическую формулу для $\Gamma(z+1)$ ($\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера) при $z \to +\infty$.

Функция $\Gamma(z+1)$ определяется при $z > -1$ формулой

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\, dt.$$

Делая в этой формуле замену $t = \xi z$, получаем

$$\Gamma(z+1) = z^{z+1}\int_0^\infty e^{-z(\xi - \ln\xi)}\, d\xi.$$

Теперь сделаем еще замену $\xi - \ln\xi = w$. Тогда, обозначив через C образ луча $\arg\xi = 0$ при конформном отображении $w = \xi - \ln\xi$, получим

$$z^{-z-1}\Gamma(z+1) = \int_C \xi'(w)\, e^{-zw}\, dw,$$

где $\xi(w)$ — некоторая ветвь аналитической функции, обратной к функции $w = \xi - \ln\xi$. Выясним, что такое C и какая ветвь аналитической функции стоит под интегралом.

Когда ξ возрастает от 0 до 1, w убывает от $+\infty$ до 1. Это означает, что

$$\int_0^1 e^{-z(\xi - \ln\xi)}\, d\xi = \int_{+\infty}^1 e^{-zw}\xi_1'(w)\, dw,$$

где $\xi_1(w)$ — та ветвь обратной к $\xi - \ln\xi$ функции, которая положительна и не превосходит единицы при $w > 1$ (при $w \to +\infty$ имеем $\xi_1(w) \to 0$).

Когда ξ возрастает от 1 до $+\infty$, w тоже возрастает от 1 до $+\infty$. Значит,

$$\int_1^{+\infty} e^{-z(\xi - \ln\xi)}\, d\xi = \int_1^{+\infty} e^{-zw}\xi_2'(w)\, dw,$$

где $\xi_2(w)$ — та ветвь обратной к $\xi - \ln\xi$ функции, которая положительна и больше единицы при $w > 1$ (при $w \to +\infty$ имеем $\xi_2(w) \to +\infty$).

Итак, контур C — это луч $(1, +\infty)$, проходимый дважды, так что мы можем написать

$$z^{-z-1}\Gamma(z+1) = \int\limits_1^\infty e^{-zw}\left[\xi_2'(w) - \xi_1'(w)\right] dw.$$

Выясним теперь поведение функций $\xi_1'(w)$ и $\xi_2'(w)$ на всем луче $(1, +\infty)$ и в окрестности точки $w = 1$. По формуле дифференцирования обратной функции (см. теорему 7.2 гл. IV) имеем

$$\xi_1'(w) = \frac{\xi_1(w)}{\xi_1(w) - 1}, \qquad \xi_2'(w) = \frac{\xi_2(w)}{\xi_2(w) - 1},$$

откуда видно, что функции $\xi_1'(w)$ и $\xi_2'(w)$ ограничены при $w \to +\infty$, а при $w \to 1$ стремятся к бесконечности. Поскольку производная функции $w = \xi - \ln \xi$ при $w = 1$ имеет нуль первого порядка, то по теореме 7.3 гл. IV функция $\xi(w)$ в окрестности точки $w = 1$ может быть представлена в виде $\xi(w) = g(\sqrt{w-1})$, где $g(\zeta)$ является голоморфной функцией в окрестности точки $\zeta = 0$, причем $g(0) = 1$, а $g'(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{w''(1)}} = \sqrt{2}$. Это означает, что при $w > 1$

$$\xi_1(w) = 1 - \sqrt{2}\sqrt{w-1} + \ldots,$$

$$\xi_2(w) = 1 + \sqrt{2}\sqrt{w-1} + \ldots,$$

$$\xi_2'(w) - \xi_1'(w) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{w-1}} + \psi(w),$$

где функция $\psi(w)$ удовлетворяет неравенству

$$|\psi(w)| \leqslant M\sqrt{|w-1|} \qquad (w > 1).$$

Поэтому

$$z^{-z-1}\Gamma(z+1) = \sqrt{2}\int\limits_1^\infty (w-1)^{-\frac{1}{2}} e^{-zw}\, dw + \int\limits_1^\infty \psi(w) e^{-zw}\, dw.$$

Но

$$\int\limits_1^\infty (w-1)^{-\frac{1}{2}} e^{-zw}\, dw = \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}\int\limits_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt =$$

$$= 2\frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{z}}\, e^{-z}$$

(из анализа известно, что последний интеграл равен $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$), а

$$\left|\int_1^\infty \psi(w)\,e^{-zw}\,dw\right| \leqslant M\int_1^\infty (w-1)^{\frac{1}{2}}e^{-zw}\,dw = \frac{Me^{-z}}{z^{3/2}}\int_1^\infty t^{\frac{1}{2}}e^{-t}\,dt = M_1\frac{e^{-z}}{z^{3/2}}.$$

Следовательно, мы получили асимптотическую формулу

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{2\pi}z^{z+\frac{1}{2}}e^{-z}\left(1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right),$$

известную под названием *формулы Стирлинга.*

Нетрудно показать, что формула Стирлинга остается в силе и при $\operatorname{Re} z \to +\infty$ $\left(\text{с заменой } O\left(\frac{1}{z}\right) \text{ на } O\left(\frac{1}{\operatorname{Re} z}\right)\right)$. □

Сделаем несколько замечаний общего характера о методе, использованном нами для получения формулы Стирлинга.

Мы использовали две идеи. Одна из них состоит в замене переменного, приводящей интеграл к виду

$$\int_a^\infty \left\{\frac{c}{\sqrt{w-a}} + \psi(w)\right\} e^{-wz}\,dz,$$

где функция $\psi(w)$ удовлетворяет неравенству $|\psi(w)| \leqslant M\sqrt{|w-a|}$, другая — в получении асимптотической формулы для последнего интеграла. Каждая из этих идей может быть развита и обобщена.

При получении асимптотической формулы для интегралов вида

$$F(z) = \int_a^{a+\infty} \varphi(w)\,e^{-wz}\,dw \qquad (\operatorname{Re} z \to +\infty) \tag{4.1}$$

используется следующий результат:

Теорема 4.1. *Если функция* $\varphi(w)$ *удовлетворяет условиям*

$$|\varphi(w)| < M \quad (w-a \geqslant \rho > 0)$$

и

$$\varphi(w) = \sum_{k=0}^\infty c_k (w-a)^{\alpha+\beta k} \qquad (0 < w-a < \rho),$$

то для интеграла (4.1) *справедливы асимптотические формулы*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \Gamma(\alpha + \beta k) z^{-\alpha-\beta k-1} + O\left((\operatorname{Re} z)^{-\alpha-\beta n-1}\right)$$

$$(\operatorname{Re} z \to +\infty),$$

где n — *любое целое число.* ($\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера).

Эта теорема доказывается такими же рассуждениями, какие мы проводили в примере 2. $\square$

Замена переменного применяется к интегралам вида

$$F(z) = \int_{\Gamma} f(\xi) e^{-zh(\xi)} d\xi,$$

чтобы привести эти интегралы к интегралам вида (4.1). При замене $w = h(\xi)$ интеграл принимает вид

$$F(z) = \int_{\Gamma_1} \varphi(w) e^{-zw} dw,$$

где $\varphi(w) = f(\xi(w))\xi'(w)$, а контур Γ_1 — это образ контура Γ при отображении $w = h(\xi)$. Контур Γ_1 мы деформируем, стараясь отодвинуть его возможно правее (это уменьшает множитель e^{-zw}, существенный при больших $\operatorname{Re} z$). Такой деформации могут мешать концы контура и особые точки функции $\varphi(w)$. Поэтому контур распадается на сумму контуров, каждый из которых является лучом, выходящим из особой точки параллельно положительной части действительной оси. Лучи, выходящие из концов контура, обходятся однократно, а выходящие из особых точек — дважды. Интеграл по каждому из таких лучей и является интегралом вида (4.1).

Обосновать описанный способ действий в общем случае весьма затруднительно, но это и не очень нужно. Сказанное следует воспринимать лишь как указание к действиям в конкретных задачах.

Описанный способ находится в тесной связи с так называемым методом перевала *).

---

*) Читателям, желающим подробнее познакомиться с методами получения асимптотических формул, можно обратиться к монографиям [3, 13, 16, 27].

§ 5. Суммирование рядов

Методы теории вычетов применимы и для исследования сумм рядов. Для этой цели сумма ряда должна быть выражена через контурный интеграл. Попытаемся коротко рассказать о приемах, которые применяются для этой цели.

Сначала приведем один из тех немногих случаев, когда с помощью теории вычетов удается найти сумму ряда в конечном виде. Помимо того, что этот случай имеет и самостоятельный интерес, он служит подготовкой ко всему дальнейшему.

Теорема 5.1. *Пусть $Q(z)$ — рациональная функция с полюсами $z_1, z_2, \ldots, z_p$* (отличными от целых чисел), *и пусть степень числителя $Q(z)$ ниже степени ее знаменателя не меньше, чем на две единицы. Тогда*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} Q(k) = -\pi \sum_{1}^{p} \operatorname*{res}_{z=z_s} Q(z) \operatorname{ctg} \pi z.$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$J_n = \int\limits_{|z|=n+\frac{1}{2}} Q(z) \operatorname{ctg} \pi z \, dz \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Поскольку степень числителя $Q(z)$ хотя бы на две единицы меньше степени ее знаменателя, то

$$\max_{|z|=R} |Q(z)| \leqslant \frac{M}{R^2} \qquad (R > R_0).$$

В § 6 гл. II показано, что функция $\operatorname{ctg} \pi z$ ограничена в плоскости z, из которой удалены круги $|z-k| < \varepsilon$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Поэтому $\max\limits_{|z|=n+\frac{1}{2}} |\operatorname{ctg} \pi z| \leqslant M_1$. Следовательно, оценивая интеграл J_n произведением максимума модуля подынтегральной функции на длину пути интегрирования, имеем

$$|J_n| \leqslant 2\pi \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{M}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \cdot M_1 \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

С другой стороны, интеграл J_n можно вычислить с помощью теоремы о вычетах. При достаточно большом n в круге $|z| < n + \frac{1}{2}$ лежат полюсы $z_1, z_2, \ldots, z_p$ функции $Q(z)$ и полюсы $z=0, \pm 1, \ldots, \pm n$ функции $\operatorname{ctg}\pi z$. Вычеты в полюсах $z=k$ равны $\frac{1}{\pi}Q(k)$. Поэтому

$$J_n = 2\pi i\left\{\frac{1}{\pi}\sum_{-n}^{n} Q(k) + \sum_{1}^{p} \operatorname*{res}_{z=z_s} Q(z)\operatorname{ctg}\pi z\right\}.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем утверждение теоремы. □

Совершенно аналогично может быть доказана формула

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^k Q(k) = -\pi\sum_{1}^{p}\operatorname*{res}_{z=z_s}\frac{Q(z)}{\sin\pi z}.$$

К сожалению, в конечном виде можно найти суммы лишь очень немногих рядов. Поэтому гораздо большее значение имеет выражение сумм рядов через контурные интегралы. Один из наиболее употребительных приемов, используемых для этой цели, основан на следующей теореме.

Теорема 5.2. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в полосе $a<\operatorname{Re} z<b$ и удовлетворяет там неравенству*

$$|f(x+iy)| \leqslant Me^{\alpha|y|}, \qquad \alpha<2\pi. \tag{5.1}$$

Тогда при $k\geqslant a+1$, $n\leqslant b-1$, $n>k$, и при любом $0<\theta<1$

$$\sum_{s=k}^{n} f(s) = \int_{k+\theta-1}^{n+\theta} f(x)\,dx + \frac{1}{2i}\int_{\theta}^{\theta+i\infty}[f(n+z)-f(k-1+z)](\operatorname{ctg}\pi z+i)\,dz + \frac{1}{2i}\int_{\theta}^{\theta-i\infty}[f(k-1+z)-f(n+z)](\operatorname{ctg}\pi z-i)\,dz. \tag{5.2}$$

Доказательство. Обозначим через C_h прямоугольник

$$k-1+\theta<\operatorname{Re} z<n+\theta, \qquad |\operatorname{Im} z|<h,$$

который в силу условий на k и n лежит в полосе $a<\operatorname{Re} z<b$, а через J — интеграл от $f(z)\operatorname{ctg}\pi z$ по C_h.

Согласно теореме о вычетах имеем

$$J = 2\pi i \sum_{k}^{n} \operatorname*{res}_{z=s} f(z) \operatorname{ctg} \pi z = 2i \sum_{k}^{n} f(s).$$

Теперь обозначим через C_h^+ верхнюю половину C_h, а через C_h^- нижнюю половину C_h, причем направлением у C_h^+ и C_h^- будем считать направление от точки $z = k - 1 + \theta$ к точке $z = n + \theta$. Очевидно, имеем

$$J = \int_{C_h^-} f(z) \operatorname{ctg} \pi z \, dz - \int_{C_h^+} f(z) \operatorname{ctg} \pi z \, dz$$

и

$$J = \int_{C_h^-} f(z)(\operatorname{ctg} \pi z - i)\, dz + i \int_{C_h^-} f(z)\, dz - \\ - \int_{C_h^+} f(z)(\operatorname{ctg} \pi z + i)\, dz + i \int_{C_h^+} f(z)\, dz.$$

Но интеграл от $f(z)$ зависит лишь от концов контура, так что интегралы от $f(z)$ по C_h^+ и C_h^- можно заменить интегралом по отрезку $(k - 1 + \theta,\ n + \theta)$. Поэтому

$$J = 2i \int_{k-1+\theta}^{n+\theta} f(x)\, dx + \int_{C_h^-} f(z)(\operatorname{ctg} \pi z - i)\, dz - \\ - \int_{C_h^+} f(z)(\operatorname{ctg} \pi z + i)\, dz.$$

Далее,

$$\int_{C_h^+} f(z)(\operatorname{ctg} \pi z + i)\, dz = \\ = \int_{\theta}^{\theta+ih} [f(k-1+z) - f(n+z)](\operatorname{ctg} \pi z + i)\, dz + \\ + \int_{k-1+\theta+ih}^{n+\theta+ih} f(z)(\operatorname{ctg} \pi z + i)\, dz.$$

Так как

$$\left|\int\limits_{k-1+\theta+ih}^{n+\theta+ih} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z+i)\,dz\right| \leqslant$$
$$\leqslant (n-k+1) \max_{k-1+\theta\leqslant x\leqslant n+\theta} |f(x+ih)|\,|\operatorname{ctg}\pi(x+ih)+i|,$$

а в § 6 гл. II показано, что $|\operatorname{ctg}\pi(x+ih)+i| < \dfrac{2}{e^{2\pi h}-1}$ при $h>0$, то в силу условия (5.1) имеем

$$\left|\int\limits_{k-1+\theta+ih}^{n+\theta+ih} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z+i)\,dz\right| \leqslant (n-k+1)\,Me^{ah}\frac{2}{e^{2\pi h}-1}\to 0$$
$$(h\to+\infty)$$

и

$$\int\limits_{C_h^+} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z+i)\,dz =$$
$$=\int\limits_{\theta}^{\theta+i\infty}[f(k-1+z)-f(n+z)](\operatorname{ctg}\pi z+i)\,dz.$$

Аналогично для интеграла по C_h^-. Сравнивая оба выражения, полученные для J, приходим к формуле (5.2).

Следствие. *Пусть функция* $f(z)$ *голоморфна в полуплоскости* $\operatorname{Re} z>0$ *и удовлетворяет неравенству*

$$|f(x+iy)|<\varepsilon(x)\,e^{a|y|},\qquad 0<a<2\pi,$$

где $\varepsilon(x)\to 0$ *при* $x\to+\infty$. *Тогда при любом* $0<\theta<1$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_1^n f(s)-\int\limits_{\theta}^{n+\theta} f(x)\,dx\right\}=$$
$$=\frac{1}{2i}\int\limits_{\theta}^{\theta-i\infty} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z-i)\,dz-\frac{1}{2i}\int\limits_{\theta}^{\theta+i\infty} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z+i)\,dz.$$

Эта формула называется *формулой Абеля — Плана.* Она очевидным образом вытекает из формулы (5.2), так как

$$\left|\int\limits_{\theta}^{\theta\pm i\infty} f(n+z)(\operatorname{ctg}\pi z\mp i)\,dz\right|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon(n+\theta)\int\limits_{0}^{\infty} Me^{-(2\pi-a)y}\,dy\to 0\qquad(n\to\infty).$$

Приведем один пример использования формулы Абеля — Плана.

Пример 1. Покажем, что функцию (см. конец § 1 гл. IV)

$$F(t)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}t^n\qquad(|t|<1)$$

можно аналитически продолжить в плоскость с разрезом $(1, +\infty)$.

Применим формулу Абеля — Плана, положив $f(z)=e^{-\sqrt{z}}t^z$. Функцию t^z мы понимаем как $e^{z\ln t}$, где для $\ln t$ берется ветвь, удовлетворяющая условию $-\pi+\alpha<\operatorname{Im}\ln t<\pi+\alpha$. Эта ветвь голоморфна в плоскости t с разрезом по лучу $\arg t=\pi+\alpha$. (В качестве α возьмем любое число $|\alpha|<\pi$.)

Тогда имеем

$$F(t)=\int\limits_{\theta}^{\infty} e^{-\sqrt{x}}t^x\,dx-\frac{1}{2i}\int\limits_{\theta}^{\theta+i\infty}(\operatorname{ctg}\pi z+i)\,e^{-\sqrt{z}}t^z\,dz+$$

$$+\frac{1}{2i}\int\limits_{\theta}^{\theta-i\infty}(\operatorname{ctg}\pi z-i)\,e^{-\sqrt{z}}t^z\,dz.$$

Интеграл $\int\limits_{\theta}^{\infty} e^{-\sqrt{x}}t^x\,dx$ равномерно сходится по t в круге $|t|<1$ с разрезом по радиусу $(0, e^{i(\pi+\alpha)})$. Поворачивая контур интегрирования, этот интеграл можно аналитически продолжить (в силу теоремы 2.1) на всю плоскость t с разрезами по лучам $\arg t=\pi+\alpha$ и $(1, +\infty)$.

Интегралы $\int\limits_{\theta}^{\theta\pm i\infty}(\operatorname{ctg}\pi z\mp i)\,e^{-\sqrt{z}}t^z\,dz$ равномерно сходятся в любой конечной части плоскости t с разрезом по лучу $\arg t = \pi + \alpha$, так как на прямой $\operatorname{Re} z = \theta$

$$\left| e^{-\sqrt{z}} \right| \leqslant 1, \ \left| t^z \right| \leqslant |t|^\theta e^{(\pi + |\alpha|)|\operatorname{Im} z|},$$

а $|\operatorname{ctg} \pi z \mp i| \leqslant M e^{-2\pi |\operatorname{Im} z|}$.

Таким образом, функцию $F(t)$ можно аналитически продолжить на всю плоскость t с разрезами по лучам $\arg t = \pi + \alpha$ и $(1, +\infty)$. Но число α подчинено лишь одному условию $|\alpha| < \pi$. Поэтому, если мы покажем, что обход вокруг точки $t = 0$ не меняет функцию $F(t)$, то докажем ее голоморфность в плоскости с разрезом $(1, +\infty)$. Из первоначальной формулы видно, что $F(t)$ голоморфна в точке $t = 0$. Таким образом, наше утверждение доказано. $\square$

Приведем еще один прием, часто используемый для выражения суммы степенного ряда через контурные интегралы.

Теорема 5.3. *Пусть контур L не проходит через точку $t = 0$, а функция $\varphi(t)$ непрерывна на контуре L и*

$$\int_L \frac{|\varphi(t)|}{|t|} |dt| < \infty.$$

Если

$$c(x) = \int_L \varphi(t)\, t^{-x-1}\, dt \quad (x \geqslant 0), \tag{5.3}$$

то в некоторой окрестности точки $z = 0$ имеем

$$\sum_0^\infty c(n) z^n = \int_L \frac{\varphi(t)}{t - z} dt.$$

Доказательство. Положим в (5.3) $x = n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, умножим на z^n и просуммируем. При $|z|$ меньшем, чем расстояние от точки $t = 0$ до контура L, перестановка порядка суммирования и интегрирования законна ввиду равномерной сходимости ряда и интеграла, и мы получаем

$$\sum_0^\infty c_n z^n = \int_L \sum_0^\infty \frac{z^n}{t^{n+1}} \varphi(t)\, dt = \int_L \frac{\varphi(t)}{t - z} dt.$$

Теорема доказана. $\square$

Пример 2. Пусть $s>0$. Покажем, что функция

$$F_s(z)=\sum_1^\infty n^{-s}z^n \qquad (|z|<1)$$

может быть аналитически продолжена на всю плоскость z с разрезом $(1, +\infty)$.

Для применения теоремы 5.3 нужно представить функцию x^{-s} в виде соответствующего интеграла. Покажем, что $x^{-s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int\limits_1^\infty (\ln u)^{s-1}u^{-x-1}\,du$. Действительно, делая замену $\ln u=\frac{\xi}{x}$, получаем

$$\int\limits_1^\infty (\ln u)^{s-1}u^{-x-1}\,du=\int\limits_0^\infty \left(\frac{\xi}{x}\right)^{s-1}e^{-\zeta}\frac{d\xi}{x}=$$

$$=x^{-s}\int\limits_0^\infty \xi^{s-1}e^{-\xi}\,d\xi=x^{-s}\Gamma(s).$$

Поэтому теорема 5.3 дает

$$F_s(z)=\frac{z}{\Gamma(s)}\int\limits_1^\infty \frac{(\ln u)^{s-1}}{u(u-z)}\,du \qquad (|z|<1).$$

Последний интеграл является интегралом типа Коши (см. § 2), и представляет функцию, голоморфную в области, не содержащей точек контура (т. е. луча $(1, +\infty)$). Наше утверждение доказано. □

При желании можно было бы найти и более широкое аналитическое продолжение функции $F_s(z)$ и исследовать характер ее многозначности в окрестности точки $z=1$. □

Основным неудобством описанного приема является то, что мы не можем писать результат сразу по функции $c(x)$, а должны еще сначала найти для этой функции соответствующее интегральное представление. Это представление можно найти во многих случаях с помощью формул обращения преобразования Меллина, которые мы выведем в гл. VII. С их помощью функция $\varphi(t)$ выражается через функцию $c(x)$ еще одним контурным интегралом.

§ 6. Основные формулы, относящиеся к гамма-функции Эйлера

Очень многие ряды и интегралы, встречающиеся в анализе, могут быть выражены через гамма-функцию Эйлера. В теории аналитических функций $\Gamma(z)$ фигурирует почти наравне с элементарными функциями. В связи с этим надо несколько пополнить наши сведения об этой функции. □

По определению

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}\,dx \qquad (z>0). \tag{6.1}$$

В § 5 гл. II было доказано, что этот интеграл равномерно сходится в любой конечной части полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$. Там же было осуществлено аналитическое продолжение функции $\Gamma(z)$ на всю комплексную плоскость и показано, что $\Gamma(z)$ голоморфна во всей плоскости, за исключением точек $z=0,\ -1,\ -2,\ \ldots$, в которых имеет полюсы первого порядка.

Интегрируя по частям в интеграле (6.1), получаем формулу

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z). \tag{6.2}$$

По принципу аналитического продолжения эта формула справедлива для всех z. Ее тоже можно использовать для продолжения $\Gamma(z)$ в полуплоскость $\operatorname{Re} z<0$. □

Докажем еще одну формулу, тоже пригодную для этой цели, а именно

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{-Cz}\prod_1^\infty\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}, \tag{6.3}$$

где C — так называемая *постоянная Эйлера*

$$C=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right).$$

Для доказательства заметим, что $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\to e^{-x}$ при $n\to\infty$ равномерно по x на любом конечном отрезке положительной части действительной оси и $0<\left(1-\frac{x}{n}\right)^n<$

$< e^{-x}$ при $0 < x < n$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{z-1}\,dx = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}\,dx = \Gamma(z).$$

Интеграл, стоящий под знаком предела, легко вычисляется интегрированием по частям:

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{z-1}\,dx = \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\dots(z+n)}{n!\,n^z} =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left\{n^{-z}\cdot z\left(1+\frac{z}{1}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right)\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{n^{-z}e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)}\right\}\lim_{n\to\infty}\left\{z\prod_1^n\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}\right\}.$$

Нетрудно показать, что бесконечное произведение равномерно сходится в любой конечной области, так что

$$\lim_{n\to\infty}\prod_1^n\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}} = \prod_1^\infty\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}.$$

Значит, существует и предел

$$\lim_{n\to\infty}\left\{n^{-z}e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\lim_{n\to\infty}\left[z\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)-z\ln n\right]\right\} = e^{Cz}.$$

Таким образом, доказана формула (6.3) при $z > 0$. По принципу аналитического продолжения она справедлива при всех z. □

Заменим в формуле (6.3) z на $-z$ и умножим полученную формулу на формулу (6.3). Это дает, если вспомнить формулу (5.2) гл. IV о разложении $\sin z$ в бесконечное произведение, что

$$\frac{1}{\Gamma(z)\,\Gamma(-z)} = -\frac{z}{\pi}\sin\pi z.$$

Но согласно формуле (6.2) $\Gamma(1-z)=-z\Gamma(-z)$, и мы приходим к формуле

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}. \qquad (6.4)$$

В частности, полагая $z=\frac{1}{2}$, получаем $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. □

С помощью формулы (6.4) мы без труда докажем следующее интегральное представление:

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L e^{\zeta}\zeta^{-z}\,d\zeta. \qquad (6.5)$$

Здесь L — граница области $|\zeta|>\rho$, $|\arg\zeta|<\pi$, $\zeta^{-z}=$ $=e^{-z\ln\zeta}$, а для $\ln\zeta$ берется главное значение.

Ясно, что интеграл в формуле (6.5) равномерно сходится в любой конечной области, так как e^{ζ} при $\zeta\to-\infty$ стремится к нулю быстрее любой степени ζ. Контур L состоит из окружности $|\zeta|=\rho$ и из луча $(-\infty, -\rho)$, проходимого дважды. При $z<1$ интеграл по окружности $|\zeta|=\rho$ стремится к нулю при $\rho\to 0$, так что при $z<1$ контур L можно заменить лучом $(-\infty, 0)$, проходимым дважды. Найдем значения подынтегральной функции на верхнем и на нижнем крае разреза $(-\infty, 0)$. На верхнем крае разреза имеем $\ln\zeta=\ln|\zeta|+\pi i$ и $\zeta^{-z}=|\zeta|^{-z}e^{-\pi iz}$, а на нижнем крае $\ln\zeta=\ln|\zeta|-\pi i$ и $\zeta^{-z}=|\zeta|^{-z}e^{\pi iz}$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L e^{\zeta}\zeta^{-z}\,d\zeta=\frac{e^{\pi iz}}{2\pi i}\int\limits_0^{\infty}x^{-z}e^{-x}\,dx-\frac{e^{-\pi iz}}{2\pi i}\int\limits_0^{\infty}x^{-z}e^{-x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sin\pi z\,\Gamma(1-z)=\frac{1}{\Gamma(z)}$$

согласно формуле (6.4). Тем самым формула (6.5) доказана для $z<1$, но по принципу аналитического продолжения она верна и для всех z. □

Выясним поведение $\Gamma(z)$ при больших z. Формула Стирлинга, которую мы получили в примере 2 § 4, не вполне удобна, так как она пригодна лишь при $\operatorname{Re} z\to$ $\to+\infty$. С помощью формулы (6.4) можно было бы получить формулу и для $\operatorname{Re} z\to-\infty$, но поведение $\Gamma(z)$ вблизи мнимой оси исследовать таким образом не удается.

Логарифмируя формулу (6.3), получаем

$$\ln \Gamma(z) = Cz - \sum_{1}^{\infty}\left[\ln\left(1 + \frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right] - \ln z.$$

Отсюда легко находим $\frac{d^2}{dz^2}\ln\Gamma(z) = \sum\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{(n+z)^2}$. Теперь заметим, что при $\operatorname{Re} z > 0$

$$\frac{1}{(n+z)^2} = \int_0^\infty \zeta e^{-\zeta(z+n)}\,d\zeta.$$

Поэтому

$$\frac{d^2}{dz^2}\ln\Gamma(z) = \sum_0^\infty \int_0^\infty \zeta e^{-\zeta(z+n)}\,d\zeta = \int_0^\infty \frac{\zeta e^{-z\zeta}}{1-e^{-\zeta}}\,d\zeta \qquad (\operatorname{Re} z > 0).$$

В этой формуле контур интегрирования можно поворачивать в угле $|\arg\zeta| < \frac{\pi}{2} - \delta$, $\delta > 0$, что дает нам

$$\frac{d^2}{dz^2}\ln\Gamma(z) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} \frac{\zeta e^{-z\zeta}}{1-e^{-\zeta}}\,d\zeta \qquad \left(\operatorname{Re}\left(ze^{i\theta}\right) > 0\right),\ |\theta| < \frac{\pi}{2}.$$

Те же рассуждения, что и в конце примера 2 § 4, позволяют без труда получить асимптотические формулы

$$\frac{d^2}{dz^2}\ln\Gamma(z) = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1\cdot 1!}{z_2} + \ldots + \frac{c_n\cdot n!}{z^{n+1}} + O\left(\frac{1}{z^{n+2}}\right) \tag{6.6}$$
$$(|z|\to\infty,\ |\arg z| \leqslant \pi - \delta),$$

где $\sum\limits_0^\infty c_n t^n = \frac{t}{1-e^{-t}}$. Нетрудно найти $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{1}{2}$.

Интегрированием формулы (6.6) получаем

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \ln z + C' + \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (z\to\infty,\ |\arg z| \leqslant \pi - \delta),$$

$$\ln\Gamma(z) = z\ln z + (C'-1)z - \frac{1}{2}\ln z + C_1' + O\left(\frac{1}{z}\right)$$
$$(z\to\infty,\ |\arg z| \leqslant \pi - \delta).$$

Сравнивая последнюю формулу с формулой Стирлинга, находим $C'=0$, $C_1'=\frac{1}{2}\ln 2\pi$. Таким образом, при $z\to\infty$, $|\arg z|\leqslant\pi-\delta$, имеем

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\ln z+O\left(\frac{1}{z}\right), \tag{6.7}$$

$$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln 2\pi+O\left(\frac{1}{z}\right). \tag{6.8}$$

В заключение приведем еще несколько интегралов, выражающихся через $\Gamma(z)$.

Поворачивая в формуле (6.1) луч интегрирования до мнимой оси, что в силу леммы Жордана возможно при $0<z<1$, приходим к формуле

$$\int\limits_0^\infty y^{z-1}e^{-iy}\,dy=e^{-\frac{\pi iz}{2}}\Gamma(z).$$

Отделяя действительную и мнимую части, получаем

$$\int\limits_0^\infty y^{z-1}\cos y\,dy=\cos\frac{\pi z}{2}\Gamma(z),$$

$$\int\limits_0^\alpha y^{z-1}\sin y\,dy=\sin\frac{\pi z}{2}\Gamma(z).$$

По принципу аналитического продолжения эти формулы справедливы всюду, где входящие в них интегралы равномерно сходятся. Поэтому первая и вторая формулы справедливы при $0<\operatorname{Re}z<1$, а третья — при $-1<\operatorname{Re}z<1$. □

Делая в формуле (6.1) замену $x=u^2$, получаем

$$\Gamma(z)=2\int\limits_0^\infty e^{-u^2}u^{2z-1}\,du\qquad(\operatorname{Re}z>0). \tag{6.9}$$

Перемножая два таких интеграла, получаем

$$\Gamma(z)\,\Gamma(\zeta)=4\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}u^{2z-1}v^{2\zeta-1}\,du\,dv$$

$$(\operatorname{Re}z>0,\quad \operatorname{Re}\zeta>0).$$

Если в двойном интеграле перейти к полярным координатам, то мы получим

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} u^{2z-1} v^{2\zeta-1}\, du\, dv =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2} \rho^{2(z+\zeta)-1} (\cos\theta)^{2z-1} (\sin\theta)^{2\zeta-1}\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho^{2(z+\zeta)-1}\, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2z-1} (\sin\theta)^{2\zeta-1}\, d\theta.$$

Согласно формуле (6.9) это дает нам

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2z-1} (\sin\theta)^{2\zeta-1}\, d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(\zeta)}{\Gamma(z+\zeta)} \tag{6.10}$$

$$(\operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Re} \zeta > 0).$$

Делая в формуле (6.10) замену $\xi = \cos^2\theta$, получаем

$$\int_0^1 \xi^{z-1} (1-\xi)^{\zeta-1}\, d\xi = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(\zeta)}{\Gamma(z+\zeta)} \qquad (\operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Re} \zeta > 0),$$

а заменой $x = \frac{\xi}{1-\xi}$ получаем еще одну формулу:

$$\int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{(x+1)^{z+\zeta}}\, dx = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(\zeta)}{\Gamma(z+\zeta)} \qquad (\operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Re} \zeta > 0).$$

Функция $\mathrm{B}(z, \zeta) = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(\zeta)}{\Gamma(z+\zeta)}$ называется *бета-функцией Эйлера*.

Глава VII

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Одним из наиболее плодотворных методов анализа является *метод интегральных преобразований*, состоящий в том, что вместо исследуемой функции изучается то или иное интегральное преобразование от нее. При этом часто случается, что сложные соотношения для исследуемой функции превращаются в простые соотношения для ее интегрального преобразования. Методы теории вычетов часто дают дополнительные средства для изучения интегральных преобразований.

§ 1. Формула обращения преобразования Лапласа

Пусть функция $f(x)$ определена на всей оси и интеграл

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-xz}\, dx$$

сходится хотя бы на одной прямой $\operatorname{Re} z = c$. Тогда функцию $F(z)$ мы будем называть *двусторонним преобразованием Лапласа функции* $f(x)$ и обозначать это соотношение формулой $f(x) \div F(z)$.

Если функция $f(x)$ определена при $x > 0$ и интеграл

$$F(z) = \int_{0}^{\infty} f(x)\, e^{-xz}\, dx$$

сходится в какой-либо полуплоскости $\operatorname{Re} z > c$, то функцию $F(z)$ мы будем называть *односторонним преобразованием Лапласа функции* $f(x)$ и обозначать это соотношение формулой $f(x) \div F(z)$.

Одностороннее преобразование Лапласа имеет много общих черт со степенным рядом. Для него можно доказать теорему, аналогичную первой теореме Абеля, и ввести понятие полуплоскости сходимости, аналогичное понятию круга сходимости степенного ряда. Двустороннее преобразование Лапласа аналогично ряду Лорана. Его областью сходимости является полоса $a < \operatorname{Re} z < b$, которая может вырождаться в прямую при $a = b$. Во избежание недоразумений для двустороннего преобразования обязательно указывать полосу (или прямую) сходимости, так как одна и та же функция $F(z)$ может отвечать различным функциям $f(x)$ в различных полосах сходимости. Обычно мы будем считать, что двустороннее преобразование Лапласа сходится на мнимой оси, и в качестве полосы сходимости выбирать полосу, содержащую мнимую ось. □

Ясно, что большое значение имеет формула, позволяющая восстановить функцию $f(x)$ по ее преобразованию Лапласа $F(z)$. Она аналогична формулам для коэффициентов ряда Лорана и носит название *формулы обращения.*

Мы докажем три теоремы о формуле обращения. В первых двух теоремах условия, достаточные для справедливости формулы, накладываются на $F(z)$, в третьей — на $f(x)$.

Заметим, что формула обращения должна иметь один и тот же вид как для двустороннего, так и для одностороннего преобразования Лапласа, поскольку одностороннее преобразование можно рассматривать как двустороннее преобразование функции, равной нулю при отрицательных x. (Напомним, что формулы для коэффициентов ряда Тейлора и ряда Лорана тоже имеют одинаковый вид.) □

Теорема 1.1. *Пусть функция $F(z)$ голоморфна в полосе $a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b$. Если функция $F(z)$ удовлетворяет условию*

$$F(z) = O(|z|^{-\alpha-1}),\ 0 < \alpha < 1\quad (z \to \infty,\ a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b), \tag{1.1}$$

то функция

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(z)\, e^{xz}\, dz \qquad (a \leqslant c \leqslant b) \tag{1.2}$$

не зависит от c и при любом $a \leqslant c \leqslant b$ удовлетворяет неравенствам

$$|f(x)\, e^{-cx}| \leqslant M,$$

$$|f(x)\, e^{-cx} - f(\xi)\, e^{-c\xi}| \leqslant M_1 |x - \xi|^{\alpha}.$$

При этом $f(x) \risingdotseq F(z)$ $(a < \operatorname{Re} z < b)$, *а если* $b = +\infty$, *то* $f(x) = 0$ *при* $x < 0$ *и* $f(x) \div F(z)$.

Доказательство. Так как при $z = c + iy$ имеем $|e^{xz}| = e^{cx}$, то условие (1.1) обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость интеграла (1.2) на любом конечном отрезке оси x. Кроме того,

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} |F(z)|\,|e^{xz}|\,|dz| = \frac{e^{cx}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(c+iy)|\,dy \leqslant M e^{cx},$$

что и дает нам первое неравенство для функции $f(x)$.

Далее,

$$e^{-cx} f(x) - e^{-c\xi} f(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(c+iy)\,(e^{iyx} - e^{iy\xi})\,dy,$$

откуда

$$|e^{-cx} f(x) - e^{-c\xi} f(\xi)| \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(c+iy)| \left|\sin\frac{x-\xi}{2} y\right| dy \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{0}^{\infty} y^{-\alpha-1} \left|\sin\frac{x-\xi}{2} y\right| dy =$$

$$= C_1 |x-\xi|^{\alpha} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{|\sin t|}{t^{\alpha+1}}\,dt = M_1 |x-\xi|^{\alpha},$$

и мы получили второе неравенство для функции $f(x)$.

Поскольку подынтегральная функция $F(z)\,e^{xz}$ равномерно стремится к нулю при $z \to \infty$ в полосе $a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b$, то контур интегрирования можно произвольно деформировать в этой полосе. В частности, все контуры $\operatorname{Re} z = c$ эквивалентны между собой (см. § 1 гл. VI). Это означает, что функция $f(x)$ не зависит от c при $a \leqslant c \leqslant b$.

Покажем, что $f(x) \risingdotseq F(z)$ $(a < \operatorname{Re} z < b)$. Умножим функцию $f(x)$ на $e^{-x\zeta}$ и проинтегрируем по x от $-R'$ до R. Для функции $f(x)$ воспользуемся формулой (1.2), но при $x > 0$ возьмем $c = a$, а при $x < 0$ возьмем $c = b$. Так как интеграл, входящий в формулу (1.2), равномерно сходится, то перемена порядка интегрирования законна, и мы получаем

$$\int_{-R'}^{R} f(x)\,e^{-x\zeta}\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)\int_{0}^{R} e^{x(z-\zeta)}\,dx\,dz +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(z)\int_{-R'}^{0} e^{x(z-\zeta)}\,dx\,dz =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{F(z)\,dz}{z-\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{F(z)\,dz}{z-\zeta} + \varepsilon(a, R, \zeta) - \varepsilon(b, R', \zeta),$$

где $\varepsilon(c, r, \zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(z)\frac{e^{-r(z-\zeta)}}{z-\zeta}\,dz.$ Полагая $a+\delta \leqslant \leqslant \operatorname{Re}\zeta \leqslant b-\delta$, $b>0$, и обозначая

$$M' = \frac{1}{2\pi}\max_{a\leqslant c\leqslant b}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}|F(z)|\,|dz|,$$

получаем

$$|\varepsilon(a, R, \zeta)| + |\varepsilon(b, R', \zeta)| \leqslant \frac{M'}{\delta}\left(e^{-R\delta} + e^{-R'\delta}\right),$$

а эта величина стремится к нулю при $R\to+\infty$, $R_1\to+\infty$ Поэтому, переходя к пределу при R и R', стемящихся к $+\infty$, видим, что интеграл от $f(x)e^{-x\zeta}$ по всей действительной оси при $a+\delta\leqslant\operatorname{Re}\zeta\leqslant b-\delta$, $\delta>0$, равномерно сходится по ζ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-x\zeta}\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{F(z)\,dz}{z-\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{F(z)\,dz}{z-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{F(z)\,dz}{z-\zeta},$$

где L — граница полосы $a<\operatorname{Re}z<b$.

Так как подынтегральная функция в последнем интеграле стремится к нулю при $z\to\infty$ в полосе $a\leqslant\operatorname{Re}z\leqslant \leqslant b$, то по теореме 1.1 гл. VI можно применять теорему о вычетах (или интегральную формулу Коши). Следовательно, последний интеграл равен $F(\zeta)$ и

$$f(x) \div F(z) \qquad (a<\operatorname{Re}z<b).$$

Если $b=+\infty$, то функция $F(z)e^{xz}$ при $x<0$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re}z\geqslant a$ и удовлетворяет там неравенству $F(z)=O\left(\frac{1}{z^{\alpha+1}}\right)(z\to\infty,\ \operatorname{Re}z\geqslant a)$. Применение теоремы 1.1 гл. VI дает нам, что интеграл (1.2) равен нулю. Теорема доказана. $\square$

Условия, при которых доказана теорема 1.1, не очень удобны для применений. Дело в том, что функция $f(x)$, получаемая из функции $F(z)$, непрерывна на всей оси, а чаще приходится сталкиваться с разрывными при $x=0$ функциями $f(x)$. Действительно, когда мы имеем дело с односторонним преобразованием Лапласа, то считаем, что $f(x)$ равна нулю при $x<0$ и равна какой-то функции при $x>0$.

Поэтому нам придется доказать еще одну теорему, в которой условия накладываются на $F(z)$. Для ее доказательства и для доказательства третьей теоремы, в которой условия накладываются на функцию $f(x)$, понадобится следующая важная лемма.

Лемма 1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на всей оси, за исключением счетного множества точек разрыва, не имеющего предельных точек на конечном расстоянии. Если*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty,$$

то при $\nu \to \pm\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\nu x}\,dx \to 0.$$

Доказательство. Сначала докажем, что утверждение леммы справедливо для функции $f(x)$, равной нулю вне отрезка (a, b) и равномерно непрерывной на этом отрезке. Идея доказательства состоит в том, что функция $e^{i\nu x}$ при больших ν сильно осциллирует; в частности, при изменении x на $\frac{\pi}{\nu}$ функция $e^{i\nu x}$ меняет знак. Имеем

$$\int_a^b f(x)\,e^{i\nu x}\,dx =$$

$$= \int_{a-\frac{\pi}{\nu}}^{b-\frac{\pi}{\nu}} f\left(\xi+\frac{\pi}{\nu}\right) e^{i\nu\left(\xi+\frac{\pi}{\nu}\right)}\,d\xi = -\int_{a-\frac{\pi}{\nu}}^{b-\frac{\pi}{\nu}} f\left(\xi+\frac{\pi}{\nu}\right) e^{i\nu\xi}\,d\xi$$

Отсюда, считая для определенности, что $\nu > 0$, получаем

$$2\int_a^b f(x)\,e^{i\nu x}\,dx = -\int_{a-\frac{\pi}{\nu}}^{a} f\left(x+\frac{\pi}{\nu}\right)e^{i\nu x}\,dx + \\ + \int_{b-\frac{\pi}{\nu}}^{b} f(x)\,e^{i\nu x}\,dx + \int_a^{b-\frac{\pi}{\nu}} \left[f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{\nu}\right)\right]e^{i\nu x}\,dx.$$

Каждое слагаемое в правой части равенства стремится к нулю; первые два — из-за того, что длина промежутка интегрирования стремится к нулю, третье — из-за того, что стремится к нулю подынтегральная функция. Наше утверждение доказано.

Для доказательства леммы в полном объеме нужно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N, что

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\nu x}\,dx\right| < \varepsilon \qquad (|\nu| > N).$$

Сначала выберем число A столь большим, чтобы

$$\int_{|x|>A} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Далее, на отрезке $(-A, A)$ имеется конечное число точек разрыва функции $f(x)$. Заключаем их в столь малые окрестности δ_k, чтобы

$$\sum \int_{\delta_k} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Выбор A и δ_k возможен в силу абсолютной интегрируемости функции $f(x)$ на всей оси.

После удаления осталось конечное число отрезков, на каждом из которых функция $f(x)$ непрерывна. Интеграл от $f(x)e^{i\nu x}$ по каждому из этих отрезков при $\nu \to \pm\infty$ стремится к нулю в силу утверждения, доказанного вначале. Поэтому можно выбрать число N столь большим, чтобы при $|\nu| > N$ сумма интегралов от функции $f(x)e^{i\nu x}$ по всем упомянутым отрезкам не превосходила по модулю величины $\varepsilon/3$. Тогда при $|\nu| > N$

имеем

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\nu x}\, dx\right| \leqslant \int_{|x|>A} |f(x)|\, dx + \\ + \sum \int_{\delta_k} |f(x)|\, dx + \left|\sum \int_{a_n}^{b_n} f(x)\, e^{i\nu x}\, dx\right| < \varepsilon,$$

и лемма полностью доказана.

Заметим, что утверждение леммы остается в силе и при одном только предположении абсолютной интегрируемости (можно говорить и об интеграле Лебега). $\square$

Теорема 1.2. *Пусть* $0<\alpha<1$ *и пусть функция* $F(z)$, *голоморфная в полосе* $a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b$, *удовлетворяет условиям*

$$F'(z) = O(z^{-\alpha-1}),\quad F(z) \to 0 \quad (z \to \infty,\ a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b). \qquad (1.3)$$

Тогда формула обращения (1.2) *справедлива при* $x \neq 0$. *Если обозначить* $g(x) = xf(x)$ (*при* $x \neq 0$) *и положить* $g(0)=0$, *то функция* $g(x)$ *при любом* $a \leqslant c \leqslant b$ *удовлетворяет неравенству*

$$|e^{-cx} g(x) - e^{-c\xi} g(\xi)| < M|x-\xi|^{\alpha}.$$

При этом $f(x) \div F(z)$ $(a < \operatorname{Re} z < b)$, *а если* $b = +\infty$, *то* $f(x) = 0$ *при* $x < 0$ *и* $f(x) \div F(z)$.

Доказательство. Сведем эту теорему к теореме 1.1. Интегрируя по частям, легко убеждаемся, что интеграл (1.2), определяющий функцию $f(x)$, сходится при $x \neq 0$, и получаем формулу

$$g(x) = xf(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F'(z)\, e^{xz}\, dz \qquad (a \leqslant c \leqslant b).$$

Нетрудно проверить, что последний интеграл сходится и при $x=0$, и его значение при $x=0$ равно нулю.

Поскольку функция $G(z) = -F'(z)$ в силу (1.3) удовлетворяет условиям теоремы 1.1, то мы получаем неравенство для $g(x)$ и соотношение $g(x) \div G(z)$ $(a < \operatorname{Re} z < b)$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{-xz}\, dx = -F'(z) \qquad (a < \operatorname{Re} z < b).$$

Покажем, что из этого равенства следует соотношение

$f(x) \doteqdot F(z)$. Положим $\operatorname{Re} z = c$ $(a < c < b)$ и проинтегрируем полученное равенство для $F'(z)$ по z от ζ до $c + iR$. Это даст нам

$$F(\zeta) - F(c+iR) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-x\zeta}\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-cx} e^{-iRx}\, dx.$$

Из неравенств для функции $g(x)$ видно, что функция $f(x)e^{-cx}$ — абсолютно интегрируемая по всей оси функция. Поэтому при $R \to +\infty$ последний интеграл стремится к нулю согласно лемме 1. Так как величина $F(c+iR)$ при $R \to +\infty$ тоже стремится к нулю в силу условий (1.3), то переходя к пределу при $R \to +\infty$, приходим к равенству

$$F(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-x\zeta}\, dx \qquad (a < \operatorname{Re} \zeta < b).$$

Если $b = +\infty$, то применяем те же рассуждения, что и в теореме 1.1. Доказательство закончено.

Для доказательства следующей теоремы понадобится одно понятие, о котором говорилось только вскользь.

Будем говорить, что функция $f(x)$ *удовлетворяет в точке* $x = \xi$ *условию Липшица порядка* α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, если для всех x, лежащих в некоторой окрестности точки $x = \xi$, имеем

$$|f(x) - f(\xi)| < M|x - \xi|^{\alpha}.$$

Теорема 1.3. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на всей оси за исключением счетного множества точек разрыва, не имеющего предельных точек на конечном расстоянии, и пусть*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,(e^{-ax} + e^{-bx})\, dx < \infty \tag{1.4}$$

(*a может совпадать с b*). *Тогда функция*

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-xz}\, dx \qquad (a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b) \tag{1.5}$$

непрерывна в полосе $a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b$ и голоморфна в ее внутренних точках (если они есть, т. е. если $a < b$). *Если в точке $x = \xi$ функция $f(x)$ удовлетворяет условию*

Липшица порядка $\alpha > 0$, *то*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(z)\, e^{\xi z}\, dz = f(\xi) \qquad (a \leqslant c \leqslant b). \qquad (1.6)$$

Доказательство. При $a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b$ имеем $|e^{-xz}| \leqslant e^{-ax} + e^{-bx}$, так что подынтегральная функция в формуле (1.5) при всех x не превосходит абсолютно интегрируемой функции $|f(x)|\,(e^{-ax} + e^{-bx})$. Поэтому интеграл опрcделяющий функцию $F(z)$, равномерно сходится по z в полосе $a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b$. Отсюда вытекают свойства функции $F(z)$.

Для доказательства формулы (1.6) рассмотрим интеграл

$$J_{R,R'}(\xi) = \int\limits_{c-iR'}^{c+iR} \left[F(z) - f(\xi)\, \frac{2ke^{-\xi z}}{z^2 - k^2} \right] e^{\xi z}\, dz,$$

где $a \leqslant c \leqslant b$, $k > |c|$.

Имеем

$$F(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-xz} dx, \qquad \frac{2ke^{-\xi z}}{z^2 - k^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-k|x-\xi| - xz}\, dx$$

(последнее равенство легко получается, если мы разобьем промежуток интегрирования на части $(-\infty, \xi)$ и $(\xi, +\infty)$, а затем выполним интегрирование). Поскольку оба интеграла равномерно сходятся по z на прямой $\operatorname{Re} z = c\,(a \leqslant c \leqslant b)$, можно подставить их в выражение $J_{R,R'}(\xi)$ и изменить порядок интегрирования. Это даст нам

$$J_{R,R'}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [f(x) - f(\xi)\, e^{-k|x-\xi|}] \int\limits_{c-iR'}^{c+iR} e^{z(\xi - x)}\, dz\, dx.$$

Вычисляя внутренний интеграл, после несложных преобразований получаем

$$J_{R,R'}(\xi) = \varphi(-R')\, e^{(c-iR')\xi} - \varphi(R)\, e^{(c+iR')\xi},$$

где

$$\varphi(\nu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{i\nu x}\, dx, \qquad g(x) = e^{-cx}\, \frac{f(x) - f(\xi)\, e^{-k|x-\xi|}}{x - \xi}.$$

Нетрудно убедиться, что если функция $f(x)$ удовлетворяет в точке $x=\xi$ условию Липшица, то функция $g(x)$ удовлетворяет условиям леммы 1. Действительно, из условия (1.4) и из того, что $k>|c|$, следует абсолютная интегрируемость функции $g(x)$ по всей оси за исключением какой-либо окрестности точки $x=\xi$, а условие Липшица обеспечивает абсолютную интегрируемость $g(x)$ в окрестности точки $x=\xi$. Остальные условия леммы 1 выполнены в силу условий, наложенных в теореме на функцию $f(x)$. Поэтому $\varphi(\nu)\to 0$ при $\nu\to\pm\infty$, а следовательно, предел $J_{R,R'}(\xi)$ при $R\to+\infty$, $R'\to+\infty$ существует и равен нулю. Это означает, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(z)\,e^{\xi z}\,dz = f(\xi)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{2k\,dz}{z^2-k^2}=f(\xi)$$

(последний интеграл легко вычисляется с помощью вычетов — он равен единице). Теорема доказана.

Замечание 1. Формулу обращения преобразования Лапласа тоже можно рассматривать как интегральное преобразование. Нетрудно убедиться, что это обратное интегральное преобразование лишь несущественными деталями отличается от самого преобразования Лапласа. Это означает, в частности, что любая теорема, в которой условия налагаются на $F(z)$, может быть переделана в теорему с условиями на $f(x)$, и наоборот.

Замечание 2. Рассмотрение преобразования Лапласа от функций многих переменных (по каждой из переменных) не приводит к каким-либо новым вопросам. Формула обращения имеет вид

$$f(x_1,\ldots,x_n)=$$
$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\cdots\int\limits_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty}F(z_1,\ldots,z_n)\,e^{x_1z_1+\ldots+x_nz_n}\,dz_1\ldots dz_n,$$

где

$$F(z_1,\ldots,z_n)=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x_1,\ldots,x_n)\,e^{-(x_1z_1+\ldots+x_nz_n)}\,dx_1\ldots dx_n.$$

§ 2. Теорема о свертке и другие формулы

Значительную роль в теории преобразования Лапласа играет понятие свертки двух функций.

Сверткой функций $f(x)$ *и* $g(x)$, определенных на всей оси, называется функция

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)\,g(\xi)\,d\xi=\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,g(x-\xi)\,d\xi$$

(будем предполагать, что интегралы сходятся при всех x, хотя это и не обязательно).

Сверткой функций $f(x)$ *и* $g(x)$, *определенных при* $x>0$, называется функция

$$(f*g)(x)=\int_{0}^{x} f(x-\xi)\,g(\xi)\,d\xi=\int_{0}^{x} f(\xi)\,g(x-\xi)\,d\xi.$$

Нетрудно заметить, что последнее определение является частным случаем предыдущего, если положить $f(x)=0$ и $g(x)=0$ при $x<0$.

Имеется много различных теорем о зависимости свойств свертки двух функций от свойств этих функций. Приведем лишь одну из простейших *).

Теорема 2.1. *Пусть функция* $f(x)e^{a|x|}$, $a\geqslant 0$, *равномерно непрерывна на всей оси* x, *а функция* $g(x)$ *на каждом конечном отрезке имеет лишь конечное число точек разрыва, и пусть*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,e^{a|x|}\,dx<\infty,\qquad \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,e^{b|x|}\,dx<\infty,\quad |b|<a.$$

Тогда функция $(f(x)*g(x))e^{b|x|}$ *равномерно непрерывна на всей оси и*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(x)*g(x))\,e^{b|x|}\,dx<\infty.$$

Доказательство. Обозначим

$$f_1(x)=f(x)e^{a|x|},\quad g_1(x)=g(x)e^{b|x|},\quad h_1(x)=(f(x)*g(x))e^{b|x|}.$$

*) Подробное изложение теорем о свертке имеется в [33]. Без теории интеграла Лебега многие теоремы о свертке трудно даже сформулировать.

Тогда

$$h_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\xi)\,g_1(\xi)\exp(-a|x-\xi|-b|\xi|+b|x|)d\xi.$$

Покажем, что этот интеграл равномерно сходится на всей оси. Оценим подынтегральную функцию. В силу равномерной непрерывности функции $f_1(x)$ на всей оси имеем $|f_1(x-\xi)|\leqslant M$. Далее, так как $a\geqslant 0$, а $|x-\xi|\geqslant \|x|-|\xi\|$, имеем

$$-a|x-\xi|-b|\xi|+b|x|\leqslant -a\|x|-|\xi\|+|b|\|x|-|\xi|=$$
$$=(|b|-a)\|x|-|\xi\|\leqslant 0.$$

Следовательно, подынтегральная функция не превосходит $M|g_1(\xi)|$ и в силу абсолютной интегрируемости функции $g_1(x)$ по всей оси интеграл для функции $h_1(x)$ равномерно сходится на всей оси. Из равномерной сходимости интеграла следует равномерная непрерывность функции $h_1(x)$.

Докажем абсолютную интегрируемость функции $h_1(x)$ по всей оси. Очевидно, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h_1(x)|\,dx\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_1(x-\xi)|\,|g_1(\xi)|\,d\xi\,dx.$$

Остается показать, что написанный двойной интеграл сходится. Для этого достаточно показать, что существует конечный предел интеграла

$$\iint\limits_{D_r}|f_1(x-\xi)|\,|g_1(\xi)|\,d\xi\,dx \qquad (r\to\infty),$$

где D_r — какая-нибудь расширяющаяся последовательность областей, покрывающая при $r\to\infty$ всю плоскость. В качестве D_r возьмем параллелограмм $|\xi|<r$, $|x-\xi|<r$ в плоскости (x,ξ). Имеем

$$\iint\limits_{D_r}|f_1(x-\xi)|\,|g_1(\xi)|\,d\xi\,dx=\int_{-r}^{r}|g_1(\xi)|\int_{-r+\xi}^{r+\xi}|f_1(x-\xi)|\,dx\,d\xi=$$
$$=\int_{-r}^{r}|g_1(\xi)|\,d\xi\int_{-r}^{r}|f_1(\eta)|\,d\eta\leqslant$$
$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|g_1(\xi)|\,d\xi\int_{-\infty}^{\infty}|f_1(\eta)|\,d\eta<\infty.$$

Таким образом, последовательность интегралов по D_r при возрастании r монотонно возрастает и ограничена. Следовательно, интеграл сходится и теорема доказана.

Замечание 1. Если предположить, что функция $f(x)e^{a|x|}$ не только равномерно непрерывна на всей оси, но и удовлетворяет условию

$$|f(x)e^{ax} - f(\xi)e^{a\xi}| < M|x-\xi|^{\alpha} \qquad (0 < \alpha \leqslant 1),$$

то и функция $(f(x) * g(x))e^{b|x|}$ тоже будет удовлетворять аналогичному неравенству.

Замечание 2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ равны нулю при $x < 0$, то значения их свертки на отрезке $(0, A)$ зависят только от значений $f(x)$ и $g(x)$ на этом отрезке. Поэтому из теоремы 2.1 легко получаем:

Если функция $f(x)$ непрерывна при $x \geqslant 0$, а функция $g(x)$ абсолютно интегрируема на каждом конечном отрезке, то их свертка

$$(f(x) * g(x)) = \int_0^x f(x-\xi)\, g(\xi)\, dx$$

непрерывна при $x \geqslant 0$. $\square$

Теорема 2.2. *Пусть функция $f(x)$ равномерно непрерывна на всей оси, а функция $g(x)$ имеет конечное число точек разрыва на каждом конечном отрезке, и пусть*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\, dx < \infty.$$

Если $f(x) \div F(z)$, $g(x) \div G(z)$, то $(f(x) * g(x)) \div$ $\div F(z)G(z)$.

Доказательство. При $\operatorname{Re} z = 0$ имеем

$$(f(x) * g(x)) \div \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) * g(x))\, e^{-xz}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xz} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi\, dx.$$

Как и при доказательстве теоремы 2.1, убеждаемся, что двойной интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int f(x-\xi)\, g(\xi)\, e^{-xz}\, d\xi\, dx \qquad (\operatorname{Re} z = 0)$$

абсолютно сходится. Его значение можно найти, вычислив предел интеграла по любой расширяющейся последовательности областей D_r. Выбирая в качестве этой последовательности те же параллелограммы $|\xi|<r$, $|x-\xi|<r$, что и при доказательстве теоремы 2.1, получаем утверждение теоремы. (Заметим, что все рассуждения с выбором последовательности областей нужны всего лишь для оправдания законности замены переменных в двойном несобственном интеграле.) $\square$

Сделаем несколько интересных выводов из этой теоремы. Теорему 2.2 можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} F(z)\, G(z)\, e^{xz}\, dz, \tag{2.1}$$

где $f(x) \risingdotseq F(z)$ и $g(x) \risingdotseq G(z)$. Теперь заметим, что из соотношения $f(x) \risingdotseq F(z)$ следует соотношение $\overline{f(-x)} \risingdotseq \overline{F(-\bar{z})}$. Так как на мнимой оси $-\bar{z}=z$, то, полагая $g(\xi)=\overline{f(-\xi)}$, $x=0$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)|^2\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(iy)|^2\, dy. \tag{2.2}$$

Эта формула носит название *равенства Парсеваля.* $\square$

С помощью теоремы 2.2 и других формул того же типа (но более простых) часто удается решать задачи, не применяя формулу обращения. Прежде чем показать примеры таких действий, выведем еще несколько формул. Все они могут быть получены из теоремы 2.2 при некотором ее обобщении, но проще доказывать их непосредственно.

Нам придется доказывать эти формулы в двух вариантах: для одностороннего и для двустороннего преобразования Лапласа, так как формулы для этих случаев немного различны.

1. *Если* $f(x) \risingdotseq F(z)$, *то* $xf(x) \risingdotseq -F'(z)$.

Действительно, интеграл, определяющий функцию $F(z)$, равномерно сходится в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} z > c$. По теореме 4.5 гл. II его можно дифференцировать под знаком интеграла. Это дает нам

$$F'(z) = -\int_0^{\infty} f(x)\, x e^{-xz}\, dx \qquad (\operatorname{Re} z > c),$$

т. е. $xf(x) \risingdotseq -F'(z)$.

1*. *Пусть*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)\,|f(x)|\,e^{-ax}\,dx < \infty.$$

Если $f(x) \div F(z)$ $(\operatorname{Re} z = a)$, то $xf(x) \div -F'(z)$ $(\operatorname{Re} z = a)$.

Применить то же рассуждение, что при доказательстве формулы 1, нельзя, так как область равномерной сходимости интеграла может не содержать внутренних точек. Однако условие абсолютной интегрируемости функции $(1+|x|)f(x)$ обеспечивает сходимость и интеграла, определяющего функцию $F(z)$, и интеграла, полученного дифференцированием под знаком интеграла. Поэтому дифференцирование под знаком интеграла законно, и мы получаем искомую формулу.

2. *Пусть* $\int\limits_0^{\infty} |f'(x)|\,e^{-ax}\,dx < \infty$. *Если* $f(x) \div F(z)$, *то* $f'(x) \div zF(z) - f(0)$.

Действительно, при достаточно большом $\operatorname{Re} z$ имеем $f(x)e^{-xz} \to 0$ *при* $x \to +\infty$ и

$$f'(x) \div \int_0^{\infty} f'(x)\,e^{-xz}\,dx =$$

$$= f(x)\,e^{-xz}\Big|_0^{\infty} + z\int_0^{\infty} f(x)\,e^{-xz}\,dx = -f(0) + zF(z).$$

Формула доказана.

2*. *Пусть*

$$f(x)e^{-ax} \to 0 \qquad (x \to \pm\infty),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|f(x)| + |f'(x)|)\,e^{-ax}\,dx < \infty.$$

Если $f(x) \div F(z)$, *то* $f'(x) \div zF(z)$ $\qquad (\operatorname{Re} z = a)$.

Эта формула доказывается так же, как и предыдущая. $\square$

На первый взгляд кажется странным, что формулы 2 и 2* различаются между собой, так как одностороннее преобразование Лапласа является частным случаем двустороннего. Причина различия в том, что функция, равная $f(x)$ при $x \geqslant 0$ и нулю при $x < 0$, заведомо не будет дифференцируема, если $f(0) \neq 0$. Если же $f(0) = 0$, то формулы 2 и 2* совпадают. $\square$

Теперь приведем пример решения задачи методом преобразования Лапласа без использования формулы обращения.

Пример 1. Найдем решение уравнения

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n y(x) = f(x),$$

удовлетворяющее условию $y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0$.

Сначала допустим, что при достаточно больших x функция $f(x)$ обращается в нуль. Тогда при достаточно больших x функция $y(x)$, которую мы ищем, является решением однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, т. е. линейной комбинацией функций вида $P_k(x) e^{\lambda_k x}$ ($P_k(x)$ — многочлен). Поэтому одностороннее преобразование Лапласа функции $y(x)$ существует, как и преобразование Лапласа ее производных.

Положим $y(x) \div \eta(z)$, $f(x) \div F(x)$.

Формула 2 с учетом условий $y(0) = y'(0) = \ldots \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0$ дает нам соотношения

$$y'(x) \div z\eta(z), \ \ldots, \ y^{(n)}(x) \div z^n \eta(z).$$

Используя уравнение для $y(x)$, находим

$$P(z)\eta(z) = F(z) \qquad (P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n),$$

или $\eta(z) = \frac{F(z)}{P(z)}$. Рациональную функцию $\frac{1}{P(z)}$ можно разложить на сумму простейших дробей

$$\frac{1}{P(z)} = \sum \sum \frac{A_{m,k}}{(z - \lambda_m)^k}.$$

Чтобы найти функцию $q(x)$, односторонним преобразованием Лапласа которой является функция $\frac{1}{P(z)}$, решим эту задачу для каждой из простейших дробей. Воспользуемся очевидной формулой

$$\frac{1}{z - \lambda} = \int_0^\infty e^{\lambda x - xz}\, dx \qquad \left(e^{\lambda x} \div \frac{1}{z - \lambda}\right).$$

Применение формулы 1 дает

$$x^k e^{\lambda x} \div \frac{k!}{(z - \lambda)^{k+1}}.$$

Следовательно,

$$q(x) = \sum \sum \frac{A_{m,k}}{(k-1)!} x^{k-1} e^{\lambda_m x}.$$

Далее, из соотношений

$$y(x) \div \eta(z), \quad f(x) \div F(z), \quad q(x) \div \frac{1}{P(z)}, \quad \eta(z) = \frac{1}{P(z)} F(z)$$

с помощью теоремы 2.2 получаем

$$y(x) = (q(x) * f(x)),$$

т. е.

$$y(x) = \int_0^x q(x-\xi) f(\xi) d\xi.$$

Заметим, что решение зависит лишь от поведения функции $f(x)$ на отрезке $(0, x)$. Поэтому наше допущение, что $f(x) = 0$ при достаточно больших x, не снижает общности. □

Имеется широко разработанный раздел метода интегральных преобразований — операционное исчисление, который занимается только решением задач без использования формулы обращения. В учебниках операционного исчисления приводится много различных формул, подобных приведенным выше. Все эти формулы тем или иным способом получаются из приведенных основных. □

Позаимствуем из операционного исчисления удобную терминологию: функцию $f(x)$ будем называть *оригиналом*, а ее преобразование Лапласа — *изображением*.

§ 3. Примеры применения метода

Основная масса применений метода преобразования Лапласа выходит далеко за пределы теории аналитических функций. Поэтому примеры, которые мы сейчас рассмотрим, мало связаны с теорией аналитических функций. Они выбраны с единственной целью — показать сущность метода, привлекая возможно меньше лишнего материала.

Пример 1. Пусть функция $f(x)e^{-b|x|}$, $b < a$, равномерно непрерывна на всей оси. Найдем решение уравнения

$$y''(x) - a^2 y(x) = f(x) \qquad (a > 0)$$

такое, что функция $y(x)e^{-b|x|}$ равномерно непрерывна на всей оси.

Допустим сначала, что функция $f(x)$ равна нулю при всех значениях x, достаточно больших по абсолютной величине. Тогда $y(x)$ при достаточно больших x является решением уравнения $y''=a^2y$, т. е. $y(x)=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}$ (при $x>A$ и $x<-A$ постоянные C_1 и C_2 различны). Условие равномерной непрерывности (а значит, и ограниченности) $y(x)e^{-b|x|}$ на всей оси дает нам

$$y(x)=Ce^{-ax} \qquad (x>A), \qquad y(x)=C'e^{ax} \qquad (x<-A).$$

Отсюда видно, что для функции $y(x)$ и для ее производных существует двустороннее преобразование Лапласа. Обозначая

$$y(x) \risingdotseq \eta(z), \qquad f(x) \risingdotseq F(z),$$

получаем из уравнения (используя формулу 2*)

$$(z^2-a^2)\,\eta(z)=F(z), \qquad \eta(z)=\frac{1}{z^2-a^2}F(z).$$

Но функция $\frac{1}{z^2-a^2}$ является изображением функции $\frac{e^{-a|x|}}{2a}$, что легко проверяется интегрированием. Согласно теореме 2.2 произведение изображений отвечает свертке оригиналов. Поэтому

$$y(x)=-\frac{1}{2a}\left(e^{-a|x|}*f(x)\right),$$

или

$$y(x)=-\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|x-\xi|}f(\xi)\,d\xi. \tag{3.1}$$

Заметим, что полученная формула пригодна уже без каких бы то ни было допущений. Действительно, из теоремы 2.1 о свойствах свертки следует, что функция $y(x)e^{-b|x|}$, $b<a$, равномерно непрерывна на всей оси, если функция $f(x)e^{-b|x|}$ обладает этим свойством.

Нетрудно показать, что формула (3.1) дает единственное решение задачи. Действительно, разность двух решений задачи была бы решением уравнения $y''=ay^2$, удовлетворяющим условию

$$|y(x)|<Me^{b|x|} \qquad (b<a).$$

Ясно, что таким решением уравнения может быть лишь тождественный нуль.

Пример 2. Найдем решение интегрального уравнения

$$\int_0^x (x-\xi)^{\alpha-1} y(\xi)\,d\xi = f(x) \qquad (0<\alpha<1),$$

где $f(x)$ — произвольная функция, непрерывно дифференцируемая при $x \geqslant 0$.

Положим формально $y(x) \div \eta(z)$, $f(x) \div F(z)$ и заметим, что

$$x^{\nu-1} \div \Gamma(\nu) z^{-\nu} \qquad (\nu>0) \tag{3.2}$$

(для $z^{-\nu}$ берется главное значение), так как

$$\int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-xz}\,dx = \Gamma(\nu) z^{-\nu} \qquad (\operatorname{Re} z>0,\ \nu>0).$$

Поэтому исходное уравнение вместе с теоремой 2.2 о свертке дает нам

$$\Gamma(\alpha) z^{-\alpha} \eta(z) = F(z), \qquad \eta(z) = \frac{z^\alpha}{\Gamma(\alpha)} F(z).$$

Обозначим через $g(x)$ оригинал функции $\frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} F(z) = G(z)$. Так как согласно формуле (3.2) с $\nu = 1-\alpha$ имеем $x^{-\alpha} \div \Gamma(1-\alpha) z^{\alpha-1}$, а $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}$ согласно формуле (6.4) гл. VI, то по теореме о свертке

$$g(x) = (x^{-\alpha} * f(x)) \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \int_0^x (x-\xi)^{-\alpha} f(\xi)\,d\xi.$$

Поскольку $\eta(z) = zG(z)$, то по формуле 2 § 2 имеем $y(x) = g'(x) + g(0)$. Но $g(0) = 0$, и мы получаем

$$y(x) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-\xi)^{-\alpha} f(\xi)\,d\xi.$$

Эта формула дает решение интегрального уравнения, в чем нетрудно убедиться проверкой. Однако вопрос о единственности решения интегрального уравнения нуждается в дополнительном исследовании, которое не столь просто.

Пример 3. Найдем решение дифференциального уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x, 0) = f(x)$ $(t \geqslant 0, -\infty < x < \infty)$.

Обозначим формально $u(x, t) \div v(z, t)$, $f(x) \div F(z)$. Из уравнения получаем с помощью формулы 2* § 2

$$\frac{\partial v}{\partial t} = z^2 v, \qquad v(z, 0) = F(z).$$

Решая последнее уравнение, находим

$$v(z, t) = e^{z^2 t} F(z).$$

Согласно теореме о свертке, обозначая через $q(x, t)$ оригинал функции $e^{z^2 t}$, имеем

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x - \xi, t) f(\xi) \, d\xi.$$

Остается найти $q(x, t)$. Используем формулу обращения. Поскольку $e^{z^2 t}$ при $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$ и при фиксированном $\operatorname{Re} z$ стремится к нулю быстрее любой степени, мы можем применить теорему 1.1 и написать

$$q(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c - i\infty}^{c + i\infty} e^{z^2 t + xz} \, dz \qquad (-\infty < c < \infty).$$

Возьмем $c = -\frac{x}{2t}$. Делая замену $\zeta = z - c$, легко находим

$$q(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c - i\infty}^{c + i\infty} \exp\left[t\left(z + \frac{x}{2t}\right)^2 - \frac{x^2}{4t}\right] dz =$$

$$= e^{-\frac{x^2}{4t}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\zeta^2 t} \, d\zeta = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2 t} \, dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \, e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Окончательная формула имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4t}} f(\xi) \, d\xi.$$

Нетрудно убедиться, что эта формула дает искомое решение уравнения, если функция $f(x)$ удовлетворяет условию $|f(x)| < M e^{|x|^{2 - \delta}}$.

Вопрос о единственности решения требует дополнительного исследования.

Пример 4. Найдем решение интегрального уравнения

$$y(x) = \frac{\lambda}{2}\int_0^\infty e^{-|x-\xi|}y(\xi)\,d\xi \qquad (x > 0),$$

удовлетворяющее условию

$$|y(x)| < Me^{ax} \qquad (a < 1).$$

Обозначим

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{2}\int_0^\infty e^{-|x-\xi|}y(\xi)\,d\xi \qquad (-\infty < x < \infty),$$

$$\varphi_+(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases} \qquad \varphi_-(x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 0, \\ \varphi(x), & x < 0. \end{cases}$$

Ясно, что функция $\varphi_+(x)$ в силу уравнения совпадает с $y(x)$.

Для функции $\varphi(x)$ без труда получаем неравенство

$$|\varphi(x)| \leqslant Me^{ax-(1-a)|x|} \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Поэтому для функции $\varphi(x)$ в полосе $a < \operatorname{Re} z < 1$ существует двустороннее преобразование Лапласа. Обозначим его $\Phi(z)$, а

$$\Phi_+(z) = \int_0^\infty \varphi(x)e^{-xz}\,dx, \qquad \Phi_-(z) = \int_{-\infty}^0 \varphi(x)e^{-xz}\,dx.$$

Функция $\Phi_+(z)$ голомофна и ограничена в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant a+\varepsilon$, а $\Phi_-(z)$ — в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 1-\varepsilon$ (ε — любое положительное число) и $\Phi(z) = \Phi_+(z) + \Phi_-(z)$ $(a < \operatorname{Re} z < 1)$.

По теореме 2.2 о свертке имеем

$$\Phi(z) = \Phi_-(z) + \Phi_+(z) = \lambda\Phi_+(z)\frac{1}{z^2-1} \qquad (a < \operatorname{Re} z < 1),$$

так как изображением функции $e^{-|x|}$ является функция $\frac{2}{z^2-1}$.

Пусть $\lambda < 0$. Тогда можно выбрать a так, чтобы $\operatorname{Re}\sqrt{1+\lambda} < a < 1$. Рассмотрим функцию

$$\psi(z) = (z-1)\Phi_-(z) = \frac{1+\lambda-z^2}{z+1}\Phi_+(z).$$

С одной стороны, функция $\psi(z)$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant a+\varepsilon$ и удовлетворяет там неравенству $\psi(z) = O(|z|+1)$, так как функция $\Phi_+(z)$ голоморфна и ограничена при $\operatorname{Re} z \geqslant a+\varepsilon$. С другой стороны, функция $\psi(z)$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} z \leqslant 1-\varepsilon$ и удовлетворяет там неравенству $\psi(z) = O(|z|+1)$ (по тем же соображениям, с заменой $\Phi_+(z)$ на $\Phi_-(z)$. Это означает, что $\psi(z)$ голоморфна во всей плоскости и $\psi(z) = O(|z|)$ при $z \to \infty$. По теореме Лиувилля (см. § 2 гл. IV) имеем $\psi(z) = C + C_1 z$. Но при $z \to +\infty$ имеем $\psi(z) = o(|z|)$, так как $\Phi_+(z) \to 0$ при $z \to +\infty$, в чем легко убедиться, взглянув на формулу для нее. Следовательно,

$$\psi(z) \equiv C, \quad \Phi_+(z) = C\frac{z+1}{1+\lambda-z^2}.$$

Но функция $\Phi_+(z)$ является односторонним изображением искомого решения. Поэтому, возвращаясь к оригиналу, получаем

$$y(x) = \left(1+\sqrt{1+\lambda}\right)e^{x\sqrt{1+\lambda}} - \left(1-\sqrt{1+\lambda}\right)e^{-x\sqrt{1+\lambda}}.$$

Пример 5. Найдем фундаментальную систему решений уравнения

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + y(x) = 0.$$

Будем искать решение в виде контурного интеграла

$$y(x) = \int_C \varphi(z)e^{xz}\,dz,$$

где контур C таков, что подынтегральная функция достаточно быстро стремится к нулю при стремлении z к концам контура (или C — замкнутый контур). Очевидно, имеем

$$y'(x) = \int_C z\varphi(z)e^{xz}\,dz, \qquad y''(x) = \int_C z^2\varphi(z)e^{xz}\,dz,$$

$$x(y''(x)+y(x)) = x\int\limits_C (1+z^2)\varphi(z)e^{xz}\,dz =$$
$$= -\int\limits_C e^{xz}\frac{d}{dz}[(1+z^2)\varphi(z)]\,dz$$

(обынтегрированные члены исчезают в силу предположения о концах контура). Поэтому уравнение дает нам

$$\int\limits_C \left\{z\varphi(z) - \frac{d}{dz}[(1+z^2)\varphi(z)]\right\}e^{xz}\,dz = 0.$$

Это равенство заведомо выполняется, если подынтегральная функция равна нулю, т. е. если

$$\frac{d}{dz}[(1+z^2)\varphi(z)] = z\varphi(z).$$

Решая полученное уравнение для $\varphi(z)$, находим

$$\varphi(z) = \frac{c}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Таким образом, функции вида $y(x) = \int\limits_C \frac{e^{xz}}{\sqrt{1+z^2}}\,dz$ являются решениями исходного уравнения, если контур C выбран так, чтобы подынтегральная функция достаточно быстро стремилась к нулю при приближении к концам контура, или если C — замкнутый контур и $\sqrt{1+z^2}$ однозначен на C.

Чтобы получить два линейно независимых решения исходного уравнения, можно взять следующие контуры:

C_1 — граница области $|\arg(z-i)| < \pi$, $|z-i| > \rho$;

C_2 — граница области $|\arg(z+i)| < \pi$, $|z+i| > \rho$.

При $\operatorname{Re} x > 0$ интегралы сходятся, поскольку при $z \to \pm i - \infty$ функция e^{xz} стремится к нулю быстрее любой степени.

Полагая $\rho = 0$ и объединяя интегралы по двум краям разреза в один интеграл, получаем следующие формулы для решений:

$$y_1(x) = e^{ix}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t(t+2i)}}\,dt \qquad (\operatorname{Re} x > 0),$$

$$y_2(x) = e^{-ix}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t(t-2i)}}\,dt \qquad (\operatorname{Re} x > 0).$$

С помощью теоремы 4.1 гл. IV легко получаем асимптотические формулы

$$y_1(x) \sim \frac{e^{ix}}{\sqrt{2\pi i x}} \qquad (\operatorname{Re} x \to +\infty),$$

$$y_2(x) \sim \frac{e^{-ix}}{\sqrt{-2\pi i x}} \qquad (\operatorname{Re} x \to +\infty),$$

из которых сразу видна линейная независимость $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

С помощью поворота контура (как в примере 1 § 2 гл. VI) функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ можно аналитически продолжить на всю плоскость, за исключением точки $x=0$, где эти функции имеют логарифмическую точку ветвления.

Можно было выбрать в качестве контура C границу области, состоящей из всей плоскости с разрезом по отрезку $(-i, i)$. Этот контур является замкнутым, и функция $\sqrt{1+z^2}$ однозначна на нем. Соответствующее этому контуру решение исходного уравнения имеет вид

$$y(x) = \int_{-1}^{1} \frac{e^{iyx}}{\sqrt{1-y^2}}\, dy.$$

Видно, что функция $y(x)$ голоморфна во всей плоскости.

Из общих соображений ясно, что функция $y(x)$ является линейной комбинацией функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

§ 4. Обобщенное преобразование Лапласа

До сих пор мы рассматривали преобразование Лапласа лишь для функций $f(x)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, e^{-ax}\, dx < \infty$$

при каком-либо a. Во многих задачах это предположение сильно ограничивает возможности метода. Так, скажем, в примере 1 предыдущего параграфа мы смогли применить преобразование Лапласа и получить формулу для решения лишь после дополнительного предположения, от которого поспешили освободиться сразу после получения формулы. На этом мы потеряли возможность сразу же доказать и единственность решения, так что ее пришлось доказывать отдельно. В несложных задачах эта потеря невелика, но для более трудных задач вопрос о единственности решения далеко не прост. К тому же в сложных случаях и проверка формулы, полученной формальными действиями, тоже доставляет некоторые трудности. Чтобы уяснить их, советуем читателю проверить формулы для решений, найденные нами в примерах 2 и 3 предыдущего параграфа (мы уклонились от этой проверки, указав, что она возможна).

По этим причинам уже довольно давно стали возникать теории, оправдывающие введение преобразования Лапласа для не интегрируемых по всей оси функций $f(x)$. Однако лишь в последнее время создана теория преобразования Лапласа растущих функций, удовлетворяющая тем требованиям, которые предъявляют к ней приложения. С помощью этой теории — она получила название *теории обобщенных функций* — удалось решить многие задачи, связанные с существованием и единственностью решений дифференциальных уравнений с частными производными.

Сколько-нибудь подробное изложение теории обобщенных функций увело бы слишком далеко в сторону. Ограничимся изложением основной идеи, лежащей в основе этой теории *).

В зависимости от требований, возникающих в задачах, преобразование Лапласа обобщается на различные классы функций. Будем говорить главным образом о преобразовании Лапласа функций, непрерывных на любом конечном отрезке действительной оси и растущих при $x \to \pm\infty$.

Мы по-прежнему будем называть функцию $f(x)$ *оригиналом*, а ее преобразование Лапласа — *изображением* и сохраним запись этой связи фомулой $f(x) \div F(z)$, только смысл понятия изображения будет несколько иной.

Изображения наделим следующими свойствами:

1. Изображения $F(z)$ и $G(z)$ считаются равными, если их оригиналы $f(x)$ и $g(x)$ тождественно совпадают.

2. Изображение является линейной функцией оригинала, т. е. из соотношений $f(x) \div F(z)$ и $g(x) \div G(z)$

*) Подробное изложение теории обобщенных функций имеется в [6, 7].

следует, что

$$af(x)+bg(x) \risingdotseq aF(z)+bG(z)$$

для любых постоянных a и b.

3. Если оригинал является непрерывно дифференцируемой функцией, абсолютно интегрируемой по всей оси, то его изображение отождествим с обычным преобразованием Лапласа.

4. Зададим какое-либо понятие сходимости оригиналов и назовем последовательность изображений сходящейся, если последовательность оригиналов сходится в заданном смысле. $\square$

Задавая понятие сходимости оригиналов, мы выделяем тем самым некоторый класс функций (линейное топологическое пространство), получаемых предельным переходом из непрерывно дифференцируемых функций, абсолютно интегрируемых по всей оси. Для всех функций этого класса изображение определяется как формальный предел некоторой последовательности обычных преобразований Лапласа. Понятие сходимости может оказаться и таким, что предел будет существовать в каком-либо обычном смысле, но может оказаться, что ни в каком обычном смысле предел изображений не существует. Однако это и не важно: мы не требуем, чтобы обобщенное изображение было функцией в обычном смысле слова. Важно другое: каждой функции из построенного класса отвечает ровно одно изображение. $\square$

Приведем два примера задания сходимости оригиналов и выясним, к каким классам функций мы придем.

Пример 1. Сходимость оригиналов задана следующим образом: $f_n(x) \to 0$, если $f_n(x)$ равномерно стремится к нулю на каждом конечном отрезке.

В этом случае пределом последовательности непрерывно дифференцируемых функций, абсолютно интегрируемых по всей оси, может быть любая функция, непрерывная во всех точках оси (и только такая). Действительно, во-первых, любую непрерывную функцию, абсолютно интегрируемую по всей оси, можно равномерно приблизить непрерывно дифференцируемыми функциями, абсолютно интегрируемыми по всей оси. Затем для любой непрерывной функции легко строится последовательность абсолютно интегрируемых по всей оси непрерывных функций, равномерно сходящаяся к ней на каждом конечном отрезке. Например, можно положить $f_n(x)$ равной $f(x)$ на отрезке $(-n, n)$, нулю вне отрезка $(-n-1, n+1)$ и линейной на оставшихся отрезках.

С другой стороны, предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций — непрерывная функция.

Пример 2. Сходимость оригиналов задана следующим образом: $f_n(x) \to 0$, если для какого-либо $\alpha < a$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \max_x |f_n(x)\, e^{-\alpha|x|}| = 0.$$

Пределом последовательности непрерывно дифференцируемых функций, абсолютно интегрируемых по всей оси, в этом случае может быть любая непрерывная на всей оси функция $f(x)$, удовлетворяющая условию

$$|f(x)| < Me^{\alpha|x|}$$

при каком-либо $\alpha < a$ (и только такая). Это легко доказывается тем же рассуждением, что и в примере 1. □

Перейдем теперь к вопросу о том, как работать с обобщенным понятием изображения и какова при этом роль понятия сходимости.

Задавая сходимость, мы получаем некоторый класс оригиналов, каждому из которых можно поставить в соответствие изображение. Казалось бы, теперь следует взять класс возможно шире и решать задачи. Однако дело не столь просто. Выбор класса определяется самой задачей. Это происходит, грубо говоря, потому, что чем шире класс, тем меньше действий можно делать с изображениями.

Основные действия, которые приходится совершать с изображениями при решении задач,— это сложение изображений и умножение их на функции. Для обобщенных изображений эти действия следует понимать так: каждое обобщенное изображение является пределом последовательности обычных изображений; действия над этими изображениями отвечают каким-то действиям с оригиналами; если последовательность оригиналов, над которыми совершены соответствующие действия, сходится, то мы получаем сходящуюся последовательность изображений и соответствующее действие над изображением возможно.

Иными словами, действие над изображением возможно, если соответствующее действие над сходящейся последовательностью оригиналов оставляет эту последовательность сходящейся. Это означает, что с изображениями можно совершать такие действия, чтобы соответствующие действия над оригиналами не выводили из класса оригиналов. □

Ясно, что сложение изображений, соответствующее сложению оригиналов, не выводит из класса оригиналов.

Умножение изображения на функцию

$$B(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\beta(x)\,e^{-xz}\,dx$$

соответствует свертке оригинала с функцией $\beta(x)$. Поэтому одним из основных вопросов в теории преобразования Лапласа является отыскание класса функций, свертка с которыми не выводит из данного класса. Этот вопрос играет значительную роль и в классической теории преобразования Лапласа, но в теории обобщенного преобразования Лапласа его роль еще заметнее. Для класса оригиналов, рассмотренного в примере 2, ответ на этот вопрос сразу получается из теоремы 2.1 о свертке:

Если функция $\beta(x)$ удовлетворяет условию

$$|\beta(x)|<Me^{-a|x|}\qquad(-\infty<x<\infty),$$

а $f(x)\in S_a$, то $(f(x)*\beta(x))\in S_a$.

Здесь через S_a обозначен класс функций, описанный в примере 2.

Рассмотрим еще вопрос об умножении изображения на степень z.

Умножение изображения на z соответствует дифференцированию оригинала. Поэтому умножение произвольного изображения на z, вообще говоря, недопустимо. Однако если нам заранее известно, что и сам оригинал, и его производная входят в наш класс оригиналов, то умножение на z является допустимым действием. □

Рассматривать сколько-нибудь сложные примеры использования обобщенного преобразования Лапласа мы не будем. Ограничимся лишь тем, что проведем с его помощью исследование примера 1 предыдущего параграфа. Рассуждения, которые мы продемонстрируем на этом примере, типичны и для более сложных задач. (От более сложных задач мы отказываемся лишь по той причине, что нам пришлось бы доказывать довольно сложные теоремы о свертке, а эти теоремы в дальнейшем нам нигде не понадобятся.)

Пример 3 (ср. пример 1 § 3). Пусть $0 \leqslant \alpha < a$, а $f(x)$ — непрерывная на всей оси функция, для которой $|f(x)| < Me^{\alpha|x|}$. Покажем, что существует единственное решение уравнения

$$y''(x) - a^2 y(x) = f(x),$$

для которого $|y(x)| < M_1 e^{\alpha|x|}$, и найдем формулу для него.

Сначала положим формально

$$y(x) \doteqdot \eta(z), \qquad f(x) \doteqdot F(z)$$

и найдем

$$\eta(z) = \frac{1}{z^2 - a^2} F(z).$$

Теперь выясним, какой класс оригиналов нам следует выбрать. Функция $\frac{1}{z^2 - a^2}$ является изображением функции $\frac{1}{2a} e^{-a|x|}$. Следовательно, класс оригиналов нужно выбрать таким образом, чтобы свертка функции $f(x)$ из этого класса с функцией $\frac{1}{2a} e^{-a|x|}$ тоже входила в этот класс. Тогда символ $\eta(z) = \frac{F(z)}{z^2 - a^2}$ будет изображением функции из этого класса оригиналов, и притом только одной. Это означает, что в любом классе оригиналов, переходящем в себя при свертке с функцией $\frac{1}{2a} e^{-a|x|}$, решение нашей задачи единственно и дается формулой

$$y(x) = \frac{1}{2a} \left(e^{-a|x|} * f(x)\right) = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x-\xi|} f(\xi)\, d\xi.$$

Один такой класс нам известен. Это класс функций, рассмотренный в примере 2. Рассматриваемые условия состоят как раз в требовании, чтобы функции $f(x)$ и $y(x)$ входили в этот класс. Остается еще проверить, допустимо ли было умножение изображения $y(x)$ на z^2.

Из уравнения видно, что функция $y''(x)$ принадлежит тому же классу, что и $y(x)$ с $f(x)$. Отсюда легко получаем, что и $y'(x)$ (как одна из первообразных функции $y''(x)$) принадлежит тому же классу. Тем самым уравнение обеспечивает принадлежность $y'(x)$ и $y''(x)$ тому же классу, что и $y(x)$ с $f(x)$, т. е. умножение $\eta(z)$ на z и на z^2 является допустимым действием. $\square$

Мы говорили только про обобщение преобразования Лапласа на непрерывные функции, растущие на бесконечности. Та же самая идея позволяет обобщать преобразование Лапласа и на функции с плохими дифференциальными свойствами. Для этого нужно выбирать соответствующее понятие сходимости. Так можно строить теорию преобразования Лапласа для функций, интегрируемых с квадратом по всей действительной оси, и для еще более широких классов функций.

§ 5. Использование аналитического продолжения

Стоит заметить, что теория обобщенных функций создана для вполне определенного типа задач, и нет необходимости применять теорию обобщенных функций к любой задаче, где идет речь о преобразовании Лапласа растущих функций. Более того, теория обобщенных функций может и не привести к цели даже для очень простых задач такого рода. С другой стороны, классическая теория преобразования Лапласа тоже имеет дело с преобразованием растущих функций. Один из способов тесно связан с аналитическим продолжением интегралов. $\square$

Пусть функция $f(x)$ определена не только при $x > 0$, но и в угле $|\arg x| < \alpha$ и удовлетворяет в этом угле неравенству

$$|f(x)| < Me^{a|x|} \qquad (|x| > 1,\ |\arg x| < \alpha).$$

Тогда функцию

$$F(z) = \int_0^\infty f(x)\, e^{-xz}\, dx \qquad (\operatorname{Re} z > a)$$

можно аналитически продолжать, поворачивая луч интегрирования, как это делалось в примере 1 § 2 гл. VI. При этом в полуплоскости $\operatorname{Re}(ze^{i\theta}) > a$, $|\theta| < \alpha$, функция $F(z)$ представляется интегралом

$$F(z) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} f(x) e^{-xz}\, dx.$$

Таким образом, функция $F(z)$ не зависит от того, по какому лучу берется интеграл. Поэтому для аналитических функций естественно назвать односторонним преобразованием Лапласа интеграл по любому лучу $\arg x = \theta$, если функция $f(x)$ голоморфна на этом луче. При этом, конечно, придется мириться с тем, что у одной и той же функции $f(x)$ может оказаться много различных преобразований Лапласа, отвечающих различным лучам.

Видно, что при таком понимании преобразования Лапласа мы можем допустить любой рост функции $f(x)$ по действительной оси, если есть какой-либо другой луч, на котором $f(x)$ растет не быстрее, чем $e^{a|x|}$. Даже более того, если $f(x)$ растет по всем лучам, преобразованию Лапласа можно придать смысл, разбив $f(x)$ на сумму какого-то числа функций, имеющих лучи экспоненциального роста.

Докажем две теоремы, относящиеся к такой трактовке преобразования Лапласа.

Теорема 5.1. *Пусть область D содержит какую-либо полуплоскость $\mathrm{Re}(\zeta e^{i\theta}) > a$, контур C — граница D, и пусть функция $\varphi(\zeta)$ абсолютно интегрируема по контуру C. Если*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(\zeta) e^{x\zeta}\, d\zeta \qquad (\arg x = \theta),$$

то

$$F(z) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} f(x) e^{-xz}\, dx = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (z \in D).$$

Если, кроме того, функция $\varphi(\zeta)$ голоморфна в области D, непрерывна вплоть до ее границы и $\varphi(\zeta) \to 0$ $(\zeta \to \infty,\ \zeta \in D)$, то $F(z) = -\varphi(z)$.

Доказательство. Так как область D содержит полуплоскость $\mathrm{Re}(\zeta e^{i\theta}) > a$, то при $\arg x = \theta$, $\zeta \in C$, имеем неравенство $|e^{x\zeta}| \leqslant e^{a|x|}$. Поэтому интеграл для функции $f(x)$ равномерно сходится по x на любой конечной части луча $\arg x = \theta$, так что функция $f(x)$ непрерывна на луче $\arg x = \theta$. Кроме того, для нее имеет место неравенство

$$|f(x)| \leqslant e^{a|x|} \frac{1}{2\pi i} \int_C |\varphi(\zeta)|\, |d\zeta| = Me^{a|x|} \qquad (\arg x = \theta).$$

Следовательно, при $\operatorname{Re}(ze^{i\theta}) \geqslant a + \delta$ интеграл

$$F(z) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} f(x)\, e^{-xz}\, dx$$

равномерно сходится по z. Обычными рассуждениями легко показывается, что порядок интегрирования можно изменить. После перемены порядка интегрирования внутренний интеграл вычисляется, и мы получаем первую формулу для $F(z)$. Если функция $\varphi(\zeta)$ голоморфна в области D, непрерывна вплоть до ее границы C и удовлетворяет условию $\varphi(\zeta) \to 0$ $(\zeta \to \infty,\ \zeta \in D)$, то можно применить интегральную формулу Коши, что даст нам $F(z) = -\varphi(z)$. Теорема доказана.

Теорема 5.2. *Пусть область D содержит какую-либо полуплоскость $\operatorname{Re}(ze^{i\theta}) > a$, контур C — граница D. Если функция $F(z)$ голоморфна в области D, непрерывна вплоть до ее границы и удовлетворяет условиям*

$$F(z) \to 0, \quad F'(z) = O(z^{-\gamma-1}) \quad (z \to \infty,\ z \in D), \quad 0 < \gamma < 1,$$

то функция

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C F(z)\, e^{xz}\, dz \qquad (\arg x = \theta)$$

непрерывна на луче $\arg x = \theta$ кроме точки $x = 0$, удовлетворяет при любом $a' > a$ неравенству

$$|f(x)| < M\, |x|^{-\gamma}\, e^{a'|x|} \qquad (\arg x = \theta)$$

и

$$\int_0^{\infty e^{i\theta}} f(x)\, e^{-xz}\, dx = F(z).$$

Доказательство. Применим к функции $F(ze^{i\theta})$ теорему 1.2. После несложных преобразований формула обращения преобразования Лапласа даст нам, если считать прямую $\operatorname{Re}(ze^{i\theta}) = a'$ границей полуплоскости

$\operatorname{Re}(ze^{i\theta}) > a'$:

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re}(ze^{i\theta})=a'} F(z) e^{xz}\,dz, \quad F(z) = \int\limits_0^{\infty e^{i\theta}} f(x)\, e^{-xz}\,dx.$$

В силу условий на $F(z)$ прямая интегрирования $\operatorname{Re}(ze^{i\theta}) = a'$ эквивалентна контуру C. Теорема доказана. $\square$

В качестве применения доказанных теорем рассмотрим один пример, сходный с примером 5 § 3.

П р и м е р 1. Найдем решение дифференциального уравнения

$$ny^{(n-1)}(x) + xy(x) = 0 \qquad (n > 2),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = p_0, \qquad y'(0) = p_1, \ \ldots, \ y^{(n-2)}(0) = p_{n-2}.$$

Метод решения, который мы применим, можно распространить и на решение аналогичной задачи для других линейных дифференциальных уравнений с линейными коэффициентами.

Обозначая $y(x) \div \eta(z)$, можно написать согласно формуле 2 § 2

$$y^{(n-1)}(x) \div z^{n-1}\eta(z) - P(z) \qquad \left(P(z) = \sum_0^{n-2} p_k z^{n-k}\right),$$

$$xy(x) \div -\eta'(z).$$

Поэтому уравнение для $y(x)$ дает следующее уравнение для $\eta(z)$:

$$\eta'(z) - nz^{n-1}\eta(z) = -P(z), \tag{5.1}$$

где $P(z) = p_0 z^{n-2} + \ldots + p_{n-2}$. Решение уравнения (5.1) имеет вид

$$\eta(z) = -e^{z^n} \int\limits_0^z e^{-\zeta^n} P(\zeta)\,d\zeta + Ce^{z^n} \tag{5.2}$$

(C — произвольная постоянная).

Довольно ясно, что функция $\eta(z)$ не ограничена ни в одной полуплоскости. Поэтому придется разбить $\eta(z)$

на сумму функций, каждая из которых будет ограничена в своей полуплоскости. Для этого сначала рассмотрим поведение в окрестности бесконечно удаленной точки функции e^{z^n} — решения однородного уравнения $\eta'' - nz^{n-1}\eta = 0$. Полагая $z = re^{i\varphi}$, имеем

$$\ln|e^{z^n}| = \operatorname{Re} z^n = r^n \cos n\varphi.$$

Поэтому $e^{z^n} \to 0$ при $z \to \infty$ по лучу $\arg z = \varphi$, если $\cos n\varphi < 0$, и $e^{z^n} \to \infty$ при $z \to \infty$ по лучу $\arg z = \varphi$, если $\cos n\varphi > 0$.

Обозначим через D_k область, получающуюся выбрасыванием из плоскости z бескопечного сектора

$$|z| > R, \quad \left(2k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n} - \delta < \arg z < \left(2k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n} + \delta.$$

(Здесь $R > 0$ и $0 < \delta < \frac{\pi}{2n}$ — произвольны.) Через L_k обозначим границу области D_k (рис. 8).

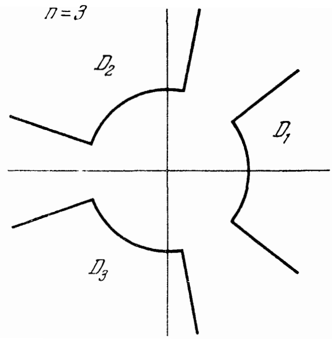

Рис. 8

При $z \to \infty$ по контуру L_k функция e^{z^n} стремится к нулю быстрее, чем $e^{-a|z|}$ при любом a. Поэтому функции

$$\eta_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_k} e^{\zeta^n}\frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

$(\zeta \in D_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, голоморфны в областях D_k. Более того, по теореме об аналитическом продолжении интегралов типа Коши (см. § 2 гл. VI) функции $\eta_k(z)$ можно аналитически продолжить на всю плоскость. Как и в примере 1 § 4 гл. VI, можно получить для функций $\eta_k(z)$ асимптотические формулы

$$\eta_k(z) = \frac{b_k}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \qquad (z \to \infty,\ z \in D_k),$$

$$\eta_k(z) = \frac{b_k}{z} + e^{z^n} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \qquad (z \to \infty,\ z \notin D_k).$$

По теореме 5.1 функции $\eta_k(z)$ являются преобразованиями Лапласа функций

$$y_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} e^{\zeta^n + x\zeta}\, d\zeta.$$

Покажем, что функции $y_k(x)$ являются решениями исходного дифференциального уравнения. Для этого нам достаточно показать, что каждая функция $\eta_k(z)$ удовлетворяет уравнению (5.1) с некоторым многочленом степени $n-2$ в правой части. Имеем

$$\eta_k'(z) - nz^{n-1}\eta_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} e^{\zeta^n} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} e^{\zeta^n} \frac{nz^{n-1}}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

или, совершая в первом интеграле интегрирование по частям,

$$\eta_k'(z) - nz^{n-1}\eta_k(z) = \frac{n}{2\pi i} \int_{L_k} e^{\zeta^n} \frac{\zeta^{n-1} - z^{n-1}}{\zeta - z}\, d\zeta =$$

$$= \sum_{s=0}^{n-2} \frac{nz^s}{2\pi i} \int_{L_k} e^{\zeta^n} \zeta^{n-s-2}\, d\zeta,$$

что и требовалось.

Уравнение (5.1) с любым многочленом $P(z)$ степени $n-2$ в правой части имеет ровно n линейно независимых решений, так как в нашем распоряжении имеются $(n-1)$ коэффициентов многочлена $P(z)$ и произвольная постоянная C. Функций $\eta_k(z)$ ровно n, и они линейно независимы. В этом проще всего убедиться с помощью асимптотических формул. Из них видно, что каждая из функций $\eta_k(z)$ растет только в своем уголке (эти уголки не имеют общих точек). Поэтому интересующая нас функция $\eta(z)$ может быть представлена в виде линейной комбинации функций $\eta_k(z)$. Положим

$$\eta(z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \eta_k(z). \tag{5.3}$$

Тогда интересующее нас решение $y(x)$ равно

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k y_k(x).$$

Остается найти постоянные c_s через начальные условия.

Положим $z \to \infty$, $\arg z = \theta_s = \frac{2\pi s}{n}$. Тогда согласно асимптотическим формулам для функций $\eta_k(z)$ имеем

$$\eta_s(z) \sim e^{z^n}, \qquad \eta_k(z) = o(1) \qquad (k \neq s).$$

Поэтому из формулы (5.3) получаем

$$\eta(z) \sim c_s e^{z^n} \qquad \left(z \to \infty,\ \arg z = \theta_s = \frac{2\pi s}{n}\right).$$

С другой стороны, из формулы (5.2) для $\eta(z)$ получаем

$$\eta(z) \sim \left\{C - \int\limits_0^{\infty e^{i\theta_s}} e^{-\zeta^n} P(\zeta)\,d\zeta\right\} e^{z^n} \qquad (z \to \infty,\ \arg z = \theta_s).$$

Следовательно,

$$c_s = C - \int\limits_0^{\infty e^{i\theta_s}} e^{-\zeta^n} P(\zeta)\,d\zeta \qquad \left(\theta_s = \frac{2\pi s}{n}\right).$$

Заметим, что в отличие от функций $\eta_k(z)$ функции $y_k(x)$ линейно зависимы. Между ними имеется одно соотношение

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k(x) \equiv 0.$$

Поэтому произвольная постоянная C не входит в окончательную формулу для $y(x)$, которая имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{2\pi i} \int\limits_{L_k} e^{\zeta^n + x\zeta}\,d\zeta, \qquad c_k = -\int\limits_0^{\infty e^{i\theta_k}} e^{-}\ P(\zeta)\,d\zeta,$$

где $P(\zeta)$ и L_k определены выше. Легко проверить, что интегралы сходятся при всех комплексных x.

§ 6. Преобразование Меллина

В начале главы упоминалось о том, что наряду с преобразованием Лапласа в анализе употребляются еще два интегральных преобразования, отличающихся от него лишь несущественной заменой переменных. Скажем несколько слов об этих преобразованиях.

Преобразованием Фурье функции $f(x)$, абсолютно интегрируемой по всей оси, называется функция

$$\varphi(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{ix\xi}\,dx \qquad (-\infty<\xi<\infty).$$

Если $F(z)$ — двустороннее преобразование Лапласа той же функции $f(x)$, то, очевидно, имеем $\varphi(\xi)=F(-i\xi)$. Из этого соотношения легко выводятся все свойства преобразования Фурье с помощью свойств преобразования Лапласа (и наоборот). Например, формула обращения преобразования Фурье принимает вид

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,e^{-ix\xi}\,d\xi.$$

Различия в формулах столь незначительны, что на них не стоит останавливаться.

Различие между преобразованием Лапласа и преобразованием Меллина несколько больше.

Преобразованием Меллина функции $g(t)$, определенной при положительных t и удовлетворяющей условию

$$\int_{0}^{\infty}|g(t)|\,t^{\rho-1}\,dt<\infty,$$

называется функция

$$G(z)=\int_{0}^{\infty} g(t)\,t^{z-1}\,dt \qquad (\operatorname{Re} z=\rho).$$

Если обозначить через $F(z)$ двустороннее преобразование Лапласа функции $f(x)=g(e^{x})$, то получаем $F(-z)=G(z)$. Это соотношение тоже позволяет выводить все формулы преобразования Меллина из формул преобразования Лапласа. Формула обращения преобразования Меллина имеет вид

$$g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} G(z)\,t^{-z}\,dz \qquad (t>0).$$

Стоит еще отметить формулы, аналогичные формуле преобразования Лапласа свертки двух функций.

Если

$$F(z)=\int\limits_0^\infty f(x)\,x^{z-1}\,dx,\qquad G(z)=\int\limits_0^\infty g(x)\,x^{z-1}\,dx,$$

а

$$h_1(t)=\int\limits_0^\infty f(x)\,g\left(\frac{t}{x}\right)\frac{dx}{x},\quad h_2(t)=\int\limits_0^\infty f(x)\,g(xt)\,dx,$$

то

$$h_1(t)\,t^{z-1}\,dt=F(z)\,G(z),\qquad \int\limits_0^\infty h_2(t)\,t^{z-1}\,dt=F(1-z)\,G(z).$$

Доказательство этих формул и вывод условий, при которых они справедливы, легко получить сведением к теоремам 2.1 и 2.2. □

В § 5 гл. VI мы упоминали об одном методе аналитического продолжения степенных рядов, основанном на использовании преобразования Меллина. Сейчас мы можем рассказать об этом методе несколько подробнее.

Теорема 6.1. *Пусть функция $c(x)$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} x>0$ и удовлетворяет условиям*

$$c(x)\to 0,\qquad c'(x)=O(x^{-\gamma-1})\qquad (x\to\infty,\ \operatorname{Re} x\geqslant\delta)$$

при любом $\delta>0$ и при некотором $\gamma>0$. Тогда функцию

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c(n)\,z^n$$

можно аналитически продолжить на всю плоскость z с разрезом по лучу $(1,+\infty)$. Аналитическое продолжение дается формулой

$$f(z)=\frac{z}{2\pi i}\int\limits_1^\infty\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} c(x)\,\frac{t^{-x-1}}{t-z}\,dx\,dt.\tag{6.1}$$

Доказательство. По формуле обращения преобразования Меллина (со ссылкой на теорему 1.2 об обращении преобразования Лапласа) можно написать

$$c(-x)=\int\limits_1^\infty \varphi(t)\,t^{x-1}\,dt,\quad \varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty} c(-x)\,t^{-x}\,dx.$$

Положим в первой формуле $x = -n$, умножим на z^n и просуммируем от 1 до бесконечности, что возможно при $|z| < 1$. После перемены порядка суммирования и интегрирования получим

$$\sum_1^\infty c(n) z^n = \int_1^\infty \sum_1^\infty \frac{z^n}{t^{n+1}} \varphi(t)\, dt = z \int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t(t-z)}\, dt.$$

Последний интеграл равномерно сходится в любой замкнутой части плоскости, не содержащей точек луча $(1, +\infty)$. Таким образом, мы получили аналитическое продолжение функции $f(z)$ на плоскость с разрезом по лучу $(1, +\infty)$. Подставляя вместо функции $\varphi(t)$ ее выражение через контурный интеграл, приходим к формуле (6.1). Теорема доказана. □

Доказанная теорема показывает, что ряды

$$\sum_1^\infty e^{-n^\alpha} z^n \, (\alpha < 1), \qquad \sum_1^\infty n^{-\alpha} (\ln(n+1))^\beta z^n \qquad (\alpha > 0)$$

можно аналитически продолжить на всю плоскость z с разрезом по лучу $(1, +\infty)$. При желании с помощью формулы (6.1) можно исследовать и поведение сумм этих рядов в окрестности точки $z = 1$. □

В заключение приведем один результат об аналитическом продолжении интегралов, характерных для преобразования Меллина.

Теорема 6.2. *Пусть функция $g(t)$ непрерывна при $t > 0$, при $t \to +\infty$ стремится к нулю быстрее любой степени t, а в окрестности точки $t = 0$ разлагается в сходящийся ряд*

$$g(t) = \sum_{k=1}^\infty c_k t^{\lambda_k} \qquad (0 < t \leqslant \varepsilon), \quad t^{\lambda_k} > 0,$$

где $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$ и $\lambda_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Тогда функция

$$G(z) = \int_0^\infty g(t)\, t^{z-1}\, dt$$

аналитически продолжается на всю плоскость z за исключением точек $z = -\lambda_n$, в которых $G(z)$ имеет простые полюсы.

Доказательство. Обозначим

$$g_n(t) = g(t) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k t^{\lambda_k}, \quad H_n(z) = \int_0^1 g_n(t)\, t^{z-1}\, dt.$$

Тогда в окрестности точки $t = 0$ имеем $|g_n(t)| \leqslant M t^{\lambda_n}$. Следовательно, интеграл для функции $H_n(z)$ равномерно сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant -\lambda_n + \delta$ при любом $\delta > 0$. Таким образом, функция $H_n(z)$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > -\lambda_n$.

Но

$$G(z) = \int_0^\infty g(t)\, t^{z-1}\, dt =$$

$$= H_n(z) + \int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} c_k t^{\lambda_k + z - 1}\, dt + \int_1^\infty g(t)\, t^{z-1}\, dt.$$

Последний интеграл в правой части является функцией, голоморфной во всей плоскости z, так как в силу условия теоремы $g(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ быстрее любой степени t. Предпоследний интеграл вычисляется:

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^{\lambda_k + z - 1}\, dt = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{z + \lambda_k} \qquad (\operatorname{Re} z > 0).$$

Следовательно, функция $G(z)$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > -\lambda_n$, за исключением простых полюсов в точках $-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_{n-1}$. Поскольку n произвольно и $\lambda_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$, теорема доказана.

Напомним, что с одним частным случаем этой теоремы мы встречались при аналитическом продолжении гамма-функции Эйлера в гл. II.

Глава VIII

ГАРМОНИЧЕСКИЕ И СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Теория гармонических и субгармонических функций играет существенную роль в получении различных тонких оценок для аналитических функций. Эти оценки основаны на том, что логарифм модуля голоморфной функции представляет собой субгармоническую функцию. Эта глава посвящена изучению гармонических и субгармонических функций и приложениям полученных для них результатов к аналитическим функциям.

§ 1. Основные свойства гармонических функций

Мы будем говорить только о гармонических функциях двух переменных.

Действительную функцию $u(x, y)$ двух действительных переменных x и y называют *гармонической в области* D, если она дважды непрерывно дифференцируема в этой области и удовлетворяет *уравнению Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad ((x, y) \in D). \tag{1.1}$$

Для краткости будем вместо $u(x, y)$ писать $u(z)$, где $z = x + iy$. Иногда даже будем переходить от одной записи к другой, оставляя для функции одну и ту же букву, т. е. будем считать, что $u(x+iy) \equiv u(x, y)$. □

В § 1 гл. II мы показали, что действительная и мнимая части голоморфной в области D функции $f(z)$ являются гармоническими в области D функциями. Обратное утверждение неверно для многосвязной области, как показывает пример функции $\ln|z|$, гармонической при $0 < |z| < \infty$. Поэтому докажем несколько более сложное утверждение о связи аналитических и гармонических функций, пригодное и для многосвязных областей.

Теорема 1.1. *Для того чтобы функция $u(z)$ была гармонической в области D, необходимо и достаточно, чтобы она была действительной частью аналитической в* *области D функции $w(z)$, удовлетворяющей условиям:*

1. *Функция $w'(z)$ голоморфна в области D.*

2. *Интеграл от $w'(z)$ по любому замкнутому контуру, лежащему в области D, равен чисто мнимому числу (или нулю).*

Доказательство. Начнем с доказательства достаточности. Нам нужно убедиться, что условия 1 и 2 обеспечивают однозначность действительной части аналитической в области D функции $w(z)$. Поскольку функция $w'(z)$ голоморфна в области D, то любой элемент аналитической функции $w(z)$ может быть получен из исходного элемента интегрированием $w'(z)$ по некоторому пути, лежащему в области D. Значения различных элементов в одной и той же точке отличаются на интеграл от $w'(z)$ по некоторому замкнутому пути. Согласно условию 2 этот интеграл является чисто мнимым, и его прибавление не отражается на действительной части. Достаточность доказана.

Для доказательства необходимости нужно по заданной функции $u(z)$ построить функцию $w(z)$, аналитическую в области D и имеющую однозначную действительную часть, равную $u(z)$, а затем показать, что выполнены условия 1 и 2. Для этой цели определим функцию $w'(z)$ равенством

$$w'(x+iy) = u'_x(x, y) - iu'_y(x, y).$$

Эта функция голоморфна в области D, так как она определена в этой области и ее действительная и мнимая части удовлетворяют условиям Коши — Римана (в силу уравнения Лапласа для $u(x, y)$). Первообразная функции, голоморфной в области D, является функцией, аналитической в области D. Покажем, что действительная часть функции $w(z)$ (первообразной для $w'(z)$) совпадает с $u(z)$ всюду в области D, если она совпадает с $u(z)$ в какой-либо одной точке $z=\zeta$. Имеем

$$w(z) = w(\zeta) + \int_{\zeta}^{z} w'(z)\,dz, \qquad \operatorname{Re} w(\zeta) = u(\zeta),$$

и, отделяя действительную часть, получаем

$$\operatorname{Re} w(z) = u(\zeta) + \int_{\zeta}^{z} u'_x(x, y)\,dx + u'_y(x, y)\,dy.$$

Интеграл берется от полного дифференциала $u'_x\,dx+u'_y\,dy=du$, так что он не зависит от пути интегрирования и равен разности значений функции $u(x, y)$ в концах пути. Поэтому

$$\operatorname{Re} w(z)=u(\zeta)+u(z)-u(\zeta)=u(z).$$

Из однозначности функции $u(z)=\operatorname{Re} w(z)$ следует, что все элементы функции $w(z)$ в одной и той же точке могут отличаться лишь чисто мнимым слагаемым. Но мы уже отмечали, что эти элементы отличаются лишь интегралами от $w'(z)$ по замкнутым контурам. Поэтому интеграл от $w'(z)$ по любому замкнутому пути — чисто мнимое число (или нуль). Теорема полностью доказана.

Замечание 1. По существу смысл теоремы 1.1 состоит в том, что *для гармоничности функции* $u(z)$, *определенной в области* D, *необходимо и достаточно, чтобы она была действительной частью функции, аналитической в области* D. Условия 1 и 2 дают необходимые и достаточные условия для однозначности в области D действительной части функции $w(z)$, аналитической в этой области.

Замечание 2. Если область D *односвязна*, то функция, аналитическая в области D голоморфна в этой области. Поэтому *для гармоничности функции* $u(z)$ *в односвязной области* D *необходимо и достаточно, чтобы она была действительной частью функции, голоморфной в области* D. $\square$

С помощью теоремы 1.1 многие вопросы для гармонических функций сводятся к тем или иным вопросам для аналитических функций. Например, очень большое значение имеет следующий результат о замене переменных:

Теорема 1.2. *Пусть функция* $f(z)$ *голоморфна в области* D *и ее значения лежат в области* G. *Если функция* $U(z)$ *гармонична в области* G, *то функция* $U(f(z))=u(z)$ *гармонична в области* D.

Доказательство. Если $W(z)$ — аналитическая в области G функция, для которой $U(z)=\operatorname{Re} W(z)$, то функция $w(z)=W(f(z))$ аналитична в области D (например, по той причине, что функция $w'(z)=W'(f(z))f'(z)$ голоморфна в области D) и, очевидно, $u(z)=\operatorname{Re} w(z)$. Теорема доказана. $\square$

Большое значение имеет и *теорема единственности* для гармонических функций:

Теорема 1.3. *Пусть $u(z)$ — гармоническая в области D функция. Если $u(z)=0$ в некоторой окрестности точки $\zeta\in D$, то функция $u(z)$ — тождественный нуль.*

Доказательство. Пусть $w(z)$ — та аналитическая в области D функция, для которой $u(z)=\operatorname{Re} w(z)$. Легко убедиться, что

$$w'(z)=u'_x(z)-iu'_y(z).$$

Так как $u'_x(z)=u'_y(z)=0$ в окрестности точки $z=\zeta$, то и $w'(z)=0$ в окрестности точки $z=\zeta$. По теореме единственности имеем $w'(z)\equiv 0$, т. е. $w(z)\equiv\mathrm{const}$. Следовательно, и $u(z)\equiv\mathrm{const}$, а поскольку $u(z)=0$ в окрестности точки $z=\zeta$, то $u(z)\equiv 0$. Теорема доказана. □

Связь гармонических функций с аналитическими играет очень большую роль при исследовании гармонических функций. Однако многие свойства гармонических функций проще доказывать непосредственно. Основой большинства прямых доказательств является частный случай хорошо известной формулы Грина — Остроградского

$$\int_C A(x,y)\,dx+B(x,y)\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)dx\,dy. \quad (1.2)$$

(D — некоторая область, C — граница D). Формула Грина — Остроградского справедлива для любых непрерывно дифференцируемых в D функций $A(x, y)$ и $B(x, y)$. Интересующий нас частный случай этой формулы носит название *формулы Грина.* Эта формула имеет вид

$$\int_C \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\,ds=\iint_D\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dx\,dy+$$
$$+\iint_D\varphi\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)dx\,dy. \quad (1.3)$$

Здесь $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — дважды непрерывно дифференцируемые в D функции, а $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ — производная функции $\psi(x, y)$ по направлению внешней нормали к кривой C, т. е.

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=\frac{\partial\psi}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial\psi}{\partial y}\sin\theta,$$

где θ — угол внешней нормали к кривой C с осью x. Поскольку мы рассматриваем лишь кусочно-гладкие кривые, направление внешней нормали определено на всей кривой C, за исключением конечного числа точек.

Формула (1.3) легко получается из формулы (1.2), если заметить, что $ds\cos\theta = dy$, $ds\sin\theta = -dx$ и, следовательно,

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}\,ds = -\frac{\partial\psi}{\partial y}\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial x}\,dy.$$

Отметим еще несколько простых следствий из формулы Грина.

Возьмем в формуле (1.3) функцию $\varphi(x, y)$ равной единице, а функцию $\psi(x, y)$ — равной гармонической в области D функции $u(x, y)$. Тогда

$$\int\limits_C \frac{\partial u}{\partial n}\,ds = 0. \tag{1.4}$$

Эта формула аналогична теореме Коши для голоморфных функций.

Возьмем сначала $\varphi(x, y) = u(x, y)$, $\psi(x, y) = v(x, y)$, затем $\varphi(x, y) = v(x, y)$, $\psi(x, y) = u(x, y)$ и вычтем друг из друга полученные с помощью формулы (1.3) равенства. Если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — гармонические в области D функции, то мы получим

$$\int\limits_C \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds = 0. \tag{1.5}$$

Эту формулу тоже можно рассматривать как аналог теоремы Коши. $\square$

Для гармонических функций есть и формула, аналогичная интегральной формуле Коши для голоморфных функций.

Теорема 1.4. *Пусть функция $u(z)$ гармонична в области D и дважды непрерывно дифференцируема в $\overline{D}$. Если $\zeta \in D$, то*

$$\int\limits_C \left\{u(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\zeta| - \frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\zeta|\right\}ds = 2\pi u(\zeta) \tag{1.6}$$

(C — граница D). *Если $\zeta \notin \overline{D}$, то интеграл равен нулю.*

Доказательство. Функция $v(z) = \ln|z-\zeta|$ является гармонической во всей плоскости, за исключением точки $z=\zeta$, так как она равна действительной части аналитической при $0<|z-\zeta|<\infty$ функции $\ln(z-\zeta)$. Если $\zeta\notin\bar{D}$, то функция $\ln|z-\zeta|$ гармонична в области D и по формуле (1.5) интеграл равен нулю.

Чтобы доказать формулу (1.6) при $\zeta\in D$, обозначим через D_ρ область, полученную удалением из области D круга $|z-\zeta|\leqslant\rho$ (мы возьмем $\rho>0$ столь малым, чтобы этот круг лежал в области D). Если обозначить через C_ρ границу области D_ρ, то согласно сказанному выше имеем (поскольку $\zeta\notin\bar{D}_\rho$)

$$\int\limits_{C_\rho}\left\{u\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\zeta|-\frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\zeta|\right\}ds=0.$$

Так как C_ρ состоит из C и из окружности $|z-\zeta|=\rho$, то

$$J=\int\limits_{C}\left\{u\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\zeta|-\frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\zeta|\right\}ds=$$
$$=\int\limits_{|z-\zeta|=\rho}\left\{u\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\zeta|-\frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\zeta|\right\}ds$$

(во втором интеграле направление берется уже совпадающим с направлением от точки $z=\zeta$ по радиусу). На окружности $|z-\zeta|=\rho$, очевидно, имеем $\ln|z-\zeta|=\ln\rho$ и $\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\zeta|=\frac{\partial}{\partial r}\ln r\Big|_{r=\rho}=\frac{1}{\rho}$. Поэтому согласно (1.4)

$$J=\frac{1}{\rho}\int\limits_{|z-\zeta|=\rho}u(z)\,ds. \tag{1.7}$$

Левая часть последнего равенства не зависит от ρ, значит, не зависит от ρ и правая часть. Поэтому достаточно найти предел правой части при $\rho\to 0$. Этот предел равен $2\pi u(\zeta)$, так как по интегральной теореме о среднем значении интеграл равен значению функции $u(z)$ в некоторой точке окружности $|z-\zeta|=\rho$, умноженному на $2\pi\rho$, а при $\rho\to 0$ значение функции $u(z)$ в любой точке окружности $|z-\zeta|=\rho$ стремится к $u(\zeta)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Мы отмечали, что правая часть равенства (1.7) не зависит от ρ, и показали, что она равна $2\pi u(\zeta)$. Поэтому вместе с формулой (1.6) доказано и следующее утверждение, носящее название *теоремы о среднем для гармонических функций*:

Если функция $u(z)$ *гармонична в круге* $|z-\zeta|<R$, *то*

$$\frac{1}{2\pi\rho}\int\limits_{|z-\zeta|=\rho} u(z)\,|dz| = u(\zeta) \quad (\rho<R).$$

Замечание 2. Формулы (1.5) и (1.6) доказаны в предположении, что функции $u(z)$ и $v(z)$ гармоничны в области D и дважды непрерывно дифференцируемы в $\overline{D}$. Последнее условие можно значительно ослабить, воспользовавшись тем, что интеграл по граничной кривой от функции, непрерывной вплоть до границы области, можно с любой точностью приблизить интегралом от этой функции по ломаной, лежащей внутри области (см. § 5 гл. I). Для непрерывности подынтегральных функций вплоть до границы достаточно, чтобы функции $u(z)$ и $v(z)$ были непрерывно дифференцируемы вплоть до границы области D.

Это условие можно и еще немного ослабить. Именно, формулы (1.5) и (1.6) остаются справедливы, если:

Функции $u(z)$ *и* $v(z)$ *гармоничны в области* D *и непрерывны вплоть до ее границы. Частные производные этих функций непрерывны вплоть до границы* D *за исключением конечного числа точек* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *а при* $z\to a_k$, $z\to D$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|=o(1).$$

Несобственные интегралы, входящие в формулы (1.5) *и* (1.6), *сходятся.*

Справедливость формул при этих условиях легко доказывается предельным переходом при $\varepsilon\to 0$, если сначала применить эти формулы к области D_ε, из которой удалены попадающие в нее части кружков $|z-a_k|<\varepsilon$.

Из тех же соображений ясно, что для справедливости теоремы о среднем не нужно даже непрерывности функции $u(z)$ в замкнутом круге $|z-\zeta|\leqslant\rho$. Можно допустить у нее особенности того же рода, что и у частных производных $u(z)$ и $v(z)$ в предыдущих рассуждениях.

§ 2. Субгармонические функции

Первоначально *субгармонические функции* определялись как дважды непрерывно дифференцируемые функции, для которых оператор Лапласа всюду неотрицателен. Однако вскоре оказалось, что предположение о непрерывности вторых производных излишне ограничительно, так как в отличие от гармонических функций субгармонические функции отнюдь не обязаны быть бесконечно дифференцируемыми внутри области их субгармоничности. Естественный путь обобщения понятия состоял в том, чтобы рассматривать функции, полученные из дважды непрерывно дифференцируемых субгармонических функций тем или иным предельным переходом. Еще один путь состоит в том, чтобы определить субгармонические функции некоторым характерным их свойством. В качестве такого свойства принято выбирать *теорему о среднем*:

$$u(\zeta) \leqslant \frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{|z-\zeta|=\rho} u(z)\,|dz|.$$

Однако оказалось, что одной лишь теоремы о среднем недостаточно для хорошего определения субгармонической функции. Требуется еще некоторое дополнительное предположение о ее локальном поведении. В настоящее время в теории субгармонических функций используется определенный канонический выбор понятия сходимости, которому отвечает вполне определенное локальное поведение. К сожалению, этот канонический выбор связан с довольно тонкими вопросами теории функций действительного переменного *).

Для наших целей будет удобнее использовать несколько более узкий класс субгармонических функций. Он отвечает более сильному понятию сходимости и очень простому локальному поведению. В дальнейшем, говоря о субгармонических функциях, всегда будем иметь в виду именно этот класс, определение которого сейчас дадим.

Пусть $u(z)$ — действительная функция, определенная в области D комплексной плоскости. Мы будем считать, что функция $u(z)$ может принимать в области D значения, равные $-\infty$ (значения, равные $+\infty$, не допускаются, но иногда рассматривают и функцию, тождественно равную $+\infty$). Если выполнены условия:

1) *функция* $\exp u(z)$ *непрерывна в области* D;

---

*) Изложение теории субгармонических функций имеется в большинстве книг по теории аналитических функций. Книги [19, 29] посвящены специально субгармоническим функциям.

2) *для любых* $\zeta \in D$ *и* $\rho > 0$, *при которых круг* $|z - \zeta| \leqslant \rho$ *лежит в области* D, *имеет место неравенство*

$$u(\zeta) \leqslant \frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{|z-\zeta|=\rho} u(z)\,dz = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\zeta + \rho e^{i\theta})\,d\theta;$$

то функция $u(z)$ называется *субгармонической* в области D.

Если функция $u(z)$ субгармонична в области D, то функцию $-u(z)$ называют *супергармонической* в области D.

Из теоремы о среднем для гармонических функций (см. замечание 1 к теореме 1.4) видно, что:

Функция, гармоническая в области D, *является и субгармонической, и супергармонической в этой области.*

Отметим несколько простейших свойств субгармонических функций.

1. *Сумма* (но не разность!) *субгармонических в области* D *функций также является функцией, субгармонической в области* D. *Умножение на положительную постоянную также не нарушает субгармоничности.*

2. *Равномерный предел субгармонических в области* D *функций тоже является субгармонической в области* D *функцией.*

3. *Если функции* $u_1(z)$ *и* $u_2(z)$ *субгармоничны в области* D, *то и функция* $u(z) = \max\{u_1(z), u_2(z)\}$ *субгармонична в области* D.

Ограничимся доказательством свойства 3.

Возьмем любые допустимые ζ и ρ. Если $u(\zeta) = u_1(\zeta)$, то

$$u(\zeta) = u_1(\zeta) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u_1(\zeta + \rho e^{i\varphi})\,d\varphi \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\zeta + \rho e^{i\varphi})\,d\varphi,$$

и аналогично, если $u(\zeta) = u_2(\zeta)$. $\square$

Большое значение имеет следующая теорема, носящая название *принципа максимума*.

Теорема 2.1. *Пусть функция* $u(z)$ *субгармонична в области* D. *Обозначим* $M = \sup\limits_{z \in D} u(z)$. *Если* $u(\zeta) = M$ *в точке* $\zeta \in D$, *то* $u(z) \equiv M$.

Иными словами:

Субгармоническая функция, отличная от постоянной, не может достигать наибольшего значения внутри области.

Доказательство. Рассмотрим множество E, состоящее из точек области D, в которых $u(z)=M$. Множество E замкнуто в D, так как $e^{u(z)}$ — непрерывная функция, а множество точек, в которых непрерывная функция принимает заданное значение, замкнуто. Допустим, что найдется граничная точка множества E, лежащая в области D, скажем ζ. В силу замкнутости множества E имеем $u(\zeta)=M$. Тогда найдется такое ρ, что круг $|z-\zeta|<\rho$ лежит в области D, и на его окружности найдутся точки, не принадлежащие множеству E. Дополнение к множеству E является окрытым множеством, так что если $z\notin E$, то и некоторая окрестность точки z не принадлежит множеству E. Поэтому можно выбрать такие числа θ, $\varepsilon>0$ и $\delta>0$, что

$$u(\zeta+\rho e^{i\varphi})\leqslant M-\varepsilon \qquad (|\varphi-\theta|<\delta).$$

Поскольку при всех остальных φ имеем $u(\zeta+\rho e^{i\varphi})\leqslant M$, то

$$\int_0^{2\pi} u(\zeta+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi =$$
$$=\int_{|\varphi-\theta|<\delta} u(\zeta+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi+\int_{\pi>|\varphi-\theta|>\delta} u(\zeta+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi\leqslant$$
$$\leqslant 2\delta(M-\varepsilon)+M(2\pi-2\delta)=2\pi M-2\delta\varepsilon<2\pi M.$$

Но согласно определению субгармоничности интеграл, написанный в самом начале, не меньше $2\pi u(\zeta)=2\pi M$. Полученное противоречие доказывает, что множество E не может иметь граничных точек внутри области D. Следовательно, множество E или пусто, или совпадает с D. Теорема доказана.

Замечание 1. Если $u(z)$ — гармоническая функция, то и $u(z)$, и $-u(z)$ являются субгармоническими функциями. Поэтому *гармоническая функция, отличная от постоянной, не может достигать внутри области гармоничности ни наибольшего, ни наименьшего значения.*

Замечание 2. Обозначим $\varphi(\zeta)=\varlimsup\limits_{z\to\zeta} u(z)$. Если $u(z)$ непрерывна в точке ζ, то $\varphi(\zeta)=u(\zeta)$. Если C —

граница D, то

$$\sup_{z\in D} u(z) = \sup_{\zeta\in C} \varphi(\zeta).$$

Действительно, если $\sup\limits_{z\in D} u(z) = M$, то существует последовательность точек z_n, для которых $u(z_n) > M - \frac{1}{n}$, т. е. $u(z_n) \to M$. Если ζ_0 — какая-либо предельная точка последовательности z_n, то и $u(\zeta_0) = M$. Если $\zeta_0 \in C$, то $\sup\limits_{\zeta\in C} \varphi(\zeta) \geqslant \varphi(\zeta_0) = M$, а если $\zeta_0 \in D$, то по теореме 2.1 $u(z) \equiv M$.

Следствие. *Пусть $u(z)$ — гармоническая, а $v(z)$ — субгармоническая в области D функции. Если на границе D имеем*

$$\varlimsup_{z\to\zeta} v(z) \leqslant \varlimsup_{z\to\zeta} u(z) \quad (\zeta \in C),$$

то и внутри D имеем $v(z) \leqslant u(z)$.

Действительно, разность $v(z) - u(z)$ субгармонична в области D (так как $-u(z)$ является субгармонической в D функцией) и $\varlimsup\limits_{z\to\zeta} (v(z) - u(z)) \leqslant 0$ $(\zeta \in C)$. По замечанию 2 $u(z) \geqslant v(z)$ $(z \in D)$. □

Из следствия вытекает, что поверхность $t = v(z)$ лежит под поверхностью $t = u(z)$ при всех $z \in D$, если это имеет место при z на границе D. Именно это свойство субгармонических функций послужило причиной их названия. □

Очень большое значение имеет следующее обобщение принципа максимума, показывающее, что значениями функции $\varphi(\zeta) = \varlimsup\limits_{z\to\zeta} u(z)$ в счетном числе точек границы можно пренебречь, если известно, что наша функция ограничена в области.

Теорема 2.2. *Пусть функция $u(z)$ субгармонична и ограничена сверху в области D, имеющей хотя бы одну внешнюю точку. Обозначим*

$$M = \sup_{\zeta\in C, \zeta\neq a_n} \varlimsup_{z\to\zeta} u(z),$$

где $a_1, a_2, \ldots$ — некоторая последовательность точек C (границы D). Тогда $u(z) < M$ $(z \in D)$ или $u(z) \equiv M$.

Доказательство. Пусть b — внешняя точка области D. Для каждого $\zeta \in C$ можно указать такое число $A(\zeta) > 0$, чтобы для всех z, лежащих в области D, имело место неравенство

$$A(\zeta) \frac{|z-b|}{|z-\zeta|} < 1.$$

Обозначим $A_n = A(a_n)$ и рассмотрим вспомогательную функцию $u_\varepsilon(z) = u(z) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln\left\{A_n \frac{|z-b|}{|z-\zeta|}\right\}$. Поскольку слагаемые, стоящие под знаком суммы, отрицательны, то

$$\varlimsup_{z\to\zeta} u_\varepsilon(z) \leqslant \varlimsup_{z\to\zeta} u(z) \leqslant M \qquad (\zeta \neq a_1, a_2, \ldots),$$

$$\lim_{z\to a_n} u_\varepsilon(z) = -\infty \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

так как функция $u(z)$ по условию ограничена сверху, а одно из слагаемых в сумме стремится к $-\infty$ при $z \to a_n$. Поэтому согласно замечанию 2 к принципу максимума

$$\sup_{z\in D} u_\varepsilon(z) \leqslant M.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем $\sup\limits_{z\in D} u(z) \leqslant M$, и теорема доказана. □

Понятие субгармоничности можно рассматривать как обобщение понятия выпуклости книзу на случай двух переменных. Напомним, что функция $\varphi(x)$ называется *выпуклой книзу* на отрезке (a, b), если $\varphi(x)$ непрерывна на этом отрезке и для любых x_1 и x_2, лежащих на этом отрезке, имеет место неравенство

$$\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2}.$$

Это неравенство можно заменить и неравенством

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(x_1)\frac{x_2-x}{x_2-x_1} + \varphi(x_2)\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (x_1 \leqslant x \leqslant x_2).$$

Для дважды непрерывно дифференцируемых функций необходимым и достаточным условием выпуклости книзу является условие $\varphi''(x) \geqslant 0$.

Если в любом из неравенств, определяющих выпуклость книзу, заменить знак неравенства знаком равенства, то окажется, что такому условию будут удовлетворять лишь линейные функции.

Условия субгармоничности очень похожи на условия выпуклости книзу, только отрезок заменяется кругом, а линейные функции — гармоническими функциями. Без особого труда можно показать, что

Для дважды непрерывно дифференцируемых функций необходимым и достаточным условием субгармоничности является условие

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \geqslant 0.$$

Связь между субгармоническими и выпуклыми книзу функциями не ограничивается только аналогией.

Теорема 2.3. *Если субгармоническая функция $u(x+iy)$ зависит только от x, то она является выпуклой книзу функцией x.*

Если субгармоническая функция $u(\rho e^{i\varphi})$ зависит только от ρ, то она является выпуклой книзу функцией от $\ln \rho$ (логарифмически выпуклая функция).

Доказательство. Если функция $u(x+iy)$ зависит только от x, то область ее определения — полоса $a < x < b$. Обозначим $\varphi(x) = u(x+iy)$. Линейная функция $Ax+B$ является гармонической функцией $x+iy$. Возьмем какие-либо x_1 и x_2, $a < x_1 < x_2 < b$ и подберем постоянные A и B так, чтобы

$$Ax_1 + B = \varphi(x_1), \quad Ax_2 + B = \varphi(x_2).$$

Тогда $\varphi(x) \leqslant Ax+B$ $(x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$. Действительно, разность $\varphi(x) - Ax - B$ является субгармонической функцией в полосе $x_1 < x < x_2$, ограничена в этой полосе сверху, а на границе полосы равна нулю (за исключением двух точек в бесконечности), так что применима теорема 2.2.

Выражая A и B через $\varphi(x_1)$ и $\varphi(x_2)$, получаем

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(x_1)\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \varphi(x_2)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \tag{2.1}$$

а это неравенство и означает, что функция $\varphi(x)$ выпукла книзу.

Аналогичные рассуждения можно провести и для случая, когда субгармоническая функция $u(\rho e^{i\varphi})$ зависит только от ρ. Разница лишь в том, что в качестве гармонической функции, зависящей только от ρ, придется взять функцию $A\ln\rho+B$. Неравенство, которое получится вместо (2.1), имеет вид

$$\varphi(\rho)\leqslant\varphi(r)\frac{\ln\frac{R}{\rho}}{\ln\frac{R}{r}}+\varphi(R)\frac{\ln\frac{\rho}{r}}{\ln\frac{R}{r}}\qquad(r\leqslant\rho\leqslant R).\quad(2.2)$$

Теорема доказана.

Выбирая другие комбинации переменных, от которых зависит субгармоническая функция, можно получить другие аналогичные результаты. $\square$

Отметим, не приводя доказательства, еще один факт, относящийся к связи между субгармоническими и выпуклыми книзу функциями.

Пусть функция $u(z)$ субгармонична в области D, а ее значения лежат на отрезке (a, b). Если функция $\varphi(x)$ выпукла книзу и не убывает на отрезке (a, b), то функция $\varphi(u(z))$ субгармонична в области D.

Субгармонические функции интересуют нас главным образом в связи с аналитическими функциями. Простейшим выражением такой связи может служить утверждение:

Модуль функции, голоморфной в области D, является субгармонической функцией в этой области.

Действительно, для любой голоморфной функции $f(z)$ справедлива теорема о среднем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi$$

(она справедлива для действительной и мнимой части $f(z)$, ибо они — гармонические функции). Переходя в написанной формуле к модулям, мы убеждаемся в субгармоничности функции $|f(z)|$.

Применяя принцип максимума субгармонических функций к модулю голоморфной функции, сразу получаем утверждение:

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D с границей C. Обозначим

$$\varphi(\zeta)=\overline{\lim_{z\to\zeta}}\,|f(z)|\quad(\zeta\in C),\qquad M=\sup_{\zeta\in C}\varphi(\zeta).$$

Тогда $|f(z)| \leqslant M$ $(z \in D)$, *причем знак равенства может достигаться внутри области* D *лишь в случае, если* $f(z) \equiv \equiv Me^{i\theta}$ (θ — *постоянная*).

Действительно, из принципа максимума субгармонической функции следует, что $|f(z)| < M$ $(z \in D)$, или $|f(z)| \equiv M$. Но из равенства $\ln|f(z)| \equiv \ln M$ следует, что и сопряженная гармоническая функция $\arg f(z)$ тоже постоянна. Обозначая $\arg f(z) = \theta$, приходим к нашему утверждению.

Доказанное утверждение носит название *принципа максимума модуля аналитической функции.* □

Субгармоничности модуля голоморфной функции бывает недостаточно для некоторых оценок. Поэтому докажем более сильное утверждение.

Сначала докажем так называемую *формулу Иенсена*, имеющую и самостоятельный интерес.

Лемма. *Пусть функция* $f(z)$ *голоморфна в круге* $|z| \leqslant R$ *и имеет там нули* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (*каждый пишется столько раз, какова его кратность*). *Тогда*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi = \ln|f(0)| + \sum_1^n \ln\frac{R}{|z_k|}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{w_1(z)\ldots w_n(z)},$$

где $w_k(z) = \dfrac{R(z - z_k)}{R^2 - z\bar{z}_k}$. В § 2 гл. V показано, что функция $w_k(z)$ конформно отображает круг $|z| < R$ на круг $|w| < 1$, так что $|w_k(Re^{i\varphi})| = 1$. Поэтому

$$|f_1(Re^{i\varphi})| = |f(Re^{i\varphi})|. \tag{2.4}$$

Далее, заметим, что функция $f_1(z)$ голоморфна в круге $|z| < R$ и не обращается в этом круге в нуль, так как произведение функций $w_k(z)$ обращается в нуль в тех же точках, что и $f(z)$ (и нули имеют один и тот же порядок). По теореме о среднем для гармонических функций имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f_1(Re^{i\varphi})|\,d\varphi = \ln|f_1(0)|.$$

Но в силу равенства (2.4)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f_1(Re^{i\varphi})|\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi,$$

а $\ln|f_1(0)| = \ln|f(0)| - \sum_1^n \ln\frac{R}{|z_k|}$, и мы приходим к утверждению леммы.

Замечание 1. С тем же успехом мы могли бы допустить, что функция $f(z)$ имеет в круге $|z|<R$ не только нули, а и полюсы $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$. Это привело бы к формуле

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi = \ln|f(0)| + \sum_1^n \ln\frac{R}{|z_k|} - \sum_1^m \ln\frac{R}{|\zeta_k|}.$$

Замечание 2. Наличие нулей или полюсов на окружности $|z|=R$ не вредит формуле Иенсена. Интеграл, хотя и является несобственным, заведомо сходится, и применимы те же рассуждения, что и в конце § 1. □

Теорема 2.4. *Если функция $f(z)$ голоморфна в области D, то функция $u(z)=\ln|f(z)|$ субгармонична в области D.*

Доказательство. Функция $e^{u(z)}=|f(z)|$ непрерывна в области D, а неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi \geqslant u(\zeta)$$

мы получаем, применяя формулу Иенсена к функции $f(z+\zeta)$ (с $R=\rho$). □

Заметим, что теорема 2.4 действительно дает более сильное утверждение, чем утверждение о субгармоничности $|f(z)|$. Действительно, функция $\varphi(x)=e^{\alpha x}$ выпукла книзу и возрастает при любом $\alpha>0$, так что из теоремы 2.4 следует субгармоничность функции $e^{\alpha\ln|f(z)|}=|f(z)|^{\alpha}$ при любом $\alpha>0$ (в силу утверждения, приведенного нами после теоремы 2.3).

На этом закончим изложение свойств субгармонических функций, оставив в стороне многие другие их свойства, не имеющие непосредственного отношения к нашим задачам *).

*) Более полное изложение см. в [19].

§ 3. Задача Дирихле и интеграл Пуассона

Задача Дирихле состоит в отыскании гармонической в области D функции, непрерывной вплоть до границы D, по ее значениям на граничной кривой.

Мы будем стремиться решить даже несколько более общую задачу, которую тоже будем называть *задачей Дирихле*. Именно:

Пусть D — некоторая область, ограниченная кривой C, и пусть функция $\varphi(\zeta)$ непрерывна на кривой C всюду, за исключением счетного множества точек, и ограничена на C.

Задача состоит в том, чтобы найти гармоническую в области D функцию $u(z)$, удовлетворяющую условиям:

1. $u(z)$ ограничена в D.

2. $u(z)$ непрерывна вплоть до границы D во всех точках непрерывности функции $\varphi(\zeta)$ и в этих точках $u(\zeta)=\varphi(\zeta)$.

Функцию $\varphi(\zeta)$ будем называть *граничной функцией* или *граничными данными задачи Дирихле*. $\square$

Заметим, что из теоремы 2.2 (обобщенный принцип максимума) легко следует, что *задача Дирихле имеет не более одного решения*. Действительно, если $u(z)$ и $v(z)$ — два решения задачи Дирихле с одной и той же граничной функцией $\varphi(\zeta)$, то функция $w(z)=u(z)-v(z)$ гармонична и ограничена в области D, а $\overline{\lim\limits_{z\to\zeta}}\,|w(z)|=0$ для всех $\zeta\in C$, за исключением счетного множества точек. Применяя теорему 2.2 к функциям $w(z)$ и $-w(z)$, получаем

$$w(z)\leqslant 0,\quad w(z)\geqslant 0\quad (z\in D),$$

т. е. $w(z)\equiv 0$ или $u(z)\equiv v(z)$. $\square$

Функцией Грина задачи Дирихле для области D назовем функцию двух комплексных переменных $G(z,\zeta)$, обладающую следующими свойствами:

1. $G(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\ln|z-\zeta|+g(z,\zeta)$, где функция $g(z,\zeta)$ непрерывна по совокупности переменных при $z\in D$, $\zeta\in\in D$, гармонична по z в D при любом $\zeta\in D$ и гармонична по ζ в D при любом $z\in D$.

2. Функция $g(z,\zeta)$ непрерывна по ζ в $\overline{D}$ при любом $z\in D$ и $g(z,\zeta')=-\frac{1}{2\pi}\ln|z-\zeta'|$ при любых $z\in D$ и

ζ', лежащих на границе D. Таким образом, $G(z, \zeta) = 0$ при любых $z \in D$ и ζ, лежащих на границе D. $\square$

С помощью функции Грина можно написать решение задачи Дирихле. Сначала докажем один результат в этом направлении, имеющий вспомогательное значение.

Теорема 3.1. *Пусть функция Грина задачи Дирихле для области D непрерывна вплоть до границы D со своими частными производными первого порядка по* $\operatorname{Re}\zeta = \xi$ *и* $\operatorname{Im}\zeta = \eta$ *(за исключением точки $\zeta = z$). Тогда любая функция $u(z)$, гармоническая в области D и непрерывно дифференцируемая вплоть до ее границы C, может быть представлена в области D через ее значения на граничной кривой C формулой*

$$u(z) = \int\limits_C u(\zeta) \frac{\partial}{\partial n} G(z, \zeta) \, |d\zeta| \qquad (z \in D). \tag{3.1}$$

Доказательство. С учетом замечания 2 к теореме 1.4 мы получаем из формулы (1.6), обозначая $|z - \zeta| = r$:

$$2\pi u(z) = \int\limits_C \left\{ u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \ln r \right\} |d\zeta| \qquad (z \in D),$$

а из формулы (1.5)

$$0 = \int\limits_C \left\{ u \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial u}{\partial n} \right\} |d\zeta| \qquad (z \in D).$$

Следовательно,

$$\int\limits_C \left\{ u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right\} |d\zeta| = u(z) \qquad \left(G(z, \zeta) = \frac{\ln r}{2\pi} + g(z, \zeta) \right).$$

Но точка ζ лежит на границе D, так что по свойству 2 функции Грина имеем $G(z, \zeta) = 0$. Теорема доказана. $\square$

В случае, когда D — односвязная область, функция Грина легко выражается через функцию, конформно отображающую область D на круг $|w| < 1$. Именно:

Если $w(z)$ — какая-либо функция, конформно отображающая область D на круг $|w| < 1$, то

$$G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln |w_\zeta(z)|, \qquad w_\zeta(z) = \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - w(z)\overline{w(\zeta)}}. \tag{3.2}$$

Действительно, согласно теореме 2.2 гл. V функция $w_\zeta(z)$ конформно отображает область D на круг $|w|<1$ и переводит точку $z=\zeta$ в точку $w=0$. Поэтому функция $\frac{w_\zeta(z)}{z-\zeta}$ при любом $\zeta\in D$ голоморфна по z в области D и не обращается там в нуль, а функция $g(z,\zeta)=\ln\left|\frac{w_\zeta(z)}{z-\zeta}\right|$ при любом $\zeta\in D$ гармонична по z в области D. Непрерывность функции $g(z,\zeta)$ по совокупности переменных сразу видна, если выразить функцию $w_\zeta(z)$ через функцию $w(z)$.

Поскольку модули комплексно сопряженных чисел равны, то

$$|w_\zeta(z)|=|w_z(\zeta)|,$$

т. е. $G(z,\zeta)=G(\zeta,z)$, откуда следуют гармоничность и непрерывность по ζ при любом $z\in D$. Таким образом, свойство 1 функции Грина выполнено.

Свойство 2 тоже выполнено, так как по теореме о соответствии границ при конформном отображении функция $w_\zeta(z)$ непрерывна вплоть до границы D и $|w_\zeta(z)|=1$, когда одна из точек ζ или z попадает на границу D. □

С помощью формулы (3.2) мы можем написать функцию Грина для простых областей (круг, полуплоскость) в конечном виде и более детально исследовать формулу (3.1) для решения задачи Дирихле.

Если область D является кругом $|z|<R$, то согласно теореме 2.2 гл. V имеем

$$w_\zeta(z)=\frac{R(z-\zeta)}{R^2-z\bar\zeta},\qquad G(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R|z-\zeta|}{|R^2-z\bar\zeta|}.$$

Положим $z=re^{i\varphi}$, $\zeta=\rho e^{i\theta}$. Направление внешней нормали к окружности $|\zeta|=R$ — это направление радиуса. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial n}G(re^{i\varphi},\rho e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\frac{\partial}{\partial\rho}\ln\frac{R(re^{i\varphi}-\rho e^{i\theta})}{R^2-\rho re^{i(\varphi-\theta)}}\bigg|_{\rho=R}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left\{\frac{e^{i\theta}}{Re^{i\theta}-re^{i\varphi}}+\frac{re^{i(\theta-\varphi)}}{R^2-Rre^{i(\theta-\varphi)}}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi R}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}.$$

Таким образом, когда область D — это круг $|z|<R$, формула (3.1) принимает вид

$$u(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}u(Re^{i\theta})\,d\theta. \quad (3.3)$$

Эта формула называется *формулой Пуассона* для круга.

Если заметить, что

$$\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}=\operatorname{Re}\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\qquad (z=re^{i\varphi}),$$

то получим *формулу Шварца*

$$F(z)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\operatorname{Re}F(Re^{i\theta})\,d\theta+iC\qquad (|z|<R), \quad (3.4)$$

позволяющую восстановить функцию $F(z)$, голоморфную в круге $|z|<R$ по значениям ее действительной части на окружности $|z|=R$.

Если область D — это полуплоскость $\operatorname{Re}z>0$, то имеем

$$w_\zeta(z)=\frac{z-\zeta}{z+\bar\zeta},\qquad G(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{z-\zeta}{z+\bar\zeta}\right|$$

и аналогичными действиями получаем формулу Пуассона

$$u(x+iy)=\frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(i\eta)\,d\eta}{(y-\eta)^2+x^2}\qquad (x>0) \quad (3.5)$$

и формулу Шварца

$$F(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}F(i\eta)}{i\eta-z}\,d\eta+iC\qquad (\operatorname{Re}z>0) \quad (3.6)$$

для полуплоскости $\operatorname{Re}z>0$. $\square$

Пока все эти формулы доказаны в предположении, что функция $u(z)$ (или $\operatorname{Re}F(z)$) непрерывно дифференцируема в замкнутом круге или в замкнутой полуплоскости (в том числе и в бесконечно удаленной точке). Сейчас мы значительно усилим этот результат, сняв все предположения относительно функции $u(z)$ и оставив лишь предположения, относящиеся к граничной функции.

Теорема 3.2. *Пусть $f(\theta)$ — периодическая функция с периодом 2π, непрерывная на всей оси, за исключением замкнутого счетного множества точек разрыва. Функция $u(z)$, определенная формулой*

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\theta)\,d\theta}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)} \qquad (r<1),$$

является гармонической функцией в круге $|z|<1$. Если функция $f(\theta)$ непрерывна в точке $\theta=\theta'$, то $u(z)\to f(\theta')$ при $z\to e^{i\theta'}$. Кроме того,

$$m \leqslant u(z) \leqslant M \qquad (|z|<1),$$

где M — верхняя, а m — нижняя грань значений функции $f(\theta)$ в точках непрерывности.

Доказательство. Начнем с доказательства неравенств для $u(z)$. При сделанных предположениях интеграл существует в обычном смысле (как предел интегральных сумм). Поэтому при разбиении отрезка интегрирования $(0,\ 2\pi)$ на сумму счетного числа неперекрывающихся отрезков интеграл равен сумме интегралов по этим отрезкам. Точками разрыва функции $f(\theta)$ отрезок $(0,\ 2\pi)$ разбивается на сумму счетного числа отрезков, на каждом из которых функция $f(\theta)$ непрерывна и, следовательно, удовлетворяет неравенствам $m\leqslant f(\theta)\leqslant M$. Функция $1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)$ положительна, так что при оценке интегралов по отрезкам нужно заменить $f(\theta)$ на m и на M. После этого сумму интегралов по отрезкам можно снова заменить интегралом по отрезку $(0,\ 2\pi)$, и мы получим неравенства

$$m\cdot\frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)} \leqslant u(re^{i\varphi}) \leqslant$$
$$\leqslant M\cdot\frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)}.$$

Но

$$\frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)} = 1, \tag{3.7}$$

в чем легко убедиться, положив в формуле (3.3) (с $R=1$) $u(z)\equiv 1$. Это и дает требуемые неравенства для нашей функции $u(z)$.

Теперь докажем гармоничность функции $u(z)$. Поскольку

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)}=\operatorname{Re}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\qquad (z=re^{i\varphi}),$$

имеем

$$u(z)=\operatorname{Re}F(z),\quad F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}f(\theta)\,d\theta.$$

Функция $F(z)$ голоморфна в круге $|z|<1$ согласно теореме 4.3 гл. II, и отсюда следует гармоничность функции $u(z)$.

Останется доказать, что $u(z)\to f(\theta')$ при $z\to e^{i\theta'}$, если функция $f(\theta)$ непрерывна в точке $\theta=\theta'$. Для этой цели напишем, воспользовавшись равенством (3.7):

$$u(re^{i\varphi})-f(\varphi)=\frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\theta)-f(\varphi)}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)}\,d\theta.$$

Интеграл от периодической функции по периоду не зависит от того, с какого места начинать интегрирование. Поэтому

$$u(re^{i\varphi})-f(\varphi)=\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\varphi+\alpha)-f(\varphi)}{1+r^2-2r\cos\alpha}\,d\alpha.$$

Возьмем произвольное число $0<\delta<\pi$ и разобьем промежуток интегрирования на три части: $(-\pi,\ -\delta)$, $(-\delta,\ \delta)$ и $(\delta,\ \pi)$. Обозначим

$$M'=\sup|f(\theta)|,\quad \eta(\delta,\varphi)=\sup_{|\alpha|<\delta}|f(\varphi+\alpha)-f(\varphi)|.$$

Тогда

$$\left|\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{f(\varphi+\alpha)-f(\varphi)}{1+r^2-2r\cos\alpha}d\alpha\right|\leqslant$$

$$\leqslant\eta(\delta,\varphi)\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{d\alpha}{1+r^2-2r\cos\alpha}\leqslant\eta(\delta,\varphi),$$

а для суммы двух оставшихся интегралов имеем неравенство

$$\left| \frac{1-r^2}{2\pi} \int\limits_{\delta<|\alpha|<\pi} \frac{f(\varphi+\alpha)-f(\varphi)}{1+r^2-2r\cos\alpha}\, d\alpha \right| \leqslant M' \frac{1-r^2}{1-\cos\delta},$$

так как $|f(\varphi+\alpha)-f(\varphi)|<2M'$, а

$$\frac{1-r^2}{2\pi} \int\limits_{\delta<|\alpha|<\pi} \frac{d\alpha}{1+r^2-2r\cos\alpha} < \frac{2(\pi-\delta)}{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\delta} <$$

$$< \frac{1-r^2}{2-2\cos\delta} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-\cos\delta}.$$

Таким образом,

$$|u(re^{i\varphi})-f(\varphi)| \leqslant \eta(\delta,\ \varphi) + M' \frac{1-r^2}{1-\cos\delta},$$

где $0<\delta<\pi$ — любое число.

Если $z \to e^{i\theta'}$ и функция $f(\theta)$ непрерывна в точке $\theta=\theta'$, то $r\to 1$, $\varphi\to\theta'$ и, кроме того, $\eta(\delta,\ \theta')\to 0$ при $\delta\to 0$. Имеем

$$|u(re^{i\varphi})-f(\theta')| \leqslant \eta(\delta,\ \varphi) + M' \frac{1-r^2}{1-\cos\delta} + |f(\theta')-f(\varphi)|.$$

Но $\eta(\delta,\ \varphi) \leqslant 2\eta(|\theta'-\varphi|+\delta,\ \theta')$. Поэтому, полагая, например, $\delta=\sqrt[4]{1-r^2}$, видим, что $u(z)\to f(\theta')$ при $z\to e^{i\theta'}$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Доказанная теорема дает решение задачи Дирихле для круга $|z|<1$ в той самой постановке, о которой говорилось в начале параграфа. С помощью конформного отображения решение задачи Дирихле для более или менее произвольной односвязной области можно свести к решению задачи Дирихле для круга $|z|<1$. При этом используются лишь теорема о соответствии границ при конформном отображении и теорема 1.2 о сохранении гармоничности при замене переменных.

З а м е ч а н и е 2. Используя более глубокие результаты о соответствии границ при конформном отображении, которые будут доказаны в следующей главе, можно показать, что формула (3.1) тоже дает решение задачи Дирихле в той постановке, которая была изложена в начале параграфа. При этом на границу области D приходится наложить более жесткие ограничения. Именно, приходится считать, что кривая C, ограничивающая область D, состоит из конечного числа дуг, на каждой из которых угол наклона касательной удовлетворяет условию Липшица.

К вопросу о решении задачи Дирихле для многосвязных областей мы еще вернемся в следующей главе.

§ 4. Гармоническая мера

Пусть D — некоторая область, а E — некоторое множество, расположенное на границе этой области. Обозначим через $\omega(z, E, D)$ решение задачи Дирихле в области D с граничными данными, равными единице на множестве E и нулю на остальной части границы D (если, конечно, такое решение существует). Функцию $\omega(z, E, D)$ назовем *гармонической мерой множества E относительно области D в точке z.*

Согласно замечанию 1 к теореме 3.2 решение поставленной задачи Дирихле существует, если D — односвязная область, ограниченная кусочно гладкой кривой, а E — конечное или даже счетное множество дуг этой кривой.

По самому определению решения задачи Дирихле функция $\omega(z, E, D)$ является гармонической в области D функцией, ограниченной в D и непрерывной вплоть до границы D в каждой точке непрерывности граничных данных.

В силу принципа максимума и минимума гармонических функций имеем

$$0 \leqslant \omega(z, E, D) \leqslant 1. \tag{4.1}$$

Знак равенства при z, лежащих внутри области, может достигаться лишь в случае, если $\omega(z, E, D) \equiv 0$ или $\omega(z, E, D) \equiv 1$.

Если множество E состоит не более чем из счетного множества точек, то $\omega(z, E, D) \equiv 0$, а если E отличается от всей границы D лишь на счетное множество точек, то $\omega(z, E, D) \equiv 1$.

Отметим еще два почти очевидных свойства гармонической меры.

Если множества E_1 и E_2 (лежащие на границе области D) *не имеют общих точек, то*

$$\omega(z, E_1 + E_2, D) = \omega(z, E_1, D) + \omega(z, E_2, D). \tag{4.2}$$

Если функция $w(z)$ конформно отображает область D на область D', а множество E переходит при этом ото-

бражении в множество E', то

$$\omega(z, E, D) = \omega(w(z), E', D'). \tag{4.3}$$

Последнее свойство позволяет легко находить гармоническую меру в простых случаях.

Пример 1. Пусть область D_R — это полукруг $\operatorname{Re} z > 0$, $|z| < R$, а E_R — диаметр этого полукруга. Найдем $\omega(z, E_R, D_R)$.

При конформном отображении $w = \frac{iR - z}{iR + z}$ полукруг D_R переходит в квадрант $0 < \arg w < \frac{\pi}{2}$, а диаметр полукруга — в положительную часть действительной оси. Обозначим квадрант через D', а положительную полуось через E' и воспользуемся формулой (4.3). Ясно, что

$$\omega(w, E', D') = 1 - \frac{2}{\pi} \arg w = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \ln w.$$

Поэтому

$$\omega(z, E_R, D_R) = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \ln \frac{iR - z}{iR + z} = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \ln \frac{1 + \frac{iz}{R}}{1 - \frac{iz}{R}}.$$

При больших R и фиксированных z легко получаем асимптотическую формулу

$$\omega(z, E_R, D_R) = 1 - \frac{1}{R} \cdot \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} z + O\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

Пример 2. Пусть область P_x — это полуполоса $|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Re} z < x$, а H_x — ее торец. Найдем $\omega(z, H_x, P_x)$.

При конформном отображении $w = e^z$ рассматриваемая полуполоса переходит в полукруг $\operatorname{Re} w > 0$, $|z| < e^x$, причем ее торец переходит в полуокружность. Поскольку граница полукруга состоит из диаметра и полуокружности, то сумма гармонических мер диаметра и полуокружности относительно полукруга равна единице. Поэтому, применяя результат примера 1, получаем

$$\omega(z, H_x, P_x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \ln \frac{1 + ie^{z-x}}{1 - ie^{z-x}}.$$

При больших x и при фиксированных z легко получаем асимптотическую формулу

$$\omega(z, H_x, P_x) \sim e^{-x} \cdot \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} e^z + O(e^{-2x}).$$

Гармоническая мера является решением задачи Дирихле для весьма специальных граничных данных, но с ее помощью нетрудно записать решение задачи Дирихле и для любых граничных данных. Действительно, пусть D — некоторая односвязная область, а C — ее граничная кривая, на которой задана функция $\varphi(\zeta)$ (для простоты предположим ее непрерывной на C). Возьмем на кривой C точки $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ $(\zeta_{n+1}=\zeta_1)$, следующие друг за другом, и обозначим через C_k часть C, лежащую между точками ζ_k и ζ_{k+1}. Рассмотрим сумму

$$u_n(z)=\sum_1^n \varphi(\xi_k)\,\omega(z, C_k, D) \qquad (\xi_k \in C_k).$$

Эта сумма является решением задачи Дирихле в области D с граничными данными, равными $\varphi(\xi_k)$ на C_k, $k=1, 2, \ldots, n$. Обозначим через $u(z)$ решение задачи Дирихле в области D с граничными данными $\varphi(\zeta)$ и оценим разность $u(z)-u_n(z)$. Имеем

$$|\varphi(\zeta)-\varphi(\xi_k)|<\eta(C_k), \qquad (\zeta\in C_k),$$

где $\eta(C_k)=\sup\limits_{\zeta,\zeta'}|\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta')|$ $(\zeta\in C_k,\ \zeta'\in C_k)$. По принципу максимума и минимума гармонических функций получаем

$$|u(z)-u_n(z)|\leqslant \max_k \eta(C_k).$$

Но $\varphi(\zeta)$ — непрерывная на C функция, так что $\max\limits_k \eta(C_k)\to 0$, когда размер наибольшей из дуг C_k стремится к нулю.

Следовательно, сумма $u_n(z)$ стремится к пределу, равному функции $u(z)$, когда размер наибольшей из дуг C_k стремится к нулю независимо от способа разбиения и от выбора точек ξ_k на дугах C_k.

Предел суммы $u_n(z)$ естественно обозначить интегралом *)

$$\int_C \varphi(\zeta)\,\omega(z, d\zeta, D).$$

*) Этот интеграл представляет собой *интеграл Стилтьеса.*

Итак, решение задачи Дирихле в области D с граничными данными $\varphi(\zeta)$ можно представить в виде

$$u(z) = \int\limits_C \varphi(\zeta)\, \omega(z, d\zeta, D). \tag{4.4}$$

Мы доказали эту формулу только для непрерывных функций $\varphi(\zeta)$, но ясно, что доказательство легко переносится и на кусочно непрерывные ограниченные функции. □

В частности, полагая функцию $\varphi(\zeta)$ равной единице на множестве E и нулю на остальной части границы области D, получаем из формулы (4.4) формулу

$$\omega(z, E, D) = \int\limits_E \omega(z, d\zeta, D). \tag{4.5}$$

Сравнение формулы (4.4) с формулой (3.1) наводит на мысль, что гармоническая мера тесно связана с функцией Грина задачи Дирихле в области D. Это действительно так. Нетрудно выразить гармоническую меру через гармоническую функцию, сопряженную с функцией Грина. □

Для оценок аналитических функций гармоническая мера применяется с помощью так называемой *теоремы о двух константах.*

Теорема 4.1. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D с границей C, а E — некоторое множество, лежащее на C. Если*

$$\varlimsup_{z\to\zeta} |f(z)| < m \quad (\zeta \in E), \qquad \varlimsup_{z\to\zeta} |f(z)| < M \quad (\zeta \in C, \zeta \notin E),$$

то

$$\ln |f(z)| < \omega(z, E, D) \ln m + (1 - \omega(z, E, D)) \ln M \quad (z \in D).$$

Доказательство. В левой части доказываемого неравенства стоит субгармоническая в области D функция (согласно теореме 2.4), в правой — гармоническая. Для предельных значений на границе неравенство выполнено, так как в точках множества E функция $\omega(z, E, D)$ обращается в 1, а в остальных точках границы D — в 0. Применяя принцип максимума к разности левой и правой частей неравенства, получаем утверждение теоремы. □

Точное отыскание гармонической меры, входящей в неравенство, может оказаться весьма сложным делом. Поэтому в теории аналитических функций большое значение имеют оценки гармонической меры, позволяющие заменять сложные величины простыми. Одним из наиболее важных методов оценки гармонической меры является так называемый *принцип Карлемана* или *принцип расширения области.*

Теорема 4.2. *Пусть область D' содержит область D, а множество E', лежащее на границе D', содержит множество E, лежащее на границе D. Тогда*

$$\omega(z, E, D) \leqslant \omega(z, E', D') \qquad (z \in D).$$

Доказательство. Рассмотрим обе функции на границе области D. В точках множества E обе функции равны 1. В остальных точках функция $\omega(z, E, D)$ равна 0, а функция $\omega(z, E', D')$ во всяком случае неотрицательна (согласно (4.1)). Следовательно, на границе области D доказываемое неравенство справедливо. По принципу максимума оно справедливо и внутри области. $\square$

Заметим, что принцип расширения области позволяет оценивать гармоническую меру не только сверху, но и снизу, так как сумма гармонических мер множества E и дополнения к нему до всей границы области D равна единице. Принимая во внимание это соображение, можно сформулировать принцип расширения области в следующем симметричном виде:

При расширении области D за счет части границы, не содержащей точек множества E, гармоническая мера $\omega(z, E, D)$ увеличивается, а при расширении области D за счет части границы, состоящей только из точек множества E, уменьшается. $\square$

В качестве применения принципа расширения области докажем две теоремы, принадлежащие Линделефу. Первая из них состоит в следующем.

Теорема 4.3. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна и ограничена в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Если существует такая кривая L, лежащая в этой полуплоскости, что $f(z) \to a$ $(z \to \infty,\ z \in L)$, то $f(z) \to a$ при $z \to \infty$ равномерно в любом угле $\delta \leqslant \arg z \leqslant \pi - \delta$.*

Доказательство. Возьмем точку $z_R = 2Re^{i\varphi}$, $\delta \leqslant \varphi \leqslant \pi - \delta$, и рассмотрим функцию $f(z) - a$ в области D_R, являющейся связной частью сектора $\operatorname{Im} z > 0$, $|z| >$

$> R$, отсекаемой кривой L и содержащей точку z_R. Обозначим через L_R часть кривой L, входящую в границу области D_R, а через $\varepsilon(R)$ и M — величины

$$\varepsilon(R) = \sup_{z \in L_R} |f(z) - a|, \qquad M = \sup_{z \in D_R} |f(z) - a|.$$

Применяя к функции $|f(z) - a|$ теорему о двух константах, получаем

$$\ln|f(z_R) - a| \leqslant \omega(z_R, L_R, D_R) \ln \varepsilon(R) + \\ + (1 - \omega(z_R, L_R, D_R)) \ln M \leqslant \omega(z_R, L_R, D_R) \ln \varepsilon(R) + \\ + \ln^+ M, \quad (\ln^+ M = \max(\ln M, 0)).$$

Согласно принципу расширения области гармоническая мера $\omega(z_R, L_R, D_R)$ не увеличится, если заменить область D_R сектором $\operatorname{Im} z > 0$, $|z| > R$, а кривую L_R — тем из лучей $(R, +\infty)$ или $(-\infty, -R)$, который не входит в границу области D_R (сектор обозначим D'_R, а луч L'_R).

При достаточно большом R имеем $\varepsilon(R) < 1$ и

$$\ln|f(2Re^{i\varphi}) - a| \leqslant \omega(2Re^{i\varphi}, L'_R, D'_R) \ln \varepsilon(R) + \ln^+ M.$$

Гармоническую меру $\omega(2Re^{i\varphi}, L'_R, D'_R)$ можно вычислить, но это не нужно. Достаточно заметить, что при $\delta \leqslant \varphi \leqslant \pi - \delta$ она положительна и не зависит от R. Отсюда уже следует утверждение теоремы, так как $\varepsilon(R)$ стремится к нулю при $R \to +\infty$. □

В качестве следствия получим еще одну теорему Линделефа.

Следствие. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D, ограниченной двумя кривыми L_1 и L_2, выходящими из одной точки и уходящими в бесконечность. Если функция непрерывна на кривых L_1 и L_2 и*

$$f(z) \to a_n \quad (z \to \infty,\ z \in L_n), \quad n = 1,\ 2,$$

то имеет место одна из двух возможностей: или функция $f(z)$ не ограничена в области D, или $a_1 = a_2 = a$ и $f(z) \to a$ при z, стремящемся к бесконечности по любому пути, лежащему в области D.

Действительно, обозначим через $z(w)$ функцию, конформно отображающую полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ на область D и переводящую точку $w = \infty$ в точку $z = \infty$. Рассмотрим функцию $g(w) = f(z(w))$. Если функция $f(z)$ ограничена в области D, то функция $g(w)$ ограничена в полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$, а из существования пределов $f(z)$ по L_1 и L_2 следует существование пределов $g(w)$ при $w \to \pm\infty$, так как действительная ось отображается функцией $z(w)$ в кривую, составленную из L_1 и L_2. Применим к функции $g(w)$ теорему 4.3, взяв в качестве кривой L сначала положительную, а затем отрицательную часть действительной оси. Получим

$$g(w) \to a_1 \quad (w \to \infty,\ \ 0 \leqslant \arg w \leqslant \pi - \delta),$$
$$g(w) \to a_2 \quad (w \to \infty,\ \ \delta \leqslant \arg w \leqslant \pi).$$

Это возможно лишь в случае, если $a_1 = a_2 = a$ и $g(w) \to \to a$ при w, стремящемся к бесконечности по любому пути, лежащему в полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$. Возвращаясь к $f(z)$, получаем наше утверждение. $\square$

С помощью принципа расширения области можно получить весьма разнообразные неравенства для гармонической меры. Сначала приведем одно довольно грубое, но очень наглядное неравенство.

Теорема 4.4. *Пусть D — выпуклая область**), *а E — дуга граничной кривой этой области. Тогда*

$$\omega(z, E, D) \leqslant \frac{1}{\pi} \varphi(z, E, D),$$

где $\varphi(z, E, D)$ — угол, под которым дуга E видна из точки z. Если D — полуплоскость, то неравенство обращается в равенство.

Доказательство. Начнем с доказательства последнего утверждения теоремы. Ясно, что без ограничения общности можно считать, что мы имеем дело с полуплоскостью $\operatorname{Re} z > 0$ и что точка $z = x$ лежит на действительной оси. В качестве дуги E возьмем отрезок мнимой оси (iy_1, iy_2). Гармоническую меру можно построить с помощью интеграла Пуассона для полуплоскости (см. формулу (3.5)). Это дает, что

$$\omega = \frac{x}{\pi} \int_{y_1}^{y_2} \frac{d\eta}{\eta^2 + x^2} = \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{y_2}{x} - \operatorname{arctg} \frac{y_1}{x} \right).$$

Эта величина в точности равна углу, под которым отрезок (iy_1, iy_2) виден из точки $z = x$, деленному на π. Та-

* Напомним, что область называется *выпуклой*, если отрезок, соединяющий любые две ее точки, целиком лежит в ней.

ким образом, утверждение теоремы для полуплоскости доказано.

Заметим, что нам достаточно доказать неравенство для сколь угодно малой дуги E, так как при сложении дуг и гармонические меры и углы, под которыми эти дуги видны, складываются. Поэтому будем считать дугу E столь малой, что область, ограниченная дугой E и отрезком прямой, соединяющим ее концы, не содержит точку z.

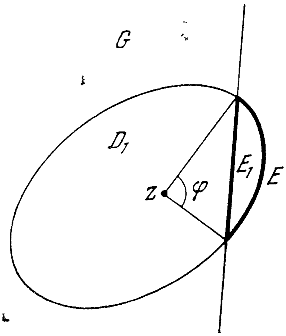

Рис. 9

Обозначим через E_1 отрезок прямой, соединяющий концы дуги E, через D_1 — часть области D, отсекаемую отрезком E_1 и содержащую точку z, а через G — полуплоскость, содержащую область D_1 и ограниченную прямой, на которой лежит отрезок E_1 (рис. 9). По принципу расширения области имеем

$$\omega(z, E, D) \leqslant \omega(z, E_1, D_1) \leqslant \omega(z, E_1, G),$$

а $\omega(z, E_1, G) = \dfrac{1}{\pi}\varphi(z, E, D)$, как доказано выше. Теорема доказана. $\square$

Принцип расширения области позволяет получать и более тонкие оценки. Покажем, как получается одна из таких оценок в проблеме Карлемана — Мию.

Проблемой Карлемана — Мию называется следующая каноническая постановка задачи об оценке величины гармонической меры.

Пусть D — односвязная область, имеющая конечное и непустое пересечение с любой прямой $\operatorname{Re} z = x$ при $a < x < b$. Обозначим через D_x связную часть области D, лежащую в полуплоскости $\operatorname{Re} z < x$ и содержащую заданную точку ζ ($\operatorname{Re}\zeta < x$). Через h_x обозначим часть границы области D_x, состоящую из отрезков прямой $\operatorname{Re} z = x$, а через $h(x)$ — сумму длин этих отрезков.

Проблема состоит в оценке величины гармонической меры $\omega(\zeta, h_x, D_x)$, если известна функция $h(t)$ при $t \leqslant x$. $\square$

Следующий результат был получен Карлеманом:

Теорема 4.5. *Пусть* $\zeta = \xi + i\eta \in D$ *и* $a < \xi < x < b$. *Тогда*

$$\omega(\xi + i\eta, h_x, D_x) \leqslant \exp\left\{-\frac{4}{\pi}\int_{\xi}^{x}\frac{dt}{h(t)}\right\}.$$

Доказательство. Возьмем $\xi < \sigma < x$ и рассмотрим в области D_σ две функции $\omega(\zeta, h_x, D_x)$ и $\omega(\zeta, h_\sigma, D_\sigma)$. На части границы области D_σ, отличной от отрезков h_σ, обе функции равны нулю. Поэтому согласно формуле (4.4) можно восстановить их по значениям на отрезках h_σ:

$$\omega(\zeta, h_x, D_x) = \int_{h_\sigma}\omega(\sigma + iy, h_x, D_x)\,\omega(\zeta, dy, D_\sigma),$$

$$\omega(\zeta, h_\sigma, D_\sigma) = \int_{h_\sigma}\omega(\zeta, dy, D_\sigma).$$

Вычитая из первого равенства второе и деля на $x - \sigma$, получаем

$$\frac{\omega(\zeta, h_x, D_x) - \omega(\zeta, h_\sigma, D_\sigma)}{x - \sigma} = \int_{h_\sigma}\frac{\omega(\sigma + iy, h_x, D_x) - 1}{x - \sigma}\,\omega(\zeta, dy, D_\sigma). \quad (4.6)$$

Гармоническую меру $\omega(\sigma + iy, h_x, D_x)$, стоящую под интегралом, оценим с помощью принципа расширения области. Заменим область D_x полуплоскостью $\operatorname{Re} z < x$, которую обозначим через G_x. По принципу расширения области $\omega(\sigma + iy, h_x, D_x) \leqslant \omega(\sigma + iy, h_x, G_x)$. Но по теореме 4.4 гармоническая мера $\omega(\sigma + iy, h_x, G_x)$ равна деленной на π сумме углов, под которыми отрезки, составляющие h_x, видны из точки $\sigma + iy$. При заданной сумме длин отрезков сумма углов будет наибольшей, когда h_x образует один отрезок, симметричный относительно прямой $\operatorname{Im} z = y$. Вычисляя угол для этого случая, находим

$$\omega(\sigma + iy, h_x, G_x) \leqslant \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{h(x)}{2(x - \sigma)} = 1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2(x - \sigma)}{h(x)}.$$

Следовательно,

$$\omega(\sigma + iy, h_x, D_x) - 1 \leqslant -\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2(x - \sigma)}{h(x)}.$$

Подставляя это неравенство в формулу (4.8), получаем

$$\frac{\omega(\zeta, h_x, D_x) - \omega(\zeta, h_\sigma, D_\sigma)}{x-\sigma} \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{2}{\pi}\,\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{2(x-\sigma)}{h(x)}}{x-\sigma}\int\limits_{h_\sigma}\omega(\zeta, dy, D_\sigma) =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\,\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{2(x-\sigma)}{h(x)}}{x-\sigma}\,\omega(\zeta, h_\sigma, D_\sigma).$$

Деля обе части неравенства на $\omega(\zeta, h_\sigma, D_\sigma)$ и переходя к пределу при $x \to \sigma$, имеем

$$\frac{d}{d\sigma}\ln\omega(\zeta, h_\sigma, D_\sigma) \leqslant -\frac{4}{\pi}\,\frac{1}{h(\sigma)}.$$

Интегрируя это неравенство по σ от ξ до x и принимая во внимание, что $\omega(\zeta, h_\xi, D_\xi) = 1$, приходим к утверждению теоремы. (Вопрос о существовании производной от $\omega(\zeta, h_\sigma, D_\sigma)$ по σ обойден молчанием. Этот вопрос нетрудно решить, используя монотонность функции ω, но еще проще доказать окончательное неравенство, не используя существования производной. Собственно, неравенство написано с помощью производной лишь для наглядности.)

Полезно посмотреть, что за оценки дают теоремы 4.4 и 4.5 для гармонической меры полуполосы $\operatorname{Re} z < x$, $|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}$ при $x \to +\infty$.

Из теоремы 4.4 получаем

$$\omega(z, H_x, P_x) \leqslant \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{x - \operatorname{Re} z} \sim \frac{2}{x} \qquad (x \to +\infty).$$

Из теоремы 4.5 получаем

$$\omega(z, H_x, P_x) \leqslant \exp\left\{-\frac{4}{\pi}\int\limits_{\operatorname{Re} z}^{x}\frac{dt}{\pi}\right\} = e^{-\frac{4}{\pi^2}(x - \operatorname{Re} z)}.$$

Истинная оценка (см. пример 2)

$$\omega(z, H_x, P_x) \sim \frac{4}{\pi}e^{-x}\operatorname{Re} e^{z} \qquad (x \to +\infty).$$

В § 6 будет показано, как с помощью неравенства Альфорса (см. § 6 гл. V) получить в аналогичной задаче оценку, не отличающуюся от истинной. Используя принцип симметризации (см. § 2 гл. X), можно применить неравенство Альфорса и для уточнения оценки Карлемана в самой проблеме Карлемана — Мию. Уточнение состоит, грубо говоря, в том, что множитель $-4/\pi$ перед интегралом заменяется множителем $-\pi$.

§ 5. Теоремы единственности для ограниченных функций

В этом и в следующем параграфах мы будем заниматься приложением теории гармонических и субгармонических функций к некоторым вопросам теории аналитических функций.

В настоящем параграфе докажем несколько теорем единственности для некоторых классов функций, голоморфных в круге $|z| < R$.

Класс функций, голоморфных и ограниченных в круге $|z| < R$, называется *классом* B. При этом обозначается

$$B(f) = \sup_{|z|<R} |f(z)|.$$

Класс функций, голоморфных в круге $|z| < R$ и удовлетворяющих условию

$$\sup_{\rho<R} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\varphi})|^\delta \, d\varphi < \infty,$$

называется *классом* $H_\delta (\delta > 0)$. При этом обозначается

$$H_\delta(f, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\varphi})|^\delta \, d\varphi, \qquad H_\delta(f) = \sup_{\rho<R} H_\delta(f, \rho).$$

Класс функций, голоморфных в круге $|z| < R$ и удовлетворяющих условию

$$\sup_{\rho<R} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\varphi})| \, d\varphi < \infty \qquad \left(\ln^+ x = \max(\ln x, 0)\right),$$

называется *классом* A или *классом функций ограниченного вида*. При этом обозначается

$$A(f, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\varphi})| \, d\varphi, \qquad A(f) = \sup_{\rho<R} A(f, \rho).$$

Принадлежность функции $f(z)$ классу B, H_δ или A накладывает те или иные ограничения на рост $|f(z)|$ при приближении z к оружности $|z|=R$ или на рост коэффициентов разложения функции $f(z)$ в ряд Тейлора. Однако в этих терминах нельзя дать необходимых и достаточных условий принадлежности функции $f(z)$ к указанным классам.

Нетрудно показать, что класс B является самым узким, что класс $H_{\delta'}$ входит в класс H_δ при $\delta'<\delta$ и что класс A содержит все классы H_δ. $\Big($В доказательстве нуждается лишь последнее утверждение, но оно сразу следует из очевидного неравенства $\ln^+ x < \frac{x^\delta}{\delta}$.$\Big)$

Поскольку класс A — самый широкий, большинство теорем естественно доказывать только для него. $\square$

Очень важную роль во всех рассуждениях, связанных с перечисленными классами функций, играет следующая лемма:

Лемма 1. *Если функция $f(z)$ голоморфна при $r_1<$ $<|z|<r_2$, то функции $H_\delta(f,\ z)$ и $A(f,\ z)$, определенные выше, а также функция*

$$L(f,\ z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(ze^{i\varphi})|\,d\varphi$$

являются в кольце $r_1<|z|<r_2$ субгармоническими функциями z, зависящими только от $|z|$.

Доказательство. Проведем доказательство лишь для функции $A(f,\ z)$, для остальных оно проводится совершенно аналогично.

Прежде всего заметим, что функция $A(f,\ re^{i\theta})$ не зависит от θ, так как интеграл от периодической функции по периоду не меняется от изменения начала промежутка интегрирования. Это и означает, что функция $A(f,\ z)$ зависит только от $|z|$.

Далее, интеграл для $A(f,\ z)$ является пределом интегральной суммы

$$S_n(z)=\frac{1}{2\pi}\sum\ln^+\left|f\left(ze^{i\varphi_k}\right)\right|(\varphi_{k+1}-\varphi_k),$$

причем стремление к пределу равномерно по z в любом кольце, лежащем внутри исходного кольца. Согласно свойству 1 субгармонических функций (§ 2) $S_n(z)$ является субгармонической функцией как сумма субгармонических функций, а согласно свойству 2 предел этой суммы, т. е. функция $A(f, z)$, тоже является субгармонической функцией. Лемма доказана.

Следствие. *Если функция $f(z)$ голоморфна в круге $|z|<R$, то функции $H_\delta(f, \rho)$, $A(f, \rho)$ и $L(f, \rho)$ являются неубывающими функциями ρ.*

Утверждение сразу следует из принципа максимума субгармонических функций. □

Следующая теорема показывает, что функции перечисленных классов не могут очень быстро стремиться к нулю при стремлении z к окружности $|z|=R$.

Теорема 5.1. *Пусть $f(z)$ — функция ограниченного вида в круге $|z|<R$. Если*

$$\lim_{\rho\to R}\int_0^{2\pi}\ln|f(\rho e^{i\varphi})|\,d\varphi=-\infty,$$

то $f(z)\equiv 0$.

Доказательство. Поскольку $\ln^+ x\geqslant \ln x$, то из принадлежности функции $f(z)$ классу A следует, что интересующий нас интеграл ограничен сверху. Кроме того, из следствия леммы вытекает, что этот интеграл является неубывающей функцией ρ. Поэтому условие теоремы может выполняться лишь в случае, если интеграл равен $-\infty$ при всех ρ. Но для функции $f(z)$, отличной от тождественного нуля, найдется хотя бы одно ρ, для которого этот интеграл имеет конечное значение. Значит, $f(z)\equiv 0$, и теорема доказана.

Доказанная теорема обобщает классическую теорему единственности. Действительно, классическая теорема единственности для аналитических функций может быть сформулирована так:

Если функция $f(z)$ голоморфна в точке $z=a$ и при $z\to a$ функция $f(z)$ стремится к нулю быстрее любой степени $z-a$, то $f(z)\equiv 0$.

Ясно, что при стремлении z к точке границы области голоморфности функция может стремиться к нулю быстрее любой степени. Теорема 5.1 ограничивает скорость стремления функции $f(z)$ к нулю при стремлении точки z к границе области, если функция $f(z)$ принадлежит одному из перечисленных классов. Условие, которое дано в теореме, не очень прозрачно, но обладает большой общностью и точностью. В следующем параграфе из теоремы 5.1 будет выведен ряд более простых теорем того же рода при допущении, что $f(z)\to 0$ лишь в одной точке границы. □

Обобщением классической теоремы единственности является и следующий результат.

Теорема 5.2. *Пусть $f(z)$ — функция ограниченного вида в круге $|z|<R$, имеющая нули в точках $z_1, z_2, \ldots$ (кратный нуль пишем столько раз, какова его кратность). Если*

$$\sum_1^\infty (R-|z_n|)=+\infty,$$

то $f(z)\equiv 0$.

Доказательство. Допустим, что $f(z)\not\equiv 0$. Тогда без ограничения общности можно считать, что

$$f(0)\neq 0. \tag{5.1}$$

Действительно, вместо функции $f(z)$ мы можем взять функцию $g(z)=z^{-m}f(z)$, где m — кратность нуля функции $f(z)$ в точке $z=0$. Ясно, что функция $g(z)$ тоже будет функцией ограниченного вида.

Применим формулу Иенсена (см. лемму 1 § 2). Она дает, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(\rho e^{i\varphi})|\,d\varphi=\ln|f(0)|-\sum_{|z_n|<\rho}\ln\frac{\rho}{|z_n|}. \tag{5.2}$$

Согласно условию теоремы, переходя к пределу при $\rho\to R$, получаем

$$\lim_{\rho\to R}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(\rho e^{i\varphi})|\,d\varphi=\ln|f(0)|-\sum_1^\infty\ln\frac{R}{|z_n|}.$$

Но при $0<|z|<R$ имеем

$$\ln\frac{R}{|z|}=-\ln\left(1-\frac{R-|z|}{R}\right)=\sum_1^\infty\frac{1}{n}\left(\frac{R-|z|}{R}\right)^n>\frac{R-|z|}{R}$$

и, следовательно,

$$\sum_1^\infty\ln\frac{R}{|z_n|}\geqslant\sum_1^\infty\frac{R-|z_n|}{R}=+\infty,$$

т. е. $\lim\limits_{\rho\to R}\int\limits_0^{2\pi} \ln|f(\rho e^{i\varphi})|\,d\varphi = -\infty$. По теореме 5.1 имеем $f(z)\equiv 0$. Теорема доказана. □

Можно показать, что теоремы 5.1 и 5.2 предельно точны не только для класса A, но и для класса B. Это делается следующим образом:

Если задана произвольная непрерывная функция $a(\varphi)$, для которой

$$\int\limits_0^{2\pi} \ln a(\varphi)\,d\varphi > -\infty,$$

то можно показать, что функция

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\ln a(\varphi)\,d\varphi \qquad (|z|<R)$$

голоморфна и ограничена в круге $|z|<R$, а $|f(z)|\to$ $\to a(\varphi)$ при $z\to Re^{i\varphi}$.

Если задана произвольная последовательность точек z_n, удовлетворяющая условиям

$$|z_n|<R, \qquad \sum_1^{\infty}(R-|z_n|)<\infty,$$

то функция

$$f(z) = \prod_1^{\infty} \frac{R(z_k-z)}{R^2-z\bar{z}_k}\, e^{-i\varphi_k} \qquad (\varphi_k = \arg z_k)$$

голоморфна и не превосходит единицы в круге $|z|<R$, а $f(z_n)=0$.

Предоставляем читателю самому убедиться в справедливости приведенных утверждений. □

Относительно функций ограниченного вида имеется интересный результат, объясняющий, почему нет особой разницы между функциями ограниченного вида и ограниченными функциями:

Функция ограниченного вида является отношением двух ограниченных функций *). □

*) О функциях ограниченного вида см. [26, 30].

Классы функций, аналогичные классам B, H_δ и A, можно рассматривать не только в круге $|z|<R$, но и в любых других областях. Однако, принимая во внимание приведенный выше результат, в большинстве вопросов можно ограничиться исследованием функций, ограниченных в той или иной области. Если область односвязна, то результаты легко получаются с помощью конформного отображения.

В качестве примера приведем обобщение теоремы 5.2 на случай произвольной односвязной области.

Теорема 5.3. *Пусть D — некоторая односвязная область, а $w(z)$ — какая-либо функция, конформно отображающая D на круг $|w|<1$. Если функция $f(z)$ голоморфна и ограничена в D и имеет нули в точках z_1, z_2, ..., а*

$$\sum_1^\infty (1-|w(z_n)|)=+\infty,$$

то $f(z)\equiv 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(w)=f(z(w))$, где $z(w)$ — функция, обратная к $w(z)$. Функция $g(w)$ голоморфна и ограничена в круге $|w|<1$ и имеет нули в точках $w_k=w(z_k)$, причем $\sum(1-|w_k|)=\sum(1-|w(z_k)|)=+\infty$. По теореме 5.2 $g(w)\equiv 0$. Теорема доказана. □

Доказанные выше теоремы единственности широко применяются в теории аналитических функций и во многих областях анализа. В качестве примера такого применения докажем один результат о полноте системы функций $\{x^{\lambda_n}\}$, известный под названием *теоремы Мюнца*.

Теорема 5.4. *Если $\lambda_1<\lambda_2<\ldots$ и $\sum\frac{1}{\lambda_n}=+\infty$, то система функций $\{x^{\lambda_n}\}$ полна на отрезке* $(0, 1)$.

Доказательство. Система функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется *полной* на отрезке (a, b), если не существует непрерывных на отрезке (a, b) функций, ортогональных всем функциям $\varphi_n(x)$.

Допустим, что $g(x)$ — непрерывная на отрезке $(0, 1)$ функция, ортогональная всем функциям x^{λ_n}, т. е.

$$\int_0^1 g(x)\,x^{\lambda_n}\,dx=0 \qquad (n=1, 2, \ldots). \tag{5.3}$$

Обозначим

$$G(z)=\int_0^1 g(x)\,x^{z-1}\,dx.$$

Функция $G(z)$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$ и ограничена, так как $|x^z|<1$ при $0<x<1$, $\operatorname{Re} z>0$. Кроме того, она имеет нули $z=\lambda_n+1$ $(n=1, 2, \ldots)$. Применим теорему 5.3. В качестве функции $w(z)$, конформно отображающей полуплоскость $\operatorname{Re} z>0$ на круг $|w|<1$, можно взять функцию $w=\frac{z-1}{z+1}$. Имеем

$$\sum(1-|w(\lambda_n+1)|)=\sum\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_n+2}\right)=$$

$$=2\sum\frac{1}{\lambda_n+2}=+\infty$$

Поэтому из теоремы 5.3 следует, что $G(z)\equiv 0$. С помощью формулы обращения преобразования Меллина (см. § 6 гл. VII) легко убеждаемся, что и $g(x)\equiv 0$. Следовательно, функций, непрерывных на отрезке $(0, 1)$ и ортогональных всем функциям x^{λ_n}, не существует, т. е. система функций $\{x^{\lambda_n}\}$ полна на отрезке $(0, 1)$. Теорема доказана. $\square$

Заметим, что в применениях теоремы 5.3 одной из трудностей является оценка величины $w(z_n)$ при $n\to\infty$. Для этой цели можно использовать неравенства Альфорса и Варшавского (см. § 6 гл. V) для оценки конформно отображающих функций вблизи границы.

§ 6. Теоремы Фрагмена — Линделефа

В качестве второго приложения теории гармонических и субгармонических функций мы докажем две довольно тонкие и удобные для самых различных применений теоремы о росте и об убывании функции, голоморфной в бесконечной области, в зависимости от вида области.

В доказываемых теоремах используется, собственно, не голоморфность функции $f(z)$, а только субгармоничность функции $\ln|f(z)|$, так что при желании эти теоремы легко переносятся на субгармонические функции.

Теорема 6.1. *Пусть G — односвязная область, имеющая точки $t=0$ и $t=\infty$ своими граничными точками. Обозначим через s_ρ сечение области G окружностью $|t|=\rho$, а через $s(\rho)$ — его длину. Если функция $f(t)$ голоморфна в области G, непрерывна вплоть до ее границы C (кроме точки $t=\infty$) и удовлетворяет условиям*

$$|f(t)|\leqslant 1 \quad (t\in C), \qquad \varliminf_{\rho\to\infty}\frac{\ln M(\rho)}{\sigma(\rho)}=0,$$

где

$$M(\rho)=\max_{t\in s_\rho}|f(t)|,\ \sigma(\rho)=\exp\left\{\pi\int_1^\rho\frac{du}{s(u)}\right\},$$

то $|f(t)|\leqslant 1$ $(t\in G)$.

Доказательство. Обозначим через $\zeta(t)$ функцию, конформно отображающую область G на полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta>0$ и переводящую точки $t=0$ и $t=\infty$ в точки $\zeta=0$ и $\zeta=\infty$ соответственно. Через $t(\zeta)$ обозначим функцию, обратную к функции $\zeta(t)$. Ясно, что эти функции определяются с точностью до постоянного множителя.

Возьмем произвольную точку $t_0\in G$ и достаточно большое ρ. Обозначим через G_ρ связную часть области G, лежащую в круге $|t|<\rho$ и содержащую точку t_0. При $\rho>|t_0|$ область G_ρ непуста. Образ области G_ρ при отображении $\zeta=\zeta(t)$ обозначим через K_ρ. Область K_ρ ограничена отрезками мнимой оси и некоторыми кривыми L_ρ, являющимися образами дуг окружности $|t|=\rho$, входящих в s_ρ. Среди кривых L_ρ найдется хотя бы одна, соединяющая отрицательную часть мнимой оси с ее положительной частью. Обозначим эту кривую L_ρ^*; дугу из s_ρ, являющуюся прообразом L_ρ^*, обозначим s_ρ^*, а длину s_ρ^* обозначим $s^*(\rho)$. Область, ограниченную кривой L_ρ^* и отрезком мнимой оси, соединяющим ее концы, обозначим K_ρ^*, а прообраз области K_ρ^* обозначим через G_ρ^*. (Стоит заметить, что если область G пересекается окружностью $|t|=\rho$ по одной дуге, то величины, помеченные звездочкой, совпадают с теми же величинами без звездочек. В общем случае $G_\rho^*\supset G_\rho$ и $K_\rho^*\supset K_\rho$, а $s_\rho^*\subset s_\rho$ и $s^*(\rho)\leqslant s(\rho)$.)

Область K_ρ^* представляет собой искаженный полукруг. Оценим радиус наибольшего полукруга $\operatorname{Im}\zeta>0$,

$|\zeta| < r(\rho)$, входящего в область K_ρ^*, т. е. величину

$$r(\rho) = \inf_{t \in s_\rho^*} |\zeta(t)|.$$

Для оценки $r(\rho)$ используем неравенство Альфорса (см. теорему 6.1 гл. V). Чтобы привести задачу к той постановке, в которой было доказано это неравенство, обозначим через D образ области G при отображении функцией $z = \ln t$ (функция $\ln t$ голоморфна в области G; ветвь берем любую). Тогда функция $w(z) = \ln \zeta(e^z)$ конформно отображает область D на полосу $|\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2}$, а сечения области D прямыми $\operatorname{Re} z = x$ — это образы сечений области G окружностями $|t| = e^x$ при отображении $z = \ln t$. При этом отрезок θ_x является образом дуги $s_{e^x}^*$ и

$$\theta(x) = \frac{s^*(e^x)}{e^x}, \qquad \ln r(e^x) = \sup_{z \in \theta_x} \operatorname{Re} w(z).$$

Поэтому неравенство Альфорса дает

$$r(\rho) \geqslant \exp\left\{C + \pi \int_0^{\ln \rho} \frac{dt}{\theta(t)}\right\} = e^C \exp\left\{\pi \int_1^{\rho} \frac{du}{s^*(u)}\right\} \geqslant e^C \sigma(\rho). \tag{6.1}$$

Теперь перейдем к основной части доказательства (она проще вспомогательных рассуждений, придающих теореме общность).

Рассмотрим функцию $F(\zeta) = f(t(\zeta))$ в области K_ρ^*. На мнимой оси имеем $|F(\zeta)| \leqslant 1$, так как при отображении $t = t(\zeta)$ мнимая ось переходит в границу области G, т. е. в C, а на C по условию теоремы $|f(t)| \leqslant 1$. На остальной части границы области K_ρ^*, т. е. на кривой L_ρ^*, являющейся образом дуги s_ρ^* при отображении $\zeta = \zeta(t)$, имеем

$$\sup_{\zeta \in L_\rho^*} |F(\zeta)| = \sup_{t \in s_\rho^*} |f(t)| \leqslant \sup_{t \in s_\rho} |f(t)| = M(\rho).$$

Применяя к функции $F(\zeta)$ в области K_ρ^* теорему о двух константах (теорема 4.1) с L_ρ^* в качестве E, $m = M(\rho)$ и $M = 1$, получаем

$$\ln |F(\zeta_0)| \leqslant \omega(\zeta_0, L_\rho^*, K_\rho^*) \ln M(\rho) \qquad (\zeta_0 = \zeta(t_0)). \tag{6.2}$$

Мы показали, что область K_ρ^* содержит полукруг $\operatorname{Re}\zeta > 0$, $|\zeta| < r(\rho)$, где $r(\rho) > C'\sigma(\rho)$. По принципу расширения области гармоническая мера $\omega(\zeta_0, L_\rho^*, K_\rho^*)$ не превосходит гармонической меры полуокружности относительно полукруга $\operatorname{Re}\zeta > 0$, $|\zeta| < r(\rho)$ (в той же точке). Последняя гармоническая мера была вычислена в примере 1 § 4, где получена для нее асимптотическая формула (для больших радиусов). Эта гармоническая мера равна

$$\frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\ln\frac{r(\rho)-i\zeta_0}{r(\rho)+i\zeta_0} \sim \frac{1}{r(\rho)}\frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\zeta_0 \qquad (r(\rho)\to\infty).$$

Поэтому при $\rho\to\infty$ и при фиксированном ζ_0 имеем в силу неравенства (6.1)

$$\omega(\zeta_0, L_\rho^*, K_\rho^*) \leqslant C_1\frac{1}{\sigma(\rho)},$$

а неравенство (6.2) даст нам

$$\ln|F(\zeta_0)| \leqslant C_1\frac{\ln M(\rho)}{\sigma(\rho)}.$$

Согласно условию теоремы существует последовательность $\rho_n\to\infty$, для которой $\dfrac{\ln M(\rho_n)}{\sigma(\rho_n)}\to 0$. Поэтому, полагая в последнем неравенстве $\rho=\rho_n$ и переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем $\ln|F(\zeta_0)| \leqslant 0$. Отсюда следует, что $|f(t_0)| \leqslant 1$, и поскольку t_0 — любая точка области G, мы приходим к утверждению теоремы. □

Заметим, что в случае, если область G имеет простой вид (полуплоскость, угол, полоса) или даже лежит в области такого вида, то предварительные рассуждения с неравенством Альфорса не нужны, и доказательство становится совершенно элементарным.

Впрочем, теорему 6.1 стоит отдельно сформулировать для частного случая, когда область G — это угол, так как этот частный случай очень употребителен.

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в угле раствора π/α и непрерывна вплоть до его сторон. Если $|f(z)| \leqslant M$ на сторонах угла, то или $|f(z)| \leqslant M$ и внутри угла, или

$$\ln\max_{|z|=\rho}|f(z)| > c^\alpha\rho^\alpha \qquad (\rho>\rho_0)$$

с некоторым $c>0$.

Действительно, для угла раствора $\frac{\pi}{\alpha}$ имеем $s(\rho) = \frac{\pi\rho}{\alpha}$ и $\sigma(\rho) = \rho^{\alpha}$, так что теорема 6.1 сразу дает нам требуемый результат. Пример функции $e^{cz^{\alpha}}$ в угле $|\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha}$ показывает, что существенное усиление этого результата невозможно. □

Следующие теоремы относятся к вопросу о допустимой скорости стремления к нулю функции $f(z)$, голоморфной в некоторой области, когда точка z стремится к граничной точке этой области. Об этом немного говорилось в предыдущем параграфе в связи с теоремой 5.1. Сейчас мы придадим результату, полученному в этой теореме, более наглядный вид за счет некоторых упрощений, но зато распространим его на любые области. □

Начнем с того, что сформулируем теорему 5.1 в упрощенной форме:

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге $|z| < 1$ и непрерывна в круге $|z| \leqslant 1$. Если

$$\int_0^{2\pi} \ln |f(e^{i\varphi})| \, d\varphi = -\infty,$$

то $f(z) \equiv 0$.

Это утверждение действительно является простым следствием теоремы 5.1, так как $f(z)$ ограничена (а значит, и ограниченного вида) в круге $|z| < 1$, а из непрерывности $f(z)$ в круге $|z| \leqslant 1$, очевидно, следует, что

$$\lim_{\rho \to 1} \int_0^{2\pi} \ln |f(\rho e^{\varphi})| \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \ln |f(e^{i\varphi})| \, d\varphi = -\infty.$$

При помощи конформного отображения этот результат легко переносится на другие области. Докажем аналогичный результат для полуплоскости, придав ему еще более простой и удобный вид.

Теорема 6.2. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в полуплоскости* $\operatorname{Re} z > 0$, *непрерывна в полуплоскости* $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ *и удовлетворяет неравенству*

$$\ln |f(z)| < -\nu(|z|) \qquad (\operatorname{Re} z \geqslant 0),$$

где $\nu(t)$ — *непрерывная положительная функция при* $t \geqslant 0$. *Если* $\int\limits_1^\infty \frac{\nu(t)}{t^2}\,dt = +\infty$, *то* $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. Функция $z = \frac{1+w}{1-w}$ конформно отображает круг $|w| < 1$ на полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$. Поэтому функция $F(w) = f\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$ голоморфна в круге $|w| < 1$ и непрерывна при $|w| \leqslant 1$. Имеем

$$\int\limits_0^{2\pi} \ln|F(e^{i\varphi})|\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln\left|f\left(\frac{1+e^{i\varphi}}{1-e^{i\varphi}}\right)\right| d\varphi < -2\int\limits_0^{\pi} \nu\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi.$$

Но

$$\int\limits_0^{\pi} \nu\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \nu(\operatorname{tg}\theta)\,d\theta =$$

$$= 2\int\limits_0^{\infty} \frac{\nu(t)\,dt}{1+t^2} \geqslant 2\int\limits_1^{\infty} \frac{\nu(t)\,dt}{1+t^2} \geqslant 4\int\limits_1^{\infty} \frac{\nu(t)}{t^2}\,dt = +\infty.$$

По теореме 5.1 имеем $F(w) \equiv 0$, а значит, и $f(z) \equiv 0$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается и следующая теорема.

Теорема 6.3. *Пусть функция* $f(z)$ *голоморфна в полосе* $|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}$, *непрерывна в полосе* $|\operatorname{Im} z| \leqslant \frac{\pi}{2}$ *и удовлетворяет неравенству*

$$\ln|f(x+iy)| < -\nu(x) \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right),$$

где $\nu(x)$ — *положительная непрерывная функция. Если*

$$\int\limits_0^{\infty} \nu(x)\,e^{-x}\,dx = +\infty, \quad \text{то} \quad f(z) \equiv 0.$$

С помощью неравенства Варшавского (см. теорему 6.2 гл. V) можно получить результат подобного рода для более или менее произвольной полосообразной области. Именно:

Пусть D — область, определяемая неравенствами

$$\varphi(x)-\frac{1}{2}\theta(x)<y<\varphi(x)+\frac{1}{2}\theta(x) \qquad (-\infty<x<\infty),$$

где $\varphi(x)$ и $\theta(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции, относительно которых мы будем предполагать, что

$$|\varphi'(x)|<M, \quad |\theta'(x)|<M, \quad \int_0^\infty \frac{\theta'^2(x)}{\theta(x)}\,dx<+\infty.$$

Теорема 6.4. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D, непрерывна в $\overline{D}$ и удовлетворяет неравенству*

$$\ln|f(x+iy)|<-\nu(x) \quad (x+iy\in D),$$

где $\nu(x)$ — положительная непрерывная неубывающая функция. Обозначим

$$\sigma(x)=\pi\int_0^x \frac{1+\varphi'^2(t)}{\theta(t)}\,dt.$$

Если

$$\int_0^\infty \nu(x)\,e^{-\sigma(x)}\frac{dx}{\theta(x)}=+\infty,$$

то $f(z)\equiv 0$.

Доказательство. Обозначим через $w(z)$ функцию, конформно отображающую область D на полосу $|\operatorname{Im} w|<\frac{\pi}{2}$ так, что $\operatorname{Re} w\to\pm\infty$ при $\operatorname{Re} z\to\pm\infty$. При сделанных предположениях относительно $\varphi(x)$ и $\theta(x)$ справедливо неравенство Варшавского (см. теорему 6.2 гл. V). В наших обозначениях это неравенство принимает вид

$$\operatorname{Re} w(x+iy)-\operatorname{Re} w(a+b)<\sigma(x)-\sigma(a)+C' \qquad (x>a)$$

(постоянная C' не зависит от x, y, a, b). Полагая $a=0$, $C=C'+\sup\limits_b \operatorname{Re} w(ib)$, мы приводим это неравенство к виду

$$\operatorname{Re} w(x+iy)<\sigma(x)+C \qquad (x>0). \tag{6.3}$$

Обозначим через $z(w)$ функцию, обратную к $w(z)$, а

$$x(u)=\min \operatorname{Re} z(w) \qquad \left(\operatorname{Re} w=u,\ |\operatorname{Im} w|\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

Взяв в неравенстве (6.3) в качестве w то самое значение, для которого $\operatorname{Re} w = u$, $\operatorname{Re} z(w) = x(u)$, получим

$$u < \sigma(x(u)) + C. \tag{6.4}$$

Теперь рассмотрим функцию $F(w) = f(z(w))$ в полосе $|\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2}$. Она голоморфна в этой полосе и непрерывна в замкнутой полосе. Кроме того, она удовлетворяет неравенству

$$\ln |F(u+iv)| = \ln |f(z(u+iv))| < -\nu(x(u)),$$

поскольку $\nu(x)$ — неубывающая функция. Из неравенства (6.4) имеем $x(u) < k(u-c)$, где $k(u)$ — функция, обратная к $\sigma(x)$ (ясно, что $k(u)$ — неубывающая функция и что $k(u) \to +\infty$ при $u \to +\infty$). Поэтому

$$\ln |F(u+iv)| < -\nu(k(u-c))$$

и

$$e^c \int_0^\infty \nu(k(u-c))\, e^{-u}\, du =$$

$$= \int_0^\infty \nu(x)\, e^{-\sigma(x)} \sigma'(x)\, dx > \int_0^\infty \nu(x)\, e^{-\sigma(x)} \frac{dx}{\theta(x)} = +\infty.$$

По теореме 6.3 имеем $F(w) \equiv 0$, а значит, и $f(z) \equiv 0$. Теорема доказана. $\square$

Мы привели наиболее сильные результаты для двух разновидностей теорем, которые обычно называются *теоремами Фрагмена — Линделефа*. Эти теоремы не исчерпывают всего многообразия теорем Фрагмена — Линделефа, используемых в приложениях *).

*) Много теорем такого рода имеется в [13].

Глава IX

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

В этой главе доказываются теоремы о существовании конформного отображения данной области на ту или иную каноническую область, а также теоремы о соответствии границ при конформном отображении. Эти теоремы уже неоднократно использовались без доказательств. Оказывается, что теоремы о существовании конформных отображений удобнее доказывать для многосвязных областей. Правда, при этом возникают алгебраические вопросы, представляющие интересные связи теории аналитических функций с теорией групп. С помощью теорем о существовании конформного отображения мы решим также задачу Дирихле для произвольной конечносвязной области.

§ 1. Существование конформного отображения

В конце § 1 гл. V была сформулирована теорема Римана о существовании конформного отображения односвязной области на круг. Эта теорема была оставлена без доказательства, так как сейчас будет доказана более общая теорема о существовании конформного отображения.

Будем говорить теперь об отображениях области D функциями, уже не голоморфными, а аналитическими в этой области. Для случая, когда область D односвязна, между этими отображениями нет никакой разницы, так как по теореме о монодромии функция, аналитическая в односвязной области, голоморфна в этой области. Для многосвязных областей разница между этими отображениями довольно велика, так как функция, аналитическая в многосвязной области, вообще говоря, многозначна.

Надо сказать, что сама постановка задачи о конформном отображении области многозначными аналитическими функциями несколько искусственна. Естественная задача состоит в построении взаимно однозначного конформного отображения произвольной римановой поверхности. Однако и постановка этой задачи, и тем более ее решение потребовали бы значительно больших усилий. В то же время рассматриваемая задача, хотя и не вполне естественна, обладает важными преимуществами. Именно, она просто ставится, не требует большого количества дополнительных сведений, ее решение не сложнее, чем решение классической задачи о конформном отображении односвязной области, и, наконец, область применимости полученного результата значительно шире, чем область применимости теоремы Римана.

Придется все же несколько дополнить основные сведения об отображениях, изложенные в § 1 гл. V.

Пусть $F(z)$ — функция, аналитическая в области D. *Образом области D при отображении $w = F(z)$* назовем совокупность значений, принимаемых в области D всеми элементами аналитической в D функции $F(z)$. Образ D обозначим $F(D)$.

Аналитическую функцию будем, как правило, обозначать прописной буквой, а ее исходный элемент — той же буквой, но строчной.

Пусть дано $w_0 \in F(D)$ и пусть $F_1(z), \ldots, F_s(z)$ — все те элементы аналитической в области D функции $F(z)$, определенные в окрестностях точек $z_1 \in D, \ldots, z_s \in D$ соответственно, для которых $F_k(z_k) = w_0$. (Среди точек z_k могут быть одинаковые, но тогда соответствующие элементы не должны тождественно совпадать.) Если ν_k — кратность нуля $F_k(z) - w_0$ в точке z_k и $\nu_1 + \nu_2 + \ldots \ldots + \nu_s = m$, то будем говорить, что *значение w_0 принимается функцией $F(z)$ в области D ровно m раз.*

Если каждое значение $w \in F(D)$ принимается функцией $F(z)$, аналитической в области D, ровно один раз, то будем говорить, что функция $F(z)$ *однолистна в области D.* $\square$

Перечислим наиболее важные свойства отображений аналитическими функциями и свойства однолистных аналитических функций.

Свойство 1. *Пусть множество G_m состоит из значений w, принимаемых функцией $F(z)$ в области D не менее m раз. Тогда G_m — открытое множество. В частности, образом области является область.*

Свойство 2. *Пусть функция $F(z)$ аналитична и однолистна в области D, а функция $G(z)$ аналитична и однолистна в области $F(D)$. Тогда функция $G(F(z))$ аналитична и однолистна в области D.*

Свойство 3. *Для однолистности в D аналитической в D функции $F(z)$ необходимо и достаточно, чтобы в области $F(D)$ существовала голоморфная функция $\varphi(w)$, обратная к $F(z)$, т. е. такая, что $\varphi(F(z)) \equiv z$.*

Все перечисленные свойства доказываются совершенно аналогично соответствующим свойствам голоморфных функций (см. § 1 гл. V). □

Скажем еще несколько слов о сходимости последовательностей функций, аналитических в области.

Пусть дана последовательность функций $\{F_n(z)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, аналитических в области D, и пусть $f_n(z)$ — исходные элементы функций $F_n(z)$, определенные в окрестности одной и той же точки, скажем $z_0 \in D$. Пусть, далее, L — любая кривая, выходящая из точки z_0 и лежащая в области D, а $\Phi_n(z, L)$ — аналитическая на кривой L функция, полученная аналитическим продолжением элемента $f_n(z)$ вдоль кривой L. Будем говорить, что последовательность $\{F_n(z)\}$ *равномерно сходится внутри области D*, если при любом выборе кривой L последовательность $\{\Phi_n(z, L)\}$ равномерно сходится на этой кривой. □

Перечислим нужные нам свойства равномерно сходящихся последовательностей аналитических функций.

Свойство 1. *Предел последовательности аналитических в D функций, равномерно сходящейся внутри D, является аналитической в D функцией.*

Свойство 2. *Если $\{F_n(z)\}$ — последовательность функций, аналитических в области, и*

$$|F_n(z)| \leqslant M \qquad (z \in D)$$

(постоянная M не зависит ни от n, ни от выбора элемента), то из последовательности $\{F_n(z)\}$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся внутри D.

Свойство 3. *Пусть $\{F_n(z)\}$ — последовательность функций, аналитических в D, равномерно сходящаяся к функции $F(z)$, отличной от тождественной постоянной. Если каждая из функций $F_n(z)$ любое значение w при-*

нимает не более m раз, то и функция $F(z)$ обладает тем же свойством.

В частности:

Предел равномерно сходящейся внутри D последовательности аналитических однолистных функций тоже является аналитической однолистной функцией или тождественной постоянной.

Свойства 1 и 2 доказываются по одному образцу со ссылкой на соответствующую теорему для голоморфных функций. В качестве образца приведем доказательство свойства 2.

Возьмем точку $z_0 \in D$ и последовательность $\{f_n(z)\}$ исходных элементов функций $F_n(z)$. Функции $f_n(z)$ голоморфны и ограничены в окрестности точки z_0. По принципу компактности голоморфных функций (теорема 4.6 гл. II) из последовательности $\{f_n(z)\}$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся в указанной окрестности точки z_0. Затем возьмем какую-либо кривую L и выберем на ней точку z_1, настолько близкую к z_0, чтобы функции $\Phi_n(z, L)$ были голоморфны в окрестности точки z_1, имеющей общую часть с окрестностью точки z_0. Покажем, что выбранная подпоследовательность $\{\Phi_{n_k}(z, L)\}$ равномерно сходится и в окрестности точки z_1. По принципу компактности из этой подпоследовательности можно выбрать сходящуюся в данной окрестности точки $_1$ подпоследовательность. Но предел этой подпоследовательности в общей части окрестностей точек z_0 и z_1 обязан совпадать с пределом последовательности $\{f_{n_k}(z)\}$. Значит, пределы всех подпоследовательностей последовательности $\{\Phi_{n_k}(z, L)\}$ должны быть одинаковыми. Отсюда следует существование предела всей последовательности $\{\Phi_{n_k}(z, L)\}$.

Выбирая затем точку $z_2 \in L$ и т. д., убеждаемся в том, что последовательность $\{\Phi_{n_k}(z, L)\}$ равномерно сходится на всей кривой. Поскольку выбор подпоследовательности n_k не зависит от выбора кривой L, то подпоследовательность $\{F_{n_k}(z)\}$ равномерно сходится внутри D.

Доказательство последнего свойства даже проще. Пусть $\tilde{f}_1(z), \ldots, \tilde{f}_s(z)$ — те элементы предельной функции последовательности $\{F_n(z)\}$, для которых $\tilde{f}_k(z) - w$ имеет нуль в точке $z = z_k$. Применяя к каждому из этих элементов теорему 6.3 гл. IV, получаем рассматриваемое утверждение. $\square$

Если функция $F(z)$ аналитична и однолистна в области D, то мы будем говорить, что она совершает *конформное отображение области D на область $F(D)$*.

Если область D односвязна, то наше новое понятие конформного отображения совпадает с прежним, так как по теореме о монодромии функция $f(z)$ голоморфна в D. Если же область D многосвязна, то это понятие отличается от прежнего. В случаях, когда речь будет идти об отображении многосвязных областей голоморфными однолистными функциями, мы будем подчеркивать это, употребляя термин: *взаимно однозначное конформное отображение*. $\square$

Приведем простейшие примеры конформных отображений многосвязных областей.

Пример 1. Рассмотрим отображение кольца $r < |z| < R$ функцией $w = \ln z$, аналитической в этом кольце.

Заметим прежде всего, что функция $\ln z$ однолистна в кольце, так как она имеет обратную функцию $z = e^w$, голоморфную во всей плоскости. Таким образом, отображение $w = \ln z$ является конформным отображением, и нужно найти лишь образ кольца.

Проведем в кольце разрез $(-R, -r)$. В разрезанном кольце функция $\ln z$ допускает выделение голоморфной ветви. Посмотрим, куда отображает разрезанное кольцо каждая из голоморфных ветвей $\ln z$. Вспоминая отображения элементарными функциями, видим, что образом разрезанного кольца является прямоугольник

$$\ln r < \operatorname{Re} w < \ln R, \quad -\pi + 2\pi k < \operatorname{Im} w < \pi + 2\pi k,$$

где целое число k определяется выбором голоморфной ветви $\ln z$. В совокупности все эти прямоугольники с добавленными образами разреза образуют полосу $\ln r < \operatorname{Re} w < \ln R$, которая и является образом кольца при отображении $w = \ln z$.

Заметим, что конформным отображением двухсвязной области — кольца — оказалась односвязная область — полоса. Это оказалось возможным благодаря тому, что конформное отображение аналитической функцией не является взаимно однозначным отображением. Наше конформное отображение можно рассматривать как взаимно однозначное отображение на полосу части римановой поверхности логарифма, лежащей над кольцом, а это — односвязная область.

Пример 2. Найдем конформное отображение круга $|z|<1$ с выколотой точкой $z=a$, $0<|a|<1$, на круг $|w|<1$, переводящее точку $z=0$ в точку $w=0$.

Сначала с помощью дробно-линейного отображения переведем круг $|z|<1$ с выколотой точкой $z=a$ в круг $|\zeta|<1$ с выколотым центром, т. е. в кольцо $0<|\zeta|<1$. Это делается с помощью функции $\zeta=\dfrac{a-z}{1-z\bar{a}}$.

Теперь воспользуемся результатом предыдущего примера и с помощью функции $t=\ln\zeta$ конформно отобразим кольцо $0<|\zeta|<1$ на полосу, которая в рассматриваемом случае вырождается в полуплоскость $\operatorname{Re} t<0$. Выясним, куда переходит в этой полуплоскости точка $z=0$. Поскольку $t(z)=\ln\dfrac{a-z}{1-z\bar{a}}$, то $t(0)=\ln a$, причем для $\ln a$ можно взять любое значение.

Чтобы получить искомое отображение, остается перевести дробно-линейным отображением полуплоскость $\operatorname{Re} t<0$ в круг $|w|<1$, а точку $t=\ln a$ в точку $w=0$. Это делается с помощью функции $w=\dfrac{t-t(0)}{t+\overline{t(0)}}$. Окончательное отображение имеет вид

$$w=w(z)=\frac{\ln\dfrac{a-z}{1-z\bar{a}}-\ln a}{\ln\dfrac{a-z}{1-z\bar{a}}+\overline{\ln a}}.$$

В заключение найдем еще $w'(0)$ для того элемента отображающей функции $w(z)$, для которого $w(0)=0$.

Имеем $w'(0)=\dfrac{1-|a|^2}{a}\,\dfrac{1}{2\ln|a|}$. Нетрудно проверить, что $|w'(0)|>1$ $(0<|a|<1)$.

Теперь перейдем к основной цели настоящего параграфа — к теореме о существовании конформного отображения. Сначала докажем теорему в несколько ослабленной формулировке.

Теорема 1.1. *Любую область комплексной плоскости, имеющую хотя бы одну внешнюю точку, можно конформно отобразить на единичный круг.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что точка $z=0$ является внутренней, а точка $z=\infty$ — внешней точкой области, так как этого всегда можно добиться, сделав дробно-линейное отображение.

Функцию $\Phi(z)$, конформно отображающую область (обозначим ее D) на круг $|w|<1$, мы будем строить как решение следующей экстремальной задачи:

Среди функций $F(z)$, аналитических и однолистных в области D и удовлетворяющих условиям

$$F(0)=0, \quad |F(z)|\leqslant 1 \quad (z\in D) \tag{1.1}$$

(первое условие относится к исходному элементу функции $F(z)$, второе — ко всем ее элементам), найти ту, для которой значение $|f'(0)|$ (для исходного элемента) является наибольшим.

Обозначим для удобства через $S(D)$ множество тех функций, среди которых ищем экстремальную.

Нужно доказать два факта:

1. В множестве $S(D)$ существует экстремальная функция.

2. Экстремальная функция совершает искомое отображение.

Начнем с доказательства утверждения 1.

Заметим, во-первых, что множество $S(D)$ непусто, так как D — ограниченная область и функция $F(z)=cz$ при достаточно малом c входит в $S(D)$. (Напомним, что $z=\infty$ — внешняя точка D.)

Во-вторых, заметим, что для всех функций из $S(D)$ значения $|f'(0)|$ ограничены. Действительно, область D содержит некоторый круг $|z|\leqslant\rho$ (точка $z=0$ является внутренней точкой D). Исходный элемент $f(z)$ любой функции $F(z)\in S(D)$ является голоморфной в этом круге функцией. Поэтому

$$f'(0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho}\frac{f(z)}{z^2}\,dz.$$

Переходя к модулям и вспоминая, что $|F(z)|\leqslant 1$ для $F(z)\in S(D)$, получаем $|f'(0)|\leqslant\frac{1}{\rho}$. Теперь обозначим

$$\mu=\sup_{F\in S(D)}|f'(0)|.$$

По определению точной верхней грани существует последовательность

$$F_n(z)\in S(D), \quad |F_n'(0)|>\mu-\frac{1}{n} \quad (n=1,2,\ldots).$$

Поскольку $|F_n(z)| \leqslant 1$ $(z \in D)$, из последовательности $\{f_n(z)\}$ согласно свойству 2 последовательностей аналитических функций можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Предел этой подпоследовательности обозначим через $\Phi(z)$. Согласно свойству 3 имеем $\Phi(z) \in \in S(D)$, так как $|\Phi'(0)| \geqslant \mu$, а значит, $\Phi(z)$ отлична от тождественной постоянной. Следовательно,

$$\Phi(z) \in S(D), \quad |\Phi'(0)| = \mu,$$

т. е. построенная функция $\varphi(z)$ является экстремальной.

Перейдем к доказательству утверждения 2.

Поскольку экстремальная функция $\Phi(z)$ однолистна и аналитична в области D, то она совершает конформное отображение области D на область $\Phi(D)$. Ввиду условия $|\Phi(z)| \leqslant 1$ $(z \in D)$ область $\Phi(D)$ лежит в круге $|w| < 1$. Покажем, что из экстремальности функции $\Phi(z)$ следует, что область $\Phi(D)$ совпадает с кругом $|w| < 1$.

Действительно, допустим противное. Тогда область $\Phi(D)$ имеет хотя бы одну граничную точку $w = a$, лежащую в круге $|w| < 1$.

Рассмотрим функцию $F(z) = W(\Phi(z))$, где $W(z)$ — функция примера 2, конформно отображающая круг $|z| < 1$ с выколотой точкой $z = a$ на круг $|w| < 1$, причем $w(0) = 0$. Согласно свойству 2 однолистных функций $F(z)$ аналитична и однолистна в D. Условия (1.1) для нее тоже выполнены, так что $F(z) \in S(D)$. Но для исходных элементов

$$f'(0) = w'(0)\varphi'(0), \quad |f'(0)| = |\varphi'(0)|\ |w'(0)|,$$

а мы видели, что $|w'(0)| > 1$. Значит, $|f'(0)| > |\varphi'(0)|$, а это противоречит условию, что $\Phi(z)$ — экстремальная функция. Полученное противоречие показывает, что область $\Phi(D)$ совпадает с кругом $|w| < 1$. Теорема доказана. $\square$

Полная формулировка теоремы о существовании конформного отображения такова:

Теорема 1.1 *. *Любую область комплексной плоскости, имеющую более двух граничных точек, можно конформно отобразить на единичный круг.*

Для доказательства этой теоремы достаточно построить функцию, конформно отображающую расширенную комплексную плоскость с тремя выколотыми точками на единичный круг. Действительно, если такая функция

$\zeta(z;\ a,\ b,\ c)$ (здесь a, b, c — выколотые точки) построена, то любую область D, граница которой содержит точки a, b, c, отображаем функцией $\zeta=\zeta(z;\ a,\ b,\ c)$ на область D', лежащую в круге $|\zeta|<1$. Область D' отображаем на круг $|w|<1$ по теореме 1.1 и получаем искомое отображение области D. Построение функции $\zeta(z;\ a,\ b,\ c)$, конформно отображающей плоскость с тремя выколотыми точками на единичный круг, является довольно сложной задачей. Этому построению будет посвящен § 5.

Отметим, что теорема 1.1* уже не может быть усилена. Двух граничных точек недостаточно, чтобы область конформно отображалась на единичный круг (это следует из теоремы 2.4 гл. IV). Плоскость с двумя выколотыми точками $z=a$ и $z=b$ конформно отображается на всю конечную плоскость функцией $w=\ln\frac{z-a}{z-b}$ (см. пример 1). $\square$

Осталось еще решить вопрос о единственности конформного отображения.

Теорема 1.2. *Пусть a — произвольная точка области D, а θ — любое действительное число. Существует единственная функция $W(z)$, конформно отображающая область D на круг $|w|<1$ и удовлетворяющая условиям* $w(a)=0$, $\arg w'(a)=\theta$ (для исходного элемента).

Доказательство. Пусть $W_1(z)$ — вторая функция, удовлетворяющая тем же условиям. Обозначим через $z(w)$ функцию, обратную к $W(z)$, и рассмотрим функцию $g(w)=W_1(z(w))$. Функция $g(w)$ аналитична, а по теореме о монодромии и голоморфна в круге $|w|<1$ (мы выбираем ветвь аналитической функции, получающуюся аналитическим продолжением исходного элемента).

Очевидно, что функция $g(w)$ удовлетворяет неравенству

$$|g(w)|\leqslant 1 \quad (|w|<1).$$

Кроме того, $g(0)=0$ и

$$g'(0)=w_1'(a)\,z'(0)=\frac{w_1'(a)}{w'(a)},\qquad \arg g'(0)=0.$$

Без ограничения общности можем считать, что $|w'(a)|\leqslant$ $\leqslant|w_1'(a)|$, так как в противном случае мы поменяли бы ролями $w(z)$ и $w_1(z)$. Следовательно, функция $g(w)$ голоморфна в круге $|w|<1$ и удовлетворяет условиям

$$|g(w)| \leqslant 1 \quad (|w|<1), \quad g(0)=0, \quad |g'(0)| \geqslant 1.$$

Рассмотрим функцию $\psi(w)=\frac{g(w)}{w}$. Она голоморфна при $|w|<1$, так как $g(0)=0$, и $\psi(0)=g'(0)\geqslant 1$. С другой стороны, $\overline{\lim\limits_{|w|\to 1}}|\psi(w)|=\overline{\lim\limits_{|w|\to 1}}|g(w)|\leqslant 1$. По принципу максимума модуля аналитической функции (см. § 2 гл. VIII) это возможно лишь в случае, если $|\psi(w)|\equiv 1$. Это в свою очередь возможно лишь при условии, что $\psi(w)\equiv e^{i\alpha}$, а так как $\arg\psi(0)=0$, то мы получаем $\psi(w)\equiv 1$ и $g(w)\equiv w$. Следовательно, $W_1(z)\equiv W(z)$, и теорема доказана.

Следствие. *Пусть $w_1(z)$ и $w_2(z)$ — исходные элементы двух аналитических в области D функций, конформно отображающих D на круг $|w|<1$ (эти элементы мы считаем определенными в окрестности одной и той же точки). Тогда $w_2(z)=T(w_1(z))$, где $T(w)$ — дробно-линейное отображение, переводящее круг $|w|<1$ в себя.*

Действительно, функция $W_1(z_2(w))=T(w)$, где $z_2(w)$ — функция, обратная к $W_2(z)$, совершает конформное отображение круга $|w|<1$ на себя. Поскольку теорема Римана нами уже доказана, можно применить теорему 2.2 гл. V, что и даст искомое утверждение.

§ 2. Соответствие границ при конформном отображении

Прежде чем говорить о вопросах, связанных со спецификой конформных отображений многосвязных областей аналитическими функциями, надо оплатить еще один старый долг. Именно, мы должны доказать теорему о соответствии границ, которую сформулировали в конце § 1 гл. V.

Напомним понятие достижимой граничной точки, введенное в § 1 гл. IV.

Пусть D — произвольная ограниченная область, а L — простая кривая, лежащая в D, за исключением ее конца ζ, лежащего на границе области D. Совокупность (ζ, L) определяет *достижимую граничную точку области D*.

При этом считается, что (ζ, L) и (ζ, L') определяют одну и ту же достижимую граничную точку, если части кривых L и L', лежащие в любой окрестности точки ζ, попадают в одну и ту же связную часть пересечения этой окрестности с областью D. $\square$

Уже говорилось, что для областей, ограниченных кусочно гладкими кривыми, понятие достижимой граничной точки совпадает с понятием точки граничной кривой, т. е. каждой точке границы области отвечает не меньше одной достижимой граничной точки. В случае произвольных областей могут существовать точки границы, не являющиеся достижимыми граничными точками. Рассмотрим пример.

Пусть область D — это квадрат

$$0 < \operatorname{Re} z < 2, \ |\operatorname{Im} z| < 1,$$

с разрезами по вертикальным отрезкам $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + i\right)$, $n = 1, 2, \ldots$

Каждой точке любого разреза (кроме их свободных концов) отвечают две достижимые граничные точки области. Каждой точке отрезка $(0, i)$ не отвечает ни одна достижимая точка. Всем остальным точкам границы отвечает по одной достижимой граничной точке. $\square$

Далее удобнее будет немного иное определение достижимой граничной точки, определим ее не кривыми, ведущими в нее, а связными частями окрестностей, в которых лежат эти кривые. (Разница между этими определениями примерно та же, что и разница между определениями непрерывности в точке по Гейне и по Коши.)

Пусть ζ — точка границы D, а система областей $P(\zeta, \rho)$, $0 < \rho < \infty$, обладает следующими свойствами:

1. Область $P(\zeta, \rho)$ — связная часть пересечения круга $|z - \zeta| < \rho$ с областью D.

2. При любом $\rho > 0$ область $P(\zeta, \rho)$ непуста и имеет точку $z = \zeta$ своей граничной точкой.

3. При $\rho' > \rho$ область $P(\zeta, \rho)$ входит в область $P(\zeta, \rho')$.

Каждая система областей $P(\zeta, \rho)$ определяет ровно одну достижимую граничную точку области D.

Предоставляем читателю самому проверить эквивалентность этого определения предыдущему. $\square$

С помощью нового определения легко определить понятие предела функции в достижимой граничной точке:

Мы скажем, что функция $F(z)$, определенная в области D, *имеет пределом число A, когда z стремится к до-*

стижимой граничной точке, определяемой системой $P(\zeta, \rho)$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что $|F(z) - A| < \varepsilon$ при $z \in P(\zeta, \delta)$. □

В основе доказательства теоремы о соответствии границ лежит следующая лемма, близкая по своему содержанию к теореме единственности 5.1 гл. VIII.

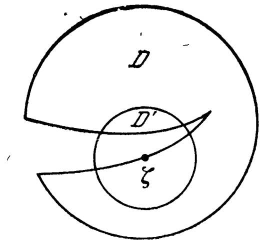

Рис. 10

Лемма 1. *Пусть функция* $f(z)$ *голоморфна и ограничена в конечной односвязной области* D, *а* ζ — *какая-либо точка границы области* D. *Если при стремлении* z *к любой точке границы* D, *лежащей в круге* $|z-\zeta| \leqslant r$, *имеем* $f(z) \to 0$, *то* $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть D' — какая-либо связная часть пересечения области D с кругом $|z - \zeta| < r$, а Γ — та часть границы D', которая не является границей D (т. е. состоит из дуг окружности $|z - \zeta| = r$). Ясно, что D' — односвязная область, имеющая точку ζ граничной (или внешней) точкой (см. рис. 10). Функция $f(z)$ непрерывна в $\overline{D'}$, если считать, что она равна нулю на части границы D', отличной от Γ.

Поскольку область D' односвязна и не содержит точку $z = \zeta$, функция $w = \sqrt{z - \zeta}$ голоморфна в D'. Обозначим через G образ D' при отображении $w = \sqrt{z - \zeta}$, а через γ — образ Γ. Область G лежит в круге $|w| < \sqrt{r}$, а γ — на окружности $|w| = \sqrt{r}$. Заметим, что по меньшей мере половина окружности $|w| = \sqrt{r}$ свободна от точек γ, так как при отображении $w = \sqrt{z - \zeta}$ вся окружность $|z - \zeta| = r$ (разрезанная в какой-либо точке) переходит лишь в половину окружности $|w| = \sqrt{r}$.

Рассмотрим в области G функцию $g(w) = f(\zeta + w^2)$. Функция $z = \zeta + w^2$, обратная к $w = \sqrt{z - \zeta}$, конформно отображает область G на область D'. Поэтому функция $g(w)$ голоморфна в G, непрерывна в $\overline{G}$ и равна нулю на части границы G, отличной от γ.

По принципу максимума для субгармонических функций функция $u(w) = \ln |g(w)|$ не превосходит любой гармонической в области G функции, если она не превосходит ее на границе G. Более того, поскольку на части границы G, отличной от γ, имеем $u(w) = -\infty$, то этой частью границы G можно не интересоваться. Поэтому функция $u(w)$ не превосходит гармонической в круге $|w| < \sqrt{r}$ функции $u_\varepsilon(w)$, которая определяется следующими граничными значениями на окружности $|w| = \sqrt{r}$: на той половине окружности $|w| = \sqrt{r}$, на которой нет точек γ, положим $u_\varepsilon(w) = \ln \varepsilon$, а на другой половине $u_\varepsilon(w) = \ln M$, где $M = \max\limits_{w \in \gamma} |g(w)|$.

Итак, при любом $\varepsilon > 0$ имеем неравенство $u(w) \leqslant \leqslant u_\varepsilon(w)$ $(w \in G)$. Функцию $u_\varepsilon(w)$ нетрудно найти в конечном виде, но еще проще заметить, что $u_\varepsilon(w) \to -\infty$ при $\varepsilon \to 0$ и при любом фиксированном $w \in G$. Следовательно, $u(w) \equiv -\infty$, откуда $g(w) \equiv 0$ и $f(z) \equiv 0$. Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть D — конечная односвязная область, $\varphi(z)$ — функция, конформно отображающая область D на область G, ограниченную простой замкнутой кривой C. Когда точка z стремится к достижимой граничной точке области D, точка $w = \varphi(z)$ стремится к некоторой точке кривой C, причем пределы, отвечающие разным достижимым точкам, различны.*

Доказательство. Возьмем систему $P(\zeta, \rho)$, определяющую достижимую граничную точку области D, и обозначим через $Q(\zeta, \rho)$ образ $P(\zeta, \rho)$ при отображении $w = \varphi(z)$. Области $Q(\zeta, \rho)$ лежат в области G и $Q(\zeta, \rho) \subset \subset Q(\zeta, \rho')$ при $\rho < \rho'$. Обозначим через E пересечение всех замкнутых областей $\overline{Q}(\zeta, \rho)$, $\rho > 0$. Множество E — это совокупность всех предельных точек функции $\varphi(z)$ при стремлении точки z к выбранной нами достижимой граничной точке. Так как отображение $w = \varphi(z)$ взаимно однозначно, то множество всех предельных точек $\varphi(z)$ при стремлении z ко всем точкам границы D совпадает с кривой C. Следовательно, множество E является частью кривой C. Далее, все $\overline{Q}(\zeta, \rho)$ являются связными замкнутыми множествами, так что и их пересечение — множество E — является связным замкнутым множеством. Связной замкнутой частью кривой C может быть или дуга этой кривой, или точка. Утверждение теоремы говорит, что E — это точка кривой C. Для доказательства рассмотрим в области G функцию $\psi(w)$, обратную к функции $\varphi(z)$. Она отображает область $Q(\zeta, \rho)$ на область $P(\zeta, \rho)$, так что при $w \in Q(\zeta, \rho)$ имеем $\psi(w) \in \in P(\zeta, \rho)$, т. е. $|\psi(w) - \zeta| < \rho$. Если множество E — это дуга кривой C, то все области $Q(\zeta, \rho)$ имеют эту дугу своей граничной дугой. Это значит, что для любой внутренней точки w_0 дуги E имеем

$$\psi(w) \to \zeta \qquad (w \to w_0,\ w \in G).$$

Применяя лемму 1 к функции $\psi(w) - \zeta$, получаем $\psi(w) \equiv \zeta$, что невозможно. Следовательно, множество E — это точка $w_0 \in C$, и предел функции $\varphi(z)$ при стремлении z к выбранной нами достижимой граничной точке существует и равен w_0.

Теперь покажем, что пределы функции $\varphi(z)$ в различных достижимых граничных точках различны. Пусть мы имеем две различные достижимые граничные точки области D. Проведем простую кривую, лежащую в D и имеющую концы в этих точках. Обозначим эту кривую через L, а ее образ при отображении $w = \varphi(z)$ через Γ. Если пределы функции $\varphi(z)$ в обеих достижимых граничных точках одинаковы, то Γ — простая замкнутая кривая, имеющая лишь одну общую точку с границей области G. Область, ограниченную кривой Γ, обозначим через G', а ее прообраз при отображении $w = \varphi(z)$ — через D'. Граница области D' состоит из кривой L (прообраз Γ) и из некоторой части границы D, скажем, Δ. Множество Δ не пусто, так как концы кривой L определяют разные достижимые граничные точки области D. Когда z стремится к любой точке множества Δ, функция $\varphi(z)$ стремится к w_0, где w_0 — та единственная общая точка кривой Γ и границы области G. На множестве Δ найдется точка границы D', которая лежит в $\overline{D}'$ вместе с некоторой своей окрестностью. Применяя лемму 1, получаем $\varphi(z) \equiv w_0$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что пределы функции $\varphi(z)$ в разных достижимых граничных точках различны. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть области D и G ограничены кусочно гладкими кривыми, а $\varphi(z)$ — функция, конформно отображающая область D на область G. Тогда функция $\varphi(z)$ непрерывна вплоть до границы области D.*

Без ограничения общности можно считать, что области D и G ограничены простыми кусочно гладкими кривыми, так как в противном случае мы могли бы разрезать их на конечное число частей такого рода. Для областей, ограниченных простыми кривыми, все точки границы находятся во взаимно однозначном соответствии с достижимыми граничными точками. По теореме 2.1 функция $\varphi(z)$ имеет предел в каждой точке границы.

Это означает, что функция $\varphi(z)$ непрерывна в $\overline{D}$. Отсюда и следует утверждение следствия. $\square$

Для непрерывности отображающей функции вплоть до границы области требуется только, чтобы отображаемые области были ограничены непрерывными кривыми. Этот результат тоже можно вывести из теоремы 2.1 примерно тем же путем, но используя довольно тонкие соображения теории множеств *).

Накладывая на кривые, ограничивающие области, дополнительные требования, можно получить дополнительные сведения о гладкости отображающей функции. Мы приведем сейчас одну теорему такого рода. Ее основой является следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть функция $w(z)$ конформно отображает круг $|z| < 1$ на область D, ограниченную гладкой кривой C. Если $h(\theta)$ — непрерывная функция, равная при каждом θ, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, углу наклона касательной к кривой C в точке $w(e^{i\theta})$, то*

$$\ln w'(z) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \left[h(\theta) - \theta - \frac{\pi}{2} \right] d\theta + C \qquad (2.1)$$

(в выборе ветви $\ln w'(z)$ и в выборе функции $h(\theta)$ имеется одинаковый произвол).

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g_\varepsilon(z) = \ln \frac{w(ze^{i\varepsilon}) - w(z)}{ze^{i\varepsilon} - z} \qquad (\varepsilon > 0).$$

Эта функция голоморфна в круге $|z| < 1$, так как в силу однолистности функции $w(z)$ числитель дроби обращается в нуль лишь вместе с знаменателем. Из следствия теоремы 2.1 вытекает, что функция $g_\varepsilon(z)$ при любом $\varepsilon > 0$ непрерывна в круге $|z| \leqslant 1$. Следовательно, ее можно восстановить по значениям ее мнимой части на окружности $|z| = 1$. (Для этой цели нужно применить формулу Шварца из § 3 гл. VIII к функции $\frac{1}{i} g_\varepsilon(z)$.)

При $\varepsilon \to 0$ имеем $g_\varepsilon(z) \to \ln w'(z) \quad (|z| < 1)$.

Выясним, что происходит с мнимой частью функции $g_\varepsilon(z)$ при $\varepsilon \to 0$ на окружности $|z| = 1$. Имеем

$$\operatorname{Im} g_\varepsilon(e^{i\theta}) = \arg \{w(e^{i(\theta+\varepsilon)} - w(e^{i\theta})\} - \arg(e^{i(\theta+\varepsilon)} - e^{i\theta}).$$

*) Некоторые результаты и довольно полную библиографию по этим вопросам можно найти в [10].

Первое слагаемое в правой части есть не что иное, как угол наклона хорды, соединяющей точки $w(e^{i(\theta+\varepsilon)})$ и $w(e^{i\theta})$ кривой C. Второе слагаемое легко вычисляется. Его предел при $\varepsilon \to 0$ равен $\pi/2+\theta$. Предел первого слагаемого при $\varepsilon \to 0$ равен углу наклона касательной к кривой C в точке $w(e^{i\theta})$, т. е. $h(\theta)$.

Поскольку переход к пределу при $\varepsilon \to 0$ является равномерным по θ, его можно выполнить под знаком интеграла. Это означает, что функция $\ln w'(z)$ может быть найдена по функции $h(\theta)-\frac{\pi}{2}-\theta$ с помощью формулы, восстанавливающей функцию, голоморфную в круге $|z|<1$, по значениям ее мнимой части на окружности $|z|=1$. Это и дает нам формулу (2.1). Лемма доказана.

Теорема 2.2. *Пусть функция $w(z)$ конформно отображает круг $|z|<1$ на область D, ограниченную гладкой кривой C, а $z(w)$ — функция, обратная к $w(z)$. Тогда функции $\arg w'(z)$ и $\arg z'(w)$ непрерывны, соответственно, в круге $|z|\leqslant 1$ и в области $\bar{D}$.*

Доказательство. Из леммы 2 следует, что функция $\arg w(z)$ является решением задачи Дирихле в круге $|z|<1$ с граничной функцией $h(\theta)-\frac{\pi}{2}-\theta$. По теореме 3.2 гл. VIII отсюда следует непрерывность $\arg w'(z)$. Непрерывность функции $\arg z'(w)$ следует из формулы

$$\arg z'(w)=\arg\frac{1}{w'(z(w))}=-\arg w'(z(w))$$

и из непрерывности функции $z(w)$. Теорема доказана. □

С помощью формулы (2.1) довольно просто получить и теоремы, утверждающие непрерывность функций $\ln z'(w)$ и $\ln w'(z)$, сделав некоторые дополнительные предположения относительно кривой C, ограничивающей область D.

Одним из наиболее употребительных результатов является так называемая *теорема Келлога*:

Пусть уравнение кривой C имеет вид $w=\varphi(s)$ (параметр s — это длина дуги кривой C). *Если функция $\varphi(s)$ удовлетворяет условию*

$$|\varphi'(s_1)-\varphi'(s_2)|<M|s_1-s_2|^{\alpha}\quad(0<\alpha<1),$$

то функции $w(z)$ и $z(w)$ удовлетворяют условиям

$$\left|\ln\frac{w'(z_1)}{w'(z_2)}\right|<M_1|z_1-z_2|^{\alpha}\qquad(|z_1|\leqslant 1,\ |z_2|\leqslant 1),$$

$$|w'(z_1)-w'(z_2)|<M_1|z_1-z_2|^\alpha \quad (|z_1|\leqslant 1,\ |z_2|\leqslant 1),$$

$$\left|\ln\frac{z'(w_1)}{z'(w_2)}\right|\leqslant M_2|w_1-w_2|^\alpha \qquad (w_1\in\overline{D},\ w_2\in\overline{D}),$$

$$|z'(w_1)-z'(w_2)|\leqslant M_2|w_1-w_2|^\alpha \quad (w_1\in\overline{D},\ w_2\in\overline{D}).$$

Доказательства теоремы Келлога и других теорем того же рода имеются в уже упоминавшейся монографии [10].

Теми же методами можно исследовать поведение отображающей функции на границе области, если гладкой является не вся граница, а только интересующая нас дуга. Поведение отображающей функции в угловых точках, остриях и т. д. исследуется с помощью неравенств Альфорса и Варшавского (см. § 6 гл. V).

§ 3. Группа автоморфизмов конформного отображения

В этом параграфе мы будем говорить о тех свойствах конформных отображений, которые становятся нетривиальными только для отображений многосвязных областей. Именно, мы покажем, что с каждым конформным отображением области D на круг K можно связать некоторую группу, элементами которой являются дробно-линейные отображения этого круга на себя. Когда область односвязна, эта группа состоит только из тождественного преобразования, но для многосвязной области D эта группа всегда нетривиальна, и ее изучение представляет интерес. Алгебраическая структура этой группы совпадает с алгебраической структурой фундаментальной группы области D (см. § 7 гл. I), так что мы начнем с напоминания некоторых сведений.

Зафиксируем в области D некоторую точку $z=a$ и рассмотрим всевозможные замкнутые кривые, лежащие в области и проходящие через точку (эту точку будем считать началом и концом каждой кривой). Символом $\Gamma_1\Gamma_2$ мы обозначаем кривую, полученную последовательным прохождением сначала кривой Γ_1, а затем кривой Γ_2. Совокупность всех кривых, гомотопных данной кривой Γ, будем называть *гомотопическим классом* и обозначать символом $[\Gamma]$. Для гомотопических классов определим операцию умножения с помощью равенства

$$[\Gamma_1]\,[\Gamma_2]=[\Gamma_1\Gamma_2]. \tag{3.1}$$

Множество всех гомотопических классов образует группу относительно этой операции умножения. Эта группа называется *фундаментальной группой области* D и обозначается символом $\pi_1(D)$. Единичным элементом фундаментальной группы является гомотопический класс, состоящий из кривых, гомотопных нулю в области. Этот гомотопический класс будем обозначать символом $\mathfrak{e}$. □

Введем еще одно понятие, которым мы раньше не пользовались. Пусть даны две группы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}^*$ и отображение

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\vartheta} \mathcal{G}^*.$$

Если отображение ϑ взаимно однозначно и если для любых двух элементов $\mathfrak{a}_1 \in \mathcal{G}$ и $\mathfrak{a}_2 \in \mathcal{G}^*$ справедливо равенство

$$\vartheta(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2) = \vartheta(\mathfrak{a}_1)\vartheta(\mathfrak{a}_2),$$

то группы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}^*$ называются *изоморфными*, а отображение ϑ — *изоморфизмом*. □

Построим некоторое отображение фундаментальной группы области D в группу дробно-линейных отображений круга $|w| < 1$ на себя.

Пусть $\Phi(z)$ — какая-либо функция, аналитическая в области D и конформно отображающая эту область на круг $|w| < 1$. Через $\varphi(z)$ мы обозначим исходный элемент этой функции, считая его заданным в той самой точке a, которая участвует в определении фундаментальной группы области D. Возьмем произвольную замкнутую кривую Γ, лежащую в области D и проходящую через точку a, и продолжим исходный элемент $\varphi(z)$ по этой кривой. В результате продолжения получим какой-то другой элемент $\varphi^*(z)$ нашей отображающей функции $\Phi(z)$. Аналитическую в области D функцию, порожденную исходным элементом $\varphi^*(z)$, обозначим через $\Phi^*(z)$. Ясно, что функция $\Phi^*(z)$ тоже конформно отображает область D на круг $|w| < 1$, так как множество значений функции, аналитической в области D, не зависит от того, какой ее элемент мы возьмем в качестве исходного. Согласно следствию из теоремы 1.2 существует такое дробно-линейное отображение $A(w)$ круга $|w| < 1$ на себя, что

$$\varphi^*(z) = A(\varphi(z)).$$

Таким образом, каждой замкнутой кривой Г, лежащей в области D и проходящей через точку a, мы ставим в соответствие некоторое дробно-линейное отображение $A(w)$ круга $|w| < 1$ на себя. В силу теоремы о монодромии (см. теорему 1.2 гл. III) это отображение $A(w)$ будет одним и тем же для всех кривых из одного гомотопического класса. Тем самым построено отображение фундаментальной группы $\pi_1(D)$ на некоторое множество дробно-линейных отображений круга $|w| < 1$ на себя.

Дробно-линейное отображение, отвечающее гомотопическому классу $\mathfrak{a}$, будем обозначать символом $A_{\mathfrak{a}}(w)$. Иногда будет удобнее подчеркивать зависимость отображения $A(w)$ от кривой Г. Тогда будем использовать символ $A_\Gamma(w)$, считая, что

$$A_\Gamma(w) = A_{[\Gamma]}(w).$$

Определим теперь «произведение» AB дробно-линейных отображений A и B равенством

$$AB(w) = A(B(w)).$$

Относительно такой операции «умножения» множество всех дробно-линейных преобразований образует группу. Кроме того, из способа определения отображения A_Γ очевидным образом вытекает, что для любых кривых Γ_1 и Γ_2 (из рассматриваемого нами класса) имеет место равенство

$$A_{\Gamma_1\Gamma_2} = A_{\Gamma_1}A_{\Gamma_2}. \tag{3.2}$$

Из равенств (3.1) и (3.2) сразу следует, что

$$A_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2} = A_{\mathfrak{a}_1}A_{\mathfrak{a}_2} \qquad (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \in \pi_1(D)). \tag{3.3}$$

Из равенства (3.3) и из того, что преобразование $A_{\mathfrak{a}}(w)$ определено для любого гомотопического класса $\mathfrak{a}$, следует, что множество всех дробно-линейных отображений $A_{\mathfrak{a}}$ образует группу относительно операции умножения дробно-линейных отображений.

Группу, состоящую из всех дробно-линейных отображений вида A, $\mathfrak{a} \in \pi_1(D)$, мы будем называть *группой автоморфизмов конформного отображения* $w = \Phi(z)$ *области* D *на круг* $|w| < 1$. Эту группу будем обозначать символом $\mathcal{G}(D, \Phi)$.

Ясно, что с тем же успехом можно было бы говорить о группе автоморфизмов конформного отображения $w = \Phi(z)$ на любой другой круг (или полуплоскость) K. □

Прежде чем формулировать результаты, относящиеся к группе автоморфизмов $\mathcal{G}(D, \Phi)$, докажем одну лемму, дающую удобный критерий принадлежности дробно-линейного преобразования A к группе $\mathcal{G}(D, \Phi)$. □

Обозначим через $f(w)$ функцию, обратную к отображающей функции $w = \Phi(z)$. Ввиду однолистности отображающей функции функция $f(w)$ голоморфна в круге $K = \Phi(D)$ и отображает этот круг на область D.

Лемма 1. *Для любого преобразования $A \in \mathcal{G}(D, \Phi)$ имеет место равенство $f(A(w)) \equiv f(w)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(z)$ — исходный элемент функции $\Phi(z)$. В достаточно малой окрестности точки $z = a$, согласно определению обратной функции, должно выполняться равенство $f(\varphi(z)) = z$. Производя в обеих частях этого равенства аналитическое продолжение по кривой Γ, получаем, что

$$f(A_\Gamma(\varphi(z))) = z$$

или, обозначив $\varphi(z) = w$, что

$$f(A_\Gamma(w)) = f(w).$$

Тем самым утверждение леммы доказано для точек w, лежащих в достаточно малой окрестности точки $w = \varphi(a)$. По принципу аналитического продолжения полученное равенство справедливо для всех w. Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Группа автоморфизмов $\mathcal{G}(D, \Phi)$ конформного отображения области D и фундаментальная группа $\pi_1(D)$ области D изоморфны.*

Доказательство. Определим отображение

$$\pi_1(D) \xrightarrow{\vartheta} \mathcal{G}(D, \Phi),$$

положив $\vartheta(\mathfrak{a}) = A_{\mathfrak{a}}$. Принимая во внимание, что равенство (3.3) уже доказано, надо доказать только, что отображение ϑ взаимно однозначно. Иными словами, нужно доказать, что дробно-линейное преобразование $A_\Gamma(w)$ может быть тождественным преобразованием лишь в случае, когда кривая Γ гомотопна нулю в области D.

Если A_Γ — тождественное преобразование, то аналитическое продолжение исходного элемента отображающей функции приводит к тому же исходному элементу. Это означает, что образом кривой Г при отображении $w=\Phi(z)$ будет некоторая замкнутая кривая C, лежащая в круге $K=\Phi(D)$. Это можно выразить и иначе: кривая Г будет образом замкнутой кривой C при отображении $z=f(w)$, где $f(w)$ — голоморфная функция, обратная к нашей отображающей функции $w=\Phi(z)$. Но кривая Г гомотопна нулю в круге $K=\Phi(D)$, так как она замкнута, а круг — односвязная область. Следовательно, и ее образ при непрерывном отображении $z=f(w)$ будет кривой, гомотопной нулю в области $D=f(K)$. Тем самым доказано требуемое утверждение, а вместе с ним и теорема. $\square$

Доказанная теорема позволяет свести изучение алгебраического строения группы автоморфизмов конформного отображения области D на единичный круг к изучению алгебраического строения фундаментальной группы области D. Последнее исследуется простыми геометрическими средствами. Напомним результаты, полученные нами в § 7 гл. I.

Пусть D — произвольная n-связная область с компонентами границы $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$. Компоненту γ_0 мы называем внешней, а остальные $n-1$ компонент γ_k — внутренними. С каждой внутренней компонентой γ_k мы связываем гомотопический класс $\mathfrak{a}_k=[C_k]$, где C_k — граница односвязной области, содержащей внутри себя компоненту γ_k и не содержащей других компонент границы области D (направление обхода границы считаем, как всегда, положительным относительно ограничиваемой области).

В § 7 гл. I было отмечено, что имеет место следующий результат.

Фундаментальная группа произвольной n-связной области D является свободной группой, порожденной $n-1$ образующими $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{n-1}$.

Это означает, что каждый элемент $\mathfrak{a}$ фундаментальной группы можно записать в виде

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_{i_1}^{m_1}\mathfrak{a}_{i_2}^{m_2}, \ldots, \mathfrak{a}_{i_r}^{m_r},$$

где m_s — произвольные целые числа, отличные от нуля, а индексы i_s принимают значения $1, 2, \ldots, n-1$, причем это представление единственно, если среди соседних индексов нет равных. (Последнюю часть этого утверждения не станем доказывать из-за громоздкости доказательства.) □

Из теоремы 3.1 и сформулированного выше утверждения немедленно получаем

Следствие. *Группа $\mathcal{G}(D, \Phi)$ автоморфизмов конформного отображения произвольной n-связной области D на круг является свободной группой с $n-1$ образующими $A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_{n-1}}$.* □

Нас интересует не только алгебраическая структура группы автоморфизмов, но и свойства дробно-линейных отображений, входящих в эту группу. Докажем два результата, характеризующих эти отображения довольно полно.

Теорема 3.2. *Пусть w_0 — произвольная фиксированная точка круга K, являющегося образом области D при отображении $w = \Phi(z)$. Множество точек $\{A(w_0)\}$, где A — всевозможные преобразования из группы автоморфизмов $\mathcal{G}(D, \Phi)$, может иметь предельные точки лишь на границе круга K.*

Доказательство. Преобразования $A \in \mathcal{G}(D, \Phi)$ отображают круг K на себя, и потому все точки $A(w_0)$ лежат в круге K. Рассмотрим функцию $f(w)$, обратную к нашей отображающей функции $w = \Phi(z)$. Она голоморфна в круге K и во всех точках $A(w_0)$ принимает одинаковые значения. Если бы эти точки имели предельную точку в круге K, то по теореме единственности функция $f(w)$ была бы тождественной постоянной, что невозможно. Теорема доказана. □

Прежде чем формулировать следующий результат, проведем некоторые рассмотрения, относящиеся к дробно-линейным преобразованиям.

Неподвижной точкой данного дробно-линейного преобразования $A(w)$ будем называть точку w^*, для которой $A(w^*) = w^*$.

Пусть $A(w) = \frac{aw+b}{cw+d}$. Тогда уравнение $A(w^*) = w^*$, определяющее неподвижные точки преобразования $A(w)$, можно записать в виде

$$c(w^*)^2 + (d-a)w^* - b = 0.$$

Для любого преобразования $A(w)$ это уравнение имеет два решения (если $c = 0$, добавляем бесконечное решение). Напишем легко проверяемые формулы, дающие общий вид дробно-линейного преобразования с заданными неподвижными точками.

Если неподвижные точки λ_1 и λ_2 дробно-линейного преобразования $A(w)$ конечны и различны, то для преобразования справедлива формула

$$\frac{A(w)-\lambda_1}{A(w)-\lambda_2}=q\frac{w-\lambda_1}{w-\lambda_2}, \tag{3.4}$$

где q — произвольная постоянная. Если $\lambda_2=\infty$, то эта формула принимает вид

$$A(w)-\lambda_1=q(w-\lambda_1). \tag{3.5}$$

Если обе неподвижные точки преобразования $A(w)$ равны одному и тому же конечному числу λ, то для преобразования справедлива формула

$$\frac{1}{A(w)-\lambda}=\frac{1}{w-\lambda}+Q, \tag{3.6}$$

где Q — произвольная постоянная. Если $\lambda=\infty$, эта формула принимает вид

$$A(w)=w+Q. \tag{3.7}$$

Под символом A^m будем понимать дробно-линейное преобразование, определяемое равенствами

$$A^0(w)=w,\quad A^{m+1}(w)=A(A^m(w)).$$

Если преобразование $A(w)$ определяется формулами (3.4), (3.5), (3.6) или (3.7), то соответствующее преобразование A^m определяется формулами

$$\frac{A^m(w)-\lambda_1}{A^m(w)-\lambda_2}=q^m\frac{w-\lambda_1}{w-\lambda_2}; \tag{3.4*}$$

$$A^m(w)-\lambda_1=q^m(w-\lambda_1); \tag{3.5*}$$

$$\frac{1}{A^m(w)-\lambda}=\frac{1}{w-\lambda}+mQ; \tag{3.6*}$$

$$A^m(w)=w+mQ. \tag{3.7*}$$

Следующую теорему сформулируем уже не для отображения области D на произвольный круг, а лишь для отображения на верхнюю полуплоскость.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathscr{G}(D, \Phi)$ — группа автоморфизмов конформного отображения области D на полуплоскость* $\operatorname{Re} w>0$. *Если дробно-линейное преобразование*

$A \in \mathcal{G}(D, \Phi)$ *определяется формулой* (3.4), *то величины* λ_1 *и* λ_2 *действительны, а величина* q *положительна. Если преобразование* A *определяется формулой* (3.5), *то* λ_1 — *действительное, а* q — *положительное число. В случае формул* (3.6) *и* (3.7) *величины* λ *и* Q — *действительные числа.*

Доказательство. Проведем доказательство только для случая, когда преобразование $A(w)$ представляется формулой (3.4). Остальные случаи исследуются тем же способом, но проще.

Итак, пусть $A(w)$ — дробно-линейное преобразование из группы автоморфизмов $\mathcal{G}(D, \Phi)$, определяемое формулой (3.4). Возьмем произвольную точку w_0 из полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$, отличную от точек λ_1 и λ_2, и рассмотрим последовательность.

$$\{w_m\}, \quad w_m = A^m(w_0), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Преобразования группы автоморфизмов конформного отображения области D на полуплоскость являются отображениями этой полуплоскости па себя. Поэтому все точки $w_m = A^m(w_0)$ должны лежать в полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$, а предельные точки последовательности $\{w_m\}$ по теореме 3.2 должны лежать на действительной оси. Согласно формуле (3.4*)

$$\frac{w_m - \lambda_1}{w_m - \lambda_2} = q^m \frac{w_0 - \lambda_1}{w_0 - \lambda_2}. \tag{3.8}$$

Отсюда видно, что при $|q| \neq 1$ предельными точками последовательности $\{w_m\}$ являются точки λ_1 и λ_2. Таким образом, мы доказали действительность значений λ_1 и λ_2 при дополнительном предположении, что $|q| \neq 1$.

Покажем, что из действительности значений λ_1 и λ_2 сразу вытекает положительность величины q. Допустим, что $\lambda_1 < \lambda_2$, и возьмем значение μ, удовлетворяющее условию $\lambda_1 < \mu < \lambda_2$. Преобразование $A(w)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость на себя, и потому должны выполняться неравенства

$$A(\lambda_1) < A(\mu) < A(\lambda_2).$$

Но λ_1 и λ_2 — неподвижные точки преобразования $A(w)$, так что последние неравенства означают, что

$$\lambda_1 < A(\mu) < \lambda_2.$$

Поэтому, полагая в формуле (3.4) $w=\mu$, получаем

$$q=\frac{A(\mu)-\lambda_1}{A(\mu)-\lambda_2}\cdot\frac{\mu-\lambda_1}{\mu-\lambda_2}>0.$$

Теперь остается только исследовать возможность $|q|=1$. Положим $q=\exp(2\pi i\alpha)$. Если α — иррациональное число, то из формулы (3.8) видно, что точки w_m будут всюду плотны на окружности

$$\left|\frac{w-\lambda_1}{w-\lambda_2}\right|=\left|\frac{w_0-\lambda_1}{w_0-\lambda_2}\right|,$$

что по теореме 3.2 невозможно. Следовательно, $q=\exp\left(2\pi i\frac{r}{s}\right)$, где r и s — целые числа. Тогда из формулы (3.4*) получаем, что

$$A^s(w)\equiv w.$$

По теореме 3.1 такое равенство возможно лишь в случае, когда кривая Γ, которой отвечает преобразование $A(w)=A_\Gamma(w)$, обладает тем свойством, что кривая Γ^s (кривая Γ, проходимая s раз в положительном направлении) гомотопна нулю в области D. Геометрически очевидно, что это возможно лишь в случае, когда сама кривая Γ гомотопна нулю в области D. В этом случае мы имеем $A(w)=w$, что отвечает значению $q=1$.

Тем самым утверждение полностью доказано. □

Мы сформулировали теорему 3.3 для случая, когда функция $\Phi(z)$ отображает область D не на произвольный круг, а на полуплоскость $\operatorname{Re} w>0$ только потому, что в этом случае условия на величины λ_1, λ_2 и q особенно просты. Для формулировки утверждения этой теоремы в общем случае удобнее всего использовать интересную геометрическую интерпретацию.

Любой круг в комплексной плоскости можно рассматривать как *плоскость Лобачевского*, если ввести в этом круге подходящую метрику, называемую *неевклидовой* или *гиперболической метрикой*. Неевклидова метрика задается обычно формулой для дифференциала ds неевклидовой длины дуги. В круге $|w|<1$ эта формула имеет вид

$$ds=\frac{|dw|}{1-|w|^2},$$

а в полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$ — вид

$$ds = \frac{|dw|}{\operatorname{Im} w}.$$

С помощью не очень сложных выкладок (не будем проводить их здесь, так как в § 1 гл. X этот вопрос будет обсуждаться подробнее) можно показать, что неевклидова метрика в данном круге инвариантна относительно дробно-линейных отображений этого круга на себя. Это означает, что такие дробно-линейные преобразования оставляют неизменными неевклидовы размеры фигур. Поэтому такие преобразования естественно назвать *преобразованиями движения* неевклидовой плоскости. Преобразования движения, не имеющие неподвижных точек, естественно назвать *преобразованиями параллельного переноса*. В этих терминах общая формулировка теоремы 3.3 выглядит так:

Любое дробно-линейное отображение из группы автоморфизмов конформного отображения области D на круг K представляет собой параллельный перенос в круге K, рассматриваемом как плоскость Лобачевского. $\square$

Поговорим теперь о зависимости группы $\mathscr{G}(D, \Phi)$ от функции $\Phi(z)$ (при фиксированной области D).

Будем говорить, что группы $\mathscr{G}$ и $\mathscr{G}^*$, состоящие из дробно-линейных преобразований, *подобны*, если между этими группами имеется автоморфизм ϑ, имеющий вид

$$\vartheta(A) = TAT^{-1},$$

где T — некоторое фиксированное дробно-линейное преобразование.

Лемма 2. *Если каждая из функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ конформно отображает область D на некоторый круг, то группы автоморфизмов $\mathscr{G}(D, \Phi)$ и $\mathscr{G}(D, \Psi)$ подобны.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что исходные элементы $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ заданы в одной и той же точке a области D. Пусть функция $\Phi(z)$ отображает область D на круг K, а функция $\Psi(z)$ — на круг K'. Обозначим через $T(w)$ дробно-линейное отображение круга K' на круг K, удовлетворяющее условиям

$$T(\psi(a)) = \varphi(a), \quad \arg T'(\psi(a)) = \arg \varphi'(a) - \arg \psi'(a).$$

Тогда функции $\Phi(z)$ и $\widetilde{\Phi}(z)$, порожденные исходными элементами $\varphi(z)$ и $\widetilde{\varphi}(z) = T(\psi(z))$ соответственно, конформно отображают область D на круг K, причем

$$\widetilde{\varphi}(a)=\varphi(a), \quad \arg\widetilde{\varphi}'(a)=\arg\varphi'(a).$$

По теореме 1.2 функции $\Phi(z)$ и $\widetilde{\Phi}(z)$ тождественно совпадают. Это означает, что продолжение элементов $\varphi(z)$ и $T(\psi(z))$ по кривой Г приводит к одинаковому результату, какова бы ни была кривая Г. Обозначим через A_Γ преобразование из группы автоморфизмов $\mathcal{G}(D, \Phi)$, отвечающее кривой Г, а через B_Γ — аналогичное преобразование из группы автоморфизмов $\mathcal{G}(D, \Psi)$. Тогда из сказанного выше следует, что

$$A_\Gamma(\varphi(z))=T(B_\Gamma(\Psi(z))).$$

Но $\psi(z)=T^{-1}(\varphi(z))$. Следовательно,

$$A_\Gamma(\varphi(z))=T(B_\Gamma(T^{-1}(\varphi(z)))), \quad \text{или} \quad A_\Gamma=TB_\Gamma T^{-1}.$$

Тем самым лемма доказана. $\square$

Знание групп автоморфизмов позволяет решить задачу возможности взаимно однозначного конформного отображения двух многосвязных областей друг на друга.

Теорема 3.4. *Для того чтобы области D и D' можно было взаимно однозначно и конформно отобразить друг на друга, необходимо и достаточно, чтобы группы автоморфизмов $\mathcal{G}(D, \Phi)$ и $\mathcal{G}(D, \Psi)$ были подобны* (здесь $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ — какие-либо конформные отображения областей D и D' соответственно на круг).

Доказательство. Сначала докажем необходимость. Пусть существует взаимно однозначное и конформное отображение $z=g(\zeta)$ области D на область D'. Если $w=\Psi(z)$ — конформное отображение области D' на круг K, то функция $\Phi(\zeta)=\Psi(g(\zeta))$ конформно отображает область D на круг K. Легко проверить, что группы $\mathcal{G}(D, \Phi)$ и $\mathcal{G}(D', \Psi)$ не только подобны, но и просто совпадают.

Теперь докажем достаточность. Без ограничения общности мы можем считать, что функции $w=\Phi(\zeta)$ и $w=\Psi(z)$ конформно отображают области D и D' соответственно на один и тот же круг K и что группы $\mathcal{G}(D, \Phi)$ и $\mathcal{G}(D', \Psi)$ совпадают. Обозначим через $f(w)$ функцию, обратную к отображающей функции $\Phi(z)$. Эта функция голоморфна в круге K и обладает тем свойством, что $f(A(w))=f(w)$ для любого преобразования $A(w)$ из группы $\mathcal{G}(D, \Phi)$ (а значит, и из $\mathcal{G}(D', \Psi)$). Поэтому голоморфна и функция $g(\Psi(z))$ в области D'. Легко убедиться, что эта функция взаимно однозначно и конформно отображает область D' на область D. $\square$

В связи с доказанными теоремами, естественно, возникает вопрос, дают ли теоремы 3.1—3.3 полную характеристику группы автоморфизмов конформного отображения n-связной области. Иными словами, можно ли произвольно задать $n-1$ дробно-линейных отображений круга K на себя (удовлетворяющих требованиям, возникающим из теорем 3.2 и 3.3), чтобы группа, порожденная этими отображениями, была группой автоморфизмов некоторой n-связной области? Оказывается, что это в основном так, но решение задачи слишком сложно, чтобы стоило заниматься им здесь.

Однако все же отметим одно следствие из сделанного замечания и из теоремы 3.4. Число параметров, определяющих типы комформно неэквивалентных n-связных областей, по теореме 3.4 равно числу параметров, определяющих различные не подобные между собой группы автоморфизмов. Если допустить, что группу автоморфизмов n-связной области можно получить, произвольно задав $n-1$ образующих (удовлетворяющих условиям теоремы 3.2), то такая группа определяется $3(n-1)$ параметрами (действительными). При $n>2$ условие неподобности групп уменьшает число параметров еще на три, а при $n=2$ — на два. Поэтому при $n>2$ число параметров, определяющих типы конформно неэквивалентных n-связных областей, равно $3n-6$, а при $n=2$ это число равно 1. В следующем параграфе мы докажем, что число параметров, определяющих типы конформно неэквивалентных n-связных областей, именно такое. Это даст нам некоторое подтверждение (хотя и очень косвенное) возможности более или менее произвольного выбора образующих группы автоморфизмов.

В заключение предложим еще одну геометрическую картину, относящуюся к группе автоморфизмов конформного отображения области D на круг K.

Проведем в области D попарно непересекающиеся разрезы, соединяющие внешнюю компоненту γ_0 границы области D с каждой из ее внутренних компонент γ_k. Односвязную область, получающуюся из области D после проведения разрезов, мы обозначим через D'.

Пусть теперь $\Phi(z)$ — функция, конформно отображающая область D на круг K. В односвязной области D функция $\Phi(z)$ распадается на голоморфные ветви $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, ... (ветвь $\Phi_0(z)$ будем считать отвечающей продолжению на область D' исходного элемента функции $\Phi(z)$). Ясно, что каждой ветви $\Phi_m(z)$ отвечает некоторое дробно-линейное преобразование A_m круга K на себя из группы автоморфизмов $\mathcal{G}(D, \Phi)$, для которого справедлива формула

$$\Phi_m(z) = A_m(\Phi_0(z)).$$

Более того, ясно, что эта формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между голоморфными ветвями $\Phi_m(z)$ и элементами группы автоморфизмов. $\square$

Обозначим через G_m образ области D' при отображении $w = \Phi_m(z)$ и назовем область G_0 *фундаментальной областью группы автоморфизмов* $\mathcal{G}(D, \Phi)$. Фундаментальная область определяется с довольно большой степенью произвола (выбор разрезов, превращающих область D в односвязную область D').

Отметим следующие важные свойства фундаментальной области:

1. Каждая область G_m является образом фундаментальной области G_0 при отображении одним и только одним преобразованием A_m из группы автоморфизмов $\mathcal{G}(D, \Phi)$.

2. Области G_m при различных значениях m не имеют общих точек.

3. Каждая точка круга K лежит внутри одной из областей или на границе одной из этих областей.

Иными словами, области $\{G_m\}$ образуют «паркетное» замощение круга K (плотное и без перекрытий). Задание такого паркетного замощения — это геометрический способ задания группы автоморфизмов.

§ 4. Задача Дирихле и отображение на канонические области

Конформное отображение многосвязной области аналитическими функциями можно применить для решения задачи Дирихле для многосвязных областей. Будем говорить только о решении задачи Дирихле для m-связной области, ограниченной кусочно гладкими кривыми C_0, C_1, ..., C_{m-1}. Кривую C_0 будем считать внешней границей, кривые C_1, C_2, ..., C_{m-1} — границами дырок.

Постановка задачи Дирихле та же, что и в случае односвязной области (§ 3 гл. VIII). Именно:

На граничных кривых области D задано m функций $f_0(\zeta), \ldots, f_{m-1}(\zeta)$, непрерывных на этих кривых, за исключением замкнутого счетного множества точек разрыва (и ограниченные). Требуется найти функцию $u(z)$, гармоническую и ограниченную в области D, которая стремится к функции $f_k(\zeta)$ при $z \to \zeta\,(\zeta \in C_k)$ в любой точке непрерывности функции $f_k(\zeta)$.

Единственность решения задачи Дирихле была доказана в § 3 гл. VIII для любой области, но ее разрешимость была установлена только для односвязной области D.

Для краткости совокупность функций $f_0(\zeta), \ldots, f_{m-1}(\zeta)$ будем обозначать через $f(\zeta)$, считая, что функция $f(\zeta)$ определена на множестве, состоящем из всех граничных кривых. $\square$

Введем обозначения.

Пусть $w(z)$ — какая-либо функция, конформно отображающая область D на круг $|w| < 1$, а $z(w)$ — функция, обратная к $w(z)$. Через G_0 обозначим фундаментальную область группы $\gamma(D, w)$, а через D' — область D с разрезами. Область D' является образом области G_0 при отображении $z = z(w)$. Группу $\gamma(D, w)$ будем считать состоящей из преобразований $A_0, A_1, A_2, \ldots$ (A_0 — тождественное преобразование), занумерованных в каком-либо порядке. Через G_ν обозначим образ области G_0 при отображении круга $|w| < 1$ с помощью дробно-линейного преобразования $A_\nu w$. Через σ_ν обозначим совокупность дуг окружности $|w| = 1$, входящих в границу области G_ν. $\square$

Теорема 4.1. *Функция $u(z)$, решающая задачу Дирихле в области D с граничной функцией $f(\zeta)$, может быть представлена в виде $u(z) = v(w(z))$, где*

$$v(\rho e^{i\varphi}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1-\rho^2}{2\pi} \int\limits_{\sigma_\nu} \frac{f\left(z\left(e^{i\theta}\right)\right) d\theta}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\theta)} \qquad (\rho < 1). \quad (4.1)$$

Доказательство. Прежде всего убедимся, что интегралы, входящие в определение функции $v(w)$, имеют смысл и что ряд сходится. Функция $z(w)$ конформно отображает область G_0 на область D', а так как по лемме 1 § 3 $z(A_\nu w) \equiv z(w)$, то она конформно отображает на область D' и любую область G_ν. При этом дуги σ_ν переходят в те части границы области D', которые входят в границу области D, т. е. в граничные кривые. По теореме о соответствии границ (см. следствие теоремы 2.1) функция $z(w)$ непрерывна на дугах σ_ν и значения $z(e^{i\theta})$ лежат на граничных кривых области D. Поэтому функция $f(z(e^{i\theta}))$ при $e^{i\theta} \in \sigma_\nu$ определена и непрерывна, за исключением замкнутого счетного множества точек разрыва. Тем самым все интегралы имеют смысл.

Поскольку дуги σ_ν не имеют общих точек (см. свойство 1 § 3), то нетрудно показать, что ряд равномерно сходится внутри круга $|w| \leqslant r < 1$. Каждое слагаемое является функцией, гармонической в круге $|w| < 1$. Поэтому функция $v(w)$ гармонична в круге $|w| < 1$ как сумма равномерно сходящегося ряда гармонических функций. Кроме того, для функции $v(w)$ выполняются неравенства

$$m \leqslant v(w) \leqslant M \quad (|w| < 1),$$
$$\text{где } m = \inf f(\zeta), \quad M = \sup f(\zeta).$$

Теперь покажем, что функция $u(z) = v(w(z))$ определена в области D. Для этой цели нам нужно убедиться, что значение функции $v(w(z))$ в какой-либо точке z_0 не зависит от выбора элемента функции $w(z)$ в этой точке. Так как все элементы функции $w(z)$ получаются из какого-либо одного преобразованиями группы $\gamma(D, w)$, то нужно показать, что $v(A_n w) \equiv v(w)$ для всех $A_n \in \in \gamma(D, w)$.

Для этого заметим, что функция $v(w)$ равна сумме ряда

$$v(w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu(w),$$

где функция $v_\nu(w)$ является решением задачи Дирихле в круге $|w| < 1$ с граничными данными, равными $f(z(e^{i\theta}))$ при $e^{i\theta} \in \sigma_\nu$ и нулю в остальных точках окружности $|w| = 1$. Любое преобразование $A_n w$ переводит круг $|w| < 1$ в себя, а множества σ_ν лишь перетасовывает между собой. Поэтому функция $v(A_n w)$ является суммой того же ряда $\sum v_\nu(w)$, но порядок членов этого ряда изменен. В силу абсолютной сходимости сумма ряда не меняется. Следовательно, $v(A_n w) \equiv v(w)$, так что функция $u(z) = v(w(z))$ определена в области D.

Ясно, что функция $u(z)$ ограничена в области D. Из гармоничности функции $v(w)$ в круге $|w| < 1$ с помощью теоремы 1.1 гл. VIII легко получаем гармоничность функции $u(z)$ в области D. Остается показать, что $u(z) \to f(\zeta)$ при $z \to \zeta$ в любой точке непрерывности функции $f(\zeta)$. Поскольку $u(z) = v(w(z))$ и значения $v(w(z))$ не зависят от выбора ветви функции $w(z)$, то можно взять вместо $w(z)$ ее ветвь $w_0(z)$, конформно отображающую область D' на область G_0. Функции $w_0(z)$ и $z(w)$ непрерывны вплоть до границы областей D' и G_0 соответственно, по теореме о соответствии границ. Поэтому при $z \to \zeta'$ (ζ' — точка одной из граничных кривых) имеем

$$w_0(z) \to e^{i\theta'}, \quad z(w) \to \zeta' \qquad (w \to e^{i\theta'}).$$

Согласно свойствам интеграла Пуассона (см. теорему 3.2 гл. VIII) имеем

$$v(w) \to f(z(e^{i\theta'})) = f(\zeta') \qquad (w \to e^{i\theta'})$$

(если θ' является точкой непрерывности функции $f(z(e^{i\theta})))$. Теорема доказана. □

В предыдущем параграфе были найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы области D и D_1 можно было взаимно однозначно и конформно отобразить друг на друга. Однако вопрос о том, на какие сравнительно простые области можно отобразить произвольную m-связную область, мы не решали. Этот вопрос довольно легко решается с помощью сведения к задаче Дирихле. □

Сначала рассмотрим случай двухсвязной области.

Теорема 4.2. *Любую двухсвязную область* (ограниченную кусочно гладкими кривыми) *можно взаимно однозначно и конформно отобразить на кольцо* $r < |w| < 1$. *Отображающая функция определяется единственным образом с точностью до множителя, равного по модулю единице.* (*Число* r *не задается, а определяется по области.*)

Доказательство. Начнем с доказательства единственности отображения. Пусть функция $w = w(z)$ взаимно однозначно и конформно отображает область D, ограниченную кусочно гладкими кривыми C_0 (внешняя граница) и C_1 (граница дырки), на кольцо $r < |w| < 1$. При этом, естественно, кривая C_0 переходит в окружность $|w| = 1$, а кривая C_1 — в окружность $|w| = r$.

Поскольку функция $w(z)$ не обращается в нуль в области D, функция $u(z) = \ln|w(z)|$ гармонична в области D и непрерывна вплоть до ее границы. Ясно, что

$$u(z)=0 \quad (z\in C_0), \quad u(z)=\ln r \quad (z\in C_1). \tag{4.2}$$

Эти условия полностью определяют функцию $u(z)$. Аналитическая в области D функция $\ln w(z)$ определяется по функции $u(z)$ с точностью до произвольного чисто мнимого слагаемого $i\theta$. Следовательно, функция $w(z)$ определяется по функции $u(z)$ с точностью до постоянного множителя, равного по модулю единице.

Остается показать, что число r тоже определяется единственным образом. Обозначим через $\zeta(z)$ аналитическую в области D функцию, имеющую своей действительной частью гармоническую меру $\omega(z;\ C_1,\ D)$, т. е. решение задачи Дирихле в области D с граничными данными, равными нулю на C_0 и единице на C_1. Очевидно, имеем

$$\ln w(z)=\zeta(z)\ln r, \quad w(z)=e^{\zeta(z)\ln r}. \tag{4.3}$$

Согласно теореме 1.1 гл. VIII функция $\zeta'(z)$ голоморфна в области D и интеграл от $\zeta'(z)$ по любому замкнутому контуру, лежащему в D, равен чисто мнимому числу (или нулю). Поэтому при аналитическом продолжении $\zeta(z)$ вдоль замкнутого пути, обходящего дырку C_1 в положительном направлении один раз, к исходному значению $\zeta(z)$ добавляется чисто мнимое слагаемое $2\pi i\omega_0$ (интеграл от $\zeta'(z)$ по упомянутому пути). Из формулы (4.3) видим, что при аналитическом продолжении функции $w(z)$ вдоль любого замкнутого пути, один раз обходящего дырку в положительном направлении, исходное значение функции $w(z)$ умножается на $e^{2\pi i\omega_0\ln r}$. Голоморфность функции $w(z)$ означает, что $\omega_0\ln r=n$. Функция $w(z)$ должна быть не только голоморфна, но и однолистна в области D, т. е. не должна принимать одинаковых значений. Отсюда без особого труда можно вывести, что произведение $\omega_0\ln r$ должно быть равно ±1. Поскольку $r<1$, то знак тоже определяется, и тем самым число r определяется единственным образом.

Единственность отображения доказана. Для доказательства существования отображения нам остается показать, что функция

$$w_0(z)=e^{\frac{1}{\omega_0}\zeta(z)}$$

совершает искомое отображение области D на кольцо

$$r < |w| < 1, \qquad \ln r = \frac{1}{\omega_0}.$$

С этой целью выясним, что происходит с точкой $w_0(z)$, тогда точка z обходит кривую C_λ, на которой $\omega(z,\ C_1,\ D) = \lambda,\ 0 < \lambda < 1$. Заметим, что C_λ — простая кривая, лежащая в области D (отсутствие самопересечений следует из принципа максимума и минимума для гармонических функций). При $\lambda \to 0$ эта кривая стремится к C_0, а при $\lambda \to 1$ — к C_1. В каждой точке кривой C_λ функция $\zeta(z)$ голоморфна, так что уравнения Коши — Римана, написанные в системе координат, где за направление оси x взято направление нормали n к кривой C_λ, а за направление оси y — направление касательной к C_λ, дают

$$\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{Im} \zeta(z) = \frac{\partial}{\partial n} \operatorname{Re} \zeta(z) \quad (\operatorname{Re} \zeta(z) = \omega(z;\ C_1,\ D)).$$

Если взять за n то направление нормали, которое отвечает возрастанию λ, то $\frac{\partial}{\partial n} \operatorname{Re} \zeta(z) > 0$. Следовательно, при движении по кривой C_λ в таком направлении, чтобы область бо́льших значений λ оставалась справа, величина $\operatorname{Im} \zeta(z)$ возрастает. При полном обходе величина $\operatorname{Im} \zeta(z)$ обязана увеличиться на $2\pi i\omega_0$. Следовательно, при полном обходе кривой C_λ точкой z точка $w_0(z)$ совершит один полный обход окружности $|w| = e^{\frac{\lambda}{\omega_0}}$. Это и означает, что функция $w_0(z)$ взаимно однозначно и конформно отображает область D, описываемую кривыми C_λ, $0 < \lambda < 1$, на кольцо $e^{\frac{1}{\omega_0}} < |w| < 1$, описываемое окружностями $|w| = e^{\frac{\lambda}{\omega_0}}$, $0 < \lambda < 1$. Теорема доказана. □

В случае $m > 2$ уже нет столь простых канонических областей, как кольцо, и рассматриваются канонические области многих типов. Докажем теорему об отображении конечносвязной области на один из типов канонических областей — на плоскость с конечными вертикальными разрезами. При этом не будем останавливаться на тонкостях, связанных с возможностью недостаточно гладкой границы области.

Начнем с обозначений.

Пусть m-связная область D ограничена кривыми C_0 (внешняя граница) и $C_1, C_2, \ldots, C_{m-1}$ (дырки). Обозначим через $\zeta_1(z), \zeta_2(z), \ldots, \zeta_{m-1}(z)$ аналитические в области D функции, имеющие своей действительной частью гармоническую меру $\omega(z; C_k, D)$. Через $2\pi i\omega_{ks}$ $(1 \leqslant k \leqslant m-1,\ 1 \leqslant s \leqslant m-1)$ обозначим интеграл от функции $\zeta_k'(z)$ по простой замкнутой кривой, окружающей дырку C_s и не окружающей других дырок (по теореме 1.1 функция $\zeta_k'(z)$ голоморфна в области D и интеграл от нее по любому замкнутому контуру — чисто мнимое число). □

Сначала докажем одну существенную лемму.

Лемма 1. *Матрица* $\Omega = \|\omega_{ks}\|$ *невырождена.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда можно подобрать такие действительные постоянные $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$, не все равные нулю, чтобы функция

$$\zeta(z) = \lambda_1\zeta_1(z) + \ldots + \lambda_{m-1}\zeta_{m-1}(z)$$

была голоморфна в области D. Действительно, для этого нужно, чтобы изменение функции $\zeta(z)$ при обходе каждой дырки C_s было равно нулю. Это дает нам систему линейных уравнений с матрицей Ω. Так как согласно допущению Ω — вырожденная матрица, то эта система имеет нетривиальные решения.

Выясним, какие значения может принимать функция $\zeta(z)$ в области D. Значения функции $\zeta(z)$ на кривой C_0 имеют действительную часть, равную нулю, а на кривых C_s имеем $\operatorname{Re}\zeta(z) = \lambda_s$. Иными словами, образом границы области D является множество, расположенное на прямых $\operatorname{Re}\zeta = 0$, $\operatorname{Re}\zeta = \lambda_s$ $(s = 1, 2, \ldots, m-1)$. Если значение w не лежит ни на одной из этих прямых, то согласно принципу аргумента (см. теорема 6.1 гл. IV) число решений уравнения $\zeta(z) - w$ в области D равно изменению $\arg[\zeta(z) - w]$ при обходе точкой z всей границы области D. Но

$$\operatorname*{var}_{C_s}\{\arg[\zeta(z) - w]\} = 0 \qquad (s = 0, 1, \ldots, m-1),$$

так как при движении точки z по кривой C_s точка $\zeta(z)$ движется по прямой $\operatorname{Re}\zeta = \mathrm{const}$ и не может обойти точку w. Следовательно, изменение $\arg[\zeta(z) - w]$ по всей границе области равно нулю, т. е. функция $\zeta(z)$ не принимает значения w в области D. Поскольку w — любая точка, не лежащая на прямых $\operatorname{Re}\zeta = 0$, $\operatorname{Re}\zeta = \lambda_s$ $(s =$

$= 1, \ldots, m-1)$, то это означает, что функция $\zeta(z)$ принимает в области D только те значения, которые лежат на этих прямых. Но по теореме 1.1 гл. V множество значений, принимаемых в области голоморфной функцией, отличной от постоянной, является областью. Следовательно, $\zeta(z) \equiv \mathrm{const}$. Это невозможно, так как

$$\operatorname{Re}\zeta(z) = 0 \quad (z \in C_0), \qquad \operatorname{Re}\zeta(z) = \lambda_s \quad (z \in C_s),$$

а хотя бы одна из постоянных λ_s отлична от нуля. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 4.3. *Любую конечносвязную область D можно взаимно однозначно и конформно отобразить на плоскость w с конечными вертикальными разрезами. Отображающая функция $w(z)$ определяется единственным образом, если задать точку $a \in D$, переходящую в точку $w = \infty$, действительное число A и число* $c = \lim\limits_{z \to a}\left[w(z) - \dfrac{A}{z-a}\right]$.

Доказательство. Обозначим через $u(z)$ решение задачи Дирихле в области D с граничными данными, равными $\operatorname{Re}\dfrac{A}{\zeta - a}$, а через $w_0(z)$ — аналитическую в области D функцию, имеющую $u(z)$ своей действительной частью.

Подберем действительные постоянные $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ таким образом, чтобы функция

$$-w_0(z) + \lambda_1\zeta_1(z) + \ldots + \lambda_{m-1}\zeta_{m-1}(z)$$

была голоморфна в области D. В силу леммы 1 это можно сделать, так как матрица $\Omega = \|\omega_{ks}\|$ невырождена.

Покажем, что функция

$$w(z) = \frac{A}{z-a} + c_1 - w_0(z) + \lambda_1\zeta_1(z) + \ldots + \lambda_{m-1}\zeta_{m-1}(z)$$

(постоянная c_1 выбрана так, чтобы $w(z) - \dfrac{A}{z-a} \to 0$ при $z \to a$) совершает искомое отображение.

Согласно построению имеем

$$\operatorname{Re} w(z) = \mu_s \quad (z \in C_s),$$

$$\mu_0 = \operatorname{Re} c_1, \quad \mu_s = \operatorname{Re} c_1 + \lambda_s \quad (s = 1, \ldots, m-1),$$

а из предположений о некоторой гладкости границы D легко получить, что мнимая часть $w(z)$ непрерывна на границе D. Внутри области D функция $w(z)$ имеет один простой полюс. Как и в лемме 1, убеждаемся, что для всех значений w, не лежащих на прямых

$$\operatorname{Re} w = \mu_s \quad (s = 0, 1, \ldots, m-1),$$

изменение $\arg[w(z) - w]$ по всей границе D равно нулю. По принципу аргумента это означает, что число нулей функции $w(z) - w$ в области D равно числу ее полюсов, т. е. единице. Значения w, лежащие на указанных прямых, тоже принимаются функцией $w(z)$ не более одного раза, так как по теореме 1.1 гл. V множество значений, принимаемых в области голоморфной функцией больше одного раза,— открытое множество. Следовательно, $w(z)$ взаимно однозначно и конформно отображает область D на всю плоскость w, из которой выброшены куски указанных вертикальных прямых.

Остается доказать единственность этой отображающей функции.

Если $w_1(z)$ и $w_2(z)$ — две отображающие функции, то их разность голоморфна в области D и равна нулю при $z = a$. Применив к этой разности те же рассуждения, что и к функции $\zeta(z)$ в доказательстве леммы 1, без труда получим $w_1(z) - w_2(z) \equiv 0$.

Теорема доказана *). □

Несложные подсчеты показывают, что для выделения типа канонической области нужно при $m > 2$ задать $3m - 6$ действительных постоянных — то самое число, которое указывалось в § 3 в качестве оценки сверху.

Интересно заметить, что матрица Ω тоже не меняется при взаимно однозначных конформных отображениях, но она содержит $(m-1)^2$ действительных параметров. Таким образом, при $m > 2$ количество параметров у матрицы Ω больше, чем $3m - 6$. Это значит, что при $m > 3$ между элементами матрицы Ω должны быть какие-то соотношения.

§ 5. Отображение плоскости с выколотыми точками

Настоящий параграф посвятим построению функции, конформно отображающей плоскость с тремя выколотыми точками на круг $|w| < 1$. Эта функция нужна для до-

*) Мы не стали останавливаться на вопросе о том, какая именно гладкость границы области необходима для справедливости теоремы. Теорема верна без каких бы то ни было предположений о границе (см. [10]).

казательства теоремы 1.1 *, где мы опирались на ее существование, но она интересна и во многих других отношениях.

Удобнее строить функцию, конформно отображающую плоскость с тремя выколотыми точками (скажем, $z=0$, $z=1$ и $z=\infty$) не на круг $|w|<1$, а на полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta>0$.

Обозначим через G полуполосу $|\operatorname{Re}\zeta|<1$, $\operatorname{Im}\zeta>0$, из которой удалены два полукруга, лежащих на отрезках $(-1, 0)$ и $(0, 1)$ как на диаметрах.

Через $k(\zeta)$обозначим функцию, конформно отображающую область G на плоскость z с разрезом по положительной части действительной оси так, чтобы точки $\zeta=0$, 1, ∞ переходили в точки $z=0$, 1, ∞ на верхнем крае разреза соответственно. Существование этой отображающей функции следует из теоремы 1.1. Более того, эту функцию можно построить с помощью интеграла Кристоффеля — Шварца (см. § 5 гл. V).

Через $\lambda_0(z)$ обозначим функцию, обратную к функции $k(\zeta)$.

Покажем, что *аналитическая функция* $\lambda(z)$, *полученная аналитическим продолжением функции* $\lambda_0(z)$, *аналитична в области* D (*плоскость* z *с выколотыми точками* $z=0$, 1, ∞) *и конформно отображает ее на полуплоскость* $\operatorname{Re}\zeta>0$.

Доказательство разобьем на пять этапов.

1. Покажем, что *значения функции* $\lambda_0(z)$ *в плоскости* z *с разрезом на положительной части действительной оси связаны соотношением*

$$\overline{\lambda_0(\bar{z})}=-\lambda_0(z). \tag{5.1}$$

Для этой цели обозначим через $\varphi(z)$ функцию, конформно отображающую полуплоскость $\operatorname{Im}z>0$ на половину области G, лежащую справа от мнимой оси и переводящую точки $z=0$, 1, ∞ в точки $\zeta=0$, 1, ∞, соответственно. Согласно теореме Римана такое отображение существует, а с помощью теоремы 2.1 гл. V нетрудно доказать, что оно единственно. В силу теоремы о соответствии границ функция $\varphi(z)$ непрерывна в полуплоскости $\operatorname{Im}z\geqslant 0$. При отображении $\zeta=\varphi(z)$ отрицательная часть действительной оси переходит в положительную часть мнимой оси. По принципу симметрии (см. теорему 4.2 гл. V) функцию $\varphi(z)$ можно аналитически продолжить в полуплоскость $\operatorname{Im}z<0$ через отрицательную часть действительной оси, положив

$$\varphi(z) = -\overline{\varphi(\bar{z})} \quad (\operatorname{Im} z < 0). \qquad (5.1^*)$$

Продолженная функция (сохраним для нее обозначение $\varphi(z)$) голоморфна во всей плоскости z с разрезом по положительной части действительной оси и конформно отображает эту плоскость с разрезом на область G. По теореме 2.1 гл. V задание трех точек на границе области определяет отображение единственным образом, так что $\varphi(z) \equiv \lambda_0(z)$. Поэтому равенство (5.1) вытекает из равенства (5.1*).

2. *Найдем аналитическое продолжение функции* $\lambda_0(z)$ *через отрезки* $(0, 1)$ *и* $(1, +\infty)$ *снизу вверх* (т. е. через нижний край разреза).

Отображение $\zeta = \lambda_0(z)$ переводит нижний край разреза $(0, 1)$ в полуокружность $\left|\zeta + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} \zeta > 0$. Поэтому согласно принципу симметрии аналитическое продолжение функции $\lambda_0(z)$ через нижний край разреза $(0, 1)$ возможно. В результате этого аналитического продолжения мы получим другую голоморфную ветвь аналитической функции $\lambda(z)$, которую обозначим через $\lambda_1(z)$. По принципу симметрии значения $\lambda_0(\bar{z})$ и $\lambda_1(z)$ должны быть симметричны относительно окружности $\left|\zeta + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ (так как точки $\bar{z}$ и z симметричны относительно отрезка $(0, 1)$). Записывая условие симметрии относительно окружности (см. § 2 гл. V), получаем

$$\left[\lambda_1(z) + \frac{1}{2}\right]\left[\overline{\lambda_0(\bar{z})} + \frac{1}{2}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Используя соотношение (5.1), находим

$$\lambda_1(z) = S(\lambda_0(z)), \qquad S(\zeta) = \frac{\zeta}{-2\zeta + 1}. \qquad (5.2)$$

Обозначим через $\lambda_2(z)$ ту ветвь аналитической функции $\lambda(z)$, которая получается аналитическим продолжением функции $\lambda_0(z)$ через нижний край разреза $(1, +\infty)$; аналогичными рассуждениями получаем

$$\lambda_2(z) = T(\lambda_0(z)), \quad T(\zeta) = \zeta - 2. \qquad (5.3)$$

Легко видеть, что продолжения через разрез $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$ снизу вверх отвечают продолжениям функции

$\lambda_0(z)$ по достаточно малым окружностям $|z|=\rho$ и $|z-1|=$ $=\rho$ соответственно (один раз против часовой стрелки).

3. Покажем, что *функцию* $\lambda_0(z)$ *можно аналитически продолжать по любому пути, не проходящему через точки* $z=0,\ 1,\ \infty$, *и что все элементы полученной аналитической функции имеют значения, лежащие в полуплоскости* $\operatorname{Im}\zeta>0$.

Пусть мы имеем какой-либо путь L, не проходящий через точки $z=0,\ 1,\ \infty$. Когда этот путь первый раз переходит через положительную часть действительной оси, функция $\lambda_0(z)$ заменяется одной из следующих четырех функций:

$$S\lambda_0(z),\qquad T\lambda_0(z),\qquad S^{-1}\lambda_0(z),\qquad T^{-1}\lambda_0(z),$$

в зависимости от того, через какой край какой части разреза мы перешли. Аналитическое продолжение каждой из этих четырех функций сводится снова к продолжению функции $\lambda_0(z)$, стоящей внутри дробно-линейного преобразования.

Отсюда видно, что функцию $\lambda_0(z)$ можно аналитически продолжить по любому пути, не проходящему через точки $z=0,\ 1,\ \infty$. В результате продолжения получаем некоторое дробно-линейное преобразование от функции $\lambda_0(z)$. Ясно, что это преобразование входит в группу, образованную произведениями степеней преобразований S и T.

Замечая, что преобразования S и T являются преобразованиями полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta>0$ в себя, приходим к нашему утверждению, так как значения функции $\lambda_0(z)$ лежат в области G, расположенной в полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta>0$, а все преобразования группы переводят эту полуплоскость в себя.

4. Покажем, что *функция* $k(\zeta)$, *обратная к* $\lambda_0(z)$, *может быть аналитически продолжена на полуплоскость* $\operatorname{Im}\zeta>0$.

Функция $k(\zeta)$ конформно отображает область G на всю плоскость z с разрезом по положительной части действительной оси, так что на границе области G она принимает действительные значения. Так как граница области G состоит из прямых и окружностей, то это обстоятельство позволяет нам аналитически продолжить функцию $k(\zeta)$ с помощью принципа симметрии. Последовательно продолжая функцию $k(\zeta)$ через прямолинейные стороны области G, покажем, что функция $k(\zeta)$

голоморфна в области, получающейся удалением из полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$ полукругов, лежащих на отрезках $(n, n+1)$ (n — любое целое число), как на диаметрах. На границе этой области функция $k(\zeta)$ по-прежнему принимает действительные значения. Продолжая функцию $k(\zeta)$ по принципу симметрии через каждую из граничных полуокружностей, видим, что функция $k(\zeta)$ голоморфна в еще более широкой области. Эта область тоже получается удалением из полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$ счетного числа полукругов, лежащих на отрезках действительной оси, как на диаметрах. (При симметрии относительно окружности с центром на действительной оси действительная ось переходит в себя и любая окружность с центром на действительной оси переходит в какую-то другую окружность с центром на действительной оси.)

На границе новой области функция $k(\zeta)$ опять принимает действительные значения. Продолжая ее через все граничные полуокружности, мы видим, что функция $k(\zeta)$ голоморфна в еще более широкой области того же вида.

Неограниченно повторяя процесс продолжения, придем к выводу, что функция $k(\zeta)$ голоморфна во всей полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$, так как после очередного продолжения радиусы выбрасываемых полукругов сокращаются по меньшей мере вдвое. (Каждый новый полукруг является образом одного из прежних при преобразовании симметрии относительно одной из прежних полуокружностей; значит, диаметр любого нового полукруга помещается на радиусе одного из прежних.)

5. *Завершим доказательство утверждения, сформулированного в начале параграфа.*

Согласно свойству 3 аналитических однолистных функций (§ 1) из голоморфности функции $k(\zeta)$, обратной к функции $\lambda(z)$, аналитической в плоскости z с выколотыми точками $z = 0, 1, \infty$, следует однолистность функции $\lambda(z)$, так как в силу 3) образ плоскости z с выколотыми точками $z = 0, 1, \infty$, при отображении $\zeta = \lambda(z)$ лежит в полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$.

Остается показать, что образ плоскости z с выколотыми точками $z = 0, 1, \infty$ при отображении $\zeta = \lambda(z)$ совпадает с полуплоскостью $\operatorname{Im}\zeta > 0$.

Для этой цели сначала заметим, что функция $k(\zeta)$ не принимает значений 0, 1, ∞ в полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$. Действительно, в области G это справедливо, так как она конформно отображается функцией $k(\zeta)$ на плоскость z с разрезом по положительной части действительной оси. При продолжении функции $k(\zeta)$ по принципу симметрии значения, принимаемые в вершинах области G, могут приниматься только в вершинах симметричных областей. Поскольку вершины всех симметричных областей лежат на действительной оси, мы приходим к требуемому выводу.

Теперь возьмем любую точку ζ', $\operatorname{Im}\zeta'>0$, и найдем элемент функции $\lambda(z)$ и точку z', для которых $\lambda(z')=\zeta'$. Для этого соединим какую-либо точку области G с точкой $\zeta=\zeta'$ отрезком прямой и продолжим функцию $\lambda(z)$ вдоль пути L, проходимого точкой $z=k(\zeta)$, когда точка ζ проходит этот отрезок прямой. Функции $\lambda_0(z)$ и $k(\zeta)$ обратны друг другу, так что на всем пути L имеем $\lambda(k(\zeta))=\zeta$. Продолжение вдоль L возможно, так как функция $k(\zeta)$ не обращается в 0, 1, ∞. В конце L получаем $\lambda(z')=\zeta'$.

Следовательно, любое значение ζ' из полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta>0$ принимается функцией $\lambda(z)$, так что образ плоскости z с выколотыми точками $z=0$, 1, ∞ при отображении $\zeta=\lambda(z)$ совпадает с полуплоскостью $\operatorname{Im}\zeta>0$. Таким образом, доказательство того, что функция $\lambda(z)$ совершает интересующее нас отображение, закончено.

Построение функции $\zeta(z;\ a,\ b,\ c)$, использованной при доказательстве теоремы 1.1*, не составляет никакого труда. Она легко выражается через функцию $\lambda(z)$ с помощью двух дробно-линейных отображений. $\square$

С помощью формул Кристоффеля — Шварца для отображения многоугольников, ограниченных дугами окружностей (см. конец § 5 гл. V), можно было бы показать, что функция $\xi(z)=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda'(z)}}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\xi''(z)=\frac{z^2-z+1}{z^2(z-1)^2}\,\xi(z).$$

Функция $k(\zeta)$ связана с эллиптическими функциями. Она сама и все функции, выражающиеся через нее рациональным образом, называются *модулярными функциями*. $\square$

Заметим, что область G, с которой начиналось построение, есть не что иное, как фундаментальная область группы автоморфизмов отображения $\zeta=\lambda(z)$. Группу автоморфизмов мы тоже построили — она образована произведением степеней двух дробно-линейных преобразований

$$S\zeta=\frac{\zeta}{-2\zeta+1},\qquad T\zeta=\zeta-2.$$

Нетрудно описать все преобразования этой группы и иным путем. Именно: матрицы преобразований этой группы имеют вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\operatorname{mod} 2),\qquad ad-bc=1.$$

Эта группа является одной из подгрупп *модулярной группы*, состоящей из всех целочисленных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad-$ $-bc=1$. □

Модулярные функции являются специальными функциями, обладающими рядом свойств, существенно отличных от свойств элементарных функций. Так, например, функция $k(\zeta)$ не может быть аналитически продолжена за пределы полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta>0$ — все точки действительной оси являются ее особыми точками. □

С помощью модулярных функций была впервые доказана весьма глубокая *теорема Пикара*:

Теорема 5.1. *Мероморфная во всей конечной плоскости функция $f(z)$, не принимающая трех различных значений, постоянна.*

Доказательство. Пусть $f(z)\neq a$, b, c. Рассмотрим функцию

$$F(z)=\zeta(f(z);\ a,\ b,\ c),$$

где $\zeta(w;\ a,\ b,\ c)$ — функция, конформно отображающая плоскость w с выколотыми точками $w=a, b$, c на круг $|\zeta|<1$. Поскольку функция $f(z)$ не принимает значений a, b, c, а функция $\zeta(w;\ a,\ b,\ c)$ не имеет особых точек кроме $w=a$, b, c, функция $F(z)$ аналитична, а по теореме о монодромии и голоморфна во всей конечной плоскости. Кроме того, $|F(z)|<1$. По теореме Лиувилля (см. теорему 2.3 гл. IV) имеем $F(z)\equiv\text{const}$, а значит, и $f(z)\equiv$ $\equiv\text{const}$. Теорема доказана.

§ 6. Автоморфные и эллиптические функции

В связи с вопросами, о которых говорилось в § 3 и 5, естественно изложить простейшие факты из теории автоморфных функций.

Пусть дана группа γ, состоящая из дробно-линейных преобразований $A_\nu z$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$), переводящих в себя область K (которая может быть кругом, полуплоскостью или всей конечной плоскостью).

Если функция $f(z)$, мероморфная в области K, удовлетворяет условиям

$$f(A_\nu z) \equiv f(z) \qquad (z \in K,\ A_\nu \in \gamma),$$

то она называется *автоморфной относительно группы* γ.

Функции, автоморфные относительно конечных групп (например, четные), не имеют достаточно интересных специфических свойств.

Простейшим классом функций, автоморфных относительно бесконечной группы, являются периодические функции. Эти функции безусловно очень интересны, но они уже очень хорошо изучены, и их свойства стали привычными. □

Когда область K — это вся конечная плоскость, имеется лишь один содержательный класс автоморфных функций — *эллиптические* или *двоякопериодические* функции. Эллиптические функции уже давно возникали в самых различных задачах анализа (нахождение длины дуги эллипса, интегрирование простейших дифференциальных уравнений и т. д.). Разработанная теория эллиптических функций возникла раньше, чем теория групп. Вначале эллиптические функции определялись обращением эллиптических интегралов, но впоследствии было замечено, что их проще определять как функции, имеющие два периода, отношение которых — комплексное число. □

В случае, когда область K является кругом или полуплоскостью, становится значительно больше интересных классов автоморфных функций, так как появляется больше различных групп. Теория автоморфных функций берет свое начало с изучения модулярных функций, тесно связанных с эллиптическими функциями. □

Настоящее развитие теория автоморфных функций получила с переходом к функциям многих комплексных переменных. Дело в том, что любые группы дробно-линейных преобразований — это только подгруппы группы матриц второго порядка. Переход к функциям многих комплексных переменных сильно расширил выбор возможных групп. □

Мы не будем сколько-нибудь подробно излагать теорию автоморфных функций, а докажем лишь несколько простейших теорем, относящихся преимущественно к эллиптическим функциям.

Для группы γ, состоящей из дробно-линейных преобразований A_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$), переводящих область K в себя, можно, как и для группы автоморфизмов, ввести понятие фундаментальной области:

Точки области K, скажем z_1 и z_2, назовем *конгруэнтными*, если существует такое преобразование $A_\nu \in \gamma$, что $z_2 = A_\nu z_1$.

Область G_0, лежащую в области K, мы назовем фундаментальной областью группы γ, если

1) в области G_0 нет точек, конгруэнтных между собой,

2) любая точка области K конгруэнтна какой-либо точке, лежащей в области G_0 или на ее границе.

Фундаментальная область группы определяется с большой степенью произвола. Будем предполагать, что она ограничена прсотой кусочно гладкой кривой.

Пример 1. Пусть область K — вся конечная плоскость, а группа γ состоит из линейных преобразований вида

$$Az = z + n + im,$$

где n и m — произвольные целые числа. Найдем фундаментальную область этой группы.

Группа γ образована степенями двух преобразований $Sz = z + 1$ и $Tz = z + i$. Эти преобразования перестановочны. Поэтому можно построить фундаментальные области групп γ_1 и γ_2, образованных степенями преобразований S и T соответственно, а затем взять в качестве фундаментальной области нашей группы пересечение фундаментальных областей групп γ_1 и γ_2.

Фундаментальной областью группы γ_1 является любая криволинейная полоса $\varphi(y) < x < \varphi(y) + 1$, а фундаментальной областью группы γ_2 — любая криволинейная полоса $\psi(x) < y < \psi(x) + 1$. Простейшие фундаментальные области мы получим, если возьмем $\varphi(y) \equiv 0$ и $\psi(x) \equiv \equiv 0$. Их пересечением является квадрат $0 < \operatorname{Re} z < 1$, $0 <$

$< \operatorname{Im} z < 1$. Этот квадрат и есть простейшая фундаментальная область группы γ. $\square$

Можно показать, что фундаментальную область всегда можно выбрать таким образом, чтобы она была ограничена дугами окружностей и отрезками прямых. $\square$

Все теоремы мы будем доказывать для случая, когда фундаментальная область группы лежит в области K вместе с границей. Такие фундаментальные области называются *компактными*. (Теоремы можно перенести и на более общий случай, но какое-либо ограничение такого рода необходимо.)

Лемма 1. *Пусть фундаментальная область G_0 группы γ компактна и существует нетривиальная функция, автоморфная относительно группы γ. Тогда границу области G_0 можно разбить на $2m$ дуг $C_1, \ldots, C_m$ и $C'_1, \ldots, C'_m$. Для каждой дуги C'_s имеется преобразование $T_s \in \gamma$, переводящее дугу C'_s в дугу C_s с изменением направления обхода на противоположное.*

Доказательство. Пусть группа γ состоит из преобразований A_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ (A_0 — тождественное преобразование). Обозначим через G_ν образ области G_0 при отображении A_ν. Согласно определению фундаментальной области эти области G_ν не имеют общих точек, а их замыкания $\overline{G}_\nu$ заполняют в совокупности всю область K.

Покажем, что среди областей G_ν найдется конечное число областей, имеющих с областью G_0 общую дугу границы.

Для доказательства этого факта заметим, что область G_ν при $\nu \to \infty$ стягивается к границе области K. Действительно, в противном случае существует последовательность конгруэнтных между собой точек $\{z_\nu\}$, имеющая предельную точку внутри K. Это противоречит существованию нетривиальной (т. е. отличной от тождественной постоянной) функции $f(z)$, автоморфной относительно группы γ, так как мероморфная в области K функция $f(z)$ не может принимать одинаковые значения в последовательности точек, имеющей предельную точку внутри K.

Таким образом, все области G_ν с достаточно большими номерами попадают в сколь угодно малую окрестность границы области K, а область G_0 вместе со своей границей лежит внутри K. Следовательно, область G_0 граничит лишь с конечным числом областей G_ν.

Отберем из областей, граничащих с G_0, те, которые имеют общую дугу границы с G_0 (а не только точку границы). Этих областей четное число. Действительно, если преобразование $A \in \gamma$ переводит область G_0 в область, граничащую с областью G_0 по некоторой дуге, то и преобразование A^{-1} тоже переводит область G_0 в область, граничащую с областью G_0 по некоторой дуге, причем области G' и G'', получающиеся из G_0 преобразованиями A и A^{-1}, различны.

Пусть $T_1, \ldots, T_m$ — все те преобразования, для которых образы области G_0 при отображениях T_s и T_s^{-1} имеют общую дугу границы с областью G_0 и такие, что среди преобразований $T_1, T_2, \ldots, T_m$ и $T_1^{-1}, T_2^{-1}, \ldots, T_m^{-1}$ нет равных. Обозначим через G_s^* образ области G_0 при преобразовании T_s, а через G_s^{**} — образ области G_0 при преобразовании T_s^{-1}. Через C_s обозначим общую часть границы G_0 и G_0^*, а через C_s' — общую часть границы G_0 и G_0^{**}. Направление на C_s и C_s' считаем совпадающим с направлением границы G_0.

Согласно выбору преобразований $T_1, T_2, \ldots, T_m$ совокупность дуг $C_1, C_2, \ldots, C_m$ и $C_1', C_2', \ldots, C_m'$ образует всю границу G_0 и эти дуги не имеют общих точек.

Выясним, что происходит с дугой C_s' при преобразовании T_s. При этом преобразовании область G_0 переходит в область G_s^*, а область G_s^{**} (образ области G_0 при обратном преобразовании) — в область G_0. Дуга C_s' — общая граница областей G_0 и G_s^{**} — переходит в общую границу областей G_s^* и G_0. При этом направление образа C_s' совпадает с направлением границы G_s^*, т. е. противоположно направлению границы G_0. Таким образом, преобразование T_s переводит дугу C_s' в дугу C_s с изменением направления на противоположное. Лемма доказана.

Теорема 6.1. *Пусть фундаментальная область группы γ компактна. Если функция $f(z)$, автоморфная относительно группы γ, не имеет полюсов и нулей на границе фундаментальной области G_0, то число ее нулей в G_0 равно числу ее полюсов в G_0.*

Доказательство. Обозначим границу фундаментальпой области G_0 через C. По теореме 6.1 гл. IV имеем

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

где N — число нулей, а P — число полюсов функции $f(z)$ в области G_0. Обозначим через C_s и C_s' те дуги границы области G_0, о которых идет речь в лемме 1. Тогда

$$\int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{s=1}^{m} \int\limits_{C_s} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \sum_{s=1}^{m} \int\limits_{C_s'} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \qquad (6.1)$$

Сделаем в интегралах по C_s' замену $z = T_s(w)$, где $T_s \in \in \gamma$ — преобразования, переводящие дуги C_s' в дуги C_s с изменением направления. Тогда

$$\int\limits_{C_s'} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -\int\limits_{C_s} \frac{f'(T_s(w))}{f(T_s(w))} T_s'(w)\, dw = -\int\limits_{C_s} \frac{f'(w)}{f(w)} dw,$$

так как из автоморфности функции $f(z)$ следует

$$f(T_s(w)) \equiv f(w), \quad f'(T_s(w))\, T_s'(w) \equiv f'(w).$$

Следовательно, интегралы по C_s' и C_s в формуле (6.1) взаимно уничтожаются, и мы получаем $N - P = 0$. Теорема доказана.

Теорема 6.2. *Пусть фундаментальная область группы γ компактна. Тогда функция $f(z)$, автоморфная относительно группы γ и не имеющая полюсов ни внутри, ни на границе фундаментальной области,— тождественная постоянная.*

Доказательство. Пусть ζ — любое значение, не принимаемое функцией $f(z)$ на границе фундаментальной области. Применяя к функции $f(z) - \zeta$ теорему 6.1, видим, что функция $f(z)$ не принимает значение ζ и внутри фундаментальной области G_0. Таким образом, функция $f(z)$ принимает в области G_0 только те значения, которые она принимает на ее границе. По теореме 1.1 гл. V это невозможно, если $f(z) \not\equiv \text{const}$, так как образом области при отображении голоморфной функцией, отличной от тождественной постоянной, является область. Теорема доказана.

Замечание. На примере теоремы 6.2 легко убедиться, что условие компактности фундаментальной области группы γ является существенным. Действительно, рассмотрим группу γ, состоящую из преобразований $A_\nu z = z + 2\pi i\nu$ (область K — вся конечная плоскость). Фундаментальной областью этой группы является полоса $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$, а функции, автоморфные относительно этой группы,— это периодические функции с периодом $2\pi i$. Фундаментальная область не является компактной, и теорема 6.2 неверна, как показывает пример $f(z) = e^z$. $\square$

Если существует автоморфная относительно группы γ функция, имеющая в фундаментальной области только один полюс (и не имеющая полюсов на границе фундаментальной области), то такую функцию называют *основной*. $\square$

Теорема 6.3. *Пусть фундаментальная область группы* γ *компактна. Если существует основная автоморфная функция* $\varphi(z)$, *то любая другая функция, автоморфная относительно группы* γ, *является рациональной функцией от основной.*

Доказательство. Пусть $f(z)$ — любая функция, автоморфная относительно группы γ, и пусть a и b — любые два значения, не принимаемых функцией $f(z)$ на границе фундаментальной области G_0. Обозначим те точки области G_0, в которых $f(z) = a$, через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, а те, в которых $f(z) = b$,— через $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ (каждую точку пишем столько раз, какова ее кратность).

Рассмотрим функцию

$$F(z) = \frac{f(z) - a}{f(z) - b} \cdot \frac{[\varphi(z) - \varphi(\beta_1)] \ldots [\varphi(z) - \varphi(\beta_m)]}{[\varphi(z) - \varphi(\alpha_1)] \ldots [\varphi(z) - \varphi(\alpha_m)]}.$$

Эта функция не имеет полюсов ни внутри, ни на границе области G_0, так как она могла бы иметь полюсы лишь в точках, где $f(z) = b$ или где $\varphi(z) = \varphi(\alpha_s)$, но в этих точках нули числителя и знаменателя имеют одинаковую кратность. (По теореме 6.1 все нули функции $\varphi(z) - \varphi(\alpha)$ — простые, а число нулей функций $f(z) - a$ и $f(z) - b$ одинаково.) Следовательно, по теореме 6.2 $F(z) \equiv \mathrm{const}$, и теорема доказана. $\square$

Таким образом, если удается построить основную автоморфную функцию, то структура всего класса функций, автоморфных относительно заданной группы, становится ясна. К сожалению, основная автоморфная функция существует далеко не всегда, и для описания всего класса автоморфных функций приходится прибегать к более сложным построениям.

Рассмотрим этот вопрос для эллиптических функций. *Эллиптическими функциями* называются функции, автоморфные относительно группы, состоящей из преобразований

$$Az = z + n_1\omega_1 + n_2\omega_2,$$

где n_1 и n_2 — произвольные целые числа, а ω_1 и ω_2 — заданные числа, отношение которых не является действительным числом. Числа ω_1 и ω_2 являются периодами эллиптической функции.

Фундаментальная область группы строится из тех же соображений, что и в примере 1. Простейшей фундаментальной областью является параллелограмм с вершинами $z = 0$, $z = \omega_1$, $z = \omega_2$, $z = \omega_1 + \omega_2$, который называется *параллелограммом периодов*. Ясно, что фундаментальная область компактна.

Основная автоморфная функция не существует. Действительно, если бы функция $\varphi(z)$ имела в параллелограмме периодов один простой полюс, то интеграл по границе параллелограмма периодов был бы равен вычету в этом полюсе, т. е. был бы отличен от нуля. Но интеграл от $\varphi(z)$ по параллелограмму периодов равен нулю, так как на противоположных сторонах функция $\varphi(z)$ в силу периодичности принимает одинаковые значения, и эти интегралы взаимно уничтожаются. $\square$

Таким образом, простейшая эллиптическая функция может иметь в параллелограмме периодов или один двойной полюс, или два простых полюса. Такие функции существуют. $\square$

Эллиптическая функция с одним двойным полюсом в точке $z = 0$ называется $\wp$-функцией Вейерштрасса. Она определяется рядом

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum\sum\left\{\frac{1}{(z + n_1\omega_1 + n_2\omega_2)^2} - \frac{1}{(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)^2}\right\}$$

(суммирование производится по всем целым n_1 и n_2, кроме случая, когда и $n_1 = 0$ и $n_2 = 0$). Нетрудно проверить, что этот ряд равномерно сходится во всей плоскости z, за исключением точек, конгруэнтных нулю, так как его члены, начиная с некоторого, не превосходят по абсолютной величине членов абсолютно сходящегося числового ряда

$$\sum\sum \frac{C}{|n_1\omega_1 + n_2\omega_2|^3} \qquad \left(\operatorname{Im}\frac{\omega_2}{\omega_1} \neq 0\right).$$

Периодичность функции $\wp(z)$ с периодами ω_1 и ω_2 вытекает из того, что при замене z на $z+\omega_1$ или на $z+\omega_2$ члены ряда лишь несколько иначе группируются.

Видно, что $\wp(z)$ — четная функция и $\lim\limits_{z\to 0}\left\{\wp(z) - \frac{1}{z^2}\right\} = 0$.

Теорема 6.4. *Любая эллиптическая функция с периодами ω_1 и ω_2 может быть представлена в виде*

$$f(z) = R_1(\wp(z)) + \wp'(z)\, R_2(\wp(z)),$$

где $R_1(w)$ и $R_2(w)$ — рациональные функции.

Доказательство. Заметим, что функция $\wp(z)$ $\left(\text{или, точнее, функция } \varphi(z) = \frac{1}{\wp(z) - a}\right)$ является основной автоморфной функцией для группы, состоящей из преобразований

$$Az = \pm z + n_1\omega_1 + n_2\omega_2.$$

Действительно, в качестве фундаментальной области этой группы можно взять параллелограмм с вершинами

$$-\frac{\omega_1}{2},\quad \frac{\omega_1}{2},\quad \frac{\omega_1+\omega_2}{2},\quad \frac{\omega_2-\omega_1}{2}$$

(половина параллелограмма периодов), в котором в силу четности функция $\wp(z)$ принимает каждое значение один раз.

Функции, автоморфные относительно нашей группы,— это четные эллиптические функции с периодами ω_1 и ω_2. Следовательно, по теореме 6.3 любая четная эллиптическая функция является рациональной функцией от $\wp(z)$.

Если $f(z)$ — нечетная эллиптическая функция, то $\frac{f(z)}{\wp'(z)}$ — четная эллиптическая функция. Поэтому любая нечетная эллиптическая функция может быть представлена в виде $\wp'(z)\, R(\wp(z))$. Представляя любую функцию в виде суммы четной и нечетной, получаем утверждение теоремы. □

Заметим что функция Вейерштрасса используется главным образом в общетеоретических вопросах из-за медленной сходимости ряда для нее. В прикладных вопросах обычно используются эллиптические функции Якоби и так называемые тэта-функции*). □

Очень важным свойством эллиптических функций является их связь с дифференциальными уравнениями.

Теорема 6.5. *Функция* $\wp(z)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3,$$

где g_2 и g_3 — *постоянные, зависящие от периодов* ω_1 *и* ω_2.

Доказательство. Функции $\wp(z)$ и $\wp'(z)$ не имеют в параллелограмме периодов полюсов, отличных от $z=0$. Поэтому для доказательства теоремы нам достаточно убедиться, что выражение

$$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + g_2\wp(z)$$

не имеет полюса при $z=0$, если подходящим образом выбрать постоянную g_2. Мы знаем, что $\wp(z)$ — четная функция и $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + o(1)$ $(z\to 0)$. Это значит, что

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + c_1z^2 + c_2z^4 + \ldots$$

Отсюда

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2c_1z + \ldots,$$

$$\wp'^2(z) = \frac{4}{z^6} - \frac{8c_1}{z^2} + O(1),$$

$$\wp^3(z) = \frac{1}{z^6} + \frac{3c_1}{z^2} + O(1).$$

Полагая $g_2 = 20c_1$, получаем утверждение теоремы.

Заметим, что уравнение (6.2) интегрируется в квадратурах, что позволяет нам получить следующее выражение для функции $z(w)$, обратной к функции $\wp(z)$:

$$z(w) = \int\limits_w^\infty \frac{dw}{\sqrt{4w^3 - g_2w - g_3}}.$$

*) Изложение теории эллиптических функций Якоби и тэта-функций можно найти в [1, 12, 36].

Глава X

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ

Методы оценки аналитических функций, основанные на субгармоничности логарифма модуля голоморфной функции, далеко не всегда могут дать достаточно тонкие результаты. В этой главе мы изложим некоторые методы, использующие прямое отыскание экстремальных функций и позволяющие получить более глубокие оценки. Большинство этих методов возникло в связи с теорией однолистных функций и с неванлинновской теорией распределения значений мероморфных функций. Об этих разделах теории аналитических функций также будет кратко рассказано в этой главе.

§ 1. Принцип гиперболической метрики

Чтобы представить себе трудности, с которыми приходится иметь дело, рассмотрим одну довольно простую задачу.

Пусть дана функция $f(z)$, голоморфная и не превосходящая единицы в круге $|z| < 1$. Как усилить это неравенство, если дополнительно известно, что $|f(a)| \leqslant \alpha < 1$, где $|a| \leqslant r < 1$? $\square$

Заметим сразу, что использование субгармоничности $\ln|f(z)|$ в круге $|z| < 1$ ничего не даст. Действительно, в простейшем частном случае, когда $a = 0$ и $\alpha = 0$, существует субгармоническая функция $\varepsilon \ln|z|$, которая равна $-\infty$ при $z = 0$ и сколь угодно мало отличается от нуля (при подходящем выборе ε) для всех остальных z в круге $|z| < 1$.

Оценку в случае $a = 0$, $\alpha = 0$ мы получим сейчас с помощью так называемой *леммы Шварца*:

Лемма 1. *Если функция $f(z)$ голоморфна при $|z| < 1$ и удовлетворяет условиям*

$$f(0) = 0, \quad |f(z)| < 1 \quad (|z| < 1),$$

то

$$|f'(0)| \leqslant 1, \quad |f(z)| \leqslant |z| \quad (|z| < 1).$$

Знак равенства достигается только для функции $f(z)\equiv ze^{i\theta}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(z)= =\frac{f(z)}{z}$. Поскольку $f(0)=0$, функция $\varphi(z)$ голоморфна в круге $|z|<1$ и $\varphi(0)=f'(0)$ (см., например, § 2 гл. IV). Кроме того,

$$\overline{\lim_{|z|\to 1}}\,|\varphi(z)| = \overline{\lim_{|z|\to 1}}\,|f(z)|.$$

Применяя принцип максимума (см. § 2 гл. VIII), получаем: $|\varphi(z)|\leqslant 1$ при $|z|<1$, и знак равенства достигается только для функции, постоянной во всем круге. Возвращаясь к $f(z)$, приходим к утверждению леммы. □

Лемма Шварца является основой принципа гиперболической метрики, но для перехода от нее к общей формулировке принципа (с помощью которой легко можно решить в полном виде и многие более сложные задачи) понадобится некоторая подготовка. □

Лемма 2. *Пусть $w(z)$ — какая-либо функция, конформно отображающая область D на круг $|w|<1$. Выражение*

$$\rho(z, D)=\frac{|w'(z)|}{1-|w(z)|^2}$$

однозначно определено в области D и не зависит от выбора отображающей функции $w(z)$.

Доказательство. Нам нужно показать, что величина $\rho(z, D)$ не меняется при замене функции $w(z)$ функцией

$$w_1(z)=e^{i\theta}\cdot\frac{w(z)-a}{w-\bar{a}w(z)} \qquad (|a|<1).$$

(Согласно следствию теоремы 1.2 гл. IX любая другая функция, конформно отображающая область D на круг $|w|<1$, как и любая другая ветвь той же отображающей функции, выражается через $w(z)$ с помощью дробно-линейного отображения круга $|w|<1$ на себя.)

Имеем

$$|w_1'(z)|=\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}w(z)|^2}\quad |w'(z)|$$

и

$$1-|w_1(z)|^2=\frac{|1-\bar{a}w|^2-|a-w|^2}{|1-\bar{a}w|^2}=$$

$$=\frac{(1-\bar{a}w)(1-a\bar{w})-(a-w)(\bar{a}-\bar{w})}{|1-\bar{a}w|^2}=\frac{(1-|w|^2)(1-|a|^2)}{|1-\bar{a}w|^2}.$$

Отсюда без труда получаем утверждение леммы. □

Величину $\rho(z, D)$ назовем *плотностью гиперболической* (или *инвариантной*) *метрики области* D.

Видно, что $\rho(z, D)\to+\infty$, когда z стремится к границе области D. Можно показать, что функция $\rho(x+iy, D)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{-4u}, \quad u=\frac{1}{2}\ln\rho(z, D).$$

Гиперболическую метрику области D получаем, задавая *элемент гиперболической длины* ds равенством

$$ds=\rho(z, D)\,|dz|.$$

Когда задан элемент длины, можно говорить о длине кривой и о площади области. Можно говорить и о расстоянии между двумя точками как о наименьшей длине кривой, соединяющей эти точки. Ту кривую, для которой достигается эта наименьшая длина, естественно называть прямой.

Таким образом, задание метрики в области D делает эту область моделью некоторого геометрического пространства. Оказывается, что это пространство является плоскостью Лобачевского. Эта модель особенно наглядна, если в качестве области D взять полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$. Там прямыми являются окружности с центром на действительной оси.

Поскольку геометрия плоскости Лобачевского называется еще и гиперболической геометрией, введенная нами в области D метрика получила название гиперболической метрики (употребляется и название: неевклидова метрика).

Приведем формулы для основных величин в гиперболичесокй метрике. Эти формулы легко вытекают из определения элемента длины.

Гиперболическая длина кривой L, лежащей в D, равна

$$\mu(L, D)=\int_L \rho(z, D)\,|dz|.$$

Гиперболическая площадь области $S \subset D$ равна

$$\Delta(S, D) = \iint_D \rho^2(z, D)\,dx\,dy.$$

Гиперболическое расстояние между точками $z_1 \in D$ и $z_2 \in D$ равно

$$r(z_1, z_2; D) = \frac{1}{2} \ln \frac{\left|1 - w(z_1)\overline{w(z_2)}\right| + |w(z_1) - w(z_2)|}{\left|1 - w(z_1)\overline{w(z_2)}\right| - |w(z_1) - w(z_2)|},$$

где $w(z)$ — любая функция, конформно отображающая D на круг $|w| < 1$. □

Одним из основных свойств гиперболической метрики является ее *инвариантность относительно конформных отображений.* Это свойство состоит в следующем:

Пусть функция $\zeta(z)$ *конформно отображает область* D *на область* G. *Тогда*

$$\mu(L, D) = \mu(\zeta(L), G),$$

$$\Delta(S, D) = \Delta(\zeta(S), G),$$

$$r(z_1, z_2, D) = r(\zeta(z_1), \zeta(z_2), G).$$

Это свойство сразу получается из определения. Например, первое из равенств получается с помощью замены переменной интегрирования, второе — так же, третье — из первого.

Это свойство послужило причиной того, что гиперболическая метрика часто называется *инвариантной метрикой.* □

Перейдем к формулировке *принципа гиперболической метрики.* Наиболее употребительной его формой является следующая теорема:

Теорема 1.1. *Пусть области* D *и* G *имеют хотя бы по три граничные точки. Если функция* $f(z)$ *голоморфна в области* D*, а ее значения лежат в области* G*, то*

$$|f'(z)|\,\rho(f(z), G) \leqslant \rho(z, D) \qquad (z \in D).$$

Доказательство. Пусть a — произвольная точка области D, а $b = f(a)$. По условию теоремы $b \in G$. Обозначим через $\zeta(z)$ функцию, конформно отображающую область D на круг $|\zeta| < 1$ и переводящую точку $z = a$ в точку $\zeta = 0$. Через $z(\zeta)$ обозначим функцию, обратную к $\zeta(z)$. Аналогично через $t(w)$ обозначим функцию, конформно отображающую область G на круг $|t| < 1$ и переводящую точку $w = b$ в точку $t = 0$, а через $w(t)$ — обратную к ней функцию.

Рассмотрим функцию

$$g(\zeta) = t(f(z(\zeta))).$$

Эта функция аналитична, а значит, и голоморфна в круге $|\zeta| < 1$. Будем считать, что выбрана та ветвь этой функции, которая обращается в нуль в точке $\zeta = 0$. Очевидно, имеем

$$g(0) = 0, \quad |g(\zeta)| \leqslant 1 \quad (|\zeta| < 1),$$

т. е. функция $f(\zeta)$ удовлетворяет условиям леммы Шварца. Следовательно, $|g'(0)| \leqslant 1$, причем знак равенства может достигаться лишь для функции $g(\zeta) \equiv \zeta e^{i\theta}$. Но

$$g'(0) = t'(b) \cdot f'(a) \cdot z'(0),$$

и поскольку $z'(0) = \frac{1}{\zeta'(a)}$, получаем

$$|f'(a)| \cdot |t'(f(a))| \leqslant |\zeta'(a)|.$$

Принимая во внимание, что $t(f(a)) = 0$, $\zeta(a) = 0$, находим

$$|t'(f(a))| = \rho(f(a), G), \quad |\zeta'(a)| = \rho(a, G).$$

Отсюда легко получаем утверждение теоремы.

Замечание 1. Если область G содержит бесконечно удаленную точку, то функцию $f(z)$ естественно предполагать не голоморфной, а *мероморфной* в области D.

Замечание 2. Утверждение теоремы 1.1 остается в силе, если считать, что функция $f(z)$ не голоморфна, а *аналитична* в области D. Это означает, что для функций, голоморфных в области D, неравенство может оказаться не наилучшим из возможных. Будет это так или нет, проще всего выяснить, найдя экстремальную функцию. Если экстремальная функция однозначна в области D, то неравенство улучшить нельзя, а если она неоднозначна,— можно. Так как экстремальная функция заведомо аналитична в области D, то для односвязной области D неравенство теоремы 1.1 является наилучшим возможным. Для многосвязной области D требуется дополнительное исследование.

Из теоремы 1.1 легко выводятся и все другие формулировки принципа гиперболической метрики:

Пусть функция $f(z)$ голоморфна *в области* D, *а ее значения лежат в области* G. *Тогда*

$$\mu(L, D) \geqslant \mu(f(L), G),$$
$$\Delta(S, D) \geqslant \Delta(f(S), G),$$
$$r(a, b, D) \geqslant r(f(a), f(b), G).$$

Чтобы оценить степень содержательности написанных неравенств, читатель может рассмотреть случай, когда области D и G — единичные круги, $f(z) = z^n$, а L — дуга окружности $|z| = r < 1$. $\square$

Рассмотрим несколько типичных примеров получения оценок аналитических функций с помощью теоремы 1.1. В частности, решим и ту задачу, о которой говорили в начале параграфа.

Пример 1. Пусть функция $f(z)$ голоморфна и не превосходит единицы в круге $|z| < 1$. Покажем, что

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1}{1 - |z|^2} \qquad (|z| < 1). \tag{1.1}$$

Если область B — единичный круг, то

$$\rho(z, B) = \frac{1}{1 - |z|^2},$$

и теорема 1.1 дает, что

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leqslant \frac{1}{1 - |z|^2} \qquad (|z| < 1), \tag{1.2}$$

откуда сразу получаем (1.1). Для любой функции, конформно отображающей единичный круг на себя, неравенство (1.2) обращается в равенство. Поскольку среди функций, конформно отображающих единичный круг на себя, есть функции, обращающиеся в нуль в любой заданной точке единичного круга, то неравенство (1.1) нельзя заменить более сильным.

Пример 2. Пусть функция $f(z)$ голоморфна и не превосходит единицы в круге $|z| < 1$. Покажем, что если $|f(a)| \leqslant \alpha < 1$, где a — некоторая точка круга $|z| \leqslant r < 1$, то при $|z| < 1$ справедливо неравенство

$$|f(z)| \leqslant \frac{(1+\alpha)(1+r)(1+|z|) - (1-\alpha)(1-r)(1-|z|)}{(1+\alpha)(1+r)(1+|z|) + (1-\alpha)(1-r)(1-|z|)}. \tag{1.3}$$

Напишем равенство

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+e^{i\theta}f(z)}{1-e^{i\theta}f(z)}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+e^{i\theta}f(a)}{1-e^{i\theta}f(a)}=\int\limits_a^z\frac{e^{i\theta}f'(t)}{1-e^{2i\theta}f^2(t)}\,dt.$$

Путь интегрирования от a до z составим из прямолинейных отрезков $(a, 0)$ и $(0, z)$. Тогда

$$\left|\int\limits_a^z\frac{e^{i\theta}f'(t)\,dt}{1-e^{2i\theta}f^2(t)}\right|\leqslant\int\limits_0^a\frac{|f'(t)|}{1-|f(t)|^2}|dt|+\int\limits_0^z\frac{|f'(t)|}{1-|f(t)|^2}|dt|,$$

и используя неравенство (1.2), получаем

$$\frac{1}{2}\left|\ln\frac{1+e^{i\theta}f(z)}{1-e^{i\theta}f(z)}\right|\leqslant\frac{1}{2}\ln\frac{1+|f(a)|}{1-|f(a)|}+\int\limits_0^{|a|}\frac{du}{1-u^2}+\int\limits_0^{|z|}\frac{du}{1-u^2},$$

откуда

$$\left|\ln\frac{1+e^{i\theta}f(z)}{1-e^{i\theta}f(z)}\right|\leqslant\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\ln\frac{1+r}{1-r}+\ln\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Выбирая число θ так, чтобы $e^{i\theta}f(z)=|f(z)|$, получаем неравенство

$$\ln\frac{1+|f(z)|}{1-|f(z)|}\leqslant\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\ln\frac{1+r}{1-r}+\ln\frac{1-|z|}{1+|z|},$$

из которого уже легко получаем неравенство (1.3).

Пример 3. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге $|z|<1$ и не принимает в этом круге действительных отрицательных значений. Покажем, что

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\frac{4}{1-|z|^2}\qquad(|z|<1)\tag{1.4}$$

и

$$\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^2\leqslant\left|\frac{f(z)}{f(0)}\right|\leqslant\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2\qquad(|z|<1).\tag{1.5}$$

Теперь область D — это круг $|z|<1$, а область G — плоскость w с разрезом по отрицательной части действительной оси. Функция $\zeta=\dfrac{1-\sqrt{w}}{1+\sqrt{w}}$ конформно отображает область G на круг $|\zeta| < 1$. Поэтому

$$\frac{|\zeta'(w)|}{1-|\zeta(w)|^2} = \frac{1}{\sqrt{|w|}} \frac{1}{|1+\sqrt{w}|^2 - |1-\sqrt{w}|^2} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{|w|}} \frac{1}{(1+\sqrt{|w|})^2 - (1-\sqrt{|w|})^2} = \frac{1}{4|w|}$$

и

$$\rho(w, G) = \frac{1}{4|w|}$$

(для $w > 0$ это неравенство обращается в равенство). Поскольку $\rho(z, D) = \dfrac{1}{1-|z|^2}$, теорема 1.1 дает неравенство (1.4).

Далее,

$$\left|\ln\left|\frac{f(z)}{f(0)}\right|\right| \leqslant \left|\ln\frac{f(z)}{f(0)}\right| = \left|\int_0^z \frac{f'(t)}{f(0)}\,dt\right| \leqslant 4\int_0^{|z|} \frac{du}{1-u^2} = 2\ln\frac{1+|z|}{1-|z|},$$

откуда

$$-2\ln\frac{1+|z|}{1-|z|} \leqslant \ln\left|\frac{f(z)}{f(0)}\right| \leqslant 2\ln\frac{1+|z|}{1-|z|},$$

и мы получаем неравенства (1.5). $\square$

Вернемся к общим вопросам. Особо отметим один **частный случай** теоремы 1.1.

Теорема 1.2. *Наибольшее значение $|f'(a)|$ в классе функций, аналитических в области D и удовлетворяющих условиям*

$$f(a) = 0, \quad |f(z)| \leqslant 1 \quad (z \in D),$$

достигается для функции $w(z)$, конформно отображающей область D на круг $|w| < 1$, и только для нее. Это наибольшее значение равно $\rho(z, D)$.

Доказательство. Из теоремы 1.1 (область G — круг $|w| < 1$) следует, что для любой функции $f(z)$ из указанного класса имеем

$$|f'(a)| \leqslant \frac{\rho(a, D)}{\rho(0, G)} = \rho(a, D)$$

(так как $\rho(0, |w| < 1) = 1$). Это неравенство обращается в равенство только для $f(z) = e^{i\theta} w(z)$.

Следствие. *Если* $D \subset D_1$, *то* $\rho(z, D) \geqslant \rho(z, D_1)$ $(z \in D)$, *причем знак равенства возможен лишь в случае* $D \equiv D_1$.

Действительно, функция, конформно отображающая более широкую область на круг $|w| < 1$, входит в указанный класс для более узкой области, и отображающие функции совпадают с точностью до множителя $e^{i\theta}$ только тогда, когда совпадают сами области. □

Интересно отметить, что факт, полученный в теореме 1.2, был содержанием весьма нетривиальной теоремы 1.1 гл. IX о существовании конформного отображения. Оказывается, предположение о существовании конформного отображения делает доказательство этого факта почти тривиальным.

Интересно, что во многих экстремальных задачах теории аналитических функций структура экстремальных функций тоже может быть описана с помощью тех или иных отображающих функций. Например (см. [10]):

Пусть D является m-связной областью. Наибольшее значение $|f'(a)|$ в классе функций, голоморфных в области D и удовлетворяющих условиям

$$f(a) = 0, \quad |f(z)| \leqslant 1 \qquad (z \in D),$$

достигается для функции $w(z)$, осуществляющей отображение области D на m раз покрытый единичный круг.

Экстремальным задачам посвящена большая литература (главным образом, журнальные статьи). В большинстве своем эти задачи относятся, скорее, к вариационному исчислению.

§ 2. Принцип симметризации

В применениях принципа гиперболической метрики часто приходится сталкиваться с вопросом, подобным следующему:

Пусть область D — это вся плоскость с разрезом по некоторой кривой, выходящей из начала. При какой форме этой кривой значение величины $\rho(z, D)$ будет наименьшим?

В большинстве случаев на такие вопросы можно получить ответ с помощью следующей теоремы, являющейся частным случаем так называемого *принципа симметризации.*

Теорема 2.1. *Пусть область D такова, что на каждой окружности $|z|=\rho$ при $\rho \geqslant r$ имеется хотя бы одна точка, не принадлежащая области D. Тогда*

$$\rho(z, D) \geqslant \frac{1}{4(|z|+r)}.$$

Знак равенства достигается только для случая, когда D — это вся плоскость с разрезом по лучу $(-re^{i\varphi}, -\infty e^{i\varphi})$, где $\varphi = \arg z$.

Доказательство. Обозначим через D_r плоскость с разрезом по лучу $(-r, -\infty)$. Ясно, что можно доказывать теорему только для случая, когда $z = a > 0$. Тогда равенство $\rho(a, D) = \dfrac{1}{4(a+r)}$ возможно лишь, когда D совпадает с D_r $\left(\text{тем же способом, что и в примере 3 § 1, легко убедиться, что } \rho(a, D_r) = \dfrac{1}{4(a+r)}\right)$.

Заметим, что при исследовании возможности равенства мы можем не интересоваться случаем, когда D является частью D_r. Действительно, тогда заведомо имеет место строгое неравенство (см. следствие теоремы 1.2).

Покажем, что для доказательства теоремы достаточно для любого $a > 0$ построить функцию $\varphi(z)$ со следующими свойствами.

1. Функция $\varphi(z)$ аналитична в области D.
2. $\varphi(0) = 0$, $|\varphi(z)| \leqslant 1$ $(z \in D)$.
3. Если D не является частью D_r, то $|\varphi'(a)| > \dfrac{1}{4(a+r)}$.

Действительно, по теореме 1.1 (с учетом замечания 2) для функции $\varphi(z)$ должно быть выполнено неравенство

$$|\varphi'(a)|\rho(0, G) \leqslant \rho(a, D),$$

где G — область, в которой лежат значения $\varphi(z)$. В силу условия 2 в качестве G можно взять круг $|w| < 1$, а

$$\rho(0, |w| < 1) = 1.$$

Поэтому

$$\rho(a, D) \geqslant |\varphi'(a)|,$$

и утверждение теоремы следует из условия 3, так как для области D, являющейся частью D_r, вопрос уже решен. Нам будет несколько удобнее строить функцию $u(z) = \ln\left|\dfrac{\varphi(z)}{z-a}\right|$. Заметим, что достаточно построить функцию $u(z)$, обладающую следующими свойствами:

1*. Функция $u(z)$ гармонична в области D.

2*. $u(z) \leqslant -\ln|z-a|$ $(z \in D)$.

3*. Если D не является частью D_r, то $u(a) \geqslant \ln\frac{1}{4(a+r)}$.

Действительно, пусть такая функция $u(z)$ построена. Обозначим через $w(z)$ функцию, имеющую $u(z)$ своей действительной частью, и положим

$$\varphi(z) = (z-a)\, e^{w(z)}.$$

Эта функция обладает требуемыми свойствами. Условие 1* обеспечивает выполнение условия 1. Из условия 2* следует выполнение условия 2 (что $\varphi(a)=0$, очевидно). Из условия 3* следует выполнение условия 3, так как $|\varphi'(a)| = e^{u(a)}$.

При построении функции $u(z)$ понадобится формула

$$\frac{\sqrt{a}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\ln|z+x|}{a+x}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\ln|\sqrt{z}+\sqrt{a}|, \tag{2.1}$$

которая справедлива при $a>0$ и при любых z (для $\sqrt{z}$ берется главное значение, т. е. $\operatorname{Re}\sqrt{z} \geqslant 0$).

Для доказательства этой формулы напишем

$$\frac{\sqrt{a}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\ln|z+x|}{a+x}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{a}}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln|z+t^2|}{a+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln|t+i\sqrt{z}|+\ln|t-i\sqrt{z}|}{a+t^2}\,dt.$$

Поскольку, вычисляя интегралы с помощью вычетов (см. формулу (3.7) гл. VI), легко получаем

$$\frac{\sqrt{a}}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln|t+i\sqrt{z}|}{a+t^2}\,dt = \frac{\sqrt{a}}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln|t-i\sqrt{z}|}{a+t^2}\,dt =$$

$$= \ln|\sqrt{z}+\sqrt{a}|,$$

мы приходим к требуемой формуле.

Особо отметим, что при отрицательных z формула принимает более простой вид:

$$\frac{\sqrt{a}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\ln|x-t|}{a+x}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \ln(a+t) \qquad (t>0). \tag{2.2}$$

Теперь перейдем к построению функции $u(z)$.

По условию теоремы на каждой окружности $|z| = \rho$ при $\rho \geqslant r$ найдется хотя бы одна точка z_ρ, не принадлежащая области D. Обозначим

$$z_\rho = -\rho e^{i\theta(\rho)}, \quad -\pi \leqslant \theta(\rho) \leqslant \pi,$$

и положим

$$u(z) = -\frac{\sqrt{a+r}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln|z + (x+r)\, e^{i\theta(x+r)}|}{a+r+x} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Убедимся, что эта функция удовлетворяет условиям 1*—3*. Интеграл для функции $u(z)$ равномерно сходится в любой конечной части плоскости, так что $u(z)$ непрерывна во всей плоскости. Подынтегральная функция является гармонической функцией параметра z во всей плоскости, за исключением точек

$$z = -(x+r)\, e^{i\theta(x+r)} \qquad (x > 0).$$

Поскольку эти точки не входят в область D, равномерная сходимость интеграла обеспечивает гармоничность функции $u(z)$ в области D. Тем самым условие 1* выполнено.

Из очевидного неравенства

$$\ln|z + (x+r)\, e^{i\theta(x+r)}| \geqslant \ln|x + r - |z||$$

получаем

$$u(z) \leqslant -\frac{\sqrt{a+r}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln|x + r - |z||}{a+r+x} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Согласно формуле (2.2) это дает нам $u(z) \leqslant -\ln(a + |z|) \leqslant$ $\leqslant -\ln|z - a|$, т. е. условие 2* тоже выполнено.

При любых положительных z и ρ имеем неравенство

$$\ln|z + \rho e^{i\theta}| = \frac{1}{2} \ln\left((z+\rho)^2 - 4z\rho \sin^2\frac{\theta}{2}\right) =$$
$$= \ln(z+\rho) + \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{4z\rho}{(z+\rho)^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \ln(z+\rho) - \frac{2z\rho}{(z+\rho)^2}\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Из этого неравенства следует, что

$$\ln|a + (x+r)\, e^{i\theta(x+r)}| \leqslant$$
$$\leqslant \ln(a + x + r) - \frac{2a(x+r)}{(a+x+r)^2}\sin^2\frac{\theta(x+r)}{2}.$$

С помощью последнего неравенства и формулы (2.1) получаем

$$u(a) \geqslant -2\ln\left(2\sqrt{a+r}\right) + \\ + \frac{2a\sqrt{a}}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{x+r}{(a+x+r)^3}\sin^2\frac{\theta(x+r)}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Последний интеграл может обратиться в нуль только в случае, если функция $\theta(x+r)$ почти всюду равна нулю. Но в этом случае весь луч $(-r, -\infty)$ обязан не содержать точек области D, т. е. область D является частью области D_r. Если же D не является частью D_r, то $u(a) > \ln\frac{1}{4(a+r)}$, т. е. условие 3* тоже выполнено. Теорема доказана. $\square$

В случае, когда приходится иметь дело с задачами, подобными той, о которой мы говорили в начале параграфа, можно обобщать теорему с помощью конформного отображения. Однако при этом приходится отказаться от предположения, что точки, не принадлежащие D, могут и не образовывать связное множество. $\square$

Имеется и более существенное обобщение теоремы 2.1, известное под названием принципа симметризации. Для его формулировки введем одно новое понятие.

По области D образуем *симметризованную область* D^* следующим образом.

Если окружность $|z| = \rho$ пересекает область D по дугам, сумма длин которых равна $\theta(\rho)$, то эта окружность пересекает область D^* по одной дуге длины $\theta(\rho)$ с серединой в точке $z = -\rho$ (если окружность $|z| = \rho$ целиком лежит в D, то она целиком лежит и в D^*, и наоборот).

Тогда имеет место неравенство (см. [41])

$$\rho(z, D) \geqslant \rho(|z|, D^*) \qquad (z \in D).$$

Аналогичное неравенство устанавливается и для гармонической меры, фигурирующей в проблеме Карлемана — Мию, которая обсуждалась в § 4 гл. VIII. Этот результат (и многие другие) также имеется в [41].

§ 3. Оценки однолистных в среднем функций

В качестве примера применения изложенных методов рассмотрим задачу о получении точных оценок для функций, однолистных и голоморфных в единичном круге.

Многие из этих оценок справедливы и для более широкого класса функций, который называется классом функций, однолистных в среднем по окружности. Поэтому сначала мы определим этот класс и познакомимся с простейшими свойствами входящих в него функций. □

Обозначим через $n(w, f)$ число нулей функции $f(z)-w$ (считаемых с кратностью) в круге $|z|<1$.

Для однолистности функции $f(z)$ в круге $|z|<1$ необходимо и достаточно, чтобы $n(w, f) \leqslant 1$ для любых w.

Функция $f(z)$ называется *однолистной в среднем по окружности в круге* $|z|<1$, если при любом $\rho>0$ имеем неравенство *)

$$\int\limits_{|w|=\rho} n(w, f)\,|dw| \leqslant 2\pi\rho.$$

Ясно, что функция, однолистная в круге $|z|<1$, является и однолистной в среднем по окружности в этом круге. □

Отметим два важных свойства функций, однолистных в среднем по окружности.

Свойство 1. *Пусть функция $z(\zeta)$ конформно отображает единичный круг на область, лежащую в единичном круге. Если функция $f(z)$ однолистна в среднем по окружности в круге $|z|<1$, то и функция $g(\zeta)=f(z(\zeta))$ тоже однолистна в среднем по окружности в круге* $|\zeta|<1$.

Для доказательства этого свойства достаточно заметить, что $n(w, f) \geqslant n(w, g)$, так как каждое значение w', принимаемое функцией $g(\zeta)$ в точке $\zeta=\zeta'$, функция $f(z)$ принимает в точке $z'=z(\zeta')$.

Свойство 2. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге $|z|<1$ и однолистна в среднем по окружности в этом круге. Тогда существует число $d=d(f)$, обладающее следующим свойством:*

Для любого w, лежащего в круге $|w| \leqslant d$, имеем $n(w, f)=1$, а на любой окружности $|w|=\rho$, $\rho>d$, найдется значение w_ρ, для которого $n(w_\rho, f)=0$.

---

*) Интегрируемость функции $n(w, f)$ по Лебегу доказать нетрудно, но при желании избежать интегрирования по Лебегу можно вместо этого интеграла рассматривать предел при $r \to 1$ интеграла от функции $n(r, w, f)$, где $n(r, w, f)$ — число нулей функции $f(z)-w$ в круге $|z|<r$. Эта функция монотонна и имеет конечное число точек разрыва при любом $r<1$.

Пусть на окружности $|w| = \rho$ нет точек, для которых $n(w, f) = 0$. Это возможно лишь в случае, если $n(w, f) = 1$ для всех w на этой окружности. Действительно, по теореме 1.1 гл. V множество точек, где $n(w, f) \geqslant 2$, является открытым множеством. Это значит, что из наличия на окружности $|w| = \rho$ одной точки этого множества следует существование целой дуги окружности, входящей в это множество. Это привело бы к противоречию с условием

$$\int\limits_{|w|=\rho} n(w, f)\,|dw| \leqslant 2\pi\rho,$$

так как $n(w, f) \geqslant 1$ при всех w на окружности интегрирования и $n(w, f) \geqslant 2$ на некоторой дуге этой окружности.

Таким образом, для всех $\rho > 0$ имеет место одна из двух возможностей: или $n(w, f) = 1$ для всех w на окружности $|w| = \rho$, или найдется точка w_ρ на окружности $|w| = \rho$, для которой имеем $n(w_\rho, f) = 0$.

Теперь покажем, что если $n(w, f) = 1$ для всех w на окружности $|w| = \rho_0$, то $n(w, f) = 1$ для всех w в круге $|w| \leqslant \rho_0$. Действительно, условие $n(w, f) = 1\ (|w| = \rho_0)$ означает, что окружность $|w| = \rho_0$ является взаимно однозначным образом некоторого множества L в круге $|z| < 1$ при отображении $w = f(z)$. Ясно, что множество L может быть лишь простой замкнутой кривой (в силу непрерывности обратного отображения). Поэтому, применяя принцип соответствия границ (см. теорему 1.4 гл. V), видим, что функция $f(z)$ взаимно однозначно и комформно отображает область, ограниченную кривой L, на круг $|w| < \rho_0$.

Теперь обозначим через $d(f)$ верхнюю грань тех значений ρ, для которых $n(w, f) = 1$ при всех w из круга $|w| < \rho$. Ясно, что $d(f) < \infty$, так как в противном случае функция $f(z)$ взаимно однозначно и конформно отображала бы круг $|z| < 1$ на всю конечную плоскость, что невозможно. Свойство доказано. $\square$

Оценки даются не для всех функций, голоморфных в круге $|z| < 1$ и однолистных в среднем по окружности в этом круге, а для некоторых подклассов этого класса функций. Один из подклассов — это функции, отличные от нуля в круге $|z| < 1$, другой — функции, нормированные условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

Теорема 3.1. *Если функция $f(z)$ голоморфна в круге $|z|<1$, однолистна в среднем по окружности и не обращается в нуль в этом круге, то*

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{4}{1-|z|^2} \tag{3.1}$$

и

$$\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^2 \leqslant \left|\frac{f(z)}{f(0)}\right| \leqslant \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2. \tag{3.2}$$

Знак равенства в любом из этих неравенств может достигаться только для функций вида

$$f(z) = A\left(\frac{1+ze^{i\theta}}{1-ze^{i\theta}}\right)^2,$$

где A — любое комплексное, а θ — любое действительное число.

Доказательство. Поскольку функция $f(z)$ не обращается в нуль в круге $|z|<1$, из свойства 2 следует, что $d=d(f)=0$. Это значит, что значения функции $f(z)$ лежат в области G, которая на каждой окружности $|w|=\rho$ имеет хотя бы одну граничную или внешнюю точку. По теореме 1.1 имеем

$$|f'(z)|\,\rho(f(z),\ G) \leqslant \rho(z, |z|<1) = \frac{1}{1-|z|^2},$$

а по теореме 2.1 $\rho(w, G) \geqslant \frac{1}{4|w|}$. В первом неравенстве знак равенства возможен лишь в случае, когда функция $f(z)$ конформно отображает круг $|z|<1$ на область G, а во втором — когда область G является плоскостью с разрезом по лучу $\arg z = \varphi$. Следовательно,

$$\frac{|f'(z)|}{4|f(z)|} \leqslant \frac{1}{1-|z|^2},$$

и знак равенства достигается только для функции $f(z)$, конформно отображающей круг $|z|<1$ на плоскость w с разрезом по некоторому лучу $\arg z = \varphi$. Это дает нам неравенство (3.1). Неравенство (3.2) получается из неравенства (3.1) тем же путем, что и в примере 3 § 1. Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Пусть функция $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots$ голоморфна и однолистна в среднем по окружности в* *круге* $|z| < 1$. *Тогда*

$$\left| z \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leqslant \frac{1 + |z|}{1 - |z|}. \tag{3.3}$$

Знак равенства возможен лишь для функций вида

$$f(z) = \frac{z}{(1 - ze^{i\theta})^2},$$

где θ — *любое действительное число.*

Доказательство. Из свойства 2 следует, что функция $f(z)$ обращается в нуль не более одного раза, если она однолистна в среднем круге $|z| < 1$.

Обозначим через $\zeta(z)$ функцию, конформно отображающую круг $|z| < 1$ с разрезом по радиусу $(0,1)$ на круг $|\zeta| < 1$, а через $z(\zeta)$ — обратную к ней функцию. Рассмотрим функцию

$$g(\zeta) = f(z(\zeta)).$$

Поскольку функция $f(z)$ обращается в нуль только при $z = 0$, а функция $z(\zeta)$ отлична от нуля в круге $|\zeta| < 1$, функция $g(\zeta)$ не обращается в нуль в круге $|\zeta| < 1$. Кроме того, функция $g(\zeta)$ голоморфна и однолистна в среднем в круге $|\zeta| < 1$ (по свойству 1). Применяя к функции $g(\zeta)$ теорему 3.1, получаем $\left|\frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)}\right| \leqslant \frac{4}{1 - |\zeta|^2}$, откуда

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{4\,|\zeta'(z)|}{1 - |\zeta(z)|^2} = 4\rho(z, G_0),$$

где через G_0 обозначен круг $|z| < 1$ с разрезом по радиусу $(0, 1)$. Величину $\rho(z, G_0)$ можно вычислить и непосредственно, но проще воспользоваться равенством

$$\rho(w(z), G)\,|w'(z)| = \rho(z, D),$$

где $w(z)$ — функция, конформно отображающая область D на область G, и тем, что $\rho(w, D_0) = \frac{1}{4w}\,(w > 0)$ (D_0 — плоскость с разрезом по отрицательной части действительной оси). Функция $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1$ конформно отображает G_0 на D_0. Поэтому

$$\rho(z, G_0) = \rho(w(z), D_0)\,|w'(z)| =$$

$$= \frac{1}{2}\rho\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1,\ D_0\right)\left|1 - \frac{1}{z^2}\right|$$

и

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant 2\frac{1-|z|^2}{|z|^2}\rho\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-1,\ D_0\right).$$

Замечая, что вместо функции $z(\zeta)$ можно было бы взять функцию, отличающуюся от нее произвольным множителем $e^{i\theta}$, мы видим, что в последнем неравенстве можно заменить z на $ze^{i\theta}$ и взять минимум правой части по θ. Это дает, что

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant 2\frac{1-|z|^2}{|z|^2}\rho\left(\frac{1}{2}\left(|z|+\frac{1}{|z|}\right)-1,\ D_0\right),$$

т. е. поскольку $\rho(w, D_0) = \frac{1}{4w}\ (w > 0)$,

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{1}{|z|}\cdot\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Возможность равенства исследуется с помощью теоремы 3.1. Теорема доказана. □

Приведем еще два неравенства, легко вытекающие из теоремы 3.2.

С л е д с т в и е. *Пусть функция* $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots$ *голоморфна и однолистна в среднем по окружности в круге* $|z| < 1$. *Тогда*

$$|f(z)| \leqslant \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \tag{3.4}$$

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}. \tag{3.5}$$

Действительно, запишем неравенство (3.3) в виде

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{1}{|z|}\cdot\frac{1+|z|}{1-|z|},$$

возьмем достаточно близкое к нулю число ε, $\arg\varepsilon = \arg z$, и проинтегрируем это неравенство от ε до z по отрезку радиуса. При достаточно малом ε это даст, поскольку $f(\varepsilon) \to 0\ (\varepsilon \to 0)$, что

$$\ln\left|\frac{f(z)}{f(\varepsilon)}\right| \leqslant |\ln f(z) - \ln f(\varepsilon)| \leqslant \ln\frac{|z|}{(1-|z|)^2} - \ln\frac{|\varepsilon|}{(1-|\varepsilon|)^2}.$$

Отсюда находим

$$\ln\left|\varepsilon\frac{f(z)}{f(\varepsilon)}\right| \leqslant \ln\frac{|z|}{(1-|z|)^2} - 2\ln(1-|\varepsilon|)$$

и, переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, сразу получаем неравенство (3.4).

Неравенство (3.5) получаем перемножением неравенств (3.3) и (3.4). Случай равенства исследуется, как и в теореме 3.2, ссылкой на теорему 3.1.

Замечание. Полагая в неравенстве (3.4) $z\to 0$, получаем

$$|f(z)|\leqslant |z|+2|z|^2+O(|z|^3). \tag{3.6}$$

Это дает нам

$$|a_2|\leqslant 2. \tag{3.7}$$

Можно получить также оценку для $|f(z)|$ снизу и неравенство для величины $d(f)$.

Теорема 3.3. *Пусть функция $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ голоморфна и однолистна в среднем по окружности в круге $|z|<1$. Тогда*

$$d(f)\geqslant\frac{1}{4} \tag{3.8}$$

и

$$|f(z)|\geqslant\frac{|z|}{(1+|z|)^2}. \tag{3.9}$$

Равенство возможно лишь для $f(z)=\dfrac{z}{(1-ze^{i\theta})^2}$.

Доказательство. По определению величины $d(f)=d$ область G значений функции $f(z)$ имеет хотя бы одну граничную или внешнюю точку на любой окружности $|w|=\rho$, $\rho\geqslant d(f)$. Применяя те же рассуждения, что и в теореме 3.1, получаем неравенство

$$\frac{|f'(z)|}{|f(z)|+d}\leqslant\frac{4}{1-|z|^2}.$$

Но $f(0)=0$, $f'(0)=1$, так что, полагая $z=0$, находим $\dfrac{1}{d}\leqslant 4$. Возможность равенства исследуется тем же путем, что и в теореме 3.1.

Неравенство $d(f)\geqslant\dfrac{1}{4}$ согласно определению величины $d(f)$ означает, что любое значение w из круга $|w|<\dfrac{1}{4}$ принимается функцией $f(z)$ в круге $|z|<1$ ровно один раз.

Неравенство (3.9) докажем почти тем же рассуждением, что и теорему 3.2. Возьмем какую-либо точку c

в круге $|z|<1$ и обозначим через $z(\zeta)$ функцию, конформно отображающую круг $|\zeta|<1$ на круг $|z|<1$ с разрезом по отрезку радиуса $\left(c, \frac{c}{|c|}\right)$ и переводящую точку $\zeta=0$ в точку $z=0$. Эта функция, как нетрудно проверить, определяется из уравнения

$$\frac{ze^{-i\varphi}}{(1-ze^{-i\varphi})^2}=\alpha(c)\frac{\zeta}{(1-\zeta)^2},$$

где $\varphi=\arg c$, $\alpha(c)=\dfrac{4|c|}{(1+|c|)^2}$.

Рассмотрим функцию $g(\zeta)=\frac{f(z(\zeta))}{z'(0)}$. По свойству 1 она однолистна в среднем по окружности в круге $|\zeta|<1$, $g(0)=0$, $g'(0)=1$. Если $|f(c)|<\frac{1}{4}$, то функция $g(\zeta)$ не принимает значения $\frac{f(c)}{z'(0)}$ в круге $|\zeta|<1$, так как значение $f(c)\left(|f(c)|<\frac{1}{4}\right)$ принимается функцией $f(z)$ только в точке c, а функция $z(\zeta)$ не обращается в c в круге $|\zeta|<1$. Но согласно неравенству (3.8) имеем $d(g)\geqslant 1/4$. Значит, или $|f(c)|\geqslant\frac{1}{4}$, или $|f(c)|\geqslant\frac{1}{4}|z'(0)|$. Вычисляя $z'(0)$, приходим к неравенству (3.9).

Возможность равенства и в этом случае исследуется обычным образом. Теорема доказана. □

Если предположить функцию не только однолистной в среднем, но и просто однолистной, то можно получить оценку для ее производной в круге $|z|<1$ не только сверху, но и снизу. (Ясно, что для функций, однолистных в среднем, не может быть нетривиальной оценки снизу модуля производной во всем круге, так как производная может обращаться в нуль.)

Теорема 3.4. *Если функция $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ голоморфна и однолистна в круге $|z|<1$, то*

$$\left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\geqslant\frac{1-|z|}{1+|z|},\qquad |f'(z)|\geqslant\frac{1-|z|}{(1-|z|)^3}\tag{3.10}$$

и даже

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right|\leqslant\frac{4|z|}{1-|z|^2}.\tag{3.11}$$

Равенство достигается лишь для $f(z)=\dfrac{z}{(1-ze^{i\theta})^2}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g(\zeta)=f\left(\frac{\zeta+a}{1+\zeta\bar{a}}\right), \qquad |a|<1.$$

Так как функция $z(\zeta)=\dfrac{\zeta+a}{1+\zeta\bar{a}}$ конформно отображает круг $|\zeta|<1$ на себя, функция $g(\zeta)$ голоморфна и однолистна в круге $|\zeta|<1$. Применив неравенство (3.7) к функции $\dfrac{g(\zeta)-g(0)}{g'(0)}$ (эта функция однолистна, так как $g(\zeta)$ однолистна; однолистность в среднем при таком преобразовании не сохраняется), получим $|g''(0)|\leqslant 4|g'(0)|$. Но

$$g'(0)=(1-|a|^2)f'(a),$$

$$g''(0)=(1-|a|^2)^2f''(a)-2\bar{a}(1-|a|^2)f'(a).$$

Следовательно,

$$|(1-|a|^2)f''(a)-2\bar{a}f'(a)|\leqslant 4|f'(a)|.$$

Умножая последнее неравенство на $\dfrac{1}{|f'(a)|}\,\dfrac{a}{1-|a|^2}$, получаем (3.11).

Полагая $a=\rho e^{i\varphi}$, можем переписать (3.11) в виде

$$\left|\operatorname{Re}\left\{e^{i\varphi}\frac{f''(\rho e^{i\varphi})}{f'(\rho e^{i\varphi})}\right\}-\frac{2\rho}{1-\rho^2}\right|\leqslant\left|e^{i\varphi}\frac{f''(\rho e^{i\varphi})}{f'(\rho e^{i\varphi})}-\frac{2\rho}{1-\rho^2}\right|\leqslant\frac{4}{1-\rho^2},$$

откуда находим

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\varphi}\frac{f''(\rho e^{i\varphi})}{f'(\rho e^{i\varphi})}\right\}\geqslant 2\,\frac{2-\rho}{1-\rho^2}.$$

Поскольку

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\varphi}\frac{f''(\rho e^{i\varphi})}{f'(\rho e^{i\varphi})}\right\}=\frac{\partial}{\partial\rho}\operatorname{Re}\{\ln f'(\rho e^{i\varphi})\}=\frac{\partial}{\partial\rho}\ln|f'(\rho e^{i\varphi})|,$$

это неравенство означает, что

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\ln|f'(\rho e^{i\varphi})|\geqslant 2\,\frac{2-\rho}{1-\rho^2}.$$

Интегрируя полученное неравенство по ρ от нуля до $|z|$, получаем второе из неравенств (3.10), а из него с помощью неравенства (3.4) легко получаем оставшееся неравенство.

Все полученные неравенства могут обращаться в равенства лишь тогда, когда обращается в равенство неравенство (3.7). Это происходит лишь для функций указанного вида. Теорема доказана. $\square$

Теория однолистных функций — это глубоко разработанная область теории аналитических функций. В ней созданы тонкие вариационные методы. Мы здесь лишь слегка коснулись немногих простейших методов получения неравенств. Для более основательного знакомства можно рекомендовать монографии [10, 41].

§ 4. Принцип длины и площади

Изложим еще один метод получения оценок аналитических функций. С его помощью оценки получаются несколько более грубыми, но зато значительно более эффективными.

С принципом длины и площади мы уже сталкивались в § 6 гл. V при выводе неравенства Альфорса и Варшавского. Этот метод был использован при доказательстве оценок, но его не выделяли как самостоятельный результат. Сейчас мы докажем этот принцип отдельно и в более общем виде.

Прежде всего нужно договориться об обозначениях.

Пусть дана функция $f(z)$, голоморфная в замкнутой области $\overline{D}$, и пусть G — образ области D при отображении $w=f(z)$. Функцию $f(z)$ не будем предполагать однолистной в области D, так что область G многократно покрывается значениями функции $f(z)$. Взаимно однозначным образом области D при отображении $w=f(z)$ будем считать некоторую риманову поверхность S, расположенную над областью G. Эта риманова поверхность является частью римановой поверхности функции $z(\zeta)$, обратной к функции $f(z)$. Поэтому функция $z(\zeta)$ однозначна на римановой поверхности S и взаимно однозначно отображает ее на область D. $\square$

При таком понимании отображения сохраняют силу формулы, выведенные в § 1 гл. V для взаимно однозначных конформных отображений:

Если $D' \subset D$, а S' — взаимно однозначный образ D' при отображении $w=f(z)$, то

$$\Delta(S') = \iint_{D'} |f'(z)|^2\,dx\,dy, \qquad \Delta(D') = \iint_{S'} |z'(w)|^2\,du\,dv$$

(где $z = x + iy$, $w = u + iv$, а через $\Delta(G)$ обозначена площадь области G).

Если C — какая-то кривая, лежащая в области D, а L — ее образ при отображении $w = f(z)$, то

$$\mu(L) = \int\limits_C |f'(z)||dz|, \qquad \mu(C) = \int\limits_L |z'(w)||dw|$$

(через $\mu(\Gamma)$ мы обозначаем длину кривой Γ).

Теорема 4.1. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в замкнутой области D. Обозначим через λ_ρ совокупность кривых, на которых $|f(z)| = \rho$, а через $\lambda(\rho)$ — сумму их длин. Через θ_ρ обозначим совокупность образов кривых λ_ρ при отображении $w = f(z)$, а через $\theta(\rho)$ — сумму их длин.*

Тогда $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\lambda^2(\rho)}{\theta(\rho)}\, d\rho \leqslant \Delta(D)$.

Доказательство. Согласно приведенным выше формулам имеем

$$\lambda(\rho) = \int\limits_{\theta_\rho} |z'(w)||dw|.$$

По неравенству Буняковского — Шварца

$$\left[\int FG\, dx\right]^2 \leqslant \int F^2\, dx \int G^2\, dx.$$

Полагая $F = 1$, $G = |z'(w)|$, получаем

$$\lambda^2(\rho) = \left\{\int\limits_{\theta_\rho} |z'(w)||dw|\right\}^2 \leqslant \theta(\rho) \int\limits_{\theta_\rho} |z'(w)|^2 |dw|$$

или

$$\int\limits_0^\infty \frac{\lambda^2(\rho)}{\theta(\rho)}\, d\rho \leqslant \int\limits_0^\infty \rho\, d\rho \int\limits_{\theta_\rho} |z'(\rho e^{i\varphi})|^2\, d\varphi.$$

Но

$$\int\limits_0^\infty \rho\, d\rho \int\limits_{\theta_\rho} |z'(\rho e^{i\varphi})|^2\, d\varphi = \iint\limits_S |z'(w)|^2\, du\, dv = \Delta(D),$$

и мы пришли к утверждению теоремы. $\square$

Принцип длины и площади используется для оценок с помощью следующего неравенства, мало отличающегося от неравенства Альфорса. Нам проще доказать это неравенство заново, чем связывать его с неравенством, доказанным в других обозначениях и предположениях.

Теорема 4.2. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна и отлична от нуля в круге $|z| < 1$. Обозначим $|f(0)| = A$, $|f(a)| = B$. Тогда*

$$\left|\int_A^B \frac{d\rho}{\theta(\rho)}\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{1+|a|}{1-|a|} + \pi\right).$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать $0 < a < 1$ и $A < B$. Рассмотрим функцию

$$g(\zeta) = f\left(\frac{e^\zeta - 1}{e^\zeta + 1}\right)$$

в прямоугольнике D, определяемом неравенствами

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re}\zeta < b + \frac{\pi}{2}, \qquad |\operatorname{Im}\zeta| < \frac{\pi}{2} \qquad \left(b = \ln\frac{1+a}{1-a}\right).$$

Нетрудно проверить, что функция $z = \dfrac{e^\zeta - 1}{e^\zeta + 1}$ конформно отображает полосу $|\operatorname{Im}\zeta| < \dfrac{\pi}{2}$ в круг $|z| < 1$, а прямоугольник D — в часть этого круга. Поэтому функция $\theta(\rho)$, построенная для прямоугольника D и функции $g(\zeta)$, не превосходит функции $\theta(\rho)$, построенной для круга $|z| < 1$ и функции $f(z)$. Следовательно, по теореме 4.1 имеем

$$\int_A^B \frac{\lambda^2(\rho)}{\theta(\rho)}\, d\rho \leqslant \Delta(D),$$

где функция $\lambda(\rho)$ построена для прямоугольника D и функции $g(\zeta)$, а $\theta(\rho)$ — для круга $|z| < 1$ и функции $f(z)$.

Так как площадь прямоугольника D равна $\pi(b + \pi)$, то мы получаем неравенство

$$\int_A^B \frac{\lambda^2(\rho)}{\theta(\rho)}\, d\rho \leqslant \pi\left(\ln\frac{1+a}{1-a} + \pi\right). \tag{4.1}$$

Оценим величину $\lambda(\rho)$. Для этой цели заметим, что функция $|g(\zeta)|$ принимает на отрезке $(0, b)$ любое значение ρ, заключенное между A и B. Пусть ξ_ρ — та точка отрезка $(0, b)$, в которой $|g(\xi_\rho)| = \rho$. Через точку ξ_ρ проходит одна из кривых λ_ρ. Она не может быть замкнутой кривой, лежащей в прямоугольнике D. Действительно, функция $g(\zeta)$ не обращается в нуль в прямоугольнике D. Поэтому, применяя принцип максимума модуля к функциям $g(\zeta)$ и $1/g(\zeta)$ в области, ограниченной какой-либо петлей этой замкнутой кривой, мы получили бы $|g(\zeta)| \equiv \equiv \rho$, что невозможно. Следовательно, выбранная нами кривая из совокупности λ_ρ имеет концы на границе прямоугольника D. Но расстояние от любой точки отрезка $(0, b)$ до границы прямоугольника D не меньше $\pi/2$. Значит, длина выбранной кривой не меньше π, т. е. $\lambda(\rho) \geqslant \pi$.

Поэтому неравенство (4.1) дает, что

$$\pi^2 \int_A^R \frac{d\rho}{\theta(\rho)} \leqslant \pi \left(\ln \frac{1+a}{1-a} + \pi\right).$$

Теорема доказана.

Ценою некоторого усложнения оценки можно было исследовать и случай, когда функция $f(z)$ обращается в нуль в круге $|z| < 1$, но имеет конечное число нулей. Для получения оценки пришлось бы оценить, сколько вносят в интеграл те значения ρ, для которых точка ξ_ρ отстоит от нулей функции $g(\zeta)$ меньше, чем на π.

Рассмотрим один пример, который позволит сравнить оценки, полученные ранее, с оценками, получаемыми с помощью принципа длины и площади.

Пример 1. Пусть функция $f(z)$ голоморфна и не обращается в нуль в круге $|z| < 1$. Найдем оценку для $|f(z)|$, предположив, что $\theta(\rho) \leqslant 2\pi\rho$ при всех $\rho > 0$.

Теорема 4.2 дает

$$\left|\int_A^B \frac{d\rho}{2\pi\rho}\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\left(\ln \frac{1+|z|}{1-|z|} + \pi\right) \qquad (A = |f(0)|,\ B = |f(z)|),$$

или

$$\left|\ln\left|\frac{f(z)}{f(0)}\right|\right| \leqslant 2\left(\ln \frac{1+|z|}{1-|z|} + \pi\right). \tag{4.2}$$

Это означает, что

$$e^{-2\pi}\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^2 \leqslant \left|\frac{f(z)}{f(0)}\right| \leqslant e^{2\pi}\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2. \tag{4.3}$$

Чтобы сравнить этот результат с полученными ранее, заметим, что условие $\theta(\rho) \leqslant 2\pi\rho$ $(\rho > 0)$ означает однолистность функции $f(z)$ в среднем по окружности в круге $|z|<1$. Действительно, величина $n(w, f)$ — это число нулей функции $f(z)-w$ в круге $|z|<1$. Эту величину можно рассматривать как число листов римановой поверхности S над точкой w. (Риманова поверхность S — это взаимно однозначный образ круга $|z|<1$ при отображении $w=f(z)$.) Кривые θ_ρ есть не что иное, как дуги окружности $|w|=\rho$ на римановой поверхности S. Каждая точка w окружности $|w|=\rho$ входит в θ_ρ столько раз, сколько листов римановой поверхности S лежит над точкой w, т. е. $n(w, f)$ раз. Поэтому

$$\theta(\rho)=\int\limits_{|w|=\rho} n(w, f)\,|dw|$$

и предположение $\theta(\rho)\leqslant 2\pi\rho$ означает однолистность функции $f(z)$ в среднем по окружности в круге $|z|<1$. □

Результат, полученный в примере, можно сравнить с результатом теоремы 3.1, который имеет вид

$$\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^2\leqslant\left|\frac{f(z)}{f(0)}\right|\leqslant\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2.$$

Разница полученных оценок в множителе $e^{2\pi}$. Этот множитель не слишком близок к единице, но он не меняет порядок роста функции $|f(z)|$ при $|z|\to 1$. Таким образом, мы видим, что теорема 3.1 несколько точнее, но ее доказательство намного более сложно (в него следует включить и принцип симметризации). □

Стоит заметить, что в некоторых случаях с помощью принципа длины и площади можно получать и точные оценки. Так, например, одно из наиболее простых доказательств неравенства $|a_2|\leqslant 2$ для однолистных функций получается с помощью принципа длины и площади (он фигурирует под названием теоремы площадей). □

Одной из наиболее важных черт принципа длины и площади является его общность.

Приведем еще один пример использования принципа длины и площади для получения оценок функций, p-листных в среднем по площади в круге $|z|<1$.

Функция $f(z)$ называется *p-листной в среднем по площади в круге* $|z|<1$, если при любом $\rho>0$ имеем

$$\iint\limits_{|w|<\rho} n(w, f)\,du\,dv\leqslant\pi\rho^2 p.$$

Здесь $n(w, f)$, как и прежде,— число нулей функции $f(z) - w$ в круге $|z| < 1$.

Легко проверить, что функция, p-листная в среднем по окружности, является и p-листной в среднем по площади, но не наоборот.

Теорема 4.3. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна, p-листна в среднем по площади и не обращается в нуль в круге $|z| < 1$. Тогда*

$$e^{-2\pi p - \frac{1}{2}}\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^{2p} \leqslant \left|\frac{f(z)}{f(0)}\right| \leqslant e^{2\pi p + \frac{1}{2}}\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{2p}.$$

Доказательство. По теореме 4.2 имеем

$$\left|\int_A^B \frac{d\rho}{\theta(\rho)}\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{1+|z|}{1-|z|} + \pi\right), \qquad (A = |f(0)|,\ B = |f(z)|).$$

Нам нужно оценить интеграл, стоящий слева, используя условие p-листности функции $f(z)$ в среднем по площади в круге $|z| < 1$. Это условие можно записать в виде

$$\int_0^\rho \theta(t)\, dt \leqslant \pi\rho^2 p$$

или в виде

$$-\pi\rho^2 \leqslant \varphi(\rho) \leqslant 0, \tag{4.4}$$

где

$$\varphi(\rho) = \int_0^\rho [\theta(t) - 2\pi t p]\, dt.$$

Из очевидного неравенства $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} \geqslant 2$ получаем неравенство $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{a} - \frac{x-a}{a^2}$ и, полагая $x = \theta(t)$, $a = 2\pi t p$, приходим к неравенству

$$\frac{1}{\theta(t)} \geqslant \frac{1}{2\pi t p} - \frac{\varphi'(t)}{(2\pi t p)^2}.$$

Из этого неравенства находим, считая для определенности, что $A < B$:

$$\int_A^B \frac{d\rho}{\theta(\rho)} \geqslant \frac{1}{2\pi\rho}\ \ln\frac{B}{A} - \int_A^B \frac{\varphi'(t)\, dt}{(2\pi t p)^2}.$$

Интегрируя по частям и используя (4.4), получаем

$$\int_A^B \frac{d\rho}{\theta(\rho)} \geqslant \frac{1}{2\pi\rho} \ln \frac{B}{A} + \frac{\varphi(A)}{(2\pi A p)^2} \geqslant \frac{1}{2\pi p} \ln \frac{B}{A} - \frac{1}{4\pi p}.$$

Следовательно, $\left| \ln \left| \frac{f(z)}{f(0)} \right| \right| \leqslant 2\pi p + \frac{1}{2} + 2p \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}$,
и теорема доказана.

§ 5. Распределение значений целых и мероморфных функций

В предыдущих параграфах излагались методы получения оценок для функций, голоморфных в данной области (главным образом в единичном круге), при тех или иных предположениях относительно распределения значений, принимаемых ими в этой области. Сейчас изложим некоторые результаты, связанные с распределением значений функций, голоморфных или мероморфных во всей конечной плоскости (функции, голоморфные во всей конечной плоскости, называются целыми функциями). Для этой цели придется сначала ввести некоторые обозначения.

Пусть функция $F(z)$ мероморфна во всей конечной плоскости. Через $n(r, \zeta, F)$ обозначим число нулей функции $F(z)-\zeta$ в круге $|z|<r$ (каждый нуль считается столько раз, какова его кратность). Через $n(r, \infty, F)$ обозначим число полюсов функции $F(z)$ в круге $|z|<r$. Кроме того, введем обозначение

$$N(r, \zeta, F) = \int_0^r \frac{n(t, \zeta, F) - n(0, \zeta, F)}{t} dt + n(0, \zeta, F) \ln r.$$

Функция $N(r, \zeta, F)$ является некоторой средней мерой того, насколько часто функция $F(z)$ принимает значение ζ в круге $|z|<r$.

Следующая функция является средней мерой того, насколько функция $F(z)$ близка к значению ζ на окружности $|z|=r$:

$$m(r, \zeta, F) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|z|=r} \ln^+ \frac{1}{|F(z)-\zeta|} |dz|,$$

$$m(r, \infty, F) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|z|=r} \ln^+ |F(z)| |dz|.$$

Здесь $\ln^+ x = \max\{\ln x, 0\}$. Функцию $m(r, \zeta, F)$ принято называть *неванлинновской функцией приближения*.

В дальнейшем будем для краткости вместо $n(r, \zeta, F)$, $N(r, \zeta, F)$ и $m(r, \zeta, F)$ писать $n(r, \zeta)$, $N(r, \zeta)$ и $m(r, \zeta)$, если ясно, к какой функции относятся эти обозначения. $\square$

Ясно, что осредненные характеристики такого рода как $N(r, \zeta)$ и $m(r, \zeta)$ можно вводить с большой степенью произвола. Смысл введения именно этих характеристик объясняется следующей теоремой.

Теорема 5.1. *Для любой функции $f(z)$, мероморфной во всей конечной плоскости, при любом фиксированном ζ и при $r \to \infty$ имеет место соотношение*

$$m(r, \zeta) + N(r, \zeta) = m(r, \infty) + N(r, \infty) + O(1).$$

Доказательство. В § 2 гл. VIII доказана формула Иенсена

$$\frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|z|=r} \ln|f(z)|\,|dz| = \\ = \ln|f(0)| + \sum_{|a_k|<r} \ln\frac{r}{|a_k|} - \sum_{|b_k|<r} \ln\frac{r}{|b_k|}$$

справедливая для любой функции, мероморфной в круге $|z| \leqslant r$ и не имеющей в точке $z = 0$ ни нуля, ни полюса.

Суммы легко выражаются через функции $N(r, 0, f)$ и $N(r, \infty, F)$. Действительно,

$$\sum_{|a_k|<r} \ln\frac{r}{|a_k|} = \int\limits_0^r \ln\frac{r}{t}\,dn(t, 0) = \int\limits_0^r \frac{n(t, 0)}{t}\,dt = N(r, 0)$$

(так как $n(0, 0) = 0$), и аналогично

$$\sum_{|b_k|<r} \ln\frac{r}{|b_k|} = \int\limits_0^r \frac{n(t, \infty)}{t}\,dt = N(r, \infty) \qquad (n(0, \infty) = 0).$$

Поэтому, полагая $f(z) = F(z) - \zeta$ и замечая, что

$$N(r, 0, F-\zeta) = N(r, \zeta, F), \quad N(r, \infty, F-\zeta) = N(r, \infty, F),$$

получаем из формулы Иенсена формулу

$$\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{|z|=r}\ln|F(z)-\zeta|\,|dz|-\ln|F(0)-\zeta|=$$
$$=N(r,\zeta,F)-N(r,\infty,F). \quad (5.1)$$

Эта формула остается справедливой и при $F(0)=\zeta$ или $F(0)=\infty$, только член $\ln|F(0)-\zeta|$ заменяется несколько иной константой, найти которую предоставляем читателю.

Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{|z|=r}\ln|F(z)-\zeta|\,|dz|=-\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{|z|=r}\ln^{+}\frac{1}{|F(z)-\zeta|}|dz|+$$
$$+\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{|z|=r}\ln^{+}|F(z)-\zeta|\,|dz|.$$

Первое слагаемое равно $-m(r,\zeta)$, а для второго слагаемого в силу очевидных неравенств

$$\ln^{+}|w|-\ln^{+}|\zeta|-\ln 2\leqslant\ln^{+}|w-\zeta|\leqslant$$
$$\leqslant\ln^{+}|w|+\ln^{+}|\zeta|+\ln 2$$

можно написать

$$\left|\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{|z|=r}\ln^{+}|F(z)-\zeta|\,|dz|-m(r,\infty)\right|\leqslant\ln^{+}|\zeta|+\ln 2.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{|z|=r}\ln|F(z)-\zeta|\,|dz|=m(r,\infty)-m(r,\zeta)+O(1).$$

Подставляя это соотношение в формулу (5.1), приходим к утверждению теоремы.

Функция

$$T(r)=T(r,F)=m(r,\infty)+N(r,\infty)$$

называется *характеристической функцией* или *характеристикой мероморфной функции* $F(z)$. Утверждение теоремы 5.1 может быть сформулировано в следующем виде:

При любом фиксированном ζ *и при* $r\to\infty$ *имеем*

$$m(r,\zeta)+N(r,\zeta)=T(r)+O(1). \quad (5.2)$$

Доказанная теорема вскрывает интересную симметрию в распределении значений функции, мероморфной во всей конечной плоскости:

Если какое-либо значение ζ *принимается функцией* $F(z)$ *сравнительно редко* (т. е. функция $N(r, \zeta)$ мала по сравнению с функцией $T(r)$), *то значения функции* $F(z)$ *должны быть близки к значению* ζ.

Простейшим проявлением этой закономерности является тот факт, что целая функция (т. е. не принимающая значения $\zeta = \infty$) стремится к бесконечности по некоторому пути, ведущему в бесконечно удаленную точку.

Эта закономерность хорошо наблюдается и на всех элементарных функциях: скажем, функция e^z не обращается в нуль; зато она равномерно стремится к нулю в целой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$. $\square$

Интересно выяснить поведение функций $m(r, \zeta)$, $N(r, \zeta)$ и $T(r)$ для рациональной функции $F(z)$.

При $z \to \infty$ рациональная функция стремится к некоторому пределу a. Если $\zeta \neq a$, то $m(r, \zeta) = O(1)$, а число нулей функции $F(z) - \zeta$ равно степени рациональной функции, т. е. наибольшей из степеней числителя и знаменателя (обозначим ее k). Поэтому

$$T(r) = O(1) + N(r, \zeta) =$$
$$= O(1) + \int_0^r \frac{n(t, \zeta) - n(0, \zeta)}{t}\, dt + n(0, \zeta) \ln r = k \ln r + O(1).$$

При $\zeta = a$ число нулей $F(z) - \zeta$ меньше k, и это компенсируется тем, что функция $m(r, \zeta)$ растет при $r \to \infty$.

Если $F(z)$ — целая функция, то рост характеристики $T(r)$ тесно связан с ростом максимума модуля $F(z)$ на окружности $|z| = r$, как показывает следующая теорема.

Теорема 5.2. *Пусть* $F(z)$ — *целая функция и* $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |F(z)|$. *Тогда при любом* $0 < \theta < 1$ *и при достаточно больших* r *имеем*

$$\frac{1-\theta}{1+\theta} \ln M(\theta r) \leqslant T(r) \leqslant \ln M(r).$$

Доказательство. Для целой функции $N(r, \infty) \equiv 0$, так что

$$T(r) = m(r, \infty) = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|z|=r} \ln^+ |F(z)|\, |dz| \leqslant \ln^+ M(r)$$

при достаточно больших r. Отсюда вытекает правое неравенство.

С другой стороны, $\ln^+ |F(z)|$ — субгармоническая функция во всей конечной плоскости. Это значит, что она не превосходит в круге $|z| < r$ гармонической функции, построенной по значениям $\ln^+ |F(z)|$ на границе этого круга, т. е. на окружности $|z| = r$. Строя эту гармоническую функцию с помощью интеграла Пуассона, получаем

$$\ln^+ |F(\rho e^{i\varphi})| \leqslant \frac{r^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\ln^+ |F(re^{i\psi})|\, d\psi}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\psi - \varphi)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r^2 - \rho^2}{(r-\rho)^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |F(re^{i\psi})|\, d\psi.$$

Отсюда легко находим

$$\frac{r-\rho}{r+\rho} \ln M(\rho) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |F(re^{i\psi})|\, d\psi =$$

$$= \frac{1}{2\pi r} \int_{|z|=r} \ln^+ |F(z)|\, |dz| = T(r).$$

Полагая $\rho = \theta r$, получаем левое неравенство. Теорема доказана.

Скорость роста целой функции как бы определяет степень сложности ее устройства. Характеристика $T(r)$ играет примерно ту же роль для мероморфных функций. Следующая теорема аналогична теореме Лиувилля (см. § 2 гл. IV).

Теорема 5.3. *Если*

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{T(r)}{\ln r} \leqslant m, \tag{5.3}$$

то $F(z)$ — рациональная функция, степени не выше m.

Доказательство. Заметим, что из условия (5.3) вытекает, что функция $F(z)$ имеет не более m полюсов. Действительно, в противном случае мы имели бы

$n(r, \infty) \geqslant \mu > m$ при $r > r_0$ и

$$N(r, \infty) \geqslant \int_{r_0}^{r} \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t} dt + n(0, \infty) \ln r \geqslant \geqslant \mu \ln r - O(1),$$

откуда следовало бы $T(r) \geqslant \mu \ln r + O(1)$, что противоречит неравенству (5.3).

Теперь построим правильную (степень числителя меньше степени знаменателя) рациональную функцию $G(z)$, имеющую те же полюсы, что и $F(z)$, и те же главные части в этих полюсах. Поскольку $G(z) \to 0$ при $z \to \infty$, то $m(r, \infty, G) = 0$ при достаточно больших r. Функция $H(z) = F(z) - G(z)$ не имеет полюсов, и

$$T(r, H) = m(r, \infty, H) \leqslant m(r, \infty, F) + m(r, \infty, G) + \ln 2 \leqslant T(r, F) + O(1)$$

в силу очевидного неравенства

$$\ln^+ |a - b| \leqslant \ln^+ |a| + \ln^+ |b| + \ln 2.$$

По теореме 5.2 получаем, что для целой функции $H(z)$ справедливо соотношение

$$\varliminf_{r \to \infty} \frac{\ln M(r, H)}{\ln r} < \infty, \qquad M(r, H) = \max_{|z|=r} |H(z)|,$$

т. е.

$$\varliminf_{r \to \infty} \frac{M(r, H)}{r^p} = 0$$

при некотором p. По теореме Лиувилля (см. § 2 гл. IV) функция $H(z)$ является многочленом. Следовательно, $F(z)$ — рациональная функция. Но мы видели, что для рациональной функции степени k имеет место соотношение $T(r, F) = k \ln r + O(1)$. Следовательно, $F(z)$ — рациональная функция степени не выше m. Теорема доказана. □

Простейшей величиной, характеризующей рост функции $T(r)$, является число

$$\rho = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ln T(r)}{\ln r},$$

называемое *порядком мероморфной функции*.

Для целой функции в силу теоремы 5.2 в определении порядка вместо величины $T(r)$ можно брать $\ln M(r)$. $\square$

В теории целых функций изучаются наиболее детально функции конечного порядка, т. е. такие, для которых $0 < \rho < \infty$.

Теория целых и мероморфных функций (особенно теория целых функций) является одной из наиболее развитых областей теории аналитических функций, и было бы нереально изложить здесь даже ее основы. Для ознакомления с некоторыми вопросами теории целых функций можно обратиться к монографиям [8, 13, 20]. $\square$

В этом и в следующем параграфах докажем два очень красивых результата, имеющих непосредственное отношение к теории распределения значений. Для формулировки первого из этих результатов, носящего название *теоремы Данжуа — Карлемана — Альфорса*, понадобится понятие асимптотического значения целой функции.

Число ζ называется *асимптотическим значением целой функции* $F(z)$, если существует такая кривая L, уходящая в бесконечность, что $F(z) \to \zeta$ при $z \to \infty$ по кривой L.

Теорема 5.4. *Число различных асимптотических значений целой функции порядка* ρ (отличных от бесконечности) *не превосходит* 2ρ.

Доказательство. Пусть функция $F(z)$ имеет n различных конечных асимптотических значений, и пусть $L_1, L_2, \ldots, L_n$ — те кривые, по которым функция $F(z)$ стремится к асимптотическим значениям $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Без ограничения общности можно считать, что кривые L_k выходят из точки $z = 0$ и не имеют других общих точек. Тогда вся плоскость разбивается этими кривыми ровно на n различных областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$.

По теореме Линделефа (см. следствие теоремы 4.3 гл. VIII) функция $F(z)$ не может быть ограничена ни в одной из областей D_k, так как она имеет различные пределы при $z \to \infty$ по разным сторонам области D_k.

Рост функции, ограниченной на границе бесконечной области и не ограниченной внутри этой области, может быть оценен снизу при помощи теоремы Фрагмена — Линделефа, доказанной нами в § 6 гл. VIII (теорема 6.1). Применяя эту теорему к функции $F(z)$ в областях

$D_1, D_2, \ldots, D_n$, получаем

$$\ln\ln M(r) \geqslant \pi \int_1^r \frac{dt}{\theta_k(t)} + C \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\theta_k(t)$ — сумма длин дуг окружности $|z| = r$, попадающих в область D_k, а C — постоянная, не зависящая от r.

Складывая эти неравенства, получаем

$$n \ln\ln M(r) \geqslant \pi \int_1^r \sum_1^n \frac{1}{\theta_k(t)}\, dt + C_1. \tag{5.4}$$

Оценим сумму, стоящую под интегралом. По неравенству Буняковского — Шварца

$$\left(\sum a_s b_s\right)^2 \leqslant \sum a_s^2 \cdot \sum b_s^2.$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_1^n \theta_k(t) = 2\pi t,$$

так как области D_k в совокупности покрывают всю плоскость, мы можем написать

$$2\pi\, t \sum_1^n \frac{1}{\theta_k(t)} = \sum_1^n \theta_k(t) \sum_1^n \frac{1}{\theta_k(t)} \geqslant \left\{\sum_1^n \sqrt{\theta_k}\, \frac{1}{\sqrt{\theta_k}}\right\}^2 = n^2.$$

Следовательно, $\displaystyle\sum_1^n \frac{1}{\theta_k(t)} \geqslant \frac{n^2}{2\pi t}$. Подставляя эту оценку в неравенство (5.4), получаем

$$\ln\ln M(r) \geqslant \frac{n}{2} \ln r + C_1,$$

откуда по определению порядка находим $\rho \geqslant n/2$. Теорема доказана.

Заметим, что доказанная теорема точна, как показывает пример функции

$$F(z) = \int_0^z \frac{\sin t^m}{t^m}\, dt.$$

Действительно, эта функция имеет порядок, равный m, что легко следует из неравенства

$$|F(z)| \leqslant |z| e^{|z|^m}.$$

С другой стороны, при z, стремящемся к бесконечности по лучам $\arg z = \pi s/m$ $(s = 0, 1, \ldots, 2m-1)$, функция $F(z)$ имеет пределы, равные

$$\alpha_s = \int\limits_0^{\infty e^{\frac{\pi i s}{m}}} \frac{\sin t^m}{t^m} dt = e^{-\frac{m-1}{m}\cdot s\cdot \pi i} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x^m}{x^m} dx = \\ = e^{\frac{\pi i s}{m}} \frac{1}{m} \Gamma\left(\frac{1}{m} - 1\right) \sin\frac{\pi}{m}.$$

Таким образом, функция $F(z)$ имеет $2m$ различных конечных асимптотических значений.

Для формулировки второго результата понадобится еще одно определение.

Дефектом значения ζ назовем число

$$\delta(\zeta) = \delta(\zeta, F) = 1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r, \zeta)}{T(r)}.$$

Ясно, что при всех значениях ζ имеем неравенство $0 \leqslant \delta(\zeta) \leqslant 1$, так как $0 \leqslant N(r, \zeta) \leqslant T(r) + O(1)$. $\square$

Результат, который будет доказан в следующем параграфе (вторая основная теорема неванлинновской теории распределения значений), состоит в том, что сумма дефектов всех значений для мероморфной во всей конечной плоскости функции не превосходит двух. Этот результат обобщает, в частности, теорему Пикара (см. § 5 гл. IX) о том, что функция, мероморфная во всей конечной плоскости, принимает все значения, за исключением, может быть, двух.

Поучительно отметить, что соображения, наводящие на мысль о справедливости этого результата, очень просты и убедительны. Приведем их сейчас для случая, когда $F(z)$ — целая функция, чтобы можно было говорить лишь о сумме дефектов конечных значений, так как для целой функции $\delta(\infty) = 1$.

Если $\delta(\zeta) > 0$, то это означает, что

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{m(r, \zeta)}{T(r)} = \delta(\zeta) > 0,$$

т. е. функция $F(z)$ довольно быстро стремится к значению ζ при z, стремящемся к бесконечности в некоторой части плоскости. Но если сама функция стремится к постоянной в некоторой области, то ее производная должна в этой области стремиться к нулю примерно с той же скоростью. Это означает, что

$$\delta(0, F') \geqslant \sum \delta(\zeta, F), \tag{5.5}$$

где сумма берется по всем конечным дефектным значениям. Но по определению дефекта имеем $\delta(0, F') \leqslant 1$, т. е. сумма дефектов по всем конечным дефектным значениям функции $F(z)$ не превосходит единицы, а сумма всех дефектов не превосходит двух.

К сожалению, это простое рассуждение оказалось очень нелегко обосновать. Хотя неравенство (5.5) и оказалось справедливым, но его доказательство потребовало больших усилий. Доказательство теоремы без этого неравенства даже проще. В поисках доказательства второй основной теоремы Неванлинны были найдены интересные закономерности.

§ 6. Теорема Неванлинны о дефектах

Сначала займемся выяснением геометрического смысла характеристики $T(r)$ мероморфной функции. Прежде всего напомним некоторые сведения о сфере Римана.

Каждой точке $z = x + iy$ комплексной плоскости ставится в соответствие точка (ξ, η, ζ) сферы $\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Величины ξ, η, ζ связаны с координатами x, y точки плоскости равенствами

$$\xi = \frac{1}{2}\frac{x|z|}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{1}{2}\frac{y|z|}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}$$

(см. § 1 гл. I). Расстояние между точками сферы Римана, отвечающими точкам z и w, равно

$$k(z, w) = \frac{|w-z|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}, \quad k(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}.$$

Следовательно, элемент длины дуги на сфере Римана равен $ds = \frac{|dz|}{1+|z|^2}$, а элемент площади равен $d\sigma = \frac{dx\,dy}{(1+|z|^2)^2}$.

Выражения

$$\int\limits_L \frac{|dz|}{1+|z|^2}, \quad \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(1+|z|^2)^2}$$

будем называть, соответственно, *сферической длиной кривой* L и *сферической площадью области* D.

Отметим одно важное свойство сферической метрики, легко проверяемое непосредственным вычислением:

Сферическая метрика инвариантна относительно преобразований вида

$$w=\frac{1+z\bar{a}}{z-a}.$$

(Эти преобразования отвечают вращению сферы Римана.) $\square$

Еще нам понадобится одно обобщение формулы Иенсена:

Лемма 1. *Пусть функция* $\rho(\zeta)$, $\zeta=\xi+i\eta$, *непрерывна во всей плоскости, за исключением конечного числа точек, и удовлетворяет условиям*

$$\rho(\zeta)\geqslant 0, \quad \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(\zeta)\ln^+|\zeta|\,d\xi\,d\eta<\infty, \quad \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(\zeta)\,d\xi\,d\eta=1.$$

Обозначим

$$U(w)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(\zeta)\ln|w-\zeta|\,d\xi\,d\eta,$$

$$V(r)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} n(r,\zeta,F)\,\rho(\zeta)\,d\xi\,d\eta,$$

где $F(z)$ — *некоторая функция, мероморфная во всей конечной плоскости. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{|z|=r} U(F(z))\,|dz| = U(F(0))+\int\limits_0^r \frac{V(x)}{x}\,dx-N(r,\infty,F). \quad (6.1)$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Иенсена в том виде, к которому мы привели ее в предыдущем параграфе (см. формулу (5.1))

$$\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{|z|=r}\ln|F(z)-\zeta|\,|dz| =$$

$$= \ln|F(0)-\zeta| + N(r,\zeta,F) - N(r,\infty,F).$$

Умножим эту формулу на $\rho(\zeta)$ и проинтегрируем по всей плоскости. В силу условий на $\rho(\zeta)$ все интегралы равномерно сходятся, так что перемена порядка интегрирования законна. Выполняя интегрирование по ξ, η и используя введенные обозначения, легко получаем утверждение леммы, если вспомнить, что при $\zeta \neq F(0)$

$$N(r,\zeta) = \int\limits_0^r \frac{n(x,\zeta)}{x}\,dx.$$

Замечание 1. Если $F(0)=\infty$, то $U(F(0))$, как и в обычной формуле Иенсена, приходится заменить некоторой другой постоянной.

Замечание 2. Функции $V(r)$ можно придать довольно простой геометрический смысл. Для этой цели введем в комплексной плоскости некоторую метрику, задав элемент длины равенством $ds = \sqrt{\rho(\zeta)}\,|d\zeta|$. Тогда $\rho(\zeta)\,d\xi\,d\eta$ — это элемент площади в этой метрике. Если обозначить через S_r риманову поверхность, являющуюся взаимно однозначным образом круга $|z|<r$ при отображении $w=F(z)$, то $n(r,\zeta)$ — это число листов римановой поверхности S_r над точкой ζ. Поэтому $V(r)$ есть не что иное, как площадь римановой поверхности S_r в нашей метрике. □

Это соображение (см. также § 4) позволяет написать для функции $V(r)$ еще одну формулу:

$$V(r) = \iint\limits_{|z|<r}\rho(F(z))\,|F'(z)|^2\,dx\,dy. \tag{6.2}$$

С помощью леммы 1 уже нетрудно выяснить геометрический смысл функции $T(r,F)$ — характеристики мероморфной во всей конечной плоскости функции $F(z)$. Для этой цели положим

$$\rho(\zeta) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1+|\zeta|^2)^2}.$$

Тогда функция $V(r)$ будет равна сферической площади римановой поверхности S_r, деленной на π. Сферическую площадь римановой поверхности S_r мы будем обозначать $S(r)$. По лемме 1 имеем

$$\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{|z|=r} U(F(z))\,|dz| = U(F(0)) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^r \frac{S(x)}{y}\,dx - N(r,\infty).$$

Найдем функцию $U(w)$. Согласно определению

$$U(w) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \frac{\ln|w-\zeta|}{(1+|\zeta|^2)^2}\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{(1+R^2)^2}\int\limits_{|\zeta|=R} \ln|w-\zeta|\,|d\zeta|\,dR.$$

Внутренний интеграл вычисляется, например, с помощью формулы Иенсена

$$\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{|\zeta|=R} \ln|w-\zeta|\,|d\zeta| = \begin{cases} \ln R & (|w|<R), \\ \ln|w| & (|w|\geqslant R), \end{cases}$$

и вычисляя получающиеся интегралы, легко находим $U(w)=\ln\sqrt{1+|w|^2}$.

Таким образом, мы пришли к формуле

$$\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{|z|=r} \ln\sqrt{1+|F(z)|^2}\,|dz| + N(r,\infty) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^r \frac{S(x)}{x}\,dx + \ln\sqrt{1+|F(0)|^2} \qquad (6.3)$$

(при $F(0)=\infty$ формула исправляется обычным способом).

Из очевидного неравенства

$$\ln^+|w| \leqslant \ln\sqrt{1+|w|^2} \leqslant \ln^+|w| + \ln 2$$

следует, что

$$m(r,\infty) \leqslant \frac{1}{2\pi r}\int\limits_{|z|=r} \ln\sqrt{1+|F(z)|^2}\,|dz| \leqslant m(r,\infty) + \ln 2.$$

Поэтому

$$T(r) = m(r, \infty) + N(r, \infty) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^r \frac{S(x)}{x}\,dx + O(1).$$

Эта формула и дает искомый геометрический смысл характеристики мероморфной функции. □

Величины

$$\mathring{T}(r) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^r \frac{S(x)}{x}\,dx,$$

$$\mathring{m}(r, \zeta) = -\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{|z|=r} \ln k(\zeta, F(z))\,|dz|,$$

где $k(\zeta, w) = \dfrac{|\zeta - w|}{\sqrt{1+|\zeta|^2}\sqrt{1+|w|^2}}$, называются, соответственно, *сферической формой характеристики и сферической формой функции приближения.* □

Для сферической формы характеристики справедливо соотношение несколько более точное, чем теорема 5.1:

Теорема 6.1. $\mathring{m}(r,\zeta)+N(r, \zeta)=\mathring{T}(r)-\ln k(\zeta,F(0))$.

Доказательство. При $\zeta = \infty$ утверждение теоремы совпадает с формулой (6.3). Чтобы доказать это утверждение при любом ζ, рассмотрим функцию $G(z) = \dfrac{1+\bar{\zeta}F(z)}{F(z)-\zeta}$ и применим формулу (6.3). Это даст нам

$$\mathring{m}(r, \infty, G)+N(r, \infty, G)=\mathring{T}(r, G)-\ln k(\infty, G(0)).$$

Ясно, что $N(r, \infty, G)=N(r, \zeta, F)$, так как полюсы функции $G(z)$ — это нули функции $F(z)-\zeta$. Далее, мы отмечали, что преобразование $\dfrac{1+\bar{\zeta}w}{w-\zeta}$ (вращение сферы Римана) сохраняет сферическую метрику. Это значит, что

$$k(\zeta, F(z))=k(\infty, G(z))$$

и что $S(x, F)=S(x, G)$ при всех x. Поэтому

$$\mathring{m}(r, \infty, G)=\mathring{m}(r, \zeta, F),\ \mathring{T}(r, G)=\mathring{T}(r, F),$$
$$k(\infty, G(0))=k(\zeta, F(0)),$$

и теорема доказана. □

Теперь перейдем к подготовке доказательства теоремы Неванлинны о дефектах. Сначала докажем одну совершенно элементарную лемму.

Лемма 2. *Пусть $\psi(x)$ — непрерывно дифференцируемая, неубывающая функция, положительная при $x \geqslant a > 0$. При любом положительном q неравенство*

$$\ln \psi'(x) < 2 \ln \psi(x) + q \ln x$$

справедливо для всех $x \geqslant a$, за исключением, может быть, множества E, для которого $\int\limits_E x^q\,dx < \infty$.

Доказательство. Обозначим через E то множество, лежащее на луче $x \geqslant a > 0$, для которого имеет место обратное неравенство. Тогда при $x \in E$ имеем $\psi'(x) \geqslant x^q \psi^2(x)$ и

$$\int\limits_E x^q\,dx \leqslant \int\limits_E \frac{\psi'(x)}{\psi^2(x)}\,dx \leqslant \int\limits_a^\infty \frac{\psi'(x)}{\psi^2(x)}\,dx \leqslant \frac{1}{\psi(a)} < \infty.$$

Лемма доказана.

Еще понадобится неравенство

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \ln \varphi(x)\,dx \leqslant \ln\left\{\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx\right\}, \tag{6.4}$$

справедливое для любой функции $\varphi(x)$, неотрицательной на отрезке (a, b). Оно является непрерывным аналогом неравенства

$$\sqrt[n]{A_1 \ldots A_n} \leqslant \frac{1}{n}(A_1 + \ldots + A_n) \tag{6.5}$$

(о среднем геометрическом и среднем арифметическом) и легко получается из него предельным переходом.

Основное значение для доказательства имеет следующее неравенство:

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда в ее обозначениях*

$$\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{|z|=r} \ln |F'(z)|\,|dz| + \frac{1}{2\pi r}\int\limits_{|z|=r} \ln \sqrt{\rho(F(z))}\,|dz| \leqslant \leqslant \frac{1}{2}\ln\frac{V'(r)}{2\pi r}. \tag{6.6}$$

Доказательство. Воспользуемся для $V(r)$ формулой (6.2). Из нее легко получаем, что

$$V'(r) = \int\limits_{|z|=r} \rho(F(z))\,|F'(z)|^2\,|dz|.$$

Поделим обе части этой формулы на $2\pi r$ и воспользуемся неравенством (6.4). Это даст нам утверждение леммы.

Теорема 6.2. *Для любых $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ неравенство*

$$\sum_1^n \overset{\circ}{m}(r, \zeta_k) < 2\overset{\circ}{T}(r) + O(\ln \overset{\circ}{T}(r) + \ln r)$$

справедливо при всех r, за исключением, может быть, множества E, для которого $\int\limits_E r^q\,dr < \infty$ при любом фиксированном $q > 0$.

Доказательство. Идея доказательства теоремы состоит в том, чтобы подходящим образом выбрать функцию $\rho(\zeta)$ и воспользоваться неравенством (6.6).

Заметим, что если функция $\rho(\zeta)$ выбрана так, что интеграл, представляющий функцию

$$P(w) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \ln k(w, \zeta)\,\rho(\zeta)\,d\xi\,d\eta,$$

абсолютно сходится при всех w, то функция $V(r)$, построенная по выбранной функции $\rho(\zeta)$, удовлетворяет неравенству

$$\int\limits_0^r \frac{V(x)}{x}\,dx < \overset{\circ}{T}(r) + O(1). \tag{6.7}$$

Действительно, возьмем равенство, доказанное в теореме 6.1, умножим его на $\rho(\zeta)$ и проинтегрируем по всей плоскости. Вспоминая, что $\rho(\zeta) \geqslant 0$ и что по определению $\overset{\circ}{m}(r, \zeta) \geqslant 0$, а

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \rho(\zeta)\,d\xi\,d\eta = 1$$

и

$$\int_0^r \frac{V(x)}{x}\,dx = \int_0^r \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int n(x,\zeta)\,\rho(\zeta)\,d\xi\,d\eta\right\}\frac{dx}{x} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty}\int N(r,\zeta)\,\rho(\zeta)\,d\xi\,d\eta,$$

получаем согласно определению функции $P(w)$ неравенство

$$\int_0^r \frac{V(x)}{x}\,dx \leqslant \mathring{T}(r) - P(F(0)).$$

Из этого неравенства вытекает неравенство (6.7), так как по условию $|P(w)| < \infty$.

Теперь оценим с помощью неравенства (6.6) интеграл

$$J(\rho, F) = \frac{1}{2\pi r}\int_{|z|=r} \ln\sqrt{\rho(F(z))}\,|dz|.$$

Из леммы 2 имеем

$$\ln\frac{V'(r)}{2\pi r} \leqslant 2\ln V(r) + O(\ln r) \qquad (r \notin E_1)$$

и

$$\ln V(r) \leqslant 2\ln\int_0^r \frac{V(x)}{x}\,dx + O(\ln r) \qquad (r \notin E_2).$$

Следовательно, обозначая через E объединение множеств E_1 и E_2, имеем

$$\ln\frac{V'(r)}{r} = O(\ln\mathring{T}(r) + \ln(r)) \qquad (r \notin E). \tag{6.8}$$

Далее, по формуле Иенсена

$$\frac{1}{2\pi r}\int_{|z|=r} \ln|F'(z)|\,|dz| = \ln|F'(0)| + N(r, 0, F') - \\ - N(r, \infty, F') \geqslant -N(r, \infty, F') + O(1)$$

(так как $N(r, 0, F') \geqslant 0$). Но $N(r, \infty, F') \leqslant 2N(r, \infty, F)$, поскольку $F'(z)$ имеет только те же полюсы, что и $F(z)$, а кратность их увеличивается не больше чем вдвое.

Следовательно,

$$-\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{|z|=r}\ln|F'(z)||dz|\leqslant 2N(r,\infty,F)+O(1). \quad (6.9)$$

Подставляем оценки (6.8) и (6.9) в неравенство (6.6):

$$\mathcal{J}(\rho, F)=\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{|z|=r}\ln\sqrt{\rho(F(z))}\,|dz|<$$
$$<2N(r,\infty)+O(\ln T(r)+\ln r) \qquad (r\notin E). \quad (6.10)$$

Теперь для завершения доказательства нам осталось только выбрать подходящим образом функцию $\rho(\zeta)$, удовлетворяющую условиям

$$\rho(\zeta)\geqslant 0, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\rho(\zeta)\,d\xi\,d\eta=1$$

и такую, чтобы интеграл для функции $P(w)$ абсолютно сходился при всех w.

Выбор такой функции $\rho(\zeta)$ не очевиден. В первом варианте доказательства Неванлинна брал в качестве $\rho(\zeta)$ плотность гиперболической метрики для плоскости ζ с выколотыми точками $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$. Лишь впоследствии Альфорс заметил, что можно взять в качестве $\rho(\zeta)$ значительно более простую функцию с тем же поведением при $\zeta\to\zeta_s$ и $\zeta\to\infty$. Следуя Альфорсу, мы возьмем функцию $\rho(\zeta)$, определяемую равенством

$$\ln\sqrt{\rho(\zeta)}=$$
$$=\ln k(\zeta,\infty)-\sum_{1}^{n-1}\ln k(\zeta,\zeta_s)-2\ln\left[-\sum_{1}^{n}\ln k(\zeta,\zeta_s)\right]+C$$

(для удобства обозначений положено $\zeta_n=\infty$, что ни в какой мере не ограничивает общности). Определенная этим равенством функция $\rho(\zeta)$ положительна и непрерывна во всей плоскости, за исключением точек ζ_s, в окрестности которых для функции $\rho(\zeta)$ имеют место асимптотические формулы

$$(\zeta)\sim\frac{A_s}{|\zeta-\zeta_s|^2(\ln|\zeta-\zeta_s|)^4} \quad (\zeta\to\zeta_s), \quad s=1,2,\ldots,n-1;$$

$$\rho(\zeta)\sim\frac{A_n}{|\zeta|^2(\ln|\zeta|)^4} \qquad (\zeta\to\infty)$$

(A_s — некоторые положительные постоянные).

Из этих асимптотических формул видно, что интеграл от $\rho(\zeta)$ по всей плоскости абсолютно сходится, как и интеграл, определяющий функцию $P(w)$. Постоянную C выберем так, чтобы интеграл от функции $\rho(\zeta)$ по всей плоскости был равен 1.

Оценим интеграл $J(\rho, F)$ для выбранной нами функции $\rho(\zeta)$. Имеем $J(\rho, F) = J_1 - 2J_2 + C$, где

$$J_1 = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|z|=r} \left[\ln k(F(z), \infty) - \sum_1^{n-1} \ln k(F(z), \zeta_s) \right] |dz| = \\ = -\overset{\circ}{m}(r, \infty) + \sum_1^{n-1} \overset{\circ}{m}(r, \zeta_s)$$

в силу определения $\overset{\circ}{m}(r, \zeta)$, а

$$J_2 = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|z|=r} \ln \left[-\sum_1^{n} \ln k(F(z), \zeta_s) \right] |dz| \leqslant \\ \leqslant \ln \left\{ -\frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|z|=r} \sum_1^{n} \ln k(F(z), \zeta_s) |dz| \right\} = \\ = \ln \sum_1^{n} \overset{\circ}{m}(r, \zeta_s) = O(\ln \overset{\circ}{T}(r))$$

в силу неравенства (6.4).

Следовательно, неравенство (6.10) дает

$$\sum_1^{n-1} \overset{\circ}{m}(r, \zeta_s) - \overset{\circ}{m}(r, \infty) < \\ < 2N(r, \infty) + O(\ln \overset{\circ}{T}(r) + \ln r) \qquad (r \notin E).$$

Прибавляя к обеим частям этого равенства величину $2\overset{\circ}{m}(r, \infty)$ и вспоминая, что $\overset{\circ}{m}(r, \infty) + N(r, \infty) = \overset{\circ}{T}(r) + O(1)$, а $\zeta_n = \infty$, получаем утверждение теоремы. □

Из доказанной теоремы сразу получается теорема о дефектах.

Действительно, можно считать, что $F(z)$ не является рациональной функцией, так как для рациональных функций все ясно и так. Поэтому в силу теоремы 5.3

$$\ln r = o(\overset{\circ}{T}(r)) \qquad (r \to \infty).$$

Кроме того,

$$\delta(\zeta) = 1 - \varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r, \zeta)}{\overset{\circ}{T}(r)} = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\overset{\circ}{m}(r, \zeta)}{\overset{\circ}{T}(r, \zeta)}.$$

Разделим обе части неравенства

$$\sum_{1}^{n} \overset{\circ}{m}(r, \zeta_s) < 2\overset{\circ}{T}(r) + O(\ln \overset{\circ}{T}(r)) \quad (r \notin E)$$

на $T(r)$ и перейдем к пределу при $r \to \infty$ по какой-либо последовательности, не попадающей на множество E. Это и означает, что

$$\sum_{1}^{n} \delta(\zeta_s) \leqslant 2.$$

Теорема 6.2 была венцом неванлинновской теории распределения значений, изложенной в его книге [26]. В дальнейшем эта теорема породила ряд проблем, на которых многие математики свыше полувека оттачивали свое аналитическое мастерство. Одной из таких проблем является вопрос о возможных множествах дефектов мероморфной функции. Более или менее завершенные результаты в этом направлении были получены лишь в последнее время (после 1970 г.). Мы сформулируем сейчас некоторые из этих результатов, не приводя доказательств (доказательства основаны на тонких оценках из теории квазиконформных отображений, которым не нашлось места в этой книге).

В приводимых ниже результатах предполагается, что $F(z)$ — мероморфная функция конечного порядка. Это предположение не случайно. Дело в том, что понятие дефекта для мероморфной функции бесконечного порядка не вполне корректно. На это обстоятельство указал львовский математик А. А. Гольдберг в приложении к русскому переводу книги [4] еще в 1960 г. Он построил пример мероморфной функции $F(z)$ бесконечного порядка, у которой множества дефектов функций $F(z)$ и $F(z+1)$ существенно различны.

Теорема 6.3. *Для любой мероморфной функции $F(z)$ конечного порядка выполняется условие*

$$\sum [\delta(\zeta)]^{1/3} < \infty \tag{6.11}$$

(сумма берется по всем значениям ζ).

Теорема 6.4. *Если для мероморфной функции $F(z)$ конечного порядка выполняется условие*

$$\sum{}' \delta(\zeta) = 2, \tag{6.12}$$

то дефект $\delta(\zeta)$ отличен от нуля лишь для конечного числа значений ζ, а все эти дефекты — рациональные числа.

Оба эти результата были получены американским математиком Вейцманом (первый — в 1972 г., а второй — в 1969 г.).

Теорема 6.5. *Для любой последовательности положительных чисел $\{\delta_k\}$, $k=1, 2, \ldots$, удовлетворяющей условиям*

$$\delta_k < 1, \quad \sum_1^\infty \delta_k < 2, \quad \sum_1^\infty \delta_k^{1/3} < \infty, \tag{6.13}$$

существует мероморфная функция $F(z)$ конечного порядка и последовательность различных значений $\{\zeta_k\}$, обладающие свойствами

$$\delta(\zeta_k, F) = \delta_k, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

и

$$\delta(\zeta, F) = 0, \qquad \zeta \neq \zeta_k.$$

Этот результат был получен харьковским математиком А. Э. Еременко в 1985 г.

Первое из условий (6.13) в теореме 6.5 весьма существенно. Случай, когда один из дефектов равен 1 (например, когда $F(z)$ — целая функция) пока не исследован до конца. Ереванский математик Н. У. Аракелян высказал гипотезу, что для целой функции $F(z)$ дефекты должны удовлетворять условию

$$\sum{}' \left(\ln \frac{e}{\delta(\zeta)}\right)^{-1} < \infty,$$

значительно более сильному, нежели (6.11).

Неванлинновская теория привела и к интересным многомерным обобщениям. Об этих обобщениях можно прочесть в книгах [5, 44].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций.— М.: Наука, 1970.— 304 с.
[2] Бибербах Л. (Bieberbach L.). Аналитическое продолжение.— М.: Наука, 1967.— 240 с.
[3] де Брейн Н. (de Bruijn N. T.). Асимптотические методы в анализе.— М.: ИЛ, 1961.— 248 с.
[4] Виттих Г. (Wittich H.). Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям.— М.: Физматгиз, 1960.— 320 с.
[5] Ву Х. (Wu H.) Теория равнораспределения для голоморфных кривых.— М.: Мир, 1973.— 228 с.
[6] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними.— М.: Физматгиз, 1958.— 440 с.
[7] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1958.— 308 с.
[8] Гельфонд А. О. Вычеты и их приложения.— М.: Наука, 1966.— 110 с.
[9] Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей.— М.: Наука, 1967.— 376 с.
[10] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1966.— 628 с.
[11] Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций.— М.: Наука, 1970.— 592 с.
[12] Гурвиц А., Курант Р. (Hurwitz A., Courant R.). Теория функций.— М.: Наука, 1968.— 608 с.
[13] Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции.— М.: Наука, 1979.— 320 с.
[14] Зорич В. А. Математический анализ. Ч. 1.— М.: Наука, 1981.— 543 с.; Ч. 2.— М.: Наука, 1984.— 640 с.
[15] Картан А. (Cartan H.). Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных.— М.: ИЛ, 1963.— 296 с.
[16] Копсон Э. (Copson E. T.). Асимптотические разложения.— М.: Мир, 1966.— 159 с.
[17] Кострикин А. И. Введение в алгебру.— М.: Наука, 1977.— 495 с.
[18] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1988.— 736 с.
[19] Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала.— М.: Наука, 1966.— 516 с.
[20] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.— М.: Физматгиз, 1956.— 632 с.

[21] Мандельбройт С. (Mandelbrojt S.). Теоремы замкнутости и теоремы композиции.— М.: ИЛ, 1962.— 154 с.
[22] Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций.— М.: Наука, 1966.— 388 с.
[23] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Том 1: Начала теории.— М.: Наука, 1967.— 488 с.
[24] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Том 2: Дальнейшее построение теории.— М.: Наука, 1968.— 624 с.
[25] Маркушевич А. И. Избранные главы теории аналитических функций.— М.: Наука, 1976.— 192 с.
[26] Неванлинна Р. (Nevanlinna R.). Однозначные аналитические функции.— М.: ГТТИ, 1941.— 388 с.
[27] Олвер Ф. (Olver F. W. J.). Введение в асимптотические методы и специальные функции.— М.: Наука, 1978.— 376 с.
[28] ван дер Поль Б., Бреммер X. (Van der Pol B., Bremmer H.). Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа.— М.: ИЛ, 1952.— 505 с.
[29] Привалов И. И. Субгармонические функции.— М.: ОНТИ, 1937.— 199 с.
[30] Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций.— М.— Л.: Гостехиздат, 1950.— 336 с.
[31] Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1967.— 444 с.
[32] Спрингер Дж. (Springer G.). Введение в теорию римановых поверхностей.— М.: ИЛ, 1960.— 343 с.
[33] Титчмарш Е. (Titchmarsh E. C.). Введение в теорию интегралов Фурье.— М.— Л.: ГТТИ, 1948.— 479 с.
[34] Титчмарш Е. (Titchmarsh E. C.). Теория функций.— М.: Наука, 1980.— 464 с.
[35] Уиттекер Э., Ватсон Дж. (Whittaker E. T., Watson G. N.). Курс современного анализа. Часть 1. Основные операции анализа.— М.: Наука, 1963.— 344 с.
[36] Уиттекер Э., Ватсон Дж. (Whittaker E. T., Watson G. N.). Курс современного анализа. Ч. 2: Трансцендентные функции.— М.: Наука, 1963.— 516 с.
[37] Форстер О. (Forster O.). Римановы поверхности.— М.: Мир, 1980.— 248 с.
[38] Фукс Б. А., Левин В. И. Функции комплексного переменного и их приложения.— М.: Гостехиздат, 1951.— 307 с.
[39] Фукс Б. А., Шабат Б. В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения.— М.: Наука, 1964.— 388 с.
[40] Харди Г. (Hardy G. N.). Расходящиеся ряды.— М.: ИЛ, 1951.— 504 с.
[41] Хейман В. (Hayman W. K.). Многолистные функции.— М.: ИЛ, 1960.— 180 с.
[42] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. Функции одного переменного.— М.: Наука, 1976.— 320 с.
[43] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 2. Функции нескольких переменных.— М.: Наука, 1976.— 400 с.
[44] Шабат Б. В. Распределение значений голоморфных отображений.— М.: Наука, 1982.— 288 с.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Учебное издание

Евграфов Марат Андреевич

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Заведующий редакцией *А. П. Баева*
Редактор *М. М. Горячая*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *Е. В. Морозова*
Корректор *Т. С. Вайсберг*

ИБ № 12683

Сдано в набор 30.08.89. Подписано к печати 18.12.90. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 23,52. Усл. кр.-отт. 23,52. Уч.-изд. л. 24,39 Тираж 18 800 экз. Заказ № 834. Цена 2 р.

Издательско-производственное и книготорговое объединение «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Четвертая типография издательства «Наука»
630077 Новосибирск, 77, Станиславского, 25

2 руб.