Aurel Wintner

Über die Konvergenzfragen der Mondtheorie

Über die Konvergenzfragen der Mondtheorie

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät

der

Universität Leipzig

vorgelegt von

Aurel Wintner

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1929

Angenommen von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der Philosophischen Fakultät auf Grund der Gutachten der Herren Lichtenstein und Bauschinger.

Leipzig, den 23. Januar 1929.

Lichtenstein,
d. Z. Dekan der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der Philosophischen Fakultät.

ISBN 978-3-662-39144-0 ISBN 978-3-662-40127-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-40127-9

Sonderdruck
aus der „Mathematischen Zeitschrift", Band 30, Heft 1—2.

Einleitung.

Der modernen Mondtheorie liegt eine periodische Lösung des Differentialsystems des parallaktenlosen restringierten Dreikörperproblems, die sogenannte Variationskurve zugrunde, die Hill[1]) in einer berühmten Arbeit gefunden hat. Es werden dabei die Koordinaten x und y als Fouriersche Reihen von t angesetzt. Man erhält (durch Vergleichung der Fourierschen Koeffizienten im Differentialsystem) für die Fourierschen Koeffizienten ein unendliches System von Bedingungsgleichungen, die nicht linear und auch nicht von rekursivem Charakter sind, so daß die Fourierschen Koeffizienten *grundsätzlich* nur alle gleichzeitig bestimmt werden können. *Praktisch* geht Hill so vor, daß er in dem System der Bedingungsgleichungen gewisse Terme vernachlässigt, wodurch es einen rekursiven Charakter erhält. In das System der Bedingungsgleichungen geht ein Parameter m ein, der von der — zunächst willkürlich gelassenen — Periode der angesetzten Lösung herrührt (die Fourierschen Reihen werden differentiiert, bevor man die Bedingungsgleichungen erhält). Die Fourierschen Koeffizienten sind, unter Zugrundelegung des (unverkürzten) Systems der Bedingungsgleichungen, nach Potenzen von m zu entwickeln.

Die dabei auftretenden neuartigen Konvergenz- bzw. Existenzfragen, die den sich auf endliche Systeme beziehenden Cauchyschen Untersuchungen[2]) nicht zugänglich sind, mußte Hill ausdrücklich[3]) offen lassen; seine kühne Methode wurde nur durch den numerischen Erfolg gerechtfertigt:

---

[1]) G. W. Hill, Coll. Math. Works **1**, Washington 1905, S. 284–335.

[2]) Nach einer Bemerkung von H. v. Koch kann z. B. die Cauchysche Majorantenmethode unmittelbar auf *gewisse* unendliche Systeme übertragen werden. Doch liegt das Hillsche System wohl außerhalb der Tragweite der sehr speziellen Sätze, die auf diese Weise überhaupt erhalten werden können. Methodische Bemerkungen findet man in meinen Aufsätzen Math. Annalen **95** (1926), S. 544–556; **98** (1927), S. 273 bis 280; Math. Zeitschr. **28** (1928), S. 451–470.

[3]) Vgl. Hill, a. a. O. S. 287.

"I regret that, on account of the difficulty of the subject and the length of investigation it seems to require, I have been obliged to pass over the important questions of the limits between which the series are convergent, and of the determination of superior limits to the errors committed in stopping short at definite points. There can not be a reasonable doubt that, in all cases, where we are compelled to employ infinite series in the solution of a problem, analysis is capable of being perfected to the point of showing us within what limits our solution is legitimate, and also of giving us a limit which its error cannot surpass. When the coordinates are developed in ascending powers of the time, or in ascending powers of a parameter attached as a multipler to the disturbing forces, certain investigations of Cauchy afford us the means of replying to these questions. But when, for powers of the time, are substituted circular functions of it, and the coefficients of there are repanded in powers and products of certain parameters produced from the combination of the masses with certain of the arbitrary constants introduced by integration, it does not appear that anything in the writings of Cauchy will help us to the conditions of convergence."

Vor einiger Zeit habe ich diese Lücken z. T. ausgefüllt[4]), und zwar unter direkter Zugrundelegung eines passenden allgemeinen Existenzsatzes über unendliche Systeme von impliziten Gleichungen, der die gesuchten Funktionen (d. h. die Fourierschen Koeffizienten) für hinreichend kleine Werte von $|m|$ nicht nur festzulegen und anzugeben, sondern auf passende Weise, nämlich derart abzuschätzen gestattet hat, daß daraus die Existenz und die zweimal stetige Differentiierbarkeit der für die Koordinaten angesetzten Fourierschen Reihen geschlossen werden konnte. Damit war für hinreichend kleine Werte von $|m|$ die Zulässigkeit des Hillschen Verfahrens sichergestellt, und zwar auf demselben rechnerischen Wege, auf welchem bei Hill die numerische Behandlung erfolgt. Denn der Beweis jenes Existenzsatzes ist, im Anschluß an E. Lindelöf, nur die primitive Konstruktion der Lösung auf Grund der Methode des unbestimmten Koeffizienten der Maclaurinschen Reihen, die auch von Hill verwendet wird[5]). — Herr E. Hölder hat inzwischen gefunden, daß die Existenz

[4]) A. Wintner, Math. Zeitschr. **24** (1925), S. 259–265; vgl. Astr. Nachr. **223** (1925), S. 232–237.

[5]) Es sind bekanntlich auch andere periodische Lösungen in der Mondtheorie untersucht worden, sowie periodische Lösungen, von denen anzunehmen ist, daß sie mit der Hillschen Variationskurve identisch sind, trotzdem sie unter Zugrundelegung von anderen Parametern oder Koordinaten erhalten worden sind. Vgl. G. W. Hill, loc. cit.[1]) 4, S. 78–93; A. Liapounoff, Fortschritte der Math. **26** (1895), S. 1103; F. R. Moulton, Transact. of Amer. Math. Soc. **7** (1906), S. 537 ff., insb. S. 566.

der Variationskurve für hinreichend kleine Werte von $|m|$ auch unter Zugrundelegung der Lichtensteinschen Methoden sichergestellt werden kann.

Diese Ergebnisse lassen die Frage offen, ob die Variatiationskurve noch auch bei demjenigen Werte von m existiert, der bei dem Erdmond vorliegt, d. h. ob dieser Wert „hinreichend klein“ ist. Unlängst habe ich, anläßlich einer wesentlich weitergehenden Untersuchung [6]), gefunden, daß diese Frage zu bejahen ist. Ich habe nämlich die Fourierschen Koeffizienten, die durch die Maclaurinschen Reihen zunächst vielleicht nur für sehr kleine Werte von $|m|$ dargestellt werden, auf Grund der Bedingungsgleichungen analytisch fortgesetzt, zugleich passend abgeschätzt und dabei den zum Erdmond gehörigen Wert wesentlich überschritten. Es fragt sich nun, ob zum Existenzbeweis der Variationskurve des Erdmondes die analytische Fortsetzung nicht überflüssig ist, d. h. im wesentlichen, ob der zum Erdmond gehörige Wert von m noch im Innern des gemeinsamen Konvergenzkreises der Maclaurinschen Reihen der Fourierschen Koeffizienten liegt.

Ich werde hier diese Frage bejahend beantworten und so beweisen, daß die Hillschen Reihen für den Fall des Erdmondes konvergent sind. Es ergeben sich daraus unmittelbar auch die Fehlerabschätzungen, die von Hill in den oben zitierten Zeilen verlangt werden.

Außer jenem Existenzsatz über unendliche Gleichungssysteme ist dabei die folgende Riemannsche Bemerkung [7]) von Wichtigkeit: Sind $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ Fouriersche Reihen derart, daß der n-te Fouriersche Koeffizient sowohl bei φ_1 als auch bei φ_2 gleich $O(|n|^{-\delta})$; $\delta > 1$ ist, so ist [8]) der n-te Fouriersche Koeffizient des Produktes $\varphi_1 \varphi_2$ ebenfalls $= O(|n|^{-\delta})$. Anders ausgedrückt: Die Summe

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \left| \frac{n}{k(n-k)} \right|^{\delta} \qquad (\delta > 1),$$

wobei die Summationszeiger $k = 0$ und $k = n$ auszulassen sind, bleibt unterhalb einer nur von δ abhängigen, also von n unabhängigen Schranke [9]).

Ist einmal die mathematische Grundlage für die Variationskurve gewonnen, die von Hill loc. cit. berechnet wurde, so gilt dies auch von seiner

---

[6]) A. Wintner, Math. Zeitschr. **28** (1928), S. 430–450.

[7]) B. Riemann, Ges. Werke, 2. Aufl. (1892), S. 250; vgl. Lütkemeyer, Diss. Göttingen 1902.

[8]) Der Satz gilt bekanntlich auch dann, wenn anstatt O durchweg o gelesen wird, sofern nur eine kleine Zusatzbedingung hinzukommt. Vgl. A. Zygmund, Math Zeitschr. **24** (1925), S. 49, insb. die Fußnote [4]).

[9]) Vgl. A. Wintner, Math. Annalen **96** (1926), S. 309–311.

Perigäumstheorie[10]). Denn Hill stützt sich dort außer auf die Variationskurve nur auf seine Theorie der unendlichen Determinanten bzw. der charakteristischen Exponenten, die seit den Untersuchungen von Poincaré[11]) mathematisch in vollkommen befriedigender Weise begründet ist. Numerische Verhältnisse kommen dabei, im Gegensatz zu der Untersuchung der Variationskurve, überhaupt nicht in Betracht, da ja das Problem ein lineares (und übrigens ein Eigenwertproblem[12])) ist. — Entsprechendes gilt bei der Berücksichtigung der Parallaxe[13]). Denn die Brownsche periodische Lösung[14]), bei der auch die Parallaxe berücksichtigt wird, läßt sich, wie man sich leicht überzeugt, mit meiner Methode ebenso behandeln wie die Hillsche Variationskurve, die zur Parallaxe Null gehört. Nur hat man sodann um einen Parameter mehr (nämlich außer m auch die Parallaxe), was jedoch keinerlei Schwierigkeit verursacht[15]).

Was endlich die höheren Potenzen etwa der Exzentrizität anlangt, wie diese in der Brownschen Theorie[16]) berechnet werden — die Theorie der charakteristischen Exponenten behandelt nur die erste Potenz des jeweiligen „störenden", d. h. neu hinzugefügten Integrationsparameters — so ist dabei nicht mehr von periodischen Lösungen und überhaupt nicht von einer Theorie mit unendlich vielen Veränderlichen die Rede, sondern nur von einer sinngemäßen Umschreibung der gewöhnlichen schrittweisen Annäherungen bzw. des Linstedt-Poincaréschen Verfahrens. Es werden dabei beim k-ten Schritt offenbar nur die Terme k-ter Ordnung behandelt und die Terme der ersten $k-1$ Ordnungen festgehalten, trotzdem der k-te Schritt auf den $(k-1)$-ten zurückwirkt. Man hat es also nicht etwa mit einer *fertigen* Reihe zu tun, und die übliche Behauptung, wonach die Reihen das Differentialsystem zumindest formal befriedigen, ist wohl nur cum grano salis zu verstehen. Man hat ja überhaupt keine „Reihe", sondern nur einen unendlichen Prozeß[17]) von ineinandergeschachtelten Reihen. Wird also die Rückwirkung des k-ten Schrittes auf den $(k-1)$-ten nicht berücksichtigt, so dürfte der Prozeß, *wenn* er konvergieren würde, das Differentialsystem gewiß gar nicht befriedigen. Daß das Verfahren dennoch

---

[10]) G. W. Hill, loc. cit. [1]), S. 243—270.

[11]) H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste **2** (1893), S. 260 bis 270 oder loc. cit. [16]), S. 49—56.

[12]) Vgl. eine Bemerkung von mir in der Zeitschr. f. Phys. **48** (1928), S. 151.

[13]) Vgl. G. W. Hill, loc. cit. [1]), **4**, S. 153—168.

[14]) E. W. Brown, Amer. J. of Math. **14** (1893), S. 141—160.

[15]) Vgl. loc. cit. [9]), S. 284 ff.

[16]) Siehe etwa E. W. Brown, Amer. J. of Math. **17** (1895), S. 318—358; H. Poincaré, Leçons de mécanique céleste **2**, 2 (1909), S. 77—109.

[17]) Vgl. loc. cit. [15]), sowie Astr. Nachr. **224** (1925), S. 7—10.

zu großen praktischen Erfolgen geführt hat, beruht einerseits auf dem besonderen, beim Erdmond vorliegenden numerischen Verhältnissen des dynamischen Systems, andererseits aber sehr wesentlich auf der Möglichkeit, die immer wieder neu eintretenden verfügbaren Integrationskonstanten im Einklang z. B. mit der Delaunayschen Mondtheorie und mit der Erfahrung zu deuten und festzulegen. Es ist freilich — abweichend von der Brownschen Mondtheorie — sehr wohl möglich, die Differentialgleichungen unter Benutzung der Theorie der unendlich vielen Veränderlichen formal wirklich zu befriedigen[18]), und zwar auch dann, wenn der charakteristische Exponent irrational ist. Doch muß man dann die mondtheoretische Konstantendeutung preisgeben, indem nämlich die Terme auf eine andere Weise gruppiert werden[18]). Aber auch rein mathematisch wäre damit z. Z. nicht viel gewonnen. Einem Konvergenzbeweise stehen nämlich, wie aus meiner zitierten Annalenarbeit hervorgeht, die aus der Methode der allgemeinen Störungen bekannten Integrationsdivisoren[19]) im Wege, die hier eigentlich als Differentiationsdivisoren erscheinen[20]).

§ 1.

Die von Hill zugrunde gelegten Differentialgleichungen sind:

$$(1)\qquad \ddot{x} - 2\dot{y} + \frac{x}{r^3} = 3x; \qquad \ddot{y} + 2\dot{x} + \frac{y}{r^3} = 0 \qquad (r^2 = x^2 + y^2),$$

wobei x und y die kartesischen Koordinaten des parallaktenlosen Mondes in einem geozentrischen Achsenkreuz bezeichnen, in welchem die Sonne ruht, indem die konstante Drehgeschwindigkeit gleich der mittleren Bewegung der Sonne gewählt ist. Die Einheiten sind so festgelegt wie bei Hill, dessen Ansatz der folgende ist:

$$(2)\qquad x = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \cos(2i+1)\tau; \qquad y = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \sin(2i+1)\tau.$$

Hierbei ist

$$\tau = \frac{t}{m},$$

ferner

$$m = \frac{n'}{n - n'}$$

gesetzt, wobei n' die mittlere Bewegung der Sonne, n diejenige des Mondes (bezogen auf ein ruhendes Achsenkreuz) bezeichnet, so daß bei dem Erdmond

[18]) Vgl. meine unter [9]) zitierte Arbeit.

[19]) Z. B. H. Poincaré, loc. cit. [11]), S. 94—99.

[20]) Loc. cit. [9]), S. 303.

der Periodenquotient m etwas kleiner als $^1/_{12}$ ausfällt:

$$m_0 = 0{,}08084\ldots \tag{3}$$

Die Aufgabe ist, die Funktionen $a_i(m) = a_i$ derart zu bestimmen, daß durch (2) eine Lösung von (1) geliefert wird. Zu diesem Ende muß nach Hill das folgende System von Bedingungsgleichungen befriedigt werden:

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} [j, i]\, a_i a_{i-j} + [j] \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i a_{-i+j-1} + (j) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i a_{-i-j-1} = 0 \tag{4}$$

$$\text{für} \quad j = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

während dem Zeiger $j = 0$ die Beziehung

$$\left\{ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \right\}^2 = \frac{1}{\sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} \left\{ \{2i + 1 + m\}^2 + 2m^2 \right\} a_i} \tag{5}$$

entspricht, welche die Rolle einer „Verzweigungsgleichung" hat. Die Klammerausdrücke in (4) sind rationale Funktionen von m mit absoluten Koeffizienten:

$$[j, i] = -\frac{i}{j} \frac{4(j-1)i + 4j^2 + 4j - 2 - 4(i - j + 1)m + m^2}{2(4j^2 - 1) - 4m + m^2}, \tag{6}$$

$$[j] = -\frac{3m^2}{16j^2} \frac{4j^2 - 8j - 2 - 4(j+2)m - 9m^2}{2(4j^2 - 1) - 4m + m^2}, \tag{7}$$

$$(j) = -\frac{3m^2}{16j^2} \frac{20j^2 - 16j + 2 - 4(5j - 2)m + 9m^2}{2(4j^2 - 1) - 4m + m^2}. \tag{8}$$

Das System (4) ist homogen, indem es in einer Gestalt geschrieben werden kann, in welche nur die Verhältnisse $\frac{a_j}{a_0}$ eingehen; vgl. (10) und (11). Dementsprechend kann man die Verzweigungsgleichung (5) zunächst beiseite lassen. Es soll bis zum § 8 angenommen werden, daß $j \neq 0$ ist, so daß es sich nur um die eigentlichen Bedingungsgleichungen (4) handelt.

Wegen (6) ist $[j, j] = -1$ und $[j, 0] = 0$, also wegen (4)

$$a_0 a_j = \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' [j, i]\, a_i a_{i-j} + [j] \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i a_{-i+j-1} + (j) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i a_{-i-j-1}, \tag{9}$$

wobei der Apostroph neben dem ersten Summenzeichen die Auslassung der beiden Summationszeiger $i = 0$ und $i = j$ bedeutet. Ich führe nun in (9) die Substitution

$$a_j = m\, a_0 \frac{b_j}{j^2} \qquad (j = \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{10}$$

ein und multipliziere die so erhaltene j-te Gleichung mit $\frac{j^2}{m a_0^2}$, so daß (9) in

$$(11) \qquad b_j = m \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' [j, i] \frac{j^2}{i^2 (i-j)^2} b_i b_{i-j} + [j] \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{a_i}{a_0} \frac{a_{-i+j-1}}{a_0} \frac{j^2}{m}$$
$$+ (j) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{a_i}{a_0} \frac{a_{-i-j-1}}{a_0} \frac{j^2}{m} \qquad (j = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

übergeht. In der Tat kann in der ersten Summe (9), wegen $i \neq 0$ und $i \neq j$, weder a_i noch a_{i-j} gleich a_0 ausfallen; vgl. (10). Anders steht es, wegen (10), bei der zweiten und der dritten Summe in (11), so daß sie nicht mehr quadratische Formen, sondern quadratische Polynome der unendlich vielen Veränderlichen b_j sind.

Es ist übrigens wesentlich, daß es in (11) rechterhand einen Term gibt, der in den b_j nicht einmal linear, sondern von diesen unabhängig ist. Sonst würde nämlich jedes b_j nicht nur für $m = 0$, sondern identisch verschwinden, so daß die gesuchte periodische Lösung nicht vorhanden, bzw. die Substitution (10) nicht erlaubt wäre. Denn zunächst ist (11) wegen (6), (7), (8) und (10) von der Form

$$(12) \qquad b_j = m f_j(m; b_1, b_{-1}, b_2, b_{-2}, \ldots) \qquad (j = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

wobei die Potenzreihe f_j keine negativen Potenzen der unendlich vielen Argumente enthält. Sie kann ferner „passend" abgeschätzt werden [vgl. weiter unten (43)], so daß es nur eine, nach Potenzen von m fortschreitende Lösung geben kann[21]). Würde nun kein f_j ein konstantes Glied enthalten, so wäre $b_j(m) \equiv 0$; $j = \pm 1, \pm 2, \ldots$ eine, also die einzige Lösung von der gesuchten Art, q. e. d.

Es ist nicht schwer, die Terme anzugeben, die von den b_j unabhängig sind. In der zweiten Summe (11) muß hierfür (wenn alles zusammengezogen wird, was zusammengezogen werden kann)

$$(13\text{a}) \qquad i = 0, \quad -i + j - 1 = 0,$$

in der dritten aber

$$(13\text{b}) \qquad i = 0, \quad -i - j - 1 = 0$$

gesetzt werden, d. h.

$$(13\alpha) \qquad j = 1, \quad i = 0,$$

bzw.

$$(13\beta) \qquad j = -1, \quad i = 0.$$

---

[21]) Vgl. loc. cit. [4]).

Also nur in der $(+1)$-ten und in der (-1)-ten Gleichung gibt es ein konstantes Glied, und beidemal nur ein einziges; vgl. (7), (8). Die übrigen Gleichungen kommen, wie man leicht einsieht, erst bei der Berechnung der beziehentlich *m höheren* Glieder in Betracht, während in den beiden ersten Gleichungen (12) die konstanten „Hauptterme" beziehentlich *m lineare* Glieder der Maclaurinschen Reihe $b_1(m)$ bzw. $b_{-1}(m)$ ergeben. Dem entspricht es, daß bei der für unsere Zwecke notwendigen numerischen Abschätzung der f_j die beiden Hauptterme die eigentliche Schwierigkeit verursachen und eine allzu weitgehende Abschätzung überhaupt zu verhindern scheinen.

§ 2.

Um (11) in (12) überzuführen, hat man

$$f_j = \frac{F_j}{\omega_j}, \tag{14}$$

$$\omega_j = 1 - \frac{4m - m^2}{2(4j^2 - 1)}, \tag{15}$$

$$F_j = \Phi_j + \Psi_j + \Lambda_j, \tag{16}$$

$$\Phi_j = \omega_j \varphi_j, \qquad \Psi_j = \omega_j \psi_j, \qquad \Lambda_j = \omega_j \lambda_j, \tag{17}$$

$$\varphi_j = \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' [j, i] \frac{j^2}{i^2 (j-i)^2} b_i b_{i-j}, \tag{18}$$

$$\psi_j = [j] \frac{j^2}{m^2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{a_i a_{-i+j-1}}{a_0 a_0}, \tag{19}$$

$$\lambda_j = (j) \frac{j^2}{m^2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{a_i a_{-i-j-1}}{a_0 a_0} \tag{20}$$

zu setzen. Hierbei sind $\varphi_j, \psi_j, \lambda_j$ Funktionen von $m; b_1, b_{-1}, \ldots,$ während ω_j nur von m abhängig ist.

Um das System (12) meinem zitierten Existenzsatz unterwerfen zu können, hat man alle $\bar{f}_j(\alpha; \beta, \beta, \ldots)$ abzuschätzen[22]). Hierbei ist $\alpha > 0$, $\beta > 0$ und $\bar{f}_j(m; b_1, b_{-1}, \ldots)$ die beste Majorante der Potenzreihe $f_j(m; b_1, b_{-1}, \ldots)$, d. h. die Potenzreihe, in welche f_j übergeht, wenn man darin die Glieder, die zusammengezogen werden können, zusammenzieht und sodann die Koeffizienten durch ihre Beträge ersetzt. In $\bar{f}_j(\alpha; \beta, \beta, \ldots)$

[22]) Es gelten jedoch auch weitergehende Sätze. Vgl. Math. Zeitschr. **28** (1928), S. 451—470.

sind alle $b_j = \beta$ gesetzt. Aus Gründen, die später ersichtlich sein werden, dürfen wir $\alpha = \frac{1}{12}$, $\beta = \frac{1}{3}$, also

$$(21) \qquad |m| \leqq \frac{1}{12}, \quad |b_j| \leqq \frac{1}{3} \qquad (j = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

annehmen.

§ 3.

In den §§ 4, 5, 6 sollen bzw. die Zahlen

$$\overline{\Phi}_j\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots\right), \quad \overline{\Psi}_j\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots\right), \quad \overline{\Lambda}_j\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$$
$$(j = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

abgeschätzt werden. In § 7 erfolgt die besondere Behandlung der Hauptterme, endlich in § 8 der Konvergenzbeweis.

Zunächst sollen die folgenden Ungleichheiten bewiesen werden:

$$(22) \qquad \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(i-j)^2} < \frac{10}{3}; \quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{j^2}{i^2(j-i)^2} < 17;$$

$$(23) \qquad \overline{\omega}_j^{-1}\left(\frac{1}{12}\right) \leqq \frac{16}{15}.$$

Hierbei sind aus den Summationen (22) die Zeiger $i = 0$ und $i = j$ auszulassen; j ist eine beliebige, von Null verschiedene ganze Zahl. $\omega_j(m)$ ist die unter (15) erklärte quadratische Funktion und $\overline{\omega}_j^{-1}(m)$ die beste Majorante der Maclaurinschen Reihe der gebrochenen rationalen Funktion $\frac{1}{\omega_j(m)}$.

Die erste Ungleichheit (22) folgt wegen $\pi^2 < 10$ aus

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(i-j)^2} < 2\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} = 2\frac{\pi^2}{6},$$

die zweite braucht aus Symmetriegründen nur für $j > 0$ bewiesen zu werden. Für $1 \leqq i \leqq \left[\frac{j-1}{2}\right]$ ist aber $0 < \frac{i}{j} \leqq \frac{1}{2}$, also

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]} \frac{j^2}{i^2(i-j)^2} = \sum_{i=1}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]} \frac{1}{i^2\left(1-\frac{i}{j}\right)^2} \leqq \sum_{i=1}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]} \frac{1}{\left(\frac{i}{2}\right)^2} < 4\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2},$$

und für $i \geqq \left[\frac{j+1}{2}\right] > 0$ gilt $\frac{i}{j} \geqq \frac{1}{2}$, also

$$(*)\qquad \sum_{i=\left[\frac{j+1}{2}\right]}^{j-1}\frac{j^2}{i^2(i-j)^2}=\sum_{i=\left[\frac{j+1}{2}\right]}^{j-1}\frac{1}{\left(\frac{i}{j}\right)^2(i-j)^2}\leqq\sum_{i=\left[\frac{j+1}{2}\right]}^{i-1}\frac{1}{\frac{1}{2^2}(i-j)^2}<4\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^2},$$

während für $i>j$ genauer $\frac{i}{j}>1$, also

$$(*)\qquad \sum_{i=j+1}^{+\infty}\frac{j^2}{i^2(i-j)^2}<\sum_{i=j+1}^{+\infty}\frac{1}{(i-j)^2}=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^2},$$

endlich offenbar

$$(*)\qquad \sum_{i=-\infty}^{-1}\frac{j^2}{i^2(i-j)^2}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{j^2}{i^2(i+j)^2}<\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^2}\qquad (j>0)$$

behauptet werden kann. Durch Addition der vier mit (*) bezeichneten Ungleichheiten (die erste steht auf der vorigen Seite) folgt

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{j^2}{i^2(i-j)^2}<(4+4+1+1)\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^2}=10\frac{\pi^2}{6}<\frac{100}{6}<17,$$

womit auch die zweite Abschätzung (22) bewiesen ist.

Setzt man

$$\sigma_j(\xi,\eta)=\frac{4\xi}{2(4j^2-1)}+\frac{-\eta^2}{2(4j^2-1)},$$

so daß wegen (15)

$$\varrho_j(m,m)=\omega_j^{-1}(m)$$

gilt, wenn

$$\varrho_j(\xi,\eta)=\frac{1}{1-\sigma_j(\xi,\eta)}$$

gesetzt wird, so hat man zunächst

$$\bar{\sigma}_j\left(\frac{1}{12},\frac{1}{12}\right)\leqq\frac{1}{2(4j^2-1)}\left(\frac{4}{12}+\frac{1}{144}\right),$$

also wegen $2(4j^2-1)\geqq 2(4-1)=6$:

$$\bar{\sigma}_j\left(\frac{1}{12},\frac{1}{12}\right)\leqq\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{144}\right)<\frac{1}{18}+\frac{1}{800}<\frac{1}{16}\left(=\frac{1}{18}+\frac{1}{144}\right).$$

Es ist ferner für $|\xi|\leqq\frac{1}{12}$, $|\eta|\leqq\frac{1}{12}$

$$|\varrho_j(\xi,\eta)|\leqq\frac{1}{1-\frac{1}{16}}=\frac{16}{15},$$

also auch

$$\bar{\omega}_j^{-1}\left(\frac{1}{12}\right)\leqq\bar{\varrho}_j\left(\frac{1}{12},\frac{1}{12}\right)\leqq\frac{16}{15}.$$

Denn die Maclaurinsche Reihe von $\sigma_j(\xi,\eta)$ hat ebenso viele Glieder wie Variablen, und jedes Glied enthält eine andere Variable. Damit ist (23) bewiesen.

§ 4.

Wegen (17), (18), (16), (6) ist

$$
(24)\quad \Phi_j = \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \left\{ -\frac{i}{j}\,\frac{4(j-1)i}{2(4j^2-1)}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2} - \frac{i}{j}\,\frac{4j^2+4j}{2(4j^2-1)}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2} + \frac{i}{j}\,\frac{2}{2(4j^2-1)}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2} \right\} b_i b_{i-j}
$$

$$
+ m \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \left\{ \frac{i}{j}\,\frac{4i}{2(4j^2-1)}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2} - \frac{i}{j}\,\frac{4j}{2(4j^2-1)}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2} \right\} b_i b_{i-j}
$$

$$
+ (m+m^2) \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{i}{j}\,\frac{1}{2(4j^2-1)}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2}\, b_i b_{i-j}
$$

$$
\equiv \Phi_{j1} + \Phi_{j2} + \Phi_{j3}.
$$

Wir behandeln zunächst Φ_{j2} und Φ_{j3}. Es ist wegen $j \neq 0$ und $i \neq 0$

$$
\left| \frac{i}{j}\,\frac{4i}{2(4j^2-1)}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2} \right| = 2 \left| \frac{j}{4j^2-1} \right| \frac{1}{(i-j)^2} \leqq 2\,\frac{1}{4-1}\,\frac{1}{(i-j)^2} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{(i-j)^2},
$$

$$
\left| -\frac{i}{j}\,\frac{4j}{2(4j^2-1)}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2} \right| = \left| \frac{2}{i} \right| \left| \frac{j^2}{4j^2-1} \right| \frac{1}{(i-j)^2} \leqq \frac{2}{1}\,\frac{1}{4-1}\,\frac{1}{(i-j)^2} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{(i-j)^2},
$$

$$
\left| \frac{i}{j}\,\frac{1}{2(4j^2-1)}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2} \right| = \left| \frac{1}{2i} \right| \left| \frac{j}{4j^2-1} \right| \frac{1}{(i-j)^2} \leqq \frac{1}{2\cdot 1}\,\frac{1}{4-1}\,\frac{1}{(i-j)^2} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{(i-j)^2},
$$

also wegen (22)

$$
(25)\quad \overline{\Phi}_{j2}\left(\frac{1}{12};\frac{1}{3},\frac{1}{3},\ldots\right) + \overline{\Phi}_{j3}\left(\frac{1}{12};\frac{1}{3},\frac{1}{3},\ldots\right)
$$

$$
\leqq \frac{1}{12} \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) \frac{\frac{1}{3^2}}{(i-j)^2} + \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12^2}\right) \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{6}\,\frac{1}{3^2}\,\frac{1}{(i-j)^2}
$$

$$
= \left[\frac{4}{3}\,\frac{1}{12} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{144}\right)\right] \frac{1}{9} \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(i-j)^2} < \left[\frac{1}{9}+\frac{1}{72}+\frac{1}{800}\right] \frac{1}{9}\,\frac{10}{3}
$$

$$
= \left[\frac{1}{8}+\frac{1}{800}\right] \frac{10}{27} = \frac{10}{216} + \frac{10}{21600} < \frac{10}{200} = \frac{1}{20}.
$$

Es ist ferner

$$\left|-\frac{i}{j}\,\frac{4(j-1)i}{2(4j^2-1)}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2}\right| = 2\left|\frac{j}{2j+1}\right|\left|\frac{j-1}{2j-1}\right|\frac{1}{(i-j)^2}$$

$$\leqq 2\left|\frac{-1}{-2+1}\right|\left|\frac{-1-1}{-2-1}\right|\frac{1}{(j-i)^2} = \frac{4}{3}\,\frac{1}{(i-j)^2},$$

$$\left|-\frac{i}{j}\,\frac{4j^2+4j}{2(4j^2-1)}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2}\right| = 2\left|\frac{j+1}{2j+1}\right|\left|\frac{j}{2j-1}\right|\left|\frac{j}{i}\,\frac{1}{(j-i)^2}\right|$$

$$\leqq 2\left|\frac{1+1}{2+1}\right|\left|\frac{1}{2-1}\right|\left|\frac{j}{i}\,\frac{1}{(j-i)^2}\right| = \frac{4}{3}\left|\frac{j}{i}\,\frac{1}{j-i}\right|\left|\frac{1}{j-i}\right|$$

$$\leqq \frac{2}{3}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{(j-i)^2} \quad \left(\text{wegen } |AB| \leqq \frac{1}{2}|A|^2 + \frac{1}{2}|B|^2\right),$$

$$\left|\frac{i}{j}\,\frac{2}{2(4j^2-1)}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2}\right| \leqq \left|\frac{1}{i}\right|\left|\frac{j}{4j^2-1}\right|\frac{1}{(j-i)^2} \leqq \frac{1}{1}\,\frac{1}{4-1}\,\frac{1}{(j-i)^2} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(j-i)^2},$$

also wegen (22) und (24)

$$(26) \qquad \bar{\Phi}_{j1}\left(\frac{1}{12};\frac{1}{3},\frac{1}{3},\ldots\right)$$

$$\leqq \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}'\left\{\frac{4}{3}\,\frac{1}{(i-j)^2} + \frac{2}{3}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{(i-j)^2} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(i-j)^2}\right\}\frac{1}{3^2}$$

$$= \frac{7}{3}\,\frac{1}{9}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{1}{(i-j)^2} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{9}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{j^2}{i^2(j-i)^2} < \frac{7}{3}\,\frac{1}{9}\,\frac{10}{3} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{9}\,17$$

$$= \frac{70}{81} + \frac{102}{81} = 2 + \frac{10}{81} < 2 + \frac{3}{20}.$$

Aus (24), (25), (26) folgt

$$(27) \qquad \bar{\Phi}_j\left(\frac{1}{12};\frac{1}{3},\frac{1}{3},\ldots\right) < \frac{1}{20} + 2 + \frac{3}{20} = 2 + \frac{1}{5}.$$

§ 5.

Wir gehen zu Ψ_j über. Bezeichnen zwei Apostrophe neben einem Summenzeichen:

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}''$$

die Auslassung der beiden Summationswerte $i=0$ und $i=j-1$, setzt man ferner

$$(28) \qquad \Psi_j^* = -\frac{3m^2}{16}\,\frac{4j^2-8j-2-4(j+2)m-9m^2}{2(4j^2-1)}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}''\frac{b_i b_{-i+j-1}}{i^2(-i+j-1)^2},$$

so ist wegen (17), (19), (15), (7), (10)

$$(29)\qquad \Psi_j = \Psi_j^* - \frac{3m^2}{16}\,\frac{4j^2-8j-2-4(j+2)m-9m^2}{2(4j^2-1)}\,\frac{a_{j-1}}{a_0}\,\frac{2}{m^2}.$$

Da der Quotient

$$\left|\frac{4j^2-8j-2}{2(4j^2-1)}\right| = \left|\frac{2j^2-4j-1}{4j^2-1}\right|$$

seinen Höchstwert für $j = -1$ annimmt, so ist er

$$\leqq \frac{2+4-1}{4-1} = \frac{5}{3}.$$

Es gilt ferner wegen (21)

$$\left|\frac{-4(j+2)m}{2(4j^2-1)}\right| = 2\,|m|\left|\frac{j+2}{4j^2-1}\right| \leqq 2\,|m|\,\frac{1+2}{4-1} = 2\,|m| \leqq \frac{1}{6}$$

und

$$\left|\frac{-9m^2}{2(4j^2-1)}\right| \leqq \frac{9}{2}\,|m|^2\,\frac{1}{4-1} = \frac{3}{2}\,|m|^2 \leqq \frac{3}{2}\,\frac{1}{12^2} = \frac{1}{96},$$

endlich

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}'' \frac{|b_i b_{-i+j-1}|}{i^2(-i+j-1)^2} < \frac{1}{3^2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}'' \frac{1}{(-i+j-1)^2} < \frac{2}{9}\,\frac{10}{6} < \frac{1}{2},$$

also wegen (28)

$$(30)\qquad \overline{\Psi}_j^*\left(\frac{1}{12};\frac{1}{3},\frac{1}{3},\ldots\right) < \frac{3}{16}\,\frac{1}{12^2}\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{96}\right)\frac{1}{2} < \frac{3}{16}\,\frac{1}{144} < \frac{1}{600}.$$

Für $j \neq 1$ ist nach (10)

$$\frac{a_{j-1}}{a_0} = m\,\frac{b_{j-1}}{(j-1)^2}.$$

Wegen $\frac{1}{(j-1)^2} \leqq 1$ folgt daher aus (29), daß die beste Majorante von $\Psi_j - \Psi_j^*$ bei allen $j \neq 1$ für $|m| \leqq \frac{1}{12}$ und $|b_{j-1}| \leqq \frac{1}{3}$ dem Betrage nach

$$< \frac{3}{16}\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{96}\right)\frac{1}{12}\,\frac{1}{2}\,2 < \frac{3}{16}\,\frac{1}{6} = \frac{1}{32}$$

ausfällt, also, wegen (30), (28) und (29),

$$(31)\qquad \overline{\Psi}_j\left(\frac{1}{12};\frac{1}{3},\frac{1}{3},\ldots\right) < \frac{1}{32}+\frac{1}{600} < \frac{1}{10}\qquad (j \neq 1)$$

gilt. Für $j = 1$ folgt aus (29) wegen $\frac{a_0}{a_0} = 1$ nur

$$|\Psi_1 - \Psi_1^*| \leqq \frac{3}{16}\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{96}\right)2 < \frac{3}{8}\left(2-\frac{1}{25}\right) = \frac{3}{4} - \frac{3}{200} < \frac{3}{4} - \frac{1}{600},$$

also, wegen (30) und da $\Psi_1 - \Psi_1^*$ ein Monom ist, offenbar

$$(32)\qquad \overline{\Psi}_1\left(\frac{1}{12};\frac{1}{3},\frac{1}{3},\ldots\right) < \frac{3}{4}.$$

§ 6.

Die Potenzreihe Λ_j läßt sich ebenso wie Ψ_j behandeln, nur ist dabei nicht $j=1$, sondern $j=-1$ auszuzeichnen. Bedeutet das Zeichen

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}''',$$

daß $i \neq 0$ und $i \neq -j-1$ ist, wird ferner

$$\Lambda_j^* = -\frac{3}{16}m^2\,\frac{20j^2-16j+2-4(5j-2)m+9m^2}{2(4j^2-1)}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}'''\frac{b_i b_{-i-j-1}}{i^2(-i-j-1)^2}$$

gesetzt, so ist wegen (17), (20), (15), (8), (10)

$$(33)\qquad \Lambda_j = \Lambda_j^* - \frac{3m^2}{16}\,\frac{20j-16j+2-4(5j-2)m+9m^2}{2(4j^2-1)}\,\frac{a_{-j-1}}{a_0}\,\frac{2}{m^2}.$$

Hierbei nehmen alle drei Quotienten

$$\left|\frac{20j^2-16j+2}{2(4j^2-1)}\right|,\quad \left|\frac{-4(5j-2)}{2(4j^2-1)}\right|,\quad \left|\frac{9}{2(4j^2-1)}\right|,$$

wie man sich leicht überzeugt, ihren Höchstwert für $j=-1$ an, so daß

$$\left|\frac{20j^2-16j+2}{2(4j^2-1)}\right| = \left|\frac{10j^2-8j+1}{4j^2-1}\right| \leqq \frac{10+8+1}{3} = 6+\frac{6}{18},$$

$$\left|\frac{-4(5j-2)m}{2(4j^2-1)}\right| = 2|m|\left|\frac{5j-2}{4j^2-1}\right| \leqq 2|m|\left|\frac{-5-2}{4-1}\right| = \frac{14}{3}|m| \leqq \frac{14}{3\cdot 12} = \frac{7}{18},$$

$$\left|\frac{9m^2}{2(4j^2-1)}\right| \leqq \frac{9}{2}\,\frac{|m|^2}{4-1} = \frac{3}{2}|m|^2 \leqq \frac{3}{2\cdot 144} < \frac{1}{18},$$

also, wegen (21),

$$(34)\quad \bar{\Lambda}_j^*\left(\frac{1}{12};\frac{1}{3},\frac{1}{3},\ldots\right) < \frac{3}{16}\,\frac{1}{144}\left(6+\frac{6}{18}+\frac{7}{18}+\frac{1}{18}\right)\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}'''\frac{\frac{1}{9}}{i^2(-i-j-1)^2}$$

$$< \frac{3}{16}\,\frac{1}{144}\,\frac{7}{9}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{i^2} < \frac{3\cdot 7\cdot 2\cdot 10}{16\cdot 144\cdot 9\cdot 6} < \frac{1}{100}$$

ausfällt. Für $j \neq -1$ ist nach (10)

$$\frac{a_{-j-1}}{a_0} = m\frac{b_{-j-1}}{(-j-1)^2}.$$

Wegen $\frac{1}{(-j-1)^2} \leqq 1$ folgt daher aus (33), daß die beste Majorante von $\Lambda_j - \Lambda_j^*$ bei allen $j \neq -1$ für $|m| \leqq \frac{1}{12}$ und $|b_{-j-1}| \leqq \frac{1}{3}$ dem Betrage nach

$$(35)\qquad < \frac{3}{16}\left(6+\frac{7}{18}+\frac{1}{18}\right)\frac{1}{12}\,\frac{1}{3}\cdot 2 < \frac{1}{16}\,\frac{1}{6}\cdot 7 < \frac{1}{12}$$

ist. Für $j = -1$ hat man hingegen $\frac{a_{-j-1}}{a_0} = 1$, also, wegen (33), nur

$$|A_{-1} - A^*_{-1}| < \frac{3}{16}\left(6 + \frac{7}{18} + \frac{1}{18}\right) 2 = \frac{3}{8}\left(6 + \frac{4}{9}\right) = \frac{9}{4} + \frac{1}{6},$$

woraus (34) die Abschätzung

$$\bar{A}_{-1}\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots\right) < 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{100} \tag{36}$$

ergibt, während für $j \neq -1$ wegen (34), (35) bereits

$$\bar{A}_j\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots\right) < \frac{1}{12} + \frac{1}{100} \qquad (j \neq -1) \tag{37}$$

gilt.

§ 7.

Die Schranke in (36) ist so groß, daß wir uns, wie aus dem nachstehenden hervorgeht, genötigt sehen, die Schranke (27), die für alle j gilt, für $j = -1$ wesentlich zu verschärfen. Dies ist möglich, und zwar aus dem folgenden Grunde: Die Schranke (27) ist *nur wegen* (23) so groß, wie sie ist, und die Schranke (23) ist *nur darum* eine so große Zahl wie 17, weil in (23) auch große $|j|$ berücksichtigt werden. Nun sind die A_j glücklicherweise eben für große $|j|$ klein, so daß bei der *Summe* (16) eine Art Kompensation möglich ist.

Zu diesem Ende beachte man nur, daß wegen (24)

$$\Phi_{-11} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \left\{ i\,\frac{4(-1-1)}{2(4-1)}\,\frac{1}{i^2(-1-i)^2} + 0 - i\,\frac{2}{2(4-1)}\,\frac{1}{i^2(-1-i)^2} \right\} b_i b_{i+1}$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \left(-\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{i(i+1)^2}\, b_i b_{i+1} \qquad (i \neq 0,\ i \neq -1),$$

also, wegen (21),

$$\bar{\Phi}_{-11} = \left(\frac{1}{12}; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots\right) < \frac{5}{3}\,\frac{1}{9} \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(i+1)^2} = \frac{5}{27}\left(-1 + 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}\right)$$

$$< \frac{5}{27}\left(-\frac{3}{3} + 2\,\frac{10}{6}\right) = \frac{5}{27}\,\frac{7}{3} = \frac{35}{81} < \frac{1}{2} - \frac{1}{20},$$

mithin, wegen (25) und (24),

$$\bar{\Phi}_{-1}\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots\right) < \frac{1}{2} \tag{38}$$

ausfällt.

Aus (16), (27), (32), (37) folgt nun:

$$\bar{F}_1\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots\right) < \left(2 + \frac{1}{5}\right) + \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{100}\right), \tag{39}$$

aus (16), (38), (31), (36):

$$\bar{F}_{-1}\left(\frac{1}{12};\frac{1}{3},\frac{1}{3},\ldots\right)<\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\left(\frac{9}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{100}\right),\tag{40}$$

aus (16), (27), (31), (37):

$$\bar{F}_{j}\left(\frac{1}{12};\frac{1}{3},\frac{1}{3},\ldots\right)<\left(2+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{100}\right)\text{ für }|j|>1,\tag{41}$$

aus (39), (40), (41):

$$\bar{F}_{j}\left(\frac{1}{12};\frac{1}{3},\frac{1}{3},\ldots\right)<3+\frac{3}{4}=\frac{15}{4}\quad\text{für}\quad j=\pm 1,\pm 2,\ldots,\tag{42}$$

endlich aus (14), (23), (42) als Schlußresultat der Abschätzungen:

$$\bar{f}_{j}\left(\frac{1}{12};\frac{1}{3},\frac{1}{3},\ldots\right)<4\qquad(j=\pm 1,\pm 2,\ldots).\tag{43}$$

§ 8.

Nun habe ich loc cit. [4]) den folgenden Satz bewiesen: Ist die Potenzreihenfolge $\{f_j(\xi;\eta_1,\eta_{-1},\ldots)\}$ derart, daß $\bar{f}_j(A;B,B,\ldots)\leqq M$ ausfällt, wobei die positiven Zahlen A, B, M von den Zeigern unabhängig sind, so hat das unendliche implizite Gleichungssystem $\eta_j=\xi f_j$ in einem hinreichend kleinen Kreise $|\xi|<\alpha$ genau eine, bei $\xi=0$ holomorphe Lösung $\eta_i=\eta_i(\xi)$. Und zwar kann

$$\alpha=\operatorname{Min}\left(A,\frac{B}{M}\right)$$

gesetzt werden, und es gilt für $|\xi|<\alpha$ die Ungleichheit

$$|\eta_j(\xi)|<B\qquad(j=\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

Die Koeffizienten der Maclaurinschen Reihen $\eta_j(\xi)$ sind reell, wenn diejenigen der f_j reell sind.

Setzen wir nun $A=\frac{1}{12}$, $B=\frac{1}{3}$, so darf wegen (43) $M=4$, mithin auch $\frac{B}{M}=\frac{1}{12}$, d. h. $\alpha=\frac{1}{12}$ gesetzt werden. Folglich hat das System (12) genau eine bei $m=0$ holomorphe Lösung $b_j=b_j(m)$, und zwar ist sie im Kreise $|m|<\frac{1}{12}$ holomorph und dem Betrage nach $<\frac{1}{3}<1$, ferner für $m>0$ reell. Da nach Poincaré [23]) in die Maclaurinsche Reihe $b_j(m)$ mindestens $m^{|j|}$ aufgeht, so folgt daraus nach dem Schwarzschen Lemma

$$|b_j(m)|<\frac{|m|^{|j|}}{12^{|j|}}\quad\text{für}\quad|m|<\frac{1}{12},\tag{44}$$

so daß dabei die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty}(|a_j(m)|+|a_{-j}(m)|)$$

[23]) H. Poincaré, loc. cit. [16]), S. 36.

wegen (10) gewiß konvergiert. Setzt man nun die a_j $(j \neq 0)$ in die Verzweigungsgleichung (5) ein, so kann a_0 als Funktion der Quotienten, also, wegen (10), als Funktion von m allein dargestellt werden. Durch formales Rechnen findet Hill

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{2}{3}} a_0 = 1 + \mathfrak{P}(m),$$

wobei $\mathfrak{P}(m)$ eine nach positiven ganzen Potenzen fortschreitende Reihe mit reellen Koeffizienten bedeutet, die nach den vorhergehenden für hinreichend kleine $|m|$, etwa für $|m| < \gamma$, gewiß konvergiert, da ja die Prämissen des Weierstraßschen Doppelreihensatzes erfüllt sind. Also kann $a_0(m) \gtreqless 0$ für $0 < m < \gamma$ auf genau eine Weise bestimmt werden, und zwar ist dabei $a_0(m) > 0$, wegen $\mathfrak{P}(0) = 0$. Es wäre nun möglich, daß $\gamma < \alpha = \frac{1}{12}$ und daß sogar der Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}(m)$ überhaupt kleiner ist als derjenige von $b_j(m)$ oder $\frac{a_j(m)}{a_0(m)}$. Ich habe aber in der zweiterwähnten Arbeit[6]) u. a. bewiesen, daß $a_0(m)$ wenn auch vielleicht nicht für $|m| < \alpha$, so doch gewiß für $0 < m < \alpha$ holomorph ist und außerdem $\neq 0$ (also > 0). Wegen (10), (44) ist damit (die Existenz und) die Konvergenz der Reihen (2), (10), die offenbar eine Lösung von (1) darstellen, für $0 < m < \frac{1}{12}$ bewiesen. Nun liegt die Zahl (3) im Innern dieses Intervalles, q. e. d.

Die von Hill gewünschten Restabschätzungen ergeben sich aus (44) mit Rücksicht auf die Cauchysche Koeffizientenabschätzung unmittelbar. Es ist überflüssig zu erwähnen, daß $\alpha = \frac{1}{12}$ vielleicht, ja höchstwahrscheinlich ziemlich kleiner ist als der gemeinsame Konvergenzradius der Potenzreihen $b_j(m)$, so daß diese und auch die Fourierreihen noch besser konvergieren, als das aus (44) allein folgen würde.

Lebenslauf.

Geboren bin ich 8. 4. 1903 als Sohn des Kaufmanns Thomas Eduard Wintner in Budapest. Nach Absolvierung der Elementarschulen besuchte ich von 1912 an das Königliche Obergymnasium in Budapest VII, das ich Juni 1920 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Im selben Jahr bezog ich die Universität Budapest, wo ich mich mit astronomischen, mathematischen und physikalischen Studien beschäftigte. Nach einer Unterbrechung meiner Studien wurde ich S.-S. 1927 in Leipzig immatrikuliert. — Allen den Herren Professoren, deren Vorlesungen und Übungen ich besucht habe, gilt mein aufrichtiger Dank, besonders aber Herrn Prof. R. v. Kövesligethy in Budapest und Herrn Prof. L. Lichtenstein in Leipzig, denen ich meine Ausbildung sowie die verschiedensten Förderungen zu verdanken habe.

Leipzig, den 22. 5. 1928.

Aurel Friedrich Wintner.