КЛАССИКИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ

И. И. АГОЛА, С. И. ВАВИЛОВА, М. Я. ВЫГОДСКОГО, Б. М. ГЕССЕНА, М. Л. ЛЕВИНА, А. А. МАКСИМОВА, А. А. МИХАЙЛОВА, И. П. РОЦЕНА, А. Я. ХИНЧИНА

ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Г. А. ЛОРЕНЦ
А. ПУАНКАРЕ
А. ЭЙНШТЕЙН
Г. МИНКОВСКИЙ

СБОРНИК РАБОТ КЛАССИКОВ РЕЛЯТИВИЗМА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
В. К. ФРЕДЕРИКСА И Д. Д. ИВАНЕНКО

ОНТИ — ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Ответственный редактор Р. С. Рубинштейн.
Технический редактор Р. В. Эмдина.

Сдано в набор 23 апреля 1935 г. Поступило к печати 5 сентября 1935 г.
Формат бумаги 72×110. Количество бум. лист. $6^1/_{16}$. Авторских лист. 15,12.
Количество печ. знаков в 1 бум. листе 115200. Зак. № 992. Тир. 5000 экз.
Изд. № 361. Леноблгорлит № 16424.

4-я тип. ОНТИ НКТП СССР „Кр. Печатник“. Ленинград, Международный, 75а.

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Настоящий сборник содержит основные статьи классиков релятивизма, в которых была впервые сформулирована теория относительности. Аналогичная книга была издана на немецком языке под редакцией О. Блюменталя Тейбнером. От этой книги наш сборник отличается прежде всего включением статьи Пуанкаре, независимо от Эйнштейна высказавшего принцип относительности. Текст переведен по оригинальным статьям полностью и не содержит целого ряда пропусков немецкого издания.

Книга дополнена биографиями всех четырех авторов и списком их работ, а также примечаниями, составленными Д. Д. Иваненко и В. К. Фредериксом. Мы считали необходимым включить также примечания Зоммерфельда к статье Минковского, опубликованные в немецком издании сборника.

Ввиду наличия на русском языке курсов теории относительности, в которых приведена подробная литература (Копф, Эддингтон), примечания носят главным образом исторический характер.

Теория относительности изложена в настоящих классических работах в столь законченном виде, что сборник и до сих пор не утерял своего актуального значения.

Ленинград, март 1935 г.

Г. А. ЛОРЕНЦ

Г. А. ЛОРЕНЦ.

ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЙ ОПЫТ МАЙКЕЛЬСОНА [1]).

1. Как впервые было указано Максвеллем и кроме того следует из весьма простого расчета, время, необходимое лучу света для прохождения расстояния между двумя точками A и B вперед и назад, должно измениться, как только эти точки подвергнутся совместному перемещению без увлечения эфира с собою. Это изменение, правда, является величиной второго порядка; однако, оно достаточно велико, для того чтобы быть обнаруженным при помощи чувствительного интерференционного метода.

Соответствующий опыт был выполнен Майкельсоном в 1881 г. Его аппарат, некоторая разновидность интерференционного рефрактометра, состоял из двух одинаково длинных, горизонтально расположенных и взаимно перпендикулярных плеч P и Q. Из двух интерферирующих друг с другом пучков света один проходил вдоль плеча P, другой — вдоль плеча Q, вперед и назад. Весь аппарат, включая источник света и приспособление для наблюдения, мог вращаться вокруг вертикальной оси. Особенно заслуживают внимания два положения аппарата, при которых плечо P или плечо Q по возможности точно совпа-

[1]) Из книги: Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern (Leiden 1895), §§ 89 92.

дает с направлением движения земли. На основании теории Френеля ожидалось смещение интерференционных полос при вращении аппарата из одного из этих двух „главных положений" в другое. Однако не было обнаружено ни малейшего следа подобного смещения, — мы будем называть его для краткости Максвелловским смещением — обусловленного изменением времен пробега. Отсюда Майкельсон счел возможным заключить, что эфир при движении земли не остается в покое, — заключение, правильность которого была, впрочем, вскоре поставлена под вопрос. Именно, вследствие недосмотра Майкельсон вставил в расчет удвоенное значение ожидаемого по теории изменения разностей фаз; при исправлении этой ошибки получаются смещения, которые как раз могут еще покрыться ошибками наблюдения [1]).

Позже Майкельсон совместно с Морли возобновил исследование [2]), причем для увеличения чувствительности заставлял каждый пучок света отражаться посредством нескольких зеркал вперед и назад. Благодаря этому достигалась та же выгода, как если бы плечи прежнего аппарата были значительно удлинены. Зеркала находились на тяжелой каменной плите, которая плавала на поверхности ртути и поэтому легко вращалась. Каждый пучок должен был теперь пробежать в общем путь в 22 *м*, и на основании теории Френеля нужно было ожидать смещения в 0,4 расстояния между полосами при переходе из одного главного положения в другое. Тем не менее при вращении получались только смещения, самое большее, в 0,02 расстояния между полосами; они вероятно происходили от ошибок наблюдения.

[1]) Michelson, American Journal of Science (3) **22**, 120, 1881.
[2]) Michelson and Morley, American Journal of Science (3) **34**, **333**, 1887. Phil. Mag. (5) **24**, **449**, 1887.

Можно ли на основании этого результата принять, что эфир принимает участие в движении земли, и что, следовательно, теория аберрации Стокса верна? Трудности, на которые наталкивается эта теория при объяснении аберрации, представляются мне слишком значительными для того, чтобы я мог согласиться с этим взглядом, и, напротив, — не попытался бы устранить противоречие между теорией Френеля и результатом Майкельсона.

В самом деле это удается посредством одной гипотезы, которую я уже высказал [1]) некоторое время тому назад и к которой, как я позже узнал, пришел и Фицджеральд [2]). В следующем параграфе мы покажем, в чем состоит эта гипотеза.

2. Для упрощения примем, что исследование ведется с таким же аппаратом, какой применялся в первых опытах, и что при одном главном положении плечо P точно совпадает с направлением движения земли.

Пусть $\mathbf{p}$ — скорость этого движения и L — длина

[1]) Lorentz, Zittingsverlagen der Akad. v. Wet. te Amsterdam, 1892—93, 74.
[2]) Как любезно сообщил мне Фицджеральд, он уже давно излагал эту гипотезу в своих лекциях. В литературе я нашел упоминание о ней только у Лоджа в статье „Aberration problems" (London Phil. Trans. **184** A, 727, 1893).
Я позволю себе добавить здесь, что эта работа, кроме различных теоретических соображений, содержит описание очень интересных экспериментов, в которых два стальных диска (диаметр 1 ярд), укрепленных на одной и той же оси нормально к последней, вращались с большой скоростью. Посредством специального интерференционного прибора исследовалось, не участвует ли во вращении также эфир, находящийся между дисками. Результат оказался отрицательным, хотя число оборотов в секунду достигало двадцати и больше. Лодж заключает отсюда, что диски не сообщают эфиру даже $^1/_{800}$ доли своей скорости.

каждого плеча; тогда $2L$ будет путь лучей света. На основании теории[1]), вследствие поступательного движения, время, в течение которого один пучок света идет вдоль P вперед и назад, увеличивается на величину

$$L \cdot \frac{p^2}{V^2}$$

по сравнению со временем, в течение которого проходит свой путь другой пучок. Эта же самая разница имела бы место, если бы, в случае отсутствия влияния поступательного движения, плечо P было длиннее плеча Q на

$$L \frac{p^2}{2V^2}.$$

Аналогичное рассуждение применимо и для второго главного положения.

Таким образом мы видим, что ожидаемые согласно теории разности фаз могли бы также возникнуть и в том случае, если бы при вращении аппарата то одно, то другое плечо имели бы бóльшую длину. Отсюда следует, что эти разности фаз могут быть компенсированы обратными изменениями размеров.

Если принять, что плечо, лежащее в направлении движения земли, короче другого плеча на

$$L \cdot \frac{p^2}{2V^2},$$

и что, вместе с тем, поступательное движение оказывает действие, вытекающее из теории Френеля, то результат опыта Майкельсона будет вполне объяснен.

В соответствии с этим следовало бы предположить, что движение твердого тела, например латунного стержня или каменной плиты, примененной в позднейших опытах, через покоящийся эфир влияет на

[1]) Ср. Lorentz, Arch. néerl. 21, 168—176, 1887.

размеры тел, причем это влияние различно в зависимости от ориентации тела относительно направления движения. Если бы, например, размеры, параллельные направлению движения, изменились в отношении $1:1+\delta$, а размеры, перпендикулярные к нему, — в отношении $1:1+\varepsilon$, то должно было бы иметь место

$$\varepsilon - \delta = \frac{p^2}{2V^2}. \qquad (1)$$

Значение одной из величин δ и ε осталось бы при этом неопределенным. Мы могли бы иметь

$$\varepsilon = 0, \quad \delta = -\frac{p^2}{2V^2},$$

но также и

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2V^2}, \quad \delta = 0, \text{ или } \varepsilon = \frac{p^2}{4V^2} \text{ и } \delta = -\frac{p^2}{4V^2}.$$

3. Как ни странна на первый взгляд указанная гипотеза, нужно будет все же признать, что она вовсе не так неприемлема, если только мы допустим, что и молекулярные силы передаются через эфир, подобно тому как мы можем теперь определенно утверждать это относительно электрических и магнитных сил. Если это так, то весьма вероятно, что поступательное движение изменит взаимодействие между двумя молекулами или атомами подобным же образом, как и притяжение или отталкивание между заряженными частицами. Так как форма и размеры твердого тела в конечном итоге обусловливаются интенсивностью молекулярных взаимодействий, то в этом случае не может не произойти и изменение размеров.

Следовательно, с теоретической стороны нет возражений против этой гипотезы. Относительно экспериментальной проверки нужно прежде всего заметить, что упомянутые удлинения и сокращения чрезвычайно малы. Так как $\frac{\mathfrak{p}^2}{V^2} = 10^{-8}$ то, следовательно, при $\varepsilon = 0$, сокращение одного диаметра земли составит приблизительно 6,5 *см*, а длина стержня 1 *м* изменится на 0,005 микрона, если его перевести из одного главного положения в другое. Желая обнаружить столь малые величины, можно пожалуй надеяться на успех только с помощью интерференционного метода. Следовательно, нам пришлось бы работать с двумя взаимно перпендикулярными стержнями и пустить из двух интерферирующих друг с другом пучков света один вдоль первого, а другой вдоль второго стержня вперед и назад. Но этим путем мы вернулись бы снова к опыту Майкельсона и при вращении не обнаружили бы смещения полос. Обратно, повторяя прежние рассуждения, можно сказать теперь, что смещение, вытекающее из изменений длин, компенсируется Максвеллевским смещением.

4. Заслуживает внимания то обстоятельство, что мы как раз приходим к предположенным выше изменениям размеров, если, *во-первых*, не принимая в расчет молекулярного движения, допустим, что в предоставленном самому себе твердом теле силы притяжения или отталкивания, действующие на любую молекулу, находятся в равновесии, и, *во-вторых*, — хотя к последнему впрочем нет никаких оснований, — распространим на эти молекулярные силы закон, выведенный нами прежде[1]) для электростатических взаимодействий. Под S_1 и S_2 мы будем понимать теперь не две системы заряженных частиц, как было там изложено, а две системы молекул, причем вторая из них находится в покое, а первая, движется со скоростью $\mathfrak{p}$ по направлению оси x; если между размерами обеих систем существует вышеуказанное соотношение, и если, далее, принять, что в обеих системах составляющие сил по оси x одинаковы, а составляющие по осям y и z отличаются друг от друга множителем $\sqrt{1-\frac{\mathfrak{p}^2}{V^2}}$, то ясно, что силы в системе S_1 будут взаимно уравновешены, если только это имеет место в S_2. Поэтому, если S_2 представляет собой состояние равновесия покоящегося твердого тела, то в S_1 молекулы имеют как раз те положения, в которых они могут пребывать под влиянием поступательного движения. Перемещение привело бы, конечно, само собою к этому расположению молекул и, следовательно, обусловило бы сокращение в направлении движения в отношении $1:\sqrt{1-\frac{\mathfrak{p}^2}{V^2}}$ по формулам, данным в § 23 цитированной книги. Это приводит к значениям

$$\delta = -\frac{\mathfrak{p}^2}{2V^2}, \quad \varepsilon = 0,$$

что согласуется с (1).

В действительности молекулы тела не находятся в покое, но в каждом „состоянии равновесия" существует стационарное движение. Вопрос о том, как велико влияние этого обстоятельства на рассматриваемое явление, мы оставим открытым; во всяком случае опыты Майкельсона и Морли вследствие неизбежности ошибок наблюдения оставляют довольно широкий произвол для значений δ и ε.

---

[1]) Именно в § 23 книги: Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. *Прим. ред.*

Г. А. ЛОРЕНЦ.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В СИСТЕМЕ, ДВИЖУЩЕЙСЯ С ЛЮБОЙ СКОРОСТЬЮ, МЕНЬШЕЙ СКОРОСТИ СВЕТА [1]).

1. Стараясь на основании теоретических соображений определить влияние, которое может оказать поступательное движение (например, поступательное движение, испытываемое всеми системами вследствие годового движения земли) на электрические и оптические явления, мы сравнительно просто достигаем цели в тех случаях, когда рассматриваются только величины, пропорциональные первой степени отношения скорости поступательного движения w к скорости света c.

Случаи же, в которых могут быть обнаружены величины второго порядка, следовательно, порядка $\frac{w^2}{c^2}$, представляют более значительные трудности. Первым примером явлений этого рода является известный интерференционный опыт Майкельсона, отрицательный результат которого привел Фицджеральда и меня к заключению, что размеры твердых тел немного изменяются вследствие их движения через эфир.

Недавно были опубликованы некоторые новые опыты, в которых отыскивались эффекты второго порядка.

[1]) „Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light“, Proc. Acad Sc., Amsterdam, **6**, 809, 1904.

Рэлей [1]) и Брэс [2]) исследовали, не становится ли тело от движения земли двоякопреломляющим; можно было на первый взгляд ожидать этого эффекта, если принять только что упомянутое изменение размеров. Оба физика пришли, однако, к отрицательному результату.

Затем Трутон и Нобль [3]) пытались обнаружить момент количества движения, действующий на заряженный конденсатор, пластины которого образуют некоторый угол с направлением поступательного движения. Если не изменять электронной теории введением новой гипотезы, то она, без сомнения, требует существования такого момента количества движения. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть конденсатор с эфиром в качестве диэлектрика. Можно показать, что в каждой электростатической системе, движущейся со скоростью $\mathbf{w}$, существует определенное „электромагнитное количество движения“. Если мы обозначим его величину и направление через вектор $\mathbf{G}$, то упомянутый момент количества движения определится как следующее векторное произведение [4]):

$$[\mathbf{G}\cdot\mathbf{w}]. \qquad (1)$$

Если ось z выбрана перпендикулярно к пластинам конденсатора, скорость $\mathbf{w}$ имеет любое направление, а U есть энергия конденсатора, вычисленная обычным образом, то компоненты вектора $\mathbf{G}$ с точностью до

[1]) Rayleigh, Phil. Mag. (6) **4**, 678, 1902.

[2]) Brace, Phil. Mag. (6) **7**, 317, 1904.

[3]) Trouton and Noble, London Roy. Soc. Trans. **A. 202**, 165, 1903.

[4]) Ср. мою статью: „Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. Elektronentheorie“, Mathematische Encyklopädie, V 14, § 21a. (Эта статья цитируется ниже только двумя буквами: M. E.)

величин первого порядка даются следующими формулами[1]):

$$G_x = \frac{2U}{c^2} w_x, \quad G_y = \frac{2U}{c^2} w_y, \quad G_z = 0.$$

Подставив эти значения в (1), мы получим для компонент момента количества движения с точностью до величин второго порядка следующие выражения:

$$\frac{2U}{c^2} w_y w_z, \quad -\frac{2U}{c^2} w_x w_z, \quad 0.$$

Эти выражения показывают, что ось момента количества движения лежит в плоскости пластин перпендикулярно к поступательному движению. Если α есть угол между скоростью и нормалью к пластинам, то момент количества движения равен

$$\frac{U}{c^2} w^2 \sin 2\alpha;$$

он стремится повернуть конденсатор так, чтобы пластины расположились параллельно направлению движения земли.

В аппарате Трутона и Нобля конденсатор висел на коромысле крутильных весов, чувствительности достаточной для того, чтобы отклониться под действием момента количества движения указанного порядка величины. Однако ничего подобного не было наблюдено.

2. Описанные опыты не являются единственным основанием желательности новой обработки проблем, связанных с движением земли. Пуанкаре[2]), возражая против прежней теории оптических и электрических явлений в движущихся телах, указывал, что для объяснения отрицательного результата опыта Майкельсона оказалось нужным ввести новую гипотезу, и что в этом может встретиться необходимость каждый раз, когд станут известны новые факты. Подобному введению особых гипотез для каждого нового опытного результата присуща, конечно, некоторая искусственность. Положение вещей было бы удовлетворительнее, если бы можно было с помощью определенных основных допущений показать, что многие электромагнитные явления строго, т. е. без какого-либо пренебрежения членами высших порядков, не зависят от движения системы. Несколько лет тому назад я уже сделал попытку создать подобную теорию[1]). Теперь я надеюсь рассмотреть этот вопрос с бо́льшим успехом. На скорость налагается только то ограничение, что она должна быть меньше скорости света.

3. Я исхожу из основных уравнений электронной теории[2]). Пусть $\mathbf{d}$ — диэлектрическое смещение в эфире, $\mathbf{h}$ — магнитная сила, ρ — объемная плотность заряда электрона, $\mathbf{v}$ — скорость некоторой точки этой частицы и $\mathbf{f}$ — электрическая сила, т. е. сила, с которой эфир действует на элемент объема электрона, рассчитанная на единицу заряда. Пользуясь неподвижной координатной системой, имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{d} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{h} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{1}{c}(\dot{\mathbf{d}} + \rho \mathbf{v}),$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{d} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{h}}, \tag{2}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{d} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\cdot\mathbf{h}],$$

[1]) M. E. § 56 c.

[2]) Poincaré, Rapports du Congrès de physique de 1900, Paris, 1, стр. 22, 23.

[1]) Lorentz, Zittingsverlag, Akad. Wet. 7 (1899), 507; Amsterdam Proc. 1898—99, 427.

[2]) M. E. § 2.

Я принимаю теперь, что система, как целое, движется по направлению оси x с постоянной скоростью w, и обозначаю через $\mathbf{u}$ скорость, которую пусть сверх того имеет какая-нибудь точка электрона; тогда

$$\mathbf{v}_x = w + \mathbf{u}_x, \quad \mathbf{v}_y = \mathbf{u}_y, \quad \mathbf{v}_z = \mathbf{u}_z.$$

Если в то же время уравнения (2) отнести к осям, которые двигаются вместе с системой, то получается

$$\operatorname{div} \mathbf{d} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{h} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial z} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{d}_x + \frac{1}{c}\rho(w + \mathbf{u}_x),$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial x} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{d}_y + \frac{1}{c}\rho \mathbf{u}_y,$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial y} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{d}_z + \frac{1}{c}\rho \mathbf{u}_z,$$

$$\frac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{h}_x,$$

$$\frac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{h}_y,$$

$$\frac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial y} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{h}_z,$$

$$\mathbf{f}_x = \mathbf{d}_x + \frac{1}{c}(\mathbf{u}_y\mathbf{h}_z - \mathbf{u}_z\mathbf{h}_y),$$

$$\mathbf{f}_y = \mathbf{d}_y - \frac{1}{c}w\mathbf{h}_z + \frac{1}{c}(\mathbf{u}_z\mathbf{h}_x - \mathbf{u}_x\mathbf{h}_z),$$

$$\mathbf{f}_z = \mathbf{d}_z + \frac{1}{c}w\mathbf{h}_y + \frac{1}{c}(\mathbf{u}_x\mathbf{h}_y - \mathbf{u}_y\mathbf{h}_x).$$

4. Мы преобразуем эти формулы введением новых переменных. Положим

$$\frac{c^2}{c^2 - w^2} = k^2 \tag{3}$$

и обозначим через l новую величину, значение которой будет дано ниже. Я беру в качестве независимых переменных:

$$x' = klx, \quad y' = ly, \quad z' = lz, \tag{4}$$

$$t' = \frac{l}{k}t - kl\frac{w}{c^2}x, \tag{5}$$

и определяю два новых вектора $\mathbf{d}'$ и $\mathbf{h}'$ посредством формул

$$\mathbf{d}_x' = \frac{1}{l^2}\mathbf{d}_x, \qquad \mathbf{d}_y' = \frac{k}{l^2}\left(\mathbf{d}_y - \frac{w}{c}\mathbf{h}_z\right),$$

$$\mathbf{d}_z' = \frac{k}{l^2}\left(\mathbf{d}_z + \frac{w}{c}\mathbf{h}_y\right), \qquad \mathbf{h}_x' = \frac{1}{l^2}\mathbf{h}_x,$$

$$\mathbf{h}_y' = \frac{k}{l^2}\left(\mathbf{h}_y + \frac{w}{c}\mathbf{d}_z\right), \qquad \mathbf{h}_z' = \frac{k}{l^2}\left(\mathbf{h}_z - \frac{w}{c}\mathbf{d}_y\right).$$

Вместо этого мы можем в силу (3) написать:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{d}_x = l^2\mathbf{d}_x', && \mathbf{d}_y = kl^2\left(\mathbf{d}_y' + \frac{w}{c}\mathbf{h}_z'\right), \\ &\mathbf{d}_z = kl^2\left(\mathbf{d}_z' - \frac{w}{c}\mathbf{h}_y\right), && \mathbf{h}_x = l^2\mathbf{h}_x', \\ &\mathbf{h}_y = kl^2\left(\mathbf{h}_y' - \frac{w}{c}\mathbf{d}_z'\right), && \mathbf{h}_z = kl^2\left(\mathbf{h}_z' + \frac{w}{c}\mathbf{d}_y'\right). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Пусть коэффициент l есть такая функция от w, которая при $w = 0$ принимает значение 1, а при малых значениях w отличается от 1 только на величины второго порядка.

Пусть переменная t' называется „местным временем“; в самом деле, при $k = 1$ и $l = 1$ она тождественна с величиной, которую я так называл прежде. Если мы наконец положим

$$\frac{1}{kl^3}\rho = \rho', \tag{7}$$

$$k^2\mathbf{u}_x = \mathbf{u}_x', \quad k\mathbf{u}_y = \mathbf{u}_y', \quad k\mathbf{u}_z = \mathbf{u}_z' \tag{8}$$

и будем толковать последние три величины как компоненты нового вектора $\mathfrak{u}'$, то уравнения примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{div}' \mathbf{d}' = \left(1 - \frac{w\mathfrak{u}_x'}{c^2}\right)\rho', \qquad \operatorname{div}' \mathfrak{h}' = 0, \\
&\operatorname{rot}' \mathfrak{h}' = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathbf{d}'}{\partial t'} + \rho'\mathfrak{u}'\right), \\
&\operatorname{rot}' \mathbf{d}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{h}'}{\partial t'}
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{f}_x &= l^2\mathfrak{d}_x' + l^2\frac{1}{c}(\mathfrak{u}_y'\mathfrak{h}_z' - \mathfrak{u}_z'\mathfrak{h}_y') + \\
&\quad + l^2\frac{w}{c^2}(\mathfrak{u}_y'\mathfrak{d}_y' + \mathfrak{u}_z'\mathfrak{d}_z'), \\
\mathfrak{f}_y &= \frac{l^2}{k}\mathfrak{d}_y' + \frac{l^2}{k}\frac{1}{c}(\mathfrak{u}_z'\mathfrak{h}_x' - \mathfrak{u}_x'\mathfrak{h}_z') - \\
&\quad - \frac{l^2}{k}\frac{w}{c^2}\mathfrak{u}_x'\mathfrak{d}_y', \\
\mathfrak{f}_z &= \frac{l^2}{k}\mathfrak{d}_z' + \frac{l^2}{k}\frac{1}{c}(\mathfrak{u}_x'\mathfrak{h}_y' - \mathfrak{u}_y'\mathfrak{h}_x') - \\
&\quad - \frac{l^2}{k}\frac{w}{c^2}\mathfrak{u}_x'\mathfrak{d}_z'.
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Символы div' и rot' в (9) соответствуют div и rot в (2), только дифференцирования по x, y, z нужно заменить соответствующими дифференцированиями по x', y', z' [1]).

[1]) Можно заметить, что в этой статье мне не удалось в полной мере получить формулы преобразования теории относительности Эйнштейна. Ни равенство (7) ни формулы (8) не имеют того вида, который дан Эйнштейном, вследствие чего мне не удалось уничтожить член $-\frac{w\mathfrak{u}_x'}{c^2}$ из первой формулы (9) и таким образом привести уравнения (9) точно к виду, справедливому для покоящейся системы. С этим обстоятельством связана беспомощность некоторых дальнейших рассуждений в этой работе.

Заслуга Эйнштейна состоит в том, что он первый высказал принцип относительности в виде всеобщего строго и точно действующего закона.

К этому я добавлю еще, что Фохт уже в 1887 г. (Göttinger Nachrichten, стр. 41) в работе „Über das Dopplersche Prinzip" применил к формулам вида

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

преобразование, которое эквивалентно преобразованию, содержащемуся в равенствах (4) и (5). [Примечание *Г. А. Лоренца*, 1912 г.]

5. Уравнения (9) приводят к заключению, что векторы $\mathbf{d}'$ и $\mathfrak{h}'$ можно представить посредством скалярного потенциала φ' и векторного потенциала $\mathbf{a}'$. Эти потенциалы удовлетворяют уравнениям [1]):

$$\Delta'\varphi' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t'^2} = -\rho', \quad (11)$$

$$\Delta'\mathbf{a}' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{a}'}{\partial t'^2} = -\frac{1}{c^2}\rho'\mathfrak{u}'. \quad (12)$$

Векторы $\mathbf{d}'$ и $\mathfrak{h}'$ можно выразить через потенциалы следующим образом:

$$\mathbf{d}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{a}'}{\partial t'} - \operatorname{grad}'\varphi' + \frac{w}{c}\operatorname{grad}'\mathbf{a}'_x, \quad (13)$$

$$\mathfrak{h}' = \operatorname{rot}'\mathbf{a}'. \quad (14)$$

Символ Δ' есть сокращенное обозначение операции

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2},$$

а $\operatorname{grad}'\varphi'$ обозначает вектор с компонентами

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}, \quad \frac{\partial\varphi'}{\partial y'}, \quad \frac{\partial\varphi'}{\partial z'};$$

выражение $\operatorname{grad}'\mathbf{a}_x'$ имеет аналогичное значение.

[1]) M. E. §§ 4 и 10.

Чтобы получить решения уравнений (11) и (12) в простом виде, мы обозначаем через x', y', z' координаты точки P' в пространстве S' и сопоставляем этой точке для каждого значения t' значения ρ, $\mathbf{u}'$, φ', $\mathbf{a}'$, которые относятся к соответствующей точке $P(x, y, z)$ электромагнитной системы. Для некоторого определенного значения четвертой независимой переменной t' потенциалы φ' и $\mathbf{a}'$ в точке P нашей системы, или в соответствующей точке P' пространства S' даются формулами[1]):

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi}\int \frac{[\rho']}{r'}\,dS', \tag{15}$$

$$\mathbf{a}' = \frac{1}{4\pi c}\int \frac{[\rho'\mathbf{u}']}{r'}\,dS'. \tag{16}$$

Здесь dS' — элемент пространства в S', r' — его расстояние от P', скобки обозначают значения величины ρ' и вектора $\rho'\mathbf{u}'$ в элементе dS' при значении четвертой независимой переменной равном $t' - \frac{r'}{c}$.

Вместо (15) и (16) можно также, принимая во внимание (4) и (7), написать:

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi}\int \frac{[\rho]}{r'}\,dS, \tag{17}$$

$$\mathbf{a}' = \frac{1}{4\pi c}\int \frac{[\rho\mathbf{u}']}{r'}\,dS. \tag{18}$$

Интегрирования при этом нужно распространить по самой электромагнитной системе. Нужно, конечно, помнить, что в этих формулах r' не означает расстояния между элементом dS и точкой (x, y, z), для которой должно быть выполнено вычисление. Если элемент характеризуется точкой (x, y, z), то мы должны положить

$$r' = l\sqrt{k^2(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}.$$

[1]) M. E. §§ 5 и 10.

Если мы желаем определить φ' и $\mathbf{a}'$ для момента времени, для которого местное время в точке P равно t', то мы должны придать ρ и $\rho\mathbf{u}'$ значения, которыми они обладают в элементе dS в момент местного времени $t' - \frac{r'}{c}$ этого элемента.

6. Для нашей цели достаточно рассмотреть два частных случая. Возьмем сначала случай электростатической системы, т. е. системы, в которой поступательное движение со скоростью w является единственным движением. В этом случае $\mathbf{u}'$ делается равным 0 и, следовательно, в силу (16), $\mathbf{a}' = 0$. Далее, φ' не зависит от t', так что равенства (11), (13) и (14) упрощаются и принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \Delta'\varphi' &= -\rho', \\ \mathbf{d}' &= -\operatorname{grad}'\varphi', \\ \mathbf{h}' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Определив с помощью этих уравнений вектор $\mathbf{d}'$, мы узнаем и электрическую силу, которая действует на электроны нашей системы. Так как $\mathbf{u}' = 0$, то уравнения (10) определяющие эту силу, принимают следующий вид:

$$\mathbf{f}_x = l^2\mathbf{d}_x', \qquad \mathbf{f}_y = \frac{l^2}{k}\mathbf{d}_y', \qquad \mathbf{f}_z = \frac{l^2}{k}\mathbf{d}_z'. \tag{20}$$

Этот результат упрощается, если мы движущуюся систему $\sum$, о которой идет речь, сравним с покоящейся системой $\sum'$. Последняя система получается из $\sum$ путем умножения расстояний в направлении оси x на kl, а расстояний в направлении осей y и z на l. Эту деформацию обозначим для удобства символом (kl, l, l). Пусть эта новая система находится в вышеупомянутом пространстве S'; мы придаем в ней плотности ρ значение, определяемое формулой (7), так что в $\sum$ и $\sum'$ заряды соответствующих элементов объема и соответствующих электронов равны. Мы получим тогда силы, действующие на электроны движущейся системы $\sum$, определив сперва соответствующие силы в $\sum'$ и помножив потом их компоненты в направлении оси x на l^2, а перпендикулярные к этой оси компоненты на $\frac{l^2}{k}$. Этот результат нам будет удобно выразить следующей формулой

$$\mathbf{F}\left(\sum\right)=\left(l^2,\ \frac{l^2}{k},\ \frac{l^2}{k}\right)\mathbf{F}\left(\sum'\right). \tag{21}$$

Следует еще заметить, что с помощью значения $\mathbf{d}'$, найденного из формулы (19), можно легко выразить электромагнитное количество движения в движущейся системе, или, скорее, его компоненты в направлении движения. В самом деле, уравнение

$$\mathbf{G}=\frac{1}{c}\int[\mathbf{d}\cdot\mathbf{h}]\,dS$$

показывает, что

$$\mathbf{G}_x=\frac{1}{c}\int(\mathbf{d}_y\mathbf{h}_z-\mathbf{d}_z\mathbf{h}_y)\,dS.$$

Следовательно, в силу (6) и так как $\mathbf{h}'=0$, имеем

$$\mathbf{G}_x=\frac{k^2l^4w}{c^2}\int\left(\mathbf{d}_y'^2+\mathbf{d}_z'^2\right)dS=\frac{klw}{c^2}\int\left(\mathbf{d}_y'^2+\mathbf{d}_z'^2\right)dS'. \tag{22}$$

7. Во втором частном случае мы рассмотрим частицу с электрическим моментом, т. е. небольшое пространство S с общим зарядом $\int\rho dS=0$, но с таким распределением плотности, что интегралы $\int\rho x dS$, $\int\rho y dS$, $\int\rho z dS$ имеют отличные от нуля значения.

Пусть X, Y, Z будут координатами, отсчитываемыми от некоторой определенной точки A этой частицы — назовем эту точку центром — и пусть электрический момент определяется как вектор $\mathbf{p}$ с компонентами

$$\mathbf{p}_x=\int\rho X dS,\quad \mathbf{p}_y=\int\rho Y dS,\quad \mathbf{p}_z=\int\rho Z dS. \tag{23}$$

Тогда мы имеем

$$\frac{d\mathbf{p}_x}{dt}=\int\rho\mathbf{u}_x dS,\quad \frac{d\mathbf{p}_y}{dt}=\int\rho\mathbf{u}_y dS,\quad \frac{d\mathbf{p}_z}{dt}=\int\rho\mathbf{u}_z dS. \tag{24}$$

Если X, Y, Z рассматриваются как бесконечно малые величины, то естественно, что и $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$ будут тоже бесконечно малыми. Мы пренебрегаем квадратами и произведениями этих шести величин.

Воспользуемся формулой (17) чтобы определить скалярный потенциал φ' для некоторой внешней точки $P(x,\ y,\ z)$, находящейся на конечном расстоянии от поляризованной частицы, для того момента, в котором местное время этой точки имеет определенное значение t'. При этом мы придаем несколько иное значение символу $[\rho]$, который в формуле (17) относится к тому моменту времени, когда местное время в dS равно $t'-\frac{r'}{c}$. Мы обозначаем значение r' для центра A через r_0' и понимаем под $[\rho]$ значение плотности в точке $(X,\ Y,\ Z)$ в тот момент времени t_0, когда местное время в A равно $t'-\frac{r_0'}{c}$.

Из уравнения (5) видно, что этот момент времени будет более ранним, чем момент, к которому относится числитель в (17), именно, на величину

$$k^2\frac{w}{c^2}X+\frac{k}{l}\frac{r_0'-r'}{c}=k^2\frac{w}{c^2}X+$$
$$+\frac{k}{l}\frac{1}{c}\left(X\frac{\partial r'}{\partial x}+Y\frac{\partial r'}{\partial y}+Z\frac{\partial r'}{\partial z}\right)$$

единиц времени. В это последнее выражение вместо производных мы можем подставить их значения в точке A.

Мы должны теперь в (17) заменить $[\rho]$ через

$$[\rho]+k^2\frac{w}{c^2}X\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]+\frac{k}{l}\frac{1}{c}\left(X\frac{\partial r'}{\partial x}+Y\frac{\partial r'}{\partial y}+Z\frac{\partial r'}{\partial z}\right)\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right], \quad (25)$$

при этом $\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]$ снова относится к времени t_0. Если выбрано значение t', для которого должны быть сделаны вычисления, то это время t_0 становится функцией координат x, y, z точки P. Вследствие этого значение $[\rho]$ зависит от этих координат, и легко видеть, что

$$\frac{\partial[\rho]}{\partial x}=-\frac{k}{l}\frac{1}{c}\frac{\partial r'}{\partial x}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right],$$

и т. д.

Поэтому (25) перепишется так:

$$[\rho]+k^2\frac{w}{c^2}X\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]-\left(X\frac{\partial[\rho]}{\partial x}+Y\frac{\partial[\rho]}{\partial y}+Z\frac{\partial[\rho]}{\partial z}\right).$$

Если мы указанную выше величину r_0' будем впредь обозначать через r', то множитель $\frac{1}{r'}$ нужно будет заменить следующим выражением:

$$\frac{1}{r'}-X\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r'}\right)-Y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r'}\right)-Z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r'}\right).$$

Тогда в итоге элемент dS в интеграле (17) умножится на

$$\frac{[\rho]}{r'}+k^2\frac{w}{c^2}\frac{X}{r'}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]-\frac{\partial}{\partial x}\frac{X[\rho]}{r'}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{Y[\rho]}{r'}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{Z[\rho]}{r'}.$$

Это проще, чем первоначальная форма того же выражения, потому что ни r', ни время, для которого должны быть взяты заключенные в скобки величины,

не зависят от X, Y, Z. Пользуясь (23) и принимая во внимание, что $\int\rho dS=0$, получаем:

$$\varphi'=k^2\frac{w}{4\pi c^2r'}\left[\frac{\partial\mathbf{p}_x}{\partial t}\right]-\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{[\mathbf{p}_x]}{r'}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{[\mathbf{p}_y]}{r'}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{[\varphi_z]}{r'}\right\}.$$

В этом уравнении все заключенные в скобки величины должны быть взяты для того момента, когда местное время центра частицы равно $t'-\frac{r'}{c}$.

Мы заканчиваем эти соображения введением нового вектора $\mathbf{p}'$, компоненты которого равны:

$$\mathbf{p}_x'=kl\mathbf{p}_x,\ \mathbf{p}_y'=l\mathbf{p}_y,\ \mathbf{p}_z'=l\mathbf{p}_z. \quad (26)$$

Одновременно мы переходим к x', y', z', t', как независимым переменным. Окончательный результат имеет вид:

$$\varphi'=\frac{w}{4\pi c^2r'}\frac{\partial[\mathbf{p}_x']}{\partial t'}-\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\frac{[\mathbf{p}_x']}{r'}+\frac{\partial}{\partial y'}\frac{[\mathbf{p}_y']}{r'}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{[\mathbf{p}_z']}{r'}\right\}.$$

Преобразование формулы (18) для векторного потенциала является менее трудным делом, потому что последний содержит бесконечно малый вектор $\mathbf{u}'$. Принимая во внимание (8), (24), (26) и (5), получаем

$$\mathbf{a}'=\frac{1}{4\pi cr'}\frac{\partial[\mathbf{p}']}{\partial t'}.$$

Поле, вызванное поляризованной частицей, теперь вполне определено. Формула (13) приводит к значению

$$\mathbf{d}'=-\frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\frac{[\mathbf{p}']}{r'}+\frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}'\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\frac{[\mathbf{p}_x']}{r'}+\frac{\partial}{\partial y'}\frac{[\mathbf{p}_y']}{r'}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{[\mathbf{p}_z']}{r'}\right\}, \quad (27)$$

а вектор $\mathfrak{h}'$ дается формулой (14). Можно далее применить формулы (20) вместо первоначальных формул (10), если мы желаем рассмотреть силы, с которыми одна поляризованная частица действует на другую, находящуюся в некотором отдалении от первой. В самом деле, скорости $\mathfrak{u}$ для второй частицы могут считаться бесконечно малыми, как и для первой.

Следует заметить, что уравнения для покоящейся системы содержатся в выведенных формулах. Для такой системы величины со штрихами становятся тождественными с соответствующими величинами без штрихов; кроме того, k и l делаются равными единице. Компоненты (27) являются одновременно компонентами электрической силы, с которой одна поляризованная частица действует на другую.

8. До сих пор мы пользовались только основными уравнениями, не вводя новых предположений. Теперь я допущу, что *электроны, которые в состоянии покоя рассматриваются как шары радиуса R, изменяют свои размеры под влиянием поступательного движения, а именно: размеры в направлении движения уменьшаются в kl раз, а размеры в перпендикулярных к движению направлениях в l раз.*

При этой деформации, которую мы обозначим через $\left(\frac{1}{kl}, \frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$, каждый элемент объема должен сохранить свой заряд.

Наше допущение ведет к тому, что в электростатической системе $\sum$, которая движется со скоростью $\mathfrak{w}$, все электроны преобразуются в эллипсоиды, малые оси которых лежат в направлении движения. Если мы теперь подвергнем систему деформации (kl, l, l) для того, чтобы иметь возможность применить теорему, изложенную в § 6, мы снова получим шаровые электроны радиуса R. Если мы, далее, изменим относительное положение электронных центров в $\sum$ посредством деформации (kl, l, l) и в полученные таким образом точки поместим центры покоящихся шаровидных электронов, то получим систему, которая будет тождественна воображаемой, описанной в § 6, системе $\sum'$. Силы в этих двух системах связаны друг с другом соотношением (21).

Во-вторых, я принимаю, что *силы, действующие между незаряженными частицами, так же, как и силы, действующие между незаряженными частицами и электронами, вследствие поступательного движения подвергаются изменению точно таким же образом, как электрические силы в электростатической системе.*

Иными словами: какова бы ни была природа частиц весомого тела, всегда — при условии, что частицы не двигаются друг относительно друга — силы, действующие в покоящейся системе $\sum'$ и в движущейся системе $\sum$, связаны друг с другом соотношением (21), если, в смысле взаимного положения частиц система $\sum'$ получается из $\sum$ посредством деформации (kl, l, l) и, следовательно, $\sum$ из $\sum'$ посредством деформации $\left(\frac{1}{kl}, \frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$.

Поэтому, если в $\sum'$ результирующая сила для какой-нибудь частицы обращается в нуль, то это же самое должно иметь место для соответствующей частицы в $\sum$. Мы пренебрегаем влияниями молекулярного движения и полагаем, что силы притяжения и отталкивания, которые действуют со стороны окружающей среды, уравновешиваются на каждой частице твердого тела. Если мы еще допустим, что возможна только *одна* равновесная конфигурация, то мы сможем заключить, что система $\sum'$ *сама собой* переходит в систему $\sum$, если ей сообщить скорость w. Другими словами, поступательное движение *производит* деформацию $\left(\frac{1}{kl}, \frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$.

Случай молекулярного движения рассматривается в § 12.

Легко видеть, что гипотеза, выдвинутая раньше в связи с опытом Майкельсона, содержится в высказанной теперь. Последняя гипотеза имеет, однако, более общий характер, потому что единственное ограничение движения заключается теперь в том, что скорость его должна быть меньше скорости света.

9. Мы теперь в состоянии вычислить электромагнитное количество движения одного электрона. С целью упрощения я полагаю, что заряд e равномерно распределен по поверхности, пока электрон находится в покое. Тогда распределение того же рода существует и в системе $\sum'$, с которой мы имеем дело в последнем из интегралов в (22).

Следовательно,

$$\int \left(\mathfrak{d}_y'^2 + \mathfrak{d}_z'^2\right) dS' = \frac{2}{3} \int \mathfrak{d}'^2 dS' = \frac{e^2}{6\pi} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{6\pi R}$$

и

$$\mathfrak{G}_x = \frac{e^2}{6\pi c^2 R} klw.$$

Нужно принять во внимание, что произведение kl есть функция от w и что на основании симметрии вектор $\mathfrak{G}$ имеет направление поступательного движения. Обозначив скорость этого движения через $\mathfrak{w}$, имеем общее векторное уравнение

$$\mathfrak{G} = \frac{e^2}{6\pi c^2 R} kl\mathfrak{w}. \tag{28}$$

Но всякое изменение в движении системы влечет за собой соответствующее изменение в электромагнитном количестве движения и требует поэтому определенной силы, величина и направление которой дается формулой

$$\mathfrak{F} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}. \tag{29}$$

Уравнение (28) можно строго говоря применять только к случаю равномерного и прямолинейного поступательного движения. Вследствие этого теория быстро-переменных движений электрона очень трудна, хотя формула (29) всегда имеет место. Это обстоятельство усугубляется тем, что гипотеза § 8 включает требование, чтобы величина и направление деформации непрерывно изменялись. Едва ли вообще вероятно, чтобы форма электрона определялась одной только скоростью в рассматриваемый момент времени.

Несмотря на это, мы, при условии достаточно медленного изменения скорости, получаем удовлетворительное приближение, применяя (28) для каждого момента времени. Применение (29) к такому *квазистационарному* поступательному движению, как его назвал Абрагам [1]), — очень просто. Пусть в определенный момент времени $\mathfrak{j}_1$ есть ускорение в направлении траектории, а $\mathfrak{j}_2$ — ускорение, перпендикулярное к ней. Тогда сила $\mathfrak{F}$ состоит из двух компонент, которые имеют направление этих ускорений и выражаются в виде $\mathfrak{F}_1 = m_1\mathfrak{j}_1$ и $\mathfrak{F}_2 = m_2\mathfrak{j}_2$, где

$$m_1 = \frac{e^2}{6\pi c^2 R} \frac{d(klw)}{dw} \quad \text{и} \quad m_2 = \frac{e^2}{6\pi c^2 R} kl. \tag{30}$$

Следовательно, в процессах, при которых возникает ускорение в направлении движения, электрон ведет себя так, как будто он имеет массу m_1, а при ускорении в направлении, перпендикулярном к дви-

[1]) Abraham, Ann. d. Phys. **10**, 105, 1903.

жению, как будто он обладает массой m_2. Величинам m_1 и m_2 поэтому удобно дать названия: „продольной“ и „поперечной“ электромагнитных масс. Я полагаю, что *сверх этого нет никакой „действительной“ или „материальной“ массы.*

Так как k и l отличаются от единицы на величины порядка $\frac{w^2}{c^2}$, то при малых скоростях мы имеем

$$m_1 = m_2 = \frac{e^2}{6\pi c^2 R}.$$

Такова масса, с которой приходится проделывать расчеты, когда в системе без поступательного движения электроны совершают небольшие колебания. С другой стороны, если тело движется со скоростью w в направлении оси x и является местом подобных колебаний электронов, то мы должны вести вычисления с массой m_1 по формуле (30), когда мы рассматриваем колебания, параллельные оси x; напротив, для колебаний, параллельных осям y или z, нужно брать массу m_2.

Следовательно, кратко говоря, мы имеем:

$$m_i\left(\sum\right) = \left(\frac{d\,(klw)}{dw},\ kl,\ kl\right)\, m\left(\sum{}'\right), \qquad (31)$$

где знак $\sum$ указывает движущуюся систему, а знак $\sum'$ — неподвижную систему.

10. Мы можем теперь перейти к исследованию влияния движения земли на оптические явления в системе прозрачных тел. При этом мы обратим наше внимание на переменные электрические моменты в частицах или „атомах“ системы. Мы можем применить к этим моментам рассуждения § 7. С целью упрощения мы полагаем, что в каждой частице заряд сосредоточен в определенном числе отдельных электронов. Пусть, далее, „упругие“ силы, которые действуют на какой-нибудь один из этих электронов и

совместно с электрическими силами определяют его движение, имеют свой исходный центр действия в точке, лежащей внутри границы *того же* атома.

Я покажу теперь, что каждому возможному состоянию движения в неподвижной системе можно сопоставить соответствующее, также возможное, состояние движения в системе, находящейся в поступательном движении, причем способ сопоставления характеризуется следующим образом.

а) Пусть A_1', A_2', A_3' и т. д. суть центры частиц в системе $\sum'$ без поступательного движения. Мы пренебрегаем молекулярными движениями и полагаем, что эти точки неподвижны. Система точек A_1, A_2, A_3 и т. д., образуемая центрами частиц в движущейся системе $\sum$, получается из A_1', A_2', A_3' и т. д. посредством деформации $\left(\frac{1}{kl},\ \frac{1}{l},\ \frac{1}{l}\right)$. Согласно сказанному в § 8, центры частиц сами собой принимают эти положения A_1', A_2', A_3' и т. д., если они первоначально, до приведения в поступательное движение, находились в A_1, A_2, A_3 и т. д.

Мы можем представить себе, что каждая точка P' в пространстве системы $\sum'$ благодаря упомянутой деформации переводится в определенную точку P системы $\sum$. Определяем теперь для двух соответствующих точек P' и P соответствующие моменты времени; первый будет относиться к P', второй — к P. Именно, мы устанавливаем, что истинное время в первый момент должно равняться местному времени во второй момент, определенному для точки P по формуле (5). Под соответствующими моментами времени для двух соответствующих *частиц* мы понимаем соответствующие моменты времени для *центров* A' и A этих частиц.

б) Что касается внутреннего состояния атомов, то мы принимаем, что конфигурация какой-нибудь частицы A в $\sum$ в определенный момент времени получается из конфигурации соответствующей частицы в $\sum'$ в соответствующий момент времени с помощью деформации $\left(\frac{1}{kl}, \frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$. Поскольку это допущение касается формы самих электронов, оно уже содержится в первой гипотезе § 8.

Если мы исходим из некоторого действительно существующего состояния в системе $\sum'$, то, очевидно, что пользуясь положениями а) и б), мы вполне определяем некоторое состояние движущейся системы $\sum$. Вопрос о том, является ли это состояние также возможным, остается, однако, открытым.

Для того чтобы решить это, мы сначала заметим, что электрические моменты, которые по нашему допущению возникают в движущейся системе и которые будут обозначаться через $\mathbf{p}$, суть определенные функции координат x, y, z центров A частиц (или, как мы будем говорить, координат частиц) и времени t. Уравнения, которые выражают связь между $\mathbf{p}$, с одной стороны, и x, y, z, t, с другой, — могут быть заменены другими уравнениями, которые содержат вектор $\mathbf{p}'$, определяемый из формулы (26), и величины x', y', z', t', которые даются формулами (4) и (5).

Если в частице A движущейся системы, координаты которой суть x, y, z, в момент времени t или в момент местного времени t' имеется электрический момент $\mathbf{p}$, то, согласно допущениям а) и б) в другой системе в частице с координатами x', y', z' и в момент истинного времени t' будет существовать электрический момент, который как раз будет представлен вектором $\mathbf{p}'$, определяемым по формуле (26). Таким образом, отсюда видно, что уравнения, связывающие

$\mathbf{p}'$, x', y', z', t', будут одни и те же для обеих систем с тем единственным отличием, что для системы $\sum'$ без поступательного движения эти буквы означают электрический момент, координаты и истинное время, в то время как для движущейся системы они имеют другое значение. Ибо здесь $\mathbf{p}'$, x', y', z', t' связаны с электрическим моментом $\mathbf{p}$, с координатами x, y, z и с общим временем t соотношениями (26), (4) и (5).

Уже было отмечено, что уравнение (27) применимо к обеим системам. Следовательно, вектор $\mathbf{d}'$ в $\sum'$ и $\sum$ один и тот же при условии, что мы всегда сравниваем соответствующие положения и моменты времени. Однако, вектор этот не имеет одинакового значения в обоих случаях. В $\sum'$ он изображает электрическую силу, а в $\sum$ он связан с этой силой посредством (20). Отсюда мы можем заключить, что электрические силы, действующие в $\sum$ и $\sum'$ на соответствующие частицы и в соответствующие моменты времени, связаны друг с другом при помощи (21). Если мы воспользуемся нашим допущением б) в связи со второй гипотезой в § 8, то найдем, что между „упругими" силами действует то же соотношение. Следовательно, уравнение (21) можно рассматривать так же, как выражение соотношения между результирующими силами, действующими на соответствующие электроны в соответствующие моменты времени.

Очевидно, предполагавшееся в движущейся системе состояние только тогда действительно возможно, когда в $\sum$ и $\sum'$ произведения массы m на ускорение электрона находятся друг по отношению другу в том же отношении, что и силы, т. е. когда

$$m\mathbf{j}\left(\sum\right)=\left(l^2, \frac{l^2}{k}, \frac{l^2}{k}\right) m\mathbf{j}\left(\sum'\right). \qquad (32)$$

Но для ускорений имеет место уравнение

$$\mathrm{j}\left(\sum\right)=\left(\frac{l}{k^3},\ \frac{l}{k^2},\ \frac{l}{k^2}\right)\mathrm{j}\left(\sum{}'\right), \qquad (33)$$

которое можно вывести из формул (4) и (5).

Если соединить этот результат с формулой (32), то для масс получается

$$m\left(\sum\right)=(k^3l,\ kl,\ kl)\,m\left(\sum{}'\right).$$

Сравнение с (31) показывает, что при любых значениях l это условие всегда выполняется в отношении масс, с которыми мы должны вести расчеты при колебаниях, перпендикулярных к направлению поступательного движения. Итак, мы должны подчинить l только одному условию:

$$\frac{d\,(klw)}{dw}=k^3l.$$

Но, в силу (3),

$$\frac{d\,(kw)}{dw}=k^3,$$

так что

$$\frac{dl}{dw}=0,\ \text{ т. е. }\ l=\text{const}.$$

Константа должна иметь значение 1, потому что мы уже знаем, что при $w=0$ значение $l=1$.

Это ведет к предположению, что *влияние поступательного движения (как для отдельного электрона, так и весомого тела в целом) простирается только на размеры в направлении движения, а именно: последние делаются в k раз меньше по сравнению с состоянием покоя.*

Присоединив эту гипотезу к высказанным прежде, мы можем быть уверены в том, что возможны два состояния, одно — в движущейся системе, другое — в такой же но покоящейся системе, которые соответствуют друг другу указанным образом. Впрочем, это соот-

ветствие не ограничивается электрическими моментами частиц. В соответствующих точках, которые лежат либо в эфире между частицами, либо в эфире, окружающем весомые тела, мы находим для соответствующих моментов времени тот же вектор $\mathbf{d}'$ и, как легко показать, тот же вектор $\mathbf{h}'$. Резюмируя, можно сказать: когда в системе без поступательного движения возникает состояние движения, для которого в определенном месте компоненты векторов $\mathbf{p}$, $\mathbf{d}$ и $\mathbf{h}$ являются определенными функциями времени, тогда в той же системе, после того как она приведена в движение (и, следовательно, деформирована), может возникнуть состояние движения, при котором в соответствующем месте компоненты векторов $\mathbf{p}'$, $\mathbf{d}'$, $\mathbf{h}'$ будут теми же функциями местного времени.

Только один пункт нуждается еще в более детальном рассмотрении. Так как значения масс m_1 и m_2 выведены из теории квазистационарного движения, то возникает вопрос, можем ли мы пользоваться ими при вычислениях в случае быстрых световых колебаний. При более точном рассмотрении можно обнаружить, что движение электрона может быть рассматриваемо как квазистационарное, если оно мало изменяется в течение того промежутка времени, за который световая волна успевает продвинуться на длину диаметра электрона. Это имеет место в отношении оптических явлений, потому что диаметр электрона чрезвычайно мал по сравнению с длиной волны.

11. Нетрудно видеть, что изложенная теория объясняет большое число фактов.

Рассмотрим систему без поступательного движения, для которой в некоторых ее частях имеем постоянно $\mathbf{p}=0$, $\mathbf{d}=0$, $\mathbf{h}=0$. Тогда в соответствующем состоянии движущейся системы в соответствующих ее частях (или, как можно сказать, в тех же частях деформированной системы) имеем $\mathbf{p}' = 0$, $\mathbf{d}' = 0$, $\mathbf{h}' = 0$. Так как эти последние уравнения влекут за собой $\mathbf{p} = 0$, $\mathbf{d} = 0$, $\mathbf{h} = 0$, что следует из (26) и (6), то все части системы, которые были темными, когда система покоилась, очевидно, остаются также темными после того, как она приведена в движение. Поэтому невозможно обнаружить влияние движения земли на какие-нибудь оптические опыты, которые произведены с земными источниками света и в которых речь идет о наблюдении геометрического распределения света и темноты. Сюда относятся многие опыты, основанные на интерференции и преломлении.

Если, во-вторых, в двух точках системы лучи света, поляризованные в одной и той же плоскости, идут в одинаковом направлении, то можно показать, что отношение амплитуд в этих точках не изменяется от поступательного движения системы. Это замечание относится к таким опытам, в которых сравниваются интенсивности соседних частей поля зрения.

Только что сделанные выводы подтверждают прежние результаты, полученные с помощью соображений, в которых пренебрегалось величинами второго порядка. Эти же выводы содержат также объяснение отрицательного результаты опыта Майкельсона, причем более общее, и по форме несколько отличное от прежде данного. Они показывают далее, почему Рэлей и Брэс не могли наблюдать никаких признаков двойного лучепреломления, вызванного движением земли. Отрицательный результат опытов Трутона и Нобля делается тотчас же ясным, когда мы обратимся к гипотезам § 8. Эти гипотезы, а также наше последнее допущение (§ 10) позволяют заключить, что поступательное движение вызывает одно только сокращение всей системы электронов и других частиц, из которых построены заряженный конденсатор, коромысло и нить крутильных весов. Такое сокращение не дает, однако, никакого повода к заметному изменению направления.

Едва ли нужно отмечать, что я предлагаю эту теорию со всей осторожностью. Хотя она, по моему мнению, отвечает всем твердо установленным фактам, тем не менее эта теория приводит к некоторым следствиям, которые еще нельзя подкрепить опытом. Например, из теории следует, что результат опыта Майкельсона должен оставаться отрицательным, если пропустить интерферирующие лучи света через весомое прозрачное тело.

О нашей гипотезе сокращения электронов нельзя заранее утверждать ни того, что она правдоподобна, ни того, что она недопустима. Наше знание природы электронов еще весьма недостаточно, и единственным средством продвижения вперед является проверка гипотез, подобных предложенным мною здесь. Естественно, при этом возникают трудности, например, при рассмотрении вращения электронов. Может быть, мы должны будем допустить, что в тех явлениях, при которых в покоящейся системе шаровидные электроны вращаются вокруг одного из диаметров, в движущейся системе отдельные точки электронов описывают эллиптические орбиты, которые указанным в § 10 образом соответствуют круговым орбитам покоящегося случая.

12. Мы должны еще сказать несколько слов о молекулярном движении. Можно думать, что тела, у которых оно имеет заметное или даже преобладающее влияние, также подвержены тем же деформациям, что и системы с неизменным относительным положением частиц, о которых мы до сих пор говорили. В самом деле, мы можем вообразить себе в двух молекулярных системах $\sum'$ и $\sum$, из которых только

вторая находится в поступательном движении, такие соответствующие друг другу молекулярные движения, что когда какая-нибудь частица в $\sum'$ имеет определенное положение в определенный момент времени, частица в $\sum$ в соответствующий момент времени занимает соответствующее положение. Представив себе это, мы можем применять соотношение (33) между ускорениями во всех тех случаях, когда скорость молекулярного движения очень мала по сравнению с w. Тогда можно считать, что молекулярные силы определены относительным положением, независимо, от скоростей молекулярного движения. И, наконец если мы себе представим эти силы ограниченными столь малыми радиусами действия, что для действующих друг на друга частиц можно пренебречь разностью отсчетов местных времен, то данная частица вместе с теми, которые лежат в сфере ее притяжения или отталкивания, образует систему, претерпевающую неоднократно упомянутую деформацию. На основании второй гипотезы § 8 мы можем поэтому применить формулу (21) к результирующей молекулярной силе, приложенной к частице. Следовательно, правильное соотношение между силами и ускорениями будет иметь место в обоих случаях, если мы допустим, что *поступательное движение оказывает такое же воздействие на массы всех частиц, как и на электромагнитные массы электронов.*

13. Значения (30), которые я нашел для продольной и поперечной масс электрона, в функции скорости, не совпадают со значениями, полученными раньше Абрагамом. Причина расхождения заключается в том, что в теории Абрагама электроны рассматриваются как шарики неизменных размеров. Результаты Абрагама, касающиеся поперечной массы, подтвердились замечательным оброзом на измерениях отклонения

лучей радия в электрическом и магнитном поле, произведенных Кауфманом. Если я не хочу оставлять открытым очень серьезное возражение против моей теории, я должен показать здесь, что эти измерения не менее хорошо согласуются с моими значениями чем с результатами Абрагама.

Сначала я рассмотрю две серии измерений, которые Кауфман [1]) опубликовал в 1902 г. Из каждой серии он вывел две величины η и ζ, представляющие собой „приведенные" электрические и магнитные отклонения; эти величины связаны с отношением $\beta = \frac{w}{c}$ следующим образом:

$$\beta = k_1 \frac{\zeta}{\eta}, \quad \psi(\beta) = \frac{\eta}{k_2 \zeta^2}. \tag{34}$$

Функция $\psi(\beta)$ имеет такое значение, что для поперечной массы получается

$$m_2 = \frac{3}{4} \frac{e^2}{6\pi c^2 R} \psi(\beta); \tag{35}$$

k_2 и k_1 суть константы для каждой серии.

Из второго уравнения (30) следует, что моя теория тоже приводит к уравнению вида (35); нужно только вместо функции Абрагама $\psi(\beta)$ взять

$$\frac{4}{3} k = \frac{4}{3} (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, моя теория требует, чтобы при подстановке этого значения функции $\psi(\beta)$ в уравнения (34) последние выполнялись. Мы можем, конечно, придать k_1 и k_2 другие значения, чем Кауфман, для того чтобы получить хорошее совпадение; далее, мы имеем право для каждого измерения подобрать подходящее значение скорости w, или отношения β. Если новые

[1]) Kaufmann, Phys. ZS. **4**, 55, 1902.

значения этих трех величин будут sk_1, $\frac{3}{4}k'_2$ и β', то уравнения (34) можно будет написать в следующем виде:

$$\beta' = sk_1 \frac{\zeta}{\eta}, \tag{36}$$

и

$$(1-\beta'^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\eta}{k'_2\zeta^2}. \tag{37}$$

Чтобы проверить свои формулы, Кауфман выбирал такое значение для k_1, что, вычисляя с его помощью β и k_2 из (34), он получал для последнего числа в пределах точности постоянные значения в каждой серии. Это постоянство служило доказательством хорошего совпадения. Я применил аналогичный прием, причем воспользовался некоторыми числами, вычисленными Кауфманом. Я подсчитал для каждого измерения значение выражения

$$k'_2 = (1-\beta'^2)^{\frac{1}{2}}\psi(\beta)\,k_2, \tag{38}$$

которое получается из (37) и второй формулы (34) Значения для $\psi(\beta)$ и k_2 взяты из таблицы Кауфмана; для β' я взял произведение найденного им значения β на s. Коэффициент s я выбрал при этом таким образом, чтобы величина (38) сохраняла возможно лучше свое постоянство. Результаты помещены в следующих таблицах, которые соответствуют таблицам III и IV работы Кауфмана.

III. $s = 0{,}933$

β	$\psi(\beta)$	k_2	β'	k_2'
0,851	2,147	1,721	0,794	2,246
0,766	1,86	1,736	0,715	2,258
0,727	1,78	1,725	0,678	2,256
0,6615	1,66	1,727	0,617	2,256
0,6075	1,595	1,655	0,567	2,175

IV. $s = 0{,}954$

β	$\psi(\beta)$	k_2	β'	k_2'
0,963	3,23	8,12	0,919	10,36
0,949	2,86	7,99	0,905	9,70
0,933	2,73	7,46	0,890	9,28
0,883	2,31	8,32	0,842	10,36
0,860	2,195	8,09	0,820	10,15
0,830	2,06	8,13	0,792	10,23
0,801	1,96	8,18	0,764	10,28
0,777	1,89	8,04	0,741	10,20
0,752	1,83	8,02	0,717	10,22
0,732	1,785	7,97	0,698	10,18

Как видно, постоянство k_2' не менее удовлетворительно, чем постоянство k_2, тем более что в каждом случае s определялось только из двух измерений. Коэффициент выбран так, что для двух наблюдений, которые находятся в таблице III на первом и предпоследнем месте, а в таблице IV на первом и последнем месте, значения k_2' оказываются пропорциональными k_2.

Я беру теперь две серии измерений, которые взяты из одной позднейшей работы Кауфмана [1]), и которые Рунге [2]) обработал по методу наименьших квадратов. При этом коэффициенты k_1 и k_2 были определены так, что вычисленные из уравнений Кауфмана (34) значения η для каждого наблюдаемого ζ хорошо совпадали с наблюдаемыми η.

Из того же условия также методом наименьших квадратов я определил коэффициенты a и b уравнения $\eta^2 = a\zeta^2 + b\zeta^4$, которое может быть выведено из моих уравнений (36) и (37).

Зная a и b, я вычисляю β для каждого измерения с помощью соотношения $\beta = \sqrt{a}\,\frac{\zeta}{\eta}$.

---

[1]) Kaufmann, Gött. Nachr., Math.-phys. Klasse 1903. 90.
[2]) Runge, там же, 326.

Для двух пластинок, на которых Кауфман измерил электрическое и магнитное отклонения, получились следующие результаты (отклонения даны в *см*):

Пластинка № 15, $a = 0{,}06489$, $b = 0{,}3039$

ζ	η					β	
	Наблюдалось	Вычисл. по Рунге	Разность	Вычисл. по Лоренцу	Разность	Вычисл. по Рунге	Вычисл. по Лоренцу
0,1495	0,0388	0,0404	− 16	0,0400	− 12	0,987	0,951
0,199	0,0548	0,0550	− 2	0,0552	− 4	0,964	0,918
0,2475	0,0716	0,0710	+ 6	0,0715	+ 1	0,930	0,881
0,296	0,0896	0,0887	+ 9	0,0895	+ 1	0,889	0,842
0,3435	0,1080	0,1081	− 1	0,1090	− 10	0,847	0,803
0,391	0,1290	0,1297	− 7	0,1305	− 15	0,804	0,763
0,437	0,1524	0,1527	− 3	0,1532	− 8	0,763	0,727
0,5825	0,1788	0,1777	+ 11	0,1777	+ 11	0,724	0,692
0,5265	0,2033	0,2039	− 6	0,2033	− 0	0,688	0,660

Пластинка № 19, $a = 0{,}05867$, $b = 0{,}2591$

ζ	η					β	
	Наблюдалось	Вычисл. по Рунге	Разность	Вычисл. по Лоренцу	Разность	Вычисл. по Рунге	Вычисл. по Лоренцу
0,1495	0,0404	0,0388	+ 16	0,0379	+ 25	0,990	0,954
0,199	0,0529	0,0527	+ 2	0,0522	+ 7	0,969	0,928
0,247	0,0678	0,0675	+ 3	0,0674	+ 4	0,939	0,888
0,296	0,0834	0,0842	− 8	0,0844	− 10	0,902	0,849
0,3435	0,1019	0,1022	− 3	0,1026	− 7	0,862	0,811
0,391	0,1219	0,1222	− 3	0,1226	− 7	0,822	0,773
0,437	0,1429	0,1434	− 5	0,1437	− 8	0,782	0,736
0,4825	0,1660	0,1665	− 5	0,1664	− 4	0,744	0,702
0,5265	0,1916	0,1906	+ 10	0,1902	+ 14	0,709	0,671

Я не имел времени перечислять другие таблицы из работы Кауфмана. Так как последние, подобно таблицам для пластинки № 15, начинаются с довольно большой отрицательной разности между значениями η, выведенными из наблюдений, и теми, которые вычислил Рунге, — то мы можем ожидать, что и для них получится удовлетворительное совпадение с моими формулами.

14. Я пользуюсь этим случаем, чтобы упомянуть об одном эксперименте, проделанном Трутоном[1] по предложению Фицджеральда, в котором он пытался обнаружить наличие внезапного импульса, действующего на конденсатор в момент зарядки или разрядки; для этой цели, конденсатор был подвешен на крутильных весах с пластинами параллельно движению земли. Для того, чтобы оценить величину ожидаемого эффекта, достаточно рассмотреть конденсатор с эфиром в качестве диэлектрика. Согласно § 1 мы будем иметь для заряженного прибора электромагнитный момент количества движения величины

$$\mathfrak{G} = \frac{2U}{c^2}\mathfrak{w}$$

при пренебрежении величинами третьего и высших порядков. Так как этот момент возникает при зарядке и исчезает при разрядке, то конденсатор должен испытывать в первом случае толчек $-\mathfrak{G}$ и во втором толчек $+\mathfrak{G}$. Трутон однако не смог обнаружить подобного эффекта. Я полагаю, что возможно показать, в противоположность подсчетам Трутона, что чувствительность прибора была далеко не достаточной для предположенных наблюдений.

Обозначая, как и выше, через U энергию заряженного конденсатора в покое и через $U + U'$ энергию в состоянии движения, мы находим по формулам настоящей статьи с точностью до величин второго

[1] Trouton, Doublin Roy. Soc. Trans. (2) 7, 379, 1902. Эта работа напечатана также в собрании трудов Фицджеральда, изданных Лармором (The scientific writings of Fitz-Gerald, Dublin and London, 1902).

порядка $U' = \frac{2w^2}{c^2} U$; это совпадает по порядку с значением, которым пользовался Трутон для оценки эффекта. Интенсивность внезапного толчка или импульса будет, следовательно, $\frac{U'}{w}$. Допустив теперь, что прибор в начале находился в покое, мы можем сравнить отклонение α, произведенное этим импульсом, с отклонением α', которое испытывают крутильные весы под влиянием постоянной пары сил K, действующей в течение половины периода колебания. Мы можем также взять случай, когда колебательное движение уже началось; тогда импульс, приложенный в момент прохождения прибора через положение равновесия, изменит амплитуду на некоторую величину β; аналогичный же эффект β' может быть вызван парой сил K, действующей в течение всего колебания от одного крайнего положения до другого.

Пусть T будет периодом колебания и l расстоянием от конденсатора до нити крутильных весов. Тогда легко найти, что

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\pi U' l}{K T w}. \qquad (39)$$

Согласно Трутону значение U' достигает одного-двух эргов, и наименьшая пара сил, которая могла бы дать заметное отклонение, была оценена в 7,5 CGS единиц. Если мы подставим это значение для K и премем во внимание, что скорость земли равна $3 \cdot 10^6$ *см/сек*, мы увидим, что (39) должно быть весьма малой дробью.

(Заседание Академии Наук 23 апреля 1904 г. Напечатано 27 мая 1904 г.).

А. ПУАНКАРЕ

А. ПУАНКАРЕ.

О ДИНАМИКЕ ЭЛЕКТРОНА [1]).

Введение.

С первого взгляда кажется, что аберрация света и связанные с нею оптические и электрические явления дают нам средство для определения абсолютного движения земли или, вернее, ее движения не по отношению к другим небесным телам, а по отношению к эфиру. Уже Френель пытался сделать это, но скоро обнаружил, что движение земли не изменяет законов отражения и преломления. Аналогичные опыты, как, например, с трубой, наполненной водою, и все прочие, где принимаются в расчет только члены первого порядка относительно величины аберрации, дали лишь отрицательный результат, чему вскоре было найдено объяснение; но и Майкельсон, придумавший опыт, в котором становились уже заметными члены, зависящие от квадрата аберрации, в свою очередь, потерпел неудачу.

Эта невозможность показать опытным путем абсолютное движение земли представляет повидимому общий закон природы; мы естественно приходим к тому, чтобы принять этот закон, который мы назовем *постулатом относительности*, и принять без ого-

[1]) „Sur la dynamique de l'électron", Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, XXI, 129, 1906.

ворок. Все равно, будет ли позднее этот постулат, до сих пор согласующийся с опытом, подтвержден или опровергнут более точными измерениями, сейчас во всяком случае представляется интересным посмотреть, какие следствия могут быть из него выведены.

Лоренц и Фицджеральд ввели гипотезу о сокращении всех тел в направлении движения земли, зависящем от квадрата аберрации. Это сокращение, которое мы назовем *лоренцовым сокращением*, дало бы объяснение опыту Майкельсона и всем другим, произведенным до сих пор в этом направлении опытам. Однако, если бы мы пожелали принять постулат относительности во всей его общности, подобная гипотеза оказалась бы недостаточной.

Это заставило Лоренца дополнить и видоизменить гипотезу так, чтобы установить полное соответствие между нею и постулатом относительности. Он достиг этого в своей статье „Электромагнитные явления в системе, движущейся с любой скоростью, меньшей скорости света“ [Amsterdam Proceedings (Известия Амстердамской Академии), 27 мая 1904] [1]).

Важность вопроса побудила меня снова заняться им; результаты, полученные мною, согласуются во всех наиболее важных пунктах с теми, которые получил Лоренц; я стремился только дополнить и видоизменить их в некоторых деталях; некоторые имеющиеся расхождения, как мы увидим дальше, не играют существенной роли.

Идею Лоренца можно резюмировать так: если возможно сообщить общее поступательное движение всей системе, без того, чтобы имели место какие либо видимые изменения в явлениях, то это значит, что уравнения электромагнитного поля не изменятся в результате некоторых преобразований, которые мы будем называть *преобразованиями Лоренца*; две системы, одна неподвижная, другая перемещающаяся поступательно, представляют таким образом точное изображение одна другой.

[1]) См. стр. 16 этого сборника. *Прим. ред.*

Ланжевен [1]) пытался видоизменить идею Лоренца; у обоих авторов движущийся электрон принимает форму сжатого эллипсоида, но в то время, как у Лоренца постоянными остаются две оси эллипсоида, у Ланжевена, наоборот, объем эллипсоида остается постоянным. Оба ученые впрочем показали, что эти две гипотезы так же хорошо согласуются с опытами Кауфмана, как и первоначальная гипотеза Абрагама (недеформирующийся шаровой электрон).

Преимущество теории Ланжевена в том, что она вводит только электромагнитные силы и силы связи, но она не совместима с постулатом относительности. Последнее было показано Лоренцом; я также нашел этот результат, несколько иным путем, пользуясь основными положениями теории групп.

Следует поэтому вернуться к теории Лоренца; однако, если мы хотим сохранить ее, избегнув явных противоречий, необходимо допустить существование силы, объясняющей одновременно сжатие одной и постоянство двух других осей. Я пытался определить эту силу и нашел, что *она может быть приравнена постоянному внешнему давлению, действующему на деформируемый и сжимаемый электрон, работа которого пропорциональна изменению объема этого электрона.*

Тогда, если инерция материи имеет исключительно электромагнитное происхождение, как это общепризнано после опытов Кауфмана, и, за исключением

[1]) До Ланжевена эту же идею высказал Бухерер в Бонне (См. B u c h e r e r, Mathematische Einführung in die Elektronentheorie, август, 1904, Teubner, Leipzig).

постоянного давления, о котором я только что говорил, все силы будут электромагнитного происхождения, то постулат относительности может быть установлен со всей строгостью; именно это я и собираюсь показать весьма простыми вычислениями, основанными на принципе наименьшего действия.

Но это не все. Лоренц в цитированной работе считал необходимым дополнить свою гипотезу так, чтобы постулат относительности имел место и при наличии других сил помимо электромагнитных. Согласно его идее, все силы, какого бы они ни были происхождения, ведут себя благодаря преобразованию Лоренца (и следовательно благодаря поступательному перемещению) точно так же, как электромагнитные силы.

Оказалось необходимым более внимательно рассмотреть эту гипотезу и в частности исследовать, какие видоизменения она вносит в законы тяготения.

Прежде всего, очевидно, она вынуждает нас предположить, что распространение сил тяготения происходит не мгновенно, но со скоростью света. Можно было бы подумать, что это является достаточным основанием для того, чтобы отвергнуть подобную гипотезу, так как Лаплас показал, что она не может иметь места. Но на самом деле действие этого распространения уравновешивается в большей части другим обстоятельством, так что не существует противоречия между предложенным законом и астрономическими наблюдениями.

Возможно ли найти такой закон, который удовлетворял бы условию, поставленному Лоренцом, и одновременно сводился к закону Ньютона во всех случаях, когда скорости небесных тел достаточно малы для того, чтобы можно было пренебречь их квадратами (а также произведениями ускорений на расстояния) по сравнению с квадратом скорости света?

На этот вопрос, как мы увидим дальше, следует ответить утвердительно.

Согласуется ли видоизмененный таким образом закон с астрономическими наблюдениями?

Повидимому да, но этот вопрос может быть окончательно разрешен только после более глубокого исследования.

Но, допуская даже, что это обсуждение докажет преимущество новой гипотезы, к какому заключению мы должны будем притти? Если распространение сил притяжения происходит со скоростью света, то это не может быть результатом каких-либо случайных обстоятельств, а должно быть обусловлено одной из функций эфира; тогда возникает задача глубже проникнуть в природу этой функции и связать ее с другими свойствами эфира.

Недостаточно ограничиться простым сопоставлением формул, согласующихся между собою лишь благодаря счастливой случайности; необходимо, чтобы эти формулы, так сказать, проникали друг в друга. Разум наш не будет удовлетворен до тех пор, пока мы не поверим, что усмотрели причину этого согласования, так хорошо, что, как нам кажется, мы могли бы ее предвидеть.

Однако, этот вопрос можно представить себе еще с другой точки зрения; лучше всего можно это понять при помощи сравнения. Представим себе астронома, живущего до Коперника и размышляющего над системой Птоломея; он заметил бы, что для всех планет один из двух кругов, эпицикл или деферент — основной круг, проходится в одно и то же время. Так как это не может быть случайностью, следовательно между всеми планетами существует какая-то таинственная связь.

Однако Коперник, изменив лишь оси координат, рассматриваемые ранее как неподвижные, сразу уничтожил эту видимую связь; каждая планета описывает только один круг, и периоды обращения становятся независимыми друг от друга (до тех пор, пока Кеплер установил между ними связь, которую считали уничтоженной).

Возможно, что и в нашем случае имеется нечто аналогичное; если бы мы приняли принцип относительности, то в законе тяготения и в электромагнитных законах мы нашли бы общую постоянную — скорость света. Точно так же мы встретили бы ее во всех других силах какого угодно происхождения, что можно объяснить только с двух точек зрения: или все, что существует в мире — электромагнитного происхождения, или же это свойство, являющееся, так сказать, общим для всех физических явлений, есть не что иное как внешняя видимость, что-то, связанное с методами наших измерений. Как же мы производим наши измерения? Прежде мы ответили бы: перенося тела, рассматриваемые как твердые и неизменные, одно на место другого; но в современной теории, принимая во внимание сокращение Лоренца, это уже не верно. Согласно этой теории двумя равными отрезками — по определению — будут такие два отрезка, которые свет проходит в одно и то же время.

Может быть достаточно только отказаться от этого определения, чтобы вся теория Лоренца была совершенно уничтожена, как это случилось с системой Птоломея после вмешательства Коперника. Во всяком случае, если последнее и произойдет, это еще не докажет, что усилия Лоренца были бесполезными, ибо и Птоломей, какого мнения о нем ни придерживаться, отнюдь не был бесполезен для Коперника.

Поэтому я также нисколько не колебался опубликовать эти частичные результаты, хотя в настоящий момент вся теория кажется поставленной под угрозу, ввиду открытия магнито-катодных лучей.

§ 1. Преобразование Лоренца.

Лоренц ввел особую систему единиц, в которой множитель 4π исчезает во всех формулах. Я поступлю точно также, и кроме того выберу единицы длины и времени таким образом, чтобы скорость света была равна единице. Обозначая через f, g, h составляющие электрического смещения, через α, β, γ — магнитной силы, F, G, H — компоненты векторного потенциала, через ψ и ρ скалярный потенциал и плотность электричества, наконец через ξ, η, ζ — составляющие скорости электрона и через u, v, w — составляющие плотности тока, мы можем представить основные формулы в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&u = \frac{df}{dt} + \rho\xi = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz},\\
&\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \quad f = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx},\\
&\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dg}{dz} - \frac{dh}{dy}, \quad \frac{d\rho}{dt} + \sum \frac{d\rho\xi}{dx} = 0,\\
&\sum \frac{df}{dx} = \rho, \quad \frac{d\psi}{dt} + \sum \frac{dF}{dx} = 0,\\
&\square = \Delta - \frac{d^2}{dt^2} = \sum \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2}{dt^2},\\
&\square\psi = -\rho, \quad \square F = -\rho\xi.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Элемент объема материи $dx\,dy\,dz$ подвергается действию механической силы, составляющие которой $X dx dy dz$, $Y dx dy dz$, $Z dx dy dz$ выводятся из формулы

$$X = \rho f + \rho(\eta\gamma - \zeta\beta). \qquad (2)$$

Эти уравнения можно подвергнуть замечательному преобразованию, найденному Лоренцом, интерес которого заключается в объяснении того, почему никакой опыт не в состоянии обнаружить абсолютное движение земли.

Положим

$$x' = kl(x + \varepsilon t), \quad t' = kl(t + \varepsilon x),$$
$$y' = ly, \quad z' = lz, \tag{3}$$

где l и ε две произвольные постоянные, и пусть

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Тогда, если мы обозначим через

$$\Box' = \sum \frac{d^2}{dx'^2} - \frac{d^2}{dt'^2},$$

то получим

$$\Box' = \Box\, l^{-2}.$$

Рассмотрим сферу, увлекаемую электроном при его равномерном поступательном движении; тогда

$$(x - \xi t)^2 + (y - \eta t)^2 + (z - \zeta t)^2 = r^2$$

есть уравнение этой движущейся сферы, объем которой равен $\frac{4}{3}\pi r^3$.

В результате преобразования вместо сферы получится эллипсоид, уравнение которого нетрудно найти. В самом деле, из уравнения (3) легко получаем

$$x = \frac{k}{l}(x' - \varepsilon t'), \quad t = \frac{k}{l}(t' - \varepsilon x'),$$
$$y = \frac{y'}{l}, \quad z = \frac{z'}{l}. \tag{3'}$$

Тогда уравнение эллипсоида напишется в виде

$$k^2(x' - \varepsilon t' - \xi t' + \varepsilon\xi x')^2 + (y' - \eta k t' + \eta k \varepsilon x')^2 + $$
$$+ (z' - \zeta k t' + \zeta k \varepsilon x')^2 = l^2 r^2.$$

Этот эллипсоид перемещается, участвуя в равномерном движении; для $t' = 0$ его уравнение имеет вид

$$k^2 x'^2 (1 + \xi\varepsilon)^2 + (y' + \eta k \varepsilon x')^2 + (z' + \zeta k \varepsilon x')^2 = l^2 r^2,$$

и объем его будет равен

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \frac{l^3}{k(1 + \xi\varepsilon)}.$$

Если мы желаем, чтобы заряд электрона не изменялся от преобразования, то, обозначая через ρ' новую плотность электричества, будем иметь

$$\rho' = \frac{k}{l^3}(\rho + \varepsilon\rho\xi). \tag{4}$$

Новые скорости ξ', η', ζ' выражаются теперь через старые следующим образом:

$$\xi' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d(x + \varepsilon t)}{d(t + \varepsilon x)} = \frac{\xi + \varepsilon}{1 + \varepsilon\xi},$$

$$\eta' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{kd(t + \varepsilon x)} = \frac{\eta}{k(1 + \varepsilon\xi)}, \quad \zeta' = \frac{\zeta}{k(1 + \varepsilon\xi)},$$

откуда

$$\rho'\xi' = \frac{k}{l^3}(\rho\xi + \varepsilon\rho), \quad \rho'\eta' = \frac{1}{l^3}\rho\eta, \quad \rho'\zeta' = \frac{1}{l^3}\rho\zeta. \tag{4'}$$

Здесь я должен отметить первое расхождение с Лоренцом. Лоренц полагает (с некоторой разницей в обозначениях) [см. цитированную работу, стр. 813, формулы (7) и (8)] [1]):

$$\rho' = \frac{1}{kl^3}\rho, \quad \xi' = k^2(\xi + \varepsilon), \quad \eta' = k\eta, \quad \zeta' = k\zeta.$$

Таким способом также получаются формулы:

$$\rho'\xi' = \frac{k}{l^3}(\rho\xi + \varepsilon\rho), \quad \rho'\eta' = \frac{1}{l^3}\rho\eta, \quad \rho'\zeta' = \frac{1}{l^3}\rho\zeta,$$

где, однако, значение ρ' уже другое.

---

[1]) См. стр. 21 этого сборника. *Прим. ред.*

Важно отметить, что величины (4) и (4′) удовлетворяют условию непрерывности

$$\frac{d\rho'}{dt'} + \sum \frac{d\rho'\xi'}{dx'} = 0.$$

В самом деле, пусть λ — некоторый неопределенный коэффициент и D — функциональный определитель выражений

$$t + \lambda\rho, \quad x + \lambda\rho\xi, \quad y + \lambda\rho\eta, \quad z + \lambda\rho\zeta \tag{5}$$

относительно t, x, y, z.

Имеем

$$D = D_0 + D_1\lambda + D_2\lambda^2 + D_3\lambda^3 + D_4\lambda^4,$$

где

$$D_0 = 1, \quad D_1 = \frac{d\rho}{dt} + \sum \frac{d\rho\xi}{dx} = 0.$$

Полагая $\lambda' = l^2\lambda$, мы видим, что четыре функции

$$t' + \lambda'\rho', \quad x' + \lambda'\rho'\xi', \quad y' + \lambda'\rho'\eta',$$
$$z' + \lambda'\rho'\zeta' \tag{5'}$$

связаны с функциями (5) линейными соотношениями такого же вида, какие связывают новые переменные с прежними. Если же обозначить через D' функциональный определитель функций (5′) относительно новых переменных, то

$$D' = D, \quad D' = D_0' + D_1'\lambda' + \ldots + D_4'\lambda'^4,$$

откуда

$$D_0' = D_0 = 1, \quad D' = l^{-2}D = 0 = \frac{d\rho'}{dt'} + \sum \frac{d\rho'\xi'}{dx}$$

что и требовалось доказать.

Это условие не было бы выполнено при гипотезе Лоренца, так как ρ' имеет здесь другое значение.

Определим новые потенциалы — векторный и скалярный, так, чтобы удовлетворить уравнениям

$$\Box'\psi' = -\rho', \quad \Box' F' = -\rho'\xi'.$$

Мы получим затем отсюда:

$$\psi' = \frac{k}{l}(\psi + \varepsilon F), \quad F' = \frac{k}{l}(F + \varepsilon\psi), \tag{6}$$

$$G' = \frac{1}{l} G, \quad H' = \frac{1}{l} H. \tag{7}$$

Эти формулы значительно отличаются от соответствующих формул Лоренца, но расхождение происходит здесь, в конце концов, только от различных определений.

Выберем новые поля — электрическое и магнитное, так, чтобы удовлетворились уравнения

$$f' = -\frac{dF'}{dt'} - \frac{d\psi'}{dx'}, \quad \alpha' = \frac{dH'}{dy'} - \frac{dG'}{dz'}. \tag{8}$$

Легко видеть, что

$$\frac{d}{dt'} = \frac{k}{l}\left(\frac{d}{dt} - \varepsilon\frac{d}{dx}\right), \quad \frac{d}{dx'} = \frac{k}{l}\left(\frac{d}{dx} - \varepsilon\frac{d}{dt}\right),$$
$$\frac{d}{dy'} = \frac{1}{l}\frac{d}{dy}, \quad \frac{d}{dz'} = \frac{1}{l}\frac{d}{dz},$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} f' &= \frac{1}{l^2} f, \quad g' = \frac{k}{l^2}(g + \varepsilon\gamma), \\ h' &= \frac{k}{l^2}(h - \varepsilon\beta), \\ \alpha' &= \frac{1}{l^2}\alpha, \quad \beta' = \frac{k}{l^2}(\beta - \varepsilon h), \\ \gamma' &= \frac{k}{l^2}(\gamma + \varepsilon g). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Эти формулы тождественны с формулами Лоренца.

Наше преобразование не изменяет уравнений (1). В самом деле, условие непрерывности, а также уравнения (6) и (8) уже дают нам некоторые из уравнений (1) (за исключением штрихов у букв).

Уравнения (6), будучи подставлены в условие непрерывности, дают:

$$\frac{d\psi'}{dt'} + \sum \frac{dF'}{dx'} = 0. \tag{10}$$

Остается установить, что

$$\frac{df'}{dt'} + \rho'\xi' = \frac{d\gamma'}{dz'} - \frac{d\beta'}{dy'}, \quad \frac{d\alpha'}{dt'} = \frac{dg'}{dz'} - \frac{dh'}{dy'}, \quad \sum \frac{df'}{dx'} = \rho';$$

но легко видеть, что это есть не что иное, как следствие уравнений (6), (8) и (10)

Мы должны теперь сравнить силы до и после преобразования. Пусть X, Y, Z будет сила до преобразования, а X', Y', Z' — после него, причем обе отнесены к единице объема. Для того чтобы силы со штрихом удовлетворяли таким же уравнениям, как и до преобразования, необходимо, чтобы

$$\left.\begin{aligned} X' &= \rho' f' + \rho'(\eta'\gamma' - \zeta'\beta'), \\ Y' &= \rho' g' + \rho'(\zeta'\alpha - \xi'\gamma'), \\ Z' &= \rho' h' + \rho'(\xi'\beta' - \eta'\alpha') \end{aligned}\right\}$$

или, заменяя все величины их значениями (4), (4′), (9) и принимая во внимание уравнения (2),

$$\left.\begin{aligned} X' &= \frac{k}{l^5}\left(X + \varepsilon \sum X\xi\right), \\ Y' &= \frac{1}{l^5} Y, \\ Z' &= \frac{1}{l^5} Z. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Если мы обозначим через X_1, Y_1, Z_1 составляющие силы, отнесенной уже не к единице объема, но к единице заряда электрона, а через X_1', Y_1', Z_1' — те же величины после преобразования, то будем иметь:

$$X_1 = f + \eta\gamma - \zeta\beta, \quad X_1' = f' + \eta'\gamma' - \zeta'\beta',$$
$$X = \rho X_1, \quad X' = \rho' X_1',$$

и, следовательно, получим уравнения:

$$\left.\begin{aligned} X_1' &= \frac{k}{l^5}\,\frac{\rho}{\rho'}\left(X_1 + \varepsilon \sum X_1\xi\right), \\ Y_1' &= \frac{1}{l^5}\,\frac{\rho}{\rho'}\, Y_1, \\ Z_1' &= \frac{1}{l^5}\,\frac{\rho}{\rho'}\, Z_1. \end{aligned}\right\} \tag{11'}$$

Лоренц же нашел, с точностью до обозначений [стр. 813, ф-ла (10)] [1]):

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= l^2 X_1' - l^2\varepsilon(\eta' g' + \zeta' h'), \\ Y_1 &= \frac{l^2}{k} Y_1' + \frac{l^2\varepsilon}{k}\xi' g', \\ Z_1 &= \frac{l^2}{k} Z_1' + \frac{l^2\varepsilon}{k}\xi' h'. \end{aligned}\right\} \tag{11''}$$

Прежде чем итти дальше, важно отыскать причину этого существенного расхождения. Оно, очевидно, происходит от того, что формулы для ξ', η', ζ' несколько отличаются от соответствующих формул Лоренца, тогда как формулы для электрического и магнитного поля — одни и те же.

Если инерция электронов исключительно электромагнитного происхождения и, если, кроме того, они

---

[1]) См. стр. 20 этого сборника. *Прим. ред.*

подвержены действию только электромагнитных сил, то условие равновесия требует, чтобы внутри электрона имело место соотношение

$$X = Y = Z = 0.$$

В силу же уравнений (11) это соотношение эквивалентно условию

$$X' = Y' = Z' = 0.$$

Следовательно, условия равновесия электронов от преобразования не меняются.

К сожалению, столь простая гипотеза не приемлема. В самом деле, если мы предположим, что $\xi = \eta = \zeta = 0$, то, в силу условий $X = Y = Z = 0$, получим, что

$$f = g = h = 0$$

и, следовательно,

$$\sum \frac{df}{dx} = 0, \text{ т. е. } \rho = 0.$$

К аналогичным результатам приходим и в наиболее общем случае.

Таким образом, кроме электромагнитных сил необходимо допустить еще другие силы, например силы связи. Затем следует искать условия, которым должны удовлетворять эти силы или связи для того, чтобы равновесие электронов не нарушилось от преобразования. Это составит предмет одного из следующих параграфов.

§ 2. Принцип наименьшего действия.

Известно, каким образом Лоренц получил свои уравнения, пользуясь принципом наименьшего действия. Однако, я снова возвращаюсь к этому вопросу, хотя и не могу прибавить здесь ничего существенного к исследованию Лоренца; я предпочитаю представить его в несколько ином виде, более удобном для моей цели.

Я полагаю

$$J = \int dt d\tau \left[\frac{\sum f^2}{2} + \frac{\sum \alpha^2}{2} - \sum Fu \right], \qquad (1)$$

где f, α, F, u, и т. д. подчиняются условиям

$$\sum \frac{df}{dx} = \rho, \quad \alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \quad u = \frac{df}{dt} + \rho\xi, \qquad (2)$$

и другим, получающимся из соображений симметрии.

Что касается интеграла J, то он должен быть распространен:

1) относительно элемента объема $d\tau = dx dy dz$ по всему пространству,

2) относительно времени t на интервал между пределами $t = t_0$, $t = t_1$.

Согласно принципу наименьшего действия интеграл J должен быть минимумом, если различные входящие в него величины подчинить:

1) условиям (2),

2) условию, что состояние системы задается для двух предельных моментов $t = t_0$ и $t = t_1$.

Это последнее условие позволяет преобразовать наши интегралы при помощи интегрирования по частям.

В самом деле, если мы имеем интеграл вида

$$\int dt d\tau A \frac{d(B\delta C)}{dt},$$

где C — одна из величин, определяющих состояние системы, и δC ее вариация, то, интегрируя его по частям относительно времени, получим

$$\int d\tau \left| AB\delta C \right|_{t=t_0}^{t=t_1} - \int dt d\tau \frac{dA}{dt} B\delta C.$$

Так как для двух предельных моментов времени состояние системы задано, то для $t=t_0$, $t=t_1$ $\delta C=0$; поэтому первый интеграл обращается в нуль и остается только второй.

Точно так же можно интегрировать по частям и относительно x, y или z.

В самом деле, имеем

$$\int A\frac{dB}{dx}\,dxdydzdt=$$
$$=\int ABdydzdt-\int B\frac{dA}{dx}\,dxdydzdt.$$

Так как интегрирования распространяются здесь до бесконечности, то в первом интеграле правой части следует положить $x=\pm\infty$; поэтому, в силу того, что все наши функции предполагаются исчезающими в бесконечности, этот интеграл будет равен нулю, и мы получим

$$\int A\frac{dB}{dx}\,d\tau dt=-\int B\frac{dA}{dx}\,d\tau dt.$$

Если предположить, что на систему наложены связи, то к условиям, налагаемым на различные величины, входящие в интеграл J, следует присоединить еще условия связи.

Придадим сначала F, G, H приращения δF, δG, δH, откуда

$$\delta\alpha=\frac{d\delta H}{dy}-\frac{d\delta G}{dz}.$$

Имеем

$$\delta J=\int dtd\tau\left[\sum\alpha\left(\frac{d\delta H}{dy}-\frac{d\delta G}{dz}\right)-\sum u\delta F\right]=0,$$

или, интегрируя по частям,

$$\delta J=\int dtd\tau\left[\sum\left(\delta G\frac{d\alpha}{dz}-\delta H\frac{d\alpha}{dy}\right)-\sum u\delta F\right]=$$
$$=-\int dtd\tau\sum\delta F\left(u-\frac{d\gamma}{dy}+\frac{d\beta}{dz}\right)=0,$$

откуда, приравнивая нулю коэффициент при δF, получим

$$u=\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}. \tag{3}$$

Интегрируя по частям это соотношение, найдем

$$\int\sum Fudt=\int\sum F\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}\right)d\tau=$$
$$=\int\sum\left(\beta\frac{dF}{dz}-\gamma\frac{dF}{dy}\right)d\tau=\left(\int\sum\alpha\left(\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}\right)d\tau,\right.$$

или

$$\int\sum Fud\tau=\int\sum\alpha^2d\tau,$$

откуда наконец

$$J=\int dtd\tau\left(\frac{\sum f^2}{2}-\frac{\sum\alpha^2}{2}\right). \tag{4}$$

Отсюда, а также из соотношения (3) видно, что δJ не зависит от δF, а следовательно и от $\delta\alpha$; будем варьировать теперь другие переменные.

Возвращаясь к выражению (1), получаем для J:

$$\delta J=\int dtd\tau\left(\sum f\delta f-\sum F\delta u\right).$$

Но f, g, h подчинены первому из условий (2), принимающему при этом вид

$$\sum\frac{d\delta f}{dx}=\delta\rho. \tag{5}$$

Поэтому можно написать

$$\delta J = \int dt d\tau \left[\sum f df - \sum F du - \right.$$
$$\left. - \psi \left(\sum \frac{d\delta f}{dx} - \delta\rho \right) \right]. \qquad (6)$$

Согласно методам вариационного исчисления, вычисление следует производить так, как если бы ψ была произвольной функцией, а δJ — представлено выражением (6), и вариации не подчинялись бы более условиям (5).

С другой стороны мы имеем

$$\delta u = \frac{d\delta f}{dt} + \delta\rho\xi,$$

откуда, интегрируя по частям, получаем

$$\delta J = \int dt d\tau \sum \delta f \left(f + \frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dx} \right) +$$
$$+ \int dt d\tau \left(\psi\delta\rho - \sum F\delta\rho\xi \right). \qquad (7)$$

Если предположить сперва, что электроны не подвергаются вариации, то $\delta\rho = \delta\rho\xi = 0$, и второй интеграл равен нулю.

Так как δJ должно обращаться в нуль, то

$$f + \frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dx} = 0. \qquad (8)$$

В общем же случае будем иметь:

$$\delta J = \int dt d\tau \left(\psi\delta\rho - \sum F\delta\rho\xi \right). \qquad (9)$$

Остается определить силы, действующие на электроны. Для этого предположим, что к каждому элементу электрона приложена дополнительная сила

$-Xd\tau, -Yd\tau, -Zd\tau$. Напишем условие равновесия этой силы с электромагнитными силами. Пусть U, V, W будут составляющими перемещения элемента $d\tau$ электрона, причем перемещение отсчитывается от какого-нибудь начального положения. Пусть далее δU, δV, δW будут вариации этого перемещения; виртуальная работа, соответствующая дополнительной силе, равна

$$-\int \sum X\delta U d\tau,$$

так что условие равновесия напишется в виде:

$$\delta J = -\int \sum X\delta U d\tau dt. \qquad (10)$$

Необходимо теперь преобразовать δJ. Для этого попытаемся сначала найти уравнение непрерывности, выражающее неизменяемость заряда при вариации.

Пусть x_0, y_0, z_0 начальное положение электрона. Положение его в данный момент будет:

$$x = x_0 + U, \quad y = y_0 + V, \quad z = z_0 + W.$$

Введем кроме того вспомогательную переменную ε, при помощи которой будем варьировать наши различные функции, так что, например, для какой-нибудь функции A будем иметь:

$$\delta A = \delta\varepsilon \frac{dA}{d\varepsilon}.$$

Действительно, для меня удобно будет иметь возможность переходить от обозначений вариационного исчисления к обозначениям обычного дифференциального исчисления, или обратно.

Наши функции можно рассматривать либо зависящими от пяти переменных x, y, z, t, ε так, что при изменении t и ε наблюдатель всегда остается на одном и том же месте — в этом случае их производные будем обозначать обыкновенным d; либо как зависящими от пяти переменных x_0, y_0, z_0, t, ε так, что при изменении t и ε мы следуем всегда за одним и тем же электроном, — в этом случае их производные будем обозначать круглым ∂.

Тогда будем иметь:

$$\xi = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{dU}{dt} + \xi \frac{dU}{dx} + \eta \frac{dU}{dy} + \\ + \zeta \frac{dU}{dz} = \frac{\partial x}{\partial t}. \tag{11}$$

Обозначим теперь через Δ функциональный определитель x, y, z относительно x_0, y_0, z_0:

$$\Delta = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (x_0, y_0, z_0)}.$$

Сохраняя ε, x_0, y_0, z_0 постоянными, дадим t приращение ∂t, тогда x, y, z получат приращения ∂x, ∂y, ∂z и Δ — приращение $\partial \Delta$.

Таким образом

$$\partial x = \xi \partial t, \quad \partial y = \eta \partial t, \quad \partial z = \zeta \partial t,$$

$$\Delta + \partial \Delta = \frac{\partial (x + \partial x,\ y + \partial y,\ z + \partial z)}{\partial (x_0,\ y_0,\ z_0)};$$

откуда

$$1 + \frac{\partial \Delta}{\Delta} = \frac{\partial (x + \partial x,\ y + \partial y,\ z + \partial z)}{\partial (x,\ y,\ z)} = \\ = \frac{\partial (x + \xi \partial t,\ y + \eta \partial t,\ z + \zeta \partial t)}{\partial (x,\ y,\ z)}.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial t} = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}. \tag{12}$$

Так как заряд каждого электрона остается постоянным, то

$$\frac{\partial \rho \Delta}{\partial t} = 0, \tag{13}$$

откуда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum \rho \frac{d\xi}{dx} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dt} + \sum \xi \frac{d\rho}{dt},$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \sum \frac{d\rho\xi}{dx} = 0.$$

Таковы различные формы уравнения непрерывности в отношении переменной t. Аналогичные уравнения мы найдем и для переменной ε.

Пусть

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon, \quad \delta V = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon, \quad \delta W = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon;$$

следовательно,

$$\delta U = \frac{dU}{d\varepsilon} \delta \varepsilon + \delta U \frac{dU}{dx} + \delta V \frac{dU}{dy} + \delta W \frac{dU}{dz}, \tag{11'}$$

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varepsilon} = \sum \frac{\partial U}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{\partial \rho \Delta}{\partial \varepsilon} = 0, \tag{12'}$$

$$\delta \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon} + \sum \rho \frac{d\delta U}{dx} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon} = \frac{d\rho}{d\varepsilon} + \sum \frac{\delta U}{\delta \varepsilon} \frac{d\rho}{dx},$$

$$\delta \rho + \sum \frac{d\rho \delta U}{dx} = 0. \tag{13'}$$

Отметим различие между определением

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial t} \delta \varepsilon$$

и

$$\delta\rho = \frac{d\rho}{d\varepsilon}\,\delta\varepsilon;$$

заметим, что именно первое определение более подходит к формуле (10).

Это первое определение позволит нам преобразовать первый член (9).

В самом деле имеем:

$$\int dt\,d\tau\,\psi\,\delta\rho = -\int dt\,d\tau\,\psi \sum \frac{d\rho\,\delta U}{dx},$$

или, интегрируя по частям,

$$\int dt\,d\tau\,\psi\,\delta\rho = \int dt\,d\tau \sum \rho\,\frac{d\psi}{dx}\,\delta U. \tag{14}$$

Попробуем теперь вычислить

$$\delta(\rho\xi) = \frac{d(\rho\xi)}{d\varepsilon}\,\delta\varepsilon.$$

Заметим, что $\rho\Delta$ может зависеть только от x_0, y_0, z_0. Действительно, если рассматривать элемент электрона, начальное положение которого определяется прямоугольным параллелепипедом с ребрами dx_0, dy_0, dz_0, то заряд этого элемента равен

$$\rho\Delta\,dx_0\,dy_0\,dz_0,$$

а так как этот заряд должен остаться постоянным, то

$$\frac{\partial\rho\Delta}{\partial t} = \frac{\partial\rho\Delta}{\partial\varepsilon} = 0. \tag{15}$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial^2\rho\Delta U}{\partial t\,\partial\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\rho\Delta\,\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\Delta\,\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}\right). \tag{16}$$

Но в силу уравнения непрерывности имеем для какой угодно функции A:

$$\frac{1}{\Delta}\,\frac{\partial A\Delta}{\partial t} = \frac{dA}{dt} + \sum \frac{dA\xi}{dx},$$

а также

$$\frac{1}{\Delta}\,\frac{\partial A\Delta}{\partial\varepsilon} = \frac{dA}{d\varepsilon} + \sum \frac{dA\,\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}}{dx}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\Delta}\,\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\rho\Delta\,\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \frac{d\rho\frac{\partial U}{\partial t}}{d\varepsilon} + \frac{d\left(\rho\,\frac{\partial U}{\partial t}\,\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}\right)}{dx} + \frac{d\left(\rho\,\frac{\partial U}{\partial t}\,\frac{\partial V}{\partial\varepsilon}\right)}{dy} + \frac{d\left(\rho\,\frac{\partial U}{\partial t}\,\frac{\partial W}{\partial\varepsilon}\right)}{dz}, \tag{17}$$

$$\frac{1}{\Delta}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\Delta\,\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}\right) = \frac{d\rho\,\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}}{dt} + \frac{d\left(\rho\,\frac{\partial U}{\partial t}\,\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}\right)}{dx} + \frac{d\left(\rho\,\frac{\partial V}{\partial t}\,\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}\right)}{dy} + \frac{d\left(\rho\,\frac{\partial W}{\partial t}\,\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}\right)}{dz} \tag{17'}$$

Вторые члены (17) и (17′) должны быть одинаковы, поэтому, приняв во внимание, что

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \xi, \quad \frac{\partial U}{\partial\varepsilon}\,\delta\varepsilon = \delta U, \quad \frac{d\rho\xi}{d\varepsilon}\,\delta\varepsilon = \delta\rho\xi,$$

получаем:

$$\delta\rho\xi + \frac{d(\rho\xi\delta U)}{dx} + \frac{d(\rho\xi\delta V)}{dy} + \frac{d(\rho\xi\delta W)}{dz} = \frac{d(\rho\delta U)}{dt} + \frac{d(\rho\xi\delta U)}{dx} + \frac{d(\rho\eta\delta U)}{dy} + \frac{d(\rho\zeta\delta U)}{dz}. \tag{18}$$

Преобразуем теперь вторую часть (9); имеем

$$\int dt d\tau \sum F \delta \rho \xi = \int dt d\tau \left[\sum F \frac{d(\rho \delta U)}{dt} + \right.$$
$$+ \sum F \frac{d(\rho \eta \delta U)}{dy} + \sum F \frac{d(\rho \zeta \delta U)}{dz} -$$
$$\left. - \sum F \frac{d(\rho \xi \delta V)}{dy} - \sum F \frac{d(\rho \xi \delta W)}{dz} \right].$$

После интегрирования по частям правая часть имеет вид:

$$\int dt d\tau \left[- \sum \rho \delta U \frac{dF}{dt} - \sum \rho \eta \delta U \frac{dF}{dy} - \sum \rho \zeta \delta U \frac{dF}{dz} + \right.$$
$$\left. + \sum \rho \xi \delta V \frac{dF}{dy} + \sum \rho \xi \delta W \frac{dF}{dz} \right].$$

Заметим теперь, что

$$\sum \rho \xi \delta V \frac{dF}{dy} = \sum \rho \zeta \delta U \frac{dH}{dx},$$
$$\sum \rho \xi \delta W \frac{dF}{dz} = \sum \rho \eta \delta U \frac{dG}{dx}.$$

В самом деле, если в обоих членах этих соотношений развернуть суммы $\sum$, то они сделаются тождествами. Вспоминая же, что

$$\frac{dH}{dx} - \frac{dF}{dz} = -\beta, \quad \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} = \gamma,$$

получим

$$\int dt d\tau \left[- \sum \rho \delta U \frac{dF}{dt} + \sum \rho \gamma \eta \delta U - \sum \rho \beta \zeta \delta U \right].$$

Таким образом, окончательно:

$$\delta J = \int dt d\tau \sum \rho \delta U \left(\frac{d\phi}{dx} + \frac{dF}{dt} + \beta \zeta - \gamma \eta \right) =$$
$$= \int dt d\tau \sum \rho \delta U (-f + \beta \zeta - \gamma \eta).$$

Приравнивая коэффициенты при δU в последнем выражении и в (10), получим

$$X = \rho f - \rho (\beta \zeta - \gamma \eta);$$

а это есть не что иное, как уравнение (2) предыдущего параграфа.

§ 3. Преобразование Лоренца и принцип наименьшего действия.

Посмотрим, не указывает ли принцип наименьшего действия на причину успеха преобразований Лоренца. Для этого прежде всего нужно знать, как изменится в результате этого преобразования интеграл (формула (4) § 2):

$$J = \int dt d\tau \left(\frac{\sum f^2}{2} - \frac{\sum \alpha^2}{2} \right)$$

Мы находим сначала, что

$$dt' d\tau' = l^4 dt d\tau,$$

ибо x', y', z', t связаны с x, y, z, t линейными соотношениями, определитель которых равен l^4.

Затем получаем

$$\left.\begin{aligned} l^4 \sum f'^2 &= f^2 + k^2 (g^2 + h^2) + \\ &+ k^2 \varepsilon^2 (\beta^2 + \gamma^2) + 2 k^2 \varepsilon (g\gamma - h\beta), \\ l^4 \sum \alpha'^2 &= \alpha^2 + k^2 (\beta^2 + \gamma^2) + \\ &+ k^2 \varepsilon^2 (g^2 + h^2) + 2 k^2 \varepsilon (g\gamma - h\beta), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

формулы (9) § 1), откуда

$$l^4 \left(\sum f'^2 - \sum \alpha'^2 \right) = \sum f^2 - \sum \alpha^2.$$

Таким образом, полагая

$$J' = \int dt'd\tau' \left(\frac{\Sigma f'^2}{2} - \frac{\Sigma \alpha'^2}{2}\right),$$

получим

$$J' = J.$$

Однако, для того чтобы это равенство имело силу, необходимо, чтобы пределы интегрирования в обоих случаях были одни и те же. До сих пор мы принимали, что t изменяется от t_0 до t_1 и x, y, z от $-\infty$ до $+\infty$. В результате преобразования Лоренца эти пределы интегрирования будут изменены; однако ничто не мешает нам положить $t_0 = -\infty$ и $t_1 = +\infty$: при этих условиях пределы для J и J' останутся те же.

Сравним теперь два следующие уравнения, аналогичные уравнению (10) § 2:

$$\left.\begin{aligned} \delta J &= -\int \sum X\delta U d\tau dt, \\ \delta J' &= -\int \sum X'\delta U' d\tau' dt'. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Для этого сравним сначала $\delta U'$ и δU. Будем рассматривать электрон, начальные координаты которого равны x_0, y_0, z_0; тогда в момент t

$$x = x_0 + U, \quad y = y_0 + V, \quad z = z_0 + W.$$

Рассматривая электрон соответственно после преобразования Лоренца, будем иметь

$$x' = kl(x + \varepsilon t), \quad y' = ly, \quad z' = lz,$$

где

$$x' = x_0 + U', \quad y' = y_0 + V', \quad z' = z_0 + W';$$

но эти координаты будут достигнуты только в момент

$$t' = kl(t + \varepsilon x).$$

Если мы подвергнем наши переменные вариациям δU, δV, δW и одновременно дадим t приращение δt, то координаты x, y, z получат полное приращение:

$$\delta x = \delta U + \xi\delta t, \quad \delta y = \delta V + \eta\delta t, \quad \delta z = \delta W + \zeta\delta t.$$

Аналогично будет

$$\delta x' = \delta U' + \xi'\delta t', \quad \delta y' = \delta V' + \eta'\delta t',$$
$$\delta z' = \delta W' + \zeta'\delta t'.$$

В силу преобразования Лоренца

$$\delta x' = kl(\delta x + \varepsilon\delta t), \quad \delta y' = l\delta y, \quad \delta z' = l\delta z,$$
$$\delta t' = kl(\delta t + \varepsilon\delta x),$$

откуда, полагая $\delta t = 0$, получим соотношения

$$\delta x' = \delta U' + \xi'\delta t' = kl\delta U,$$
$$\delta y' = \delta V' + \eta'\delta t' = l\delta V,$$
$$\delta t' = kl\varepsilon\delta U.$$

Заметим, что

$$\xi' = \frac{\xi + \varepsilon}{1 + \xi\varepsilon}, \quad \eta' = \frac{\eta}{k(1 + \xi\varepsilon)};$$

поэтому, заменяя $\delta t'$ его значением, будем иметь

$$kl(1 + \xi\varepsilon)\delta U = \delta U'(1 + \xi\varepsilon) + (\xi + \varepsilon)kl\varepsilon\delta U,$$
$$l(1 + \xi\varepsilon)\delta V = \delta V'(1 + \xi\varepsilon) + \eta l\varepsilon\delta U.$$

Вспоминая определение k, получим отсюда

$$\delta U = \frac{k}{l}\delta U' + \frac{k\varepsilon}{l}\xi\delta U',$$

$$\delta V = \frac{1}{l}\delta V' + \frac{k\varepsilon}{l}\eta\delta U',$$

а также

$$\delta W = \frac{1}{l}\delta W' + \frac{k\varepsilon}{l}\zeta\delta U';$$

откуда

$$\sum X\delta U = \frac{1}{l}(kX\delta U' + Y\delta V' + + Z\delta W') + \frac{k\varepsilon}{l}\,\delta U' \sum X\xi. \qquad (3)$$

В силу же уравнений (2) будет

$$\int \sum X'\delta U'\,dt'\,d\tau' = \int \sum X\delta U\,dt\,d\tau = = \frac{1}{l^4}\int \sum X\delta U\,dt'\,d\tau'.$$

Заменяя $\sum X\delta U$ на его значение (3), получим

$$X' = \frac{k}{l^5}X + \frac{k\varepsilon}{l^5}\sum X\xi, \quad Y' = \frac{1}{l^5}Y, \quad Z' = \frac{1}{l^5}Z,$$

т. е. уравнения (11) § 1.

Таким образом, принцип наименьшего действия привел нас к тому же результату, что и исследование § 1.

Обращаясь к формулам (1), мы видим, что в результате преобразования Лоренца выражение

$$\sum f^2 - \sum \alpha^2,$$

за исключением постоянного множителя, осталось неизменным; этого нельзя сказать о выражении

$$\sum f^2 + \sum \alpha^2,$$

входящем в энергию. Ограничиваясь случаем достаточно малого ε для того, чтобы можно было пренебречь его квадратом, т. е. считая $k=1$ и полагая также $l=1$, мы находим

$$\sum f'^2 = \sum f^2 + 2\varepsilon(g\gamma - h\beta),$$

$$\sum \alpha'^2 = \sum \alpha^2 + 2\varepsilon(g\gamma - h\beta)$$

или, складывая,

$$\sum f'^2 + \sum \alpha'^2 = \sum f^2 + \sum \alpha^2 + 4\varepsilon(g\gamma - h\beta).$$

§ 4. Группа Лоренца.

Важно отметить, что преобразования Лоренца образуют группу.

В самом деле, полагая

$$x' = kl(x+\varepsilon t), \quad y' = ly, \quad z' = lz, \quad t' = kl(t+\varepsilon x),$$

и, с другой стороны,

$$x'' = k'l'(x' + \varepsilon' t'), \quad y'' = l'y', \quad z'' = l'z', \quad t'' = k'l'(t' + \varepsilon' x'),$$

где

$$k^{-2} = 1-\varepsilon^2, \quad k'^{-2} = 1-\varepsilon'^2,$$

получаем:

$$x'' = k''l''(x+\varepsilon'' t), \quad y'' = l''y, \quad z'' = l''z, \quad t'' = k''l''(t+\varepsilon'' x),$$

где

$$\varepsilon'' = \frac{\varepsilon+\varepsilon'}{1+\varepsilon\varepsilon'}, \quad l'' = ll',$$

$$k'' = kk'(1+\varepsilon\varepsilon') = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon''^2}}.$$

Если мы придадим l значение 1, считая ε бесконечно малым, т. е. положив

$$x' = x+\delta x, \quad y' = y+\delta y, \quad z' = z+\delta z, \quad t' = t+\delta t,$$

то получим:

$$\delta x = \varepsilon t, \quad \delta y = \delta z = 0, \quad \delta t = \varepsilon x.$$

Это и есть то бесконечно малое преобразование группы, которое я назову преобразованием T, и которое, согласно Ли, можно представить в виде

$$t\frac{d\varphi}{dx}+x\frac{d\varphi}{dt}=T_1.$$

Напротив, полагая $\varepsilon=0$ и $l=1+\delta l$, мы найдем:

$$\delta x=x\delta l,\quad \delta y=y\delta l,\quad \delta z=z\delta l,\quad \delta t=t\delta l$$

и получим другое бесконечно малое преобразование T_0 группы (рассматривая l и ε как независимые переменные), которое в обозначениях Ли можно представить в виде:

$$T_0=x\frac{d\varphi}{dx}+y\frac{d\varphi}{dy}+z\frac{d\varphi}{dz}+t\frac{d\varphi}{dt}.$$

Придавая особенную роль, которую до сих пор играла ось X, осям Y и Z, получаем таким образом два других бесконечно-малых преобразования:

$$T_2=t\frac{d\varphi}{dy}+y\frac{d\varphi}{ut},$$

$$T_3=t\frac{d\varphi}{dz}+z\frac{d\varphi}{dt},$$

которые тоже не изменяют уравнений Лоренца.

Можно образовать различные комбинации, введенные Ли, например:

$$[T_1,\ T_2]=x\frac{d\varphi}{dy}-y\frac{d\varphi}{dx}.$$

Легко однако видеть, что это последнее преобразование эквивалентно преобразованию осей координат, когда они поворачиваются на весьма малый угол вокруг оси Z. Мы не должны поэтому удивляться, если подобное преобразование не изменяет формы уравнений Лоренца, очевидно независимых от выбора осей.

Итак мы, приходим к необходимости рассмотреть непрерывную группу, которую мы назовем *группой Лоренца* и которая допускает следующие бесконечно малые преобразования:

1) преобразование T_0, которое будет переставимо со всеми остальными;

2) три преобразования T_1, T_2, T_3;

3) три вращения $[T_1, T_2]$, $[T_2, T_3]$, $[T_3, T_1]$.

Любое из преобразований этой группы можно разложить на преобразование вида:

$$x'=lx,\quad y'=ly,\quad z'=lz,\quad t'=lt$$

и линейное преобразование, не изменяющее квадратичной формы

$$x^2+y^2+z-t^2.$$

Мы можем также образовать нашу группу несколько иным способом. Каждое преобразование группы можно рассматривать как преобразование вида

$$x'=kl(x+\varepsilon t),\quad y'=ly,\quad z'=lz,\quad t'=kl(t+\varepsilon x), \tag{1}$$

которому предшествует и за которым следует соответствующий поворот.

Однако для нашей цели достаточно рассмотреть только часть преобразований этой группы; будем считать что l есть функция от ε, и выберем эту функцию так, чтобы та часть группы, которую я обозначу через P, все еще образовывала группу.

Вращая систему на 180° вокруг оси y, мы получим преобразование, которое опять должно принадлежать к P. Так как это приводит к изменению знака x, x', z и z', то мы находим

$$x'=kl(x-\varepsilon t),\quad y'=ly,\quad z'=lz,\quad t'=kl(t-\varepsilon x) \tag{2}$$

Следовательно, от перемены знака ε, l не меняется. С другой стороны, если P есть группа, то подстановка обратная (1), которую можно представить в виде

$$x' = \frac{k}{l}(x - \varepsilon t), \quad y' = \frac{y}{l},$$
$$z' = \frac{z}{l}, \quad t' = \frac{k}{l}(t - \varepsilon x), \tag{3}$$

также должна принадлежать к P; она должна быть таким образом тождественной (2), т. е.

$$l = \frac{1}{l}.$$

Следовательно, $l = 1$.

§ 5. Волны Ланжевена.

Формулы, определяющие электромагнитное поле, обусловленное движением одного электрона, были представлены Ланжевеном в особенно изящной форме.

Рассмотрим снова уравнения

$$\Box \psi = -\rho, \quad \Box F = -\rho\xi. \tag{1}$$

Известно, что решения их можно получить при помощи запаздывающих потенциалов

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho_1 d\tau_1}{r}, \quad F = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho_1 \xi_1 d\tau_1}{r}. \tag{2}$$

В этих формулах

$$d\tau_1 = dx_1 dy_1 dz_1,$$
$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

тогда как ρ_1 и ξ_1 суть значения ρ и ξ в точке x_1, y_1, z_1 и в момент $t_1 = t - r$.

Пусть x_0, y_0, z_0 координаты элемента электрона в момент t_0; тогда

$$x_1 = x_0 + U, \quad y_1 = y_0 + V, \quad z_1 = z_0 + W$$

будут его координатами в момент t_1.

U, V, W суть функции x_0, y_0, z_0, t_1, поэтому мы можем написать

$$dx_1 = dx_0 + \frac{dU}{dx_0}dx_0 + \frac{dU}{dy_0}dy_0 + \frac{dU}{dz_0}dz_0 + \xi_1 dt$$

и, если считать t, а также x, y и z постоянными, то

$$dt_1 = +\sum \frac{x - x_1}{r} dx_1.$$

Следовательно, получаем

$$dx_1\left(1 + \xi_1 \frac{x_1 - x}{r}\right) + dy_1 \xi_1 \frac{y_1 - y}{r} + dz_1 \xi_1 \frac{z_1 - z}{r} =$$
$$= dx_0\left(1 + \frac{dU}{dx_0}\right) + dy_0 \frac{dU}{dy_0} + dz_0 \frac{dU}{dz_0}$$

и еще два другие уравнения, возникающие от круговой перестановки.

Таким образом, полагая $d\tau_0 = dx_0 dy_0 dz_0$, будем иметь

$$d\tau_1 \left| 1 + \xi_1 \frac{x_1 - x}{r}, \quad \xi_1 \frac{y_1 - y}{r}, \quad \xi_1 \frac{z_1 - z}{r} \right| =$$
$$= d\tau_0 \left| 1 + \frac{dU}{dx_0}, \quad \frac{dU}{dy_0}, \quad \frac{dU}{dz_0} \right|. \tag{3}$$

Исследуем определители, стоящие в обеих частях (3), и прежде всего первый из них; разложив его, мы увидим, что члены 2-й и 3-й степени относительно ξ, η, ζ обращаются в нуль, и определитель равен:

$$1 + \xi_1 \frac{x_1 - x}{r} + \eta_1 \frac{y_1 - y}{r} + \zeta_1 \frac{z - z}{r} = 1 + \omega,$$

где ω радиальная составляющая скорости ξ_1, η_1, ζ_1, т. е. составляющая, направленная по радиусу-вектору, соединяющему точки x, y, z и x_1, y_1, z_1.

Для того чтобы получить второй определитель, найдем координаты различных элементов электрона в момент t', одинаковый для всех элементов [1]), однако такой, что для наблюдаемого элемента $t_1 = t_1'$. Тогда координаты элементов представятся в виде:

$$x_1' = x_0 + U', \quad y_1' = y_0 + V', \quad z_1' = z_0 + W',$$

где U', V', W' получаются из U, V, W заменою t_1 на t_1'.

Так как t_1' одно и то же для всех элементов, то:

$$dx_1' = dx_0\left(1 + \frac{dU'}{dx_0}\right) + dy_0\frac{dU'}{dy_0} + dz_0\frac{dU'}{dz_0}$$

и, следовательно,

$$d\tau_1' = d\tau_0 \left| 1 + \frac{dU'}{dx_0}, \quad \frac{dU'}{dy_0}, \quad \frac{dU'}{dz_0} \right|,$$

где

$$d\tau_1' = dx_1'dy_1'dz_1'.$$

Но элемент электрического заряда равен

$$d\mu_1 = \rho_1 d\tau_1',$$

и сверх того *для наблюдаемого элемента* электрона $t_1 = t_1'$, а поэтому

$$\frac{dU'}{dx_0} = \frac{dU}{dx_0},$$

и т. д.

Мы можем следовательно написать

$$d\mu_1 = \rho_1 d\tau_0 \left| 1 + \frac{dU}{dx_0}, \quad \frac{dU}{dy_0}, \quad \frac{dU}{dz_0} \right|,$$

[1]) Пуанкаре пишет здесь: „молекулы электрона".

Прим. ред.

так что уравнения (3) и (2) перепишутся в виде

$$\rho_1 d\tau_1(1 + \omega) = d\mu_1, \tag{3'}$$

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\int\frac{d\mu_1}{r(1+\omega)}, \qquad F = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\xi_1 d\mu_1}{r(1+\omega)}.$$

Когда мы имеем дело только с одним электроном, то наши интегралы сведутся к одному члену, если рассматривать только точки x, y, z, достаточно удаленные для того, чтобы r и ω имели тогда одно и то же значение для всех точек электрона. Потенциалы ψ, F, G, H зависят от положения этого электрона, а также от его скорости, ибо не только ξ_1, η_1, ζ_1 входят в числители выражений F, G, H, но в их знаменатели входит также и радиальная составляющая ω. Разумеется, речь идет о положении и скорости электрона в момент t_1.

Частные производные от ψ, F, G, H по t, x, y, z (а следовательно электрическое и магнитное поле) будут зависеть кроме того и от его ускорения; притом эта зависимость будет *линейной*, так как ускорение войдет в производные только от одного дифференцирования.

Ланжевен пришел таким образом к необходимости различать в электрическом и магнитном поле члены, не зависящие от ускорения (то, что он называет волной скорости) и члены, пропорциональные ускорению (волна ускорения).

Вычисление этих двух волн сильно упрощается благодаря преобразованию Лоренца. В самом деле, мы можем применить это преобразование к системе таким образом, чтобы скорость рассматриваемого электрона сделалась равной нулю. Выберем для оси x направление этой скорости до преобразования, так что в момент t_1,

$$\eta_1 = \zeta_1 = 0,$$

и положим $\varepsilon = -\xi_1$, так что

$$\xi_1' = \eta_1' = \zeta_1' = 0.$$

Мы можем таким образом свести вычисление двух волн к случаю, когда скорость электрона равна нулю. Начнем с волны скорости. Прежде всего заметим, что эта волна будет такой же, как и при равномерном движении электрона.

Если скорость электрона равна нулю, то

$$\omega = 0, \quad F = G = H = 0, \quad \psi = \frac{\mu_1}{4\pi r},$$

где μ_1 заряд электрона.

Так как скорость электрона сведена к нулю в результате преобразования Лоренца, то

$$F' = G' = H' = 0, \quad \psi' = \frac{\mu_1}{4\pi r'},$$

где r' расстояние между точками x', y', z' и x_1', y_1', z_1' и следовательно

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = 0,$$

$$f' = \frac{\mu_1 (x' - x_1')}{4\pi r'^3}, \quad g' = \frac{\mu_1 (y' - y_1')}{4\pi r'^3},$$

$$h' = \frac{\mu_1 (z' - z_1)}{4\pi r'^3}.$$

Для нахождения истинного поля, соответствующего скорости $-\varepsilon$, 0,0, применим теперь преобразование, обратное преобразованию Лоренца.

Обращаясь к уравнениям (9) и (3) § 1, находим

$$\alpha = 0, \quad \beta = \varepsilon h, \quad \gamma = -\varepsilon g,$$

$$f = \frac{\mu_1 k l^3}{4\pi r'^3} (x + \varepsilon t - x_1 - \varepsilon t_1),$$

$$g = \frac{\mu_1 k l^3}{4\pi r'^3} (y - y_1), \quad h = \frac{\mu_1 k l^3}{4\pi r'^3} (z - z_1). \tag{4}$$

Легко видеть, что магнитное поле перпендикулярно к оси x (направлению скорости) и к электрическому полю, причем последнее направлено к точке

$$x_1 + \varepsilon (t_1 - t), \quad y_1, \quad z_1. \tag{5}$$

Если бы электрон продолжал двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью, которую он имел в момент t_1, т. е. со скоростью $-\varepsilon$, 0,0, то этой точки (5) он достиг бы в момент t.

Перейдем теперь к волне ускорения; благодаря преобразованию Лоренца мы можем свести ее определение к случаю, когда скорость равна нулю. Этот случай может быть осуществлен, если представить, что электрон совершает очень быстрые колебания весьма малой амплитуды, при этом перемещения и скорости будут бесконечно малыми, а ускорения — конечными. Таким образом мы приходим к случаю, изученному уже Герцем в его знаменитом мемуаре „Die Kräfte elektrischer Schwingungen nach der Maxwellschen Theorie“ („Силы электрических колебаний по теории Максвелла“) для очень удаленной точки. При этих условиях:

1) электрическое и магнитное поля будут равны друг другу,

2) взаимно перпендикулярны и

3) перпендикулярны к нормали волновой сферы, т. е. сферы с центром в точке x_1, y_1, z_1.

Я утверждаю, что эти три свойства будут иметь место также и тогда, когда скорость не будет равна нулю. Для этого мне достаточно показать, что они не изменяются от преобразования Лоренца.

В самом деле, пусть A есть общее напряжение обоих полей и пусть

$$(x - x_1) = r\lambda, \quad (y - y_1) = r\mu, \quad (z - z_1) = r\nu,$$
$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Указанные свойства выражаются равенствами

$$A^2=\sum f^2=\sum \alpha^2, \quad \sum f\alpha=0,$$

$$\sum f(x-x_1)=0, \quad \sum \alpha(x-x_1)=0,$$

$$\sum f\lambda=0, \quad \sum \alpha\lambda=0,$$

причем

$$\begin{array}{ccc} \frac{f}{A}, & \frac{g}{A}, & \frac{h}{A}, \\ \frac{\alpha}{A}, & \frac{\beta}{A}, & \frac{\gamma}{A}, \\ \lambda, & \mu, & \nu, \end{array}$$

будут направляющими косинусами трех перпендикулярных направлений.

Отсюда получаем соотношения:

$$f=\beta\nu-\gamma\mu, \quad \alpha=h\mu-g\nu,$$

или

$$\begin{aligned} fr&=\beta(z-z_1)-\gamma(y-y_1), \\ \alpha r&=h(y-y_1)-g(z-z_1), \end{aligned} \tag{6}$$

а также и другие уравнения, выводимые по симметрии

Обращаясь к уравнениям (3) § 1, мы найдем

$$\left.\begin{aligned} x'-x_1'&=kl[(x-x_1)+\varepsilon(t-t_1)]= \\ &=kl[(x-x_1)+\varepsilon r], \\ y'-y_1'&=l(y-y_1), \\ z'-z_1'&=l(z-z_1). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Мы нашли выше в § 3:

$$l^4\left(\sum f'^2-\sum \alpha'^2\right)=\sum f^2-\sum \alpha^2.$$

Следовательно, равенство $\sum f^2=\sum \alpha^2$ влечет за собой $\sum f'^2=\sum \alpha'^2$. С другой стороны, исходя из уравнений (9) § 1, получаем соотношение, которое показывает, что если $\sum f\alpha=0$, то $\sum f'\alpha'=0$.

Я утверждаю теперь, что

$$\sum f'(x'-x_1')=0, \quad \sum \alpha'(x'-x_1')=0. \tag{8}$$

В самом деле, в силу (7), а также (9) § 1, левые члены обоих уравнений (8) перепишутся соответственно в виде:

$$\frac{k}{l}\sum f(x-x_1)+\frac{k\varepsilon}{l}\,[fr+\gamma(y-y_1)-\beta(z-z_1)]$$

$$\frac{k}{l}\sum \alpha(x-x_1)+\frac{k\varepsilon}{l}\,[\alpha r-h(y-y_1)+g(z-z_1)].$$

но, согласно уравнениям

$$\sum f(x-x_1)=\sum \alpha(x-x_1)=0,$$

а также уравнениям (6), — они обращаются в нуль, что как раз и нужно было показать.

Впрочем, к этому же результату можно притти, исходя из простых соображений однородности.

В самом деле, ψ, F, G, H суть однородные функции от

$$x-x_1, \quad y-y_1, \quad z-z_1, \quad \xi_1=\frac{dx_1}{dt_1},$$

$$\eta_1=\frac{dy_1}{dt_1}, \quad \zeta_1=\frac{dt}{dt_1},$$

степени — 1 относительно x, y, z, t, x_1, y_1, z_1, t_1 и их дифференциалов.

Таким образом, производные ψ, F, G, H по x, y, z, t (а следовательно оба поля f, g, h и α, β, γ) будут однородными функциями степени — 2 относительно

тельно тех же величин, если мы вспомним при этом что соотношение

$$t - t_1 = r = \sqrt{\sum (x - x_1)^2}$$

однородно первой степени относительно этих величин.

Но эти производные или поля зависят от $x - x_1$, скоростей $\frac{dx_1}{dt_1}$ и ускорений $\frac{d^2x_1}{dt_1^2}$; они составлены из члена, независящего от ускорений (волна скорости) и члена, линейного относительно ускорений (волна ускорений). Производная $\frac{dx_1}{dt_1}$ есть однородная функция степени 0, а $\frac{d^2x_1}{dt_1^2}$ степени — 1; откуда следует, что волна скорости есть однородная функция степени — 2 относительно $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$, а волна ускорения — однородная функция степени — 1. Таким образом, в весьма удаленной точке, преобладает волна ускорения, которую можно рассматривать, следовательно, как полную волну.

Кроме того, закон однородности показывает нам, что волна ускорения в произвольной точке подобна самой себе в удаленной точке и, следовательно, подобна полной волне в удаленной точке. Но так как в удаленной точке возмущение может распространяться только в виде плоских волн, то оба поля должны быть равны друг другу, взаимно перпендикулярны и перпендикулярны к направлению распространения.

Я ограничусь этими соображениями, отсылая интересующихся деталями к мемуару Ланжевена (Journal de Physique, 1905).

§ 6. Сокращение электронов.

Представим себе электрон, находящийся в равномерном и прямолинейном поступательном движении.

Согласно указанному выше, можно — при помощи преобразования Лоренца — свести изучение поля, обусловленного этим электроном, к случаю неподвижного электрона; таким образом, преобразование Лоренца заменяет реальный движущийся электрон некоторым воображаемым неподвижным электроном.

Пусть α, β, γ; f, g, h реальное поле, и α', β', γ'; f', g', h' поле, получающееся после преобразования Лоренца, т. е. соответствующее неподвижному электрону.

Тогда имеем

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = 0,$$

$$f' = -\frac{d\psi'}{dx'},$$

$$g' = -\frac{d\psi'}{dy'}, \quad h' = -\frac{d\psi'}{dz'};$$

и для реального поля (согласно ф-лам 9 § 1):

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha = 0, & \beta = \varepsilon h, & \gamma = -\varepsilon g, \\ f = l^2 f', & g = kl^2 g', & h = kl^2 h'. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Определим сейчас полную энергию движения электрона, а также соответствующее действие и электромагнитное количество движения, чтобы затем перейти к вычислению электромагнитных масс электрона. Для удаленной точки достаточно рассматривать электрон в виде одной точки; таким образом можно свести все вычисление к формулам (4) предыдущего параграфа, которые, вообще говоря, окажутся пригодными. Однако, здесь они будут недостаточны, так как энергия локализуется главным образом в наиболее близких к электрону частях эфира.

Относительно этого пункта можно высказать несколько гипотез.

Согласно Абрагаму электроны представляются сферическими и недеформируемыми.

Тогда, применяя преобразование Лоренца, мы видим, что если реальный электрон был сферическим, то воображаемый становится эллипсоидом. Уравнение этого эллипсоида, согласно § 1, имеет вид

$$k^2(x'-\varepsilon t'-\xi t'+\varepsilon\xi x')^2+(y'-\eta kt'+\eta k\varepsilon x')^2+$$
$$+(z'-\zeta kt'+\zeta k\varepsilon x')^2=l^2r^2.$$

Но в данном случае

$$\xi+\varepsilon=\eta=\zeta=0,\qquad 1+\varepsilon\xi=1-\varepsilon^2=\frac{1}{k^2},$$

так что уравнение эллипсоида принимает следующий вид:

$$\frac{x'^2}{k^2}+y'^2+z'^2=l^2r^2.$$

Если радиус реального электрона есть r, то полуоси воображаемого электрона равны klr, lr, lr.

Напротив, по гипотезе Лоренца электроны при движении деформируются таким образом, что реальный электрон становится эллипсоидом, в то время как воображаемый покоящийся электрон всегда представляется шаром радиуса r; тогда полуоси реального электрона равны:

$$\frac{r}{lk},\quad \frac{r}{l},\quad \frac{r}{l}.$$

Назовем выражения:

$$A=\frac{1}{2}\int f^2d\tau$$

продольной электрической энергией,

$$B=\frac{1}{2}\int(g^2+h^2)\,d\tau$$

поперечной электрической энергией и

$$C=\frac{1}{2}\int(\beta+\gamma^2)\,d\tau$$

поперечной магнитной энергией.

Продольной магнитной энергии не существует, так как $\alpha=\alpha'=0$.

Обозначим через A', B', C' соответствующие величины в преобразованной системе.

Прежде всего находим

$$C'=0,\quad C=\varepsilon^2B.$$

С другой стороны, замечая, что реальное поле зависит только от $x+\varepsilon t$, y, z, мы можем написать

$$d\tau=d(x+\varepsilon t)\,dxdz,$$
$$d\tau'=dx'dy'dz'=kl^3d\tau,$$

откуда

$$A'=kl^{-1}A,\quad B'=k^{-1}l^{-1}B,$$
$$A=lk^{-1}A',\quad B=klB'.$$

В гипотезе Лоренца $B'=2A'$, где A' постоянная, обратно пропорциональная радиусу электрона и не зависящая от скорости реального электрона.

Таким образом для полной энергии получаем:

$$A+B+C=A'lk(3+\varepsilon^2),$$

и для действия (в единицу времени):

$$A+B-C=3\frac{A'l}{k}.$$

Далее, для электромагнитного количества движения находим

$$D=\int(g\gamma-h\beta)\,d\tau=-\varepsilon\int(g^2+h^2)\,d\tau=$$
$$=-2\varepsilon B=-4\varepsilon klA'.$$

Но между энергией $E=A+B+C$, действием $H=A+B-C$ и количеством движения D должны существовать некоторые соотношения.

Первое из них имеет вид:

$$E = H - \varepsilon \frac{dH}{d\varepsilon},$$

а второе

$$\frac{dD}{d\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{dE}{d\varepsilon};$$

откуда

$$D = \frac{dH}{d\varepsilon}, \quad E = H - \varepsilon D. \tag{2}$$

Второе из уравнений (2) удовлетворяется всегда, первое же только в том случае, если

$$l = (1 - \varepsilon^2)^{1/6} = k^{-1/3},$$

т. е. если объем воображаемого электрона равен объему действительного электрона или иначе, если объем электрона постоянен. В этом состоит гипотеза Ланжевена.

Это находится в противоречии с результатом § 4 и с результатом, полученным иным путем Лоренцом. Займемся выяснением этого противоречия.

Но прежде чем приступить к этому выяснению заметим, что какую бы гипотезу мы ни приняли, мы всегда будем иметь

$$H = A + B - C = \frac{l}{k}(A' + B'),$$

или, так как $C' = 0$,

$$H = \frac{l}{k} H'. \tag{3}$$

Этот результат можно сопоставить с уравнением $J = J'$, полученным в § 3.

В самом деле, мы имеем:

$$J = \int H dt, \quad J' = \int H' dt'.$$

Замечая, что состояние системы зависит только от $x + \varepsilon t$, y, z, т. е. от x', y', z', получим

$$t' = \frac{l}{k} t + \varepsilon x',$$

$$dt' = \frac{l}{k} dt. \tag{4}$$

Сопоставляя уравнения (3) и (4) находим, что

$$J = J'.$$

Примем какую-нибудь гипотезу, будь это гипотеза Лоренца, Абрагама, Ланжевена, или какая-нибудь промежуточная гипотеза.

Пусть r, θr, θr будут три полуоси реального электрона; для воображаемого электрона они превратятся в

$$klr, \quad \theta lr, \quad \theta lr.$$

Тогда $A' + B'$ будет электростатической энергией эллипсоида с осями klr, θlr, θlr.

Если предположить, что электричество распределено на поверхности электрона, как на проводнике, или равномерно распределено внутри этого электрона, то энергия примет вид

$$A' + B' = \frac{\varphi\left(\frac{\theta}{k}\right)}{klr},$$

где φ считается известной функцией.

Гипотеза Абрагама состоит в предположении

$$r = \text{const}, \quad \theta = 1.$$

Согласно же Лоренцу

$$l = 1, \quad kr = \text{const}, \quad \theta = k.$$

Наконец, согласно Ланжевену

$$l = k^{-\frac{1}{3}}, \quad k = \theta, \quad klr = \text{const}.$$

Далее находим

$$H = \frac{\varphi\left(\frac{\theta}{k}\right)}{k^2 r}.$$

Абрагам, в иных обозначениях, получает (Göttinger Nachrichten, 1902, стр. 37):

$$H = \frac{a}{r} \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon} \lg \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon},$$

где a постоянная. Но по гипотезе Абрагама $\theta = 1$; поэтому получаем следующее уравнение, определяющее функцию φ:

$$\varphi\left(\frac{1}{k}\right) = ak^2 \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon} \lg \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} = \frac{a}{\varepsilon} \lg \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}. \tag{5}$$

Установив это, представим себе, что электрон подвержен такой связи, что между r и θ существует некоторое соотношение; по гипотезе Лоренца, это соотношение имело бы вид $\theta r = \text{const}$, а по Ланжевену $\theta^2 r^3 = \text{const}$.

Мы предположим более общий вид:

$$r = b\theta^m,$$

где b — постоянная.

Откуда

$$H = \frac{1}{bk^2} \theta^{-m} \varphi\left(\frac{\theta}{k}\right).$$

Какую форму примет электрон при скорости, равной — ε, *если предположить, что кроме сил связи на него не действуют никакие силы?*

Эта форма определяется равенством:

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0, \tag{6}$$

или

$$-m\theta^{-m-1}\varphi + \theta^{-m} k^{-1} \varphi' = 0,$$

или

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{mk}{\theta}.$$

Если мы желаем, чтобы имело место такое равновесие, при котором $\theta = k$, необходимо, чтобы при $\frac{\theta}{k} = 1$ логарифмическая производная φ была равна m.

Разлагая $\frac{1}{k}$ и правую часть (5) в ряд по степеням ε и пренебрегая высшими степенями ε, получим

$$\varphi\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) = a\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{3}\right).$$

Дифференцируя, будем иметь:

$$-\varepsilon\varphi'\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) = \frac{2}{3}\varepsilon a.$$

Для $\varepsilon = 0$, т. е. когда аргумент φ равен 1, эти уравнения принимают вид:

$$\varphi = a, \quad \varphi' = -\frac{2}{3}a, \quad \frac{\varphi'}{\varphi} = -\frac{2}{3}. \tag{7}$$

Итак, в согласии с гипотезой Ланжевена должно иметь место $m = -\frac{2}{3}$.

Этот результат должен быть согласован с соответствующим выводом первого уравнения (2), от которого он в сущности не отличается. В самом деле, предположим, что на каждый элемент dt электрона действует сила $Xd\tau$, параллельная оси X, причём X одно и то же для всех элементов.

Тогда, по определению количества движения, будем иметь

$$\frac{dD}{dt} = \int X d\tau.$$

С другой стороны, принцип наименьшего действия дает нам:

$$\delta J = \int X \delta U d\tau dt, \quad J = \int H dt, \quad \delta J = \int D \delta U dt,$$

где δU перемещение центра тяжести электрона; H зависит от θ и ε, если r и θ связаны друг с другом уравнением связи.

Поэтому имеем:

$$\delta J = \int \left(\frac{\partial H}{\partial \varepsilon} \delta\varepsilon + \frac{\partial H}{\partial \theta} \delta\theta \right) dt.$$

С другой стороны,

$$\delta\varepsilon = -\frac{d\delta U}{dt};$$

откуда, интегрируя по частям, получаем

$$\int D \delta\varepsilon dt = \int D \delta U dt,$$

$$\int \left(\frac{\partial H}{\partial \varepsilon} \delta\varepsilon + \frac{\partial H}{\partial \theta} \delta\theta \right) dt = \int D \delta\varepsilon dt;$$

отсюда

$$D = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0.$$

Но производная $\frac{dH}{d\varepsilon}$, входящая в правую часть уравнения (2), взята в предположении, что θ есть функция от ε, поэтому

$$\frac{dH}{d\varepsilon} = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\varepsilon}.$$

Таким образом уравнение (2) эквивалентно уравнению (6).

Мы заключаем, что, если на три оси электрона наложена некоторая связь, и *если кроме сил связи нет никакой другой силы*, то форма, которую примет электрон при равномерном движении, только тогда будет сфероид для соответствующего воображаемого электрона, когда связь приведет к постоянству объема, в согласии с гипотезой Ланжевена.

Мы пришли таким образом к постановке следующей задачи: какими будут те дополнительные силы кроме сил связи, которые необходимо ввести для того, чтобы прийти к закону Лоренца или, в более общем случае, любому закону, отличному от закона Ланжевена?

Самая простая гипотеза и первая из тех, которые мы должны рассмотреть, состоит в том, что эти дополнительные силы происходят от некоторого потенциала, зависящего от трех осей эллипсоида и, следовательно, от θ и r. Пусть $F(\theta, r)$ будет этим потенциалом.

В этом случае действие

$$J = \int [H + (\theta, r)] \; dt,$$

и условия равновесия напишутся в виде:

$$\frac{dH}{d\theta} + \frac{dF}{d\theta} = 0, \quad \frac{dH}{dr} + \frac{dF}{dr} = 0. \tag{8}$$

Предполагая, что r и θ связаны друг с другом соотношением $r = b\theta^m$, мы можем рассматривать r как функцию от θ, считая таким образом, что F зависит только от θ, и сохранить только первое из уравнений (8), где

$$H = \frac{\varphi}{bk^2\theta^m}, \quad \frac{dH}{d\theta} = \frac{-m\varphi}{bk^2\theta^{m+1}} + \frac{\varphi'}{bk^3\theta^m}.$$

Необходимо, чтобы уравнение (8) удовлетворялось при $k=\theta$; принимая во внимание уравнения (7), это дает:

$$\frac{dF}{d\theta}=\frac{ma}{b\theta^{m+3}}+\frac{2}{3}\,\frac{a}{b\theta^{m+3}},$$

откуда

$$F=\frac{-a}{b\theta^{m+2}}\,\frac{m+\frac{2}{3}}{m+2},$$

и по гипотезе Лоренца, где $m=-1$:

$$F=\frac{a}{3b\theta}.$$

Допустим, теперь, что не имеется никакой связи, т. е. будем рассматривать r и θ как независимые переменные; в таком случае сохраняются оба уравнения (8), причем

$$H=\frac{\varphi}{k^2 r},\quad \frac{dH}{d\theta}=\frac{\varphi'}{k^3 r},\quad \frac{dH}{dr}=\frac{-\varphi}{k^2 r^2}.$$

Уравнения (8) должны удовлетворяться при $k=\theta$ и $r=b\theta^m$; это дает

$$\frac{dF}{dr}=\frac{a}{b^2\theta^{2m+2}},\quad \frac{dF}{d\theta}=\frac{2}{3}\,\frac{a}{b\theta^{m+3}}. \tag{9}$$

Один из способов удовлетворить этим условиям состоит в том, что мы полагаем

$$F=Ar^{\alpha}\theta^{\beta}, \tag{10}$$

где A, α и β — постоянные.

Уравнения (9) должны удовлетворяться при $k=\theta$ и $r=b\theta^m$, что дает:

$$A\alpha b^{\alpha-1}\theta^{m\alpha-m+\beta}=\frac{a}{b^2\theta^{2m+2}},\quad A\beta b^{\alpha}\theta^{m\alpha+\beta-1}=\frac{2}{3}\,\frac{a}{b\theta^{m+3}}.$$

Отождествляя, находим

$$\alpha=3\gamma,\quad \beta=2\gamma,\quad \gamma=-\frac{m+2}{3m+2},\quad A=\frac{a}{\alpha b^{\alpha+1}}.$$

Но объем эллипсоида пропорционален $r^3\theta^2$, поэтому добавочный потенциал пропорционален степени γ объема электрона.

Гипотезе Лоренца соответствует $m=-1$, $\gamma=1$.

Таким образом мы приходим к *гипотезе Лоренца, при условии присоединения добавочного потенциала, пропорционального объему электрона.*

Гипотеза Ланжевена соответствует случаю $\gamma=\infty$.

§ 7. Квазистационарное движение.

Остается рассмотреть, учитывает ли эта гипотеза о сокращении электронов невозможность наблюдать абсолютное движение; для этого мы начнем со случая квазистационарного движения электрона, свободного или подверженного только действию других удаленных электронов.

Известно, что квазистационарным движением называется такое движение, при котором изменения скорости настолько медленны, что энергии — электрическая и магнитная — мало отличаются от соответствующих значений для равномерного движения. Известно также, что исходя из этого определения квазистационарного движения, Абрагам пришел к установлению понятий электромагнитных масс — продольной и поперечной.

Уточним эти понятия. Пусть действие за единицу времени равно

$$H=\frac{1}{2}\int\left(\sum f^2-\sum\alpha^2\right)d\tau;$$

где для данного момента мы рассматриваем электрическое и магнитное поля, обусловленные только движением свободного электрона. В предыдущем параграфе, рассматривая движение как равномерное, мы считали, что H зависит от скорости ξ, η, ζ центра тяжести (эти три составляющие имели в предыдущем параграфе значения — ε, 0, 0) и от параметров r и θ, определяющих форму электрона.

Но если движение неравномерно, то H будет зависеть от значений ξ, η, ζ, r, θ не только в данный момент, но и от значений этих величин в другие моменты; последние могут отличаться от данного момента на величину, порядок которой равен времени, необходимому для прохождения света от одной точки электрона к другой. Иными словами, H будет зависеть не только от ξ, η, ζ, r, θ, но и от их производных всех порядков по времени.

Движение будет квазистационарным тогда, когда последовательными частными производными H по производным ξ, η, ζ, r, θ можно пренебречь по сравнению с частными производными H по самим величинам ξ, η, ζ, r, θ.

Уравнения такого движения можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dH}{d\theta}+\frac{dF}{d\theta}=\frac{dH}{d\tau}+\frac{dF}{dr}=0,\\ \frac{d}{dt}\frac{dH}{d\xi}=-\int X d\tau, \quad \frac{d}{dt}\frac{dH}{d\eta}=-\int Y d\tau,\\ \frac{d}{dt}\frac{dH}{d\zeta}=-\int Z d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

В этих уравнениях F имеет то же значение, что и в предыдущем параграфе. X, Y, Z суть составляющие силы, действующей на электрон; эта сила происходит только от электрического и магнитного полей, обусловленных *другими* электронами.

Заметим, что H зависит от ξ, η, ζ только через промежуточную функцию

$$V=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},$$

т. е. через скорость.

Следовательно, обозначая через D количество движения, имеем:

$$\frac{dH}{d\xi}=\frac{dH}{dV}\frac{\xi}{V}=-D\frac{\xi}{V},$$

откуда

$$-\frac{d}{dt}\frac{dH}{d\xi}=\frac{D}{V}\frac{d\xi}{dt}-D\frac{\xi}{V^2}\frac{dV}{dt}+\frac{dD}{dV}\frac{\xi}{V}\frac{dV}{dt}, \tag{2}$$

$$-\frac{d}{dt}\frac{dH}{d\eta}=\frac{D}{V}\frac{d\eta}{dt}-D\frac{\eta}{V^2}\frac{dV}{dt}+\frac{dD}{dV}\frac{\eta}{V}\frac{dV}{dt}, \tag{3}$$

где

$$V\frac{dV}{dt}=\sum \xi\frac{d\xi}{dt}. \tag{4}$$

Полагая, что истинное направление скорости совпадает с осью x, получим:

$$\xi=V, \quad \eta=\zeta=0, \quad \frac{d\xi}{dt}=\frac{dV}{dt};$$

в соответствии с этим уравнения (2) и (2′) примут вид:

$$-\frac{d}{dt}\frac{dH}{d\xi}=\frac{dD}{dV}\frac{d\xi}{dt}, \quad -\frac{d}{dt}\frac{dH}{d\eta}=\frac{D}{V}\frac{d\eta}{dt},$$

а три последние уравнения (1):

$$\frac{dD}{dV}\frac{d\xi}{dt}=\int X d\tau, \quad \frac{D}{V}\frac{d\eta}{dt}=\int Y d\tau, \quad \frac{D}{V}\frac{d\zeta}{dt}=\int Z d\tau.$$

Вот почему Абрагам дал величине $\frac{dD}{dV}$ название *продольной массы*, а $\frac{D}{V}$ — *поперечной массы*; напомним, что $D=\frac{dH}{dV}$.

По гипотезе Лоренца имеем:

$$D = -\frac{dH}{dV} = -\frac{\partial H}{\partial V},$$

где $\frac{\partial H}{\partial V}$ представляет производную по V, после того, как r и θ заменены в функции V их значениями, полученными из первых двух уравнений (1).

После этой подстановки имеем

$$H = +A\sqrt{1-V^2}.$$

Выберем единицы таким образом, чтобы постоянный множитель A был равен 1; я полагаю также

$$\sqrt{1-V^2} = h,$$

откуда

$$H = +h, \quad D = \frac{V}{h}, \quad \frac{dD}{dV} = h^{-3}, \quad \frac{dD}{dV}\frac{1}{V^3} - \frac{D}{V^3} = h^{-3}.$$

Положим далее

$$M = V\frac{dV}{dt} = \sum \xi \frac{d\xi}{dt}, \quad X_1 = \int X d\tau.$$

Следовательно, для уравнения квазистационарного движения получаем

$$h^{-1}\frac{d\xi}{dt} + h^{-3}\xi M = X_1. \tag{5}$$

Посмотрим, как изменятся эти уравнения от преобразования Лоренца.

Полагая $1 + \xi\varepsilon = \mu$, будем иметь прежде всего

$$\mu\xi' = \xi + \varepsilon, \quad \mu\eta' = \frac{\eta}{k}, \quad \mu\zeta' = \frac{\zeta}{k},$$

откуда легко получаем

$$\mu h' = \frac{h}{k}.$$

Мы имеем также

$$dt' = k\mu dt,$$

откуда

$$\frac{d\xi'}{dt'} = \frac{d\xi}{dt}\frac{1}{k^3\mu^3}, \quad \frac{d\eta'}{dt'} = \frac{d\eta}{dt}\frac{1}{k^2\mu^2} - \frac{d\xi}{dt}\frac{\eta\varepsilon}{k^2\mu^3},$$

$$\frac{d\zeta'}{dt'} = \frac{d\zeta}{dt}\frac{1}{k^2\mu^2} - \frac{d\xi}{dt}\frac{\zeta\varepsilon}{k^2\mu^3},$$

и

$$M' = \frac{d\xi}{dt}\frac{\varepsilon h^2}{k^3\mu^4} + \frac{M}{k^3\mu^3};$$

$$h'^{-1}\frac{d\xi'}{dt'} + h'^{-3}\xi' M' = \left[h^{-1}\frac{d\xi}{dt} + h^{-3}(\xi+\varepsilon)M\right]\mu^{-1}, \tag{6}$$

$$h'^{-1}\frac{d\eta'}{dt'} + h'^{-3}\eta' M' = \left(h^{-1}\frac{d\eta}{dt} + h^{-3}\eta M\right)\mu^{-1}h^{-1}. \tag{7}$$

Обратимся к уравнениям (11) § 1; можно считать, что X, Y, Z имеют в них то же значение, что и в уравнениях (5). С другой стороны, мы имеем $l = 1$ и $\frac{\rho'}{\rho} = k\mu$; поэтому эти уравнения примут вид

$$\left.\begin{aligned} X_1' &= \mu^{-1}\left(X_1 + \varepsilon\sum X_1\xi\right), \\ Y_1' &= k^{-1}\mu^{-1}Y_1. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Вычисляя $\sum X_1\xi$ при помощи уравнения (5), находим:

$$\sum X_1\xi = h^{-3}M,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} X_1' &= \mu^{-1}(X_1 + \varepsilon h^{-3}M), \\ Y' &= k^{-1}\mu^{-1}Y_1. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Сравнивая уравнения (5), (6), (7) и (9), находим окончательно:

$$\left.\begin{aligned} h'^{-1}\frac{d\xi'}{dt'}+h'^{-3}\xi' M' = X_1', \\ h'^{-1}\frac{d\eta'}{dt'}+h'^{-3}\eta' M' = Y_1', \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

а это показывает, что уравнения квазистационарного движения не изменяются от преобразования Лоренца; однако это еще не значит, что только гипотеза Лоренца приводит к этому результату.

Для того, чтобы обосновать это положение, мы ограничимся, как это сделал Лоренц, некоторыми частными случаями, рассмотрение которых будет очевидно достаточным для доказательства обратной теоремы.

Прежде всего посмотрим, каким образом мы обобщим гипотезы, на которых основано предыдущее вычисление.

1. Вместо того, чтобы полагать в преобразовании Лоренца $l=1$, мы будем считать l произвольным.

2. Вместо того, чтобы предполагать, что F пропорционально объему и, следовательно, H пропорционально h, мы положим, что F есть произвольная функция от θ и r [после замены θ и r их значениями в функции V, полученными из первых двух ур-ний (1)], так что H будет произвольной функцией от V.

Замечу прежде всего, что если положить $H=h$, то $l=1$ и уравнения (6) и (7) действительно удовлетворяются, если только правые части помножить на $\frac{1}{l}$; так же точно, как и уравнения (9), если их правые части помножить на $\frac{1}{l^2}$, и наконец уравнения (10), если правые части будут умножены на $\frac{1}{l}$.

Таким образом, если мы желаем, чтобы уравнения движения не изменялись от преобразования Лоренца, т. е. чтобы уравнения (10) отличались от уравнений (5) только штрихами у букв, необходимо положить

$$l=1.$$

Предположим теперь, что

$$\eta=\zeta=0,$$

откуда

$$\xi=V, \qquad \frac{d\xi}{dt}=\frac{dV}{dt};$$

уравнения (5) примут вид

$$-\frac{d}{dt}\frac{dH}{d\xi}=\frac{dD}{dV}\frac{d\xi}{dt}=X_1, \qquad -\frac{d}{dt}\frac{dH}{d\eta}=\frac{D}{V}\frac{d\eta}{dt}=Y_1. \qquad (5')$$

Мы можем кроме того положить

$$\frac{dD}{dV}=f(V)=f(\xi), \qquad \frac{D}{V}=\varphi(V)=\varphi(\xi).$$

Если уравнения движения не изменяются от преобразования Лоренца, то должно иметь место

$$f(\xi)\frac{d\xi}{dt}=X_1,$$

$$\varphi(\xi)\frac{d\eta}{dt}=Y_1,$$

$$f(\xi')\frac{d\xi'}{dt'}=X_1'=l^{-2}\mu^{-1}\left(X_1+\varepsilon\sum X_1\xi\right)=$$
$$=l^{-2}\mu^{-1}X_1(1+\varepsilon\xi)=l^{-2}X_1,$$

$$\varphi(\xi')\frac{d\eta'}{dt'}=Y_1'=l^{-2}k^{-1}\mu^{-1}Y_1,$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} f(\xi)\frac{d\xi}{dt} &= l^2 f(\xi')\frac{d\xi'}{dt'}, \\ \varphi(\xi)\frac{d\eta}{dt} &= l^2 k\mu\varphi(\xi')\frac{d\eta'}{dt'}. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Но мы имеем

$$\frac{d\xi'}{dt'} = \frac{d\xi}{dt}\,\frac{1}{k^3\mu^3}, \qquad \frac{d\eta'}{dt'} = \frac{d\eta}{dt}\,\frac{1}{k^2\mu^2},$$

откуда

$$f(\xi') = f\left(\frac{\xi+\varepsilon}{1+\xi\varepsilon}\right) = f(\xi)\,\frac{k^3\mu^3}{l^2},$$

$$\varphi(\xi') = \varphi\left(\frac{\xi+\varepsilon}{1+\xi\varepsilon}\right) = \varphi(\xi)\,\frac{k\mu}{l^2};$$

отсюда, исключая l^2, получаем следующее функциональное уравнение:

$$k^2\mu^2\,\frac{\varphi\left(\frac{\xi+\varepsilon}{1+\xi\varepsilon}\right)}{\varphi(\xi)} = \frac{f\left(\frac{\xi+\varepsilon}{1+\xi\varepsilon}\right)}{f(\xi)},$$

или, полагая

$$\frac{\varphi(\xi)}{f(\xi)} = \Omega(\xi) = \frac{D}{V\dfrac{dD}{dV}},$$

получаем уравнение

$$\Omega\left(\frac{\xi+\varepsilon}{1+\xi\varepsilon}\right) = \Omega(\xi)\,\frac{1+\varepsilon^2}{(1+\xi\varepsilon)^2},$$

которое должно удовлетворяться при всех значениях ξ и ε. Для $\xi = 0$ будет

$$\Omega(\varepsilon) = \Omega(0)\,(1-\varepsilon^2),$$

откуда

$$D = A\left(\frac{V}{\sqrt{1-V^2}}\right)^m,$$

где A постоянная и $\Omega(0)$ положено равным $\frac{1}{m}$.

Теперь находим

$$\varphi(\xi) = \frac{A}{\xi}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)^m,$$

$$\varphi(\xi') = \frac{A\mu}{\xi+\varepsilon}\left(\frac{\xi+\varepsilon}{\sqrt{1-\xi^2}\,\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^m.$$

Но $\varphi(\xi') = \varphi(\xi)\frac{k\mu}{l^2}$; следовательно

$$(\xi+\varepsilon)^{m-1}(1-\varepsilon^2)^{-\frac{m}{2}} = -\xi^{m-1}(1-\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}}\,l^{-2}.$$

Ввиду того, что l должно зависеть только от ε (так как при наличии нескольких электронов l должно иметь одно и то же значение для всех электронов, скорости ξ которых могут быть различными), то это тождество может иметь место только при

$$m = 1, \qquad l = 1.$$

Итак, гипотеза Лоренца будет единственной, которая согласуется с невозможностью доказательства абсолютного движения; допуская эту невозможность, необходимо принять, что электроны при своем движении сокращаются и превращаются в эллипсоиды вращения, у которых две оси остаются постоянными; следовательно, как мы показали в предыдущем параграфе, необходимо допустить существование добавочного потенциала, пропорционального объему электрона.

Таким образом, результаты Лоренца полностью подтверждаются; однако мы можем еще убедиться в действительной причине исследуемого нами обстоятельства; эту причину следует искать в рассуждениях § 4.

Преобразования, не изменяющие уравнения движения, должны составлять группу, а это может иметь место только при $l = 1$.

Так как мы не можем узнать, находится ли электрон в состоянии покоя или в состоянии абсолютного движения, то необходимо, чтобы при своем движении он подвергался деформации, которая должна быть точно такой, какая предписывается ему соответствующим преобразованием группы.

§ 8. Произвольное движение.

Предыдущие результаты применимы только к квазистационарному движению, однако их можно легко распространить на общий случай; для этого достаточно применить сказанное в § 3, т. е. исходить из принципа наименьшего действия.

Прибавим к выражению для действия

$$J = \int dt d\tau \left(\frac{\sum f^2}{2} - \frac{\sum \alpha^2}{2} \right)$$

член, представляющий добавочный потенциал F (§ 6); этот член очевидно принимает вид:

$$J = \int \sum (F)\, dt,$$

где $\sum (F)$ представляет сумму добавочных потенциалов, происходящих от различных электронов, каждый из которых пропорционален объему соответствующего электрона.

Мы пишем (F) в скобках для того, чтобы не смешивать его с вектором F, G, H.

Тогда полное действие равно $J + J_1$. В § 3 мы видели, что J не изменяется от преобразования Лоренца; покажем теперь, что то же относится и к J_1.

Для каждого из электронов имеем

$$(F) = \omega_0 \tau,$$

где ω_0 коэффициент, характеризующий данный электрон, а τ его объем; поэтому мы можем написать:

$$\sum (F) = \int \omega_0 d\tau.$$

Интеграл здесь должен быть распространен по всему пространству и при том так, чтобы коэффициент ω_0 вне электронов был равен нулю, а внутри каждого электрона — коэффициенту, характеризующему этот электрон.

В таком случае имеем

$$J_1 = \int \omega_0 d\tau dt,$$

и после преобразования Лоренца

$$J_1' = \int \omega_0' d\tau' dt'.$$

Но $\omega_0 = \omega_0'$, ибо если точка принадлежит электрону, то соответствующая точка после преобразования Лоренца также принадлежит *тому же самому* электрону. С другой стороны, в § 3 мы нашли:

$$d\tau' dt' = l^4 d\tau dt$$

и, так как мы полагаем здесь $l = 1$,

$$d\tau' dt' = d\tau dt.$$

Таким образом имеем

$$J_1 = J_1'.$$

Следовательно, наша теорема является общей; одновременно она дает нам решение поставленного в конце § 1 вопроса: найти добавочные силы, не изменяющиеся от преобразования Лоренца. Добавочный потенциал (F) удовлетворяет этому условию.

Таким образом, мы можем обобщить результат, полученный в конце § 1, и сказать:

Если инерция электронов имеет исключительно электромагнитное происхождение и если электроны подвержены действию только электромагнитных сил или сил, вызываемых добавочным потенциалом (F), *то никакой опыт не в состоянии показать наличие абсолютного движения.*

Каковы же те силы, которые вызываются потенциалом (F)? Они, очевидно, могут быть уподоблены давлению, господствующему внутри электрона; все происходит так, как если бы каждый электрон был полым пространством, находящимся под постоянным внутренним давлением (независимым от объема); работа такого давления была бы очевидно пропорциональна изменениям объема.

Я должен заметить однако, что это давление отрицательно. Обратимся к уравнению (10) § 6. По гипотезе Лоренца, оно перепишется в виде

$$F = Ar^3\theta^3.$$

Уравнения (11) § 6 дадут нам

$$A = \frac{a}{3b^4}.$$

Наше давление равно A с точностью до постоянного коэффициента, который отрицателен.

Вычислим теперь массу электрона, я имею в виду

„экспериментальную массу“, т. е. массу при малых скоростях.

Согласно § 6 имеем:

$$H = \frac{\varphi\left(\frac{\theta}{k}\right)}{k^2 r}, \quad \theta = k, \quad \varphi = a, \quad \theta r = b,$$

откуда

$$H = \frac{a}{bk} = \frac{a}{b}\sqrt{1 - V^2}.$$

Для очень малого V можно написать

$$H = \frac{a}{b}\left(1 - \frac{V^2}{2}\right).$$

Таким образом масса, как продольная, так и поперечная, равна $\frac{a}{b}$. Но a есть численная постоянная, и это показывает, что: *давление, обусловленное нашим добавочным потенциалом, пропорционально четвертой степени экспериментальной массы электрона.*

Так как ньютоновское притяжение также пропорционально этой экспериментальной массе, то является искушение заключить, что между причиной, вызывающей тяготение, и причиной, порождающей этот добавочный потенциал, существует некоторое соотношение.

§ 9. Гипотезы о тяготении.

Итак, теория Лоренца полностью объясняет невозможность показать опытным путем наличие абсолютного движения в случае, если все силы будут электромагнитного происхождения.

Однако, существуют силы, которым нельзя приписать электромагнитное происхождение, как, например, силы тяготения. В самом деле, может случиться, что две системы тел порождают эквивалентные электромагнитные поля, т. е. оказывают одинаковое действие на наэлектризованные тела и токи, но что однако эти две системы оказывают различное гравитационное действие на ньютоновские массы.

Следовательно, поле тяготения отличается от электромагнитного поля. Поэтому Лоренц вынужден был дополнить свою гипотезу предположением, *что силы любого происхождения и в частности силы тяготения ведут себя при поступательном движении* (или, если угодно, при преобразовании Лоренца), *совершенно так же, как электромагнитные силы.*

Нам необходимо теперь заняться более детальным рассмотрением этой гипотезы. Если мы желаем, чтобы ньютоновская сила вела себя указанным образом при преобразовании Лоренца, то мы уже не можем предполагать, что эта сила зависит только от относительного положения двух притягивающихся тел в рассматриваемый момент. Она должна зависеть кроме того от скоростей обоих тел. Но это не все: естественно предположить, что если сила, действующая в момент t на притягиваемое тело, зависит от положения и скорости этого тела в этот же момент, то она зависит кроме того от положения и скорости *притягивающего* тела, но уже не в момент t, а *в предшествующий момент*, как если бы силы тяготения требовали некоторого времени для своего распространения.

Будем рассматривать, таким образом, положение притягиваемого тела в момент t_0 и пусть x_0, y_0, z_0 будут его координаты в этот момент, а ξ, η, ζ — составляющие его скорости. Рассмотрим, с другой стороны, притягивающее тело в момент t_0+t и пусть в этот момент его координатами будут x_0+x, y_0+y, z_0+z, а составляющими скорости ξ_1, η_1, ζ_1.

Прежде всего мы должны получить соотношение для определения времени t:

$$\varphi(t, x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1) = 0. \qquad (1)$$

Это соотношение определит закон распространения сил тяготения (при этом мы вовсе не предполагаем, что распространение происходит с одинаковой скоростью по всем направлениям).

Пусть теперь X_1, Y_1, Z_1 будут тремя составляющими силы, действующей в момент t на притягиваемое тело. Задача заключается в том, чтобы выразить X_1, Y_1, Z_1 как функции от

$$t, x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1. \qquad (2)$$

Какие условия должны быть при этом выполнены?

1. Соотношение (1) не должно меняться от преобразований группы Лоренца.

2. Составляющие X_1, Y_1, Z_1 должны вести себя при преобразовании Лоренца так же, как электромагнитные силы, обозначаемые теми же буквами, т. е. согласно уравнениям (11) § 1.

3. Когда оба тела находятся в покое, мы должны вернуться к обыкновенному закону притяжения.

Важно отметить, что в этом последнем случае соотношение (1) не имеет места, ибо, когда оба тела находятся в покое, время t уже не играет никакой роли.

Задача, поставленная таким образом, является очевидно неопределенной. Поэтому мы попытаемся удовлетворить насколько возможно другим дополнительным условиям:

4. Так как астрономические наблюдения не обнаруживают повидимому заметных уклонений от закона Ньютона, то мы выберем решение, наименее расходящееся с этим законом для малых скоростей обоих тел.

5. Попытаемся распорядиться так, чтобы время t всегда было отрицательным; в самом деле, если понятно, что гравитационный эффект требует некоторого времени для своего распространения, то очень трудно усмотреть, каким образом этот эффект может зависеть от *недостигнутого еще* положения притягивающего тела.

Существует случай, когда неопределенность задачи исчезает; это происходит тогда, когда два тела находятся в *относительном* покое одно по отношению к другому, т. е. когда

$$\xi = \xi_1, \quad \eta = \eta_1, \quad \zeta = \zeta_1;$$

поэтому рассмотрим сначала этот случай, полагая, что скорости постоянны, т. е. что оба тела участвуют в общем движении переноса, равномерном и прямолинейном.

Положим, что ось x параллельна направлению этого переноса, так что $\eta = \zeta = 0$, и возьмем $\varepsilon = -\xi$.

Применяя при этих условиях преобразование Лоренца, получим, что после преобразования оба тела будут находиться в состоянии покоя, и, следовательно,

$$\xi' = \eta' = \zeta' = 0.$$

Так как составляющие X_1', Y_1', Z_1' должны удовлетворять закону Ньютона, то мы будем иметь с точностью до постоянного множителя

$$\left.\begin{aligned} X_1' = -\frac{x'}{r'^3}, \quad Y_1' = -\frac{y'}{r'^3}, \quad Z_1' = -\frac{z'}{r'^3} \\ r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Но, согласно § 1,

$$x' = k(x + \varepsilon t), \ y' = y, \ z' = z, \ t' = k(t + \varepsilon x),$$

$$\frac{\rho'}{\rho} = k(1 + \xi\varepsilon) = k(1 - \varepsilon^2) = \frac{1}{k}, \ \sum X_1 \xi = -X_1 \varepsilon,$$

$$X_1' = k\frac{\rho}{\rho'}(X_1 + \varepsilon \sum X_1 \xi) = k^2 X_1 (1 - \varepsilon^2) = X_1,$$

$$Y_1' = \frac{\rho}{\rho'} Y_1 = k Y_1,$$

$$Z_1' = k Z_1.$$

Кроме того имеем

$$x + \varepsilon t = x - \xi t, \quad r'^2 = k^2 (x - \xi t)^2 + y^2 + z^2,$$

и

$$X_1 = \frac{-k(x - \xi t)}{r'^3}, \quad Y_1 = \frac{-y}{kr'^3}, \quad Z_1 = \frac{-z}{kr'^3}, \qquad (4)$$

что можно написать в виде:

$$X_1 = \frac{dV}{dx}, \quad Y_1 = \frac{dV}{dy}, \quad Z_1 = \frac{dV}{dz}, \quad V = \frac{1}{kr'}. \qquad (4')$$

С первого взгляда кажется, что здесь имеется неопределенность, так как мы не сделали никакого предположения о значении t, т. е. о скорости распространения; к тому же x есть функция от t; однако, легко видеть, что в наши формулы входят только выражения $x - \xi t$, y, z, которые не зависят от t.

Очевидно, что если два тела участвуют в общем переносе, то сила, действующая на притягиваемое тело, нормальна к эллипсоиду, имеющему в качестве центра притягивающее тело.

Для того чтобы итти дальше, необходимо найти *инварианты группы Лоренца*.

Мы знаем, что подстановки этой группы (при $l = 1$) являются линейными подстановками, не изменяющими квадратичной формы

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2.$$

Положим, с другой стороны,

$$\xi = \frac{\delta x}{\delta t}, \quad \eta = \frac{\delta y}{\delta t}, \quad \zeta = \frac{\delta z}{\delta t}$$

$$\xi_1 = \frac{\delta_1 x}{\delta_1 t}, \quad \eta_1 = \frac{\delta_1 y}{\delta_1 t}, \quad \zeta_1 = \frac{\delta_1 z}{\delta_1 t}.$$

Мы видим, что в результате преобразования Лоренца величины δx, δy, δz, δt и $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$, $\delta_1 t$ подвергаются таким же линейным подстановкам как x, y, z, t.

Будем рассматривать

$$\begin{array}{cccc} x, & y, & z, & t\sqrt{-1}, \\ \delta x, & \delta y, & \delta z, & \delta t\sqrt{-1}, \\ \delta_1 x, & \delta_1 y, & \delta_1 z, & \delta_1 t\sqrt{-1}, \end{array}$$

как координаты трех точек P, P', P'' в пространстве четырех измерений.

Легко видеть, что преобразование Лоренца представляет не что иное, как поворот в этом пространстве вокруг начала координат, рассматриваемого неподвижным. Таким образом, отличными друг от друга инвариантами будут только 6 расстояний между тремя точками P, P', P'' и началом координат, или, если угодно, два выражения

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2, \quad x\,\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z - t\,\delta t,$$

или четыре выражения такой же формы, получающиеся в результате любой перестановки трех точек P, P', P''.

Но инварианты, которые мы пытаемся найти, являются функциями 10 переменных (2); поэтому мы должны отыскать между комбинациями из наших шести инвариантов те из них, которые зависят только лишь от этих 10 переменных, т. е. те, которые являются однородными

функциями степени 0 как по отношению к δx, δy, δz, δt, так и по отношению к $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$, $\delta_1 t$.

Таким образом, нам остаются следующие четыре различных инварианта:

$$\sum x^2 - t^2, \quad \frac{t - \sum x\xi}{\sqrt{1 - \sum \xi^2}}, \quad \frac{t - \sum x\xi_1}{\sqrt{1 - \sum \xi_1^2}},$$

$$\frac{1 - \sum \xi\xi_1}{\sqrt{(1 - \sum \xi^2)(1 - \sum \xi_1^2)}} \tag{5}$$

Займемся теперь преобразованиями, которым подвергаются составляющие силы; обратимся к уравнениям (11) § 1, которые относятся не к силе X_1, Y_1, Z_1, рассматриваемой нами сейчас, а к силе, отнесенной к единице объема.

Полагая кроме того

$$T = \sum X\xi,$$

мы видим, что эти уравнения (11) можно (при $l = 1$) переписать в виде:

$$\left.\begin{aligned} X' &= k(X + \varepsilon T), & T' &= k(T + \varepsilon X), \\ Y' &= Y, & Z' &= Z. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Таким образом, X, Y, Z, T преобразуются так же, как и x, y, z, t.

Следовательно, инвариантами группы будут следующие выражения:

$$\sum X^2 - T^2, \quad \sum Xx - Tt, \quad \sum X\,\delta x - T\,\delta t,$$
$$\sum X\,\delta_1 x - T\,\delta_1 t.$$

Однако, нам нужны не X, Y, Z, а X_1, Y_1, Z_1, причем

$$T_1 = \sum X_1 \xi.$$

Мы видим, что

$$\frac{X_1}{X} = \frac{Y_1}{Y} = \frac{Z_1}{Z} = \frac{T_1}{T} = \frac{1}{\rho}.$$

Таким образом, преобразование Лоренца действует на X_1, Y_1, Z_1, T_1 точно так же, как и на X, Y, Z, T, с той разницей, что эти выражения будут умножены кроме того на

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{1}{k(1+\xi\varepsilon)} = \frac{\delta t}{\delta t'};$$

аналогично, на величины ξ, η, ζ, 1 оно будет действовать таким же образом, как и на δx, δy, δz, δt, с той однако разницей, что эти последние выражения будут умножены кроме того на *один и тот же* множитель

$$\frac{\delta t}{\delta t'} = \frac{1}{k(1+\xi\varepsilon)}.$$

Будем рассматривать затем X, Y, Z, $T\sqrt{-1}$ как координаты некоторой четвертой точки Q; тогда инвариантами будут служить функции взаимных расстояний пяти точек O, P, P', P'', Q; среди этих функций мы должны оставить только те, которые являются однородными степени 0 с одной стороны по отношению к X, Y, Z, T, δx, δy, δz, δt (переменные, которые можно заменить потом на X_1, Y_1, Z_1, T_1, ξ, η, ζ, 1) и, с другой стороны, по отношению к δx_1, δy_1, δz_1, 1 (переменные, которые также можно заменить затем на ξ_1, η_1, ζ_1, 1).

Таким образом, кроме прежних четырех инвариантов (5) мы находим следующие четыре новых различных инварианта:

$$\frac{\sum X_1^2 - T_1^2}{1-\sum\xi^2}, \quad \frac{\sum X_1 x - T_1 t}{\sqrt{1-\sum\xi^2}},$$

$$\frac{\sum X_1\xi_1 - T_1}{\sqrt{1-\sum\xi^2}\sqrt{1-\sum\xi_1^2}}, \quad \frac{\sum X_1\xi - T_1}{1-\sum\xi^2}. \qquad (7)$$

Согласно определению 7, последний инвариант всегда равен нулю.

Установив все это, посмотрим, какие условия должны быть выполнены.

1. Первая часть соотношения (1), определяющая скорость распространения, должна быть функцией от четырех инвариантов (5).

Здесь очевидно возможно множество гипотез, из которых мы рассмотрим только две.

А) Можно положить

$$\sum x^2 - t^2 = r^2 - t^2 = 0,$$

откуда $t = \pm r$, а так как t должно быть отрицательным, то

$$t = -r.$$

Это говорит о том, что скорость распространения равна скорости света.

На первый взгляд может показаться, что эта гипотеза должна быть сразу же отброшена без дальнейшего обсуждения. В самом деле, Лаплас показал, что распространение сил тяготения происходит или мгновенно или со скоростью, во много раз превосходящей скорость света. Однако, Лаплас рассматривал гипотезу конечной скорости распространения, ceteris non mutatis (при прочих неизмененных условиях); здесь же, напротив, эта гипотеза осложнена многими другими, и может случиться, что между ними будет иметь место более или менее полная компенсация, вроде той, что мы неоднократно видели на многочисленных примерах в результате преобразования Лоренца.

В) Можно положить

$$\frac{t-\sum x\xi_1}{\sqrt{1-\sum\xi_1^2}} = 0, \quad t = \sum x\xi_1.$$

При этом скорость распространения гораздо больше скорости света; однако, в некоторых случаях t может быть положительным, что, как уже было сказано, представляется мало приемлемым. *Поэтому мы будем придерживаться гипотезы* (А).

2. Четыре инварианта (7) должны быть функциями инвариантов (5).

3. Если два тела находятся в абсолютном покое, то X_1, Y_1, Z_1 должны иметь значения, соответствующие закону Ньютона; если же они находятся в относительном покое, эти значения получаются из уравнений (4).

По гипотезе абсолютного покоя, первые два инварианта (7) должны приводиться к

$$\sum X_1^2, \quad \sum X_1 x,$$

или по закону Ньютона к

$$\frac{1}{r^4}, \quad -\frac{1}{r};$$

С другой стороны, по гипотезе (А) второй и третий инварианты (5) приводятся к

$$\frac{-r-\sum x\xi}{\sqrt{1-\sum \xi^2}}, \quad \frac{-r-\sum}{\sqrt{1-\sum \xi_1^2}},$$

т. е. при абсолютном покое к

$$-r, \quad -r.$$

Мы можем допустить *в качестве примера*, что два первых инварианта (7) сводятся к

$$\frac{\left(1-\sum \xi_1^2\right)^2}{\left(r+\sum x\xi_1\right)^4}, \quad -\frac{\sqrt{1-\sum \xi_1^2}}{r+\sum x\xi_1};$$

хотя возможны и другие комбинации.

Необходимо сделать выбор среди этих комбинаций и кроме того нам нужно еще третье уравнение для

определения X_1, Y_1, Z_1. Для подобного выбора мы должны стремиться, насколько возможно, не отдаляться от закона Ньютона. Посмотрим теперь, что получается, если пренебречь квадратами скоростей ξ, η и т. д. (полагая попрежнему $t = -r$).

Четыре инварианта (5) приводятся тогда к виду:

$$0, \quad -r-\sum x\xi, \quad -r-\sum x\xi_1, \quad 1,$$

а четыре инварианта (7) к виду:

$$\sum X^2, \quad \sum X_1(x+\xi r), \quad \sum X_1(\xi_1-\xi), \quad 0.$$

Однако, для того, чтобы иметь возможность сравнить это с законом Ньютона, необходимо другое преобразование; здесь x_0+x, y_0+y, z_0+z представляют координаты притягивающего тела в момент t_0+t и $r=\sqrt{\sum x^2}$; в законе же Ньютона нужно рассматривать координаты x_0+x_1, y_0+y_1, z_0+z_1 притягивающего тела в момент t_0 и расстояние

$$r_1 = \sqrt{\sum x_1^2}.$$

Мы можем пренебречь квадратом времени t, необходимого для распространения, и, следовательно, поступать так, как если бы движение было равномерным.

В таком случае получим

$$x = x_1+\xi_1 t, \quad y = y_1+\eta_1 t, \quad z = z_1+\zeta_1 t,$$
$$r(r-r_1) = \sum x\xi_1 t,$$

или, так как

$$t = -r,$$
$$x = x_1-\xi_1 r, \quad y = y_1-\eta_1 r, \quad z = z_1-\zeta_1 r,$$
$$r = r_1-\sum x\xi_1,$$

так что наши четыре инварианта (5) станут равными

$$0, \quad -r_1+\sum x(\xi_1-\xi), \quad -r, \quad 1,$$

а четыре инварианта (7):

$$\sum X_1^2,\quad \sum X_1[x_1+(\xi-\xi_1)r_1],\quad \sum X_1(\xi_1-\xi,\quad 0.$$

Во втором из этих выражений мы написали r_1 вместо r, потому что r умножено здесь на $\xi-\xi_1$, а квадратом ξ мы пренебрегаем.

С другой стороны, по закону Ньютона мы получили бы для этих четырех инвариантов (7):

$$\frac{1}{r_1^4},\quad -\frac{1}{r_1}-\frac{\sum x_1(\xi-\xi_1)}{r_1^2},\quad \frac{\sum x_1(\xi-\xi_1)}{r_1^3},\quad 0.$$

Следовательно, если мы обозначим второй и третий инварианты (5) через A и B, а первые три инварианта (7) — через M, N, P, то мы удовлетворим закону Ньютона с точностью до членов второго порядка малости, положив

$$M=\frac{1}{B^4},\quad N=\frac{+A}{B^2},\quad P=\frac{A-B}{B^3}. \tag{8}$$

Это решение не единственно.

В самом деле, пусть C есть четвертый инвариант (5) и пусть $C-1$ имеет порядок квадрата ξ, так же как и $(A-B)^2$.

Таким образом, мы можем прибавить к правым частям каждого из уравнений (8) член, составленный из $C-1$, умноженного на произвольную функцию от A, B, C, и член $(A-B)^2$, также умноженный на функцию от A, B, C.

Уравнение (8) кажется на первый взгляд наиболее простым, но тем не менее оно не может быть принято. В самом деле, так как M, N, P являются функциями от X_1, Y_1, Z_1 и от $T_1=\sum X\xi$, то из этих трех уравнений (8) можно получить значения X_1, Y_1, Z_1; однако, в некоторых случаях эти значения становятся мнимыми.

Для того чтобы избавиться от этого неудобства, поступим следующим образом.

Положим

$$k_0=\frac{1}{\sqrt{1-\sum\xi^2}},\quad k_1=\frac{1}{\sqrt{1-\sum\xi_1^2}},$$

что оправдывается аналогией с обозначением

$$k=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}},$$

фигурирующим в подстановке Лоренца.

В этом случае, а также в силу условия $-r=t$, инварианты (5) приводятся к

$$0,\quad A=-k_0(r+\sum x\xi),\quad B=-k_1(r+\sum x\xi_1),$$
$$C=k_0k_1(1-\sum\xi\xi_1).$$

С другой стороны мы видим, что следующие системы величин

$$\begin{array}{cccc} x, & y, & z, & -r=t \\ k_0X_1, & k_0Y_1, & k_0Z_1, & k_0T_1 \\ k_0\xi, & k_0\eta, & k_0\zeta, & k_0 \\ k_1\xi_1, & k_1\eta_1, & k_1\zeta_1, & k_1 \end{array}$$

подвергаются *таким же самым* линейным подстановкам, как и при преобразовании группы Лоренца.

Таким образом, мы приходим к следующим уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} X_1&=x\frac{\alpha}{k_0}+\xi\beta+\xi_1\frac{k_1}{k_0}\gamma,\\ Y_1&=y\frac{\alpha}{k_0}+\eta\beta+\eta_1\frac{k_1}{k_0}\gamma,\\ Z_1&=z\frac{\alpha}{k_0}+\zeta\beta+\zeta_1\frac{k_1}{k_0}\gamma,\\ T_1&=-r\frac{\alpha}{k_0}+\beta+\frac{k_1}{k_0}\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Ясно, что если α, β, γ инварианты, то X_1, Y_1, Z_1, T_1 удовлетворяют основному условию, т. е. подвергаются вследствие преобразования Лоренца, соответствующей линейной подстановке.

Но для того чтобы уравнения (9) были совместны, необходимо, чтобы

$$\sum X_1 \xi - T_1 = 0$$

или, заменяя X_1, Y_1, Z_1, T_1 их значениями из (9) и умножая на k_0^2,

$$-A\alpha - \beta - C\gamma = 0. \tag{10}$$

Мы хотим, чтобы при отбрасывании квадратов скоростей ξ, и т. д., а также произведений ускорений на расстояния, по сравнению с квадратом скоростей света, как мы это делали выше, значения X_1, Y_1, Z_1 оставались соответствующими закону Ньютона.

Мы можем положить

$$\beta = 0, \quad \gamma = -\frac{A\alpha}{C}.$$

С точностью до приближения принятого нами порядка будем иметь:

$$k_0 = k_1 = 1, \quad C = 1, \quad A = -r_1 + \sum x(\xi_1 - \xi),$$
$$B = -r_1,$$
$$x = x_1 + \xi t = x_1 - \xi_1 r.$$

Первое уравнение (9) примет тогда вид:

$$X_1 = \alpha(x - A\xi_1).$$

Но, если мы пренебрегаем квадратом ξ, то $A\xi_1$ можно заменить на $-r_1\xi_1$ или на $r\xi_1$, что дает:

$$X_1 = \alpha(x + \xi_1 r) - \alpha x_1.$$

По закону же Ньютона мы получили бы:

$$X = -\frac{x_1}{r_1^3}.$$

Таким образом, для инварианта α мы должны выбрать тот, который приводится к $-\frac{1}{r^3}$ при точности порядка допущенного приближения, т. е. $\frac{1}{B^3}$.

Уравнения (9) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= \frac{x}{k_0 B^3} - \xi_1 \frac{k_1}{k_0} \cdot \frac{A}{B^3 C},\\
Y_1 &= \frac{y}{k_0 B^3} - \eta_1 \frac{k_1}{k_0} \cdot \frac{A}{B^3 C},\\
Z_1 &= \frac{z}{k_0 B^3} - \zeta_1 \frac{k_1}{k_0} \cdot \frac{A}{B^3 C},\\
T_1 &= -\frac{r}{k_0 B^3} - \frac{k_1}{k_0} \cdot \frac{A}{B^3 C}.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Отсюда мы видим прежде всего, что исправленное притяжение состоит из двух составляющих: одна параллельна вектору, соединяющему местоположения обоих тел, а другая параллельна скорости притягивающего тела.

Напомним, что когда мы говорим о положении или скорости притягивающего тела, то при этом речь идет о положении или скорости в момент, когда гравитационная волна покидает его; наоборот, для притягиваемого тела речь идет при этом о его положении или скорости в момент, когда гравитационная волна достигает его; предполагается, что эта волна распространяется со скоростью света.

Я полагаю, что было бы преждевременно более подробно обсуждать эти формулы. Поэтому ограничимся несколькими замечаниями.

1. Решения (11) не единственны; в самом деле величину $\frac{1}{B^3}$, входящую всюду как множитель, можно заменить на

$$\frac{1}{B^3}+(C-1)f_1(A,B,C)+(A-B)^2 f_2(A,B,C),$$

где f_1 и f_2 произвольные функции от A, B, C, или же не брать больше β равным нулю, а прибавить к α, β, γ какие-нибудь добавочные члены, лишь бы только они удовлетворяли условию (10) и были второго порядка относительно ξ в части, относящейся к α и первого порядка относительно β и γ.

2. Первое уравнение (11) можно переписать в виде

$$X_1=-\frac{k_1}{B^3 C}\left[x\left(1-\sum \xi\xi_1\right)+\xi_1\left(r+\sum x\xi\right)\right], \quad (11')$$

причем выражение в квадратных скобках также можно переписать как

$$(x+r\xi_1)+\eta(\xi_1 y-x\eta_1)+\zeta(\xi_1 z-x\zeta_1). \quad (12)$$

Таким образом, полную силу можно разложить на три составляющих, соответствующих трем скобкам в выражении (12); первая составляющая имеет некоторую аналогию с механической силой, обусловленной электрическим полем, а две другие — с механической силой, обусловленной магнитным полем. Для того, чтобы дополнить аналогию, мы можем, согласно замечанию 1, заменить в уравнении (11) $\frac{1}{B^3}$ на $\frac{C}{B^3}$ так, чтобы X_1, Y_1, Z_1 зависели только линейно от скорости ξ, η, ζ притягиваемого тела, так как C при этом исчезает из знаменателя (11′). Положим далее:

$$\left.\begin{gathered} k_1(x+r\xi_1)=\lambda_1, \quad k_1(y+r\eta_1)=\mu_1, \\ k_1(z+r\zeta_1)=\nu, \\ k_1(\eta_1 z-\zeta_1 y)=\lambda', \quad k_1(\zeta_1 x-\xi_1 z)=\mu', \\ k_1(\xi_1 y-x\eta_1)=\nu' \end{gathered}\right\} \quad (13)$$

а так как C исчезло из знаменателя (11′), то

$$\left.\begin{aligned} X_1&=\frac{\lambda}{B^3}+\frac{\eta\nu'-\zeta\mu'}{B^3}, \\ Y_1&=\frac{\mu}{B^3}+\frac{\zeta\lambda'-\xi\nu'}{B^3}, \\ Z_1&=\frac{\nu}{B^3}+\frac{\xi\mu'-\eta\lambda'}{B^3}; \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

к тому же будем иметь

$$B^2=\sum\lambda^2-\sum\lambda'^2. \quad (15)$$

При этом λ, μ, ν или $\frac{\lambda}{B^3}$, $\frac{\mu}{B^3}$, $\frac{\nu}{B^3}$ играют роль электрического поля, в то время как λ', μ', ν', или вернее $\frac{\lambda'}{B^3}$, $\frac{\mu'}{B^3}$, $\frac{\nu'}{B^3}$ — роль магнитного поля.

3. Постулат относительности обязывает нас принять решение (11) или решение (14), или какое-нибудь из решений, получаемых при помощи замечания 1. Однако, прежде всего следует задать себе вопрос, совместимы ли эти решения с астрономическими наблюдениями. Расхождение с законом Ньютона будет порядка ξ^2, т. е. в 10 000 раз меньше, чем если бы оно было порядка ξ, т. е. если бы силы тяготения распространялись со скоростью света, ceteris non mutatis; поэтому можно надеяться, что это расхождение не слишком велико. Однако, только обстоятельное исследование может полностью осветить этот вопрос.

Париж, июль 1905.
(Поступило в печать 23 июля 1905 г.).

А. ЭЙНШТЕЙН

А. ЭЙНШТЕЙН.

К ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛ [1].

Известно, что электродинамика Максвелла в том виде, как ее в настоящее время обыкновенно понимают, в применении к движущимся телам приводит к асимметрии, которая, повидимому, не свойственна самим явлениям. Вспомним, например, электродинамическое взаимодействие между магнитом и проводником. Наблюдаемое явление зависит здесь только от относительного движения проводника и магнита, в то время как согласно обычному представлению оба случая, в которых либо одно, либо другое из этих тел является движущимся, должны быть строго разграничены. В самом деле, если движется магнит, а проводник покоится, то вокруг магнита возникает электрическое поле, обладающее некоторым количеством энергии, которое в тех местах, где находятся части проводника, порождает ток. Если же магнит находится в покое, а движется проводник, то вокруг магнита не возникает никакого электрического поля; зато в проводнике возникает электродвижущая сила, которой самой по себе не соответствует никакая энергия, но которая, однако, при предполагаемом равенстве

[1]) „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“, Ann. d. Phys. 17, 891, 1905.

относительного движения в обоих интересующих нас случаях, вызывает электрические токи той же силы и того же направления, как в первом случае электрическое поле.

Примеры подобного рода, как и неудавшиеся попытки обнаружить движение земли относительно „светоносной среды", ведут к предположению, что не только в механике, но и в электродинамике никакие свойства явлений не соответствуют понятию абсолютного покоя, и даже более того, — к предположению, что для всех координатных систем, для которых справедливы уравнения механики, имеют место те же самые электродинамические и оптические законы, как это уж доказано для величин первого порядка. Мы намерены это предположение (содержание которого в дальнейшем будет называться „принципом относительности") превратить в предпосылку, и сделать кроме того добавочное допущение, находящееся с первым лишь в кажущемся противоречии, именно что свет в пустоте всегда распространяется с определенной скоростью V, не зависящей от состояния движения излучающего тела. Эти две предпосылки достаточны для того, чтобы, положив в основу теорию Максвелла для покоящихся тел, построить простую, свободную от противоречий электродинамику движущихся тел. Введение „светоносного эфира" окажется при этом излишним, поскольку в предлагаемой теории не вводится ни „абсолютно покоящееся пространство", наделенное особыми свойствами, а также ни одной точке пустого пространства, в которой протекают электромагнитные процессы, не приписывается какой-нибудь вектор скорости.

Развиваемая теория опирается, как всякая другая электродинамика, на кинематику твердых тел, так как суждения всякой теории касаются соотношений между

твердыми телами (координатными системами) и электромагнитными процессами. Недостаточное понимание этого обстоятельства является корнем тех трудностей, преодолевать которые приходится теперь электродинамике движущихся тел.

I. Кинематическая часть.

§ 1. Определение одновременности.

Пусть имеется координатная система, в которой действительны механические уравнения Ньютона [1]). Мы назовем эту координатную систему, для отличия от рассматриваемых позже координатных систем и для уточнения представления, „покоящейся системой".

Если какая-либо материальная точка находится в покое относительно этой координатной системы, то ее положение относительно последней может быть определено методами эвклидовой геометрии с помощью твердых масштабов и может быть выражено в декартовых координатах.

Желая описать *движение* какой-нибудь материальной точки, мы даем значения ее координат как функций времени. При этом следует иметь в виду, что подобное математическое описание имеет физический смысл только тогда, когда предварительно выяснено, что̀ подразумевается здесь под „временем". Мы должны обратить внимание на то, что все наши суждения, в которых время играет какую-либо роль, всегда являются суждениями об *одновременных событиях*. Если я, например, говорю: „Этот поезд прибывает сюда в 7 часов", то это означает примерно

---

[1]) Имеется в виду: „действительны в первом приближении".

следующее: „Указание маленькой стрелки моих часов на 7 часов и прибытие поезда суть одновременные события“ [1]).

Может показаться, что все трудности, касающиеся определения „времени“, могут быть преодолены тем, что я вместо слова „время“ напишу „положение маленькой стрелки моих часов“. Такое определение, действительно, достаточно в том случае, когда речь идет о том, чтобы определить время исключительно для того места, в котором часы как раз находятся; однако это определение уже недостаточно, как только речь будет итти о том, чтобы связать друг с другом во времени ряды событий, протекающих в различных местах, или, что сводится к тому же, установить время для тех событий, которые происходят в местах, удаленных от часов.

Желая определить время событий, мы могли бы, конечно, удовлетвориться тем, чтобы заставить некоторого наблюдателя, находящегося с часами в начале координат, сопоставлять соответствующее положение стрелки часов с каждым световым сигналом, идущим через пустоту и дающим знать о событии, подлежащем оценке. Такое сопоставление связано однако с тем неудобством, известным нам из опыта, что оно не будет независимым от местонахождения наблюдателя, снабженного часами. Мы придем к гораздо более практическому определению путем следующих рассуждений.

Если в точке A пространства находятся часы, то наблюдатель, находящийся в A, может устанавливать время событий в непосредственной близости от A

[1]) Здесь не будет обсуждаться неточность, содержащаяся в понятии одновременности двух событий, совершающихся (приблизительно) в одном и том же месте, и которая должна быть преодолена также с помощью некоторой абстракции.

путем наблюдения одновременных с этими событиями положений стрелок часов. Если в другой точке пространства также находятся часы — мы добавим, „точно такие же часы как в A“, — то в непосредственной близости от B тоже возможна временная оценка событий находящимся в B наблюдателем. Но невозможно без дальнейших предположений сравнить во времени какое-нибудь событие в A с событием в B; мы определили пока только „A-время“ и „B-время“, но не общее для A и B „время“. Последнее можно установить, вводя *определение*, что „время“, требуемое свету, чтобы прийти из A в B, равно „времени“ которое свету необходимо, чтобы из B попасть в A. Пусть в момент t_A по „A-времени“ луч света выходит из A в B, отражается в момент t_B по „B-времени“ от B к A и возвращается назад в A в t_A' по „A-времени“. Часы в A и B будут итти, согласно определению, синхронно, если

$$t_B - t_A = t_A' - t_B.$$

Мы сделаем допущение, что это определение синхронности возможно провести без противоречий и притом для сколь угодно многих точек, и что, ввиду этого, справедливы соотношения:

1) если часы в B идут синхронно с часами в A, то часы в A идут синхронно с часами в B;

2) если часы в A идут синхронно как с часами в B, так и с часами в C, то часы в B и C также идут синхронно относительно друг друга.

Таким образом, пользуясь некоторыми (мысленными) физическими экспериментами, мы установили, что нужно понимать под синхронно идущими, находящимися в различных местах, покоящимися часами, и благодаря этому, очевидно, достигли определения понятий: „одновременный“ и „время“. „Время“ события — это одновременное с событием показание покоящихся часов, которые находятся в месте события и которые идут синхронно с некоторыми определенными покоящимися часами, причем, с одними и теми же часами при всех определениях времени.

Согласно опыту мы полагаем также, что величина

$$\frac{2\overline{AB}}{t_A' - t_A} = V$$

есть универсальная константа (скорость света в пустоте).

Существенным является то, что мы определили время по покоящимся часам в покоящейся системе; будем называть это время, как принадлежащее к покоящейся системе, „временем покоящейся системы".

§ 2. Об относительности длин и времен.

Дальнейшие соображения опираются на принцип относительности и на принцип постоянства скорости света. Мы определяем оба принципа следующим образом:

1. Законы, по которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к которой из двух координатных систем, находящихся относительно друг друга в равномерном поступательном движении, эти изменения состояния относятся.

2. Каждый луч света движется в „покоящейся" системе координат с определенной скоростью V, независимо от того, испускается ли этот луч света покоящимся или движущимся телом.

При этом

$$\text{скорость} = \frac{\text{путь луча света}}{\text{промежуток времени}},$$

причем „продолжительность времени" следует понимать в смысле определения в § 1.

Пусть нам дан покоящийся твердый стержень и пусть длина его, измеренная также покоящимся масштабом, будет l. Мы вообразим теперь, что стержню, ось которого направлена по оси x покоящейся координатной системы, сообщается равномерное и параллельное оси x поступательное движение (со скоростью v) в сторону возрастающих x. Мы зададим себе теперь вопрос о длине *движущегося* стержня, которую мы полагаем определенной с помощью следующих двух операций:

а) Наблюдатель движется вместе с указанным выше масштабом и с измеряемым стержнем и измеряет длину стержня непосредственно путем прикладывания масштаба так же, как если бы измеряемый стержень, наблюдатель и масштаб находились в покое.

б) Наблюдатель устанавливает, в каких точках покоящейся системы находятся начало и конец измеряемого стержня в определенный момент времени t, посредством поставленных в покоящейся системе синхронных, в смысле § 1, покоящихся часов. Расстояние между этими двумя точками, измеренное уже определенным выше, но в этом случае покоящимся масштабом, есть также длина, которую можно обозначить как „длину стержня".

Согласно принципу относительности, длина, определяемая операцией а), которую мы будем называть „длиной стержня в движущейся системе", должна равняться длине l покоящегося стержня.

Длину, устанавливаемую операцией б), которую мы будем называть „длиной (движущегося) стержня в покоящейся системе", мы определим, основываясь на наших двух принципах, и найдем, что она отлична от l.

Обычно применяемая кинематика принимает без оговорок, что длины, определенные посредством двух упомянутых операций, равны друг другу или, иными словами, что движущееся твердое тело в момент времени t в геометрическом отношении вполне может быть заменено *тем же* телом, когда оно *покоится* в определенном положении.

Мы представим себе далее, что к обоим концам стержня (A и B) прикреплены часы, которые синхронны с часами покоящейся системы, т. е. показания их соответствуют „времени покоящейся системы“ в тех местах, в которых эти часы как раз находятся; следовательно, эти часы „синхронны в покоящейся системе“.

Представим себе затем, что при каждых часах находится движущийся с ними наблюдатель и что эти наблюдатели применяют к обоим часам установленный в § 1 критерий синхронности хода двух часов. Пусть в момент времени [1] t_A из A выходит луч света, отражается в B в момент времени t_B и возвращается назад в A в момент времени t_A'. Принимая во внимание принцип постоянства скорости света, находим:

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v} \quad \text{и} \quad t_A' - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v},$$

где r_{AB} означает длину движущегося стержня, измеренную в покоящейся системе. Итак, наблюдатели, движущиеся с движущимся стержнем, найдут, что часы A и B не идут синхронно, в то время как наблюдатели, находящиеся в покоящейся системе, объявили бы часы синхронными.

Итак, мы видим, что не следует придавать *абсолютного* значения понятию одновременности. Два события, одновременные при наблюдении из одной

[1]) Здесь „время“ означает „время покоящейся системы“ и вместе с тем „положение стрелки движущихся часов, которые находятся в том месте, о котором идет речь“

координатной системы, не воспринимаются более как одновременные при рассмотрении из системы, движущейся относительно данной системы.

§ 3. Теория преобразования координат и времени от покоящейся системы к системе, находящуюся в равномерном поступательном движении относительно первой.

Пусть в „покоящемся“ пространстве даны две координатные системы, каждая с тремя взаимно перпендикулярными твердыми осями, выходящими из одной точки. Пусть оси X обеих систем совпадают, а оси Y и Z будут соответственно параллельны. Пусть каждая система снабжена масштабом и некоторым числом часов и пусть оба масштаба и все часы обеих систем в точности одинаковы друг с другом.

Пусть теперь начальной точке одной из этих систем (k) сообщается (постоянная) скорость v в направлении возрастающих x другой покоящейся системы (K), скорость, которая передается также координатным осям, масштабу и часам Тогда каждому моменту времени t покоящейся системы (K) соответствует определенное положение осей движущейся системы, и мы по соображениям симметрии в праве допустить, что движение системы k может быть таким, что оси движущейся системы в момент времени t (через „t“ всегда будет обозначаться время покоящейся системы) будут параллельны осям покоящейся системы.

Представим себе теперь, что пространство измерено, как из покоящейся системы K посредством покоящегося в ней масштаба, так и из движущейся системы k посредством движущегося с ней масштаба и что таким образом получены координаты x, y, z, и соответственно ξ, η, ζ. Пусть, далее, посредством покоящихся часов, находящихся в покоящейся системе, и световыми сигналами способом, указанным в § 1, определяется время t покоящейся системы для всех тех точек последней, в которых находятся часы. Пусть затем таким же образом определяется время τ движущейся системы для всех точек этой системы, в которых находятся покоящиеся относительно последней часы, указанным в § 1 методом световых сигналов между точками, в которых эти последние часы находятся.

Каждой системе значений x, y, z, t, которые вполне определяют место и время события в покоящейся системе, соответствует система значений ξ, η, ζ, τ, устанавливающая это событие в системе k, и необходимо теперь решить задачу отыскания системы уравнений, связывающих эти величины.

Прежде всего ясно, что эти уравнения должны быть *линейными* в силу свойства однородности, которое мы приписываем пространству и времени.

Если мы положим $x' = x - vt$, то ясно, что точке, покоящейся в системе k, будет принадлежать определенная, независимая от времени система значений x', y, z.

Сначала мы определим τ как функцию от x', y, z, t. Для этой цели мы должны выразить с помощью некоторых уравнений, что τ по своему смыслу есть не что иное, как совокупность показаний времени часов, которые покоятся в системе k и которые были установлены синхронно по правилу, данному в § 1.

Пусть из начала координат системы k посылается в момент времени τ_0 луч света вдоль оси X в точку x' и отражается оттуда в момент времени τ_1 назад в начало

координат, куда он приходит в момент времени τ_2; тогда должно иметь место

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1$$

или, выписывая аргументы функции τ и применив принцип постоянства скорости света в покоящейся системе, имеем:

$$\frac{1}{2}\left[\tau_0(0,\ 0,\ 0,\ t) + \tau_2\left(0,\ 0,\ 0,\left\{t + \frac{x'}{V-v} + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{x'}{V+v}\right\}\right)\right] = \tau_1\left(x',\ 0,\ 0,\ t + \frac{x'}{V-v}\right).$$

Если взять x' бесконечно малым, то отсюда следует:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{V-v} + \frac{1}{V+v}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{1}{V-v}\frac{\partial\tau}{\partial t},$$

или

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{v}{V^2 - v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t} = 0.$$

Необходимо заметить, что мы могли бы вместо начала координат выбрать всякую другую точку в качестве отправной точки луча света, и поэтому только что полученное уравнение справедливо для всех значений x', y, z.

Если принять во внимание, что свет вдоль осей Y и Z при наблюдении из покоящейся системы всегда распространяется со скоростью $\sqrt{V^2 - v^2}$, то аналогичное рассуждение, примененное к этим осям, дает:

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial z} = 0.$$

Так как τ есть *линейная* функция, то из этих уравнений следует:

$$\tau = a\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right),$$

где a есть неизвестная пока функция $\varphi(v)$, и ради краткости принято, что в начале координат системы k при $\tau = 0$ также $t = 0$.

Пользуясь этим результатом, легко найти величины ξ, η, ζ. С этой целью (как этого требует принцип постоянства скорости света в соединении с принципом относительности) нужно с помощью уравнений выразить то обстоятельство, что свет при измерении в движущейся системе также распространяется со скоростью V. Для луча света, пущенного в момент времени $\tau = 0$ в направлении возрастающих ξ, имеем:

$$\xi = V\tau \quad \text{или} \quad \xi = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right).$$

Но луч света движется относительно начала координат системы k — при измерении, произведенном в покоящейся системе — со скоростью $V - v$, вследствие чего имеет место:

$$\frac{x'}{V - v} = t.$$

Подставив это значение t в уравнение для ξ, получим:

$$\xi = a\frac{V^2}{V^2 - v^2}x'.$$

Рассматривая лучи, движущиеся вдоль двух других осей, находим аналогичным образом:

$$\eta = V\tau = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right),$$

причем

$$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t; \qquad x' = 0;$$

следовательно,

$$\eta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}y \quad \text{и} \quad \zeta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}z.$$

Подставив вместо x' его значение, мы получаем:

$$\tau = \varphi(v)\beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$

$$\xi = \varphi(v)\beta(x - vt),$$

$$\eta = \varphi(v)y,$$

$$\zeta = \varphi(v)z,$$

где

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

и φ есть неизвестная пока функция от v. Если не делать никаких предположений о начальном положении движущейся системы и о нулевой точке переменной τ, то к правым частям этих уравнений необходимо приписать по одной аддитивной постоянной.

Мы должны теперь показать, что каждый луч света — при измерении в движущейся системе — распространяется со скоростью V, если это, согласно нашему допущению, имеет место в покоящейся системе, ибо мы еще не доказали, что принцип постоянства скорости света совместим с принципом относительности.

Пусть в момент времени $t = \tau = 0$ из общего в этот момент для обеих систем начала координат посылается шаровая волна, которая распространяется в системе K со скоростью V. Если (x, y, z) есть точка, достигнутая этой волной, то мы имеем

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2.$$

Это уравнение мы преобразуем с помощью формул преобразования и получаем в результате простого вычисления

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 \tau^2.$$

Итак, рассматриваемая волна, наблюдаемая в движущейся системе, есть тоже шаровая волна со скоростью распространения V. Тем самым доказано, что наши два основных принципа друг с другом совместимы [1]).

Выведенные формулы преобразования содержат неизвестную функцию φ от v, которую мы теперь определим.

Для этой цели мы вводим еще третью координатную систему K', которая относительно системы k совершает поступательное движение параллельно оси X таким образом, что ее начало координат движется со скоростью $-v$ по оси X. Пусть в момент времени $t = 0$ все три начала координат совпадают и пусть при $t = x = y = z = 0$ время t' системы K' равно 0. Пусть x', y', z' суть координаты, измеренные в системе K'. После двукратного применения наших формул преобразования получаем:

$$\begin{aligned}
t' &= \varphi(-v)\beta(-v)\left\{\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right\} = \varphi(v)\varphi(-v)\,t,\\
x' &= \varphi(-v)\beta(-v)\left\{\xi + v\tau\right\} = \varphi(v)\varphi(-v)\,x,\\
y' &= \varphi(-v)\,\eta = \varphi(v)\varphi(-v)\,y,\\
z' &= \varphi(-v)\,\zeta = \varphi(v)\varphi(-v)\,z.
\end{aligned}$$

Так как соотношения между x', y', z' и x, y, z не содержат времени t, то системы K и K' находятся в покое относительно друг друга, и ясно, что преобразование из K в K' должно быть тождественным преобразованием. Следовательно,

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1.$$

Выясним теперь значение функции $\varphi(v)$. Для этого мы рассмотрим ту часть оси Y системы k, которая лежит между $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ и $\xi = 0$, $\eta = l$, $\zeta = 0$. Эта часть оси Y есть стержень, движущийся перпендикулярно к своей оси со скоростью v относительно системы K. Концы этого стержня имеют в системе K следующие координаты:

$$x_1 = vt, \quad y_1 = \frac{l}{\varphi(v)}, \quad z_1 = 0$$

и

$$x_2 = vt, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = 0.$$

Длина стержня, измеренная в K, равняется, таким образом, $\frac{l}{\varphi(v)}$; тем самым выяснено и значение функции $\varphi(v)$. В самом деле, исходя из соображений симметрии, теперь ясно, что измеренная в покоящейся системе длина некоторого стержня, движущегося перпендикулярно к своей оси, может зависеть только от

[1]) Формулы преобразования Лоренца выводятся проще прямо из условия, что в силу этих формул соотношение

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - V^2\tau^2 = 0$$

должно приводить к соотношению

$$x^2 + y^2 + z^2 - V^2 t^2 = 0.$$

Прим. ред.

скорости, но не от направления и знака движения. Следовательно, длина движущегося стержня, измеренная в покоящейся системе, не изменяется, если v заменить через $-v$. Отсюда следует:

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)}, \quad \text{или} \quad \varphi(v) = \varphi(-v).$$

Из этого и найденного прежде соотношения следует, что $\varphi(v) = 1$, поэтому найденные формулы преобразования переходят в следующие:

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$

$$\xi = \beta(x - vt),$$

$$\eta = y, \quad \zeta = z,$$

где

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

§ 4. **Физическое значение полученных уравнений для движущихся твердых тел и движущихся часов.**

Мы рассматриваем твердый шар[1]) радиуса R, находящийся в покое относительно движущейся системы k, причем центр шара совпадает с началом координат системы k. Уравнением поверхности этого шара, движущегося относительно системы K со скоростью v, будет

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2.$$

[1]) Т. е. тело, которое при исследовании в состоянии покоя имеет шаровую форму.

Уравнение этой поверхности, выраженное через x, y, z, в момент времени $t = 0$ напишется так:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2.$$

Твердое тело, которое в покоящемся состоянии обладает формой шара, имеет, следовательно, в движущемся состоянии — при наблюдении из покоящейся системы — форму эллипсоида вращения с осями

$$R\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}, \quad R, \quad R.$$

В то время, как размеры шара по Y и Z (а следовательно, также всякого другого твердого тела любой формы) от движения не изменяются, размеры по X сокращаются в отношении $1 : \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}$ и тем сильнее, чем больше v. При $v = V$ все движущиеся объекты, наблюдаемые из „покоящейся“ системы, сплющиваются в плоские фигуры. Для скоростей, превышающих скорость света, наши соображения становятся лишенными смысла; впрочем, из дальнейших рассуждений будет видно, что скорость света в нашей теории физически играет роль бесконечно большой скорости.

Ясно, что те же результаты получаются для тел, которые находятся в покое в „покоящейся“ системе и которые рассматриваются из равномерно движущейся системы.

Представим себе далее, что одни из часов, которые, находясь в покое относительно покоящейся системы, могут показывать время t, а находясь в покое относительно движущейся системы, показывают время τ, помещены в начале координат системы k и поставлены так, что показывают время τ. Как быстро идут эти часы при рассмотрении из покоящейся системы?

Величины x, t, τ, которые относятся к положению, занимаемому этими часами, очевидно, связаны уравнениями:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}\left(t - \frac{v}{V^2}x\right) \quad \text{и} \quad x = vt.$$

Таким образом

$$\tau = t\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2} = t - \left(1-\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)t,$$

откуда следует, что показание часов (наблюдаемое из покоящейся системе) отстает в секунду на

$$\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right) \text{ сек.},$$

или — с точностью до величины четвертого и высших порядков — на

$$\frac{1}{2}\left(\frac{v}{V}\right)^2 \text{ сек.}$$

Отсюда вытекает следующее своеобразное следствие. Если в точках A и B системы K имеются покоящиеся идущие синхронно часы, наблюдаемые в покоящейся системе, и мы будем двигать часы из A по линии соединения в сторону B со скоростью v, то по прибытии этих часов в B они не идут уже более синхронно с часами в B. Часы, передвигавшиеся из A в B, отстают сравнительно с часами, находившимися в B с самого начала, на $\frac{1}{2}t\frac{v^2}{V^2}$ сек. (с точностью до величин четвертого и высших порядков), если t есть время, в течение которого часы из A двигались в B.

Сразу видно, что этот результат получается и тогда, когда часы двигаются по любой ломаной линии, а также тогда, когда точки A и B совпадают.

Если принять, что результат, доказанный для ломаной линии, верен также для непрерывно меняющей свое направление кривой, то получаем следующую теорему:

Если в A находятся двое синхронно идущих часов и мы перемещаем одни из них по замкнутой кривой с постоянной скоростью до тех пор, пока они не вернутся в A, на что потребуется скажем t сек., то эти часы по прибытии в A будут отставать по сравнению с остававшимися неподвижно часами на $\frac{1}{2}t\frac{v^2}{V^2}$ сек.

Отсюда можно заключить, что часы с балансиром [1]) находящиеся на экваторе, должны на очень небольшую величину итти медленнее, чем точно такие же часы, помещенные на полюсе, но в остальном поставленные в одинаковые условия.

§ 5. Теорема сложения скоростей.

Пусть в системе k, движущейся со скоростью v вдоль оси X системы K, движется точка согласно уравнениям:

$$\xi = w_\xi\tau, \qquad \eta = w_\eta\tau, \qquad \zeta = 0,$$

где w_ξ и w_η — постоянные.

Нужно найти движение точки относительно системы K. Если ввести в уравнения движения точки

[1]) В противоположность часам с маятником, которые — с физической точки зрения — представляют собой систему, в состав которой входит земной шар; это обстоятельство должно быть исключено. *Прим. ред.*

с помощью формул преобразования, выведенных в § 3, величины x, y, z, t, то получим:

$$x = \frac{w_\xi + v}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} t,$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} w_\eta t,$$

$$z = 0.$$

Итак, закон параллелограмма скоростей по нашей теории верен только в первом приближении. Положим

$$U^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

$$w^2 = w_\xi^2 + w_\eta^2,$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{w_y}{w_x};$$

α нужно тогда рассматривать как угол между скоростями v и w.

После простого вычисления получается:

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2vw \cos\alpha) - \left(\frac{vw \sin\alpha}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v w \cos\alpha}{V^2}}.$$

Замечательно, что v и w входят симметрично в выражение для результирующей скорости.

Если w тоже имеет направление оси X, то формула для U принимает следующий вид:

$$U = \frac{v + w}{1 + \frac{v \cdot w}{V^2}}.$$

Из этого уравнения следует, что результирующая скорость, получаемая от сложения двух скоростей, которые меньше V, всегда меньше V. Положив $v = V - \varkappa$, $w = V - \lambda$, где $\varkappa$ и λ оба положительны и меньше V, имеем:

$$U = V \frac{2V - \varkappa - \lambda}{2V - \varkappa - \lambda + \frac{\varkappa\lambda}{V}} < V.$$

Далее следует, что скорость света V от сложения со скоростью, которая меньше скорости света, не может быть изменена. Для этого случая получается:

$$U = \frac{V + w}{1 + \frac{w}{V}} = V.$$

В том случае, когда v и w имеют одинаковые направления, мы могли бы получить формулу для U также посредством соединения двух преобразований согласно § 3. Если мы наряду с системами K и k, фигурирующими в § 3, введем еще третью координатную систему k', находящуюся в параллельном движении относительно k, с началом координат, движущимся вдоль оси X со скоростью w, то получим уравнения, которые связывают величины x, y, z, t с соответствующими величинами системы k'; они отличаются от выведенных в § 3 только тем, что на месте v стоит величина:

$$\frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}.$$

Отсюда видно, что такие параллельные преобразования, как это и должно быть, образуют группу.

Мы вывели таким образом необходимые нам положения кинематики, построенной в соответствии с нашими двумя принципами, и переходим теперь к тому, чтобы показать их применение в электродинамике.

II. Электродинамическая часть

§ 6. Преобразование уравнений Максвелла — Герца для пустоты. О природе электродвижущих сил, возникающих при движении в магнитном поле.

Пусть уравнения Максвелла — Герца для пустоты действительны в покоящейся системе K; в таком случае имеем:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y};$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x},$$

где (X, Y, Z) — вектор электрической силы, (L, M, N) — вектор магнитной силы.

Если мы применим к этим уравнениям преобразование, доказанное в § 3, отнеся электромагнитные процессы к введенной там координатной

системе, движущейся со скоростью v, то получим уравнения:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial \tau}=\frac{\partial \beta\left(N-\frac{v}{V}Y\right)}{\partial \eta}-\frac{\partial \beta\left(M+\frac{v}{V}Z\right)}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Y-\frac{v}{V}N\right)}{\partial \tau}=\frac{\partial L}{\partial \zeta}-\frac{\partial \beta\left(N-\frac{v}{V}Y\right)}{\partial \xi},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Z+\frac{v}{V}M\right)}{\partial \tau}=\frac{\partial \beta\left(M+\frac{v}{V}Z\right)}{\partial \xi}-\frac{\partial L}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial \tau}=\frac{\partial \beta\left(Y-\frac{v}{V}N\right)}{\partial \zeta}-\frac{\partial \beta\left(Z+\frac{v}{V}M\right)}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(M+\frac{v}{V}Z\right)}{\partial \tau}=\frac{\partial \beta\left(Z+\frac{v}{V}M\right)}{\partial \xi}-\frac{\partial X}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(N-\frac{v}{V}Y\right)}{\partial \tau}=\frac{\partial X}{\partial \eta}-\frac{\partial \beta\left(Y-\frac{v}{V}N\right)}{\partial \xi},$$

где

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Принцип относительности требует, чтобы уравнения Максвелла — Герца для пустоты, справедливые в системе K, были бы также справедливы и в системе k; это значит, что для векторов электрической и магнитной силы $[(X', Y', Z')$ и $(L', M', N')]$, определенных в движущейся системе k через их пондеромоторные действия на электрические или, соответственно, магнитные массы, — должны быть справедливы следующие уравнения:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X'}{\partial \tau}=\frac{\partial N'}{\partial \eta}-\frac{\partial M'}{\partial \zeta},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y'}{\partial \tau}=\frac{\partial L'}{\partial \zeta}-\frac{\partial N'}{\partial \xi},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z'}{\partial \tau}=\frac{\partial M'}{\partial \xi}-\frac{\partial L'}{\partial \eta},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial L'}{\partial \tau}=\frac{\partial Y'}{\partial \zeta}-\frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial M'}{\partial \tau}=\frac{\partial Z'}{\partial \xi}-\frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial N'}{\partial \tau}=\frac{\partial X'}{\partial \eta}-\frac{\partial Y'}{\partial \xi}.$$

Очевидно, обе системы уравнений, найденные для системы k, должны выражать точно одно и то же, так как обе системы уравнений эквивалентны уравнениям Максвелла—Герца для системы K. Далее, так как уравнения обеих систем совпадают друг с другом во всем за исключением символов, изображающих векторы, то отсюда следует, что функции, стоящие в соответствующих местах обеих систем уравнений, должны быть между собой равны с точностью до одного множителя $\psi(v)$, общего для всех функций одной системы уравнений, который не зависит от ξ, η, ζ, τ, но может вообще зависеть от v. Итак, имеют место соотношения:

$$X'=\psi(v)\,X,$$
$$L'=\psi(v)\,L,$$
$$Y'=\psi(v)\,\beta\left(Y-\frac{v}{V}N\right),$$
$$M'=\psi(v)\,\beta\left(M+\frac{v}{V}Z\right),$$

$$Z'=\psi(v)\,\beta\left(Z+\frac{v}{V}M\right),$$
$$N'=\psi(v)\,\beta\left(N-\frac{v}{V}Y\right).$$

Если произвести обращение этой системы уравнений, во-первых, путем решения только что полученных уравнений и, во-вторых, путем применения уравнений к обратному преобразованию (из k в K), которое характеризуется скоростью — v, и принять во внимание то, что две получившиеся таким образом системы уравнений должны быть тождественны, мы получим

$$\psi(v)\cdot\psi(-v)=1.$$

Далее из соображений симметрии следует [1]):

$$\psi(v)=\psi(-v);$$

следовательно:

$$\psi(v)=1,$$

и наши уравнения принимают следующий вид:

$$X'=X,$$
$$L'=L,$$
$$Y'=\beta\left(Y-\frac{v}{V}N\right),$$
$$M'=\beta\left(M+\frac{v}{V}Z\right),$$
$$Z'=\beta\left(Z+\frac{v}{V}M\right),$$
$$N'=\beta\left(N-\frac{v}{V}Y\right).$$

[1]) Если, например, $X=Y=Z=L=M=0$ и $N\neq 0$, то из соображений симметрии ясно, что, когда v меняет знак без изменения своего численного значения, тогда и Y' должно изменить свой знак без изменения своего численного значения.

Для интерпретации этих уравнений заметим следующее. Пусть имеется точечный заряд, который при измерении в покоящейся системе K равен „единице"; то-есть, находясь в покое в покоящейся системе, он действует на такое же количество электричества на расстоянии 1 *см* с силой в 1 дину. Согласно принципу относительности, эта электрическая масса при измерении в движущейся системе тоже равна „единице". Если это количество электричества находится в покое относительно покоящейся системы, то, согласно определению, вектор (X, Y, Z) равен силе, действующей на упомянутый заряд. Если же заряд находится в покое относительно движущейся системы (по крайней мере в соответствующий момент времени), то сила, действующая на него и измеренная в движущейся системе, равна вектору (X', Y', Z'). Следовательно, первые три из написанных выше уравнений можно сформулировать следующими двумя способами:

1. Если в электромагнитном поле движется единичный точечный полюс, то на него, кроме электрической силы, действует еще „электродвижущая сила", которая, при условии пренебрежения членами, помноженными на вторую и высшие степени от $\frac{v}{V}$, равна векторному произведению скорости движения полюса на магнитную силу. (Старая формулировка).

2. Если единичный точечный полюс движется в электромагнитном поле, то действующая на него сила равна электрической силе, имеющейся в месте нахождения этого заряда и получающейся посредством преобразования поля в поле для координатной системы, покоящейся относительно этого полюса. (Новая формулировка).

Аналогичные положения справедливы для „магнитодвижущих сил". Мы видим, что в изложенной теории электродвижущая сила играет роль вспомогательного понятия, которое своим введением обязано тому обстоятельству, что электрические и магнитные силы не существуют независимо от состояния движения координатной системы.

Далее ясно, что асимметрия, упомянутая в введении при рассмотрении токов, возникающих вследствие относительного движения магнита и проводника, исчезает. Вопросы о том, где „сидят" электродинамические электродвижущие силы (однополюсные машины), также теряют смысл.

§ 7. Теория аберрации и принципа Допплера.

Пусть в системе K очень далеко от начала координат находится некоторой источник электродинамических волн, которые в некоторой части пространства включающей начало координат, могут быть с достаточным приближением представлены уравнениями:

$$X = X_0 \sin\Phi,\ L = L_0 \sin\Phi,$$
$$Y = Y_0 \sin\Phi,\ M = M_0 \sin\Phi,$$
$$Z = Z_0 \sin\Phi,\ N = N_0 \sin\Phi,$$
$$\Phi = \omega \cdot \left(t - \frac{ax + by + cz}{V}\right).$$

Здесь (X_0, Y_0, Z_0) и (L_0, M_0, N_0) представляют собою векторы, которые определяют амплитуду волнового потока, и a, b, c суть направляющие косинусы волновых нормалей.

Выясним, каковы свойства этих волн, когда они исследуются наблюдателем, находящимся в покое в движущейся системе k.

Применив найденные в § 6 формулы преобразования для электрических и магнитных сил, а также формулы преобразования § 3, для координат и времени, мы непосредственно получаем:

$$X' = X_0 \sin \Phi',$$
$$L' = L_0 \sin \Phi',$$
$$Y' = \beta \left(Y_0 - \frac{v}{V} N_0\right) \sin \Phi',$$
$$M' = \beta \left(M_0 + \frac{v}{V} Z_0\right) \sin \Phi',$$
$$Z' = \beta \left(Z_0 + \frac{v}{V} M_0\right) \sin \Phi',$$
$$N' = \beta \left(N_0 - \frac{v}{V} Y_0\right) \sin \Phi',$$
$$\Phi' = \omega' \left(\tau - \frac{a'\xi + b'\eta + c'\zeta}{V}\right),$$

где

$$\omega' = \omega\beta \left(1 - a \frac{v}{V}\right),$$
$$a' = \frac{a - \frac{v}{V}}{1 - a \frac{v}{V}},$$
$$b' = \frac{b}{\beta \left(1 - a \frac{v}{V}\right)},$$
$$c' = \frac{c}{\beta \left(1 - a \frac{v}{V}\right)}.$$

Возьмем наблюдателя, движущегося со скоростью v относительно бесконечно удаленного источника света, частота которого равна ν. Из уравнения для ω' вытекает,

что если линия, соединяющая источник света с наблюдателем, образует со скоростью наблюдателя, отнесенной к координатной системе (покоящейся относительно источника света), угол φ, то воспринимаемая наблюдателем частота ν' света дается следующей формулой:

$$\nu' = \nu \frac{1 - \cos\varphi \frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Это и есть *принцип Допплера* для любых скоростей. При $\varphi = 0$ формула принимает наглядный вид:

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Мы видим, что в противоположность обычному представлению при $v = -\infty$ частота

$$\nu = \infty.$$

Если обозначить через φ' угол между волновой нормалью (направлением луча) и линией, соединяющей источник света с наблюдателем, то формула для φ' примет следующий вид:

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}.$$

Эта формула выражает *закон аберрации* в его наиболее общей форме. Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то формула принимает простой вид:

$$\cos\varphi' = -\frac{v}{V}.$$

Мы должны еще найти значение амплитуды волн для наблюдателя в движущейся системе. Обозначив соответственно через A и A' амплитуды электрической и магнитной силы, измеренные в покоящейся и в движущейся системах, получим:

$$A'^2 = A^2 \frac{\left(1 - \frac{v}{V} \cos \varphi\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

Это уравнение при $\varphi = 0$ переходит в более простое:

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}.$$

Из выведенных уравнений следует, что наблюдателю, который будет приближаться со скоростью V к некоторому источнику света, последний будет казаться бесконечно интенсивным.

§ 8. Преобразование энергии лучей света. Теория давления, производимого светом на идеальное зеркало.

Так как $\frac{A^2}{8\pi}$ равняется световой энергии в единице объема, то на основании принципа относительности мы должны $\frac{A'^2}{8\pi}$ рассматривать как световую энергию в движущейся системе. Поэтому величина $\frac{A'^2}{A^2}$ была бы отношением энергии определенного светового комплекса, „измеренной в движении“, к энергии того же комплекса, „измеренной в покое“, если бы объем светового комплекса оставался бы одним и тем же

при измерении в системах k и K. Однако, это не так. Если a, b, c представляют собой направляющие косинусы волновых нормалей света в покоящейся системе, то через элементы поверхности сферы

$$(x - Vat)^2 + (y - Vbt)^2 + (z - Vct)^2 = R^2,$$

движущейся со скоростью света, никакая энергия не проходит; мы можем поэтому утверждать, что эта поверхность все время ограничивает собой один и тот же световой комплекс. Выясним, какое количество энергии заключено внутри этой поверхности, если наблюдение ведется к системе k, т. е. какова будет энергия этого светового комплекса относительно системы k.

Шаровая поверхность, рассматриваемая в движущейся системе, представляет собой поверхность эллипсоида, уравнением которого в момент времени $\tau = 0$ будет:

$$\left(\beta\xi - a\beta \frac{v}{V} \xi\right)^2 + \left(\eta - b\beta \frac{v}{V} \xi\right)^2 + \left(\zeta - c\beta \frac{v}{V} \xi\right)^2 = R^2.$$

Если через S обозначить объем шара, а через S' — объем этого эллипсоида, то, как показывает простое вычисление, должно иметь место соотношение:

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}.$$

Обозначив через E световую энергию, заключенную внутри рассматриваемой поверхности и измеренную в покоящейся системе, а через E' ту же энергию, измеренную в движущейся системе, получим:

$$\frac{E'}{E}=\frac{\frac{A'^2}{8\pi}S'}{\frac{A^2}{8\pi}S}=\frac{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Эта формула при $\varphi=0$ переходит в более простую:

$$\frac{E'}{E}=\sqrt{\frac{1-\frac{v}{V}}{1+\frac{v}{V}}}.$$

Замечательно то, что и энергия и частота с изменением состояния движения наблюдателя подчиняются одному и тому же закону.

Пусть теперь координатная плоскость $\xi=0$ представляет собой идеальную зеркальную поверхность, от которой отражаются плоские волны, рассмотренные в последнем параграфе.

Выясним, чему равно световое давление, производимое на зеркальную поверхность, и каковы направление, частота и интенсивность света после отражения.

Пусть падающий свет определяется величинами A, $\cos\varphi$, ν (отнесенными к системе K). При наблюдении из системы k имеем для соответствующих величин:

$$A'=A\frac{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

$$\cos\varphi'=\frac{\cos\varphi-\frac{v}{V}}{1-\frac{v}{V}\cos\varphi},$$

$$\nu'=\nu\frac{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Если мы этот процесс отнесем к системе k, то для отраженного света получим:

$$A''=A',$$
$$\cos\varphi''=-\cos\varphi',$$
$$\nu''=\nu'.$$

Наконец, посредством обратного преобразования к системе K получаем для отраженного света:

$$A'''=A''\frac{1+\frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}=$$

$$=A\frac{1-2\frac{v}{V}\cos\varphi+\left(\frac{v}{V}\right)^2}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\cos\varphi'''=\frac{\cos\varphi''+\frac{v}{V}}{1+\frac{v}{V}\cos\varphi''}=$$

$$=-\frac{\left(1+\left(\frac{v}{V}\right)^2\right)\cos\varphi-2\frac{v}{V}}{1-2\frac{v}{V}\cos\varphi+\left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\nu''' = \nu'' \frac{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} =$$

$$= \nu \frac{1 - 2 \frac{v}{V} \cos \varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2}.$$

Энергия, падающая на единицу поверхности зеркала в единицу времени (измеренная в покоящейся системе), очевидно, равняется

$$\frac{A^2}{8\pi} (V \cos \varphi - v).$$

Энергия, удаляющаяся с единицы поверхности зеркала в единицу времени, составляет

$$\frac{A'''^2}{8\pi} (-V \cos \varphi''' + v).$$

Разность между этими двумя выражениями, согласно принципу сохранения энергии, есть работа, произведенная световым давлением в единицу времени. Приравняв работу произведению $P \cdot v$, где P — световое давление, получим:

$$P = 2 \frac{A^2}{8\pi} \frac{\left(\cos \varphi - \frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

В первом приближении получается в согласии с опытом и с другими теориями:

$$P = 2 \frac{A^2}{8\pi} \cos^2 \varphi.$$

Методом, примененным здесь, могут быть решены все проблемы оптики движущихся тел. Существо

дела заключается в том, что электрическая и магнитная силы света, подвергающегося воздействию со стороны движущегося тела, преобразуются к координатной системе, покоящейся относительно этого тела. Благодаря этому каждая проблема оптики движущихся тел сводится к ряду проблем оптики покоящихся тел.

§ 9. Преобразование уравнений Максвелла—Герца с учетом конвекционных токов.

Мы исходим из уравнений:

$$\frac{1}{V}\left\{u_x\rho + \frac{\partial X}{\partial t}\right\} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_y\rho + \frac{\partial Y}{\partial t}\right\} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_z\rho + \frac{\partial Z}{\partial t}\right\} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

где

$$\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

означает 4π-кратную плотность электричества и (u_x, u_y, u_z) — вектор скорости электричества. Если представить себе, что электрические массы неизменно связаны с маленькими твердыми телами (ионы, электроны), то эти уравнения являются электромагнитной основой Лоренцовой электродинамики и оптики движущихся тел.

Если преобразовать эти уравнения, которые верны в системе K, с помощью формул преобразования § 3 и § 6 к системе k, то получаются следующие уравнения:

$$\frac{1}{V}\left\{u_\xi \rho' + \frac{\partial X'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\eta \rho' + \frac{\partial Y'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\zeta \rho' + \frac{\partial Z'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial N'}{\partial \tau} = \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi},$$

где

$$\frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{V^2}} = u_\xi,$$

$$\frac{u_y}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)} = u_\eta$$

$$\frac{u_z}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)} = u_\zeta.$$

$$\rho' = \frac{\partial X'}{\partial \xi} + \frac{\partial Y'}{\partial \eta} + \frac{\partial Z'}{\partial \zeta} = \beta\left(1 - \frac{v u_x}{V^2}\right)\rho.$$

Таким образом, как это и следует из теоремы сложения скоростей (§ 5), вектор (u_ξ, u_η, u_ζ) есть не что иное, как скорость электрических масс, измеренная в системе k. Этим самым показано, что, когда мы кладем в основу наши кинематические принципы, электродинамическая основа Лоренцовой теории электродинамики движущихся тел подчиняется принципу относительности.

Отметим еще кратко, что из доказанных уравнений легко может быть выведена следующая важная теорема: если заряженное электричеством тело движется в пространстве произвольным образом и если его заряд, наблюдаемый из координатной системы, движущейся вместе с этим телом, при этом не изменяется, то этот заряд остается неизменным и при наблюдении из „покоящейся" системы K.

§ 10. Динамика (медленно ускоренного) электрона.

Пусть в электромагнитном поле движется точечная частица с электрическим зарядом ε (в дальнейшем называемая „электроном"), о законе движения которой мы допустим только следующее.

Если электрон находится в покое в определенный промежуток времени, то в ближайший элемент времени движение электрона, поскольку он находится в медленном движении, будет протекать согласно уравнениям:

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon X,$$

$$\mu \frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon Y,$$

$$\mu \frac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon Z,$$

где x, y, z — координаты электрона, и μ — масса электрона.

Во-вторых, пусть электрон в определенный интервал времени обладает скоростью v. Найдем закон, согласно которому электрон движется в элемент времени, непосредственно следующий за этим.

Не ограничивая общности рассуждений, мы можем допустить, и допустим в самом деле, что в тот момент, когда мы начинаем наблюдение, наш электрон находится в начале координат и движется вдоль оси X системы K со скоростью v. В таком случае ясно, что в указанный момент времени ($t=0$) электрон находится в покое относительно координатной системы k, движущейся параллельно оси X с постоянной скоростью v.

Из сделанного выше предположения в соединении с принципом относительности следует, что электрон, наблюдаемый из системы k во время, следующее непосредственно за $t=0$ (при малых значениях t), движется согласно уравнениям:

$$\mu \frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \varepsilon X'$$

$$\mu \frac{d^2\eta}{d\tau^2} = \varepsilon Y',$$

$$\mu \frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = \varepsilon Z',$$

причем буквы ξ, η, ζ, τ, X', Y', Z' относятся к системе k. Если мы еще положим, что при $t=x=$ $=y=z=0$ должно иметь место $\tau=\xi=\eta=\zeta=0$, то здесь будут справедливы формулы преобразования §§ 3 и 6, и поэтому будут выполняться следующие уравнения:

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$

$$\xi = \beta(x - vt),$$

$$\eta = y,$$

$$\zeta = z,$$

$$X' = X,$$

$$Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right),$$

$$Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right).$$

С помощью этих уравнений мы преобразовываем написанные выше уравнения движения от системы k к системе K и получаем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{1}{\beta^3}X, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{1}{\beta}\left(Y - \frac{v}{V}N\right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{1}{\beta}\left(Z + \frac{v}{V}M\right). \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Опираясь на обычный прием рассуждений, определим теперь „продольную“ и „поперечную“ массы движущегося электрона. Напишем уравнения (A) в следующем виде:

$$\mu\beta^3 \frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon X = \varepsilon X',$$

$$\mu\beta^2 \frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right) = \varepsilon Y',$$

$$\mu\beta^2 \frac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right) = \varepsilon Z';$$

и заметим прежде всего, что $\varepsilon X'$, $\varepsilon Y'$, $\varepsilon Z'$ являются компонентами пондеромоторной силы, действующей на электрон, рассматриваемыми притом в той координатной системе, которая в данный момент движется вместе с электроном с такой же, как у электрона, скоростью. (Эта сила могла бы быть измерена, например, пружинными весами, покоящимися в последней системе). Если мы теперь эту силу будем называть просто „силой, действующей на электрон“ [1]), и сохраним уравнение:

численное значение массы $\times$ численное значение ускорения $=$ численному значению силы,

и если мы далее установим, что ускорения должны измеряться в покоящейся системе K, то из указанных выше уравнений получим:

$$\text{продольная масса} = \frac{\mu}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^3},$$

$$\text{поперечная масса} = \frac{\mu}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

Конечно, мы будем получать другие значения для масс при другом определении силы и ускорения; отсюда видно, что при сравнении различных теорий движения электрона нужно быть весьма осторожным.

Заметим, что эти результаты относительно массы справедливы также и для весомых материальных точек; ибо весомая материальная точка может быть путем присоединения *сколь угодно малого* электрического заряда превращена в электрон (в нашем смысле).

Определим кинетическую энергию электрона. Если электрон из начала координат системы K с начальной скоростью O движется все время вдоль оси X под действием электростатической силы X, то ясно, что отнятая у электростатического поля энергия будет равна $\int \varepsilon X\,dx$. Так как электрон ускоряется медленно и вследствие этого не должен отдавать энергию в форме излучения, то энергия, отнятая у электростатического поля, должна быть положена равной энергии движения W электрона. Приняв во внимание, что в течение всего рассматриваемого процесса движения справедливо первое из уравнений (A), мы получим:

$$W = \int \varepsilon X dx = \int_0^v \beta^3 \mu v dv =$$

$$= \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

При $v = V$, величина W становится, таким образом, бесконечно большой. Как в прежних результатах, так и здесь скорости, превышающие скорость света, существовать не могут.

Это выражение для кинетической энергии должно быть справедливым и для весомых масс в силу выше приведенного аргумента.

Перечислим теперь все вытекающие из системы уравнений (A) свойства движения электрона, допускающие опытную проверку.

1. Из второго уравнения системы (A) следует, что электрическая сила Y и магнитная сила N одинаково сильно отклоняют электрон, движущийся со скоростью v, в том случае, когда $Y = N\frac{v}{V}$. Отсюда видно, что определение скорости электрона из отношения магнитной отклоняемости A_m к электрической отклоняемости A_e согласно нашей теории возможно для любых скоростей путем применения закона:

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{V}.$$

[1]) Данное здесь определение силы неудобно, как было впервые показано Планком. Целесообразнее силу определить так, чтобы законы сохранения импульса и энергии принимали простейшую форму. *Прим. ред.*

Это соотношение поддается экспериментальной проверке, так как скорость электрона может быть измерена также и непосредственно, например, при помощи быстро колеблющихся электрических и магнитных полей.

2. Из формулы для кинетической энергии следует, что между пройденной разностью потенциала и достигнутой скоростью v электрона должна существовать следующая зависимость:

$$P = \int X dx = \frac{\mu}{\varepsilon} V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

3. Вычислим радиус кривизны R орбиты, когда имеется действующая перпендикулярно к скорости электрона магнитная сила N (как единственная отклоняющая сила).

Из второго уравнения (A) получаем:

$$-\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{\varepsilon}{\mu}\, \frac{v}{V} N \sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}$$

или

$$R = V^2 \frac{\mu}{\varepsilon} \cdot \frac{\frac{v}{V}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} \cdot \frac{1}{N}.$$

Эти три соотношения являются полным выражением законов, по которым, согласно предложенной теории, должны двигаться электроны.

В заключение замечу, что мой друг и коллега М. Бессо явился верным помощником при разработке изложенных здесь проблем и что я обязан ему за ряд ценных указаний.

Берн, июнь 1905 г.
(Поступило в печать 30 июня 1905 г.).

А. ЭЙНШТЕЙН.

ЗАВИСИТ ЛИ ИНЕРЦИЯ ТЕЛА ОТ СОДЕРЖАЩЕЙСЯ В НЕМ ЭНЕРГИИ? [1])

Результаты предыдущего исследования приводят нас к очень интересному следствию, вывод которого будет дан в этой статье.

В прежнем исследовании я взял за основу, кроме уравнений Максвелла—Герца для пустоты и формулы Максвелла для электромагнитной энергии пространства, еще следующий принцип:

Законы, по которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к которой из двух координатных систем, находящихся в равномерном параллельно-поступательном движении относительно друг друга, отнесены эти изменения состояния (принцип относительности).

Основываясь на этом [2]), я, между прочим, вывел следующий результат (предыдущая статья § 8):

Пусть система плоских волн света, отнесенная к координатной системе (x, y, z), обладает энергией l и пусть направление луча (волновая нормаль) образует угол φ с осью x системы. Если ввести новую

---

[1]) „Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig?" Ann. d. Phys. 18, 639, 1905.

[2]) Примененный там принцип постоянства скорости света содержится, конечно, в уравнениях Максвелла.

координатную систему (ξ, η, ζ), находящуюся в равномерном параллельно-поступательном движении относительно системы (x, y, z), и если начало координат первой системы движется со скоростью v вдоль оси x, то упомянутое количество света — измеренное в системе (ξ, η, ζ) — обладает энергией:

$$l^* = l \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

где V — скорость света. В дальнейшем мы воспользуемся этим результатом.

Пусть в системе (x, y, z) находится покоящееся тело, энергия которого, отнесенная к системе (x, y, z), равна E_0. Энергия же тела, отнесенная к системе (ξ, η, ζ), движущейся, как выше, со скоростью v, пусть составляет H_0.

Пусть это тело посылает в направлении, образующем с осью x угол φ, плоские волны, имеющие энергию $\frac{L}{2}$ [измеренную относительно системы (x, y, z)] и одновременно посылает такое же количество света в противоположном направлении. При этом тело остается в покое относительно системы (x, y, z). Закон сохранения энергии должен иметь место для этого процесса, и притом (согласно принципу относительности) по отношению к обеим координатным системам. Если мы обозначим энергию тела после излучения света через E_1 при измерении ее относительно системы (x, y, z), и соответственно через H_1 энергию относительно системы (ξ, ζ, η), то, пользуясь вышеуказанной зависимостью, получим

$$E_0 = E_1 + \left[\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right],$$

$$H_0 = H_1 + \left[\frac{L}{2} \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} + \frac{L}{2} \frac{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}\right] = H_1 + \frac{L}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Вычитая второе уравнение из первого, получим:

$$(H_0 - E_0) - (H_1 - E_1) = L \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

Обе разности вида $H - E$, входящие в это выражение, имеют простой физический смысл. H и E суть значения энергии одного и того же тела, отнесенные к двум координатным системам, движущимся относительно друг друга, причем тело в одной из систем [системе (x, y, z)] находится в покое.

Таким образом ясно, что разность $H - E$ может отличаться от кинетической энергии K тела, взятой относительно системы (ξ, η, ζ), только на аддитивную постоянную C, которая зависит от выбора произвольных аддитивных постоянных энергий H и E. Мы можем, следовательно, положить

$$H_0 - E_0 = K_0 + C,$$
$$H_1 - E_1 = K_1 + C,$$

так как C во время испускания света не изменяется. Мы получаем следовательно:

$$K_0 - K_1 = L \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}$$

Кинетическая энергия тела, рассматриваемая относительно системы (ξ, η, ζ), уменьшается вследствие испускания света, и притом на величину, не зависящую от свойств тела. Далее, разность $K_0 - K_1$ зависит от скорости точно так же, как кинетическая энергия электрона (§ 10 предыдущей статьи).

Пренебрегая величинами четвертого и высших порядков, мы можем положить

$$K_0 - K_1 = \frac{L}{V^2} \cdot \frac{v^2}{2}.$$

Из этого уравнения непосредственно следует, что если тело отдает энергию L в виде излучения, то его масса уменьшается на $\frac{L}{V^2}$. Здесь, очевидно, не существенно, что энергия, отнятая у тела, переходит в лучистую энергию, так что мы приходим к более общему выводу:

Масса тела есть мера содержания энергии в этом теле; если энергия изменяется на величину L, то масса изменяется в том же направлении на величину $\frac{L}{9 \cdot 10^{20}}$, причем энергия измеряется в эргах, а масса — в граммах.

Не исключена возможность того, что проверка теории может удасться для тел, у которых содержание энергии в высшей степени изменчиво (например, у солей радия).

Если теория соответствует фактам, то излучение переносит инерцию между испускающими и поглощающими телами.

Берн, сентябрь 1905 г.

(Поступило в печать 27 сентября 1905 г.)

Г. МИНКОВСКИЙ

Г. МИНКОВСКИЙ.

ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ [1].

М. Г.! Воззрения на пространство и время, которые я намерен перед вами развить, возникли на экспериментально-физической основе. В этом их сила. Их тенденция радикальна. Отныне пространство само по себе и время само по себе должны обратиться в фикции и лишь некоторый вид соединения обоих должен еще сохранить самостоятельность.

I.

Сначала я намерен показать, как можно, исходя из ныне принятой механики, пожалуй при помощи чисто математического рассуждения, притти к новым идеям относительно пространства и времени. Уравнения ньютоновой механики обнаруживают двойную инва, риантность. Их форма сохраняется, во-первых, тогда, когда положенную в основу пространственную координатную систему подвергают любому *изменению положения*, и, во-вторых, тогда, когда состояние движения этой системы подвергается изменению, именно — когда этой системе сообщается какое-нибудь *равномерное поступательное движение*; нулевая точка времени также не играет никакой роли. Чувствуя себя

[1]) „Raum und Zeit". Доклад, сделанный 21 сентября 1908 г. на 80-м собрании немецких естествоиспытателей и врачей в Кельне Phys. ZS. **10**, 104, 1909.

зрелыми для перехода к аксиомам механики, мы привыкли считать аксиомы геометрии уже установленными раньше; поэтому эти две инвариантности, вероятно, редко формулируются вместе, так сказать, не переводя дыхания. Каждая из них означает определенную замкнутую группу преобразований дифференциальных уравнений механики. Существование первой группы рассматривают как основной признак пространства. Ко второй группе охотнее всего относятся с презрением, с тем, чтобы затем легкомысленно пройти мимо того обстоятельства, что, исходя из физических явлений, никогда нельзя решить, не находится ли все-таки пространство, предполагаемое покоящимся, в равномерном поступательном движении. Указанные две группы ведут таким образом совершенно обособленное существование. Их совершенно разнородный характер, вероятно, и препятствовал объединению. Но как раз объединенная полная группа, как целое, дает пищу для нашей мысли.

Мы попытаемся изучаемые соотношения сделать наглядными графически. Пусть x, y, z будут прямоугольными координатами пространства и пусть t обозначает время. Предметом нашего восприятия всегда являются только места и времена, вместе взятые. Никто еще не наблюдал какого-либо места иначе, чем в некоторый момент времени, и какое-нибудь время иначе, чем в некотором месте. Но я еще отношусь с почтением к догмату, гласящему, что и пространство и время имеют независимое существование. Я буду называть пространственную точку, рассматриваемую в какой-нибудь момент времени, т. е. систему значений x, y, z, t, *мировой точкой*. Пусть многообразие всех мыслимых систем значений x, y, z, t называется *миром*. Я мог бы смело начертить мелом на доске четыре мировые оси. Уже *одна* начерченная ось, состоит из целого ряда колеблющихся молекул и участвует, вдобавок, в движении земли во вселенной, т. е. требует достаточно высокой абстракции. Несколько бо́льшая абстракция, связанная с числом 4, не представляет затруднений для математика. Для того чтобы нигде не оставлять зияющей пустоты, мы представим себе, что в каждом месте и в каждый момент времени имеется некоторый объект для наблюдения. Чтобы не говорить о материи или электричестве, я буду пользоваться словом субстанция для обозначения этого объекта. Обратим наше внимание на субстанциальную точку, имеющуюся в мировой точке x, y, z, t, и вообразим, что мы в состоянии снова узнать эту субстанциальную точку во всякое другое время. Пусть элементу времени dt соответствуют изменения dx, dy, dz пространственных координат этой субстанциальной точки. Мы получаем тогда в качестве изображения, так сказать, вечного жизненного пути субстанциальной точки некоторую кривую в мире, *мировую линию*, точки которой можно однозначно отнести к параметру t во всем интервале от $-\infty$ до $+\infty$. Весь мир представляется разложенным на такие мировые линии, и мне хотелось бы сразу отметить, что, по моему мнению, физические законы могли бы найти свое наисовершеннейшее выражение как взаимоотношения между этими мировыми линиями.

Благодаря понятиям пространства и времени многообразие x, y, z при $t=0$ и его две стороны: $t>0$ и $t<0$ отделяются друг от друга. Если мы, ради простоты, закрепим нулевую точку пространства и времени, то первая из названных групп механики показывает, что мы можем подвергнуть оси x, y, z в момент $t=0$ любому вращению вокруг нулевой точки, соответственно однородным линейным преобразованиям выражения

$$x^2 + y^2 + z^2$$

в самого себя.

Вторая же группа означает, что мы, также не изменяя выражения механических законов, можем заменить x, y, z, t через

$$x - \alpha t, \quad y - \beta t, \quad z - \gamma t, \quad t,$$

с произвольно выбранными константами α, β, γ. На этом основании оси времени может быть дано совершенно произвольное направление в сторону верхней половины мира $t > 0$. Каково же соотношение между требованием ортогональности в пространстве и этой полной свободой в выборе оси времени по направлению вверх? Для того чтобы установить это, возьмем некоторый положительный параметр c и рассмотрим геометрическую фигуру:

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1.$$

Подобно двуполому гиперболоиду она состоит из двух полостей, разделенных $t = 0$. Рассмотрим полость в области $t > 0$ и обратимся к тем однородным линейным преобразованиям старых переменных x, y, z, t в новые x', y', z', t', для которых выражение этой полости в новых переменных имеет такой же вид. К этим преобразованиям относятся, очевидно, вращения пространства около нулевой точки. Поэтому для полного понимания остальных преобразований достаточно рассмотреть те из них, у которых y и z остаются неизменными. Изобразим на чертеже пересечение полости с плоскостью осей x и t, т. е. верхнюю ветвь гиперболы $c^2t^2 - x^2 = 1$, с ее асимп-

тотами. Проведем теперь от начала координат O произвольный радиус-вектор OA' этой ветви гиперболы, затем проведем касательную к ней в точке A' до пересечения с правой асимптотой в точке B', потом дополним $OA'B'$ до параллелограмма $OA'B'C'$ и, наконец, имея в виду дальнейшее, проведем $B'C'$ до пересечения с осью x в точке D'. Если мы теперь примем OC' и OA' за оси для отсчета координат x', t' с масштабами $OC' = 1$, $OA' = \frac{1}{c}$, то

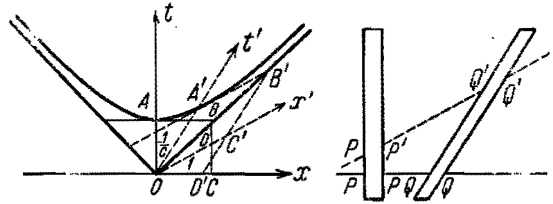


Рис. 1.

указанная ветвь гиперболы будет опять иметь своим выражением $c^2t'^2 - x'^2 = 1$, $t' > 0$, и переход от x, y, z, t к x', y, z, t' явится одним из искомых преобразований. Мы прибавим к описанным преобразованиям еще любые смещения пространственно-временной нулевой точки и создадим таким образом группу преобразований, все еще, очевидно, зависящую от параметра c; будем обозначать эту группу через G_c.

Пусть теперь c беспредельно возрастает, следовательно, $\frac{1}{c}$ стремится к нулю; из нашего рисунка ясно видно, что ветвь гиперболы будет все более и более приближаться к оси x, угол, образуемый асимптотами, будет увеличиваться, и что указанное специальное преобразование в пределе превратится в такое, при котором ось t' может иметь любое направление вверх, а ось x' все более и более приближается к оси x. Принимая все это во внимание, ясно, что из группы G_c в пределе при $c = \infty$, следовательно, для группы G_∞, получается как раз та полная группа, которая относится к ньютоновой механике. При таком положении вещей и имея в виду, что G_c математически понятнее, чем G_∞, математик в свободном полете фантазии мог бы напасть на мысль, что явления природы, в конце концов, действительно инвариантны не относительно группы G_∞, но скорее относительно группы G_c с определенным конечным c, которое только в обычных единицах измерения *чрезвычайно велико*. Такое предвосхищение было бы необыкновенным триумфом чистой математики. Математика в этом вопросе не оказалась находчивой; все же для нее остается удовлетворение, что она, благодаря своим более ранним счастливым предшественникам, с их дальновидным и острым умом, в состоянии теперь сразу же охватить глубоко идущие следствия подобной перестройки нашего миропонимания.

Я хочу теперь же указать, о каком значении c будет в итоге итти речь: c будет иметь значение *скорости распространения света в пустоте*. Для того чтобы не говорить ни о пространстве, ни о пустоте, мы можем опять охарактеризовать эту величину как отношение электромагнитной и электростатической единиц количества электричества.

Наличие инвариантности законов природы по отношению к указанной группе G_c нужно было бы понимать следующим образом.

Можно, пользуясь всей совокупностью явлений природы, посредством последовательно улучшающихся приближений определять со все возрастающей точностью некоторую координатную систему x, y, z и t — пространство и время, — при помощи которой эти явления находят себе выражение в виде определенных законов. Но при этом указанная координатная система определяется явлениями природы отнюдь не однозначно. Оказывается еще возможным, *соответственно преобразованиям указанной группы G_c, эту координатную систему произвольно изменять, не изменяя при этом выражения законов природы*. Например, возможно, в согласии с описанным рисунком, назвать также и величину t' временем, но тогда в связи с этим необходимо будет пространство определить посредством многообразия трех параметров x', y, z; причем теперь физические законы будут точно так же выражаться посредством x', y, z, t', как ранее, через координаты x, y, z, t. В соответствии с этим мы будем иметь в мире не одно пространство, а бесконечно много пространств, аналогично тому, как в трехмерном пространстве имеется бесконечно много плоскостей. Трехмерная геометрия становится главой четырехмерной физики. Вы понимаете теперь, почему я в введении сказал, что пространство и время должны стать фикциями, и только мир должен сохранить свое существование.

II.

Теперь возникает вопрос о том, какие обстоятельства навязывают нам измененное воззрение на пространство и время; действительно ли оно никогда не противоречит наблюдениям, и, наконец, удобнее ли с этой точки зрения описывать явления?

Прежде чем заняться этим, сделаем одно важное замечание.

Если мы каким-нибудь образом индивидуализировали пространство и время, то покоящейся субстанциальной точке соответствует в качестве мировой линии прямая, параллельная оси t; равномерно движущейся субстанциальной точке — прямая, наклоненная относительно t, неравномерно движущейся субстанциальной точке — каким-то образом искривленная мировая линия. Если мы в любой мировой точке x, y, z, t обратим внимание на проходящую там мировую линию и найдем, что она параллельна какому-нибудь радиусу-вектору OA' выше упомянутой полости гиперболоида, то мы можем ввести OA' в качестве новой оси времени; тогда субстанция в соответствующей мировой точке, с помощью таким образом введенных новых понятий пространства и времени, будет казаться покоящейся. Введем теперь следующую основную аксиому:

Субстанция, находящаяся в любой мировой точке, всегда при надлежащем определении пространства и времени может быть рассматриваема как находящаяся в покое.

Аксиома выражает ту мысль, что в каждой мировой точке выражение

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

всегда положительно, или иначе, что всякая скорость v всегда меньше c. Сообразно с этим c является для всех субстанциальных скоростей верхним пределом и в этом как раз заключается более глубокое значение величины c. При таком понимании аксиома на первый взгляд кажется мало привлекательной. Но нужно принять во внимание, что теперь возникает новая механика, в которую входит квадратный корень из указанного дифференциального выражения второго порядка, и что поэтому случаи со скоростью, превышающей скорость света, будут играть такую же роль, как, например, в геометрии фигуры с мнимыми координатами.

Толчком и истинным поводом *к принятию группы* G_c послужило то обстоятельство, что дифференциальное уравнение для распространения световых волн в пустоте обладает этой группой G_c.[1] С другой стороны, понятие твердого тела имеет смысл только лишь в механике с группой G_∞. Если имеется оптика с G_c, а с другой стороны имелись бы твердые тела, то легко усмотреть, что двумя относящимися к G_c и G_∞ гиперболоидными полостями выделялось бы *одно* единственное направление t; это обстоятельство повлекло бы за собой то следствие, что оказалось бы возможным, пользуясь надлежащими твердыми оптическими инструментами, заметить в лаборатории изменение явлений при различной ориентации приборов относительно направления движения земли. Все направленные к этой цели усилия, особенно знаменитый интерференционный опыт Майкельсона, дали все же отрицательный результат. Для того чтобы объяснить это, Лоренц предложил гипотезу, успех которой как раз связан с инвариантностью оптики по отношению к группе G_c. По Лоренцу каждое движущееся тело должно сократиться в направлении движения, именно, при скорости v в отношении

$$1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Эта гипотеза звучит крайне фатастически. Ибо сокращение должно мыслиться не как результат сопротивления эфира, но как подарок, ниспосланный свыше, как побочное обстоятельство самого факта движения.

Я хочу теперь на нашем чертеже показать, что гипотеза Лоренца и новые воззрения на пространство

[1] Важное применение этого факта встречается уже у В. Фохта, Göttinger Nachr. 1887, стр. 41.

и время вполне эквивалентны и что благодаря этому гипотеза делается гораздо понятнее. Если с целью упрощения отвлечься от y и z и представить себе пространственно одномерный мир, то параллельная полоса, стоящая прямо, как ось t, и параллельная полоса, наклоненная относительно оси t (рис. 1), суть графики покоящегося и равномерно движущегося тела, сохраняющего в обоих случаях одно и то же постоянное пространственное протяжение. Если прямая OA' параллельна второй полосе, то мы можем ввести t' как временную координату и x' как пространственную координату, и тогда второе тело представляется находящимся в покое, а первое — равномерно движущимся. Примем теперь, что первое тело имеет длину l, когда оно представляется покоящимся; это значит, что поперечное сечение PP первой полосы осью x равно $l \cdot OC$, где OC означает единицу масштаба на оси x; с другой стороны, мы допустим также, что и второе тело, *воспринятое как покоящееся*, имеет ту же длину l; последнее означает тогда, что поперечное сечение $Q'Q'$ второй полосы, измеренное параллельно оси x', равно $l \cdot OC'$. Эти два тела как бы олицетворяют два *одинаковых* лоренцовых электрона, один покоящийся и один равномерно движущийся. Если мы применяем первоначальные координаты x, t, то пространственным протяжением второго электрона будет сечение QQ полосы, ему соответствующей, произведенное *параллельно x-оси.* Так как $Q'Q' = l \cdot OC'$, то, очевидно, $QQ = l \cdot OD'$. Из простого расчета следует, что если $\frac{dx}{dt}$ для второй полосы $= v$, то

$$OD' = OC\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

и, следовательно, также

$$PP : QQ = 1 : \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Но в этом и заключается смысл гипотезы Лоренца о сокращении электронов во время движения. С другой стороны, если мы будем считать второй электрон покоящимся и, следовательно, будем пользоваться координатной системой x', t', то длиной первого электрона будет сечение $P'P'$ соответствующей ему полосы, проведенное параллельно OC', и мы найдем, что первый электрон по сравнению со вторым сократится в том же самом отношении, ибо из фигуры видно, что,

$$P'P' : Q'Q' = OD : OC' = OD' : OC = QQ : PP.$$

Лоренц назвал комбинацию t', связывающую x с t, *местным временем* и воспользовался физическим содержанием этого понятия для лучшего понимания гипотезы сокращения тел. Однако, признать с полною ясностью, что время одного электрона столь же хорошо, как и время другого, т. е., что t и t' должны расцениваться одинаково, явилось заслугой лишь Эйнштейна[1]). Тем самым и прежде всего время, как понятие однозначно определяемое событиями, было отвергнуто. Понятия пространства ни Эйнштейн ни Лоренц не касались, может быть, потому, что при вышеупомянутом специальном преобразовании, при котором плоскость x', t' совпадает с плоскостью x, t, возможно толкование, что ось x пространства сохраняет свое положение. Попытку перешагнуть через понятия пространства соответствующим образом в самом деле можно было бы расценить как

[1]) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17, 891, 1905; Jahrb. d. Radioaktivität und Elektronik 4, 411, 1907.

некоторую дерзость математической мысли. Но после такого все-таки неизбежного шага для истинного понимания группы G_0 термин *„постулат относительности“*, для требования инвариантности по отношению к группе G_c, кажется мне слишком бледным. Так как смысл постулата сводится к тому, что в явлениях нам дается только четырехмерный в пространстве и времени мир, но что проекции этого мира на пространство и на время могут быть взяты с некоторым произволом, мне хотелось бы этому утверждению скорее дать название: *постулат абсолютного мира* (или коротко: мировой постулат).

III.

Благодаря мировому постулату становится возможным равноправное оперирование с четырьмя величинами x, y, z, t. От этого, как будет показано ниже, выигрывает в ясности внешний вид, в котором проявляются физические законы. Прежде всего понятие об *ускорении* приобретает весьма резко очерченный характер.

Я воспользуюсь геометрическими образами, которые напрашиваются сами собой, когда, располагая тремя числами x, y, z, молча отвлекаются от одного из них — от z. Представим себе, что какая-нибудь произвольная мировая точка O сделана нулевой точкой пространства и времени.

Конус

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

с вершиной в O (рис. 2) состоит из двух частей, одной части со значениями $t < 0$ и другой со значениями $t > 0$. Первая часть, *передний конус*, состоит, скажем мы, из всех мировых точек, которые „посылают свет в O“, вторая часть, *задний конус*, из всех

мировых точек, которые „получают свет из O“. Пусть область, ограниченная одним только передним конусом, именуется областью *по сю сторону от O*, а область, ограниченная одним только задним конусом — областью *по ту сторону от O*. По ту сторону от O лежит рассмотренная выше гиперболоидная полость

$$F = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1, \quad t > 0.$$

Рис. 2.

Область *между конусами* заполнена однополыми гиперболоидами:

$$-F = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = k^2,$$

при всех возможных постоянных положительных значениях k^2. Для нас важны гиперболы, имеющие центр в O и лежащие на указанных гиперболоидах. Пусть отдельные ветви этих гипербол коротко называются *промежуточными гиперболами с центром O*. Такая гиперболическая ветвь, мыслимая как мировая линия какой-нибудь субстанциальной точки, будет изображать движение, которое при $t = -\infty$ и $t = +\infty$ асимптотически достигает скорости света c.

Если мы назовем теперь, по аналогии с векторным понятием в пространстве, направленный отрезок в многообразии x, y, z, t *вектором*, то мы должны будем отличать *времени-подобные* векторы с направлениями от O к полости $+F=1$, $t>0$, от *пространственно-подобных* векторов с направлениями от O к $-F=1$. Ось времени может быть направлена параллельно любому вектору первого рода. Всякая мировая точка, находящаяся между передним и задним конусами в O, может быть сделана при помощи соответствующей координатной системы *одновременной* с O, но также и более *„ранней“*, чем O, или более *„поздней“*, чем O. Каждая мировая точка по эту сторону от O всегда будет более ранней, чем O, а каждая мировая точка по ту сторону от O всегда будет более поздней, чем O. Предельному случаю при $c=\infty$ будет соответствовать сжатие клинообразного выреза между конусами в плоское многообразие $t=O$. На рисунках этот вырез намеренно сделан различной ширины.

Разложим какой-нибудь произвольный вектор, как, например, вектор, направленный из O в точку x, y, z, t, на четыре *компоненты* x, y, z, t. Если направления двух векторов соответственно совпадают с направлением некоторого радиуса-вектора OR из O к одной из поверхностей $\mp F=1$ и с направлением касательной RS к указанной поверхности в точке R, то эти векторы будут называться *взаимно перпендикулярными*. Сообразно с этим

$$c^2tt_1-xx_1-yy_1-zz_1=0$$

выражает условие взаимной перпендикулярности двух векторов с компонентами x, y, z, t и x_1, y_1, z_1, t_1.

Единичные масштабы *для численных значений* величин векторов различных направлений пусть будут установлены тем, что некоторому пространственно-подобному вектору, направленному из O к полости $-F=1$, всегда приписывается значение 1, и некоторому другому времени-подобному вектору, направленному

из O к $+F=1$, $t>0$ — всегда приписывается значение $\frac{1}{c}$.

Поэтому, если мы вообразим в какой-нибудь мировой точке P (x, y, z, t) проходящую через нее мировую линию некоторой субстанциальной точки, то времени-подобному векторному элементу dx, dy, dz, dt, расположенному по линии, будет соответствовать численное значение:

$$d\tau=\frac{1}{c}\sqrt{c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2}.$$

Мы называем интеграл от этой величины $\int d\tau=\tau$, взятый вдоль мировой линии от какой-нибудь закрепленной начальной точки P_0 до переменной конечной точки P, *собственным временем* субстанциальной точки в P. На мировой линии величины x, y, z, t, т. е. компоненты вектора OP, рассмотрим как функции собственного времени τ; обозначим их первые производные по τ через $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{t}$, их вторые производные по τ через $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, $\ddot{t}$, и назовем соответствующие векторы, а именно: производную от вектора OP по τ *вектором движения* в P и, производную от этого вектора движения по τ *вектором ускорения* в P. При этом имеют место следующие уравнения:

$$c^2\dot{t}^2-\dot{x}^2-\dot{y}^2-\dot{z}^2=c^2,$$

$$c^2\dot{t}\ddot{t}-\dot{x}\ddot{x}-\dot{y}\ddot{y}-\dot{z}\ddot{z}=0,$$

это значит, что вектор движения есть времени-подобный вектор, имеющий направление мировой линии в P и численное значение равное единице, и что вектор ускорения в P перпендикулярен к вектору движения в P, и, следовательно, должен быть во всяком случае пространственно-подобным вектором.

Легко убедиться, что существует некоторая определенная ветвь гиперболы, имеющая с мировой линией в P три общие бесконечно близко расположенные точки; асимптоты этой ветви принадлежат к образующим одного переднего и одного заднего конуса (рис. 3). Назовем эту гиперболическую ветвь *гиперболой кривизны* в точке P. Если M — центр этой гиперболы, то, следовательно, здесь речь идет о некоторой промежуточной гиперболе с центром в M. Пусть ρ — величина вектора MP; мы видим, *что вектор ускорения в P есть вектор с направлением MP, и с численным значением* $\frac{c^2}{\rho}$.

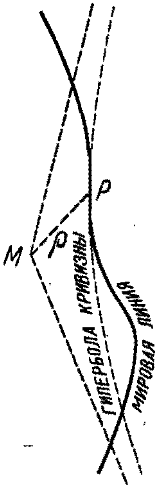


Рис. 3.

Если $\ddot{x}=\ddot{y}=\ddot{z}=\ddot{t}=0$, то гипербола кривизны обращается в прямую, касательную к мировой линии в точке P, и ρ необходимо приравнять ∞.

IV.

Чтобы доказать, что принятие группы G_c для физических законов нигде не приводит к противоречию необходимо пересмотреть всю физику на основе допущения этой группы. Этот пересмотр уже и был в известной степени проведен в вопросах термодинамики и теплового излучения [1]), для электромагнитных явлений и, наконец, для механики при условии сохранения понятия массы [2]).

[1]) M. Planck, Zur Dynamik bewegter Systeme, Berliner Ber. 1907, стр. 542 и Ann. d. Phys. 26, 26, 1908.

[2]) H. Minkowski, Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge, in bewegten Körpern, Göttingen Nachr. 1908, стр. 53.

В последней области необходимо прежде всего поднять следующий вопрос: если сила с компонентами X, Y, Z по пространственным осям приложена к мировой точке P (x, y, z, t), в которой вектор движения есть $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t}$, то в виде какой силы она должна быть воспринята при любом изменении координатной системы? Существуют некоторые определенные проверенные формулы для пондеромоторной силы в электромагнитном поле, применимые в тех случаях, когда вне всякого сомнения должна быть принята группа G_c. Эти формулы ведут к простому правилу: *при изменении координатной системы следует заданную силу определить численно как силу в новых пространственных координатах таким образом, чтобы соответствующий ей вектор с компонентами*

$$\dot{t}X,\ \dot{t}Y,\ \dot{t}Z,\ \dot{t}T,$$

остался бы при этом без изменения, причем

$$T=\frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{x}}{\dot{t}}X+\frac{\dot{y}}{\dot{t}}Y+\frac{\dot{z}}{\dot{t}}Z\right)$$

есть частное от деления мощности, развиваемой силой в мировой точке, на c^2. Этот вектор всегда перпендикулярен к вектору движения в P. Пусть этот силовой вектор, соответствующий силе в P, *называется движущим силовым вектором в точке* P.

Пусть теперь мировая линия, проходящая через P, описывается субстанциальной точкой с постоянной *механической массой* m. Пусть, далее m-кратный вектор движения в P называется *вектором импульса* в P, а m-кратный вектор ускорения в P — *силовым вектором движения* в P. На основе этих определений закон движения материальной точки при заданном движущем векторе силы гласит [1]):

Силовой вектор движения равен движущему вектору силы.

Эта формулировка объединяет четыре уравнения для компонент по четырем осям, причем четвертое уравнение может быть рассматриваемо как следствие из первых трех, потому что оба упомянутых вектора с самого начала перпендикулярны к вектору движения. Согласно указанному значению T, четвертое уравнение, без сомнения, выражает закон сохранения энергии. Поэтому *c^2-кратное значение составляющей импульса по оси t* нужно определить как *кинетическую энергию* материальной точки. Выражение для нее имеет следующий вид:

$$mc^2\frac{dt}{d\tau}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Это выражение, после вычитания аддитивной постоянной mc^2, превращается в выражение $\frac{1}{2}mv^2$ ньютоновой механики с точностью до величины порядка $\frac{1}{c^2}$. При этом становится весьма наглядной *зависимость энергии от координатной системы.* Но так как ось t может иметь направление любого временипободного вектора, то, с другой стороны, закон сохранения энергии, написанный для каждой возможной координатной системы, содержит уже всю систему уравнений движения. Этот факт при рассмотренном переходе к пределу при $c=\infty$ сохраняет свое значение и для аксиоматического построения механики Ньютона и был в этом смысле истолкован уже Шютцем [1]).

[1]) H. Minkowski, loc. cit. стр. 107. Ср. также M. Planck, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 4, 136, 1906.

Соотношение между единицами длины и времени можно заранее установить таким, чтобы естественным пределом для скорости c была бы 1. Если ввести $\sqrt{-1}\cdot t=s$ вместо t, то квадратичное дифференциальное выражение $d\tau^2=-dx^2-dy^2-dz-ds^2$ сделается вполне симметричным в отношении x, y, z, s, и эта симметрия переносится на каждый закон, который не противоречит мировому постулату. Сообразно с этим можно сущность этого постулата математически весьма выпуклым образом облечь в следующую мистическую формулу:

$$3\cdot 10^5 \textit{км}=\sqrt{-1}\ \text{сек.}$$

V.

Обусловленные мировым постулатом преимущества, может быть, ничем иным не доказываются так убедительно, как указанием тех действий, которые по теории Максвелла — Лоренца обусловливаются *движущимся произвольным образом точечным зарядом.* Вообразим себе мировую линию такого точечного электрона с зарядом e и нанесем на ней собственное время τ, начиная от какой-нибудь начальной точки. Для того чтобы получить в любой миро-

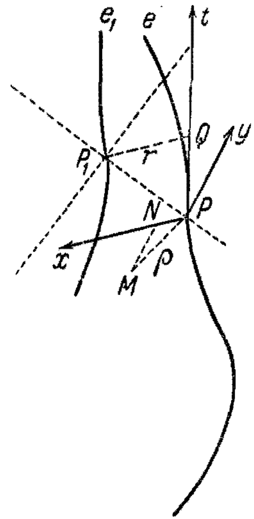


Рис. 4.

[1]) I. R. Schütz, Das Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie, Göttinger Nachr. 1897, стр. 110.

вой точке P_1 вызванное электроном поле, построим передний конус, относящийся к P_1 (рис. 4). Последний пересекает неограниченную мировую линию электрона, очевидно, в одной единственной точке P, потому что направления мировой линии всюду те же, что и направления времени-подобных векторов. Мы проводим касательную к мировой линии в точке P и строим к ней нормаль P_1Q, идущую через P_1. Пусть численное значение P_1Q есть r. Согласно определению переднего конуса необходимо $\frac{r}{c}$ считать численным значением PQ. *Вектор с направлением PQ величины $\frac{e}{r}$ своими компонентами по осям x, y, z представляет векторный потенциал, помноженный на c, а своей компонентой по оси t — скалярный потенциал поля, возбужденного зарядом e, для мировой точки P_1.* В этом и заключается установленные Льенаром и Вихертом элементарные законы [1]).

При описании самого поля, вызванного электроном, оказывается далее, что деление поля на электрическую и магнитную силы относительно, если принять во внимание выбранную ось времени; лучше всего описывать обе силы вместе пользуясь некоторой, хотя и не совсем полной аналогией с вихревой силой в механике.

Я хочу теперь описать *пондеромоторное действие, производимое некоторым движущимся произвольным образом точечным зарядом на другой также произвольно движущийся точечный заряд.* Вообразим, что через мировую точку P_1 проведена мировая линия второго точечного электрона, имеющего заряд e_1. Мы определяем P, Q, r, как прежде, затем находим центр M гиперболы кривизны в P и, наконец, строим нормаль MN из точки M на прямую, проведенную через P параллельно QP_1. Мы устанавливаем теперь координатную систему с началом в точке P следующим образом: пусть ось t направлена по PQ, ось x — по QP_1, ось y — по MN; всем этим вполне определено направление и оси z, как перпендикулярное к осям t, x, y. Пусть вектор ускорения в P есть $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, $\ddot{t}$, вектор движения в P_1 — $\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$, $\dot{z}_1$, $\dot{t}_1$. В таком случае *движущий вектор силы, с которым первый произвольно движущийся электрон e действует на второй произвольно движущийся электрон e_1 в P_1, будет равен*

$$-ee_1\left(\dot{t}_1 - \frac{\dot{x}_1}{c}\right)\mathbf{K},$$

причем для компонент $\mathbf{K}_x$, $\mathbf{K}_y$, $\mathbf{K}_z$, $\mathbf{K}_t$ вектора $\mathbf{K}$ существуют три соотношения:

$$c\mathbf{K}_t - \mathbf{K}_x = \frac{1}{r^2}, \quad \mathbf{K}_y = \frac{\ddot{y}}{c^2 r}, \quad \mathbf{K}_z = 0.$$

Кроме того, *в качестве четвертого соотношения этот вектор $\mathbf{K}$ должен быть перпендикулярен к вектору движения в P_1, что является единственным обстоятельством, связывающим его с последним вектором.*

Если сравнить с этим заключением прежние формулировки того же элементарного закона о пондеромоторном действии друг на друга движущихся точечных зарядов, то мы будем вынуждены признать, что рассматриваемые здесь соотношения вскрываются в своей столь простой внутренней сущности только в четырех измерениях, а в заранее навязанном нам

[1]) A. Liénard, Champ électrique et magnétique produit par une charge concentrée en un point et animée d'un mouvement quelconque, L'Eclairage électrique 16, 5, 1898; 53, 106; E. Wiechert, Elektrodynamische Elementargesetze, Arch. néerl. (2) 5, 549, 1900.

трехмерном пространстве оказываются лишь весьма запутанными проекциями.

В механике, реформированной в согласии с мировым постулатом, исчезают сами собой дисгармонии, которые являлись причиной помех между ньютоновой механикой и новейшей электродинамикой. Мне хотелось бы еще коснуться вопроса о положении *закона притяжения Ньютона* по отношению к этому постулату. Допустим, что, когда две точечные массы m, m_1 описывают свои мировые линии, то на m_1 действует со стороны m движущий вектор силы, точно такого же вида, как и в случае электронов, но в котором только вместо $-ee_1$ теперь стоит $+mm_1$. Рассмотрим специально тот случай, когда вектор ускорения для массы m постоянно равен нулю, причем введем t так, чтобы m было воспринято как покоящаяся масса; кроме того пусть движение массы m_1 происходит только под действием движущего вектора силы, обусловленной массой m. Если мы изменим этот указанный нами вектор, присоединив к нему множитель

$$\dot{t}^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

который с точностью до величин порядка $\frac{1}{c^2}$ равен 1, то окажется [1]), что для координат местонахождения x_1, y_1, z_1 массы m_1 в их зависимости от времени в точности получаются законы Кеплера, причем вместо моментов времени t_1 в них стоит собственное время τ_1 массы m_1. На основании этого простого замечания можно заключить, что предложенный закон притяжения, в связи с новой механикой, не хуже объясняет астрономические наблюдения, чем ньютонов закон притяжения, в связи с механикой Ньютона.

1) H. Minkowski, loc. cit., стр. 110.

Точно так же и основные уравнения для электромагнитных явлений в весомых телах вполне подчиняются мировому постулату. Нет даже никакой надобности отказываться от предложенного Лоренцом вывода этих уравнений на основании представлений электронной теории, как будет мною показано в другом месте.

Мне хочется верить, что не имеющая исключений справедливость мирового постулата является истинной основой электромагнитной картины мира, основой, которая была найдена Лоренцом, очищена далее Эйнштейном и которая теперь предстала пред нами во всей ясности.

При дальнейшей разработке математических следствий, найдется достаточно указаний для экспериментальной проверки истинности постулата для того, чтобы примирить с ним, на основе идеи о предустановленной гармонии между чистой математикой и физикой, и тех, которым неприятно или больно оставить привычные воззрения.

ПРИМЕЧАНИЯ. А. ЗОММЕРФЕЛЬДА.

Само собой разумеется, что в новом издании „Пространства и времени“ Минковского ни одно слово текста не должно было подвергнуться изменению. Я также опасался, что ссылки на примечания, которые следуют здесь, могут помешать удовольствию читателя. Примечания сами по себе не существенны; их цель устранить небольшие формально-математические трудности, которые могли бы помешать проникновению в великие идеи Минковского. На литературу, примыкающую к Минковскому, делаются ссылки постольку, поскольку она находится в непосредственной связи с предметом этого доклада. С физической точки зрения, все сказанное здесь Минковским остается попрежнему в силе (за исключением последнего замечания о законе притяжения Ньютона). Другим вопросом является: как следует отнестись с теорико-познавательной стороны к трактовке проблемы пространства и времени Минковским — и как мне кажется, вопросом, который не особенно затрагивает физическую сторону дела.

1) Стр. 189, строка 4: „С другой стороны понятие твердого тела имеет смысл только лишь в механике с группой G_{∞}''. Это положение в полной мере подтвердилось в дискуссии, которая возникла год спустя после смерти Минковского в связи с одной работой его ученика М. Борна. М. Борн назвал (Ann. d. Phys. **30**, 1, 1909) относительно твердым такое тело, в котором каждый элемент объема и при ускоренных движениях испытывает соответствующее его скорости лоренцово сокращение. Эренфест показал (Phys. Zeitschr. **10**, 918, 1909), что такое тело не может быть приведено во вращение. Херглоц (Ann. d. Phys. **31**, 393, 1910) и Нетер (Ann. d. Phys. **31**, 919, 1910) показали, что оно имеет только три степени свободы. Была сделана попытка определить относительно твердое тело с шестью или с девятью степенями свободы. В противовес этому Планк высказал мнение (Phys. Zeitschr. **11**, 294, 1910), что теория относительности может оперировать только с более или менее упругими телами, и Лауэ доказал (Phys. Zeitschr. **12**, 48, 1911), методами Минковского, пользуясь рис. 2 этого доклада, что в теории относительности каждое твердое тело должно иметь бесконечно много степеней свободы. Наконец, Херглоц (Ann. d.

Phys. **36**, 453, 1911) развил релятивистскую теорию упругости, согласно которой упругие напряжения возникают тогда, когда тело движется, не будучи при этом относительно твердым в понимании Борна. Относительно-твердое тело играет в этой теории упругости такую же роль, какую обыкновенное твердое тело в обыкновенной теории упругости.

2) К стр. 190, строка 30 „Из простого расчета следует, что, если $\frac{dx}{dt}$ для второй полосы равно v, то

$$OD' = OC \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,.“$$

Пусть на рис. 1,

$$\alpha = \sphericalangle A'OA, \quad \beta = \sphericalangle B'OA' = \sphericalangle C'OB',$$

причем равенство последних двух углов следует из симметричного положения асимптот относительно новых координатных осей (сопряженные диаметры гиперболы). В силу равенства $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, имеем

$$\sin 2\beta = \cos 2\alpha.$$

Применив теорему синусов к треугольнику $OD'C'$, имеем:

$$\frac{OD'}{OC'} = \frac{\sin 2\beta}{\cos\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$$

или, так как $OC' = OA'$:

$$OD' = OA' \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = OA' \cos\alpha \cdot (1 - \operatorname{tg}^2\alpha). \qquad (1)$$

x, t — координаты точки A' в системе (x, t), следовательно, $x \cdot OA$ или $ct \cdot OC = ct \cdot OA$ суть соответствующие расстояния до координатных осей; тогда:

$$\left. \begin{aligned} x \cdot OA = \sin\alpha \cdot OA', \quad ct \cdot OA = \cos\alpha \cdot OA', \\ \frac{x}{ct} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{c} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Подставив эти значения для x и ct в уравнение гиперболы, получим:

$$\left. \begin{aligned} OA'^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = OA^2, \\ OA' = \frac{OA}{\cos\alpha\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

следовательно, в силу (1) и (2)

$$OD' = OA\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = OA\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \quad (4)$$

Это и есть, в силу равенства $OA = OC$, подлежащая доказательству формула.

Далее, в прямоугольном треугольнике OCD:

$$OD = \frac{OC}{\cos\alpha} = \frac{OA}{\cos\alpha}.$$

Равенство (3) может быть поэтому написано и так:

$$OA' = \frac{OD}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}, \text{ или } \frac{OD}{OA'} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Это вместе с (4) дает пропорцию:

$$OD : OA' = OD' : OA,$$

которая, в силу равенств

$$OA' = OC' \text{ и } OA = OC,$$

идентична с пропорцией:

$$OD : OC' = OD' : OC,$$

применённой на стр. 191 строка 13.

3) Стр. 194, строка 4. „Всякая мировая точка, находящаяся между передним и задним конусами от O, может быть сделана, при помощи соответствующей координатной системы одновременной с O, но также и более ранней, чем O, или более поздней, чем O". К этому сводит Лауэ доказательство следующего эйнштейновского положения (Phys. Zeitschr. 12, 48, 1911): по теории относительности ни одно событие, обладающее причинной связью, не может распространяться со скоростью, превышающей скорость света („скорость сигнала $\leqq c$"). Предположим, что событие O вызывает другое событие P и что мировая точка P лежит в промежуточной области для O. В этом случае действие передается из O в P со сверх-световой скоростью относительно рассматриваемой координатной системы (x, t), в которой, конечно, следствие P воспринимается позже, чем причина O, $t_p > 0$. Но теперь можно, согласно приведенной выше цитате, изменить координатную систему так, чтобы P оказалось раньше, чем O. Это значит, что можно бесконечно многими способами систему (x', t') выбрать так, чтобы вышло $t_p' < 0$. Последнее несовместимо с представлением о причинности; итак, P должно лежать „по ту сторону от O", т. е. в заднем конусе от O; это значит, что скорость распространения идущего из O импульса, от которого в мировой точке P должно последовать второе событие, — необходимо должна быть $\leqq c$.

Конечно и в теории относительности можно определить такие явления, которые распространяются со сверх-световой скоростью; геометрически, например, это очень просто сделать; но такие явления никогда не могут служить сигналами. Это значит, что невозможно по произволу пускать их в ход с тем, чтобы с их помощью в отдалённом месте приводить в действие, например, какое-либо реле. Например, могут существовать оптические среды, в которых „скорость света" $> c$. Но в таком случае под скоростью света разумеется распространение фаз в бесконечном периодическом потоке волн. Эта скорость никогда не может быть применена для сигнализации. Напротив, фронт волны при всех обстоятельствах и при любых свойствах оптической среды распространяется со скоростью c. Ср., например, A. Sommerfeld, Festschrift Heinrich Weber (Leipzig, Teubner, 1912), стр. 338 или Annalen d. Physik 44, 177, 1914.

4) Стр. 195, строка 10. Как отметил Минковский в одной из бесед со мною, элемент собственного времени $d\tau$ не есть полный дифференциал. Таким образом, если соединить две мировые точки O и P двумя различными мировыми линиями 1 и 2, то

$$\int_1 d\tau \neq \int_2 d\tau.$$

Если первая мировая линия проходит параллельно оси t, вследствие чего первый переход в координатной системе, положенной в основу, означает покой, то легко видеть, что

$$\int_1 d\tau = t, \quad \int_2 d\tau < 1.$$

На этом основывается отмеченное Эйнштейном отставание движущихся часов по отношению к покоящимся. В основе этой мысли, как отметил Эйнштейн, лежит (недоказуемое) допущение, что движущиеся часы действительно указывают собственное время; это значит, что они указывают то время, которое соответствует мгновенному состоянию скорости, которое мыслится стационарным. Для того чтобы можно

было сравнивать движущиеся часы с часами, покоящимися в мировой точке P, первые, конечно, должны быть ускорены (путем изменения скоростей или направлений). Отставание движущихся часов указывает, следовательно, не столько на „движение", сколько на „ускоренное движение". Поэтому здесь нет противоречия с принципом относительности.

5) Стр. 196, строка 7. Обозначение „гипербола кривизны" в точности скопировано с элементарного понятия „круг кривизны". Аналогия делается аналитическим тождеством, если взять вместо действительной координаты времени t мнимую $u = ict$, следовательно, c-кратную координату s, примененную Минковским на стр. 199. Согласно стр. 193 уравнение промежуточной гиперболы в плоскости (x, t) имеет следующий вид:

$$x^2 - c^2t^2 = \rho^2 \quad (k = \rho)$$

и, следовательно, в плоскости (x, u),

$$x^2 + u^2 = \rho^2.$$

Если φ означает чисто мнимый угол, то это уравнение может быть написано в параметрической форме

$$x = \rho \cos \varphi, \quad u = \rho \sin \varphi.$$

На основании этого можно, как я предложил в Ann. d. Phys. (33, стр. 649, § 8), обозначить гиперболическое движение так же, как „циклическое движение", в чем (увлечение поля, появление особого рода центробежной силы) особенно отчетливо будут выражены его главные свойства.

Для гиперболического движения имеем:

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-dl^2 - dx^2} = \frac{\rho}{c}\left| d\varphi \right|,$$

следовательно:

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau} = -ic\sin\varphi, \qquad \dot{u} = \frac{du}{d\tau} = +ic\cos\varphi,$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{d\tau} = \frac{c^2}{\rho}\cos\varphi, \qquad \ddot{u} = \frac{d\dot{u}}{d\tau} = \frac{c^2}{\rho}\sin\varphi.$$

Численная величина вектора ускорения при гиперболическом движении составляет поэтому $\frac{c^2}{\rho}$. Так как любая заранее заданная мировая линия касается гиперболы кривизны в трех точках, то для первой и для гиперболического движения общими являются вектор ускорения и его значение $\frac{c^2}{\rho}$, как указано на стр. 196.

Центром M циклического движения $x^2 + u^2 = \rho^2$ является, очевидно, точка $x = 0$, $u = 0$, и все точки гиперболы „отстоят“ от этого центра на постоянную величину ρ, т. е. на постоянную величину радиуса-вектора. ρ означает поэтому изображенный на рис. 3 отрезок MP.

6) Стр. 197, строка 17. В том, что силу X, Y, Z нужно помножить на $\dot{t} = \frac{dt}{d\tau}$ для получения „вектора силы“, можно убедиться следующим образом: по Минковскому вектор импульса (стр. 197) определяется через $m\dot{x}$, $m\dot{y}$, $m\dot{z}$, $m\dot{t}$. m означает „постоянную механическую массу“, или, как Минковский в другом месте еще яснее говорит, „покоящуюся массу“. Если придерживаться ньютоновского закона движения (производная от импульса по времени равна силе), то нужно положить:

$$\frac{d}{dt} m\dot{x} = X, \qquad \frac{d}{dt} m\dot{y} = Y, \qquad \frac{d}{dt} m\dot{z} = Z.$$

Помножив левые части на $\dot{t}$, получим компоненты

вектора в определении Минковского. Поэтому и $\dot{t}X$, $\dot{t}Y$, $\dot{t}Z$ являются первыми тремя компонентами „вектора силы“. Четвертая компонента T следует однозначно из требования, что вектор силы должен быть перпендикулярным к вектору движения. Уравнения Минковского для механики материальной точки гласят поэтому (при постоянной покоящейся массе) так:

$$m\ddot{x} = \dot{t}X, \quad m\ddot{y} = \dot{t}Y, \quad m\ddot{z} = \dot{t}Z, \quad m\ddot{t} = \dot{t}T.$$

Впрочем, допущение о постоянстве покоящейся массы можно оставить в силе лишь при условии, что при движении тела не меняется содержание энергии в нем (если движение, по обозначению Планка, совершается „адиабатически и изохорически“).

7) Стр. 199, 200, 201. Характерным для изложенных построений является их полная независимость от какой-нибудь специальной координатной системы. Эти построения дают, как это Минковский и постулирует, „взаимоотношения между мировыми линиями“ (или мировыми точками) в качестве „совершеннейшего выражения физических законов“. Координатные оси x, y, z, t принимаются во внимание лишь тогда, когда, как, например, при изложении электродинамического потенциала („четырехмерный потенциал“) последний (условно) должен быть разложен на скалярную и векторную части, которые с релятивистской точки зрения не должны иметь самостоятельного, инвариантного значения,

В качестве комментария к Минковскому я, пользуясь методами Минковского, вывел из уравнений Максвелла инвариантные аналитические выражения для четырехмерного потенциала и для пондеромоторного действия между двумя электронами; эти выражения могут служить заменой разбираемым здесь построениям Минковского (Ann. d. Phys. 33, 649, 1910, п. 7).

Так как точное обоснование их завело бы нас слишком далеко, то я отсылаю к упомянутой работе или к соответсвующим местам книги Лауэ [Das Relativitätsprinzip, Braunschweig (Vieweg) (1913) § 19]. Ср., далее, доклад Минковского „Das Relativitätsprinzip", Ann. d. Phys. **47**, 927, (1915), который был издан автором этих строк; в этом докладе четырехмерный потенциал был поставлен во главу угла всей электродинамики, которая благодаря этому была приведена к ее простейшему виду.

8) Стр. 200, строка 18. Инвариантное описание электромагнитного поля в виде „вектора второго рода" (для которого я предложил как будто начинающее прививаться обозначение „шестивектор") входит как весьма важная часть в концепцию электродинамики Минковского. В то время как идеи Минковского в отношении понятия о векторе первого рода (четырехвектор) были отчасти и раньше уже высказаны Пуанкаре (Rend. Circ. Mat. Palermo **21**, (1906), введение вектора второго рода (шестивектор) Минковским ново и существенно. Подобно шестивектору „силовой" винт в механике (т. е. сочетание отдельной силы и пары сил) зависит от 6 независимых параметров. Подобно тому, как в электромагнитном поле деление на электрическую и магнитную силу относительно, разложение сил, составляющих „силовой винт", как известно, может быть произведено весьма различным образом.

9) Стр. 202. Релятивистская форма ньютоновского закона, данная Минковским, оказывается для частного отмеченного в тексте случая исчезающего ускорения частным случаем более общей формы, предложенной Пуанкаре (в только что цитированной работе), но в учете ускорения она идет дальше последней работы. Из формулировки закона тяготения, данной Минковским или Пуанкаре, вытекает, что можно (раз-

личным образом) примирить закон Ньютона с теорией относительности. Этот закон понимается при этом как точечный закон, т. е. как своего рода дальнодействие. „Общая теория относительности", которую развил Эйнштейн, начиная с 1907 года, захватывает проблему тяготения глубже. В ней тяготение — что с современной точки зрения представляется неоспоримым — не только излагается как учение о некотором поле и описывается посредством пространственно-временных дифференциальных уравнений, но и органически связывается с принципом относительности, обобщенным для любых преобразований, в то время как, по мысли Минковского и Пуанкаре, оно было скорее лишь внешним образом приспособлено к постулату относительности. В общей теории относительности структура пространства и времени определяется из тяготения или вместе с ним. При этом принцип относительности — в дальнейшее развитие идей Минковского — формулируется том смысле, что он требует ковариантности физических величин в отношении всех точечных преобразований, причем коэффициенты инвариантного элемента линии должны тогда войти в физические законы.

10) Стр. 203. „Основные уравнения для электромагнитных процессов в движущихся телах" были изложены Минковским в Göttinger Nachrichten за 1907 г. Ему не суждено было довести до конца „вывод этих уравнений на основе представлений электронной теории". Наброски, относящиеся к этому вопросу, были разработаны Борном, и образуют вместе с „Основными уравнениями" первый том этой серии монографий[1]) (Лейпциг 1910).

[1]) Серия монографий под общим заглавием „Fortschritte der mathematischen Wissenschaften". Первый выпуск содержит работы Минковского. *Прим. ред.*

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ЭЙНШТЕЙНА

А. ЭЙНШТЕЙН.

О ВЛИЯНИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА [1]).

В одной статье, опубликованной четыре года тому назад, я пытался ответить на вопрос, влияет ли тяготение на распространение света [2]). Я снова возвращаюсь к этой теме, так как меня не удовлетворяет прежнее изложение вопроса; кроме того, я теперь снова убедился, что один из наиболее важных выводов той работы поддается экспериментальной проверке. А именно, оказывается, что лучи, которые проходят вблизи солнца, испытывают под влиянием поля тяготения солнца, согласно ниже изложенной теории, отклонение, вследствие чего должно произойти кажущееся увеличение углового расстояния между неподвижной, близко расположенной к солнцу звездой и самим солнцем в размере почти одной дуговой секунды.

При развитии этих идей получились еще некоторые результаты, относящиеся к тяготению. Так как изложение всех рассуждений оказалось бы громоздким в ущерб ясности, то ниже будут даны только некоторые совершенно элементарные соображения, с помощью которых легко и удобно ориентироваться

---

[1]) Ann. d. Phys. **35**, 898, 1911.

[2]) A. Einstein, Jahrb. f. Radioakt. u. Elektronik **4**, 1907.

в предпосылках и в логическом развитии теории. Выведенные в этой статье соотношения являются верными только в первом приближении, даже если теоретическое основание их и окажется справедливым.

§ 1. Гипотеза о физической природе гравитационного поля.

Пусть в однородном поле тяжести (ускорение силы тяжести γ) находится покоящаяся координатная система K, которая ориентирована так, что силовые линии поля тяжести идут в направлении отрицательной оси z. Пусть в пространстве, свободном от гравитационных полей, находится вторая координатная система K', которая совершает в направлении своей положительной оси z равномерно-ускоренное движение (ускорение γ). Чтобы не усложнять напрасно рассуждения, откажемся сначала от теории относительности и рассмотрим обе системы, пользуясь привычной нам кинематикой, а происходящие в них движения — пользуясь обычной механикой.

Материальные точки, которые не подвергаются влиянию со стороны других материальных точек, двигаются относительно K, как и относительно K', согласно уравнениям:

$$\frac{d^2x_\nu}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y_\nu}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z_\nu}{dt^2} = -\gamma.$$

Для ускоренной системы K' это следует прямо из принципа Галилея, для покоящейся же в однородном гравитационном поле системы K это следует из того опытного факта, что все тела в таком поле одинаково сильно и равномерно ускоряются. Этот опытный факт об одинаковом падении всех тел в гравитационном поле есть один из наиболее общих фактов, установленных нами из наблюдений природы; несмотря на

это, закон этот не нашел еще места в основах нашей физической картины мира.

Мы однако приходим к весьма удовлетворительной интерпретации этого опытного закона, если допустим, что системы K и K' физически в точности равноценны, т. е. допустим, что систему K также можно рассматривать как систему, находящуюся в пространстве, свободном от поля тяготения; но при этом мы должны рассматривать K как равномерно-ускоренную систему. При таком способе понимания нельзя говорить об *абсолютном ускорении* координатной системы, так же как нельзя по теории относительности говорить об *абсолютной скорости* [1]). При такой точке зрения одинаковое падение всех тел в гравитационном поле само собою очевидно.

Пока мы ограничиваемся чисто механическими явлениями, для которых справедлива механика Ньютона, мы уверены в равноценности систем K и K'. Однако, представление наше будет только тогда достаточно глубоким, когда системы K и K' станут равноценными относительно всех физических явлений, т. е. когда законы природы по отношению к K вполне совпадут с законами природы по отношению к K'. Приняв это, мы получаем принцип, имеющий, если он действительно справедлив, большое эвристическое значение. Ибо с помощью теоретического изучения явлений, протекающих относительно равномерно-ускоренной координатной системы, мы получаем ключ к пониманию хода явления в однородном гравитационном поле. В дальнейшем будет прежде всего

---

[1]) Конечно, нельзя *любое* поле тяготения заменить состоянием движения системы без гравитационного поля, точно так же, как нельзя преобразовать все точки произвольно движущейся среды к покою посредством релятивистского преобразования.

показано, каким образом с точки зрения обычной теории относительности наша гипотеза приобретает значительную долю вероятности

§ 2. О тяжести энергии.

Теория относительности привела к выводу, что инертная масса тела растет с содержанием энергии; если приращение энергии составляет E, то приращение инертной массы равно E/c^2, где c — скорость света. Соответствует ли этому приращению инертной массы также приращение тяготеющей массы? Если нет, то тело в одном и том же поле тяжести падало бы с различным ускорением, смотря по содержанию энергии тела. Столь удовлетворяющий нас результат теории относительности, по которому закон сохранения массы содержится в законе сохранения энергии, оказался бы несправедливым, ибо в таком случае для *инертной* массы нужно было бы отбросить закон сохранения массы в его старой формулировке, а для тяготеющей массы он остался бы в силе.

Это следствие нужно считать весьма невероятным. С другой стороны, обыкновенная теория относительности не дает ни одного аргумента, из которого можно было бы заключить, что вес тела зависит от содержания в нем энергии. Но мы покажем, что из нашей гипотезы эквивалентности систем K и K' вытекает тяжесть энергии как необходимое следствие.

Пусть обе системы тел S_1 и S_2, снабженные измерительными инструментами, расположены на оси z системы K на расстоянии h друг от друга[1]) таким образом, что гравитационный потенциал в S_2 на γh больше гравитационного потенциала в S_1. Пусть от S_2 посылается в сторону S_1 определенное количество энергии E в виде излучения. Пусть при этом значение энергии измеряется с помощью приборов, которые, будучи доставлены в одно и то же место системы z и там друг с другом сравнены, оказались бы вполне одинаковыми. A priori ничего нельзя сказать о процессе переноса энергии через излучение, потому что мы не знаем, как влияет поле тяжести на лучистую энергию и на измерительные инструменты в S_1 и S_2.

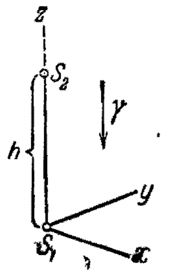


Рис. 1.

Согласно допущению эквивалентности K и K', мы можем на место системы K, находящейся в однородном поле тяготения, поставить свободную от тяжести систему K', движущуюся равномерно ускоренно в направлении положительных z; с осью z системы K' твердо скреплены тела S_1 и S_2.

Пусть мы судим о процессе переноса энергии лучами из S_2 в S_1, находясь в некоторой системе K_0, которая не имеет ускорения. Положим в тот момент, когда, лучистая энергия E_2 отсылается из S_2 в сторону S_1 система K' обладает скоростью, равной нулю относительно системы K_0. Лучи прибудут в S_1 после того, как пройдет время $\frac{h}{c}$ (в первом приближении). В этот момент S_1 обладает относительно K_0 скоростью $\frac{\gamma h}{c} = v$. Поэтому, согласно обыкновенной теории относительности, прибывающее в S_1 излучение имеет энергию не E_2, но бо́льшую энергию E_1, которая в первом приближении связана с E_2 формулой [1]):

$$E_1 = E_2\left(1 + \frac{v}{c}\right) = E_2\left(1 + \frac{\gamma h}{c^2}\right). \qquad (1)$$

[1]) S_1 и S_2 бесконечно малы по сравнению с h.

[1]) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17, 913—914, 1905.

По нашему допущению, то же соотношение справедливо в том случае, когда процесс протекает в неускоряемой, но находящейся в гравитационном поле системе K. В этом случае мы можем заменить γh потенциалом Φ гравитационного вектора в S_2, если произвольная постоянная потенциала Φ в S_1 приравнивается нулю. Следовательно, имеем:

$$E_1 = E_2 + \frac{E_2}{c^2}\Phi. \tag{1a}$$

Это уравнение выражает закон сохранения энергии для рассматриваемого процесса. Энергия E_1, прибывающая в S_1, больше, чем измеренная одинаковыми приборами энергия E_2, испускание которой произошло в S_2, именно, на величину потенциальной энергии массы $\frac{E_2}{c^2}$ в поле тяжести. Таким образом оказывается, что для выполнения принципа сохранения энергии нужно энергии E перед ее испусканием из S_2 приписать потенциальную энергию тяжести, которая соответствует (тяготеющей) масссе $\frac{E}{c^2}$. Наше допущение эквивалентности K и K' устраняет, таким образом, изложенную в начале этого параграфа трудность, чего не могла сделать обыкновенная теория относительности.

Смысл этого результата становится особенно ясным при рассмотрении следующего кругового процесса:

1. Лучистая энергия E (измеренная в S_2) посылается из S_2 в S_1, где, согласно только что полученному результату, поглощается энергия $E\left(1+\frac{\gamma h}{c^2}\right)$ (измеренная в S_1).

2. Тело W с массой M опускается от S_2 до S_1, причем отдается во вне работа $M\gamma h$.

3. Энергия E с S_1 переносится на тело W, когда оно находится в S_1. Благодаря этому изменяется тяготеющая масса M; пусть ее новое значение равно M'.

4. Тело W опять поднимается в S_2, причем затрачивается работа $M'\gamma h$.

5. Энергия E опять переносится с W на S_2.

Эффект этого кругового процесса заключается в том, что система S_1 приобрела энергию $E\left(\frac{\gamma h}{c^2}\right)$, получив количество энергии $M'\gamma h - M\gamma h$ в форме механической работы. По закону сохранения энергии должно, следовательно, иметь место уравнение:

$$E\,\frac{\gamma h}{c^2} = M'\gamma h - M\gamma h$$

или

$$M' - M = \frac{E}{c^2}\,. \tag{1b}$$

Таким образом, приращение *тяготеющей* массы равно $\frac{E}{c^2}$, следовательно, оно равно тому приращению *инертной* массы, которое следует из теории относительности.

Еще непосредственнее этот результат получается из эквивалентности систем K и K', согласно которой *тяготеющая* масса, определенная относительно K, точно равна *инертной* массе, определенной относительно K'; поэтому энергия должна иметь *тяготеющую* массу, равную ее *инертной* массе. Если в системе K' привесить массу M_0 к пружинным весам, то последние вследствие инертности M_0 покажут кажущийся вес $M_0\gamma$. Если перенести энергию E на M_0, то согласно принципу инертности энергии пружинные весы покажут $\left(M_0+\frac{E}{c^2}\right)\gamma$. Согласно нашему основному допущению, то же самое должно наступить при повторении опыта в системе K, т. е. в поле тяготения.

§ 3. Время и скорость света в поле тяготения.

Если излучение в S_2, испускаемое в равномерно ускоренной системе K' по направлению S_1, обладало относительно часов, находящихся в S_2, частотой ν_2, то, по прибытии в S_1, оно, относительно находящихся там одинаково устроенных часов, не обладает уже частотой ν_2, но имеет бо́льшую частоту ν_1; последняя в первом приближении будет равна

$$\nu_1 = \nu_2 \left(1 + \frac{\gamma h}{c^2}\right). \tag{2}$$

В самом деле, если снова ввести неускоренную систему K_0, относительно которой K' в момент испускания света не имело никакой скорости, то S_1 имеет относительно K_0 в момент прибытия излучения в S_1 скорость $\gamma\left(\frac{h}{c}\right)$, откуда в силу принципа Допплера и получается непосредственно соотношение (2).

Согласно нашему предположению об эквивалентности систем K' и K, это уравнение верно и для покоящейся координатной системы K, в которой действует однородное поле тяжести, в том случае, когда в этой системе происходит описанный перенос лучистой энергии. Таким образом получается, что луч света, испускаемый при определенном потенциале тяжести в S_2 и обладающий при его испускании частотой ν_2, измеренной часами, находящимися в S_2,— обладает при его прибытии в S_1 другой частотой ν_1, если последняя измеряется с помощью одинаково сделанных часов, находящихся в S_1. Мы заменяем γh через потенциал тяжести Φ, взятый в S_2 по отношению к S_1, как нулевой точке, и принимаем, что зависимость, полученная нами для однородного гравитационного поля, верна также и для полей другого вида; в таком случае

$$\nu_1 = \nu_2 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right). \tag{2a}$$

Этот результат, верный при нашем выводе в первом приближении, находит прежде всего следующее применение. Пусть ν_0 будет числом колебаний некоторого элементарного источника света, определенным с помощью находящихся в том же месте, где и источник, часов U. Это число колебаний не зависит от того, где устанавливается источник света вместе с часами. Вообразим, что и то и другое помещены, например, на солнечной поверхности (там находится наше S_2). Из испускаемого там света часть доходит до земли (S_1), где мы с часами U точно такой же конструкции, как и названные выше, измеряем частоту ν дошедшего света. Тогда в силу (2а) имеем

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right),$$

где Φ означает (отрицательную) разность гравитационных потенциалов солнечной поверхности и земли. Таким образом, согласно нашему представлению, спектральные линии солнечного света должны по сравнению с соответствующими спектральными линиями земных источников света несколько сместиться в сторону красного света, а именно, на относительную величину

$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = \frac{-\Phi}{c^2} = 2 \cdot 10^{-6}.$$

Это смещение можно было бы измерить, если бы были точно известны условия, при которых возникают солнечные линии. Однако в виду того, что другого рода причины (давление, температура) также влияют на положение центра тяжести спектральных линий, трудно установить, имеет ли действительно место выведенное выше влияние гравитационного потенциала[1]).

При поверхностном рассмотрении кажется, что уравнения (2) или (2a) абсурдны. Возможно ли, чтобы при непрерывном переносе света от S_2 в S_1, туда прибывал свет с другим числом периодов в секунду, чем свет, вышедший из S_2. Но ответ на это прост. Мы не можем ν_2 или ν_1 рассматривать просто как частоты (числа периодов в секунду), так как мы еще не установили времени в системе K. ν_2 означает число периодов, отнесенное к единице времени часов U в S_2, ν_1 — число периодов, отнесенное к единице времени таких же точно часов U и S_1. Ничто не принуждает нас к допущению, что часы, находящиеся при различных гравитационных потенциалах, должны рассматриваться как одинаково быстро идущие механизмы. Наоборот, мы непременно должны определить время в K так, чтобы число гребней волн и минимумов между ними, которые находятся между S_2 и S_1, не зависело от абсолютного значения времени, ибо рассматриваемый процесс по природе своей стационарен. Если мы этого условия не выполним, то придем к определению времени, при применении которого время явно войдет в законы природы, что, конечно, неестественно и нецелесообразно. Итак, оба часовых механизма в S_2 и S_1 не показывают правильного

[1]) L. F. Jewell (Journ. d. phys. 6, 84, 1897) и особенно Ch. Fabry и H. Boisson (C. R. 148, 688—690, 1909) действительно нашли подобные смещения тонких спектральных линий в сторону красного конца спектра, вычисленного выше порядка, но приписали это действию давления в поглощающем слое.

„времени". Если мы определяем время в S_1 часами U, *то мы должны измерить время в S_2 часами, которые идут в $1+\frac{\Phi}{c^2}$ раза медленнее, чем часы U, при их сравнении в одном и том же месте.* Ибо измеренная подобными часами частота рассмотренного выше луча света, при его отправлении из S_2, а именно

$$\nu_2\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right),$$

в согласии с формулой (2a) равна частоте ν_1 того же луча света при его прибытии в S_1.

Отсюда вытекает следствие фундаментального значения для теории. Если измерять скорость света в различных местах ускоренной системы K' без гравитационного поля, пользуясь одинаково идущими часами U, то всюду будет получаться одна и та же величина. То же справедливо, согласно нашему основному допущению, и для системы K. Из только что сказанного следует, что мы должны в местах с различными гравитационными потенциалами при измерении времени пользоваться различно идущими часами. В том месте, которое относительно начала координат обладает гравитационным потенциалом Φ, мы должны при измерении времени применять часы, которые при перенесении их в начало координат шли бы в $\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right)$ раза медленнее, чем те часы, которыми определялось время в начале координат. Если мы обозначим через c_0 скорость света в начале координат, то скорость света c вместе с гравитационным потенциалом Φ будет дана соотношением

$$c=c_0\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right). \tag{3}$$

По этой теории, принцип постоянства скорости света действителен не в той формулировке, в какой он обыкновенно кладется в основу обыкновенной теории относительности.

§ 4. Искривление лучей света в гравитационном поле.

Из только что доказанного положения, что скорость света в поле тяготения есть функция места, нетрудно с помощью принципа Гюйгенса доказать, что лучи света, распространяющиеся поперек поля тяготения, должны быть искривлены. В самом деле, пусть ε — плоскость равной фазы некоторой плоской волны света в момент времени t, и пусть P_1 и P_2 будут две точки на ней, между которыми расстояние равно 1. P_1 и P_2 лежат в плоскости чертежа,

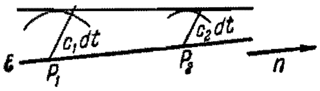


Рис. 2.

причем эта плоскость выбрана так, что взятая по нормали к ней производная от Φ, а следовательно, также и от c, обращается в нуль. Описав около точек P_1 и P_2 окружности радиусами c_1dt и c_2dt и проведя к ним общую касательную, мы получим плоскость равной фазы, точнее, ее сечение плоскостью чертежа для времени $t + dt$; c_1 и c_2 представляют собой скорости света соответственно в точках P_1 и P_2. Угол искривления луча света на пути cdt составляет следовательно

$$\frac{(c_1 - c_2)\,dt}{c} = -\frac{\partial c}{\partial n'}\,dt,$$

если мы его считаем положительным, когда луч света изгибается в сторону возрастающей n'.

Угол кривизны на единицу пути луча света составляет

$$-\frac{1}{c}\,\frac{\partial c}{\partial n'},$$

или, в силу (3), равен

$$-\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial \Phi}{\partial n'}.$$

Наконец, для отклонения α, которое луч света испытывает на любом пути s в сторону n', мы получаем выражение

$$\alpha = -\frac{1}{c^2}\int \frac{\partial \Phi}{\partial n'}\,ds. \tag{4}$$

Этот же результат мы могли бы получить и путем непосредственного рассмотрения распространения луча света в равномерно-ускоренной системе K' и переноса результата на систему K_1 и отсюда на тот случай, когда гравитационное поле имеет произвольный вид.

Луч света, проходящий мимо какого-либо небесного тела, испытывает по формуле (4) отклонение в сторону падающего гравитационного потенциала, то-есть, в сторону, обращенную к небесному телу, равное

$$\alpha = \frac{1}{c^2}\int\limits_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\vartheta=+\frac{\pi}{2}} \frac{kM}{r^2}\cos\vartheta\,ds = \frac{2kM}{c^2\Delta},$$

где k — гравитационная постоянная, M — масса небесного тела, Δ — расстояние от луча до центра небесного тела.

Луч света, проходящий мимо солнца, испытал бы на этом основании отклонение в размере

$4 \cdot 10^{-6} = 0{,}83$ дуговой секунды. Благодаря искривлению луча угловое расстояние звезды от солнечного центра представится увеличившимся на эту величину.

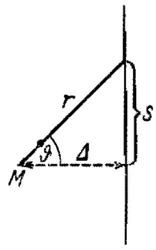


Рис. 3.

Так как звезды соседних с солнцем частей неба делаются видимыми при полных затмениях, то это следствие теории сравнимо с опытом. У планеты Юпитер ожидаемое смещение достигает приблизительно $\frac{1}{100}$ указанной величины. Было бы крайне желательно, чтобы астрономы заинтересовались поставленным здесь вопросом даже и в том случае, если бы предыдущие рассуждения казались недостаточно обоснованными или рискованными. Ибо, отвлекаясь от всякой теории, нужно спросить себя, можно ли вообще современными средствами установить влияние гравитационных полей на распространение света.

Прага, июнь 1911 г.

(Поступило в печать 21 июня 1911 г.)

А. ЭЙНШТЕЙН.

ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ[1].

А. Принципиальные соображения о постулате относительности.

§ 1. Замечания к специальной теории относительности.

В основе специальной теории относительности лежит следующий постулат, которому также удовлетворяет механика Галилея и Ньютона.

Если координатная система K выбрана так, что относительно нее физические законы действительны в своей простейшей форме, то *те же законы* действительны в применении ко всякой другой координатной системе K', которая относительно K находится в равномерном поступательном движении. Мы называем этот постулат „специальным принципом относительности". Словом „специальный" должно быть выражено то, что принцип ограничивается тем случаем, когда K' совершает относительно K *равномерное поступательное движение*, и что равноценность K' и K не распространяется на случай неравномерного движения K' относительно K.

Итак, специальная теория относительности отличается от классической механики не постулатом

---

[1]) Ann. d. Phys. **49**, 760, 1916.

относительности, а исключительно постулатом о постоянстве скорости света в пустоте; из последнего в соединении со специальным принципом относительности вытекает известным образом относительность одновременности, преобразование Лоренца и связанные с последним законы, касающиеся движущихся твердых тел и часов. Хотя теория пространства и времени и испытала под влиянием специальной теории относительности весьма глубокое изменение, однако *один* важный пункт остался нетронутым.

В самом деле и в специальной теории относительности высказывания геометрии имеют непосредственное значение законов, касающихся возможных относительных положений (покоящихся) твердых тел, а положения кинематики — более общее значение законов, описывающих состояние измерительных приборов и часов. При этом двум выбранным материальным точкам покоящегося (твердого) тела всегда соответствует некоторый отрезок вполне определенной длины, независимо как от местоположения и ориентации тела, так и от времени; двум отмеченным показаниям стрелки часов, покоящихся относительно их (надлежащей) координатной системы, всегда соответствует интервал времени определенной величины, независимо от места и времени. Вскоре мы увидим, что общая теория относительности не может придерживаться этого простого физического толкования пространства и времени.

§ 2. Об основаниях, которые подсказывают расширение постулата относительности.

Классической механике и, не в меньшей степени, специальной теории относительности присущ некоторый теоретико-познавательный недостаток, который,

пожалуй впервые был с ясностью отмечен Э. Махом. Мы поясним его на следующем примере. Пусть два жидких тела одинаковой величины и состава свободно висят в пространстве в таком большом отдалении друг от друга (и от всех прочих масс), что должны быть приняты во внимание только те силы притяжения, с которыми части *одного* из этих тел в отдельности действуют друг на друга. Пусть расстояние между этими телами остается неизменным. Пусть также не имеют места перемещения частей одного из тел относительно другого. Но пусть каждая масса — рассматриваемая наблюдателем, покоящимся относительно другой массы — вращается вокруг линии соединения масс с постоянной угловой скоростью (это относительное движение обеих масс всегда возможно установить). Теперь представим себе, что поверхности обоих тел (S_1 и S_2) измерены с помощью масштабов (покоящихся относительно этих тел); пусть в результате измерения оказалось, что поверхность S_1 есть шар, а поверхность S_2 — эллипсоид вращения.

Мы спрашиваем теперь: по какой причине тела S_1 и S_2 ведут себя различно? Ответ на этот вопрос может быть только тогда признан удовлетворительным [1]) с теоретико-познавательной стороны, когда обстоятельство, указанное в качестве причины, является *наблюдаемым опытным фактом*; ибо закон причинности только тогда имеет смысл суждения о явлениях в мире нашего опыта, когда в качестве причин и следствий в конечном итоге оказываются лишь *факты, могущие быть наблюдаемыми.*

[1]) Удовлетворительный с теоретико-познавательной точки зрения ответ может, конечно, всегда еще оказаться *физически* неверным в том случае, когда он расходится с другими опытными данными.

Механика Ньютона не дает удовлетворительного ответа на этот вопрос. Она говорит следующее. Законы механики справедливы правда для пространства R_1, относительно которого тело S_1 находится в покое, но не справедливы для пространства R_2, относительно которого находится в покое S_2. Законное галилеево пространство (или относительное по отношению к нему движение), которое при этом вводится, есть однако только *фиктивная* причина, но не наблюдаемый факт. Таким образом ясно, что ньютонова механика в рассматриваемом случае удовлетворяет требованию причинности не реально, но кажущимся образом, делая ответственным за наблюдаемое различное поведение тел S_1 и S_2 только фиктивную причину R_1.

Удовлетворительным ответом на поставленный выше вопрос может быть только следующий: физическая система, состоящая из S_1 и S_2, сама по себе не дает возможности указать причину, с помощью которой можно было бы объяснить различное поведение тел S_1 и S_2. Причина должна, следовательно, лежать *вне* этой системы. Отсюда следует вывод, что общие законы движения, через которые в частности определяется форма тел S_1 и S_2, должны быть таковы, что механические свойства тел S_1 и S_2 должны в значительной степени обусловливаться отдаленными массами, которые мы не включили в рассматриваемую систему. Эти отдаленные массы (и их относительные движения по отношению к рассматриваемым телам) должны тогда рассматриваться как носители принципиально наблюдаемых причин различного поведения тел S_1 и S_2; они становятся на место воображаемой причины R_1. Из всех мыслимых пространств R_1 и R_2 и т. д., движущихся любым образом относительно друг друга, ни одному из них a priori не должно

отдаваться предпочтение, если только изложенное теоретико-познавательное возражение не должно иметь места. *Законы физики должны быть составлены так, чтобы они были действительны для произвольно движущихся координатных систем.* Таким образом мы приходим к расширению постулата относительности.

Кроме этого весьма важного теоретико-познавательного аргумента, за расширение теории относительности говорит еще один хорошо известный физический факт. Пусть K — галилеева координатная система, т. е. такая, относительно которой (по крайней мере, в рассматриваемой четырехмерной области) некоторая масса, достаточно удаленная от других, движется прямолинейно и равномерно. Пусть K' — вторая координатная система, которая относительно K движется *равномерно ускоренно*. Достаточно изолированная от других масса совершает тогда относительно K' ускоренное движение, причем ни ускорение, ни направление этого ускорения не зависят от химического состава и физического состояния этой массы.

Может ли наблюдатель, покоящийся относительно K', заключить отсюда, что он находится на „действительно" ускоренной координатной системе? Ответ на этот вопрос должен быть отрицательным; ибо только что указанное поведение масс, свободно движущихся относительно K', может быть столь же хорошо объяснено следующим образом. Координатная система K' не имеет ускорения; но в рассматриваемой пространственно-временной области имеется поле тяготения, вызывающее ускоренное движение тел относительно K'.

Такого рода объяснение становится возможным благодаря тому, что нам из опыта известно о существовании силового поля (а именно, поля тяготения), обладающего замечательным свойством сообщать всем телам одно и то же ускорение [1]). Механическое поведение тел относительно K' будет таким же, какое обнаруживается на опыте по отношению к системам, которые мы привыкли рассматривать как „покоящиеся“, или как „законные“; поэтому и с физической точки зрения надлежит принять, что обе системы K и K' с одинаковым правом могут быть рассматриваемы как „покоящиеся“, или, точнее, что обе системы равноправны в качестве координатных систем для физического описания процессов.

Из этих соображений видно, что построение общей теории относительности должно в то же время привести и к теории тяготения; ибо гравитационное поле можно „создать“ простым изменением координатной системы. Далее, сразу видно, что принцип постоянства скорости света в пустоте должен быть изменен. Ибо легко убедиться в том, что траектория луча света относительно K' в общем должна быть кривой, если свет относительно K распространяется прямолинейно и с определенной постоянной скоростью.

§ 3. Пространственно-временной континуум. Требование общей ковариантности для уравнений, выражающих законы природы.

В классической механике, а также и в специальной теории относительности координаты пространства и времени имеют непосредственное физическое значение. Когда мы говорим: точечное событие имеет координату x_1, то это означает следующее: проекцию точечного события на ось X_1, найденную по правилам эвклидовой геометрии посредством твердых стержней, получают, откладывая определенный стержень — единицу масштаба — x_1 раз от начала координат по (положительной) оси X_1. Когда мы говорим: точка имеет координату $x_4 = t$, то это означает следующее: по часам (эталону времени), покоящимся относительно координатной системы, пространственно (практически) совпадающим с точечным событием и заведенными по определенным правилам, — прошло $x_4 = t$ периодов, когда наступило точечное событие [1]).

Подобного рода понимание пространства и времени, хотя быть может большею частью и бессознательно, всегда представлялось взору физиков, что ясно видно из той роли, какую играют эти понятия в измерительной физике. Подобного рода понимание читатель должен был положить также в основу второго рассуждения последнего параграфа для того, чтобы придать ему некоторый смысл. Однако мы покажем теперь, что это понимание нужно отбросить и заменить более общим для того, чтобы провести постулат общей относительности, при условии, что специальная теория относительности имеет место в предельном случае отсутствия гравитационного поля.

Мы вводим в пространстве, свободном от гравитационных полей, галилееву координатную систему K (x, y, z, t) и, кроме того, координатную систему K' (x', y', z', t'), которая равномерно вращается отно-

[1]) Этвеш экспериментально доказал, что гравитационное поле обладает этим свойством с большой степенью точности.

[1]) Мы допускаем возможность констатирования „одновременности“ для пространственно непосредственно смежных событий или — точнее выражаясь — для пространственно-временного соприкосновения (совпадения), не давая определения этому фундаментальному понятию.

сительно K. Пусть начала координат обеих систем, так же как и их оси Z, все время совпадают друг с другом. Мы покажем, что вышеприведенные определения, касающиеся физического значения длин и времен, не годятся для измерения пространства и времени в системе K'. На основании симметрии ясно, что окружность в координатной плоскости X, Y системы K с центром в начале координат может в то же время рассматриваться как окружность в координатной плоскости X', Y' системы K'. Вообразим теперь, что длина и диаметр этой окружности измерены при помощи единичного масштаба (бесконечно малого по сравнению с радиусом) и затем взято отношение обоих результатов измерения. Если выполнить этот эксперимент с масштабом, покоящимся относительно галилеевой системы K, то в качестве частного получится число π. Результатом измерения, выполненного с масштабом, покоящимся относительно K', будет число, которое больше π. В этом легко убедиться, если судить о процессе измерения из „покоящейся“ системы K и принять во внимание, что тангенциально приложенный масштаб претерпевает лоренцово сокращение, а радиально приложенный масштаб не изменяется. Поэтому в отношении K' эвклидова геометрия не действительна; выше установленное понятие о координатах, которое предполагает применимость эвклидовой геометрии, оказывается непригодным в применении к системе K'. Столь же невозможным оказывается введение в K' соответствующего требованиям физики времени, которое указывалось бы одинаковыми часами, покоящимися относительно K'. Для того чтобы в этом убедиться, представим себе, что в начале координат и где-нибудь на окружности круга установлена пара одинаково устроенных часов, наблюдаемых из „покоящейся“

системы K. Согласно известному выводу специальной теории относительности — наблюдение по K-часам дает, что часы, установленные на окружности круга, идут медленнее часов, помещенных в начале координат, потому что первые двигаются, а последние нет.

Наблюдатель, который находится в общем начале координат и который способен, пользуясь светом, наблюдать часы, находящиеся на окружности круга, обнаружит тогда, что часы, установленные на окружности, идут медленнее, чем часы, установленные рядом с ним. Так как наблюдатель не решится считать скорость света на пройденном светом пути явной функцией времени, то он объяснит свое наблюдение тем, что часы на окружности „действительно“ идут медленнее часов, установленных в начале координат. Таким образом он будет вынужден дать времени такое определение, которое указывало бы, что скорость хода часов зависит от места.

Итак, мы приходим к следующему выводу: в общей теории относительности пространственным и временным величинам не могут быть даны определения, согласно которым пространственные разности координат могут быть измерены непосредственно единичным масштабом, а временные — посредством стандартных часов.

Итак, прежний способ, заключавшийся в определенном построении координат в пространственно-временном континууме, отказывается функционировать, и представляется, что нет другого пути, который позволил бы приспособить к четырехмерному миру координатные системы таким образом, чтобы при их применении можно было бы рассчитывать на особенно простую формулировку законов природы. Поэтому не остается ничего другого, как признать все мыслимые [1]) координатные системы принципиально равноправными для описания природы. Это равносильно требованию:

Общие законы природы должны быть выражены через уравнения, которые действительны для всех координатных систем, т. е. эти уравнения должны быть ковариантными (общековариантными) относительно любых подстановок.

Ясно, что физика, которая удовлетворяет этому постулату, удовлетворит также общему постулату относительности. Ибо во *всех* подстановках во всяком случае содержатся и те подстановки, которые соответствуют всем относительным движениям (трехмерных) координатных систем. То, что это требование всеобщей ковариантности, отнимающее у пространства и времени последний остаток физической предметности, является естественным требованием, видно из следующего соображения. Все наши пространственно-временные констатирования всегда приводят к установлению пространственно-временных совпадений. Если бы, например, события заключались только в движении материальных точек, то в конце концов ничего не наблюдалось бы, кроме встреч двух или многих таких точек. Результаты наших измерений также являются ничем иным, как констатированием подобных встреч между материальными точками наших масштабов с другими материальными точками, или констатированием совпадений между часовыми стрелками, точками циферблата и рассматриваемыми точечными событиями, происходящими в том же месте и в то же время.

[1]) Мы не будем здесь касаться некоторых ограничений, вытекающих из требования однозначности и непрерывности.

Введение координатной системы служит только для более легкого описания совокупности таких совпадений. Четыре пространственно-временные переменные x_1, x_2, x_3, x_4 сопоставляются с миром таким образом, чтобы каждому точечному событию соответствовала одна система значений переменных $x_1 \dots x_4$. Двум совпадающим точечным событиям соответствовала одна и та же система значений переменных $x_1 \dots x_4$; т. е. совпадение характеризуется равенством координат. Если ввести вместо переменных $x_1 \dots x_4$ любые функции от них x_1', x_2', x_3', x_4', как новую координатную систему, так, чтобы эти системы значений однозначно соответствовали друг другу, — то равенство всех четырех координат в новой системе тоже является выражением пространственно-временного совпадения двух точечных событий. Так как все наши физические опытные данные можно в конце концов свести к таким совпадениям, то заранее нет никакого основания для предпочтения одной координатной системы перед другой, т. е. мы приходим к требованию всеобщей ковариантности.

§ 4. Связь четырех координат с результатами пространственных и временных измерений. Аналитическое выражение для гравитационного поля.

В настоящей статье я не старался представить общую теорию относительности в виде возможно более простой логической системы с минимумом аксиом. Моя главная цель — изложить эту теорию так, чтобы читатель ощущал бы психологическую естественность выбранного пути и чтобы предпосылки, положенные в ее основу, представлялись бы как можно лучше согласованными с опытом. В этом смысле введем теперь следующую предпосылку:

Для бесконечно малых четырехмерных областей, при подходящем выборе системы координат, справедлива теория относительности в более узком смысле.

Состояние ускорения бесконечно малой („местной“) координатной системы должно быть при этом выбрано так, чтобы отсутствовало гравитационное поле; для бесконечно малой области это возможно. Пусть X_1, X_2, X_3 — пространственные координаты; X_4 — координата времени, измеренная [1]) надлежащим масштабом. Если представить себе, что дан твердый масштаб небольших размеров в качестве единицы масштаба, то эти координаты при данной ориентации координатной системы имеют непосредственное физическое значение в смысле специальной теории относительности. В этом случае выражение

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2 \qquad (1)$$

имеет по специальной теории относительности некоторое численное значение, независимое от ориентации местной координатной системы и определяемое путем измерения пространства и времени. Обозначим через ds величину элемента длины между двумя бесконечно близкими друг к другу точками четырехмерного пространства. Если ds^2, принадлежащее элементу $(dX_1 \ldots dX_4)$, положительно, то мы вместе с Минковским будем называть последний времени-подобным, в противном случае — пространственно-подобным.

К рассмотренному „элементу длины“, или, соответственно, к обоим бесконечно близким точечным событиям, относятся также некоторые дифференциалы $dx_1 \ldots dx_4$ четырехмерных координат выбранной системы. Если для рассматриваемого места дана эта система координат и „местная“ система вышеуказанного типа, то величины dX_ν можно представить как некоторые выражения, линейные и однородные относительно dx_σ,

$$dX_\nu = \sum_\sigma \alpha_{\nu\sigma} dx_\sigma. \qquad (2)$$

Подставив эти выражения в (1), получим:

$$ds^2 = \sum_{\sigma\tau} g_{\sigma\tau} dx_\sigma dx_\tau, \qquad (3)$$

где $g_{\sigma\tau}$ будут функциями от x_σ, которые уже не могут более зависеть от ориентации и состояния движения „местной“ координатной системы, ибо ds^2 есть величина, определенная независимо от того или иного выбора системы координат, относящаяся к пространственно и временно бесконечно близким точечным событиям и получаемая посредством измерения, выполненного с масштабом и часами. $g_{\sigma\tau}$ должны быть при этом выбраны так, чтобы $g_{\sigma\tau} = g_{\tau\sigma}$; суммирование должно быть распространено на все значения σ и τ, так что сумма состоит из 4×4 слагаемых, из которых 12 попарно равны.

Обыкновенная теория относительности вытекает как частный случай из рассмотренного здесь, когда, в силу особых свойств $g_{\sigma\tau}$ в некоторой конечной области оказывается возможным выбрать координатную систему так, чтобы $g_{\sigma\tau}$ приняли бы постоянные значения:

$$\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}\right\} \qquad (4)$$

[1]) Единицу времени следует выбрать так, чтобы скорость света в пустоте, измеренная в „местной“ координатной системе, равнялась 1.

Мы увидим ниже, что выбор таких координат для конечных областей, вообще говоря, не возможен.

Из рассуждений §§ 2 и 3 следует, что $g_{\sigma\tau}$ с физической точки зрения должны быть рассматриваемы как такие величины, которые описывают гравитационное поле относительно выбранной системы координат. В самом деле, допустим сначала, что специальная теория относительности справедлива для определенной рассматриваемой четырехмерной области при подходящем выборе системы координат; $g_{\sigma\tau}$ имеют тогда указанные в (4) значения. Свободная материальная точка движется тогда прямолинейно и равномерно относительно этой системы. Если ввести теперь путем произвольной подстановки новые пространственно-временные координаты $x_1 \ldots x_4$, то в этой новой системе $g_{\sigma\tau}$ будут не постоянными, нопространственно-временными функциями. В то же время движение свободной материальной точки в новой системе координат окажется криволинейным и неравномерным, причем закон движения не будет зависеть от природы движущейся материальной точки. Поэтому мы истолкуем это движение как движение, происходящее под влиянием гравитационног поля. Мы видим, что появление гравитационного поля связано с пространственно-временным изменением $g_{\sigma\tau}$. Но и в общем случае, когда мы не сможем подходящим выбором координат сделать специальную теорию относительности применимой в конечной области пространства, мы сохраним представление о том, что $g_{\sigma\tau}$ описывают гравитационные поля.

Таким образом, согласно общей теории относительности, тяготение играет исключительную роль по сравнению с остальными, особенно, электромагнитными силами, причем 10 функций $g_{\sigma\tau}$, изображающих гравитационное поле, определяют в то же время метрические свойства измеряемого четырехмерного пространства.

B. Вспомогательные математические средства для вывода общековариантных уравнений.

Показав выше, что общий постулат относительности приводит к требованию ковариантности систем уравнений физики по отношению к любым подстановкам координат $x_1 \ldots x_4$, мы должны затем подумать над тем, как получаются подобные общековариантные уравнения. Обратимся теперь к этой чисто математической задаче; при этом выяснится, что приведенный в равенстве (3) инвариант ds, названный нами, по гауссовой теории поверхностей, „элементом линии", играет основную роль при решении этой задачи.

Основная мысль этой общей теории ковариантных величин заключается в следующем. Пусть некоторые объекты („тензоры") определены относительно каждой координатной системы посредством некоторого числа пространственных функций, которые называются „компонентами" тензора. В таком случае имеются определенные правила, по которым эти компоненты вычисляются для новой координатной системы, если они известны для первоначальной системы и если известно преобразование, связывающее обе системы. Эти объекты, названные ниже тензорами, характеризуются еще и тем, что уравнения преобразования для их компонент линейны и однородны. Поэтому все компоненты в новой системе обращаются в нуль, если они все равны нулю в первоначальной системе. В соответствии с этим, если какой-нибудь закон природы формулируется посредством приравнивания нулю всех компонент некоторого тензора, то он общековариантен; исследуя законы образования тензоров, мы тем самым получаем средства для установления общековариантных законов.

§ 5. Контравариантный и ковариантный четырехмерный вектор.

Контравариантный четырехмерный вектор (четырехвектор). Элемент линии определяется с помощью четырех „компонент“ dx_ν, закон преобразования которых выражается уравнением

$$dx_\sigma{}' = \sum_\nu \frac{\partial x_\sigma{}'}{\partial x_\nu}\, dx_\nu. \tag{5}$$

$dx_\sigma{}'$ выражаются линейно и однородно через dx_ν; поэтому мы можем рассматривать эти дифференциалы координат как компоненты „тензора“, которому дадим специальное название контравариантного четырехмерного вектора. Каждый объект, определяемый по отношению к координатной системе посредством четырех величин A^ν, которые преобразуются по тому же закону

$$A^{\sigma'} = \sum_\nu \frac{\partial x_\sigma{}'}{\partial x_\nu} A^\nu, \tag{5a}$$

мы также называем контравариантным четырехмерным вектором. Из (5a) непосредственно следует, что суммы $(A^\sigma \pm B^\sigma)$ будут компонентами четырехмерного вектора, если A^σ и B^σ в отдельности являются таковыми. Аналогичное положение будет иметь место для всех *систем*, введенных ниже в качестве „тензоров“ (правило сложения и вычитания тензоров).

Ковариантный четырехмерный вектор. Мы называем четыре величины A_ν компонентами ковариантного четырехмерного вектора, если при произвольно выбранном контравариантном четырехмерном векторе B^ν имеем

$$\sum_\nu A_\nu B^\nu = \text{инвариант}. \tag{6}$$

Из этого определения следует закон преобразования ковариантного четырехмерного вектора. Заменив в правой части равенства

$$\sum_\sigma A_\sigma{}' B^{\sigma'} = \sum_\nu A_\nu B^\nu$$

величину B^ν полученным от обращения равенства (5a) выражением

$$\sum_\sigma \frac{\partial x_\nu}{\partial x_\sigma{}'} B^{\sigma'},$$

получим:

$$\sum_\sigma B^{\sigma'} \sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x_\sigma{}'} A_\nu = \sum_\sigma B^{\sigma'} A_\sigma{}'.$$

Но отсюда, в силу того что в этом равенстве каждый из $B^{\sigma'}$ может быть выбран свободно и независимо от других, следует закон преобразования

$$A_\sigma' = \sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x_\sigma{}'} A_\nu. \tag{7}$$

Замечание об упрощении транскрипции выражений. Рассматривая уравнения этого параграфа, мы сразу видим, что суммирование всегда производится по тем значкам и только по тем значкам, которые дважды появляются под знаком суммы [например, значок ν в (5)]. Поэтому можно без ущерба для ясности отбросить значок суммы. Для этого мы вводим следующее правило; если член некоторого выражения содержит в себе какой-нибудь значок дважды, то по этому значку должно быть произведено суммирование, если только явным образом не оговорено противное.

Различие между ковариантным и контравариантным четырехмерными векторами заключается в их законах преобразования [(7) и (5)]. Обе величины представляют собой тензоры в смысле общего замечания, сделанного выше; в этом и состоит их значение. Присоединяясь к Риччи и Леви-Чивита, будем обозначать контравариантный характер посредством верхнего значка, ковариантный — посредством нижнего значка.

§ 6. Тензоры второго и высших рангов.

Контравариантный тензор. Если мы составим все 16 произведений $A^{\mu\nu}$ компонент A^{μ} и B^{ν} двух контравариантных четырехмерных векторов

$$A^{\mu\nu} = A^{\mu} B^{\nu}, \tag{8}$$

то, в силу (8) и (5а), $A^{\mu\nu}$ удовлетворяет закону преобразования

$$A^{\sigma\tau\prime} = \frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\mu}} \cdot \frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{\nu}} A^{\mu\nu}. \tag{9}$$

Мы называем объект, который по отношению ко всякой координатной системе описывается посредством 16 величин (функций), удовлетворяющих закону преобразования (9), контравариантным тензором второго ранга. Не все тензоры этого рода можно составить по формуле (8) из двух четырехмерных векторов. Но легко доказать, что 16 произвольно заданных $A^{\mu\nu}$ можно представить в виде сумм, составленных из $A^{\mu}B^{\nu}$ от четырех пар надлежаще выбранных четырехмерных векторов. Поэтому можно почти все положения,

которые действительны для тензора второго ранга, определенного посредством (9), проще всего проверить, доказывая их для специальных тензоров типа (8).

Контравариантный тензор любого ранга. Очевидно, что по аналогии с (8) и (9) можно определить также контравариантные тензоры третьего и высших рангов с 4^3 и т. д. компонентами. Из (8) и (9) вытекает также, что в этом смысле можно рассматривать контравариантный четырехмерный вектор как контравариантный тензор первого ранга.

Ковариантный тензор. Если, с другой стороны, составить 16 произведений $A_{\mu\nu}$ из компонент двух *ковариантных* четырехмерных векторов A_{μ} и B_{ν}

$$A_{\mu\nu} = A_{\mu} B_{\nu}, \tag{10}$$

то для них справедлив закон преобразования

$$A'_{\sigma\tau} = \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}} \cdot \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}} A_{\mu\nu}. \tag{11}$$

Посредством этого закона преобразования дается определение ковариантного тензора второго ранга. Все замечания, которые прежде были сделаны по поводу контравариантных тензоров, остаются в силе и для ковариантных тензоров.

Замечание. Удобно рассматривать скаляр (инвариант) как контравариантный, или как ковариантный тензор нулевого ранга.

Смешанный тензор. Возможно также составить тензор второго ранга типа

$$A_{\mu}^{\nu} = A_{\mu} B^{\nu}, \tag{12}$$

который в отношении значка μ ковариантен, в отношении ν—контравариантен. Его закон преобразования

$$A_\sigma^{\tau'} = \frac{\partial x_\tau'}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\sigma'} A_\alpha^\beta . \tag{13}$$

Имеются конечно смешанные тензоры с произвольным числом значков ковариантного и произвольным числом значков контравариантного характера. Ковариантный и контравариантный тензоры могут быть рассматриваемы как специальные случаи смешанного тензора.

Симметричные тензоры. Контравариантный, или ковариантный тензор второго или высшего ранга называется симметричным, если две компоненты, получающиеся друг из друга путем перестановки каких-нибудь двух значков, равны между собою. Тензоры $A^{\mu\nu}$, или, $A_{\mu\nu}$ симметричны, если при всякой комбинации значков имеем

$$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}, \tag{14}$$

или

$$A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}. \tag{14a}$$

Нужно доказать, что симметрия, определенная таким образом, есть свойство, не зависящее от системы координат. В самом деле, на основании (14), из (9) следует

$$A^{\sigma\tau'} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu} A^{\mu\nu} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu} A^{\nu\mu} =$$

$$= \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} A^{\mu\nu} = A^{\tau\sigma'} .$$

Предпоследнее из этих равенств основывается на перестановке значков суммирования μ и ν (т. е. на простом изменении способа обозначения).

Антисимметричные тензоры Контравариантный или ковариантный тензор второго, третьего или четвертого ранга называется антисимметричным, если две компоненты, получающиеся друг из друга путем перестановки каких-нибудь двух значков и взятые с противоположными знаками, равны между собою. Следовательно, тензоры $A^{\mu\nu}$ или $A_{\mu\nu}$ антисимметричны, если

$$A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu} \tag{15}$$

или

$$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}. \tag{15a}$$

Из 16 компонент $A^{\mu\nu}$ четыре компоненты $A^{\mu\mu}$ равны нулю; остальные компоненты попарно равны между собою, имеют противоположные знаки, так что имеются только 6 численно отличных компонент (шестивектор). Таким же образом можно убедиться, что антисимметричный тензор $A^{\mu\nu\sigma}$ (третьего ранга) имеет только четыре численно различных компоненты, антисимметричный тензор $A^{\mu\nu\sigma\tau}$ — только одну. В континууме четырех измерений нет антисимметричных тензоров выше четвертого ранга.

§ 7. Умножение тензоров.

Внешнее умножение тензоров. Из компонент двух тензоров рангов z и z' получаются компоненты тензора ранга $z + z'$, если все компоненты первого тензора в отдельности перемножить с каждой компонентой второго тензора. Так, например, из различных тензоров A и B получаются тензоры T:

$$T_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu} B_\sigma ,$$

$$T^{\alpha\beta\gamma\delta} = A^{\alpha\beta} B^{\gamma\delta} ,$$

$$T_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} = A_{\alpha\beta} B^{\gamma\delta}.$$

Доказательство тензорного характера T следует непосредственно из выражений (8), (10), (12) или из формул преобразования (9), (11), (13). Равенства (8), (10), (12) сами служат примерами внешнего умножения (тензоров первого ранга).

„*Композиция*" („сокращение") *смешанного тензора*. Из каждого смешанного тензора можно образовать тензор, ранг которого на две единицы меньше, если один значок ковариантного характера приравнять одному значку контравариантного характера и по этому значку произвести суммирование. Таким образом, например, получают из смешанного тензора четвертого ранга $A^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$ смешанный тензор второго ранга:

$$A^{\delta}_{\beta} = A^{\alpha\delta}_{\alpha\beta} \left(= \sum_{\alpha} A^{\alpha\delta}_{\alpha\beta}\right),$$

и из него, через повторную композицию, получают тензор нулевого ранга:

$$A = A^{\beta}_{\beta} = A^{\alpha\beta}_{\alpha\beta}.$$

Доказательство того, что результат „композиции" действительно обладает тензорным характером, следует или из обобщения тензорного выражения (12) в соединении с (6) или из обобщения (13).

Внутреннее или смешанное умножение тензоров. Оно заключается в комбинации внешнего умножения с композицией.

Примеры. Из ковариантного тензора второго ранга $A_{\mu\nu}$ и контравариантного тензора первого ранга B^{σ} мы образуем посредством внешнего умножения смешанный тензор

$$D^{\sigma}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} B^{\sigma}.$$

В результате композиции по индексам ν и σ возникает ковариантный четырехмерный вектор

$$D_{\mu} = D^{\nu}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} B^{\nu}.$$

Этот вектор мы обозначим как внутреннее произведение тензоров $A_{\mu\nu}$ и B^{σ}. Аналогично образуют из тензоров $A_{\mu\nu}$ и $B^{\sigma\tau}$ посредством внешнего умножения и двукратной композиции внутреннее произведение $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$. Образовав внешнее произведение из $A_{\mu\nu}$ и $B^{\sigma\tau}$ и выполнив композицию, получим смешанный тензор второго ранга $D^{\tau}_{\mu} = A_{\mu\nu} B^{\nu\tau}$. Удобно назвать эту операцию смешанной, ибо она является внешней по отношению к значкам μ и τ и внутренней по отношению к значкам ν и σ.

Мы докажем теперь положение, которое часто применяется для установления тензорного характера. На основании только что изложенного, $A_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$ есть скаляр, если $A_{\mu\nu}$ и $B^{\sigma\tau}$ — тензоры. Но мы утверждаем также и следующее: *если $A_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$ при любом тензоре $B^{\mu\nu}$ есть инвариант, то $A_{\mu\nu}$ имеет тензорный характер.*

Доказательство. По предположению, при любой подстановке должно быть

$$A'_{\sigma\tau} B^{\sigma\tau\prime} = A_{\mu\nu} B^{\mu\nu}.$$

Но, на основании обращения соотношения (9), имеем

$$B^{\mu\nu} = \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}} \cdot \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}} B^{\sigma\tau\prime}.$$

Вставив это в верхнее уравнение, получим:

$$\left(A'_{\sigma\tau} - \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}} \cdot \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}} A_{\mu\nu}\right) B^{\sigma\tau\prime} = 0.$$

При любом выборе $B^{\sigma\tau'}$ это уравнение может выполняться только тогда, когда выражение в скобке равно 0, откуда, в силу (11), и следует высказанное предположение.

Эта теорема верна в соответствующей форме для тензоров любого ранга и характера; доказательство всегда проводится аналогичным образом.

Указанное положение можно также доказать и в такой форме: если B^{μ} и C^{ν} — произвольные векторы и если при любом их выборе внутреннее произведение

$$A_{\mu\nu} B^{\mu} C^{\nu}$$

есть скаляр, то $A_{\mu\nu}$ есть ковариантный тензор. Последнее положение справедливо еще и в том, более частном случае, когда утверждается, что при любом выборе четырехмерного вектора B^{μ} скалярное произведение $A_{\mu\nu} B^{\mu} B^{\nu}$ есть скаляр, и когда, кроме того, еще известно, что $A_{\mu\nu}$ удовлетворяет симметричному условию $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$. В самом деле, следуя по вышеуказанному пути, доказывают сначала тензорный характер величины $(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$, откуда на основании свойства симметрии непосредственно следует тензорный характер $A_{\mu\nu}$. Это положение тоже легко обобщить на случай ковариантных и контравариантных тензоров любого ранга.

Наконец, из доказанного следует положение, также обобщаемое на любые тензоры: если величины $A_{\mu\nu} B^{\nu}$ при любом выборе четырехмерного вектора B^{ν} образуют тензор первого ранга, то $A_{\mu\nu}$ есть тензор второго ранга. Если C^{μ} есть произвольный четырехмерный вектор, то, в силу тензорного характера $A_{\mu\nu} B^{\nu}$,

внутреннее произведение $A_{\mu\nu} C^{\mu} B^{\nu}$ при любом выборе обоих четырехмерных векторов C^{μ} и B^{ν} есть скаляр, откуда и следует последнее положение.

§ 8. Некоторые свойства фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$.

Ковариантный фундаментальный тензор. В инвариантном выражении квадрата элемента линии

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_{\mu}\, dx_{\nu}$$

dx_{μ} играет роль произвольного контравариантного вектора. Так как $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, то на основании последнего параграфа заключаем, что $g_{\mu\nu}$ есть ковариантный тензор второго ранга. Мы назовем его „фундаментальным тензором“. Ниже мы выведем некоторые свойства этого тензора; последние, правда, свойственны каждому тензору второго ранга, но специальная в нашей теории роль фундаментального тензора, имеющая свое физическое основание в особенностях гравитационных действий, приводит к тому, что доказанные ниже соотношения приобретают для нас значение только в приложении к фундаментальному тензору.

Контравариантный фундаментальный тензор. Если взять миноры, отвечающие элементам $g_{\mu\nu}$ в определителе, составленном из $g_{\mu\nu}$, и разделить каждый из них на определитель $g = |g_{\mu\nu}|$, то получаются некоторые величины $g^{\mu\nu}$ $(= g^{\mu\nu})$, относительно которых мы докажем, что они составляют контравариантный тензор.

На основании известной теоремы из теории определителей имеем

$$g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = \delta_{\mu}^{\nu}, \qquad (16)$$

где символ δ_μ^ν равняется 1 или 0, в зависимости от равенства или неравенства значков μ и ν.

Вместо данного выражения для ds^2 можно также написать

$$g_{\mu\sigma}\delta_\nu^\sigma\, dx_\mu\, dx_\nu,$$

или, в силу (16), также

$$g_{\mu\sigma}\, g_{\nu\tau}\, g^{\sigma\tau}\, dx_\mu\, dx_\nu.$$

Но, согласно правилам умножения предыдущего параграфа, величины

$$d\xi_\sigma = g_{\mu\sigma}\, dx_\mu$$

образуют ковариантный четырехмерный вектор и при том (в силу возможности произвольного выбора dx_μ) произвольный четырехмерный вектор. Подставив его в наше выражение, получим

$$ds^2 = g^{\sigma\tau}\, d\xi_\sigma\, d\xi_\tau.$$

Так как это выражение при возможности произвольного выбора вектора $d\xi_\sigma$ есть скаляр и $g^{\sigma\tau}$ по определению симметрично в значках σ и τ, то на основании результатов предыдущего параграфа заключаем, что $g^{\sigma\tau}$ есть контравариантный тензор. Из (16) следует еще, что δ_μ^ν тоже тензор, который можно назвать смешанным фундаментальным тензором.

Определитель фундаментального тензора. На основании правила умножения определителей имеем

$$\left|g_{\mu\alpha}\, g^{\alpha\nu}\right| = \left|g_{\mu\alpha}\right| \left|g^{\alpha\nu}\right|.$$

С другой стороны

$$\left|g_{\mu\alpha}\, g^{\alpha\nu}\right| = \left|\delta_\mu^\nu\right| = 1.$$

Отсюда следует

$$\left|g_{\mu\nu}\right| \left|g^{\mu\nu}\right| = 1. \tag{17}$$

Инвариант объема. Найдем сначала закон преобразования определителя $g = \left|g_{\mu\nu}\right|$. В силу (11) имеем

$$g' = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\;\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau}\, g_{\mu\nu}\right|.$$

Отсюда, после двукратного применения правила умножения определителей, следует

$$g' = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\right| \left|\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau}\right| \left|g_{\mu\nu}\right| = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\right|^2 g$$

или

$$\sqrt{g'} = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\right| \sqrt{g}. \tag{17a}$$

С другой стороны, закон преобразования элемента объема

$$d\tau' = dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$$

по известной теореме Якоби гласит:

$$d\tau' = \left|\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\right| d\tau \tag{17b}$$

Перемножив равенства (17a) и (17b), получим

$$\sqrt{g'}\, d\tau' = \sqrt{g}\, d\tau.$$

В дальнейшем вместо $\sqrt{g}$ вводится величина $\sqrt{-g}$, которая вследствие гиперболического характера временно-пространственного континуума всегда имеет вещественное значение. Инвариант $\sqrt{-g}\ d\tau$ равен величине элемента четырехмерного объема, измеренного в „местной координатной системе" посредством твердых масштабов и часов по принципам специальной теории относительности.

Замечание о характере пространственно-временного континуума. Наша предпосылка о правильности специальной теории относительности в бесконечно малом приводит к тому, что можно ds^2 на основании (1) всегда выразить через вещественные величины $dX_1 \ldots dX_4$. Обозначив через $d\tau_0$ „естественный" элемент объема $dX_1\, dX_2\, dX_3\, dX_4$, получим

$$d\tau_0 = \sqrt{-g} \cdot d\tau. \tag{18a}$$

Если окажется, что в каком-нибудь месте четырехмерного континуума $\sqrt{-g}$ обращается в нуль, то это будет означать, что в этом месте конечному координатному объему соответствует бесконечно малый „естественный" объем. Мы положим, что это нигде не имеет места. В таком случае g не может менять свой знак; мы примем, в согласии со специальной теорией относительности, что g постоянно имеет конечное и отрицательное значение. Это допущение является некоторой гипотезой о физической природе рассматриваемого континуума и в то же время правилом, касающимся выбора системы координат.

Но если $-g$ положительно и конечно, то естественным образом возникает мысль, что следует a posteriori выбрать координаты так, чтобы эта величина сделалась равной 1. Мы позже увидим, что посредством такого ограничения выбора системы координат может быть достигнуто значительное упрощение законов природы. В этом случае вместо (18) имеем просто

$$d\tau' = d\tau,$$

откуда, приняв во внимание теорему Якоби, следует, что

$$\left| \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \right| = 1. \tag{19}$$

Таким образом, при подобном выборе координатных систем допустимы только подстановки координат с определителем 1.

Но было бы ошибкой думать, что этот прием означает частичный отказ от общего постулата относительности. Мы не спрашиваем: „каковы будут законы природы, инвариантные по отношению ко всем преобразованиям с определителем 1"? Но мы задаем вопрос: „каковы будут *обще*-ковариантные законы природы"? Лишь тогда, когда эти законы установлены, мы упрощаем их выражение посредством особого выбора координатной системы.

Образование новых тензоров с помощью фундаментального тензора. Через посредство внутреннего, внешнего и смешанного умножения какого-нибудь тензора на фундаментальный тензор возникают тензоры другого характера и ранга.

Примеры:

$$A^\mu = g^{\mu\sigma} A_\sigma$$
$$A = g_{\mu\nu} A^{\mu\nu}.$$

Особенно отметим следующие комбинации:

$$A^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\alpha\beta},$$
$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} A^{\alpha\beta},$$

(„дополнения" к ковариантному или контравариантному тензору) и

$$B_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}.$$

Мы называем $B_{\mu\nu}$ редуцированным по отношению к $A_{\mu\nu}$ тензором. Аналогично имеем

$$B^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta}.$$

Заметим, что $g^{\mu\nu}$ есть не что иное, как „дополнение" по отношению к $g_{\mu\nu}$, ибо

$$g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g_{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha} \delta_\alpha^\nu = g^{\mu\nu}.$$

§ 9. Уравнение геодезической линии (в частности, уравнение движения точки).

Так как „линейный элемент" ds есть величина, определяемая независимо от координатной системы, то и линия, которая проведена между двумя точками P_1 и P_2 четырехмерного континуума и для которой $\int ds$ есть экстремум (геодезическая линия), имеет независимое от выбора координат значение.

Ее уравнение

$$\delta \left\{ \int_{P_1}^{P_2} ds \right\} = 0. \qquad (20)$$

Из этого уравнения, выполняя вариацию, находят известным образом 4 дифференциальных уравнения с полными производными, которые и определяют эту геодезическую линию. С целью дать более полное изложение мы приведем здесь этот вывод. Пусть λ представляет собой некоторую функцию координат x_ν; эта функция определяет собой семейство поверхностей, пересекающих искомую геодезическую линию, равно как и другие бесконечно к ней близкие линии, проведенные через точки P_1 и P_2. В таком случае каждую из этих кривых можно себе представить заданной своими координатами, выраженными в виде функций от λ. Пусть буква δ соответствует переходу из какой-нибудь точки искомой геодезической линии в ту точку соседней геодезической кривой, которая относится к той же λ.

В таком случае можно (20) заменить через

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \delta w d\lambda = 0, \\ &w^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \cdot \frac{dx_\nu}{d\lambda}. \end{aligned}\right\} \qquad (20a)$$

Так как

$$\delta w = \frac{1}{w} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda} \delta x_\sigma + \right.$$
$$\left. + g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \delta \left(\frac{dx_\nu}{d\lambda} \right) \right\},$$

и

$$\delta \left(\frac{dx_\nu}{d\lambda} \right) = \frac{d\delta x_\nu}{d\lambda},$$

то после подстановки этих значений в (20a) и интегрирования по частям получается

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \varkappa_\sigma \delta x_\sigma = 0, \\ &\varkappa_\sigma = \frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{g_{\mu\nu}}{w} \frac{dx}{d\lambda} \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{2w} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda}. \end{aligned}\right\} \qquad (20b)$$

Отсюда вследствие возможности произвольного выбора δx_σ следует, что $\varkappa_\sigma$ равно нулю. Таким образом

$$\varkappa_\sigma = 0 \qquad (20c)$$

представляют собой уравнения геодезической линии. Если на рассматриваемой геодезической линии ds не равно 0, то можно выбрать в качестве параметра λ

„длину дуги“ s, измеренную на геодезической линии. Тогда $w=1$ и вместо (20c) получается

$$g_{\mu\nu}\frac{d^2x_\mu}{ds^2}+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_\mu}{ds}-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}=0,$$

или, изменяя обозначения,

$$g_{\alpha\sigma}\frac{d^2x_\alpha}{ds^2}+\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{bmatrix}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}=0; \tag{20d}$$

причем, согласно Кристоффелю, положено:

$$\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right). \tag{21}$$

Помножив, наконец, (20d) на $g^{\sigma\tau}$ (внешнее умножение относительно τ и внутреннее—относительно σ), получим уравнение геодезической линии в окончательном виде:

$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2}+\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}=0, \tag{22}$$

причем, согласно Кристоффелю, введено обозначение:

$$\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}=g^{\tau\alpha}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{bmatrix}. \tag{23}$$

§ 10. Образование тензоров посредством дифференцирования.

Опираясь на уравнение геодезической линии, можно теперь легко вывести законы, по которым из тензоров путем дифференцирования могут быть образованы новые тензоры. Лишь благодаря этим законам мы получим возможность составить обще-ковариантные

дифференциальные уравнения. Мы достигаем этой цели путем повторного применения следующего простого положения.

Если в нашем континууме дана кривая, точки которой характеризуются длиной дуги s, измеренной от некоторой определенной точки на кривой, и если далее φ есть инвариантная пространственная функция, то и $\frac{d\varphi}{ds}$ есть инвариант. Доказательство заключается в том, что как $d\varphi$, так и ds суть инварианты.

Так как

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{ds},$$

то и

$$\psi=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{ds}$$

есть инвариант и притом для всех кривых, которые выходят из одной точки континуума, т. е. для любого вектора dx_μ.

Отсюда непосредственно следует, что

$$A_\mu=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} \tag{24}$$

есть ковариантный четырехмерный вектор (grad φ).

Согласно нашему правилу, инвариантом будет также и производная, взятая по кривой:

$$\chi=\frac{d\psi}{ds}.$$

Подставив значение ψ, получаем сначала

$$\chi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\partial x_\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{d^2x_\mu}{ds^2}.$$

Отсюда пока нельзя еще заключить о существовании какого-либо тензора. Но, если мы теперь установим, что кривая, по которой мы дифференцировали, есть геодезическая кривая, то получим, пользуясь при замене $\frac{d^2 x_\nu}{ds^2}$ формулой (22):

$$\chi = \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau} \right\} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}.$$

Из возможности изменения порядка дифференцирования по μ и ν и из того, что в силу (23) и (21), скобка $\left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\}$ симметрична относительно μ и ν, следует, что выражение, стоящее в фигурных скобках, тоже симметрично относительно тех же значков. Так как из любой точки континуума можно провести геодезическую линию в любом направлении, и, следовательно, $\frac{dx_\mu}{ds}$ есть четырехмерный вектор с компонентами, которые могут находиться друг с другом в любых соотношениях, то на основании выводов § 7 следует, что

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau} \tag{25}$$

есть ковариантный вектор второго ранга. Мы получим таким образом следующий результат: из ковариантного тензора первого ранга

$$A_\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

можно посредством дифференцирования образовать ковариантный тензор второго ранга

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} A_\tau. \tag{26}$$

Назовем тензор $A_{\mu\nu}$ „тензорной производной“ тензора A_μ. Прежде всего можно легко показать, что этот способ расчета приводит к тензору даже в том случае, когда A_μ нельзя представить в виде градиента. Для того чтобы убедиться, мы предварительно заметим, что

$$\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

есть ковариантный четырехмерный вектор, если ψ и φ скаляры. То же самое справедливо в отношении суммы, состоящей из четырех таких членов:

$$S_\mu = \psi^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_\mu} + \cdot + \cdot + \psi^{(4)} \frac{\partial \varphi^{(4)}}{\partial x_\mu},$$

если $\psi^{(1)}, \varphi^{(1)}, \ldots \psi^{(4)}, \varphi^{(4)}$ скаляры. Но ясно, что каждый ковариантный четырехмерный вектор может быть представлен в виде S_μ. Если A_μ есть четырехмерный вектор, компоненты которого представляют собой произвольно заданные функции от x_ν, то достаточно положить (относительно выбранной координатной системы)

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= A_1, & \varphi^{(1)} &= x_1, \\ \psi^{(2)} &= A_2, & \varphi^{(2)} &= x_2, \\ \psi^{(3)} &= A_3, & \varphi^{(3)} &= x_3, \\ \psi^{(4)} &= A_4, & \varphi^{(4)} &= x_4, \end{aligned}$$

для того, чтобы S_μ сделалось равным A_μ.

Поэтому, чтобы доказать, что $A_{\mu\nu}$ будет тензором, если в правую часть (26) подставить вместо A_μ произвольный ковариантный четырехмерный вектор, достаточно только показать, что это имеет место в отношении четырехмерного вектора S_μ. Но из правой части (26) сразу видно, что достаточно доказательства для случая

$$A_\mu = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}.$$

В самом деле правая часть выражения (25), помноженная на ψ, т. е.

$$\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \, \partial x_\nu} - \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}$$

имеет тензорный характер.

Точно так же

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}$$

есть тензор (внешнее произведение двух четырехмерных векторов). Складывая, находим, что

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right) - \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}\right)$$

имеет тензорный характер. Тем самым дано, как видно из (26), требуемое доказательство для четырехмерного вектора

$$\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

и, следовательно, по доказанному выше, для любого четырехмерного вектора A_μ.

Пользуясь тензорной производной четырехмерного вектора, нетрудно дать определение тензорной производной ковариантного тензора любого ранга; этот прием получения нового тензора представляет собою обобщение получения тензорной производной четырехмерного вектора. Мы ограничимся получением

тензорной производной тензора второго ранга, так как этого достаточно, чтобы составить себе ясную картину сущности приема.

Как указано выше, каждый ковариантный тензор второго ранга может быть представлен[1]) в виде суммы тензоров типа $A_\mu B_\nu$. Поэтому будет вполне достаточным ограничиться выводом формулы тензорной производной для такого специального тензора.

Выражения

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\sigma} - \begin{Bmatrix} \sigma\mu \\ \tau \end{Bmatrix} A_\tau,$$

$$\frac{\partial B_\nu}{\partial x_\sigma} - \begin{Bmatrix} \sigma\nu \\ \tau \end{Bmatrix} B_\tau,$$

имеют, в силу (26), тензорный характер.

Посредством внешнего умножения первого выражения на B_ν и второго на A_μ получаем по одному тензору третьего ранга; сумма полученных тензоров

$$A_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \begin{Bmatrix} \sigma\mu \\ \tau \end{Bmatrix} A_{\tau\nu} - \begin{Bmatrix} \sigma\nu \\ \tau \end{Bmatrix} A_{\mu\tau} \qquad (27)$$

есть тоже тензор третьего ранга, причем положено, что $A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$. Так как правая часть в (27) линейна

---

[1]) Посредством внешнего умножения векторов с (любыми) компонентами A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, и соответственно с компонентами 1, 0, 0, 0, получается тензор с компонентами

A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Складывая четыре тензора этого рода, получим тензор $A_{\mu\nu}$ с любыми наперед заданными компонентами.

и однородна относительно $A_{\mu\nu}$ и ее первых производных, то этот прием получения новых тензоров приводит к тензору не только в случае тензора типа $A_\mu B_\nu$, но и суммы таких тензоров, т. е. любого ковариантного тензора второго ранга. Мы назовем $A_{\mu\nu\sigma}$ тензорной производной тензора $A_{\mu\nu}$.

Ясно, что (26) и (24) являются только специальными случаями тензорных производных (тензорных производных тензора первого и нулевого ранга). Вообще говоря, все специальные приемы для получения новых тензоров могут рассматриваться на основе соотношения (27) в связи с умножением тензоров друг на друга.

§ 11. Некоторые частные случаи, имеющие особое значение.

Некоторые леммы, касающиеся фундаментального тензора. Мы сначала выведем некоторые весьма полезные в дальнейшем вспомогательные соотношения. Согласно правилу дифференцирования определителей имеем

$$dg = g^{\mu\nu} g\, dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} g\, dg^{\mu\nu}. \tag{28}$$

Последнее выражение следует из предшествующего, если принять во внимание, что $g_{\mu\nu} g^{\mu'\nu} = \delta_\mu^{\mu'}$ и $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$; следовательно,

$$g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = 0.$$

Из (28) следует:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lg(-g)}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} =$$

$$= \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}. \tag{29}$$

Из

$$g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\nu$$

посредством дифференцирования получается

$$\left.\begin{aligned} &g_{\mu\sigma} dg^{\nu\sigma} = -g^{\nu\sigma} dg_{\mu\sigma} \\ &\text{и, соответственно,} \\ &g_{\mu\sigma} \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\lambda} = -g^{\nu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Отсюда, в результате смешанного умножения на $g^{\sigma\tau}$, или $g_{\nu\lambda}$ получается (при измененном способе обозначения значков)

$$\left.\begin{aligned} dg^{\mu\nu} &= -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} dg_{\alpha\beta}, \\ \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} &= -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

и, соответственно,

$$\left.\begin{aligned} dg_{\mu\nu} &= -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} dg^{\alpha\beta}, \\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} &= -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Соотношение (31) может быть преобразовано в другое, которым мы часто также будем пользоваться. В силу (21),

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} = \begin{bmatrix} \alpha\,\sigma \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta\,\sigma \\ \alpha \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Подставив это во вторую формулу (31) и приняв во внимание (23), получим

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\left(g^{\mu\tau} \begin{Bmatrix} \tau\,\sigma \\ \nu \end{Bmatrix} + g^{\nu\tau} \begin{Bmatrix} \tau\,\sigma \\ \mu \end{Bmatrix} \right). \tag{34}$$

В результате подстановки правой части (34) в (29) получается

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \left\{ \begin{matrix} \mu\ \sigma \\ \mu \end{matrix} \right\}. \qquad (29a)$$

„Расхождение“ контравариантного четырехмерного вектора. Если умножить (.6) на контравариантный фундаментальный тензор $g^{\mu\nu}$ (внутреннее умножение), то правая часть после преобразования первого члена сначала примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(g^{\mu\nu} A_\mu\right) - A_\mu \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \\ - \frac{1}{2} g^{\tau\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right) g^{\mu\nu} A_\tau .$$

Последний член этого выражения можно на основании (31) и (29) привести к виду

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\tau\nu}}{\partial x_\nu} A_\tau + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\tau\mu}}{\partial x_\mu} A_\tau + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} g^{\mu\nu} A_\tau .$$

Так как то или иное обозначение значков суммирования не имеет значения, то первые два члена последней формулы сокращаются со вторым членом стоящего выше выражения; последний же член можно объединить с первым членом стоящего выше выражения. Положив

$$g^{\mu\nu} A_\mu = A^\nu,$$

где A^ν, подобно A_μ есть произвольный вектор, получаем, наконец,

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g} A^\nu\right). \qquad (35)$$

Этот скаляр есть *расхождение* контравариантного четырехмерного вектора A^ν.

„Вихрь“ (ковариантного) четырехмерного вектора. Второй член в (26) симметричен в значках μ и ν. Поэтому $A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}$ оказывается особо простым по своему строению (антисимметричным) тензором. Мы имеем

$$B_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} . \qquad (36)$$

Антисимметричная тензорная производная шестивектора. Если применить (27) к антисимметричному тензору второго ранга $A_{\mu\nu}$, затем получить из него посредством циклической перестановки значков μ, ν, σ еще два аналогичных равенства и, наконец, сложить все эти три выражения, то получится тензор третьего ранга

$$B_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu\sigma} + A_{\nu\sigma\mu} + A_{\sigma\mu\nu} = \\ \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} , \qquad (37)$$

относительно которого легко доказать, что он антисимметричен.

Расхождение шестивектора. Если помножить (27) $g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}$ (смешанное умножение), то получим тоже тензор. Первый член правой части (27) можно написать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\mu\nu}\right) - g^{\mu\alpha} \frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma} A_{\mu\nu} - g^{\nu\beta} \frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma} A_{\mu\nu}.$$

Если заменить $g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\mu\nu\sigma}$ через $A_\sigma^{\alpha\beta}$ и $g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\mu\nu}$ через $A^{\alpha\beta}$ и подставить в преобразованном первом члене вместо

$$\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma} \quad \text{и} \quad \frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma}$$

соответствующие значения из (34), то правая сторона в (27) превратится в выражение из семи членов, из которых четыре члена взаимно уничтожаются. Остается только

$$A^{\alpha\beta}_{\sigma} = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma}} + \left\{ {\sigma\ \varkappa \atop \alpha} \right\} A^{\varkappa\beta} + \left\{ {\sigma\ \varkappa \atop \beta} \right\} A^{\alpha\varkappa}. \tag{38}$$

Это и есть выражение для тензорной производной контравариантного тензора второго ранга. Оно может быть соответствующим образом составлено и для контравариантных тензоров высшего и низшего ранга.

Заметим, что можно аналогичным образом получить также тензорную производную смешанного тензора A^{α}_{μ}:

$$A^{\alpha}_{\mu\sigma} = \frac{\partial A^{\alpha}_{\mu}}{\partial x_{\sigma}} - \left\{ {\sigma\ \mu \atop \tau} \right\} A^{\alpha}_{\tau} + \left\{ {\sigma\ \tau \atop \alpha} \right\} A^{\tau}_{\mu}. \tag{39}$$

Производя композицию (38) по отношению к значкам β и σ (внутреннее умножение на δ^{σ}_{β}), получаем контравариантный четырехмерный вектор

$$A^{\alpha} = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} + \left\{ {\beta\ \varkappa \atop \beta} \right\} A^{\alpha\varkappa} + \left\{ {\beta\ \varkappa \atop \alpha} \right\} A^{\varkappa\beta}.$$

Вследствие симметрии $\left\{ {\beta\ \varkappa \atop \alpha} \right\}$ относительно значков β и $\varkappa$ третий член правой части обращается в нуль, в том случае, когда $A^{\alpha\beta}$ есть антисимметричный тензор, что мы и допустим; второй член преобразуется на основании (29a).

Таким образом, получается

$$A^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g}\, A^{\alpha\beta})}{\partial x_{\beta}} \tag{40}$$

Это есть выражение для расхождения контравариантного шестивектора.

Расхождение смешанного тензора второго ранга. Если мы произведем композицию в выражении (39) по отношению к значкам α и σ и примем во внимание (29a), то получим

$$\sqrt{-g}\, A_{\mu} = \frac{\partial (\sqrt{-g}\, A^{\sigma}_{\mu})}{\partial x_{\sigma}} - \left\{ {\sigma\ \mu \atop \tau} \right\} \sqrt{-g}\, A^{\sigma}_{\tau}. \tag{41}$$

Если ввести контравариантный тензор $A^{\rho\tau} = g^{\rho\tau} A^{\sigma}$ в последний член, то он примет вид:

$$-\left[{\sigma\ \mu \atop \rho} \right] \sqrt{-g}\, A^{\rho\sigma}.$$

Далее, если тензор $A^{\rho\tau}$ симметричен, то последнее выражение переходит в

$$-\frac{1}{2} \sqrt{-g}\, \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}} A^{\rho\sigma}.$$

Если бы мы вместо $A^{\rho\sigma}$ ввели также симметричный ковариантный тензор $A_{\rho\sigma} = g_{\rho\alpha} g_{\sigma\beta} A^{\alpha\beta}$, то последний член в силу (31) принял бы вид

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g}\, \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}} A_{\rho\sigma}.$$

Итак, в рассмотренном случае симметрии выражение (41) может быть заменено следующими двумя равенствами

$$\sqrt{-g}\, A_{\mu} = \frac{\partial (\sqrt{-g}\, A^{\sigma}_{\mu})}{\partial x_{\sigma}} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}} \sqrt{-g}\, A^{\rho\sigma} \tag{41a}$$

и

$$\sqrt{-g}\, A_{\mu} = \frac{\partial (\sqrt{-g}\, A^{\sigma}_{\mu})}{\partial x_{\sigma}} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}} \sqrt{-g}\, A_{\rho\sigma}, \tag{41b}$$

которыми мы ниже воспользуемся.

§ 12. Тензор Риманна-Кристоффеля.

Займемся теперь изучением тех тензоров, которые могут быть получены из фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$ *одним только* его дифференцированием. На первый взгляд кажется, что ответ очень прост: достаточно подставить в (27) вместо произвольно взятого тензора $A_{\mu\nu}$ фундаментальный тензор $g_{\mu\nu}$, чтобы таким образом получить новый тензор, а именно, тензорную производную фундаментального тензора. Однако, легко убедиться в том, что эта тензорная производная тождественно обращается в нуль. Цель достигается все же следующим образом. Подставляем в (27) выражение

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \begin{Bmatrix} \mu\ \nu \\ \rho \end{Bmatrix} A_\rho,$$

которое представляет собою тензорную производную четырехмерного вектора A_μ. Тогда получается (при несколько измененном обозначении значков) тензор третьего ранга:

$$A_{\mu\sigma\tau} = \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\sigma\, \partial x_\tau} - \begin{Bmatrix} \mu\ \sigma \\ \rho \end{Bmatrix} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\tau} - \begin{Bmatrix} \mu\ \tau \\ \rho \end{Bmatrix} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma} - \begin{Bmatrix} \sigma\ \tau \\ \rho \end{Bmatrix} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\rho} + \left[-\frac{\partial}{\partial x_\tau} \begin{Bmatrix} \mu\ \sigma \\ \rho \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mu\ \tau \\ \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha\ \sigma \\ \rho \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma\ \tau \\ \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha\ \mu \\ \rho \end{Bmatrix} \right] A_\rho.$$

Это выражение приводит к мысли о составлении тензора $A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma}$. Действительно, при этом следующие члены выражения для $A_{\mu\sigma\tau}$ сокращаются с соответствующими членами из $A_{\mu\tau\sigma}$: первый, четвертый член и, наконец, последний член внутри квадратной скобки; ибо все эти члены симметричны относительно σ и τ. То же самое верно для второго и третьего члена суммы. Мы получаем таким образом

$$A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma} = B^\rho_{\mu\sigma\tau} A_\rho, \tag{42}$$

$$\left. \begin{aligned} B^\rho_{\mu\sigma\tau} = &-\frac{\partial}{\partial x_\tau} \begin{Bmatrix} \mu\ \sigma \\ \rho \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \begin{Bmatrix} \mu\ \tau \\ \rho \end{Bmatrix} - \\ &- \begin{Bmatrix} \mu\ \sigma \\ \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha\ \tau \\ \rho \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mu\ \tau \\ \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha\ \sigma \\ \rho \end{Bmatrix}. \end{aligned} \right\} \tag{43}$$

Важно в этом результате то, что в правой части (42) стоит только A_ρ и отсутствуют ее производные. Из тензорного характера $A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma}$ в соединении с тем, что A_ρ есть произвольный четырехмерный вектор, следует, в силу выводов § 7, что $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ есть тензор (тензор Риманна-Кристоффеля).

Математическое значение этого тензора заключается в следующем. Если континуум обладает тем свойством, что существует такая координатная система, в которой $g_{\mu\nu}$ постоянные величины, то все $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ обращаются в нуль. Если вместо первоначальной системы выбрать любую другую новую координатную систему, то $g_{\mu\nu}$, отнесенные к последней, не будут больше постоянны. Однако, тензорный характер величин $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ влечет за собою то, что эти компоненты в произвольно выбранной системе координат тоже обращаются в нуль. Исчезновение тензора Риманна является, следовательно, необходимым условием для того, чтобы можно было бы посредством надлежащего выбора координатной системы сделать $g_{\mu\nu}$ постоянными [1]). В нашей проблеме

[1]) Математики доказали, что это условие является также и *достаточным*.

это соответствует случаю, когда при подходящем выборе координатной системы в конечных областях справедлива специальная теория относительности.

Производя композицию выражения (43) по отношению к значкам τ и ρ, получаем ковариантный тензор второго ранга

$$\left.\begin{aligned} B_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} \\ R_{\mu\nu} &= -\frac{1}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu & \nu \\ & \alpha\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu & \alpha \\ & \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu & \beta \\ & \alpha\end{Bmatrix} \\ S_{\mu\nu} &= \frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu} - \begin{Bmatrix}\mu & \nu \\ & \alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}. \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

Замечание о выборе системы координат. Уже в § 8 в связи с уравнением (18a) было сделано замечание о том, что представляет некоторые преимущества выбрать координаты так, чтобы $\sqrt{-g}=1$. Взгляд на уравнения, полученные в двух последних параграфах, показывает, что благодаря такому выбору законы образования тензоров значительно упрощаются. Особенно это верно для только что выведенного тензора $B_{\mu\nu}$, который в теории играет основную роль. Указанный особый выбор координат влечет за собою исчезновение $S_{\mu\nu}$, так что тензор $B_{\mu\nu}$ приводится к $R_{\mu\nu}$.

В дальнейшем я буду давать, поэтому, все соотношения в том упрощенном виде, который следует из указанного специального выбора координатной системы. Будет не трудно вернуться к обще-ковариантным уравнениям, если в каком-нибудь частном случае это окажется желательным.

§ 13. Уравнение движения материальной точки в поле тяготения. Выражение для компонент поля тяготения.

Свободное и не подверженное внешним силам тело движется, согласно специальной теории относительности, прямолинейно и равномерно. С точки зрения общей теории относительности это же имеет место в той части четырехмерного пространства, в которой координатная система K_0 может быть выбрана — и именно так выбрана, что $g_{\mu\nu}$ принимают специальные постоянные значения, указанные в (4).

Рассматривая это движение и судя о нем с точки зрения произвольно выбранной координатной системы K_1, мы, на основании соображений § 2, находим, что тело движется в поле тяготения. Закон движения относительно K_1 получается легко из следующего рассуждения. По отношению к K_0 закон движения есть четырехмерная прямая, т. е. геодезическая линия. Так как геодезическая линия определяется независимо от координатной системы, то ее уравнение будет также уравнением движения материальной точки относительно системы K_1. Положив

$$\Gamma^\tau_{\mu\nu} = -\begin{Bmatrix}\mu & \nu \\ & \tau\end{Bmatrix}, \qquad (45)$$

найдем, что уравнение движения точки относительно K_1 напишется так:

$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2} = \Gamma^\tau_{\mu\nu}\,\frac{dx_\mu}{ds}\cdot\frac{dx_\nu}{ds}. \qquad (46)$$

Мы сделаем теперь весьма естественное допущение, что эта обще-ковариантная система уравнений определяет движение точки в гравитационном поле и в том случае, когда не существует системы K_0, относительно которой в конечных участках пространства верна специальная теория относительности. Мы тем более, в праве делать такое допущение, что (46) содержит в себе только *первые* производные от $g_{\mu\nu}$, между которыми, — даже и в частном случае наличия системы K_0, — не имеется никаких соотношений [1]).

Если все $\Gamma^\tau_{\mu\nu}$ равны нулю, то точка движется прямолинейно и равномерно; следовательно, эти величины обусловливают отклонение движения от равномерности. Они являются компонентами гравитационного поля.

§ 14. Уравнения поля тяготения при отсутствии материи.

В дальнейшем мы делаем различие между „полем тяготения" и „материей" в том смысле, что все, кроме поля тяготения, обозначается как „материя"; это значит, что к последней относится не только „материя" в обычном смысле, но и электромагнитное поле.

Ближайшая задача заключается в отыскании уравнений поля тяготения при отсутствии материи. Для этого воспользуемся опять тем же методом, какой применялся в предыдущем параграфе при выводе уравнения движения материальной точки. Первоначальная теория относительности, в которой все $g_{\mu\nu}$ имеют некоторые постоянные значения, является тем частным случаем, для которого искомые уравнения непременно удовлетворяются. Пусть этот частный случай имеет место в некоторой конечной области

---

[1]) Лишь между вторыми (и первыми) производными существуют согласно § 12 соотношения $B^\rho_{\mu\sigma\tau} = 0$.

по отношению к определенной координатной системе K_0. Относительно этой системы все компоненты $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ римановского тензора (43) обращаются в нуль. Но в таком случае компоненты его в той же области, взятые относительно любой другой системы, тоже будут равны нулю.

Таким образом, искомые уравнения свободного от материи поля тяготения непременно должны выполняться, если все $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ равны нулю. Но это условие во всяком случае требует слишком много. Ибо ясно, что гравитационное поле, созданное, например, материальной точкой вокруг себя, наверное никаким выбором координатной системы не может быть „оттрансформировано", то-есть не может быть преобразовано к случаю постоянных $g_{\mu\nu}$.

Поэтому представляется естественным требование, чтобы в свободном от материи гравитационном поле симметричный тензор $B_{\mu\nu}$, полученный из тензора $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$, был бы равен нулю. Таким способом получаются 10 уравнений для 10 величин $g_{\mu\nu}$, которые оказываются удовлетворенными в том частном случае, когда все $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ равны нулю. Эти уравнения, в силу (44) при сделанном выборе координатной системы для свободного от материи поля имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} &= 0, \\ \sqrt{-g} &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Нужно заметить, что с выбором этих уравнений связан минимум произвола. Ибо, кроме $B_{\mu\nu}$, нет другого тензора второго ранга, который был бы составлен из $g_{\mu\nu}$ и их производных, не содержал бы высших производных, кроме вторых, и был бы в отношении вторых производных линейным [1]).

Тот факт, что эти уравнения, вытекающие из требования общей относительности и полученные чисто математическим путем, в соединении с уравнениями движения (46) дают в первом приближении ньютонов закон притяжения и во втором приближении объяснение открытого Леверрье движения перигелия Меркурия (остающегося после внесения поправок на возмущение) — должно, по моему мнению, убедить в физической верности теории.

§ 15. Функция Гамильтона для гравитационного поля. Закон сохранения импульса и энергии.

Для того чтобы показать соответствие уравнений поля законам сохранения импульса и энергии, удобнее всего написать их в следующей гамильтоновой форме:

$$\left.\begin{aligned} &\delta\left\{\int H d\tau\right\}=0, \\ &H=g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}, \\ &\sqrt{-g}=1. \end{aligned}\right\} \qquad (47a)$$

При этом на границах рассматриваемой ограниченной четырехмерной области интегрирования вариации равны нулю.

[1]) Собственно говоря, это можно утверждать только о тензоре $B_{\mu\nu}+\lambda g_{\mu\nu}(g^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta})$, где λ есть константа. Приравняв его нулю, мы снова возвращаемся к уравнениям: $B_{\mu\nu}=0$.

Необходимо сначала показать, что уравнения (47 эквивалентны уравнениям (47). Для этой цели мы рассматриваем H как функцию от $g^{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}_{\sigma}$ $\left(=\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}\right)$.

Тогда

$$\begin{aligned}\delta H &= \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu}+2g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}= \\ &= -\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu}+2\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta\left(g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\right).\end{aligned}$$

Но

$$\delta\left(g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\right)=-\frac{1}{2}\delta\left[g^{\mu\nu}g^{\beta\lambda}\left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_{\alpha}}+\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x_{\nu}}-\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_{\lambda}}\right)\right].$$

Члены, получающиеся из двух последних членов внутри круглых скобок, имеют разные знаки и получаются друг из друга путем перестановки значков μ и β (так как обозначение значков суммирования не имеет значения); в выражении для δH они взаимно уничтожаются, будучи помножены на величину $\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$, симметричную относительно значков μ и β. Таким образом остается только первый член круглой скобки, так что, приняв во внимание (31), получаем

$$\delta H=-\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta g^{\mu\beta}_{\alpha}.$$

Таким образом имеем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}}=-\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}, \\ &\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}}=\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}. \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

По выполнении вариации в (47a) получаем сначала систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right)-\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}}=0, \qquad (47b)$$

которая, в силу (48), совпадает с (47), что и требовалось доказать.

Помножив (47b) на $g_\sigma^{\mu\nu}$ и приняв во внимание, что

$$\frac{\partial g_\sigma^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma},$$

и, следовательно,

$$g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\right) - \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} \frac{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma},$$

получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\right) - \frac{\partial H}{\partial x_\sigma} = 0,$$

или [1])

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial t_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0, \\ -2\varkappa t_\sigma^\alpha &= g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} - \delta_\sigma^\alpha H, \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

причем, на основании (48), второго уравнения (47) и (34), должно иметь место

$$\varkappa t_\sigma^\alpha = \frac{1}{2} \delta_\sigma^\alpha g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\beta}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\beta - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\sigma}^\beta. \tag{50}$$

Нужно помнить, что t_σ^α не есть тензор; но уравнение (49) справедливо для всех координатных систем, для которых $\sqrt{-g} = 1$. Это уравнение выражает законы сохранения импульса и энергии для поля тяготения. В самом деле, интегрирование этого уравнения по *трехмерному* объему V дает 4 уравнения:

$$\frac{d}{dx_4}\left\{\int t_\sigma^4\, dV\right\} = \int \left(t_\sigma^1 a_1 + t_\sigma^2 a_2 + t_\sigma^3 a_3\right) dS, \tag{49a}$$

[1]) Причина введения множителя $-2\varkappa$ выяснится позже.

где a_1, a_2, a_3 означают направляющие косинусы направленной во внутрь нормали к элементу граничной поверхности dS (в смысле эвклидовой геометрии). Легко видеть, что (49a) содержит выражение обоих законов в их обычном виде. Величины t_σ^α мы называем „компонентами энергии“ гравитационного поля.

Я хочу представить теперь уравнения (47) еще и в третьей форме, особенно пригодной для наглядного усвоения нашего предмета. Посредством умножения уравнений поля (47) на $g^{\nu\sigma}$ первые получаются в „смешанном“ виде.

Нужно принять во внимание, что

$$g^{\nu\sigma} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\sigma}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(g^{\nu\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha\right) - \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha.$$

Эта величина, на основании (34), равна

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(g^{\nu\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha\right) - g^{\nu\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - g^{\sigma\beta} \Gamma_{\beta\alpha}^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\alpha,$$

или (по изменении обозначения значков суммирования) равна

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(g^{\sigma\beta} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha\right) - g^{mn} \Gamma_{m\beta}^\sigma \Gamma_{n\mu}^\beta - g^{\nu\sigma} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta.$$

Третий член этого выражения сокращается с членом, получающимся из второго члена уравнений поля (47); вместо второго члена этого выражения можно, пользуясь соотношением (50), подставить

$$\varkappa \left(t_\mu^\sigma - \frac{1}{2} \delta_\mu^\sigma t \right),$$

где $t = t_\alpha^\alpha$.

Итак, вместо уравнений (47) получается

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(g^{\sigma\beta} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha\right) &= -\varkappa \left(t_\mu^\sigma - \frac{1}{2} \delta_\mu^\sigma t \right), \\ \sqrt{-g} &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

§ 16. Уравнения поля тяготения в общем виде.

Уравнения поля для свободного от материи пространства, выведенные в предыдущем параграфе, нужно сравнивать с уравнением поля

$$\Delta\varphi = 0$$

теории Ньютона. Мы должны найти уравнение, которое соответствует уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi\varkappa\rho,$$

где ρ означает плотность материи.

Специальная теория относительности привела к тому выводу, что инертная масса есть не что иное, как энергия, полное математическое выражение которой дано в симметричном тензоре второго ранга тензоре энергии. Поэтому придется ввести в общую теорию относительности некоторый энергетический тензор материи T_σ^α, имеющий смешанный характер как и компоненты энергии t_σ^α [уравнений (49) и (50)] гравитационного поля, но в то же время соответствующий симметричным ковариантным тензорам [1]).

Система уравнений (51) показывает, как ввести этот тензор энергии (соответствующий плотности ρ в уравнении Пуассона) в уравнения гравитационного поля. Если рассматривать замкнутую систему (например, солнечную систему), то общая масса системы и, следовательно, ее общее гравитационное действие будут зависеть от всей энергии системы, т. е. от совокупности весомой энергии и энергии тяготения. Это можно выразить тем, что в (51) вместо одних только

[1]) $g_{\sigma\tau}T_\sigma^\alpha = T_{\sigma\tau}$ и $g^{\sigma\beta}T_\sigma^\alpha = T^{\alpha\beta}$ должны быть симметричными тензорами.

энергетических компонент t_μ^σ гравитационного поля мы подставим сумму $t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma$ энергетических компонент материи и гравитационного поля. Таким образом вместо (51) получается тензорное уравнение

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha\right) = -\varkappa\Big[\left(t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma\right) - \\ -\frac{1}{2}\,\delta_\mu^\sigma\left(t+T\right)\Big], \\ \sqrt{-g} = 1, \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

в котором $T = T_\mu^\mu$ (скаляр Лауэ). Эти уравнения (52) и представляют собой искомые общие уравнения поля тяготения в смешанной форме.

Отсюда обратным путем взамен (47) получается система уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x_\alpha} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha\Gamma_{\nu\alpha}^\beta = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}T\right), \\ \sqrt{-g} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Нужно признать, что указанное введение энергетического тензора материи не может быть обосновано одним только постулатом относительности; поэтому выше мы исходим из требования, что энергия гравитационного поля должна действовать в смысле тяготения точно так же, как всякая энергия другого рода. Но самым главным основанием для выбора указанных уравнений будет то, что из них следуют уравнения сохранения импульса и энергии для компонент полной энергии, в точности соответствующие уравнениям (49) и (49а). Это будет доказано ниже.

§ 17. Законы сохранения в общем случае.

Нетрудно уравнение (52) преобразовать так, чтобы на правой стороне исчез второй член. Для этого производят композицию по значкам μ и σ и вычитают полученное таким образом уравнение, предварительно умноженное на $\frac{1}{2}\delta_\mu^\sigma$, из (52). Получается

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha - \frac{1}{2}\delta_\mu^\sigma g^{\lambda\beta}\Gamma_{\lambda\beta}^\alpha\right) = -\varkappa\left(t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma\right). \quad (52a)$$

К этому уравнению мы применяем операцию $\frac{\partial}{\partial x_\sigma}$; имеем:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\sigma}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\sigma}\cdot\left[g^{\sigma\beta}g^{\alpha\lambda}\cdot\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\lambda}\right)\right].$$

Первый и третий члены круглой скобки взаимно уничтожаются, в чем легко убедиться, если в третьем члене переставить с одной стороны значки суммирования α и σ и с другой стороны значки β и λ. Второй член можно на основании (31) преобразовать, причем получается

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\sigma}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^3 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta\,\partial x_\mu}. \quad (54)$$

Второй член в левой части (52a) дает сначала

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\mu}\left(g^{\lambda\beta}\Gamma_{\lambda\beta}^\alpha\right)$$

или

$$\frac{1}{4}\,\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\mu}\left[g^{\lambda\beta}g^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial g_{\delta\lambda}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x_\delta}\right)\right].$$

Член, происходящий от последнего члена круглой скобки, исчезает при сделанном нами выборе координат в силу (29). Два других члена можно объединить, и они вместе, на основании (31), дают

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^3 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta\,\partial x_\mu},$$

так что, приняв во внимание (54), получаем тождество

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\sigma}\left(g^{\rho\beta}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha - \frac{1}{2}\delta_\mu^\sigma g^{\lambda\beta}\Gamma_{\lambda\beta}^\alpha\right) = 0. \quad (55)$$

Из (55) и (52a) следует

$$\frac{\partial\left(t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma\right)}{\partial x_\sigma} = 0. \quad (56)$$

Таким образом из наших уравнений поля тяготения следует, что законы сохранения импульса и энергии удовлетворены. В этом проще всего убедиться при помощи рассуждения, которое ведет к уравнению (49a); нужно только вместо компонент энергии t_μ^σ гравитационного поля ввести компоненты полной энергии материи и гравитационного поля.

§ 18. Законы сохранения импульса и энергии для материи, как следствие из уравнений поля.

Помножив (53) на $\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$, пользуясь приемом, примененным в § 15, и принимая во внимание, что $g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ равно нулю, получим уравнение:

$$\frac{\partial t_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\,T_{\mu\nu} = 0$$

или, в силу (56),

$$\frac{\partial T_{\sigma}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} T_{\mu\nu} = 0. \tag{57}$$

Сравнение с (41b) показывает, что это уравнение при сделанном выборе координатной системы выражает только то, что расхождение тензора энергетических компонент материи равно нулю. Наличие второго члена с левой стороны физически означает, что для одной материи законы сохранения импульса и энергии в их подлинном смысле не действительны, — или действительны, но только тогда, когда $g^{\mu\nu}$ постоянны, т. е., когда напряжения поля тяготения равны нулю. Этот второй член представляет собою выражение для импульса, или, соответственно, для энергии, которые в единицу времени и на единицу объема переносятся с поля тяготения на материю. Все это делается еще более ясным, если вместо (57), придерживаясь (41), написать

$$\frac{\partial T_{\sigma}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = -\Gamma_{\sigma\beta}^{\alpha} T_{\beta}^{\alpha}. \tag{57a}$$

Правая часть выражает энергетическое воздействие гравитационного поля на материю.

Уравнения поля тяготения содержат таким образом одновременно четыре условия, которым должны удовлетворять материальные явления. Они полностью дают нам уравнения материального явления, если последнее может быть описано посредством четырех, независимых друг от друга дифференциальных уравнений [1].

[1] Ср. D. Hilbert, Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1915, стр. 3.

D. „Материальные" явления.

Математические вспомогательные средства, изложенные в разделе B, дают нам сразу возможность обобщить физические законы материи (гидродинамику, электродинамику Максвелла), сформулированные в специальной теории относительности так, чтобы они удовлетворяли общей теории относительности. При этом общий принцип относительности, не налагая никаких новых ограничений, дает возможность точно описать влияние поля тяготения на все процессы без привлечения какой-нибудь новой гипотезы.

Из этого обстоятельства следует, что нет необходимости вводить какие-нибудь предположения относительно физической природы материи (в более узком смысле). В частности может остаться открытым вопрос о том, смогут или нет теория электромагнитного поля и поля тяготения совместно создать достаточную базу для теории материи. Общий постулат относительности в принципе ничего не может сказать об этом. В процессе развития теории выяснится, смогут ли электромагнитизм и учение о тяготении совместно дать то, что не удавалось одной первой теории.

§ 19. Уравнения Эйлера для адиабатических жидкостей, не имеющих трения.

Пусть p и ρ — два скаляра; назовем первый „давлением", второй — „плотностью" жидкости; пусть между ними существует определенная зависимость. Пусть, далее, контравариантный тензор

$$T^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} p + \rho \frac{dx_{\alpha}}{ds} \frac{dx_{\beta}}{ds} \tag{58}$$

является контравариантным энергетическим тензором жидкости.

Ему соответствует ковариантный тензор

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} p + g_{\mu\alpha} \frac{dx_\alpha}{ds} g_{\mu\beta} \frac{dx_\beta}{ds} \rho, \tag{58a}$$

а также и смешанный тензор [1])

$$T_\sigma^\alpha = -\delta_\sigma^\alpha p + g_{\sigma\beta} \frac{dx_\beta}{ds} \frac{dx_\alpha}{ds} \rho. \tag{58b}$$

Подставив правую часть (58b) в (57a), получим гидродинамические уравнения Эйлера для общей теории относительности. В принципе эти уравнения решают полностью проблему движения; ибо четыре уравнения (57a) вместе с заданной зависимостью между p и ρ и уравнение

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 1$$

достаточны при данных $g_{\alpha\beta}$ для определения 6 неизвестных

$$p, \quad \rho, \quad \frac{dx_1}{ds}, \quad \frac{dx_2}{ds}, \quad \frac{dx_3}{ds}, \quad \frac{dx_4}{ds}.$$

Если также и $g_{\mu\nu}$ неизвестны, то к прежним уравнениям присоединяются еще уравнения (53), всего 11 уравнений для определения 10 функций $g_{\mu\nu}$.

Между тем следует заметить, что уравнения (57a) уже содержатся в уравнениях (53), так что последние представляют только 7 независимых уравнений. Причина этой неопределенности заключается в конце концов в широкой свободе выбора координатной системы, вследствие которой проблема математически остается столь неопределенной, что три из всех пространственных функций могут быть выбраны произвольно [1]).

[1]) Для наблюдателя, который участвует в движении и пользуется в бесконечно малом координатной системой в смысле специальной теории относительности, плотность энергии T_4^4 равна $\rho - p$. В этом заключается определение ρ. Таким образом для несжимаемой жидкости ρ не постоянно.

§ 20. Максвелловы уравнения электромагнитного поля для пустоты.

Пусть φ_ν будут компонентами ковариантного четырехмерного вектора электромагнитного потенциала. Из них мы образуем согласно (36) компоненты $F_{\rho\sigma}$ ковариантного шестивектора электромагнитного поля и получаем:

$$F_{\rho\sigma} = \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\rho}. \tag{59}$$

Из (59) следует, что удовлетворяется следующая система уравнений:

$$\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial F_{\tau\rho}}{\partial x_\sigma} = 0. \tag{60}$$

Левая часть этого выражения в силу (37) есть антисимметричный тензор третьего ранга. Таким образом, система (60) содержит по существу 4 уравнения, имеющие следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} = 0, \\
\frac{\partial F_{43}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_4} = 0, \\
\frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} = 0, \\
\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} = 0.
\end{aligned}\right\} . \tag{60a}$$

[1]) При отказе от выбора координатной системы с $g = -1$, остаются 4 пространственные функции, соответственно четырем произвольным функциям, которыми можно располагать при выборе координат.

Эта система уравнений соответствует второй системе уравнений Максвелла. В этом можно тотчас же убедиться, если подставить

$$\left.\begin{array}{ll} F_{23} = \mathrm{h}_x & F_{14} = \mathrm{e}_x \\ F_{31} = \mathrm{h}_y & F_{24} = \mathrm{e}_y \\ F_{12} = \mathrm{h}_z & F_{34} = \mathrm{e}_z \end{array}\right\}. \tag{61}$$

Тогда можно вместо (60a) написать в обычных символах трехмерного векторного анализа

$$\left.\begin{array}{r} \frac{\partial \mathrm{h}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathrm{e} = 0, \\ \operatorname{div} \mathrm{h} = 0. \end{array}\right\} \tag{60b}$$

Первую систему уравнений Максвелла мы получим, обобщая уравнения Максвелла в виде, данном Минковским. Введем контравариантный шестивектор

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}, \tag{62}$$

соответствующий ковариантному $F_{\alpha\beta}$, и контравариантный четырехмерный вектор J^{μ} плотности электрического тока в пустоте. В таком случае можно, приняв во внимание (40), написать следующую, инвариантную для любых подстановок с определителем равным 1 (согласно сделанному нами выбору координат), систему уравнений:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = J^{\mu}. \tag{63}$$

Положим:

$$\left.\begin{array}{ll} F^{23} = \mathrm{h}_x' & F^{14} = -\mathrm{e}_x' \\ F^{31} = \mathrm{h}_y' & F^{24} = -\mathrm{e}_y' \\ F^{12} = \mathrm{h}_z' & F^{34} = -\mathrm{e}_z'. \end{array}\right\} \tag{64}$$

Эти величины в частном случае специальной теории относительности равны соответственно величинам $\mathrm{h}_x \ldots \mathrm{e}_z$.

Далее, положим:

$$J^1 = \mathrm{i}_x, \quad J^2 = \mathrm{i}_y, \quad J^3 = \mathrm{i}_z, \quad J^4 = \rho.$$

В таком случае вместо (63) мы получим

$$\left.\begin{array}{r} \operatorname{rot} \mathrm{h}' - \frac{\partial \mathrm{e}'}{\partial t} = \mathrm{i}, \\ \operatorname{div} \mathrm{e}' = \rho. \end{array}\right\} \tag{63a}$$

Уравнения (60), (62), (63) представляют собой обобщение максвелловых уравнений поля для пустоты при сделанном допущении относительно выбора координат.

Энергетические компоненты электромагнитного поля. Мы образуем внутреннее произведение

$$\varkappa_\sigma = F_{\sigma\mu} J^{\mu}. \tag{65}$$

Его компоненты, написанные согласно (61) в трехмерных символах, имеют следующий вид:

$$\left.\begin{array}{l} \varkappa_\sigma = \rho \mathrm{e}_x + [\mathrm{i}, \mathrm{h}]_x \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varkappa_\sigma = -(\mathrm{i}, \mathrm{e}). \end{array}\right\} \tag{65a}$$

$\varkappa_\sigma$ есть ковариантный четырехмерный вектор, компоненты его равны отрицательному импульсу, или соответственно энергии, которые переносятся с электрических масс на электромагнитное поле в единицу времени и в единице объема. Если электрические массы свободны, т. е. если они находятся под влиянием одного только электромагнитного поля, то ковариантный четырехмерный вектор $\varkappa_\sigma$ обращается в нуль.

Для того чтобы получить энергетические компоненты T_σ^ν электромагнитного поля, достаточно уравнению $\varkappa_\sigma = 0$ придать вид уравнения (57). Из (63) и (65) получается сначала

$$\varkappa_\sigma = F_{\sigma\mu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(F_{\sigma\mu} F^{\mu\nu} \right) - F^{\mu\rho} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}.$$

Второй член в правой части может быть, в силу (60), преобразован

$$F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\frac{1}{2} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}.$$

На основании соображений о симметрии последнее выражение может быть написано также и в следующем виде:

$$-\frac{1}{4} \left[g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} F_{\mu\nu} \right].$$

Но вместо этого можно написать

$$-\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \right).$$

Первый член можно сокращенно представить так:

$$-\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right).$$

Второй член после выполнения дифференцирования и некоторого преобразования принимает следующий вид:

$$-\frac{1}{2} F^{\mu\tau} F_{\mu\nu} g^{\nu\rho} \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\sigma}.$$

Соединив все три вычисленных члена, получим следующее соотношение

$$\varkappa_\sigma = \frac{\partial T_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} T_\tau^\nu, \tag{66}$$

где

$$T_\sigma^\nu = - F_{\sigma\alpha} F^{\nu\alpha} + \frac{1}{4} \delta_\sigma^\nu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \tag{66a}$$

Равенство (66), при $\varkappa_\sigma$ равном нулю, в силу (30), эквивалентно (57), или, соответственно, (57а). Следовательно, T_σ^ν представляют собой компоненты энергии электромагнитного поля. При помощи (61) и (64) легко показать, что из компонент энергии электромагнитного поля в случае специальной теории относительности получаются хорошо известные выражения Максвелла — Пойнтинга.

Пользуясь все время координатной системой, для которой $\sqrt{-g} = 1$, мы вывели самые общие законы, которым удовлетворяют поле тяготения и материя. Благодаря этому мы достигли значительного упрощения формул и расчетов, не отказавшись в то же время от требования общей ковариантности, ибо мы вывели наши уравнения из общековариантных уравнений посредством специально выбранной координатной системы.

Все же не лишен формального интереса вопрос, действительны ли законы сохранения (импульса и энергии), а также уравнения поля тяготения, представленные в виде уравнения (56), и соответственно, (52) или (52а), в которых слева стоит расхождение (в обычном смысле), а справа — сумма энергетических компонент материи и тяготения, и в том случае, когда при соответственно обобщенном определении компонент энергии гравитационного поля и материи не делается указанного выше специального выбора координатной системы. Я нашел что и то, и другое действительно имеет место. Однако, я полагаю, что изложение этих довольно значительных по объему соображений по данному вопросу будет бесполезно, ибо при этом все же ничего нового по существу не получается.

Е. § 21. Теория Ньютона как первое приближение.

Как уже упоминалось много раз, специальная теория относительности, рассматриваемая как частный случай общей теории относительности, характеризуется тем, что $g_{\mu\nu}$ имеют постоянные значения (4). Согласно изложенному выше, это означает полное пренебрежение гравитационными действиями. Мы получаем более близкое к действительности приближение, рассматривая случай, в котором все $g_{\mu\nu}$ отличаются от значений (4) лишь на малые (по сравнению с 1) величины; мы пренебрегаем при этом малыми величинами второго и высших порядков. (Первая точка зрения при приближенном решении основных уравнений).

Далее, допустим, что в рассматриваемой временно-пространственной области при надлежащем выборе системы координат величины $g_{\mu\nu}$ в пространственной бесконечности стремятся к значениям (4); это значит, что мы рассматриваем гравитационные поля, которые могут считаться созданными только материей, находящейся в конечной области пространства.

Можно было бы думать, что упомянутые пренебрежения должны привести к теории Ньютона. Однако, для того чтобы прийти к теории Ньютона при приближенной трактовке основных уравнений, требуется

сделать некоторые пренебрежения еще и с другой точки зрения. Мы рассмотрим движение материальной точки, удовлетворяющее уравнениям (46). В случае специальной теории относительности компоненты

$$\frac{dx_1}{ds}, \quad \frac{dx_2}{ds}, \quad \frac{dx_3}{ds}$$

могут принимать любые значения; это означает, что могут иметь место любые скорости

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2},$$

которые меньше скорости света в пустоте ($v < 1$).

Если ограничиться случаем, который почти исключительно осуществляется на опыте и в котором v мало по сравнению со скоростью света, это будет означать, что компоненты

$$\frac{dx_1}{ds}, \quad \frac{dx_2}{ds}, \quad \frac{dx_3}{ds}$$

должны рассматриваться как малые величины, в то время как $\frac{dx_4}{ds}$ с точностью до величины второго порядка равно 1. (Вторая точка зрения при приближенном вычислении основных уравнений).

Теперь примем во внимание, что согласно первой точке зрения при вычислении все $\Gamma^{\tau}_{\nu\mu}$ представляют собой малые величины, по крайней мере, первого порядка. Но отсюда следует, что в выражении (46) при приближенном вычислении согласно второй точке зрения должны быть приняты во внимание только те члены, у которых $\mu = \nu = 4$. Ограничиваясь членами низшего порядка, мы вместо (46) получаем сначала следующие уравнения

$$\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = \Gamma^{\tau}_{44},$$

где $ds = dx_4 = dt$; беря только те члены, которые с первой точки зрения являются членами первого порядка, имеем:

$$\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = \begin{bmatrix} 44 \\ \tau \end{bmatrix} \qquad (\tau = 1,\ 2,\ 3)$$

$$\frac{d^2x_4}{dt^2} = -\begin{bmatrix} 44 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Если, кроме того, предположить, что поле тяготения квазистационарно, и ограничиться тем случаем, когда материя, создающая поле тяготения, движется медленно (по сравнению со скоростью распространения света), то в правой части можно пренебречь производными по времени по сравнению с производными по пространственным координатам; таким образом получается

$$\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_\tau} \quad (\tau = 1,\ 2,\ 3). \qquad (67)$$

Это есть уравнение движения материальной точки по теории Ньютона, причем $\frac{g_{44}}{2}$ имеет значение гравитационного потенциала. Этот результат замечателен тем, что только одна компонента g_{44} фундаментального тензора определяет в первом приближении движение материальной точки.

Обратимся теперь к уравнениям поля (53). При этом должно быть принято во внимание, что энергетический тензор „материи" определяется почти исключительно плотностью ρ материи в более узком смысле этого слова, т. е. вторым членом правой части (58) [в частности, (58a) или (58b)]. Если образовать интересующее нас приближенное выражение, то все компоненты, кроме $T_{44} = \rho = T$, обращаются в нуль.

В левой части уравнения (53) второй член есть величина второго порядка малости; первый же член принимает следующий вид в интересующем нас приближении:

$$+\frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix} \mu & \nu \\ & 1 \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{bmatrix} \mu & \nu \\ & 2 \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix} \mu & \nu \\ & 3 \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_4}\begin{bmatrix} \mu & \nu \\ & 4 \end{bmatrix}.$$

Это выражение при $\mu = \nu = 4$ и отбрасывании производных по времени переходит в

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_3^2}\right) = -\frac{1}{2}\ \Delta g_{44}.$$

Таким образом, последнее из уравнений (53) может быть написано так:

$$\Delta g_{44} = \varkappa\rho \qquad (68)$$

Формулы (67) и (68), вместе взятые, эквивалентны закону тяготения Ньютона.

Для гравитационного потенциала получается на основании (67) и (68) выражение

$$-\frac{\varkappa}{8\pi}\int\frac{\rho d\tau}{r}, \qquad (68a)$$

тогда как теория Ньютона при выбранной нами единице времени дает для этой величины выражение

$$-\frac{K}{c^2}\int\frac{\rho d\tau}{r},$$

где K — обычная гравитационная постоянная, равная $6{,}7 \cdot 10^{-8}$. Из сравнения обоих выражений получается

$$\varkappa = \frac{8\pi K}{c^2} = 1{,}87 \cdot 10^{-27}. \qquad (69)$$

§ 22. Свойства масштабов и часов в статическом поле тяготения. Искривление лучей света. Движение перигелия планетных орбит.

Для того чтобы получить теорию Ньютона как первое приближение, нам пришлось из 10 компонент гравитационного потенциала $g_{\mu\nu}$ вычислить только g_{44}, так как только эта компонента входит в полученное в первом приближении уравнение движения (67) материальной точки в поле тяготения. Но и другие компоненты $g_{\mu\nu}$ должны в первом приближении отличаться от значений, данных в (4), так как все они связаны условием $g = -1$.

Для материальной точки, создающей поле и находящейся в начале координат, получается в первом приближении радиально симметричное решение:

$$\left.\begin{array}{ll} g_{\rho\sigma} = -\delta_{\rho\sigma} - \alpha\dfrac{x_\rho x_\sigma}{r^3} & (\rho \text{ и } \sigma \text{ имеют значения от 1 до 3}) \\ g_{\rho 4} = g_{4\rho} = 0 & (\rho \text{ имеет значения от 1 до 3}) \\ g_{44} = 1 - \dfrac{\alpha}{r}, & \end{array}\right\} \qquad (70)$$

где $\delta_{\rho\sigma}$ равно 1 или 0, смотря по тому, будет ли $\rho = \sigma$ или $\rho \neq \sigma$ и

$$r = +\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

При этом, в силу (66а), имеем

$$\alpha = \frac{\varkappa M}{4\pi}, \qquad (70\text{a})$$

где буквой M обозначается масса, создающая поле. Легко проверить, что это решение удовлетворяет уравнениям поля (вне массы) в первом приближении.

Мы исследуем теперь воздействие, которое испытывают метрические свойства пространства от поля массы M. Между „локально" измеренными длинами и временами ds с одной стороны и приращениями координат dx_ν с другой стороны всегда имеет место соотношение:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu.$$

Так, например, для единицы масштаба, расположенной „параллельно" оси x, следует написать:

$$ds^2 = -1; \qquad dx_2 = dx_3 = dx_4 = 0,$$

т. е.

$$-1 = g_{11}\, dx_1^2.$$

Если единица масштаба, кроме того, лежит на самой оси x, то первое из уравнений (70) дает

$$g_{11} = -\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right).$$

Из обоих соотношений следует в первом приближении

$$dx = 1 - \frac{\alpha}{2r}. \qquad (71)$$

Итак, если единица масштаба приложена в радиальном направлении, то в рассматриваемой координатной системе, благодаря наличию поля тяготения, она представляется укороченной в размере найденной величины.

Мы получим аналогичным путем координатные длины масштаба в случае касательного направления, если положим, например,

$$ds^2 = -1; \qquad dx_1 = dx_3 = dx_4 = 0;$$
$$x_1 = r, \qquad x_2 = x_3 = 0.$$

В таком случае имеем

$$-1=g_{22}\,dx_2^{\,2}=-dx_2^{\,2}. \tag{71a}$$

Итак, при касательном положении, поле тяготения материальной точки не имеет никакого влияния на длину стержня.

Следовательно, в гравитационном поле эвклидова геометрия не действительна даже и в первом приближении, если один и тот же стержень, независимо от его местоположения и ориентации, рассматривается как конкретное осуществление одного и того же отрезка. Но соотношения (70a) и (69) все же показывают, что ожидаемые отклонения от геометрии Эвклида слишком незначительны, чтобы их можно было заметить при измерении поверхности земли.

Пусть, далее, исследуется скорость хода часов эталона времени; часы установлены неподвижно в статическом поле тяготения. Для одного периода часов в данном случае имеем:

$$ds=1;\qquad dx_1=dx_2=dx_3=0.$$

Следовательно,

$$1=g_{44}\,dx_4^{\,2};$$

$$dx_4=\frac{1}{\sqrt{g_{44}}}=\frac{1}{\sqrt{1+(g_{44}-1)}}=1-\frac{g_{44}-1}{2}$$

или

$$dx_4=1+\frac{\varkappa}{8\pi}\int\frac{\rho\,d\tau}{r}. \tag{72}$$

Итак, часы идут медленнее, если они установлены вблизи весомых масс. Отсюда следует, что спектральные линии света, попадающего к нам с поверхности

больших звезд, должны сместиться к красному концу спектра [1]).

Исследуем еще ход лучей света в статическом поле тяготения. По специальной теории относительности скорость света дается уравнением

$$-dx_1^{\,2}-dx_2^{\,2}-dx_3^{\,2}+dx_4^{\,2}=0.$$

Следовательно, по общей теории относительности эта скорость определится из формулы

$$ds^2=g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu=0. \tag{73}$$

Если дано направление луча, т. е. отношение $dx_1 : dx_2 : dx_3$, то из уравнения (73) можно вычислить величины

$$\frac{dx_1}{dx_4},\quad \frac{dx_2}{dx_4},\quad \frac{dx_3}{dx_4},$$

и, таким образом, скорость

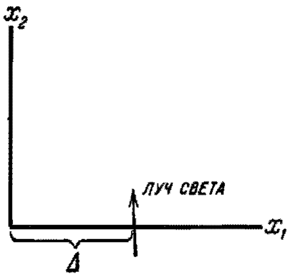
$$\gamma=\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2},$$

определяемую в смысле эвклидовой геометрии. Легко видеть, что лучи света должны искривляться относительно координатной системы в том случае, когда $g_{\mu\nu}$ не постоянны. Если n — направление, перпендикулярное к линии распространения света, то из принципа Гюйгенса следует, что луч света [рассматриваемый в плоскости (γ, n)] обладает кривизной $-\frac{\partial\gamma}{\partial n}$.

Исследуем искривление луча света, проходящего на расстоянии Δ мимо массы M. Если выбрать ко-

[1]) За существование подобного эффекта говорят, по Фрейндлиху, спектральные наблюдения над звездами определенных типов. Однако, окончательная проверка этого следствия не была еще предпринята.

ординатную систему согласно рисунку, то общее искривление B луча света (считаемое положительным, если траектория луча обращена к началу координат своей вогнутой стороной) дается в достаточном приближении следующим выражением



$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}\, dx_2,$$

причем из (73) и (70) получается

$$\gamma = \sqrt{-\frac{g_{44}}{g_{22}}} = 1 - \frac{\alpha}{2r}\left(1 + \frac{x_2^2}{r^2}\right).$$

Вычисление дает

$$B = \frac{2\alpha}{\Delta} = \frac{\varkappa M}{2\pi\Delta}. \qquad (74)$$

На этом основании луч света, проходящий мимо солнца, испытывает отклонение в 1″,7, а луч света, проходящий мимо планеты Юпитер, отклоняется приблизительно на 0″,02.

Если вычислить поле тяготения с точностью до величин следующего порядка, и с соответствующей точностью вычислить также и движение по орбите материальной точки с относительно бесконечно малой массой, то по сравнению с законами движения планет Кеплера — Ньютона получается отклонение следующего рода. Эллиптическая орбита планеты испытывает в направлении движения планеты медленное вращение, равное

$$\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)} \qquad (75)$$

за время одного полного обращения планеты. В этой формуле a означает большую полуось, c — скорость

света в обычной мере, e — эксцентриситет, T — время обращения планеты в секундах [1]).

Для планеты Меркурий получается вращение орбиты, составляющее 43″ в столетие, что точно соответствует величине, установленной астрономами (Леверрье); последние именно нашли, что некоторая часть общего движения перигелия этой планеты не объясняется возмущающим действием других планет и равняется указанной величине.

---

[1]) Интересующихся вычислением я отсылаю к оригинальным работам:

A. Einstein, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. 1915, стр. 831;

K. Schwarzschild, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. 1916, стр. 189.

А. ЭЙНШТЕЙН [1]).

ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.

В последнее время Г. А. Лоренцу и Д. Гильберту [2]) удалось придать общей теории относительности особенно наглядную форму тем, что они вывели ее уравнения из одного единственного вариационного принципа. То же самое будет сделано и в данной статье. При этом моя цель будет заключаться в том, чтобы сделать основные соотношения возможно ясными и настолько общими, насколько это допускает точка зрения общей относительности. В противоположность изложению, главным образом, Гильберта, о свойствах материи будет сделано по возможности мало специальных допущений.

С другой стороны, в противовес моему собственному последнему изложению предмета, выбор координатной системы останется теперь совершенно свободным.

---

[1]) Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. 1916, стр. 1111.

[2]) Четыре статьи H. A. Lorentz'a в Publicationen d. Königl. Akad. van Wetensch. te Amsterdam за 1915 и 1916 гг.; D. Hilbert, Gött. Nachr. 1915. Heft 3.

§ 1. Вариационный принцип и уравнения поля тяготения и материи.

Пусть гравитационное поле, как обычно, описано тензором [1]) $g_{\mu\nu}$ (или соответственно, $g^{\mu\nu}$), а материя (включая электромагнитное поле) — любым числом пространственновременных функций $q_{(\rho)}$, инвариантный характер которых нам безразличен. Пусть далее **H** есть функция от

$$g^{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu}_{\sigma}\left(=\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right), \quad g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}\left(=\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma \partial x_\tau}\right),$$

$$q_\rho \text{ и } q_{(\rho)\alpha}\left(\frac{\partial q_{(\rho)}}{\partial x_\alpha}\right).$$

В таком случае вариационный принцип

$$\delta\left\{\int \mathbf{H}\, d\tau\right\} = 0 \qquad (1$$

дает столько дифференциальных уравнений, сколько имеется определенных функций $g_{\mu\nu}$ и $q_{(\rho)}$, если только мы при этом установим, что $g^{\mu\nu}$ и $q_{(\rho)}$ должны быть варьированы независимо друг от друга так, чтобы на границах интегрирования все $\delta q_{(\rho)}$, $\delta g^{\mu\nu}$ и $\frac{\partial \delta g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ обращались в нуль.

Мы допустим теперь, что функция **H** по отношению ко всем $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$ линейна и притом такова, что коэффициенты при $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$ зависят только от $g^{\mu\nu}$. В таком случае вариационный принцип (1) можно заменить дру-

---

[1]) Вначале мы не пользуемся тензорным характером $g_{\mu\nu}$.

гим более удобным для нас вариационным принципом. Интегрируя надлежащим образом по частям, получаем

$$\int \mathbf{H}d\tau = \int \mathbf{H}^* d\tau + F, \tag{2}$$

где F есть интеграл, взятый по границе рассматриваемой области, а величина $\mathbf{H}^*$ зависит только от $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_\sigma$, $q_{(\rho)}$, $q_{(\rho)\alpha}$, но не зависит больше от $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$.

Из (2) для интересующих нас вариаций получаем

$$\delta\left\{\int \mathbf{H}d\tau\right\} = \delta\left\{\int \mathbf{H}^* d\tau\right\}; \tag{3}$$

поэтому мы в праве заменить наш вариационный принцип (1) следующим более удобным

$$\delta\left\{\int \mathbf{H}^* d\tau\right\} = 0. \tag{1a}$$

Выполнив вариации по $g^{\mu\nu}$ и $q_{(\rho)}$, получим следующие формулы [1]) в качестве уравнений поля тяготения и материи:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right) - \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial g^{\mu\nu}} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial q_{(\rho)\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial q_{(\rho)}} = 0. \tag{5}$$

---

[1]) Ради краткости в формулах пропущен знак суммы $\sum$. Необходимо всегда иметь ввиду суммирование по тем значкам, которые встречаются дважды в том или ином члене. Следовательно, в (4), например, $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right)$ означает

$$\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right).$$

§ 2. **Раздельное существование гравитационного поля.**

Если не сделать никаких специальных допущений о том, каким образом $\mathbf{H}$ зависит от $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_\sigma$, $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$, $q_{(\rho)}$, $q_{(\rho)\alpha}$, то нельзя разделить компоненты энергии на две части, из которых одна относится к полю тяготения, а другая — к материи. Для того чтобы теория допускала подобное деление, мы принимаем, что

$$\mathbf{H} = \mathbf{G} + \mathbf{M}, \tag{6}$$

где $\mathbf{G}$ зависит только от $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_\sigma$, $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$, а $\mathbf{M}$ зависит только от $g^{\mu\nu}$, $q_{(\rho)}$, $q_{(\rho)\alpha}$. Формулы (4) и (5) принимают тогда следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right) - \frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial g^{\mu\nu}}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_{(\rho)\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_{(\rho)}} = 0. \tag{8}$$

При этом $\mathbf{G}^*$ относится к $\mathbf{G}$ так, как $\mathbf{H}^*$ к $\mathbf{H}$. Следует, однако, заметить, что уравнения (8) или (5) пришлось бы заменить другими, если бы мы приняли, что $\mathbf{M}$ и $\mathbf{H}$ зависят не только от первых, но и от высших производных от $q_{(\rho)}$. Равным образом возможно, что $q_{(\rho)}$ следует рассматривать не независимыми друг от друга, но как величины, связанные друг с другом некоторыми условиями. Все это не имеет значения для дальнейшего изложения, так как последнее основано исключительно на уравнениях (7), которые были получены посредством варьирования интеграла по $g^{\mu\nu}$.

§ 3. Свойства уравнений поля тяготения, вытекающие из теории инвариантов.

Введем теперь допущение, что

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{9}$$

представляет собой инвариант. Тем самым установлен характер преобразования $g_{\mu\nu}$. О характере преобразования $q_{(\rho)}$, описывающих материю, мы не делаем никаких допущений. Напротив, пусть функции

$$H = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{-g}}, \quad G = \frac{\mathbf{G}}{\sqrt{-g}} \text{ и } M = \frac{\mathbf{M}}{\sqrt{-g}}$$

будут инвариантами по отношению к любым подстановкам пространственно-временных координат. Из этих предпосылок вытекает общая ковариантность уравнений (7) и (8), выведенных из (1). Далее следует, что G (с точностью до постоянного множителя) должно равняться скаляру римановского тензора кривизны; ибо нет другого инварианта со свойствами, которыми должен обладать G.[1]) Тем самым вполне определены и $\mathbf{G}^*$ и вместе с ним левая часть уравнения поля (7).[2])

Из общего постулата относительности вытекают определенные свойства функции $\mathbf{G}^*$, которые мы теперь и выведем. С этой целью произведем бесконечно малое преобразование координат, полагая

$$x'_\nu = x_\nu + \Delta x_\nu; \tag{10}$$

[1]) Этим объясняется, почему требование общей относительности приводит к вполне определенной теории тяготения.

[2]) Интегрируя по частям, получаем

$$\mathbf{G}^* = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \left[\left\{ {\mu\alpha \atop \beta} \right\} \left\{ {\nu\beta \atop \alpha} \right\} - \left\{ {\mu\nu \atop \alpha} \right\} \left\{ {\alpha\beta \atop \beta} \right\} \right].$$

Δx_ν представляют собой любые, бесконечно малые функции координат, x'_ν — координаты мировой точки в новой системе, x_ν — координаты той же точки в старой системе. Как для координат, так и для всякой другой величины ψ справедлив закон преобразования вида

$$\psi' = \psi + \Delta\psi,$$

причем $\Delta\psi$ всегда может быть выражено через Δx_ν. Из ковариантных свойств $g^{\mu\nu}$ легко выводятся законы преобразования для $g^{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}_\sigma$.

$$\Delta g^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} \frac{\partial \Delta x_\nu}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha} \frac{\partial \Delta x_\mu}{\partial x_\alpha} \tag{11}$$

$$\Delta g^{\mu\nu}_\sigma = \frac{\partial (\Delta g^{\mu\nu})}{\partial x_\sigma} - g^{\mu\nu}_\alpha \frac{\partial \Delta x_\alpha}{\partial x_\sigma}. \tag{12}$$

Так как $\mathbf{G}^*$ зависит только от $g^{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}_\sigma$, то, пользуясь (13) и (14), можно вычислить $\Delta\mathbf{G}^*$. Таким образом получается

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{-g}\,\Delta\left(\frac{\mathbf{G}^*}{\sqrt{-g}}\right) = S^\nu_\sigma \frac{\partial \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu} + \\ + 2 \frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где, ради краткости, положено

$$\left.\begin{aligned} S^\nu_\sigma = 2 \frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} + 2 \frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha} g^{\mu\nu}_\alpha + \\ + \mathbf{G}^* \delta^\nu_\sigma - \frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\nu} g^{\mu\alpha}_\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Из этих двух уравнений мы выводим два следствия, важные в дальнейшем. Мы знаем, что $\frac{\mathbf{G}}{\sqrt{-g}}$ инвариантно по отношению к любым подстановкам, но $\frac{\mathbf{G}^*}{\sqrt{-g}}$ этим свойством не обладает. Однако, легко доказать относительно последней величины, что она инвариантна по отношению к *линейным* подстановкам координат. Отсюда следует, что правая часть (13) всегда обращается в нуль, когда все $\frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}$ равны нулю. Отсюда, далее, следует, что $\mathbf{G}^*$ должно удовлетворять тождеству

$$S_\sigma^\nu \equiv 0. \qquad (15)$$

Если мы, далее, будем брать такие Δx_ν, которые отличны от нуля только внутри рассматриваемой области, но обращаются в нуль на бесконечно близком расстоянии от границы области, — то, при выбранном нами преобразовании, значение интеграла, входящего в уравнение (2) и взятого по границе области, не изменится; следовательно,

$$\Delta(F) = 0,$$

и поэтому [1])

$$\Delta\left\{\int \mathbf{G} d\tau\right\} = \Delta\left\{\int \mathbf{G}^* d\tau\right\}.$$

Левая часть уравнения должна, однако, обратиться в нуль, так как и $\frac{\mathbf{G}}{\sqrt{-g}}$ и $\sqrt{-g}\,d\tau$ суть инварианты. Следовательно, правая часть тоже равна нулю.

[1]) Если ввести $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}^*$ вместо $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}^*$.

На основании (14), (15) и (16) получаем сначала

$$\int \frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} d\tau = 0. \qquad (16)$$

Если преобразовать это уравнение двукратным интегрированием по частям и принять во внимание свободный выбор Δx_σ, то получим тождество

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu}\right) \equiv 0. \qquad (17)$$

Сделаем теперь выводы, следующие из двух тождеств (16) и (17); последние вытекают из инвариантности $\frac{\mathbf{G}}{\sqrt{-g}}$, и, следовательно, из постулата общей относительности.

Для этого преобразуем сначала уравнения поля тяготения посредством смешанного умножения на $g^{\mu\nu}$. Тогда получим (при перестановке значков σ и ν) уравнения, эквивалентные уравнениям поля (7).

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu}\right) = -\left(\mathbf{T}_\sigma^\nu + \mathbf{t}_\sigma^\nu\right), \qquad (18)$$

где положено

$$\mathbf{T}_\sigma^\nu = -\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu}, \qquad (19)$$

$$\mathbf{t}_\sigma^\nu = -\left(\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g_\alpha^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu}\right) = $$
$$= \frac{1}{2}\left(\mathbf{G}^* \delta_\sigma^\nu - \frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial g_\nu^{\mu\alpha}} g_\sigma^{\mu\alpha}\right). \qquad (20)$$

Последнее выражение для t_σ^ν следует из (14) и (15). Дифференцируя (18) по x_ν и суммируя по ν, имеем на основании (17)

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\mathrm{T}_\sigma^\nu + \mathrm{t}_\sigma^\nu\right) = 0. \qquad (21)$$

Формула (21) выражает закон сохранения импульса и энергии. Назовем T_σ^ν компонентами энергии материи и t_σ^ν — компонентами энергии поля тяготения.

Умножив уравнения (7) поля тяготения на $g_\sigma^{\mu\nu}$ и просуммировав их по μ и ν, получим в силу (20)

$$\frac{\partial \mathrm{t}_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial g^{\mu\nu}} = 0,$$

или, в силу (19) и (21)

$$\frac{\partial \mathrm{T}_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} g_\sigma^{\mu\nu} \mathrm{T}_{\mu\nu} = 0, \qquad (22)$$

где $\mathrm{T}_{\mu\nu}$ означает $g_{\nu\sigma}\mathrm{T}_\mu^\sigma$. Мы имеем здесь 4 уравнения, которым должны удовлетворять энергетические компоненты материи.

Следует отметить, что (обще-ковариантные законы сохранения импульса и энергии (21) и (22) получены *только* из одних уравнений (7) для поля тяготения в соединении с постулатом общей ковариантности (относительности) без применения уравнений поля (8) для материальных явлений.

А. ЭЙНШТЕЙН[1]).

ВОПРОСЫ КОСМОЛОГИИ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.

Хорошо известно, что дифференциальное уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi K\rho \qquad (1)$$

в совокупности с уравнением движения материальной точки не могут вполне заменить теорию дальнодействия Ньютона. Необходимо добавить условие, что потенциал φ в пространственной бесконечности стремится к определенному пределу. Аналогичное положение вещей имеет место в теории тяготения общего принципа относительности; здесь также к дифференциальным уравнениям должны быть прибавлены граничные условия для пространственной бесконечности, если мы на самом деле рассматриваем мир бесконечно протяженным в пространственном отношении.

При рассмотрении планетной проблемы я выбрал эти граничные условия в виде следующего допущения: можно выбрать такую координатную систему, относительно которой все потенциалы тяготения $g_{\mu\nu}$ в пространственной бесконечности становятся постоянными. Но a priori отнюдь не очевидно, что при рас-

[1]) Sitzungsber. d. Preussischen Akad. Wissenschaften. 1917 стр. 142

смотрении более значительных частей мира можно пользоваться теми же самыми граничными условиями. В дальнейшем изложены соображения, которые мною были получены до сих пор по поводу этого принципиально важного вопроса.

§ 1. Теория Ньютона.

Хорошо известно, что граничное условие Ньютона о существовании постоянного предела для φ в пространственной бесконечности ведет к представлению, что плотность материи в бесконечности делается равной нулю. В самом деле, представим себе, что во вселенной можно найти место, вокруг которого поле тяготения материи, рассматриваемое в целом, обладает шаровой симметрией (центр). Тогда из уравнения Пуассона следует, что средняя плотность ρ с увеличением расстояния r от центра должна стремиться к нулю быстрее, чем $\frac{1}{r^2}$, для того, чтобы φ в бесконечности стремилось к некоторому пределу [1]). В этом смысле мир по Ньютону конечен, хотя и может обладать бесконечно большой общей массой.

Отсюда прежде всего следует, что излучение, испускаемое небесными телами, частично покинет систему мира Ньютона по радиальному от центра направлению, с тем, чтобы бездейственно затеряться в бесконечности. Не может ли произойти того же с целыми небесными телами? Вряд ли это можно отрицать. Ибо из предположения о существовании конечного предела для φ в пространственной бесконечности следует, что

[1]) ρ есть средняя плотность материи, определенная для области пространства, большой по сравнению с расстоянием между соседними неподвижными звездами, но малой по сравнению с размерами всей звездной системы.

небесное тело, имеющее конечную кинетическую энергию, может, преодолев ньютоновы силы притяжения, попасть в пространственную бесконечность. На основании статистической механики этот случай должен повторяться до тех пор, пока общая энергия звездной системы достаточно велика, чтобы — при переносе ее на одно небесное тело — позволить последнему совершить путешествие в бесконечность, откуда оно никогда не сможет вернуться.

Можно было бы попытаться обойти эту своеобразную трудность при помощи допущения, что указанный граничный потенциал имеет в бесконечности очень большое значение. Это было бы приемлемо, если бы изменение потенциала тяготения не обусловливалась самим небесным телом. В действительности мы с неизбежностью приходим к заключению, что наличие значительных разностей потенциалов поля тяготения противоречит фактам. Разности потенциалов, наоборот, должны быть столь малого порядка, чтобы скорости звезд, вызванные ими, не превосходили действительно наблюдаемых скоростей.

Если применить больцмановский закон распределения газовых молекул к звездам, сравнивая звездную систему с газом, находящимся в стационарном тепловом движении, то придется заключить, что ньютонова звездная система вообще не может существовать. Ибо конечной разности потенциалов между центром и пространственной бесконечностью соответствует конечное соотношение плотностей. Следовательно, нулевая плотность в бесконечности влечет за собой нулевую плотность в центре.

Эти трудности, повидимому, нельзя преодолеть, оставаясь на почве теории Ньютона. Можно задать себе вопрос, нельзя ли их устранить при помощи изменения теории Ньютона. Для этого прежде всего укажем путь, который сам по себе не требует, чтобы его рассматривали всерьез, но служит только для того, чтобы лучше уяснить изложенное в дальнейшем. Вместо уравнения Пуассона напишем:

$$\Delta\varphi - \lambda\varphi = 4\pi K\rho, \tag{2}$$

где λ представляет собой некоторую универсальную константу. Если ρ_0 есть (равномерная) плотность распределения массы, то

$$\varphi = -\frac{4\pi K}{\lambda}\rho_0 \tag{3}$$

есть решение уравнения (2). Это решение соответствует случаю равномерного распределения материи неподвижных звезд по пространству, причем плотность ρ_0 может равняться действительной средней плотности материи мирового пространства. Решение соответствует бесконечно протяженному пространству, в среднем равномерно наполненному материей. Если представить себе, что материя местами распределена неравномерно и что это обстоятельство нисколько не меняет средней плотности распределения, то к постоянному значению φ равенства (3) придется прибавить добавочное φ, которое вблизи более плотных масс будет тем более похоже на поле Ньютона, чем меньше $\lambda\varphi$ по сравнению с $4\pi K\rho$.

Такой мир не имел бы центра по отношению к полю тяготения и не было бы надобности допускать, что плотность уменьшается в пространственной бесконечности; наоборот, и средний потенциал и средняя плотность были бы постоянны вплоть до бесконечности. Конфликт, констатированный между теорией Ньютона и статистической механикой, здесь отсутствует. При определенной (крайне малой) плотности

материя находится в равновесии, не требуя внутренних сил материи (давление) для поддержания этого равновесия.

§ 2. Граничные условия согласно общей теории относительности.

В дальнейшем я поведу читателя по дороге, пройденной мною самим, по дороге несколько непрямой и неровной, так как только при этом я могу надеяться, что он отнесется с интересом к конечному результату. Я прихожу к убеждению, что уравнения поля тяготения, которых я до сих пор придерживался, нуждаются еще в небольшой модификации, для того чтобы можно было на базе общей теории относительности избежать тех принципиальных трудностей, которые в предыдущем параграфе были указаны для ньютоновой теории. Это изменение вполне соответствует переходу от уравнения Пуассона (1) к уравнению (2) предыдущего параграфа. В конечном итоге мы, при этом, получим, что граничные условия в пространственной бесконечности вообще отпадают, так как мировой континуум должен в отношении своих пространственных размеров рассматриваться как замкнутый континуум, имеющий конечный пространственный (трехмерный) объем.

Мнение, защищавшееся мною недавно относительно граничных условий, которые должны иметь место в пространственной бесконечности, покоилось на следующих соображениях. В последовательной теории относительности не может быть инерции *относительно „пространства“*, но есть инерция масс *относительно друг друга.* Поэтому, если я пространственно удалю какую-нибудь массу на достаточное расстояние от всех других масс мира, то инерция этой массы должна будет уменьшится до нуля.

Попробуем это условие сформулировать математически.

На основании общей теории относительности (отрицательный) импульс дается первыми тремя компонентами, энергия — последней компонентой умноженного на $\sqrt{-g}$ ковариантного тензора

$$m\sqrt{-g}\,g_{\mu\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds},\qquad(4)$$

причем, как всегда,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu.\qquad(5)$$

В особенно наглядном случае, когда координатная система может быть выбрана так, чтобы поле тяготения в каждой точке было пространственно изотропно, эта величина принимает более простой вид:

$$ds^2 = -A\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right) + Bdx_4^2.$$

Если, одновременно,

$$\sqrt{-g} = 1 = \sqrt{A^3B},$$

то в случае малых скоростей из выражения (4) имеем для компонент импульса в первом приближении

$$m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_1}{dx_4},\quad m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_2}{dx_4},\quad m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_3}{dx_4}$$

и для энергии (в случае покоя)

$$m\sqrt{B}.$$

Из выражений импульса следует, что $m\dfrac{A}{\sqrt{B}}$ играет роль инертной массы. Так как m есть константа, свойственная точечной массе и независимая

от положения этой массы, то, при соблюдении условия, установленного для определителя, это выражение в пространственной бесконечности только тогда обратится в нуль, когда A стремится к нулю, а B к бесконечности. Подобного рода вырождение коэффициентов $g_{\mu\nu}$ представляется нам таким образом как бы следствием постулата об относительности всякой инерции. За этим следует также и то, что потенциальная энергия $m\sqrt{B}$ точки делается в бесконечности бесконечно большой. Таким образом, точечная масса никогда не может покинуть систему; более подробное исследование показывает, что то же самое справедливо и для лучей света. Система мира при таком значении потенциалов тяготения в бесконечности не подвергалась бы, следовательно, опасности стать пустой, на что указывалось при обсуждении теории Ньютона.

Добавлю, что упрощенные допущения о потенциалах тяготения, которые легли в основу этого рассуждения, введены только ради большей наглядности. Для выражения свойств $g_{\mu\nu}$ в бесконечности можно найти общие формулировки, которые выразят сущность дела без каких-либо ограничивающих допущений.

Пользуясь дружеской помощью математика Я. Громмера, я исследовал центрально-симметричные, статические поля тяготения, которые вырождаются в бесконечности указанным образом. Из заданных потенциалов тяготения $g_{\mu\nu}$ на основе уравнений поля тяготения был вычислен энергетический тензор $T_{\mu\nu}$ материи. Но при этом оказалось, что для звездной системы подобного рода граничные условия никак не могут быть приняты в соображение, что недавно и вполне справедливо было отмечено также астрономом де Ситтером.

В самом деле контравариантный энергетический тензор $T^{\mu\nu}$ весомой материи имеет следующий вид

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds},$$

где ρ означает плотность материи, измеренную естественным способом. При надлежаще выбранной координатной системе скорости звезд очень малы сравнительно со скоростью света. Поэтому ds можно заменить через $\sqrt{g_{44}}dx_4$. Отсюда видно, что все компоненты тензора $T^{\mu\nu}$ очень малы по сравнению с последней его компонентой T^{44}. Но это условие никак нельзя было совместить с выбранными граничными условиями. После всего изложенного этот результат не вызывает удивления. Факт незначительности звездных скоростей позволяет сделать заключение, что всюду, где имеются неподвижные звезды, потенциал тяготения (в нашем случае $\sqrt{B}$) не может быть значительно выше, чем у нас; это следует из статистических соображений так же, как и в теории Ньютона. Во всяком случае наши вычисления привели меня к убеждению, что подобные условия вырождения для $g_{\mu\nu}$ в пространственной бесконечности не должны быть постулированы.

После неудачи этой попытки представляются прежде всего две возможности: или а) требовать, как в случае планетной проблемы, чтобы в пространственной бесконечности $g_{\mu\nu}$ при надлежаще выбранной системе координат стремились к значениям:

$$\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

или b) не устанавливать для пространственной бесконечности никаких граничных условий, претендующих на всеобщую справедливость; в каждом отдельном случае следует особо задавать $g_{\mu\nu}$ на пространственной границе рассматриваемой области так же, как мы привыкли это делать до сих пор, задавая начальные условия во времени.

Возможность b) не соответствует какому-либо решению проблемы и означает отказ от ее решения. Правомерность этой точки зрения нельзя отрицать; на ней стоит в настоящее время де Ситтер[1]), но я должен признаться, что мне трудно было бы пойти на столь большие уступки в этом принципиальном вопросе. Я решусь на это только тогда, когда все усилия, направленные к тому, чтобы притти к удовлетворительному представлению о граничных условиях, окажутся бесполезными.

Возможность а) во многих отношениях неудовлетворительна. Во-первых, эти граничные условия предполагают определенный выбор координатной системы, что не согласно с духом принципа относительности. Во-вторых, при этом представлении нужно отказаться от того, чтобы удовлетворить требованию об относительности инерции. В самом деле, инерция материальной точки с естественно измеренной массой m зависит от $g_{\mu\nu}$; но последние лишь очень мало отличаются от постулированных значений для пространственной бесконечности. Благодаря этому инерция, хотя и *подвергалась бы воздействию* со стороны (имеющейся в конечном пространстве) материи, но все-таки не была бы последней *обусловлена*. Если бы существовала только одна материальная точка, то она

[1]) De Sitter, Akad. van Wetensch. te Amsterdam 8 ноября 1916.

согласно этому представлению обладала бы почти такой же инерцией, как и в том случае, когда она окружена всеми прочими массами нашего реального мира. Наконец, против этого представления нужно выдвинуть те же статистические сомнения, которые выше были указаны для теории Ньютона.

Из сказанного до сих пор вытекает, что мне не удалось установить граничные условия для пространственной бесконечности. Тем не менее существует еще одна возможность, позволяющая обойтись без отказа, указанного в b). Если бы можно было рассматривать мир в его пространственной протяженности как замкнутый континуум, то подобного рода граничные условия были бы вообще не нужны. Из дальнейшего будет видно, что и общее требование относительности и факт незначительности звездных скоростей совместимы с гипотезой пространственной замкнутости всего мира; для осуществления этой мысли потребовалось все же некоторое обобщающее изменение уравнений поля тяготения.

§ 3. Пространственно замкнутый мир с равномерно распределенной материей.

По общей теории относительности метрический характер (кривизна) четырехмерного пространственно-временного континуума определяется в каждой точке находящейся в ней материей и состоянием последней. Поэтому, вследствие неравномерности распределения материи метрическая структура этого континуума по необходимости должна быть крайне запутанной. Но если вопрос касается структуры пространства в целом, то мы имеем право представлять себе материю как бы равномерно распределенной по чрезвычайно большим областям пространства, так что ее плотность распределения становится чрезвычайно медленно изме-

няющейся функцией. Мы поступаем в этом отношении так же, как геодезисты, которые уподобляют поверхность земли, имеющую на небольших участках крайне сложный вид, приближенно эллипсоиду.

Самое важное из всего известного нам из опыта о распределении материи заключается в том, что относительные скорости звезд очень малы по сравнению со скоростью света. Поэтому, я полагаю, что мы на первых порах можем в основу нашего рассуждения положить следующее приближенное допущение: имеется координатная система, относительно которой материя может быть рассматриваема как пребывающая в течение продолжительного времени в покое. По отношению к этой координатной системе контравариантный энергетический тензор материи $T^{\mu\nu}$, в силу (5), имеет, следовательно, следующий простой вид:

$$\left.\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{matrix}\right\} \qquad (6)$$

Скаляр ρ (средней) плотности распределения может a priori быть функцией пространственных координат. Но, если мы принимаем, что мир пространственно замкнут в себе, то естественно сделать гипотезу, что ρ не зависит от местоположения; эту гипотезу мы кладем в основу дальнейшего рассуждения.

Что касается поля тяготения, то из уравнения движения материальной точки

$$\frac{d^2x_\nu}{ds^2} + \left\{ {\alpha\beta \atop \nu} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 0$$

следует, что материальная точка только тогда может пребывать в покое в статическом поле тяготения, когда g_{44} не зависит от места. Так как, кроме того, мы для всех величин предполагаем независимость от координаты времени x_4, то для искомого решения можем потребовать, чтобы для всех x_ν имело место

$$g_{44} = 1. \tag{7}$$

Далее, как это всегда делается в статических проблемах, нужно положить, что

$$g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0. \tag{8}$$

Теперь остается еще определить те компоненты гравитационного потенциала, которые характеризуют чисто пространственно-геометрическую сторону нашего континуума ($g_{11}, g_{12}, \ldots, g_{33}$). Из нашего допущения равномерности распределения масс, создающих поле, следует, что и кривизна искомого пространства должна быть постоянной. Таким образом, при заданном распределении масс искомый замкнутый континуум (x_1, x_2, x_3 при постоянном x_4) должен быть сферическим пространством.

Такое пространство получается, например, следующим образом. Мы исходим из эвклидова пространства ($\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$) четырех измерений с линейным элементом $d\sigma$; пусть будет, следовательно,

$$d\sigma^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 + d\xi_4^2. \tag{9}$$

В этом пространстве мы рассматриваем гиперповерхность

$$R^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2, \tag{10}$$

где R есть константа. Точки этой гиперповерхности образуют трехмерный континуум — сферическое пространство с радиусом кривизны R.

Четырехмерное эвклидово пространство, из которого мы исходили, служит только для удобного определения нашей гиперповерхности. Нас интересуют одни только точки этой поверхности, метрические свойства которой должны совпадать со свойствами физического пространства при условии равномерного распределения материи. Для описания этого трехмерного континуума можно пользоваться координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3 (проекция на гиперплоскость $\xi_4 = 0$), так как в силу (10) можно ξ_4 выразить через ξ_1, ξ_2, ξ_3. Исключив ξ_4 из (9), получим следующее выражение для линейного элемента сферического пространства

$$\left.\begin{aligned} d\sigma^2 &= \gamma_{\mu\nu} d\xi_\mu d\xi_\nu, \\ \gamma_{\mu\nu} &= \delta_{\mu\nu} + \frac{\xi_\mu \xi_\nu}{R^2 - \rho^2}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где $\delta_{\mu\nu} = 1$, если $\mu = \nu$ и $\delta_{\mu\nu} = 0$, если $\mu \neq \nu$, а $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$. Выбранные координаты удобны, когда речь идет об исследовании окрестности одной из двух точек $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$.

Итак нам дан теперь также и элемент линии искомого пространственно-временного четырехмерного мира.

Мы, очевидно, должны для потенциалов $g_{\mu\nu}$, у которых оба значка отличаются от 4, написать

$$g_{\mu\nu} = -\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{x_\mu x_\nu}{R^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}\right). \tag{12}$$

Это уравнение в соединении с (7) и (8) вполне определяет свойства масштабов, часов и лучей света в рассматриваемом четырехмерном мире.

§ 4. О добавочном члене, который необходимо ввести в уравнения поля тяготения.

Уравнения поля тяготения, предложенные мною, имеют для произвольно выбранной системы координат следующий вид:

$$G_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right),$$

где

$$\left.\begin{aligned} G_{\mu\nu} = &-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \alpha\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mu\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\nu\beta\\ \alpha\end{matrix}\right\} + \\ &+\frac{\partial^2 \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\mu d x_\nu} - \left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \alpha\end{matrix}\right\}\frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Система уравнения (13) никоим образом не будет удовлетворена, если вместо $g_{\mu\nu}$ подставить их значения из (7), (8) и (12) и вместо (контравариантного) энергетического тензора материи — значения, приведенные в (6). В следующем параграфе будет показано, как удобнее всего произвести подобный расчет. Если бы, таким образом, не подлежало сомнению, что одни только уравнения поля (13), применявшиеся мною до сих пор, совместимы с постулатом общей относительности, то мы, конечно, должны были бы заключить, что теория относительности не допускает гипотезы о пространственной замкнутости мира.

Система уравнений (13) допускает, однако, одно весьма простое обобщение, совместимое с постулатом относительности и вполне аналогичное данному выше в виде уравнения (2) обобщению уравнения Пуассона. В самом деле, мы можем к левой части уравнения поля (13) прибавить фундаментальный тензор $g_{\mu\nu}$, помноженный на неизвестную пока универсальную

константу — λ, не уничтожая этим общей ковариантности; вместо уравнения поля (13) положим

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right). \tag{13a}$$

Это уравнение поля — при достаточно малом λ — во всяком случае тоже совместимо с результатами наблюдений над солнечной системой. Оно удовлетворяет также законам сохранения импульса и энергии; в самом деле, можно вместо (13) получить (13а), если в принцип Гамильтона, гарантирующий правильность этих законов, подставить вместо скаляра римановского тензора этот же скаляр, увеличенный на универсальную постоянную. Ниже будет показано, что уравнение поля (13а) совместимо с нашими положениями, касающимися поля и материи.

§ 5. Проведение вычисления. Результат.

Так как все точки нашего континуума равноценны, то достаточно выполнить вычисление для *одной* точки, например, для одной из двух точек, с координатами $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. При этом вместо $g_{\mu\nu}$ в (13а) должны быть подставлены значения

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

везде там, где $g_{\mu\nu}$ либо не дифференцированы или же продифференцированы только один раз. Таким образом получается сначала

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ 1\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ 2\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ 3\end{bmatrix} + \frac{\partial^2 \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu}.$$

Приняв во внимание (7), (8) и (13), легко найдем, что все уравнения (13а) удовлетворяются, если выполнены оба соотношения:

$$-\frac{2}{R^2}+\lambda=-\frac{\varkappa\rho}{2}, \quad -\lambda=-\frac{\varkappa\rho}{2},$$

или

$$\lambda=\frac{\varkappa\rho}{2}=\frac{1}{R^2}. \tag{14}$$

Итак, вновь введенная универсальная константа λ определяет как среднюю распределенную плотность ρ, которая может сохраняться в состоянии равновесия, так и радиус R сферического пространства и его объем $2\pi^2R^3$. Общая масса M мира, по нашему представлению, конечна и равняется

$$M=\rho\cdot 2\pi^2R^3=4\pi^2\frac{R}{\varkappa}=\frac{\sqrt{32\pi^2}}{\sqrt{\varkappa^3\cdot\rho}}. \tag{15}$$

Если реальный мир соответствует нашему рассуждению, то теоретическое представление о нем будет следующим. Характер кривизны пространства меняется со временем и местом в зависимости от распределения материи, однако, это пространство можно в целом приближенно представить в виде сферического пространства. Во всяком случае это представление логически лишено противоречий и с точки зрения общей теории относительности является наипростейшим. Мы не будем здесь разбирать вопрос о том, приемлемо ли это представление с точки зрения современных астрономических знаний. Для того чтобы притти к этому свободному от противоречий представлению, мы должны были все же ввести новое расширение уравнений поля тяготения, не оправдываемое нашим действительным знанием о тяготении. Необходимо, однако, отметить, что положительная кривизна пространства, обусловленная находящейся в нем материей, получается и в том случае, когда указанный добавочный член не вводится; последний нам необходим для того, чтобы создать возможность квазистатического распределения материи, так как последнее соответствует факту малых звездных скоростей.

А. ЭЙНШТЕЙН [1]).

ИГРАЮТ ЛИ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ СУЩЕСТВЕННУЮ РОЛЬ В ПОСТРОЕНИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ?

Ни ньютонова, ни релятивистская теории тяготения до сих пор не подвинули вперед вопрос о структуре материи. В противоположность этому ниже будут указаны соображения, позволяющие думать, что элементарные электрические образования, представляющие собой кирпичи атомов, удерживаются вместе благодаря силам тяготения.

§ 1. Недостатки современного воззрения.

Теоретики много потрудились над тем, чтобы придумать теорию, которая объяснила бы равновесие электричества, образующего электрон. В особенности Ми посвятил этому вопросу глубокие исследования. Его теория, находившая не раз одобрение среди специалистов, основывается в существенных чертах на том, что в энергетический тензор наряду с членами энергии максвелл-лоренцовой теории электромагнитного поля вводятся еще добавочные

[1]) Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissenschaften. 1919.

члены, которые зависят от компонент электродинамического потенциала и характеризуются тем, что они не особенно заметны в пустоте, но внутри электрических элементарных частиц обусловливают наличие сил, уравновешивающих электрические силы отталкивания. Как ни прекрасно с формальной точки зрения построение этой теории, проделанное Ми, Гильбертом и Вейлем, все же ее физические результаты до сих пор мало удовлетворительны. С одной стороны, разнообразие возможностей действовало подавляющим образом, а с другой стороны, до сих пор не удалось представить указанные добавочные члены в таком простом виде, чтобы решение могло казаться удовлетворительным.

Общая теория относительности до сих пор ничего не изменила в положении этого вопроса.

Если для начала отказаться от добавочного космологического члена, то уравнения поля имеют следующий вид:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\varkappa T_{ik}, \tag{1}$$

где (R_{ik}) есть римановский тензор кривизны, над которым один раз произведена композиция, R — скаляр кривизны, образованный вторичной композицией, R_{ik} — энергетический тензор „материи“. При этом историческому развитию предмета соответствует допущение, что T_{ik} *не* зависят от производных от $g_{\mu\nu}$. Ибо эти величины являются, ведь, компонентами энергии в духе специальной теории относительности, в которой не встречаются переменные по величине $g_{\mu\nu}$. Второй член в левой части уравнения выбран так, чтобы расхождение левой части (1) тождественно обращалось в нуль, вследствие чего из (1) посредством образования расхождения получается уравнение

$$\frac{\partial T_i^{\sigma}}{\partial x_\sigma} + \frac{1}{2}\, g_i^{\sigma\tau} T_{\sigma\tau} = 0, \tag{2}$$

которое в предельном случае специальной теории относительности переходит в формулу сохранения импульса и энергии

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0.$$

В этом и заключается физическое обоснование для второго члена левой части (1). Нельзя a priori утверждать, что указанный переход к пределу постоянных $g_{\mu\nu}$ может быть сделан разумным образом. В самом деле, если бы гравитационные поля принимали существенное участие в построении материальных частиц, то для них переход к постоянным $g_{\mu\nu}$ потерял бы всякий смысл; ибо при постоянных $g_{\mu\nu}$ не было бы материальных частиц. Поэтому, если мы желаем принять во внимание возможность участия тяготения в создании полей, из которых образованы корпускулы, мы не можем считать уравнение (1) безусловно правильным.

Подставив в (1) максвелл-лоренцовы энергетические компоненты электромагнитного поля $\varphi_{\mu\nu}$

$$T_{ik} = \frac{1}{4}\, g_{ik}\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta} - \varphi_{i\alpha}\varphi_{k\beta}g^{\alpha\beta}, \tag{3}$$

получим для (2) посредством образования расхождения после некоторого вычисления [1])

$$\varphi_{i\alpha} J^{\alpha} = 0, \tag{4}$$

[1]) Ср. A. Einstein, Sitz.-Ber. Preuss. Akad. d. Wissen. 1916, стр. 187, 188.

где для сокращения положено

$$\frac{\partial \sqrt{-g}\,\varphi_{\sigma\tau}g^{\sigma\alpha}g^{\tau\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial \mathfrak{f}^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = J^{\alpha}. \tag{5}$$

При вычислении использована вторая система уравнений Максвелла

$$\frac{\partial \varphi_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial \varphi_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \varphi_{\rho\mu}}{\partial x_\nu} = 0. \tag{6}$$

Из (4) видно, что плотность тока (J^{α}) повсюду должна равняться нулю. Поэтому, как давно уже известно, нельзя на основании уравнения (1), ограничиваясь электромагнитными энергетическими компонентами теории Максвелла-Лоренца, создать теорию электрона. Следовательно, если придерживаться уравнения (1), то придется стать на путь теории Ми [1]).

Не только проблема материи, но и космологическая проблема заставляет сомневаться в уравнении (1). Как доказано мною в одной из прежних работ, общая теория относительности приводит к выводу, что мир пространственно замкнут. Но это представление привело к обобщению уравнения (1), причем пришлось ввести новую универсальную константу λ, которая находится в определенном отношении к общей массе мира (или к равновесной плотности материи). В этом заключается особенно веский дефект в стройности теории.

§ 2. Уравнения поля, не содержащие скалярных величин.

Изложенные трудности устраняются тем, что вместо уравнений (1) вводятся следующие уравнения поля

$$F_{ik} - \frac{1}{4}\, g_{ik} R = -\varkappa T_{ik}, \tag{1a}$$

[1]) Ср. O. Hilbert, Göttinger Nachr. 20 ноября 1915.

где T_{ik} означает энергетический тензор электромагнитного поля, выраженный формулой (3).

Формальное обоснование множителя $\left(-\frac{1}{4}\right)$ во втором члене этого равенства заключается в том, что благодаря ему скаляр левой части

$$g^{ik}\left(R_{ik}-\frac{1}{4}g_{ik}R\right)$$

тождественно обращается в нуль, как и скаляр правой части:

$$g^{ik}T_{ik}$$

согласно уравнению (3).

Если бы вместо (1a) считать основным уравнение (1), то мы получили бы условие $R=0$, которое независимо от электрического поля всюду имело бы место для $g_{\mu\nu}$. Ясно, что из системы уравнений [(1), (3)] вытекает система уравнений [(1a), (3)], но не наоборот.

Можно в первый момент усомниться в том, определяют ли уравнения (1a) и (6) все поле в целом в достаточной мере. В общей релятивистской теории для определения n зависимых переменных требуется $n-4$ независимых друг от друга дифференциальных уравнений, так как в решении их должны стоять 4 совершенно произвольные функции всех координат вследствие свободного выбора последних. Следовательно, для определения 16 зависимых переменных $g_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$ требуется 12 независимых друг от друга уравнений. Действительно 9 из числа уравнений (1a) и 3 из уравнений (6) не зависят друг от друга.

Если образовать расхождение (1a) и принять

во внимание, что расхождение от $R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R$ равно нулю, то получим

$$\varphi_{\sigma\alpha}\mathbf{J}^{\alpha}+\frac{1}{4\varkappa}\frac{\partial R}{\partial x_{\sigma}}=0. \tag{4a}$$

Отсюда видно сначала, что в четырехмерных областях, в которых плотность электричества равна нулю, скаляр кривизны R есть величина постоянная. Если допустить, что все эти части пространства связаны друг с другом, что, следовательно, плотность электричества отлична от нуля только в отдельных мировых нитях, то мы придем к выводу, что скаляр кривизны вне этих мировых нитей всюду имеет постоянное значение R_0. Но формула (4a) позволяет кроме того сделать еще одно важное заключение о свойствах R внутри области, в которой электрическая плотность не равна нулю. Если, согласно принятым воззрениям, рассматривать электричество как движущуюся плотность массы и положить

$$\mathbf{J}^{\sigma}=\frac{\mathbf{J}^{\sigma}}{\sqrt{-g}}=\rho\frac{dx_{\sigma}}{ds}, \tag{7}$$

то, произведя внутреннее умножение (4a) на $\mathbf{J}^{\sigma}$, получим на основании антисимметричности $\varphi_{\mu\nu}$ соотношение

$$\frac{\partial R}{\partial x_{\sigma}}\frac{dx_{\sigma}}{ds}=0. \tag{8}$$

Следовательно, на каждой мировой линии движения электричества скаляр кривизны есть величина постоянная. Уравнение (4a) может быть наглядно интерпретировано следующими словами: скаляр кривизны R играет роль отрицательного давления, которое вне электрических корпускул имеет постоянное значение R_0. Внутри каждой корпускулы существует отрицательное давление (положительное $R - R_0$), падение которого уравновешивает электродинамическую силу. Минимум давления, или, соответственно, максимум скаляра кривизны внутри корпускулы не изменяется с течением времени.

Напишем теперь уравнения поля (1а) в следующем виде:

$$\left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) + \frac{1}{4} g_{ik} R =$$
$$= -\varkappa \left(T_{ik} + \frac{1}{4\varkappa} g_{ik} [R - R_0]\right). \quad (9)$$

С другой стороны, преобразуем прежние уравнения поля, включающие космологический член

$$R_{ik} - \lambda g_{ik} = -\varkappa \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T\right).$$

Вычитая скалярное уравнение, помноженное на $\frac{1}{2}$, получим сначала

$$\left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) + g_{ik} \lambda = -\varkappa T_{ik}.$$

Правая часть этого уравнения обращается в нуль, в тех областях, в которых имеются только электрическое поле и поле тяготения. Путем образования скаляра имеем для таких областей

$$-R + 4\lambda = 0.$$

В этих областях скаляр кривизны есть постоянная величина, поэтому можно заменить λ через $\frac{R_0}{4}$. Прежнее уравнение поля (1) мы можем написать в следующем виде

$$\left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) + \frac{1}{4} g_{ik} R_0 = -\varkappa T_{ik}. \quad (10)$$

Из сравнения (9) с (10) видно, что новые уравнения поля отличаются от прежних только тем, что в качестве тензора „тяготеющей массы“ стоит

$$T_{ik} + \frac{1}{4\varkappa} g_{ik} [R - R_0]$$

вместо T_{ik}, причем первое выражение зависит от скаляра кривизны. Новая формулировка имеет то большое преимущество перед прежней, что величина λ по отношению к основным уравнениям теории представляет собою постоянную интегрирования и не является более некоторой универсальной константой, присущей основному закону.

§ 3. К космологическому вопросу.

Последний результат заставляет уже предполагать, что на основе нашей новой формулировки можно будет рассматривать мир как пространственно замкнутый, не прибегая к дополнительной гипотезе. Как в предшествующей работе, так и теперь мы снова покажем, что при равномерном распределении материи сферический мир совместим с уравнениями.

Положим сначала

$$ds^2 = -\sum \gamma_{ik} dx_i dx_k + dx_4^2 \; (i, k = 1, 2, 3). \quad (11)$$

Если P_{ik} и соответственно P представляют собой тензор кривизны второго ранга и скаляр кривизны трехмерного пространства, то

$$R_{ik} = P_{ik} \; (i, k = 1, 2, 3)$$
$$R_{i4} = R_{4i} = R_{44} = 0$$
$$R = -P$$
$$-g = \gamma.$$

Таким образом для нашего случая получается

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = P_{ik} - \frac{1}{2} \gamma_{ik} P \ (i, k = 1, 2, 3)$$

$$R_{44} - \frac{1}{2} g_{44} R = \frac{1}{2} P.$$

Остальную часть рассуждения мы проведем двумя разными способами. Сначала мы будем основываться на уравнении (1a). В нем T_{ik} означает энергетический тензор электромагнитного поля, которое вызывается электрическими частицами, образующими материю. Для этого поля справедливо уравнение

$$\mathbf{T}_1^1 + \mathbf{T}_2^2 + \mathbf{T}_3^3 + \mathbf{T}_4^4 = 0.$$

Отдельные $\mathbf{T}_i^k$ с изменением места быстро изменяются; но для нашей задачи мы вполне можем их заменить средними значениями. Поэтому мы должны выбрать

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{T}_1^1 = \mathbf{T}_2^2 = \mathbf{T}_3^3 = -\frac{1}{3} \mathbf{T}_4^4 = \text{const} \\ \mathbf{T}_i^k = 0 \ (\text{при } i \neq k), \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

следовательно,

$$T_{ik} = \frac{1}{3} \frac{\mathbf{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}} \gamma_{ik}; \qquad T_{44} = \frac{\mathbf{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}.$$

Принимая во внимание сказанное выше, мы вместо (1a) получаем:

$$P_{ik} - \frac{1}{4} \gamma_{ik} P = -\frac{1}{3} \gamma_{ik} \frac{\varkappa \mathbf{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}. \qquad (13)$$

$$\frac{1}{4} P = -\frac{\varkappa \mathbf{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}. \qquad (14)$$

Скалярное уравнение к (13) совпадает с (14). Тот факт, что наши основные уравнения допускают сферический

мир, основывается на этом результате. В самом деле из (13) и (14) следует

$$P_{ik} + \frac{4}{3} \frac{\varkappa \mathbf{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}} \gamma_{ik} = 0, \qquad (15)$$

а эта система, как известно [1]), имеет своим решением (трехмерный) сферический мир.

Но мы можем также построить наше рассуждение и на уравнениях (9). В правой части (9) стоят те члены, которые при феноменологическом способе рассуждения должны быть заменены энергетическим тензором материи; следовательно, они должны быть заменены через

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho, \end{matrix}$$

где ρ есть средняя плотность материи, находящейся, согласно допущению, в покое. Таким путем получаются уравнения:

$$P_{ik} - \frac{1}{2} \gamma_{ik} P - \frac{1}{4} \gamma_{ik} R_0 = 0, \qquad (16)$$

$$\frac{1}{2} P + \frac{1}{4} R_0 = -\varkappa\rho. \qquad (17)$$

Из скалярного уравнения (16) и из (17) получается

$$R_0 = -\frac{2}{3} P = 2\varkappa\rho, \qquad (18)$$

поэтому (16) можно переписать так:

$$P_{ik} - \varkappa\rho\gamma_{ik} = 0. \qquad (19)$$

[1]) Ср. H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, § 33.

Это уравнение совпадает с (15), отличаясь от последнего только видом коэффициента. Приравнивая их друг другу, получаем

$$T_4{}^4 = \frac{3}{4}\rho\sqrt{\gamma}. \tag{20}$$

Это равенство утверждает, что три четверти энергии, образующей материю, приходится на электромагнитное поле и одна четверть — на поле тяготения.

§ 4. Заключительные замечания.

Изложенные выше рассуждения показывают, что можно теоретически построить материю исключительно из гравитационного и электромагнитного полей без введения гипотетических дополнительных членов в духе теории Ми. Эта возможность представляется особенно содержательной потому, что она освобождает нас от необходимости введения особой постоянной λ для решения космологической проблемы. Но с другой стороны имеется своеобразная трудность. Применив (1) специально к статическому случаю шаровой симметрии, мы получаем одним уравнением меньше чем нужно для определения $g_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$, вследствие чего оказывается, что *всякое распределение* электричества, согласное с шаровой симметрией, может оставаться в равновесии. Таким образом, проблему построения элементарных частиц нельзя в настоящий момент решить на основании указанных уравнений поля.

БИОГРАФИИ И ПРИМЕЧАНИЯ

БИОГРАФИЯ Г. А. ЛОРЕНЦА

Гендрик Антон Лоренц (Hendrick Anton Lorentz) родился 18 июля 1853 г. в Арнгейме (Голландия). После окончания местной школы поступил в Лейденский университет, докторскую степень которого получил в 1875 г. Некоторое время Лоренц преподает в вечерней школе в Арнгейме и с 1878 г. получает профессуру Лейденского университета. В ноябре 1902 г. Шведская Академия наук присуждает Лоренцу и Зееману нобелевскую премию „за исследования по влиянию магнетизма на явления природы". После передачи кафедры Эренфесту за достижением предельного возраста Лоренц остается почетным профессором Лейденского университета и читает здесь еженедельно лекции. С 1923 г. Лоренц — директор Исследовательского института Тэйлора в Гаарлеме. Он является также главой Комитета „Интеллектуального сотрудничества" при Лиге наций и председателем всех Сольвейских конгрессов по 1927 г. Лоренц умер 4 февраля 1928 г. в Гаарлеме.

В 1875 г. выходит в свет первая работа Лоренца об отражении и преломлении света от металлов. В 1880 г. Лоренц открывает замечательную связь между показателем преломления и плотностью (закон Лоренц-Лоренца, по имени также и шведского физика Рихарда Лоренца, сформулировавшего одновременно аналогичное соотношение). Это было первым существенным шагом в молекулярную область из максвелловской электродинамики. Делом жизни Лоренца было создание электронной теории и перевод феноменологического учения Максвелла на молекулярный язык элементарных зарядов. Классическая электронная теория конечно есть дело рук главным образом Лоренца. После открытия Зееманом расщепления спектральных линий в магнитном поле Лоренц сразу же объяснил это явление при помощи представления элементарных движущихся зарядов и предсказал еще поляризацию отдельных компонент. Книга Лоренца „Теория электронов“ (имеется русский перевод) останется навсегда классическим изложением теории. Второй большой цикл работ Лоренца был посвящен электродинамике движущихся тел. С замечательной настойчивостью, продвигаясь вперед шаг за шагом, Лоренц закладывал основы новой теории. Постепенно Лоренц фактически доходит до формулировки требования относительности и инвариантности уравнений электродинамики по отношению к поступательному равномерному движению, хотя даже в последней замечательной работе 1904 г. ему не удается проделать точно „преобразования Лоренца“ и ясно сформулировать принцип относительности. То и другое было проделано на основании работы Лоренца Эйнштейном и независимо Пуанкаре. Хотя в дальнейшем Лоренц дал ряд весьма интересных работ, но по сравнению с предыдущими фундаментальными вкладками они все же носили характер замечаний.

Несомненно, Лоренц остался и после 1905 г. представителем классической нерелятивистской и неквантовой физики и в развитии последних крайних теорий играл роль критика. Примерно со времени первого Сольвейского конгресса 1911 г. Лоренц становится в известном смысле главой всей современной теоретической физики. Все лейденские диссертации, как правило, предварительно апробируются Лоренцем. Лейден становится местом паломничества теоретиков, здесь часто бывает Эйнштейн. Лишь в 20-х годах роль столицы теоретической физики переходит к Копенгагену, где создается школа Бора, первосотрудник которого Крамерс был лейденским питомцем.

БИОГРАФИЯ А. ПУАНКАРЕ

Анри Пуанкаре (Henri Poincaré) крупнейший французский математик последних десятилетий, родился 29 апреля 1854 г. в Нанси. Сын профессора медицины, воспитываемый уже с детства сообразно своим рано проявившимся незаурядным общим способностям, он блестяще прошел курс средней школы, но на экзамене зрелости почти провалился по... математике, где ему пришлось на устном испытании исправить неудачную письменную работу.

Это было его даже не последнее поражение на экзаменационном математическом поприще. Вступив в 1873 г. в знаменитую парижскую École Polytechnique, он, правда, сразу начал считаться по успехам первым, получил однако при выпуске неудовлетворительную отметку по геометрии из-за неумения хорошо чертить. Вступив потом в Горный институт, он одновременно отдался своей любимой науке, начав в двух больших и важных статьях 1878 г. с аналитической теории дифференциальных уравнений, что сразу определило его дальнейшую карьеру. Прослужив только полгода горным инженером, он был назначен в конце 1879 г. доцентом математики в провинции, а в 1881 г. — в Париже, где в 1886 г. получил кафедру математической физики. К этому времени он успел уже дать ряд выдающихся трудов

по качественной и количественной теории дифференциальных уравнений, сделавшихся с тех пор классическими. В вещественной области Пуанкаре классифицирует особенные точки и дает в плоскости полную качественную теорию интегральных кривых, приводящую его к знаменитой концепции „предельных циклов", т. е. специальных периодических решений вокруг особенных точек; на такие циклы навиваются с обеих сторон все близкие интегральные кривые — только совсем недавно, а значит 50 лет спустя после этого открытия, предельные циклы получили глубочайшее значение в теории новейшей радиотехники, математический же их интерес далеко еще не исчерпан. В комплексной области Пуанкаре дает весьма общую теорему о возможности решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с алгебраическими коэффициентами с помощью всегда сходящихся рядов по новой вспомогательной переменной; эта теорема, найденная в связи с проблемой трех тел классической астрономии, послужила четверть века спустя отправным пунктом и для количественного решения знаменитой названной проблемы Зундманном, правда практически еще мало эффективным.

В связи с этими результатами Пуанкаре поставил себе глубокий и смелый вопрос об общем решении любого линейного дифференциального уравнения с алгебраическими коэффициентами и решил его действительно с помощью целой новой теории специальных однозначных функций, названных им *фуксовыми и клейновыми*. Эти *автоморфные* функции, которые воспроизводятся при заданной группе дробно-линейных подстановок для аргумента, следовало бы по праву назвать *функциями Пуанкаре*. Попутно он дал при этом следующую неожиданную тогда основную теорему „униформизации": картезические координаты любой алгебраической кривой могут быть представлены в виде фуксовых функций одного и того же вспомогательного аргумента. К этому вскоре присоединилась еще более общая теорема, по которой любая аналитическая функция комплексной переменной может быть одновременно с последней представлена в виде однозначной аналитической функции вспомогательного аргумента. Дальше следовали замечательные работы по целому ряду других классических проблем анализа в самых различных областях, из которых мы отметим весьма важное для астрономии доказательство сходимости некоторых бесконечных определителей, введенных в теорию дифференциальных уравнений Хиллом. Небесная механика, как замечательный объект приложения его математического гения, всю жизнь не переставала приковывать его внимание. Нельзя согласиться с мнением Дарбу, что это внимание объяснялось советами высокопоставленных научных друзей, желавших обеспечить молодому творческому ученому поскорее место академика, хотя бы по секции астрономии, после того, как его несколько раз обошли по секции математики, куда он однако все-таки попал в 1887 г., 32-х лет от роду. Можно сказать лишь одно, что международный конкурс по небесной механике, назначенный в 1885 г. шведским королем Оскаром II, при консультации со стороны Вейерштрасса, послужил в свою очередь некоторым внешним стимулом для мемуара, принесшего ему золотую медаль и премию конкурса. Вейерштрасс, строжайший критик того времени, выразился о мемуаре Пуанкаре, что „с него начинается новая эра в истории небесной механики". Пуанкаре переходит от частной проблемы трех тел к общим уравнениям динамики и дает целую новую теорию последних, включающую между прочим блестящую теорию

периодических решений, получившую в самое последнее время важнейшее значение также в радиотехнике и машиностроении. В 1892—1893 гг. появились в двух томах „Новые методы небесной механики", в 1899 г. — третий том этого сочинения, в 1905—1910 гг. — три тома лекций по небесной механике, курс о фигурах равновесия жидкой массы и курс о гипотезах космогонии. Из глубоких результатов этого цикла отметим неожиданное открытие возможности „грушевидных" форм равновесия, как продолжение трехосных эллипсоидов Якоби, в свое время явившихся такой же неожиданностью. Это открытие доставило ему в 1900 г. золотую медаль Лондонского королевского астрономического общества, переданную ему Г. Дарвином. Последний в собственных работах доказывал на основании приближенных методов *устойчивость* новых тел равновесия Пуанкаре, который сам однако склонялся более к противному мнению, считая, что его грушевидные небесные тела служат лишь неустойчивым переходом к расщеплению первоначальной сплошной массы, дающему повод к образованию новых тел. Действительно, неустойчивость груш Пуанкаре, найденных однако независимо и А. М. Ляпуновым, была вскоре строго доказана последним. Устойчивость целого ряда уже расщепленных форм была позднее также доказана особенно Лихтенштейном. Насколько верна сама гипотеза расщепления, высказанная Пуанкаре, нам до сих пор неизвестно. В 1896 г. Пуанкаре променял свою парижскую кафедру математической физики на кафедру математической астрономии в той же Сорбонне.

При всем размахе названных выше работ, Пуанкаре не переставал неутомимо разрабатывать огромное количество своих курсов по самым различным областям математической физики, дав их более чем дюжиной замечательных томов; в каждом на ряду с классическими результатами даны новейшие теории того времени, в которые он сам везде давал глубокие собственные вклады. Особенно важным, прежде всего имеющим и чисто математический интерес, он посвящал отдельные мемуары, в которых опять даны отчасти несравненные результаты. Шварц в 1885 г. доказал существование основного тона любой закрепленной плоской мембраны, Пикар, несколько позднее, — существование первого обертона. Пуанкаре в 1894 — 95 гг. доказал не только существование и всех последующих обертонов, но ввел для этого в рассмотрение вспомогательный параметр, давший несомненный ключ к построению в 1900 г. изумительной по своей силе теории интегральных уравнений Фредгольма. Добавим, что Пуанкаре является также творцом основ современнейшей топологии; творцом основ новейшей аналитической теории функций двух и более комплексных переменных; что он издал также весьма интересный том лекций по теории вероятностей; что он наряду со всем этим удосужился еще написать целый ряд блестящих общенаучных философских книг, сделавших его имя известным далеко за пределами более тесных научных кругов („Наука и гипотеза“, „Наука и метод“, „Значение науки“) и мы не сможем не преклоняться перед такой силой творчества, о котором мы могли дать здесь только некоторое слабое понятие.

Остановимся однако немного на следующей здесь статье, в которой Пуанкаре в июле 1905 г., еще не зная о почти непосредственно предшествующей основной работе Эйнштейна, не только дает, также на основании трудов Лоренца, все основы специальной теории относительности, но идет и дальше, к ее многообразным приложениям и разветвлениям.

Огромная заслуга Эйнштейна состояла в сведении специальной теории относительности к ее глубочайшим элементам, преобразовавшим все наше научное мышление о пространстве времени и энергии. С чисто математической точки зрения этот первоначальный анализ Эйнштейна является довольно элементарным, и только позднейшая концепция *общей* теории относительности носит все знамения огромного гения.

Пуанкаре в своей статье вышеназванных математических элементов вообще почти не касается. Он идет сразу не к сравнительно простым, хотя и глубоко важным корням теории Лоренца, а к ее верхушкам, к математическим последствиям. Однако он вполне сознает и общенаучное значение своей работы. И с самого начала он называет ту новую область, в которую он входит одним из первых, следствием *постулата относительности*, понимая под этим совершенно то же самое, что Эйнштейн только-что до него назвал *принципом* относительности.

Пуанкаре умер 17 июля 1912 г. после короткой болезни и операции, оставив человечеству еще больше новых проблем, чем исключительных новых результатов.

Он написал около 30 сочинений и около 500 мемуаров и небольших трудов. Конечно Пуанкаре был также членом самых различных академий и научных обществ, почетным доктором многих университетов различных стран и т. д. В 1904 г. он за открытую им связь своих трудов по теории фуксовых функций с неевклидовой геометрией и конечно за всю совокупность своего крупнейшего творчества получил между прочим также золотую медаль имени Лобачевского Казанского физико-математического общества.

БИОГРАФИЯ А. ЭЙНШТЕЙНА

Альберт Эйнштейн (Albert Einstein) родился в Ульме на Дунае (Вюртемберг) 14 марта 1879 г. Детство до 14 лет провел в Мюнхене. Окончил кантональную школу в Аарау (Швейцария) и в 1896 г. поступил в Цюрихский политехникум. Здесь Эйнштейн слушал лекции Минковского. В 1900 г. Эйнштейн кончает высшую школу, получая права учителя математики и физики. После кратковременной преподавательской деятельности в Шаффгаузене, Эйнштейн поступает в патентное бюро в Берн, где и служит в 1902—1909 гг. С осени 1909 г. по весну 1910 г. Эйнштейн — экстраординарный профессор Цюрихского университета, в 1911 — 12 гг. — профессор немецкого Университета в Праге, в 1912 — 14 гг. — ординарный профессор Политехникума в Цюрихе.

Осенью 1913 г. Эйнштейн избирается членом Прусской Академии наук, с весны 1914 г. он директор Физического института кайзера Вильгельма и с этого же времени читает лекции в Берлинском университете. Эйнштейн в 1922 г. получает премию Нобеля по физике за 1921 г. „за свои достижения в теоретической физике и особенно за открытие закона фотоэлектрического эффекта“ и избирается тогда же иностранным членом Королевского общества. Большое число университетов и академий избрало его своим

почетным членом, в том числе Академия наук СССР. Эйнштейн получил также медали Королевского общества, Королевского астрономического общества. Эйнштейн состоял профессором Лейденского университета, а также неоднократно читал лекции за границей во Франции, Англии, Америке, Японии и т. д.

До прихода к власти фашистов Эйнштейн находился в Берлине. После эмиграции его из Германии целый ряд университетов предложил ему профессуру; в Париже была создана для него специальная кафедра. В настоящее время Эйнштейн проживает в Принстоне в США, где состоит членом нового математического Института.

Первая работа Эйнштейна о капиллярных явлениях напечатана в 1901 г., после чего начался невероятно быстрый расцвет его исключительной деятельности как физика-теоретика. В 1901 — 1906 гг. Эйнштейн занимается обоснованием статистики и дает теорию Броуновского движения (эти статьи напечатаны в Ostwald's Klassiker; печатается дополненное русское издание). В начале 1905 г. появляется его „эвристическая“ теория световых квантов, а в сентябре выходит в свет тетрадь Annalen der Physik со знаменитой статьей о специальном принципе относительности. Физическое и философское значение этой работы Эйнштейна совершенно необозримо. Эйнштейн известен в широких кругах только как автор теории относительности, но конечно все остальные работы сами по себе ставят его в самые первые ряды физиков нашего времени. Как отметил в своей речи председатель Нобелевского комитета по физике Аррениус, премия была присуждена Эйнштейну главным образом за работы по квантам; это связано, впрочем, с обычным подчеркиванием более конкретных достижений нобелевских лауреатов. Главнейшее значение из этих нерелятивистских работ, кроме упомянутой теории Броуновского движения и теории световых квантов, имеют: теория теплоемкости твердых тел (1907 г.); статистическая теория испускания и поглощения света (1907 г.), квантовая статистика идеального газа, так называемая теория Бозе-Эйнштейна (1924 г.).

Бесспорно, однако, что делом жизни Эйнштейна является создание теории относительности. После ряда дополнительных статей по специальному принципу Эйнштейн в 1911 г. приступает к его обобщению, выдвигая идею эквивалентности ускорения с тяготением. После долгого, можно сказать мучительного пути, на котором Эйнштейн призвал себе на помощь математика Марселя Гроссмана, здание общей теории относительности было в основном построено в 1916 г. В статьях этого периода сам Эйнштейн поражен величием новой теории и изменяет своему спокойному классическому стилю. После подтверждения экспедицией Эддингтона в 1919 г. отклонения света в поле Солнца, предсказанного Эйнштейном, интерес к теории относительности принял бурный и всеобщий характер, и эта теория стала „модной“ не только в научных кругах. Из всех ученых нашего времени имя Эйнштейна достигло наибольшей популярности, почти сравнявшись с великими именами таких гигантов прошлого, как Ньютон, Фарадей.

Начиная с 20-х годов, Эйнштейн усиленно занимается вопросами единой теории поля, унифицирующей явления тяготения и электродинамики. Работы этого направления, начатого Вейлем, не привели до сих пор к физическим результатам ни в руках Эйнштейна, ни у других авторов и далеко не имеют значения его трудов других циклов.

Развитие же релятивистской космологии, начатое самим Эйнштейном (1919 г.), напротив все больше и больше выдвигается на первый план, особенно после работ А. А. Фридмана (Ленинград) и Лемэтра, давших теорию расширяющегося мира, и после наблюдений астронома Хэббла, обнаружившего эффект видимого удаления туманностей от нас. Не останавливаясь здесь на оценке трудов Эйнштейна, одного из самых первых физиков нашего времени и одного из крупнейших теоретиков всех времен, мы в заключение подчеркнем одну лишь сторону его работ: их необычайную ясность, поразительную законченность физической и математической формулировки и четкий классический стиль изложения. Совершенно непревзойденной представляется именно законченность работ Эйнштейна, с чем вероятно связано полное отсутствие у него учеников, в столь резком контрасте с другим лидером теоретической мысли в XX веке Нильсом Бором. Независимо от окончательного приведения в „порядок“ классической электродинамики и предсказания ряда новых эффектов вроде действия тяготения на свет, существеннейшей заслугой релятивизма является построение принципиально ненаглядной теории и связанное с этим невероятное расширение возможностей теоретического мышления. В этом случае бесспорно физика XX века началась не только и не столько с открытия рентгеновых лучей и радиоактивности, сколько с формулировки теории относительности. Хотя кванты и были открыты Планком еще в 1900 г., но окончательное завершение этой теории произошло на четверть века позже.

В дальнейшем Эйнштейн посвятил свое внимание единой теории поля, опубликовав большое число ее вариантов в Sitzungsberichten der Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berliner Berichte).

БИОГРАФИЯ Г. МИНКОВСКОГО.

Герман Минковский (Hermann Minkowski) родился в 1864 г. в местечке Алексоты Минской губернии. Еще мальчиком он переехал в Германию, где и окончил среднюю школу и университет. В возрасте 17 лет Минковский участвовал в соревновании на тему Парижской академии на построение теории представления чисел суммой 5 квадратов. Минковский получил за поданную работу приз Парижской академии. В большом ряде последующих работ Минковский, можно сказать, создал целое новое направление в математике: геометрию чисел. Дирихле и Эрмит также пользовались геометрией в теории чисел, но только Минковский последовательно ввел геометрию во все отделы теории чисел и дал общие теоремы, относящиеся к самому геометрическому методу в дискретном анализе. Надо заметить, что сверх многочисленных новых результатов, часто весьма глубоких в самой теории чисел, геометрия чисел сама по себе отличается своеобразной прелестью и элегантностью.

Можно думать, что это именно направление Минковского стимулировало Гильберта заняться геометризацией анализа, давшей такие важные идеи, как пространство Гильберта и т. д.

Второй цикл работ Минковского относится уже собственно к геометрии, главным образом к теории выпуклых тел.

В конце жизни Минковский занимался геометризированием теории относительности. Он вновь после Пуанкаре выдвинул вопрос о той группе преобразований, относительно которой будут инвариантны основные уравнения физики. С большой ясностью Минковский подчеркнул также четырехмерный характер теории относительности. Эти работы Минковского, приводящие в порядок основы теории, сыграли большую роль в дальнейшем.

Часто четырехмерный мир называли миром Минковского, хотя справедливее было бы говорить о мире Пуанкаре-Минковского. Другой цикл работ Минковского по теории относительности касался инвариантной формулировки уравнений в весомых телах: вопрос не столь принципиальный, но имеющий большой физический интерес.

Минковский занимал кафедру в Геттингенском университете, был в большой дружбе с Гильбертом и вместе с ним выдвинул Геттингенский университет на первое место в мире в отношении математики. Минковский умер в январе 1906 г. 44 лет от роду.

Можно согласиться с Гильбертом, что такие результаты Минковского, как доказательство неравенства единице дискриминантов алгебраических областей, теорема о выпуклом многограннике с ее следствиями и теория приведения квадратичных форм, могут быть поставлены наряду с лучшими достижениями математических классиков.

Все работы Минковского изданы Геттингенской Академией: Hermann Minkowski, Gesammelte Abhandlungen (2 тома), под ред. Гильберта; Teubner, Leipzig, 1911.

ПРИМЕЧАНИЯ

1. К статьям Лоренца: *„Интерференционный опыт Майкельсона“* и *„Электромагнитные явления в системе, движущейся с любою скоростью, меньшей скорости света“*.

Электронная теория, созданная главным образом Лоренцом, явилась закономерным развитием макроскопической феноменологической теории Максвелла-Герца на микроскопическую область. Лоренц систематически применял понятие элементарного заряда электрона и истолковал уравнения Максвелла с этой точки зрения. Оставаясь на почве неквантовой наглядной физики и не вводя новых постоянных (характерных например для недавней нелинейной теории Борна), большего достигнуть было нельзя, и законченная классическая теория электронов, изложенная в книге Лоренца „Теория электронов“, навсегда останется в этом смысле нетронутой. Для перехода же в атомную и ядерную области и для построения теории самого электрона нужны конечно квантовые понятия.

Первый этап всей теории и в частности первые попытки построения электродинамики движущихся тел изложены Лоренцом в 1895 г. в его знаменитой монографии „Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bevegten Körpern“. Здесь Лоренц твердо становится на почву гипотезы Френеля о неподвижном эфире и уже во

введении обсуждает аргумент против теории увлекаемого эфира Стокса. Против точки зрения Френеля имеется лишь нескольких веских аргументов и прежде всего опыт Майкельсона — последний Лоренц объясняет гипотезой сокращения. Опыты же де Кудра о замеченном будто бы влиянии движения земли на индукцию двух круговых токов допускают элементарное объяснение. Лоренц принимает, что эфир абсолютно проникает все тела, а не только пространство между атомами. Подчеркивая, что он не приписывает эфиру никаких свойств обычных тел, Лоренц отнюдь не говорит об абсолютном покое эфира. Такое выражение не имело бы смысла. Лоренц имеет лишь в виду, что одни части этой среды не передвигаются относительно других и что все видимые движения небесных лет являются относительными движениями по отношению к эфиру. Таким образом у эфира осталось лишь свойство быть неподвижной координатной системой отсчета и достаточно было появления теории относительности, чтобы понятие эфира оказалось вовсе излишним. Здесь же Лоренц дает объяснение эффектам первого порядка относительно скорости движения.

Сравнение различных теорий электричества между собой, включая и теорию электронов, изложено в книге H. Poincaré, „Electricite et optique“, Paris, Gauthier-Villars, 1901. Эта замечательная книга резюмирует ряд лекций, читанных Пуанкаре в конце прошлого и в начале настоящего столетия, и дает очень глубокий анализ современных ей теорий. Книги Лоренца и Пуанкаре дают хорошее понятие об общих направлениях и характере творчества авторов.

Читателя, интересующегося дальнейшей судьбой и повторениями опытов Майкельсона, мы отсылаем к книге С. И. Вавилова „Экспериментальные основания теории относительности", ГИЗ, 1928 г. Вторая статья Лоренца чрезвычайно интересна тем, что мы можем следить за медленным и, как нам кажется, на первых порах очень трудным, идущим ощупью, процессом, который в конце-концов должен привести к преобразованию координат, ставшему знаменитым, под названием „преобразований Лоренца", а также к преобразованию компонент электрического и магнитного поля, компонент скорости и компонент плотности тока.

Примечание самого Лоренца, приведенное на стр. 22 и 23 текста, сделанное в 1912 г., поясняет небольшую формально, но все же существенную разницу между его результатом и формулами Эйнштейна и, добавим мы, Пуанкаре. Весьма интересно указание Лоренца о том, как близки были физики в лице Фохта (W. Voigt) и притом уже давно, с 1887 г., к преобразованиям Лоренца [формулы (4) и (5), стр. 21].

Лоренц ссылается здесь на работу Фохта, результаты которой оказались забытыми. Фохт берет уравнения колебаний упругой несжимаемой среды:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \Delta v, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \Delta w \qquad (1)$$

(где c — скорость распространения плоских волн постоянной амплитуды) совместно с условием расходимости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

и рассматривает такие преобразования координат и времени x, y, z, t, которые какие-либо решения уравнения (1) снова превращают в решение уравнения (1), т. е., говоря нашим языком, оставляют уравнения инвариантными. Фохт заменяет

$$\begin{aligned}
x &\text{ на } \xi = xm_1 + yn_1 + zp_1 - \alpha t \\
y &\text{ на } \eta = xm_2 + yn_2 + zp_2 - \beta t \\
z &\text{ на } \zeta = xm_3 + yn_3 + zp_3 - \gamma t \\
t &\text{ на } \tau = t - (ax + by + cz)
\end{aligned}$$

и определяет коэффициенты преобразования обычным путем. Отличие от преобразований Лоренца заключается в коэффициенте при t, положенном равным единице. Фохт рассматривает затем три приложения обобщенного принципа Допплера к преобразованию частот в зависимости от состояния движения. Наиболее интересным является анализ сферических волновых поверхностей, которые „в точке x, y, z будут иметь такой вид, как будто бы светящаяся точка пребывала в точке, достигнутой в момент $t - \frac{r}{c}$". Фохт заключает, что покоящийся наблюдатель будет воспринимать светящуюся точку в месте, в котором она находилась во время на $\frac{r}{c}$ более раннем. К сожалению никаких применений своих правильных, по существу, предположений об инвариантности законов, описывающих физический процесс света, к уравнению Максвелла Фохт не предпринял, оставаясь на почве старой эфирной теории. В своей большой работе о „теории света для движущейся среды", напечатанной в той же Nachrichten der Königl. Gesell. der Wissensch. zu Göttingen за 1887 г. в № 8 на стр. 177. Фохт подчеркивает все время необходимость более тесной связи с теорией упругости. В этой работе Фохт, как и Лоренц, допускает эфир, не увлекаемый телами при движении (но зато могущий совершать самостоятельное движение), и углубляется в исследование сил между материей и частицами эфира в покое и при движении, вводит плотность эфира и т. д. Фохт исходит здесь из закона сохранения энергии, подробно обсуждает и объясняет на основе своих воззрений ряд экспериментов, в том числе опыт Майкельсона, но нигде не ставит вопроса об инвариантности уравнений хотя бы в духе своей заметки о принципе Допплера, которая осталась результатом частным, очевидно, и для самого автора. Указание Лоренца многозначительно, так как причина долгого непонимания формул Фохта не может быть случайной. Содержание специального принципа относительности состоит вовсе не в одном только преобразовании координат и времени, но также в соответствующем параллельном преобразовании других физических величин и, что особенно существенно, в возможности придать преобразованным и непреобразованным величинам вполне ясный и точный физический смысл. Начать рассматривать величины компонент поля d', h' (стр. 21 и 22) как реальные физические величины, а не как сокращенные математические символы, введенные для удобства обозначений, можно было только после того, как электронная теория Лоренца достигла известной степени завершения и оказалась в своем физическом содержании уже в достаточной степени уясненной. Здесь нельзя также не указать на работы Лармора (J. Larmor), в значительной степени содействовавшего развитию теории электронов, во многих отношениях параллельно с Лоренцом и повидимому независимо от него. Его книга „Aether and Matter" Cambridge, 1900, чрезвычайно интересна в смысле освещения ряда вопросов физики, злободневных ко времени ее появления. В главах X и XI, посвященных проблемам оптики

в движущейся материи, он весьма близко, так же как и Лоренц, подходит к преобразованиям координат времени и других физических величин, лежащих в основе теории относительности (см. стр. 174 его книги). Он говорит уже о сокращении размеров движущейся системы по направлению движения, по сравнению с размерами неподвижной системы в отношении

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

или приближенно

$$1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \text{ (стр. 175).}$$

Но далеко ведущие расчеты Лармора фактически оказались понятыми только после основных работ Лоренца и Эйнштейна. Любопытно отметить, что в первом издании первой книги, систематически излагающей специальную теорию относительности, принадлежащей перу знаменитого физика-теоретика Лауе (M. Laue) „Das Relativitätsprinzip", Braunschweig, 1911, в библиографическом списке имен Фохта, Лармора, как и Пуанкаре, нет.

2. О статьях А. Пуанкаре *„К динамике электрона" (стр. 51), А. Эйнштейна „К электродинамике движущихся тел" (стр. 133) и Г. Минковского „Пространство и время" (стр. 181).*

Статья Пуанкаре замечательна во многих отношениях. По времени своего появления — начало 1906 г. — она несколько запаздывает по сравнению с основной статьей Эйнштейна, появившейся в сентябре 1905 г., но написана она абсолютно независимо от Эйнштейна, что видно по датам поступления в печать: 30 июня и 23 июля. Первоклассный знаток теоретической физики и совершенно исключительный математик, Пуанкаре дает своему изложению сразу соответствующую математическую форму, называя вещи их настоящими математическими именами, что другими физиками-теоретиками делается значительно позднее. Прежде всего Пуанкаре, как и Эйнштейн, выдвигает основную идею в виде четкого „постулата относительности" — у Эйнштейна „принцип относительности". Преобразования Лоренца (также термин Пуанкаре) составляют группу в многообразии четырех измерений (§ 4) и Пуанкаре находит инварианты этой группы. Преобразования плотности тока, плотности электричества и напряжений электрического и магнитного поля с изумительной простотой и последовательностью получаются в окончательном виде (в отличие от второй статьи Лоренца — стр. 27) из преобразований координат и немногих определений (формулы 4, 6 и 8 на стр. 57). В статье показана плодотворность использования принципа наименьшего действия, который дан в четырехмерной формулировке. Пользуясь современной терминологией тензорного исчисления, можно сказать, что все величины электромагнитного поля, по сути изложения, а также и по форме расположения выкладок с полной очевидностью выступают как тензоры соответствующих рангов четырехмерного многообразия. Все объяснения и расчеты физических явлений, как например сокращение Лоренца-Фитцджеральда, распространение волн или исследование о силе тяжести и возможном изменении в связи с теорией относительности законов тяготения, ведутся с помощью четко разъясненных теорем о преобразованиях тех или иных величин.

Пуанкаре первый вводит мнимую координату времени (стр. 118) и толкует преобразование Лоренца как поворот в пространстве 4-х измерений. Здесь он находит также знаменитую теорему о сложении скоростей.

Статья Пуанкере с формальной точки зрения содержит в себе не только параллельную ей работу Эйнштейна, но в некоторых своих частях и значительно более позднюю — почти на 3 года — статью Минковского, а отчасти даже превосходит последнюю.

Между тем статья Пуанкаре фактически оказалсь совершенно незамеченной, тогда как статьи Эйнштейна и Минковского сразу привлекли к себе всеобщее внимание, первая в 1905—1906 гг., вторая в 1908—1909 гг. Причина этого весьма любопытного обстоятельства, не имеющего аналогов в современной физике, не может конечно заключаться в одной только сравнительно малой известности, или точнее распространенности среди физиков столь знаменитого математического журнала как „Rendiconti del Circolo matematico di Palermo", в котором было напечатана статья Пуанкаре. Для большинства физиков был малопривычен строгий математический язык Пуанкаре и теория групп; избранным теоретикам работа Пуанкаре на первых порах могла показаться рядом до некоторой степени чисто формальных математических преобразований, тогда как статья Эйнштейна сразу указывала на вытекающую из вновь открытых закономерностей необходимость пересмотреть наши основные физические представления о времени и пространстве. Стиль работы Пуанкаре — инвариантно-теоретический, тогда как Эйнштейн начал строить свою статью с рассмотрения мысленных экспериментов об измерении пространства и времени. Некоторое понимание этого обстоятельства можно усмотреть в первой работе Г. Минковского: „Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern" (Nachrichten der Kgl. Ges d Wiss. zu Göttingen, Math.-physik. Kl. 1907).

В этой статье Минковский дважды ссылается на

Пуанкаре; один раз, указывая в нем автора, давшего определенной группе преобразований знаменитое название „преобразований Лоренца“, и затем упоминая о даваемом Пуанкаре согласовании теории тяготения с постулатом относительности. На чрезвычайно содержательные в смысле развития и применения идей относительности части статьи Пуанкаре ссылок в этом докладе Минковского нет, но в предисловии к этой статье он говорит: „То обстоятельство, что постулат относительности является не искусственной гипотезой, но новым пониманием времени, к которому нас вынуждают явления природы, было до настоящего времени в наиболее резкой форме показано Эйнштейном“. (См. эту же статью Минковского в изд. R. Teubner'a, Berlin, 1910 г., стр. 6). В докладе же 5 ноября 1907 г., опубликованном в 1915 г., Минковский говорит значительно более ясно о ценности работы Пуанкаре: „заслуга разработки общего принципа принадлежит Эйнштейну, Пуанкаре и Планку“ и дальше: „Эту симметрию (пространства и времени, *прим. ред*) я с самого начала введу здесь в изложение, что не сделано ни одним из авторов, даже Пуанкаре“.

Если успех статьи Эйнштейна (которому не была повидимому известна статья Лоренца) объясняется точным указанием физического смысла вновь открытых закономерностей, то успех статьи Минковского основан на большой геометрической образности его изложения и чрезвычайно удачной символикой, приспособленной к четырехмерному многообразию „пространство-время“ и быть может также уже некоторому забвению на 2 года более старой работы Пуанкаре. Вслед за статьей Минковского редакторы настоящей книги сочли нужным поместить примечания, сделанные А. Зоммерфельдом к немецкому изданию основных работ по теории относительности. В этих примечаниях разъясняются не только некоторые формальные стороны ее изложения, но показывается также и ценность работ Минковского и их значение (см. примечания 1, 7, 9 и 10).

В качестве дополнения к 8-му примечанию следует заметить, что со времени появления общей теории относительности в физике тензорный анализ все больше и больше входит во всеобщее употребление, Символику четырехмерного векторного исчисления. которым пользуется Минковский, в настоящее время охотно заменяют символикой тензорного исчисления. В соответствии с этим термин „шестивектор“, буквальный перевод с немецкого Sechservektor, теперь большею частью заменяют названием кососимметричный тензор второго ранга. Примечания, сделанные Зоммерфельдом, интересны также и потому, что принадлежат одному из виднейших современных физиков-теоретиков.

В знаменитой статье 1905 г. теория относительности была сформулирована Эйнштейном в весьма законченном виде.

В двух работах в Ann. d. Phys. 1906 и 1907 гг. Эйнштейн специально интересуется новыми экспериментальными подтверждениями теории; в первой статье он сравнивает теоретические значения продольной и поперечной масс по Бухереру, Абрагаму и Лоренцу-Эйнштейну и обращается к физикам экспериментаторам с предложением заняться этим вопросом „так как я сам не в состоянии работать экспериментально“. Во второй статье Эйнштейн на основании наблюдений Штарка обсуждает возможность наблюдения Доплер-эффекта второго порядка, предсказанного теорией относительности.

В 1903 г. устами Эренфеста „Релятивистская электродинамика“ Лоренца, в формулировке Эйнштейна, объявляется уже „признанной почти всеми за законченную систему“. Последнее слово этой фразы Эренфеста, в частности, вызывает замечание Эйнштейна (см. ответ Эренфесту), что „принцип относительности, или точнее, принцип относительности вместе с принципом постоянства скорости света не следует понимать как „законченную систему“, или вообще как систему, но только лишь как эвристический принцип, который сам по себе содержит лишь высказывания о твердых телах, часах и световых сигналах“. Дальнейшие физические следствия теория относительности дает, устанавливая соотношение между различными, казавшимися независимыми явлениями. Новые физические следствия, таким образом, отнюдь не были уже заранее заключены в теории и не могут быть получены оттуда дедукцией. Например, зная уравнения Максвелла и законы медленного движения электронов, мы находим релятивистским преобразованием законы движения электронов сколь угодно быстрых.

3. К статье Эйнштейна: *„О влиянии силы тяжести на распространение света“* (*стр. 206*).

Эта статья представляет первый шаг Эйнштейна к общей теории относительности. Здесь впервые разъясняется являющийся в дальнейшем путеводною звездою для Эйнштейна принцип эквивалентности тяготеющей и инертной массы и указывается ограниченность области применения формул преобразований Лоренца. Здесь же делаются и первые выводы об искривлении луча света и об изменении частоты света в поле тяготений — явления, предсказанные Эйнштейном, достаточно хорошо подтвержденные затем наблюдениями и вплоть до настоящего времени многократно занимавшие внимание всех физиков и астрономов.

Указанная Эйнштейном возможность зависимости между скоростью света и тяготением побуждает и ряд

других физиков-теоретиков приняться за исследование этого вопроса. Исходя из такой возможности, первым выступает со своей теорией в 1912 г. Макс Абрагам (см. его статью „Zur Theorie der Gravitation“, Physikalische Zeitschrift, **13**, 1, 311, 1912). Абрагам получает гравитационную теорию инвариантную в бесконечно малой области относительно преобразований Лоренца. Он является сторонником „абсолютной“ теории, предлагая выделить изо всех координатных систем отсчета те, в которых гравитационное поле будет статическим, и к этой системе относить все движения, аналогизируя подобную систему с „телом альфа“ Неймана. Эта статья вызывает реплику со стороны Эйнштейна, развивающего со своей стороны теорию статического поля (см. Ann. d. Phys. **38**, 355, 1912); между ними возникает полемика, во многих отношениях интересная и поучительная. В первое после возникновения теории относительности время Абрагам является ее противником; в пересмотре Эйнштейном основ специального принципа относительности, а именно в отказе от применения принципа постоянства скорости света во всем пространстве или, точнее, в сохранении его только для той области пространства, в которой поле тяготения имеет постоянное значение, а также в стремлении обобщить преобразования Лоренца Абрагам готов видеть отказ от теории относительности вообще. Он пишет весьма резко (см. Ann. d. Phys. **38**, 1056, 1912), „кто подобно автору (т. е. Абрагаму. *Прим. ред.*) неоднократно предостерегал от сиреноподобных песен этой теории, тот может с удовлетворением приветствовать, что сам основатель теории убедился в ее несостоятельности“. На статью Абрагама Эйнштейн отвечает кратко, но при этом с необычайной наглядностью и ясностью резюмирует свою точку зрения и свою дальнейшую программу работ. Об этом можно судить по следующей выдержке из его замечательной реплики (см. Ann. d. Phys. **38**, 1061, 1912).

„Всем известно, что теория законов преобразования пространства и времени не может быть основана на одном только принципе относительности. Известно, что это связано с относительностью понятий „одновременности“ и „формы движущегося тела“. Чтобы восполнить этот пробел, я ввел принцип постоянства скорости света, заимствованный из теории покоящегося эфира Г. А. Лоренца; это положение, так же как и принцип относительности, содержит в себе физическую предпосылку, которая может быть оправдана только решающими опытами (опыты Физо, Роуланда и т. д.). Указанный принцип гласит: существует такая система отсчета K, в которой всякий луч света в пустоте распространяется с универсальной скоростью c, независимо от того, движется ли излучающее тело относительно K или нет.

„На основании этих двух принципов можно построить теорию, которая известна в настоящее время под именем „теории относительности“.

„Эта теория справедлива в той мере, в какой справедливы оба лежащие в ее основе принципа. Так как последние повидимому применимы в весьма широких границах, то и теория относительности в ее современной форме по всей вероятности представляет собой существенный шаг вперед; я не думаю, чтобы она воспрепятствовала дальнейшему развитию теоретической физики.

„Как же обстоит теперь дело с границами применения обоих принципов? Сомневаться в общей правильности принципа относительности у нас, как уже отмечено, нет ни малейшего основания. Напротив, я считаю, что принцип постоянства скорости света может быть сохранен только постольку, поскольку мы ограничиваемся областями пространства-времени с постоянным потенциалом тяготения. Здесь, по моему мнению, лежит граница применения не для принципа относительности, но для принципа постоянства скорости света и вместе с этим для нашей современной теории относительности. К этому мнению меня приводят следующие соображения.

„Одним из важнейших результатов теории относительности является признание, что всякого рода энергия E обладает пропорциональной ей инерцией $\left(\frac{E}{c^2}\right)$. Так как всякая инертная масса в то же время является, насколько это доступно нашему опыту, и тяготеющей массой, мы не можем не приписать всякого рода энергии E также и тяжелую массу $\frac{E}{c^2}$. Отсюда сейчас же следует, что тяжесть действует на движущееся тело сильнее, чем на то же тело в состоянии покоя.

„Если окажется возможным истолковать поле тяжести в духе современной теории относительности, то это может быть сделано вероятно только двумя способами. Гравитационный вектор может рассматриваться или как четырехмерный вектор или как шестивектор (кососимметричный тензор второго ранга. *Прим. ред.*). Для каждого из этих двух случаев мы имеем соответствующую формулу преобразования при переходе к равномерно двигающейся координатной системе. С помощью этих формул преобразования и формул преобразования для пондеромоторных сил удается тогда в обоих случаях найти силы, действующие в статическом поле тяжести на движущуюся материальную точку. При этом мы приходим к результатам, которые противоречат указанным выводам из положения о тяготеющей массе и энергии.

„Таким образом оказывается, что вектор гравитации не укладывается без противоречий в схему современной теории относительности.

„Но это положение вещей по-моему вовсе не означает ошибочности основанного на принципе относительности метода, точно так же, как открытие и правильное понимание брауновского движения не приводит к заключению, что термодинамика и гидромеханика являются ошибочными. Современная теория относительности, по моему мнению, всегда сохранит свое значение как простейшая теория явлений в пространстве-времени для весьма важного предельного случая постоянного потенциала тяготения. Задачей ближайшего будущего является создание такой теоретической релятивистской схемы, в которой эквивалентность между инертной и тяжелой массой сможет найти свое выражение. В своей работе о статическом поле тяжести я пытался сделать первые весьма скромные шаги к достижению этой цели. При этом я исходил из представления, что эквивалентность инертной и тяжелой массы может быть сведена к тождественности по существу этих двух элементарных качеств материи или энергии тем, что статическое поле тяготения рассматривается как физически тождественное с ускорением системы отсчета. Я должен сознаться, что мне удалось разработать это представление без противоречий только для бесконечно малых областей и что я не могу дать этому обстоятельству никакого удовлетворительного объяснения. Но я не вижу в этом оснований отказаться от принципа эквивалентности и для бесконечно малых областей; никто не сможет отрицать, что этот принцип представляет собой естественную экстраполяцию одного из наиболее общих экспериментальных законов физики. С другой стороны, этот принцип эквивалентности открывает

перед нами интереснейшую перспективу, выдвигая требования, что уравнения некоторой новой, охватывающей и гравитацию теории относительности должны оказаться инвариантными и по отношению к преобразованиям с ускорением (и вращением). Конечно, путь к этой цели представляется весьма трудным. Уже из того, что было рассмотрено и что является весьма частным случаем гравитации покоящихся масс, видно, что пространственно-временные координаты должны будут потерять их простое физическое значение, и еще нельзя предсказать, какую форму могли бы иметь общие пространственно-временные уравнения для преобразованиий. Я хотел бы просить всех коллег-теоретиков попробовать свои силы на решении этой чрезвычайно важной проблемы".

Этот призыв Эйнштейна не находит достаточного отклика среди других физиков-теоретиков. Повидимому, не только его идеи, остаются непонятными в основном, но и выполнение их представляется слишком трудной задачей.

В том же 1912 г. кроме Абрагама (см. еще его статью в Ann. d. Phys. **39**, 444, 1913), после только что указанной полемики между ним и Эйнштейном (которая продолжалась и в других заметках), выступает с новой теорией тяготения другой известный теоретик — Г. Нордстрем (см. Phys. ZS. **13**, 1126, 1912; Ann. d. Phys. **40**, 872, 1913; **42**, 533, 1913; **43**, 1101, 1913). Он задается целью, оставляя скорость света постоянной, найти новый способ связать теорию тяготения с принципом относительности, но в конце концов и его теория, как ему указывает Эйнштейн (см. примечание при корректуре в конце статьи Нордстрема), не совместима с принципом эквивалентности. Мы видим, что этот последний еще не оценен по существу. Нордстрем говорит: „В этом обстоятельстве я не вижу еще основания для того, чтобы отбросить теорию" (стр. 1129 первой статьи). Фундаментальнейшая идея Эйнштейна еще не усвоена.

В наиболее ясном виде излагает теорию Нордстрема сам Эйнштейн (в статье с Фоккером, 1914 г.). В этой важной работе показывается, что теория Нордстрема отличается от теории Эйнштейна-Гроссмана лишь одним единственным предположением, именно, о возможности выбора преимущественных систем координат, в которых имеет место постоянство скорости света. Вместо десяти компонент $G_{\mu\nu}$ метрического тензора, Нордстрем вводит один лишь скаляр Φ. Соответственно этому вместо 10 гравитационных уравнений в его теории фигурирует одно лишь скалярное уравнение, обобщающее уравнение Пуассона. Это скалярное уравнение Нордстрема Эйнштейн и Фоккер получают непосредственно из своего уравнения $R=\varkappa T$, предполагая, что все $G_{\mu\mu}$ равны Φ^2. Эйнштейн и Фоккер считают теорию Нордстрема лучшей из всех, признающих постоянство скорости света; она допускает ясную тензорную формулировку и удовлетворяет в точности закону эквивалентности тяжелой и инертной массы. Отметим, что в этой работе Эйнштейн впервые оценивает значение тензора Риманна-Кристоффеля 4-го ранга. Несомненно работы Нордстрема сыграли известную роль для построения общей теории относительности.

Развивая теорию гравитации, Эйнштейн убедился, что для этой цели необходим новый математический аппарат в виде тензорного анализа (абсолютное дифференциальное исчисление Риччи и Леви-Чивитта). В 1913—14 гг. появляются две работы Эйнштейна совместно с математиком Марселем Гроссманом (см. ZS. f. Math. und. Phys. **62** и **63** a, 1913—14,

1914—15 гг.). Первая из статей была выпущена и отдельным изданием. Этими статьями начался последний период перед окончательным построением общей теории относительности. Здесь делается в частности важный шаг обобщения уравнения Пуассона путем замены его соответствующим тензорным выражением. Тензорный анализ уже ясно подсказал идею необходимости общей ковариантности всех уравнений, но например в первой из этих статей доказывается лишь инвариантность обобщенного уравнения Пуассона относительно линейных преобразований и во второй статье еще речь идет о выделенных координатных системах. С другой стороны общая мысль об описании метрики фундаментальным тензором, а материи— тензором энергии и о связи этих величин уже имеется налицо. В 1914 г. в руках Эйнштейна уже имеется значительное приближение к окончательной теории в виде уравнения $R=\varkappa T$ (см. выше замечания о его статье с Фоккером), связывающего скаляры тензоров материи и гравитации-кривизны.

„В очень важной работе" Zur allgemeinen Relativitätstheorie, Berliner Berichte, 778, 1915, в которой контуры величественного здания общей теории уже совсем ясны, Эйнштейн пишет в введении, что под влиянием новой критики он убедился, что его предыдущая работа (Berl. Ber., 1066, 1914), в которой в основу была положена Гамильтонова функция, инвариантная относительно линейных преобразований, не верна и ничего общего не имеет с относительностью ускорения. Поэтому, как пишет сам Эйнштейн, он вернулся опять „к требованию общей ковариантности уравнений поля, от которой я, три года назад, во время работы с моим другом Гроссманом, отказался лишь с тяжелым сердцем. В самом деле, мы были тогда уже весьма близки к решению задачи, которое будет дано в настоящей работе. Так же как специальная теория относительности основана на постулате, что ее уравнения должны быть ковариантны относительно ортогональных преобразований, аналогично излагаемая здесь теория покоится на постулате ковариантности всех систем уравнений относительно преобразований с определителем единица. Вряд ли кто-либо сможет остаться равнодушным к очарованию (Zauber) этой теории, однажды овладев ее сущностью; она является истинным триумфом метода абсолютного дифференциального исчисления, основанного Гауссом, Риманом, Кристоффелем, Риччи и Леви-Чивитта".

В § 1 излагаются основы тензорного анализа и вводится тензор Римана-Кристоффеля.

В § 2 пишется уравнение движения точки в гравитационном поле.

В § 3 обсуждается уравнение поля уже в более общем виде, но не окончательном $R_{\mu\nu} = \varkappa T_{\mu\nu}$.

В § 4 Эйнштейн замечает, что относительность движения в самом деле включена в новую теорию, ибо „в число дозволенных преобразований включены и те, которые соответствуют вращению новой системы относительно старой с угловой скоростью, изменяющейся любым образом, а также такие преобразования, при которых начало координат новой системы произвольным образом движется относительно старой системы".

В дополнении к этой статье (стр. 799, 1915, Berl. Ber.) Эйнштейн, ссылаясь на то, что для электромагнитного поля скаляра $T = \Sigma T_{\mu}^{\mu} = 0$, предлагает положить этот скаляр нулю и в общем случае, считая, что для строения материи „играют существенную роль гравитационные поля". Формально уравнение $T = 0$ сводится

к добавочному условию, что $\sqrt{-G} = 1$, ибо тогда мы приходим как раз к уравнению $R_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu}$.

В работе „Об уравнении поля тяготения" (Berl. Ber., 844, 1915) Эйнштейн впервые пишет новые уравнения поля в окончательном виде.

$$R_{im} = -\varkappa\left(T_{im} - \frac{1}{2} G_{im} T\right).$$

В конце статьи Эйнштейн замечает, что „теперь наконец, закончено логическое построение общей теории относительности". Построена совершенно определенная теория тяготения, объясняющая движение перигелия Меркурия. Прежнее же свое мнение, что теория даст что-либо еще новое, Эйнштейн сейчас считает ошибочным, полагая, что любое физическое положение специальной теории относительности можно при помощи тензорного анализа включить в систему общей теории относительности.

В работе о максвелловских уравнениях (Berl. Ber. 184, 1916) Эйнштейн переписывает их в общековариантной форме (что независимо было проделано F. Kottler'ом в Wiener Berichte). В § 2 обсуждается форма законов импульса-энергии. Автору была уже известна работа Лоренца (Koninkl. Akad. von Wetensch. **23**, 1085, 1916). Рядом со статьей Эйнштейна на стр. 189 напечатана знаменитая работа Шварцшильда о точном интегрировании уравнений гравитационного поля. Вторая работа Шварцшильда о гравитационном поле шара из несжимаемой жидкости помещена на стр. 424 Известий Прусской академии за тот же год. В этом же томе на стр. 768 напечатана речь Эйнштейна памяти незадолго до этого скончавшегося от холеры Шварцшильда.

В статье о перигелии Меркурия Эйнштейн (Berl. Ber. 831, 1915), ссылаясь на предыдущую, пишет

„В настоящей работе я вижу важное подтверждение этой наиболее радикальной теории относительности".

После общего анализа движения планет на основании гравитационных уравнений Эйнштейн находит для смещения перигелия формулу $\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)}$, что дает для Меркурия 43″ в столетие. В этой же статье Эйнштейн указывает, что отклонение луча света в поле тяготения должно быть в два раза большим, чем на основании прежних соображений принципа эквивалентности.

В работах „О приближенном интегрировании уравнений поля тяготения" (Berl Ber., 688, 1916) и „О гравитационных волнах" (Berl. Ber., 154, 1918) Эйнштейн исследует гравитационные волны и их испускание механическими системами. Подробный анализ гравитационных волн см. в книге Эддингтона. В конце второй работы помещена дискуссия с Леви-Чивитта относительно трактовки величин t_σ^ν как компонент тензора энергии гравитационного поля — вопрос, который неоднократно диспутировался и впоследствии.

См. статью Эйнштейна „Закон энергии в общей теории относительности" (Berl. Ber., 448, 1918); *E. Schrödinger*, Phys. ZS. **19**, 4, 1918; *H. Bauer*, там же, **19**, 163, 1918; ответ Эйнштейна Шредингеру, там же, **19**, 115, 1918; *G. Nordström*, Amsterdam Proceedings, **26**, 1093, 1917.

Наконец в помещенной в настоящем сборнике статье „Основы общей теории относительности" (Ann. d. Phys. **49**, 760, 1916) теория предстает перед нами в современном виде. Крупнейшие физики-теоретики и математики к этому времени также приняли участие в разработке теории. Особенно важны работы Гильберта, помещенные в Göttinger Nachrichten, 395, 1915

и 417, 1915), разъяснившие ряд важных формальных моментов теории. В смысле общих физических идей Гильберт, к сожалению, стоит на точке зрения теории материи Ми и ограничивает тем самым рамки теории. Интересны также работы Ф. Клейна и Г. А. Лоренца.

Все же в целом идеи новой теории еще далеки от общего признания. В 1916 г. Эйнштейну все еще требуется давать разъяснения по фундаментальным вопросам; одно из них, а именно ответ на критическую статью Котлера (Ann. d. Phys. **50**, 955, 1916), служит новым кратким и чрезвычайно выразительным пояснением его основных идей. Поэтому мы приводим здесь и эту его статью полностью.

К статье Фридриха Котлера „О гипотезе эквивалентности Эйнштейна и тяготении[1]). Из работ, посвященных критике общей теории относительности, особенно интересны статьи Котлера, ибо этот теоретик действительно проникся духом теории. Я хочу остановиться здесь на последней из его работ. Котлер утверждает, что установленный мною „принцип эквивалентности", при помощи которого я стремился объединить в одно понятия „инертной массы" и „тяжелой массы", будто бы отвергнут в моих позднейших работах. Это мнение возникло потому, что мы обозначаем разные вещи словами „принцип эквивалентности"; я полагаю напротив, что вся теория основана на этом принципе. Ввиду подобных разногласий мы снова подчеркнем следующие положения:

„1. *Предельный случай специальной теории относительности.* Пусть в некоторой конечной временно-пространственной области будет отсутствовать гравитационное поле, т. е. пусть будет возможно найти

[1]) Ann. Phys. **51**, 639, 1916.

такую систему отсчета K („галилеевскую систему“), по отношению к которой в указанной области имеет место следующее. Координаты измеряются известным образом с помощью единичного масштаба, интервалы времени измеряются с помощью единичных часов, так, как это принято делать в специальной теории относительности. По отношению к этой системе изолированная материальная точка движется прямолинейно и равномерно, так же, как это было предположено Галилеем.

2. *Принцип эквивалентности.* Исходя из этого предельного случая специальной теории относительности, можно задать себе вопрос, не должен ли наблюдатель, движущийся в рассматриваемой области равномерно по отношению к K, воспринимать свое состояние как ускоренное, или же для него представляется также возможным, в согласии (приближенно) с известными законами природы, рассматривать свое состояние как „покой“. Говоря точнее: позволяют ли известные нам в некотором приближении законы природы рассматривать систему K', двигающуюся равномерно-ускоренно по отношению к системе K, как покоящуюся? Или несколько более общим образом: можно ли обобщить принцип относительности также и на (равномерно) ускоренные друг относительно друга системы отсчета? Ответ гласит: в той мере, в какой нам действительно известны законы природы, ничто не препятствует нам рассматривать систему K' как находящуюся в покое, если только мы допустим существование по отношению к K' (в первом приближении однородного) поля тяготения. В самом деле, так же, как и в однородном поле тяготения, по отношению к нашей системе K' все тела, независимо от их физической природы, падают с одним и тем же ускорением. Предположение, что систему K' можно вполне

строго рассматривать как находящуюся в покое, не нарушая ни одного из законов природы по отношению к системе K', я называю „принципом эквивалентности“.

3. *Поле тяжести определяется не только кинематически.* Предшествующее рассуждение также можно обратить. Пусть рассмотренная выше система K', в которой имеется поле тяжести, будет для нас исходной системой. В таком случае мы можем ввести другую ускоренную относительно K' систему отсчета K, по отношению к которой (отдельные) массы (в рассматриваемой области) движутся прямолинейно и равномерно. Но нельзя идти дальше и утверждать: если K' представляет собою систему отсчета с любым гравитационным полем, то всегда найдется такая система отсчета K, по отношению к которой отдельные массы движутся прямолинейно и равномерно, т. е. по отношению к которой поля тяготения не существует. Абсурдность последнего предположения непосредственно очевидна. Если, например, гравитационное поле по отношению к K' является полем покоящейся материальной точки, то никаким преобразованием, как бы оно ни было хитро придумано, нельзя уничтожить это поле для всей окрестности материальной точки.

Итак, ни в каком случае нельзя утверждать, что гравитационное поле может быть в некотором смысле объяснено чисто кинематически; „чисто кинематическое, не динамическое понимание гравитации“ невозможно. Переходя с помощью одних лишь преобразований от одной галилеевской системы к другой ускоренной, мы узнаем таким образом не *любые* гравитационные поля, но поля совсем специального типа, хотя и эти последние должны удовлетворять тем же законам, как и все прочие гравитационные поля.

Мы встречаем здесь снова лишь новую формулировку принципа эквивалентности (в его специальном применении к тяготению).

Таким образом, теория тяготения противоречит принципу эквивалентности в том смысле, как я его понимаю, только тогда, когда уравнения тяготения не удовлетворяются *ни в одной* из систем отсчета K', двигающихся неравномерно по отношению к некоторой галилеевской системе отсчета. Очевидно, что этот упрек нельзя выдвинуть против моей теории с ее *обще*-ковариантными уравнениями; в самом деле, уравнения сдовлетворены здесь в любой системе отсчета. *Требование общей ковариантности уравнений содержит в себе принцип эквивалентности как совсем частный случай.*

4. *Являются ли силы гравитационного поля „реальными"?* Котлеру не нравится, что я интерпретирую второй член в уравнениях движения

$$\frac{d^2x_\nu}{ds^2} + \sum_{\alpha\beta} \left\{ {\alpha\beta \atop \nu} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 0$$

как выражение для действия поля тяжести на материальную точку, а первый член как в некотором роде выражение для галилеевской инерции. Таким способом как бы вводятся „настоящие силы поля тяжести", что не соответствует духу принципа эквивалентности. На это я отвечаю, что указанное уравнение общековариантно в целом и что поэтому оно во всяком случае удовлетворяет гипотезе эквивалентности. Введенные мной названия отдельных частей уравнения принципиального значения не имеют и применены с единственной целью приблизить их к привычному нам физическому образу мыслей. В частности, это применимо также и к величинам:

$\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} = -\left\{ {\alpha\beta \atop \nu} \right\}$ (компонентам гравитационного поля) и t_σ^ν (компонентам энергии гравитационного поля).

Введение этих названий принципиально является излишним, хотя и представляется мне не бесполезным, по крайней мере, на ближайшее время для сохранения некоторой непрерывности в наших идеях; поэтому я и ввел эти величины, несмотря на то, что они не имеют тензорного характера. Что же касается принципа эквивалентности, то он всегда имеет место, если только уравнения являются ковариантными.

5. Действительно справедливо, что принимая общую ковариантность уравнений, я должен был отказаться от обычного измерения времени и эвклидовского измерения пространства. Котлер полагает, что он сможет обойтись без этой жертвы, но уже в рассмотренном им случае системы K', двигающейся ускоренно в борновском смысле относительно некоторой галилеевской системы, нужно отказаться от обычного измерения времени. Но, в таком случае, с точки зрения теории относительности весьма естественно возникает мысль, что следует отказаться и от обычных измерений пространства. Вне сомнения профессор Котлер сам убедится в необходимости этого, как только он попробует осуществить намеченные им теоретические планы". (Октябрь 1916 г.).

Полемические и разъяснительные замечания небольшой заметки 1918 г., являющейся ответом Кречману (Ann. d. Phys. 55, 243), были одним из последних моментов в построении теории. Здесь Эйнштейн вводит отдельно „принцип Маха", гласящий, что геометрически поле тензора $G_{\mu\nu}$ *целиком* определяется тензором материи.

В последующие годы идеи Эйнштейна понемногу завоевывают признание подавляющего большинства физиков.

В соответствующих курсах (см. например А. С. Эддингтон, „Теория относительности", ГТТИ. Ленинград — Москва, 1934) читатель найдет достаточно указаний на различного рода варианты или формы изложения теории Эйнштейна, а также и на новейшие опытные ее подтверждения астрономическими наблюдениями. Здесь мы отметим только, что в настоящее время астрономические наблюдения *определенно* говорят в пользу теории относительности, хотя вопрос окончательно еще не выяснен ни об одном из трех следствий теории (отклонение света в поле тяготения Солнца, красное смещение линий солнечного спектра, движение перигелия Меркурия). Все возражения против этих подтверждений неизменно разбивались, и не существует ни одной другой теории, которая объясняла бы все три вопроса (или хотя бы один из них) столь непосредственно.

5. *К статьям Эйнштейна: „Принцип Гамильтона и общая теория относительности" (стр. 295); „Вопросы космологического характера в связи с общей теорией относительности" (стр. 304); „Играют ли гравитационные поля существенную роль в построении элементарных материальных частиц?" (стр. 321).*

Последние три статьи в настоящем сборнике показывают те направления, в которых Эйнштейн продолжал развивать свою теорию (статья о принципе Гамильтона), или же те новые проблемы, ключ к разрешению которых можно было надеяться найти в теории относительности (последние две статьи).

По отношению к новым проблемам о строении вселенной и о строении элементарных частиц, общая теория относительности, как показала история физики последних двадцати лет (1915—1935 г.), не оправдала возлагавшихся на нее надежд, надежд не одного Эйнштейна, но и многих других исследователей. Во всяком случае возможности, предоставляемые теорией относительности для разрешения подобных задач, должны были быть с точностью определены в своих границах.

Подобно тому, как общий принцип теории относительности показал границы применения специального принципа, также точно нужно было найти и физические границы общей теории. Эта работа была проделана, или во всяком случае, если не считать проблемы объединения электричества в тяготения, начата самим Эйнштейном. В этом смысле две приведенные в этом сборнике последние статьи его являются естественным дополнением к классическим работам.

СОДЕРЖАНИЕ