Die Berechnung der Drehschwingungen

und ihre Anwendung im Maschinenbau

Von

Heinrich Holzer

Oberingenieur der Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg

Mit vielen praktischen Beispielen
und 48 Textfiguren

Berlin
Verlag von Julius Springer
1921

ISBN 978-3-642-51268-1 ISBN 978-3-642-51387-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-51387-9

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1921

Vorwort.

Das vorliegende Buch verdankt seine Entstehung der Zusammenstellung und Ordnung von praktischen Berechnungen über Drehschwingungen, was von selbst zu Ergänzungen und Erweiterungen anregte. Besonderen Wert habe ich auf die lückenlose Begründung jedes Berechnungsverfahrens gelegt. Für jedes Verfahren ist die Anwendung an sorgfältig durchgerechneten Zahlenbeispielen gezeigt, die meist unmittelbar aus der Praxis entnommen sind. Die Zahlenbeispiele wurden absichtlich mit für praktische Zwecke unnötig großer Genauigkeit gerechnet und die Richtigkeit der Ergebnisse an Kontrollrechnungen bewiesen. Die übertrieben große Genauigkeit der Zahlenrechnungen, die ich ohne wesentliche Mehrarbeit mittels Rechenmaschine erzielte, soll nämlich solchen Lesern, die mangels mathematischer Vorbildung den analytischen Begründungen fremd gegenüberstehen, die Berechnungsverfahren in Zahlen vorführen, und die Feststellung der Richtigkeit der Ergebnisse soll ihnen neben der Rechnungsprüfung den Beweis der Richtigkeit des Verfahrens ersetzen. Solche Leser mögen sich an den langen und scheinbar verwickelten Eigenschwingungsgleichungen nicht stoßen; denn diese Gleichungen sind nur der Vollständigkeit halber aufgeführt, und es wird in dem Buche gezeigt, daß und wie man ihrer ganz entraten kann. Die vorgeführten Berechnungsverfahren selbst sind denkbar einfach, und ich hoffe, sie so deutlich dargelegt zu haben, daß jeder Praktiker, auch ohne besondere mathematische Kenntnisse, sich ihrer mit Nutzen bedienen kann.

Die Genauigkeit der Berechnung ist aber auch unerläßlich bei den Untersuchungen der gedämpften Drehschwingungen. Denn da die praktisch vorkommenden dämpfenden Widerstände verhältnismäßig klein zu sein pflegen, so sind die von der Dämpfung herrührenden harmonischen Drehmomente gegenüber den von der Trägheit der schwingenden Massen hervorgerufenen so klein, daß ihre Berücksichtigung eben einen größeren Genauigkeitsgrad der Rechnung voraussetzt. Aus diesem Grunde versagen für solche Fälle auch die zeichnerischen Berechnungsverfahren.

Ich habe den Versuch gemacht, die dämpfenden Widerstände zu untersuchen und für die wichtigsten Arten wenigstens ungefähre Zahlenwerte zu geben. Nur der wissenschaftliche Versuch kann hierüber endgültigen Aufschluß bringen. Aber ich hoffe, daß gerade die vorliegenden theoretischen Untersuchungen imstande sein werden, den Leitfaden für die Anstellung und Auswertung solcher Versuche zu bilden.

Schwabach-Nürnberg, Februar 1921. **Heinrich Holzer.**
Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Die Schwingungserscheinungen spielen in der gesamten Technik eine gewaltige Rolle, deren Bedeutung mit dem Ausbau der Technik stetig wächst. Jeder Konstruktionsteil, der zeitlich wechselnde Kräfte aufzunehmen hat, vollführt unter der Einwirkung dieser Kräfte infolge seiner Elastizität erzwungene Schwingungen, welche die Beanspruchungen des Bauteiles gegenüber der statischen Beanspruchung wesentlich erhöhen können. Da das Bestreben der Technik dahin geht, die Baustoffe immer besser auszunutzen, das heißt die von der Raumeinheit des Baustoffes aufgenommenen Formänderungsarbeiten, die dem Quadrat der Spannungen proportional sind, möglichst groß zu halten, so erkennt man schon, wie wichtig es ist, den Einfluß der Schwingungen auf die Beanspruchung mit Sicherheit zu beherrschen. Andererseits schreitet die Entwicklung des Maschinenbaues in der Richtung fort, die Leistung einer Maschine, sei es durch Vergrößerung ihrer Abmessungen oder sei es durch Vermehrung der zu einer Gesamtheit vereinigten Maschineneinheiten zu steigern, was wiederum die Möglichkeit gefährlicher Schwingungszustände vervielfältigt. Bekanntlich werden die erzwungenen Schwingungen dann gefährlich, wenn ihre Periode annähernd oder ganz mit der Periode der Eigenschwingungen zusammenfällt (Resonanz), denn bei fehlender Dämpfung bringt dann jede noch so kleine erregende Kraft dauernd wachsende Schwingungsausschläge hervor, welche die Beanspruchung des Konstruktionsteils bis zum Bruch steigern. Es wird also die Sorge des Konstrukteurs sein müssen, jenen gefährlichen Zuständen möglichst ganz aus dem Weg zu gehen. Das erfordert aber zunächst die genaue Kenntnis aller in Betracht kommenden Eigenschwingungszahlen. Die neuere technische Literatur hat denn auch der Wichtigkeit dieser Erkenntnis Rechnung getragen und eine Reihe von genauen oder angenäherten Verfahren zur Bestimmung der Eigenschwingungszahlen bei beliebig gegebener Massenverteilung gebracht[1]).

[1]) Frahm, Z. d. V. D. I. 1902; Stodola, Die Dampfturbinen; Holzer, Schiffbau 1907; Gümbel, Z. d. V. D. I. 1912; Bläß, Z. d. V. D. I. 1914; Krause, Z. d. V. D. I. 1914; Geiger, Dissertation, 1914; Mies, Dinglers P. J. 1915; Kutzbach, Z. d. V. D. I. 1917/1918; Dreves, Z. d. V. D. I. 1918; Lewis, Journn. of Am. Soc. of Naval Engineers 1919.

Aber leider ist dem Konstrukteur mit der Kenntnis der Eigenschwingungszahlen allein nicht gedient, denn die Forderung, weit genug von den kritischen Zuständen entfernt zu bleiben, läßt sich in gar vielen Fällen nicht einhalten. Die Anzahl der im Betriebsbereich einer Maschine in Frage kommenden Eigenschwingungszahlen ist nämlich um so größer, je größer die Anzahl der Betriebsmassen und je höher die Betriebsdrehzahl ist. Ja, die Betriebsdrehzahl ist in fast allen Fällen überhaupt nicht fest, sondern in mehr oder weniger weiten Grenzen veränderlich, so daß notwendigerweise im Betriebsbereich oft nicht nur eine, sondern mehrere kritische Drehzahlen liegen. Daß solche kritische Gebiete im Betriebsbereich überhaupt geduldet werden können, ist nur dem Einfluß der Dämpfung zu verdanken. Ohne Dämpfung würden die erzwungenen Schwingungen bei Resonanz unendlich große Ausschläge (theoretisch) erreichen, mit der Dämpfung aber sind die Ausschläge auch in diesem Fall von ganz bestimmter endlicher Größe. Es muß also das Bestreben sein, die Schwingungsausschläge bei gegebener Dämpfung möglichst sicher vorausberechnen zu können. Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag zur Lösung dieser Aufgabe bilden. Sie beschränkt sich dabei auf Drehschwingungen, obschon in genau gleicher Weise auch die Schwingungen behandelt werden können, welche eine Reihe von Massen vollführen, die durch Zug- und Druckfedern oder -Gestänge elastisch miteinander verbunden sind, denn die Formänderung zwischen zwei Massen ist wie bei den Drehschwingungen der Länge der dazwischenliegenden Feder einfach proportional.

I. Allgemeines.

1. Drehelastizität der Welle.

Es sei die Welle einer Maschine durch ihre Konstruktionszeichnung und die Befestigungsart aller auf ihr sitzenden Massen gegeben. Die Welle besteht aus einer Aufeinanderfolge von runden Wellenstücken mit verschiedenen Durchmessern und aus Kurbelkröpfungen. Zum Zwecke der Untersuchung ist die Welle zunächst durch eine drehelastisch gleichwertige Welle von überall gleichem, beliebig wählbaren Durchmesser zu ersetzen[1]). Diese Welle heiße die Bezugswelle, und das überall konstante polare Trägheitsmoment ihres Querschnittes sei J_0. Ein Wellenstück der gegebenen Welle von der Länge l ist mit einem Wellenstück l_0 der Bezugswelle drehelastisch gleichwertig, wenn beide sich durch gleiche verdrehende Momente um gleiche Winkel verdrehen. Die Länge l_0 wollen wir die bezogene Länge des wirklichen Wellenstückes l nennen. Für ein zylindrisches Stück der gegebenen Welle von der Länge l und dem polaren Trägheitsmoment J ist dann:

$$l_0 = l \cdot \frac{J_0}{J}. \tag{1}$$

Die bezogene Länge runder Wellenstücke von nicht zylindrischer Form ergibt sich aus

$$l_0 = J_0 \int_0^l \frac{dl}{J}, \tag{2}$$

wobei J das (veränderliche) polare Trägheitsmoment des zum Wellenelement dl gehörigen Querschnittes bedeutet. Als praktisches Beispiel sei der häufig vorkommende kegelige Ansatz berechnet (Fig. 1).

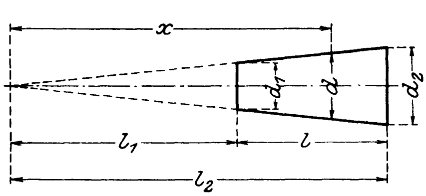


Fig. 1.

Es ist

$$\frac{d}{d_2} = \frac{x}{l_2}.$$

[1]) Frahm, Z. d. V. D. I. 1902, S. 800.

Bei voller (ungebohrter) Welle ist $J = \frac{\pi}{32} d^4$, demnach

$$l_0 = J_0 \int_{l_1}^{l_2} \frac{dx}{J} = J_0 \int_{l_1}^{l_2} \frac{dx\, l_2^4}{x^4 J_2} = \frac{J_0}{J_2}\frac{l_2^4}{3}\left(\frac{1}{l_1^3} - \frac{1}{l_2^3}\right)$$

$$= \frac{J_0}{J_2}\frac{l_2}{3}\left[\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3 - 1\right] = \frac{J_0}{J_2}\cdot\frac{l_2}{3}\left(\frac{l_2}{l_1} - 1\right)\left[\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 + \frac{l_2}{l_1} + 1\right]$$

$$= \frac{J_0}{J_2}\frac{l_2}{3 l_1}\left(l_2 - l_1\right)\left[\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 + \frac{l_2}{l_1} + 1\right] = \frac{l}{3}\frac{J_0}{J_2}\cdot\frac{d_2}{d_1}\left[\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 + \frac{d_2}{d_1} + 1\right]. \tag{3}$$

Denkt man sich diese Gleichung auf die Form gebracht: $l_0 = l \cdot \frac{J_0}{J'}$, so ist J' das der Reduktion zugrunde zu legende mittlere Trägheitsmoment des Kegelansatzes, also

$$J' = \frac{3 J_2}{\frac{d_2}{d_1}\cdot\left[\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 + \frac{d_2}{d_1} + 1\right]}. \tag{3a}$$

Ebenso kann man sich den der Umrechnung entsprechenden mittleren Durchmesser d' ermitteln.

Diese Rechnungen sind in Zahlentafel 1 durchgeführt und die Ergebnisse in Fig. 2 zusammengestellt.

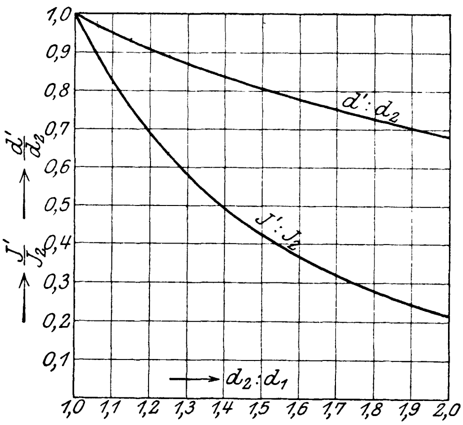


Fig. 2.

Zahlentafel 1.

$\frac{d_2}{d_1} =$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 + \frac{d_2}{d_1} + 1 =$	3,00	3,31	3,64	3,99	4,36	4,75	5,16	5,59	6,04	6,51	7,00
$J' : J_2 =$	1,000	0,824	0,687	0,578	0,491	0,421	0,363	0,316	0,276	0,243	0,214
$d' : d_2 =$	1,000	0,953	0,911	0,872	0,837	0,806	0,777	0,750	0,725	0,702	0,681

Hat man es schließlich mit runden Wellenteilen von beliebiger Gestalt zu tun, so kann man sie immer durch eine Anzahl kegeliger Teile ersetzt denken und die bezogenen Längen mit Hilfe von Zahlentafel 1 und Fig. 2 rasch ermitteln.

Einer besonderen Überlegung bedarf die Frage, was man als bezogene Länge einer Wellenflanschkupplung anzusehen hat. Ein verdrehendes Moment kann nur durch die Flanschschrauben hindurch vom einen Wellenstrang zum anderen übertragen werden. Die Übertragung kann entweder durch die von den Schraubenkräften erzeugte Reibung allein erfolgen, oder es müssen dabei die Schraubenbolzen und -Löcher in der Umfangsrichtung des Schraubenkreises elastische Formänderungen erfahren. Nur wenn die Schraubenreibung das größte (mit Berücksichtigung der Schwingungen) wirklich auftretende Drehmoment sicher allein übertragen kann, ist das Trägheitsmoment des Flansches für die Berechnung der bezogenen Länge zugrunde zu legen, andernfalls muß die bezogene Länge aus den elastischen Formänderungen der Bolzen und Flanschen berechnet werden. Eine ähnliche Betrachtung gilt auch für aufgekeilte Naben. Genau genommen ist die gesamte elastische Formänderung von Keil, Welle und Nabe für die Ermittlung der bezogenen Länge des Nabensitzes zu berücksichtigen. Eine genügend genaue Berechnung aller wirklich eintretenden Formänderungen stößt aber sowohl beim Schraubenflansch, wie bei der aufgekeilten Nabe auf große Schwierigkeiten, so daß man eigentlich auf Versuche angewiesen ist, um die wirklichen bezogenen Längen zu finden. Es ist aber in beiden Fällen so viel klar, daß die bezogenen Längen größer ausfallen müssen, als wenn man beide Kuppelflanschen als ein Stück ansieht und die Naben als aus einem Stück mit der Welle betrachtet. Eine ungefähre Berechnung eines Kupplungsflansches, dessen Schraubenreibung wesentlich geringer als die zu übertragende Umfangskraft ist, läßt erkennen, daß eine solche Flanschkupplung unter Umständen einem gleichlangen Wellenstück gleichwertig ist, dessen Durchmesser nicht größer als der zur Kupplung gehörige wirkliche Wellendurchmesser ist. Aus gleichem Grunde sind aufgekeilte Naben, die nur geringe Momente von der Hauptwelle ableiten, etwa die Naben der Steuerräder, nur als geringe Verstärkung der Hauptwelle anzusehen. Im allgemeinen pflegen Flanschen und Naben nur einen kleinen Anteil an der ganzen Wellenlänge auszumachen, so daß auch der Einfluß eines Fehlers in der Schätzung ihrer bezogenen Länge klein bleibt.

Von wesentlicherer Bedeutung ist die richtige Ermittlung der bezogenen Länge einer Kurbelkröpfung, besonders für Maschinen mit vielen nebeneinanderliegenden Zylindern. Da in der Literatur sich richtige Angaben darüber nicht finden, so soll hier die ausführliche Berechnung gezeigt werden.

Bei der Durchleitung eines verdrehenden Momentes M_0 durch eine Kurbelkröpfung suchen sich infolge der Verdrehung des Kurbelzapfens die beiden Kurbelschenkel aus der ursprünglichen Kröpfungsebene nach entgegengesetzten Seiten herauszudrehen, was zum Teil von den an die Schenkel anschließenden Wellenlagern unter Entstehung von Lagereinspannmomenten M_1 und Lagerdrucken A verhindert wird. Setzen wir die Lager symmetrisch zur Kröpfungsmitte voraus, so gibt

Fig. 3 Drehsinn und Richtung dieser Lagerreaktionen im Verhältnis zum Drehsinn von M_0 richtig wieder[1]). Die Momente M_1 und M_0 sind durch ihre Momentenachsen dargestellt (als Gerade senkrecht zur Momentenebene und nach der Richtung, von wo aus gesehen das Moment im Uhrzeigersinn dreht). Das Gleichgewicht verlangt: $A \cdot 2L = 2\,M_1$ oder

$$A \cdot L = M_1. \tag{4}$$

Die Kräfte A und die Momente M_0 und M_1 bringen an der Kurbelkröpfung elastische Formänderungen hervor, die eine relative Verschiebung v der Punkte 1 und 4 (Fig. 3) senkrecht zur Kröpfungsebene ergeben. Die genaue Berechnung aller Formänderungen stößt auch

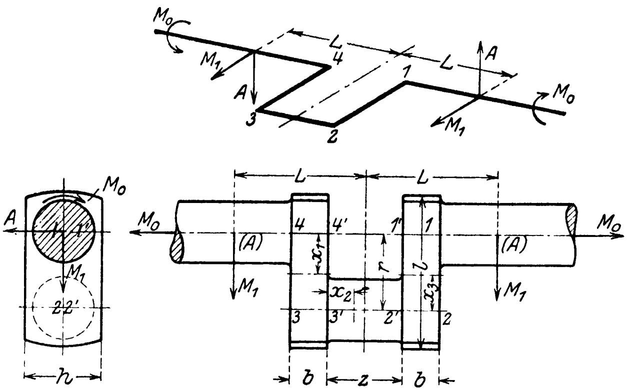


Fig. 3.

hier auf Schwierigkeiten; insbesondere ist die Formänderung der Kurbelschenkel von dem Anschluß der Wellen- und Kurbelzapfen wesentlich beeinflußt, so daß der Versuch zu Rate gezogen werden müßte. Glücklicherweise fällt die Formänderung der Schenkel für die bezogene Länge der Kröpfung nicht sehr ins Gewicht.

Um die relative Verschiebung des Punktes 1 gegen Punkt 4 zu bestimmen, denken wir uns den Punkt 4 festgehalten und ermitteln den Einfluß jeder Einzelformänderung auf die Bewegung von 1 senkrecht zur Kröpfungsebene.

Der linke Kurbelschenkel wird aus der Kröpfungsebene herausgebogen. Die Biegungsgleichung lautet mit E als Elastizitätsmodul, $J_s = \frac{bh^3}{12}$ als Trägheitsmoment des rechteckigen Schenkelquerschnitts, und y_1 als Durchbiegung:

$$E\,J_s \frac{d^2 y_1}{d x_1^2} = M_0 - A\,x_1 .$$

[1]) Nach Professor Föppl aus einem Gutachten an die Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg, aus dem auch die nachfolgenden Beziehungen (4) und zum Teil (19) stammen.

Ihre Integration liefert für $x_1 = r$ die Neigung der elastischen Linie:

$$\left(\frac{d\,y_1}{d\,x_1}\right)_{x_1=r} = \frac{M_0\,r - A\,\frac{r^2}{2}}{E\,J_s}$$

und die Durchbiegung:

$$(y_1)_{x_1=r} = \frac{M_0\,\frac{r^2}{2} - A\,\frac{r^3}{6}}{E\,J_s}\,.$$

Die Form der elastischen Linie ist in Fig. 4 als Kurve 4, 3 dargestellt; die Kurbelzapfen-Mittellinie 2, 3 projiziert sich dort als Punkt und die Mittellinie des vorerst noch ungebogenen rechten Kurbelschenkels hat die Richtung der Tangente 2, 1 an die elastische Linie 4, 3. Durch die Biegung des linken Schenkels allein erleidet also Punkt 1 des rechten Schenkels die Verschiebung 4, 1 nach abwärts, welche sich berechnet zu:

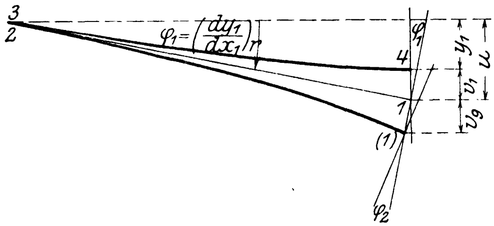


Fig. 4.

$$v_1 = u - y_1 = r\left(\frac{d\,y_1}{d\,x_1}\right)_r - (y_1)_r = \frac{M_0\,\frac{r^2}{2} - A\,\frac{r^3}{3}}{E\,J_s} \tag{5}$$

(Wegen des erwähnten Einflusses des Wellen- und Zapfenanschlusses ist die wirkliche Formänderung kleiner als die hier ermittelte; man könnte dies auch durch einen Berichtigungsfaktor berücksichtigen, wovon aber hier und in der Folge abgesehen wird.)

Der linke Schenkel wird aber auch verdreht, und zwar in seiner Querschnittsfläche $l \cdot h$ durch das Moment $M_0 - A\,\frac{r}{2}$ und in seiner Querschnittsfläche $b \cdot h$ durch das Moment $A\left(L + \frac{z}{2} + \frac{b}{2}\right) - M_1$ oder wegen (4) $= A\,\frac{z+b}{2}$.

Im ersten Fall (Fig. 5) verdreht sich die Mittellinie 4′, 3′ gegen 4, 3 um den Verdrehungswinkel

$$\tau_1 = b \cdot \frac{M_0 - A\,\frac{r}{2}}{G} \cdot 3{,}6\,\frac{l^2 + h^2}{l^3\,h^3}$$

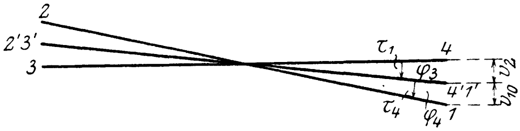


Fig. 5.

im Uhrzeigersinn (G Schubelastizitätsmodul), wodurch sich auch Punkt 1 nach abwärts bewegt um

$$v_2 = \frac{r}{2}\,\tau_1 = 3{,}6\,\frac{l^2 + h^2}{l^3\,h^3}\,\frac{b\,r}{2} \cdot \frac{M_0 - A\,\frac{r}{2}}{G}\,. \tag{6}$$

Im zweiten Fall verdreht sich die Mittellinie 3, 3′ gegen 4, 4′ um den Verdrehungswinkel (Fig. 6)

$$\tau_2 = 3{,}6 \cdot \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} r \frac{A \frac{z+b}{2}}{G} .$$

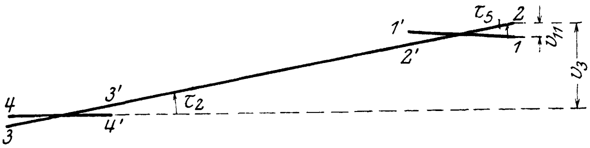


Fig. 6.

Hierdurch verschiebt sich der Punkt 1 nach aufwärts um die Strecke

$$v_3 = -\left(z + \frac{3b}{2}\right) \tau_2 = -3{,}6 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} r \left(z + \frac{3b}{2}\right) \frac{A \frac{z+b}{2}}{G} \qquad (7)$$

Endlich erleidet der linke Schenkel noch Verschiebungen unter dem Einfluß der Schubkraft A. Diese Formänderungen sind zwar verhältnismäßig klein, sie sollen aber hier der Vollständigkeit halber berücksichtigt werden. Die Kraft A verschiebt die Fläche 4′, 3′ gegen die Fläche 4, 3 um den Betrag $s_1 = \frac{1{,}2\, A \cdot b}{G \cdot h \cdot l}$

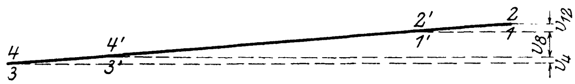


Fig. 7.

nach aufwärts und um ebensoviel bewegt sich auch der Punkt 1 infolge dieser Formänderung (Fig. 7), so daß

$$v_4 = -\frac{1{,}2\, A \cdot b}{G \cdot h \cdot l} . \qquad (8)$$

Die Kraft A verschiebt ferner die Fläche 3, 3′ gegen 4, 4′ nach aufwärts und um dieselbe Strecke auch den Punkt 1, so daß (Fig. 8)

$$v_5 = -\frac{1{,}2 \cdot A\, r}{G \cdot b \cdot h} . \qquad (9)$$

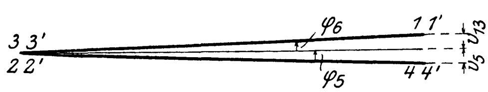


Fig. 8.

Damit sind alle Verschiebungen von 1 infolge von Formänderungen des linken Kurbelschenkels bestimmt und wir suchen nun die Verschiebungen infolge der Formänderungen des Kurbelzapfens, dessen Querschnitt wir mit F_z und dessen polares Trägheitsmoment wir mit J_z bezeichnen wollen, so daß das äquatoriale Trägheitsmoment $= \frac{J_z}{2}$. Der Zapfen verdreht sich unter dem Moment $M_0 - Ar$

um den Winkel $\tau_3 = \frac{M_0 - A r}{G} \cdot z$ (Fig. 9), wodurch sich Punkt 1 nach abwärts verschiebt um die Strecke

$$v_6 = \frac{M_0 - A r}{G} z r . \tag{10}$$

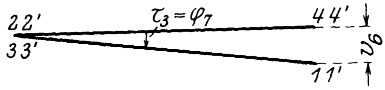


Fig. 9.

Der Kurbelzapfen verbiegt sich infolge des Momentes

$$A\left(L + \frac{z}{2} - x_2\right) - M_1 = A\left(\frac{z}{2} - x_2\right).$$

Die Biegungsgleichung ist

$$\frac{E J_z}{2} \cdot \frac{d^2 y_2}{d x_2^2} = A\left(\frac{z}{2} - x_2\right).$$

Sie ergibt für $x_2 = z$ die Tangentenrichtung der elastischen Linie

$$\left(\frac{d y_2}{d x_2}\right)_{x_2 = z} = \frac{2}{E J_z} A \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^2}{2}\right) = 0$$

und die Durchbiegung

$$(y_2)_{x_2 = z} = A\left(\frac{z}{2}\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right) = A \frac{z^3}{12}$$

nach aufwärts.

Infolgedessen ist die Verschiebung von 1 infolge der Biegung des Zapfens (Fig. 10):

$$v_7 = - \frac{A z^3}{6 E J_z} . \tag{11}$$

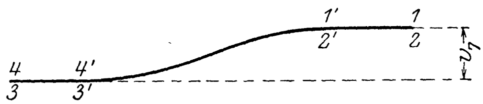


Fig. 10.

Schließlich beträgt die Schiebung des Zapfens durch die Schubkraft A und damit die Verschiebung von 1 (Fig. 7):

$$v_8 = - \frac{1{,}186 \, A z}{G F_z} . \tag{12}$$

Zuletzt ist noch der Einfluß der Formänderungen des rechten Kurbelschenkels auf die Bewegung des Punktes 1 festzustellen.

Die Biegung erfolgt nach der Gleichung:

$$E \cdot J_s \cdot \frac{d^2 y_3}{d x_3^2} = M_0 - A (r - x_3).$$

Sie liefert die Bewegung (Fig. 4):

$$v_9 = \frac{1}{E J_s} \left(M_0 \frac{r^2}{2} - A \frac{r^3}{3}\right) . \tag{13}$$

Die Verdrehung des Schenkels in der Querschnittsfläche $l \cdot h$ ergibt denselben Verdrehungswinkel und dieselbe Verschiebung wie für den linken Schenkel (Fig. 5):

$$\tau_4 = \tau_1$$

und

$$v_{10} = v_2 \,. \tag{14}$$

Die Verdrehung in der Fläche $b \cdot h$ liefert den Drehwinkel (Fig. 6):

$$\tau_5 = 3{,}6 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{r}{G} \left[A \left(L - \frac{z}{2} - \frac{b}{2} \right) - M_1 \right]$$

oder

$$\tau_5 = -3{,}6 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \cdot r \frac{A}{G} \frac{z + b}{2}$$

und die Verschiebung des Punktes 1:

$$v_{11} = + 3{,}6 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{r b}{2} \frac{A}{G} \frac{z + b}{2} \,. \tag{15}$$

Die Schiebungen durch die Kraft A liefern (Fig. 7):

$$v_{12} = v_4 \tag{16}$$

und (Fig. 8)

$$v_{13} = v_5 \,. \tag{17}$$

Die Gesamtverschiebung des Punktes 1 gegenüber 4 ist also

$$\begin{aligned} v = \sum_{h=1}^{h=13} v_h = M_0 \left[\frac{r^2}{E J_s} + \frac{3{,}6}{G} \frac{l^2 + h^2}{l^3 h^3} b r + \frac{z r}{G J_z} \right] - A \left[\frac{2 r^3}{3 E J_s} \right. \\ + \frac{3{,}6}{G} \frac{l^2 + h^2}{l^3 h^3} \frac{b r^2}{2} + \frac{3{,}6}{G} \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{r (z + b)^2}{2} + \frac{2{,}4\, b}{G h l} + \frac{2{,}4\, r}{G b h} \\ \left. + \frac{z \cdot r^2}{G J_z} + \frac{z^3}{6 E J_z} + \frac{1{,}186\, z}{G F_z} \right] . \end{aligned} \tag{18}$$

Die Gleichung (18) kann zur Berechnung von A und wegen Gl. (4) auch von M_1 dienen, wenn die tatsächliche Verschiebung v der Kurbelschenkel, etwa aus dem Lagerspiel oder aus Versuchen, bekannt ist. Die Auflösung ergibt:

$$A = \frac{M_0 \left[\frac{r^2}{E J_s} + \frac{3{,}6 (l^2 + h^2)}{G l^3 h^3} b r + \frac{z \cdot r}{G J_z} \right] - v}{\frac{2 r^3}{3 E J_s} + \frac{3{,}6}{G} \frac{l^2 + h^2}{l^3 h^3} \frac{b r^2}{2} + \frac{3{,}6}{G} \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{r (z + b)^2}{2} + \frac{2{,}4\, b}{G h l} + \frac{2{,}4\, r}{G b h} + \frac{z r^2}{G J_z} + \frac{z^3}{6 E J_z} + \frac{1{,}186\, z}{G F_z}} \,. \tag{19}$$

Da aber aus Verdrehungsversuchen gemessene Verschiebungen v wohl in den seltensten Fällen zur Verfügung stehen werden und da auch v im wesentlichen vom Lagerspiel, nicht aber linear von M_0 abhängen wird, so empfiehlt Professor Föppl v ganz zu vernachlässigen, weil es bei Lagern, die doch meist bis dicht an die Schenkel heranreichen, nicht sehr groß ausfallen kann. Mit dieser Vernachlässigung ergibt Gl. (19) zweifellos einen zu großen Wert von A und damit auch von M_1. Da aber die durch A und M_1 hervorgerufenen Verdrehungen denen entgegengesetzt sind, die vom verdrehenden Moment M_0 herrühren, so kommt die Vernachlässigung von v einer zu klein berechneten bezogenen Länge der Kurbelkröpfung gleich.

Andererseits ersieht man aus Gl. (19), daß A und damit auch M_1 verschwindet, wenn:

$$v = M_0 \left[\frac{r^2}{E J_s} + \frac{3{,}6}{G} \, \frac{l^2 + h^2}{l^3 h^3} \, b\, r + \frac{z\, r}{G J_z} \right]. \tag{20}$$

Um zu zeigen, wie groß v nach Gl. (20) ausfällt, sei ein Zahlenbeispiel durchgerechnet. Es sei eine Kurbelkröpfung gegeben mit $r = 17{,}5$ cm, $b = 8{,}5$ cm, $h = 30$ cm, $l = 38$ cm, Zapfendurchmesser $d_z = 19$ cm, $z = 21$ cm, $E = 2{,}2 \cdot 10^6$ und $G = 0{,}83 \cdot 10^6$.

Damit berechnet sich:

$$J_s = \frac{b\, h^3}{12} = \frac{8{,}5 \cdot 30^3}{12} = 19125 \,\mathrm{cm}^4,$$

$$J_z = \frac{\pi}{32} d_z^4 = \frac{\pi}{32} \cdot 19^4 = 12794 \,\mathrm{cm}^4,$$

$$F_z = \frac{\pi}{4} d_z^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 19^2 = 283{,}5 \,\mathrm{cm}^2.$$

$$v = M_0 \cdot \left[\frac{17{,}5^2}{2{,}2 \cdot 10^6 \cdot 19125} + \frac{3{,}6}{0{,}83 \cdot 10^6} \cdot \frac{38^2 + 30^2}{38^3 \cdot 30^3} \, 8{,}5 \cdot 17{,}5 + \frac{21 \cdot 17{,}5}{0{,}83 \cdot 10^6 \cdot 12794} \right]$$

$$= M_0 \cdot 10^{-6} \,[0{,}00728 + 0{,}00102 + 0{,}03461] = M_0 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}0429 \,\mathrm{cm}.$$

Die Größe eines verdrehenden Momentes, welches den Zapfen mit 1000 kgcm^{-2} beansprucht, ist

$$M_0 = \frac{\pi}{16} \cdot 19^3 \cdot 1000 = 1\,346\,800 \,\mathrm{kgcm}.$$

Für ein solches Moment ergibt sich

$$v = 1{,}3468 \cdot 0{,}0429 = 0{,}058 \,\mathrm{cm}.$$

Wenn also die Schenkelpunkte 1 und 4 sich um 0,058 cm auseinanderbewegen können, verschwinden die Lagerreaktionen ganz. Das ist schon eine ziemlich kleine Größe, zumal wenn man bedenkt, daß sie noch zu groß berechnet ist und daß die Verschiebung eines Schenkels aus der Kröpfungsebene heraus die Hälfte dieses Wertes beträgt.

Da aber die Lager immer Spiel haben müssen, so dürfte die Vernachlässigung von A vielleicht einen kleineren Fehler bedeuten, als die Vernachlässigung der wirklich eintretenden Verschiebung v gegen die Größe $M_0 \left[\frac{r^2}{E J_s} + \frac{3{,}6}{G} \frac{l^2 + h^2}{l^3 h^3} \, b r + \frac{z r}{G J_z} \right]$, die mit v von gleicher Größenordnung ist. Die Vernachlässigung von A ist, wenn die tatsächliche Verschiebung v kleiner ausfällt als nach Gl. (20), gleichbedeutend mit einer etwas zu groß berechneten bezogenen Länge der Kurbelkröpfung.

Die bezogene Länge der Kurbelkröpfung zwischen den Außenflächen der beiden Schenkel ergibt sich aus dem Verdrehungswinkel φ dieser beiden Flächen unter dem Einfluß von M_0, M_1 und A, der genau so groß sein muß, als der Winkel, um den sich die Endquerschnitte des der Kröpfung entsprechenden Stückes l_0 der Bezugswelle durch das Moment M_0 verdrehen. Wir müssen daher noch diesen Verdrehungswinkel ermitteln.

Die Biegung der Schenkel 1, 2 und 4, 3 liefert die Verdrehungswinkel (Fig. 4):

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \left(\frac{d\,y_1}{d\,x_1}\right)_{x_1 = r} + \left(\frac{d\,y_3}{d\,x_3}\right)_{x_3 = r} = \frac{M_0\,r - A\,\frac{r^2}{2}}{E\,J_s} + \frac{M_0\,r - A\left(r^2 - \frac{r^2}{2}\right)}{E\,J_s}$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{2\,M_0\,r - A\,r^2}{E\,J_s}\,. \tag{21}$$

Die Verdrehung der Schenkel in der Querschnittsfläche $l \cdot h$ ergibt (Fig. 5):

$$\varphi_3 + \varphi_4 = 2\,\tau_1 = \frac{7{,}2}{G}\,\frac{l^2 + h^2}{l^3\,h^3}\,b\left(M_0 - A\,\frac{r}{2}\right). \tag{22}$$

Die Verdrehung der Schenkel in der Fläche $b \cdot h$ liefert keinen Verdrehungswinkel in der Wellenquerschnittsebene (Fig. 6), ebensowenig die Verschiebungen v_4 und v_{12} (Fig. 7). Die Verschiebungen v_5 und v_{13} ergeben die Verdrehungswinkel (Fig. 8):

$$\varphi_5 + \varphi_6 = -\,\frac{2{,}4\,A}{G \cdot b\,h}\,. \tag{23}$$

Die Verdrehung des Kurbelzapfens (Fig. 9) erzeugt den Verdrehungswinkel:

$$\varphi_7 = \tau_3 = z \cdot \frac{M_0 - A\,r}{G\,J_z}\,. \tag{24}$$

Die Biegung (Fig. 10) und die Verschiebung (Fig. 7) des Zapfens ergeben keine Verdrehungswinkel.

Demnach beträgt der gesamte Verdrehungswinkel der Kurbelkröpfung

$$\varphi = \sum_{h=1}^{h=7} \varphi_h = M_0\left[\frac{2\,r}{E\,J_s} + \frac{7{,}2}{G}\,\frac{l^2 + h^2}{l^3\,h^3}\,b + \frac{z}{G\,J_z}\right] - A\left[\frac{r^2}{E\,J_s} + \frac{7{,}2}{G}\,\frac{l^2 + h^2}{l^3 \cdot h^3}\,\frac{b\,r}{2} + \frac{z \cdot r}{G\,J_z} + \frac{2{,}4}{G\,b\,h}\right]. \tag{25}$$

Ebensogroß muß der Verdrehungswinkel des Bezugswellenstückes sein, also

$$\varphi = l_0 \cdot \frac{M_0}{G\,J_0}\,. \tag{25a}$$

Daraus berechnet sich die bezogene Länge der Kurbelkröpfung zwischen den Außenflächen der Schenkel zu

$$l_0 = 2\,\frac{G}{E}\,\frac{J_0}{J_s}\,r + 7{,}2 \cdot \frac{J_0\,(l^2 + h^2)}{l^3\,h^3}\,b + \frac{J_0}{J_z} \cdot z - \left(\frac{A\,r}{M_0}\right)\left[\frac{G}{E}\,\frac{J_0}{J_s}\,r + 7{,}2 \cdot \frac{J_0\,(l^2 + h^2)}{l^3\,h^3}\,\frac{b}{2} + \frac{J_0}{J_z} \cdot z + \frac{2{,}4\,J_0}{b\,h\,r}\right]. \tag{26}$$

In dieser Gleichung ist der Ausdruck $\frac{A\,r}{M_0}$ aus Gl. (19) gegeben, wenn die durch M_0 verursachte Verschiebung v der Schenkel bekannt ist.

Setzt man die Lager mit soviel Spiel voraus, daß Lagerreaktionen infolge des Durchleitens des Drehmoments M_0 nicht entstehen, so wird

$$l_0 = 2\frac{G}{E}\frac{J_0}{J_s}r + 7{,}2\frac{J_0(l^2+h^2)}{l^3h^3}b + \frac{J_0}{J_z}z\,. \tag{27}$$

In dieser Gleichung kann noch der mittlere Posten der rechten Seite wegen seiner Kleinheit vernachlässigt werden, was gegenüber der Vernachlässigung von A belanglos ist und sogar eine Verringerung des mit der Unterdrückung von A begangenen Fehlers bedeutet.

Bei genügend großem Lagerspiel ergibt sich also für die bezogene Länge der Kurbelkröpfung der einfache Ausdruck:

$$l_0 = 2\,r\frac{G}{E}\frac{J_0}{J_s} + z\cdot\frac{J_0}{J_z}\,. \tag{28}$$

Die Durchrechnung unseres Zahlenbeispiels wird klaren Einblick in alle Verhältnisse gewähren.

Der Nenner in Gl. (19) berechnet sich zu:

$$\frac{2\cdot 17{,}5^3}{3\cdot 2{,}2\cdot 10^6\cdot 19125} + \frac{3{,}6}{0{,}83\cdot 10^6}\,\frac{38^2+30^2}{38^3\cdot 30^3}\cdot\frac{8{,}5\cdot 17{,}5^2}{2} + \frac{3{,}6}{0{,}83\cdot 10^6}\,\frac{8{,}5^2+30^2}{8{,}5^3\cdot 30^3}$$

$$\cdot\frac{17{,}5\,(21+8{,}5)^2}{2} + \frac{2{,}4\cdot 8{,}5}{0{,}83\cdot 10^6\cdot 30\cdot 38} + \frac{2{,}4\cdot 17{,}5}{0{,}83\cdot 10^6\cdot 30\cdot 8{,}5} + \frac{21\cdot 17{,}5^2}{0{,}83\cdot 10^6\cdot 12794}$$

$$+\frac{21^3}{6\cdot 2{,}2\cdot 10^6\cdot 12794} + \frac{1{,}186\cdot 21}{0{,}83\cdot 10^6\cdot 283{,}5} = 10^{-6}\,[0{,}08492 + 0{,}00893 + 1{,}93658$$

$$+ 0{,}02156 + 0{,}19844 + 0{,}60562 + 0{,}05484 + 0{,}10584] = 10^{-6}\cdot 3{,}0167\,.$$

Damit schreibt sich Gl. (19) für unser Beispiel:

$$A = \frac{M_0\cdot 0{,}0429 - v\cdot 10^6}{3{,}0167}\,.$$

Gl. (26) wird für $J_0 = J_z = 12\,794$:

$$l_0 = 2\cdot\frac{0{,}83}{2{,}2}\cdot\frac{12794}{19125}\cdot 17{,}5 + 7{,}2\cdot\frac{12794\cdot(38^2+30^2)}{38^3\cdot 30^3}\cdot 8{,}5 + 21$$

$$-\left(\frac{A\,r}{M_0}\right)\left[\frac{0{,}83}{2{,}2}\,\frac{12794}{19125}\cdot 17{,}5 + 7{,}2\cdot\frac{12794\,(38^2+30^2)}{38^3\cdot 30^3}\cdot\frac{8{,}5}{2} + 21 + \frac{2{,}4\cdot 12794}{8{,}5\cdot 30\cdot 17{,}5}\right]$$

$$l_0 = 8{,}83 + 1{,}24 + 21 - \left(\frac{A\,r}{M_0}\right)\cdot[4{,}41 + 0{,}62 + 21 + 6{,}88]$$

$$l_0 = 31{,}07 - \left(\frac{A\,r}{M_0}\right)\cdot 32{,}91\,.$$

Für das von uns angenommene Drehmoment $M_0 = 1\,346\,800$ kgcm ergeben sich also für verschiedene Annahmen von v die folgenden bezogenen Längen für $J_0 = J_z$:

$v = 0;$	$A = 19\,152;$	$\frac{A\,r}{M_0} = 0{,}24886;$	$l_0 = 22{,}88$
$= 0{,}02;$	$= 12\,523;$	$= 0{,}16272;$	$= 25{,}72$
$= 0{,}04;$	$= 5\,893;$	$= 0{,}07657;$	$= 28{,}55$
$\geqq 0{,}058;$	$= 0\;;$	$= 0\;;$	$= 31{,}07$

Nach Gl. (28) berechnet sich $l_0 = 29{,}83$.

2. Massen.

Für die Berechnung der Schwingungsausschläge müssen ferner alle an den Drehschwingungen beteiligten Massen gegeben sein. Für die Zwecke der Untersuchung bezieht man sämtliche Massen auf einen willkürlich wählbaren Abstand r von der Drehachse der Welle in der Weise, daß die auf diesen Abstand bezogene Masse dieselbe kinetische Energie besitzt wie die wirkliche Masse. Ist also dM irgend ein Elementarteilchen einer Masse und ϱ sein Abstand von der Drehachse, so ist die bezogene Masse dM_0 dieses Teilchens

$$dM_0 = dM\frac{\varrho^2}{r^2}\,. \tag{29}$$

oder

$$M_0 = \frac{1}{r^2}\int \varrho^2\, dM = \frac{m}{r^2}\,. \tag{30}$$

wenn m das Trägheitsmoment der gegebenen Masse in bezug auf die Wellenachse ist.

Am einfachsten wählt man den beliebigen Bezugsradius $r = 1$, so daß

$$M_0 = m \tag{30a}$$

wird. In technischen Berechnungen wird oft statt des Trägheitsmomentes das „Schwungmoment" (GD^2) [oder $\Sigma(GD^2)$] angegeben, wobei (GD^2) in kgm^2 ausgedrückt zu werden pflegt. Wir bedienen uns hier des technischen Maßsystems mit kg, cm und s als Einheiten. Zwischen dem Schwungmoment in kgm^2 einer Masse und ihrem Trägheitsmoment in $\mathrm{kgcm\,s}^2$ besteht die einfache Beziehung

$$m = \frac{10^4\,(GD^2)}{4g} = 2{,}5484\,(GD^2)\,. \tag{31}$$

wobei $g = 981\ \mathrm{cm\,s}^{-2}$ die Erdbeschleunigung bedeutet.

Soweit es sich also um fest mit der Welle verbundene Massen handelt, kommt deren Trägheitsmoment in bezug auf die Wellenachse in Frage. Bei Kolbenmaschinen nehmen aber auch die hin- und hergehenden Kolben und Triebwerksteile infolge ihrer gelenkigen Verbindung mit der Welle an den Schwingungen teil, und zwar je nach der Kurbelstellung in mehr oder weniger großem Maße: in den Totpunkten gar nicht, in Mitte des Hubes mit dem vollen Betrag. Eine Kolbenmaschine hat also auch je nach der Kurbelstellung verschiedene Eigenschwingungszahlen (ruhende Maschine). Es interessieren aber gerade die Schwingungen im Betriebe. Führt die Welle einer laufenden Maschine Drehschwingungen aus, so ist in jedem Augenblick die an der Schwingung beteiligte Masse eine andere. Eigentlich müßte also mit zeitlich veränderlichen Massen gerechnet werden, was eine wesentliche Erschwerung der Untersuchung bedeuten würde. Erfahrungsgemäß kann man aber in solchen Fällen die Schwingungserscheinungen praktisch genau genug wiedergeben, wenn man statt der zeitlich veränderlichen Masse eine mittlere unveränderliche Masse annimmt. Nach dem Vorgange Frahms werden die hin- und hergehenden Massen mit der Hälfte ihrer Größtwirkung in Rechnung gesetzt. Die Treibstangenmasse, die zum Teil drehende, zum Teil hin- und hergehende Bewegung ausführt, zerlegt man in der üblichen Weise in zwei Einzelmassen, einen rotierenden Teil am Kurbelzapfen, der ganz, und einen hin- und hergehenden Teil am Kreuzkopfzapfen, der zur Hälfte in Ansatz kommt.

Ist also für ein Kurbeltriebwerk vom Kurbelradius r das Gewicht des rotierenden Teils der Schubstange G_1, das Gewicht aller hin- und hergehenden Teile (einschließlich des Anteils der Schubstange) G_2, so ist, wenn m_k das Trägheitsmoment der Kurbelschenkel und des Kurbelzapfens bedeutet, das gesamte in Rechnung zu ziehende Trägheitsmoment

$$m = m_k + \frac{G_1 + \frac{G_2}{2}}{g} r^2 . \tag{32}$$

Wegen der in Wirklichkeit zeitlich veränderlichen schwingenden Massen einer laufenden Kolbenmaschine sind auch deren Eigenschwingungszahlen nicht scharf bestimmt, und jedes kritische Gebiet erstreckt sich daher nicht auf eine scharf gegebene Drehzahl, sondern über einen größeren Drehzahlbereich[1]).

Die Masse der Welle selbst kann meist ganz vernachlässigt werden, wenn das Massenträgheitsmoment der Welle im Vergleich zu den Trägheitsmomenten der übrigen Massen nur klein ist. Immerhin aber können Fälle vorkommen, bei denen die Masse der Welle berücksichtigt werden muß, z. B. bei den langen Schraubenwellen der Schiffe. Wie in solchen Fällen der Einfluß der Wellenmasse genau und angenähert berechnet wird, soll später gezeigt werden.

3. Periodische Kräfte und Momente.

Die Ursache der Schwingungserscheinungen bilden periodisch wechselnde Kräfte oder Momente, bei Kolbenmaschinen die Tangentialkräfte oder Drehmomente der Arbeitszylinder und der Pumpen, die sich, den Beharrungszustand vorausgesetzt, nach jeder Maschinenumdrehung oder nach einer bestimmten Zahl von Maschinenumdrehungen wiederholen (z. B. Viertaktmaschinen mit der Periode zweier Um-

[1]) Siehe die Verdrehungsdiagramme Frahms in der Z. d. V. d. I. 1918, S. 179.

drehungen). Die an den einzelnen Kurbeln wirkenden Drehmomente sind demnach periodische Funktionen der Zeit, d. h. das Drehmoment nimmt in gleichen Zeitabständen T immer wieder den gleichen Wert an. T heißt die Dauer der Periode. Man pflegt solche periodische Funktionen durch ein Polardiagramm darzustellen, in welchem der Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Winkel, in der Zeit T den vollen Kreis oder den Winkel 2π zurücklegt. Die Winkelschnelle der Periode ist

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{33}$$

(Daraus geht hervor, daß es im allgemeinen nicht zulässig ist, an Stelle der Zeit den von der Maschine zurückgelegten Kurbelwinkel oder ein Vielfaches davon anzunehmen, denn in gleichen Zeiten werden im allgemeinen nicht gleiche Winkel zurückgelegt, das gilt nur angenähert für Maschinen mit großer Gleichförmigkeit des Ganges.)

Bekanntlich hat Fourier gezeigt, daß sich jede beliebig gegebene periodische Funktion $F(\omega t)$ darstellen läßt durch eine Reihe von der Form

$$\left.\begin{aligned} F(\omega t) = A_0 &+ A_1 \sin\omega t + A_2 \sin 2\omega t + A_3 \sin 3\omega t + \dots \\ &+ B_1 \cos\omega t + B_2 \cos 2\omega t + B_3 \cos 3\omega t + \dots \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

in welcher die Größen A_h, B_h bestimmte konstante Werte sind. Sie ergeben sich nämlich aus Gl. (34), wenn man die Gleichung mit $\sin h\omega t$, bzw. mit $\cos h\omega t$ multipliziert und für den ganzen Bereich der Periode 2π integriert. Dabei verschwinden sämtliche Integrale der Form:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin k\omega t \sin h\omega t \, d\omega t = 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos k\omega t \sin h\omega t \, d\omega t = 0 \end{aligned}\right\} \text{wenn } k \gtrless h,$$

wie man leicht nachweist, und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(\omega t) \sin h\omega t \, d\omega t = A_h \int_0^{2\pi} \sin^2 h\omega t \, d\omega t = \frac{A_h}{h} \Big| -\tfrac{1}{4}\sin 2h\omega t \\ + \frac{h\omega t}{2}\Big]_0^{2\pi} = \pi A_h, \end{aligned}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} A_h &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\omega t) \sin h\omega t \, d\omega t \\ \text{ebenso} \qquad B_h &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\omega t) \cos h\omega t \, d\omega t \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Die Integrale dieser Gleichungen lassen sich in allen Fällen, wenigstens graphisch, leicht ermitteln.

Für A_0 ergibt sich:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\omega t)\, d(\omega t)\,. \tag{35a}$$

Man nennt eine solche Zerlegung einer gegebenen periodischen Funktion ihre harmonische Analyse.

In Gl. (34) lassen sich je zwei entsprechende Glieder noch in ein einziges Glied zusammenfassen von der Form:

$$A_h \sin h\,\omega\,t + B_h \cos h\,\omega\,t = C_h \sin(h\,\omega\,t + \varepsilon_h) \tag{36}$$

Dabei ist, wie man leicht beweist:

$$\left.\begin{aligned} C_h &= \sqrt{A_h^2 + B_h^2} \\ \varepsilon_h &= \operatorname{arctg}\frac{B_h}{A_h} \end{aligned}\right\} \tag{36a}$$

Man nennt C_h den Ausschlag (Amplitude), ε_h den Phasenverschiebungswinkel des harmonischen Gliedes der $h$ten Ordnung. C_h ist nämlich der Größtwert, den das Glied für alle Werte von t annehmen kann und ε_h ist sein Phasenwinkel zur Zeit $t = o$. Man kann den Ausdruck $C_h \sin(h\,\omega\,t + \varepsilon_h)$ darstellen (Fig. 11) durch die Projektion C_h' einer Strecke C_h, die in der Dauer einer Umdrehung $T_h = \frac{T}{h}$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_h = h \cdot \frac{2\pi}{T} = h\,\omega$ gleichförmig umläuft. Aus Gl. (36) folgt auch umgekehrt, daß man jedes harmonische Glied von der Form $C_h \sin(h\,\omega\,t + \varepsilon_h)$ zerlegen kann in die Summe zweier harmonischer Glieder mit den Ausschlägen $A_h = C_h \cos\varepsilon_h$ mit dem Phasenwinkel 0 und $B_h = C_h \sin\varepsilon_h$ mit dem Phasenwinkel $\frac{\pi}{2}$, denn $\sin\left(h\,\omega\,t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos h\,\omega\,t$.

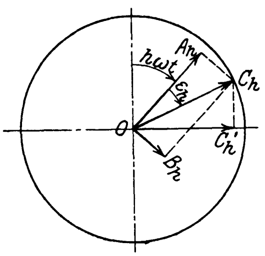


Fig. 11.

Als Beispiel sei die harmonische Analyse der Drehmomente einer Viertakt-Dieselmaschine gezeigt. Die Gleichförmigkeit ihres Ganges sei so groß vorausgesetzt, daß genau genug der Kurbelwinkel als der Zeit proportional angesehen

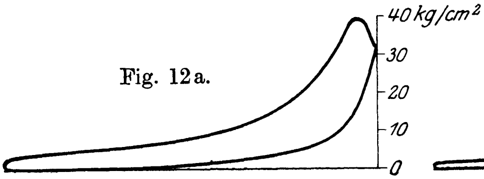


Fig. 12a.

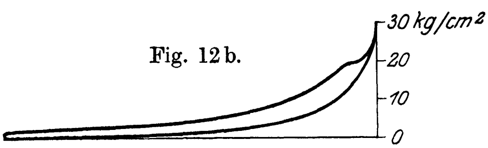


Fig. 12b.

werden kann. Die Kolbenkräfte sind aus den Indikatordiagrammen *a* für große Füllung, *b* für kleine Füllung gegeben (Fig. 12). Um die harmonischen Drehmomente gleich für alle Maschinendrehzahlen zu erhalten, behandeln wir die Tangentialkräfte der Maschine getrennt nach solchen, die allein von dem Gasdruck

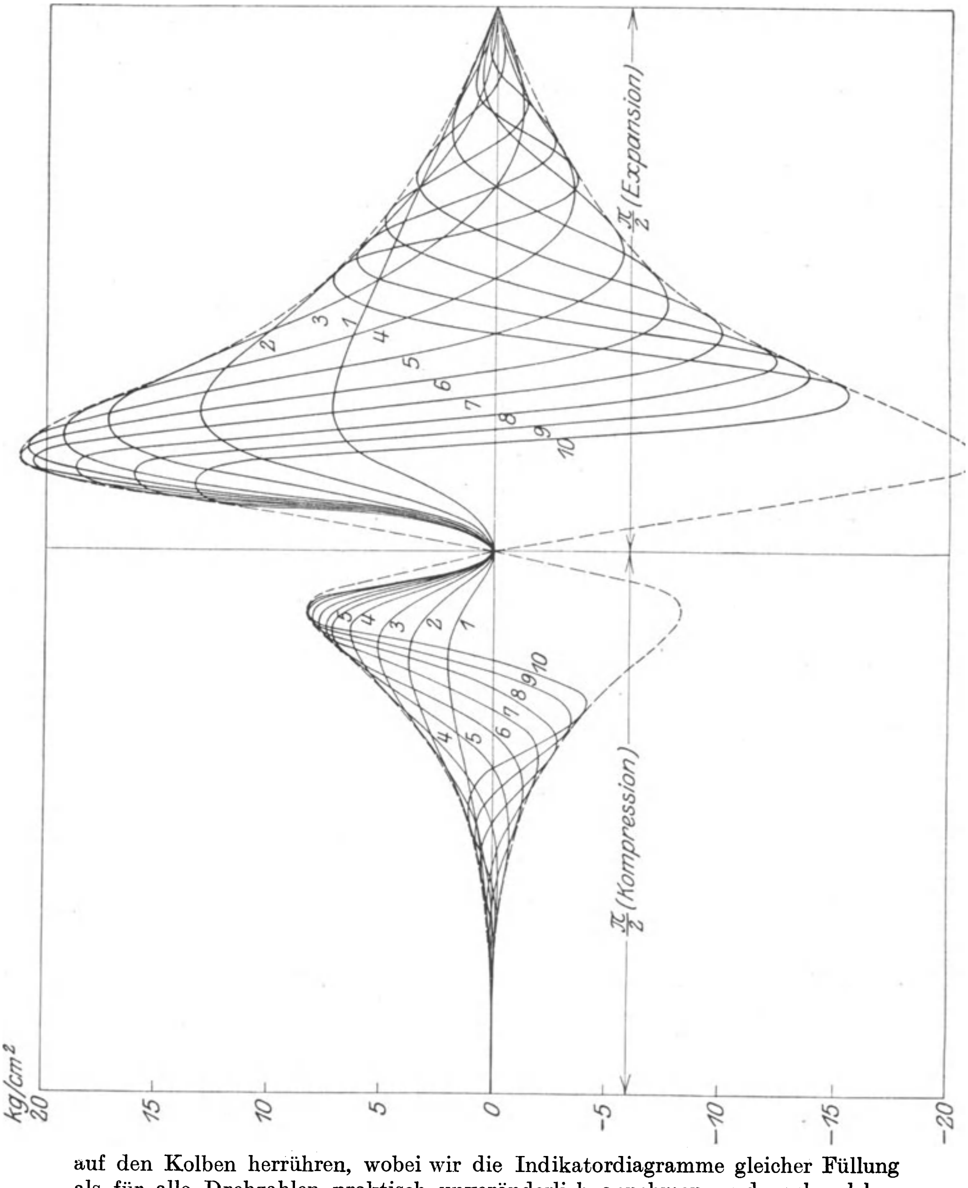
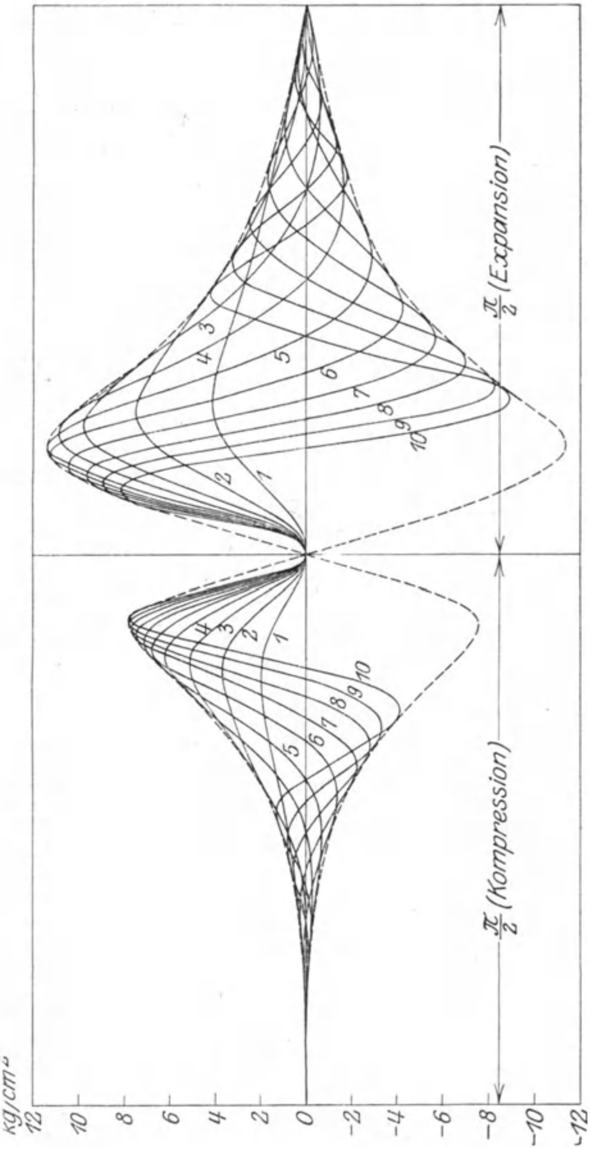


Fig. 13a.

auf den Kolben herrühren, wobei wir die Indikatordiagramme gleicher Füllung als für alle Drehzahlen praktisch unveränderlich annehmen, und nach solchen Tangentialkräften, die allein durch die Trägheitskräfte der hin- und hergehenden Massen erzeugt werden. Genau genommen wären außerdem noch die Reibungskräfte des Kolbens und der Triebwerksteile zu berücksichtigen, von denen wir hier mangels genauer Kenntnis dieser Kräfte absehen müssen. Man pflegt sie in roher Schätzung auch wohl dadurch zu berücksichtigen, daß man die (ohne Reibung) ermittelten Tangentialkräfte mit einer Erfahrungszahl kleiner als 1 multipliziert. Die vom Gasdruck auf den Kolben allein erzeugten Tangentialkräfte mögen mit T', die von den Massenkräften herrührenden mit T'' bezeichnet sein, so daß die gesamte Tangentialkraft $T = T' + T''$. Für die Umrechnung (oder Konstruktion) der Kolbenkräfte in Tangentialkräfte ist ein Verhältnis $\lambda = \frac{1}{5}$ des Kurbelradius zur Schubstangenlänge vorausgesetzt worden. Um die Lösung der Aufgabe möglichst allgemein zu halten, sind weder über die Abmessungen der Maschine noch über die Größe der hin- und hergehenden Massen bestimmte Zahlen angenommen worden, so daß die Tangentialkräfte herrührend vom Gasdruck mit $F \cdot r$, die von den Trägheitskräften stammenden mit $\frac{G r^2 \omega_0^2}{g}$ multipliziert werden müssen, um daraus im Einzelfalle die Drehmomente zu erhalten; F bedeutet dabei die wirksame Kolbenfläche in cm^2, r den Kurbelradius in cm, G das Gewicht der hin- und hergehenden Teile in kg, $\omega_0 = \frac{\pi n_0}{30}$ die der Maschinendrehzahl n_0 entsprechende Winkelgeschwindigkeit der Kurbel in s^{-1} und $g = 981 \text{ cm s}^{-2}$ die Erdbeschleunigung.



In den Fig. 13a und 13b sind die Werte $T' \sin h \omega t$ für große bzw. für kleine Füllung als Funktion der Zeit (des Kurbelwinkels), in den Fig. 14a und 14b die entsprechenden Werte $T' \cos h \omega t$ für $h = 1, 2, 3 \ldots 10$, bezogen auf die Periode

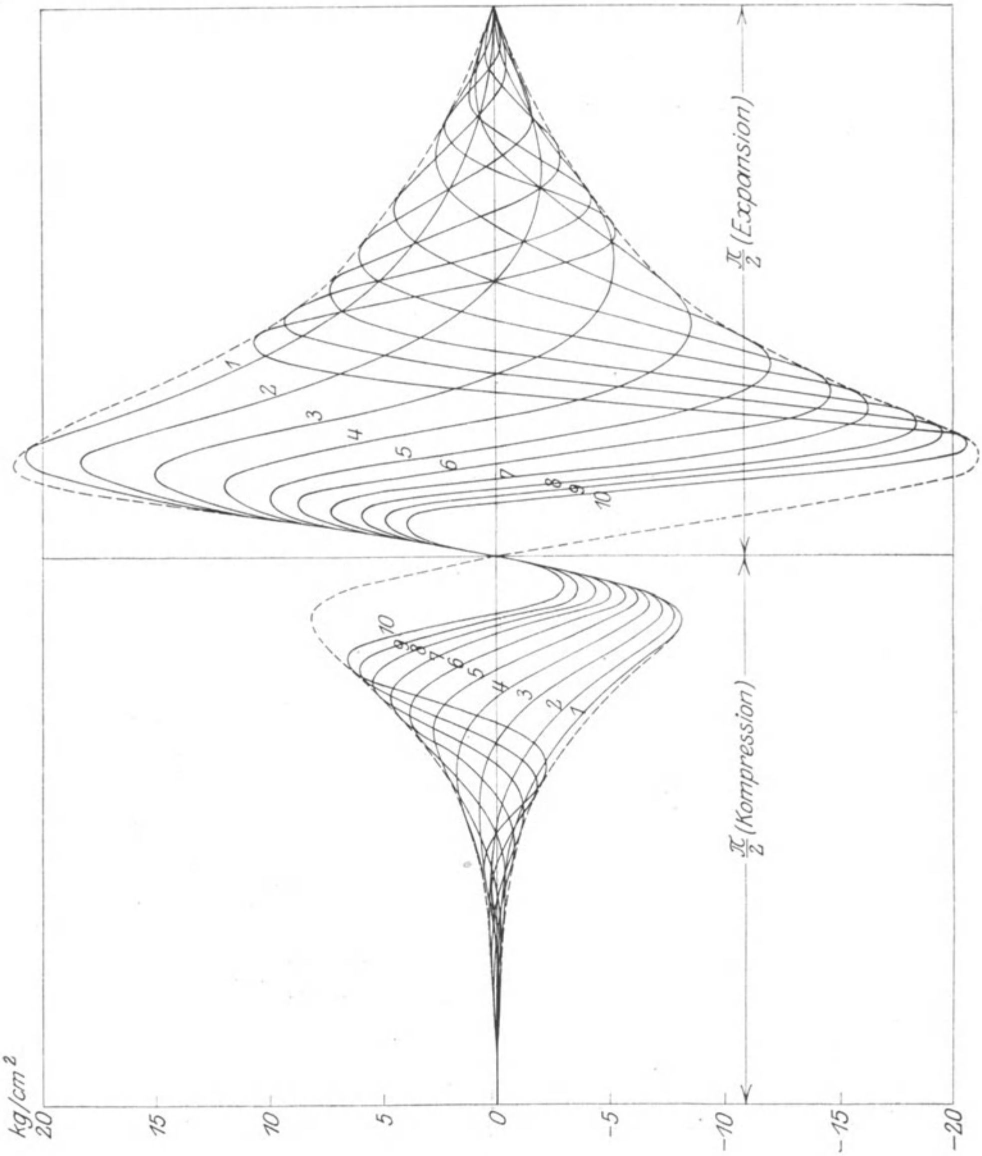


Fig. 14a.

des Viertakts (2 Maschinenumdrehungen) dargestellt, und zwar nur für die Kompressions- und Expansionsperiode, weil die Gasdrücke für Ansaug- und Ausschubhub vernachlässigbar klein sind. Die von den Kurven $T' \sin h \omega t$ und $T' \cos h \omega t$

mit der Zeitachse (Abszissenachse) gebildeten Flächen dienen zur Berechnung von A'_h und B'_h gemäß Gl. (35).

Für die Massenkräfte zeigt Fig. 15 die Kurven $T'' \sin h\,\omega\,t$ für $h = 1, 2, 3 \ldots 6$ bezogen auf die Periode einer Maschinenumdrehung, weil sich die Massenkräfte für jede Maschinenumdrehung wiederholen. Die Kurven $T'' \cos h\,\omega\,t$ brauchen nicht aufgezeichnet zu werden, da ihre Flächen für die ganze Periode der Umdrehung wegen der Symmetrie der Massendrücke für den Kolbenhin- und Rückgang sämtlich Null werden, wovon man sich leicht überzeugt. Aus dem gleichen Grunde der Symmetrie sind die Kurven $T'' \sin h\,\omega\,t$ nur für die halbe Umdrehung dargestellt, weil sie sich für die andere Hälfte symmetrisch wiederholen.

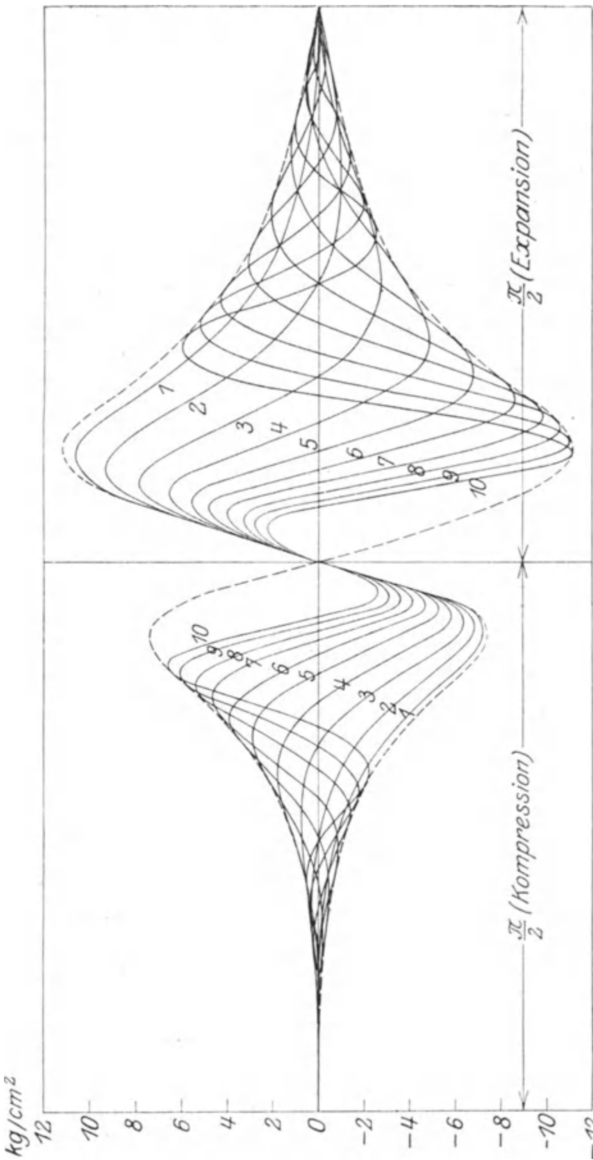


Fig. 14b.

Die positiv und negativ aufgetragenen Kurven der Tangentialkräfte T' und T'' selbst sind in den Fig. 13 bis 15 gestrichelt eingezeichnet. Sie umhüllen die Einzelkurven $T' \sin h\omega t$, $T' \cos h\omega t$ und $T'' \sin h\,\omega\,t$, denn an jeder Stelle gibt der positive oder negative Wert der Tangentialkraft den Größtwert an, den diese Glieder annehmen können.

Man erhält aus den Kurven und ihren Flächen die in Zahlentafel 2, Seite 23, zusammengestellten Werte der harmonischen Drehmomente.

Für einen beliebig gegebenen Fall eines einfachwirkenden Viertaktmotors kann man sich damit leicht die gesamten harmonischen Drehmomente aus der Summe der Werte für Gasdruck und Massen bestimmen. Man muß nur dabei beachten, daß die harmonischen Teilmomente der Massen, A_h'' und B_h'', welche in bezug auf die Periode einer Umdrehung von der $h$ten Ordnung sind, in bezug auf die Periode des Viertaktes der $2\,h$ten Ordnung angehören, und daß folglich auch alle Komponenten A_h'' und B_h'' der Massen, welche sich auf eine ungerade Ordnung des Viertaktes beziehen, gleich Null sind.

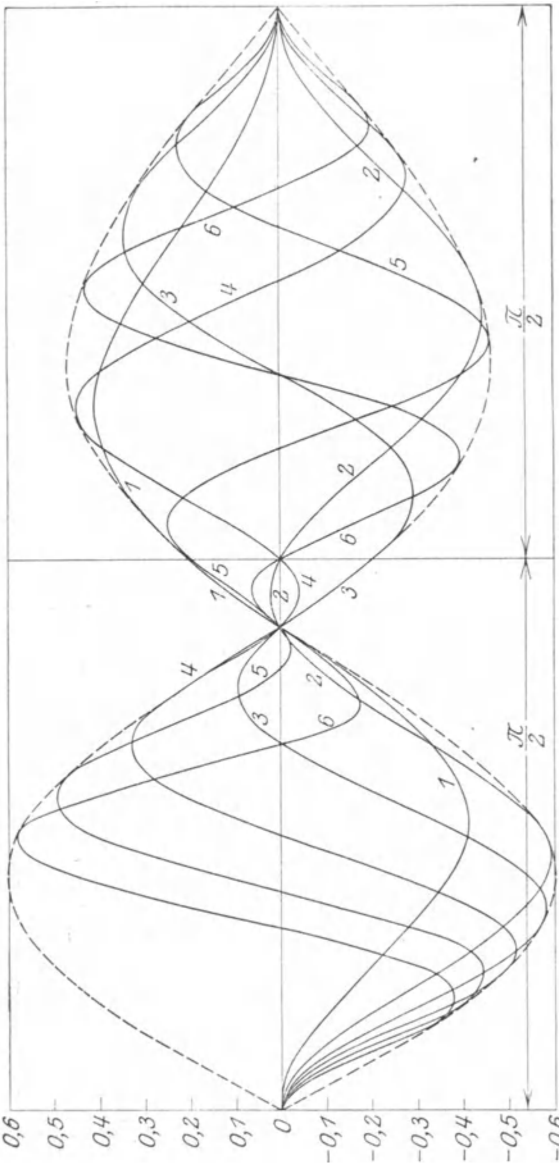


Fig. 15.

Es seien z. B. die harmonischen Drehmomente einer einfach wirkenden Viertakt-Dieselmaschine 6. und 9. Ordnung (die Ordnung bezogen auf die Periode des Viertakts) für eine Maschinendrehzahl $n_0 = 360$/Min. zu ermitteln. Die Kolbenfläche beträgt $F = 962\ \text{cm}^2$, der Kurbelradius $r = 17{,}5\ \text{cm}$, das Gewicht der hin und her gehenden Teile

$G = 200$ kg.

Um schon aus der Bezeichnung zu erkennen, ob sich die Ordnung auf die Periode der Maschinenumdrehung oder auf jene des Viertakts bezieht, wollen wir die Ordnungsziffern im letzteren Fall in Klammern setzen. Nicht eingeklammerte Ordnungsziffern beziehen sich also auf die Maschinenumdrehung. (Man findet in der technischen Literatur wohl auch die Ordnungsziffern des Viertaktes durch jene der Umdrehung ersetzt, wobei man für die ungeraden Ordnungen sich gebrochener Zahlen bedienen muß; die 9. Ordnung der Viertaktperiode wäre also als $4^1/_2$te Ordnung der Umdrehung bezeichnet. Aber logisch richtig ist diese Benennungsweise nicht; das Kennzeichen der harmonischen Ana-

Zahlentafel 2.
Viertakt: 1 Periode = 2 Maschinenumdrehungen = 2π.
Harmonische Drehmomente der Gasdrücke allein.

	$(h) =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a) Große Füllung	$A'_{(h)}: F r =$	2,25	3,46	3,44	2,83	2,26	1,84	1,42	0,96	0,54	0,41
	$B'_{(h)}: F r =$	2,37	1,09	—0,02	—0,54	—0,59	—0,52	—0,59	—0,67	—0,72	—0,50
b) Kleine Füllung	$A'_{(h)}: F r =$	1,37	2,14	2,19	1,87	1,48	1,19	0,85	0,61	0,42	0,30
	$B'_{(h)}: F r =$	0,84	0,30	—0,16	—0,30	—0,35	—0,32	—0,29	—0,24	—0,14	—0,14

Massen: 1 Periode = 1 Maschinenumdrehung = 2π.
Harmonische Drehmomente der Massenkräfte allein.

$h =$	1	2	3	4	5	6
$A''_h : \frac{G}{g} r^2 \omega_0^2 =$	0,047	—0,497	—0,153	—0,011	+0,003	0,006
$B''_h : \frac{G}{g} r^2 \omega_0^2 =$	0	0	0	0	0	0

lyse ist die Zerlegung in Glieder, die nach sin und cos der ganzzahligen Vielfachen der Periodenwinkel fortschreiten.) Man erhält aus Zahlentafel 2:

a) für große Füllung:

$A'_{(6)} = 1{,}84\,F r = 1{,}84 \cdot 962 \cdot 17{,}5 = 30976$ kgcm,
$B'_{(6)} = -0{,}52\,F r = -8754$ kgcm,
$A'_{(9)} = +0{,}54\,F r = 9091$ kgcm,
$B'_{(9)} = -0{,}72\,F r = -12121$ kgcm

b) für kleine Füllung:

$A'_{(6)} = 1{,}19\,F r = 20034$ kgcm,
$B'_{(6)} = -0{,}32\,F r = -5387$ kgcm,
$A'_{(9)} = 0{,}42\,F r = 7071$ kgcm,
$B'_{(9)} = -0{,}14\,F r = -2357$ kgcm.

Für den Anteil der Massenkräfte findet sich:

$$A''_{(6)} = A''_3 = -0{,}153\,\frac{G}{g} r^2 \omega_0^2 = -0{,}153 \cdot \frac{200}{981} \cdot 17{,}5^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot 360^2}{30^2} = -13495 \text{ kgcm},$$
$$B''_{(6)} = B''_3 = 0$$
$$A''_{(9)} = B''_{(9)} = 0\,.$$

Damit berechnen sich die gesamten harmonischen Drehmomente:

a) für große Füllung:

$A_{(6)} = A'_{(6)} + A''_{(6)} = 30976 - 13495 = 17481$ kgcm,
$B_{(6)} = B'_{(6)} + B''_{(6)} = -8754$ kgcm,
$C_{(6)} = \sqrt{A^2_{(6)} + B^2_{(6)}} = 19550$ kgcm,
$\operatorname{tg} \varepsilon_{(6)} = \frac{B_{(6)}}{A_{(6)}} = -0{,}5008$,
$\varepsilon_{(6)} = -26^\circ\,36' = -0{,}464$,

Ebenso ergibt sich:

$A_{(9)} = A'_{(9)} + A''_{(9)} = 9091$ kgcm,
$B_{(9)} = B'_{(9)} + B''_{(9)} = -12121$ kgcm,
$C_{(9)} = \sqrt{A^2_{(9)} + B^2_{(9)}} = 15151$ kgcm,
$\operatorname{tg} \varepsilon_{(9)} = \frac{B_{(9)}}{A_{(9)}} = -1{,}3333$,
$\varepsilon_{(9)} = -53^\circ\,8' = -0{,}927$,

b) für kleine Füllung:

$A_{(6)} = 20034 - 13495 = 6539$ kgcm,
$B_{(6)} = -5387$ kgcm,
$C_{(6)} = 8472$ kgcm,
$\operatorname{tg} \varepsilon_{(6)} = -0{,}8238$,
$\varepsilon_{(6)} = -39^\circ\,29' = -0{,}689$.

$A_{(9)} = 7071$ kgcm,
$B_{(9)} = -2357$ kgcm,
$C_{(9)} = 7454$ kgcm,
$\operatorname{tg} \varepsilon_{(9)} = -0{,}3333$,
$\varepsilon_{(9)} = -18^\circ\,26' = -0{,}322$.

Zahlentafel 2 kann auch zur ungefähren Bestimmung der harmonischen Drehmomente einfachwirkender Zweitakt-Dieselmotoren verwendet werden, wenn man von dem Unterschied der Zwei- und Viertakt-Indikatordiagramme absieht. Es ist zu diesem Zweck nur zu setzen:

$$A'_h = 2\,A'_{(2h)}$$

und

$$B'_h = 2\,B'_{(2h)}\,.$$

Für eine einfachwirkende Zweitakt-Dieselmaschine der gleichen Größe und für die gleiche Drehzahl werden also die harmonischen Drehmomente 3. Ordnung ungefähr:

$$A_3 = A'_3 + A''_3 = 2\,A'_{(6)} + A''_3 \qquad \text{und} \qquad B_3 = 2\,B'_{(6)} + B''_3.$$

a) für große Füllung:

$$A_3 = 2 \cdot 1{,}84\,F\,r - 0{,}153\,\frac{G}{g}\,r^2\,\omega_0^2 = 2 \cdot 30\,976 - 13495 = 48\,450 \text{ kgcm},$$

$$B_3 = 2 \cdot -0{,}52 \cdot F\,r = -17\,500 \text{ kgcm},$$

$$C_3 = 51500 \text{ kgcm}, \quad \operatorname{tg}\varepsilon_3 = -0{,}361.$$

b) für kleine Füllung:

$$A_3 = 2 \cdot 1{,}19\,F\,r - 0{,}153\,\frac{G}{g}\,r^2\omega_0^2 = 26570 \text{ kgcm},$$

$$B_3 = -2 \cdot 0{,}32\,F\,r = -10\,770 \text{ kgcm}$$

$$C_3 = 28\,650 \qquad \operatorname{tg}\varepsilon_3 = -0{,}405\,.$$

Unser Beispiel einer harmonischen Analyse ist nur für 10 Glieder bezüglich der harmonischen Momente der Gasdrücke und für 12 bzw. 6 Glieder bezüglich jener der Massendrücke durchgeführt. Eigentlich hat die Fouriersche Reihe unendlich viele Glieder. Wie man aber aus unserem Beispiel erkennt, werden im allgemeinen die Glieder höherer Ordnung immer kleiner, zudem sind sie auch nicht mehr genau bestimmbar, weil die Ungenauigkeiten der Drehkraftdiagramme und der Zeichnung immer mehr ins Gewicht fallen. Da die Größe und damit die Gefährlichkeit der Schwingungsausschläge den Amplituden der harmonischen Drehmomente proportional ist, so kommen für die Zwecke der Schwingungsuntersuchung auch nur die größten Glieder der Reihe vor allem in Frage. Nur bei Vielzylindermaschinen können, wie sich zeigen wird, auch die kleineren Glieder höherer Ordnung noch von merklichem Einfluß sein, weil sich für viele Zylinder die verhältnismäßig kleinen Momentimpulse jedes Zylinders in ihrer Wirkung auf die Schwingungsausschläge für alle Zylinder addieren und so dennoch infolge der Vielzahl der Zylinder an Bedeutung gewinnen.

Die harmonische Analyse beliebig gegebener periodischer Funktionen kann auch mit mechanischen Mitteln geschehen; die dazu dienenden Geräte heißen harmonische Analysatoren[1]).

[1]) Siehe die Beschreibungen des Henrici-Coradi-Analysators bei Hort: Die Differentialgleichungen des Ingenieurs, S. 281, und des Analysators von Mader, Elektrotechn. Zeitschr. 1909, S. 847. Weitere Geräte sind beschrieben im Büchlein: Orlich, Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven (Vieweg, Braunschweig 1906), das ich während des Druckes kennenlernte.

II. Drehschwingungen ohne Dämpfung.

4. Ungedämpfte Schwingungen einer Einzelmasse.

Das Zustandekommen der Drehschwingungen möge zunächst am einfachsten Fall einer einzigen Masse gezeigt werden, die fest auf einer Welle (Drehfeder) sitzt, deren eines Ende fest eingespannt ist; Fig. 16. An der Masse möge ein periodisch wechselndes Drehmoment M wirken. Die Periodendauer des Momentes sei T, die Winkelschnelle der Periode mithin $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Das Moment M denken wir uns durch harmonische Analyse in seine harmonischen Komponenten zerlegt:

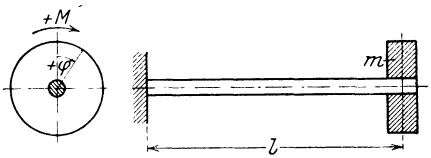


Fig. 16.

$$M = \sum_{h=1}^{h=\infty} (A_h \sin h\,\omega\,t + B_h \cos h\,\omega\,t)\,.$$

(Das konstante Glied A_0 der harmonischen Analyse bleibt, weil nicht periodisch veränderlich, außer Betracht; es würde nur einen konstanten zusätzlichen Verdrehungswinkel verursachen.)

Auf der zylindrischen, unverdrehten, masselos vorausgesetzten Welle denken wir eine Mantellinie (etwa die höchstgelegene) angerissen. Infolge der Verdrehung der Welle verzerrt sie sich in eine Schraubenlinie. Die Winkelabweichung, die jeder Punkt der Mantellinie gegenüber seiner Lage im unverzerrten Zustand (Ruhelage) erleidet, ist für jeden Punkt der Wellenlänge verschieden und, da hier nur Formänderungen innerhalb der Elastizitätsgrenze vorausgesetzt werden, proportional dem Abstand vom Einspannquerschnitt; für den Einspannquerschnitt ist der Verdrehungswinkel = Null, für den Wellenquerschnitt am Sitz der Masse $= \varphi$. Um diese Formänderung der Welle hervorzubringen, ist ein Drehmoment erforderlich von der Größe

$$\left.\begin{aligned} M_d &= \frac{G \cdot J}{l}\,\varphi \equiv c\,\varphi \\ \text{mit } c &\equiv \frac{G\,J}{l}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

(G Schubelastizitätsmodul des Wellenmaterials in kg/cm², J polares Trägheitsmoment des Wellenquerschnitts in cm⁴, l die Wellenlänge in cm vom Einspannquerschnitt bis zum Sitz der Masse.)

Infolge der Schwingung ändert sich der Schwingungswinkel φ in jedem Augenblick; φ ist also eine vorerst unbekannte Funktion der Zeit, deren Bestimmung unsere Aufgabe bildet.

Wir bezeichnen Drehwinkel und Drehmomente im Uhrzeigersinn als positiv. Das zum Verdrehungswinkel φ gehörige elastische Moment der Welle muß man mit negativem Vorzeichen versehen, $-c\varphi$, denn es sucht die absolute Größe des Winkels φ zu verkleinern, ob dieser Winkel positiv oder negativ ist.

Da wir uns die Masse starr mit der Welle verbunden denken, so macht sie die Winkelausschläge des Wellenendquerschnittes mit; $\frac{d\varphi}{dt}$ ist demnach ihre augenblickliche Winkelgeschwindigkeit, $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ ihre Winkelbeschleunigung. Die Trägheit der Masse wird nach dem d'Alembertschen Prinzip durch das negative Moment $-m\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ berücksichtigt, wenn m das Massenträgheitsmoment in bezug auf die Wellenachse in kgcms^2 bedeutet. Das Gleichgewicht aller am Massensitz wirkenden Momente verlangt also die Gleichung:

$$-m\frac{d^2\varphi}{dt^2} - c\varphi + \sum_{h=1}^{h=\infty}(A_h \sin h\omega t + B_h \cos h\omega t) = 0\,. \tag{38}$$

Gl. (38) ist die Differentialgleichung der Drehschwingung, sie ist, wie man sieht, linear von der zweiten Ordnung. Ihre vollständige Lösung setzt sich bekanntlich aus zwei Teilen zusammen[1]) und lautet:

$$\varphi = \left[\alpha_0 \sin\sqrt{\frac{c}{m}}\,t + \beta_0 \cos\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right] + \sum_{h=1}^{h=\infty}(\alpha_h \sin h\omega t + \beta_h \cos h\omega t) \tag{39}$$

Darin sind α_0 und β_0 die willkürlichen Integrationskonstanten, mittels welcher man die Lösung allen Anfangsbedingungen anpassen kann, während die Werte α_h und β_h nicht willkürlich, sondern aus den gegebenen harmonischen Momenten A_h und B_h eindeutig bestimmt sind. Differenziert man nämlich die Lösungsgleichung (39) zweimal nach t und setzt die Werte $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ und φ in die Schwingungsgleichung (38) ein, so erhält man:

$$\sum_{h=1}^{h=\infty}[(c - mh^2\omega^2)(\alpha_h \sin h\omega t + \beta_h \cos h\omega t)] = \sum_{h=1}^{h=\infty}(A_h \sin h\omega t + B_h \cos h\omega t)$$

und daraus:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_h &= \frac{A_h}{c - m h^2 \omega^2}\\ \beta_h &= \frac{B_h}{c - m h^2 \omega^2}.\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Der auf der rechten Seite von Gl. (39) in eckigen Klammern stehende erste Teil rührt von den **Eigenschwingungen** des Systems her,

[1]) Siehe Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. IV.

während der unter dem Summenzeichen stehende zweite Teil die erzwungenen Schwingungen darstellt. Nur die letzteren hängen gemäß Gl. (40) von der Größe des gegebenen periodischen Momentes, des erzwingenden Momentes, ab.

Man hat also wesentlich zwischen freien oder Eigenschwingungen und zwischen erzwungenen Schwingungen zu unterscheiden.

Wie man aus Gl. (39) erkennt, besitzen die Eigenschwingungen in unserem einfachen Fall die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \tag{41}$$

oder mit der Bedeutung von c aus Gl. (37)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G\,J}{l\,m}}\,. \tag{41a}$$

Damit wird die Eigenschwingungsdauer T_0:

$$T_0 = \frac{2\,\pi}{\omega_0} = 2\,\pi\sqrt{\frac{l\,m}{G\,J}}\,. \tag{41b}$$

und die Eigenschwingungszahl in der Minute n_0:

$$n_0 = \frac{30}{\pi}\,\omega_0 = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{G\,J}{l\,m}}\,. \tag{41c}$$

Wie aus Gl. (40) ersichtlich, hängt jede Größe α_h nur von der mit ihr gleichphasigen Komponente A_h des harmonischen Momentes gleicher Periode (h), jede Größe β_h nur vom gleichphasigen Moment B_h ab. Daraus folgt, daß man zur Ermittlung des Einflusses des Gesamtmomentes M, das sich aus harmonischen Momenten von beliebigen Perioden und Phasen zusammensetzen kann, auf die Größe des Schwingungswinkels φ die Einzelanteile des Schwingungswinkels für die harmonischen Momente gleicher Periode und gleicher Phase für sich bestimmen kann, d. h. so, als wären am System nur die harmonischen Momente von der betreffenden Periode und der gewählten Phase wirksam. Die Einzelwinkel sind schließlich für alle harmonischen Momente zu addieren, um den gesamten Drehwinkel zu erhalten. Man sagt dafür kurz, daß sich die Schwingungswinkel, die von den einzelnen harmonischen Drehmomenten erzeugt werden, einander überlagern. Diese Eigenschaft der erzwungenen Schwingungen ist dem Umstand zuzuschreiben, daß die Differentialgleichung der Schwingung linear ist.

Aus Gl. (40) geht ferner hervor, daß die Werte α_h und β_h unendlich groß werden, wenn der Nenner Null wird, wenn also $h\,\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ ist, vorausgesetzt, daß nicht gleichzeitig auch A_h und $B_h = 0$ sind. Das heißt: ‹Bei fehlender Dämpfung werden die Schwingungsausschläge (theoretisch) unendlich groß, wenn die Periode eines erzwingenden harmonischen Momentes von endlicher Größe mit der Periode der Eigenschwingung zusammenfällt (Resonanz).

5. Schwingungssysteme mit beliebig vielen Massen.

Nach der Behandlung dieses einfachen Falles einer Einzelmasse können wir an die Untersuchung der Schwingungen einer mit beliebig vielen Massen besetzten Welle gehen, an welcher an beliebig gegebenen Stellen beliebig gegebene periodische Drehmomente von im allgemeinen verschiedenen Perioden wirken. Die Perioden brauchen im allgemeinsten Fall nicht einmal ganzzahlige Vielfache der Umdrehungsdauer der Maschinenwelle zu sein, wie im Fall der unmittelbar durch Kurbeln mit der Welle verbundenen Arbeitszylinder und Pumpen; man kann sich etwa vorstellen, daß durch Übersetzungsgetriebe (Riemen, Zahnräder u. dgl.) auch periodisch wechselnde Drehmomente beliebiger Periodendauer auf die Maschinenwelle einwirken. Unsere Aufgabe besteht nun darin, für all diese periodischen Momente den Schwingungswinkel jeder Masse für jeden beliebigen Zeitpunkt zu bestimmen, d. h. den Winkel, um den die betreffende Masse aus der Ruhelage abgelenkt ist. Zu diesem Zweck wird man zuerst alle gegebenen periodischen Drehmomente M_l durch harmonische Analyse in eine Summe harmonischer Momente mit den Phasenwinkeln 0 und $\frac{\pi}{2}$ auflösen von der Form:

$$M_l = \sum_{h=1}^{h=\infty} (A_{h,l} \sin h\,\omega_l\,t + B_{h,l} \cos h\,\omega_l\,t)\,.$$

Der doppelte Fußzeiger der harmonischen Komponenten A und B ist zur Kennzeichnung der verschiedenen Grundperioden $T_l = \frac{2\pi}{\omega_l}$ der gegebenen periodischen Drehmomente erforderlich. Der erste Fußzeiger gibt wie bisher die Ordnungszahl bezüglich der Grundperiode an, der zweite Zeiger läßt erkennen, daß sich die Komponente auf das Drehmoment der Periodendauer T_l bezieht. Im ganzen seien periodische Drehmomente mit p verschiedenen Grundperioden (die ganzzahligen Vielfachen einer Grundperiode sind also in l und p nicht enthalten) an der Welle wirksam, so daß l die ganzen Zahlenwerte $1, 2 \ldots$ bis p annehmen kann. Der lineare Charakter der Differentialgleichung der Drehschwingungen erlaubt auch hier wieder, die Aufgabe der Bestimmung des Schwingungswinkels jeder Masse für alle verschiedenen Perioden dadurch zu vereinfachen, daß man die Einzelschwingungswinkel jeder Masse für die harmonischen Momente gleicher Periode und gleicher Phase für sich bestimmt und die Einzelwinkel aller

Perioden und Phasen addiert. Der augenblickliche gesamte Schwingungswinkel φ der erzwungenen Schwingung ist dann:

$$\varphi = \sum_{l=1}^{l=p} \sum_{h=1}^{h=\infty} (\alpha_{h,l} \sin h\,\omega_l t + \beta_{h,l} \cos h\,\omega_l t)\,. \tag{42}$$

Unsere Aufgabe beschränkt sich also hinsichtlich der erzwungenen Schwingungen auf den Fall, daß an der Welle gegebene harmonische Momente gleicher Periode und gleicher und entgegengesetzter Phase wirken (entgegengesetzter Phase deshalb, weil die Komponenten $A_{h,l}$ $B_{h,l}$ zum Teil auch negativ sein können). Die Eigenschwingungen ergeben sich für den Fall, daß die harmonischen Momente an der Welle sämtlich Null sind. Wir wollen die Eigenschwingungen hier zuerst behandeln.

6. Ungedämpfte Eigenschwingungen beliebiger Massensysteme.

Es sei n die Anzahl der mit der masselos gedachten Welle verbundenen Massen, m_k das Massenträgheitsmoment der vom einen Wellenende aus gezählten k$^{\text{ten}}$ Masse in bezug auf die Wellenachse, $c_{k,k+1}$ sei die Größe des elastischen Drehmomentes, welches entsteht, wenn der Querschnitt der Welle in der Ebene der k-ten Masse gegen den Wellenquerschnitt in der Ebene der $(k+1)^{\text{ten}}$ Masse um die Winkeleinheit verdreht wird; φ_k bedeute den augenblicklichen Winkel, um den die k$^{\text{te}}$ Masse aus einer festen Anfangslage sich gedreht hat, bei der die Welle im spannungslosen Zustand sich befand, φ_k'' den zweiten und $\varphi_k^{(x)}$ den x^{ten} Differentialquotienten dieses Winkels nach der Zeit.

Da äußere harmonische Momente für die Eigenschwingungen nicht in Betracht kommen, so ergeben sich für die einzelnen Massen die folgenden Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left.\begin{aligned}
&m_1 \varphi_1'' + c_{1,2}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\
&m_2 \varphi_2'' + c_{1,2}(\varphi_2 - \varphi_1) + c_{2,3}(\varphi_2 - \varphi_3) = 0 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&m_k \varphi_k'' + c_{k-1,k}(\varphi_k - \varphi_{k-1}) + c_{k,k+1}(\varphi_k - \varphi_{k+1}) = 0 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&m_n \varphi_n'' + c_{n-1,n}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Die allgemeine Lösung des Systems der n simultanen Differentialgleichungen (43) habe ich in der Zeitschrift Schiffbau 1906/07 S. 823 u. f. veröffentlicht.

Zunächst ergibt sich durch Addieren sämtlicher Gleichungen die Beziehung:

$$\sum_{k=1}^{k=n} (m_k \varphi_k'') = 0 \tag{44}$$

die sich unmittelbar integrieren läßt und mit den willkürlichen Integrationskonstanten β und α liefert:

$$\sum_{k=1}^{k=n} (m_k \varphi_k) = \beta t + \alpha . \tag{44a}$$

Die Bedeutung der Integrationskonstanten geht aus den Anfangsbedingungen hervor. Bezeichnen nämlich φ_{k_0} und φ'_{k_0} den gegebenen Winkel und die gegebene Winkelgeschwindigkeit der k^{ten} Masse zu Beginn der Zeitzählung, $t = 0$, so ist

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \sum_{k=1}^{k=n} (m_k \varphi'_{k_0}) \\ \alpha &= \sum_{k=1}^{k=n} (m_k \varphi_{k_0}) \end{aligned}\right\} \tag{44b}$$

Aus dem Verein der Gl. (43) ergibt sich die allgemeine, für jede Masse gültige (daher ohne Massenzeiger geschriebene) lineare Differentialgleichung der $2(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung:

$$\begin{aligned} a_{n-1} \varphi^{[2(n-1)]} + a_{n-2} \varphi^{[2(n-2)]} + \dots + a_x \varphi^{(2x)} + \dots + a_1 \varphi^{(2\cdot 1)} \\ + a_0 \varphi = \beta t + \alpha \dots \end{aligned} \tag{45}$$

in welcher β und α die Werte aus (44b) bedeuten und die konstanten Beizahlen a_x gesetzmäßig aus den Wellenkonstanten $c_{k,k+1}$ und aus den Massenträgheitsmomenten m_k gebildete Ausdrücke sind, deren Aufbau in meiner angeführten Arbeit[1]) angegeben ist. Zur Erkennung des Bildungsgesetzes dieser Beizahlen wird es hier genügen, die Gl. (45) vollständig für 5 Massen anzuschreiben. Sie lautet nach Division mit $a_{n-1} = \dfrac{m_1 m_2 \dots m_n}{c_{1,2}\, c_{2,3} \dots c_{n-1,n}}$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
&\varphi^{(2\cdot 4)} + \left[c_{1,2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} + c_{2,3} \cdot \frac{m_2 + m_3}{m_2 \cdot m_3} + c_{3,4} \cdot \frac{m_3 + m_4}{m_3 \cdot m_4} + c_{4,5} \cdot \frac{m_4 + m_5}{m_4 \cdot m_5}\right] \varphi^{(2\cdot 3)} \\
&\quad + \left[c_{1,2}\, c_{2,3} \cdot \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3} + c_{1,2}\, c_{3,4} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \cdot \frac{m_3 + m_4}{m_3 \cdot m_4}\right. \\
&\quad + c_{1,2}\, c_{4,5} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \cdot \frac{m_4 + m_5}{m_4 \cdot m_5} + c_{2,3}\, c_{3,4} \cdot \frac{m_2 + m_3 + m_4}{m_2 \cdot m_3 \cdot m_4} \\
&\quad \left. + c_{2,3}\, c_{4,5} \cdot \frac{m_2 + m_3}{m_2 \cdot m_3} \cdot \frac{m_4 + m_5}{m_4 \cdot m_5} + c_{3,4}\, c_{4,5} \cdot \frac{m_3 + m_4 + m_5}{m_3 \cdot m_4 \cdot m_5}\right] \varphi^{(2\cdot 2)} \\
&\quad + \left[c_{1,2}\, c_{2,3}\, c_{3,4} \cdot \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot m_4} + c_{1,2}\, c_{2,3}\, c_{4,5} \cdot \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3} \cdot \frac{m_4 + m_5}{m_4 \cdot m_5}\right. \\
&\quad \left. + c_{1,2}\, c_{3,4}\, c_{4,5} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \cdot \frac{m_3 + m_4 + m_5}{m_3 \cdot m_4 \cdot m_5} + c_{2,3}\, c_{3,4}\, c_{4,5} \cdot \frac{m_2 + m_3 + m_4 + m_5}{m_2 \cdot m_3 \cdot m_4 \cdot m_5}\right] \varphi^{(2\cdot 1)} \\
&\quad + c_{1,2}\, c_{2,3}\, c_{3,4}\, c_{4,5} \cdot \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot m_4 \cdot m_5}\, \varphi = \frac{c_{1,2}\, c_{2,3}\, c_{3,4}\, c_{4,5}}{m_1 m_2 m_3 m_4 m_5} (\beta t + \alpha) .
\end{aligned} \tag{45a}$$

Die Lösung der Gl. (45) verlangt zunächst die Wurzeln w der charakteristischen Gleichung:

$$a_{n-1} w^{2(n-1)} + a_{n-2} w^{2(n-2)} + \dots + a_x w^{2x} + \dots + a_1 w^{2\cdot 1} + a_0 = 0 . \tag{46}$$

[1]) Gl. (IIa) a. a. O.

Die Beizahlen a_x dieser Gleichung sind nach ihrem aus (45a) ersichtlichen Bildungsgesetz positive, reelle Zahlen. Die $2(n-1)$ Wurzeln der Gl. (46) sind daher imaginär von der Form:

$$w = \pm i\omega,$$

so daß das Integral der Gl. (45) lautet:

$$\varphi = \omega_0 t + \alpha_0 + \sum_{x=1}^{x=n-1} [C_x \sin(\omega_x t + \gamma_x)]. \tag{47}$$

Darin sind C_x und γ_x die $2(n-1)$ willkürlichen Integrationskonstanten, die im Einzelfall aus den gegebenen Anfangsbedingungen hervorgehen. Für die Werte ω_0 und α_0 gelten die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{\beta}{\sum\limits_{k=1}^{k=n} m_k} = \frac{\sum\limits_1^n (m_k \varphi'_{k\,0})}{\sum\limits_1^n m_k}, \\ \alpha_0 &= \frac{\alpha}{\sum\limits_{k=1}^{k=n} m_k} = \frac{\sum\limits_1^n (m_k \varphi_{k\,0})}{\sum\limits_1^n m_k}. \end{aligned}\right\} \tag{47a}$$

Man kann die Gl. (46) auch unmittelbar in Determinantenform erhalten, indem man die partikuläre Lösung $\varphi = C \sin(\omega t + \gamma)$ oder $\varphi'' = -\omega^2 \varphi$ in die Gl. (43) einführt. Man erhält dann für ω^2 die Determinantengleichung n^{ten} Grades:

$$\begin{vmatrix} c_{1,2} - m_1\omega^2 & -c_{1,2} & 0 & 0\ldots & 0 \\ -c_{1,2} & c_{1,2} + c_{2,3} - m_2\omega^2 & -c_{2,3} & 0\ldots & 0 \\ 0 & -c_{2,3} & c_{2,3} + c_{3,4} - m_3\omega^2 & -c_{3,4}\,\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & -c_{n-1,n} & c_{n-1,n} - m_n\omega^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{46a}$$

Diese Gleichung besitzt außer den $n-1$ Wurzeln ω^2 der Gl. (46) noch die Wurzel $\omega_n{}^2 = 0$. Man kann also den Grad der Determinantengleichung (46a) noch um 1 erniedrigen, und zwar in der Weise, daß man in Gl. (43) je zwei aufeinanderfolgende Gleichungen, nachdem man sie mit dem darin vorkommenden Massenträgheitsmoment dividiert hat, voneinander subtrahiert. Dies liefert die Determinantengleichung in der Form, wie sie Mies[1]) angegeben hat und die mit unsern Bezeichnungen lautet:

[1]) In Dinglers Polytechn. Journ. 1915, S. 102.

$$\begin{vmatrix} c_{1,2}\dfrac{m_1+m_2}{m_1\cdot m_2}-\omega^2 & -\dfrac{c_{2,3}}{m_2} & 0 & 0\ldots 0 \\ -\dfrac{c_{1,2}}{m_2} & c_{2,3}\cdot\dfrac{m_2+m_3}{m_2\cdot m_3}-\omega^2 & -\dfrac{c_{3,4}}{m_3} & 0\ldots 0 \\ 0 & -\dfrac{c_{2,3}}{m_3} & c_{3.4}\cdot\dfrac{m_3+m_4}{m_3\cdot m_4}-\omega^2-\dfrac{c_{4,5}}{m_4} & \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & -\dfrac{c_{n-1,n}}{m_{n-1}} & c_{n-1,n}\dfrac{m_{n-1}+m_n}{m_{n-1}\cdot m_n}-\omega^2 \end{vmatrix}=0. \quad (46\text{b})$$

Die Gl. (46) oder (46a) oder (46b) liefern $n-1$ von Null verschiedene Werte ω^2. Ein System von n Massen besitzt demnach $n-1$ verschiedene Eigenschwingungszahlen $n_x = \dfrac{30}{\pi}\omega_x$ (die Eigenschwingungszahlen auf die Minute bezogen), die man nach ihrer Größe geordnet, mit der kleinsten beginnend, als erste, zweite, ... $(n-1)^{\text{te}}$ Eigenschwingungszahl oder auch als Eigenschwingungszahl ersten, zweiten, ... $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades zu unterscheiden pflegt.

Der Drehwinkel φ jeder beliebigen Masse besteht gemäß Gl. (47) aus dem konstanten Winkel α_0, dem von der gleichförmigen Drehung der Maschinenwelle mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 herrührenden Anteil $\omega_0 t$ und aus der Summe der eigentlichen Schwingungswinkel $\sum_{x=1}^{x=n-1}[C_x\cdot\sin(\omega_x t+\gamma_x)]$. Es ergeben sich also für jede Masse $2(n-1)$ Integrationskonstante C_x und γ_x. Da aber die Gesamtlösung der Aufgabe nur $2(n-1)$ willkürliche Integrationskonstante für die Schwingungsglieder verlangt, so müssen zwischen den Konstanten der einzelnen Massen bestimmte Beziehungen bestehen. Diese ergeben sich, wenn man die partikuläre Lösungsgleichung $\varphi_k = C_k\sin(\omega t+\gamma_k)$, in welcher wir den Gradzeiger x wegen ihrer Gültigkeit für jeden Schwingungsgrad weglassen und dafür zur Unterscheidung der einzelnen Massen den Massenzeiger einführen, in die Gl. (43) einsetzt. Man erhält zunächst:

$$\gamma_1=\gamma_2=\ldots=\gamma_k=\ldots=\gamma_n=\gamma. \tag{48}$$

Damit bekommt man für die Schwingungsausschläge C_k das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{l} (c_{1,2}-m_1\omega^2)\,C_1-c_{1,2}\,C_2=0 \\ -c_{1,2}\,C_1+(c_{1,2}+c_{2,3}-m_2\omega^2)\,C_2-c_{2,3}\,C_3=0 \\ \vdots \\ -c_{k-1,k}\,C_{k-1}+(c_{k-1,k}+c_{k,k+1}-m_k\omega^2)\,C_k-c_{k,k+1}\,C_{k+1}=0 \\ \vdots \\ -c_{n-1,n}\,C_{n-1}+(c_{n-1,n}-m_n\,\omega^2)\,C_n=0. \end{array}\right\} \tag{49}$$

Die Determinante dieses Systems ist aber wieder die Gl. (46a). Sie verschwindet also für jeden Wert ω^2 einer Eigenschwingung. Die Ausschläge C_k erscheinen demnach in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, sind also selbst unbestimmt. Nur ihr gegenseitiges Verhältnis ist bestimmt und aus den Gl. (49) leicht zu erhalten. Anstatt aber das Verhältnis des Ausschlages einer beliebigen Masse zum Ausschlag einer festgewählten Masse, etwa der Anfangsmasse m_1, in fertiger Form zu entwickeln, was nicht schwer wäre, ist es für praktische Berechnungen einfacher, den Ausschlag jeder Einzelmasse aus den Ausschlägen der zwei unmittelbar vorhergehenden Massen zu bestimmen, also das Gleichungssystem (49) ohne weiters zur sukzessiven Berechnung der Ausschläge anzuwenden. Man wird also den Ausschlag C_1 der ersten Masse beliebig (gleich eins) annehmen und aus der ersten der Gl. (49) den Ausschlag C_2 berechnen. Aus C_1 und C_2 ergibt die zweite Gl. (49) den Ausschlag C_3 usw. Das Gleichungssystem (49) läßt sich für die Berechnung des Ausschlags einer Masse aus den Ausschlägen der vorhergehenden Massen noch folgendermaßen umformen:

$$\left.\begin{aligned}
C_2 &= C_1 - \frac{\omega^2}{c_{1,2}}\, m_1 C_1\,,\\
C_3 &= C_2 - \frac{\omega^2}{c_{2,3}}\,(m_1 C_1 + m_2 C_2)\,,\\
C_4 &= C_3 - \frac{\omega^2}{c_{3,4}}\,(m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3)\\
&\;\;\vdots\\
C_{k+1} &= C_k - \frac{\omega^2}{c_{k,k+1}} \sum_{k=1}^{k=k} (m_k C_k)\\
&\;\;\vdots\\
C_n &= C_{n-1} - \frac{\omega^2}{c_{n-1,n}} \sum_{k=1}^{k=n-1} (m_k C_k)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Führt man das partikuläre Integral $\varphi_k = C_k \sin(\omega t + \gamma_k)$ in die Gl. (44) ein, so erhält man für jeden Wert ω einer Eigenschwingung die Beziehung:

$$\sum_{k=1}^{k=n} (m_k C_k) = 0\,, \tag{51}$$

d. h. **für jede Eigenschwingung ist die Summe der Produkte der Massen und ihrer Ausschläge gleich Null.**

Bei vielen gegebenen Massen erfordert die Aufstellung der Zahlengleichung für die Werte ω^2 der Eigenschwingungen einen nicht unbe-

trächtlichen Aufwand an Rechnungsarbeit, ob man sich nun der Determinantenform (46a) oder (46b) oder auch der einfachen Form (46) bedient, deren Beizahlen a_x in fertiger Form vorliegen (Bildungsgesetz aus Gl. 45a). Selbst wenn man die Gl. (46) zahlenmäßig aufgestellt hat, wird man deren Wurzelwerte ω^2 nur durch Einführung von probeweise dafür angenommenen Zahlenwerten und durch Interpolieren zwischen diesen Werten angenähert bestimmen können. Den Rechnungsaufwand für die Aufstellung der Zahlengleichung (46) kann man sich ersparen, wenn man unmittelbar von den Gl. (49) oder (50) ausgeht, in denen man die Werte ω^2 der Eigenschwingung ebenfalls probeweise annimmt. Die richtige Wahl von ω^2 ist zum Schluß daran erkenntlich, daß die Bedingung (51) von den Ausschlägen aller Massen erfüllt wird. Ein Zahlenbeispiel wird die Anwendung am deutlichsten zeigen. Für technische Aufgaben mit vielen Massen ist die Bestimmung aller Eigenschwingungszahlen auch kaum erforderlich; es genügt meist die Aufsuchung einiger der niedrigsten Eigenschwingungszahlen, die für die Resonanzgefahr im Drehzahlbereich der Maschinenwelle noch in Betracht kommen. Um einen Anhaltspunkt über die ungefähre Größe dieser Eigenschwingungszahlen zu bekommen, kann man sich der Gl. (46) in der Weise bedienen, daß man die kleinen Massen gegenüber den großen entweder zunächst ganz vernachlässigt oder mehrere nahe beieinander gelegene Massen als eine einzige betrachtet.

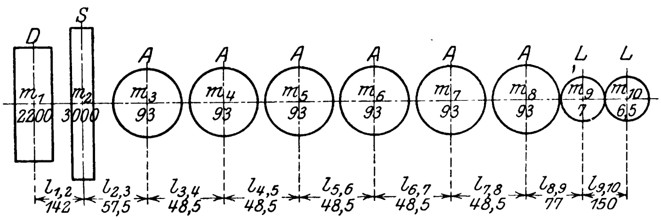


Fig. 17.

Zahlenbeispiel. Eine Viertakt-Dieselmaschine hat 6 Arbeits- und 2 Luftpumpenzylinder und ist mit einer Welle starr gekuppelt, auf der ein Schwungrad und ein Dynamoanker sitzt. Die Anordnung der Massen ist aus der Grundrißskizze (17) zu erkennen, in welcher A Arbeits-, L Luftpumpenzylinder, S Schwungrad und D Dynamoanker bedeuten. Die Massenträgheitsmomente der einzelnen Massen und die auf $G \cdot J_0 = 10^{10}$ bezogenen Wellenlängen sind in der Skizze eingeschrieben. Da nämlich die Wahl des Querschnitts-Trägheitsmomentes J_0 der Bezugswelle freisteht, wählt man diese Größe zweckmäßig so, daß der Ausdruck $G\,J_0$ eine Potenz von 10 wird. Die Zweckmäßigkeit einer solchen Wahl wird aus unserem Beispiel hervorgehen, in welchem $G\,J_0 = 10^{10}$ gewählt ist, was für $G = 830\,000$ kg/ cm² einem Trägheitsmoment $J_0 \backsim 12\,150$ cm⁴ entspricht.

Bei einer sechszylindrigen Viertaktmaschine (einfach wirkend) kommen auf jede Viertaktperiode = 2 Maschinenumdrehungen 6 Zündungen, die man der Gleichförmigkeit des Maschinendrehmomentes zuliebe in regelmäßiger Folge durch regelmäßige Versetzung der einzelnen Arbeitskurbeln aufeinanderfolgen läßt; auch der Ausgleich der hin und her gehenden Maschinenmassen stellt diese Forderung. Es kommen also auf die Viertaktperiode 6 Hauptimpulse, so daß vornehmlich die (6.) und (12.) Ordnung des Viertakts (oder die 3. und 6. Ordnung bezogen auf die Umdrehung) für die Resonanzgefahr in Betracht kommen. Die größte Drehzahl der Maschine ist 500 in der Minute. Es interessieren also zunächst nur die Eigenschwingungszahlen bis zu etwa $6 \cdot 500 = 3000$/Minute.

Um vorerst einen Schätzungswert über die Höhe der niedrigsten Eigenschwingungszahlen zu bekommen, kann man die Maschinenmassen, die gegen die Massen von Schwungrad und Dynamo klein sind, sich zusammengefaßt denken zu einer einzigen Masse $m_3' = 6 \cdot 93 + 7 + 6{,}5 \backsim 572$, die etwa in Maschinenmitte, also im Abstand $57{,}5 + 2{,}5 \cdot 48{,}5 \backsim 179$ vom Schwungrad liegt. Für 3 Massen wird Gleichung (46) mit $w = \pm i\,\omega$:

$$\omega^4 - \omega^2 \cdot \left(c_{1,2}\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} + c_{2,3} \cdot \frac{m_2 + m_3'}{m_2 m_3'}\right) + c_{1,2}\, c_{2,3}\frac{m_1 + m_2 + m_3'}{m_1 m_2 m_3'} = 0$$

oder in Zahlen mit $c_{1,2} = \frac{G J_0}{l_{1,2}} = \frac{10^{10}}{142}$; $c_{2,3} = \frac{10^{10}}{179}$:

$$\omega^4 - \omega^2\left(\frac{10^{10}}{142} \cdot \frac{2200+3000}{2200 \cdot 3000} + \frac{10^{10}}{179} \cdot \frac{3000+572}{3000 \cdot 572}\right) + \frac{10^{20}}{142 \cdot 179} \cdot \frac{2200+3000+572}{2200 \cdot 3000 \cdot 572} = 0$$

$$\omega^4 - \omega^2 (0{,}555 + 1{,}163) \cdot 10^5 + 0{,}602 \cdot 10^{10} = 0\,.$$

Ihre Auflösung ergibt:

$$\omega^2 = 0{,}859 \cdot 10^5 \mp \sqrt{0{,}859^2 - 0{,}602} \cdot 10^5,$$

$$\omega_1^2 = (0{,}859 - 0{,}369) \cdot 10^5 = 49000\,,$$

$$\omega_2^2 = (0{,}859 + 0{,}369) \cdot 10^5 \backsim 123000\,.$$

Mit dem Wert $\omega_1^2 = 49\,000$ führen wir die nachstehende Berechnung der Ausschläge nach Gleichung (50) durch, wobei wir den Ausschlag C_1 der Masse 1 willkürlich (= 1) annehmen:

Zahlentafel 3.

$\omega_1^2 = 49000\,.$

Reihe		1	2	3	4	5	6	7
	k	m	$\omega^2 m$	C	$\omega^2 m C$	$\omega^2 \sum (m C)$	l	$l \frac{\omega^2 \Sigma (m C)}{G J_0}$
Zeile	1	2200	$107800 \cdot 10^3$	1,00000	$107800 \cdot 10^3$	$107800 \cdot 10^3$	142	1,53076
„	2	3000	$147000 \cdot 10^3$	−0,53076	$-78022 \cdot 10^3$	$29778 \cdot 10^3$	57,5	0,17122
„	3	93	$4557 \cdot 10^3$	−0,70198	$-3199 \cdot 10^3$	$26579 \cdot 10^3$	48,5	0,12891
„	4	93	$4557 \cdot 10^3$	−0,83089	$-3786 \cdot 10^3$	$22793 \cdot 10^3$	48,5	0,11055
„	5	93	$4557 \cdot 10^3$	−0,94144	$-4290 \cdot 10^3$	$18503 \cdot 10^3$	48,5	0,08974
„	6	93	$4557 \cdot 10^3$	−1,03118	$-4699 \cdot 10^3$	$13804 \cdot 10^3$	48,5	0,06695
„	7	93	$4557 \cdot 10^3$	−1,09813	$-5004 \cdot 10^3$	$8800 \cdot 10^3$	48,5	0,04268
„	8	93	$4557 \cdot 10^3$	−1,14081	$-5199 \cdot 10^3$	$3601 \cdot 10^3$	77	0,02773
„	9	7	$343 \cdot 10^3$	−1,16854	$-401 \cdot 10^3$	$3200 \cdot 10^3$	150	0,04800
„	10	6,5	$318{,}5 \cdot 10^3$	−1,21654	$-387 \cdot 10^3$	$2813 \cdot 10^3$		

Die 1. Reihe enthält die Massenträgheitsmomente in ihrer gegebenen Aufeinanderfolge, die 2. Reihe das Produkt $\omega^2 m$, die 3. Reihe die Ausschläge C, die 4. Reihe die Größtwerte der von der Massenträgheit herrührenden Drehmomente $\omega^2 m C$, die 5. Reihe die Summe aller vorausgehenden Trägheitsdrehmomente

$\omega^2 \Sigma (m C)$, die 6. Reihe die bezogenen Wellenlängen zwischen den Einzelmassen und die 7. Reihe die Werte

$$\frac{\omega^2 \sum\limits_{k=1}^{k=k} (m_k C_k)}{c_{k,\,k+1}} = \frac{\omega^2 \cdot \sum\limits_{1}^{k} (m_k C_k)}{\frac{G J_0}{l_{k,\,k+1}}} = l_{k,\,k+1} \cdot \frac{\omega^2 \sum\limits_{1}^{k} (m_k C_k)}{G J_0} .$$

Wählt man also $G J_0$ als Potenz von 10, so ergibt sich Reihe 7 durch Multiplikation von Reihe 5 und 6 mit Abstrich der durch $G J_0$ verlangten Stellenzahl.

Man erhält nun in der 3. Reihe den Ausschlag C_{k+1} der $(k+1)^{\text{ten}}$ Masse [in der $(k+1)^{\text{ten}}$ Zeile], wenn man von dem Wert C_k in der k^{ten} Zeile den in der 7. Reihe berechneten Wert $l_{k,\,k+1} \cdot \frac{\omega^2 \sum\limits_{k=1}^{k=k} (m_k C_k)}{G J_0}$ der k^{ten} Zeile [gemäß Gleichungen (50)] subtrahiert, und man findet den Wert $\omega^2 \Sigma (m C)$ der 5. Reihe in der $(k+1)^{\text{ten}}$ Zeile, indem man den Wert $\omega^2 m C$ in der $(k+1)^{\text{ten}}$ Zeile (4. Reihe) zu dem Zahlenwert $\omega^2 \Sigma (m C)$ der k^{ten} Zeile (5. Reihe) addiert.

Die Durchführung der Rechnung für $\omega^2 = 49\,000$ ergibt ein Restmoment (5. Reihe) von $2813 \cdot 10^3$, das bei richtig gewähltem Wert ω^2 der Eigenschwingung verschwinden muß. Es ist gegen das größte Moment $107\,800 \cdot 10^3$ schon ziemlich klein, woran man erkennt, daß die Näherung schon ziemlich gut ist. Um den Näherungswert zu verbessern, führen wir die Rechnung nochmals durch mit dem größeren Wert $\omega^2 = 50\,000$. Man findet nämlich bei Anwendung des gezeigten Berechnungsverfahrens bald die Regel:

Ein positives Restmoment zeigt für die Eigenschwingungen ungeraden Grades die zu kleine Wahl von ω^2, für die Eigenschwingungen geraden Grades einen zu großen Wert ω^2 an. Den Grad der Eigenschwingung erkennt man aus der Anzahl der Zeichenwechsel der Ausschläge (Reihe 3), mit welcher er übereinstimmt. Unsere Rechnung für $\omega^2 = 49\,000$ zeigt nur einen Vorzeichenwechsel der Ausschläge zum Zeichen, daß es sich um die erste Eigenschwingung (Eigenschwingung 1. Grades) handelt.

Die Durchführung der Rechnung mit $\omega^2 = 50\,000$, die wir hier unterdrücken, liefert ein Restmoment minus $544 \cdot 10^3$. Der richtige Wert ω^2 der Eigenschwingung ist also kleiner. Er findet sich mittels linearer Interpolation zu:

$$\omega^2 = 49000 + \frac{(50000 - 49000) \cdot 2813}{2813 - (-544)} = 49840 .$$

Damit erhält man die nachstehende

Zahlentafel 4.
$\omega^2 = 49840$:

m	$\omega^2 m$	C	$\omega^2 m C$	$\omega^2 \Sigma (m C)$	l	$l \cdot \frac{\omega^2 \Sigma (m C)}{G J_0}$
2200	$109648 \cdot 10^3$	1,00000	$109648 \cdot 10^3$	$109648 \cdot 10^3$	142	1,55700
3000	$149520 \cdot 10^3$	−0,55700	$-83282{,}6 \cdot 10^3$	$26365{,}4 \cdot 10^3$	57,5	0,15160
93	$4635{,}12 \cdot 10^3$	−0,70860	$-3284{,}4 \cdot 10^3$	$23081{,}0 \cdot 10^3$	48,5	0,11194
93	$4635{,}12 \cdot 10^3$	−0,82054	$-3803{,}3 \cdot 10^3$	$19277{,}7 \cdot 10^3$	48,5	0,09350
93	$4635{,}12 \cdot 10^3$	−0,91404	$-4236{,}7 \cdot 10^3$	$15041{,}0 \cdot 10^3$	48,5	0,07295
93	$4635{,}12 \cdot 10^3$	−0,98699	$-4574{,}8 \cdot 10^3$	$10466{,}2 \cdot 10^3$	48,5	0,05076
93	$4635{,}12 \cdot 10^3$	−1,03775	$-4810{,}1 \cdot 10^3$	$5656{,}1 \cdot 10^3$	48,5	0,02743
93	$4635{,}12 \cdot 10^3$	−1,06518	$-4937{,}2 \cdot 10^3$	$718{,}9 \cdot 10^3$	77	0,00554
7	$348{,}88 \cdot 10^3$	−1,07072	$-373{,}5 \cdot 10^3$	$345{,}4 \cdot 10^3$	150	0,00518
6,5	$323{,}96 \cdot 10^3$	−1,07590	$-348{,}5 \cdot 10^3$	[−2,9]		

Das sehr kleine Restmoment läßt erkennen, daß die Näherung $\omega_1^2 = 49840$ allen Ansprüchen an Genauigkeit gerecht wird. (In den Fällen, wo die durch lineare Interpolation erhaltene Näherung nicht befriedigt, kann man die Verbesserung durch Kurveninterpolation beliebig verfeinern.)

Für die zweite Eigenschwingung wollen wir hier gleich die verbesserte Lösung $\omega^2 = 141000$ anwenden.

Zahlentafel 5.
$\omega^2 = 141000$.

m	$\omega^2 m$	C	$\omega^2 m C$	$\omega^2 \sum (m C)$	l	$l \cdot \frac{\omega^2 \sum (m C)}{G J_0}$
2200	$3102 \cdot 10^5$	1,00000	$3102 \cdot 10^5$	$3102 \cdot 10^5$	142	4,40484
3000	$4230 \cdot 10^5$	$-3,40484$	$-14402,5 \cdot 10^5$	$-11300,5 \cdot 10^5$	57,5	$-6,49779$
93	$131,13 \cdot 10^5$	$+3,09295$	$+405,6 \cdot 10^5$	$-10894,9 \cdot 10^5$	48,5	$-5,28403$
93	$131,13 \cdot 10^5$	8,37698	$1098,5 \cdot 10^5$	$-9796,4 \cdot 10^5$	48,5	$-4,75125$
93	$131,13 \cdot 10^5$	13,12823	$1721,5 \cdot 10^5$	$-8074,9 \cdot 10^5$	48,5	$-3,91633$
93	$131,13 \cdot 10^5$	17,04456	$2235,1 \cdot 10^5$	$-5839,8 \cdot 10^5$	48,5	$-2,83230$
93	$131,13 \cdot 10^5$	19,87686	$2606,4 \cdot 10^5$	$-3233,4 \cdot 10^5$	48,5	$-1,56820$
93	$131,13 \cdot 10^5$	21,44506	$2812,1 \cdot 10^5$	$-421,3 \cdot 10^5$	77	$-0,32440$
7	$9,87 \cdot 10^5$	21,76946	$214,9 \cdot 10^5$	$-206,4 \cdot 10^5$	150	$-0,30960$
6,5	$9,17 \cdot 10^5$	22,07906	$202,5 \cdot 10^5$	$[-3,9 \cdot 10^5]$		

Der zweimalige Zeichenwechsel der Ausschläge C läßt erkennen, daß es sich um die zweite Eigenschwingung handelt.

Die Werte ω^2 der ersten und zweiten Eigenschwingung sind beide höher als die durch Zusammenfassen der Maschinenmassen zu einer einzigen Masse berechneten Werte. Man erhält für die 1. Eigenschwingung:

$$\omega_1^2 = 49840; \qquad \omega_1 = 223,4; \qquad n_1 = \frac{30}{\pi}\,\omega_1 = 2133;$$

$$\omega_2^2 = 141000; \qquad \omega_2 = 375,5; \qquad n_2 = \frac{30}{\pi}\,\omega_2 = 3586\,.$$

Da also schon die zweite Eigenschwingungszahl über 3000 liegt, so interessieren die höheren Eigenschwingungen in unserem Fall nicht weiter.

Trägt man die bezogenen Wellenlängen als Abszissen, die verhältnismäßigen Schwingungsausschläge als Ordinaten auf (Fig. 18) und verbindet die Nachbarpunkte durch gerade Linien, so ergibt sich ein gebrochener Linienzug, die sog. Schwingungsform der Welle. Da die Ausschläge der Wellenquerschnitte zwischen zwei Massen sich

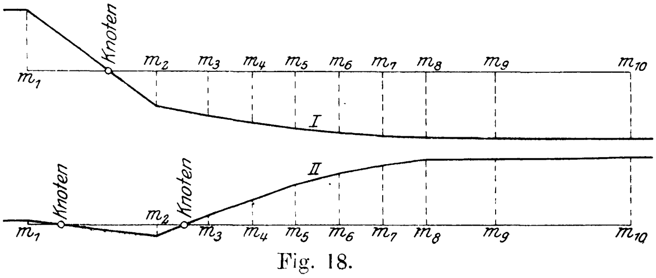


Fig. 18.

linear ändern (weil von der Wellenmasse selbst abgesehen wurde), so gibt die Ordinate der Schwingungsform an jeder Stelle den dort stattfindenden Größtwert des Schwingungswinkels, die Amplitude oder den Schwingungsausschlag an. Bezieht sich die Schwingungsform wie in Fig. (18) auf die Eigenschwingungen, so spricht man von **freier** Schwingungsform. Das Kennzeichen der freien Schwingungsform ist $\sum_{k=1}^{k=n} (m_k C_k) = 0$. Die freien Wellenenden haben den Ausschlag der zugehörigen Endmasse in allen Querschnitten, erleiden also keine Verdrehung; die Schwingungsform für die freien Wellenenden ist parallel zur Wellenachse.

Das hier gezeigte rechnerische Verfahren der Bestimmung der verhältnismäßigen Schwingungsausschläge und der Eigenschwingungszahlen ist identisch mit dem von Professor Dr.-Ing. Gümbel[1]) veröffentlichten graphisch-rechnerischen Verfahren, wobei wir den willkürlichen Radius r, auf den Gümbel seine Massen M_k und seine Ausschlagswege $r \cdot C_k$ bezieht, der Einfachheit halber $= 1$ angenommen haben. Das graphische Verfahren von Gümbel beruht darauf, daß man für einen probeweise angenommenen Wert ω^2 der Eigenschwingung das Seilpolygon der Trägheitsdrehmomente $\omega^2 m_k C_k$ aus dem zugehörigen Momentenpolygon dieser Trägheitsdrehmomente mit dem Polabstand $G \cdot J_0$ konstruiert. Die Ausschläge C_k der einzelnen Massen und ihre daraus berechneten Trägheitsdrehmomente $\omega^2 m_k C_k$ ergeben sich dabei schrittweise aus der Konstruktion selbst, indem der Ausschlag C_1 der ersten Masse beliebig, der Anfangspolstrahl aber entsprechend der Schwingungsform des freien Wellenanfangs horizontal (parallel zur Wellenachse) angenommen wird. Hat das Verfahren sonach für die h^te^ Masse den Ausschlag C_h graphisch ergeben, so mißt man mit dem Maßstab dessen Zahlenwert und berechnet daraus das Moment $\omega^2 m_h C_h$, das im Momentenpolygon mit dem richtigen Vorzeichen an das Summenmoment $\omega^2 \sum_{k=1}^{k=h-1} (m_k C_k)$ der vorausgehenden Trägheitsdrehmomente angefügt, durch die Verbindung seines Endpunktes T_h mit dem Pol P die Richtung $T_h P$ des neuen Seilstrahles zwischen m_h und m_{h+1} und damit auch den Ausschlag C_{h+1} ergibt u. s. f. (Fig. 19). Die richtige Wahl von ω^2 erkennt man am Verschwinden des Summenmomentes für alle Massen, das Momentenpolygon muß sich schließen. Wesentlich ist es dabei, den Polabstand GJ_0 im richtigen Maßstab in die Zeichnung einzutragen. Da die Ausschläge nur in ihrem Verhältnis zueinander bestimmt sind, kommt es auf den Maßstab der Ausschläge C nicht an, wenn man nur die Ausschläge mit den unmittelbar aus der Zeichnung gemessenen Strecken in die Berechnung der Momente $\omega^2 mC$

[1]) Zeitschr. d. V. d. I. 1912, S. 1025f.

einführt. Hat man die Längen $l_{h,h+1}$ im Maßstab μ_1 aufgetragen (d. h. 1 cm Zeichnung $= \mu_1$ cm bezogene Länge) und die Drehmomente $\omega^2 m C$ im Maßstab μ_2 (1 cm Zeichnung $= \mu_2$ kgcm), so muß der Polabstand ($G J_0$ der Zeichnung) $= \dfrac{G J_0}{\mu_1 \cdot \mu_2}$ cm gemacht werden.

Jedes Versehen im Maßstab oder bei der Übertragung gezeichneter Längen in Zahlen und umgekehrt bleibt bei unserem rein rechnerischen Verfahren ausgeschlossen. Zudem kann man jeden beliebigen Grad von Genauigkeit erreichen, während beim graphischen Verfahren die Ungenauigkeit der Zeichnung, des Maßstabes und die Unvollkommenheit des Auges beim Abmessen konstruierter Längen die Genauigkeit beeinträchtigen und besonders dadurch störend ins Gewicht fallen, daß die Ausschläge sehr großer Massen klein zu werden pflegen, so daß der bei der Abmessung des kleinen Ausschlages begangene verhältnismäßig

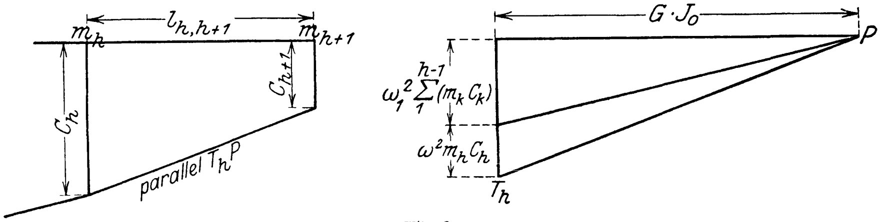


Fig. 19.

große Fehler in dem daraus zu berechnenden Drehmoment mit dem sehr großen Massenträgheitsmoment vervielfältigt erscheint.

In Fig. 18 ist die freie Schwingungsform der ersten Eigenschwingung mit I, die der zweiten Eigenschwingung mit II bezeichnet. Die freien Schwingungsformen ergeben wegen der Unbestimmtheit der Ausschläge nur ein relatives Bild der Ausschläge und der Wellenverdrehungen zwischen den Massen. Im Falle der Resonanz mit erzwingenden Momenten endlicher Größe werden alle Ausschläge und damit auch die Wellenverdrehungen theoretisch unendlich groß. Die Schnittpunkte der Schwingungsform mit der Wellenachse heißen die Schwingungsknoten. Die Wellenquerschnitte in den Schwingungsknoten haben den Schwingungsausschlag Null, sie beteiligen sich nicht an der Schwingung. Die Schwingungsform der x-ten Eigenschwingung besitzt x Schwingungsknoten; die Anzahl der Schwingungsknoten der freien Schwingungsform stimmt demnach überein mit dem Grad der Eigenschwingung. Beim Gümbelschen Verfahren ist das Seileck der Trägheitsdrehmomente bei richtig gewähltem Wert ω^2 zugleich die Schwingungsform.

Bei Aufstellung der Zahlengleichung (46) kann man die Werte ω^2 der Eigenschwingungen auch unmittelbar (ohne Probieren) bestimmen, wenn man in Gl. (46) $w^2 = -\omega^2$ setzt und für eine Reihe angenommener Zahlenwerte ω^2 die Zahlenwerte des auf der linken Gleichungsseite (46) stehenden Ausdruckes berechnet. Diese Werte als Ordinaten zu den zugehörigen Werten ω^2 als Abszissen aufgetragen, ergeben eine Kurve, deren Schnittpunkte mit der Abszissenachse die gesuchten Werte ω^2 der Eigenschwingungen liefern. Es gibt aber auch ein graphisches Verfahren, welches die unmittelbare Auffindung der Eigenschwingungszahlen und der zugehörigen Schwingungsformen gestattet; das ist das Verfahren von Dreves[1]. Dreves geht bei der Herleitung seines Verfahrens von der Bestimmung der Knotenpunkte der höchsten Eigenschwingung aus, bei welcher zwischen je 2 Massen ein Schwingungsknoten liegt, und er findet dafür $n-1$ Lösungen, die den $n-1$ Eigenschwingungszahlen entsprechen. Die $n-1$ Knotenpunkte jeder Lösung können daher nur für die $(n-1)$-te Eigenschwingung wirkliche Knotenpunkte sein; für die niedrigeren Eigenschwingungen ergeben sich neben den wirklichen Knoten noch eine Anzahl scheinbarer Knotenpunkte, deren Bedeutung die des Schnittpunktes der Wellenmittellinie mit denjenigen verlängert gedachten Seiten der Schwingungsform ist, auf denen kein wirklicher Knoten liegt.

7. Ungedämpfte erzwungene Schwingungen beliebiger Massensysteme.

Wirken an der mit Massen besetzten Welle an beliebig gegebenen Stellen beliebig gegebene harmonische Drehmomente, so entstehen erzwungene Schwingungen. Wie wir schon früher dargelegt haben, beschränkt sich deren Untersuchung auf den einfachen Fall, daß an der Welle nur harmonische Momente von gleicher Periode und von gleicher oder entgegengesetzter Phase wirken.

Es sind also zunächst für eine beliebig gewählte Periode die harmonischen Momente gleicher oder entgegengesetzter Phase für alle gegebenen Momente zu ermitteln. Dazu müssen wir nochmals auf den Begriff der harmonischen Analyse zurückgehen. Jedes periodische Moment $M = F(\omega t)$ wird durch harmonische Analyse in eine Summe harmonischer Momente von der Form $A_h \sin h\omega t + B_h \cos h\omega t$ nach Gl. (34) oder von der Form $C_h \sin(h\omega t + \varepsilon_h)$ nach Gl. (36) zerlegt, worin die konstanten Werte A_h, B_h, C_h, und ε_h nach Gl. (35) bzw. (36a) zu berechnen sind. Diese Werte sind aber je nach der Wahl des Anfangszeitpunktes der Zeitzählung andere. In Fig. 20 ist das periodisch wechselnde Moment M als Ordinate über dem zugehörigen Zeitwinkel ωt als Abszisse dargestellt. Die harmonische Analyse sei durchgeführt

[1]) Z. d. V. d. I. 1918, S. 588f.

worden für einen gegebenen Anfangszeitpunkt O (für welchen etwa das Moment einen Nullwert annimmt) und sie habe ergeben:

$$M = A_0 + \sum_{h=1}^{h=\infty} (A_h \sin h\omega t + B_h \cos h\omega t) = A_0 + \sum_{h=1}^{h=\infty} (C_h \sin(h\omega t + \varepsilon_h). \quad (52)$$

Wir führen nun einen andern Zeitnullpunkt O' ein, der um einen Zeitwinkel $\varepsilon = \omega t_0$ vom erstgewählten Nullpunkt O abliegt. Im neuen

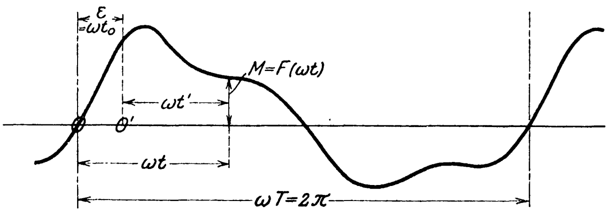


Fig. 20.

Koordinatensystem sind dann die Ordinaten $M' = M$ und die Abszissen $\omega t' = \omega t - \varepsilon$, woraus umgekehrt $\omega t = \omega t' + \varepsilon$ folgt.

Mit Einführung dieses Wertes in Gl. (52) erhält man:

$$M' = A_0 + \sum_{h=1}^{h=\infty} (A_h \sin h[\omega t' + \varepsilon] + B_h \cos h[\omega t' + \varepsilon])$$
$$= A_0 + \sum_{h=1}^{h=\infty} (C_h \sin[h(\omega t' + \varepsilon) + \varepsilon_h]) \quad (52a)$$

Andererseits würde die unmittelbare harmonische Analyse mit dem Nullpunkt O' ergeben:

$$M' = A_0 + \sum_{h=1}^{h=\infty} (A'_h \sin h\omega t' + B'_h \cos h\omega t') = A_0 + \sum_{h=1}^{h=\infty} (C'_h \sin[h\omega t' + \varepsilon'_h]). \quad (52b)$$

Der Vergleich von (52a) mit (52b) liefert wegen

$$\sin h(\omega t' + \varepsilon) = \sin h\omega t' \cos h\varepsilon + \cos h\omega t' \sin h\varepsilon$$

und

$$\cos h(\omega t' + \varepsilon) = \cos h\omega t' \cos h\varepsilon - \sin h\omega t' \sin h\varepsilon$$

die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} A'_h &= A_h \cos h\varepsilon - B_h \sin h\varepsilon \\ B'_h &= A_h \sin h\varepsilon + B_h \cos h\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

$$\left.\begin{aligned} C'_h &= C_h \\ \varepsilon'_h &= \varepsilon_h + h\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad (53a).$$

Die Gl. (53a) sagen aus, daß die Amplitude C_h unabhängig ist von der Wahl des Anfangspunktes der Zeitzählung, und daß der Phasenwinkel ε'_h in bezug auf den um den Zeitwinkel ε verschobenen Zeitzählpunkt $0'$ um den Zeitwinkel $h \cdot \varepsilon$ größer wird. In Fig. 21 ist dies im Vektordiagramm dargestellt. Aus dem Vektordiagramm kann man auch ohne weiteres die Beziehungen (53) ablesen.

Hat man also z. B. die Größen A_h und B_h einer Maschinenkurbel für denjenigen Zeitnullpunkt ermittelt, in welchem die Kurbel in der oberen Totlage ist, so liefern die Gl. (53) die entsprechenden Größen A'_h und B'_h für jeden beliebigen Zeitwinkel ε. Sind die sämtlichen Kurbeln der Maschine unter beliebig gegebenen Winkeln versetzt, so berechnet man für eine beliebig gewählte augenblickliche Lage der Maschinenwelle die Werte A'_h und B'_h jeder Einzelkurbel aus den Totpunktwerten A_h und B_h. Die Werte A'_h bilden dann die harmonischen Momente gleicher Phase (a) und die Werte B'_h die harmonischen Momente gleicher Phase (b).

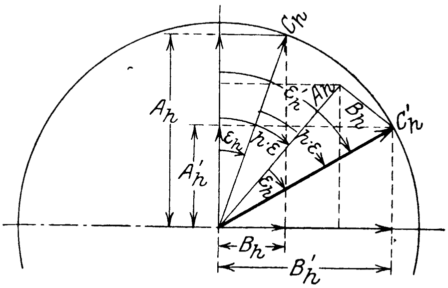


Fig. 21.

Nach dieser Vorarbeit kehren wir zur Berechnung der erzwungenen Schwingungen zurück. Wir setzen voraus, daß an jeder Einzelmasse auch ein harmonisches Moment gleicher Phase wirkt und geben dem harmonischen Moment dieselbe Ordnungsnummer k wie der Masse, an der es wirkt. Diese Voraussetzung bedeutet keinerlei Einschränkung, denn wenn im besonderen Fall an irgendeiner Masse m_k kein harmonisches Moment wirkt, so braucht man ja nur $M_k = 0$ zu setzen, und wenn andrerseits ein harmonisches M_k an einer Stelle der Welle wirkt, an der keine Masse sitzt, so kann man ja dort $m_k = 0$ gegeben denken. Die Anzahl aller so gezählten Massen und Momente sei q.

Wenn $\omega = \frac{2\pi}{T}$ die Winkelschnelle der betrachteten Periode der harmonischen Momente M gleicher Phase ist, so ergeben sich mit den von uns bisher gebrauchten Bezeichnungen für die einzelnen Massen die folgenden Gleichgewichtsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll}
m_1 \varphi_1'' + c_{1,2}(\varphi_1 - \varphi_2) & = M_1 \sin \omega t \\
m_2 \varphi_2'' + c_{1,2}(\varphi_2 - \varphi_1) + c_{2,3}(\varphi_2 - \varphi_3) & = M_2 \sin \omega t \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
m_k \varphi_k'' + c_{k-1,k}(\varphi_k - \varphi_{k-1}) + c_{k,k+1}(\varphi_k - \varphi_{k+1}) & = M_k \sin \omega t \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
m_q \varphi_q'' + c_{q-1,q}(\varphi_q - \varphi_{q-1}) & = M_q \sin \omega t .
\end{array}\right\} \qquad (54)$$

Da wir die freien Schwingungen für sich behandelt haben, die erzwungenen Schwingungen aber von derselben Periode und Phase sind, wie die erregenden gleichphasigen Momente, so wird $\varphi_k = \alpha_k \sin\omega t$, oder $\varphi_k'' = -\omega^2 \alpha_k \sin\omega t$, wenn jetzt α_k den Ausschlag (die Amplitude) der erzwungenen Schwingung der Masse m_k bedeutet. Mit Einführung dieser Beziehung in Gl. (54) erhält man zunächst durch Addieren aller Gleichungen:

$$\sum_{k=1}^{k=q}(\omega^2 m_k \alpha_k + M_k) = 0 . \tag{54a}$$

und ferner das nachstehende Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{lr}
(c_{1,2} - m_1 \omega^2)\,\alpha_1 - c_{1,2}\,\alpha_2 & = M_1 \\
\quad - c_{1,2}\,\alpha_1 + (c_{1,2} + c_{2,3} - m_2\,\omega^2)\,\alpha_2 - c_{2,3}\,\alpha_3 & = M_2 \\
\quad \cdot & \cdot \\
\quad \cdot & \cdot \\
\quad \cdot & \cdot \\
\quad - c_{k-1,k}\,\alpha_{k-1} + (c_{k-1,k} + c_{k,k+1} - m_k\,\omega^2)\,\alpha_k - c_{k,k+1}\,\alpha_{k+1} & = M_k \\
\quad \cdot & \cdot \\
\quad \cdot & \cdot \\
\quad \cdot & \cdot \\
\quad - c_{q-1,q}\,\alpha_{q-1} + (c_{q-1,q} - m_q\,\omega^2)\,\alpha_q & = M_q\,.
\end{array}\right\} \tag{55}$$

Das ist in bezug auf die Ausschläge α_k ein System von q linearen Gleichungen, die in bekannter Weise nach den einzelnen Ausschlägen aufzulösen sind. Die Determinante aus den Beizahlen sämtlicher Ausschläge wollen wir mit D bezeichnen; sie ist identisch mit der Determinante in Gl. (46a). Ersetzt man in der Determinante D die Zahlen der k-ten Reihe durch die konstanten Glieder $M_1, M_2 \ldots M_q$ der rechten Gleichungsseiten (55), so entsteht eine neue Determinante, welche wir mit $D_{(k)}$ bezeichnen wollen. Die Auflösung der Gl. (55) ist dann bekanntlich:

$$\alpha_k = \frac{D_{(k)}}{D}\,, \tag{55a}$$

wodurch alle unbekannten Ausschläge gefunden werden, wenn k nacheinander $= 1, 2, \ldots q$ genommen wird.

Wenn die Periode der harmonischen Momente mit der Periode einer der Eigenschwingungen übereinstimmt, so wird gemäß Gl. (46a) der Wert $D = 0$ und die Ausschläge aller Massen daher unendlich groß: Resonanzfall.

Für praktische Berechnungen weitaus bequemer als die Lösung (55a) ist die schrittweise Berechnung der Ausschläge aus dem Ausschlag der Anfangsmasse in folgender Weise: Man erhält aus (55):

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_2 &= \alpha_1 - \frac{m_1\,\omega^2\,\alpha_1 + M_1}{c_{1,2}}\\
\alpha_3 &= \alpha_2 - \frac{\omega^2\,(m_1\,\alpha_1 + m_2\,\alpha_2) + M_1 + M_2}{c_{2,3}}\\
&\vdots\\
\alpha_{h+1} &= \alpha_h - \frac{\sum\limits_{k=1}^{k=h} (\omega^2\, m_k\,\alpha_k + M_k)}{c_{h,h+1}}\\
&\vdots\\
\alpha_q &= \alpha_{q-1} - \frac{\sum\limits_{k=1}^{k=q-1} (\omega^2\, m_k\,\alpha_k + M_k)}{c_{q-1,q}}
\end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

Die Gleichungen (56) sind genau so gebaut wie die Gl. (50) der Eigenschwingung; nur tritt zur Summe der Massenträgheitsdrehmomente noch die Summe der erregenden harmonischen Momente hinzu.

Die praktische Anwendung der Gl. (56) wird wiederum ein Zahlenbeispiel am deutlichsten vor Augen führen:

Zahlenbeispiel. Es sind die erzwungenen Schwingungsausschläge der Sechszylinder-Viertakt-Dieselmaschine unseres vorigen Zahlenbeispiels für die (6.), (9.) und (12.) Ordnung für große Füllung (Indikatordiagramm Fig. 12a) und für eine Maschinendrehzahl 360/Minute zu ermitteln. Dazu müssen zuerst die erregenden harmonischen Momente dieser Ordnungen bekannt sein. Für die (6.) und (9.) Ordnung haben wir sie schon im Beispiel der harmonischen Analyse (S. 23) bestimmt, indem wir hier dieselbe Größe der Arbeitszylinder wie dort voraussetzen. Für die (12.) Ordnung der Motorzylinder und für die Luftpumpen seien hier die harmonischen Momente unmittelbar gegeben, und zwar sind alle Werte auf den oberen Totpunkt als Beginn der Zeitzählung bezogen, bei den im Viertakt arbeitenden Arbeitszylindern auf den Totpunkt der Zündung:

Harmonisches Moment:	Motor:	Luftpumpe:
$A_{(6)}$	17 480 kgcm	5200 kgcm
$B_{(6)}$	− 8 750 „	5000 „
$A_{(9)}$	9 090 „	0 „
$B_{(9)}$	−12 120 „	0 „
$A_{(12)}$	4 400 „	−200 „
$B_{(12)}$	− 6 400 „	700 „

Die Kurbeln der Arbeits- und Luftpumpenzylinder sind nach Fig. 22 versetzt, in welcher die einzelnen Kurbeln mit derselben Ordnungsnummer wie in Fig. 17 bezeichnet sind. Die Aufeinanderfolge der Zündungen ist 8, 7, 6, 3, 4, 5.

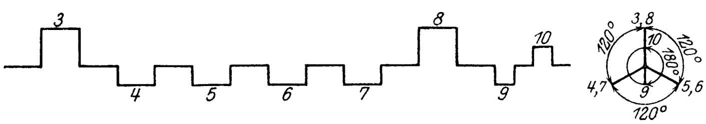


Fig. 22.

Wir zählen die Zeit von dem Augenblick an, in welchem Kurbel 8 im oberen Totpunkt (Zündung) steht.

Zunächst sind für diesen Zeitnullpunkt die phasengleichen Momente der einzelnen Ordnungen zu bestimmen. Auf eine volle Periode des Viertakts, Zeitwinkel 2π treffen 2 Maschinenumdrehungen oder der Kurbelwinkel 4π. Der Zeitwinkel ε der einzelnen Kurbeln ist demnach halb so groß als der von der Totlage Zündung ab durchlaufene Kurbelwinkel. Nach Fig. 22 und der oben gegebenen Zündungsfolge ist also, wenn ε_k den Zeitwinkel der Kurbel k bezeichnet:

$$\varepsilon_3 = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ; \quad \varepsilon_4 = 120^\circ; \quad \varepsilon_5 = 60^\circ; \quad \varepsilon_6 = 240^\circ; \quad \varepsilon_7 = 300^\circ; \quad \varepsilon_8 = 0^\circ;$$

$\varepsilon_9 = 90^\circ$; $\varepsilon_{10} = 0^\circ$. (Die Luftpumpen arbeiten im Zweitakt.)

Da an den Massen m_1 und m_2 (Fig. 17) keine periodischen Momente wirken, ergeben sich für die einzelnen Massen m_k nach Gl. (53) die folgenden gleichphasigen harmonischen Momente A_k bzw. B_k:

$$(6.)\ \text{Ordn. } h=6 \begin{cases} A_1 = A_2 = 0;\ A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = 17480; \\ \qquad A_9 = -5200;\ A_{10} = 5200; \\ B_1 = B_2 = 0;\ B_3 = B_4 = B_5 = B_6 = B_7 = B_8 = -8750;\ B_9 = -5000; \\ \qquad B_{10} = 5000. \end{cases}$$

$$(9.)\ \text{Ordn. } h=9 \begin{cases} A_1 = A_2 = 0;\ A_3 = -9090;\ A_4 = 9090;\ A_5 = -9090;\ A_6 = 9090; \\ \qquad A_7 = -9090;\ A_8 = 9090;\ A_9 = A_{10} = 0. \\ B_1 = B_2 = 0;\ B_3 = 12120;\ B_4 = -12120;\ B_5 = 12120;\ B_6 = -12120; \\ \qquad B_7 = 12120;\ B_8 = -12120;\ B_9 = B_{10} = 0. \end{cases}$$

$$(12.)\ \text{Ordn. } h=12 \begin{cases} A_1 = A_2 = 0;\ A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = 4400;\ A_9 = A_{10} = -200; \\ B_1 = B_2 = 0;\ B_3 = B_4 = B_5 = B_6 = B_7 = B_8 = -6400;\ B_9 = B_{10} = 700. \end{cases}$$

Der gegebenen Maschinendrehzahl $n_0 = 360$/Minute entspricht eine Winkelgeschwindigkeit der Maschine $\omega_0 = \frac{\pi}{30} \cdot n_0 = \frac{\pi}{30} \cdot 360 = 12\pi$; die Winkelschnelle der Viertaktperiode ist also $\omega = 6\pi$. Demnach wird:

$$\omega_{(6)} = 36\pi; \qquad \omega_{(9)} = 54\pi; \qquad \omega_{(12)} = 72\pi$$

und

$$\omega^2_{(6)} = 12791; \qquad \omega^2_{(9)} = 28780; \qquad \omega^2_{(12)} = 51164.$$

Zur Ermittlung der Schwingungsausschläge (6.) Ordnung führen wir mit $\omega^2_{(6)} = 12791$ und für die oben berechneten phasengleichen Momente A die umstehende Berechnung gemäß Gl. (56) durch, indem wir den zugehörigen Ausschlag der Masse 1 als unbekannt mit x einführen (Zahlentafel 6 auf Seite 46).

Wie man erkennt, ist die Zahlentafel 6 genau so gebildet wie die Zahlentafel 3 des Beispiels der Eigenschwingungen, nur erhält sie eine neue Reihe 5 der erregenden harmonischen Momente gleicher Phase und die 6. Reihe enthält neben der Summe der Trägheitsdrehmomente auch jene der erregenden Momente, wie es Gl. (56) vorschreibt. Die 8. Reihe enthält die Werte

$$\frac{\sum_{k=1}^{k=h} (\omega^2 m_k \alpha_k + M_k)}{c_{h,h+1}} = \frac{l_{h,h+1} \sum_{k=1}^{k=h} (\omega^2 m_k \alpha_k + M_k)}{G J_0}.$$

Man findet nach Gl. (56) den Ausschlag α_{h+1} in der $(h+1)$ten Zeile der 3. Reihe, wenn man von dem Ausschlag α_h in der hten Zeile den in der 8. Reihe berechneten Wert $l_{h,h+1} \cdot \dfrac{\sum_1^h (\omega^2 m_k \alpha_k + M_k)}{G J_0}$ der h-ten Zeile subtrahiert, und man erhält den Wert $\sum_1^h (\omega^2 m_k \alpha_k + M_k)$ der 6. Reihe in der $(h+1)$ten Zeile,

Zahlentafel 6.

$\omega^2_{(6)} = 12791;\ G \cdot J_0 = 10^{10}$.

Reihe	1	2	3	4	5	6	7	8
h	m	$\omega^2 m$	α	$\omega^2 m \alpha$	M	$\sum(\omega^2 m \alpha + M)$	l	$l \cdot \frac{\sum(\omega^2 m \alpha + M)}{G J_0}$
Zeile 1	2200	$28140{,}2 \cdot 10^3$	x	$28140{,}2 \cdot 10^3 x$	0	$28140{,}2 \cdot 10^3 x$	142	$0{,}39959\, x$
" 2	3000	$38373{,}0 \cdot 10^3$	$0{,}60041\, x$	$23039{,}5 \cdot 10^3 x$	0	$51179{,}7 \cdot 10^3 x$	57,5	$0{,}29428\, x$
" 3	93	$1189{,}6 \cdot 10^3$	$0{,}30613\, x$	$364{,}2 \cdot 10^3 x$	17480	$51543{,}9 \cdot 10^3 x + 17480$	48,5	$0{,}24999\, x + 84778 \cdot 10^{-9}$
" 4	93	$1189{,}6 \cdot 10^3$	$0{,}05614\, x - 84778 \cdot 10^{-9}$	$66{,}8 \cdot 10^3 x - 101$	17480	$51610{,}7 \cdot 10^3 x + 34859$	48,5	$0{,}25031\, x + 169066 \cdot 10^{-9}$
" 5	93	$1189{,}6 \cdot 10^3$	$-0{,}19417\, x - 253844 \cdot 10^{-9}$	$-231{,}0 \cdot 10^3 x - 302$	17480	$51379{,}7 \cdot 10^3 x + 52037$	48,5	$0{,}24919\, x + 252379 \cdot 10^{-9}$
" 6	93	$1189{,}6 \cdot 10^3$	$-0{,}44336\, x - 506223 \cdot 10^{-9}$	$-527{,}4 \cdot 10^3 x - 602$	17480	$50852{,}3 \cdot 10^3 x + 68915$	48,5	$0{,}24663\, x + 334238 \cdot 10^{-9}$
" 7	93	$1189{,}6 \cdot 10^3$	$-0{,}68999\, x - 840461 \cdot 10^{-9}$	$-820{,}8 \cdot 10^3 x - 1000$	17480	$50031{,}5 \cdot 10^3 x + 85395$	48,5	$0{,}24265\, x + 414166 \cdot 10^{-9}$
" 8	93	$1189{,}6 \cdot 10^3$	$-0{,}93264\, x - 1254627 \cdot 10^{-9}$	$-1109{,}5 \cdot 10^3 x - 1493$	17480	$48922{,}0 \cdot 10^3 x + 101382$	77	$0{,}37670\, x + 780641 \cdot 10^{-9}$
" 9	7,0	$89{,}5 \cdot 10^3$	$-1{,}30934\, x - 2035268 \cdot 10^{-9}$	$-117{,}2 \cdot 10^3 x - 182$	-5200	$48804{,}8 \cdot 10^3 x + 96000$	150	$0{,}73207\, x + 1440000 \cdot 10^{-9}$
" 10	6,5	$83{,}1 \cdot 10^3$	$-2{,}04141\, x - 3475268 \cdot 10^{-9}$	$-169{,}6 \cdot 10^3 x - 289$	5200	$48635{,}2 \cdot 10^3 x + 100911$		

indem man die Werte in der $(h+1)$ten Zeile $\omega^2 m \alpha$ (4. Reihe) und M (5. Reihe) zu dem Wert $\sum(\omega^2 m \alpha + M)$ der $h$ten Zeile (6. Reihe) addiert.

Für das freie Wellenende muß nach Gl. (54a) die Summe aller Momente verschwinden; also liefert die letzte Zeile, 6. Reihe der Zahlentafel 6 die Bedingung:

$$48635{,}2 \cdot 10^3 x + 100911 = 0$$

oder $x = -2{,}075 \cdot 10^{-3}$.

Mit dem Werte x des Ausschlags der Anfangsmasse sind aber sämtliche Ausschläge α (Zahlentafel 6, Reihe 3) berechenbar. Damit ist die Aufgabe der Ermittlung der Schwingungsausschläge für die phasengleichen Momente A gelöst. Genau so könnten wir zur Aufsuchung der Ausschläge β für die phasengleichen Momente B verfahren, indem man den unbekannten Ausschlag der Anfangsmasse $= y$ setzt. Man erkennt aber aus Zahlentafel 6, daß die Beizahlen von y genau die gleichen werden wie jene von x, da sie von den Momenten M (Reihe 5) in keiner Weise beeinflußt werden. Infolgedessen kann man auch die Berechnung der Beizahlen von x und y ganz getrennt durchführen, so daß sich diese Zahlen genau so bestimmen wie für die Eigenschwingungen. Ebenso kann man den von den erregenden Momenten herrührenden Anteil der Zahlentafel 6 getrennt für sich berechnen und zwar einmal für die Phase (A) und einmal für die Phase (B). Ja, man kann die Vereinfachung sogar noch weiter treiben, indem man allgemein die unter sich gleichen harmonischen Momente der Motorkurbeln mit M, die der Luftpumpen mit L an Stelle des Zahlenwertes einführt, so daß man auch für die Phasen (A) und (B) nur einmalige Durchrechnung benötigt, wie wir in Zahlentafel 6a zeigen.

Zahlentafel 6a.

$\omega^2_{(6)} = 12791.$

$\omega^2 m$	α'	$\omega^2 m \alpha'$	M	$\sum(\omega^2 m \alpha' + M)$	l	$\frac{l\Sigma}{G J_0}$
$28140{,}2 \cdot 10^3$	—	—	—	—	142	—
$38373{,}0 \cdot 10^3$	—	—	—	—	57,5	—
$1189{,}6 \cdot 10^3$	—	—	M	$1{,}00000\,M$	48,5	$48{,}5 \cdot 10^{-10}\,M$
$1189{,}6 \cdot 10^3$	$-\ 48{,}5 \cdot 10^{-10}\,M$	$-0{,}00577\,M$	M	$1{,}99423\,M$	48.5	$96{,}7 \cdot 10^{-10}\,M$
$1189{,}6 \cdot 10^3$	$-\ 145{,}2 \cdot 10^{-10}\,M$	$-0{,}01727\,M$	M	$2{,}97696\,M$	48,5	$144{,}4 \cdot 10^{-10}\,M$
$1189{,}6 \cdot 10^3$	$-\ 289{,}6 \cdot 10^{-10}\,M$	$-0{,}03445\,M$	M	$3{,}94251\,M$	48,5	$191{,}2 \cdot 10^{-10}\,M$
$1189{,}6 \cdot 10^3$	$-\ 480{,}8 \cdot 10^{-10}\,M$	$-0{,}05720\,M$	M	$4{,}88531\,M$	48,5	$236{,}9 \cdot 10^{-10}\,M$
$1189{,}6 \cdot 10^3$	$-\ 717{,}7 \cdot 10^{-10}\,M$	$-0{,}08538\,M$	M	$5{,}79993\,M$	77	$446{,}6 \cdot 10^{-10}\,M$
$89{,}5 \cdot 10^3$	$-1164{,}3 \cdot 10^{-10}\,M$	$-0{,}01042\,M$	$-L$	$5{,}78951\,M\text{-}L$	150	$\begin{cases} 868{,}4 \cdot 10^{-10}\,M \\ -150{,}0 \cdot 10^{-10}\,L \end{cases}$
$83{,}1 \cdot 10^3$	$\begin{cases} -2032{,}7 \cdot 10^{-10}\,M \\ +\ 150{,}0 \cdot 10^{-10}\,L \end{cases}$	$\begin{cases} -0{,}01689\,M \\ +0{,}00125\,L \end{cases}$	$+L$	$\begin{cases} 5{,}77262\,M \\ +0{,}00125\,L \end{cases}$		

Man erhält also für die Phasen (A) und (B) mit Einsetzung der entsprechenden Zahlenwerte für M und L die Gleichungen:

$$48635{,}2 \cdot 10^3\,\alpha_1 + 5{,}77262\,M + 0{,}00125\,L = 0\ ,$$

$$\alpha_1 = -(1{,}18692\,M + 0{,}00026\,L) \cdot 10^{-7}$$

für die harmonischen Momente A:

$$x = -(1{,}18692 \cdot 17480 + 0{,}00026 \cdot 5200) \cdot 10^{-7}$$

$$= -0{,}0020747 - 0{,}0000001 = -2{,}0748 \cdot 10^{-3}$$

für die harmonischen Momente B:

$$y = -(1{,}18692 \,.\, -8750 + 0{,}00026 \cdot 5000) \cdot 10^{-7}$$

$$= +0{,}0010386 - 0{,}0000001 = +1{,}0385 \cdot 10^{-3}\,.$$

Man ersieht aus dieser Zerlegung, daß der Einfluß der Luftpumpenmomente praktisch nicht in Betracht kommt, weil sich die Momente der beiden Luftpumpen entgegenwirken. Dagegen wirken die harmonischen Momente der Motorkurbeln sämtlich im gleichen Sinn, verstärken sich also in ihrer Wirkung auf die Größe der erzwungenen Ausschläge, woraus die Richtigkeit unserer früheren Behauptung hervorgeht, daß bei Vielzylindermaschinen auch die verhältnismäßig kleineren harmonischen Momente höherer Ordnung noch von Bedeutung sein können.

Mittels der gefundenen Werte x und y können wir nunmehr die Ausschläge der übrigen Massen aus den Zahlentafeln 6 und 6a berechnen.

Die der Phase (A) entsprechenden Ausschläge seien für die k · Masse mit α_k, die der Phase (B) zugehörigen Ausschläge mit β_k bezeichnet. Die Ausschläge der beiden Phasen setzen sich genau wie die harmonischen Momente zum Gesamtausschlag γ_k zusammen, so daß

$$\gamma_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}\ ; \tag{57}$$

der Phasenwinkel des Gesamtausschlages ist

$$\varepsilon_k = \operatorname{arctg}\frac{\beta_k}{\alpha_k}\,. \tag{57a}$$

Die Lage des Phasenwinkels ε_k in bezug auf die vier Kreisquadranten erkennt man daran, daß dessen sin das Vorzeichen von β_k, dessen cos das Vorzeichen von α_k besitzen muß.

Die Berechnung aller Ausschläge (6.) Ordnung ist in Zahlentafel 6b zusammengestellt. (Siehe Seite 49.)

Den größten Ausschlag (6.) Ordnung hat in diesem Fall die Masse m_1 (Dynamoanker). Es wäre leicht, die Ausschläge in Winkelgrade umzurechnen, indem man die gefundenen Bogenmaße mit 57,296 multipliziert; viel bequemer ist aber die Beibehaltung des Bogenmaßes, denn es liefert, mit dem Radius multipliziert, an dem der Ausschlag gemessen wird, ohne weiteres den zugehörigen Ausschlagweg. Mißt man beispielsweise den Ausschlag des Dynamowellenendes am Radius 100 mm, so erhält man den Gesamtausschlagweg zu $\pm$ 0,232 mm.

Es interessiert endlich noch zu wissen, bei welchen Kurbelstellungen der Größtwert des Schwingungswinkels einer beliebigen Masse auftritt. Diese Frage beantwortet der Phasenwinkel ε. Die berechneten Werte ε beziehen sich naturgemäß auf die Periode der Schwingung. Für die Masse m_1 ist der Phasenwinkel z. B. 153° 25′; d. h. für $t = 0$ (Kurbel 8 im Totpunkt Zündung) hat der Schwingungsvektor der Masse 1 bereits 153° 25′ zurückgelegt. Der Größtwert des Schwingungswinkels (6.) Ordnung $\varphi_{(6)} = \gamma_{(6)} \sin(\omega_{(6)} t + \varepsilon_{(6)})$ tritt auf für $\omega_{(6)} t + \varepsilon_{(6)} = \frac{\pi}{2} (= 90°)$, also:

$$\omega_{(6)} t = \frac{\pi}{2} - \varepsilon_{(6)} = 90° - 153° 25' = -63° 25'.$$

Da für die (6.) Ordnung (Viertakt) der Kurbelwinkel $\frac{1}{3}$ des Schwingungswinkels ist, so erfolgt der Größtwert des Schwingungswinkels bei $-\frac{63° 25'}{3} = -21° 8'$, d. h. wenn Kurbel 8 um den Winkel 21° 8′ vor Totpunkt Zündung steht oder sich je um den Winkel einer vollen bzw. einer halben Schwingung, d. h. um 120° bzw. 60° Kurbelwinkel weitergedreht hat.

Die gleichphasigen Schwingungsausschläge aller Massen bestimmen die Schwingungsform dieser Phase. Im allgemeinen gibt es demnach zwei erzwungene Schwingungsformen (α) und (β) einer Welle mit um 90° versetzten Phasen. Die Knotenpunkte der Schwingungsform der einen Phase sind im allgemeinen nicht zugleich Knotenpunkte der anderen Phase, so daß es also im allgemeinen keinen Wellenquerschnitt gibt, der nicht an der Schwingung teilnimmt.

Für die Schwingung (9.) Ordnung sind die harmonischen Momente der im Zweitakt arbeitenden Luftpumpen Null, und die harmonischen Momente A bzw. B aller Arbeitszylinder sind, abgesehen vom regelmäßigen Vorzeichenwechsel, einander gleich. In diesem Fall kann die Schwingung durch eine einzige Phase dargestellt werden, wenn man die für alle Kurbeln gleiche Resultierende der harmonischen Momente $C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{9090^2 + 12120^2} = 15150$ einführt (die andere Phase hat dann Momente und Ausschläge $= 0$). Man erhält zunächst mit der allgemeinen Bezeichnung M des erregenden Momentes die Zahlentafel 7.

Zahlentafel 6b.

k	(x)	(A)	α	(y)	(B)	β	$\gamma = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$	$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\beta}{\alpha}$	ε
1	$-2{,}0748\cdot10^{-3}$	$=$	$-2{,}0748\cdot10^{-3}$	$1{,}0385\cdot10^{-3}$	$=$	$1{,}0385\cdot10^{-3}$	$2{,}3202\cdot10^{-3}$	$-0{,}5005$	153° 25′
2	$-1{,}2457\cdot10^{-3}$	$=$	$-1{,}2457\cdot10^{-3}$	$0{,}6235\cdot10^{-3}$	$=$	$0{,}6235\cdot10^{-3}$	$1{,}3930\cdot10^{-3}$	$-0{,}5005$	153° 25′
3	$-0{,}6351\cdot10^{-3}$	$=$	$-0{,}6351\cdot10^{-3}$	$0{,}3179\cdot10^{-3}$	$=$	$0{,}3179\cdot10^{-3}$	$0{,}7102\cdot10^{-3}$	$-0{,}5005$	153° 25′
4	$-0{,}1165\cdot10^{-3}$	$-0{,}0848\cdot10^{-3} =$	$-0{,}2013\cdot10^{-3}$	$0{,}0583\cdot10^{-3}$	$+0{,}0424\cdot10^{-3} =$	$0{,}1007\cdot10^{-3}$	$0{,}2252\cdot10^{-3}$	$-0{,}5002$	153° 26′
5	$+0{,}4029\cdot10^{-3}$	$-0{,}2538\cdot10^{-3} =$	$+0{,}1491\cdot10^{-3}$	$-0{,}2016\cdot10^{-3}$	$+0{,}1270\cdot10^{-3} =$	$-0{,}0746\cdot10^{-3}$	$0{,}1667\cdot10^{-3}$	$-0{,}5003$	333° 25′
6	$0{,}9199\cdot10^{-3}$	$-0{,}5062\cdot10^{-3} =$	$0{,}4137\cdot10^{-3}$	$-0{,}4604\cdot10^{-3}$	$+0{,}2534\cdot10^{-3} =$	$-0{,}2070\cdot10^{-3}$	$0{,}4626\cdot10^{-3}$	$-0{,}5004$	333° 25′
7	$1{,}4316\cdot10^{-3}$	$-0{,}8404\cdot10^{-3} =$	$0{,}5912\cdot10^{-3}$	$-0{,}7166\cdot10^{-3}$	$+0{,}4207\cdot10^{-3} =$	$-0{,}2959\cdot10^{-3}$	$0{,}6612\cdot10^{-3}$	$-0{,}5005$	333° 25′
8	$1{,}9350\cdot10^{-3}$	$-1{,}2545\cdot10^{-3} =$	$0{,}6805\cdot10^{-3}$	$-0{,}9685\cdot10^{-3}$	$+0{,}6280\cdot10^{-3} =$	$-0{,}3405\cdot10^{-3}$	$0{,}7609\cdot10^{-3}$	$-0{,}5004$	333° 25′
9	$2{,}7166\cdot10^{-3}$	$-2{,}0352\cdot10^{-3} =$	$0{,}6814\cdot10^{-3}$	$-1{,}3597\cdot10^{-3}$	$+1{,}0188\cdot10^{-3} =$	$-0{,}3409\cdot10^{-3}$	$0{,}7620\cdot10^{-3}$	$-0{,}5003$	333° 25′
10	$4{,}2355\cdot10^{-3}$	$\begin{cases}-3{,}5531\cdot10^{-3} =\\+0{,}0780\cdot10^{-3} =\end{cases}$	$0{,}7604\cdot10^{-3}$	$-2{,}1200\cdot10^{-3}$	$\begin{cases}+1{,}7786\cdot10^{-3} =\\+0{,}0750\cdot10^{-3} =\end{cases}$	$-0{,}2664\cdot10^{-3}$	$0{,}8057\cdot10^{-3}$	$-0{,}3503$	340° 42′

Zahlentafel 7.

$\omega_{(9)}^2 = 28780.$

m	$\omega^2 m$	α	$\omega^2 m \alpha$	M	Σ	l	$l\,\Sigma : G J$
2200	$63316\cdot10^3$	x	$63316\cdot10^3 x$	$-$	$63316\cdot10^3 x$	142	$0{,}89909\,x$
3000	$86340\cdot10^3$	$0{,}10091\,x$	$8712{,}6\cdot10^3 x$	$-$	$72028{,}6\cdot10^3 x$	57,5	$0{,}41416\,x$
93	$2676{,}5\cdot10^3$	$-0{,}31325\,x$	$-838{,}4\cdot10^3 x$	$-M$	$71190{,}2\cdot10^3 x - M$	48,5	$0{,}34527\,x - 48{,}5\cdot10^{-10} M$
93	$2676{,}5\cdot10^3$	$-0{,}65852\,x + 48{,}5\cdot10^{-10} M$	$-1762{,}5\cdot10^3 x + 0{,}01298\,M$	M	$69427{,}7\cdot10^3 x + 0{,}01298\,M$	48,5	$0{,}33672\,x + 0{,}6\cdot10^{-10} M$
93	$2676{,}5\cdot10^3$	$-0{,}99524\,x + 47{,}9\cdot10^{-10} M$	$-2663{,}8\cdot10^3 + 0{,}01282\,M$	$-M$	$66763{,}9\cdot10^3 x - 0{,}97420\,M$	48,5	$0{,}32380\,x - 47{,}2\cdot10^{-10} M$
93	$2676{,}5\cdot10^3$	$-1{,}31904\,x + 95{,}1\cdot10^{-10} M$	$-3530{,}4\cdot10^3 x + 0{,}02545\,M$	M	$63233{,}5\cdot10^3 x + 0{,}05125\,M$	48,5	$0{,}30668\,x + 2{,}5\cdot10^{-10} M$
93	$2676{,}5\cdot10^3$	$-1{,}62572\,x + 92{,}6\cdot10^{-10} M$	$-4351{,}2\cdot10^3 x + 0{,}02478\,M$	$-M$	$58882{,}3\cdot10^3 x - 0{,}92397\,M$	48,5	$0{,}28558\,x - 44{,}8\cdot10^{-10} M$
93	$2676{,}5\cdot10^3$	$-1{,}91130\,x + 137{,}4\cdot10^{-10} M$	$-5115{,}6\cdot10^3 x + 0{,}03678\,M$	M	$53766{,}7\cdot10^3 x + 0{,}11281\,M$	77	$0{,}41400\,x + 8{,}7\cdot10^{-10} M$
7,0	$201{,}5\cdot10^3$	$-2{,}32530\,x + 128{,}7\cdot10^{-10} M$	$-468{,}5\cdot10^3 x + 0{,}00259\,M$	$-$	$53298{,}2\cdot10^3 x + 0{,}11540\,M$	150	$0{,}79947\,x + 17{,}3\cdot10^{-10} M$
6,5	$187{,}0\cdot10^3$	$-3{,}12477\,x + 111{,}4\cdot10^{-10} M$	$-584{,}3\cdot10^3 x + 0{,}00208\,M$	$-$	$52713{,}9\cdot10^3 x + 0{,}11748\,M$		

$$52713{,}9 \cdot 10^3 x + 0{,}11748\, M = 0$$
$$x = -22{,}286 \cdot 10^{-10}\, M\,.$$

Damit erhält man die in Zahlentafel 7a zusammengestellten Ausschläge.

Wie man erkennt, sind die Ausschläge hier sehr klein, was hauptsächlich auf den Vorzeichenwechsel der aufeinanderfolgenden harmonischen Momente zurückzuführen ist.

Zahlentafel 7a.

k	(x)	(M)		α	
1	$-22{,}286 \cdot 10^{-10} M$		=	$-\ 22{,}3\ \ 10^{-10} M$	$= -0{,}0338 \cdot 10^{-3}$
2	$-\ 2{,}249 \cdot 10^{-10} M$		=	$-\ 2{,}2 \cdot 10^{-10} M$	$= -0{,}0033 \cdot 10^{-3}$
3	$+\ 6{,}981 \cdot 10^{-10} M$		=	$+\ 7{,}0 \cdot 10^{-10} M$	$= +0{,}0106 \cdot 10^{-3}$
4	$14{,}676 \cdot 10^{-10} M +$	$48{,}5 \cdot 10^{-10} M$	=	$+\ 63{,}2 \cdot 10^{-10} M$	$= 0{,}0957 \cdot 10^{-3}$
5	$22{,}180 \cdot 10^{-10} M +$	$47{,}9 \cdot 10^{-10} M$	=	$+\ 70{,}1 \cdot 10^{-10} M$	$= 0{,}1062 \cdot 10^{-3}$
6	$29{,}396 \cdot 10^{-10} M +$	$95{,}1 \cdot 10^{-10} M$	=	$124{,}5 \cdot 10^{-10} M$	$= 0{,}1886 \cdot 10^{-3}$
7	$36{,}231 \cdot 10^{-10} M +$	$92{,}6 \cdot 10^{-10} M$	=	$128{,}8 \cdot 10^{-10} M$	$= 0{,}1951 \cdot 10^{-3}$
8	$42{,}595 \cdot 10^{-10} M +$	$137{,}4 \cdot 10^{-10} M$	=	$180{,}0 \cdot 10^{-10} M$	$= 0{,}2727 \cdot 10^{-3}$
9	$51{,}822 \cdot 10^{-10} M +$	$128{,}7 \cdot 10^{-10} M$	=	$180{,}5 \cdot 10^{-10} M$	$= 0{,}2735 \cdot 10^{-3}$
10	$69{,}639 \cdot 10^{-10} M +$	$111{,}4 \cdot 10^{-10} M$	=	$181{,}0 \cdot 10^{-10} M$	$= 0{,}2742 \cdot 10^{-3}$

Für die Schwingung (12.) Ordnung berechnen wir die nachstehenden Zahlentafeln 8 und 8a (S. 51). Erstere liefert:

$$-4508{,}9 \cdot 10^3 x + 5{,}12041\, M + 1{,}99501\, L = 0$$
$$x = 10^{-6} \cdot (1{,}1356\, M + 0{,}44245\, L)$$

Phase (A): $x = 10^{-6} \cdot (1{,}1356 \cdot 4400 + 0{,}44245 \cdot -200) = 10^{-3} \cdot 4{,}908$

Phase (B): $y = 10^{-6} \cdot (1{,}1356 \cdot -6400 + 0{,}44245 \cdot 700) = 10^{-3} \cdot -6{,}958\,.$

Damit ergeben sich die Ausschläge nach Zahlentafel 8a.

Der Vergleich mit den Ausschlägen der (6.) und (9.) Ordnung lehrt, daß trotz der kleineren harmonischen Momente (12.) Ordnung dennoch die Ausschläge verhältnismäßig groß werden. Die Ursache dieser Erscheinung ist die Nähe der Resonanz, denn wir fanden (Zahlentafel 4) für die erste Eigenschwingung $\omega^2 = 49\,840$, also einen Wert, der nicht sehr weit von $\omega^2_{(12)}$ abliegt. Hätten wir unmittelbar für die Eigenschwingung selbst gerechnet, so wäre die letzte Beizahl von x in der $\sum$-Reihe statt $-4508{,}9 = 0$ gefunden worden, so daß x und y sich gleich ∞ ergeben hätten. Das hier entwickelte rein rechnerische Verfahren der Ermittlung der erzwungenen Schwingungen entspricht wieder genau dem graphisch-rechnerischen Verfahren von Prof. Gümbel. Aber Gümbel nimmt den Ausschlag der ersten Masse probeweise an und verbessert die Annahme, bis die Summe der Momente für das Wellenende verschwindet. Geiger zeigt in seiner Dissertation, daß der richtige Ausschlag aus 2 Annahmen auf Grund der sich ergebenden Restmomente gefunden werden kann, während wir hier den Ausschlag unmittelbar berechnen.

Zahlentafel 8.

$\omega_{(12)}^2 = 51\,164$.

m	$\omega^2 m$	α	$m\,\omega^2\,\alpha$	M	Σ	l	$l \cdot \Sigma : G\,J_0$
2200	$112560{,}8 \cdot 10^3$	x	$112560{,}8 \cdot 10^3 x$		$112560{,}8 \cdot 10^3 x$	142	$1{,}59836 x$
3000	$153492{,}0 \cdot 10^3$	$-0{,}59836 x$	$-91843{,}5 \cdot 10^3 x$		$20717{,}3 \cdot 10^3 x$	57,5	$0{,}11912 x$
93	$4758{,}3 \cdot 10^3$	$-0{,}71748 x$	$-3414{,}0 \cdot 10^3 x$	M	$17303{,}3 \cdot 10^3 x + M$	48,5	$0{,}08392 x + 48{,}5 \cdot 10^{-10} M$
93	$4758{,}3 \cdot 10^3$	$-0{,}80140 x - 48{,}5 \cdot 10^{-10} M$	$-3813{,}3 \cdot 10^3 x - 0{,}02308 M$	M	$13490{,}0 \cdot 10^3 x + 1{,}97692 M$	48,5	$0{,}06543 x + 95{,}9 \cdot 10^{-10} M$
93	$4758{,}3 \cdot 10^3$	$-0{,}86683 x - 144{,}4 \cdot 10^{-10} M$	$-4124{,}6 \cdot 10^3 x - 0{,}06871 M$	M	$9365{,}4 \cdot 10^3 x + 2{,}90821 M$	48,5	$0{,}04542 x + 141{,}0 \cdot 10^{-10} M$
93	$4758{,}3 \cdot 10^3$	$-0{,}91225 x - 285{,}4 \cdot 10^{-10} M$	$-4340{,}8 \cdot 10^3 x - 0{,}13580 M$	M	$5024{,}6 \cdot 10^3 x + 3{,}77241 M$	48,5	$0{,}02437 x + 183{,}0 \cdot 10^{-10} M$
93	$4758{,}3 \cdot 10^3$	$-0{,}93662 x - 468{,}4 \cdot 10^{-10} M$	$-4456{,}7 \cdot 10^3 x - 0{,}22288 M$	M	$567{,}9 \cdot 10^3 x + 4{,}54953 M$	48,5	$0{,}00275 x + 220{,}7 \cdot 10^{-10} M$
93	$4758{,}3 \cdot 10^3$	$-0{,}93937 x - 689{,}1 \cdot 10^{-10} M$	$-4469{,}8 \cdot 10^3 x - 0{,}32789 M$	M	$-3901{,}9 \cdot 10^3 x + 5{,}22164 M$	77	$-0{,}03004 x + 402{,}1 \cdot 10^{-10} M$
7,0	$358{,}1 \cdot 10^3$	$-0{,}90933 x - 1091{,}2 \cdot 10^{-10} M$	$-325{,}6 \cdot 10^3 x - 0{,}03908 M$	L	$-4227{,}5 \; 10^3 x + 5{,}18256 M$ $+ L$	150	$-0{,}06341 x + 777{,}4 \cdot 10^{-10} M$ $+ 150{,}0 \cdot 10^{-10} L$
6,5	$332{,}6 \cdot 10^3$	$-0{,}84592 x - 1868{,}6 \cdot 10^{-10} M$ $- 150{,}0 \; 10^{-10} L$	$-281{,}4 \cdot 10^3 x - 0{,}06215 M$ $-0{,}00499 L$	L	$-4508{,}9 \cdot 10^3 x + 5{,}12041 M$ $+1{,}99501 L$		

Zahlentafel 8a.

k	(x)	(M)		α	(y)	(M)		β	$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$	$\operatorname{tg} \varepsilon = \dfrac{\beta}{\alpha}$	ε
1	$4{,}908 \cdot 10^{-3}$		=	$4{,}908 \cdot 10^{-3}$	$-6{,}958 \cdot 10^{-3}$		=	$-6{,}958 \cdot 10^{-3}$	$8{,}515 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}418$	305° 10′
2	$-2{,}937 \cdot 10^{-3}$		=	$-2{,}937 \cdot 10^{-3}$	$+4{,}163 \cdot 10^{-3}$		=	$+4{,}163 \cdot 10^{-3}$	$5{,}095 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}417$	125° 10′
3	$-3{,}521 \cdot 10^{-3}$		=	$-3{,}521 \cdot 10^{-3}$	$4{,}992 \cdot 10^{-3}$		=	$4{,}992 \cdot 10^{-3}$	$6{,}109 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}418$	125° 10′
4	$-3{,}933 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}021 \cdot 10^{-3}$	=	$-3{,}954 \cdot 10^{-3}$	$5{,}576 \cdot 10^{-3}$	$+0{,}031 \cdot 10^{-3}$	=	$5{,}607 \cdot 10^{-3}$	$6{,}861 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}418$	125° 10′
5	$-4{,}254 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}064 \cdot 10^{-3}$	=	$-4{,}318 \cdot 10^{-3}$	$6{,}031 \cdot 10^{-3}$	$+0{,}092 \cdot 10^{-3}$	=	$6{,}123 \cdot 10^{-3}$	$7{,}497 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}418$	125° 10′
6	$-4{,}477 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}126 \cdot 10^{-3}$	=	$-4{,}603 \cdot 10^{-3}$	$6{,}347 \cdot 10^{-3}$	$+0{,}183 \cdot 10^{-3}$	=	$6{,}530 \cdot 10^{-3}$	$7{,}999 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}419$	125° 10′
7	$-4{,}597 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}206 \cdot 10^{-3}$	=	$-4{,}803 \cdot 10^{-3}$	$6{,}517 \cdot 10^{-3}$	$+0{,}300 \cdot 10^{-3}$	=	$6{,}817 \cdot 10^{-3}$	$8{,}339 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}419$	125° 10′
8	$-4{,}610 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}303 \cdot 10^{-3}$	=	$-4{,}913 \cdot 10^{-3}$	$6{,}536 \cdot 10^{-3}$	$+0{,}441 \cdot 10^{-3}$	=	$6{,}977 \cdot 10^{-3}$	$8{,}533 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}420$	125° 10′
9	$-4{,}463 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}480 \cdot 10^{-3}$	=	$-4{,}943 \cdot 10^{-3}$	$6{,}327 \cdot 10^{-3}$	$+0{,}698 \cdot 10^{-3}$	=	$7{,}025 \cdot 10^{-3}$	$8{,}590 \; 10^{-3}$	$-1{,}421$	125° 10′
10	$-4{,}152 \cdot 10^{-3}$	$\left.\begin{matrix}-0{,}822 \cdot 10^{-3} \\ +0{,}003 \cdot 10^{-3}\end{matrix}\right\}$	=	$-4{,}971 \cdot 10^{-3}$	$5{,}886 \cdot 10^{-3}$	$\left.\begin{matrix}+1{,}196 \cdot 10^{-3} \\ -0{,}011 \cdot 10^{-3}\end{matrix}\right\}$	=	$7{,}071 \cdot 10^{-3}$	$8{,}644 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}422$	125° 10·

8. Die Drehbeanspruchung der Welle durch die erzwungenen Schwingungen.

Der augenblickliche Schwingungswinkel der erzwungenen Schwingungen ist nach Gl. (42) gegeben durch

$$\varphi = \sum_{l=1}^{l=p} \sum_{h=1}^{h=\infty} [\alpha_{h,l} \sin h\,\omega_l t + \beta_{h,l} \cos h\,\omega_l t]\,.$$

Die Bedeutung der Bezeichnungen möge bei Gl. (42) nachgesehen werden.

Ist nun φ_k der so bestimmte augenblickliche Schwingungswinkel der $k$ten, φ_{k+1} jener der $(k+1)$ten Masse, so ist der augenblickliche Verdrehungswinkel der Welle zwischen diesen beiden Massen

$$\Delta\varphi_{k,k+1} \equiv \varphi_{k+1} - \varphi_k = \sum_{l=1}^{l=p} \sum_{h=1}^{h=\infty} [(\alpha_{h,l,k+1} - \alpha_{h,l,k}) \sin h\,\omega_l t + (\beta_{h,l,k+1} - \beta_{h,l,k}) \cos h\,\omega_l t]\,. \tag{58}$$

Für die Beanspruchung der Welle auf Verdrehung zwischen den Massen k und $k+1$ kommt nun der Größtwert in Frage, den $\Delta\varphi_{k,k+1}$ im Laufe der Zeit annehmen kann. Dieser Größtwert ist bei vielen, ganz beliebig gegebenen Grundperioden kaum genau zu bestimmen, weil sich derselbe Schwingungszustand der Welle im Laufe der Zeit überhaupt nicht zu wiederholen braucht, wenn nicht die Schwingungsdauern der einzelnen Grundperioden ganze Zahlen sind. Man hilft sich dann meist mit der ungünstigsten Annahme, daß sich die Größtwerte jeder Einzelperiode addieren können. In praktischen Fällen gehören meist alle Schwingungen einer einzigen Grundperiode (Maschinenumdrehung) an. Aber auch dafür ist der Verdrehungswinkel wegen der unendlich vielen Schwingungsglieder h nicht genau bestimmbar; für praktische Zwecke genügt indessen die Berücksichtigung einiger Glieder. Man wird sich die Werte des Verdrehungswinkels für die Dauer einer Periode nach Gl. (58) graphisch auftragen und den Höchstwert der Kurve feststellen. Die höchsten Beanspruchungen der Welle treten aber bei oder in der Nähe der Resonanz auf, und dabei sind erfahrungsgemäß die Ausschläge einer bestimmten Schwingungsperiode gegenüber den Ausschlägen aller andern Perioden von so überragender Größe, daß diese anderen praktisch ganz außer Betracht bleiben können. Die aus der Überlagerung der Schwingungen aller Perioden bestehenden Gesamtschwingungen zeigen demnach bei Resonanz im wesentlichen das Bild der reinen Sinusschwingung[1]). Selbst die dem konstanten Drehmoment (A_0 der harmonischen Analyse) entsprechende zusätzliche Wellenverdrehung ist in den ebengenannten Bildern[1]) gegen den Gesamtausschlag verhältnismäßig klein. Aus diesem Grunde beschränken wir

[1]) Siehe Frahm, Z. d. V. d. I. 1918, Fig. 8, Diagramm 9 und 17.

uns hier auf die Ermittlung des Größtwertes des Verdrehungswinkels für Schwingungen einer gegebenen Periode (ω).

Der Verdrehungswinkel ist dann:

$$\Delta\varphi_{k,k+1} \equiv \varphi_{k+1} - \varphi_k = (\alpha_{k+1} - \alpha_k)\sin\omega t + (\beta_{k+1} - \beta_k)\cos\omega t\,. \quad (58\text{a})$$

$\Delta\varphi_{k,k+1}$ ist sonach eine einfache Funktion der Zeit. Den Größtwert findet man bekanntlich aus:

$$\frac{d\,\Delta\varphi_{k,k+1}}{dt} = 0 = \omega\,[(\alpha_{k+1} - \alpha_k)\cos\omega t - (\beta_{k+1} - \beta_k)\sin\omega t]\,.$$

Damit bestimmt sich zunächst der dem Größtwert der Verdrehung entsprechende Zeitwinkel $(\omega t)_{\max}$ zu:

$$\operatorname{tg}(\omega t)_{\max} = \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{\beta_{k+1} - \beta_k}\,. \quad (59)$$

Mit Einführung dieses Wertes und der daraus folgenden Beziehungen:

$$\sin(\omega t)_{\max} = \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{\sqrt{(\alpha_{k+1} - \alpha_k)^2 + (\beta_{k+1} - \beta_k)^2}}\,;$$

$$\cos(\omega t)_{\max} = \frac{\beta_{k+1} - \beta_k}{\sqrt{(\alpha_{k+1} - \alpha_k)^2 + (\beta_{k+1} - \beta_k)^2}}$$

in Gl. (58a) erhält man:

$$(\Delta\varphi_{k,k+1})_{\max} = \pm\sqrt{(\alpha_{k+1} - \alpha_k)^2 + (\beta_{k+1} - \beta_k)^2}\,. \quad (60)$$

Ob wirklich der Größtwert vorliegt, erkennt man aus dem Vorzeichen des zweiten Differentialquotienten:

$$\frac{d^2\Delta\varphi_{k,k+1}}{dt^2} = -\omega^2[(\alpha_{k+1} - \alpha_k)\sin\omega t + (\beta_{k+1} - \beta_k)\cos\omega t]\,,$$

welcher für $(\omega t)_{\max}$ den Wert annimmt:

$$\frac{d^2\Delta\varphi_{k,k+1}}{dt^2} = -\omega^2\cdot\sqrt{(\alpha_{k+1} - \alpha_k)^2 + (\beta_{k+1} - \beta_k)^2}\,,$$

also einen negativen Wert für den positiven Wurzelwert und einen positiven Wert für den negativen Wurzelwert, entsprechend je einem gleichgroßen Maximal- und Minimalwert.

Dementsprechend wechselt auch die von der Schwingung allein erzeugte Verdrehungsspannung τ der Welle bei jeder Schwingung von einem größten positiven Wert auf einen gleichgroßen negativen Wert.

Die Verhältnisse lassen sich am klarsten wieder aus dem Vektordiagramm ersehen (Fig. 23). Darin sind die Vektoren γ_k und γ_{k+1} die Nulllagen ($t = 0$) des Ausschlagvektors der Massen m_k bzw. m_{k+1}, also ε_k und ε_{k+1} ihre Phasenwinkel, α_k, β_k und α_{k+1}, β_{k+1} ihre Kompo-

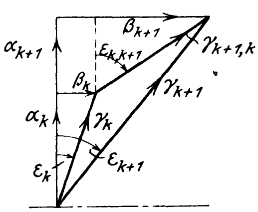


Fig. 23.

nenten. Der Verdrehungswinkel der Welle zwischen den Massen m_k und m_{k+1} wird dann dargestellt durch die Projektion des Vektors $\gamma_{k+1,k} = \gamma_{k+1} - \gamma_k$ (geometrische Differenz). Die Größe des Vektors $\gamma_{k+1,k}$ gibt dann auch zugleich den Größtwert $(\Delta\varphi_{k,k+1})_{\max}$ an und die Beziehung (60) läßt sich ohne weiteres aus dem Vektordiagramm ablesen. Der Phasenwinkel des Verdrehungsvektors ist $\varepsilon_{k,k+1}$; für ihn gilt (siehe Fig. 23):

$$\operatorname{tg} \varepsilon_{k,k+1} = \frac{\beta_{k+1} - \beta_k}{\alpha_{k+1} - \alpha_k}. \tag{61}$$

Die Größe des Vektors $\gamma_{k,k+1}$ läßt sich auch aus der Größe der Gesamtausschläge und ihrer Phasenwinkel berechnen:

$$\gamma_{k,k+1}^2 = (\Delta\varphi_{k,k+1})_{\max}^2 = \gamma_{k+1}^2 + \gamma_k^2 - 2\gamma_{k+1}\gamma_k \cos(\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k). \tag{60a}$$

Aus dem Größtwert des Verdrehungswinkels (Gl. 60) ergibt sich endlich der Größtwert der Drehbeanspruchung der Welle zwischen den Massen k und $k+1$ durch die Schwingung allein in folgender Weise (von dem leicht zu berücksichtigenden, vom konstanten Wellendrehmoment herrührenden Anteil der Torsionsspannung sehen wir dabei vorläufig ab):

Das zwischen der k-ten und $(k+1)$-ten Masse gelegene Wellenstück der wirklichen Welle wird im allgemeinen aus einzelnen Wellenabschnitten von verschiedenen Durchmessern bestehen. Ist d der Durchmesser, l die Länge und J das Querschnittsträgheitsmoment der drehelastisch schwächsten Stelle der Welle zwischen den Massen k und $k+1$, so ist bekanntlich:

$$\tau_{\max} = G\frac{d}{2} \cdot \vartheta,$$

wenn ϑ der Verdrehungswinkel zweier um 1 cm voneinander abstehender Querschnitte dieser Stelle ist. Da sich die Querschnitte der wirklichen Welle genau so verdrehen, wie die ihnen entsprechenden Querschnitte der Bezugswelle, der Verdrehungswinkel der letzteren zwischen zwei Massen aber sich linear ändert, so ist, wenn $l_{k,k+1}$ die bezogene Wellenlänge zwischen den Massen k und $k+1$, l_0 die der Länge l entsprechende Länge der Bezugswelle (Querschnittsträgheitsmoment J_0) bezeichnet, der größte Verdrehungswinkel des Wellenstückes l:

$$l \cdot \vartheta = \frac{\gamma_{k,k+1}}{l_{k,k+1}} \cdot l_0 = \frac{\gamma_{k,k+1}}{l_{k,k+1}} \cdot l \cdot \frac{J_0}{J}$$

und somit

$$\tau_{\max} = \pm G \cdot \frac{J_0}{J}\frac{d}{2} \cdot \frac{\gamma_{k,k+1}}{l_{k,k+1}} = \pm G J_0 \cdot \frac{\gamma_{k,k+1}}{l_{k,k+1} \cdot W}. \tag{62}$$

Dabei ist $W = \frac{2J}{d}$ das Widerstandsmoment des Wellenquerschnittes gegen Verdrehung; die schwächste Stelle des Wellenstückes ist jene, die das kleinste Widerstandsmoment hat.

Gl. (62) setzt uns in den Stand, die Wellenbeanspruchungen an allen Stellen der Welle zu berechnen. Ja, man könnte sogar umgekehrt, wenn sonst keine Bedingungen an die Konstruktion der Welle zu stellen wären, die Welle danach so konstruieren, daß alle Querschnitte der Welle die gleiche Drehbeanspruchung erleiden, d. h. die Welle mit Rücksicht auf die zugelassene Höchstbeanspruchung für den kleinsten Materialaufwand konstruieren.

Wie man aus Gl. (62) erkennt, hat diejenige Stelle der Welle die Höchstbeanspruchung auf Drehung, für welche der Wert $\frac{\gamma_{k,k+1}}{l_{k,k+1} \cdot W}$ am größten wird. Der gefährliche Querschnitt der Welle kann also auf einem beliebigen Wellenstück liegen oder auf ein beliebiges Wellenstück zwischen den Massen verlegt werden.

Hat die Schwingung nur eine Phase (wie in unserem Beispiel Zahlentafel 7 und 7a), so gibt unsere Berechnungsweise in der Zahlenreihe der Momentensummen ohne weiteres die Werte $\frac{\gamma_{k,k+1}}{l_{k,k+1}}$ an, wenn man sie mit GJ_0 dividiert, denn dann ist nach Gl. (56) und (60):

$$\frac{\gamma_{k,k+1}}{l_{k,k+1}} = \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{l_{k,k+1}} = \frac{\sum(\omega^2 m\,\alpha + M)}{G J_0} \,. \tag{63}$$

(Auch die Beispiele der Schwingungen (6.) und (12.) Ordnung haben übrigens, wie man an den Phasenwinkeln erkennt, im wesentlichen nur eine Phase wegen des geringen Einflusses der Luftpumpendrehmomente.)

Die Größe des Wertes $\frac{\gamma_{k,k+1}}{l_{k,k+1}}$ ist ebenso aus der Schwingungsform der einphasigen Schwingung und also auch aus dem Gümbelschen Seilpolygon an der Neigung der Seiten gegen die Wellenachse zu erkennen; die trigonometrische Tangente dieser Neigungswinkel ist nämlich $\frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{l_{k,k+1}}$. Für Wellen von überall gleichem Widerstandsmoment gegen Drehung gibt sonach die Schwingungsform zugleich ein Bild der Wellenbeanspruchungen; die Höchstbeanspruchung tritt in jenem Wellenstück auf, für welches die Neigung der Seite der Schwingungsform am größten ist. Auf diesem Wellenstück liegt gleichzeitig immer ein Schwingungsknoten. Dies gilt aber, wie Gl. (62) lehrt, nicht mehr allgemein für Wellen veränderlichen Widerstandsmomentes; doch erleichtert auch für solche Wellen das Bild der Schwingungsform die Auffindung des gefährlichen Querschnittes, und wenn nicht mit Absicht außergewöhnlich schwache Stellen der Welle an andere Wellenstücke verlegt werden, wird auch hier im allgemeinen der gefährliche Wellenquerschnitt in der steilsten Seite der Schwingungsform zu suchen sein.

Wir wollen die Berechnung der Wellenbeanspruchung für unser Zahlenbeispiel der Schwingung (12.) Ordnung (Zahlentafeln 8 und 8a) durchführen. Beide

Schwingungsformen (α) und (β) zeigen den steilsten Verlauf zwischen den Massen 1 und 2 und dort liegt auch in der Tat der gefährliche Querschnitt, dessen Widerstandsmoment 800 cm³ beträgt. Man findet:

$$\gamma_{1,2} = \sqrt{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \beta_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-2{,}937 - 4{,}908)^2 + (4{,}163 - (-6{,}958))^2} \cdot 10^{-3} = 13{,}61 \cdot 10^{-3}.$$

$$(\tau_{1,2})_{\max} = \pm G J_0 \cdot \frac{\gamma_{1,2}}{l_{1,2} \cdot W} = 10^{10} \cdot \frac{13{,}61 \cdot 10^{-3}}{142 \cdot 800} = \pm 1200 \text{ kg/cm}^2.$$

Dazu kommt noch die Drehspannung τ_0 durch das konstante Drehmoment M_0, welches etwa 128 000 kgcm beträgt:

$$\tau_0 = \frac{M_0}{W} = \frac{128\,000}{800} = 160.$$

Die Drehbeanspruchung der Welle wechselt also bei jeder Schwingung (12.) Ordnung von 1200 + 160 = 1360 auf —1200 + 160 =—1040 kg/cm².

9. Die Arbeit der harmonischen Momente.

Die augenblickliche Größe M des an einer Masse wirkenden erregenden harmonischen Drehmomentes von der Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ist gegeben durch

$$M = A \sin \omega t + B \cos \omega t = C \sin(\omega t + \delta),$$

wenn wir seinen Phasenwinkel mit δ bezeichnen.

Die Masse, an der dieses Moment wirkt, vollführt eine erzwungene Schwingung derselben Periode, und der augenblickliche Schwingungswinkel wird dargestellt durch:

$$\varphi = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t = \gamma \sin(\omega t + \varepsilon).$$

An einer mit vielen Massen besetzten Welle, an der beliebig viele erregende Momente gleicher Periode wirken, wird der Phasenwinkel ε des Schwingungsausschlages einer bestimmten Masse im allgemeinen nicht übereinstimmen mit dem Phasenwinkel δ des an derselben Masse angreifenden harmonischen Momentes. Dies lassen auch unsere Rechnungsbeispiele erkennen. Die Übereinstimmung ist nur in dem Sonderfall vorhanden, daß sämtliche wirkenden harmonischen Momente den gleichen Phasenwinkel δ besitzen, oder was dasselbe ist, daß das Verhältnis der Komponenten $\frac{A}{B}$ für jede Einzelmasse die gleiche ist (wie im Beispiel der Schwingung [9.] Ordnung).

Das harmonische Moment M legt in einem unendlich kleinen Zeitteilchen dt den Winkel $d\varphi$ zurück und leistet infolgedessen die Arbeit:

$$d\mathfrak{A} = M\,d\varphi = (A \sin \omega t + B \cos \omega t)(\alpha \cos \omega t - \beta \sin \omega t)\,\omega\,dt$$
$$= C \sin(\omega t + \delta)\,\gamma \cos(\omega t + \varepsilon)\,\omega\,dt$$
$$= [(A\alpha - B\beta) \sin \omega t \cos \omega t + B\alpha \cos^2 \omega t - A\beta \sin^2 \omega t]\,d(\omega t).$$

Während der Zeitdauer T einer vollen Schwingung wird demnach die vom erregenden Moment geleistete Arbeit:

$$\mathfrak{A} = \int\limits_{t=0}^{t=T} d\mathfrak{A} = \int\limits_{\omega t=0}^{\omega t=2\pi} M\, d\varphi = \pi (B\alpha - A\beta) = \pi \cdot C\gamma \cdot \sin(\delta - \varepsilon). \tag{64}$$

Im Vektordiagramm Fig. 24 wird die Arbeit dargestellt durch den 2π fachen Flächeninhalt des von den Vektoren γ und C gebildeten Dreiecks, oder wie man sich in der Vektorenrechnung ausdrückt, durch das π fache äußere Produkt der Vektoren γ und C. Die geleistete Arbeit ist positiv, wenn der Momentenvektor dem Ausschlagvektor voreilt (um einen Winkel $< \pi$), negativ, wenn er nacheilt; die Arbeit wird Null, wenn einer der Vektoren γ oder C verschwindet oder wenn $\delta - \varepsilon = 0$ oder π wird. Die bei einer vollen Schwingung geleistete Arbeit verschwindet demnach, wenn das erregende harmonische Moment und der zu ihm gehörige Ausschlag von gleicher oder entgegengesetzter Phase sind. Aus diesem Grunde kann das mit seinem Ausschlag gleichphasige Trägheitsdrehmoment einer Masse niemals Arbeit leisten. Den Winkel $\delta - \varepsilon$ kann man als die Phasenverschiebung des Momentes gegen den Ausschlag bezeichnen. Die bei einer Schwingung geleistete Arbeit wird bei gegebener Größe der Amplitude des harmonischen Momentes und des Schwingungsausschlages zu einem Größtwert, wenn die Phasenverschiebung zwischen Moment und Ausschlag $= \pm \frac{\pi}{2}$ wird.

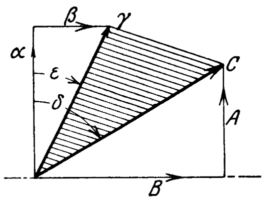


Fig. 24.

Die Arbeit der harmonischen Momente liefert uns ein Mittel, die Richtigkeit unserer Berechnungen zu prüfen. Bei der ungedämpften erzwungenen Schwingung ist zu Anfang und Ende einer vollen Schwingung die gesamte Energie aller Massen die gleiche, ohne daß aus dem System Energie in irgendeiner Form (Wärme) abgeleitet wurde. Die Summe der von den harmonischen Kräften während einer vollen Schwingung geleisteten Arbeiten muß demnach verschwinden, d. h.:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=q} (B\alpha - A\beta)_k &= 0 \\ \sum_{k=1}^{k=q} \big(C\gamma \sin(\delta - \varepsilon)\big)_k &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Wir wollen die Gl. (65) gleich zur Prüfung unserer Berechnungen (Zahlentafeln 6, 7 und 8) anwenden: Wir erhalten für die Schwingung (6.) Ordnung, wenn wir die gleich großen Komponenten A und B als gemeinsamen Faktor ausscheiden, mit den in Zahlentafel 6b gefundenen Werten α und β:

$$\sum(B\alpha) = -8750 \cdot [-0{,}6351 - 0{,}2013 + 0{,}1491 + 0{,}4137 + 0{,}5912 + 0{,}6805] \cdot 10^{-3}$$
$$- 5000 \cdot 0{,}6814 \cdot 10^{-3} + 5000 \cdot 0{,}7604 \cdot 10^{-3} = -8{,}338,$$
$$\sum(A\beta) = 17480\,[+0{,}3179 + 0{,}1007 - 0{,}0746 - 0{,}2070 - 0{,}2959 - 0{,}3405] \cdot 10^{-3}$$
$$-5200 \cdot -0{,}3409 \cdot 10^{-3} + 5200 \cdot -0{,}2664 \cdot 10^{-3} = -8{,}342\,.$$

Die Übereinstimmung beider Summen ist so gut, wie man es bei der Stellenzahl, auf welche die Ausschläge berechnet wurden, verlangen kann.

Für die Schwingung (9.) Ordnung ist $\delta - \varepsilon = 0$ oder π für alle Massen und daher die Bedingung (65) ohne weiteres erfüllt.

Für die Schwingung (12.) Ordnung ergibt sich:

$$\sum(B\alpha) = -6400 \cdot [-3{,}521 - 3{,}954 - 4{,}318 - 4{,}603 - 4{,}803 - 4{,}913] \cdot 10^{-3}$$
$$+ 700 \cdot [-4{,}943 - 4{,}971] \cdot 10^{-3} = 160{,}177$$
$$\sum(A\beta) = 4400\,[4{,}992 + 5{,}607 + 6{,}123 + 6{,}530 + 6{,}817 + 6{,}977] \cdot 10^{-3}$$
$$- 200\,[7{,}025 + 7{,}071] \cdot 10^{-3} = 160{,}183\,.$$

Auch diese Übereinstimmung befriedigt.

10. Teilschwingungen.

Einen Sonderfall der erzwungenen Schwingungen bilden die Teilschwingungen, bei denen nur ein Teil der mit Massen besetzten Welle sich in Schwingung befindet, während der übrige Teil überhaupt nicht schwingt. Wir sprechen hier natürlich nur von den Schwingungen einer bestimmten Periode und Phase. Fig. 25 zeigt eine Schwingungsform einer solchen Teilschwingung, die Massen 1 bis p beteiligen sich an der Schwingung, die Massen p bis q bleiben in Ruhe (schwingungslos). Den Punkt p, der den schwingenden Teil vom schwingungslosen scheidet, wollen wir als den Teilschwingungsknoten bezeichnen. Zunächst ist klar, daß im Teilschwingungsknoten immer ein äußeres harmonisches Moment wirken muß, während es gleichgültig ist, ob an jener Stelle eine Masse vorhanden ist oder nicht. Denn da für den Knoten der Ausschlag Null ist, so kann eine dort sitzende Masse durch ihre Trägheit kein Drehmoment und damit auch keine Änderung der Wellenbeanspruchung, also keine Richtungsänderung der vorausgehenden Seite der Schwingungsform ergeben. Ebenso ist klar, daß in dem nichtschwingenden Teil kein erregendes harmonisches Moment wirken kann, weil er sonst nicht schwingungslos bleiben könnte. Nehmen also von den q Massen und harmonischen Momenten nur eine Anzahl $p < q$ an der Schwingung teil, so müssen die Bedingungen bestehen:

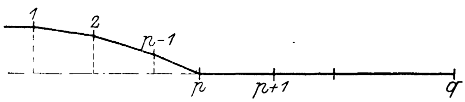


Fig. 25.

$$\left.\begin{array}{l} M_p \gtrless 0; \qquad M_{p+1} = M_{p+2} = \ldots = M_q = 0 \cdot \\ \qquad\qquad \alpha_p = \alpha_{p+1} = \alpha_{p+2} = \ldots = \alpha_q = 0 \end{array}\right\} \quad (66)$$

Führen wir diese Bedingungen in unsere allgemeine Gleichung (55) der erzwungenen Schwingung ein, so ergibt sich das Gleichungssystem der Teilschwingung:

$$\left.\begin{aligned}
&(c_{1,2} - m_1 \omega^2)\alpha_1 - c_{1,2}\alpha_2 && = M_1\\
&\quad - c_{1,2}\alpha_1 + (c_{1,2} + c_{2,3} - m_2\omega^2)\alpha_2 - c_{2,3}\alpha_3 && = M_2\\
&\quad - c_{2,3}\alpha_2 + (c_{2,3} + c_{3,4} - m_3\omega^2)\alpha_3 - c_{3,4}\alpha_4 && = M_3\\
&\quad \cdot && \cdot\\
&\quad \cdot && \cdot\\
&\quad \cdot && \cdot\\
&\quad - c_{p-2,p-1}\alpha_{p-2} + (c_{p-2,p-1} + c_{p-1,p} - m_{p-1}\omega^2)\alpha_{p-1} && = M_{p-1}\\
&\quad - c_{p-1,p}\alpha_{p-1} && = M_p\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (67)$$

Das sind p Gleichungen zur Bestimmung der $p-1$ unbekannten Schwingungsausschläge α und der Unbekannten ω^2 der Teilschwingungsperiode.

Die Gl. (67) ergeben für die letzteren Werte (ω^2) eine Gleichung $(p-1)^{\text{-ten}}$ Grades, deren Bildungsgesetz aus der nachstehend für $p = 5$ ausführlich angeschriebenen Lösung hervorgeht:

$$\left.\begin{aligned}
&(\omega^2)^4 - (\omega^2)^3 \cdot \left[c_{1,2}\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} + c_{2,3}\frac{m_2+m_3}{m_2 m_3} + c_{3,4}\frac{m_3+m_4}{m_3 m_4} + c_{4,5}\frac{M_4+M_5}{m_4 M_5}\right]\\
&\quad + (\omega^2)^2 \cdot \left[c_{1,2}\cdot c_{2,3}\cdot\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1\cdot m_2\cdot m_3} + c_{1,2}c_{3,4}\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\,\frac{m_3+m_4}{m_3 m_4}\right.\\
&\quad + c_{1,2}c_{4,5}\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\,\frac{M_4+M_5}{m_4 M_5} + c_{2,3}c_{3,4}\frac{m_2+m_3+m_4}{m_2 m_3 m_4}\\
&\quad \left. + c_{2,3}c_{4,5}\frac{m_2+m_3}{m_2 m_3}\,\frac{M_4+M_5}{m_4 M_5} + c_{3,4}c_{4,5}\frac{M_3+M_4+M_5}{m_3 m_4 M_5}\right]\\
&\quad - \omega^2 \cdot \left[c_{1,2}c_{2,3}c_{3,4}\frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{m_1 m_2 m_3 m_4} + c_{1,2}c_{2,3}c_{4,5}\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1 m_2 m_3}\,\frac{M_4+M_5}{m_4 M_5}\right.\\
&\quad \left. + c_{1,2}c_{3,4}c_{4,5}\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\cdot\frac{M_3+M_4+M_5}{m_3 m_4 M_5} + c_{2,3}c_{3,4}c_{4,5}\cdot\frac{M_2+M_3+M_4+M_5}{m_2 m_3 m_4 M_5}\right]\\
&\quad + c_{1,2}c_{2,3}c_{3,4}c_{4,5}\cdot\frac{M_1+M_2+M_3+M_4+M_5}{m_1 m_2 m_3 m_4 M_5} = 0\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (68)$$

Man erkennt daraus die fast vollkommene formale Übereinstimmung mit der für die Berechnung der Eigenschwingungszahlen abgeleiteten Gl. (45a).

Es gibt demnach so viele Teilschwingungszahlen $n = \frac{30}{\pi}\omega$, als die Anzahl der an der Teilschwingung beteiligten Massen beträgt. Im Gegensatz zu den Eigenschwingungszahlen brauchen aber nicht alle Teilschwingungszahlen reell zu sein, wie ein einfaches Beispiel für $p = 3$ zeigen soll. Dafür lautet die Gl. (68):

$$\omega^4 - \omega^2\left[c_{1,2}\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} + c_{2,3}\frac{M_2+M_3}{m_2 M_3}\right] + c_{1,2}c_{2,3}\frac{M_1+M_2+M_3}{m_1 m_2 M_3} = 0\,.$$

Es sei nun ein Wellenende gegeben mit den Massen $m_1 = 1\,m$; $m_2 = 2\,m$; $m_3 = 3\,m$ und mit den elastischen Längen $l_{1,2} = 3\,l$; $l_{2,3} = 2\,l$.

Für dieses Wellenende seien verschiedene Fälle der Verteilung harmonischer Momente untersucht:

a) $M_1 = 1\,M; \quad M_2 = 2\,M; \quad M_3 = 3\,M\,.$

Man erhält:

$$\omega^4 - \omega^2 \left[\frac{GJ}{3\,l}\cdot\frac{1+2}{1\cdot 2\,m} + \frac{GJ}{2\,l}\cdot\frac{2+3}{2\cdot 3\,m}\right] + \frac{GJ}{3\,l}\,\frac{GJ}{2\,l}\,\frac{1+2+3}{1\cdot 2\cdot 3\,m^2} = 0\,,$$

$$\omega^2 = \left(\frac{11}{24} \pm \frac{5}{24}\right)\frac{GJ}{l\,m}\,,$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{4}\,\frac{GJ}{l\,m}\,; \quad \omega_2^2 = \frac{2}{3}\,\frac{GJ}{l\,m}\,.$$

Die gleichen Werte ergeben sich für die Eigenschwingungen derselben Welle mit den drei Massen allein, da sich hier die harmonischen Momente genau wie die Größen ihrer Massen verhalten. Dies gilt, wie der Vergleich der Gl. (68) und (45a) ergibt, auch für beliebig viele Massen, woraus der Satz folgt:

Die Teilschwingungszahlen von p Massen sind mit den Eigenschwingungszahlen der p Massen identisch, wenn sich die harmonischen Momente genau wie ihre Massen verhalten.

Wir berechnen noch die Ausschläge nach unserem allgemeinen Verfahren:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{4}\,\frac{GJ}{l\,m}\,.$$

m	$\omega^2 m$	α	$\omega^2 m\,\alpha$	M	Σ	l	$\frac{l\,\Sigma}{GJ}$
$1\,m$	$\frac{1}{4}\frac{GJ}{l}$	α_1	$\frac{1}{4}\,\alpha_1\frac{GJ}{l}$	$1\,M$	$\frac{1}{4}\,\alpha_1\frac{GJ}{l} + 1\,M$	$3\,l$	$\frac{3}{4}\,\alpha_1 + 3\,\frac{Ml}{GJ}$
$2\,m$	$\frac{1}{2}\frac{GJ}{l}$	$\frac{1}{4}\,\alpha_1 - 3\,\frac{Ml}{GJ}$	$\frac{1}{8}\,\alpha_1\frac{GJ}{l} - \frac{3}{2}\,M$	$2\,M$	$\frac{3}{8}\,\alpha_1\frac{GJ}{l} + \frac{3}{2}\,M$	$2\,l$	$\frac{3}{4}\,\alpha_1 + 3\,\frac{Ml}{GJ}$
$3\,m$	$\frac{3}{4}\frac{GJ}{l}$	$-\frac{1}{2}\,\alpha_1 - 6\,\frac{Ml}{GJ}$	$-\frac{3}{8}\,\alpha_1\frac{GJ}{l} - \frac{9}{2}\,M$	$3\,M$	$0\,\alpha_1\frac{GJ}{l} + 0\,M$		

Der Ausschlag der Masse $3m$ muß Null werden, daher:

$$-\frac{1}{2}\,\alpha_1 - 6\,\frac{Ml}{GJ} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \alpha_1 = -12\,\frac{Ml}{GJ}\,;$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{4}\,\alpha_1 - 3\,\frac{Ml}{GJ} = -6\,\frac{Ml}{JG}\,.$$

Dieselbe Rechnung führen wir für die zweite Teilschwingung durch:

$$\omega_2^2 = \frac{2}{3}\,\frac{GJ}{l\,m}\,.$$

m	$\omega^2 m$	α	$\omega^2 m\,\alpha$	M	Σ	l	$\frac{l\,\Sigma}{GJ}$
$1\,m$	$\frac{2}{3}\frac{GJ}{l}$	α_1	$\frac{2}{3}\,\alpha_1\frac{GJ}{l}$	$1\,M$	$\frac{2}{3}\,\alpha_1\frac{GJ}{l} + 1\,M$	$3\,l$	$2\,\alpha_1 + 3\,\frac{Ml}{GJ}$
$2\,m$	$\frac{4}{3}\frac{GJ}{l}$	$-\alpha_1 - 3\,\frac{Ml}{GJ}$	$-\frac{4}{3}\,\alpha_1\frac{GJ}{l} - 4\,M$	$2\,M$	$-\frac{2}{3}\,\alpha_1\frac{GJ}{l} - 1\,M$	$2\,l$	$-\frac{4}{3}\,\alpha_1 - 2\,\frac{Ml}{GJ}$
$3\,m$	$2\,\frac{GJ}{l}$	$+\frac{1}{3}\,\alpha_1 - 1\,\frac{Ml}{GJ}$	$+\frac{2}{3}\,\alpha_1\frac{GJ}{l} - 2\,M$	$3\,M$	$0\,\alpha_1\frac{GJ}{l} + 0\,M$		

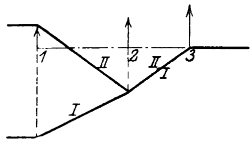


Fig. 26.

Daraus:

$$\alpha_1 = 3\frac{Ml}{GJ}; \qquad \alpha_2 = -6\frac{Ml}{GJ}.$$

Die beiden Teilschwingungsformen sind in Fig. 26 dargestellt.

b) $\qquad M_1 = M_2 = M_3 = M.$

Dafür wird:

$$\omega^4 - \omega^2\left[\frac{1}{3}\frac{1+2}{1\cdot 2} + \frac{1}{2}\frac{1+1}{2\cdot 1}\right]\frac{GJ}{lm} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\frac{1+1+1}{1\cdot 2\cdot 1}\left(\frac{GJ}{lm}\right)^2 = 0,$$

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \frac{1}{2}\frac{GJ}{lm}.$$

Die Schwingungsform ergibt sich noch einfacher, wenn wir die Reihenfolge der Massen umkehren, also mit dem bekannten Ausschlag $\alpha_3 = 0$ beginnen:

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{GJ}{lm}.$$

m	$\omega^2 m$	α	$\omega^2 m \alpha$	M	Σ	l	$\frac{l\Sigma}{GJ}$
$3m$	$\frac{3}{2}\frac{GJ}{l}$	$\alpha_3 = 0$	0	M	M	$2l$	$2\frac{Ml}{GJ}$
$2m$	$1\frac{GJ}{l}$	$-2\frac{Ml}{GJ}$	$-2M$	M	0	$3l$	0
$1m$	$\frac{1}{2}\frac{GJ}{l}$	$-2\frac{Ml}{GJ}$	$-1M$	M	0		

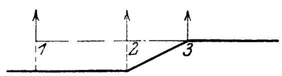


Fig. 27.

Die Schwingungsform zeigt Fig. 27.

Die Welle ist in diesem Fall zwischen den Massen 1 und 2 spannungsfrei.

c) $\quad M_1 = 3M; \quad M_2 = 2M; \quad M_3 = 1M.$

$$\omega^4 - \omega^2\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1+2}{1\cdot 2} + \frac{1}{2}\frac{2+1}{2\cdot 1}\right]\frac{GJ}{lm} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{3+2+1}{1\cdot 2\cdot 1}\left(\frac{GJ}{lm}\right)^2 = 0,$$

$$\omega^2 = \left(\frac{5}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{-7}\right)\frac{GJ}{lm}.$$

Für diesen Fall gibt es demnach keine reellen Teilschwingungszahlen.

Aus Gl. (68) erkennt man ferner, daß eine der Teilschwingungszahlen 0 wird, wenn $\sum_{k=1}^{k=p} M_k = 0$ ist, weil dann das letzte, von der Unbekannten ω^2 freie Glied verschwindet. So wird für:

d) $\qquad M_1 = M_2 = M; \qquad M_3 = -2M$:

$$\omega_1^2 = 0; \qquad \omega_2^2 = \frac{GJ}{lm}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1+2}{1\cdot 2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1-2}{2\cdot -2}\right] = \frac{5}{8}\frac{lm}{GJ}.$$

$$\alpha_1 = -8\frac{Ml}{GJ}; \qquad \alpha_2 = 4\frac{Ml}{GJ}.$$

Ist endlich:

e) $\qquad M_1 = 2M; \qquad M_2 = -3M; \qquad M_3 = 1M,$

so werden beide Werte ω^2 zu Null.

Bei vielen gegebenen Massen und Momenten wird man zur Aufsuchung der Teilschwingungszahlen genau so verfahren wie für die Aufsuchung der Eigenschwingungszahlen. Man wird die Werte ω^2 probeweise annehmen und mit dem bekannten Ausschlag Null der $p^{\text{-ten}}$ Masse beginnen. Die richtige Wahl von ω^2 erkennt man am Verschwinden des Summenmomentes für das freie Wellenende.

11. Zusätzliche harmonische Momente.

Für unsere 6-Zylindermaschine fanden wir bei der kritischen Maschinendrehzahl (12.) Ordnung $\frac{2 \cdot 2133}{12} = 355{,}5$/Min. Resonanz. Wir wollen nach Mitteln suchen, um dem durch die Resonanz bedingten gefährlichen Zustand zu begegnen. Meist wird zunächst versucht, die kritische Drehzahl aus dem Betriebsbereich der Maschine zu verlegen durch Änderung der Massen und elastischen Längen.

Wir wollen auch die Behandlung dieses Falles der Vollständigkeit halber zeigen und untersuchen, wie man das die größten Beanspruchungen erleidende Wellenstück zwischen Dynamo und Schwungrad verstärken muß, um die kritische Drehzahl (12.) Ordnung auf 420 in der Minute, die Eigenschwingungszahl also auf $\frac{12 \cdot 420}{2} = 2520$ zu erhöhen.

Dazu führen wir die bezogene Länge dieses Wellenstückes als Unbekannte in unsere Berechnung der Eigenschwingungszahl ein, wobei zweckmäßig die Einführung so spät als möglich vorgenommen wird, was wir durch Umkehr der Reihenfolge der Massen und Längen erreichen. Es ergibt sich für $\omega = \frac{\pi}{30} \cdot 2520$; $\omega^2 = 69640$ die Zahlentafel 9.

Zahlentafel 9.
$\omega^2 = 69640$.

m	$\omega^2 m$	α	$\omega^2 m \alpha$	Σ	l	$\frac{l\,\Sigma}{G J_0}$
6,5	$452{,}7 \cdot 10^3$	1	$452{,}7 \cdot 10^3$	$452{,}7 \cdot 10^3$	150	0,00679
7,0	$487{,}5 \cdot 10^3$	0,99321	$484{,}2 \cdot 10^3$	$936{,}9 \cdot 10^3$	77	0,00721
93	$6476{,}5 \cdot 10^3$	0,98600	$6385{,}8 \cdot 10^3$	$7322{,}7 \cdot 10^3$	48,5	0,03552
93	$6476{,}5 \cdot 10^3$	0,95048	$6155{,}8 \cdot 10^3$	$13478{,}5 \cdot 10^3$	48,5	0,06537
93	$6476{,}5 \cdot 10^3$	0,88511	$5732{,}4 \cdot 10^3$	$19210{,}9 \cdot 10^3$	48,5	0,09317
93	$6476{,}5 \cdot 10^3$	0,79194	$5129{,}0 \cdot 10^3$	$24339{,}9 \cdot 10^3$	48,5	0,11805
93	$6476{,}5 \cdot 10^3$	0,67389	$4364{,}4 \cdot 10^3$	$28704{,}3 \cdot 10^3$	48,5	0,13922
93	$6476{,}5 \cdot 10^3$	0,53467	$3462{,}8 \cdot 10^3$	$32167{,}1 \cdot 10^3$	57,5	0,18496
3000	$208920 \cdot 10^3$	0,34971	$73061{,}4 \cdot 10^3$	$105228{,}5 \cdot 10^3$	l	$105228{,}5 \cdot 1$
2200	$153208 \cdot 10^3$	$0{,}34971 - 105228{,}5 \cdot 10^{-7}\,l$	$53578{,}4 - 1612{,}185\,l$	$158806{,}9 - 1612{,}185\,l$		

Für das freie Wellenende muß sein:

$$158\,806{,}9 - 1612{,}185\,l = 0 \quad \text{oder}$$

$$l = 98{,}5\,.$$

Die bezogene Länge des Wellenstückes wird also jetzt 98,5 gegen früher 142. Da sich die elastischen Längen wie die Querschnittsträgheitsmomente oder bei ungebohrten Wellen wie die 4. Potenzen der Durchmesser verhalten, so erreicht man das Ziel durch die Vergrößerung der Wellendurchmesser auf das $\sqrt[4]{\frac{142}{98,5}} = 1,1$fache der ursprünglichen Durchmesser.

Man kann den gefährlichen Resonanzzustand einer Welle indessen auch ohne Verlegung der Eigenschwingung beseitigen, wenn man die Welle Teilschwingungen ausführen läßt. Dabei können, wie wir wissen, nur diejenigen Massen schwingungslos bleiben, an denen kein erregendes harmonisches Moment wirkt, also Dynamo und Schwungrad. Die natürlichen Teilschwingungszahlen des übrigen Massen- und Momentensystems liegen aber weit höher als die erste Eigenschwingungszahl des Gesamtsystems, die hier für den Resonanzfall in Frage kommt. Denn da im wesentlichen die hier an der Teilschwingung beteiligten Massen sich wie ihre Momente verhalten, sind die Teilschwingungszahlen unge-

Zahlentafel 10.

ω^2 49840.

m	$\omega^2 m$	α	$\omega^2 m \alpha$	M	Σ	l	$\frac{l\Sigma}{G J_0}$
2200	$109648 \cdot 10^3$	0	0	0	0	142	0
3000	$149520 \cdot 10^3$	0	0	0	0	57,5	0
93	$4635{,}12 \cdot 10^3$	0	0	M	$1{,}00000\,M$	48,5	$48{,}5 \cdot 10^{-10}\,M$
93	$4635{,}12 \cdot 10^3$	$-48{,}5 \cdot 10^{-10}\,M$	$-0{,}02248\,M$	M	$1{,}97752\,M$	48,5	$95{,}9 \cdot 10^{-10}\,M$
93	$4635{,}12 \cdot 10^3$	$-144{,}4 \cdot 10^{-10}\,M$	$-0{,}06693\,M$	M	$2{,}91059\,M$	48,5	$141{,}2 \cdot 10^{-10}\,M$
93	$4635{,}12 \cdot 10^3$	$-285{,}6 \cdot 10^{-10}\,M$	$-0{,}13238\,M$	M	$3{,}77821\,M$	48,5	$183{,}2 \cdot 10^{-10}\,M$
93	$4635{,}12 \cdot 10^3$	$-468{,}8 \cdot 10^{-10}\,M$	$-0{,}21729\,M$	M	$4{,}56092\,M$	48,5	$221{,}2 \cdot 10^{-10}\,M$
93	$4635{,}12 \cdot 10^3$	$-690{,}0 \cdot 10^{-10}\,M$	$-0{,}31982\,M$	M	$5{,}24110\,M$	77	$403{,}6 \cdot 10^{-10}\,M$
7,0	$348{,}88 \cdot 10^3$	$-1093{,}6 \cdot 10^{-10}\,M$	$-0{,}03815\,M$	L	$5{,}20295\,M + 1{,}00000\,L$	150	$780{,}4 \cdot 10^{-10}\,M$ $+150{,}0 \cdot 10^{-10}\,L$
6,5	$323{,}96 \cdot 10^3$	$-1874{,}0 \cdot 10^{-10}\,M - 150{,}0 \cdot 10^{-10}\,L$	$-0{,}06071\,M - 0{,}00486\,L$	L	$5{,}14224\,M + 1{,}99514\,L$	a	$5{,}142\,a \cdot 10^{-10}\,M$ $+1{,}995\,a \cdot 10^{-10}\,L$
0	0	$\begin{cases} -1874{,}0 \cdot 10^{-10}\,M - 150{,}0 \cdot 10^{-10}\,L \\ -5{,}142\,a \cdot 10^{-10}\,M - 1{,}995\,a \cdot 10^{-10}\,L \end{cases}$	$0\ M - 0\ L$	X	$\begin{cases} 5{,}14224\,M + 1{,}99514\,L \\ +X \end{cases}$		

fähr die Eigenschwingungszahlen des Systems ohne Dynamoanker und Schwungrad, die viel höher sind als die erste Eigenschwingung des Gesamtsystems, weil gerade die letztgenannten Teile die weitaus größten Massen besitzen. Damit also die Welle gerade bei der Eigenschwingungszahl des Gesamtsystems gleichzeitig Teilschwingungen ausführt, müssen wir die harmonischen Momente entsprechend ändern. Am einfachsten denken wir uns an irgendeiner Stelle der Welle ein zusätzliches harmonisches Moment wirkend, dessen Größe wir so bestimmen, daß Teilschwingung auftritt.

Da, wie Zahlentafel 8a zeigt, die Schwingung (12.) Ordnung wegen des geringen Einflusses der Luftpumpenmomente im wesentlichen von einer Phase ist, so wollen wir sie der Einfachheit halber als einphasig behandeln mit den gegebenen harmonischen Momenten gleicher Phase:

$$M_3 = M_4 = M_5 = M_6 = M_7 = M_8 = \sqrt{4400^2 + 64500^2} = 7750 = M;$$
$$M_9 = M_{10} = -700 = L.$$

Das Zusatzmoment X (der gleichen Periode und Phase) wirke am Luftpumpenwellenende im Abstand a von der Kurbel 10.

Man erhält für die Periode der Eigenschwingung, $\omega^2 = 49\,840$, die vorstehende Zahlentafel 10 (auf Seite 63).

Daraus ist zunächst zu ersehen, daß es gleichgültig ist, an welcher Stelle a des Wellenendes man das Zusatzmoment X angreifen läßt.

Seine Größe ergibt sich aus:

$$5{,}14224\,M + 1{,}99514\,L + X = 0 \qquad \text{zu}$$
$$-X = 5{,}14224\,M + 1{,}99514\,L = 5{,}14224 \cdot 7750 + 1{,}99514 \cdot -700$$
$$-X = 38\,456 \text{ kgcm}.$$

Damit ergeben sich die Ausschläge α der einzelnen Massen und Momentangriffsstellen:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_4 = -0{,}0376 \cdot 10^{-3}$$
$$\alpha_5 = -0{,}1119 \cdot 10^{-3}$$
$$\alpha_6 = -0{,}2213 \cdot 10^{-3}$$
$$\alpha_7 = -0{,}3633 \cdot 10^{-3}$$
$$\alpha_8 = -0{,}5348 \cdot 10^{-3}$$
$$\alpha_9 = -0{,}8475 \cdot 10^{-3}$$
$$\alpha_{10} = -1{,}4524 \cdot 10^{-3} + 0{,}0105 \cdot 10^{-3} = -1{,}4419 \cdot 10^{-3}$$
$$\alpha_{11} = \left\{\begin{matrix} -1{,}4524 \cdot 10^{-3} + 0{,}0105 \cdot 10^{-3} \\ -0{,}00399a \cdot 10^{-3} + 0{,}00014a \cdot 10^{-3} \end{matrix}\right\} = [-1{,}4419 - 0{,}00385a] \cdot 10^{-3}.$$

Der Vergleich mit den Ausschlägen γ in Zahlentafel 8a zeigt die erhebliche Verbesserung. Da wir hier unmittelbar mit der Periode der Eigenschwingung gerechnet haben, kommen sogar richtiger als Vergleichswerte die unendlich großen Ausschläge des Resonanzfalles in Betracht. Man hat also in dem zusätzlichen harmonischen Moment ein wirksames Mittel, den gefährlichen Schwingungszustand der Resonanz zu beseitigen.

Allerdings ist das harmonische Zusatzmoment X, wie man sieht, verhältnismäßig groß und etwa gleich der Summe aller erregenden Momente. Es wäre dieser Summe genau gleich, wenn der die Teilschwingung ausführende Wellenteil ohne Massen wäre.

Wegen des großen Zusatzmomentes muß auch noch die Drehbeanspruchung der Welle nachgeprüft werden, zumal da das Luftpumpenende verhältnismäßig schwach ist (Widerstandsmoment gegen Drehung $= 260\ \text{cm}^3$).

Man findet für das Wellenstück $l_{9.10}$:

$$\tau_{max} = \pm GJ_0 \cdot \frac{(1{,}4419 - 0{,}8475) \cdot 10^{-3}}{150 \cdot 260} = \pm 152\ \text{kg/cm}^2,$$

für das Wellenstück $l_{10.11}$:

$$\tau_{max} = \pm GJ_0 \cdot \frac{0{,}00385\,a \cdot 10^{-3}}{a \cdot 260} = \pm 148\ \text{kg/cm}^2.$$

Es ist also trotz des Angriffs des harmonischen Zusatzmomentes am schwachen Wellenende jede gefährliche Beanspruchung der Welle vermieden.

Wir haben das Zusatzmoment am Luftpumpenwellenende wirken lassen, hätten dafür aber auch eine beliebige andere Stelle des an der Teilschwingung teilnehmenden Wellenstückes wählen können. Nehmen wir z. B. das Zusatzmoment X an der ersten Arbeitskurbel (m_3) wirkend an, so erhalten wir für die durch X allein erzeugten Schwingungsausschläge die nachstehende Zahlentafel 11.

Zahltentafel 11.

$\omega^2 = 49\,840$.

m	$\omega^2 m$	α	$\omega^2 m \alpha$	M	Σ	l	$\frac{l\Sigma}{GJ_0}$
93	$4635{,}12 \cdot 10^3$	0	0	X	X	48,5	$48{,}5 \cdot 10^{-10}\,X$
93	$4635{,}12 \cdot 10^3$	$-\ 48{,}5 \cdot 10^{-10} X$	$-0{,}02248\ X$		$0{,}97752\ X$	48,5	$47{,}4 \cdot 10^{-10}\,X$
93	$4635{,}12 \cdot 10^3$	$-\ 95{,}9 \cdot 10^{-10} X$	$-0{,}04445\ X$		$0{,}93307\ X$	48,5	$45{,}3 \cdot 10^{-10}\,X$
93	$4635{,}12 \cdot 10^3$	$-141{,}2 \cdot 10^{-10} X$	$-0{,}06545\ X$		$0{,}86762\ X$	48,5	$42{,}1 \cdot 10^{-10}\,X$
93	$4635{,}12 \cdot 10^3$	$-183{,}3 \cdot 10^{-10} X$	$-0{,}08496\ X$		$0{,}78266\ X$	48,5	$38{,}0 \cdot 10^{-10}\,X$
93	$4635{,}12 \cdot 10^3$	$-221{,}3 \cdot 10^{-10} X$	$-0{,}10258\ X$		$0{,}68008\ X$	77	$52{,}4 \cdot 10^{-10}\,X$
7	$348{,}88 \cdot 10^3$	$-273{,}7 \cdot 10^{-10} X$	$-0{,}00955\ X$		$0{,}67053\ X$	150	$100{,}6 \cdot 10^{-10}\,X$
6,5	$323{,}96 \cdot 10^3$	$-374{,}3 \cdot 10^{-10} X$	$-0{,}01213\ X$		$0{,}65840\ X$		

Die aus Zahlentafel 10 und 11 hervorgehende Endgleichung lautet nunmehr:

$$5{,}14224\,M + 1{,}99514\,L + 0{,}65840\,X = 0 \qquad \text{oder}$$

$$-X = 7{,}8102\ M + 3{,}0303\ L = 58408\ \text{kgcm}.$$

Um also die gleiche Teilschwingung durch ein an der Masse m_3 wirkendes harmonisches Zusatzmoment zu erzielen, muß dieses Moment wesentlich größer sein als das am Wellenende erforderliche Moment.

Freilich werden damit auch die Ausschläge kleiner als im vorigen Fall; man findet z. B.:

$$\alpha_{10} = (-\ 1874{,}0\ M - 150{,}0\ L - 374{,}3 \cdot X) \cdot 10^{-10} = 0{,}8107 \cdot 10^{-3}.$$

Das zur Erzielung der Teilschwingung erforderliche harmonische Zusatzmoment wird am kleinsten, wenn man es an der Stelle des größten Ausschlages der zu beeinflussenden Schwingung anbringt.

Selbstverständlich kann man statt eines einzigen Zusatzmomentes auch mehrere Zusatzmomente an verschiedenen Stellen der Welle gleichzeitig anbringen, um die Teilschwingung zu erzwingen. Man erkennt leicht, daß die ganze Welle schwingungslos wird, wenn man an jeder Masse ein dem dort wirkenden erregenden harmonischen Moment gleiches und entgegengesetztes Zusatzmoment anbringt.

Bei der bisher berechneten Teilschwingung blieben Dynamoanker und Schwungrad schwingungsfrei. Die Masse des Schwungrades erscheint also in bezug auf die von der Schwingung herrührenden Ungleichförmigkeiten ausgeschaltet. Für praktische Zwecke braucht aber nur der Dynamoanker schwingungsfrei zu bleiben. Wir wollen daher auch noch diesen Fall einer Teilschwingung, und zwar für ein am Dynamoanker allein wirkendes harmonisches Zusatzmoment untersuchen (Zahlentafel 12).

Zahlentafel 12.

$\omega^2 = 49\,840$.

m	$\omega^2 m$	α	$\omega^2 m\,\alpha$	M	Σ	l	$\dfrac{l\,\Sigma}{G J_0}$
2200	$109648 \cdot 10^3$	0	0	X	X	142	$142{,}0 \cdot 10^{-10} X$
3000	$149520 \cdot 10^3$	$-142{,}0 \cdot 10^{-10} X$	$-2{,}12318 X$		$-1{,}12318 X$	57,5	$-64{,}6 \cdot 10^{-10} X$
93	$4635{,}12 \cdot 10^3$	$-77{,}4 \cdot 10^{-10} X$	$-0{,}03588 X$		$-1{,}15906 X$	48,5	$-56{,}2 \cdot 10^{-10} X$
93	$4635{,}12 \cdot 10^3$	$-21{,}2 \cdot 10^{-10} X$	$-0{,}00983 X$		$-1{,}16889 X$	48,5	$-56{,}7 \cdot 10^{-10} X$
93	$4635{,}12 \cdot 10^3$	$+35{,}5 \cdot 10^{-10} X$	$+0{,}01645 X$		$-1{,}15244 X$	48,5	$-55{,}9 \cdot 10^{-10} X$
93	$4635{,}12 \cdot 10^3$	$91{,}4 \cdot 10^{-10} X$	$0{,}04236 X$		$-1{,}11008 X$	48,5	$-53{,}8 \cdot 10^{-10} X$
93	$4635{,}12 \cdot 10^3$	$145{,}2 \cdot 10^{-10} X$	$0{,}06730 X$		$-1{,}04278 X$	48,5	$-50{,}6 \cdot 10^{-10} X$
93	$4635{,}12 \cdot 10^3$	$195{,}8 \cdot 10^{-10} X$	$0{,}09076 X$		$-0{,}95202 X$	77	$-73{,}3 \cdot 10^{-10} X$
7	$348{,}88 \cdot 10^3$	$269{,}1 \cdot 10^{-10} X$	$0{,}00939 X$		$-0{,}94263 X$	150	$-141{,}4 \cdot 10^{-10} X$
6,5	$323{,}96 \cdot 10^3$	$410{,}5 \cdot 10^{-10} X$	$0{,}01330 X$		$-0{,}92933 X$		

Hieraus und aus Zahlentafel 10 ergibt sich:

$$-0{,}92933\,X + 5{,}14224\,M + 1{,}99514\,L = 0$$

oder

$$X = 5{,}5333\,M + 2{,}1468\,L = 41380 \text{ kgcm}.$$

Die Ausschläge der Teilschwingung werden:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 & \alpha_6 &= +0{,}1569 \cdot 10^{-3} \\ \alpha_2 &= -0{,}5876 \cdot 10^{-3} & \alpha_7 &= 0{,}2375 \cdot 10^{-3} \\ \alpha_3 &= -0{,}3203 \cdot 10^{-3} & \alpha_8 &= 0{,}2754 \cdot 10^{-3} \\ \alpha_4 &= -0{,}1253 \cdot 10^{-3} & \alpha_9 &= 0{,}2660 \cdot 10^{-3} \\ \alpha_5 &= -0{,}0350 \cdot 10^{-3} & \alpha_{10} &= 0{,}2567 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Das an der Dynamo anzubringende Zusatzmoment ist also wesentlich kleiner als das an der Masse m_3 erforderliche (Zahlentafel 11) und fast ebenso klein wie das Zusatzmoment am Luftpumpenwellenende (Zahlentafel 10). Das ist dem Umstand zuzuschreiben, daß die Endmassen (m_1 und m_{10}) in unserem Fall fast die gleichen Ausschläge γ (Zahlentafel 8a) der zu beeinflussenden Schwingung ausführen.

12. Federnde Zusatzmassen.

Die Teilschwingungen eines Massensystems können anstatt durch äußere harmonische Zusatzmomente auch durch federnde Zusatzmassen zustande gebracht werden.

Um dies zu zeigen, stellen wir uns die Aufgabe, die in Zahlentafel 10 behandelte Teilschwingung statt durch das Zusatzmoment X am Luftpumpenwellenende durch eine an jener Stelle angebrachte Zusatzmasse m_0 im elastischen Abstand a von der letzten Luftpumpenkurbel zu erzeugen.

Der ganze Rechnungsgang der Zahlentafel 10 bleibt ungeändert bestehen bis auf die letzte Zeile, welche lautet:

m	$\omega^2 m$	α	$m\,\omega^2\,\alpha$	M	Σ
m_0	$49840\ m_0$	$\begin{cases} -1874{,}0 \cdot 10^{-10} M \\ -150{,}0\, L \cdot 10^{-10} \\ -5{,}14224 a M \cdot 10^{-10} \\ -1{,}99514\, a\, L \cdot 10^{-10} \end{cases}$	$\begin{cases} -49840 \cdot 10^{-10} m_0 \\ [1874{,}0 M + 150{,}0 L \\ + a\,(5{,}14224\, M \\ + 1{,}99514\, L)] \end{cases}$	0	$\begin{cases} 5{,}14224\, M + 1{,}99514\, L \\ -49840 \cdot 10^{-10} m_0 [1874\, M \\ + 150 L + a\,(5{,}14224\, M \\ + 1{,}99514\, L)] = 0 \end{cases}$

Die Momentensumme muß für das Wellenende verschwinden. Sie enthält die unbekannten Größen m_0 und a, so daß uns die Wahl einer dieser Größen freisteht. Das ist, genau genommen, nur richtig für gleichphasige Schwingungen. Hat die Schwingung zwei verschiedene Phasen, so müssen für das Wellenende die Momentensummen beider Phasen verschwinden, so daß sowohl m_0 als a als Unbekannte berechnet werden müssen. Wir machen für die elastische Länge a verschiedene Annahmen und berechnen das zugehörige Massenträgheitsmoment m_0 der Zusatzmasse:

$a =$	100	200	500	1000	10000
$\alpha_0 =$	10^{-3} — 1,82641	— 2,21097	— 3,36465	— 5,28745	— 39,89785
$m_0 =$	422,46	348,98	229,32	145,93	19,34

Daraus ist ersichtlich, daß die Zusatzmasse um so kleiner wird, je größer man die bezogene Länge a der Zusatzfeder macht. Daß selbst die elastische Länge $a = 10000$ noch gut praktisch ausführbar ist, soll gezeigt werden. Maßgebend ist dabei immer die zugelassene Drehbeanspruchung τ der Zusatzfeder. Wir erhalten in allen Fällen:

$$\tau = \frac{38456}{W}$$

und für

$$\tau \leq 1000\ \mathrm{kg/cm^2} : W \geq 38{,}456\ \mathrm{cm^3}.$$

Führen wir die Zusatzfeder mit $d = 6$ cm Durchmesser aus, so ist $W = 42{,}4$ und $\tau \sim 900\ \mathrm{kg/cm^2}$. Die wirkliche Länge der Zusatzfeder der kleinsten Zusatzmasse obiger Tafel ist:

$$l = l_0 \cdot \frac{GJ}{GJ_0} = 10000 \cdot \frac{830000 \cdot \frac{\pi}{32} \cdot 6^4}{10^{10}} = 105{,}6\ \mathrm{cm}.$$

Die gefährlichen Resonanzzustände lassen sich also auch mittels federnder Zusatzmassen beseitigen. Es darf aber hierbei nicht außer acht gelassen werden, daß wohl durch die Zusatzmasse die ursprüngliche Resonanz unschädlich gemacht wurde, daß aber gleichzeitig mit dem Hinzutritt der Zusatzmasse und ihrer Feder die Eigenschwingungszahlen des Gesamtsystems geändert und um eine vermehrt wurden. Es können also für den beseitigten gefährlichen Resonanzzustand zwei neue bei anderen Schwingungszahlen auftreten.

13. Zusammengesetzte Systeme.

Ebensogut wie am Wellenende hätten wir die Zusatzmasse auch an beliebiger anderer Stelle anbringen können, etwa in der Art, wie die Fig. 28 und 29 zeigen. Im letzteren Fall ist die Zusatzfeder in der Wellenbohrung, die Zusatzmasse neben der Kurbel untergebracht (D. R. P.

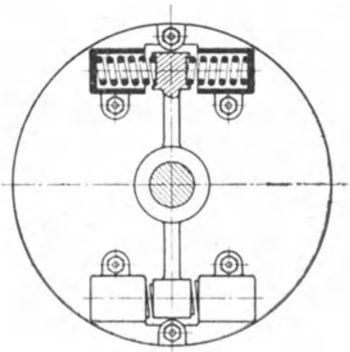


Fig. 28.

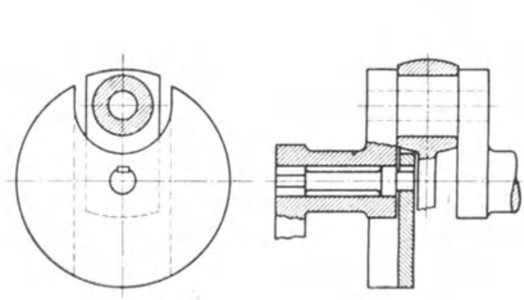


Fig. 29.

298 043). Die Berechnungsweise wird in diesen Fällen, wo die Zusatzmasse und ihre Feder nicht mehr in der Reihe der gegebenen Massen und Wellenteile liegt, etwas anders; die elastische Welle teilt sich gewissermaßen im Querschnitt des Angriffspunktes der Zusatzfeder in zwei parallele Äste; man hat kein einfaches Schwingungssystem mehr, sondern ein zusammengesetztes.

Um die Berechnung solcher zusammengesetzten Systeme an einem Beispiel zu zeigen, wollen wir uns die Aufgabe stellen, die in Zahlentafel 11 behandelte Teilschwingung statt durch ein harmonisches Moment an der Masse m_3 durch eine federnde Zusatzmasse, deren Feder im Wellenquerschnitt der Masse m_3 befestigt ist, zu erzwingen. Fig. 30 zeigt den Fall in schematischer Darstellung; m_0 ist das Massenträgheitsmoment der Zusatzmasse, l_0 die bezogene Länge der im Wellenquerschnitt der Masse m_3 eingespannten Zusatzfeder.

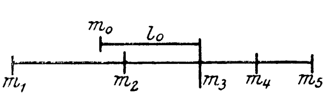


Fig. 30.

Wir berechnen zuerst den von der Zusatzmasse und ihrer Feder gebildeten Nebenstrang, indem wir wie bisher die gesamte Masse m_3 als zum Hauptstrang gehörig betrachten, obgleich das nicht notwendig ist. Man kann vielmehr, wie sich zeigen wird, nach Belieben einen Teil der Masse m_3 als zur Hauptwelle und den Rest als zur Nebenwelle gehörig annehmen, ohne am Ergebnis etwas zu ändern. An der Einspannstelle der Feder denken wir uns das vorerst unbekannte harmonische Moment Z wirkend und erhalten:

$$\omega^2 = 49\,840\,.$$

Nebenstrang.

m	$\omega^2 m$	α	$\omega^2 m\alpha$	M	Σ	l	$\frac{l\Sigma}{GJ_0}$
m_0	$49\,840\, m_0$	α_0	$49\,840\, m_0\alpha_0$	0	$49\,840\, m_0\alpha_0$	l_0	$49\,840\frac{m_0\alpha_0}{GJ_0}$
0	0	$\alpha_0\left(1-\frac{\omega^2 m_0 l_0}{GJ_0}\right)$	0	Z	$49\,840\, m_0\alpha_0+Z$		

Mit Berücksichtigung des Einspannmomentes Z des Federendes ist dieses als freies Ende zu betrachten, so daß man allgemein die Gleichung erhält:

$$Z = -\omega^2 m_0\alpha_0\,. \tag{69}$$

Der Ausschlag der Einspannstelle der Zusatzfeder, also auch der Masse m_3 ist nach dieser Rechnung:

$$\alpha_3 = \alpha_0\left(1-\frac{\omega^2 m_0 l_0}{GJ_0}\right).$$

Dieser Ausschlag soll aber gemäß der Teilschwingung Null werden, so daß man die weitere Beziehung erhält:

$$m_0\omega^2 = \frac{GJ_0}{l_0}\,. \tag{70}$$

Die Gl. (70) sagt aus, daß ω^2 der Eigenschwingung des Zusatzsystems entspricht, wenn man das Federende als fest eingespannt betrachtet.

Das am Einspannende der Feder wirkende harmonische Moment ist Z. Demnach ist das von der Zusatzfeder auf die Einspannstelle und damit auf die Hauptwelle ausgeübte Moment nach dem Grundsatz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung

$$-Z = m_0\omega^2\alpha_0\,,$$

und die Berechnung des Hauptstranges bleibt genau die gleiche wie in Zahlentafel 11 mit $X = -Z$. Infolgedessen wird auch jetzt:

$$X = -Z = -7{,}8102\, M - 3{,}0303\, L = -58408\,\text{kgcm} = 49\,840\, m_0\alpha_0\,. \tag{71}$$

Nach Gl. (71) ist $m_0 \alpha_0$ ein konstanter Wert. **Der Ausschlag der Zusatzmasse ist also in diesem Fall ihrem Massenträgheitsmoment umgekehrt proportional.**

Am richtigsten geht man zur Bestimmung aller Größen wieder von der zugelassenen Drehbeanspruchung der Zusatzfeder aus, für welche man findet:

$$\tau = \pm G J_0 \frac{\alpha_0}{l_0 W} = \pm \frac{Z}{W} = \pm \frac{58408}{W}$$

Für $\tau \leqq 1000$ wird $W \geqq 58{,}408$ und $d \geqq 6{,}7$ cm.

Führt man den Durchmesser der Drehfeder (Zusatzfeder) $d = 7$ cm aus, so wird $\tau = \pm 870$ kg/cm².

Jetzt steht noch die Wahl der Federlänge frei, die meist aus praktischen Gründen gegeben ist. Die auf $d = 7$ cm bezogene Länge soll hier mit 30 cm ausführbar sein. Ihr entspricht folglich eine auf $GJ_0 = 10^{10}$ bezogene Länge

$$l_0 = 30 \cdot \frac{10^{10}}{830\,000 \cdot \frac{\pi}{32} 7^4} = 1535 \text{ cm.}$$

Damit liefert Gl. (70):

$$m_0 = \frac{GJ_0}{l_0 \omega^2} = \frac{10^{10}}{1535 \cdot 49\,840} = 131 \text{ kgcm s}^2 \text{ und hiermit Gl. (71): } \alpha_0 = 8{,}946 \cdot 10^{-3}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß sich an der ganzen Berechnung nichts geändert hätte, wenn man die Masse m_3 beliebig auf Haupt- und Nebenstrang verteilt hätte, da ihr Massenträgheitsmoment wegen des geforderten Ausschlages $\alpha_3 = 0$ gar nicht in Betracht kommt, weder beim Neben- noch beim Hauptstrang.

Die soeben gezeigte Berechnung des zusammengesetzten Systems gilt für die Periode einer Teilschwingung. Um die Berechnung eines solchen Systems für eine beliebige Periodenzahl zu zeigen, sei noch die Ermittlung der erzwungenen Schwingung für $\omega^2 = 40\,000$ für die soeben berechnete Zusatzmasse durchgeführt.

Die Berechnung des Nebenstranges bleibt vorerst die gleiche wie vorher und ergibt (Gl. 69):

$$-Z = m_0 \omega^2 \alpha_0 .$$

Der Ausschlag des Zusatzfederendes, also der Masse m_3, ist ebenso wieder

$$\alpha_3 = \alpha_0 \left(1 - \frac{m_0 \omega^2 \cdot l_0}{G J_0}\right).$$

Mit Berücksichtigung dieser Beziehung wird das von dem Zusatzsystem auf den Hauptstrang ausgeübte harmonische Moment:

$$-Z = \frac{\omega^2 m_0 \alpha_3}{1 - \frac{\omega^2 m_0 l_0}{G J_0}} . \tag{72}$$

Für unser Zahlenbeispiel wird mit $\omega^2 = 40\,000$:

$$-Z = \frac{40\,000 \cdot 131 \cdot \alpha_3}{1 - 40\,000 \cdot 131 \cdot 1535 \cdot 10^{-10}} = 26\,781\, \alpha_3 \cdot 10^3 .$$

Mit diesem Wert des Zusatzmomentes berechnet sich jetzt der Hauptstrang wie folgt:

$$\omega^2 = 40\,000\,.$$

m	$\omega^2 m$	α	$\omega^2 m \alpha$	M	Σ	l	$\frac{l\Sigma}{GJ_0}$
2200	$88000 \cdot 10^3$	α_1	$88000 \cdot 10^3 \alpha_1$	—	$88000 \cdot 10^3 \alpha_1$	142	$1{,}24960\, \alpha_1$
3000	$120000 \cdot 10^3$	$-0{,}24960\, \alpha_1$	$-29952 \cdot 10^3 \alpha_1$	—	$58048 \cdot 10^3 \alpha_1$	57,5	$0{,}33378\, \alpha_1$
93	$3720 \cdot 10^3$	$\alpha_3 = -0{,}58338\, \alpha_1$	$-2170 \cdot 10^3 \alpha_1$	$-Z + M$	$\left\{\begin{array}{l} 55878 \cdot 10^3 \alpha_1 + M \\ + 26781 \cdot -0{,}58338\, \alpha_1 \cdot 10^3 \\ = 40255 \cdot 10^3 \alpha_1 + M \end{array}\right\}$	48,5	$0{,}19524\, \alpha_1 + 48{,}5 \cdot 10^{-10} M$

Von da ab ist die Berechnung die gewöhnliche, so daß wir auf ihre weitere Durchführung verzichten können.

Um zu beweisen, daß die Verteilung der Masse m_3 auf Haupt- und Nebenstrang gleichgültig ist, wollen wir die gleiche Rechnung nochmals durchführen, wobei wir m_3 als dem Nebenstrang zugehörig betrachten. Wir erhalten jetzt für den Nebenstrang:

$$\omega^2 = 40\,000\,.$$

m	$\omega^2 m$	α	$\omega^2 m \alpha$	M	Σ	l	$\frac{l\Sigma}{GJ_0}$
131	$5240 \cdot 10^3$	α_0	$5240 \cdot 10^3 \alpha_0$	—	$5240 \cdot 10^3 \alpha_0$	1535	$0{,}80434\, \alpha_0$
93	$3720 \cdot 10^3$	$0{,}19566\, \alpha_0$	$727{,}9 \cdot 10^3 \alpha_0$	Z	$5967{,}9 \cdot 10^3 \alpha_0 + Z$		

Daraus: $$-Z = 5967{,}9 \cdot 10^3 \alpha_0 = 5967{,}9 \cdot \frac{\alpha_3}{0{,}19566} \cdot 10^3 = 30501{,}4 \cdot 10^3 \alpha_3\,.$$

Hauptstrang:

Die frühere Berechnung bleibt unverändert bis zur Masse m_3, die jetzt $= 0$ wird, so daß ihre Zeile lautet:

m	$\omega^2 m$	α	$\omega^2 m \alpha$	M	Σ	l	$\frac{l\Sigma}{GJ_0}$
$m_3 = 0$	$\omega^2 m_3 = 0$	$\alpha_3 = -0{,}58338\, \alpha_1$	$\omega^2 m_3 \alpha_3 = 0$	$-Z + M$	$\left\{\begin{array}{l} 58048 \cdot 10^3 \alpha_1 + M \\ + 30501{,}4 \cdot -0{,}58338 \cdot 10^3 \alpha_1 \\ = 40255 \cdot 10^3 \alpha_1 + M \end{array}\right\}$	48,5	$0{,}19524\, \alpha_1 + 48{,}5 \cdot 10^{-10} M$

Das Ergebnis ist demnach das gleiche wie vorher.

Der Vollständigkeit wegen muß an dieser Stelle auf die Bestimmung der Eigenschwingungszahlen zusammengesetzter Systeme eingegangen werden, obgleich sich diese von der Berechnung der erzwungenen Schwingung dem Wesen nach nicht unterscheidet. Man muß hierzu nur alle äußeren erregenden harmonischen Momente = Null setzen, während das von der Zusatzfeder herrührende, innere Moment bleibt. Die Rechnung wird man mit einem probeweise angenommenen Wert ω^2 der Eigenschwingung durchführen und die Annahme verbessern, bis das Summenmoment für das freie Wellenende verschwindet.

Für unser Beispiel erhalten wir für die ersten Eigenschwingungen die nachstehenden Zahlentafeln 13 und 14.

Zahlentafel 13.

$$\omega^2 = 43480; \quad -Z = \frac{43480 \cdot 131 \cdot \alpha_3}{1 - 43480 \cdot 131 \cdot 1535 \cdot 10^{-10}} = 45319{,}8 \cdot 10^3 \alpha_3 .$$

m	ω^2	α	$\omega^2 m \alpha$	M	Σ	l	$\frac{l\,\Sigma}{G\,J_0}$
2200	95656 ·10³	1	95656 ·10³		95656 ·10³	142	1,358315
3000	130440 ·10³	-0,358315	-46738,6·10³	$-Z=$	48917,4·10³	57,5	0,281275
93	4043,6·10³	-0,639590	- 2586,2·10³	-28986,1·10³	17345,1·10³	48,5	0,084124
93	4043,6·10³	-0,723714	- 2926,4·10³		14418,7·10³	48,5	0,069931
93	4043,6·10³	-0,793645	- 3209,2·10³		11209,5·10³	48,5	0,054366
93	4043,6·10³	-0,848011	- 3429,0·10³		7780,5·10³	48,5	0,037735
93	4043,6·10³	-0,885746	- 3581,6·10³		4198,9·10³	48,5	0,020365
93	4043,6·10³	-0,906111	- 3663,9·10³		535,0·10³	77	0,004120
7,0	304,4·10³	-0,910231	- 277,1·10³		257,9·10³	150	0,003868
6,5	282,6·10³	-0,914099	- 258,3·10³		[—0,4]·10³		

Demnach: $\omega_1^2 = 43480$; $\omega_1 = 208{,}5$; $n_1 = \frac{30}{\pi}\,\omega_1 = 1980$.

Zahlentafel 14.

$$\omega^2 = 56680; \quad -Z = \frac{56680 \cdot 131\, \alpha_3}{1 - 56680 \cdot 131 \cdot 1535 \cdot 10^{-10}} = -53131{,}2 \cdot 10^3 \alpha_3 .$$

m	$\omega^2 m$	α	$\omega^2 m \alpha$	M	Σ	l	$\frac{l\,\Sigma}{G\,J_0}$
2200	124696 ·10³	1	124696 ·10³		124696 ·10³	142	1,770683
3000	170040 ·10³	-0,770683	-131046,9·10³		- 6350,9·10³	57,5	-0,036518
93	5271,24·10³	-0,734165	3869,9·10³	+39007,1·10³	+28786,3·10³	48,5	+0,139614
93	5271,24·10³	-0,873779	4605,9·10³		24180,4·10³	48,5	0,117275
93	5271,24·10³	0,991054	- 5224,1·10³		18956,3·10³	48,5	0,091938
93	5271,24·10³	-1,082992	- 5708,7·10³		13247,6·10³	48,5	0,064251
93	5271,24·10³	1,147243	- 6047,4·10³		7200,2·10³	48,5	0,034921
93	5271,24·10³	-1,182164	6231,5·10³		968,7·10³	77	0,007459
7,0	396,76·10³	1,189623	- 472,0·10³		496,7·10³	150	0,007451
6,5	368,42·10³	-1,197074	- 441,0·10³		[55,7]·10³		

Hieraus: $\omega_2^2 = 56688$; $\omega_2 = 238{,}0$; $n_2 = \frac{30}{\pi}\,\omega_2 = 2275$.

In beiden Zahlentafeln zeigen die Ausschläge der Massen des Hauptstranges nur einen Zeichenwechsel; aber im Falle der ersten

Eigenschwingung schwingt die Zusatzmasse mit ihrer Masse m_3 im gleichen, bei der zweiten Eigenschwingung im entgegengesetzten Sinn. Die Regel, wonach die Gradzahl der Schwingung der Anzahl der Zeichenwechsel der Ausschläge gleich ist, gilt demnach bei zusammengesetzten Systemen nur in ihrer Anwendung auf Haupt- und Nebenstrang.

Die Behandlung zusammengesetzter Systeme ist offenbar genau die gleiche, wenn der Nebenstrang nicht aus einer einzigen Zusatzmasse, sondern aus mehreren besteht; ja sie bleibt auch grundsätzlich ungeändert, wenn an den Zusatzmassen selbst wieder erregende harmonische Momente wirken. Ebenso kann man offenbar Systeme behandeln, die sich, statt in zwei, in drei oder mehr parallele Äste verzweigen.

Es bereitet auch für solche Systeme grundsätzlich keine Schwierigkeiten, die allgemeinen Gleichungen der freien und erzwungenen Schwingungen aufzustellen. Hier wollen wir uns damit begnügen, die Endgleichungen für die Eigenschwingungen zusammengesetzter 5-Massensysteme anzugeben. Für das in Fig. 31 schematisch dargestellte System erhält man die Gleichung der Eigenschwingungen:

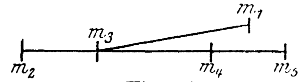


Fig. 31.

$$\left.\begin{aligned}
&\omega^8 - \omega^6 \left| c_{1.3}\frac{m_1+m_3}{m_1\cdot m_3} + c_{2.3}\frac{m_2+m_3}{m_2\cdot m_3} + c_{3.4}\frac{m_3+m_4}{m_2\cdot m_4} + c_{4.5}\frac{m_4+m_5}{m_4\cdot m_5}\right| \\
&+ \omega^4 \left| c_{1.3}c_{2.3}\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1\cdot m_2\cdot m_3} + c_{1.3}c_{3.4}\frac{m_1+m_3+m_4}{m_1\cdot m_3\cdot m_4} + c_{1.3}c_{4.5}\frac{m_1+m_3}{m_1\cdot m_3}\cdot\frac{m_4+m_5}{m_4\cdot m_5}\right. \\
&\left. + c_{2.3}c_{3.4}\frac{m_2+m_3+m_4}{m_2\cdot m_3\cdot m_4} + c_{2.3}c_{4.5}\frac{m_2+m_3}{m_2\cdot m_3}\cdot\frac{m_4+m_5}{m_4\cdot m_5} + c_{3.4}c_{4.5}\frac{m_3+m_4+m_5}{m_3\cdot m_4\cdot m_5}\right| \\
&- \omega^2 \left| c_{1.3}c_{2.3}c_{3.4}\frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{m_1\cdot m_2\cdot m_3\cdot m_4} + c_{1.3}c_{2.3}c_{4.5}\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1\cdot m_2\cdot m_3}\cdot\frac{m_4+m_5}{m_4\cdot m_5}\right. \\
&\left. + c_{1.3}c_{3.4}c_{4.5}\frac{m_1+m_3+m_4+m_5}{m_1\cdot m_3\cdot m_4\cdot m_5} + c_{2.3}c_{3.4}c_{4.5}\cdot\frac{m_2+m_3+m_4+m_5}{m_2\cdot m_3\cdot m_4\cdot m_5}\right| \\
&+ c_{1.3}c_{2.3}c_{3.4}c_{4.5}\cdot\frac{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5}{m_1\cdot m_2\cdot m_3\cdot m_4\cdot m_5} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (73)$$

Für die Eigenschwingungen des in Fig. 32 schematisch gezeichneten Systems lautet die Gleichung:

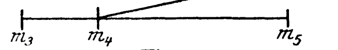


Fig. 32.

$$\left.\begin{aligned}
&\omega^8 - \omega^6 \left[c_{1.2}\frac{m_1+m_2}{m_1\cdot m_2} + c_{2.4}\frac{m_2+m_4}{m_2\cdot m_4} + c_{3.4}\frac{m_3+m_4}{m_3\cdot m_4} + c_{4.5}\frac{m_4+m_5}{m_4\cdot m_5}\right] \\
&+ \omega^4 \left| c_{1.2}c_{2.4}\frac{m_1+m_2+m_4}{m_1\cdot m_2\cdot m_4} + c_{1.2}c_{3.4}\frac{m_1+m_2}{m_1\cdot m_2}\cdot\frac{m_3+m_4}{m_3\cdot m_4} + c_{1.2}c_{4.5}\frac{m_1+m_2}{m_1\cdot m_2}\cdot\frac{m_4+m_5}{m_4\cdot m_5}\right. \\
&\left. + c_{2.4}c_{3.4}\frac{m_2+m_3+m_4}{m_2\cdot m_3\cdot m_4} + c_{2.4}c_{4.5}\frac{m_2+m_4+m_5}{m_2\cdot m_4\cdot m_5} + c_{3.4}c_{4.5}\frac{m_3+m_4+m_5}{m_3\cdot m_4\cdot m_5}\right] \\
&- \omega^2 \left[c_{1.2}c_{2.4}c_{3.4}\frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{m_1\cdot m_2\cdot m_3\cdot m_4} + c_{1.2}c_{2.4}c_{4.5}\frac{m_1+m_2+m_4+m_5}{m_1\cdot m_2\cdot m_4\cdot m_5}\right. \\
&\left. + c_{1.2}c_{3.4}c_{4.5}\frac{m_1+m_2}{m_1\cdot m_2}\cdot\frac{m_3+m_4+m_5}{m_3\cdot m_4\cdot m_5} + c_{2.4}c_{3.4}c_{4.5}\frac{m_2+m_3+m_4+m_5}{m_2\cdot m_2\cdot m_3\cdot m_4}\right| \\
&+ c_{1.2}c_{2.4}c_{3.4}c_{4.5}\frac{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5}{m_1\cdot m_2\cdot m_3\cdot m_4\cdot m_5} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (74)$$

Man erkennt, wie sich die Bauart dieser Gleichungen aufs engste dem Systembilde anpaßt.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen über zusammengesetzte Systeme kehren wir zu unserem Beispiel der 6-Zylindermaschine zurück, deren Teilschwingungen durch Zusatzmassen am Luftpumpenwellenende und an der ersten Arbeitskurbel (m_3) wir untersucht haben. Um jene Teilschwingung hervorzurufen, bei der nur der Dynamoanker schwingungsfrei bleibt, hätten wir die Zusatzmasse am Dynamowellenende anzubringen, wobei die Zusatzmasse in Reihe mit den gegebenen Massen liegen würde. Wir können aber auch diesen Fall als zusammengesetztes System auffassen. Dabei bleibt die Berechnung des Nebenstranges dieselbe wie früher, so daß für die Zusatzmasse wieder die Gleichungen (69) und (70) gelten. Es entspricht also auch in diesem Falle der Teilschwingungszahl des Hauptsystems die Eigenschwingungszahl des Zusatzsystems.

Für die Berechnung des Hauptstranges gilt wieder Zahlentafel 12 mit $X = -Z = \omega^2 m_0 \alpha_0 = 41\,380$ kgcm.

Das von der Zusatzfeder bei dieser Teilschwingung auszuübende Drehmoment ist also kleiner als das von der an m_3 sitzenden Zusatzfeder zu leistende Moment, und es ist fast ebenso klein wie das von der Zusatzmasse am Luftpumpenende zu leistende Drehmoment.

Je kleiner das Zusatzfedermoment ist, desto schwächer kann die Zusatzfeder bei gleicher Beanspruchung werden, desto größer wird ihre elastische Länge bei gleicher Ausführungslänge und desto kleiner wird die Zusatzmasse. Unsere Untersuchung lehrt, daß das Zusatzfedermoment an der Stelle des größten Ausschlages am kleinsten wird.

Der günstigste Ort für die Anbringung einer Zusatzmasse ist demnach die Stelle des größten Ausschlages der zu beeinflussenden Schwingung.

Die Angriffsstelle der Zusatzfeder wird zum Teilschwingungsknoten, wenn die Eigenschwingungszahl des Zusatzsystems gleich der Periodenzahl der beeinflußten Schwingung ist.

Man erkennt aus diesem Gesetz das Wesen der Wirkungsweise der Zusatzmassen. Die Zusatzsysteme vollführen Resonanzschwingungen, deren Ausschläge so lange anwachsen, bis das Zusatzfedermoment den übrigen erregenden und Massenträgheits-Drehmomenten das Gleichgewicht hält. Die Zusatzmassen machen also trotz der Resonanz endliche Ausschläge. Man bezeichnet diese Störung einer Schwingung durch Resonanzzusatzsysteme wohl auch als sekundäre Resonanz.

Das Prinzip der sekundären Resonanz liegt der Wirkungsweise des Frahmschen Schlingertanks zugrunde (D. R. P. 227 134). Dieser besteht aus einem quer in ein Schiff eingebauten U-förmigen Wasserbehälter, dessen Abmessungen und dessen Wasserfüllung so bestimmt sind, daß die Wassersäule die gleiche Eigenschwingungszahl besitzt wie das Schiff selbst, so daß die dem Schiff durch den Wogengang aufgezwungenen Resonanz-Rollschwingungen durch die sekundäre Resonanz des Behälterinhaltes gestört und vernichtet werden.

Eigenartig ist bei der Anwendung von Zusatzmassen die Tatsache, daß bei (oder ganz in der Nähe) der Periodenzahl, die der Eigenschwingung des Zusatzsystems entspricht, nicht nur die Ausschläge der Hauptmassen, sondern auch der Ausschlag der Zusatzmasse selbst, Kleinstwerte darstellen. Demnach ist auch die Drehbeanspruchung der Zusatzfeder gerade bei Resonanz des Zusatzsystems am kleinsten, was bei der Bemessung der Feder zu berücksichtigen ist. Die Richtigkeit dieser Aussage geht auch aus unserem Beispiel hervor, welches lehrt, daß die durch Hinzutritt des Zusatzsystems neu entstehenden Eigenschwingungszahlen des Gesamtsystems unter und über der Eigenschwingungszahl des Zusatzsystems liegen, daß man also bei fehlender Dämpfung (theoretisch) unendlich große Ausschläge aller Massen und unendlich große Drehbeanspruchungen erhält, wenn man sich von der Periode der Eigenschwingung des Zusatzsystems bis zur neuen Gesamteigenschwingungsperiode nach oben oder unten entfernt.

Statt einer einzigen Zusatzmasse kann man natürlich auch mehrere Zusatzmassen an mehreren Stellen der Welle gleichzeitig anbringen. Man erkennt leicht, daß die ganze Welle schwingungsfrei wird, wenn man an jeder Masse, an der ein erregendes harmonisches Moment wirkt, ein Zusatzsystem anbringt, dessen Eigenschwingungszahl gleich der Periodenzahl des Momentes ist.

14. Zusammengesetzte Schwingungssysteme mit starrer und elastischer Übersetzung zwischen den Systemteilen.

Ein besonders zu behandelnder Fall liegt vor, wenn zwischen Haupt- und Nebenstrang eines zusammengesetzten Systems eine Übersetzung eingeschaltet ist, wie etwa bei einer Maschinenwelle, die durch Zahnräder mit einer Steuer- oder Reglerwelle gekuppelt ist, oder wie bei durch Riemen- oder Seiltrieb verbundenen Wellensträngen. Dabei müssen wir freilich die Voraussetzung machen, daß die Zahnräder ohne Flankenspiel und der Riemen- oder Seiltrieb ohne Gleiten arbeiten.

Die Berechnung solcher Systeme soll an den einfachsten Beispielen gezeigt werden, da sich die Behandlung verwickelterer Fälle davon grundsätzlich nicht unterscheidet. Wir haben dabei wesentlich zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Das Übersetzungsmittel ist starr.

b) Das Übersetzungsmittel ist elastisch.

Für den Fall a) untersuchen wir das in Fig. 33 skizzierte System, bestehend aus dem Hauptstrang mit den Massen m_1 und m_2, an denen die harmonischen Momente gleicher Periode und gleicher (oder entgegengesetzter) Phase M_1 und M_2 wirken, und aus dem durch starre Verzahnung mit dem Hauptstrang verkuppelten Nebenstrang, der die Massen

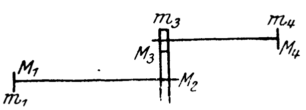


Fig. 33.

Nebenstrang: ω^2.

$m\omega^2$	α	$m\omega^2\alpha$	M	Σ	l	$\frac{l\Sigma}{GJ_0}$
$m_3\omega^2$	$\alpha_3 = \nu\alpha_2$	$m_3\omega^2\nu\alpha_2$	M_3+Z	$m_3\omega^2\nu\alpha_2+M_3+Z$	$l_{3,4}$	$\frac{m_3\omega^2\nu\alpha_2+M_3+Z}{c_{3,4}}$
$m_4\omega^2$	$\alpha_4 = \frac{(c_{3,4}-m_3\omega^2)\nu\alpha_2-M_3-Z}{c_{3,4}}$	$m_4\omega^2\frac{(c_{3,4}-m_3\omega^2)\nu\alpha_2-M_3-Z}{c_{3,4}}$	M_4	$\underbrace{\omega^2\nu\alpha_2\cdot\frac{(m_3+m_4)c_{3,4}-m_3m_4\omega^2}{c_{3,4}}+(M_3+Z)\frac{c_{3,4}-m_4\omega^2}{c_{3,4}}+M_4}$		

m_3 und m_4 mit den harmonischen Momenten M_3 und M_4 derselben Periode und Phase trägt.

Die Schwingungen des einen Stranges übertragen sich durch die Räderübersetzung auf den anderen Strang mittels der harmonischen Zahnkraft P, die nach dem Grundsatz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung für beide Räder gleich groß und entgegengesetzt gerichtet ist. Die Zahnkraft ergibt demnach das harmonische Moment $Z = P \cdot r_3$ am Nebenstrang und das harmonische Moment $Z' = -P\,r_2$ am Hauptstrang, wenn r_3 und r_2 die entsprechenden Hebelarme der Zahnkraft bedeuten. Daher besteht zwischen den Momenten die Beziehung:

$$Z' = -Z \cdot \frac{r_2}{r_3} = -Z \cdot \nu\,, \tag{75}$$

wenn

$$\nu = \frac{r_2}{r_3} \tag{75a}$$

das Übersetzungsverhältnis bezeichnet.

Ebenso besteht für die Ausschläge der Massen m_2 und m_3 infolge der starren Verzahnung die Gleichung:

$$\alpha_3 = \nu\,\alpha_2\,. \tag{76}$$

Damit erhalten wir die nebenstehende Berechnung des Nebenstranges, in welcher wir wegen der Einfachheit des Falles die allgemeine Buchstabenrechnung an Stelle von Zahlen beibehalten.

Für das freie Wellenende ergibt sich die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}\omega^2\nu\alpha_2\frac{(m_3+m_4)\,c_{3,4}-m_3m_4\omega^2}{c_{3,4}}\\ +(M_3+Z)\frac{c_{3,4}-m_4\omega^2}{c_{3,4}}+M_4=0.\end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Für den vollkommen gleichartigen Hauptstrang gilt mit entsprechend geänderten Bezeichnungen und wegen Gl. (75):

$$\left.\begin{aligned}\omega^2\alpha_2\frac{(m_1+m_2)\,c_{1,2}-m_1m_2\omega^2}{c_{1,2}}\\ +(M_2-\nu Z)\frac{c_{1,2}-m_1\omega^2}{c_{1,2}}+M_1=0\,.\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Die Gl. (77) und (78) dienen zur Berechnung von Z und α_2, wodurch auch die übrigen Ausschläge bekannt sind.

Man erhält durch Wegschaffen von Z aus (77) und (78):

$$\left.\begin{aligned} &\omega^2 \alpha_2[\omega^4 \cdot m_1(m_2+\nu^2 m_3)\,m_4 - \omega^2\bigl(c_{1,2}(m_1+m_2+\nu^2 m_3)\cdot m_4 \\ &+ c_{3,4}\,m_1\bigl(m_2+\nu^2(m_3+m_4)\bigr)\bigr) + c_{1,2}\,c_{3,4}\bigl(m_1+m_2+\nu^2(m_3+m_4)\bigr)] \\ &+ M_1\,c_{1,2}(c_{3,4}-m_4\,\omega^2) + (M_2+\nu\,M_3)(c_{1,2}-m_1\,\omega^2)(c_{3,4}-m_4\,\omega^2) \\ &+ \nu\,M_4(c_{1,2}-m_1\,\omega^2)\,c_{3,4} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (79)$$

Durch Nullsetzen der Momente M in Gl. (79) hat man die Gleichung für die Werte ω^2 der Eigenschwingungen des Systems:

$$\left.\begin{aligned} &\omega^4 - \omega^2\left[c_{1,2}\frac{m_1+m_2+\nu^2 m_3}{m_1\cdot(m_2+\nu^2 m_3)} + c_{3,4}\frac{m_2+\nu^2(m_3+m_4)}{(m_2+\nu^2 m_3)\cdot m_4}\right] \\ &+ c_{1,2}\,c_{3,4}\frac{m_1+m_2+\nu^2(m_3+m_4)}{m_1\,(m_2+\nu^2 m_3)\,m_4} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (80)$$

b) Das Übersetzungsmittel ist elastisch:

Die vom Übersetzungsmittel übertragene Kraft und Gegenkraft P kommt durch elastische Formänderungen zustande. So erleiden bei Zahnradübersetzung die im Eingriff stehenden Zähne beider Räder Verbiegungen (Fig. 34) y und y' nach Gleichungen von der Form:

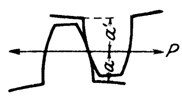


Fig. 34.

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{P\cdot a^3}{3\,E\,J} \\ y' &= \frac{P\cdot a'^3}{3\,E'J'} \end{aligned}\right\} \quad (81)$$

wenn E, E' die Elastizitätsmoduln, J, J' die (mittleren) Biegungsträgheitsmomente der Zahnquerschnitte bedeuten. Die für Verdrehungsschwingungen gültige elastische Konstante c der Räderübersetzung berechnet sich demnach aus

$$\left.\begin{aligned} &c\cdot\varphi = c\,\frac{y+y'}{r} = c\,\frac{P}{3}\,\frac{\dfrac{a^3}{EJ}+\dfrac{a'^3}{E'J'}}{r} = M = P\cdot r \\ \text{zu}\quad &c = \frac{3\,r^2}{\dfrac{a^3}{EJ}+\dfrac{a'^3}{E'J'}}\,. \end{aligned}\right\} \quad (82)$$

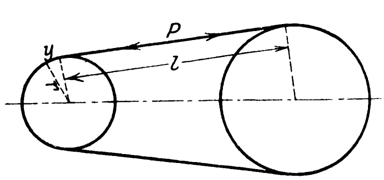


Fig. 35.

Beim Riemen- oder Seiltrieb bestimmt sich diese Größe aus der elastischen Dehnung y des Fadens (Fig. 35):

$$\left.\begin{aligned} c\cdot\varphi &= c\cdot\frac{y}{r} = \frac{c}{r}\cdot\frac{P\cdot l}{F\cdot E} = M = P\cdot r \\ c &= \frac{r^2\,F\cdot E}{l} \end{aligned}\right\} \quad (83)$$

(l Länge des ziehenden Trums, F Querschnitt, E Elastizitätsmodul des Fadens.)

Zur Berechnung des in Fig. 33 dargestellten Systems mit elastischer Übersetzung sei die elastische Konstante des Übersetzungsmittels $c_{2,3}$ als gegeben betrachtet. Dabei ist es aber nicht gleichgültig, ob man diese Größe auf den Haupt- oder auf den Nebenstrang bezieht. Denn wie die Gl. (82) und (83) erkennen lassen, hängt sie vom Quadrat des Übersetzungsradius ab. Bezieht sich $c_{2,3}$ auf den Nebenstrang, so ist die auf den Hauptstrang bezogene Konstante

$$c'_{2,3} = c_{2,3} \cdot \frac{r_2^2}{r_3^2} = c_{2,3} \cdot \nu^2 . \quad (84)$$

Zur Lösung unserer Aufgabe denken wir uns die elastische Übersetzung zergliedert in eine elastische Verbindung der Massen m_2 und m_3, wovon m_2 dem Haupt-, m_3 dem Nebenstrang angehört und in eine starre, massenlose Übersetzung, wobei die Wahl der Aufeinanderfolge dieser Zerlegungen gleichgültig bleiben muß. Damit ergeben sich die in den Fig. 36 und 37 schematisch dargestellten beiden Möglichkeiten, je nachdem die ela-

Nebenstrang (Fig. 36): ω^2.

$m\,\omega^2$		$m\,\omega^2\,\alpha$	M	Σ	l	$\frac{l\,\Sigma}{G\,J_0}$
0	$\alpha_2' = r\,\alpha_2$	0	Z	Z	$l_{2\,3}$	$\frac{Z}{c_{2\,3}}$
$m_3\,\omega^2$	$r\,\alpha_2 - \frac{Z}{c_{2\,3}}$	$m_3\,\omega^2\left(r\,\alpha_2 - \frac{Z}{c_{2\,3}}\right)$	M_3	$\begin{cases} m_3\,\omega^2\,r\,\alpha_2 + Z\frac{c_{2.3} - m_3\,\omega^2}{c_{2.3}} \\ + M_3 \end{cases}$	$l_{3.4}$	$\begin{cases} \frac{m_3\,\omega^2\,r\,\alpha_2}{c_{3\,4}} + Z\frac{c_{2.3} - m_3\,\omega^2}{c_{2\,3}\,c_{3\,4}} \\ + \frac{M_3}{c_{3\,4}} \end{cases}$
$m_4\,\omega^2$	$\begin{cases} r\,\alpha_2\frac{c_{3\,4} - m_3\,\omega^2}{c_{3\,4}} \\ - Z\frac{c_{2\,3} + c_{3\,4} - m_3\,\omega^2}{c_{2\,3}\,c_{3\,4}} \\ - \frac{M_3}{c_{3\,4}} \end{cases}$	$\begin{cases} m_4\,\omega^2\,\Big\vert\, r\,\alpha_2 \cdot \frac{c_{3\,4} - m_3\,\omega^2}{c_{3\,4}} \\ - Z\frac{c_{2.3} + c_{3\,4} - m_3\,\omega^2}{c_{2\,3}\,c_{3\,4}} \\ - \frac{M_3}{c_{3\,4}}\Big\vert \end{cases}$	M_4	$\begin{cases} \frac{\omega^2\,r\,\alpha_2}{c_{3\,4}}[(m_3 + m_4)\,c_{3\,4} \\ - m_3\,m_4\,\omega^2] + \frac{Z}{c_{2\,3}\,c_{3\,4}} \\ \cdot [c_{2\,3}\,c_{3\,4} - \omega^2(m_4\,c_{2\,3} \\ + (m_3 + m_4)\,c_{3\,4}) + m_3\,m_4\,\omega^4] \\ + \frac{M_3}{c_{3\,4}}(c_{3\,4} - m_4\,\omega^2) + M_4 \end{cases}$		

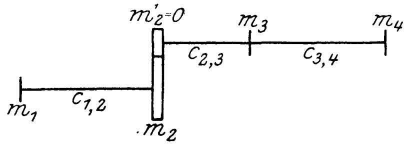


Fig. 36.

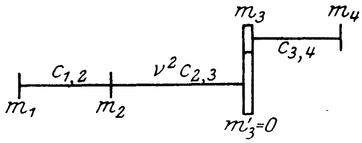


Fig. 37.

stische Verbindung dem Neben- oder dem Hauptstrang zugeschrieben wird.

Für den Nebenstrang (Fig. 36) erhält man nebenstehende Rechnung:

Dies liefert die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}\omega^2 \nu \lambda_2 \frac{(m_3+m_4)c_{3,4}-m_3 m_4\omega^2}{c_{3,4}} + Z\cdot\frac{c_{2,3}c_{3,4}-\omega^2(m_4 c_{2,3}+(m_3+m_4)c_{3,4})+m_3 m_4\omega^4}{c_{2,3}c_{3,4}}\\ + M_3\frac{c_{3,4}-m_4\omega^2}{c_{3,4}} + M_4 = 0\end{aligned}\right\} \quad (85)$$

Für den Hauptstrang (Fig. 36) gilt wieder Gl. (78).

Die Wegschaffung von Z aus (78) und (85) ergibt:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\omega^2\lambda_2}{c_{1,2}\,c_{2,3}\,c_{3,4}}\,[-\omega^6\cdot m_1 m_2 m_3 m_4 + \omega^4(c_{1,2}(m_1+m_2)m_3 m_4 + c_{2,3}m_1(m_2+\nu^2 m_3)m_4\\ &+c_{3,4}\cdot m_1 m_2(m_3+m_4)) - \omega^2(c_{1,2}c_{2,3}\cdot(m_1+m_2+\nu^2 m_3)m_4 + c_{1,2}c_{3,4}(m_1+m_2)(m_3+m_4)\\ &+c_{2,3}c_{3,4}m_1(m_2+\nu^2(m_3+m_4))) + c_{1,2}c_{2,3}c_{3,4}(m_1+m_2+\nu^2(m_3+m_4))]\\ &+\frac{c_{2,3}c_{3,4}-\omega^2(m_4 c_{2,3}+(m_3+m_4)c_{3,4})+m_3 m_4\omega^4}{c_{2,3}\,c_{3,4}}\left(M_1+\frac{c_{1,2}-m_1\omega^2}{c_{1,2}}M_2\right)\\ &+\nu\frac{c_{1,2}-m_1\omega^2}{c_{1,2}}\left(M_3\frac{c_{3,4}-m_4\omega^2}{c_{3,4}}+M_4\right)=0\end{aligned}\right\} \quad (86)$$

Die Werte ω^2 der Eigenschwingungen erhält man aus:

$$\left.\begin{aligned}&\omega^6-\omega^4\left(c_{1,2}\frac{m_1+m_2}{m_1\cdot m_2}+c_{2,3}\frac{m_2+\nu^2 m_3}{m_2\cdot m_3}+c_{3,4}\frac{m_3+m_4}{m_3\cdot m_4}\right)+\omega^2\left(c_{1,2}\,c_{2,3}\frac{m_1+m_2+\nu^2 m_3}{m_1\cdot m_2\cdot m_3}\right.\\ &\left.+c_{1,2}c_{3,4}\frac{m_1+m_2}{m_1\cdot m_2}\cdot\frac{m_3+m_4}{m_3\cdot m_4}+c_{2,3}c_{3,4}\frac{m_2+\nu^2(m_3+m_4)}{m_2\cdot m_3\cdot m_4}\right)-c_{1,2}c_{2,3}c_{3,4}\frac{m_1+m_2+\nu^2(m_3+m_4)}{m_1\cdot m_2\cdot m_3\cdot m_4}=0\end{aligned}\right\} \quad (87)$$

Hätten wir der Berechnung Fig. 37 zugrunde gelegt, so wäre nur Haupt- und Nebenstrang gegen Fig. 36 vertauscht. Man überzeugt sich leicht, daß durch entsprechende Vertauschung der Bezeichnungen und Berücksichtigung der Beziehung $c'_{2,3} = \nu^2 c_{2,3}$ . . . (84) das Ergebnis ungeändert bleibt.

15. Berücksichtigung der Wellenmasse.

In unseren bisherigen Berechnungen haben wir die elastischen Wellen und die Zusatzfedern als masselos angesehen. Wir wollen hier ergänzend untersuchen, wie deren Masse berücksichtigt werden kann.

Es sei in der Entfernung x vom Abszissenanfangspunkt (Fig. 38) $J_{(x)}$ das im allgemeinen mit x veränderliche, polare Querschnittsträgheits-

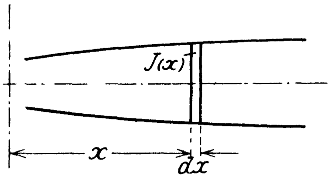


Fig. 38.

moment der Welle in cm^4, γ das Gewicht der Raumeinheit des Wellenmaterials in kg/cm^3; dann ist, wenn $g = 981\,cm\,s^{-2}$ die Erdbeschleunigung bezeichnet, das Massenträgheitsmoment μ für die Längeneinheit der Welle an der Stelle x in kgs^2:

$$\mu = \frac{\gamma}{G} \cdot J_{(x)}. \tag{88}$$

Das Wellenteilchen von der Länge dx hat demnach das Massenträgheitsmoment $\mu \cdot dx$. Für dieses Wellenteilchen stellen wir, genau wie in den Gl. (43), die Differentialgleichung der Schwingung auf, indem wir die Nachbarmassenteilchen unendlich nahe annehmen. Bei Abwesenheit eines äußeren harmonischen Momentes an der Stelle x lautet die Schwingungsgleichung, da der Schwingungswinkel φ sowohl eine Funktion der Zeit t als des Ortes x ist:

$$\mu \cdot dx \frac{\partial^2 \varphi_{(x)}}{\partial t^2} + c_{x-dx,x}(\varphi_{(x)} - \varphi_{(x-dx)}) + c_{x,x+dx}(\varphi_{(x)} - \varphi_{(x+dx)}) = 0\,. \tag{89}$$

In dieser Gleichung ist:

$$c_{x-dx,x} = \frac{G J_{(x)}}{dx}$$

und

$$c_{x,x+dx} = \frac{G(J_{(x)} + dJ_{(x)})}{dx}\,.$$

Die Werte $\varphi_{(x+dx)}$ und $\varphi_{(x-dx)}$ drücken wir mittels der Taylorschen Reihe durch $\varphi_{(x)}$ aus und erhalten:

$$\varphi_{(x+dx)} = \varphi_{(x)} + \frac{dx}{1!}\frac{\partial \varphi_{(x)}}{\partial x} + \frac{dx^2}{2!}\frac{\partial^2 \varphi_{(x)}}{\partial x^2} + \frac{dx^3}{3!}\frac{\partial^3 \varphi_{(x)}}{\partial x^3} + \dots$$

$$\varphi_{(x-dx)} = \varphi_{(x)} - \frac{dx}{1!}\frac{\partial \varphi_{(x)}}{\partial x} + \frac{dx^2}{2!}\frac{\partial^2 \varphi_{(x)}}{\partial x^2} - \frac{dx^3}{3!}\frac{\partial^3 \varphi_{(x)}}{\partial x^3} + \dots$$

Mit Berücksichtigung dieser Beziehungen und der Gl. (88) wird:

$$dx \cdot \frac{\gamma}{g} J_{(x)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{G J_{(x)}}{dx}\left| \frac{dx}{1!}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{dx^2}{2!}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{dx^3}{3!}\frac{\partial^3 \varphi_{(x)}}{\partial x^3} - \dots \right|$$
$$+ \frac{G(J_{(x)} + dJ_{(x)})}{dx}\left| -\frac{dx}{1!}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{dx^2}{2!}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{dx^3}{3!}\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - \dots \right| = 0$$

oder mit Weglassung unendlich kleiner Größen höherer Ordnung und nach Division mit dx:

$$\frac{\gamma}{g} J_{(x)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - G\left| J_{(x)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{dJ_{(x)}}{dx} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| = 0$$

oder

$$\frac{\partial^2 \varphi}{dt^2} = \frac{G \cdot g}{\gamma}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{J_{(x)}}\frac{dJ_{(x)}}{dx}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \tag{90}$$

Zur Lösung dieser partiellen Differentialgleichung versuchen wir den Ansatz:

$$\varphi = X \cdot T.$$

in welchem X eine Funktion von x allein, T eine Funktion von t allein bedeuten. Mit seiner Einführung in Gl. (90) und mit der Abkürzung:

$$a^2 = \frac{G g}{\gamma} \,. \tag{91}$$

ergibt sich:

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{d t^2} = \frac{a^2}{X} \left(\frac{d^2 X}{d x^2} + \frac{1}{J} \frac{d J}{d x} \cdot \frac{d X}{d x} \right). \tag{90a}$$

In Gl. (90a) stellt die linke Gleichungsseite eine reine Funktion von t, die rechte Seite eine reine Funktion von x dar. Die Gleichung kann demnach nur erfüllt werden, wenn jede Gleichungsseite einer und derselben Unveränderlichen $-c^2$ gleich ist. Das negative Vorzeichen der Konstanten ist zu wählen, weil sonst entgegen der Wirklichkeit der Schwingungswinkel φ mit t und x unbegrenzt zunehmen müßte. Gl. (90a) zerfällt jetzt in:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{d t^2} = -c^2 \\ \text{und} \quad &\frac{1}{X} \left(\frac{d^2 X}{d x^2} + \frac{1}{J} \frac{d J}{d x} \cdot \frac{d X}{d x} \right) = -\frac{c^2}{a^2} \end{aligned}\right\} \tag{90b}$$

Davon ist der erste Teil unmittelbar integrierbar und liefert mit den Integrationskonstanten A und α

$$T = A \sin (c t + \alpha) \,. \tag{90c}$$

Das Integral des zweiten Teils kann dagegen nicht allgemein angegeben werden. Beschränken wir uns auf zylindrische Wellen, so ist J unveränderlich, $\frac{d J}{d x}$ demnach Null, und das Integral der zweiten Gl. (90b) wird mit den Integrationskonstanten B und β:

$$X = B \sin \left(\frac{c}{a} x + \beta \right). \tag{90d}$$

Damit erhalten wir mit $C = A \cdot B$:

$$\varphi = C \sin (c t + \alpha) \sin \left(\frac{c}{a} x + \beta \right). \tag{92}$$

Für den Fall der freien zylindrischen Welle von der Länge l muß an den freien Enden $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ sein.

Diese Bedingung ergibt wegen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = C \frac{c}{a} \sin (c t + \alpha) \cos \left(\frac{c}{a} x + \beta \right)$$

für $x = 0$ den Wert $\beta = \frac{\pi}{2}$ und für $x = l$ die Gleichung $\frac{c}{a} l = n \pi$ wobei n eine beliebige ganze Zahl ist.

Damit wird für die freie Welle:

$$\varphi_n = C_n \sin\left(\frac{a\,n\,\pi\,t}{l} + \alpha\right)\cos\frac{n\,\pi\,x}{l}. \tag{92a}$$

Je nach dem Wert n erhalten wir also beliebig viele Eigenschwingungen von der Dauer

$$T_n = \frac{2\,l}{n\,a}, \tag{93}$$

die sich demnach umgekehrt wie die Gradzahlen n verhalten. Die Eigenschwingungszahlen sind mithin ganzzahlige Vielfache der Grundeigenschwingungszahl $n_1 = \frac{30\,a}{l}$. Es ist bemerkenswert, daß Wellen gleicher Länge gleiche Eigenschwingungszahlen haben, welches auch der Wellendurchmesser sei. Die Gl. (92a) zeigt ferner, daß an den Stellen $x = \frac{m\,l}{n}$ Schwingungsbäuche auftreten (m ganze Zahl von 0 bis n), zwischen denen gleichmäßig verteilt über die ganze Wellenlänge die Schwingungsknoten liegen (Fig. 39).

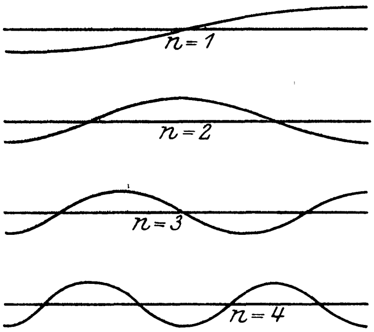


Fig. 39.

Die Konstante $a = \sqrt{\frac{G\,g}{\gamma}}$ nach Gl. (91) ist eine Materialkonstante und hat die Dimension cm s^{-1} der Geschwindigkeit. Sie stellt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Torsion dar und ist für Stahl

$$a = \sqrt{\frac{830000 \cdot 981}{0{,}0078}} = 3{,}23 \cdot 10^5 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 3230\,\frac{\text{m}}{\text{s}}. \tag{94}$$

Die Lösungsgl. (92) können wir nun auch zur Berücksichtigung der Trägheit des Wellenmaterials bei unseren Schwingungsberechnungen in der nachstehend beschriebenen Weise benützen.

Wir denken uns die Berechnung der Schwingung bis zur Masse m_h durchgeführt, so daß uns der Ausschlag α_h und die Momentensumme $\sum_{k=1}^{k=h-1}(\omega^2 m_k \alpha_k + M_k)$ bekannt ist. Nun berechnen wir zunächst ohne Rücksicht auf die Masse des Wellenstückes $l_{h,h+1}$ die Schwingungsform in der üblichen Weise weiter und erhalten so die Werte

$$\Sigma_{h0} = \sum_{k=1}^{k=h}(\omega^2 m_k \alpha_k + M_k)_0$$

und

$$\frac{\Sigma_{h0}}{c_{h,h+1}} = \frac{l_{h,h+1}\sum_{1}^{h}(\omega^2 m_k \alpha_k + M_k)_0}{G\,J_0}$$

und damit den Ausschlag $(\alpha_{h+1})_0$. Der Zeiger Null soll andeuten, daß diese Werte vorläufige, mit Nullsetzung der Masse des Wellenstückes $l_{h.h+1}$ berechnete Werte sind zur Unterscheidung von den wirklichen, mit Berücksichtigung dieser Masse zu findenden Werten. Der Einfluß des auf die Masse m_h folgenden Wellenmaterials wird sich darin zeigen, daß die Seite der Schwingungsform zwischen m_h und m_{h+1} nicht mehr eine gerade Linie, sondern eine Kurve ist, die sich bei m_h tangential an die Gerade der Schwingungsform anschmiegt (Fig. 40). Die Ordinaten der Schwingungsform stellen bekanntlich die Größtwerte des Schwingungswinkels, die Ausschläge, dar. Folglich müssen wir bei Verwendung unserer Lösungsgleichung (92) ebenfalls den Zeitpunkt betrachten, für welchen der Schwingungswinkel φ gleich dem Ausschlag wird, also für $\sin(ct_0 + \alpha) = 1$. Die Konstante c stellt dabei die Winkelschnelle der Schwingung dar; sie ist also in unserem Fall gleichbedeutend mit der Winkelschnelle ω der untersuchten Schwingung; demnach

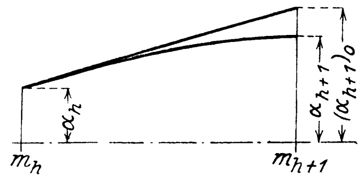


Fig. 40.

$$c = \omega\,. \tag{95}$$

Damit wird der Ausschlag $\varphi_{\max}$ nach Gl. (92), den wir jetzt wieder mit α bezeichnen wollen, da wohl keine Verwechslung mit der Integrationskonstanten α in Gl. (92) zu befürchten ist:

$$\alpha = C \sin\left(\frac{\omega x}{a} + \beta\right). \tag{96}$$

Die Kurve der Ausschläge der Schwingungsform zwischen m_h und m_{h+1} ist also eine Sinuskurve, von welcher der Anfangswert $\alpha_{(x=0)} = \alpha_h$ und die Anfangsneigung

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)_{x=0} = \frac{(\alpha_{h+1})_0 - \alpha_h}{l}$$

bekannt ist. Wir erhalten folglich aus Gl. (96):

$$\left.\begin{aligned} (\alpha)_{x=0} &= C \sin\beta = \alpha_h \\ \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)_{x=0} &= \frac{\omega}{a} C \cos\beta = \frac{(\alpha_{h+1})_0 - \alpha_h}{l}. \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

Aus den beiden Gl. (97) bestimmen sich leicht die Integrationskonstanten C und β, womit die Kurve der Ausschläge (Gl. 96) festgelegt ist und der wirkliche Ausschlag

$$\alpha_{h+1} = C \sin\left(\frac{\omega l}{a} + \beta\right) \tag{98}$$

berechnet werden kann. Zu beachten ist dabei, daß gemäß der Herleitung die Wellenlänge x und l sich auf die **wirkliche** Welle beziehen, ebenso wie in Gl. (88) und (90) J das Querschnittsträgheitsmoment der **wirklichen** Welle bedeutet. Da unsere Lösungsgleichung (92) nur für zylindrische Wellen gilt, muß man also die gegebene Welle durch zylindrische Stücke annähern, wenn eine wesentlich abweichende Wellenform vorliegen sollte.

Die Trägheit des Wellenstückes $l_{h,h+1}$ beeinflußt indessen nicht nur den Ausschlag α_{h+1}, sondern auch das Summenmoment. Das allein vom Wellenmaterial verursachte Trägheitsdrehmoment ΔM berechnet sich wie folgt:

$$\Delta M = \int_{x=0}^{x=l} \omega^2 \alpha\, d m = \omega^2 \cdot \frac{\gamma}{g} J C \int_{0}^{l} \sin\left(\frac{\omega x}{a} + \beta\right) d x$$

$$= \omega \frac{\gamma}{g} a J \cdot C \left[\cos\beta - \cos\left(\frac{\omega l}{a} + \beta\right)\right]$$

oder:

$$\Delta M = 2 \omega a \frac{\gamma}{g} J \cdot C \sin\left(\frac{\omega l}{2a} + \beta\right) \sin\frac{\omega l}{2a}. \tag{99}$$

Damit wird das gesamte Summenmoment:

$$\Sigma_h = \Sigma_{h0} + \Delta M. \tag{100}$$

Der Wert $\frac{\omega l}{a}$ wird wohl (praktisch) immer eine kleine Größe sein, so daß man die trigonometrischen Funktionen durch einige Glieder ihrer Reihe ersetzen kann:

$$\sin\frac{\omega l}{a} = \frac{\omega l}{a} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\omega l}{a}\right)^3 + \ldots$$

$$\cos\frac{\omega l}{a} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\omega l}{a}\right)^2 + \ldots$$

Der mit Berücksichtigung des Wellenmaterials zwischen m_h und m_{h+1} sich ergebende Ausschlag α_{h+1} kann nach Gl. (98) geschrieben werden:

$$\alpha_{h+1} = C\left(\sin\frac{\omega l}{a} \cos\beta + \cos\frac{\omega l}{a} \sin\beta\right) \tag{98a}$$

Darin setzen wir nach Gl. (97)

$$C \sin\beta = \alpha_h$$

$$C \cos\beta = \frac{a}{\omega} \frac{(\alpha_{h+1})_0 - \alpha_h}{l} = \frac{a}{\omega} \frac{\alpha_h - \frac{\Sigma_{h0}}{c_{h,h+1}} - \alpha_h}{l} = -\frac{a}{\omega} \frac{\Sigma_{h0}}{l \cdot c_{h,h+1}}$$

$$= -\frac{a}{\omega} \frac{\Sigma_{h0}}{l_{h,h+1} \cdot \frac{J}{J_0} \cdot \frac{G J_0}{l_{h,h+1}}} = -\frac{a}{\omega} \frac{\Sigma_{h0}}{G J}.$$

Setzt man diese Werte in Gl. (98a) ein und begnügt man sich mit den ersten Gliedern der sin- und cos-Reihe, so wird

$$\alpha_{h+1} = \frac{\omega l}{a} \cdot \frac{a \sum_{h0}}{\omega GJ} + \alpha_h = \alpha_h - \frac{\sum_{h0}}{c_{h,h+1}}.$$

Das ist aber der Ausschlag ohne Berücksichtigung der Wellenmasse. Um die Wellenmasse zu berücksichtigen, muß man demnach mehr Glieder der Reihenentwicklung anwenden. Wir erhalten dann mit 2 Gliedern:

$$\alpha_{h+1} = \left(\alpha_h - \frac{\sum_{h0}}{c_{h,h+1}}\right) - \left(\frac{\omega l}{a}\right)^2 \left[\frac{\alpha_h}{2} - \frac{1}{6}\frac{\sum_{h0}}{c_{h,h+1}}\right] \tag{101}$$

Das in Klammern gesetzte erste Glied der rechten Gleichungsseite (101) ist der Wert $(\alpha_{h+1})_0$ des Ausschlags ohne Berücksichtigung der Wellenmasse, das darauffolgende zweite Glied stellt also die durch die Wellenträgheit verursachte Änderung des Ausschlages dar.

Den Ausdruck ΔM haben wir bereits durch die Funktionen der halben Winkel ausgedrückt, so daß die Näherung an und für sich besser wird. Wir finden als erste Näherung:

$$\Delta M = \omega^2 l \frac{\gamma}{g} J \left(\alpha_h - \frac{\sum_{h0}}{2c_{h,h+1}}\right). \tag{102}$$

Als zweite Näherung erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \Delta M = \omega^2 l \frac{\gamma}{g} J \left[\alpha_h\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega l}{2a}\right)^2\right) - \frac{\sum_{h0}}{2c_{h,h+1}}\left(1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\omega l}{2a}\right)^2\right)\right] \\ \cdot\left(1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\omega l}{2a}\right)^2\right). \end{aligned}\right\} \tag{102a}$$

Die Anwendung der Rechnung wollen wir an einem einfachen Zahlenbeispiel einer Schiffswelle zeigen, weil eine Berücksichtigung des Wellenmaterials meist nur für die langen Schraubenwellen der Schiffe erforderlich scheint. Wir wählen dazu die Welle des Dampfers „Besoeki", die im Frahmschen Aufsatz (Z. d. V. d. I. 1902, S. 800f.) in Fig. 4 dargestellt ist. Die bezogene Entfernung der Kurbeln wurde aus jener Figur mit dem Maßstab zu $\backsim 100$ cm ermittelt und die Massen der Kurbeln und des Propellers wurden aus der Zahlentafel S. 881 unter Nummer 14 des genannten Aufsatzes entnommen, wobei mangels einzelner Angaben die auf den Kurbelhalbmesser 53,5 cm reduzierten Massen für jede der 3 Kurbeln gleich angenommen sind zu $\frac{11{,}04}{3} = 3{,}68$ und für den Propeller zu $31{,}68 \frac{\text{kg s}^2}{\text{cm}}$, so daß die Trägheitsmomente der einzelnen Massen in bezug auf die Wellenachse sind $m_2 = m_3 = m_4 = 3{,}68 \cdot 53{,}5^2$ und $m_1 = 31{,}68 \cdot 53{,}5^2$ kgcm s^2. In diesen Frahmschen Angaben sind aber bereits Zuschläge für die Wellenmasse enthalten; wir rechnen daher mit den reinen Trägheitsmomenten $m_2 = m_3 = m_4 = 10\,326$ und $m_1 = 90\,460$ kgcm s^2.

Der Wellendurchmesser ist 30 cm, das polare Trägheitsmoment des Wellenquerschnittes $J = \frac{\pi}{32} \cdot 30^4 = 79522$ cm^4, und der Schubelastizitätsmodul G ist 828 000 kg/cm^2. Die auf den Wellendurchmesser 30 cm bezogene Welle ist in

Fig. 41.

Fig. 41 dargestellt. Für unsere Berechnung wollen wir die Längen auf $G\,J_0 = 10^{10}$ beziehen und erhalten:

$$l_{2,3} = l_{3,4} = 100 \cdot \frac{10^{10}}{828\,000 \cdot 79\,522} = 15{,}19$$

und

$$l_{1,2} = 3700 \cdot \frac{10^{10}}{828\,000 \cdot 79\,522} = 561{,}9\,.$$

Frahm gibt die niedrigste Eigenschwingungszahl dieses Systems zu $n = 257{,}4$ (unter Zusammenfassung aller Kurbelmassen) an, entsprechend $\omega^2 = \left(\frac{\pi\,n}{30}\right)^2 \backsim 730$. Da es uns hier weniger darauf ankommt, die Verschiebung der Eigenschwingungszahl durch die Berücksichtigung des Wellenmaterials zu zeigen, als den Vergleich der Berechnungen bei einer und derselben Periodenzahl darzutun, so wollen wir alle Rechnungen für $\omega^2 = 730$, unbekümmert um etwaige Restmomente, durchführen.

Wir erhalten zunächst ohne Berücksichtigung der Wellenmasse:

$$\omega^2 = 730\,.$$

m	$m\,\omega^2$	α	$m\,\omega^2\,\alpha$	Σ	l	$l\,\Sigma : G J_0$
90460	66035800	1	66035800	66035800	561,9	3,710552
10326	7537980	—2,710552	—20432087	45603713	15,19	0,069272
10326	7537980	—2,779824	—20954258	24649455	15,19	0,037443
10326	7537980	—2,817267	—21236502	3412953		

Mit genauer Berücksichtigung der Wellenmasse:

Nach Gl. (91):

$$a = \sqrt{\frac{828\,000 \cdot 981}{0{,}0078}} = 322\,700\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}\,.$$

Daraus

$$\frac{a}{\omega} = \frac{322\,700}{\sqrt{730}} = 11\,943{,}67\,\text{cm};$$

$$\frac{\omega}{a} = 0{,}000083726\ \text{cm}^{-1}\,.$$

Wir wollen die Reihenfolge der Massen wie in der vorstehenden Tafel beibehalten und den Ausschlag des Propellers wieder wie dort willkürlich gleich 1 nehmen. Aus der Tafel entnehmen wir (1. Zeile): $(\alpha_{h+1})_0 - \alpha_h = -3{,}710552$ und erhalten damit nach Gl. (97):

$$C \sin\beta = 1\,,$$

$$C \cos\beta = \frac{a}{\omega}\,\frac{(\alpha_{h+1})_0 - \alpha_h}{l} = 11\,943{,}67 \cdot \frac{-3{,}710\,552}{3700} = -11{,}97773\,.$$

Daraus:

$$C^2 = 1^2 + (-11{,}977\,73)^2 = 144{,}4660\,,$$
$$C = 12{,}01940$$

und:

$$\cot\beta = -11{,}97773\,,$$
$$\beta = 180° - 4°\,46'\,21'' = 175{,}2275° = 3{,}05830\,.$$

Ferner ist

$$\frac{\omega\, l}{a} = 0{,}000083726 \cdot 3700 \qquad = 0{,}30979\,,$$

daher:

$$\frac{\omega\, l}{a} + \beta \qquad = 3{,}36809\,,$$

$$= 192{,}9773^\circ = 192^\circ\, 58'\, 38''\,.$$

Der wirkliche Ausschlag der vom Propeller aus gezählten ersten Kurbel (m_2) wird also nach Gl. (98):

$$\alpha_2 = C \sin\left(\frac{\omega\, l}{a} + \beta\right) = -2{,}699120\,.$$

Ebenso wird nach Gl. (99):

$$\Delta M_2 = 2 \cdot \sqrt{730} \cdot 322700 \cdot \frac{0{,}0078}{981} \cdot 79522 \cdot 12{,}01940 \sin 184^\circ\, 6'\, 8'' \sin 8^\circ\, 52'\, 28''\,,$$

$$\Delta M_2 = -1462487\,.$$

Wir erhalten also für die Masse m_2 den wirklichen Ausschlag $\alpha_2 = -2{,}699120$ und damit

$$m_2\, \omega^2\, \alpha_2 = -7537980 \cdot 2{,}699120 = -20345913\,.$$

Die Summe der Momente ergibt sich dann zu

$$\textstyle\sum_2 = \sum_1 + m_2\, \omega^2\, \alpha_2 + \Delta M_2 = 66035800 - 20345913 - 1462487 = 44227400\,.$$

Hieraus berechnet man wieder die Ausschlagdifferenz ohne Wellenberücksichtigung:

$$(\alpha_3)_0 - \alpha_2 = l_{2,3} \textstyle\sum_2 : G\, J_0 = 15{,}19 \cdot 44227400 : 10^{10} = 0{,}067181\,,$$

um die Rechnung genau wie für das vorausgehende Wellenstück $l_{1,2}$ jetzt für das Wellenteil $l_{2,3}$ zu wiederholen, nämlich:

$$C \sin\beta = -2{,}699120$$

$$C \cos\beta = -11943{,}67 \cdot \frac{0{,}067181}{100} = -8{,}02388\,,$$

woraus man findet:

$$C = 8{,}46569 \text{ und } \beta = 3{,}46609\,.$$

Daraus erhält man:

$$\alpha_3 = -2{,}766208 \text{ und } \Delta M_3 = -126209\,.$$

$$\textstyle\sum_3 = \sum_2 + m_3\, \omega^2\, \alpha_3 + \Delta M_3 = 23249570\,,$$

$$(\alpha_4)_0 - \alpha_3 = l_{3,4} \cdot \textstyle\sum_3 : G\, J_0 = 0{,}035316\,.$$

Damit berechnet man für das Wellenstück $l_{3,4}$:

$$C = 5{,}04417\,, \qquad \beta = 3{,}72204\,,$$

$$\alpha_4 = -2{,}801415 \qquad \Delta_4 M = -128570\,.$$

Die ganze Berechnung der genauen Berücksichtigung der Wellenmasse ist in der nachstehenden Zahlentafel zusammengetragen:

$$\omega^2 = 730\,.$$

m	$m\,\omega^2$	α	$m\,\omega^2\,\alpha$	ΔM	Σ	l	$l\,\Sigma : G\,J_0$
90460	66035800	1	66035800	—	66035800	561,9	3,710552
10326	7537980	—2,699120	—20345913	—1462487	44227400	15,19	0,067181
10326	7537980	—2,766208	—20851621	— 126209	23249570	15,19	0,035316
10326	7537980	—2,801415	—21117010	— 128570	2003990		

Mit angenäherter Berücksichtigung der Wellenmasse:
Nach Gl. (101) wird:

$$\alpha_2 = \left(\alpha_1 - \frac{\Sigma_1}{c_{1,2}}\right) - \left(\frac{\omega\, l}{a}\right)^2 \left[\frac{\alpha_1}{2} - \frac{1}{6}\frac{\Sigma_1}{c_{1,2}}\right]$$
$$= 1 - 3{,}710552 - 0{,}30979^2\,[0{,}5 - \tfrac{1}{6}\cdot 3{,}710552] = -2{,}699187$$

ΔM_2 nach Gl. (102)

$$= 730\cdot 3700\cdot \frac{0{,}0078}{981}\cdot 79522\left[1 - \frac{3{,}710552}{2}\right] = -1\,460\,642\,.$$

Nach der genaueren Formel (102a) wird:

$$\Delta M_2 = 461{,}568\cdot 3700\cdot \left[1\cdot\left(1 - \frac{0{,}023992}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\cdot 3{,}710552\,(1 - \tfrac{1}{6}\cdot 0{,}023992)\right]$$
$$\cdot\,(1 - \tfrac{1}{6}\cdot 0{,}023992) = 461{,}568\cdot 3700\cdot -0{,}859855\cdot 0{,}996002$$
$$\Delta M_2 = -1\,462\,591\,.$$

Zur Beurteilung der Näherung beachte man, daß es sich hier um eine lange Propellerwelle handelt; nichtsdestoweniger sind die Näherungen ausgezeichnet, wie der Vergleich mit der genauen Berechnung zeigt.

Man erhält aus den gefundenen Werten:

$$m_2\,\omega^2\,\alpha_2 = -7\,537\,980\cdot 2{,}699187 = -20\,346\,418\,,$$
$$\Sigma_2 = \Sigma_1 + m_2\,\omega^2\,\alpha_2 + \Delta M_2 = 66\,035\,800 - 20\,346\,418 - 1\,462\,591 = 44\,226\,791\,,$$
$$\frac{\Sigma_2}{c_{2,3}} = \frac{44\,226\,791\cdot 15{,}19}{10^{10}} = 0{,}067180\,.$$

Daraus:

$$\alpha_3 = (-2{,}699187 - 0{,}067180) - 0{,}0000701\left(-\frac{2{,}699187}{2} - \frac{1}{6}\cdot 0{,}067180\right)$$
$$\alpha_3 = -2{,}766272\,.$$

$$\Delta M_3 = 461{,}568\cdot 100\left[-2{,}699187 - \frac{0{,}067180}{2}\right] = -126\,136 \qquad \text{nach Gl. (102)}$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta M_3 = 461{,}568\cdot 100\Bigg[&-2{,}699187\left(1 - \frac{0{,}0000175}{2}\right)\\ &- \frac{0{,}067180}{2}\left(1 - \frac{0{,}0000175}{6}\right)\Bigg]\left(1 - \frac{0{,}0000175}{6}\right) = -126\,136\end{aligned}\right\}\ \text{nach Gl. (102a).}$$

Mit diesen Werten berechnet sich:

$$\Sigma_3 = \Sigma_2 + m_3\omega^2\alpha_3 + \Delta M_3 = 44\,226\,791 - 20\,852\,103 - 126\,136.$$
$$\Sigma_3 = 23\,248\,552.$$
$$\frac{\Sigma_3}{c_{3,4}} = 0{,}035315.$$
$$\alpha_4 = (-2{,}766272 - 0{,}035315) - 0{,}0000701\left(-\frac{2{,}766272}{2} - \frac{0{,}035315}{6}\right).$$
$$\alpha_4 = -2{,}801490; \qquad \Delta M_4 = -128\,496.$$

Die Ergebnisse der angenäherten Berücksichtigung der Wellenmasse sind in der folgenden Tafel enthalten:

$$\omega^2 = 730\,.$$

m	$m\,\omega^2$	α	$m\,\omega^2\,\alpha$	ΔM	Σ	l	$\frac{\Sigma}{c}$
90 460	66 035 800	1	66 035 800	—	66 035 800	561,9	3,710552
10 326	7 537 980	−2,699187	20 346 418	−1 462 591	44 226 791	15,19	0,067180
10 326	7 537 980	−2,766272	20 852 103	126 136	23 248 552	15,19	0,035315
10 326	7 537 980	−2,801490	21 117 576	128 496	2 002 480		

Wir wollen hier noch ein anderes einfaches Verfahren der Berücksichtigung der Wellenmasse entwickeln, indem wir die Masse der Welle zwischen den gegebenen Massen m_h und m_{h+1} durch eine Ersatzmasse w_h am Orte der Masse m_h ersetzen, welche den Ausschlag α_{h+1} richtig ergibt und durch eine Masse w'_{h+1} am Orte der Masse m_{h+1}, die das richtige Summenmoment herstellt.

Durch die Ersatzmasse w_h ändert sich das Summenmoment der h-ten Masse in

$$\sum_h = \sum_{h_0} + w_h \omega^2 \alpha_h\,, \tag{103}$$

wenn $\sum_{h_0}$ die Momentensumme ohne Berücksichtigung der Wellenmasse ($l_{h,h+1}$) und α_h der Ausschlag von m_h ist. Bei massenloser Welle ist aber

$$\alpha_{h+1} = \alpha_h - \frac{\sum_h}{c_{h,h+1}} = \alpha_h - \frac{\sum_{h_0}}{c_{h,h+1}} - \frac{w_h \omega^2 \alpha_h}{c_{h,h+1}}\,. \tag{104}$$

Andererseits ist aber nach Gl. (101) der richtige Ausschlag mit Einbeziehung der Wellenmasse:

$$\alpha_{h+1} = \left(\alpha_h - \frac{\sum_{h_0}}{c_{h,h+1}}\right) - \left(\frac{\omega l}{a}\right)^2 \left[\frac{\alpha_h}{2} - \frac{1}{6}\,\frac{\sum_{h_0}}{c_{h,h+1}}\right].$$

Der Vergleich von Gl. (101) mit (104) liefert:

$$w_h = \left(\frac{l}{a}\right)^2 \left[\frac{c_{h,h+1}}{2} - \frac{\sum_{h_0}}{6\alpha_h}\right]. \tag{105}$$

Diese Zuschlagmasse zu m_h ersetzt demnach die Wellenmasse (wirkliche Länge l) zwischen m_h und m_{h+1} hinsichtlich des Ausschlages. Diese Zusatzmasse vermehrt aber auch die Momentensumme um $w_h \omega^2 \alpha_h$. Die richtige Änderung ΔM dieser Summe ist aber nach Gl. (102).

$$\Delta M = \omega^2 l \frac{\gamma}{g} J\left(\alpha_h - \frac{\sum_{h_0}}{2\,c_{h,}c_{h+1}}\right).$$

Um diese Änderung zu berücksichtigen, wird die Zusatzmasse w'_{h+1} an der Masse m_{h+1} zugefügt, für welche also gilt:

$$w'_{h+1} \omega^2 \alpha_{h+1} = \omega^2 l \frac{\gamma}{g} J\left(\alpha_h - \frac{\sum_{h_0}}{2c_{h,h+1}}\right) - w_h \omega^2 \alpha_h$$

oder:

$$w'_{h+1} \cdot \alpha_{h+1} = l\frac{\gamma}{g} J\left(\alpha_h - \frac{\sum_{h_0}}{2c_{h,h+1}}\right) - \left(\frac{l}{a}\right)^2 c_{h,h+1} \left[\frac{\alpha_h}{2} - \frac{\sum_{h_0}}{6c_{h,h+1}}\right]$$

oder wegen:

$$a^2 = \frac{Gg}{\gamma} \quad \text{und} \quad c_{h,h+1} = \frac{GJ_0}{l_{h,h+1}} = \frac{GJ}{l}\,.$$

$$w'_{h+1} \cdot \alpha_{h+1} = l\frac{\gamma}{g} J\left[\frac{\alpha_h}{2} - \frac{\sum_{h_0}}{3c_{h,h+1}}\right]. \tag{106}$$

Auf dieselbe Form läßt sich Gl. (105) bringen, so daß man für die beiden Wellenersatzmassen erhält:

$$\left.\begin{aligned} w_h \alpha_h &= l \cdot \frac{\gamma}{g} J \left(\frac{\alpha_h}{2} - \frac{\Sigma_{h0}}{6 c_{h,h+1}} \right) \\ w'_{h+1} \alpha_{h+1} &= l \cdot \frac{\gamma}{g} J \left(\frac{\alpha_h}{2} - \frac{\Sigma_{h0}}{3 c_{h,h+1}} \right) \end{aligned} \right\} \tag{107}$$

Da in den Gl. (107) $l \cdot \frac{\gamma}{g} J$ das Trägheitsmoment des ganzen Wellenstückes zwischen den Massen m_h und m_{h+1} darstellt, so erkennt man leicht, daß die den Ausschlag richtigstellende Ersatzmasse w_h größer als die halbe Wellenmasse wird, wenn α_h und Σ_{h0} von entgegengesetzten Vorzeichen sind, und daß die das Drehmoment korrigierende Ersatzmasse w'_{h+1} größer als die halbe Wellenmasse wird, wenn α_{h+1} und Σ_{h0} von gleichem Vorzeichen sind $\left(\text{wegen } \alpha_{h+1} = \alpha_h - \frac{\Sigma_h}{c_{h,h+1}}\right)$. Die Ersatzmassen können sowohl positiv als auch negativ ausfallen. Sie werden unendlich groß in einem Schwingungsknoten, aber ihr Moment bleibt endlich.

Auch diese Berechnungsweise mit Wellenersatzmassen wollen wir am gleichen Zahlenbeispiel zeigen. Dabei ist es nicht nötig, die Größen der Ersatzmassen zahlenmäßig auszurechnen; man braucht nur ihren Beitrag zur Momentensumme einzuführen. Da in den Gl. (107) die Σ_{h0} als Rechnungsgröße auftritt, so enthält in der folgenden Zahlentafel die Σ-Reihe die Werte Σ_0 ohne Berücksichtigung der Wellenmasse und darunter den Wert Σ mit ihrer Berücksichtigung; das gleiche gilt von der letzten Reihe, die die Werte $\frac{\Sigma_0}{c}$ und $\frac{\Sigma}{c}$ untereinander enthält. Das Zustandekommen der Zahlentafel dürfte leicht verständlich sein.

$$\omega^2 = 730 .$$

m	$m\omega^2$	α	$w'\omega^2\alpha$ 1)	$m\omega^2\alpha$	$w\omega^2\alpha$ 1)	Σ_0 u. Σ	l	$\frac{\Sigma_0}{c}$ u. $\frac{\Sigma}{c}$
90460	66035800	1	—	66035800		66035800	561,9	3,710552
					—202247	65833553		3,699187
10326	7537980	—2,699187	—1258395	—20346418		44228740	15,19	0,067183
					— 62810	44165930		0,067088
10326	7537980	—2,766275	— 63843	—20852126		23249961	15,19	0,035317
					— 64113	23185848		0,035219
10326	7537980	—2,801494	— 64385	—21117606	—	2003857		

1) Diese Zahlen sind folgenderweise gefunden:

$$w_1 \omega^2 \alpha_1 = \omega^2 l \frac{\gamma}{g} J \left(\frac{\alpha_1}{2} - \frac{\Sigma_{1.0}}{6 c_{1.2}} \right) = 461{,}568 \cdot 3700 \left(\frac{1}{2} - \frac{3{,}710552}{6} \right) = -202\,247$$

$$w'_2 \omega^2 \alpha_2 = \omega^2 l \frac{\gamma}{g} J \left(\frac{\alpha_1}{2} - \frac{\Sigma_{1.0}}{3 c_{1.2}} \right) = 461{,}568 \cdot 3700 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{3{,}710552}{3} \right) = -1\,258\,395$$

(Fortsetzung dieser Fußnote nächste Seite.)

Man erkennt aus allen Berechnungsweisen die vorzügliche Übereinstimmung. Die Größe des Unterschiedes der Restmomente **mit** und **ohne** Berücksichtigung des Wellenmaterials läßt die Erniedrigung der Eigenschwingungszahl durch die Trägheit der Wellenmasse erkennen und abschätzen. Man findet z. B. als Restmoment **ohne** Berücksichtigung der Wellenmasse —36448 für $\omega^2 = 760$. Demnach entspricht der Unterschied 760 — 730 einem Unterschied der Restmomente 3412953 + 36448 ∾ 3449000. Da nun der Unterschied der Reste mit und ohne Wellenmasse bei $\omega^2 = 730$ beträgt ∾ 3413000 — 2004000 ∾ 1409000, so wird die Eigenschwingungszahl etwa liegen bei $\omega^2 = 760 - \frac{1409}{3449} \cdot (760 - 730) \sim 748$ gegen ∾ 760 bei masseloser Welle.

III. Gedämpfte Drehschwingungen.

16. Begriff der Dämpfung.

In unseren bisherigen Untersuchungen über Drehschwingungen haben wir stillschweigend von Bewegungswiderständen aller Art abgesehen. Die freien Drehschwingungen müßten demnach, einmal angeregt, unbegrenzt weiterdauern, obwohl keine erregenden harmonischen Momente wirken, und zur Aufrechterhaltung der erzwungenen Schwingungen brauchten die erregenden Momente keinerlei Arbeit zu leisten. Beide Folgerungen widersprechen jedoch der Erfahrung; denn in Wirklichkeit kommen Schwingungen ohne Bewegungswiderstände nicht vor. Diese Widerstände bewirken bei freien Schwingungen das bekannte, allmähliche Kleinerwerden der Schwingungsausschläge bis zum gänzlichen Erlöschen, und bei erzwungenen Schwingungen muß dauernd die zur Überwindung der Widerstände verbrauchte Arbeit von den erregenden periodischen Kräften oder Momenten geleistet werden. Im Falle der Resonanz, d. h. bei Übereinstimmung der Periode der erregenden Kräfte mit einer der Eigenschwingungen des schwingenden Systems verhüten die Bewegungswiderstände das dauernde Anwachsen der

---

$$w_2\omega^2\alpha_2 = 461{,}568 \cdot 100 \left(-\frac{2{,}699187}{2} - \frac{0{,}067183}{6}\right) = -62810$$

$$w_3'\omega^2\alpha_3 = 461{,}568 \cdot 100 \cdot \left(\frac{-2{,}699187}{2} - \frac{0{,}067183}{3}\right) = -63843$$

$$w_3\omega^2\alpha_3 = 461{,}568 \cdot 100 \cdot \left(-\frac{2{,}766275}{2} - \frac{0{,}035317}{6}\right) = -64113$$

$$w_4'\omega^2\alpha_4 = 461{,}568 \cdot 100 \cdot \left(\frac{-2{,}766275}{2} - \frac{0{,}035317}{3}\right) = -64385$$

$$\Sigma_{h+1,0} = \Sigma_h + w_{h+1}'\omega^2\alpha_{h+1} + m_{h+1}\omega^2\alpha_{h+1}$$

$$\Sigma_{h+1} = \Sigma_{h+1,0} + w_{h+1}\omega^2\alpha_{h+1}$$

$$\alpha_{h+1} = \alpha_h - \frac{\Sigma_h}{c_{h,h+1}}.$$

Schwingungsausschläge bis zum Bruch. Wegen dieser Eigenschaften bezeichnet man die Bewegungswiderstände auch als **dämpfende Kräfte** oder kurzweg als **Dämpfung**. Da sich in vielen praktischen Fällen die Resonanz nicht vermeiden läßt, so ist es von größtem Interesse, die Ausschläge und die Beanspruchungen bei gedämpften Schwingungen und damit auch die Gefährlichkeit der Resonanz zahlenmäßig berechnen zu können. Dazu muß man zunächst die Größe und Wirkungsweise der dämpfenden Widerstände kennen.

17. Die dämpfenden Widerstände.

Die den Drehschwingungen entgegenwirkenden dämpfenden Kräfte sind entweder **äußere** Reibungskräfte wie die Lager-, Stopfbüchsen- und Kolbenreibung der Getriebeteile und die Luft- oder Wasserreibung der umlaufenden Massen, oder **innere** Reibungskräfte infolge unvollkommener Elastizität des Wellenmaterials. Da die an den Schwingungen teilnehmenden Triebwerksteile gelenkig miteinander und mit der Welle verbunden sind, die Zapfen in den Lagern aber immer, wenn auch kleine, Spielräume haben müssen, so ergeben sich durch die periodische Umkehr der Schwingungsbewegungen Stöße der Zapfen gegen die Lager, die ebenfalls dämpfende Widerstände darstellen. Auch in den an eine Kurbelkröpfung anschließenden Kurbelwellenlagern können, wie wir sahen, durch die von den wechselnden verdrehenden Momenten hervorgebrachten Formänderungen ebenfalls Stöße der Hauptwelle eintreten. In magnetelektrischen Maschinen werden durch die Schwingungen der Ankerwicklungen im Magnetfeld durch magnetelektrische Induktion gleichfalls dämpfende Kräfte wachgerufen.

Um die dämpfenden Widerstände rechnerisch berücksichtigen zu können, müssen wir wissen, wie sie sich während einer Schwingung ändern. Die Gesetzmäßigkeit der Änderungen ist nun für die einzelnen der aufgezählten Widerstände verschieden und zum Teil nicht ganz einfach. Wir begnügen uns indessen hier mit der **Annahme, daß alle Widerstände der augenblicklichen Schwingungsgeschwindigkeit proportional und ihr entgegengesetzt** seien. Wir setzen also in jedem Fall das dämpfende periodische Moment gleich $-k\cdot\frac{d\varphi}{dt}$, wobei wir k, den **Dämpfungsfaktor**, als gegebene Größe betrachten. Diese einfache Annahme ergibt, wie die Erfahrung gelehrt hat, in den weitaus meisten Fällen eine genügende Übereinstimmung der Rechnung mit der Beobachtung. Da sich die Schwingungsberechnungen meist auf die erzwungenen Schwingungen beziehen, die, wie sich zeigen wird, auch bei Vorhandensein dämpfender Widerstände, einfache harmonische Schwingungen sind in der Form: $\varphi = \alpha \sin(\omega t + \gamma)$, so wird nach dem Ansatz das dämpfende Moment $K = -k \cdot \frac{d\varphi}{dt}$ $= -k\,\alpha\,\omega\cos(\omega t + \gamma) = k\,\alpha\,\omega\sin\left(\omega t + \gamma - \frac{\pi}{2}\right)$. Das Dämpfungsmoment ist demnach ebenfalls ein harmonisches Moment, das dem zugehörigen Schwingungsausschlag um $\frac{\pi}{2}$ in der Phase nacheilt (Fig. 42). Wenn für eine bestimmte Art der Dämpfung, etwa für die Stöße im Triebwerk, der einfache Ansatz ungenügende Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung ergeben sollte, so kann man diesem Mangel vielleicht auch durch Annahme eines andern, durch Versuche zu findenden Phasenverschiebungswinkels abhelfen derart, daß die zur Überwindung dieses Widerstandes aufzuwendende Arbeit genau so groß ist wie die tatsächliche, in Wärme verwandelte Dämpfungsarbeit.

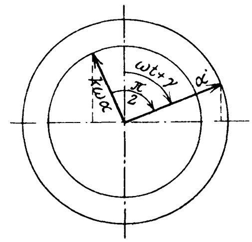


Fig. 42.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir dazu übergehen, ungefähre Anhaltspunkte über die Größe des Dämpfungsfaktors in den einzelnen Fällen der dämpfenden Widerstände zu ermitteln.

18. Dämpfungsfaktoren.

Die Lager-, Stopfbüchsen- und Kolbenreibungsmomente werden in Wirklichkeit weder vom Schwingungsausschlag, noch von der Schwingungsgeschwindigkeit abhängen, sondern ungefähr konstant sein. Will man diese Art der Dämpfung durch eine harmonische Dämpfung nach unserem Ansatz ersetzen, so muß die während einer vollen Schwingung verbrauchte Arbeit in beiden Fällen übereinstimmen. Ist M_r das gegebene konstante Reibungsmoment in kgcm, so ist die während einer Schwingung vom Ausschlag $\pm\alpha$ verbrauchte Arbeit $\mathfrak{A} = M_r \cdot 4\alpha$. Die Dämpfungsarbeit der harmonischen Geschwindigkeitsdämpfung berechnet sich zu

$$\mathfrak{A} = \int_{-\alpha}^{+\alpha} k\frac{d\varphi}{dt}\cdot d\varphi = \int_{t=0}^{t=T} k\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 dt = \int_{\omega t=0}^{\omega t=2\pi} k\cdot\omega^2\alpha^2\cos^2(\omega t + \gamma)\,dt$$

oder:

$$\mathfrak{A} = \pi k\omega\alpha^2. \tag{108}$$

Durch Gleichsetzen der Arbeiten ergibt sich für die gewöhnliche Reibungsdämpfung:

$$k = \frac{4}{\pi}\frac{M_r}{\omega\alpha}. \tag{109}$$

Der Dämpfungsfaktor ist also hier dem Ausschlag umgekehrt proportional. Da der Ausschlag nicht von vornherein gegeben ist, so wird man demnach die gewöhnliche Reibungsdämpfung zunächst schätzen und, wenn nötig, auf Grund des Ergebnisses berichtigen müssen. In den meisten praktischen Fällen spielen die Reibungsdämpfungen nur eine ganz untergeordnete Rolle und können wohl ganz vernachlässigt oder durch einen geringen Zuschlag zu den wesentlicheren Dämpfungen berücksichtigt werden, die selbst ohnehin nicht sehr genau ermittelbar sind.

Für in Luft oder Wasser schwingende Massen von größeren Abmessungen trifft das angenommene Dämpfungsgesetz erfahrungsgemäß genügend genau zu. Für die Größe des Dämpfungsfaktors k spielt natürlich die Gestalt der schwingenden Masse eine wesentliche Rolle. Für runde, glatte Körper, die die umgebende Flüssigkeit bei den Schwingungen nicht verdrängen, wird k sehr viel kleiner sein, als für Körper mit Vorsprüngen, Schaufeln, Armen und sonstigen, die Flüssigkeit bei den Schwingungen unmittelbar verdrängenden Teilen.

Einen ungefähren Anhaltspunkt über die Größe des Dämpfungsfaktors für in Flüssigkeiten schwingende glatte Körper liefern uns die Reibungsarbeiten der glatten Turbinenscheiben, für welche Stodola[1]) die Reibungsarbeit N_r in PS angibt durch die Formel:

$$N_r = \beta \cdot 10^{-6} \left(\frac{D_1}{100}\right)^2 \left(\frac{u_1}{100}\right)^3 \cdot \gamma \cdot 10^6 .$$

Dabei bedeutet β eine Beizahl, die durch Versuche in den Grenzen 1,9 bis 2,6 gefunden wurde, D_1 den Außendurchmesser der Scheibe in cm, u_1 die Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe in cm s^{-1} und γ das spezifische Gewicht der umgebenden Flüssigkeit in kg/cm³. Bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe mit ω, das reibende Moment in kgcm mit M_r, so ergibt sich:

$$M_r = \frac{7500\, N_r}{\omega} = \frac{75}{8} \cdot 10^{-8} \beta D_1^5 \omega^2 \gamma .$$

Führen wir ferner das Trägheitsmoment m der Scheibe ein, welches für eine mittlere Scheibendicke $h_1 = \lambda D_1$ und ein spezifisches Gewicht des Scheibenmaterials γ_1 in kg/cm³ sich berechnet zu

$$m = \frac{\pi}{32\, g} \lambda D_1^5 \gamma_1 , \qquad (g = 981 \text{ cm s}^{-2} \text{ Erdbeschleunigung}) ,$$

so kann man das Reibungsmoment M_r auch folgendermaßen ausdrücken:

$$M_r = \left(\frac{75}{8} \cdot \frac{32\, g}{\pi} \cdot 10^{-8} \frac{\beta}{\lambda} \frac{\gamma}{\gamma_1}\right) m \omega^2 = c\, m\, \omega^2 . \qquad (110)$$

[1]) Die Dampfturbinen, IV. Aufl., S. 124.

Stodola hat die mittlere Dicke der untersuchten Scheiben nicht angegeben. Da es sich aber um Scheiben handelte, so war sie sicher gering im Verhältnis zum Scheibendurchmesser. Für nicht scheibenförmige Körper kann übrigens die Verhältniszahl λ der Dicke zum Durchmesser wohl auch den Wert β selbst beeinflussen. Nehmen wir einmal an, daß der Wert $\beta \sim 2$ noch für $\lambda = 0{,}1$ gilt, so wird für solche in Luft ($\gamma = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$) rotierende Massen aus Stahl ($\gamma_1 = 0{,}0078$):

$$c = \frac{75}{8}\,\frac{32 \cdot 981}{\pi} \cdot 10^{-8} \cdot \frac{2}{0{,}1}\,\frac{1{,}2 \cdot 10^{-6}}{0{,}0078} \sim 0{,}0003\ .$$

Das Reibungsmoment, das ein mit der Winkelschnelle ω in einer Flüssigkeit umlaufender Körper vom Trägheitsmoment m erfährt, können wir nach Gl. (110) ausdrücken durch $M_r = c\,m\,\omega^2$. Vollführt der Körper außer einer gleichförmigen Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω_m (Maschinenwinkelgeschwindigkeit) gleichzeitig eine harmonische Drehschwingung $\varphi = \alpha \sin(\omega_0 t + \gamma)$, so ändert sich seine Winkelschnelle ω in jedem Augenblick und beträgt:

$$\omega = \omega_m + \frac{d\varphi}{dt} = \omega_m + \alpha\,\omega_0 \cos(\omega_0 t + \gamma)\ .$$

Das augenblickliche Reibungsmoment ist dann:

$$\begin{aligned} M_r &= c\,m\,\omega^2 = c\,m[\omega_m + \alpha\,\omega_0 \cos(\omega_0 t + \gamma)]^2 \\ &= c\,m[\omega_m^2 + 2\alpha\,\omega_m\,\omega_0 \cos(\omega_0 t + \gamma)]\,, \end{aligned}$$

wenn wir das kleine Glied $\alpha^2\,\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \gamma)$ als unerheblich weglassen, da α immer eine kleine Größe ist. Das Reibungsmoment setzt sich demnach zusammen aus einem unveränderlichen, von der gleichförmigen Drehung herrührenden Teil $c\,m\,\omega_m^2$ und aus einem periodisch wechselnden, von der Schwingung herrührenden Teil:

$$\Delta M_r = 2\,c\,m\,\alpha\,\omega_m\,\omega_0 \cos(\omega_0 t + \gamma) = k \cdot \frac{d\varphi}{dt} = k\,\alpha\,\omega_0 \cos(\omega_0 t + \gamma)\ .$$

Aus letzterem erhält man die Beziehung:

$$k = 2c\,m\,\omega_m = \frac{d M_r}{d\omega}\ . \tag{111}$$

Für glatte, runde, in Luft rotierende Massen, deren Breite etwa 0,1 des Durchmessers ist, fanden wir $2c = 0{,}0006$. Demnach werden wir für die gewöhnlich vorkommenden Massen, die Arme und sonstige luftverdrängende Teile besitzen, etwa $2\,c = 0{,}001$ annehmen dürfen, solange nicht genauere Werte aus Versuchen vorliegen.

Wir erhalten demnach für in atmosphärischer Luft rotierende Massen aus Stahl:

$$k = 0{,}001\,m\,\omega_m \tag{112}$$

Für die im Wasser schwingenden rotierenden **Schiffsschrauben** hat **Frahm** in seinen mehrerwähnten Untersuchungen[1]) das Widerstandsgesetz angegeben zu

$$M = K \cdot v^q = C\,\omega^q \tag{113}$$

Darin ist M das Widerstandsmoment, K und C Konstante, v die augenblickliche Drehgeschwindigkeit und q ein Zahlenwert, der aus Versuchen zu $q = 3{,}6$ bis 4 gefunden wurde. Daraus bestimmt sich der Dämpfungsfaktor nach der vorher gezeigten ausführlichen Ableitung zu:

$$k = \frac{dM}{d\omega} = q \cdot C\,\omega^{q-1} = q \cdot \frac{C\,\omega^q}{\omega} = q \cdot \frac{M}{\omega} \tag{114}$$

Das einer beliebigen Winkelgeschwindigkeit ω entsprechende Drehmoment M ist meist nicht ohne weiteres bekannt; wir wollen deshalb Gl. (14) noch in eine für den Gebrauch passende Form bringen: Meist pflegt die Schraubenleistung N_0 in PS bei der normalen Drehzahl n_0 gegeben zu sein. Sind M_0 und ω_0 die zugehörigen Werte des Drehmoments und der Winkelschnelle, so kann man das Drehmoment M für eine beliebige Maschinenwinkelgeschwindigkeit ω_m ausdrücken durch

$$M = M_0 \left(\frac{\omega_m}{\omega_0}\right)^q = \frac{7500\,N_0}{\omega_0} \left(\frac{\omega_m}{\omega_0}\right)^q$$

und erhält damit, wenn n die dem Wert ω_m entsprechende Maschinendrehzahl ist:

$$k = q \cdot \frac{7500\,N_0}{\frac{\pi}{30}\,n_0 \cdot \omega_m} \cdot \left(\frac{\omega_m}{\omega_0}\right)^q = 71\,620\,\frac{q}{\omega_m}\,\frac{N_0}{n_0}\left(\frac{n}{n_0}\right)^q \tag{115}$$

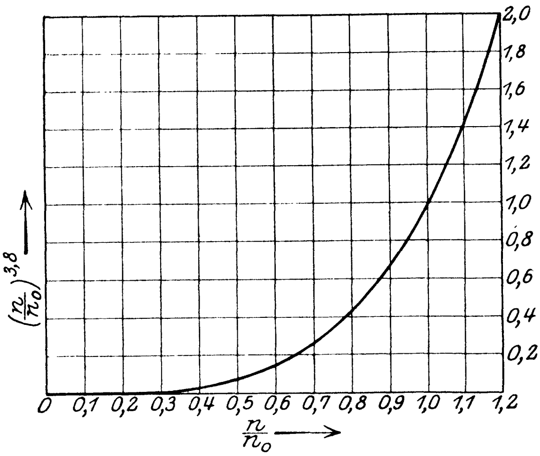


Fig. 43.

Für die Laufräder der rotierenden **Schleuderpumpen und -gebläse** ändert sich bekanntlich bei „Stromähnlichkeit" die Leistung im Verhältnis der 3. Potenz der Drehzahlen, das Drehmoment also mit der 2. Potenz dieser Größe. Die Gl. (115) kann demnach auch für die Berechnung des Dämpffaktors solcher Räder dienen, wenn man $q = 2$ einführt. In praktischen Fällen liegt meist nicht Stromähnlichkeit,

[1]) Z. d. V. d. I. 1902.

sondern unveränderliche Förderhöhe (Gegendruck) vor. Dafür wird q größer, etwa 2,5 bis 3,5 je nach der Charakteristik der Maschine.

Für die Berechnung der Propellerdämpfung kann man sich der nachstehenden Zahlentafel 15 für den Mittelwert $q = 3{,}8$ oder der Kurve Fig. 43 bedienen.

Zahlentafel 15.

$\frac{n}{n_0} =$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
$\left(\frac{n}{n_0}\right)^{3,8} =$	0,000036	0,000158	0,000740	0,00219	0,00516	0,01028	0,01851	0,03075
$\frac{n}{n_0} =$	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80
$\left(\frac{n}{n_0}\right)^{3,8} =$	0,04811	0,07179	0,10313	0,14354	0,19457	0,25785	0,33515	0,42830
$\frac{n}{n_0} =$	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20
$\left(\frac{n}{n_0}\right)^{3,8} =$	0,53925	0,67007	0,82291	1,00000	1,2065	1,4365	1,7008	1,9993

Da eine Schiffsschraube selbst ein in einer Flüssigkeit umlaufender Teil ist, der allerdings absichtlich so gestaltet ist, um die Flüssigkeit möglichst energisch zu verdrängen, so können wir an Gl. (115) auch unsere Gl. (112) noch einmal prüfen. Für den Propeller des Dampfers „Besoeki" finden wir in der Frahmschen Arbeit die Angaben: Trägheitsmoment $m = 31{,}68 \cdot 53{,}5^2$, indizierte Leistung $N_i = 1600$ PS; normale Drehzahl $n_0 = 70$; $q = 4$. Rechnen wir die Schraubenleistung $N_0 = 1400$ PS, so ist für $n_0 = 70$ nach Gl. (114):

$$k_0 = 4\,\frac{M_0}{\omega_0} = 4 \cdot \frac{7500 \cdot 1400}{\left(\frac{\pi}{30} \cdot 70\right)^2} \backsim 780000\,.$$

Drücken wir diesen Wert gemäß Gl. (111) aus durch $k_0 = 2\,c\,m\,\omega_0$, so findet man:

$$2\,c = \frac{k_0}{m\,\omega_0} = \frac{780000}{31{,}68 \cdot 53{,}5^2 \cdot \frac{\pi}{30} \cdot 70} \backsim 1{,}17\,.$$

Denken wir uns einen gleichen Propeller aus Stahl in Luft umlaufend, so wird nach Gl. (110) der Wert $2\,c$ im Verhältnis der spezifischen Gewichte von Luft und Wasser kleiner und im Verhältnis der spezifischen Gewichte von Bronze und Stahl größer. Es ergibt sich also:

$$(2\,c)_{\text{Luft}} = 1{,}17 \cdot \frac{1{,}2}{1000} \cdot \frac{9}{7{,}8} \backsim 0{,}0016\,,$$

ein Wert, der mit Rücksicht auf die bei der Schraube besonders kräftige Luftverdrängung recht gut unserem Wert 0,001 in Gl. (112) entspricht.

Für die innere Dämpfung infolge unvollkommener Elastizität des Wellenbaustoffes sind mir Versuchsangaben nicht bekannt. Man kann die Größe dieser Dämpfungsart berechnen, wenn man an einer glatten, von äußeren Dämpfungen möglichst freien, Eigenschwingungen vollführenden Welle die Abnahme des Schwingungsausschlages beobachtet. Ist die an der Welle beobachtete Eigenschwingung eine solche n^{ten} Grades (n Knoten auf der Wellenlänge) und ist $\varepsilon_n < 1$ das beobachtete Verhältnis der Ausschläge gleichen Drehsinns zweier unmittelbar aufeinanderfolgenden Schwingungen, so findet man den inneren Dämpfungsfaktor k_1 aus der Gleichung:

$$k_1 = -\frac{2\frac{\gamma}{g} J \cdot l}{n^2 \pi^2} \cdot \frac{\ln \varepsilon_n}{T_n} \tag{116}$$

wobei γ das Gewicht von 1 cm³ des Wellenbaustoffes, $g = 981$ cm s^{-2} die Erdbeschleunigung, J das polare Trägheitsmoment des Wellenquerschnitts (cm⁴) und T_n die beobachtete Eigenschwingungsdauer (s) bedeuten. Die Begründung dieser Gleichung wird sich später aus der Untersuchung der Eigenschwingungen von Wellen ergeben.

Kurbeldämpfung. Wie schon erwähnt, treten infolge der Verdrehungsschwingungen Stöße der Zapfen gegen die Lager in den Getriebegelenken auf. Diese Stöße verursachen bei kritischen Drehzahlen das mitunter sehr starke, rüttelnde Geräusch in den Triebwerken. Um ein ungefähres Bild über die dadurch bedingten Widerstände zu erhalten, wollen wir den Vorgang des Stoßes am Kurbelzapfen näher untersuchen.

Der Kurbelzapfen möge eine erzwungene harmonische Schwingung vom Ausschlagwinkel α ausführen, so daß der Schwingungsweg des Zapfens ausgedrückt wird durch $\triangle s = r\alpha \sin \omega t$ (r Kurbelradius). Der Spielraum zwischen Kurbelzapfen und Lagerschale, den wir als klein gegen den Schwingungsweg $r\alpha$ voraussetzen, sei mit e bezeichnet. Im Augenblicke der größten Schwingungsgeschwindigkeit $t = 0$, besitzen Zapfen und Schale die gleiche Höchstgeschwindigkeit $v = r\alpha\omega$ und die Schale liegt in der Bewegungsrichtung des Zapfens an diesem an (Fig. 44).

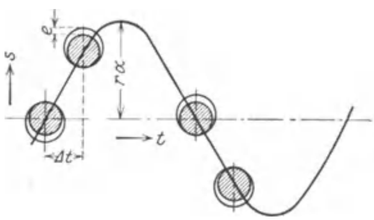


Fig. 44.

Vom betrachteten Augenblicke an bewegt sich die Schale mit ihrer Geschwindigkeit $r\alpha\omega$ weiter, wenn wir von sonstigen Bewegungswiderständen und Beschleunigungskräften an den mit der Schale verbundenen Massen absehen; sie legt demnach in der Zeit Δt einen Weg zurück: $\Delta s' = r\alpha\omega\Delta t$. In der gleichen Zeit ist der vom Zapfen zurückgelegte Weg $\Delta s = r\alpha \sin \omega \Delta t$. Verstehen wir nun unter Δt die Zeit, die bis zum Stoß der Schale gegen den Zapfen verstreicht, so muß sein:

$$\Delta s' - \Delta s = e = r\alpha\omega\Delta t - r\alpha \sin \omega \Delta t$$

oder

$$\omega\,\varDelta t - \sin\omega\,\varDelta t = \frac{e}{r\,\alpha} \tag{117}$$

In Zahlentafel 16 findet man die Werte $\omega\,\varDelta\,t$ für einige Verhältnisse $\frac{e}{r\,\alpha}$ angegeben.

Die Stöße am Kurbelzapfen treten demnach um so später nach dem Zeitpunkt der Schwingungshöchstgeschwindigkeit auf, je größer das Verhältnis $\frac{e}{r\,\alpha}$ ist. In der Nähe der Resonanz, für die ja die Dämpfung die Hauptrolle spielt, werden die Winkelausschläge α am größten, die Phasenverschiebung des Stoßes gegen die Höchstgeschwindigkeit also am kleinsten. Für praktische Fälle bewegen sich die Größtwerte von α etwa in den Grenzen 0,02 bis 0,05, so daß für einen Kurbelradius $r = 20$ cm sich Schwingungswege $r\,\alpha = 0{,}4$ bis 1 cm ergeben. Nimmt man das Zapfenspiel, das genau genommen, in der Richtung des Relativweges zwischen Schale und Zapfen zu messen ist, in der Größenordnung von 0,01 cm an, so wird $\frac{e}{r\,\alpha}$ etwa in den Grenzen 0,025 bis 0,01 liegen.

Wir haben für den Zapfen eine harmonische Schwingung angenommen. Dies ist trotz des Stoßvorganges zulässig, wenn wir die mit dem Zapfen verbundenen Massen als sehr groß gegen die mit der Schale zusammenhängenden Massen betrachten, was ja infolge der festen Verbindung des Zapfens mit der die Hauptmassen tragenden Welle ungefähr zutrifft. Durch den Stoß wird ein Teil der kinetischen Energie der stoßenden Massen in Wärme verwandelt. Dieser Verlust berechnet sich bekanntlich beim unelastischen Stoß zu:

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{2}\,\frac{M_1\,M_2}{M_1 + M_2}\,(v_1 - v_2)^2\,,$$

wenn M_1 und M_2 die auf den Stoßpunkt bezogenen Massen, v_1 und v_2 ihre Geschwindigkeiten unmittelbar vor dem Stoß bedeuten. Wenn M_1 gegen M_2 sehr groß ist, wird

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{2}\,M_2 (v_1 - v_2)^2 = \frac{M_2\,r^2}{2}\,\alpha^2\,\omega^2\,(1 - \cos\omega\,\varDelta\,t)^2\,.$$

Für $M_2\,r^2$ können wir das Massenträgheitsmoment m_2 einführen; wir wissen von der Reduktion der Massen her, daß sich dieser Wert m_2 auch mit der Kurbelstellung ändert. Der Stoßverlust für eine volle Schwingung wird, da zwei Stöße dabei auftreten:

$$\mathfrak{A} = m_2\,\alpha^2\,\omega^2\,(1 - \cos\omega\,\varDelta\,t)^2\,. \tag{118}$$

Bei dieser Ableitung ist auch auf das Verhalten der im Zapfenspiel befindlichen Ölschicht keine Rücksicht genommen. Ähnliche, wegen der endlichen stoßenden Massen noch verwickeltere Verhältnisse treten beim Stoß am Kreuzkopfzapfen auf, für den im wesentlichen nur die in die Zylinderachse fallenden Geschwindigkeitskomponenten in Betracht kommen.

Von geringerer Bedeutung für die Dämpfung sind die Stöße, welche die Kurbelwellenlagerzapfen infolge der harmonischen Wellenverdrehungen und der dadurch bedingten Formänderung der Kurbelkröpfung gegen ihre Lagerschalen vollführen, da diese Formänderungen nur klein und von der Größenordnung des Zapfenspieles sind.

Zu diesen Stößen kommen als Dämpfung noch die Reibungswiderstände der Lager und des Kolbens und die Luftwiderstände hinzu. Von wesentlichster Bedeutung werden freilich die Stöße am Kurbel- und Kreuzkopfzapfen sein, weshalb wir gemäß Gl. (118) die gesamte Dämpfungsarbeit ausdrücken wollen durch

$$\mathfrak{A} = \lambda\, m\, \alpha^2\, \omega^2 (1 - \cos \omega\, \varDelta t)^2\,,$$

worin wir unter m jetzt wieder den Mittelwert des Trägheitsmomentes aller Kurbelmassen nach Gl. (32) und unter λ einen durch Versuche festzustellenden Zahlenfaktor verstehen.

Denken wir uns die wirkliche Dämpfung durch eine Geschwindigkeitsdämpfung ersetzt, so müssen die Dämpfungsarbeiten für eine volle Schwingung übereinstimmen. Dies ergibt:

$$\mathfrak{A} = \lambda\, m\, \alpha^2\, \omega^2 (1 - \cos \omega\, \varDelta t)^2 = \pi\, k\, \omega\, \alpha^2$$

oder

$$k = \left(\frac{\lambda}{\pi} (1 - \cos \omega\, \varDelta t)^2\right) m\, \omega \equiv c\, m\, \omega \tag{119}$$

Die Werte $(1 - \cos \omega\, \varDelta t)^2$ sind aus der Zahlentafel 16 zu ersehen; sie nehmen mit wachsendem Ausschlag α ab. Es dürfte demnach auch der Dämpfungsfaktor der Kurbeldämpfung mit zunehmendem Ausschlag kleiner werden.

Zahlentafel 16.

$\dfrac{e}{r\,\alpha} =$	0,001	0,01	0,02	0,1
$\omega\, \varDelta t =$	0,1815 10,4°	0,3927 22,5°	0,4957 28,4°	0,8552 49,0°
$(1 - \cos \omega\, \varDelta t)^2 =$	0,00027	0,0058	0,0145	0,1183

In Anbetracht der bei der Kurbeldämpfung vorliegenden mannigfaltigen und verwickelten Verhältnisse (vgl. auch Forschungsarbeiten d. V. d. I. Heft 118 und 172/173) wird man die Größe des Dämpfungsfaktors und seine Abhängigkeit vom Schwingungsausschlag nur durch den Versuch feststellen können. Vielleicht ist man zu befriedigender

Wiedergabe der wirklichen Verhältnisse auch genötigt, noch eine mittlere Phasenverschiebung gegen die Höchstgeschwindigkeit als Erfahrungswert einzuführen.

Für eine Reihe von Schwingungsberechnungen an Vielzylinder-Dieselmaschinen der Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg habe ich gute Übereinstimmung der gerechneten mit den gemessenen Schwingungsausschlägen erzielt durch Einführung des Kurbeldämpfungsfaktors:

$$k = 0{,}04\, m\, \omega\,, \tag{120}$$

wobei die Abhängigkeit vom Ausschlag unberücksichtigt blieb. Die Messungen geschahen mit dem Geigerschen Torsiographen[1]).

Elektrische Dämpfung. Wir wollen hier zunächst den einfachsten Fall der magnetelektrischen Maschine mit konstanter Erregung betrachten. Zur Bestimmung des Dämpfungsfaktors untersuchen wir die Abhängigkeit des Drehmoments M von der Winkelgeschwindigkeit ω oder der Maschinendrehzahl n. Die Maschine möge auf einen elektrischen Widerstand w_0 im äußeren Stromkreis arbeiten, E sei die elektromotorische Kraft, e die Klemmspannung, J die Stromstärke und w_a der Ankerwiderstand. Wegen des unveränderlichen Erregerstromes ist das Magnetfeld konstant, wenn wir von der Ankerrückwirkung hier absehen. Die elektromotorische Kraft ist dann der Drehzahl der Maschine einfach proportional: Es gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} E &= \text{const.} \cdot n\,, \\ e &= J w_0\,, \\ E &= e + J w_a = J(w_a + w_0)\,. \end{aligned}$$

Die elektrische Leistung ist:

$$E J = \text{const.} \cdot n \cdot \frac{\text{const.} \cdot n}{w_a + w_0}\,.$$

Hieraus erhält man das Drehmoment, da bekanntlich 9,81 Watt $= 100$ kgcm s^{-1}:

$$M = \frac{100}{9{,}81}\,\frac{30}{\pi}\,\frac{E J}{n} = 97{,}34\,\frac{\text{const.}^2 \cdot n}{w_a + w_0}\,.$$

Damit wird der elektrische Dämpfungsfaktor:

$$k = \frac{dM}{d\omega} = \frac{30}{\pi}\,\frac{dM}{dn} = 930\,\frac{\text{const.}^2}{w_a + w_0}\,,$$

oder wenn wir

$$\text{const.} = \frac{E}{n} \quad \text{und} \quad \frac{\text{const.}}{w_a + w_0} = \frac{J}{n} \quad \text{einsetzen:}$$

$$k = 930\,\frac{E J}{n^2}\,. \tag{121}$$

[1]) Z. d. V. d. I., 1916, S. 811.

Wenn die Maschine auf ein Netz mit der unveränderlichen Spannung e_0 arbeitet, so ist:

$$E = cn\,,$$

$$J = \frac{E - e_0}{w_a}\,,$$

$$EJ = cn \cdot \frac{cn - e_0}{w_a}\,,$$

$$M = 97{,}34 \cdot \frac{c^2 n - c e_0}{w_a}\,,$$

$$k = 930\,\frac{c^2}{w_a} \equiv 930\,\frac{E J_0}{n^2}\,, \tag{122}$$

wenn $J_0 \equiv \frac{E}{w_a}$ die Kurzschlußstromstärke bezeichnet. Bei Nebenschlußdynamomaschinen ändert sich wegen der Selbsterregung mit E auch gleichzeitig der Magnetstrom, was wiederum eine Änderung des Magnetfeldes und damit eine nochmalige Änderung von E bedingt. Diese zusätzliche Änderung von E wird um so geringer sein, mit je höherer Eisensättigung die Maschine arbeitet. Ist also λ ein Faktor > 1, der von der Leerlaufcharakteristik und von der Eisensättigung abhängt, so kann man den Dämpfungsfaktor der elektrischen Dämpfung allgemein schreiben:

$$\left.\begin{aligned} k &= \lambda \cdot 930\,\frac{EJ}{n^2} \\ k &= \lambda \cdot 930 \cdot \frac{EJ_0}{n^2} \end{aligned}\right\} \tag{123}$$

je nachdem die Maschine auf einen Widerstand oder auf ein Netz arbeitet.

Die Dämpfungsfaktoren sind, wie unsere Ausführungen gezeigt haben, an und für sich keine festen, unveränderlichen Werte, sondern meist selbst mit der Winkelgeschwindigkeit ω_m der Maschine oder ω der Schwingung veränderlich. Da aber für einen betrachteten Schwingungszustand ω unveränderlich und ω_m praktisch unveränderlich ist, so sind dennoch die Dämpfungsfaktoren für diesen Schwingungszustand als unveränderlich anzusehen.

Da die Dämpfungsfaktoren k in den Schwingungsberechnungen fast ausschließlich mit der Winkelgeschwindigkeit ω der Schwingung multipliziert erscheinen, so stellen wir im folgenden die Werte $k\omega$ für alle Dämpfungsarten zusammen. Ist die Schwingung von der h-ten Ordnung in bezug auf die Maschinenumdrehung (ω_m), so gilt bekanntlich

$$\omega = h\,\omega_m\,.$$

Solange nicht weiteres Versuchsmaterial vorliegt, werden wir für die Dämpfung mit unseren bisherigen Bezeichnungen setzen:

für gewöhnliche Reibung:

$$k\,\omega = \frac{4}{\pi}\,\frac{M_r}{\alpha},$$

für Luftreibung:

$$k\,\omega = 0{,}001\, m\,\omega_m\,\omega = 0{,}001\,\frac{m\,\omega^2}{h},$$

für Propellerwiderstand:

$$k\,\omega = 71620\, q\cdot h\cdot\frac{N_0}{n_0}\left(\frac{n}{n_0}\right)^q,$$

für innere Dämpfung [s. spätere Gl. (275) und (276)]:

$$\begin{aligned} k_1\,\omega &= -\frac{2\,l}{n^2\pi^2}\,\frac{\gamma}{g}\,J\,\frac{\omega}{T_n}\ln\varepsilon_n \\ &= -\frac{2\,l\,n\,\varepsilon_n}{n^2\,\pi^2\,T_n}\,m\,\omega \\ &= -\frac{0{,}044\lg\varepsilon_n}{n\cdot l}\,m\,\omega\sqrt{\frac{G\,g}{\gamma}} \end{aligned}$$

$\left(m = \frac{\gamma}{g}\,J\,l \text{ Massenträgheitsmoment der Welle}\right)$

für die Kurbeldämpfung: $k\,\omega = c\,m\,\omega^2$, (wobei c ein mit wachsendem Ausschlag abnehmender Faktor ist; für mittlere Verhältnisse etwa

$$c = 0{,}04),$$

für elektrische Dämpfung: $k\,\omega = \lambda\cdot 97{,}34\,\frac{E\,J}{n}\,h$. ($J$ Stromstärke bzw. Kurzschlußstrom).

19. Gedämpfte Drehschwingungen einer Einzelmasse.

Diese sei zunächst wieder am einfachsten Beispiel einer Einzelmasse vom Trägheitsmoment m gezeigt, die fest auf dem einen Ende einer Drehfeder aufgekeilt sitzt, deren anderes Ende unveränderlich eingespannt ist. J ist das polare Querschnittsträgheitsmoment, l die Länge und G der Schubelastizitätsmodul der Drehfeder. An der Masse wirke ein periodisch wechselndes, erregendes Moment von der Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$, dessen veränderlichen Teil wir nach der harmonischen Analyse wieder ausdrücken durch

$$M = \sum_{h=1}^{h=\infty}(A_h \sin h\,\omega\,t + B_h \cos h\,\omega\,t).$$

und außerdem das dämpfende Moment $-k\frac{d\varphi}{dt}$.

Das Gleichgewicht aller Momente liefert mit der Abkürzung $c \equiv \frac{GJ}{l}$ die Gleichung:

$$m \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + k \cdot \frac{d\varphi}{dt} + c\varphi = \sum_{h=1}^{h=\infty} (A_h \sin h\omega t + B_h \cos h\omega t) \,. \tag{124}$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der Gl. (38) der ungedämpften Schwingung nur durch Hinzutritt des Dämpfungsgliedes $k\frac{d\varphi}{dt}$, welches für einen positiven Wert von $\frac{d\varphi}{dt}$ als Bewegungswiderstand den positiven Winkel φ ebenso zu verkleinern strebt, wie das elastische Moment $c\varphi$, weshalb es auch mit dem gleichen Vorzeichen wie jenes erscheint. Die vollständige Lösung der Differentialgleichung (124) lautet:

$$\left.\begin{aligned} \varphi = e^{-\frac{kt}{2m}} \left[\alpha_0 \sin\left(\frac{\sqrt{4cm-k^2}}{2m}t\right) + \beta_0 \cos\left(\frac{\sqrt{4cm-k^2}}{2m}t\right)\right] \\ + \sum_{h=1}^{h=\infty} (\alpha_h \sin h\omega t + \beta_h \cos h\omega t) \end{aligned}\right\} \tag{125}$$

Darin bedeuten $e = 2{,}71828$ die Basis der natürlichen Logarithmen und α_0 und β_0 die willkürlichen Integrationskonstanten, mittels welcher man die Lösung den Anfangsbedingungen anpassen kann. Für die Werte α_h und β_h ergeben sich, wenn man die Lösungsgleichung (125) differenziert und in die Ausgangsgleichung (124) einführt, die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} A_h &= \alpha_h (c - m h^2 \omega^2) - \beta_h k h \omega \\ B_h &= \beta_h (c - m h^2 \omega^2) + \alpha_h k h \omega \end{aligned}\right\} \tag{126}$$

Man erhält aus ihnen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_h &= \frac{A_h (c - m h^2 \omega^2) + B_h k h \omega}{(c - m h^2 \omega^2)^2 + k^2 h^2 \omega^2} \\ \beta_h &= \frac{B_h (c - m h^2 \omega^2) - A_h k h \omega}{(c - m h^2 \omega^2)^2 + k^2 h^2 \omega^2} \end{aligned}\right\} \tag{127}$$

Der mit der Exponentialfunktion $e^{-\frac{kt}{2m}}$ multiplizierte, in eckigen Klammern stehende, erste Teil der Lösungsgleichung (125) stellt die Eigenschwingung, der unter dem Summenzeichen stehende zweite Teil die erzwungenen Schwingungen dar. Für dämpfende Widerstände ist k immer positiv; es werden also infolge des Faktors $e^{-\frac{kt}{2m}}$ die Ausschläge der Eigenschwingung mit der Zeit dauernd kleiner, während die Ausschläge der erzwungenen Schwingungen gemäß Gl. (127) konstant bleiben. Das heißt: Die Eigenschwingung klingt mit der Zeit allmählich ab und erlischt und nur die erzwungenen Schwingungen bleiben als harmonische Schwingungen unverändert bestehen, solange die erregende

Ursache besteht. Die Dauer T_0 der Eigenschwingung und die minutliche Eigenschwingungszahl n_0 ergeben sich aus:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\sqrt{4cm - k^2}}{2m}$$

zu

$$\left.\begin{aligned} T_0 &= \frac{4\pi m}{\sqrt{4cm - k^2}} \end{aligned}\right\} \quad (128)$$

und

$$n_0 = \frac{15}{\pi m}\sqrt{4cm - k^2}$$

Man erkennt aus Gl. (128), daß die Eigenschwingungsdauer zeitlich unveränderlich und daß sie größer ist als jene der ungedämpften Eigenschwingung, in die sie mit $k = 0$ übergeht. Es ist nun von Interesse, den Einfluß der Größe des Dämpfungsfaktors zahlenmäßig festzustellen. Wir vergleichen zu diesem Zweck die ungedämpfte Schwingung mit einer gedämpften, deren Eigenschwingungsdauer 1,01 der Eigenschwingungsdauer der ungedämpften Schwingung betragen soll. Unterscheidet man die Größen für die ungedämpfte Schwingung durch einen Beistrich, so ist $\omega_0'^2 = \frac{c}{m}$ oder $c = m\,\omega_0'^2$. Daher nach Gl. (128):

$$\left(\frac{T_0}{T_0'}\right)^2 = \left(\frac{\omega_0'}{\omega_0}\right)^2 = \frac{4cm}{4cm - k^2} = (1{,}01)^2 \backsim 1{,}02.$$

Daraus berechnet sich

$$k^2 = \frac{0{,}02 \cdot 4cm}{1{,}02} \qquad \text{oder} \qquad k = 0{,}28\sqrt{cm} = 0{,}28\,m\,\omega_0' \backsim 0{,}283\,m\,\omega_0.$$

Das ist, wie der Vergleich mit den von uns berechneten Dämpfungsfaktoren lehrt, ein sehr großer Wert; er ist selbst von höherer Größenordnung als der große mittlere Wert des Kurbeldämpfungsfaktors. Daraus geht hervor, daß die praktisch vorkommenden Dämpfungen die Eigenschwingungsdauer nur in sehr geringem Grade beeinflussen.

Die Fälle $k^2 \geqq 4cm$, welche unendlich große, bzw. imaginäre Eigenschwingungsdauer nach Gl. (128) liefern, sind für uns nur von theoretischem Interesse. Diese Fälle ergeben überhaupt keine Eigenschwingungen mehr, sondern aperiodische Bewegungen von der Form:

$$\varphi_0 = e^{-\frac{kt}{2m}}\left[A_0\, e^{\frac{\sqrt{k^2 - 4cm}}{2m}t} + B_0\, e^{-\frac{\sqrt{k^2 - 4cm}}{2m}t}\right]. \qquad (129)$$

Bezüglich der erzwungenen Schwingungen lassen die Gl. (127) wiederum ersehen, daß die erzwungenen Schwingungsausschläge α_h und β_h einer bestimmten Periode $(h\,\omega)$ nur von den erregenden harmonischen Momenten A_h und B_h dieser Periode abhängig sind. Dagegen besteht die einfache lineare Abhängigkeit zwischen den phasengleichen Ausschlägen α_h und A_h der ungedämpften Schwingungen (Gl. 40) nicht mehr für gedämpfte Schwingungen. Der Nenner auf der rechten Seite der Gl. (127) kann als Summe zweier Quadrate reeller Zahlen niemals Null werden, denn die eine dieser Zahlen, $k h \omega$, ist stets von Null verschieden. Die Ausschläge α_h und β_h können daher niemals unendlich groß werden; die Dämpfung verhindert es. Der Gesamtausschlag γ_h der erzwungenen Schwingung h-ter Ordnung berechnet sich aus (127) zu:

$$\gamma_h^2 = \alpha_h^2 + \beta_h^2 = \frac{A_h^2 + B_h^2}{(c - m h^2 \omega^2)^2 + (k h \omega)^2}\,. \tag{130}$$

Diese Gleichung stellt uns die Abhängigkeit des erzwungenen Ausschlages von der Periode (ω) des erregenden Momentes dar. Wenn die harmonischen Momente A_h und B_h und der Dämpfungsfaktor k von ω unabhängig sind, so wird γ_h^2 am größten, wenn der Nenner auf der rechten Seite (130) am kleinsten wird. Dies ist, wie man leicht nachweist, der Fall für

$$h\,\omega = \frac{\sqrt{4 c m - 2 k^2}}{2 m}\,. \tag{131}$$

Dieser Wert ist etwas kleiner als der Wert ω_0 nach Gl. (128). Bei von der Periodendauer (ω) unabhängigem erregenden Moment und Dämpfungsfaktor tritt demnach der Größtwert des Schwingungsausschlages bei einer Schwingungszahl auf, die etwas kleiner ist als die Eigenschwingungszahl. Dieser Größtwert des Schwingungsausschlages ist, wenn wir die Amplitude des harmonischen Moments mit M_h bezeichnen, wegen $M_h^2 = A_h^2 + B_h^2$:

$$(\gamma_h)_{\max} = \frac{2 m M_h}{k\sqrt{4 c m - k^2}} = \frac{M_h}{k\,\omega_0}\,. \tag{132}$$

Besteht die schwingende Masse m aus dem Triebwerk einer Kolbenmaschine, so sind die harmonischen Momente wegen des Anteils der mit dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit veränderlichen Drehmomente der hin- und hergehenden Massen und der Dämpfungsfaktor k selbst mit ω veränderlich, so daß hierfür die Beziehungen (131) und (132) nicht mehr zu gelten brauchen. Es würde keine Schwierigkeiten bereiten, auch für diesen Fall den Eintritt und die Größe des Ausschlaghöchstwertes zu bestimmen, doch soll hiervon abgesehen werden.

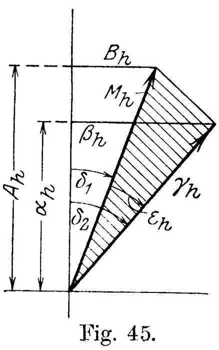


Fig. 45.

Zwischen dem Gesamtausschlag γ_h der erzwungenen Schwingung $h^{\text{-ter}}$ Ordnung und der Amplitude M_h des erregenden harmonischen Momentes besteht eine Phasenverschiebung ε_h, die sich folgenderweise berechnet (Fig. 45):

$$\varepsilon_h = \delta_2 - \delta_1,$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_h = \frac{\operatorname{tg} \delta_2 - \operatorname{tg} \delta_1}{1 + \operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{tg} \delta_2} = \frac{\frac{\beta_h}{\alpha_h} - \frac{B_h}{A_h}}{1 + \frac{B_h}{A_h} \frac{\beta_h}{\alpha_h}}.$$

Setzt man die Werte α_h und β_h aus den Gl. (127) ein, so erhält man nach einigen Umformungen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \varepsilon_h &= -\frac{k\, h\, \omega}{c - m\, h^2\, \omega^2} \\ \varepsilon_h &= -\operatorname{arctg} \frac{k\, h\, \omega}{c - m\, h^2\, \omega^2} \end{aligned}\right\} \qquad (133)$$

Der Phasenverschiebungswinkel ε_h ist demnach unabhängig von der Größe des erregenden harmonischen Moments, und er verschwindet bei fehlender Dämpfung ($k = 0$). Die Phasenverschiebung ε_h ist nach Gl. (133) immer negativ: Der Schwingungsausschlag bleibt mithin als Wirkung zeitlich hinter dem erregenden Moment als Ursache zurück.

Gl. (133) ergibt auch die Abhängigkeit der Phasenverschiebung von der Periode ω der Erregung. Für $\omega = 0$ wird $\varepsilon_h = 0$; für $h\,\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \omega_0' =$ der Winkelschnelle der ungedämpften Eigenschwingung wird $\varepsilon_h = -\frac{\pi}{2}$ und für $\omega = \infty$ wird $\varepsilon_h = -\pi$, wenn der Dämpfungsfaktor k von ω unabhängig ist; dagegen wird $(\varepsilon_h)_\infty = \operatorname{arctg} c'$, wenn $k = c'\, m\, h\, \omega$. Da der Dämpfungsfaktor k für die gewöhnlich vorkommenden Dämpfungen nur klein ist, so ist also der absolute Wert des Phasenverschiebungswinkels klein, solange die Schwingungszahl des erregenden Moments kleiner als die Eigenschwingungszahl der Masse ist. Erst, wenn die Schwingungszahl der Erregung sich der Eigenschwingungszahl nähert, nimmt der Phasenwinkel schnell zu und wird für die Schwingungszahl der ungedämpften Schwingung gleich $\frac{\pi}{2}$ oder $90°$. Bei Schwingungszahlen der Erregung, die höher als diese Eigenschwingungszahl liegen, wächst er weiter erst rasch und dann langsamer, bis er bei sehr schnellen Schwingungen $= \pi$ ($180°$) oder dem Grenzwert $\operatorname{arctg} c'$ zustrebt.

Schließlich wollen wir noch die bei der erzwungenen Schwingung geleistete Dämpfungsarbeit untersuchen. Diese Arbeit wird in Wärme verwandelt und muß von den erregenden Momenten geleistet werden.

Das Element der Dämpfungsarbeit ist (abgesehen vom Vorzeichen):

$$d\mathfrak{A} = k \frac{d\varphi}{dt} \cdot d\varphi\,.$$

Für die erzwungene Schwingung h^{ter} Ordnung ist

$$\varphi_h = \alpha_h \sin h\,\omega\,t + \beta_h \cos h\,\omega\,t\,,$$

also

$$\frac{d\varphi_h}{dt} = h\,\omega\,(\alpha_h \cos h\,\omega\,t - \beta_h \sin h\,\omega\,t)\,.$$

Für eine volle Schwingung der Periode $(h\,\omega)$ ist folglich die aufzuwendende Dämpfarbeit:

$$\mathfrak{A} = \int\limits_{t=t}^{t=t+T_h} k \cdot \frac{d\varphi_h}{dt} \cdot d\varphi_h = k\,h\,\omega \int\limits_{h\,\omega\,t=0}^{h\,\omega\,t=2\pi} (\alpha_h \cos h\,\omega\,t - \beta_h \sin h\,\omega\,t)^2\, d\,(h\,\omega\,t)$$

$$\mathfrak{A} = \pi\,k\,h\,\omega\,(\alpha_h^2 + \beta_h^2) = \pi\,k\,h\,\omega\,\gamma_h^2\,,$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (130):

$$\mathfrak{A} = \pi\,M_h^2 \frac{k\,h\,\omega}{(c - m\,h^2\,\omega^2)^2 + (k\,h\,\omega)^2} \tag{134}$$

Die vom erregenden Moment h^{ter} Ordnung bei einer vollen Schwingung geleistete Arbeit ist nach Gl. (64)

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \pi\,(B_h\,\alpha_h - A_h\,\beta_h) = \pi\,M_h \cdot \gamma_h \sin(-\varepsilon_h)\\ &= \pi\,M_h \cdot \frac{M_h}{\sqrt{(c - m\,h^2\,\omega^2)^2 + (k\,h\,\omega)^2}} \cdot \frac{k\,h\,\omega}{\sqrt{(c - m\,h^2\,\omega^2)^2 + (k\,h\,\omega)^2}}\\ &= \pi\,M_h^2 \frac{k\,h\,\omega}{(c - m\,h^2\,\omega^2)^2 + (k\,h\,\omega)^2}\,.\end{aligned}$$

Das ist aber der gleiche Wert wie die Dämpfarbeit (Gl. 134). Die Dämpfungsarbeit der Schwingung h^{ter} Ordnung wird folglich vom erregenden Moment h^{ter} Ordnung geleistet.

Die gesamte Dämpfungsarbeit aller erzwungenen Schwingungen während einer vollen Grundperiode (ω) der erregenden Momente ist, weil auf eine Periode h Schwingungen h^{ter} Ordnung treffen:

$$\sum \mathfrak{A} = \pi \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{M_h^2 \cdot k\,h^2\,\omega}{(c - m\,h^2\,\omega^2)^2 + (k\,h\,\omega)^2} \tag{135}$$

Da die Dämpfarbeit der erzwungenen Schwingungen von den erregenden Momenten bestritten wird, so muß die Dämpfungsarbeit der Eigenschwingung auf Kosten der Eigenschwingungsenergie gehen, und dies ist der Grund für die stetige Abnahme der Schwingungsausschläge der Eigenschwingung. Kennzeichnen wir die Schwingungswinkel der

Eigenschwingung mit dem Zeiger 0, so besteht die Energie aus der lebendigen Kraft $\frac{m\,\omega_0^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{d\varphi_0}{dt}\right)^2$ und aus der potentiellen Energie der Formänderung der Drehfeder $\frac{c\,\varphi_0^2}{2}$. Für jedes unendlich kleine Zeitteilchen muß die Summe der Änderungen der Energie und der Dämpfungsarbeit verschwinden, d. h.:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{d\varphi_0}{dt}\right)^2 + c\,\frac{\varphi_0^2}{2}\right]dt + k\cdot\frac{d\varphi_0}{dt}\,d\varphi_0 = 0$$

oder wenn man die Differentiation ausführt:

$$m\cdot\frac{d\varphi_0}{dt}\cdot\frac{d^2\varphi_0}{dt^2} + c\varphi_0\,\frac{d\varphi_0}{dt} + k\,\frac{d\varphi_0}{dt}\cdot\frac{d\varphi_0}{dt} = 0\,.$$

Dies ergibt nach Division mit $\frac{d\varphi_0}{dt}$:

$$m\cdot\frac{d^2\varphi_0}{dt^2} + k\,\frac{d\varphi_0}{dt} + c\varphi_0 = 0$$

und das ist in der Tat die gegebene Ausgangsgleichung der Eigenschwingung, die durch Nullsetzen der erregenden Momente erhalten wird.

Es interessiert endlich noch zu wissen, für welche Periode die Dämpfungsarbeit der erzwungenen Schwingung h-ter Ordnung zu einem Größtwert wird. Man findet nach bekannten Regeln aus Gl. (134), wenn wieder M_h und k von der Periodenzahl unabhängig sind:

$$(h\omega)^2_{\max} = \frac{2\,cm - k^2 + \sqrt{16\,c^2m^2 - 4\,cmk^2 + k^4}}{6\,m^2}$$

Der Radikand ist um $\frac{3}{4}\,k^4$ größer als

$$\left(4\,c\,m - \frac{k^2}{2}\right)^2.$$

Demnach wird

$$(h\,\omega)^2_{\max} > \frac{4\,c\,m - k^2}{4\,m^2} = \omega_0^2\,.$$

Der Größtwert der Dämpfungsarbeit tritt also bei einer Periodenzahl auf, die etwas größer ist als die Eigenschwingungszahl der gedämpften Schwingung.

Versteht man unter Resonanz das Zusammentreffen der Schwingungszahl des erregenden harmonischen Moments mit der Schwingungszahl der gedämpften Eigenschwingung, so tritt weder der Größtwert des erzwungenen Schwingungsausschlags, noch die Phasenverschiebung $\frac{\pi}{2}$, noch der Größtwert der Dämpfungsarbeit genau bei Resonanz ein.

Die Einzelanteile des Schwingungswinkels φ der gedämpften Schwingung lassen sich auch wieder durch die Projektion der Endpunkte von Vektoren darstellen, die mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit umlaufen. Die Winkelgeschwindigkeit der erzwungenen Schwingung h-ter Ordnung ist wieder $h\omega$, da ω die Winkelschnelle des gegebenen periodischen Momentes ist, die konstante Größe des zugehörigen Vektors geht aus Gl. (130), sein Phasenverschiebungswinkel gegen das erregende Moment h-ter Ordnung aus Gl. (133) hervor. Auch der Anteil der Eigenschwingung zum Schwingungswinkel φ läßt sich durch Projektion eines mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 der Eigenschwingung Gl. (128) umlaufenden Vektors darstellen, nur ändert der Vektor der Eigenschwingung während des gleichförmigen Umlaufes seine Größe gemäß dem Faktor $e^{-\frac{kt}{2m}} = e^{-\frac{k\psi}{2m\omega_0}}$, wenn ψ der vom Vektor in der Zeit t zurückgelegte Winkel ist. Der Endpunkt des Eigenschwingungsvektors beschreibt demnach eine logarithmische Spirale. Während eines vollen Umlaufs ändert sich die Größe des Vektors von $e^{-\frac{k\psi}{2m\omega_0}}\sqrt{\alpha_0^2+\beta_0^2}$ auf $e^{-\frac{k(\psi+2\pi)}{2m\omega_0}}\sqrt{\alpha_0^2+\beta_0^2}$: demnach ist auch das Verhältnis zweier unmittelbar aufeinanderfolgenden gleichsinnigen Schwingungsausschläge $e^{-\frac{k\pi}{m\omega_0}} = e^{-\frac{2k\pi}{\sqrt{4cm-k^2}}}$, also konstant. Bezeichnet man den Schwingungsausschlag nach der Zeit t als den n-ten seit Beginn der Zeitzählung mit γ_n, so ist

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = e^{-\frac{2k\pi}{\sqrt{4cm-k^2}}}$$

oder

$$ln\,\gamma_n - ln\,\gamma_{n+1} = \frac{2k\pi}{\sqrt{4cm-k^2}}. \tag{136}$$

Man nennt den Ausdruck $\frac{2k\pi}{\sqrt{4cm-k^2}}$ das logarithmische Dekrement der Eigenschwingung. Die Gl. (136) gibt ein Mittel an die Hand, den Dämpfungsfaktor k aus der beobachteten Abnahme zweier aufeinanderfolgenden gleichsinnigen Schwingungsausschläge zu berechnen.

Das Verhältnis aufeinanderfolgender Ausschläge läßt erkennen, wie rasch die Schwingung erlischt. Ist dieses Verhältnis z. B. 0,9, so hat der Ausschlag nach 10 Schwingungen auf $0{,}9^{10} = 0{,}349$, nach 20 Schwingungen auf $0{,}9^{20} = 0{,}122$ und nach 100 Schwingungen auf $0{,}9^{100} = 0{,}0000266$ des ursprünglichen Ausschlages abgenommen.

Nach der ausführlichen Behandlung der gedämpften Drehschwingungen einer Einzelmasse wollen wir die gedämpften Drehschwingungen eines Systems mit beliebig vielen Massen untersuchen, wobei wir die

Eigenschwingungen und die erzwungenen Schwingungen wieder gesondert betrachten.

20. Eigenschwingungen eines Systems mit beliebig vielen Massen mit äußerer Dämpfung.

Es sei wieder n die Anzahl aller Massen des Systems, m_h das Trägheitsmoment, k_h der Dämpfungsfaktor, φ_h der augenblickliche Verdrehungswinkel der $h^{\text{-ten}}$ Masse aus einer festen Anfangslage, bei der die Welle spannungslos war; es bezeichnen ferner φ_h' den ersten, φ_h'' den zweiten und $\varphi_h^{(x)}$ den $x^{\text{-ten}}$ Differentialquotienten dieses Winkels nach der Zeit und $c_{h,h+1}$ die Größe des elastischen Moments, welches entsteht, wenn der Querschnitt der Welle in der Ebene der $h^{\text{-ten}}$ Masse gegen den Querschnitt in der Ebene der $(h+1)^{\text{-ten}}$ Masse um den Winkel 1 verdreht wird. Dann gelten, da für die Eigenschwingungen äußere erregende Momente nicht in Betracht kommen, die Gleichgewichtsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
m_1\varphi_1'' + k_1\varphi_1' + c_{1,2}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\
m_2\varphi_2'' + k_2\varphi_2' + c_{1,2}(\varphi_2 - \varphi_1) + c_{2,3}(\varphi_2 - \varphi_3) = 0 \\
\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\
\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\
\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\
m_h\varphi_h'' + k_h\varphi_h' + c_{h-1,h}(\varphi_h - \varphi_{h-1}) + c_{h,h+1}(\varphi_h - \varphi_{h+1}) = 0 \\
\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\
\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\
\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\
m_n\varphi_n'' + k_n\varphi_n' + c_{n-1,n}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) = 0
\end{array}\right\} \qquad (137)$$

Durch Addition aller Gl. (137) ergibt sich zunächst die Beziehung:

$$\sum_{h=1}^{h=n}(m_h\varphi_h'' + k_h\varphi_h') = 0\,. \qquad (138)$$

Diese Gleichung läßt sich ohne weiters integrieren und liefert:

$$\sum_{h=1}^{h=n}(m_h\varphi_h' + k_h\varphi_h) = \text{const} = \sum_{h=1}^{h=n}(m_h\varphi_{h_0}' + k_h\varphi_{h_0}) \qquad (139)$$

wenn mit φ_{h_0} und φ_{h_0}' die Anfangswerte des Verdrehungswinkels und seiner 1. Ableitung zur Zeit $t = 0$ verstanden werden.

Aus dem Verein der simultanen Differentialgleichungen (137) ergibt sich die allgemeine, für jede Masse gültige und daher ohne Massenzeiger geschriebene lineare Differentialgleichung der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung:

$$\varphi^{(2n)} + a_{2n-1}\varphi^{(2n-1)} + a_{2n-2}\varphi^{(2n-2)} + \ldots + a_2\varphi^{(2)} + a_1\varphi^{(1)} = 0 \ldots \quad (140)$$

In dieser Gleichung sind die Beizahlen a_x konstante, gesetzmäßig aus den Wellenkonstanten, den Massenträgheitsmomenten und den

Dämpfungsfaktoren gebildete Ausdrücke. Um das Bildungsgesetz dieser Zahlen zu zeigen, wird es genügen, die Lösungsgleichung (140) vollständig für fünf Massen anzuschreiben. Sie lautet:

$$
\begin{aligned}
&\varphi^{(10)}+\left(\frac{k_1}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}+\frac{k_3}{m_3}+\frac{k_4}{m_4}+\frac{k_5}{m_5}\right)\varphi^{(9)}+\left[\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}c_{1,2}+\frac{m_2+m_3}{m_2 m_3}c_{2,3}+\frac{m_3+m_4}{m_3 m_4}c_{3,4}\right.\\
&+\frac{m_4+m_5}{m_4 m_5}c_{4,5}+\frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}+\frac{k_1 k_3}{m_1 m_3}+\frac{k_1 k_4}{m_1 m_4}+\frac{k_1 k_5}{m_1 m_5}+\frac{k_2 k_3}{m_2 m_3}+\frac{k_2 k_4}{m_2 m_4}+\frac{k_2 k_5}{m_2 m_5}+\frac{k_3 k_4}{m_3 m_4}\\
&\left.+\frac{k_3 k_5}{m_3 m_5}+\frac{k_4 k_5}{m_4 m_5}\right]\varphi^{(8)}+\left\{\left[\frac{k_1+k_2}{m_1 m_2}+\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\cdot\left(\frac{k_3}{m_3}+\frac{k_4}{m_4}+\frac{k_5}{m_5}\right)\right]c_{1,2}+\left[\frac{k_2+k_3}{m_2 m_3}\right.\right.\\
&\left.+\frac{m_2+m_3}{m_2 m_3}\cdot\left(\frac{k_1}{m_1}+\frac{k_4}{m_4}+\frac{k_5}{m_5}\right)\right]c_{2,3}+\left[\frac{k_3+k_4}{m_3 m_4}+\frac{m_3+m_4}{m_3 m_4}\left(\frac{k_1}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}+\frac{k_5}{m_5}\right)\right]c_{3,4}\\
&+\left[\frac{k_4+k_5}{m_4 m_5}+\frac{m_4+m_5}{m_4 m_5}\cdot\left(\frac{k_1}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}+\frac{k_3}{m_3}\right)\right]c_{4,5}+\frac{k_1 k_2 k_3}{m_1 m_2 m_3}+\frac{k_1 k_2 k_4}{m_1 m_2 m_4}+\frac{k_1 k_2 k_5}{m_1 m_2 m_5}\\
&\left.+\frac{k_1 k_3 k_4}{m_1 m_3 m_4}+\frac{k_1 k_3 k_5}{m_1 m_3 m_5}+\frac{k_1 k_4 k_5}{m_1 m_4 m_5}+\frac{k_2 k_3 k_4}{m_2 m_3 m_4}+\frac{k_2 k_3 k_5}{m_2 m_3 m_5}+\frac{k_2 k_4 k_5}{m_2 m_4 m_5}+\frac{k_3 k_4 k_5}{m_3 m_4 m_5}\right\}\varphi^{(7)}\\
&+\left\{\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1 m_2 m_3}c_{1,2}\,c_{2,3}+\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\cdot\frac{m_3+m_4}{m_3 m_4}c_{1,2}\,c_{3,4}+\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\,\frac{m_4+m_5}{m_4 m_5}c_{1,2}\,c_{4,5}\right.\\
&+\frac{m_2+m_3+m_4}{m_2 m_3 m_4}c_{2,3}\,c_{3,4}+\frac{m_2+m_3}{m_2 m_3}\cdot\frac{m_4+m_5}{m_4 m_5}c_{2,3}\,c_{4,5}+\frac{m_3+m_4+m_5}{m_3 m_4 m_5}c_{3,4}\,c_{4,5}\\
&+\left[\frac{k_1+k_2}{m_1 m_2}\left(\frac{k_3}{m_3}+\frac{k_4}{m_4}+\frac{k_5}{m_5}\right)+\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\left(\frac{k_3 k_4}{m_3 m_4}+\frac{k_3 k_5}{m_3 m_5}+\frac{k_4 k_5}{m_4 m_5}\right)\right]c_{1,2}\\
&+\left[\frac{k_2+k_3}{m_2 m_3}\left(\frac{k_1}{m_1}+\frac{k_4}{m_4}+\frac{k_5}{m_5}\right)+\frac{m_2+m_3}{m_2 m_3}\left(\frac{k_1 k_4}{m_1 m_4}+\frac{k_1 k_5}{m_1 m_5}+\frac{k_4 k_5}{m_4 m_5}\right)\right]c_{2,3}\\
&+\left[\frac{k_3+k_4}{m_3 m_4}\left(\frac{k_1}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}+\frac{k_5}{m_5}\right)+\frac{m_3+m_4}{m_3\cdot m_4}\left(\frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}+\frac{k_1 k_5}{m_1 m_5}+\frac{k_2 k_5}{m_2 m_5}\right)\right]c_{3,4}\\
&+\left[\frac{k_4+k_5}{m_4 m_5}\left(\frac{k_1}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}+\frac{k_3}{m_3}\right)+\frac{m_4+m_5}{m_4 m_5}\left(\frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}+\frac{k_1 k_3}{m_1 m_3}+\frac{k_2 k_3}{m_2 m_3}\right)\right]c_{4,5}\\
&\left.+\frac{k_1 k_2 k_3 k_4}{m_1 m_2 m_3 m_4}+\frac{k_1 k_2 k_3 k_5}{m_1 m_2 m_3 m_5}+\frac{k_1 k_2 k_4 k_5}{m_1 m_2 m_4 m_5}+\frac{k_1 k_3 k_4 k_5}{m_1 m_3 m_4 m_5}+\frac{k_2 k_3 k_4 k_5}{m_2 m_3 m_4 m_5}\right\}\varphi^{(6)}\\
&+\left\{\left[\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1 m_2 m_3}\left(\frac{k_4}{m_4}+\frac{k_5}{m_5}\right)+\frac{k_1+k_2+k_3}{m_1 m_2 m_3}\right]c_{1,2}\,c_{2,3}+\left(\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\,\frac{k_3+k_4}{m_3 m_4}\right.\right.\\
&\left.+\frac{k_1+k_2}{m_1 m_2}\,\frac{m_3+m_4}{m_3 m_4}+\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\,\frac{m_3+m_4}{m_3 m_4}\,\frac{k_5}{m_5}\right)c_{1,2}\,c_{3,4}+\left(\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\,\frac{k_4+k_5}{m_4 m_5}\right.\\
&\left.+\frac{k_1+k_2}{m_1 m_2}\,\frac{m_4+m_5}{m_4 m_5}+\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\,\frac{m_4+m_5}{m_4 m_5}\,\frac{k_3}{m_3}\right)c_{1,2}\,c_{4,5}+\left[\frac{m_2+m_3+m_4}{m_2 m_3 m_4}\right.\\
&\left.\cdot\left(\frac{k_1}{m_1}+\frac{k_5}{m_5}\right)+\frac{k_2+k_3+k_4}{m_2\cdot m_3\cdot m_4}\right]c_{2,3}\,c_{3,4}+\left(\frac{m_2+m_3}{m_2 m_3}\,\frac{k_4+k_5}{m_4 m_5}\right.\\
&\left.+\frac{k_2+k_3}{m_2\cdot m_3}\,\frac{m_4+m_5}{m_4 m_5}+\frac{m_2+m_3}{m_2 m_3}\,\frac{m_4+m_5}{m_4 m_5}\,\frac{k_1}{m_1}\right)c_{2,3}\,c_{4,5}\\
&+\left[\frac{m_3+m_4+m_5}{m_3 m_4 m_5}\left(\frac{k_1}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}\right)+\frac{k_3+k_4+k_5}{m_3 m_4 m_5}\right]c_{3,4}\,c_{4,5}\\
&+\left[\frac{k_1+k_2}{m_1\;m_2}\cdot\left(\frac{k_3 k_4}{m_3 m_4}+\frac{k_3 k_5}{m_3 m_5}+\frac{k_4 k_5}{m_4 m_5}\right)+\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\,\frac{k_3\,k_4\,k_5}{m_3 m_4 m_5}\right]c_{1,2}
\end{aligned}
$$

$$+\Bigl[\frac{k_2+k_3}{m_2\,m_3}\cdot\Bigl(\frac{k_1k_4}{m_1m_4}+\frac{k_1k_5}{m_1m_5}+\frac{k_4k_5}{m_4m_5}\Bigr)+\frac{m_2+m_3}{m_2m_3}\,\frac{k_1k_4k_5}{m_1m_4m_5}\Bigr]\,c_{2,3}$$

$$+\Bigl[\frac{k_3+k_4}{m_3m_4}\cdot\Bigl(\frac{k_1k_2}{m_1m_2}+\frac{k_1k_5}{m_1m_5}+\frac{k_2k_5}{m_2m_5}\Bigr)+\frac{m_3+m_4}{m_3m_4}\,\frac{k_1k_2k_5}{m_1m_2m_5}\Bigr]\,c_{3,4}$$

$$+\Bigl[\frac{k_4+k_5}{m_4m_5}\cdot\Bigl(\frac{k_1k_2}{m_1m_2}+\frac{k_1k_3}{m_1m_3}+\frac{k_2k_3}{m_2m_3}\Bigr)+\frac{m_4+m_5}{m_4m_5}\,\frac{k_1k_2k_3}{m_1m_2m_3}\Bigr]\,c_{4,5}$$

$$+\frac{k_1k_2k_3k_4k_5}{m_1m_2m_3m_4m_5}\Bigr\}\cdot\varphi^{(5)}+\Bigl\{\frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{m_1m_2m_3m_4}\,c_{1,2}\,c_{2,3}\,c_{3,4}$$

$$+\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1m_2m_3}\cdot\frac{m_4+m_5}{m_4m_5}\,c_{1,2}\,c_{2,3}\,c_{4,5}+\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\cdot\frac{m_3+m_4+m_5}{m_3m_4m_5}\,c_{1,2}\,c_{3,4}\,c_{4,5}$$

$$+\frac{m_2+m_3+m_4+m_5}{m_2m_3m_4m_5}\,c_{2,3}\,c_{3,4}\,c_{4,5}+\Bigl[\frac{k_1+k_2+k_3}{m_1m_2m_3}\Bigl(\frac{k_4}{m_4}+\frac{k_5}{m_5}\Bigr)$$

$$+\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1m_2m_3}\,\frac{k_4k_5}{m_4m_5}\Bigr]\,c_{1,2}\,c_{2,3}+\Bigl(\frac{k_1+k_2}{m_1m_2}\,\frac{k_3+k_4}{m_3m_4}+\frac{k_1+k_2}{m_1m_2}\,\frac{m_3+m_4}{m_3m_4}\,\frac{k_5}{m_5}$$

$$+\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\,\frac{k_3+k_4}{m_3m_4}\,\frac{k_5}{m_5}\Bigr)c_{1,2}\,c_{3,4}+\Bigl(\frac{k_1+k_2}{m_1m_2}\,\frac{k_4+k_5}{m_4m_5}+\frac{k_1+k_2}{m_1m_2}\,\frac{m_4+m_5}{m_4m_5}\,\frac{k_3}{m_3}$$

$$+\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\,\frac{k_4+k_5}{m_4m_5}\,\frac{k_3}{m_3}\Bigr)\,c_{1,2}\,c_{4,5}+\Bigl[\frac{k_2+k_3+k_4}{m_2m_3m_4}\Bigl(\frac{k_1}{m_1}+\frac{k_5}{m_5}\Bigr)+\frac{m_2+m_3+m_4}{m_2m_3m_4}\,\frac{k_1k_5}{m_1m_5}\Bigr]\,c_{2,3}\,c_{3,4}$$

$$+\Bigl(\frac{k_2+k_3}{m_2m_3}\,\frac{k_4+k_5}{m_4m_5}+\frac{k_2+k_3}{m_2m_3}\,\frac{m_4+m_5}{m_4m_5}\,\frac{k_1}{m_1}+\frac{m_2+m_3}{m_2m_3}\,\frac{k_4+k_5}{m_4m_5}\,\frac{k_1}{m_1}\Bigr)\,c_{2,3}\,c_{4,5}$$

$$+\Bigl[\frac{k_3+k_4+k_5}{m_3m_4m_5}\Bigl(\frac{k_1}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}\Bigr)+\frac{m_3+m_4+m_5}{m_3m_4m_5}\,\frac{k_1k_2}{m_1m_2}\Bigr]\,c_{3,4}\,c_{4,5}+\frac{k_1+k_2}{m_1m_2}\,\frac{k_3k_4k_5}{m_3m_4m_5}\,c_{1,2}$$

$$+\frac{k_2+k_3}{m_2m_3}\,\frac{k_1k_4k_5}{m_1m_4m_5}\,c_{2,3}+\frac{k_3+k_4}{m_3m_4}\,\frac{k_1k_2k_5}{m_1m_2m_5}\,c_{3,4}+\frac{k_4+k_5}{m_4m_5}\,\frac{k_1k_2k_3}{m_1m_2m_3}\,c_{4,5}\Bigr\}\,\varphi^{(4)}$$

$$+\Bigl[\Bigl(\frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{m_1m_2m_3m_4}\,\frac{k_5}{m_5}+\frac{k_1+k_2+k_3+k_4}{m_1m_2m_3m_4}\Bigr)\,c_{1,2}\,c_{2,3}\,c_{3,4}+\Bigl(\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1m_2m_3}\,\frac{k_4+k_5}{m_4m_5}$$

$$+\frac{k_1+k_2+k_3}{m_1m_2m_3}\,\frac{m_4+m_5}{m_4m_5}\Bigr)\,c_{1,2}\,c_{2,3}\,c_{4,5}+\Bigl(\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\,\frac{k_3+k_4+k_5}{m_3m_4m_5}$$

$$+\frac{k_1+k_2}{m_1m_2}\,\frac{m_3+m_4+m_5}{m_3m_4m_5}\Bigr)\,c_{1,2}\,c_{3,4}\,c_{4,5}+\Bigl(\frac{m_2+m_3+m_4+m_5}{m_2m_3m_4m_5}\,\frac{k_1}{m_1}+\frac{k_2+k_3+k_4+k_5}{m_2m_3m_4m_5}\Bigr)\,c_{2,3}\,c_{3,4}\,c_{4,5}$$

$$+\frac{k_1+k_2+k_3}{m_1m_2m_3}\cdot\frac{k_4k_5}{m_4m_5}\,c_{1,2}\,c_{2,3}+\frac{k_1+k_2}{m_1m_2}\,\frac{k_3+k_4}{m_3m_4}\,\frac{k_5}{m_5}\,c_{1,2}\,c_{3,4}$$

$$+\frac{k_1+k_2}{m_1m_2}\,\frac{k_4+k_5}{m_4m_5}\,\frac{k_3}{m_3}\,c_{1,2}\,c_{4,5}+\frac{k_2+k_3+k_4}{m_2m_3m_4}\cdot\frac{k_1k_5}{m_1m_5}\,c_{2,3}\,c_{3,4}$$

$$+\frac{k_2+k_3}{m_2m_3}\cdot\frac{k_4+k_5}{m_4m_5}\,\frac{k_1}{m_1}\,c_{2,3}\,c_{4,5}+\frac{k_3+k_4+k_5}{m_3m_4m_5}\,\frac{k_1k_2}{m_1m_2}\,c_{3,4}\,c_{4,5}\Bigr]\,\varphi^{(3)}$$

$$+\Bigl(\frac{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5}{m_1m_2m_3m_4m_5}\,c_{1,2}\,c_{2,3}\,c_{3,4}\,c_{4,5}+\frac{k_1+k_2+k_3+k_4}{m_1m_2m_3m_4}\,\frac{k_5}{m_5}\,c_{1,2}\,c_{2,3}\,c_{3,4}$$

$$+\frac{k_1+k_2+k_3}{m_1m_2m_3}\,\frac{k_4+k_5}{m_4m_5}\,c_{1,2}\,c_{2,3}\,c_{4,5}+\frac{k_1+k_2}{m_1m_2}\,\frac{k_3+k_4+k_5}{m_3m_4m_5}\,c_{1,2}\,c_{3,4}\,c_{4,5}$$

$$+\frac{k_2+k_3+k_4+k_5}{m_2m_3m_4m_5}\,\frac{k_1}{m_1}\,c_{2,3}\,c_{3,4}\,c_{4,5}\Bigr)\,\varphi^{(2)}+\frac{k_1+k_2+k_3+k_4+k_5}{m_1m_2m_3m_4m_5}\,c_{1,2}\,c_{2,3}\,c_{3,4}\,c_{4,5}\,\varphi^{(1)}$$

$$=0\;\ldots \tag{140a}$$

$$\begin{vmatrix} m_1 w^2 + k_1 w + c_{1,2} & -c_{1,2} & 0 \\ -c_{1,2} & m_2 w^2 + k_2 w + c_{1,2} + c_{2,3} & -c_{2,3} \\ 0 & -c_{2,3} & m_3 w^2 + k_3 w + c_{2,3} + c_{3,4} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Man erkennt, daß bei fehlender Dämpfung ($k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 0$) alle ungeraden Ableitungen verschwinden und die Gleichung mit Gl. (45a) identisch wird.

Die Lösung der Gl. (140) verlangt zunächst die Aufsuchung der Wurzeln w der charakteristischen Gleichung:

$$w^{2n} + a_{2n-1} w^{2n-1} + a_{2n-2} w^{2n-2} + \ldots + a_2 w^2 + a_1 w = 0 \,. \tag{141}$$

Eine dieser Wurzeln ist, wie man ohne weiters erkennt, $w_0 = 0$. Da die Beizahlen a_x nach ihrem aus Gl. (140a) ersichtlichen Bildungsgesetz sämtlich positive, reelle Zahlen sind, so muß die Gl. (141), die nach Abscheidung der Wurzel $w_0 = 0$ vom $(2n-1)$-ten Grade, also ungeraden Grades ist, bestimmt eine reelle, negative Wurzel $w_1 = -q$ besitzen. Die übrigen Wurzeln sind zu je zweien konjugiert komplex von der Form: $w_x = -p_x + i\omega_x$ und $w'_x = -p_x - i\omega_x$.

Somit lautet das Integral der Gl. (140):

$$\varphi = C_0 + C e^{-qt} + \sum_{x=1}^{x=n-1} [e^{-p_x t}(\alpha_x \sin \omega_x t + \beta_x \cos \omega_x t)] \,. \tag{142}$$

Darin sind C, α_x und β_x die $2n-1$ willkürlichen Integrationskonstanten, mittels welcher man die Lösung den Anfangsbedingungen anpassen kann. C_0 ergibt sich mit Rücksicht auf Gl. (139) zu

$$C_0 = \frac{\sum_{h=1}^{h=n} (m_h \varphi'_{h0} + k_h \varphi_{h0})}{\sum_{h=1}^{h=n} k_h} \,. \tag{142a}$$

Man kann die Gl. (141) auch unmittelbar in Determinantenform erhalten, wenn man die partikuläre Lösung $\varphi = C e^{wt}$ in die Ausgangsgleichungen (137) einführt. Man erhält wegen

$$\varphi' = w C e^{wt}$$

und

$$\varphi'' = w^2 C e^{wt}$$

die obenstehende Determinantengleichung (141a).

Gemäß Gl. (142) besteht der Drehwinkel φ jeder beliebigen Masse aus dem für alle Massen gleichen, konstanten Winkel C_0 (nach Gl. 142a), aus einem aperiodischen Glied $C_h e^{-qt}$ und aus der Summe der eigentlichen Schwingungswinkel vom ersten bis zum $(n-1)$-ten Grade. Der bei

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 \\ -c_{3,4} & & 0 & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & & -c_{n-1,n} & m_n w^2 + k_n w + c_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0 \tag{141a}$$

jedem Summanden stehende Exponentialfaktor zeigt das Erlöschen der Schwingungsglieder an. Die $n-1$ verschiedenen Werte ω_x ergeben die $n-1$ verschiedenen Eigenschwingungszahlen des Systems:

$$n_x = \frac{30}{\pi}\,\omega_x \,.$$

Da für jede Masse sich $2n-1$ Integrationskonstante (C, α_x, β_x) ergeben, die Differentialgleichungen (137) oder (140) aber nur im ganzen $2n$, nach Abscheidung von C_0 noch $2n-1$ willkürliche Integrationskonstante verlangen, so müssen zwischen den Konstanten aller Massen Beziehungen bestehen. Um diese Beziehungen zu erhalten, führen wir die einzelnen Teile der Lösungsgleichung (142) in die Ausgangsgleichungen (137) ein. Für das aperiodische Glied $\varphi = Ce^{-qt}$ erhalten wir dadurch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &(m_1 q^2 - k_1 q + c_{1,2})\,C_1 - c_{1,2} C_2 = 0 \\ &-c_{1,2} C_1 + (m_2 q^2 - k_2 q + c_{1,2} + c_{2,3}) C_2 - c_{2,3} C_3 = 0 \\ &\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ &\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ &\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ &-c_{n-1,n} C_{n-1} + (m_n q^2 - k_n q + c_{n-1,n}) C_n = 0 \end{aligned}\right\} \tag{143}$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems ist aber wieder die Gl. (141a), und sie verschwindet, weil $-q$ eine Wurzel jener Gleichung ist. Die Werte C_h erscheinen also in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$. Die Gl. (143) ergeben daher nur das Verhältnis der Werte C. Wir benützen die Gleichungen wie früher in der Weise, daß wir schrittweise die Werte C_h aus den Werten C der vorausgehenden Massen berechnen. Wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} C_2 &= C_1 - (q k_1 C_1 - q^2 m_1 C_1) : c_{1,2} \\ C_3 &= C_2 - (q(k_1 C_1 + k_2 C_2) - q^2 (m_1 C_1 + m_2 C_2)) : c_{2,3} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ C_{h+1} &= C_h - \Big(q \sum_{l=1}^{l=h} (k_l C_l) - q^2 \sum_{l=1}^{l=h} (m_l C_l)\Big) : c_{h,h+1} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ C_n &= C_{n-1} - \Big(q \cdot \sum_1^{n-1} (k_l C_l) - q^2 \sum_1^{n-1} (m_l C_l)\Big) : c_{n-1,n} \end{aligned}\right\} \tag{144}$$

Die Gl. (138) ergibt für die Werte C die Beziehung:

$$\sum_{l=1}^{l=n} [(q m_l - k_l) C_l] = 0 \,. \tag{145}$$

Ganz ebenso verfahren wir mit den eigentlichen Schwingungsgliedern der Gl. (142), um die Beziehungen zwischen den Konstanten α und β für alle Massen zu erhalten. Wir führen zu diesem Zweck die partikuläre Lösung: $\varphi = e^{-pt}(\alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t)$ in die Gl. (137) ein. Zunächst berechnet sich:

$$\varphi' = e^{-pt}[(-p\alpha - \omega\beta)\sin\omega t + (\omega\alpha - p\beta)\cos\omega t]$$

und

$$\varphi'' = e^{-pt}[((-\omega^2 + p^2)\alpha + 2p\omega\beta)\sin\omega t - (2p\omega\alpha + (\omega^2 - p^2)\beta)\cos\omega t] \,.$$

Mit diesen Werten lautet die allgemeine Gl. (137) für die h^{te} Masse, nach $\sin\omega t$ und $\cos\omega t$ geordnet:

$$\begin{aligned}&[m_h((-\omega^2 + p^2)\alpha_h + 2p\omega\beta_h) + k_h(-p\alpha_h - \omega\beta_h) + (c_{h-1,h} + c_{h,h+1})\alpha_h \\ &- c_{h-1,h}\alpha_{h-1} - c_{h,h+1}\alpha_{h+1}]\sin\omega t + [m_h(-2p\omega\alpha_h - (\omega^2 - p^2)\beta_h) \\ &+ k_h(\omega\alpha_h - p\beta_h) + (c_{h-1,h} + c_{h,h+1})\beta_h - c_{h-1,h}\beta_{h-1} - c_{h,h+1}\beta_{h+1}]\cos\omega t = 0 \,.\end{aligned}$$

Da diese Gleichung für jeden beliebigen Wert von t ihre Gültigkeit behalten muß, so müssen die in eckigen Klammern stehenden Faktoren von $\sin\omega t$ und von $\cos\omega t$ jeder für sich verschwinden. Dies gibt, nach den Ausschlägen α_h und β_h geordnet, die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}&[-m_h(\omega^2 - p^2) - k_h p + c_{h-1,h} + c_{h,h+1}]\alpha_h - \omega(k_h - 2m_h p)\beta_h \\ &\quad - c_{h-1,h}\alpha_{h-1} - c_{h,h+1}\alpha_{h+1} = 0 \,, \\ &[-m_h(\omega^2 - p^2) - k_h p + c_{h-1,h} + c_{h,h+1}]\beta_h + \omega(k_h - 2m_h p)\alpha_h \\ &\quad - c_{h-1,h}\beta_{h-1} - c_{h,h+1}\beta_{h+1} = 0 \,.\end{aligned}\right\} \tag{146}$$

Der Vergleich dieser beiden Gleichungen lehrt, daß man die zweite Gleichung aus der ersten erhält, wenn man α mit β und β mit $-\alpha$ vertauscht.

Die Gl. (146) denken wir uns für jede Masse angeschrieben. Wir berechnen aus sämtlichen Gleichungen wieder Schritt für Schritt die Ausschläge α_h und β_h aus den entsprechenden Ausschlägen aller vorausgehenden Massen und erhalten so die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_2 &= \alpha_1 - [(\omega^2 - p^2)m_1\alpha_1 + pk_1\alpha_1 - 2\omega p m_1\beta_1 + \omega k_1\beta_1] : c_{1,2} \\ \alpha_3 &= \alpha_2 - [(\omega^2 - p^2)(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2) + p(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) - 2\omega p(m_1\beta_1 + m_2\beta_2) \\ &\qquad + \omega(k_1\beta_1 + k_2\beta_2)] : c_{2,3} \\ &\;\;\vdots \\ \alpha_{h+1} &= \alpha_h - [(\omega^2 - p^2)\sum_{l=1}^{l=h}(m_l\alpha_l) + p\sum_1^h(k_l\alpha_l) - 2\omega p\sum_1^h(m_l\beta_l) + \omega\sum_1^h(k_l\beta_l)] : c_{h,h+1} \\ &\;\;\vdots \\ \alpha_n &= \alpha_{n-1} - [(\omega^2 - p^2)\sum_1^{n-1}(m_l\alpha_l) + p\sum_1^{n-1}(k_l\alpha_l) - 2\omega p\sum_1^{n-1}(m_l\beta_l) + \omega\sum_1^{n-1}(k_l\beta_l)] : c_{n-1,n}\end{aligned}\right\} \tag{147}$$

Um die entsprechenden Gleichungen für die Ausschläge β zu erhalten, braucht man nur in den Gl. (147) α durch β und β durch $-\alpha$ zu ersetzen.

Die Gl. (138) liefert für die Werte α, β die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}(\omega^2-p^2)\sum_{h=1}^{h=n}(m_h\alpha_h)+p\sum_1^n(k_h\alpha_h)-2\omega p\sum_1^n(m_h\beta_h)+\omega\sum_1^n(k_h\beta_h)=0\\(\omega^2-p^2)\sum_1^n(m_h\beta_h)+p\sum_1^n(k_h\beta_h)+2\omega p\sum_1^n(m_h\alpha_h)-\omega\sum_1^n(k_h\alpha_h)=0\end{aligned}\right\}\quad(148)$$

Bei vielen gegebenen Massen verursacht die Aufstellung der Zahlengleichung (140) einen bedeutenden Rechnungsaufwand, mag man sich nun der fertigen Form nach Gl. (140a) oder der Determinantenform (141a) bedienen. Selbst wenn die Gl. (140) zahlenmäßig aufgestellt ist, kann man ihre Wurzeln nur durch Probieren finden, was wohl für die reelle Wurzel $-q$, nicht aber für die komplexen Wurzeln $-p\pm i\omega$ in verhältnismäßig einfacher Weise geschehen kann. Man wird also zur Berechnung der Eigenschwingungen besser von den Gl. (144) bis (148) Gebrauch machen, in denen man die Werte q, p und ω probeweise annimmt. Die richtige Wahl von q in den Gl. (144) erkennt man nach durchgeführter Rechnung daran, daß die Gl. (145) befriedigt wird; ebenso ist die richtige Annahme von p und ω in den Gl. (147) schließlich daran kenntlich, daß die Bedingungen (148) erfüllt sind. Da für die Berechnung der Ausschläge α und β die gleichzeitigen Annahmen von p und ω erforderlich sind, so wäre die Auffindung der richtigen Werte äußerst mühsam, wenn nicht glücklicherweise bei den praktisch vorkommenden Dämpfungen die Werte ω der gedämpften Eigenschwingung sehr genau mit denen der ungedämpften übereinstimmten. Da sich die Werte ω für die ungedämpften Schwingungen nach unsern früheren Darlegungen verhältnismäßig einfach finden lassen, so braucht man zur Durchführung der Berechnung nach den Gl. (147) nur noch eine Annahme für p zu treffen. Auch für die noch zu treffenden Annahmen der Werte q und p lassen sich Näherungen angeben, die viel Probieren ersparen. Wie sich an Beispielen herausstellen wird, unterscheiden sich nämlich für die gewöhnlichen Dämpfungen die Faktoren C des aperiodischen Gliedes aller Massen nur sehr wenig voneinander, so daß man in Gl. (145) C_l näherungsweise als konstant ansehen kann, wodurch sich für q die sehr gute Näherung ergibt:

$$q\sim\frac{\sum\limits_1^n k_l}{\sum\limits_1^n m_l}\,. \tag{149}$$

Um zu einem Näherungswert für p zu gelangen, beachte man, daß nach einem bekannten Satz der Analysis die Summe aller ν Wurzeln einer Gleichung ν-ten Grades gleich dem negativen Koeffizienten des Gliedes mit der $(\nu - 1)$-ten Potenz der Unbekannten in jener Gleichung ist. Für die Gleichung (141) gilt also:

$$\sum_{x=1}^{x=2n} w_x = -a_{2n-1},$$

oder da die reellen Wurzeln o und $-q$ sind und weil sich für die Summe je zweier konjugiert komplexer Wurzeln die imaginären Teile aufheben $(-p + \omega i - p - \omega i = -2p)$:

$$o + q + 2\sum_{1}^{n-1} p_x = a_{2n-1}. \tag{150}$$

Diese Gleichung gibt freilich nur eine Beziehung über die Summe aller $n - 1$ Werte p_x. Da aber (nach unserer Bezeichnungsweise) sämtliche p positive Werte sind, so erhält man wenigstens den Mittelwert

$$p_m = \frac{a_{2n-1} - q}{2(n-1)}. \tag{151}$$

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (140a) und (149) wird also

$$p_m \sim \frac{\sum\limits_{l=1}^{l=n}\left(\frac{k_l}{m_l}\right) - \frac{\sum\limits_1^n k_l}{\sum\limits_1^n m_l}}{2(n-1)}. \tag{152}$$

Die Anwendung unserer Rechnungen soll an einigen Zahlenbeispielen gezeigt werden.

Zahlenbeispiele. Es sollen die Eigenschwingungen eines Zweimassensystems untersucht werden. Die Massen seien $m_1 = 1 \cdot m$ und $m_2 = 4\,m$ (m irgendeine Vergleichsmasse); die Dämpfungsfaktoren seien verhältnismäßig hoch mit $k_1 = 0{,}3\,\sqrt{mc}$ und $k_2 = 0{,}6\,\sqrt{mc}$ gegeben, wobei $c = \frac{GJ}{l}$ die elastische Konstante der die beiden Massen verbindenden Welle (Drehfeder) ist.

[Dimensionen m: kgcms²; c: kgcm; k: kgcms.]

Eigenschwingung ohne Dämpfung (Gl. 45a):

$$\omega_0^2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\,c = \frac{1+4}{1\cdot 4}\,\frac{c}{m} = \frac{5}{4}\,\frac{c}{m}.$$

Mit Dämpfung (Gl. 140a):

$$\varphi^{(4)} + \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)\varphi^{(3)} + \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\,c + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}\right)\varphi^{(2)} + \frac{k_1 + k_2}{m_1 m_2}\,c\,\varphi^{(1)} = 0,$$

Gl. (141):

$$w^4 + \left(\frac{0{,}3}{1} + \frac{0{,}6}{4}\right)\sqrt{\frac{c}{m}}\,w^3 + \left(\frac{1+4}{1\cdot 4} + \frac{0{,}3\cdot 0{,}6}{1\cdot 4}\right)\frac{c}{m}\,w^2 + \frac{0{,}3 + 0{,}6}{1\cdot 4}\left(\frac{c}{m}\right)^{3/2} w = 0.$$

Die Auflösung dieser Gleichung ergibt die Wurzeln

$$w_0 = 0\,,\quad w_1 = -q = -0{,}180527\sqrt{\frac{c}{m}}\,,\quad \left.\begin{matrix} w_2 \\ w_3 \end{matrix}\right\} = -p \pm i\omega$$

$$= (-0{,}1347365 \pm i \cdot 1{,}108241)\sqrt{\frac{c}{m}}\,.$$

Damit wird die Lösungsgleichung (142):

$$\varphi = C_0 + C e^{-0{,}180527\sqrt{\frac{c}{m}}\,t}$$

$$+ e^{-0{,}1347365\sqrt{\frac{c}{m}}\,t}\left[\alpha \sin 1{,}108241\sqrt{\frac{c}{m}}\,t + \beta \cos 1{,}108241\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right].$$

Gl. (144): $C_2 = C_1 - (0{,}180527 \cdot 0{,}3 - 0{,}180527^2 \cdot 1)\,C_1 = 0{,}978432\,C_1$.

Gl. (147): $\alpha_2 = \alpha_1 - [(1{,}108241^2 - 0{,}1347365^2) \cdot 1 + 0{,}1347365 \cdot 0{,}3)\,\alpha_1$

$+ 1{,}108241\,(-2 \cdot 0{,}1347365 \cdot 1 + 0{,}3)\,\beta_1]$

$\alpha_2 = -0{,}250465\,\alpha_1 - 0{,}033831\,\beta_1$.

Damit: $\beta_2 = -0{,}250465\,\beta_1 + 0{,}033831\,\alpha_1$.

Zur Bestimmung der ganzen Bewegung sind für 2 Massen $2 \cdot 2 = 4$ Anfangsbedingungen erforderlich. Demgemäß seien gegeben die Anfangsdrehwinkel φ_{10} der Masse 1 und φ_{20} der Masse 2 und die Anfangswinkelgeschwindigkeiten φ'_{10} und φ'_{20} zu Beginn der Zeitzählung $t = 0$. Man hat also aus Gl. (142):

$$\varphi_{10} = C_0 + C_1 + \beta_1 \qquad \varphi_{20} = C_0 + C_2 + \beta_2$$

$$\varphi'_{10} = -qC_1 - p\beta_1 + \omega\alpha_1 \qquad \varphi'_{20} = -qC_2 - p\beta_2 + \omega\alpha_2$$

In diesen 4 Gleichungen ersetzen wir zunächst die Werte C_2, α_2, β_2 durch die oben gefundenen und erhalten mit unseren Zahlen q, p, ω:

$$\begin{aligned}
\varphi_{10} &= C_0 + C_1 + \beta_1 \\
\varphi_{20} &= C_0 + 0{,}978432\,C_1 - 0{,}250465\,\beta_1 + 0{,}033831\,\alpha_1 \\
\varphi'_{10} &= (-0{,}180527\,C_1 - 0{,}134737\,\beta_1 + 1{,}108241\,\alpha_1)\sqrt{\frac{c}{m}} \\
\varphi'_{20} &= (-0{,}176633\,C_1 - 0{,}003746\,\beta_1 - 0{,}282134\,\alpha_1)\sqrt{\frac{c}{m}}
\end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen liefert:

$$\left.\begin{aligned}
C_1 &= -0{,}137446\,(\varphi_{10} - \varphi_{20}) - 1{,}150425\,\varphi'_{10}\sqrt{\frac{m}{c}} - 4{,}502449\,\varphi'_{20}\sqrt{\frac{m}{c}} \\
\beta_1 &= 0{,}804113\,(\varphi_{10} - \varphi_{20}) + 0{,}039314\,\varphi'_{10}\sqrt{\frac{m}{c}} + 0{,}058005\,\varphi'_{20}\sqrt{\frac{m}{c}} \\
\alpha_1 &= 0{,}075372\,(\varphi_{10} - \varphi_{20}) + 0{,}719712\,\varphi'_{10}\sqrt{\frac{m}{c}} - 0{,}726375\,\varphi'_{20}\sqrt{\frac{m}{c}} \\
C_2 &= -0{,}134482\,(\varphi_{10} - \varphi_{20}) - 1{,}125613\,\varphi'_{10}\sqrt{\frac{m}{c}} - 4{,}405340\,\varphi'_{20}\sqrt{\frac{m}{c}} \\
\beta_2 &= -0{,}198852\,(\varphi_{10} - \varphi_{20}) + 0{,}014502\,\varphi'_{10}\sqrt{\frac{m}{c}} - 0{,}039102\,\varphi'_{20}\sqrt{\frac{m}{c}} \\
\alpha_2 &= -0{,}046082\,(\varphi_{10} - \varphi_{20}) - 0{,}181593\,\varphi'_{10}\sqrt{\frac{m}{c}} + 0{,}179970\,\varphi'_{20}\sqrt{\frac{m}{c}} \\
C_0 &= 0{,}333333\,\varphi_{10} + 0{,}666667\,\varphi_{20} + 1{,}111111\,\varphi'_{10}\sqrt{\frac{m}{c}} + 4{,}444444\,\varphi'_{20}\sqrt{\frac{m}{c}}
\end{aligned}\right\}\quad (153)$$

Der Wert C_0 ist, wie man leicht feststellt, in Übereinstimmung mit Gl. (142a).

Man kann jetzt nach jenen Anfangsbedingungen fragen, die **nur** eine aperiodische Bewegung ergeben. Dazu muß $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ sein, was nach Gl. (147) auch $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ nach sich zieht. Man findet aus Gl. (153):

$$\varphi'_{10} = -8{,}37026\,(\varphi_{10} - \varphi_{20})\sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$\varphi'_{20} = -8{,}18972\,(\varphi_{10} - \varphi_{20})\sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$C_1 = 46{,}3657\,(\varphi_{10} - \varphi_{20})$$

$$C_2 = 45{,}3657\,(\varphi_{10} - \varphi_{20}).$$

Der Wert C_0 interessiert nicht weiter. Man kann ihn ohne weiters gleich Null setzen, wenn man nur die Nullage der Winkelzählung entsprechend wählt. Damit wird die Lösung:

$$\varphi_1 = 46{,}3657\,(\varphi_{10} - \varphi_{20})\, e^{-0{,}180527\sqrt{\frac{c}{m}}\,t}$$

$$\varphi_2 = 45{,}3657\,(\varphi_{10} - \varphi_{20})\, e^{-0{,}180527\sqrt{\frac{c}{m}}\,t}.$$

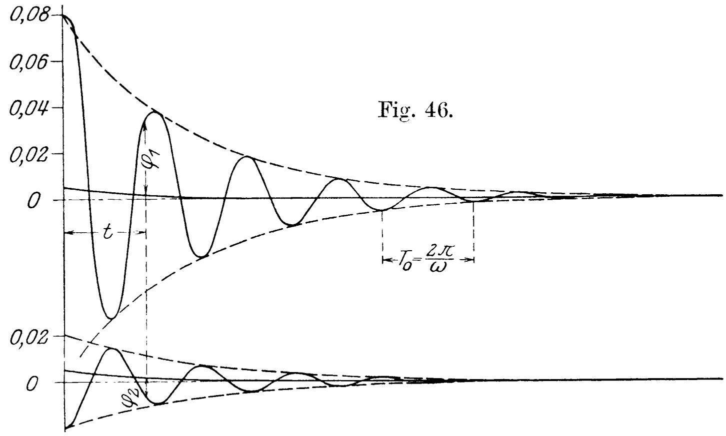


Fig. 46.

Ebenso leicht kann man die Frage beantworten, wie die Anfangsbedingungen beschaffen sein müssen, damit das aperiodische Glied verschwindet. Dazu muß nur $C_1 = 0$ sein, was auch $C_2 = 0$ zur Folge hat. Die erste der Gl. (153) gibt also mit $C_1 = 0$ die von den Anfangswerten für diesen Fall zu erfüllende Bedingung.

Endlich mag noch die Schwingung für jene Anfangsbedingungen untersucht werden, die bei Anstellung eines Versuches gewöhnlich vorliegen. Man wird die Welle um einen bestimmten Winkelbetrag $\varphi_{10} - \varphi_{20}$ zwischen den beiden Massen verdrehen und sie aus diesem Zustand heraus plötzlich freilassen. Es ist also $\varphi'_{10} = \varphi'_{20} = 0$. Diese Werte brauchen wir nur in die Gl. (153) einzuführen. Man erkennt, daß das aperiodische Glied dabei nicht verschwindet. Diese Schwingung ist für $\varphi_{10} - \varphi_{20} = 0{,}1$, $\sqrt{\frac{c}{m}} = 100\,\mathrm{s}^{-1}$ in Fig. 46 für beide Massen dargestellt, wobei das aperiodische Glied mit entgegengesetztem Vorzeichen aufgetragen ist, um gleich den Schwingungswinkel φ als Abstand beider Kurven zu erhalten.

Schließlich wollen wir noch unsere Näherungsformeln an diesem Beispiel prüfen:

Wir fanden für die ungedämpfte Schwingung $\omega_0^2 = \frac{5}{4}\frac{c}{m} = 1{,}25\frac{c}{m}$, während sich für die gedämpfte Schwingung desselben Systems $\omega = 1{,}108241\sqrt{\frac{c}{m}}$ oder $\omega^2 = 1{,}228\,198\,\frac{c}{m}$ ergab, also trotz der in diesem Fall besonders großen Dämpfung nicht viel verschieden.

Wir fanden ferner den genauen Wert $q = 0{,}180527\sqrt{\frac{c}{m}}$; die Näherungsgleichung (149) würde ergeben haben

$$q \sim \frac{(0{,}3 + 0{,}6)\sqrt{mc}}{(1+4)\,m} = 0{,}18\sqrt{\frac{c}{m}},$$

es war endlich der genaue Wert $p = 0{,}1347365\sqrt{\frac{c}{m}}$, während die Näherung (152)

$$p_m \sim \frac{\left[\left(\frac{0{,}3}{1} + \frac{0{,}6}{4}\right) - \frac{0{,}3 + 0{,}6}{1+4}\right]\sqrt{\frac{c}{m}}}{2\cdot(2-1)} = 0{,}135\sqrt{\frac{c}{m}} \text{ liefert.}$$

2. Die Eigenschwingungen eines Dreimassensystems zu bestimmen, wenn die Massen $m_1 = 1\,m$, $m_2 = 2\,m$, $m_3 = 3\,m$, die elastischen Längen $l_{1,2} = 3\,l$, $l_{2,3} = 2\,l$, also die Wellenkonstanten $c_{1,2} = \frac{GJ}{3l}$, $c_{2,3} = \frac{GJ}{2l}$ und die Dämpfungsfaktoren $k_1 = 0{,}1\sqrt{\frac{mGJ}{l}}$, $k_2 = 0{,}2\sqrt{\frac{mGJ}{l}}$ und $k_3 = 0{,}3\sqrt{\frac{mGJ}{l}}$ gegeben sind.

Zunächst ergibt sich ohne Dämpfung:

$$\omega^4 - \left(\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}c_{1,2} + \frac{m_2+m_3}{m_2 m_3}c_{2,3}\right)\omega^2 + \frac{m_1+m_2+m_3}{m_1 m_2 m_3}c_{1,2}\,c_{2,3} = 0$$

oder in Zahlen:

$$\omega^4 - \frac{11}{12}\frac{GJ}{lm}\omega^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{GJ}{lm}\right)^2 = 0\,.$$

Daraus: $\omega_1^2 = \frac{1}{4}\frac{GJ}{lm}$ und $\omega_2^2 = \frac{2}{3}\frac{GJ}{lm}$.

Wir wollen auch die zugehörigen dämpfungsfreien Schwingungsformen berechnen:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{4}\frac{GJ}{lm}\,.$$

m	$m\omega^2$	α	$m\omega^2\alpha$	Σ	l	$\frac{\Sigma}{c}$
$1\,m$	$\frac{1}{4}\frac{GJ}{l}$	α_1	$\frac{1}{4}\frac{GJ\alpha_1}{l}$	$\frac{1}{4}\frac{GJ\alpha_1}{l}$	$3\,l$	$\frac{3}{4}\alpha_1$
$2\,m$	$\frac{1}{2}\frac{GJ}{l}$	$\frac{1}{4}\alpha_1$	$\frac{1}{8}\frac{GJ\alpha_1}{l}$	$\frac{3}{8}\frac{GJ\alpha_1}{l}$	$2\,l$	$\frac{3}{4}\alpha_1$
$3\,m$	$\frac{3}{4}\frac{GJ}{l}$	$-\frac{1}{2}\alpha_1$	$-\frac{3}{8}\frac{GJ\alpha_1}{l}$	0		

$$\omega_2^2 = \frac{2}{3}\frac{GJ}{lm}.$$

m	$m\,\omega^2$	α	$m\,\omega^2\,\alpha$	Σ	l	$\frac{\Sigma}{c}$
$1\,m$	$\frac{2}{3}\frac{GJ}{l}$	α_1	$\frac{2}{3}\frac{GJ\alpha_1}{l}$	$\frac{2}{3}\frac{GJ\alpha_1}{l}$	$3\,l$	$2\alpha_1$
$2\,m$	$\frac{4}{3}\frac{GJ}{l}$	$-\alpha_1$	$-\frac{4}{3}\frac{GJ\alpha_1}{l}$	$-\frac{2}{3}\frac{GJ\alpha_1}{l}$	$2\,l$	$-\frac{4}{3}\alpha_1$
$3\,m$	$2\frac{GJ}{l}$	$+\frac{1}{3}\alpha_1$	$\frac{2}{3}\frac{GJ\alpha_1}{l}$	$0\frac{GJ\alpha_1}{l}$		

Mit Berücksichtigung der Dämpfung lautet die Gl. (140a) für 3 Massen:

$$\varphi^{(6)} + \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} + \frac{k_3}{m_3}\right)\varphi^{(5)} + \left(\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}c_{1,2} + \frac{m_2+m_3}{m_2 m_3}c_{2,3} + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} + \frac{k_1 k_3}{m_1 m_3} + \frac{k_2 k_3}{m_2 m_3}\right)\varphi$$
$$+ \left[\left(\frac{k_1+k_2}{m_1 m_2} + \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\frac{k_3}{m_3}\right)c_{1,2} + \left(\frac{k_2+k_3}{m_2 m_3} + \frac{m_2+m_3}{m_2 m_3}\frac{k_1}{m_1}\right)c_{2,3} + \frac{k_1 k_2 k_3}{m_1 m_2 m_3}\right]\varphi^{(3)}$$
$$+ \left(\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1 m_2 m_3}c_{1,2}c_{2,3} + \frac{k_1+k_2}{m_1 m_2}\frac{k_3}{m_3}c_{1,2} + \frac{k_2+k_3}{m_2 m_3}\frac{k_1}{m_1}c_{2,3}\right)\varphi^{(2)}$$
$$+ \frac{k_1+k_2+k_3}{m_1 m_2 m_3}c_{1,2}\,c_{2,3}\,\varphi^{(1)} = 0$$

oder die charakteristische Gleichung (141) in Zahlen:

$$w^6 + 0{,}3\left(\frac{GJ}{lm}\right)^{\frac{1}{2}} w^5 + 0{,}946667\,\frac{GJ}{lm}\,w^4 + 0{,}184333\left(\frac{GJ}{lm}\right)^{\frac{3}{2}} w^3 + 0{,}175833\left(\frac{GJ}{lm}\right)^2 w^3$$
$$+ 0{,}016667\left(\frac{GJ}{lm}\right)^{\frac{5}{2}} w = 0.$$

Ihre Wurzeln sind:

$$w_0 = 0;\; w_1 = -q = -0{,}1\sqrt{\frac{GJ}{lm}}$$
$$\left.\begin{matrix} w_2 \\ w_3 \end{matrix}\right\} = -p_I \pm i\omega_I = (-0{,}05 \pm i\cdot 0{,}49749372)\sqrt{\frac{GJ}{lm}}$$
$$\left.\begin{matrix} w_4 \\ w_5 \end{matrix}\right\} = -p_{II} \pm i\omega_{II} = (-0{,}05 \pm i\cdot 0{,}8149642)\sqrt{\frac{GJ}{lm}}.$$

Die Lösungsgleichung (142) lautet somit:

$$\varphi = C_0 + C e^{-0{,}1\sqrt{\frac{GJ}{lm}}\,t} + e^{-0{,}05\sqrt{\frac{GJ}{lm}}\,t}\left[\alpha_I \sin 0{,}49749372\sqrt{\frac{GJ}{lm}}\,t\right.$$
$$\left. + \beta_I \cos 0{,}49749372\sqrt{\frac{GJ}{lm}}\,t + \alpha_{II} \sin 0{,}8149642\sqrt{\frac{GJ}{lm}}\,t + \beta_{II} \cos 0{,}8149642\sqrt{\frac{GJ}{lm}}\,t.\right]$$

Es soll nun das Verfahren gezeigt werden, die Schwingungsform der gedämpften Eigenschwingung in ähnlicher Weise wie die der ungedämpften durch schrittweise Aufstellung von Zahlentafeln zu erhalten. Man erhält aber für die gedämpfte Schwingung neben den Schwingungsformen jeder Phase eines jeden Schwingungsgrades noch die Schwingungsform der aperiodischen Bewegung. Für letztere brauchen wir nur die Gleichungsgruppe (144), für die ersteren die Gruppe (147) anzuwenden. Man erhält für die aperiodische Bewegung:

Zahlentafel 17.

$$q = 0{,}1\sqrt{\frac{GJ}{lm}}; \qquad q^2 = 0{,}01\frac{GJ}{lm}.$$

Reihe		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	h	m	k	kq	mq^2	$kq - mq^2$	C	$(kq - mq^2)\,C$	$\Sigma\,[(kq - mq^2)\,C]$	l	$l\Sigma : GJ$
		m	$\sqrt{\frac{mGJ}{l}}$	$\frac{GJ}{l}$	$\frac{GJ}{l}$	$\frac{GJ}{l}$		$\frac{GJ}{l}$	$\frac{GJ}{l}$	l	
Zeile	1	1	0,1	0,01	0,01	0	C_1	0	0	3	0
	2	2	0,2	0,02	0,02	0	C_1	0	0	2	0
	3	3	0,3	0,03	0,03	0	C_1	0	0		

Diese Tafel enthält in Reihe 1 die Massenträgheitsmomente in ihrer gegebenen Reihenfolge, in Reihe 2 die zugehörigen Dämpfungsfaktoren, in Reihe 3 die Produkte $k \cdot q$, in Reihe 4 die Produkte $m\,q^2$, in Reihe 5 die Werte $k\,q - m\,q^2$, in Reihe 6 die aperiodischen Ausschläge im Vergleich zum Ausschlag C_1 der ersten Masse, in Reihe 7 die Produkte $(k\,q - m\,q^2)\,C$, in Reihe 8 die Summen dieser Werte, in Reihe 9 die elastischen Längen und in Reihe 10 die Werte

$$\frac{\Sigma\,[(kq - mq^2)\,C]}{c} = \frac{l\Sigma}{GJ}.$$

Man erhält nun in der 6. Reihe den Wert C_{h+1} der $(h+1)$-ten Masse (in der $(h+1)$-ten Zeile), wenn man von dem Wert C_h in der h. Zeile den in der 10. Reihe in der h. Zeile berechneten Wert $\frac{l\Sigma}{GJ}$ subtrahiert (gemäß Gl. 144) und man findet den Wert $\Sigma\,[(k\,q - m\,q^2)\,C]$ der 8. Reihe in der $(h+1)$-ten Zeile, indem man den Wert $(k\,q - m\,q^2)\,C$ in der $(h+1)$-ten Zeile, 7. Reihe zu dem Wert $\Sigma\,[(k\,q - m\,q^2)\,C]$ der h-ten Zeile (8. Reihe) addiert.

In unserem besonderen Beispiel sind die Werte $k\,q - m\,q^2$ (Reihe 5) für alle Massen $= 0$, weil sich hier die Dämpffaktoren wie die Massen verhalten. Damit ergeben sich auch die Werte der Reihen 8 und 10 sämtlich zu Null und die Ausschläge C werden für alle drei Massen gleich. Dies gilt ganz allgemein auch für beliebig viele Massen, woraus der Satz folgt:

Wenn sich die Dämpfungsfaktoren der Massen wie ihre Trägheitsmomente verhalten, sind die gleichzeitigen aperiodischen Ausschläge aller Massen gleich.

Da der der Berechnung der Zahlentafel 17 zugrunde gelegte Wert q der genaue Wert ist, so ergibt sich die Endsumme der Reihe (8) von selbst zu Null. Hätten wir aber den Wert q probeweise annehmen müssen, so wäre das Verschwinden der Restsumme (Reihe 8 letzte Zeile) das Zeichen für die richtige Annahme.

Unter Beachtung der Gl. (147) bilden wir in ähnlicher Weise die Zahlentafel 18 für die Phase α der ersten Eigenschwingung:

Wir fanden:

$$p = 0{,}05\sqrt{\frac{GJ}{lm}}, \qquad \omega = 0{,}49749372\sqrt{\frac{GJ}{lm}}.$$

Damit wird:

$$\omega^2 - p^2 = (0{,}2475 - 0{,}0025)\cdot\frac{GJ}{lm} = 0{,}245\,\frac{GJ}{lm}$$

$$2\,\omega\,p = 0{,}0494937\cdot\frac{GJ}{lm}.$$

Zahlentafel 18.

Reihe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h	m	$\frac{k}{\sqrt{\frac{m GJ}{l}}}$	$\frac{m(\omega^2-p^2)+kp}{\frac{GJ}{l}}$	$\frac{\omega(-2mp+k)}{\frac{GJ}{l}}$	α	$\frac{[m(\omega^2-p^2)+kp]\alpha}{\frac{GJ}{l}}$	$\frac{\omega(-2mp+k)\beta}{\frac{GJ}{l}}$	$\frac{\Sigma}{\frac{GJ}{l}}$	$\frac{l}{l}$	$\frac{\Sigma}{c}$
Zeile 1	1	0,1	0,250	0	α_1	$0{,}250\,\alpha_1$	$0\,\beta_1$	$0{,}250\,\alpha_1 + 0\,\beta_1$	3	$0{,}750\,\alpha_1 + 0\,\beta_1$
2	2	0,2	0,500	0	$0{,}25\,\alpha_1$	$0{,}125\,\alpha_1$	0	$0{,}375\,\alpha_1 + 0\,\beta_1$	2	$0{,}75\,\alpha_1 + 0\,\beta_1$
3	3	0,3	0,750	0	$-0{,}50\,\alpha_1$	$-0{,}375\,\alpha_1$	0	$0\,\alpha_1 + 0\,\beta_1$		

Zahlentafel 18 enthält in Reihe 1 die Massenträgheitsmomente, in Reihe 2 die Dämpfungsfaktoren, in Reihe 3 und 4 die zur Berechnung gebrauchten Ausdrücke $m(\omega^2 - p^2) + kp$ bzw. $\omega(-2mp + k)$, in Reihe 5 die Ausschläge α im Vergleich zu den Ausschlägen α_1 und β_1 der ersten Masse, in Reihe 6 die Werte $[m(\omega^2 - p^2) + kp]\,\alpha$, in Reihe 7 die Werte $\omega(-2mp + k)\,\beta$, in Reihe 8 die Summe aller Werte der Reihen 6 und 7, in Reihe 9 die elastischen Längen und in Reihe 10 die mit $\frac{l}{GJ}$ multiplizierten Werte der Reihe 8.

Im allgemeinen Fall ergibt sich in Reihe 5 der Wert α_h (h-te Zeile oder h-te Masse) in der Form $\alpha_h = a_h\,\alpha_1 + b_h\,\beta_1$ (in unserem speziellen Beispiel der Tafel 18 werden alle Werte $b_h = 0$). Damit kennt man auch gleichzeitig den Wert β_h, der sich gemäß unserer Bemerkung zu den Gl. (147) dadurch ergibt, daß man α durch β und β durch $-\alpha$ ersetzt, nämlich $\beta_h = a_h\,\beta_1 - b_h\,\alpha_1$. Allgemein setzen sich also auch die Ausdrücke der Reihen 6, 7, 8 und 10 aus solchen Summen zusammen.

Man erhält in der 5. Reihe den Wert α_{h+1} in der $(h+1)$-ten Zeile, indem man von dem Wert α_h in der h-ten Zeile den in der 10. Reihe, h-ten Zeile berechneten Wert $\frac{\Sigma}{c}$ gemäß Gl. (147) subtrahiert, und man findet den Wert $\Sigma_{(h+1)}$ der 8. Reihe in der

m	$\frac{k}{\sqrt{\frac{GJm}{l}}}$	$\frac{m(\omega^2-p^2)+kp}{\frac{GJ}{l}}$	$\frac{\omega(-2pm+k)}{\frac{GJ}{l}}$	α	$\frac{[m(\omega^2-p^2)+kp]\alpha}{\frac{GJ}{l}}$	$\frac{\omega(-2pm+k)\beta}{\frac{GJ}{l}}$	$\frac{\Sigma}{\frac{GJ}{l}}$	$\frac{l}{l}$	$\frac{\Sigma}{c}$
1	0,1	0,666667	0	α_1	$0{,}666667\,\alpha_1$	$0\,\beta_1$	$0{,}666667\,\alpha_1$	3	$2{,}000000\,\alpha_1$
2	0,2	1,333333	0	$-\alpha_1$	$-1{,}333333\,\alpha_1$	0	$-0{,}666667\,\alpha_1$	2	$-1{,}333333\,\alpha_1$
3	0,3	2,000000	0	$+\frac{1}{3}\,\alpha_1$	$+0{,}666667\,\alpha_1$	0	0		

$(h+1)$-ten Zeile, wenn man zu dem Wert $\Sigma_{(h)}$ (8. Reihe, h-te Zeile) die Werte $[m(\omega^2-p^2)+kp]\,\alpha$ und $\omega(-2mp+k)\,\beta$ in den Reihen 6 und 7 der $(h+1)$-ten Zeile addiert.

In unserm Sonderfall, wo das Verhältnis $\frac{k}{m}$ für alle Massen das gleiche ist, ergibt sich, daß alle Massen gleichphasig schwingen und, wie der Vergleich der Schwingungsformen mit und ohne Dämpfung lehrt, daß die Schwingungsform der gedämpften mit jener der ungedämpften Schwingung übereinstimmt.

Wir haben der Aufstellung der Zahlentafel 18 die genauen Werte p und ω zugrunde gelegt, infolgedessen verschwindet in der Summenreihe 8 die Restsumme sowohl hinsichtlich der Beizahlen von α_1 wie von β_1. Umgekehrt zeigt das Verschwinden beider Zahlen die richtige Wahl der Werte p und ω an.

Die Schwingungsform der Phase β braucht nach der Bemerkung zu den Gl. (147) nicht besonders berechnet zu werden; man erhält sie aus der Phase α durch Vertauschung von α_1 mit β_1 und von β_1 mit $-\alpha_1$.

Wir wollen der Vollständigkeit halber noch die Zahlentafel für die Eigenchwingung zweiten Grades anschreiben, obschon wir wissen, daß die Schwingungsorm dieselbe sein muß wie für die ungedämpfte Schwingung (siehe S. 124):

$$p = 0{,}05\sqrt{\frac{GJ}{lm}}, \qquad \omega = 0{,}8149642\sqrt{\frac{GJ}{lm}}$$

$$\omega^2 - p^2 = 0{,}661667\,\frac{GJ}{lm}, \qquad 2\omega p = 0{,}0814964\,\frac{GJ}{lm}.$$

Die Werte ω_0^2 der ungedämpften Schwingung sind mit $0{,}25\,\frac{GJ}{lm}$ und $\frac{2}{3}\,\frac{GJ}{lm}$ nicht viel verschieden von jenen der gedämpften: $\omega_1^2 = 0{,}2475\,\frac{GJ}{lm}$ und $\omega_2^2 = 0{,}664167\,\frac{GJ}{lm}$.

Die Näherungsformeln (149) und (152) ergeben für den Fall, daß $\frac{k}{m}$ für alle Massen gleich ist, genaue Werte.

Als allgemeines Beispiel der Berechnung gedämpfter Eigenschwingungen wollen wir noch die aperiodische Bewegung und die Schwingung ersten Grades der Sechszylindermaschine untersuchen, deren ungedämpfte Schwingungsform ersten Grades wir in Zahlentafel 4 berechnet haben.

Die Dämpfungsfaktoren sind nach unseren früheren Darlegungen ermittelt worden und in Zahlentafel 19 angegeben. Für ω^2 wird man zunächst ohne weiters den in Zahlentafel 4 angewandten Wert 49 840 probeweise annehmen. Für q gibt Gl. (149) mit den gegebenen Dämpfungsfaktoren und Massenträgheitsmomenten:

$$q \sim \frac{\Sigma k}{\Sigma m} = \frac{1600 + 100 + 6\cdot 800 + 60 + 60}{2200 + 3000 + 6\cdot 93 + 7 + 6{,}5} = \frac{6620}{5771{,}5} = 1{,}147\,.$$

Aus Gl. (152) ergibt sich der Mittelwert:

$$p_m \sim \frac{\Sigma\frac{k}{m} - \frac{\Sigma k}{\Sigma m}}{2(n-1)} = \frac{70{,}17 - 1{,}15}{18} = 3{,}83\,.$$

Wir wollen der Kürze halber hier nur die Rechnung mit den endgültig verbesserten Werten angeben.

Aperiodische Form: $q = 1{,}1471$; $q^2 = 1{,}3158$; $GJ = 10^{10}$.

Zahlentafel 19.

m	k	$kq - mq^2$	$C : C_1$	$(kq - mq^2)\frac{C}{C_1}$	Σ	l	$\frac{\Sigma}{c}$
2200	1600	$-1059{,}40$	1,0000000	$-1059{,}40$	$-1059{,}40$	142	$-0{,}0000150$
3000	100	$-3832{,}69$	1,0000150	$-3832{,}75$	$-4892{,}15$	57,5	281
93	800	$+795{,}311$	1,0000431	$+795{,}35$	$-4096{,}80$	48,5	199
93	800	$+795{,}311$	1,0000630	795,36	$-3301{,}44$	48,5	160
93	800	$+795{,}311$	1,0000790	795,37	$-2506{,}07$	48,5	122
93	800	$+795{,}311$	1,0000912	795,38	$-1710{,}69$	48,5	083
93	800	$+795{,}311$	1,0000995	795,39	$-915{,}30$	48,5	044
93	800	$+795{,}311$	1,0001039	795,39	$-119{,}91$	77	009
7	60	59,615	1,0001048	59,62	$-60{,}29$	150	009
6,5	60	60,273	1,0001057	60,28	~ 0		

Daraus ist zu ersehen, daß der aperiodische Ausschlag praktisch für alle Massen der gleiche ist.

Die 1. Eigenschwingungsform ist in Zahlent. 20 auf S. 127 berechnet.

Die Durchrechnung der Tafel 20 ist absichtlich mit weit übertriebener Genauigkeit ausgeführt, weil sich hier in diesem Fall die Merkwürdigkeit ergibt, daß die Periodenzahl der gedämpften Schwingung etwas **höher** ist als jene der ungedämpften Schwingung, wie der Vergleich der Werte ω^2 in den Zahlentafeln 4 und 20 erkennen läßt.

In Zahlentafel 4 ist $\omega^2 = 49840$ noch etwas zu groß, wie der negative Rest zeigt; der genauere Wert für die ungedämpfte Schwingung ersten Grades ist $\omega^2 = 49\,838{,}97$.

Die Tatsache, daß die Eigenschwingungszahl der gedämpften Schwingung unter Umständen höher liegen kann, wie die der ungedämpften, ist gewiß neu und vom theoretischen Standpunkt aus bemerkenswert. Die Untersuchung der Bedingungen für das Eintreten dieser Merkwürdigkeit gehört indessen in das Gebiet der Mathematik. Wir brauchen uns damit um so weniger zu beschäftigen, als für praktische Zwecke der Unterschied ohnehin kaum in Betracht kommt.

Um die Schwingungsformen der gedämpften Eigenschwingung mit jener der ungedämpften vergleichen zu können, braucht man, da die Bestimmung der Phasen für den Vergleich freisteht, nur $\beta_1 = 0$ zu setzen. Dann besteht die Phase α der gedämpften Schwingung nur aus den mit α_1 multiplizierten Anteilen in Tafel 20, die ohne weiteres mit jenen der Zahlentafel 4 verglichen werden können, da die Phase β der gedämpften Schwingung daneben keine große Rolle spielt. Um nämlich die Phase β aus der Phase α zu erhalten, hat man bekanntlich nur α durch β und β durch $-\alpha$ zu ersetzen, so daß sich z. B. der Ausschlag β für die letzte Masse (m_{10}) aus Tafel 20 findet zu:

$$\beta_{10} = -1{,}07604\,\beta_1 + 0{,}01636\,\alpha_1\,.$$

Zahlentafel 20.

Schwingung 1. Grades:

$\omega^2 = 49841{,}68 \quad \omega = 223{,}2525 \quad p = 0{,}81650 \quad \omega^2 - p^2 = 49841{,}013\,.$

m	k	$m(\omega^2-p^2)+kp$	$\omega(-2mp+k)$	α	$[m(\omega^2-p^2)+kp]\,\alpha$	$\omega(-2mp+k)\beta$	Σ	l	$\frac{\Sigma}{c}$
2200	1600	109651535	−444853	α_1	$109651535\alpha_1$		$+109651535\alpha_1$	142	$+1{,}5570518\alpha_1$
						$-444853\beta_1$	$-444853\beta_1$		$-0{,}0063169\beta_1$
3000	100	149523121	−1071389	$-0{,}5770518\alpha_1$	$-83292124\alpha_1$	$+6768\alpha_1$	$26366179\alpha_1$	57,5	$0{,}1516055\alpha_1$
				$+0{,}0063169\beta_1$	$+944523\beta_1$	$+596819\beta_1$	$+1096489\beta_1$		$+63048\beta_1$
93	800	4635867	+144697	$-7086573\alpha_1$	$-3285241\alpha_1$	$-2\alpha_1$	$23080936\alpha_1$	48,5	$1119425\alpha_1$
				$+121\beta_1$	$+56\beta_1$	$-102541\beta_1$	$+994004\beta_1$		$48209\beta_1$
93	800	4635867	+144697	$-8205998\alpha_1$	$-3804192\alpha_1$	$+696\alpha_1$	$19277440\alpha_1$	48,5	$0934956\alpha_1$
				$-48088\beta_1$	$-22293\beta_1$	$-118738\beta_1$	$+852973\beta_1$		$+41369\beta_1$
93	800	4635867	+144697	$-9140954\alpha_1$	$-4237625\alpha_1$	$1294\alpha_1$	$15041109\alpha_1$	48,5	$729494\alpha_1$
				$-89457\beta_1$	$-41471\beta_1$	$-132267\beta_1$	$+679235\beta_1$		$+32943\beta_1$
93	800	4635867	+144697	$-9870448\alpha_1$	$-4575808\alpha_1$	$1771\alpha_1$	$10467072\alpha_1$	48,5	$507653\alpha_1$
				$-122400\beta_1$	$-56743\beta_1$	$-142822\beta_1$	$+479670\beta_1$		$+23264\beta_1$
93	800	4635867	+144697	$-1{,}0378101\alpha_1$	$-4811150\alpha_1$	$2108\alpha_1$	$5658030\alpha_1$	48,5	$274414\alpha_1$
				$-145664\beta_1$	$-67528\beta_1$	$-150168\beta_1$	$+261974\beta_1$		$+12706\beta_1$
93	800	4635867	+144697	$-1{,}0652515\alpha_1$	$-4938364\alpha_1$	$2292\alpha_1$	$721958\alpha_1$	77	$55591\alpha_1$
				$-158370\beta_1$	$-73418\beta_1$	$-154139\beta_1$	$+34417\beta_1$		$+2650\beta_1$
7	60	348936	+10843	$-1{,}0708106\alpha_1$	$-373644\alpha_1$	$175\alpha_1$	$348489\alpha_1$	150	$52273\alpha_1$
				$-161020\beta_1$	$-5619\beta_1$	$-11611\beta_1$	$+17187\beta_1$		$+2578\beta_1$
6,5	60	324016	+11025	$-1{,}0760379\alpha_1$	$-348653\alpha_1$	$180\alpha_1$	$16\alpha_1$		
				$-163598\beta_1$	$-5301\beta_1$	$-11863\beta_1$	$+23\beta_1$		

$$\left|\begin{array}{ccccc}
c_{1,2}-m_1\omega^2 & -k_1\omega & -c_{1,2} & 0 & 0 \\
k_1\omega & c_{1,2}-m_1\omega^2 & 0 & -c_{1,2} & 0 \\
-c_{1,2} & 0 & c_{1,2}+c_{2,3}-m_2\omega^2 & -k_2\omega & -c_{2,3} \\
0 & -c_{1,2} & k_2\omega & c_{1,2}+c_{2,3}-m_2\omega^2 & 0 \\
0 & 0 & -c_{2,3} & 0 & c_{2,3}+c_{3,4}-m_3\omega^2 \\
0 & 0 & 0 & -c_{2,3} & k_3\omega \\
\cdot & & & & \\
\cdot & & & & \\
\cdot & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right.$$

Setzt man jetzt wieder $\beta_1 = 0$, so bemerkt man, daß die Phase β aus den mit geänderten Vorzeichen versehenen, mit β_1 multiplizierten Anteilen der Tafel 20 besteht; z. B. $\beta_{10} = +\,0{,}01636\,\alpha_1$.

Man erkennt aus dem Vergleich der Zahlen, daß in der Tat die Ausschläge der so bestimmten Phase β klein gegen jene der Phase α sind und daß die Ausschläge der Phase α sich nicht wesentlich von jenen der ungedämpften Schwingung (Tafel 4) unterscheiden.

Unsere frühere Regel, daß die Anzahl der Schwingungsknotenpunkte mit dem Eigenschwingungsgrad übereinstimmt, gilt wohl noch für die Hauptphase α, aber nicht mehr für die Nebenphase β. Eigentliche Schwingungsknoten, d. h. Wellenquerschnitte, die sich nicht an der Schwingung beteiligen, gibt es im allgemeinen für die gedämpften Eigenschwingungen überhaupt nicht; für solche müßten die Ausschläge beider Phasen gleichzeitig Null sein.

Es braucht wohl nur angedeutet zu werden, daß man das hier gezeigte rechnerische Verfahren der Bestimmung der Schwingungsformen auch zum Teil zeichnerisch durchführen kann in derselben Weise, wie es Professor Gümbel für die ungedämpften Schwingungen gezeigt hat.

21. Erzwungene Schwingungen beliebiger Massensysteme mit äußerer Dämpfung.

Wir setzen wieder voraus, daß an jeder Einzelmasse m_h ein erregendes harmonisches Moment von der Amplitude M_h wirkt; wir setzen also bei Massen, an denen kein Moment wirkt, $M_h = 0$, oder bei Momenten, die an solchen Stellen der Welle angreifen, wo keine Masse sitzt, $m_h = 0$. Die Gesamtzahl aller so gezählten Massen und Momente sei n. Für die erregenden harmonischen Momente gilt:

$$\mathfrak{M}_h = M_h \sin(\omega t + \varepsilon_h) = A_h \sin\omega t + B_h \cos\omega t\,.$$

Damit lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left.\begin{array}{l}
m_1\varphi_1'' + k_1\varphi_1' + c_{1,2}(\varphi_1 - \varphi_2) = A_1 \sin\omega t + B_1 \cos\omega t \\
m_2\varphi_2'' + k_2\varphi_2' + c_{1,2}(\varphi_2 - \varphi_1) + c_{2,3}(\varphi_2 - \varphi_3) = A_2 \sin\omega t + B_2 \cos\omega t \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
m_h\varphi_h'' + k_h\varphi_h' + c_{h-1,h}(\varphi_h - \varphi_{h-1}) + c_{h,h+1}(\varphi_h - \varphi_{h+1}) = A_h \sin\omega t + B_h \cos\omega t \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
m_n\varphi_n'' + k_n\varphi_n' + c_{n-1,n}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) = A_n \sin\omega t + B_n \cos\omega t
\end{array}\right\}\quad(154)$$

$$\left.\begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\
0 & 0 & 0 & & & & 0 \\
0 & 0 & 0 & & & & 0 \\
-c_{2,3} & 0 & 0 & & & & \cdot \\
-k_3\omega & -c_{3,4} & 0 & & & & \cdot \\
c_{2.3}+c_{3,4}-m_3\omega^2 & 0 & -c_{3,4} & & & & \cdot \\
 & & \cdot & & & & \\
 & & \cdot & & & & \\
 & & \cdot & & & & \\
0 & 0 & 0 & -c_{n-1,n} & 0 & c_{n-1,n}-m_n\omega^2 & -k_n\omega \\
0 & 0 & 0 & 0 & -c_{n-1,n} & k_n\omega & c_{n-1,n}-m_n\omega^2
\end{array}\right| \equiv D \quad (156)$$

Wir wissen bereits, daß die erzwungenen Schwingungen einfache harmonische Schwingungen von der Periode ω der erregenden Momente sind, können also setzen:

$$\varphi = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t\,,$$
$$\varphi' = \omega(\alpha \cos \omega t - \beta \sin \omega t)\,,$$
$$\varphi'' = -\omega^2(\alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t)\,.$$

Die h-te Differentialgleichung (154) (für die Masse m_h) lautet damit:

$$[-m_h\omega^2\alpha_h - k_h\omega\beta_h + (c_{h-1,h} + c_{h,h+1})\alpha_h - c_{h-1,h}\,\alpha_{h-1}$$
$$-c_{h,h+1}\alpha_{h+1} - A_h]\sin\omega t + [-m_h\omega^2\beta_h + k_h\omega\alpha_h$$
$$+(c_{h-1,h} + c_{h,h+1})\beta_h - c_{h-1,h}\,\beta_{h-1} - c_{h,h+1}\,\beta_{h+1} - B_h]\cos\omega t = 0\,.$$

Da diese Gleichung für jeden Wert t gelten muß, so muß jede der eckigen Klammern für sich verschwinden. Dies liefert die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
-c_{h-1,h}\alpha_{h-1} + (c_{h-1,h} + c_{h,h+1} - m_h\omega^2)\alpha_h - k_h\varphi\beta_h - c_{h,h+1}\alpha_{h+1} &= A_h\\
-c_{h-1,h}\beta_{h-1} + (c_{h-1,h} + c_{h,h+1} - m_h\omega^2)\beta_h + k_h\omega\alpha_h - c_{h,h+1}\beta_{h+1} &= B_h
\end{aligned}\right\}(155)$$

Man erkennt, daß die zweite Gl. (155) aus der ersten dadurch entsteht, daß man α durch β, A durch B und β durch $-\alpha$ ersetzt.

Die Gl. (155) denken wir uns für jede Masse angeschrieben und erhalten so ein System von $2n$ linearen Gleichungen, die zur Bestimmung der $2n$ Unbekannten $(\alpha_h, \beta_h)_{h=1}^{h=n}$ ausreichen. Zur Auflösung bilden wir zunächst die Determinante D aus den Beizahlen aller Ausschläge[1]:

Die Reihen dieser Determinante $2n^{\text{ten}}$ Grades wollen wir mit $[h_\alpha, h_\beta]_{h=1,}^{h=n}$ die Zeilen mit $[\iota_A, \iota_B]_{l=1}^{l=n}$ numeriert denken. Ersetzt man in der Determinante D die Zahlen der Reihe h_α durch die auf der rechten Seite des Gesamtsystems (155) stehenden konstanten Glieder $A_1, B_1, \ldots A_n, B_n$, so entsteht eine neue Determinante $2n^{\text{ten}}$ Grades, die wir mit $D(h_\alpha)$ bezeichnen wollen. Es ist dann bekanntlich:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_h &= \frac{D(h_\alpha)}{D}\\
\beta_h &= \frac{D(h_\beta)}{D}
\end{aligned}\right\}\qquad(157)$$

[1]) Siehe die Determinante (156) am Kopf dieser Doppelseite.

Wenn man in der Determinante D die Reihe h_α und die Zeile l_A streicht, so bleibt die Unterdeterminante $D(h_\alpha, l_A)$ übrig, die vom $(2n-1)$-ten Grade ist. Wir bezeichnen nun die Brüche:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{D(h_\alpha, l_A)}{D} &\equiv a_{h,l} \\
\frac{D(h_\alpha, l_B)}{D} &\equiv b_{h,l} \\
\frac{D(h_\beta, l_A)}{D} &\equiv a'_{h,l} \\
\frac{D(h_\beta, l_B)}{D} &\equiv b'_{h,l}
\end{aligned}\right\} \tag{158}$$

und können mit diesen Bezeichnungen die Gl. (157) schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_h &= \sum_{l=1}^{l=n} (a_{h,l} A_l + b_{h,l} B_l) \\
\beta_h &= \sum_{l=1}^{l=n} (a'_{h,l} A_l + b'_{h,l} B_l)
\end{aligned}\right\} \tag{159}$$

Aus der Entstehungsweise der Gl. $(155)_B$ aus $(155)_A$ ergeben sich die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
b'_{h,l} &= a_{h,l} \\
a'_{h,l} &= -b_{h,l}
\end{aligned}\right\} \tag{160}$$

womit die Zahlen a', b' durch die Zahlen a, b ersetzt sind. Außerdem ergibt sich aus dem Bildungsgesetz der Determinante D das bemerkenswerte Gesetz von der Gegenseitigkeit der Ausschläge:[1])

$$\left.\begin{aligned}
a_{h,l} &= a_{l,h} \\
b_{h,l} &= b_{l,h}
\end{aligned}\right\} \tag{161}$$

welches aussagt, daß der vom Moment A_l zum Schwingungsausschlag der h-ten Masse hervorgebrachte Anteil gleich jenem ist, den das Moment A_h am Schwingungsausschlag der l-ten Masse erzeugt oder der Einfluß des Momentes M_l auf den Ausschlag der Masse m_h ist ebenso groß als der Einfluß des Momentes M_h auf den Ausschlag von m_l. Daß dieses Gesetz bei ganz beliebig gegebenen Dämpfungsfaktoren aller Massen gilt, ist gewiß beachtenswert. Natürlich gilt es dann auch für den Sonderfall der ungedämpften erzwungenen Schwingung, für welchen alle Werte $k = 0$ sind.

Die Ausschläge der h-ten Masse sind (Gl. 159 und 160):

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_h &= \sum_{l=1}^{l=n} [a_{h,l} A_l + b_{h,l} B_l] \\
\beta_h &= \sum_{l=1}^{l=n} [a_{h,l} B_l - b_{h,l} A_l]
\end{aligned}\right\} \tag{162}$$

[1]) Die Stelle des Beweises möge Zahlentafel 22 vertreten.

Da die Dämpfungsarbeit von den erregenden harmonischen Momenten geleistet wird, so ist ferner:

$$\omega \sum_{h=1}^{h=n} [k_h (\alpha_h^2 + \beta_h^2)] = \sum_{h=1}^{h=n} (\alpha_h B_h - \beta_h A_h) \tag{163}$$

Denken wir uns alle erregenden Momente bis auf jenes an der l-ten Masse verschwunden und bezeichnen wir für diesen Fall die Ausschläge der h-ten Masse mit $\alpha_{h,l}$ und $\beta_{h,l}$, so ist nach (162):

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{h,l} &= a_{h,l} A_l + b_{h,l} B_l \\ \beta_{h,l} &= a_{h,l} B_l - b_{h,l} A_l \end{aligned}\right\} \tag{164}$$

Die Gleichung der Dämpfungsarbeit muß natürlich auch für diesen Fall erfüllt sein, wodurch sich ergibt:

$$\omega \sum_{h=1}^{h=n} [k_h (\alpha_{h,l}^2 + \beta_{h,l}^2)] = \alpha_{l,l} B_l - \beta_{l,l} A_l \tag{165}$$

oder mit Berücksichtigung von (164):

$$\omega \sum_{h=1}^{h=n} [k_h (a_{h,l}^2 + b_{h,l}^2)] = b_{l,l}\,. \tag{166}$$

Ebenso kann man aus der Determinante (156) und den Beziehungen (163) und (166) ableiten:

$$\omega \sum_{h=1}^{h=n} [k_h (a_{h,l} a_{h,i} + b_{h,l} b_{h,i})] = b_{l,i}\,, \tag{167}$$

in welcher Gleichung l und i zwei beliebig wählbare Zahlen der Reihe 1 bis n bedeuten, so daß Gl. (166) sich auch aus (167) für $i = l$ ergibt.

Endlich erhält man noch die Beziehung:

$$\sum_{h=1}^{h=n} [k_h (a_{h,l} b_{h,i} - b_{h,l} a_{h,i})] = 0 \tag{168}$$

die für $l = i$ identisch erfüllt ist.

Zwischen dem erregenden harmonischen Moment M_l, dessen Komponenten A_l und B_l sind und dem von diesem Moment allein erzeugten Ausschlag $\gamma_{h,l}$ der h-ten Masse, dessen Komponenten wir in Gl. (164) mit $\alpha_{h,l}$ und $\beta_{h,l}$ bezeichneten, besteht ein Phasenunterschied, den wir mit $\psi_{h,l}$ bezeichnen wollen. Verstehen wir unter $\psi_{h,l}$ den Winkel, um den die Richtung von M_l gedreht werden muß, um in die Richtung von $\gamma_{h,l}$ zu kommen, so ist, wenn δ_l den Phasenwinkel von M_l, $\varepsilon_{h,l}$ den Phasenwinkel von $\gamma_{h,l}$ bedeutet, gemäß Gl. (164):

$$\operatorname{tg} \psi_{h,l} = \operatorname{tg} (\varepsilon_{h,l} - \delta_l) = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon_{h,l} - \operatorname{tg} \delta_l}{1 + \operatorname{tg} \varepsilon_{h,l} \operatorname{tg} \delta_l}$$

$$= \frac{\dfrac{\beta_{h,l}}{\alpha_{h,l}} - \dfrac{B_l}{A_l}}{1 + \dfrac{\beta_{h,l}}{\alpha_{h,l}} \cdot \dfrac{B_l}{A_l}} = \frac{\dfrac{a_{h,l} B_l - b_{h,l} A_l}{a_{h,l} A_l + b_{h,l} B_l} - \dfrac{B_l}{A_l}}{1 + \dfrac{a_{h,l} B_l - b_{h,l} A_l}{a_{h,l} A_l + b_{h,l} B_l} \cdot \dfrac{B_l}{A_l}} = -\frac{b_{h,l}}{a_{h,l}}\,. \tag{169}$$

Wegen des Gesetzes von der Gegenseitigkeit der Ausschläge Gl. (161) gilt aber auch:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{l,h} &= a_{h,l}\, A_h + b_{h,l}\, B_h \\ \beta_{l,h} &= a_{h,l}\, B_h - b_{h,l}\, A_h \end{aligned}\right\} \tag{170}$$

und damit auch:

$$\operatorname{tg} \psi_{l,h} = -\frac{b_{h,l}}{a_{h,l}} = \operatorname{tg} \psi_{h,l}. \tag{171}$$

Daraus folgt: Die Teilausschläge $\gamma_{h,l}$ und $\gamma_{l,h}$ haben gegen ihr erregendes Moment M_l, bzw. M_h nicht nur gleiche relative Größe (das Moment selbst ist mit ein Faktor des erzeugten Ausschlages), sondern auch gleichen Phasenwinkel.

Der Gesamtausschlag $\gamma_h = \sqrt{\alpha_h^2 + \beta_h^2}$, der unter gleichzeitiger Wirkung aller erregenden Momente zustande kommt, hat natürlich den Phasenwinkel ε_h, für welchen gilt:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_h = \frac{\beta_h}{\alpha_h} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{l=n} (a_{h,l}\, B_l - b_{h,l}\, A_l)}{\sum\limits_{l=1}^{l=n} (a_{h,l}\, A_l + b_{h,l}\, B_l)}$$

Für praktische Berechnungen ist die schrittweise Lösung der Gl. (155) wieder viel bequemer, indem wir den Ausschlag einer beliebigen Masse durch die Ausschläge aller vorausgehenden Massen ausdrücken. Man findet aus Gl. (155), indem man nacheinander $h = 1, 2 \ldots n$ setzt:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_1 - (m_1 \omega^2 \alpha_1 + k_1 \omega \beta_1 + A_1) : c_{1,2} \\ \alpha_3 &= \alpha_2 - ((m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2)\, \omega^2 + (k_1 \beta_1 + k_2 \beta_2)\, \omega + A_1 + A_2) : c_{2,3} \\ &\;\;\vdots \\ \alpha_{h+1} &= \alpha_h - \left(\omega^2 \sum_{i=1}^{i=h} (m_i \alpha_i) + \omega \sum_{i=1}^{i=h} (k_i \beta_i) + \sum_{i=1}^{i=h} A_i\right) : c_{h,h+1} \\ &\;\;\vdots \\ \alpha_n &= \alpha_{n-1} - \sum_{i=1}^{i=n-1} (\omega^2 m_i \alpha_i + \omega k_i \beta_i + A_i) : c_{n-1,n} \end{aligned}\right\} \tag{172}$$

Um die entsprechenden Gleichungen für die Ausschläge β zu erhalten, braucht man nur in den Gl. (172) α durch β, A durch B, β durch $-\alpha$ zu ersetzen.

Vergleicht man Gl. (172) mit der für die ungedämpften Schwingungen abgeleiteten Gl. (56), so erkennt man, daß der Unterschied nur in dem Hinzutreten der Dämpfungsglieder besteht. Die Berechnung der gedämpften erzwungenen Schwingung ist also grundsätzlich von der der ungedämpften nicht verschieden.

Wir wollen die Anwendung wieder an Beispielen zeigen:

1) System mit 5 Massen:

$$m_1 = 1\,m, \qquad m_2 = 2\,m, \qquad m_3 = 3\,m, \qquad m_4 = 4\,m, \qquad m_5 = 5\,m;$$

$$k_1 = 0{,}1\sqrt{\frac{mGJ}{l}}, \quad k_2 = 0{,}2\sqrt{\frac{mGJ}{l}}, \quad k_3 = 0{,}3\sqrt{\frac{mGJ}{l}}, \quad k_4 = 0{,}2\sqrt{\frac{mGJ}{l}},$$

$$k_5 = 0{,}2\sqrt{\frac{mGJ}{l}}$$

$$l_{1.2} = 3\,l, \qquad l_{2,3} = 2\,l, \qquad l_{3.4} = 1\,l, \qquad l_{4,5} = 0{,}5\,l;$$

$$\omega^2 = 0{,}25\frac{GJ}{lm}; \qquad \omega = 0{,}5\sqrt{\frac{GJ}{lm}}.$$

Um die Richtigkeit der abgeleiteten Beziehungen zu erweisen, wollen wir an jeder Masse ein harmonisches Moment annehmen und die Ausschläge für jedes einzeln berechnen, um die Einflußzahlen $a_{h,l}$ und $b_{h,l}$ zu erhalten. Indem wir zunächst nur A_5 und B_5 wirkend denken, erhalten wir gemäß Gl. (172) die nachstehende Berechnung:

Zahlentafel 21a.

$$\omega^2 = 0{,}25\frac{GJ}{lm}; \; \omega = 0{,}5\sqrt{\frac{GJ}{lm}}.$$

Reihe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	m	$m\omega^2$	$k\omega$	α	$m\omega^2\alpha$	$k\omega\beta$	A	Σ	l	$\frac{\Sigma}{c}$
	$m\cdot$	$\frac{GJ}{l}\cdot$	$\frac{GJ}{l}\cdot$		$\frac{GJ}{l}$	$\frac{GJ}{l}$	$\frac{GJ}{l}$	$\frac{GJ}{l}$	l	
Zeile 1	1	0,25	0,05	α_1	$0{,}25\alpha_1$	 $+0{,}05\beta_1$	0	$0{,}25\alpha_1$ $+0{,}05\beta_1$	3	$0{,}75\alpha_1$ $+0{,}15\beta_1$
„ 2	2	0,50	0,10	$0{,}25\alpha_1$ $-0{,}15\beta_1$	$0{,}125\alpha_1$ $-0{,}075\beta_1$	$+0{,}015\alpha_1$ $+0{,}025\beta_1$	0	$0{,}390\alpha_1$ $0\beta_1$	2	$0{,}780\alpha_1$ $0\beta_1$
„ 3	3	0,75	0,15	$-0{,}53\alpha_1$ $-0{,}15\beta_1$	$-0{,}3975\alpha_4$ $-0{,}1125\beta_1$	$+0{,}0225\alpha_1$ $-0{,}0795\beta_1$	0	$+0{,}015\alpha_1$ $-0{,}192\beta_1$	1	$0{,}015\alpha_1$ $-0{,}192\beta_1$
„ 4	4	1,00	0,10	$-0{,}545\alpha_1$ $+0{,}042\beta_1$	$-0{,}545\alpha_1$ $+0{,}042\beta_1$	$-0{,}0042\alpha_1$ $-0{,}0545\beta_1$	0	$-0{,}5342\alpha_1$ $-0{,}2045\beta_1$	0,5	$-0{,}2671\alpha_1$ $-0{,}10225\beta_1$
„ 5	5	1,25	0,10	$-0{,}2779\alpha_1$ $+0{,}14425\beta_1$	$-0{,}347375\alpha_1$ $+0{,}1803125\beta_1$	$-0{,}014425\alpha_1$ $-0{,}02779\beta_1$	A_5	$-0{,}896\alpha_1$ $-0{,}0519775\beta_1$ $+A_5$		

Die Entstehung der Zahlentafel ist wohl für sich klar. Jedem Wert der Reihe 4: $\alpha_h = a_h\alpha_1 + b_h\beta_1$ entspricht ein Wert $\beta_h = a_h\beta_1 - b_h\alpha_1$ der andern Phase. Man erhält in der 4. Reihe den Wert α_{h+1} (in der $(h+1)$-ten Zeile), wenn man von dem Wert α_h (4. Reihe, h-te Zeile) den Wert $\frac{\Sigma}{c}$ in der 10. Reihe, h-te Zeile subtrahiert, und man findet den Wert Σ der 8. Reihe, $(h+1)$-te Zeile, wenn man zu dem Wert Σ (8. Reihe, h-te Zeile) die Summe der in der $(h+1)$-ten Zeile berechneten Werte $m\omega^2\alpha + k\omega\beta + A$ der Reihen 5, 6 und 7 addiert, wie es die Gl. (172) verlangen.

Ebenso berechnen wir die Zahlentafeln für die übrigen erregenden Momente. Da aber, wie man leicht erkennt, die mit α_1 und β_1 multiplizierten Anteile der Ausschläge von den Momenten nicht beeinflußt werden, so brauchen wir nur die von den Momenten herrührenden Anteile für sich zu berechnen. Solche Anteile ergeben sich natürlich nur für diejenigen Massen, die in der für die Berechnung gewählten Aufeinanderfolge der Massen **nach** dem erregenden Moment folgen. Jedem Phasenausschlag $\alpha_h = p_h A_l + q_h B_l$ entspricht der gleichzeitige Phasenausschlag $\beta_h = p_h B_l - q_h A_l$. Auf diese Weise erhält man die nachstehenden

Zahlentafeln 21 b, c, d, e.

m	$m\omega^2$	$k\omega$	α	$m\omega^2\alpha$	$k\omega\beta$	A	Σ	l	$\frac{\Sigma}{c}$
			b) A_4, B_4 allein wirkend:						
4	—	—	0	—	—	A_4	A_4	0,5	0,5 A_4
5	1,25	0,10	—0,5 A_4	—0,625 A_4		0	0,375 A_4		
					—0,05 B_4		—0,05 B_4		
			c) A_3, B_3 allein wirkend:						
3			0	—	—	A_3	A_3	1	1 · A_3
4	1,00	0,10	—1 · A_3	—1,0 A_3		0	0 · A_3	0,5	0 · A_3
					—0,1 B_3		—0,1 B_3		—0,05 B_3
5	1,25	0,10	—1 A_3	—1,25 A_3	—0,005 A_3	0	—1,255 A_3		
			+0,05 B_3	+0,0625 B_3	—0,1 B_3		—0,1375 B_3		
			d) A_2, B_2 allein wirkend:						
2			0	—	—	A_2	A_2	2	2 A_2
3	0,75	0,15	—2 A_2	—1,5 A_2		0	—0,5 A_2	1	—0,5 A_2
					—0,30 B_2		—0,3 B_2		—0,3 B_2
4	1,00	0,10	—1,5 A_2	—1,5 A_2	—0,03 A_2	0	—2,03 A_2	0,5	—1,015 A_2
			+0,3 B_2	+0,3 B_2	—0,15 B_2		—0,15 B_2		—0,075 B_2
5	1,25	0,10	—0,485 A_2	—0,60625 A_2	—0,0375 A_2	0	—2,67375 A_2		
			+0,375 B_2	+0,46875 B_2	—0,0485 B_2		+0,27025 B_2		
			e) A_1, B_1 allein wirkend:						
1			0	—	—	A_1	A_1	3	3 A_1
2	0,50	0,10	—3 A_1	—1,5 A_1		0	—0,5 A_1	2	—1 A_1
					—0,3 B_1		—0,3 B_1		—0,6 B_1
3	0,75	0,15	—2 A_1	—1,5 A_1	—0,09 A_1	0	—2,09 A_1	1	—2,09 A_1
			+0,6 B_1	+0,45 B_1	—0,3 B_1		—0,15 B_1		—0,15 B_1
4	1,00	0,10	+0,09 A_1	+0,09 A_1	—0,075 A_1	0	—2,075 A_1	0,5	—1,0375 A_1
			+0,75 B_1	+0,75 B_1	+0,009 B_1		+0,609 B_1		+0,3045 B_1
5	1,25	0,10	1,1275 A_1	1,409375 A_1	—0,04455 A_1	0	—0,71075 A_1		
			+0,4455 B_1	+0,556875 B_1	+0,11275 B_1		+1,278625 B_1		

Zahlen-

	A_1	B_1	A_2	B_2	A_3
α_1	— 0,707442	+ 1,468076	— 2,956649	+ 0,473135	— 1,404844
α_2	— 2,956649	+ 0,473135	— 0,668192	+ 0,561781	— 0,362006
α_3	— 1,404844	— 0,071964	— 0,362006	+ 0,192736	+ 0,733773
α_4	+ 0,413897	— 0,079814	+ 0,091502	— 0,082038	— 0,231337
α_5	+ 1,112328	— 0,064527	+ 0,268403	— 0,182981	0,599213

Da für das freie Wellenende die Summe aller Momente (Reihe 8, letzte Zeile) verschwinden muß, so liefern die Zahlentafeln 21 a bis e die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &-0{,}896\,\alpha_1 - 0{,}0519775\,\beta_1 - 0{,}71075\,A_1 + 1{,}278625\,B_1 - 2{,}67375\,A_2 \\ &+ 0{,}27025\,B_2 - 1{,}255\,A_3 - 0{,}1375\,B_3 + 0{,}375\,A_4 - 0{,}05\,B_4 + 1\cdot A_5 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (173\,\text{a})$$

Für die Phase b lautet die entsprechende Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &-0{,}896\,\beta_1 + 0{,}0519775\,\alpha_1 - 0{,}71075\,B_1 - 1{,}278625\,A_1 - 2{,}67375\,B_2 \\ &- 0{,}27025\,A_2 - 1{,}255\,B_3 + 0{,}1375\,A_3 + 0{,}375\,B_4 + 0{,}05\,A_4 + 1\cdot B_5 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (173\,\text{b})$$

Die Gleichungen (173 a und b) dienen zur Berechnung der unbekannten Ausschläge α_1 und β_1 und ergeben:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 = &-0{,}707442\,A_1 + 1{,}468076\,B_1 - 2{,}956649\,A_2 + 0{,}473135\,B_2 - 1{,}404844\,A_3 \\ &- 0{,}071964\,B_3 + 0{,}413897\,A_4 - 0{,}079814\,B_4 + 1{,}112328\,A_5 - 0{,}064527\,B_5 \end{aligned}\right\} \quad (174\,\text{a})$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 = &-0{,}707442\,B_1 - 1{,}468076\,A_1 - 2{,}956649\,B_2 - 0{,}473135\,A_2 - 1{,}404844\,B_3 \\ &+ 0{,}071964\,A_3 + 0{,}413897\,B_4 + 0{,}079814\,A_4 + 1{,}112328\,B_5 + 0{,}064527\,A_5 \end{aligned}\right\} \quad (174\,\text{b})$$

Mit den Ausschlägen α_1 und β_1 sind aber auch die Ausschläge aller übrigen Massen aus den Zahlentafeln 21 a bis e berechenbar; z. B. für die Masse m_5:

$$\begin{aligned} \alpha_5 = &-0{,}2779\,\alpha_1 + 0{,}14425\,\beta_1 + 1{,}1275\,A_1 + 0{,}4455\,B_1 - 0{,}485\,A_2 + 0{,}375\,B_2 \\ &- 1\cdot A_3 + 0{,}05\,B_3 - 0{,}5\,A_4\,. \end{aligned}$$

Um β_5 zu erhalten, hat man nur α durch β, β durch $-\alpha$, A durch B und B durch $-A$ zu ersetzen.

Die Beizahlen der fertig berechneten Ausschläge α sind in Zahlentafel 22 zusammengestellt.

Man erkennt aus der Zahlentafel 22 das Gesetz von der Gegenseitigkeit der Ausschläge, Gl. (161). Die Erfüllung der Bedingungen (166), (167) und (168) wollen wir an je einem Beispiel zeigen:

Gl. (166) für $l = 4$:

$$\begin{aligned} &0{,}5\cdot[0{,}1\cdot(0{,}413897^2 + (-0{,}079814)^2) + 0{,}2(0{,}091502^2 + (-0{,}082038)^2) \\ &+ 0{,}3\cdot((-0{,}231337)^2 + (-0{,}019783)^2) + 0{,}2((-0{,}222222)^2 + 0{,}060882^2) \\ &+ 0{,}2((-0{,}603509)^2 + 0{,}081885^2)] = 0{,}5\cdot[0{,}1\cdot 0{,}177681 + 0{,}2\cdot 0{,}015103 \\ &+ 0{,}3\cdot 0{,}053908 + 0{,}2\cdot 0{,}053089 + 0{,}2\cdot 0{,}370928] = 0{,}060882 = b_{4,4}\,. \end{aligned}$$

Gl. (167) für $l = 2$, $i = 3$:

$$\begin{aligned} &0{,}5\cdot[0{,}1\cdot(-2{,}956649\cdot -1{,}404844 + 0{,}473135\cdot -0{,}071964) + 0{,}2(-0{,}668192 \\ &\cdot -0{,}362006 + 0{,}561781\cdot 0{,}192736) + 0{,}3\cdot(-0{,}362006\cdot 0{,}733773 + 0{,}192736 \\ &\cdot 0{,}248868) + 0{,}2(0{,}091502\cdot -0{,}231337 + -0{,}082038\cdot -0{,}019783) \\ &+ 0{,}2(0{,}268403\cdot -0{,}599213 + -0{,}182981\cdot -0{,}132650)] = 0{,}5[0{,}1\cdot(4{,}153631 \\ &- 0{,}034049) + 0{,}2(0{,}241889 + 0{,}108275) + 0{,}3(-0{,}265630 + 0{,}047966) \\ &+ 0{,}2(-0{,}021168 + 0{,}001623) + 0{,}2(-0{,}160831 + 0{,}024273)] = 0{,}5\cdot[0{,}411958 \\ &+ 0{,}070033 - 0{,}065299 - 0{,}003909 - 0{,}027312] = 0{,}192736 = b_{2,3}\,. \end{aligned}$$

tafel 22.

B_3	A_4	B_4	A_5	B_5
— 0,071964	+ 0,413897	— 0,079814	+ 1,112328	— 0,064527
+ 0,192736	+ 0,091502	— 0,082038	+ 0,268403	— 0,182981
+ 0,248868	— 0,231337	— 0,019783	— 0,599213	— 0,132650
— 0,019783	— 0,222222	+ 0,060882	— 0,603509	+ 0,081885
— 0,132650	— 0,603509	+ 0,081885	— 0,299808	+ 0,178385

Gl. (168) für $l = 1$, $i = 2$:

$$0{,}1 \cdot (-0{,}707442 \cdot 0{,}473135 - 1{,}468076 \cdot -2{,}956649) + 0{,}2 \cdot (-2{,}956649 \cdot 0{,}561781 - 0{,}473135 \cdot -0{,}668192) + 0{,}3 \cdot (-1{,}404844 \cdot 0{,}192736 + 0{,}071964 \cdot -0{,}362006) + 0{,}2 \cdot (0{,}413897 \cdot -0{,}082038 + 0{,}079814 \cdot 0{,}091502) + 0{,}2\,(1{,}112328 \cdot -0{,}182981 + 0{,}064527 \cdot 0{,}268403) = 0{,}1 \cdot (-0{,}334716 + 4{,}340585) + 0{,}2\,(-1{,}660989 + 0{,}316145) + 0{,}3 \cdot (-0{,}270764 - 0{,}026051) + 0{,}2\,(-0{,}033955 + 0{,}007303) + 0{,}2 \cdot (-0{,}203535 + 0{,}017319) = 0{,}4005869 - 0{,}2689688 - 0{,}0890445 - 0{,}0053304 - 0{,}0372432 = 0{,}000000 = 0\,.$$

2. Wir können jetzt die Aufgabe lösen, die erzwungenen Ausschläge eines Massensystems bei Resonanz zu berechnen, für die wir als Beispiel die Sechszylinderviertaktmaschine wählen. Für die Eigenschwingung ersten Grades haben wir gemäß den Zahlentafeln 4 und 20 den Wert $\omega_0^2 = 49\,840$ gefunden. An jeder der 6 Arbeitskurbeln wirke ein harmonisches Moment gleicher Größe und gleicher Phase mit den Komponenten A und B; an jeder der beiden Luftpumpenkurbeln ein harmonisches Moment gleicher Größe und gleicher Phase mit den Phasen A' und B'. Die Dämpfungszahlen $k\omega$ sind in der nachstehenden Zahlentafel 23a zusammengestellt; sie entsprechen des Vergleiches wegen genau den in Zahlentafel 20 angegebenen Werten k. Wir trennen die Berechnung wieder in den nur vom Ausschlag der ersten Masse herrührenden Teil (Tafel 23a) und in den von den Momenten erzeugten Teil (Tafel 23b). Gemäß den Gl. (172) erhalten wir die Zahlentafeln 23a S. 137 und 23b S. 138.

Die Zahlentafeln 23a und b liefern für das freie Wellenende die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &-11064\alpha_1 - 1229609\beta_1 + 5{,}1421727A - 0{,}0317708B + 1{,}9951406A' \\ &-0{,}0002009B' = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (175\text{a})$$

Für die Phase B ist die entsprechende Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &-11064\beta_1 + 1229609\alpha_1 + 5{,}1421727B + 0{,}0317708A + 1{,}9951406B' \\ &+0{,}0002009A' = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (175\text{b})$$

Die Auflösung der Gl. (175a) und (175b) ergibt:

$$10^6\alpha_1 = 0{,}0117901A - 4{,}1818515B + 0{,}0144354A' - 1{,}6224514B' \qquad (176\text{a})$$

$$10^6\beta_1 = 0{,}0117901B + 4{,}1818515A + 0{,}0144354B' + 1{,}6224514A' \qquad (176\text{b})$$

Die Wahl der Phasen steht uns wieder frei. Da es uns hier nicht darauf ankommt, die Phasen für einen bestimmten Zeitpunkt, etwa für den Zündtotpunkt eines gewählten Arbeitszylinders zu bestimmen, welche Aufgabe wir schon für sich behandelt haben, so wählen wir am einfachsten die Phasen nach den harmonischen Momenten der Arbeitszylinder, deren Amplitude mit 4500 kgcm gegeben sei. Wir setzen also $A = 4500$, $B = 0$. Die Amplitude des harmonischen Moments der Luftpumpen ist demgegenüber nur klein und seine Phasen für die gewählte Zerlegung seien $A' = -500$, $B' \backsim 0$. Mit diesen Zahlenwerten liefern die Gl. (176a) und (176b):

$$\alpha_1 = 45{,}838 \cdot 10^{-6}$$

$$\beta_1 = 18007{,}106 \cdot 10^{-6}\,.$$

Damit sind nach den Tafeln 23a und b die Ausschläge aller Massen berechenbar. Sie sind in Zahlentafel 23c (S. 139) zusammengestellt.

Die höchste Drehbeanspruchung der Welle ergibt sich für den Wellenteil zwischen den Massen 1 und 2, für welchen der Verdrehungswinkel wird:

$$\gamma_{1\,2} = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2}$$

$$= 10^{-6} \cdot \sqrt{(45{,}84 + 116{,}87)^2 + (18007{,}11 + 10029{,}75)^2} = 28037 \cdot 10^{-6}\,.$$

Zahlentafel 23a.

$\omega_0^2 = 49840, \quad \omega_0 = 223{,}25, \quad GJ_0 = 10^{10}.$

m	$m\,\omega^2$	$k\,\omega$	α	$m\,\omega^2\,\alpha$	$k\,\omega\,\beta$	A	Σ	l	$\dfrac{l\cdot\Sigma}{GJ_0}$
2200	109648000	357200	α_1	$109648000\,\alpha_1$		0	$109648000\,\alpha_1$	142	$1{,}5570016\,\alpha_1$
					$357200\,\beta_1$		$+\ 357200\,\beta_1$		$+\ 0{,}0050722\,\beta_1$
3000	149520000	22325	$-0{,}5770016\,\alpha_1$	$-83282879\,\alpha_1$	$+\ 113\,\alpha_1$	0	$26365234\,\alpha_1$	57,5	$0{,}1516001\,\alpha_1$
			$-0{,}0050722\,\beta_1$	$-\ 758395\,\beta_1$	$-\ 12435\,\beta_1$		$-\ 413630\,\beta_1$		$-0{,}0023784\,\beta_1$
93	4635120	178600	$-0{,}7086017\,\alpha_1$	$-\ 3284454\,\alpha_1$	$+\ 481\,\alpha_1$	0	$23081261\,\alpha_1$	48,5	$0{,}1119441\,\alpha_1$
			$-0{,}0026938\,\beta_1$	$-\ 12486\,\beta_1$	$-126556\,\beta_1$		$-\ 552672\,\beta_1$		$-0{,}0026805\,\beta_1$
93	4635120	178600	$-0{,}8205458\,\alpha_1$	$-\ 3803328\,\alpha_1$	$+\ 2\,\alpha_1$	0	$19277935\,\alpha_1$	48,5	$0{,}0934980\,\alpha_1$
			$-0{,}0000133\,\beta_1$	$-\ 62\,\beta_1$	$-146549\,\beta_1$		$-\ 699283\,\beta_1$		$-0{,}0033915\,\beta_1$
93	4635120	178600	$-0{,}9140438\,\alpha_1$	$-\ 4236703\,\alpha_1$	$-\ 603\,\alpha_1$	0	$15040629\,\alpha_1$	48,5	$0{,}0729471\,\alpha_1$
			$+0{,}0033782\,\beta_1$	$+\ 15658\,\beta_1$	$-163248\,\beta_1$		$-\ 846873\,\beta_1$		$-0{,}0041073\,\beta_1$
93	4635120	178600	$-0{,}9869909\,\alpha_1$	$-\ 4574821\,\alpha_1$	$-\ 1337\,\alpha_1$	0	$10464471\,\alpha_1$	48,5	$0{,}0507527\,\alpha_1$
			$+0{,}0074855\,\beta_1$	$+\ 34696\,\beta_1$	$-176277\,\beta_1$		$-\ 988454\,\beta_1$		$-0{,}0047940\,\beta_1$
93	4635120	178600	$-1{,}0377436\,\alpha_1$	$-\ 4810066\,\alpha_1$	$-\ 2193\,\alpha_1$	0	$5652212\,\alpha_1$	48,5	$0{,}0274132\,\alpha_1$
			$+0{,}0122795\,\beta_1$	$+\ 56917\,\beta_1$	$-185341\,\beta_1$		$-1116878\,\beta_1$		$-0{,}0054169\,\beta_1$
93	4635120	178600	$-1{,}0651568\,\alpha_1$	$-\ 4937130\,\alpha_1$	$-\ 3161\,\alpha_1$	0	$711921\,\alpha_1$	77	$0{,}0054818\,\alpha_1$
			$+0{,}0176964\,\beta_1$	$+\ 82025\,\beta_1$	$-190237\,\beta_1$		$-1225090\,\beta_1$		$-0{,}0094332\,\beta_1$
7	348880	13395	$-1{,}0706386\,\alpha_1$	$-\ 373524\,\alpha_1$	$-\ 363\,\alpha_1$	0	$338034\,\alpha_1$	150	$0{,}0050705\,\alpha_1$
			$+0{,}0271296\,\beta_1$	$+\ 9465\,\beta_1$	$-\ 14341\,\beta_1$		$-1229966\,\beta_1$		$-0{,}0184495\,\beta_1$
6,5	323960	13395	$-1{,}0757091\,\alpha_1$	$-\ 348487\,\alpha_1$	$-\ 611\,\alpha_1$	0	$-\ 11064\,\alpha_1$		
			$+0{,}0455791\,\beta_1$	$+\ 14766\,\beta_1$	$-\ 14409\,\beta_1$		$-1229609\,\beta_1$		

Zahlentafel 23b.

(Die Werte $m\omega^2$ und $k\omega$ siehe Zahlentafel 23a.)

m	α	$m\omega^2\alpha$	$k\omega\beta$	A	Σ	l	$\frac{l\Sigma}{GJ}$
2200	—	—	—	—	—	142	—
3000	—	—	—	—	—	57,5	—
93	—	—	—	A	1,0000000 A	48,5	48,5 $\cdot 10^{-10}$ A
93	— 48,5 $\cdot 10^{-10}$ A	— 0,0224803 A		A	1,9775197 A	48,5	95,91 $\cdot 10^{-10}$ A
			— 0,0008662 B		— 0,0008662 B		— 0,04 $\cdot 10^{-10}$ B
93	— 144,41 $\cdot 10^{-10}$ A	— 0,0669358 A	— 0,0000007 A	A	2,9105832 A	48,5	141,16 $\cdot 10^{-10}$ A
	+ 0,04 $\cdot 10^{-10}$ B	+ 0,0000185 B	— 0,0025792 B		— 0,0034269 B		— 0,17 $\cdot 10^{-10}$ B
93	— 285,57 $\cdot 10^{-10}$ A	— 0,1323651 A	— 0,0000038 A	A	3,7782143 A	48,5	183,24 $\cdot 10^{-10}$ A
	+ 0,21 $\cdot 10^{-10}$ B	+ 0,0000973 B	— 0,0051003 B		— 0,0084299 B		— 0,41 $\cdot 10^{-10}$ B
93	— 468,81 $\cdot 10^{-10}$ A	— 0,2172991 A	— 0,0000111 A	A	4,5609041 A	48,5	221,20 $\cdot 10^{-10}$ A
	+ 0,62 $\cdot 10^{-10}$ B	+ 0,0002874 B	— 0,0083729 B		— 0,0165154 B		— 0,80 $\cdot 10^{-10}$ B
93	— 690,01 $\cdot 10^{-10}$ A	— 0,3198279 A	— 0,0000254 A	A	5,2410508 A	77	403,56 $\cdot 10^{-10}$ A
	+ 1,42 $\cdot 10^{-10}$ B	+ 0,0006582 B	— 0,0123236 B		— 0,0281808 B		— 2,17 $\cdot 10^{-10}$ B
7	— 1093,57 $\cdot 10^{-10}$ A	— 0,0381525 A	— 0,0000048 A	A'	5,2028935 A	150	780,43 $\cdot 10^{-10}$ A
	+ 3,59 $\cdot 10^{-10}$ B	+ 0,0001252 B	— 0,0014648 B		— 0,0295204 B		— 4,43 $\cdot 10^{-10}$ B
					+ 1,0000000 A'		+ 150,00 $\cdot 10^{-10}$ A'
6,5	— 1874,00 $\cdot 10^{-10}$ A	— 0,0607101 A	— 0,0000107 A	A'	5,1421727 A		
	+ 8,02 $\cdot 10^{-10}$ B	+ 0,0002598 B	— 0,0025102 B		— 0,0317708 B		
	— 150,00 $\cdot 10^{-10}$ A'	— 0,0048594 A'	— 0 A'		+ 1,9951406 A'		
			— 0,0002009 B'		— 0,0002009 B'		

Wenn also die von der Resonanz erzeugte Drehspannung 1500 kg/cm² nicht überschreiten soll, muß der schwächste Wellenquerschnitt zwischen den beiden Massen noch ein Widerstandsmoment

$$W_d = \frac{0{,}028037 \cdot 10^{10}}{142 \cdot 1500} = 1317 \text{ cm}^3$$

besitzen. Die Tafel 23c enthält auch die Werte $\alpha^2 + \beta^2$ für alle Massen. Daraus findet sich die Dämpfungsarbeit für eine volle Schwingung:

$$\pi \sum [k\omega(\alpha^2 + \beta^2)] = \pi \cdot (115{,}825 + 2{,}246 + 300{,}962 + 10{,}009) = 429{,}042\,\pi\,.$$

Derselbe Wert muß sich aus der Arbeit der erregenden Momente ergeben, nämlich:

$$\pi \sum (\alpha B - \beta A) = \pi(448{,}369 - 19{,}329) = 429{,}040\,\pi\,.$$

Die durch die Dämpfung in Wärme verwandelte Leistung beträgt, da $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ die Anzahl der Schwingungen in der Sekunde ist, in Pferdestärken:

$$N = 429{,}04\,\pi \cdot \frac{223{,}25}{2\pi \cdot 7500} = 6{,}4 \text{ PS.}$$

Von besonderem Interesse ist es, den Einfluß der Größe der Dämpfungszahlen zu kennen. Zu diesem Zweck habe ich die eben gezeigte Berechnung noch einmal mit 10 mal vergrößerten Dämpfungsfaktoren durchgeführt und will, um an Zahlentafeln zu sparen, nur das Ergebnis hier anführen: Die den harmonischen Momenten entgegengesetzte Phase (β) der Ausschläge wird bei 10mal größerer Dämpfung im wesentlichen 10mal kleiner; dies gilt, da die Phase β auch hier weitaus überwiegt, auch von den Gesamtausschlägen. Dementsprechend wird auch die Dämpfungsarbeit der 10mal größeren Dämpfung nur $\frac{1}{10}$ mal so groß als die der einfachen. Dabei

Zahlentafel 23c.

Anteile:	Ausschläge $10^6\alpha$			Ausschläge $10^6\beta$			$10^6\alpha$	$10^6\beta$	$10^{+10}(\alpha^2+\beta^2)$
m	(α_1)	(β_1)	(A)	(β_1)	(α_1)	(A)			
2200	45,838			18007,106			45,838	18007,106	3242579
3000	—25,532	— 91,336		—10029,987	+0,233		—116,868	—10029,754	1006096
93	—32,481	— 48,508		—12759,866	+0,123		— 80,989	—12759,743	1628175
93	—37,612	— 0,240	— 21,825	—14775,655	+0,001		— 59,677	—14775,654	2183234
93	—41,898	+ 60,832	— 64,985	—16459,284	—0,155	—0,018	— 46,051	—16459,457	2709159
93	—45,242	+134,792	—128,507	—17772,850	—0,343	—0,095	— 38,957	—17773,288	3158914
93	—47,568	+221,118	—210,965	—18686,759	—0,563	—0,279	— 37,415	—18687,601	3492278
93	—48,825	+318,661	—310,505	—19180,391	—0,811	—0,639	— 40,669	—19181,841	3679446
7	—49,076	+488,526	—492,107	—19279,103	—1,244	—1,616	— 52,657	—19281,963	3717968
6,5	—49,308	+820,748	—843,300	—19370,407	—2,089	—3,609	— 64,360	—19376,105	3754376
			+ 7,500						

ist es wesentlich, im Auge zu behalten, daß dieses Verhalten der Dämpfung nur bei oder in unmittelbarer Nähe der Resonanz zutrifft. Untersucht man den Einfluß der Größe der Dämpfungszahlen für Periodenzahlen, die nicht in der Nähe der Resonanz liegen, so findet man, daß die mit den harmonischen Momenten phasengleichen Ausschläge (α) ungefähr die gleichen bleiben, während die Ausschläge der andern Phase (β) für die 10 mal größere Dämpfung etwa 10 mal größer werden, so daß auch die Dämpfungsarbeit außerhalb der Resonanz annähernd proportional der Größe der Dämpffaktoren wächst. Dabei sind die Ausschläge α von überragender Größe, so daß sich auch die Gesamtausschläge mit Vergrößerung der Dämpfung nur unwesentlich ändern.

22. Teilschwingungen mit äußerer Dämpfung.

Ebenso wie für die ungedämpfte Schwingung kann man auch für die gedämpfte Schwingung Teilschwingungen durch ein Zusatzmoment oder durch eine Zusatzmasse erzielen.

Um bei Resonanz die Teilschwingung zu erhalten, bei der die drei ersten Massen unserer 6-Zylinder-Viertaktmaschine in Ruhe bleiben, ist ein Zusatzmoment am Luftpumpenwellenende erforderlich, dessen Phasen A_0 und B_0 sich ohne weiters aus Zahlentafel 23b ergeben mittels der Gleichungen für das Wellenende:

$$\left.\begin{aligned} 5{,}1421727\,A - 0{,}0317708\,B + 1{,}9951406\,A' - 0{,}0002009\,B' + A_0 = 0 \\ 5{,}1421727\,B + 0{,}0317708\,A + 1{,}9951406\,B' + 0{,}0002009\,A' + B_0 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (177)$$

Man findet für $A = 4500$, $A' = -500$, $B = B' = 0$:

$$A_0 = -22\,142 \text{ kgcm}; \qquad B_0 = -143 \text{ kgcm}.$$

Die Ausschläge der Teilschwingung ergeben sich als die von den Momenten herrührenden Anteile der Zahlentafel 23c. Sie sind in der Zahlentafel 23d nochmals zusammengestellt und zeigen die weitgehende Verbesserung des Resonanzzustandes durch das Zusatzmoment aufs deutlichste. Der größte Schwingungsausschlag mit Zusatzmoment (Luftpumpenende) beträgt etwa $^1/_{23}$ des Ausschlages ohne Zusatzmoment.

Zahlentafel 23d.

Teilschwingung: $\omega^2 = 49\,840$; $GJ_0 = 10^{10}$.

m	$10^6\alpha$	$10^6\beta$	$10^{10}(\alpha^2 + \beta^2)$
2200	0	0	0
3000	0	0	0
93	0	0	0
93	− 21,825	0	4,763
93	− 64,985	−0,018	42,230
93	−128,507	−0,095	165,140
93	−210,965	−0,279	445,063
93	−310,505	−0,639	964,137
7	−492,107	−1,616	2421,719
6,5	−835,800	−3,609	6985,746

Die Tafel enthält auch die Werte $\alpha^2 + \beta^2$, so daß wir die Richtigkeit wieder mit der Dämpfarbeit prüfen können.

Man findet: $\sum[k\omega(\alpha^2 + \beta^2)] = 0{,}02896 + 0{,}01260 = 0{,}0416$. Dieser Wert muß wieder gleich sein der Summe $\sum(\alpha B - \beta A)$. Jetzt wirkt aber außer den erregenden Momenten noch das Zusatzmoment, so daß wir zur Berechnung der von ihm geleisteten Arbeit dessen Ausschläge α_0 und β_0 kennen müssen, also wissen müssen, an welcher Stelle des Wellenendes das Zusatzmoment wirkt. Wir haben aber in Zahlentafel 10 nachgewiesen, daß es auf den Ort des Zusatzmomentes am Wellenende gar nicht ankommt. Infolgedessen muß auch die von ihm geleistete Arbeit davon unabhängig sein. Dies läßt sich auch auf einfache Art beweisen: Nehmen wir das Zusatzmoment in der bezogenen Entfernung l_0 von der Endmasse (n) wirkend an und denken wir uns die Zahlentafel 23b weitergeführt, so ergibt sich wegen (177):

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha_n + \frac{l_0}{GJ_0} A_0 \\ \beta_0 &= \beta_n + \frac{l_0}{GJ_0} \cdot B_0 \end{aligned}\right\} \tag{178}$$

Folglich wird für das Zusatzmoment:

$$\alpha_0 B_0 - \beta_0 A_0 = \alpha_n B_0 - \beta_n A_0\,; \tag{179}$$

d. h. die vom Zusatzmoment geleistete Arbeit ist unabhängig von seiner Entfernung l_0 auf dem Wellenende; wir können das Zusatzmoment an der Endmasse unmittelbar wirkend denken.

Mit dieser Erkenntnis berechnet sich aus Tafel 23d:

$$\begin{aligned} \sum(\alpha B - \beta A) = 10^{-6}(&-835{,}800 \cdot -143 + 1{,}031 \cdot 4500 \\ &-5{,}225 \cdot 500 - 3{,}609 \cdot 22142) = 0{,}0416 \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit der Dämpfarbeit.

Wollte man die Teilschwingung durch eine Zusatz*masse* am Luftpumpenwellenende hervorrufen, so stünden uns für das Wellenende ebenfalls zwei Bedingungsgleichungen zur Verfügung, die wir dazu benützen könnten, das Trägheitsmoment m_0 und die bezogene Federlänge l_0 des Zusatzsystems zu berechnen. Es wird jedoch im allgemeinen sehr fraglich sein, ob die so berechneten Größen auch praktisch befriedigen. Denn im Gegensatz zum Zusatzmoment, dessen Phasen beliebig ausführbar sind und das ja erst durch seine Phasen bestimmt wird, muß eine und dieselbe Zusatzmasse beide Phasen gleichzeitig beeinflussen; die Phasen des von der Trägheit der Zusatzmasse herrührenden zusätzlichen Momentes sind nicht beliebig ausführbar, sondern im wesentlichen schon durch die Massen- und Momentenfolge des Hauptsystems mitbestimmt. Man wird also im allgemeinen nicht erwarten können, mit einer Zusatzmasse die theoretisch genaue Teilschwingung zu erzielen, bei der ein Teil der Massen mathematisch genau schwingungslos bleibt. Das ist aber praktisch auch nicht erforderlich, es genügt, wenn die theoretisch schwingungsfreien Massen nur kleine Ausschläge machen.

Da für unser Beispiel die Zusatzmasse am Wellenende, also in Reihe mit den gegebenen Massen sitzen soll, so brauchten wir zur Berechnung der Teilschwingung nur die Zahlentafel 23b einfach um eine Zeile zu ergänzen, indem wir die elastische Länge l_0 der Zusatzfeder und das Trägheitsmoment m_0 der Zusatzmasse als Unbekannte einführen. Um die Berechnung aber allgemeiner und auch für nicht in Reihe liegende Zusatzmassen anwendbar zu gestalten, denken wir uns das Zusatzsystem gesondert als Nebenstrang behandelt und erhalten, wenn wir den Dämpfungsfaktor der Zusatzmasse mit k_0, die Phasen des Einspannmomentes der Zusatzfeder mit A_0 und B_0 bezeichnen, die nachstehende Berechnung des Nebenstranges:

m	α	$m\omega^2\alpha+k\omega\beta+A$	Σ	l	$l\Sigma : GJ_0$
m_0	α_0	$m_0\omega^2\alpha_0+k_0\omega\beta_0$	$m_0\omega^2\alpha_0+k_0\omega\beta_0$	l_0	$\frac{(m_0\omega^2\alpha_0+k_0\omega\beta_0)l_0}{GJ_0}$
0	$\alpha_0-\frac{(m_0\omega^2\alpha_0+k_0\omega\beta_0)\cdot l_0}{GJ_0}$	$0+0+A_0$	$m_0\omega^2\alpha_0+k_0\omega\beta_0+A_0$		

Daraus ergibt sich für das Einspannmoment:

$$\left.\begin{aligned} -A_0 &= m_0\omega^2\alpha_0 + k_0\omega\beta_0 \\ -B_0 &= m_0\omega^2\beta_0 - k_0\omega\alpha_0 \end{aligned}\right\} \tag{180}$$

Außerdem müssen die Ausschläge des Federendes den Ausschlägen der Einspannstelle im Hauptstrang entsprechen, die wir allgemein mit α_i, β_i bezeichnen wollen, so daß sich mit $c_0 \equiv \frac{GJ_0}{l_0}$ die weiteren Bedingungen ergeben:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 - \frac{m_0\omega^2\alpha_0 + k_0\omega\beta_0}{c_0} &= \alpha_i \\ \beta_0 - \frac{m_0\omega^2\beta_0 - k_0\omega\alpha_0}{c_0} &= \beta_i \end{aligned}\right\} \tag{181}$$

wofür wir mit Rücksicht auf (180) auch schreiben können:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 + \frac{A_0}{c_0} &= \alpha_i \\ \beta_0 + \frac{B_0}{c_0} &= \beta_i \end{aligned}\right\} \tag{182}$$

Den Einspannmomenten A_0, B_0 am Federende entsprechen nach dem Grundsatz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung die

Zusatzmomente $-A_0$ und $-B_0$ an der Einspannstelle am Hauptstrang, mit deren Berücksichtigung die Berechnung des Hauptsystems zu erfolgen hat. Da hier die Einspannstelle zugleich das Hauptstrangende ist, so müssen diese zusätzlichen Momente mit den Summenmomenten A_i und B_i dieser Stelle des Hauptsystems ein Gleichgewicht ergeben, so daß:

$$\left.\begin{array}{l} A_i - A_0 = 0 \\ B_i - B_0 = 0 \end{array}\right\} \tag{183}$$

Setzt man den Dämpfungsfaktor der Zusatzmasse:

$$k_0 \equiv q \cdot m_0 \omega, \tag{184}$$

so liefern die Gl. (180) bis (184) die Beziehungen:

$$m_0 \omega^2 = \frac{q(A_i^2 + B_i^2)}{(1+q^2)\cdot(B_i\alpha_i - A_i\beta_i)} \tag{185}$$

$$c_0 = \frac{q(A_i^2 + B_i^2)}{B_i\alpha_i - A_i\beta_i + q(A_i\alpha_i + B_i\beta_i)} \tag{186}$$

An den Ergebnissen (185 und 186) erkennt man in jedem gegebenen Fall leicht, ob die Verwirklichung der reinen Teilschwingung mittels einer Zusatzmasse überhaupt möglich ist. Denn dann müssen sich $m_0\omega^2$ und c_0 als positive Größen ergeben, was auf die Bedingungen hinausläuft:

$$\left.\begin{array}{r} B_i\alpha_i - A_i\beta_i > 0 \\ B_i\alpha_i - A_i\beta_i + q(A_i\alpha_i + B_i\beta_i) > 0 \end{array}\right\} \tag{187}$$

Auf das Zahlenbeispiel unserer Sechszylindermaschine angewandt, ergibt sich (siehe Zahlentafel 23 b und d):

$$\alpha_i = (-1874{,}00A + 8{,}02B - 150{,}00A')\cdot 10^{-10} = -835{,}800\cdot 10^{-6},$$
$$\beta_i = (-1874{,}00B - 8{,}02A - 150{,}00B')\cdot 10^{-10} = -3{,}609\cdot 10^{-6},$$
$$A_i = 5{,}1421727A - 0{,}0317708B + 1{,}9951406A' - 0{,}0002009B' = 22142,$$
$$B_i = 5{,}1421727B + 0{,}0317708A + 1{,}9951406B' + 0{,}0002009A' = 143.$$

Damit wird:

$$B_i\alpha_i - A_i\beta_i = (143\cdot -835{,}800 - 22142\cdot -3{,}609)\cdot 10^{-6} = -0{,}0396 < 0,$$
$$A_i\alpha_i + B_i\beta_i = (22142\cdot -835{,}800 + 143\cdot -3{,}609)\cdot 10^{-6} = -18{,}5068 < 0.$$

Es sind also beide Bedingungen (187) in unserem Beispiel nicht erfüllt; die genaue Teilschwingung ist in diesem Fall durch eine einfache Zusatzmasse am Luftpumpenwellenende nicht erzielbar. Nun könnte man freilich versuchen, mit zusammengesetzten Zusatzsystemen zum Ziel zu kommen, aber auch damit bleibt der Erfolg fraglich.

Wenn man sich indessen mit der praktischen Annäherung der Teilschwingungsform begnügt, so findet man leicht befriedigende Lösungen. Dabei kann man noch eine der Größen c_0 oder m_0, am besten die erstere, für die Ausführung passend wählen.

Für die angenäherte Teilschwingung gelten die aus den Zahlentafeln 23a und b sich ergebenden Ausschläge und Momente; die Ausschläge α_1 und β_1 der ersten Masse sind genau genommen nicht mehr gleich Null, sondern kleine Größen. Die beste Annäherung an die Teilschwingungsform wird sich ergeben, wenn der Gesamtausschlag der ersten Masse möglichst klein wird. Man wird also die Zusatzmasse m_0 so bestimmen, daß $\alpha_1^2 + \beta_1^2$ ein Kleinstwert wird.

Die Gl. (180) ergibt mit (183) und (184):

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 + q\beta_0 &= -\frac{A_i}{m_0\omega^2} \\ \beta_0 - q\alpha_0 &= -\frac{B_i}{m_0\omega^2} \end{aligned}\right\} \tag{188}$$

oder nach α_0 und β_0 aufgelöst und mit (182) verglichen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{-A_i + qB_i}{m_0\omega^2(1+q^2)} = \alpha_i - \frac{A_i}{c_0} \\ \beta_0 &= \frac{-B_i - q\cdot A_i}{m_0\omega^2(1+q^2)} = \beta_i - \frac{B_i}{c_0} \end{aligned}\right\} \tag{189}$$

Mit der Abkürzung:

$$\frac{c_0}{m_0\omega^2(1+q^2)} \equiv u \tag{190}$$

erhält man aus (189):

$$\left.\begin{aligned} c_0\alpha_i &= (1-u)\,A_i + quB_i \\ c_0\beta_i &= (1-u)\,B_i - quA_i \end{aligned}\right\} \tag{191}$$

Setzt man in Gl. (191) die Werte α_i, β_i, A_i, B_i aus den Zahlentafeln 23a und b ein, so erhält man zwei Gleichungen zur Bestimmung von α_1 und β_1.

Unser Zahlenbeispiel liefert mit den gegebenen harmonischen Momenten $A = 4500$, $B = B' = 0$, $A' = -500$ (siehe Zahlentafeln 23 a, b und d):

$$\alpha_i = -1{,}0757091\,\alpha_1 + 0{,}0455791\,\beta_1 - 835{,}800\cdot 10^{-6},$$

$$\beta_i = -1{,}0757091\,\beta_1 - 0{,}0455791\,\alpha_1 - 3{,}609\cdot 10^{-6},$$

$$A_i = -11064\,\alpha_1 - 1229609\,\beta_1 + 22142{,}21,$$

$$B_i = -11064\,\beta_1 + 1229609\,\alpha_1 + 142{,}87.$$

Die elastische Länge der Zusatzfeder sei mit $l_0 = 1000$ angenommen, so daß $c_0 = \frac{10^{10}}{1000} = 10^7$ wird. Für die gewöhnliche Luftreibungsdämpfung der Zusatzmasse wird $q \backsim \frac{0{,}001}{6} \backsim 0{,}0002$ (da 6 Schwingungen auf 1 Maschinenumdrehung kommen).

Damit schreiben sich die Gl. (191):

$$-10757091\,\alpha_1 + 455791\,\beta_1 - 8358{,}00 = (1-u)[-11064\,\alpha_1$$
$$-1229609\,\beta_1 + 22142{,}21] + u[-2\beta_1 + 246\,\alpha_1 + 0{,}03] \quad \text{und}$$
$$-10757091\beta_1 - 455791\alpha_1 - 36{,}09 = (1-u)[-11064\beta_1$$
$$+1229609\alpha_1 + 142{,}87] + u[+2\alpha_1 + 246\beta_1 - 4{,}43]$$

oder zusammengefaßt:

$$\left.\begin{aligned}(-10746027-11310u)\alpha_1+(1685400-1229607u)\beta_1&=30500{,}21-22142{,}18u\\(-10746027-11310u)\beta_1-(1685400-1229607u)\alpha_1&=178{,}96-147{,}30u.\end{aligned}\right\}\quad(192)$$

Durch Auflösen nach α_1 und β_1 erhält man daraus:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1[-118317669+3901684u-1512061u^2]&=328058-238064u-69u^2\\\beta_1[-118317669+3901684u-1512061u^2]&=-49482+73241u-27228u^2.\end{aligned}\right\}\quad(193)$$

Mit der abgekürzten Schreibweise:

$$N=-118317669+3901684u-1512061u^2\quad(194)$$

berechnet sich aus (193) das Quadrat des Gesamtausschlages der ersten Masse:

$$\alpha_1^2+\beta_1^2=\frac{10^6}{N^2}[110075{,}5-163445{,}8u+64688{,}0u^2-3955{,}5u^3+741{,}4u^4].\quad(195)$$

Es stellt sonach eine Funktion von u dar. Derjenige Wert von u, der $\alpha_1^2+\beta_1^2$ zum Kleinstwert macht, entspricht der Bedingung:

$$\frac{d}{du}(\alpha_1^2+\beta_1^2)=0\quad(196)$$

und liefert aus Gl. (195) die Gleichung:

$$\begin{aligned}&N\cdot(-163445{,}8+2\cdot64688{,}0u-3\cdot3955{,}5u^2+4\cdot741{,}4u^3)\\&-(110075{,}5-163445{,}8u+64688{,}0u^2-3955{,}5u^3+741{,}4u^4)\cdot2\frac{dN}{du}=0.\end{aligned}$$

Nach Einführung von N aus Gl. (194) und Zusammenfassung ergibt sich die Bestimmungsgleichung für u:

$$-196u^4-170680u^3+662608u^2-14004020u+18479606=0.\quad(197)$$

Sie liefert nur einen einzigen brauchbaren (positiven) Wert:

$$u=1{,}377465.$$

Mit diesem Wert berechnen sich aus den Gl. (193) die Phasenausschläge:

$$\alpha_1=-0{,}017\cdot10^{-6}$$
$$\beta_1=+2{,}230\cdot10^{-6}.$$

Die zusätzlichen Ausschläge α, β der übrigen Massen ergeben sich mit den gefundenen Werten α_1 und β_1 aus der Zahlentafel 23a. Sie sind den Werten der Teilschwingungsausschläge (Tafel 23d) hinzuzufügen. Man erkennt aus der Kleinheit von α_1 und β_1, daß die zusätzlichen Ausschläge praktisch belanglos sind.

Der gefundene Wert u liefert mit Gl. (190):

$$m_0\omega^2=\frac{10^7}{(1+0{,}0002^2)\cdot1{,}377465}=7259712;$$

$$m_0=\frac{7259712}{49840}=145{,}66.$$

Zum Vergleich berechnen wir die Zusatzmasse, welche die gleiche Teilschwingung bei fehlender Dämpfung (aller Massen) ergibt. Dazu brauchen wir nur auf Zahlentafel 10 und deren Ergänzung auf S. 67 zurückzugreifen. Wir erhalten die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}&5{,}14224\cdot4500+1{,}99514\cdot-500-m_0\omega^2\cdot10^{-10}[1874\cdot4500+150\cdot-500\\&+1000(5{,}14224\cdot4500+1{,}99514\cdot-500)]=0.\end{aligned}\right\}\quad(198)$$

Sie liefert:

$$m_0 \omega^2 = 7259718; \qquad m_0 = 145{,}66;$$

also genau den gleichen Wert wie bei Berücksichtigung der Dämpfung.

Die praktisch vorkommenden Dämpfungen können also für die Berechnung der Zusatzmasse außer Betracht bleiben.

Es interessiert vielleicht noch, was eine künstlich vergrößerte Dämpfung der Zusatzmasse allein für einen Erfolg hat. Um dies zu untersuchen, habe ich die vorher gezeigte Rechnung noch einmal für die sehr große Dämpfungszahl $q = 0{,}1$ durchgeführt. Die Ergebnisse sind:

$$u = 1{,}363974$$
$$m_0 \omega^2 = 7258928; \qquad m_0 = 145{,}64.$$
$$\alpha_1 = -28{,}878 \cdot 10^{-6},$$
$$\beta_1 = +277{,}822 \cdot 10^{-6}.$$

Die zusätzlichen Ausschläge sind zwar auch hier nicht groß, doch immerhin schon von der gleichen Größenordnung wie die der reinen Teilschwingung selbst.

Die Untersuchung der gedämpften Drehschwingungen zusammengesetzter Systeme mit starren und elastischen Übersetzungen unterscheidet sich nicht von jener der einfachen Systeme und kann mit Beachtung der für sie geltenden besonderen Bedingungen, die wir an anderer Stelle behandelten, in einfacher Weise geschehen.

23. Dämpfer[1]).

Das naheliegendste Mittel, die gefährlichen Schwingungsausschläge der Resonanz auf ein erträgliches Maß herabzumindern, scheint in der Einführung dämpfender Widerstände zu liegen, die erheblich größer als die natürlichen Dämpfungswiderstände sind. Eine solche Dämpfervorrichtung besteht im wesentlichen aus dem „Dämpfer", d. h. einer schweren Masse, die lose drehbar auf der zu dämpfenden Welle sitzt, so daß sie sich relativ gegen eine dicht neben ihr befindliche, mit der Welle verkeilte Masse, den „Dämpferträger", drehen kann; die Konstruktion ist derartig, daß die Relativdrehung beider Massen nur unter Entstehung bedeutender Reibungsmomente erfolgen kann. In Fig. 47 ist eine Dämpfervorrichtung schematisch dargestellt. Der auf der Welle frei drehbare Dämpfer b und der auf ihr festgekeilte Dämpferträger a liegen mit einer Reihe von Reibungsflächen dicht aneinander. Solange die Welle gleichförmig umläuft, wird der Dämpfer durch die Reibung mitgenommen und a und b drehen sich wie ein einziger Körper. Vollführt aber die

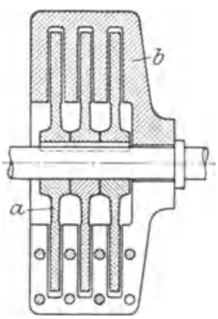


Fig. 47.

[1]) Die Theorie der Dämpfer ist erstmals von Herrn Prof. Dr. ing. Gümbel in einer bisher nicht veröffentlichten Arbeit behandelt worden, die er mir liebenswürdigerweise zur Verfügung stellte.

Welle neben der Drehbewegung starke Drehschwingungen, so verursacht die Trägheit der Dämpfermasse Relativdrehungen und damit Reibungsmomente zwischen a und b.

Von diesen Reibungsmomenten setzen wir voraus, daß sie proportional der Relativgeschwindigkeit zwischen a und b sind, was für den Fall zutrifft, daß die Reibungsflächen geschmiert sind. Das Reibungsmoment ist, wenn df ein Reibflächenelement am Radius r, η die Zähigkeitszahl des Schmiermittels und $\frac{dv}{dx}$ das Geschwindigkeitsgefälle der Relativbewegung bezeichnet[1]):

$$M_r = \int \left(df \eta \frac{dv}{dx} \cdot r \right).$$

Wenn ω die Winkelschnelle der harmonischen Schwingung und γ der Gesamtausschlag der Relativdrehung ist, so ist $\omega \cdot \gamma$ die Amplitude der Relativgeschwindigkeit und $\frac{dv}{dx} = \frac{\omega \gamma r}{h}$ das Geschwindigkeitsgefälle am Radius r, wobei h die geringe Dicke der Ölschicht zwischen den Reibflächen bedeutet. Sind z solcher Reibflächenpaare vom Außenradius r_2 und vom Innenradius r_1 vorhanden, so wird:

$$M_r = z \cdot \int_{r_1}^{r_2} \left(2\pi r dr \cdot \eta \cdot \frac{\omega \gamma r}{h} \cdot r \right) = z \cdot \frac{\pi}{2} \eta \frac{r_2^4 - r_1^4}{h} \omega \gamma \equiv k' \omega \gamma \quad (199)$$

mit $$k' \equiv z \cdot \frac{\pi}{2} \eta \frac{r_2^4 - r_1^4}{h}. \quad (199\text{a})$$

Werden r_2, r_1 und h in cm gemessen, so ist die Zähigkeitszahl η in $\frac{\text{kg s}}{\text{cm}^2}$ einzuführen (für Öl von $50°$ C ist $\eta \sim 5 \cdot 10^{-7}$ kg s cm^{-2}).

Am Träger a tritt demnach ein harmonisches Reibungsmoment mit der Amplitude M_r auf, das die der Relativgeschwindigkeit zwischen a und b entgegengesetzte Phase hat. Auf den Dämpfer b wirkt dementsprechend das harmonische Moment $-M_r$. Die Phasen von M_r seien bzw. mit $M_{r\alpha}$ und $M_{r\beta}$, die Phasen des absoluten Gesamtausschlags γ_0 des Dämpfers mit α_0 und β_0 bezeichnet. Dann gelten für die Bewegung des Dämpfers (b), dessen Massenträgheitsmoment m_0 und dessen Eigendämpfungsfaktor k_0 (Luftreibung) ist, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} m_0 \omega^2 \alpha_0 + k_0 \omega \beta_0 - M_{r\alpha} &= 0 \\ m_0 \omega^2 \beta_0 - k_0 \omega \alpha_0 - M_{r\beta} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (200)$$

Wenn ferner γ_i den absoluten Gesamtausschlag des Dämpferträgers (a), α_i und β_i seine Phasen, $\gamma = \gamma_i - \gamma_0$ (diese Gleichung als Vektoren-

[1]) Siehe Gümbel: Die Flüssigkeitsschubkraftmaschine, Z. f. d. g. T. 1914, S. 357.

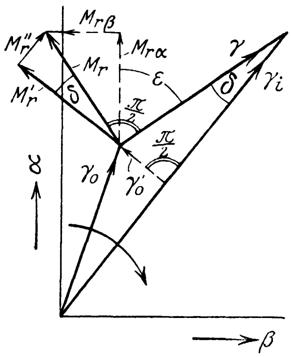


Fig. 48.

gleichung aufgefaßt) den Relativausschlag mit den Phasen $\alpha = \alpha_i - \alpha_0$ und $\beta = \beta_i - \beta_0$ bedeuten, so ist mit der in Gl. (199a) gegebenen Definition:

$$M_r = k'\omega\gamma = k'\omega\sqrt{(\alpha_i - \alpha_0)^2 + (\beta_i - \beta_0)^2}\,.$$

Im Bild 48 sind die Verhältnisse als Vektordiagramm dargestellt. Der Ausschlag des Trägers, γ_i, eilt als Ursache dem Ausschlag γ_0 des Dämpfers, der Wirkung, voraus. Der Relativausschlag ist γ. Das Reibungsmoment M_r am Träger eilt dem Ausschlag γ um $\frac{\pi}{2}$ nach; für seine Phasen gilt (Fig. 48):

$$\left.\begin{aligned} M_{r\alpha} &= M_r \cos\left(\varepsilon - \frac{\pi}{2}\right) = M_r \frac{\beta_i - \beta_0}{\gamma} = k'\omega\,(\beta_i - \beta_0) \\ M_{r\beta} &= M_r \sin\left(\varepsilon - \frac{\pi}{2}\right) = -M_r \frac{\alpha_i - \alpha_0}{\gamma} = -k'\omega\,(\alpha_i - \alpha_0)\,. \end{aligned}\right\} \quad (201)$$

Aus den Gl. (200) und (201) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{k'\,(m_0\omega\,\beta_i + (k_0 + k')\,\alpha_i)}{(m_0\omega)^2 + (k_0 + k')^2} \\ \beta_0 &= \frac{k'\,(-m_0\omega\,\alpha_i + (k_0 + k')\,\beta_i)}{(m_0\omega)^2 + (k_0 + k')^2}\,. \end{aligned}\right\} \quad (202)$$

$$\left.\begin{aligned} M_{r\alpha} &= \frac{k'\omega\,[\beta_i\,((m_0\omega)^2 + k_0\,(k_0 + k')) + \alpha_i k' m_0\omega]}{(m_0\omega)^2 + (k_0 + k')^2} \\ M_{r\beta} &= \frac{k'\omega\,[-\alpha_i\,((m_0\omega)^2 + k_0\,(k_0 + k')) + \beta_i k' m_0\omega]}{(m_0\omega)^2 + (k_0 + k')^2}\,. \end{aligned}\right\} \quad (203)$$

Meist wird man, wenn nicht besondere Verhältnisse vorliegen, den Eigendämpfungsfaktor k_0 gegenüber k' vernachlässigen können, womit sich die Gl. (202) und (203) noch etwas vereinfachen.

Die Wirkung des Dämpfers besteht demnach in der Ausübung des harmonischen Moments $+ M_r$, dessen Phasen $M_{r\alpha}$ und $M_{r\beta}$ aus Gl. (203) bekannt sind, auf den Dämpferträger und damit auf das schwingende Massensystem. Mit Berücksichtigung dieses harmonischen Reibungsmomentes, das für das schwingende Massensystem dieselbe Rolle spielt, wie ein am Träger wirkendes gegebenes äußeres Moment, kann die Berechnung des Systems in der üblichen Weise erfolgen, was wir am Beispiel der Sechszylindermaschine zeigen wollen.

Um zu diesem Zweck die Berechnung des Resonanzfalles (Tafeln 23 a, b, c) ohne weiters benutzen zu können, denken wir die Endmasse $m_i = 6{,}5$ gleich als

Dämpferträger behandelt. In Wirklichkeit wird freilich eine besondere, viel größere Trägermasse zu den gegebenen Massen noch hinzukommen, die auch die Eigenschwingungszahlen des Systems beeinflußt und noch um eine neue vermehrt; aber hier kommt es nur auf die Darlegung des Berechnungsganges an.

Für den Dämpfer sei $m_0 = 100$; $k' = 2000$; $k_0 = 0$. (Die Luftreibung $k_0 = \frac{0,001}{6} m_0 \omega = \frac{0,001}{6} \cdot 100 \cdot 223,25 \sim 4$ wollen wir vernachlässigen.)

Die Ausschläge α_i, β_i des Trägers ($m_i = 6,5$) sind aus den Zahlentafeln 23 a und b gegeben.

Es ist:

$$(m_0 \omega)^2 = 100^2 \cdot 49840 = 498,4 \cdot 10^6 ,$$
$$(m_0 \omega)^2 + (k_0 + k')^2 = 502,4 \cdot 10^6 ,$$
$$k' m_0 \omega = 2000 \cdot 100 \cdot 223,25 = 44,65 \cdot 10^6 .$$

Mit Einführung dieser Werte in die Gl. (203) erhält man:

$$\begin{aligned} M_{r\alpha} = \frac{2000 \cdot 223,25}{502,4 \cdot 10^6} [& 498,4 \cdot 10^6 \cdot (-1,0757091 \beta_1 - 0,0455791 \alpha_1 - 1874,00 \cdot 10^{-10} B \\ & - 8,02 \cdot 10^{-10} A - 150,00 \cdot 10^{-10} B') + 44,65 \cdot 10^6 (-1,0757091 \alpha_1 \\ & + 0,0455791 \beta_1 - 1874,00 \cdot 10^{-10} A + 8,02 \cdot 10^{-10} B - 150,00 \cdot 10^{-10} A')] , \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} M_{r\alpha} &= -62875 \alpha_1 - 474669 \beta_1 - 0,0077915 A - 0,0829754 B - 0,0005954 A' \\ &\quad - 0,0066441 B' \\ M_{r\beta} &= -62875 \beta_1 + 474669 \alpha_1 - 0,0077915 B + 0,0829754 A \\ &\quad - 0,0005954 B' + 0,0066441 A' \end{aligned}\right\} \quad (204)$$

Damit wird die Momentensumme am Wellenende (Tafel 23 a und b):

$$\begin{aligned} \Sigma(\alpha) = & -11064 \alpha_1 - 1229609 \beta_1 + 5,1421727 A - 0,0317708 B + 1,9951406 A' \\ & - 0,0002009 B' + M_{r\alpha} = 0 \end{aligned}$$

oder mit dem Wert aus Gl. (204):

$$\left.\begin{aligned} \Sigma(\alpha) &= -73939 \alpha_1 - 1704278 \beta_1 + 5,1343812 A - 0,1147462 B \\ &\quad + 1,9945452 A' - 0,0068450 B' = 0 \\ \Sigma(\beta) &= -73939 \beta_1 + 1704278 \alpha_1 + 5,1343812 B + 0,1147462 A \\ &\quad + 1,9945452 B' + 0,0068450 A' = 0 \end{aligned}\right\} \quad (205)$$

Die Auflösung der Gl. (205) liefert mit $A = 4500$, $A' = -500$, $B = B' = 0$:

$$\left.\begin{aligned} 10^6 \alpha_1 &= 0,0632543 A - 3,0098995 B + 0,0466693 A' - 1,1682925 B' = 261,31 \\ 10^6 \beta_1 &= 0,0632543 B + 3,0098995 A + 0,0466693 B' + 1,1682925 A' = 12960,40 \end{aligned}\right\} \quad (206)$$

Damit sind die Ausschläge α_1 und β_1 bekannt, mittels welcher man die Ausschläge aller übrigen Massen des Hauptsystems mit den Zahlentafeln 23 a und b berechnen kann.

Für den Dämpferträger findet man z. B.:

$$\left.\begin{aligned} 10^6 \alpha_i &= -526,17 \\ 10^6 \beta_i &= -13957,14 \end{aligned}\right\} \quad (207)$$

Für den Dämpfer erhält man aus den Gl. (202):

$$\left.\begin{aligned} 10^6 \alpha_0 &= -1244,61 \\ 10^6 \beta_0 &= -64,36 \end{aligned}\right\} \quad (208)$$

Damit sind die Schwingungszustände des Massensystems und des Dämpfers berechnet. Es ist lehrreich, das Ergebnis mit dem früheren der Resonanzschwingung ohne Dämpfer zu vergleichen. Wir fanden dafür die Werte:

$$10^6\alpha_1 = 45{,}84$$
$$10^6\beta_1 = 18007{,}11\,,$$

die mit den Werten der Gl. (206) zu vergleichen sind.

In beiden Fällen, ohne und mit Dämpfer, sind die Ausschlagphasen β_1 von überragender Größe, so daß sie fast genau zugleich die Gesamtausschläge darstellen. Durch die Anwendung des Dämpfers sind demnach die Schwingungsausschläge aller Massen im Verhältnis $\frac{12960}{18007} \sim 0{,}72$ verkleinert worden. Das gilt indessen nur für die Schwingung, die der untersuchten Eigenschwingungszahl des Hauptsystems (einschließlich Dämpferträger) entspricht. Wie sich der Dämpfer bei Schwingungen anderer Periodenzahlen verhält, bedarf besonderer Untersuchung, die freilich nach Annahme der Schwingungszahl in der soeben gezeigten Weise erfolgen könnte. Ein solches Verfahren wäre aber bei der Notwendigkeit mehrerer Annahmen nicht nur recht mühsam, sondern auch unbefriedigend, weil es einem Tasten gleichkommt, statt stehenden Auges zum Ziel zu führen.

Ich möchte daher an dieser Stelle noch eine andere allgemeine Untersuchung der Dämpferwirkung geben, die ebenso einfach wie die gezeigte, aber dabei übersichtlicher ist. Zu diesem Zwecke zerlege ich das Reibungsmoment M_r in die Phasen M_r', dem Ausschlag γ_i des Dämpferträgers um $\frac{\pi}{2}$ nacheilend, und M_r'' mit der Phase des Ausschlages γ_i. In Fig. 48 ist diese Zerlegung ebenfalls angegeben. Ebenso zerlege ich den absoluten Ausschlag des Dämpfers, γ_0, in die entsprechenden Phasen γ_0' senkrecht γ_i und γ_0'' parallel γ_i. Da die Wahl der Phasen für ein System beliebig ist, so gelten an Stelle von Gl. (200) jetzt für den Dämpfer die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} m_0\omega^2\gamma_0' + k_0\omega\gamma_0'' - M_r' &= 0 \\ m_0\omega^2\gamma_0'' - k_0\omega\gamma_0' - M_r'' &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{209}$$

Diese Gleichungen liefern, quadriert und addiert, die Beziehung:

$$[(m_0\omega^2)^2 + (k_0\omega)^2]\gamma_0^2 = M_r'^2 + M_r''^2 = M_r^2\,, \tag{210}$$

und sie ergeben, nach γ_0' und γ_0'' aufgelöst, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_0' &= \frac{M_r' m_0\omega^2 - M_r'' k_0\omega}{(m_0\omega^2)^2 + (k_0\omega)^2} \\ \gamma_0'' &= \frac{M_r'' m_0\omega^2 + M_r' k_0\omega}{(m_0\omega^2)^2 + (k_0\omega)^2} \end{aligned}\right\} \tag{211}$$

Aus Gl. (199) und (210) wird:

$$M_r = k'\omega\gamma = \sqrt{(m_0\omega^2)^2 + (k_0\omega)^2}\,\gamma_0$$

oder

$$\gamma_0 = \frac{k'\gamma}{\sqrt{(m_0\omega)^2 + k_0^2}}. \tag{212}$$

Es ist ferner nach Fig. 48:

$$\left.\begin{aligned} M_r' &= M_r\cos\delta = k'\omega\gamma\cos\delta \\ M_r'' &= M_r\sin\delta = k'\omega\gamma\sin\delta \end{aligned}\right\} \tag{213}$$

Aus (211), (213) und Fig. 48 erhält man:

$$\gamma_0' = k'\omega\gamma\frac{m_0\omega^2\cos\delta - k_0\omega\sin\delta}{(m_0\omega^2)^2 + (k_0\omega)^2} = \gamma\sin\delta$$

oder

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{k' m_0\omega}{(m_0\omega)^2 + k_0(k_0 + k')}. \tag{214}$$

Damit wird auch:

$$\left.\begin{aligned} \sin\delta &= \frac{\operatorname{tg}\delta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}} = \frac{k' m_0\omega}{\sqrt{[(m_0\omega)^2 + k_0(k_0+k')]^2 + (k' m_0\omega)^2}} \\ \cos\delta &= \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}} = \frac{(m_0\omega)^2 + k_0(k_0+k')}{\sqrt{[(m_0\omega)^2 + k_0(k_0+k')]^2 + (k' m_0\omega)^2}} \end{aligned}\right\} \tag{215}$$

Nach Fig. 48 ist weiter:

$$\gamma_i = \gamma\cos\delta + \gamma_0'',$$

woraus mit Berücksichtigung von Gl. (211) und (213) wird:

$$\gamma = \gamma_i\frac{(m_0\omega)^2 + k_0^2}{\sqrt{[(m_0\omega)^2 + k_0(k_0+k')]^2 + (k' m_0\omega)^2}}. \tag{216}$$

Führt man diesen Wert in Gl. (213) ein, so wird mit Gl. (215):

$$M_r' = k'\omega\gamma_i\cdot\frac{[(m_0\omega)^2 + k_0^2]\cdot[(m_0\omega)^2 + k_0(k_0+k')]}{[(m_0\omega)^2 + k_0(k_0+k')]^2 + (k' m_0\omega)^2} \equiv k''\omega\gamma_i. \tag{217}$$

Für k'' gilt dabei gemäß (217) die Definitionsgleichung:

$$k'' \equiv k'\cdot\frac{[(m_0\omega)^2 + k_0^2]\cdot[(m_0\omega)^2 + k_0(k_0+k')]}{[(m_0\omega)^2 + k_0(k_0+k')]^2 + (k' m_0\omega)^2}. \tag{218}$$

Ebenso findet man:

$$M_r'' = k'\omega\gamma_i\frac{[(m_0\omega)^2 + k_0^2]k' m_0\omega}{[(m_0\omega)^2 + k_0(k_0+k')]^2 + (k' m_0\omega)^2} \equiv q\cdot m_0\omega^2\cdot\gamma_i \tag{219}$$

mit

$$q \equiv \frac{k'^2[(m_0\omega)^2 + k_0^2]}{[(m_0\omega)^2 + k_0(k_0+k')]^2 + (k' m_0\omega)^2}. \tag{220}$$

Das Moment M_r', das dem Ausschlag γ_i um $\frac{\pi}{2}$ nacheilt, können wir nun als durch den Dämpfer verursachte zusätzliche Geschwindigkeitsdämpfung des Dämpferträgers auffassen, so daß für die Trägermasse, deren Eigendämpfungsfaktor k_i ist, der Gesamtdämpfungsfaktor wird:

$$k = k_i + k'' . \tag{221}$$

Ebenso können wir das mit dem Ausschlag γ_i phasengleiche Moment M_r'' als durch die Trägheit einer von der Dämpferwirkung stammenden, gedachten Masse erzeugt ansehen, so daß als gesamte scheinbare Trägermasse gilt:

$$m = m_i + q m_0 . \tag{222}$$

Die Wirkung des Dämpfers besteht sonach darin, daß der Dämpfungsfaktor des Dämpferträgers um den Wert k'', und das Massenträgheitsmoment des Trägers (scheinbar) um qm_0 vergrößert werden.

Unter dieser Auffassung macht die Berücksichtigung der Dämpferwirkung für ein Massensystem fast keinerlei Mehrarbeit gegen die gewöhnliche Berechnung ohne Dämpfer. Die Auffassung liefert auch den Schlüssel zum Verständnis der Dämpferwirkung bei beliebigen Periodenzahlen. Wegen der scheinbaren Zusatzmasse sind auch die Eigenschwingungszahlen scheinbar verschoben; die gefährlichsten Schwingungsausschläge treten nicht bei Periodenzahlen auf, die einer der Eigenschwingungen des Systems der auf der Welle festen Massen (einschließlich Dämpferträger) entsprechen, sondern bei kleineren Periodenzahlen. Diese „verschobenen Resonanzzustände“ brauchen nicht ungefährlicher zu sein als die Resonanzschwingungen ohne Dämpfersystem, das hängt ganz vom Einzelfall ab.

Wenn, was praktisch wohl immer zutrifft, die Eigendämpfung (Lufttreibung) der Dämpfermasse (k_0) gegen die Dämpferreibung (k') vernachlässigt werden kann, so wird:

$$k'' = k' \cdot \frac{(m_0\omega)^2}{(m_0\omega)^2 + k'^2} \tag{218a}$$

$$q = \frac{k'^2}{(m_0\omega)^2 + k'^2} \tag{220a}$$

Für einen gegebenen Wert $m_0\omega$ wird k'' ein Größtwert, wenn $k' = m_0\omega$ gemacht wird. Bei diesem Fall der größten Reibung wird $k'' = \frac{1}{2} k'$ und $q = \frac{1}{2}$. Für kleine Werte k' wird $k'' = k'$ und $q \sim 0$ (geringe Dämpferwirkung). Bei sehr großem Wert k', der etwa auftritt, wenn die Reibflächen fressen, wird $k'' = 0$, $q = 1$; Dämpfer und Dämpferträger bilden eine gemeinsame träge Masse; die Dämpferwirkung ist ausgeschaltet.

Wir wollen auch diesen Rechnungsgang auf unser Beispiel anwenden: $m_0 = 100$, $k' = 2000$, $k_0 = 0$.

$$(\text{Gl. } 218\text{a}):\ k'' = 2000 \cdot \frac{100^2 \cdot 49840}{100^2 \cdot 49840 + 2000^2} = 1984{,}08\,,$$

$$(\text{Gl. } 220\text{a}):\ q = \frac{2000^2}{100^2 \cdot 49840 + 2000^2} = 0{,}0079618\,.$$

Damit wird der Gesamtdämpfungsfaktor des Trägers, dessen Eigendämpfungszahl $k_i = 60$ war:

$$k = 60 + 1984{,}08 = 2044{,}08\,,$$

$$k\omega = 456340\,.$$

Die scheinbare Endmasse ist:

$$m = 6{,}5 + 0{,}0076918 \cdot 100 = 7{,}29618\,,$$

$$m\omega^2 = 363642\,.$$

Mit diesen Werten müssen wir die letzte Zeile der Zahlentafeln 23 a und b neu berechnen und erhalten:

m	$m\omega^2$	$k\omega$	α	$m\omega^2\alpha$	$+k\omega\beta$	A	$\Sigma(\alpha)$
(7,29618)	363642	456340	$-1{,}0757091\,\alpha_1$	$-391173\,\alpha_1$	$-20800\,\alpha_1$		$-73939\,\alpha_1$
			$+0{,}0455791\,\beta_1$	$+16574\,\beta_1$	$-490889\,\beta_1$		$-1704281\,\beta_1$
			$-1874{,}00 \cdot 10^{-10} A$	$-0{,}0681465\,A$	$-0{,}0003660\,A$		$+5{,}1343810\,A$
			$+8{,}02 \cdot 10^{-10} B$	$+0{,}0002916\,B$	$-0{,}0855181\,B$		$-0{,}1147469\,B$
			$-150{,}00 \cdot 10^{-10} A'$	$-0{,}0054546\,A'$		$+A'$	$+1{,}9945454\,A'$
					$-0{,}0068451\,B'$		$-0{,}0068451\,B'$
							$= 0$

Man erkennt, daß die Endgleichung $\Sigma_\alpha = 0$ genau der früheren Gl. (205) entspricht, die auf anderem Wege gefunden wurde.

In unserem Zahlenbeispiel ist q ein kleiner Wert, so daß die scheinbare Massenvergrößerung von $m_i = 6{,}5$ auf etwa 7,3 nur gering ausfällt. Die scheinbare Verschiebung der Resonanzschwingung wird daher in unserem Beispiel nicht groß sein, so daß wir auf die Aufsuchung verzichten wollen. Bei größerer Verschiebung beachte man aber, daß die Zuschlagmasse $q\,m_0$ nicht unveränderlich ist, sondern selbst von ω gemäß Gl. (220) und (220a) abhängt; auch werden dann im allgemeinen andere harmonische Momente und andere Dämpffaktoren gelten.

24. Innere Dämpfung.

Wir haben bei der Untersuchung der Dämpfer eine Art der Dämpfung kennengelernt, die nicht mehr wie die bisher allein betrachteten äußeren Dämpfungen dem Ausschlag der zugehörigen Masse um $\frac{\pi}{2}$ nacheilt, da sie nicht der absoluten Geschwindigkeit der Masse, sondern der relativen Geschwindigkeit zweier Nachbarmassen entgegengerichtet und ihr proportional ist. Ganz das gleiche trifft zu für die inneren Dämpfungskräfte, die bei der Verdrehung der Welle infolge unvollkommener Elastizität des Wellenbaustoffes auftreten. Diesen der Verdrehungsgeschwindigkeit des zwischen zwei aufeinanderfolgenden

Massen m_h und m_{h+1} liegenden Wellenstückes proportionalen und entgegengerichteten Reibungswiderstand denken wir uns an den beiden Massen wirkend, so daß, wenn $k_{h,h+1}$ der innere Dämpfungsfaktor ist, an der Masse m_h das Reibungsmoment $k_{h,h+1}(\varphi'_h - \varphi'_{h+1})$ und ebenso an der Masse m_{h+1} das Moment $k_{h,h+1}(\varphi'_{h+1} - \varphi'_h)$ angreift. Die Gleichgewichtsbedingungen eines Massensystems, an dem nur innere Dämpfungen wirken, lautet dann mit unseren üblichen Bezeichnungen:

$$\left.\begin{array}{l}
m_1\varphi_1'' + k_{1,2}(\varphi_1' - \varphi_2') + c_{1,2}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\
m_2\varphi_2'' + k_{1,2}(\varphi_2' - \varphi_1') + k_{2,3}(\varphi_2' - \varphi_3') + c_{1,2}(\varphi_2 - \varphi_1) + c_{2,3}(\varphi_2 - \varphi_3) = 0 \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
m_h\varphi_h'' + k_{h-1,h}(\varphi_h' - \varphi_{h-1}') + k_{h,h+1}(\varphi_h' - \varphi_{h+1}') + c_{h-1,h}(\varphi_h - \varphi_{h-1}) \\
\qquad\qquad + c_{h,h+1}(\varphi_h - \varphi_{h+1}) = 0 \\
\cdot \\
\cdot \\
m_n\varphi_n'' + k_{n-1,n}(\varphi_n' - \varphi_{n-1}') + c_{n,n-1}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) = 0
\end{array}\right\} \qquad (223)$$

Daraus erhält man zunächst durch Addieren aller Gleichungen:

$$\sum_{l=1}^{l=n}(m_l\varphi_l'') = 0\,. \qquad (224)$$

Hieraus ergibt sich durch Integration mit den Konstanten C_0 und C_1:

$$\sum_{l=1}^{l=n}(m_l\varphi_l) = C_0 + C_1 t\,. \qquad (224\text{a})$$

Die Bedeutung der Integrationskonstanten erhält man aus den Anfangsbedingungen ($\varphi_l\varphi_{l_0}$ und φ'_{l_0}):

$$\left.\begin{array}{l}
C_0 = \sum\limits_{l=1}^{l=n}(m_l\varphi_{l_0}) \\
C_1 = \sum\limits_{l=1}^{l=n}(m_l\varphi'_{l_0})
\end{array}\right\} \qquad (224\text{b})$$

Die simultanen Differentialgleichungen (223) liefern die allgemeine, für jede Masse gültige lineare Differentialgleichung der $2n$-ten Ordnung:

$$\varphi^{(2n)} + b_{2n-1}\varphi^{(2n-1)} + \ldots + b_2\varphi^{(2)} = 0\,, \qquad (225)$$

in welcher die konstanten Beizahlen b gesetzmäßig aus den Wellenkonstanten $c_{l,l+1}$, den Massen m_l und den Dämpfungszahlen $k_{l,l+1}$ gebildete Ausdrücke sind. Um das Bildungsgesetz zu zeigen, sei wiederum die Gl. (225) vollständig für 5 Massen angegeben:

$$\begin{aligned}
\varphi^{(10)} &+ \left[k_{1,2}\frac{m_1+m_2}{m_1m_2} + k_{2,3}\frac{m_2+m_3}{m_2m_3} + k_{3,4}\frac{m_3+m_4}{m_3m_4} + k_{4,5}\cdot\frac{m_4+m_5}{m_4m_5}\right]\varphi^{(9)} \\
&+ \left[c_{1,2}\frac{m_1+m_2}{m_1m_2} + c_{2,3}\frac{m_2+m_3}{m_2m_3} + c_{3,4}\frac{m_3+m_4}{m_3m_4} + c_{4,5}\frac{m_4+m_5}{m_4m_5}\right. \\
&+ k_{1,2}k_{2,3}\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1m_2m_3} + k_{1,2}k_{3,4}\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\cdot\frac{m_3+m_4}{m_3m_4} + k_{1,2}k_{4,5}\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\frac{m_4+m_5}{m_4m_5} \\
&\left.+ k_{2,3}k_{3,4}\frac{m_2+m_3+m_4}{m_2m_3m_4} + k_{2,3}k_{4,5}\frac{m_2+m_3}{m_2m_3}\frac{m_4+m_5}{m_4m_5} + k_{3,4}k_{4,5}\frac{m_3+m_4+m_5}{m_3m_4m_5}\right]\varphi^{(8)}
\end{aligned}$$

$$+\Big[(k_{1,2}c_{2,3}+k_{2,3}c_{1,2})\cdot\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1m_2m_3}+(k_{1,2}c_{3,4}+k_{3,4}c_{1,2})\,\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\,\frac{m_3+m_4}{m_3m_4}$$

$$+(k_{1,2}c_{4,5}+c_{1,2}k_{4,5})\,\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\cdot\frac{m_4+m_5}{m_4m_5}+(k_{2,3}c_{3,4}+k_{3,4}c_{2,3})\,\frac{m_2+m_3+m_4}{m_2m_3m_4}$$

$$+(k_{2,3}c_{4,5}+k_{4,5}c_{2,3})\,\frac{m_2+m_3}{m_2m_3}\cdot\frac{m_4+m_5}{m_4m_5}+(k_{3,4}c_{4,5}+k_{4,5}c_{3,4})\,\frac{m_3+m_4+m_5}{m_3m_4m_5}$$

$$+k_{1,2}k_{2,3}k_{3,4}\,\frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{m_1m_2m_3m_4}+k_{1,2}k_{2,3}k_{4,5}\,\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1m_2m_3}\,\frac{m_4+m_5}{m_4m_5}$$

$$+k_{1,2}k_{3,4}k_{4,5}\,\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\,\frac{m_3+m_4+m_5}{m_3m_4m_5}+k_{2,3}k_{3,4}k_{4,5}\,\frac{m_2+m_3+m_4+m_5}{m_2m_3m_4m_5}\Big]\,\varphi^{(7)}$$

$$+\Big[c_{1,2}c_{2,3}\,\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1m_2m_3}+c_{1,2}c_{3,4}\cdot\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\,\frac{m_3+m_4}{m_3m_4}+c_{1,2}c_{4,5}\,\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\,\frac{m_4+m_5}{m_4m_5}$$

$$+c_{2,3}c_{3,4}\,\frac{m_2+m_3+m_4}{m_2m_3m_4}+c_{2,3}c_{4,5}\,\frac{m_2+m_3}{m_2m_3}\,\frac{m_4+m_5}{m_4m_5}+c_{3,4}c_{4,5}\,\frac{m_3+m_4+m_5}{m_3m_4m_5}$$

$$+(k_{1,2}k_{2,3}c_{3,4}+k_{1,2}c_{2,3}k_{3,4}+c_{1,2}k_{2,3}k_{3,4})\,\frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{m_1m_2m_3m_4}+(k_{1,2}k_{2,3}c_{4,5}$$

$$+k_{1,2}c_{2,3}k_{4,5}+c_{1,2}k_{2,3}k_{4,5})\,\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1m_2m_3}\,\frac{m_4+m_5}{m_4m_5}+(k_{1,2}k_{3,4}c_{4,5}+k_{1,2}c_{3,4}k_{4,5}$$

$$+c_{1,2}k_{3,4}k_{4,5})\cdot\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\cdot\frac{m_3+m_4+m_5}{m_3m_4m_5}+(k_{2,3}k_{3,4}c_{4,5}+k_{2,3}c_{3,4}k_{4,5}$$

$$+c_{2,3}k_{3,4}k_{4,5})\cdot\frac{m_2+m_3+m_4+m_5}{m_2m_3m_4m_5}+k_{1,2}k_{2,3}k_{3,4}k_{4,5}\cdot\frac{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5}{m_1m_2m_3m_4m_5}\Big]\,\varphi^{(6)}$$

$$+\Big[(k_{1,2}c_{2,3}c_{3,4}+c_{1,2}k_{2,3}c_{3,4}+c_{1,2}c_{2,3}k_{3,4})\cdot\frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{m_1m_2m_3m_4}+(k_{1,2}c_{2,3}c_{4,5}$$

$$+c_{1,2}k_{2,3}c_{4,5}+c_{1,2}c_{2,3}k_{4,5})\cdot\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1m_2m_3}\,\frac{m_4+m_5}{m_4m_5}+(k_{1,2}c_{3,4}c_{4,5}+c_{1,2}k_{3,4}c_{4,5}$$

$$+c_{1,2}c_{3,4}k_{4,5})\cdot\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\cdot\frac{m_3+m_4+m_5}{m_3m_4m_5}+(k_{2,3}c_{3,4}c_{4,5}+c_{2,3}k_{3,4}c_{4,5}$$

$$+c_{2,3}c_{3,4}k_{4,5})\cdot\frac{m_2+m_3+m_4+m_5}{m_2m_3m_4m_5}+(k_{1,2}k_{2,3}k_{3,4}c_{4,5}+k_{1,2}k_{2,3}c_{3,4}k_{4,5}$$

$$+k_{1,2}c_{2,3}k_{3,4}k_{4,5}+c_{1,2}k_{2,3}k_{3,4}k_{4,5})\cdot\frac{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5}{m_1m_2m_3m_4m_5}\Big]\,\varphi^{(5)}$$

$$+\Big[c_{1,2}c_{2,3}c_{3,4}\,\frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{m_1m_2m_3m_4}+c_{1,2}c_{2,3}c_{4,5}\cdot\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1m_2m_3}\,\frac{m_4+m_5}{m_4m_5}$$

$$+c_{1,2}c_{3,4}c_{4,5}\,\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\cdot\frac{m_3+m_4+m_5}{m_3m_4m_5}+c_{2,3}c_{3,4}c_{4,5}\cdot\frac{m_2+m_3+m_4+m_5}{m_2m_3m_4m_5}$$

$$+(c_{1,2}c_{2,3}k_{3,4}k_{4,5}+c_{1,2}k_{2,3}c_{3,4}k_{4,5}+c_{1,2}k_{2,3}k_{3,4}c_{4,5}+k_{1,2}c_{2,3}c_{3,4}k_{4,5}$$

$$+k_{1,2}c_{2,3}k_{3,4}c_{4,5}+k_{1,2}k_{2,3}c_{3,4}c_{4,5})\cdot\frac{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5}{m_1m_2m_3m_4m_5}\Big]\,\varphi^{(4)}+\Big[(c_{1,2}c_{2,3}c_{3,4}k_{4,5}$$

$$+c_{1,2}c_{2,3}k_{3,4}c_{4,5}+c_{1,2}k_{2,3}c_{3,4}c_{4,5}+k_{1,2}c_{2,3}c_{3,4}c_{4,5})\cdot\frac{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5}{m_1m_2m_3m_4m_5}\Big]\,\varphi^{(3)}$$

$$+c_{1,2}c_{2,3}c_{3,4}c_{4,5}\,\frac{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5}{m_1m_2m_3m_4m_5}\,\varphi^{(2)}=0 \qquad (225\,\mathrm{a})$$

Um die Gl. (225) unmittelbar in Determinantenform zu erhalten, braucht man nur die partikuläre Lösung $\varphi = C e^{wt}$ in die Gl. (223) einzuführen. Die Determinantengleichung lautet:

$$\begin{vmatrix} m_1 w^2 + k_{1,2} w + c_{1,2} & -(k_{1,2} w + c_{1,2}) & 0 \\ -(k_{1,2} w + c_{1,2}) & m_2 w^2 + (k_{1,2} + k_{2,3}) w + c_{1,2} + c_{2,3} & -(k_{2,3} w + c_{2,3}) \\ 0 & -(k_{2,3} w + c_{2,3}) & m_3 w^2 + (k_{2,3} + k_{3,4}) w + c_{2,3} + c_{3,4} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Bei fehlender Dämpfung ($k_{1,2} = k_{2,3} = \ldots = 0$) verschwinden alle ungeraden Ableitungen in den Gl. (225, a, b,) und man erhält wieder Gl. (45a bzw. 46b).

Die Auflösung der Gl. (225) erfordert die Wurzeln w der charakteristischen Gleichung:

$$w^{2n} + b_{2n-1} w^{2n-1} + \ldots + b_2 w^2 = 0 \,. \tag{225c}$$

Die Gleichung hat zwei Wurzelwerte $w = 0$; die übrigen $2(n-1)$ Wurzeln sind zu je zweien konjugiert komplex von der Form $w_x = -p_x + i\omega_x$ und $w'_x = -p_x - i\omega_x$. Das Integral der Gl. (225) lautet somit:

$$\varphi = B_0 + B_1 t + \sum_{x=1}^{x=n-1} [e^{-p_x t}(\alpha_x \sin\omega_x t + \beta_x \cos\omega_x t)] \,. \tag{226}$$

Darin sind α_x, β_x die $2n-2$ willkürlichen Integrationskonstanten, mit denen man die Lösung gegebenen Anfangsbedingungen anpassen kann. Für B_0 und B_1 gelten die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} B_0 &= \frac{C_0}{\sum\limits_{l=1}^{l=n} m_l} = \frac{\sum\limits_1^n (m_l \varphi_{l0})}{\sum\limits_1^n m_l} \\ B_1 &= \frac{C_1}{\sum\limits_{l=1}^{l=n} m_l} = \frac{\sum\limits_1^n (m_l \varphi'_{l0})}{\sum\limits_1^n m_l} \end{aligned}\right\} \tag{226a}$$

Nach Gl. (226) setzt sich der Drehwinkel jeder Masse zusammen aus dem konstanten Winkel B_0, dem von der gleichförmigen Drehung der Maschinenwelle herrührenden Winkel $B_1 t$ und aus der Summe der eigentlichen Schwingungswinkel. Im Vergleich zu Gl. (142) fehlt hier dafür das aperiodische Glied der äußeren Dämpfung. Das besagt, daß die innere Dämpfung als ein innerer Widerstand keinen Einfluß auf die Rotation des Gesamtsystems ausüben kann, während die äußere Dämpfung als äußere Kraft die Gesamtdrehung dauernd vermindern muß (bei fehlender äußerer Energiezufuhr). Der zu jedem Schwingungsglied gehörige Exponentialfaktor $e^{-p_x t}$ gibt das Abklingen der Schwingungen an. Aus den $n - 1$ verschiedenen Werten ω_x erhält man die $n - 1$ Eigenschwingungszahlen der inneren Dämpfung mit $n_x = \frac{30}{\pi}\,\omega_x$.

$$\begin{array}{cccc|l}
0 & \cdots & 0 & 0 & \\
0 & & 0 & 0 & \\
-(k_{3,4}w + c_{3.4}) & & 0 & 0 & \\
\cdot & & \cdot & \cdot & = 0 \quad (225\,\mathrm{b}) \\
\cdot & & \cdot & \cdot & \\
\cdot & & \cdot & \cdot & \\
0 & & -(k_{n-1,n}w + c_{n-1,n}) & m_n w^2 + k_{n-1,n}w + c_{n-1,n} &
\end{array}$$

Wir könnten nun für die innere Dämpfung in ähnlicher Weise wie früher für die äußere Dämpfung die Schwingungsformen der Eigenschwingungen, d. h. die Beziehungen aufsuchen, die zwischen den Integrationskonstanten α_x, β_x aller Massen bestehen müssen. Da aber in praktischen Fällen meist innere und äußere Dämpfungen gleichzeitig wirken, wollen wir lieber gleich diesen allgemeineren Fall der „gemischten" Dämpfung behandeln; denn aus ihm geht durch Nullsetzen der äußeren Dämpffaktoren der Fall der inneren Dämpfung ohne weiters hervor.

25. Gemischte Dämpfung. Eigenschwingungen.

Bezeichnet wie bisher k_h den Dämpffaktor der äußeren Dämpfung an der Masse m_h, $k_{h,h+1}$ den Dämpffaktor der inneren Dämpfung des Wellenstückes zwischen den Massen m_h und m_{h+1}, so lauten für die Eigenschwingungen des Massensystems die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left.\begin{array}{l}
m_1\varphi_1'' + k_1\varphi_1' + k_{1.2}(\varphi_1' - \varphi_2') + c_{1.2}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\
m_2\varphi_2'' + k_2\varphi_2' + k_{1.2}(\varphi_2' - \varphi_1') + k_{2.3}(\varphi_2' - \varphi_3') + c_{1.2}(\varphi_2 - \varphi_1) + c_{2.3}(\varphi_2 - \varphi_3) = 0 \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
m_h\varphi_h'' + k_h\varphi_h' + k_{h-1,h}(\varphi_h' - \varphi_{h-1}') + k_{h,h+1}(\varphi_h' - \varphi_{h+1}') + c_{h-1,h}(\varphi_h - \varphi_{h-1}) \\
\qquad + c_{h,h+1}(\varphi_h - \varphi_{h+1}) = 0 \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
m_n\varphi_n'' + k_n\varphi_n' + k_{n-1,n}(\varphi_n' - \varphi_{n-1}') + c_{n-1,n}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) = 0
\end{array}\right\} \quad (227)$$

Durch Addieren aller Gleichungen findet man:

$$\sum_{l=1}^{l=n}(m_l\varphi_l'' + k_l\varphi_l') = 0\,. \qquad (228)$$

Daraus ergibt sich durch Integration:

$$\sum_{l=1}^{l=n}(m_l\varphi_l' + k_l\varphi_l) = \mathrm{const} = \sum_{l=1}^{l=n}(m_l\varphi_{l_0}' + k_l\varphi_{l_0})\,. \qquad (229)$$

Der Verein der Gl. (227) liefert die für jede Masse gültige, allgemeine Differentialgleichung:

$$\varphi^{(2n)} + a_{2n-1}\varphi^{(2n-1)} + a_{2n-2}\varphi^{(2n-2)} + \ldots + a_2\varphi^{(2)} + a_1\varphi^{(1)} = 0\,. \qquad (230)$$

Darin sind die Beizahlen a konstante, gesetzmäßig aus den gegebenen Größen m_l, $c_{l,l+1}$, k_l und $k_{l,l+1}$ gebildete Ausdrücke. Um ihr Bildungsgesetz zu zeigen, wollen wir Gl. (230) ausführlich für 4 Massen anschreiben. (Wir beschränken uns hier auf 4 Massen, weil durch die Vermehrung der Dämpffaktoren die Anzahl der Kombinationen stark zunimmt):

$$
\begin{aligned}
&q^{(8)} + \left[\frac{k_1}{m_1} + k_{1,2}\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} + \frac{k_2}{m_2} + k_{2,3}\frac{m_2+m_3}{m_2 m_3} + \frac{k_3}{m_3} + k_{3,4}\frac{m_3+m_4}{m_3 m_4} + \frac{k_4}{m_4}\right] q^{(7)} \\
&+\left[c_{1,2}\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} + c_{2,3}\frac{m_2+m_3}{m_2 m_3} + c_{3,4}\frac{m_3+m_4}{m_3 m_4} + \frac{k_1 k_{1,2} + k_{1,2} k_2 + k_1 k_2}{m_1 m_2}\right. \\
&+\frac{k_1}{m_1} k_{2,3}\frac{m_2+m_3}{m_2 m_3} + \frac{k_1 k_3}{m_1 m_3} + \frac{k_1}{m_1} k_{3,4}\frac{m_3+m_4}{m_3 m_4} + \frac{k_1 k_4}{m_1 m_4} + k_{1,2} k_{2,3}\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1 m_2 m_3} \\
&+ k_{1,2}\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\frac{k_3}{m_3} + k_{1,2} k_{3,4}\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\cdot\frac{m_3+m_4}{m_3 m_4} + k_{1,2}\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\frac{k_4}{m_4} \\
&+\frac{k_2 k_{2,3} + k_2 k_3 + k_{2,3} k_3}{m_2 m_3} + \frac{k_2}{m_2} k_{3,4}\frac{m_3+m_4}{m_3 m_4} + \frac{k_2}{m_2}\frac{k_4}{m_4} + k_{2,3} k_{3,4}\frac{m_2+m_3+m_4}{m_2 m_3 m_4} \\
&\left.+ k_{2,3}\frac{m_2+m_3}{m_2 m_3}\cdot\frac{k_4}{m_4} + \frac{k_3 k_{3,4} + k_3 k_4 + k_{3,4} k_4}{m_3 m_4}\right] q^{(6)} + \left[\frac{c_{1,2} k_1 + c_{1,2} k_2}{m_1 m_2}\right. \\
&+ (c_{1,2} k_{2,3} + c_{2,3} k_{1,2})\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1 m_2 m_3} + c_{1,2}\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\frac{k_3}{m_3} + (c_{1,2} k_{3,4} + c_{3,4} k_{1,2}) \\
&\cdot\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\cdot\frac{m_3+m_4}{m_3 m_4} + c_{1,2}\cdot\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\frac{k_4}{m_4} + c_{2,3}\frac{m_2+m_3}{m_2 m_3}\frac{k_1}{m_1} + \frac{c_{2,3} k_2 + c_{2,3} k_3}{m_2 m_3} \\
&+ (c_{2,3} k_{3,4} + c_{3,4} k_{2,3})\frac{m_2+m_3+m_4}{m_2 m_3 m_4} + c_{2,3}\frac{m_2+m_3}{m_2 m_3}\frac{k_4}{m_4} + c_{3,4}\frac{m_3+m_4}{m_3 m_4}\frac{k_1}{m_1} \\
&+ c_{3,4}\frac{m_3+m_4}{m_3 m_4}\frac{k_2}{m_2} + \frac{c_{3,4} k_3 + c_{3,4} k_4}{m_3 m_4} + (k_1 k_{1,2} k_{2,3} + k_1 k_{1,2} k_3 + k_1 k_2 k_{2,3} + k_1 k_2 k_3 \\
&+ k_1 k_{2,3} k_3 + k_{1,2} k_2 k_{2,3} + k_{1,2} k_2 k_3 + k_{1,2} k_{2,3} k_3)\cdot\frac{1}{m_1 m_2 m_3} + (k_1 k_{1,2} k_{3,4} + k_1 k_2 k_{3,4} \\
&+ k_{1,2} k_2 k_{3,4})\frac{m_3+m_4}{m_1 m_2 m_3 m_4} + (k_1 k_{1,2} k_4 + k_1 k_2 k_4 + k_{1,2} k_2 k_4)\frac{1}{m_1 m_2 m_4} \\
&+ k_1 k_{2,3} k_{3,4}\frac{m_2+m_3+m_4}{m_1 m_2 m_3 m_4} + k_1 k_{2,3} k_4\frac{m_2+m_3}{m_1 m_2 m_3 m_4} + (k_1 k_3 k_{3,4} + k_1 k_3 k_4 \\
&+ k_1 k_{3,4} k_4)\frac{1}{m_1 m_3 m_4} + k_{1,2} k_{2,3} k_{3,4}\frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{m_1 m_2 m_3 m_4} + k_{1,2} k_{2,3} k_4\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1 m_2 m_3 m_4} \\
&+ (k_{1,2} k_3 k_{3,4} + k_{1,2} k_3 k_4 + k_{1,2} k_{3,4} k_4)\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2 m_3 m_4} + (k_2 k_{2,3} k_{3,4} + k_2 k_{2,3} k_4 \\
&\left.+ k_2 k_3 k_{3,4} + k_2 k_3 k_4 + k_2 k_{3,4} k_4 + k_{2,3} k_3 k_{3,4} + k_{2,3} k_3 k_4 + k_{2,3} k_{3,4} k_4)\frac{1}{m_2 m_3 m_4}\right] q^{(5)} \\
&+\left[c_{1,2} c_{2,3}\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1 m_2 m_3} + c_{1,2} c_{3,4}\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\frac{m_3+m_4}{m_3 m_4} + c_{2,3} c_{3,4}\frac{m_2+m_3+m_4}{m_2 m_3 m_4}\right. \\
&+ (c_{1,2} k_1 k_{2,3} + c_{1,2} k_1 k_3 + c_{1,2} k_2 k_{2,3} + c_{1,2} k_2 k_3 + c_{1,2} k_{2,3} k_3 + c_{2,3} k_1 k_{1,2} + c_{2,3} k_1 k_2 \\
&+ c_{2,3} k_1 k_3 + c_{2,3} k_{1,2} k_2 + c_{2,3} k_{1,2} k_3)\frac{1}{m_1 m_2 m_3} + (c_{1,2} k_1 k_{3,4} + c_{1,2} k_2 k_{3,4} + c_{3,4} k_1 k_{1,2}
\end{aligned}
$$

$$+ c_{3,4} k_1 k_2 + c_{3,4} k_{1,2} k_2) \frac{m_3 + m_4}{m_1 m_2 m_3 m_4} + (c_{1,2} k_1 k_4 + c_{1,2} k_2 k_4) \cdot \frac{1}{m_1 m_2 m_4} + (c_{1,2} k_{2,3} k_{3,4}$$
$$+ c_{2,3} k_{1,2} k_{3,4} + c_{3,4} k_{1,2} k_{2,3}) \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{m_1 m_2 m_3 m_4} + (c_{1,2} k_{2,3} k_4 + c_{2,3} k_{1,2} k_4)$$
$$\cdot \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3 m_4} + (c_{1,2} k_3 k_{3,4} + c_{1,2} k_3 k_4 + c_{1,2} k_{3,4} k_4 + c_{3,4} k_{1,2} k_3$$
$$+ c_{3,4} k_{1,2} k_4) \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2 m_3 m_4} + (c_{2,3} k_1 k_{3,4} + c_{3,4} k_1 k_{2,3}) \frac{m_2 + m_3 + m_4}{m_1 m_2 m_3 m_4} + (c_{2,3} k_2 k_{3,4}$$
$$+ c_{2,3} k_2 k_4 + c_{2,3} k_3 k_{3,4} + c_{2,3} k_3 k_4 + c_{2,3} k_{3,4} k_4 + c_{3,4} k_2 k_{2,3} + c_{3,4} k_2 k_3 + c_{3,4} k_2 k_4$$
$$+ c_{3,4} k_{2,3} k_3 + c_{3,4} k_{2,3} k_4) \frac{1}{m_2 m_3 m_4} + (c_{3,4} k_1 k_3 + c_{3,4} k_1 k_4) \frac{1}{m_1 m_3 m_4}$$
$$+ (k_1 k_{1,2} k_{2,3} k_{3,4} + k_1 k_{1,2} k_{2,3} k_4 + k_1 k_{1,2} k_3 k_{3,4} + k_1 k_{1,2} k_3 k_4 + k_1 k_{1,2} k_{3,4} k_4$$
$$+ k_1 k_2 k_{2,3} k_{3,4} + k_1 k_2 k_{2,3} k_4 + k_1 k_2 k_3 k_{3,4} + k_1 k_2 k_3 k_4 + k_1 k_2 k_{3,4} k_4 + k_1 k_{2,3} k_3 k_{3,4}$$
$$+ k_1 k_{2,3} k_3 k_4 + k_1 k_{2,3} k_{3,4} k_4 + k_{1,2} k_2 k_{2,3} k_{3,4} + k_{1,2} k_2 k_{2,3} k_4 + k_{1,2} k_2 k_3 k_{3,4}$$
$$+ k_{1,2} k_2 k_3 k_4 + k_{1,2} k_2 k_{3,4} k_4 + k_{1,2} k_{2,3} k_3 k_{3,4} + k_{1,2} k_{2,3} k_3 k_4 + k_{1,2} k_{2,3} k_{3,4} k_4)$$
$$\left.\cdot \frac{1}{m_1 m_2 m_3 m_4}\right] \varphi^{(4)} + \left[c_{1,2} c_{2,3} (k_1 + k_2 + k_3) \frac{1}{m_1 m_2 m_3} + (c_{1,2} c_{2,3} k_{3,4} + c_{1,2} c_{3,4} k_{2,3}\right.$$
$$+ c_{2,3} c_{3,4} k_{1,2}) \cdot \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{m_1 m_2 m_3 m_4} + c_{1,2} c_{2,3} k_4 \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3 m_4}$$
$$+ c_{1,2} c_{3,4} (k_1 + k_2) \frac{m_3 + m_4}{m_1 m_2 m_3 m_4} + c_{1,2} c_{3,4} (k_3 + k_4) \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2 m_3 m_4}$$
$$+ c_{2,3} c_{3,4} k_1 \frac{m_2 + m_3 + m_4}{m_1 m_2 m_3 m_4} + c_{2,3} c_{3,4} (k_2 + k_3 + k_4) \frac{1}{m_2 m_3 m_4}$$
$$+ \frac{c_{1,2}}{m_1 m_2 m_3 m_4} (k_1 k_{2,3} k_{3,4} + k_1 k_{2,3} k_4 + k_1 k_3 k_{3,4} + k_1 k_3 k_4 + k_1 k_{3,4} k_4 + k_2 k_{2,3} k_{3,4}$$
$$+ k_2 k_{2,3} k_4 + k_2 k_3 k_{3,4} + k_2 k_3 k_4 + k_2 k_{3,4} k_4 + k_{2,3} k_3 k_{3,4} + k_{2,3} k_3 k_4 + k_{2,3} k_{3,4} k_4)$$
$$+ \frac{c_{2,3}}{m_1 m_2 m_3 m_4} (k_1 k_{1,2} k_{3,4} + k_1 k_{1,2} k_4 + k_1 k_2 k_{3,4} + k_1 k_2 k_4 + k_1 k_3 k_{3,4} + k_1 k_3 k_4$$
$$+ k_1 k_{3,4} k_4 + k_{1,2} k_2 k_{3,4} + k_{1,2} k_2 k_4 + k_{1,2} k_3 k_{3,4} + k_{1,2} k_3 k_4 + k_{1,2} k_{3,4} k_4)$$
$$+ \frac{c_{3,4}}{m_1 m_2 m_3 m_4} (k_1 k_{1,2} k_{2,3} + k_1 k_{1,2} k_3 + k_1 k_{1,2} k_4 + k_1 k_2 k_{2,3} + k_1 k_2 k_3 + k_1 k_2 k_4$$
$$+ k_1 k_{2,3} k_3 + k_1 k_{2,3} k_4 + k_{1,2} k_2 k_{2,3} + k_{1,2} k_2 k_3 + k_{1,2} k_2 k_4 + k_{1,2} k_{2,3} k_3$$
$$\left.+ k_{1,2} k_{2,3} k_4)\right] \varphi^{(3)} + \left[c_{1,2} c_{2,3} c_{3,4} \cdot \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{m_1 m_2 m_3 m_4} + (c_{1,2} c_{2,3} (k_1 k_{3,4} + k_1 k_4\right.$$
$$+ k_2 \cdot k_{3,4} + k_2 k_4 + k_3 k_{3,4} + k_3 k_4 + k_{3,4} k_4) + c_{1,2} c_{3,4} (k_1 k_{2,3} + k_1 k_3 + k_1 k_4$$
$$+ k_2 k_{2,3} + k_2 k_3 + k_2 k_4 + k_{2,3} k_3 + k_{2,3} k_4) + c_{2,3} c_{3,4} (k_1 k_{1,2} + k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_1 k_4$$
$$\left.+ k_{1,2} k_2 + k_{1,2} k_3 + k_{1,2} k_4)) \cdot \frac{1}{m_1 m_2 m_3 m_4}\right] \varphi^{(2)}$$
$$+ \frac{c_{1,2} c_{2,3} c_{3,4}}{m_1 m_2 m_3 m_4} \cdot (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \varphi^{(1)} = 0 . \qquad (230\text{a})$$

Die Gl. (230) wird unmittelbar in Determinantenform erhalten durch Einführung des Teilintegrals $\varphi = Ce^{wt}$ in die Ausgangsgleichungen (227). Sie lautet:

$$\left| \begin{array}{ccc} m_1 w^2+(k_1+k_{1,2})\,w+c_{1,2} & -(k_{1,2}\,w+c_{1,2}) & 0 \\ -(k_{1,2}\,w+c_{1,2}) & m_2 w^2+(k_{1,2}+k_2+k_{2,3})\,w+c_{1,2}+c_{2,3} & -(k_{2,3}\,w+c_{2,3}) \\ 0 & -(k_{2,3}\,w+c_{2,3}) & m_3 w^2+(k_{2,3}+k_3+k_{3,4})\,w+c_{2,3}+c_{3,} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right.$$

Die charakteristische Gleichung:

$$w^{2n}+a_{2n-1}w^{2n-1}+a_{2n-2}w^{2n-2}+\ldots+a_2w^2+a_1w=0 \qquad (230\,\text{c})$$

hat eine Wurzel 0 und eine reelle negative Wurzel $w_1=-q$; die übrigen Wurzeln sind komplex von der Form $(w_x)=-p_x \pm i\omega_x$. Sonach ist das Integral der Gl. (230):

$$\varphi=C_0+Ce^{-qt}+\sum_{x=1}^{x=n-1}\left[e^{-p_x t}(\alpha_x\sin\omega_x t+\beta_x\cos\omega_x t)\right]. \qquad (231)$$

Darin sind C, α_x, β_x die willkürlichen Integrationskonstanten, die sich aus den gegebenen Anfangsbedingungen bestimmen. Für C_0 gilt gemäß Gl. (229):

$$C_0=\frac{\sum\limits_{l=1}^{l=n}(m_l\varphi'_{l_0}+k_l\varphi_{l_0})}{\sum\limits_{l=1}^{l=n}(k_l)}. \qquad (231\,\text{a})$$

Die $n-1$ verschiedenen Eigenschwingungszahlen des Systems erhält man aus:

$$n_x=\frac{30}{\pi}\,\omega_x\,.$$

Um die zwischen den Integrationskonstanten aller Einzelmassen bestehenden Beziehungen zu erhalten, führen wir die Teilintegrale der Lösungsgleichung (231) in die Ausgangsgleichungen (227) ein. Für die Konstanten C des aperiodischen Gliedes $\varphi=Ce^{-qt}$ erhalten wir so das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{r} (m_1q^2-(k_1+k_{1,2})\,q+c_{1,2})\,C_1-(c_{1,2}-k_{1,2}\,q)\,C_2=0 \\ -(c_{1,2}-k_{1,2}\,q)\,C_1+(m_2q^2-(k_{1,2}+k_2+k_{2,3})\,q+(c_{1,2}+c_{2,3}))\,C_2-(c_{2,3}-k_{2,3}\,q)\,C_3=0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ -(c_{n-1,n}-k_{n-1,n}\,q)\,C_{n-1}+(m_nq^2-(k_{n-1,n}+k_n)\,q+c_{n-1,n})\,C_n=0\,. \end{array}\right\} (232$$

Da die Determinante des Systems, Gl. (230b), für den Wert q verschwindet, so ergeben die Gl. (232) nur das Verhältnis der Werte C. Wir erhalten durch schrittweise Berechnung:

$$
\begin{array}{ccc|l}
0 \quad \cdots & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & \\
-(k_{3,4}\,w + c_{3,4}) & 0 & 0 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & = 0\,. \quad (230\text{b}) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
0 & -(k_{n-1,n}\,w + c_{n-1,n}) & m_n w^2 + (k_{n-1,n} + k_n)\,w + c_{n-1,n} &
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{ll}
C_2 & = C_1 - (k_1 q C_1 - m_1 q^2 C_1) : (c_{1,2} - k_{1,2}\, q) \\
C_3 & = C_2 - (q(k_1 C_1 + k_2 C_2) - q^2(m_1 C_1 + m_2 C_2)) : (c_{2,3} - k_{2,3}\, q) \\
\cdot & \qquad \cdot \\
\cdot & \qquad \cdot \\
C_{h+1} & = C_h - \left(q \sum_1^h (k_l C_l) - q^2 \sum_1^h (m_l C_l)\right) : (c_{h,h+1} - k_{h,h+1}\, q) \\
\cdot & \qquad \cdot \\
\cdot & \qquad \cdot \\
C_n & = C_{n-1} - \left(q \sum_1^{n-1} (k_l C_l) - q^2 \sum_1^{n-1} (m_l C_l)\right) : (c_{n-1,n} - k_{n-1,n}\, q)
\end{array}\right\} \qquad (233)
$$

Die Gl. (228) ergibt für die Werte C die Beziehung:

$$\sum_{l=1}^{l=n} [(q m_l - k_l)\, C_l] = 0\,. \qquad (234)$$

Für die Konstanten α, β der Schwingungsglieder: $\varphi = e^{-pt}$ $(\alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t)$ erhält man ebenso die allgemeine Gleichung:

$$
\begin{aligned}
& \sin \omega t \cdot \{m_h(-(\omega^2 - p^2)\,\alpha_h + 2p\omega\beta_h) - (k_{h-1,h} + k_h + k_{h,h+1})(p\alpha_h + \omega\beta_h) \\
& + (c_{h-1,h} + c_{h,h+1})\,\alpha_h + k_{h-1,h}(\omega\beta_{h-1} + p\alpha_{h-1}) - c_{h-1,h}\,\alpha_{h-1} + k_{h,h+1}(\omega\beta_{h+1} \\
& + p\alpha_{h+1}) - c_{h,h+1}\,\alpha_{h+1}\} + \cos \omega t \cdot \{m_h(-(\omega^2 - p^2)\,\beta_h - 2p\omega\alpha_h) - (k_{h-1,h} + k_h \\
& + k_{h,h+1})(p\beta_h - \omega\alpha_h) + (c_{h-1,h} + c_{h,h+1})\,\beta_h + k_{h-1,h}(-\omega\alpha_{h-1} + p\beta_{h-1}) \\
& - c_{h-1,h}\,\beta_{h-1} + k_{h,h+1}(-\omega\alpha_{h+1} + p\beta_{h+1}) - c_{h,h+1}\,\beta_{h+1}\} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Die $\{\ \}$ Klammerfaktoren von $\sin \omega t$ und $\cos \omega t$ müssen jeder für sich verschwinden, woraus die beiden Gleichungen folgen:

$$
\left.\begin{aligned}
& [-m_h(\omega^2 - p^2) - (k_{h-1,h} + k_h + k_{h,h+1})\,p + c_{h-1,h} + c_{h,h+1}]\,\alpha_h \\
& + [2m_h p - (k_{h-1,h} + k_h + k_{h,h+1})]\,\omega\beta_h + (k_{h-1,h}\,p - c_{h-1,h})\,\alpha_{h-1} \\
& + k_{h-1,h}\,\omega\beta_{h-1} + (k_{h,h+1}\,p - c_{h,h+1})\,\alpha_{h+1} + k_{h,h+1}\,\omega\beta_{h+1} = 0\,.
\end{aligned}\right\} \quad (235\text{a})
$$

$$
\left.\begin{aligned}
& [-m_h(\omega^2 - p^2) - (k_{h-1,h} + k_h + k_{h,h+1})\,p + c_{h-1,h} + c_{h,h+1}]\,\beta_h \\
& + [-2m_h p + (k_{h-1,h} + k_h + k_{h,h+1})]\,\omega\alpha_h + (k_{h-1,h}\,p - c_{h-1,h})\,\beta_{h-1} \\
& - k_{h-1,h}\,\omega\alpha_{h-1} + (k_{h,h+1}\,p - c_{h,h+1})\,\beta_{h+1} - k_{h,h+1}\,\omega\alpha_{h+1} = 0\,.
\end{aligned}\right\} \quad (235\text{b})
$$

Man erkennt, daß man Gl. (235b) auch erhält, wenn man in Gl. (235a) α durch β und β durch $-\alpha$ ersetzt.

Die Gl. (235a und b) denken wir uns für alle Massen angeschrieben, indem wir h nacheinander $= 1, 2 \ldots n$ annehmen und alle Zahlen null setzen, deren einer Zeiger den Wert 1 unter- oder den Wert n überschreitet. Aus sämtlichen Gleichungen berechnen wir wieder Schritt für Schritt die

Ausschläge α, β einer Masse aus den Ausschlägen der vorausgehenden Massen. So erhalten wir für $h = 1$:

$$(c_{1,2} - k_{1,2}\,p)\,\alpha_2 - k_{1,2}\,\omega\,\beta_2 = [-m_1(\omega^2 - p^2) - (k_1 + k_{1,2})\,p + c_{1,2}]\,\alpha_1$$
$$+ (2m_1 p - (k_1 + k_{1,2}))\,\omega\,\beta_1\,,$$
$$(c_{1,2} - k_{1,2}\,p)\,\beta_2 + k_{1,2}\,\omega\,\alpha_2 = [-m_1(\omega^2 - p^2) - (k_1 + k_{1,2})\,p + c_{1,2}]\,\beta_1$$
$$- (2m_1 p - (k_1 + k_{1,2}))\,\omega\,\alpha_1\,.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_2 = \alpha_1 - [((m_1(\omega^2 - p^2) + k_1 p)\,c_{1,2} + (\omega^2 + p^2)(m_1 p - k_1)\,k_{1,2})\,\alpha_1 \\ + ((k_1 - 2m_1 p)\,c_{1,2} + m_1 k_{1,2}(\omega^2 + p^2))\,\omega\,\beta_1] : ((c_{1,2} - k_{1,2}\,p)^2 + (k_{1,2}\,\omega)^2)\end{aligned}\right\}\quad(236\,\text{a})$$

$$\left.\begin{aligned}\beta_2 = \beta_1 - [((m_1(\omega^2 - p^2) + k_1 p)\,c_{1,2} + (\omega^2 + p^2)(m_1 p - k_1)\,k_{1,2})\,\beta_1 \\ - ((k_1 - 2m_1 p)\,c_{1,2} + m_1 k_{1,2}(\omega^2 + p^2))\,\omega\,\alpha_1] : ((c_{1,2} - k_{1,2}\,p)^2 + (k_{1,2}\,\omega)^2)\end{aligned}\right\}\quad(236\,\text{b})$$

Auch hier entsteht die zweite Gleichung, wenn man in der ersten α durch β und β durch $-\alpha$ ersetzt.

Jetzt schreibe man das Gleichungspaar (235a und b) für $h = 2$ in derselben Weise an und berechne daraus α_3 und β_3. Man wird mit Berücksichtigung von Gl. (236a und b) nach einigen Zwischenrechnungen finden:

$$\alpha_3 = \alpha_2 - [((\omega^2 - p^2)(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2) + p\,(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2))\,c_{2,3}$$
$$+ (\omega^2 + p^2)\,(p\,(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2) - (k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2))\,k_{2,3} + (k_1\beta_1 + k_2\beta_2$$
$$- 2p\,(m_1\beta_1 + m_2\beta_2))\,\omega\,c_{2,3} + (\omega^2 + p^2)\,(m_1\beta_1 + m_2\beta_2)\,\omega\,k_{2,3}] : ((c_{2,3} - k_{2,3}\,p)^2$$
$$+ (k_{2,3}\,\omega)^2)\,,$$
$$\beta_3 = \beta_2 - [((\omega^2 - p^2)(m_1\beta_1 + m_2\beta_2) + p\,(k_1\beta_1 + k_2\beta_2)$$
$$- \omega\,(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) + 2p\omega\,(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2))\,c_{2,3} + (\omega^2 + p^2)\,(p(m_1\beta_1 + m_2\beta_2)$$
$$- (k_1\beta_1 + k_2\beta_2) - \omega\,(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2))\,k_{2,3}] : ((c_{2,3} - k_{2,3}\,p)^2 + (k_{2,3}\,\omega)^2)\,.$$

In der gleichen Weise stellt man die allgemeinen Beziehungen auf:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{h+1} = \alpha_h - \{[(\omega^2 - \beta^2)\sum_{l=1}^{l=h}(m_l\alpha_l) + p\sum_1^h(k_l\alpha_l) - 2p\omega\sum_1^h(m_l\beta_l) \\ + \omega\sum_1^h(k_l\beta_l)]\cdot c_{h,h+1} + (\omega^2 + p^2)\cdot[p\sum_1^h(m_l\alpha_l) - \sum_1^h(k_l\alpha_l) \\ + \omega\sum_1^h(m_l\beta_l)]\cdot k_{h,h+1}\} : ((c_{h,h+1} - k_{h,h+1}\,p)^2 + (k_{h,h+1}\,\omega)^2)\end{aligned}\right\}\quad(237\,\text{a})$$

$$\left.\begin{aligned}\beta_{h+1} = \beta_h - \{[(\omega^2 - p^2)\sum_1^h(m_l\beta_l) + p\sum_1^h(k_l\beta_l) + 2p\omega\sum_1^h(m_l\alpha_l) \\ - \omega\sum_1^h(k_l\alpha_l)]\cdot c_{h,h+1} + (\omega^2 + p^2)\cdot[p\sum_1^h(m_l\beta_l) - \sum_1^h(k_l\beta_l) \\ - \omega\sum_1^h(m_l\alpha_l)]\cdot k_{h,h+1}\} : ((c_{h,h+1} - k_{h,h+1}\,p)^2 + (k_{h,h+1}\,\omega)^2)\end{aligned}\right\}\quad(237\,\text{b})$$

Die Gl. (228) liefert hierzu noch die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}(\omega^2 - p^2)\sum_1^n(m_l\alpha_l) + p\sum_1^n(k_l\alpha_l) - 2p\omega\sum_1^n(m_l\beta_l) + \omega\sum_1^n(k_l\beta_l) = 0 \\ (\omega^2 - p^2)\sum_1^n(m_l\beta_l) + p\sum_1^n(k_l\beta_l) + 2p\omega\sum_1^n(m_l\alpha_l) - \omega\sum_1^n(k_l\alpha_l) = 0\end{aligned}\right\}\quad(238)$$

Aus den allgemeinen Gleichungen (237) und (238) für gemischte Dämpfung erhält man die früheren Gl. (147) und (148) der reinen äußeren Dämpfung wieder, wenn man die inneren Dämpffaktoren $k_{h,h+1} = 0$ setzt; man erhält die Gleichungen der reinen inneren Dämpfung, wenn die äußeren Dämpffaktoren $k_l = 0$ gesetzt werden.

Hinsichtlich der Ausführung der Berechnung und der Näherungen für die Werte q, p und ω darf ich hier wohl auf die Bemerkungen und die Näherungsgleichungen (149) und (151) zur äußeren Dämpfung verweisen.

Zahlenbeispiele. Wir wollen hier nur die Anwendung an einfachen Beispielen zeigen und wählen des Vergleiches halber dazu dieselben Zwei- und Dreimassensysteme, die wir schon als Rechnungsbeispiele der äußeren Dämpfung behandelt haben.

1. Zweimassensystem: $m_1 = 1 \cdot m;\ m_2 = 4\,m;\ k_1 = 0{,}3\sqrt{mc};$

$$k_2 = 0{,}6\sqrt{mc}; \qquad k_{1.2} = 0{,}1\sqrt{mc}. \qquad \left(c \equiv \frac{GJ_0}{l_{1,2}}\right).$$

a) Nur innere Dämpfung wirksam $k_1 = k_2 = 0$.

$$\text{Gl. (225a):}\quad \varphi^{(4)} + k_{1.2}\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\varphi^{(3)} + c_{1.2}\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\varphi^{(2)} = 0.$$

$$\text{Gl. (225c):}\quad w^4 + 0{,}1\cdot\frac{1+4}{1\cdot 4}\sqrt{\frac{c}{m}}\,w^3 + 1\cdot\frac{1+4}{1\cdot 4}\frac{c}{m}\,w^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat die Wurzeln: $w_1 = w_2 = 0$.

$$w_{3.4} = \left(-\frac{0{,}5}{8} \pm i\sqrt{\frac{5}{4} - \frac{0{,}25}{64}}\right)\cdot\sqrt{\frac{c}{m}} = (-0{,}0625 \pm i\cdot 1{,}1162857)\sqrt{\frac{c}{m}}.$$

$$\text{Gl. (226):}\quad \varphi = B_0 + B_1 t + e^{-0{,}0625\sqrt{\frac{c}{m}}\,t}\left(\alpha\sin 1{,}1162857\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right.$$
$$\left. + \beta\cos 1{,}1162857\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right).$$

Gl. (237) für innere Dämpfung allein:

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \{[(\omega^2 - p^2)\,m_1\alpha_1 - 2p\omega m_1\beta_1]\,c_{1,2} + (\omega_2 + p^2)$$
$$[p m_1\alpha_1 + \omega m_1\beta_1]\cdot k_{1,2}\} : ((c_{1,2} - k_{1,2}\,p)^2 + (k_{1,2}\,\omega)^2).$$

$$p = 0{,}0625\sqrt{\frac{c}{m}}; \quad \omega = 1{,}1162857\sqrt{\frac{c}{m}}; \quad \omega^2 = 1{,}24609375\frac{c}{m};$$

$$\omega^2 - p^2 = 1{,}24218750\frac{c}{m}; \quad \omega^2 + p^2 = 1{,}25\frac{c}{m}$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \{[1{,}24218750\cdot\alpha_1\cdot c - \omega\cdot 2\cdot 0{,}0625\beta_1\sqrt{mc}]\cdot c + 1{,}25\frac{c}{m}$$
$$[0{,}0625\alpha_1\sqrt{mc} + \omega\beta_1\cdot m]\cdot 0{,}1\cdot\sqrt{mc}\} : ((c - 0{,}1\,.\,0{,}0625c)^2 + 0{,}1^2\cdot 1{,}24609375c^2)$$
$$= \alpha_1 - \{c^2\alpha_1(1{,}24218750 + 0{,}00781250) + \omega\beta_1\sqrt{mc}(-0{,}125 + 0{,}125)\cdot c\}$$
$$: c^2\cdot(0{,}9875390625 + 0{,}0124609375) = \alpha_1 - 1{,}25\,\alpha_1 = -0{,}25\,\alpha_1\,.$$

$$\beta_2 = -0{,}25\beta_1\,.$$

Die Ausschläge der beiden Massen sind demnach phasengleich. Die Schwingungsform ist die gleiche wie ohne Dämpfung. Die Eigenschwingungszahl ist etwas kleiner als jene des dämpfungsfreien Systems ($\omega^2 = 1{,}2461$ gegen $\omega_0^2 = 1{,}25$ ohne Dämpfung).

b) Gemischte Dämpfung:

Gl. (230a) für 2 Massen:

$$\varphi^{(4)} + \left(\frac{k_1}{m_1} + k_{1,2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} + \frac{k_2}{m_2}\right) \varphi^{(3)} + \left(c_{1,2} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} + \frac{k_1 k_{1,2} + k_1 k_2 + k_{1,2} k_2}{m_1 m_2}\right) \varphi^{(2)}$$
$$+ \frac{c_{1,2}(k_1 + k_2)}{m_1 m_2} \varphi^{(1)} = 0 .$$

$$\text{Gl. (230c): } w^4 + \left(\frac{0{,}3}{1} + 0{,}1 \cdot \frac{1+4}{1 \cdot 4} + \frac{0{,}6}{4}\right) \sqrt{\frac{c}{m}}\, w^3$$
$$+ \left(1 \cdot \frac{1+4}{1 \cdot 4} + \frac{0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}1 \cdot 0{,}6}{1 \cdot 4}\right) \frac{c}{m} w^2$$
$$+ \frac{1 \cdot (0{,}3 + 0{,}6)}{1 \cdot 4} \left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{3}{2}} w = 0 .$$

$$w^4 + 0{,}575 \left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} w^3 + 1{,}3175 \frac{c}{m} w^2 + 0{,}225 \left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{3}{2}} w = 0 .$$

Die Wurzeln sind:

$$w_1 = 0; \qquad w_2 = -0{,}1805366 \sqrt{\frac{c}{m}} ;$$

$$w_{3,4} = (-0{,}1972317 \pm i \cdot 1{,}0988105) \sqrt{\frac{c}{m}} .$$

$$\text{Gl. (231): } \varphi = C_0 + C e^{-0{,}1805366 \sqrt{\frac{c}{m}} t} + e^{-0{,}1972317 \sqrt{\frac{c}{m}} t} \left(\alpha \sin 1{,}0988105 \sqrt{\frac{c}{m}}\, t\right.$$
$$\left. + \beta \cos 1{,}0988105 \sqrt{\frac{c}{m}}\, t\right) .$$

$$\text{Gl. (233): } C_2 = C_1 - C_1 \cdot 0{,}1805366 \sqrt{\frac{c}{m}} (0{,}3 - 1 \cdot 0{,}1805366) \sqrt{mc} :$$
$$(1 - 0{,}1 \cdot 0{,}1805366) c = C_1 - C_1 \cdot 0{,}0215675 : 0{,}9819463 = 0{,}9780360\, C_1 .$$

$$\text{Gl. (234): } (m_1 q - k_1) C_1 + (m_2 q - k_2) C_2 = -0{,}1194634$$
$$+ 0{,}12211464 \cdot 0{,}9789360 = 0 .$$

$$\text{Gl. (237a): } \alpha_2 = \alpha_1 - \{[(\omega^2 - p^2) m_1 \alpha_1 + p k_1 \alpha_1 - 2 p \omega m_1 \beta_1 + \omega k_1 \beta_1] c_{1,2}$$
$$+ (\omega^2 + p^2) \cdot [(p m_1 - k_1) \alpha_1 + \omega m_1 \beta_1] \cdot k_{1,2}\} : ((c_{1,2} - k_{1,2} p)^2 + k_{1,2}^2 \omega^2)$$
$$= \alpha_1 - \{1{,}2276537\, c^2 \alpha_1 - \omega \beta_1 \cdot 0{,}0944634 \sqrt{mc} \cdot c$$
$$- 0{,}0128078\, c^2 \alpha_1 + \omega \beta_1 \cdot 0{,}1246285 \sqrt{mc} \cdot c\} : 0{,}9730165$$
$$= \alpha_1 - (1{,}2148459\, \alpha_1 + 0{,}0331457\, \beta_1) : 0{,}9730165$$

$$\alpha_2 = -0{,}2485358\, \alpha_1 - 0{,}0340649\, \beta_1$$
$$\beta_2 = -0{,}2485358\, \beta_1 + 0{,}0340649\, \alpha_1$$
$$m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 = 0{,}0058570\, \alpha_1 - 0{,}1362596\, \beta_1$$
$$m_1 \beta_1 + m_2 \beta_2 = 0{,}0058570\, \beta_1 + 0{,}1362596\, \alpha_1$$
$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 = 0{,}1508785\, \alpha_1 - 0{,}0204389\, \beta_1$$
$$k_1 \beta_1 + k_2 \beta_2 = 0{,}1508785\, \beta_1 + 0{,}0204389\, \alpha_1$$

Gl. (238): $(\omega^2 - p^2)\sum_1^2 (m\alpha) + p\sum_1^2 (k\alpha) - 2p\omega\sum_1^2 (m\beta) + \omega\sum_1^2 (k\beta)$

$= (0{,}0068438 + 0{,}0297580 - 0{,}0590604 + 0{,}0224585)\alpha_1$

$+ (-0{,}1592172 - 0{,}0040312 - 0{,}0025387 + 0{,}1657869)\beta_1 = 0 \cdot \alpha_1 + 0\beta_1 = 0\,.$

Die Näherungsgleichung (149) liefert $q \sim 0{,}18\sqrt{\frac{c}{m}}$ gegen $q = 0{,}1805366\sqrt{\frac{c}{m}}$ als genauem Wert. Die Näherung (151) ergibt wegen $a_{2n-1} = 0{,}575\sqrt{\frac{c}{m}}$ (siehe charakteristische Gleichung):

$$p_m \sim \frac{0{,}575 - 0{,}18}{2 \cdot 1} \cdot \sqrt{\frac{c}{m}} = 0{,}1975\sqrt{\frac{c}{m}}$$

gegenüber dem genauen Wert $p = 0{,}1972317\sqrt{\frac{c}{m}}$.

2. Dreimassensystem: $m_1 = 1\,m$; $m_2 = 2\,m$; $m_3 = 3\,m$;

$c_{1.2} = \frac{GJ}{3l} = \frac{c}{3}$; $c_{2.3} = \frac{c}{2}$; $k_1 = 0{,}1\sqrt{mc}$; $k_2 = 0{,}2\sqrt{mc}$; $k_3 = 0{,}3\sqrt{mc}$;

$k_{1,2} = 0{,}16\sqrt{mc}$; $k_{2.3} = 0{,}24\sqrt{mc}$.

a) Innere Dämpfung allein wirksam: $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

Gl. (225a): $q^{(6)} + \left(k_{1.2}\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} + k_{2.3}\frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3}\right) q^{(5)} + \left(c_{1.2}\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} + c_{2.3}\frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3}\right.$

$\left. + k_{1.2}k_{2.3}\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3}\right) q^{(4)} + (c_{1.2}k_{2.3} + c_{2.3}k_{1.2})\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3} q^{(3)}$

$+ c_{1.2}c_{2.3}\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3} q^{(2)} = 0\,.$

Gl. (225c): $w^6 + 0{,}44\sqrt{\frac{c}{m}}\, w^5 + 0{,}9550667\,\frac{c}{m}\, w^4 + 0{,}16\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{3}{2}} w^3$

$+ 0{,}1666667\left(\frac{c}{m}\right)^2 w^2 = 0\,.$

Diese Gleichung hat die Wurzeln: $w_{1.2} = 0$; $w_{3.4} = (-0{,}06 \pm i \cdot 0{,}49638695)\sqrt{\frac{c}{m}}$;

$w_{5.6} = (-0{,}16 \pm i \cdot 0{,}80066667)\sqrt{\frac{c}{m}}$.

1. Eigenschwingung: $p = 0{,}06\sqrt{\frac{c}{m}}$; $\omega = 0{,}49638695\sqrt{\frac{c}{m}}$; $\omega^2 = 0{,}2464\,\frac{c}{m}$;

$\omega^2 - p^2 = 0{,}2428\,\frac{c}{m}$; $\omega^2 + p^2 = 0{,}25\,\frac{c}{m}$; $2p\omega = 0{,}05956643\,\frac{c}{m}$; $(\omega^2 + p^2)\omega$

$= 0{,}124096738\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{3}{2}}$; $(\omega^2 + p^2)\,p = 0{,}015\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Die zur Berechnung der verhältnismäßigen Ausschläge gebrauchten Zahlen stellen wir zunächst in der folgenden Tafel zusammen. Dabei wollen wir zur Abkürzung setzen:

$$(c_{h,h+1} - k_{h,h+1}\,p)^2 + (k_{h,h+1}\,\omega)^2 = z_{h,h+1} \;\ldots \tag{239}$$

$m_h = m \cdot$	$k_{h,h+1} = \sqrt{mc} \cdot$	$c_{h,h+1} = c \cdot$	$(\omega^2 - p^2)\, m_h = c \cdot$	$2\, p\, \omega\, m_h = c \cdot$	$(\omega^2 + p^2)\, p\, m_h = c\sqrt{mc} \cdot$	$(\omega^2 + p^2)\, \omega\, m_h = c\sqrt{mc} \cdot$	$z_{h,h+1} = c^2 \cdot$	$\frac{c_{h,h+1}}{z_{h,h+1}} = c^{-1} \cdot$	$\frac{k_{h,h+1}}{z_{h,h+1}} = \sqrt{cm} : c^2 \cdot$
1	0,16	$\frac{1}{3}$	0,2428	0,05956643	0,015	0,12409674	0,11111111	3	1,44
2	0,24	$\frac{1}{2}$	0,4856	0,11913287	0,030	0,24819348	0,25	2	0,96
3	—	—	0,7284	0,17869930	0,045	0,37229021	—	—	—

In Zahlentafel 24 ist gezeigt, wie die Schwingungsform schrittweise berechnet wird. Die Anweisung zur Aufstellung der Tafel gibt Gl. (237). Man erhält den Wert α_{h+1} in der 2. Reihe, $(h+1)$-ten Zeile, wenn man von dem Wert α_h in der h-ten Zeile den in der 11. Reihe in der h-ten Zeile berechneten Wert **subtrahiert**; man findet den Wert $\Sigma_1 \equiv (\omega^2 - p^2)\, \Sigma\, (m\alpha) - 2\, p\omega\, \Sigma (m\beta)$ in der 7. Reihe in der $(h+1)$-ten Zeile, wenn man zum Wert Σ_1 in der 7. Reihe in der h-ten Zeile die Summe der in der $(h+1)$-ten Zeile der Reihen 3 und 4 berechneten Werte **addiert**; ebenso findet man $\Sigma_2 \equiv (\omega^2 + p^2)\, (p\, \Sigma\, (m\alpha) + \omega\, \Sigma\, (m\beta))$ in der $(h+1)$-ten Zeile der 8. Reihe, wenn man zum Wert Σ_2 in der h-ten Zeile der 8. Reihe die Summe der Werte in der $(h+1)$-ten Zeile der Reihen 5 und 6 **addiert**.

Die Richtigkeit der der Aufstellung der Zahlentafel 24 zugrunde gelegten Werte p und ω erkennt man daran, daß die Summenwerte Σ_1 und Σ_2 in der letzten (n-ten) Zeile verschwinden, wie es die Bedingungen $\sum_1^n (m\varphi'') = 0$ und $\sum_1^n (m\varphi') = 0$ für die Schwingungsglieder verlangen, da die Konstante $\sum_1^n (m\varphi') = C$ schon in dem besonderen Glied $B_1 t$ der Lösungsgleichung (226) berücksichtigt ist.

2. Eigenschwingung:

$$p = 0{,}16 \sqrt{\frac{c}{m}}\,;$$

$$\omega = 0{,}8006667 \sqrt{\frac{c}{m}}\,;$$

$$\omega^2 = 0{,}64106667 \frac{c}{m}\,;$$

$$\omega^2 - p^2 = 0{,}61546667 \frac{c}{m}\,;$$

$$\omega^2 + p^2 = 0{,}66666667 \frac{c}{m}\,;$$

$$2\, p\omega = 0{,}25621333 \frac{c}{m}\,;$$

$$(\omega^2 + p^2)\, p = 0{,}10666667 \left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{3}{2}};$$

$$(\omega^2 + p^2)\, \omega = 0{,}53377778 \left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Die Berechnung der Schwingungsform ist ebenfalls in Zahlentafel 24 enthalten.

Diese Zahlentafel zeigt, daß die Massen sowohl bei der ersten wie bei der zweiten Eigenschwingung gleichphasig schwingen. Dieser Sonderfall rührt, wie man leicht erkennt, daher, daß die Verhältnisse $\frac{k_{h,h+1}}{c_{h,h+1}}$ alle gleich sind.

Zahlentafel 24: I. $p = 0{,}06\sqrt{\frac{c}{m}}$; $\omega = 0{,}49638695\sqrt{\frac{c}{m}}$.

Reihe:		1	2	3	4	5	6
		$m_h = m \cdot$	α_h	$(\omega^2 - p^2)\, m_h \alpha_h = c \cdot$	$-2 p \omega m_h \beta_h = c \cdot$	$(\omega^2 + p^2)\, p m_h \alpha_h = c \cdot \sqrt{\frac{c}{m}}$.	$(\omega^2 + p^2)\, \omega m_h \beta_h = c \cdot \sqrt{\frac{c}{m}}$.
Zeile	1	1	α_1	$0{,}2428\,\alpha_1$	$-0{,}05956643\,\beta_1$	$0{,}015\,\alpha_1$	$0{,}12409674\,\beta_1$
,,	2	2	$0{,}25\,\alpha_1 + 0\,\beta_1$	$0{,}1214\,\alpha_1$	$-0{,}02978322\,\beta_1$	$0{,}0075\,\alpha_1$	$0{,}06204837\,\beta_1$
,,	3	3	$-0{,}50\,\alpha_1 + 0\,\beta_1$	$-0{,}3642\,\alpha_1$	$+0{,}08934965\,\beta_1$	$-0{,}0225\,\alpha_1$	$-0{,}18614511\,\beta_1$

II. $p = 0{,}16\sqrt{\frac{c}{m}}$; $\omega = 0{,}80066667\sqrt{\frac{c}{m}}$.

	1	2	3	4	5	6
	1	α_1	$0{,}61546667\,\alpha_1$	$-0{,}25621333\,\beta_1$	$0{,}10666667\,\alpha_1$	$0{,}53377778\,\beta_1$
	2	$-\alpha_1$	$-1{,}23093333\,\alpha_1$	$+0{,}51242667\,\beta_1$	$-0{,}21333333\,\alpha_1$	$-1{,}06755556\,\beta_1$
	3	$+0{,}33333333\,\alpha_1$	$0{,}61546667\,\alpha_1$	$-0{,}25621333\,\beta_1$	$0{,}10666667\,\beta_1$	$0{,}53377778\,\beta_1$

Reihe:		7	8	9	10	11
		$(\omega^2 - p^2)\,\Sigma(m\alpha) - 2p\omega\,\Sigma(m\beta) = \Sigma_1 = c \cdot$	$(\omega^2 + p^2)(p\,\Sigma(m\alpha) + \omega\,\Sigma(m\beta)) = \Sigma_2 = c \cdot \sqrt{\frac{c}{m}}$.	$\frac{c_{h,h+1}}{z_{h,h+1}}\,\Sigma_1 =$	$\frac{k_{h,h+1}}{z_{h,h+1}} \cdot \Sigma_2 =$	$\frac{c_{h,h+1}}{z_{h,h+1}} \cdot \Sigma_1 + \frac{k_{h,h+1}}{z_{h,h+1}}\,\Sigma_2 =$
Zeile	1	$0{,}2428\,\alpha_1 - 0{,}05956643\,\beta_1$	$0{,}015\ \alpha_1 + 0{,}12409674\,\beta_1$	$0{,}7284\,\alpha_1 - 0{,}17869930\,\beta_1$	$0{,}0216\,\alpha_1 + 0{,}17869930\,\beta_1$	$0{,}75\,\alpha_1 + 0\,\beta_1$
,,	2	$0{,}3642\,\alpha_1 - 0{,}08934965\,\beta_1$	$0{,}0225\,\alpha_1 + 0{,}18614511\,\beta_1$	$0{,}7284\,\alpha_1 - 0{,}17869930\,\beta_1$	$0{,}0216\,\alpha_1 + 0{,}17869930\,\beta_1$	$0{,}75\,\alpha_1 + 0\,\beta_1$
,,	3	$0 \cdot \alpha_1 + \quad 0\,\beta_1$	$0\,\alpha_1 + \quad 0\,\beta_1$			
	1	$0{,}61546667\,\alpha_1 - 0{,}25621333\,\beta_1$	$0{,}10666667\,\alpha_1 + 0{,}53377778\,\beta_1$	$1{,}8464\ \alpha_1 - 0{,}76864\,\beta_1$	$0{,}1536\,\alpha_1 + 0{,}76864\,\beta_1$	$2\,\alpha_1 + 0\,\beta_1$
	2	$-0{,}61546667\,\alpha_1 + 0{,}25621333\,\beta_1$	$-0{,}10666667\,\alpha_1 - 0{,}53377778\,\beta_1$	$-1{,}23093\,\alpha_1 + 0{,}512426\,\beta_1$	$-0{,}1024\,\alpha_1 - 0{,}512426\,\beta_1$	$1{,}33..\alpha_1 + 0\,\beta_1$
	3	$0\,\alpha_1 + \quad 0\,\beta_1$	$0\,\alpha_1 + \quad 0\,\beta_1$			

Die Schwingungsausschläge der Eigenschwingungen eines Massensystems mit innerer Dämpfung sind demnach phasengleich, wenn sich die inneren Dämpffaktoren wie die zugehörigen Wellenkonstanten oder umgekehrt wie die entsprechenden bezogenen Wellenlängen verhalten. Die Schwingungsformen stimmen dann mit jenen der ungedämpften Eigenschwingungen überein.

b) Gemischte Dämpfung.

Gl. (230a):

$$q^{(6)} + \left(\frac{0{,}1}{1} + 0{,}16 \cdot \frac{1+2}{1\cdot 2} + \frac{0{,}2}{2} + 0{,}24 \cdot \frac{2+3}{2\cdot 3} + \frac{0{,}3}{3}\right)\sqrt{\frac{c}{m}}\, q^{(5)} + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1+2}{1\cdot 2}\right.$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{2+3}{2\cdot 3} + \frac{0{,}1 \cdot 0{,}16 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}16 \cdot 0{,}2}{1 \cdot 2} + \frac{0{,}1}{1} \cdot 0{,}24 \cdot \frac{2+3}{2\cdot 3} + \frac{0{,}1 \cdot 0{,}3}{1 \cdot 3}$$

$$\left. + 0{,}16 \cdot 0{,}24 \cdot \frac{1+2+3}{1\cdot 2\cdot 3} + 0{,}16 \cdot \frac{1+2}{1\cdot 2} \cdot \frac{0{,}3}{3} + \frac{0{,}2 \cdot 0{,}24 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}24 \cdot 0{,}3}{2\cdot 3}\right)\frac{c}{m}\, q^{(4)}$$

$$+ \left[\frac{\frac{1}{3}(0{,}1 + 0{,}2)}{1\cdot 2} + \left(\frac{1}{3} \cdot 0{,}24 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}16\right)\frac{1+2+3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1+2}{1\cdot 2} \cdot \frac{0{,}3}{3}\right.$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{2+3}{2\cdot 3} \cdot \frac{0{,}1}{1} + \frac{\frac{1}{2}(0{,}2 + 0{,}3)}{2\cdot 3} + (0{,}1 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}24 + 0{,}1 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}3$$

$$+ 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}24 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}24 \cdot 0{,}3 + 0{,}16 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}24 + 0{,}16 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3$$

$$\left. + 0{,}16 \cdot 0{,}24 \cdot 0{,}3) \cdot \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\right]\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{3}{2}} q^{(3)} + \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1+2+3}{1\cdot 2\cdot 3} + \left(\frac{1}{3} \cdot (0{,}1 \cdot 0{,}24\right.\right.$$

$$+ 0{,}1 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}24 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}24 \cdot 0{,}3) + \frac{1}{2}(0{,}1 \cdot 0{,}16 + 0{,}1 \cdot 0{,}2$$

$$\left.\left. + 0{,}1 \cdot 0{,}3 + 0{,}16 \cdot 0{,}2 + 0{,}16 \cdot 0{,}3)\right) \cdot \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\right]\left(\frac{c}{m}\right)^{2} q^{(2)}$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{5}{2}} q^{(1)} = 0\,.$$

Gl. (230c): $w^6 + 0{,}74\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} w^5 + 1{,}073066\ldots\frac{c}{m}\, w^4 + 0{,}3525733\ldots\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{3}{2}} w^3$

$$+ 0{,}191833\ldots\left(\frac{c}{m}\right)^{2} w^2 + 0{,}0166\ldots\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{5}{2}} w = 0\,.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$w_1 = 0\,;\quad w_2 = -0{,}1\sqrt{\frac{c}{m}}\,;\quad w_{3.4} = (-0{,}11 \pm i\,0{,}48774994)\sqrt{\frac{c}{m}}\,;$$

$$w_{5.6} = (-0{,}21 \pm i \cdot 0{,}78902894)\sqrt{\frac{c}{m}}\,.$$

Schwingungsform des aperiodischen Gliedes nach Gl. (233) siehe Taf. S. 169:

Das Zustandekommen dieser Tafel ist mit Berücksichtigung des zu Zahlentafel 17 Bemerkten und im Hinblick auf Gl. (233) ohne weiters verständlich.

Da sich in unserem Sonderfall die äußeren Dämpffaktoren wie die zugehörigen Massenträgheitsmomente verhalten, werden die gleichzeitigen aperiodischen Ausschläge aller Massen gleich.

$$q = 0{,}1\sqrt{\frac{c}{m}}\,.$$

$m_h = m\cdot$	$c_{h,h+1} = c\cdot$	$k_h = \sqrt{mc}\cdot$	$k_{h,h+1} = \sqrt{mc}\cdot$	$q(k_h - m_h q) = c\cdot$	C_h	$q(k_h - m_h q)C_h = c\cdot$	$\Sigma[(k_h q - m_h q^2)C_h]$	$c_{h,h+1} - q\cdot k_{h,h+1} = c\cdot$	$\frac{\Sigma[(k_h q - m_h q^2)C_h]}{c_{h,h+1} - q k_{h,h+1}}$
1	$\frac{1}{3}$	0,1	0,16	0	C_1	0	0	0,31733 . .	0
2	$\frac{1}{2}$	0,2	0,24	0	C_1	0	0	0,476	0
3	—	0,3	—	0	C_1	0	0	—	

	$m_h = m\cdot$	$c_{h,h+1} = c\cdot$	$k_h = \sqrt{mc}\cdot$	$k_{h,h+1} = \sqrt{mc}\cdot$	$a_h = c\cdot$	$b_h = c\cdot$	$c_h = c\sqrt{\frac{c}{m}}\cdot$	$d_h = c\sqrt{\frac{c}{m}}\cdot$	$z_{h,h+1} = c^2\cdot$	$\frac{c_{h,h+1}}{z_{h,h+1}} = c^{-1}\cdot$	$\frac{k_{h,h+1}}{z_{h,h+1}} = \sqrt{cm} : c^2\cdot$
I	1	$\frac{1}{3}$	0,1	0,16	0,2368	—0,05852999	0,0025	0,12193749	0,105777..	3,15126050	1,51260504
	2	$\frac{1}{2}$	0,2	0,24	0,4736	—0,11705999	0,0050	0,24387497	0,238	2,10084036	1,00840336
	3	—	0,3	—	0,7104	—0,17558999	0,0075	0;36581246	—	—	
II	1	$\frac{1}{3}$	0,1	0,16	0,599466..	—0,25248926	0,0733..	0,52601929	0,105777..	3,15126050	1,51260504
	2	$\frac{1}{2}$	0,2	0,24	1,198933..	—0,50497852	0,1466..	1,05203859	0,238	2,10084036	1,00840336
	3	—	0,3	—	1,7984	—0,75746778	0,22	1,57805788	—	—	

Im allgemeinen Fall sind die Werte $q(k_h - m_h q)$ von Null verschieden und die Werte C_h nicht mehr unter sich gleich. Bei richtiger Wahl von q muß immer für die Endmasse $\sum_1^n [(k_h q - m_h q^2) C_h] = 0$ werden gemäß Gl. (234).

Für die Eigenschwingungen stellen wir uns zunächst die für die Berechnung der Schwingungsformen benötigten Zahlen in der Liste Seite 169 zusammen, wobei wir uns zur Erleichterung für den Setzer der folgenden Abkürzungen bedienen:

$$\left.\begin{aligned} (\omega^2 - p^2)\, m_h + p k_h &\equiv a_h \\ \omega(-2\,p m_h + k_h) &\equiv b_h \\ (\omega^2 + p^2)(p m_h - k_h) &\equiv c_h \\ (\omega^2 + p^2)\,\omega m_h &\equiv d_h \\ (c_{h,h+1} - k_{h,h+1}\, p)^2 + k^2_{h,h+1}\,\omega^2 &\equiv z_{h,h+1} \end{aligned}\right\} (240) \left\{\begin{aligned} (\textstyle\sum a_h \alpha_h + b_h \beta_h) &\equiv \textstyle\sum_1 \\ (\textstyle\sum c_h \alpha_h + d_h \beta_h) &\equiv \textstyle\sum_2 \\ \frac{c_{h,h+1}}{z_{h,h+1}} \textstyle\sum_1 &\equiv \textstyle\sum_1' \\ \frac{k_{h,h+1}}{z_{h,h+1}} \textstyle\sum_2 &\equiv \textstyle\sum_2' \end{aligned}\right.$$

Eigenschwingung I: $p = 0{,}1\sqrt{\frac{c}{m}}$; $\omega = 0{,}48774994\sqrt{\frac{c}{m}}$; $\omega^2 = 0{,}2379\,\frac{c}{m}$;

$$\omega^2 - p^2 = 0{,}2258\,\frac{c}{m}; \quad \omega^2 + p^2 = 0{,}25\,\frac{c}{m}.$$

Eigenschwingung II: $p = 0{,}2\sqrt{\frac{c}{m}}$; $\omega = 0{,}78902894\sqrt{\frac{c}{m}}$; $\omega^2 = 0{,}62256667\,\frac{c}{m}$;

$$\omega^2 - p^2 = 0{,}57846667\,\frac{c}{m}; \quad \omega^2 + p^2 = 0{,}66666667\,\frac{c}{m}.$$

Die schrittweise Berechnung der Eigenschwingungsformen ist für beide Eigenschwingungen in Zahlentafel 25 durchgeführt. Den Schlüssel zur Aufstellung dieser Tafel liefert Gl. (237) im Verein mit den Gl. (240):

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{h+1} &= \alpha_h - (\textstyle\sum_1' + \sum_2')_h \\ (\textstyle\sum_1)_{h+1} &= (\textstyle\sum_1)_h + a_{h+1}\alpha_{h+1} + b_{h+1}\beta_{h+1} \\ (\textstyle\sum_2)_{h+1} &= (\textstyle\sum_2)_h + c_{h+1}\alpha_{h+1} + d_{h+1}\beta_{h+1} \end{aligned}\right\} \qquad (241)$$

Bei richtiger Wahl der Werte p und ω muß sowohl $\sum_1$ als auch $\sum_2$ für die Endmasse verschwinden. Die erstere Bedingung entspricht Gl. (238), die aus der Beziehung (228):

$$\sum_1^n (m_l\, q'' + k_l\, q') = 0$$

gewonnen wurde. Die letztere Bedingung, $(\sum_2)_n = 0$, geht aus der Gleichung:

$$\sum_1^n (m_l\, q' + k_l\, q) = 0$$

hervor, die für die Schwingungsglieder besteht, da die Integrationskonstante der Gl. (229) schon in dem besonderen Glied C_0 der Lösungsgleichung (231) berücksichtigt ist.

Die Massen schwingen, wie Zahlentafel 25 zeigt, auch hier wieder phasengleich.

Die Ausschläge der Eigenschwingungen eines Massensystems mit gemischter Dämpfung sind phasengleich, wenn sich die äußeren Dämpffaktoren wie die zugehörigen Massenträgheitsmomente, die inneren Dämpffaktoren wie die

Zahlentafel 25.

	$m_h = m\cdot$	α_h	$a_h\alpha_h = c\cdot$	$b_h\beta_h = c\cdot$	$c_h\alpha_h = c\sqrt{\frac{c}{m}}\cdot$	$d_h\beta_h = c\sqrt{\frac{c}{m}}\cdot$	$\Sigma_1 = c\cdot$
I	1	α_1	$0{,}2368\,\alpha_1$	$-0{,}05852999\,\beta_1$	$0{,}0025\,\alpha_1$	$0{,}12193749\,\beta_1$	$0{,}2368\,\alpha_1 - 0{,}05852999\,\beta_1$
	2	$0{,}25\,\alpha_1$	$0{,}1184\,\alpha_1$	$-0{,}02926500\,\beta_1$	$0{,}00125\,\alpha_1$	$0{,}06096874\,\beta_1$	$0{,}3552\,\alpha_1 - 0{,}08779499\,\beta_1$
	3	$-0{,}50\,\alpha_1$	$-0{,}3552\,\alpha_1$	$+0{,}087795\,\beta_1$	$-0{,}00375\,\alpha_1$	$-0{,}18290623\,\beta_1$	$0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\beta_1$
II	1	α_1	$0{,}59946667\,\alpha_1$	$-0{,}25248926\,\beta_1$	$0{,}07333333\,\alpha_1$	$0{,}52601929\,\beta_1$	$0{,}59946667\,\alpha_1 - 0{,}25248926\,\beta_1$
	2	$-\alpha_1$	$-1{,}19893333\,\alpha_1$	$+0{,}50497852\,\beta_1$	$-0{,}14666667\,\alpha_1$	$-1{,}05203859\,\beta_1$	$-0{,}59946667\,\alpha_1 + 0{,}25248926\,\beta_1$
	3	$+\frac{1}{3}\,\alpha_1$	$0{,}59946667\,\alpha_1$	$-0{,}25248926\,\beta_1$	$+0{,}07333333\,\alpha_1$	$+0{,}52601929\,\beta_1$	$0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\beta_1$

	$m_h = m\cdot$	$\Sigma_2 = c\cdot\sqrt{\frac{c}{m}}\cdot$	Σ_1'	Σ_2'	$\Sigma_1' + \Sigma_2'$
I	1	$0{,}0025\,\alpha_1 + 0{,}12193749\,\beta_1$	$0{,}74621849\,\alpha_1 - 0{,}18444326\,\beta_1$	$0{,}00378151\,\alpha_1 + 0{,}18444326\,\beta_1$	$0{,}75\,\alpha_1 + 0\cdot\beta_1$
	2	$0{,}00375\,\alpha_1 + 0{,}18290623\,\beta_1$	$0{,}74621849\,\alpha_1 - 0{,}18444326\,\beta_1$	$0{,}00378151\,\alpha_1 + 0{,}18444326\,\beta_1$	$0{,}75\,\alpha_1 + 0\cdot\beta_1$
	3	$0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\beta_1$			
	1	$0{,}07333333\,\alpha_1 + 0{,}52601929\,\beta_1$	$1{,}88907563\,\alpha_1 - 0{,}79565943\,\beta_1$	$0{,}11092436\,\alpha_1 + 0{,}79565943\,\beta_1$	$2\alpha_1 + 0\cdot\beta_1$
	2	$-0{,}07333333\,\alpha_1 - 0{,}52601929\,\beta_1$	$-1{,}25938375\,\alpha_1 + 0{,}53043962\,\beta_1$	$-0{,}07394958\,\alpha_1 - 0{,}53043962\,\beta_1$	$-1{,}33..\,\alpha_1 + 0\beta_1$
	3	$0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\beta_1$			

zugehörigen Wellenkonstanten (Federkonstanten) verhalten. Die Schwingungsformen sind dann die gleichen wie die des dämpfungsfreien Massensystems.

Bei beliebig gegebenen Dämpffaktoren besteht natürlich die Phasengleichheit der Ausschläge nicht mehr. Die Werte α_h haben dann die Form $\alpha_h = x \cdot \alpha_1 + y\,\beta_1$, womit gleichzeitig die Ausschläge $\beta_h = x\,\beta_1 - y\alpha_1$ bekannt sind. Damit werden auch die Werte $a_h\alpha_h, b_h\beta_h$ usw. der Zahlentafel 25 solche zusammengesetzte Ausdrücke. Der Rechnungsgang aber ist genau der gleiche. Bei vielen gegebenen Massen muß man p und ω probeweise annehmen (wobei für ω der Näherungswert der ungedämpften Eigenschwingung zweckmäßig zuerst aufgesucht wird) und beide Annahmen verbessern, bis sowohl $\sum_1$ als auch $\sum_2$ für die Endmasse bis auf vernachlässigbare Reste verschwinden.

Für die annähernde Bestimmung von q und p kann man sich wieder der Gl. (149) und (151) bedienen. Die letztere Gleichung lautet mit dem Wert a_{2n-1} aus Gl. (230a):

$$p_m = \frac{\sum\limits_{l=1}^{l=n}\left[\frac{k_l}{m_l} + k_{l,l+1}\frac{m_l + m_{l+1}}{m_l \cdot m_{l+1}}\right] - \frac{\sum\limits_1^n k_l}{\sum\limits_1^n m_l}}{2(n-1)} \tag{242}$$

Nach diesen Darlegungen können wir wohl auf die Durchrechnung eines allgemeinen Zahlenbeispiels verzichten.

26. Erzwungene Schwingungen bei innerer und gemischter Dämpfung.

Wir wollen auch hier gleich den allgemeineren Fall der gemischten Dämpfung behandeln; denn aus ihm ergibt sich der Sonderfall der inneren Dämpfung ohne weiters durch Nullsetzen der äußeren Dämpffaktoren. Ebenso müssen sich durch Nullsetzen der inneren Dämpfungszahlen wieder die Verhältnisse der äußeren Dämpfung ergeben. Die Gleichgewichtsgleichungen für die erzwungenen Schwingungen sind:

$$\left|\begin{array}{ccccc}
c_{1.2} - m_1\omega^2 & -(k_1 + k_{1.2})\omega & -c_{1.2} & k_{1.2}\omega & 0 \\
(k_1 + k_{1.2})\omega & c_{1.2} - m_1\omega^2 & -k_{1.2}\omega & -c_{1.2} & 0 \\
-c_{1.2} & k_{1.2}\omega & c_{1.2} + c_{2.3} - m_2\omega^2 & -(k_{1.2} + k_2 + k_{2.3})\omega & -c_{2.3} \\
-k_{1.2}\omega & -c_{1.2} & (k_{1.2} + k_2 + k_{2.3})\omega & c_{1.2} + c_{2.3} - m_2\omega^2 & -k_{2.3}\omega \\
0 & 0 & -c_{2.3} & k_{2.3}\omega & c_{2.3} + c_{3.4} - m_3\omega^2 \\
0 & 0 & -k_{2.3}\omega & -c_{2.3} & (k_{2.3} + k_3 + k_{3.4})\omega \\
\cdot & & & & \\
\cdot & & & & \\
\cdot & & & & \\
0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{aligned}
&m_1\varphi_1'' + (k_1 + k_{1,2})\varphi_1' + c_{1,2}\varphi_1 - k_{1,2}\varphi_2' - c_{1,2}\varphi_2 = A_1\sin\omega t + B_1\cos\omega t\\
&-k_{1,2}\varphi_1' - c_{1,2}\varphi_1 + m_2\varphi_2'' + (k_{1,2} + k_2 + k_{2,3})\varphi_2' + (c_{1,2} + c_{2,3})\varphi_2 - k_{2,3}\varphi_3' - c_{2,3}\varphi_3\\
&\qquad = A_2\sin\omega t + B_2\cos\omega t\\
&\vdots\\
&-k_{h-1,h}\varphi_{h-1}' - c_{h-1,h}\varphi_{h-1} + m_h\varphi_h'' + (k_{h-1,h} + k_h + k_{h,h+1})\varphi_h' + (c_{h-1,h} + c_{h,h+1})\varphi_h\\
&\qquad - k_{h,h+1}\varphi_{h+1}' - c_{h,h+1}\varphi_{h+1} = A_h\sin\omega t + B_h\cos\omega t\\
&\vdots\\
&-k_{n-1,n}\varphi_{n-1}' - c_{n-1,n}\varphi_{n-1} + m_n\varphi_n'' + (k_{n-1,n} + k_n)\varphi_n' + c_{n-1,n}\varphi_n\\
&\qquad = A_n\sin\omega t + B_n\cos\omega t
\end{aligned}\right\}\quad(243)$$

Setzen wir:

$$\varphi = \alpha\sin\omega t + \beta\cos\omega t\,,$$

also auch:

$$\varphi' = \omega(\alpha\cos\omega t - \beta\sin\omega t)\,,$$

$$\varphi'' = -\omega^2(\alpha\sin\omega t + \beta\cos\omega t)\,,$$

und führen diese Werte in die allgemeine Gl. (243) (für die h^{te} Masse) ein, so erhalten wir durch Nullsetzen der Faktoren von $\sin\omega t$ und $\cos\omega t$ die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&-c_{h-1,h}\alpha_{h-1} + k_{h-1,h}\omega\beta_{h-1} + (c_{h-1,h} + c_{h,h+1} - m_h\omega^2)\alpha_h\\
&\qquad - (k_{h-1,h} + k_h + k_{h,h+1})\omega\beta_h - c_{h,h+1}\alpha_{h+1} + k_{h,h+1}\omega\beta_{h+1} = A_h\\
&-c_{h-1,h}\beta_{h-1} - k_{h-1,h}\omega\alpha_{h-1} + (c_{h-1,h} + c_{h,h+1} - m_h\omega^2)\beta_h\\
&\qquad + (k_{h-1,h} + k_h + k_{h,h+1})\omega\alpha_h - c_{h,h+1}\beta_{h+1} - k_{h,h+1}\omega\alpha_{h+1} = B_h
\end{aligned}\right\}\quad(244)$$

Man beachte wieder, daß man die zweite dieser Gleichungen auch dadurch erhält, daß man in der ersten Gleichung α durch β, β durch $-\alpha$ und A durch B ersetzt.

Nimmt man in den Gl. (244) für h nacheinander die Zahlen $1, 2 \ldots n$, (wobei alle Größen Null sind, deren einer Zeiger 1 unter- oder n überschreitet), so entsteht ein System von $2n$ linearen Gleichungen zur Bestimmung der $2n$ Unbekannten $(\alpha_h, \beta_h)_{h=1}^{h=n}$. Die allgemeine Behandlung dieser Gleichungen erfolgt in derselben Weise wie früher (siehe Abschn. 20).

Zunächst ist die Determinante $\varDelta$ aus den Beizahlen der Ausschläge α, β zu bilden, nämlich:

$$\left.\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & & 0 & 0\\
k_{2,3}\omega & 0 & 0 & & \cdot & \cdot\\
-c_{2,3} & 0 & 0 & & \cdot & \cdot\\
-(k_{2,3} + k_3 + k_{3,4})\omega & -c_{3,4} & k_{3,4}\omega & & \cdot & \cdot\\
c_{2,3} + c_{3,4} - m_3\omega^2 & -k_{3,4}\omega & -c_{3,4} & & \cdot & \cdot\\
 & & \cdot & & & \cdot\\
 & & \cdot & & & \\
 & & \cdot & & & \\
\cdot & 0 & -c_{n-1,n} & k_{n-1,n}\omega & c_{n-1,n} - m_n\omega^2 & -(k_{n-1,n} + k_n)\omega\\
\cdot & 0 & -k_{n-1,n}\omega & -c_{n-1,n} & (k_{n-1,n} + k_n)\omega & c_{n-1,n} - m_n\omega^2
\end{array}\right| \equiv \varDelta\,. \quad (245)$$

Die **Reihen** dieser Determinante denken wir uns wieder mit $[h_\alpha, h_\beta]_{h=1}^{h=n}$, die **Zeilen** mit $[l_A, l_B]_{l=1}^{l=n}$ numeriert.

Ersetzt man die Zahlen der Reihe h_α durch die auf der rechten Seite des Gleichungssystems (244) stehenden gegebenen Größen $A_1, B_1 \ldots A_n, B_n$, so entsteht eine neue Determinante, die wir mit $\Delta_{h\alpha}$ bezeichnen. Die Auflösung des Systems (244) ergibt dann bekanntlich:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_h &= \frac{\Delta_{h\alpha}}{\Delta} \\ \beta_h &= \frac{\Delta_{h\beta}}{\Delta} \end{aligned}\right\} \tag{246}$$

Die sich nach Streichung der Reihe h_α und der Zeile l_B aus Δ ergebende Unterdeterminante sei mit $\Delta_{h\alpha, lB}$ bezeichnet. Dann ist mit den Abkürzungen:

$$\left.\begin{aligned} a_{h,l} &\equiv \frac{\Delta_{h\alpha, lA}}{\Delta} \\ b_{h,l} &\equiv \frac{\Delta_{h\alpha, lB}}{\Delta} \\ a'_{h,l} &\equiv \frac{\Delta_{h\beta, lA}}{\Delta} \\ b'_{h,l} &\equiv \frac{\Delta_{h\beta, lB}}{\Delta} \end{aligned}\right\} \tag{247}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_h &= \sum_{l=1}^{l=n} (a_{h,l} A_l + b_{h,l} B_l) \\ \beta_h &= \sum_{l=1}^{l=n} (a'_{h,l} A_l + b'_{h,l} B_l) \end{aligned}\right\} \tag{248}$$

Aus der Entstehungsweise der zweiten Gl. (244) aus der ersten erhält man die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} b'_{h,l} &= a_{h,l} \\ a'_{h,l} &= -b_{h,l} \end{aligned}\right\} \tag{249}$$

und aus dem Bildungsgesetz der Determinante Δ folgt ferner das **Gesetz der Gegenseitigkeit der Ausschläge** oder der **Gleichheit der Einflußzahlen**:

$$\left.\begin{aligned} a_{h,l} &= a_{l,h} \\ b_{h,l} &= b_{l,h} \end{aligned}\right\} \tag{250}$$

Damit wird aus den Gleichungen (248):

$$\left.\begin{aligned} \alpha_h &= \sum_{l=1}^{l=n} (a_{h,l} A_l + b_{h,l} B_l) \\ \beta_h &= \sum_{l=1}^{l=n} (a_{h,l} B_l - b_{h,l} A_l) \end{aligned}\right\} \tag{251}$$

Weitere Beziehungen ergeben sich wieder aus dem Begriff der Dämpfungsarbeit. Dazu müssen wir zuerst die Arbeit der inneren Dämpfung berechnen. Das Reibungsmoment der inneren Dämpfung ist:

$$M_r = \pm k_{h,h+1}(\varphi'_{h+1} - \varphi'_h),$$

wobei das $+$-Zeichen für die Masse m_{h+1}, das $-$-Zeichen für m_h gilt, wenn das Moment als Widerstand positiv gerechnet wird. Dieses Reibmoment legt im Zeitteilchen dt den Winkel $d\varphi_{h+1}$ an der Masse m_{h+1}, den Winkel $d\varphi_h$ an der Masse m_h zurück; demnach ist mit Berücksichtigung des Vorzeichens die Arbeit der inneren Dämpfung für eine volle Schwingung:

$$\mathfrak{A} = \int [k_{h,h+1}(\varphi'_{h+1} - \varphi'_h) \cdot (d\varphi_{h+1} - d\varphi_h)] = k_{h,h+1}\int_{t=0}^{t=\frac{2\pi}{\omega}} (\varphi'_{h+1} - \varphi'_h)^2 \cdot dt.$$

Führt man für die erzwungene Schwingung

$$\varphi = \alpha \sin\omega t + \beta \cos\omega t$$

ein, so wird

$$\mathfrak{A} = k_{h,h+1}\,\omega \cdot \int_{\omega t=0}^{\omega t=2\pi} \big((\alpha_{h+1} - \alpha_h)\cos\omega t - (\beta_{h+1} - \beta_h)\sin\omega t\big)^2 d(\omega t),$$

$$\mathfrak{A} = \pi \cdot k_{h,h+1}\,\omega\,[(\alpha_{h+1} - \alpha_h)^2 + (\beta_{h+1} - \beta_h)^2] = \pi k_{h,h+1}\,\omega\,\gamma^2_{h,h+1}, \tag{252}$$

wenn unter $\gamma_{h,h+1}$ der Relativausschlag der Massen m_{h+1} und m_h verstanden wird.

Die gesamte Dämpfungsarbeit einer vollen Schwingung setzt sich aus der äußern und innern Dämpfarbeit zusammen und sie muß von den erregenden harmonischen Momenten geleistet werden. Dies liefert die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}\omega\sum_{h=1}^{h=n}[k_h(\alpha_h^2 + \beta_h^2) + k_{h,h+1}\big((\alpha_{h+1} - \alpha_h)^2 + (\beta_{h+1} - \beta_h)^2\big)]\\ = \sum_{h=1}^{h=n}(\alpha_h B_h - \beta_h A_h)\end{aligned}\right\} \tag{253}$$

Denken wir uns von allen erregenden Momenten nur das Moment M_l wirkend und bezeichnen wir die zugehörigen Ausschläge der Masse m_h mit $\alpha_{h,l}$ und $\beta_{h,l}$, so ist nach Gl. (251):

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{h,l} &= a_{h,l}A_l + b_{h,l}B_l\\ \beta_{h,l} &= a_{h,l}B_l - b_{h,l}A_l\end{aligned}\right\} \tag{254}$$

Die Gleichung der Dämpfarbeit (253) lautet für diesen Fall:

$$\begin{aligned}\omega\sum_{h=1}^{h=n}[k_h(\alpha_{h,l}^2 + \beta_{h,l}^2) + k_{h,h+1}\big((\alpha_{h+1,l} - \alpha_{h,l})^2 + (\beta_{h+1,l} - \beta_{h,l})^2\big)]\\ = \alpha_{l,l}B_l - \beta_{l,l}A_l\end{aligned}$$

oder nach Einführung von (254):

$$\omega\sum_{h=1}^{h=n}[k_h(a_{h,l}^2 + b_{h,l}^2) + k_{h,h+1}\big((a_{h+1,l} - a_{h,l})^2 + (b_{h+1,l} - b_{h,l})^2\big)] = b_{l,l}. \tag{255}$$

Ebenso leitet man aus der allgemeinen Gl. (253) nach Einführung der Gl. (251) die Beziehungen her:

$$\left.\begin{aligned}\omega\cdot\sum_{h=1}^{h=n}\Big[k_h\left(a_{h,l}a_{h,i}+b_{h,l}b_{h,i}\right)+k_{h,h+1}\big(&(a_{h+1,l}-a_{h,l})(a_{h+1,i}-a_{h,i})\\&+(b_{h+1,l}-b_{h,l})(b_{h+1,i}-b_{h,i})\big)\Big]=b_{l,i}\end{aligned}\right\}\quad(256)$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{h=1}^{h=n}\Big[k_h\left(a_{h,l}b_{h,i}-b_{h,l}a_{h,i}\right)+k_{h,h+1}\big(&(a_{h+1,l}-a_{h,l})(b_{h+1,i}-b_{h,i})\\&-(b_{h+1,l}-b_{h,l})(a_{h+1,i}-a_{h,i})\big)\Big]=0\end{aligned}\right\}\quad(257)$$

In den Gleichungen (256) und (257) sind l und i zwei beliebig wählbare Zahlen der Reihe 1 bis n. Gl. (255) ergibt sich aus der allgemeineren Gl. (256) für $i=l$.

Der für die äußere Dämpfung (Gl. 169 bis 171) abgeleitete Satz, daß die Teilausschläge $\gamma_{h,l}$ und $\gamma_{l,h}$ gegen ihr erregendes Moment M_l und M_h gleiche relative Größe und gleichen Phasenwinkel haben, gilt in unveränderter Weise auch für die gemischte Dämpfung.

Für praktische Zwecke vorteilhafter als die Berechnung mit Determinanten ist wieder die schrittweise Auflösung der Gl. (244), wobei der Ausschlag einer Masse durch die Ausschläge der vorausgehenden Massen ausgedrückt wird. Indem wir in den Gl. (244) nacheinander $h=1,2\ldots n$ setzen, erhalten wir die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_2 &= \alpha_1-\left[(\omega^2 m_1 a_1+\omega k_1\beta_1+A_1)\cdot c_{1,2}+(\omega^2 m_1\beta_1-\omega k_1\alpha_1+B_1)\,k_{1,2}\,\omega\right]\\
&\qquad :(c_{1,2}^2+k_{1,2}^2\,\omega^2)\\
\beta_2 &= \beta_1-\left[(\omega^2 m_1\beta_1-\omega k_1\alpha_1+B_1)\cdot c_{1,2}-(\omega^2 m_1\alpha_1+\omega k_1\beta_1+A_1)\,k_{1,2}\,\omega\right]\\
&\qquad :(c_{1,2}^2+k_{1,2}^2\,\omega^2)\\
\alpha_3 &= \alpha_2-\big[\left(\omega^2(m_1\alpha_1+m_2\alpha_2)+\omega(k_1\beta_1+k_2\beta_2)+A_1+A_2\right)\cdot c_{2,3}\\
&\quad+\left(\omega^2(m_1\beta_1+m_2\beta_2)-\omega(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)+B_1+B_2\right)\cdot k_{2,3}\,\omega\big]\\
&\quad :(c_{2,3}^2+k_{2,3}^2\,\omega^2)\\
\beta_3 &= \beta_2-\big[\left(\omega^2(m_1\beta_1+m_2\beta_2)-\omega(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)+B_1+B_2\right)\cdot c_{2,3}\\
&\quad-\left(\omega^2(m_1\alpha_1+m_2\alpha_2)+\omega(k_1\beta_1+k_2\beta_2)+A_1+A_2\right)\cdot k_{2,3}\,\omega\big]\\
&\quad :(c_{2,3}^2+k_{2,3}^2\,\omega^2)\\
&\vdots\\
\alpha_{h+1} &= \alpha_h-\Big[\Big(\omega^2\sum_{l=1}^{l=h}(m_l\alpha_l)+\omega\sum_1^h(k_l\beta_l)+\sum_1^h A_l\Big)\cdot c_{h,h+1}+\Big(\omega^2\sum_1^h(m_l\beta_l)\\
&\quad-\omega\sum_1^h(k_l\alpha_l)+\sum_1^h B_l\Big)\cdot k_{h,h+1}\,\omega\Big]:(c_{h,h+1}^2+k_{h,h+1}^2\,\omega^2)\\
\beta_{h+1} &= \beta_h-\Big[\Big(\omega^2\sum_1^h(m_l\beta_l)-\omega\sum_1^h(k_l\alpha_l)+\sum_1^h B_l\Big)\cdot c_{h,h+1}-\Big(\omega^2\sum_1^h(m_l\alpha_l)\\
&\quad+\omega\sum_1^h(k_l\beta_l)+\sum_1^h A_l\Big)\cdot k_{h,h+1}\,\omega\Big]:(c_{h,h+1}^2+k_{h,h+1}^2\,\omega^2)\\
&\vdots\\
\alpha_n &= \alpha_{n-1}-\Big[\Big(\omega^2\sum_1^{n-1}(m_l\alpha_l)+\omega\sum_1^{n-1}(k_l\beta_l)+\sum_1^{n-1}A_l\Big)\cdot c_{n-1,n}+\Big(\omega^2\sum_1^{n-1}(m_l\beta_l)\\
&\quad\omega\sum_1^{n-1}(k_l\alpha_l)+\sum_1^{n-1}B_l\Big)\cdot k_{n-1,n}\,\omega\Big]:(c_{n-1,n}^2+k_{n-1,n}^2\,\omega^2)\\
\beta_n &= \beta_{n-1}-\Big[\Big(\omega^2\sum_1^{n-1}(m_l\beta_l)-\omega\sum_1^{n-1}(k_l\alpha_l)+\sum_1^{n-1}B_l\Big)\cdot c_{n-1,n}-\Big(\omega^2\sum_1^{n-1}(m_l\alpha_l)\\
&\quad+\omega\sum_1^{n-1}(k_l\beta_l)+\sum_1^{n-1}A_l\Big)\cdot k_{n-1,n}\,\omega\Big]:(c_{n-1,n}^2+k_{n-1,n}^2\,\omega^2)
\end{aligned}\right\}\quad(258)$$

Auch hier erhält man die Gleichungen für die Ausschläge β, wenn man in den Gleichungen für die Ausschläge α ersetzt: α durch β, β durch $-\alpha$, A durch B und B durch $-A$.

Als Zahlenbeispiel wollen wir dasselbe 5-Massensystem wählen, das als Rechnungsbeispiel der äußeren Dämpfung diente:

$$m_1 = 1m; \quad m_2 = 2m; \quad m_3 = 3m; \quad m_4 = 4m; \quad m_5 = 5m;$$

$$c_{1,2} = \tfrac{1}{3}c; \quad c_{2,3} = \tfrac{1}{2}c; \quad c_{3,4} = 1 \cdot c; \quad c_{4,5} = 2c;$$

$$k_1 = 0{,}1\sqrt{mc}; \quad k_2 = 0{,}2\sqrt{mc}; \quad k_3 = 0{,}3\sqrt{mc}; \quad k_4 = 0{,}2\sqrt{mc}; \quad k_5 = 0{,}2\sqrt{mc};$$

$$k_{1,2} = 0{,}12\sqrt{mc}; \quad k_{2,3} = 0{,}12\sqrt{mc}; \quad k_{3,4} = 0{,}15\sqrt{mc}; \quad k_{4,5} = 0{,}18\sqrt{mc}.$$

Die Berechnung sei wieder durchgeführt für die Periode:

$$\omega^2 = 0{,}25\,\frac{c}{m}; \qquad \omega = 0{,}5\sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Um die Richtigkeit unserer Ableitungen auch am Zahlenbeispiel zu zeigen, nehmen wir an jeder Masse ein harmonisches Moment wirkend an und berechnen die Ausschläge für jedes Moment getrennt, um die Einflußzahlen $a_{h,l}$ und $b_{h,l}$ zu bekommen.

Die Gleichungen (258) geben uns die Anweisung zur Aufstellung der Zahlentafeln, wobei wir uns wieder mit der alleinigen Berechnung der Ausschläge α begnügen können, da jedem Wert $\alpha = x \cdot A + y \cdot B$ ein zugehöriger Wert $\beta = x \cdot B - y A$ entspricht.

Zur Vereinfachung für den Setzer wollen wir uns in den Zahlentafeln der folgenden Kürzungen bedienen:

$$\left.\begin{array}{ll} c_{h,h+1}^2 + k_{h,h+1}^2\,\omega^2 = z_{h,h+1}, & \displaystyle\sum_{l=1}^{l=h}(m_l\omega^2\alpha_l + \omega k_l\beta_l + A_l) = \Sigma_1, \\ \dfrac{c_{h,h+1}}{z_{h,h+1}} = u, & \\ \dfrac{k_{h,h+1}\,\omega}{z_{h,h+1}} = v, & \displaystyle\sum_{l=1}^{l=h}(\omega^2 m_l\beta_l - \omega k_l\alpha_l + B_l) = \Sigma_2. \end{array}\right\} \tag{259}$$

Damit schreibt sich die allgemeine Gl. (258):

$$\alpha_{h+1} = \alpha_h - (u\Sigma_1 + v\Sigma_2). \tag{260}$$

Wie man aus den Definitionen (259) erkennt, erübrigt sich auch die Berechnung von Σ_2; denn sie entsteht aus Σ_1 durch Vertauschung von α mit β, von β mit $-\alpha$, von A mit B und demgemäß auch von B mit $-A$.

Die zur Aufstellung der Zahlentafeln gebrauchten Rechnungsgrößen sind zunächst in der nachfolgenden Liste zusammengestellt (Zahlentafel 26a):

Zahlentafel 26a: $\omega^2 = 0{,}25\,\frac{c}{m}$; $\omega = 0{,}5\sqrt{\frac{c}{m}}$.

$m_h = m\cdot$	$c_{h,h+1} = c\cdot$	$k_h = \sqrt{mc}\cdot$	$k_{h,h+1} = \sqrt{mc}\cdot$	$z_{h,h+1} = c^2\cdot$	$u = c^{-1}\cdot$	$v = c^{-1}\cdot$	$m_h\omega^2 = c\cdot$	$k_h\omega = c\cdot$
1	$\frac{1}{3}$	0,1	0,12	0,1147111	2,9058504	0,5230531	0,25	0,05
2	$\frac{1}{2}$	0,2	0,12	0,2536	1,9716088	0,2365931	0,50	0,10
3	1	0,3	0,15	1,005625	0,9944065	0,0745805	0,75	0,15
4	2	0,2	0,18	4.0081	0,4989895	0,0224545	1,00	0,10
5	—	0,2	—	—			1,25	0,10

Zahlentafel 26 b.

$m_h = m \cdot$	α_h	$m_h \omega^2 \alpha_h = c \cdot$	$+ k_h \omega \beta_h = c \cdot$	$+ A_h = c \cdot$	$\sum_1 = c \cdot$	$u \cdot \sum_1 =$	$v \cdot \sum_2 =$	$u \sum_1 + v \sum_2 =$
1	α_1	$0{,}25\,\alpha_1$		$+0$	$0{,}25\,\alpha_1$	$0{,}7264626\,\alpha_1$	$-0{,}0261527\,\alpha_1$	$+0{,}7003099\,\alpha_1$
			$+0{,}05\,\beta_1$		$+0{,}05\,\beta_1$	$+0{,}1452925\,\beta_1$	$+0{,}1307633\,\beta_1$	$+0{,}2760558\,\beta_1$
2	$0{,}2996901\,\alpha_1$	$0{,}1498450\,\alpha_1$	$+0{,}0276056\,\alpha_1$	$+0$	$0{,}4274506\,\alpha_1$	$+0{,}8427654\,\alpha_1$	$+0{,}0137363\,\alpha_1$	$+0{,}8565017\,\alpha_1$
	$-0{,}2760558\,\beta_1$	$-0{,}1380279\,\beta_1$	$+0{,}0299690\,\beta_1$		$-0{,}0580589\,\beta_1$	$-0{,}1144694\,\beta_1$	$+0{,}1011319\,\beta_1$	$-0{,}0133375\,\beta_1$
3	$-0{,}5568116\,\alpha_1$	$-0{,}4176087\,\alpha_1$	$+0{,}0394077\,\alpha_1$	$+0$	$0{,}0492496\,\alpha_1$	$0{,}0489741\,\alpha_1$	$+0{,}0252544\,\alpha_1$	$+0{,}0742285\,\alpha_1$
	$-0{,}2627183\,\beta_1$	$-0{,}1970387\,\beta_1$	$-0{,}0835217\,\beta_1$		$-0{,}3386193\,\beta_1$	$-0{,}3367252\,\beta_1$	$+0{,}0036731\,\beta_1$	$-0{,}3330521\,\beta_1$
4	$-0{,}6310401\,\alpha_1$	$-0{,}6310401\,\alpha_1$	$-0{,}0070334\,\alpha_1$	$+0$	$-0{,}5888239\,\alpha_1$	$-0{,}2938169\,\alpha_1$	$+0{,}0074412\,\alpha_1$	$-0{,}2863757\,\alpha_1$
	$+0{,}0703338\,\beta_1$	$+0{,}0703338\,\beta_1$	$-0{,}0631040\,\beta_1$		$-0{,}3313895\,\beta_1$	$-0{,}1653599\,\beta_1$	$-0{,}0132217\,\beta_1$	$-0{,}1785816\,\beta_1$
5	$-0{,}3446644\,\alpha_1$	$-0{,}4308305\,\alpha_1$	$-0{,}0248915\,\alpha_1$		$-1{,}0445459\,\alpha_1$			
	$+0{,}2489154\,\beta_1$	$+0{,}3111443\,\beta_1$	$-0{,}0344664\,\beta_1$	$+A_5$	$-0{,}0547116\,\beta_1$			
					$+A_5$			

Zunächst nehmen wir nur das erregende Moment A_5, B_5 der Endmasse wirkend an und erhalten gemäß Gl. (258), (259), (260) und Zahlentafel 26a die Zahlentafel 26b.

Ebenso berechnen wir die Zahlentafeln für die anderen erregenden Momente. Da die mit α_1 und β_1 multiplizierten Anteile der Ausschläge von den Momenten nicht beeinflußt werden, so brauchen wir nur mehr die von den Momenten erzeugten Anteile für sich zu berechnen. Sie ergeben sich nur für die Massen, die in der für die Berechnung gewählten Reihenfolge der Massen hinter dem erregenden Moment liegen. Zu jedem Ausschlag $\alpha = x\,A_l + y\,B_l$ der einen Phase gehört gleichzeitig der Ausschlag $\beta = x \cdot B_l - y\,A_l$ der anderen Phase.

So erhält man die folgenden Zahlentafeln 26c, d, e, (Seite 179).

Durch Addition aller gleichartigen Gl. (244) für alle Massen ergeben sich die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{h=1}^{h=n} [m_h \omega \alpha_h + k_h \omega \beta_h + A_h] &= 0 \\ \sum_{1}^{n} [m_h \omega \beta_h - k_h \omega \alpha_h + B_h] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (261)$$

Demnach muß auch für die Endmasse oder für das Wellenende sowohl $\sum\limits_1^n {}_1$ als auch $\sum\limits_1^n {}_2$ verschwinden.

Die Zahlentafeln 26b bis f liefern somit die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &-1{,}0445459\,\alpha_1 - 0{,}0547116\,\beta_1 \\ &-1{,}0998614\,A_1 + 2{,}0029796\,B_1 \\ &-2{,}7833609\,A_2 + 0{,}1985598\,B_2 \\ &-1{,}2441780\,A_3 - 0{,}2595524\,B_3 \\ &+0{,}3785086\,A_4 - 0{,}0779671\,B_4 \\ &+A_5 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (262\,\text{a})$$

Zahlentafel 26c—f.

	$m_h = m \cdot$	α_h	$m_h \omega^2 \alpha_h = c \cdot$	$+ k_h \omega \beta_h = c \cdot$	$+ A_h = c \cdot$	$\Sigma_1 = c \cdot$	$u \cdot \Sigma_1 =$	$v \cdot \Sigma_2 =$	$u \Sigma_1 + v \Sigma_2$
c)	4	0	0	0	A_4	A_4	0,4989895 A_4		0,4989895 A_4
A_4, B_4								+ 0,0224545 B_4	+ 0,0224545 B_1
allein	5	— 0,4989895 A_4	— 0,6237369 A_4	+ 0,0022455 A_4	— 0	+ 0,3785086 A_4			
wir-kend:		— 0,0224545 B_4	— 0,0280681 B_4	— 0,0498990 B_4		— 0,0779671 B_4			
d)	3	0	0	0	A_3	A_3	0,9944065 A_3		0,9944065 A_3
A_3, B_3								0,0745805 B_3	+ 0,0745805 B_3
allein	4	— 0,9944065 A_3	— 0,9944065 A_3	+ 0,0074580 A_3	—	+ 0,0130515 A_3	0,0065126 A_3	+ 0,0039076 A_3	+ 0,0104202 A_3
wir-		— 0,0745805 B_3	— 0,0745805 B_3	— 0,0994407 B_3		— 0,1740212 B_3	— 0,0868348 B_3	+ 0,0002931 B_3	— 0,0865417 B_3
kend:	5	— 1,0048267 A_3	— 1,2560334 A_3	— 0,0011961 A_3	—	— 1,2441780 A_3			
		+ 0,0119612 B_3	+ 0,0149515 B_3	— 0,1004827 B_3		— 0,2595524 B_3			
	2	0	0	0	A_2	A_2	1,9716088 A_2		1,9716088 A_2
e)								0,2365931 B_2	+ 0,2365931 B_2
A_2, B_2	3	— 1,9716088 A_2	— 1,4787066 A_2	+ 0,0354890 A_2	—	— 0,4432176 A_2	— 0,4407385 A_2	+ 0,0352905 A_2	— 0,4054480 A_2
allein		— 0,2365931 B_2	— 0,1774448 B_2	— 0,2957413 B_2		— 0,4731861 B_2	— 0,4705393 B_2	— 0,0330554 B_2	— 0,5035947 B_2
wir-	4	— 1,5661608 A_2	— 1,5661608 A_2	— 0,0267002 A_2	—	— 2,0360786 A_2	— 1,0159818 A_2	+ 0,0081465 A_2	— 1,0078353 A_2
kend:		+ 0,2670016 B_2	+ 0,2670016 B_2	— 0,1566161 B_2		— 0,3628006 B_2	— 0,1810337 B_2	— 0,0457191 B_2	— 0,2267528 B_3
	5	— 0,5583255 A_2	— 0,6979069 A_2	— 0,0493754 A_2	—	— 2,7833609 A_2			
		+ 0,4937544 B_2	+ 0,6171930 B_2	— 0,0558326 B_2		+ 0,1985598 B_2			
	1	0	0	0	A_1	A_1	2,9058504 A_1		2,9058504 A_1
								0,5230531 B_1	+ 0,5230531 B_1
f)	2	— 2,9058504 A_1	— 1,4529252 A_1	+ 0,0523053 A_1	—	— 0,4006199 A_1	— 0,7898657 A_1	+ 0,1306258 A_1	— 0,6592399 A_1
A_1, B_1		— 0,5230531 B_1	— 0,2615266 B_1	— 0,2905850 B_1		— 0,5521116 B_1	— 1,0885481 B_1	— 0,0947839 B_1	— 1,1833320 B_1
allein	3	— 2,2466105 A_1	— 1,6849579 A_1	— 0,0990418 A_1	—	— 2,1846196 A_1	— 2,1723999 A_1	+ 0,0293768 A_1	— 2,1430231 A_1
wir-		+ 0,6602789 B_1	+ 0,4952092 B_1	— 0,3369916 B_1		— 0,3938940 B_1	— 0,3916907 B_1	— 0,1629300 B_1	— 0,5546207 B_1
kend:	4	— 0,1035874 A_1	— 0,1035874 A_1	— 0,1214900 A_1	—	— 2,4096970 A_1	— 1,2024135 A_1	— 0,0182027 A_1	— 1,2206162 A_1
		+ 1,2148996 B_1	+ 1,2148996 B_1	— 0,0103587 B_1		+ 0,8106469 B_1	+ 0,4045043 B_1	— 0,0541085 B_1	+ 0,3503958 B_1
	5	+ 1,1170288 A_1	+ 1,3962860 A_1	— 0,0864504 A_1	—	— 1,0998614 A_1			
		+ 0,8645038 B_1	+ 1,0806298 B_1	+ 0,1117029 B_1		+ 2,0029796 B_1			

Die zugehörige Endgleichung für die Phase β lautet demnach:

$$\left.\begin{aligned} &-1{,}0445459\beta_1 + 0{,}0547116\alpha_1 - 1{,}0998614B_1 - 2{,}0029796A_1 \\ &-2{,}7833609B_2 - 0{,}1985598A_2 - 1{,}2441780B_3 + 0{,}2595524A_3 \\ &+0{,}3785086B_4 + 0{,}0779671A_4 + B_5 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (262\,b)$$

Aus den Gleichungen (262a und b) berechnen sich die unbekannten Ausschläge α_1 und β_1 zu:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 = &-0{,}9499117A_1 + 1{,}9673149B_1 - 2{,}6474412A_2 + 0{,}3287606B_2 \\ &-1{,}2008392A_3 - 0{,}1855855B_3 + 0{,}3574763A_4 - 0{,}0933661B_4 \\ &+0{,}9547345A_5 - 0{,}0500074B_5 \end{aligned}\right\} \qquad (263\,a)$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 = &-0{,}9499117B_1 - 1{,}9673149A_1 - 2{,}6474412B_2 - 0{,}3287606A_2 \\ &-1{,}2008392B_3 + 0{,}1855855A_3 + 0{,}3574763B_4 + 0{,}0933661A_4 \\ &+0{,}9547345B_5 + 0{,}0500074A_5 \end{aligned}\right\} \qquad (263\,b)$$

Damit sind aber auch die Ausschläge der übrigen Massen aus den Zahlentafeln 26b bis f berechenbar; z. B. für die Endmasse m_5:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_5 = &-0{,}3446644\alpha_1 + 0{,}2489154\beta_1 + 1{,}1170288A_1 + 0{,}8645038B_1 \\ &-0{,}5583255A_2 + 0{,}4937544B_2 - 1{,}0048267A_3 + 0{,}0119612B_3 \\ &-0{,}4989895A_4 - 0{,}0224545B_4 \end{aligned}\right\} \qquad (264)$$

Die zugehörige Gleichung für β_5 erhält man aus (264), wenn man α durch β, β durch $-\alpha$, A durch B und B durch $-A$ ersetzt.

Die fertig berechneten Beizahlen sind für die Ausschläge α in Zahlentafel 26g zusammengestellt.

Zahlen-

	A_1	B_1	A_2	B_2	A_3
α_1	−0,949912	+1,967315	−2,647441	+0,328761	−1,200839
α_2	−2,647441	+0,328760	−0,702656	+0,829368	−0,411112
α_3	−1,200839	−0,185586	−0,411111	+0,275880	+0,619885
α_4	+0,357476	−0,093366	+0,081358	−0,126664	−0,223576
α_5	+0,954735	−0,050007	+0,272320	−0,278547	−0,544745

Die Zahlentafel läßt das Gesetz der Gegenseitigkeit der Ausschläge erkennen. Die Erfüllung der Gl. (255, (256) und (257) wollen wir an je einem Beispiel prüfen:

Gl. (255) für $l = 4$:

$$\begin{aligned} &0{,}5\cdot[0{,}1\cdot(0{,}357476^2 + 0{,}093366^2) + 0{,}12\,(0{,}276118^2 + 0{,}033298^2) \\ &\quad + 0{,}2\cdot(0{,}081358^2 + 0{,}126664^2) + 0{,}12\,(0{,}304934^2 + 0{,}084736^2) \\ &\quad + 0{,}3\cdot(0{,}223576^2 + 0{,}041928^2) + 0{,}15\,(0{,}004561^2 + 0{,}125988^2) \\ &\quad + 0{,}2\cdot(0{,}219015^2 + 0{,}084060^2) + 0{,}18\,(0{,}379944^2 + 0{,}014647^2) \\ &\quad + 0{,}2\cdot(0{,}598959^2 + 0{,}098707^2)] \\ &\quad = 0{,}5\cdot(0{,}0136506 + 0{,}0045326 + 0{,}0155232 + 0{,}0110068 \\ &\qquad + 0{,}0736990 + 0{,}0092820 + 0{,}0120197 + 0{,}0023841 \\ &\qquad + 0{,}0260230) = 0{,}084060 = b_{1,4}. \end{aligned}$$

Gl. (256) für $l = 2$, $i = 3$:

$$\begin{aligned}
&0{,}5 \cdot [0{,}1 \cdot (-2{,}647441 \cdot -1{,}200839 + 0{,}328761 \cdot -0{,}185586)\\
&+ 0{,}12\,(1{,}944785 \cdot 0{,}789727 + 0{,}500607 \cdot 0{,}461466)\\
&+ 0{,}2\,(-0{,}702656 \cdot -0{,}411412 + 0{,}829368 \cdot 0{,}275880)\\
&+ 0{,}12\,(0{,}291545 \cdot 1{,}030997 - 0{,}553488 \cdot 0{,}142939)\\
&+ 0{,}3\,(-0{,}411111 \cdot 0{,}619885 + 0{,}275880 \cdot 0{,}418819)\\
&+ 0{,}15\,(0{,}492469 \cdot -0{,}843461 - 0{,}402544 \cdot -0{,}460747)\\
&+ 0{,}2\,(0{,}081358 \cdot -0{,}223576 - 0{,}126664 \cdot -0{,}041928)\\
&+ 0{,}18\,(0{,}190962 \cdot -0{,}321169 - 0{,}151883 \cdot -0{,}181054)\\
&+ 0{,}2\,(0{,}272320 \cdot -0{,}544745 - 0{,}278547 \cdot -0{,}222982)]\\
&= 0{,}5\,(0{,}3118137 + 0{,}1035354 - 0{,}0417895 - 0{,}0025758\\
&- 0{,}0172468 + 0{,}2120236 + 0{,}0265748 - 0{,}0344864 - 0{,}0060899)\\
&= 0{,}275880 = b_{2,3}\,.
\end{aligned}$$

Gl. (257) für $l = 4$, $i = 5$:

$$\begin{aligned}
&0{,}1 \cdot (0{,}357476 \cdot -0{,}050007 + 0{,}093366 \cdot 0{,}954735) + 0{,}12\,(-0{,}276118 \cdot -0{,}228540\\
&+ 0{,}033298 \cdot -0{,}682415) + 0{,}2 \cdot (0{,}081358 \cdot -0{,}278547 + 0{,}126664 \cdot 0{,}272320)\\
&+ 0{,}12\,(-0{,}304934 \cdot 0{,}055565 - 0{,}084736 \cdot -0{,}817065)\\
&+ 0{,}3 \cdot (-0{,}223576 \cdot -0{,}222982 + 0{,}041928 \cdot -0{,}544745)\\
&+ 0{,}15\,(0{,}004561 \cdot 0{,}321689 - 0{,}125988 \cdot -0{,}054214)\\
&+ 0{,}2 \cdot (-0{,}219015 \cdot 0{,}098707 - 0{,}084060 \cdot -0{,}598959)\\
&+ 0{,}18\,(-0{,}379944 \cdot 0{,}156177 - 0{,}014647 \cdot 0{,}282344)\\
&+ 0{,}2 \cdot (-0{,}598959 \cdot 0{,}254884 - 0{,}098707 \cdot -0{,}316615)\\
&= 0{,}0071264 + 0{,}0023662 + 0{,}0081039 + 0{,}0057460 - 0{,}0242826\\
&+ 0{,}0048457 + 0{,}0062749 + 0{,}0012447 - 0{,}0114253 = 0\,.
\end{aligned}$$

tafel 26g.

B_3	A_4	B_4	A_5	B_5
—0,185586	+0,357476	—0,093366	+0,954735	—0,050007
+0,275880	+0,081358	—0,126664	+0,272320	—0,278547
+0,418819	—0,223576	—0,041928	—0,544745	—0,222982
—0,041928	—0,219015	+0,084060	—0,598959	+0,098707
—0,222982	—0,598959	+0,098707	—0,316615	+0,254884

Die Berechnungsweise der erzwungenen Schwingung mit gemischter Dämpfung dürfte aus dem behandelten Beispiel klar hervorgehen, so daß wir auf ein praktisches Beispiel verzichten können. Man erkennt, daß auch die Berücksichtigung der inneren oder der gemischten Dämpfung keine Schwierigkeit und nur geringe Mehrarbeit verursacht.

27. Berücksichtigung der Wellenmasse bei äußerer und innerer Dämpfung.

In den bisherigen Untersuchungen der gedämpften Drehschwingungen wurde von der Masse der Wellenstücke (Drehfedern) zwischen den drehelastisch starren Einzelmassen abgesehen und der dämpfende Widerstand, sowohl für die äußere wie für die innere Dämpfung als an den Einzelmassen wirkend angenommen. Nunmehr wollen wir den allgemeinen Fall der mit Masse begabten Welle untersuchen, an welcher überall auf der ganzen Länge äußere und innere Dämpfungswiderstände wirken.

Praktische Bedeutung kommt diesem Fall insofern zu, als die an der Wellenoberfläche wirkende äußere Dämpfung, wenigstens stellenweise, wie in den Wellenlagern und -Stopfbüchsen oder an dem im Seewasser umlaufenden Teil der Schiffsmaschinenwellen, verhältnismäßig groß werden kann, und insofern, als gerade das Wellenmaterial der Sitz der von der Formänderungsgeschwindigkeit der Drehfedern herrührenden inneren Dämpfung ist.

Für ein Wellenelement von der unendlich kleinen achsialen Länge dx kann man den äußeren Dämpffaktor gemäß Gl. (111) gleichsetzen:

$$k = c \cdot dm\omega = \left(c \cdot \frac{\gamma}{g} J\omega\right) dx \equiv q \cdot dx. \tag{265}$$

(γ das Gewicht der Raumeinheit des Wellenbaustoffs, kgcm^{-3}, $g = 981\,\mathrm{cms}^{-2}$ die Erdbeschleunigung, J das polare Trägheitsmoment des Wellenquerschnitts cm^4). Demnach hat

$$q \equiv c \cdot \frac{\gamma}{g} J\omega$$

die Dimension kgs und die Größe des äußeren Dämpffaktors eines Wellenstückes von der Länge 1 (cm).

Die innere Dämpfung hängt von der Formänderungsgeschwindigkeit ab. Die Formänderung einer sich verdrehenden Welle wird bekanntlich ausgedrückt durch den verhältnismäßigen Verdrehungswinkel ϑ, um welchen zwei um 1 cm voneinander entfernte Wellenquerschnitte verdreht werden. Das innere Dämpfungsmoment kann demnach

$$M_r' = q' \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

geschrieben werden, wobei der Faktor q' die Dimension $\mathrm{kgcm}^2\mathrm{s}$ besitzt, da die Dimension von ϑ cm^{-1} ist. Nun ist für unser Wellenteilchen

$$\vartheta \cdot dx = \varphi_{x+dx} - \varphi_x \equiv d\varphi, \qquad \text{also:}$$

$$\vartheta = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Damit wird das Moment der inneren Dämpfung:

$$M_r' = q' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial t}. \tag{266}$$

An Hand dieser Herleitung können wir rückwärts feststellen, welche Bedeutung demgegenüber dem früher benutzten Begriff des inneren

Dämpffaktors $k_{h,h+1}$ zukommt: Für ein endliches Wellenstück von der Länge $l_{h,h+1}$ ist

$$\vartheta = \frac{\varphi_{h+1} - \varphi_h}{l_{h,h+1}},$$

demnach, wenn wir wie früher die Ableitung des Drehwinkels nach der Zeit mit φ' bezeichnen:

$$M_r' = q' \cdot \frac{\varphi_{h+1}' - \varphi_h'}{l_{h,h+1}} = k_{h,h+1}(\varphi_{h+1}' - \varphi_h').$$

Daraus ergibt sich

$$k_{h,h+1} = \frac{q'}{l_{h,h+1}}. \tag{267}$$

und umgekehrt:

$$q' = k_{h,h+1} \cdot l_{h,h+1}. \tag{267a}$$

Zur Ableitung der Differentialgleichung der Schwingung schreiben wir die allgemeine Gl. (243) für die h-te Masse an, wobei wir die Nachbarmassenteilchen unendlich nahe annehmen. Sie lautet bei Abwesenheit eines erregenden harmonischen Moments an der Stelle x:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\gamma}{g} J dx \cdot \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} + k_x \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} + k_{x-dx,x}\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_{x-dx}}{\partial t}\right) \\ &+ k_{x,x+dx} \cdot \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_{x+dx}}{\partial t}\right) + c_{x-dx,dx}(\varphi_x - \varphi_{x-dx}) \\ &+ c_{x,x+dx}(\varphi_x - \varphi_{x+dx}) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{268}$$

Darin ist:

$$k_x = q \cdot dx; \qquad k_{x-dx,x} = \frac{q'}{dx}; \qquad k_{x,x+dx} = \frac{q' + \frac{dq'}{dx} dx}{dx};$$

$$c_{x-dx,x} = \frac{GJ}{dx};$$

$$c_{x,x+dx} = \frac{G\left(J + \frac{dJ}{dx} dx\right)}{dx};$$

$$\varphi_{x+dx} = \varphi_x + \frac{dx}{1!}\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{dx^2}{2!}\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \frac{dx^3}{3!}\frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x^3} + \cdots$$

$$\varphi_{x-dx} = \varphi_x - \frac{dx}{1!}\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{dx^2}{2!}\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} - \frac{dx^3}{3!}\frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x^3} + \cdots$$

Wir beschränken uns hier auf den Fall:

$$\frac{dq}{dx} = \frac{dq'}{dx} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dJ}{dx} = 0$$

und erhalten:

$$\frac{\gamma}{g} J dx \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + q dx \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{q'}{dx} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dx}{1!} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{dx^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \ldots \right)$$

$$+ \frac{q'}{dx} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(- \frac{dx}{1!} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{dx^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \ldots \right) + \frac{GJ}{dx} \left(\frac{dx}{1!} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \ldots \right)$$

$$+ \frac{GJ}{dx} \left(- \frac{dx}{1!} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{dx^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \ldots \right) = 0, \text{ oder:}$$

$$\frac{\gamma}{g} J \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + q \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - q' \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t \, \partial x^2} - GJ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \tag{269}$$

Zur Lösung dieser Differentialgleichung führen wir den Ansatz ein:

$$\varphi = T X;$$

in welchem T eine reine Funktion von t, X eine reine Funktion von x allein darstellt. Damit können wir Gl. (269) schreiben:

$$\frac{\frac{\gamma}{g} J \frac{d^2 T}{dt^2} + q \cdot \frac{dT}{dt}}{q' \cdot \frac{dT}{dt} + GJT} = \frac{\frac{d^2 X}{dx^2}}{X} . \tag{270}$$

Die linke Seite von Gl. (270) stellt eine reine Funktion von t, die rechte Seite eine reine Funktion von x dar. Die Gleichheit beider Seiten kann daher nur erfüllt sein, wenn jede Gleichungsseite einer und derselben Unveränderlichen $-c^2$ gleich ist. Das negative Vorzeichen der Konstanten ist gewählt, weil sonst der Schwingungswinkel φ mit t und x entgegen der Wirklichkeit unbegrenzt wachsen müßte. Die Gl. (270) zerfällt darnach in die beiden Gleichungen:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -c^2 X \tag{270a}$$

und

$$\frac{\gamma}{g} J \frac{d^2 T}{dt^2} + (q + c^2 q') \frac{dT}{dt} + c^2 GJT = 0 . \tag{270b}$$

Das Integral von Gl. (270a) ist mit den Integrationskonstanten A und δ:

$$X = A \sin (cx + \delta) . \tag{271a}$$

Für Gl. (270b) ergibt sich die charakteristische Gleichung:

$$\frac{\gamma}{g} J w^2 + (q + c^2 q') w + c^2 GJ = 0 ,$$

welche die Wurzeln hat:

$$w_{1,2} = \frac{-(q + c^2 q') \pm i \sqrt{4G \frac{\gamma}{g} J^2 c^2 - (q + c^2 q')^2}}{2 \frac{\gamma}{g} J} \tag{272}$$

Mit den Abkürzungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{q + c^2 q'}{2 \frac{\gamma}{g} J} &\equiv p \\ \frac{4 G \frac{\gamma}{g} J^2 c^2 - (q + c^2 q')^2}{4 \left(\frac{\gamma}{g} J\right)^2} &\equiv \omega^2 \end{aligned}\right\} \tag{272a}$$

lautet die Lösung von Gl. (270b) mit den Integrationskonstanten B und ε:

$$T = B e^{-pt} \sin(\omega t + \varepsilon). \tag{271b}$$

Die Gesamtlösung wird daher mit $A \cdot B \equiv C$:

$$\varphi = C e^{-pt} \sin(\omega t + \varepsilon) \sin(c x + \delta). \tag{273}$$

Als Beispiel behandeln wir die an beiden Enden freie zylindrische Welle von der Länge l. An den freien Enden muß $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ sein. Diese Bedingung wird für $x = 0$ erfüllt, wenn $\delta = \frac{\pi}{2}$, und für $x = l$ durch die Gleichung:

$$c \cdot l = h \cdot \pi ,$$

wobei h eine beliebige ganze Zahl ist.

Der Exponentialfaktor e^{-pt} der Gl. (273) kennzeichnet die Lösung als diejenige der Eigenschwingungen, die mit der Zeit allmählich erlöschen.

Je nach dem Wert h erhält man sonach für die freie zylindrische Welle unendlich viele Eigenschwingungen. Die minutlichen Eigenschwingungszahlen sind

$$n_h = \frac{30}{\pi} \omega_h = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{4 G \frac{\gamma}{g} J^2 \frac{h^2 \pi^2}{l^2} - \left(q + \frac{h^2 \pi^2}{l^2} q'\right)^2}}{2 \frac{\gamma}{g} J} . \tag{274}$$

Die Eigenschwingungszahlen der gedämpften Welle sind demnach nicht mehr genau ganzzahlige Vielfache der Grundeigenschwingungszahl, die sich für $h = 1$ ergibt, vorausgesetzt, daß die Dämpfungszahlen q und q' wirklich unveränderliche Größen sind, was ja im allgemeinen nicht zutrifft, denn die Dämpffaktoren ändern sich selbst wesentlich mit der Periodenzahl. Die Oberschwingungszahlen würden genau ganzzahlige Vielfache der Grundschwingungszahl bleiben, wenn die Abhängigkeit der Dämpfzahlen q und q' von der Periodenzahl eine solche wäre, daß $q_{(h)} = h \cdot q_{(1)}$ und $q'_{(h)} = \frac{q'_{(1)}}{h}$. Dies scheint auch, wenigstens angenähert, der Fall zu sein.

Es ist hier der Ort, einige Worte über die praktische Ermittlung des inneren Dämpffaktors beizufügen.

Läßt man eine an den Enden freie zylindrische Welle, die möglichst frei von äußeren Dämpfungswiderständen gehalten wird, Eigenschwingungen vollführen, so kann man die Eigenschwingungsdauer und das Verhältnis der Schwingungsausschläge zweier aufeinanderfolgenden Schwingungen messen. Die Schwingung sei h-ten Grades, kenntlich an h Schwingungsknoten auf der ganzen Wellenlänge l, die gemessene Schwingungsdauer sei T_h und das gemessene Ausschlagverhältnis $\varepsilon_h < 1$. Dann gilt mit $q = 0$, gemäß Gl. (272a):

$$e^{-pT_h} = e^{-\frac{h^2\pi^2 \cdot q'}{l^2 \cdot 2\frac{\gamma}{g} J} T_h} = \varepsilon_h$$

oder:

$$\ln \varepsilon_h = -\frac{h^2\pi^2 q'}{l^2 \cdot 2\frac{\gamma}{g} J} T_h .$$

Damit wird

$$q' = -\frac{2l^2 \frac{\gamma}{g} J}{h^2\pi^2} \frac{\ln \varepsilon_h}{T_h} . \tag{275}$$

Setzt man $T_h = \frac{2\pi}{\omega_h}$ und $\frac{\gamma}{g} l \cdot J = m$ gleich dem Trägheitsmoment der gesamten Welle, so schreibt sich Gl. (275) in der Form:

$$q' = -\frac{l m \omega_h}{h^2\pi^3} \ln \varepsilon_h = -\frac{0{,}014 \lg \varepsilon_h}{h^2} l \cdot m\omega_h . \tag{275a}$$

Wenn das logarithmische Dekrement für jeden Schwingungsgrad h angenähert denselben Wert hat, so zeigt in der Tat Gl. (275a), daß die Dämpfungszahl q' dem Wert h umgekehrt proportional ist, denn ω_h ist angenähert gleich $h \cdot \omega_1$.

Der innere Dämpfungsfaktor ist nach Gl. (275a):

$$k_1 = \frac{q'}{l} = -\frac{0{,}014 \lg \varepsilon_h}{h^2} m\omega_h . \tag{275b}$$

Für ω_h kann man endlich den aus Gl. (272a) oder (274) unter Vernachlässigung der Dämpfung sich ergebenden Näherungswert einführen:

$$\omega_h \sim \frac{h\pi}{l} \sqrt{\frac{Gg}{\gamma}} ,$$

womit sich ergibt:

$$k_1 = \frac{q'}{l} = -\frac{0{,}044 \lg \varepsilon_h}{h} \frac{m}{l} \sqrt{\frac{Gg}{\gamma}} . \tag{276}$$

Mit diesen Ausführungen sind die früher, Gl. (116), gemachten Angaben über den inneren Dämpffaktor begründet.

Um auf die erzwungenen Schwingungen der Wellenmasse zu kommen, denken wir uns ebenso die Welle aus unendlich kleinen Einzelmassen bestehend, die unendlich benachbart sind, und wenden auf dieses System unsere Gleichungen (258) bis (260) an. Zunächst ist nach Gl. (259):

$$\left.\begin{aligned} z_{x-dx,x} &= c^2_{x-dx,x} + k^2_{x-dx,x}\omega^2 = \left(\frac{GJ}{dx}\right)^2 + \left(\frac{q'\omega}{dx}\right)^2 \\ u &= \frac{GJ\,dx}{(GJ)^2 + (q'\omega)^2} \\ v &= \frac{q'\omega\,dx}{(GJ)^2 + (q'\omega)^2} \end{aligned}\right\} \quad (277)$$

Aus Gl. (260) wird:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{x+dx} &= \alpha_x - \left(u\sum_0^x{}_1 + v\sum_0^x{}_2\right) \\ \beta_{x+dx} &= \beta_x - \left(u\sum_0^x{}_2 - v\sum_0^x{}_1\right) \end{aligned}\right\} \quad (278).$$

Nach den Gl. (258) und (259) gilt weiter:

$$\left.\begin{aligned} \sum_0^{x+dx}{}_1 &= \sum_0^x{}_1 + dm\,\omega^2\alpha_{x+dx} + q\cdot dx\cdot\omega\beta_{x+dx} \\ \sum_0^{x+dx}{}_2 &= \sum_0^x{}_2 + dm\,\omega^2\beta_{x+dx} - q\,dx\,\omega\,\alpha_{x+dx} \end{aligned}\right\} \quad (279)$$

oder mit $dm = \frac{\gamma}{g} J\,dx$ und mit Vernachlässigung unendlich kleiner Größen gegen endliche:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\sum_1}{dx} &= \frac{\gamma}{g} J\omega^2\alpha_{x+dx} + q\omega\beta_{x+dx} = \frac{\gamma}{g} J\omega^2\alpha_x + q\omega\beta_x \\ \frac{d\sum_2}{dx} &= \frac{\gamma}{g} J\omega^2\beta_x - q\omega\alpha_x \end{aligned}\right\} \quad (280)$$

Mit Berücksichtigung der Gl. (277) wird aus Gl. (278):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dx} &= -\frac{GJ\sum_1 + q'\omega\sum_2}{(GJ)^2 + (q'\omega)^2} \\ \frac{d\beta}{dx} &= -\frac{GJ\sum_2 - q'\omega\sum_1}{(GJ)^2 + (q'\omega)^2} \end{aligned}\right\} \quad (278a)$$

Differenziert man diese Gleichungen nach x und berücksichtigt Gl. (280), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dx^2} &= \frac{-\alpha\left(G\frac{\gamma}{g}J^2 - qq'\right)\omega^2 - \beta\omega\left(GJq + \frac{\gamma}{g}Jq'\omega^2\right)}{(GJ)^2 + (q'\omega)^2} = -a\alpha - b\beta \\ \frac{d^2\beta}{dx^2} &= \frac{-\beta\left(G\frac{\gamma}{g}J^2 - qq'\right)\omega^2 + \alpha\omega\left(GJq + \frac{\gamma}{g}Jq'\omega^2\right)}{(GJ)^2 + (q'\omega)^2} = -a\beta + b\alpha \end{aligned}\right\} \quad (281)$$

wobei die Abkürzungen gebraucht sind:

$$\left.\begin{aligned} a &\equiv \frac{\left(G\frac{\gamma}{g}J^2 - qq'\right)\omega^2}{(GJ)^2 + (q'\omega)^2} \\ b &\equiv \frac{\omega\left(GJq + \frac{\gamma}{g}Jq'\omega^2\right)}{(GJ)^2 + (q'\omega)^2} \end{aligned}\right\} \qquad (281\,\mathrm{a})$$

Aus der ersten Gl. (281) findet man:

$$\beta = -\frac{a}{b}\alpha - \frac{1}{b}\frac{d^2\alpha}{dx^2}$$

und folglich auch

$$\frac{d^2\beta}{dx^2} = -\frac{a}{b}\frac{d^2\alpha}{dx^2} - \frac{1}{b}\frac{d^4\alpha}{dx^2}\,.$$

Führt man diese Beziehungen in die zweite Gl. (281) ein, so erhält man:

$$\frac{d^4\alpha}{dx^4} + 2a\frac{d^2\alpha}{dx^2} + (a^2 + b^2)\,\alpha = 0\,. \qquad (282)$$

Die charakteristische Gleichung dieser linearen Differentialgleichung:

$$w^4 + 2\,a\,w^2 + a^2 + b^2 = 0$$

hat die vier Wurzeln:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= +\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \equiv p + ri \\ w_2 &= +\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \equiv p - ri \\ w_3 &= -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \equiv -p + ri \\ w_4 &= -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \equiv -p - ri \end{aligned}\right\} \qquad (283)$$

Demnach lautet die Lösung der Gl. (282) mit den Integrationskonstanten A, B, C, D und mit den aus Gl. (283) ersichtlichen Abkürzungen p und r:

$$\alpha = e^{px}(A\sin rx + B\cos rx) + e^{-px}(C\sin rx + D\cos rx) \qquad (284\,\mathrm{a})$$

In derselben Weise findet sich:

$$\beta = e^{px}(B\sin rx - A\cos rx) + e^{-px}(-D\sin rx + C\cos rx) \qquad (284\,\mathrm{b})$$

Der Schwingungswinkel der erzwungenen Schwingungen ist mit den Werten α und β der Gl. (284a und b):

$$\varphi = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t \tag{285}$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Lösung der allgemeinen Differentialgleichung (269) genügt.

Aus den Gl. (284a), (284b) und (280) findet man:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma_1 = \frac{e^{px}}{p^2 + r^2} \Big[& A\left(\left(\frac{\gamma}{g} J\omega^2 p - q\omega r\right)\sin rx - \left(\frac{\gamma}{g} J\omega^2 r + q\omega p\right)\cos rx\right) \\
& + B\left(\left(\frac{\gamma}{g} J\omega^2 r + q\omega p\right)\sin rx + \left(\frac{\gamma}{g} J\omega^2 p - q\omega r\right)\cos rx\right)\Big] \\
+ \frac{e^{-px}}{p^2 + r^2} \Big[& C\left(\left(-\frac{\gamma}{g} J\omega^2 p + q\omega r\right)\sin rx - \left(\frac{\gamma}{g} J\omega^2 r + q\omega p\right)\cos rx\right) \\
& + D\left(\left(\frac{\gamma}{g} J\omega^2 r + q\omega p\right)\sin rx - \left(\frac{\gamma}{g} J\omega^2 p - q\omega r\right)\cos rx\right)\Big] + \text{Const}
\end{aligned}\right\} \tag{286a}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma_2 = \frac{e^{px}}{p^2 + r^2} \Big[& A\left(-\left(\frac{\gamma}{g} J\omega^2 r + q\omega p\right)\sin rx - \left(\frac{\gamma}{g} J\omega^2 p - q\omega r\right)\cos rx\right) \\
& + B\left(\left(\frac{\gamma}{g} J\omega^2 p - q\omega r\right)\sin rx - \left(\frac{\gamma}{g} J\omega^2 r + q\omega p\right)\cos rx\right)\Big] \\
+ \frac{e^{-px}}{p^2 + r^2} \Big[& C\left(\left(\frac{\gamma}{g} J\omega^2 r + q\omega p\right)\sin rx - \left(\frac{\gamma}{g} J\omega^2 p - q\omega r\right)\cos rx\right) \\
& + D\left(\left(\frac{\gamma}{g} J\omega^2 p - q\omega r\right)\sin rx + \left(\frac{\gamma}{g} J\omega^2 r + q\omega p\right)\cos rx\right)\Big] + \text{Const}
\end{aligned}\right\} \tag{286b}$$

Die gesamte Dämpfarbeit der Welle für eine volle Schwingung ist

$$\mathfrak{A} = \pi \int_{x=0}^{x=l} \omega (\alpha^2 + \beta^2) \cdot q\, dx + \pi \int_{x=0}^{x=l} \omega \left((\alpha_{x+dx} - \alpha_x)^2 + (\beta_{x+dx} - \beta_x)^2\right) \frac{q'}{dx}$$

$$= \pi\omega \left[q \int_0^l (\alpha^2 + \beta^2)\, dx + q' \int_0^l \left(\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 \right) dx \right.$$

$$= \pi\omega \left[q\left((A^2 + B^2) \frac{e^{2px}}{2p} + (BD - AC) \frac{\sin 2rx}{r} - (BC + AD) \frac{\cos 2rx}{r} \right.\right.$$

$$\left. - (C^2 + D^2) \frac{e^{-2px}}{2p} + \text{Const} \right) + q'(p^2 + r^2) \left((A^2 + B^2) \frac{e^{2px}}{2p} \right.$$

$$+ (AC - BD) \frac{\sin 2rx}{r} + (BC + AD) \frac{\cos 2rx}{r} - (C^2 + D^2) \frac{e^{-2px}}{2p}$$

$$\left.\left. + \text{Const} \right) \right]_0^l .$$

Mit Einführung der Integrationsgrenzen wird daraus:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A} = \pi\omega\Bigg[&\frac{q'(p^2+r^2)+q}{2p}\left((A^2+B^2)(e^{2pl}-1)+(C^2+D^2)(1-e^{-2lp})\right)\\&+\frac{q'(p^2+r^2)-q}{r}\left((AC-BD)\sin 2rl-(AD+BC)(1-\cos 2rl)\right)\Bigg]\end{aligned}\right\}\quad(287)$$

Die Integrationskonstanten A, B, C, D bestimmen sich im Einzelfall aus den gegebenen Grenzbedingungen. Meist pflegen die Ausschläge α_0 und β_0 für den Anfang des Wellesntückes ($x = 0$) und die Anfangsrichtungen der Schwingungsformen, d. s. die Werte $\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)_0$ und $\left(\frac{d\beta}{dx}\right)_0$ für $x = o$ gegeben zu sein.

Es handele sich z. B. um die Ermittlung der erzwungenen Schwingungsform des Wellenstückes zwischen den Massen m_h und m_{h+1} und wir denken uns, die Berechnung sei bis zur Masse m_h durchgeführt, so daß die Ausschläge α_h und β_h und die Momentensummen $\sum_1 = \sum_{l=1}^{l=h}(m_l\omega^2\alpha_l + \omega k_l\beta_l + A_l)$ und $\sum_2 = \sum_{l=1}^{l=h}(m\,\omega^2\beta_l - \omega k_l\alpha_l + B_l)$ bekannt sind.

Nun berechnen wir zunächst ohne Rücksicht auf die Masse und die äußere Dämpfung des Wellenstückes $l_{h,h+1}$ die Schwingungsform für gemischte Dämpfung in der üblichen Weise weiter, wobei als innerer Dämpfungsfaktor $k_{h,h+1} = \frac{q'}{l_{h,h+1}}$ eingeführt wird, und erhalten so die Ausschläge $(\alpha_{h+1})_0$ und $(\beta_{h+1})_0$. Der Zeiger 0 soll andeuten, daß diese Werte vorläufige, mit Nullsetzung der Wellenmasse und der äußeren Wellendämpfung berechnete Hilfswerte sind zur Unterscheidung von den tatsächlichen, unter Berücksichtigung der Wellenmasse und Wellendämpfung zu findenden Werten. Dann gelten für die Anfangsneigungen der Schwingungsformen, da für diese die Wellenmasse und die äußere Wellendämpfung noch unwirksam sind, gemäß den Gl. (259) und (260) die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)_h &= \frac{(\alpha_{h+1})_0-\alpha_h}{l_{h,h+1}} = \frac{u\sum_1+v\sum_2}{l_{h,h+1}}\\\left(\frac{d\beta}{dx}\right)_h &= \frac{(\beta_{h+1})_0-\beta_h}{l_{h,h+1}} = \frac{u\sum_2-v\sum_1}{l_{h,h+1}}\end{aligned}\right\}\quad(288)$$

Dabei ist

$$\left.\begin{aligned}u_1 &= \frac{u}{l} = \frac{\frac{GJ}{l^2}}{\left(\frac{GJ}{l}\right)^2+\left(\frac{q'\omega}{l}\right)^2} = \frac{GJ}{(GJ)^2+(q'\omega)^2}\\v_1 &= \frac{v}{l} = \frac{\frac{q'\omega}{l^2}}{\left(\frac{GJ}{l}\right)^2+\left(\frac{q'\omega}{l}\right)^2} = \frac{q'\omega}{(GJ)^2+(q'\omega)^2}\end{aligned}\right\}\quad(289)$$

Hier mag besonders darauf hingewiesen werden, daß nach unsern bisherigen Ableitungen alle Werte G, J, q', q, γ, l sich auf die wirkliche Welle beziehen, so daß auch $l_{h,h+1}$ in Gl. (288) die wirkliche Wellenlänge l zwischen den Massen m_h und m_{h+1} bedeutet. Es steht jedoch frei, alle Größen auf die Bezugswelle (Zeiger Null) anzuwenden, wenn man in letzterem Falle setzt:

$$\left.\begin{aligned} q_0' &= \frac{GJ_0}{GJ}\, q' \\ q_0 &= \frac{GJ}{GJ_0}\, q \\ l_0 &= \frac{GJ_0}{GJ}\, l \\ \gamma_0 &= \left(\frac{GJ}{GJ_0}\right)^2 \cdot \gamma \end{aligned}\right\} \tag{290}$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten A, B, C, D, der Gl. (284a) und (284b) stehen die 4 Gleichungen zur Verfügung:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{x=0} &= \alpha_h && = B + D \\ \beta_{x=0} &= \beta_h && = -A + C \\ \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)_{x=0} &= -u_1\Sigma_1 - v_1\Sigma_2 && = r(A + C) + p(B - D) \\ \left(\frac{d\beta}{dx}\right)_{x=0} &= -u_1\Sigma_2 + v_1\Sigma_1 && = r(B - D) - p(A + C) \end{aligned}\right\} \tag{291}$$

Ihre Auflösung ergibt:

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2}\beta_h - \frac{u_1 r + v_1 p}{2(r^2 + p^2)}\Sigma_1 + \frac{u_1 p - v_1 r}{2(r^2 + p^2)}\Sigma_2 \\ B &= \frac{1}{2}\alpha_h - \frac{u_1 r + v_1 p}{2(r^2 + p^2)}\Sigma_2 - \frac{u_1 p - v_1 r}{2(r^2 + p^2)}\Sigma_1 \\ C &= \frac{1}{2}\beta_h - \frac{u_1 r + v_1 p}{2(r^2 + p^2)}\Sigma_1 + \frac{u_1 p - v_1 r}{2(r^2 + p^2)}\Sigma_2 \\ D &= \frac{1}{2}\alpha_h + \frac{u_1 r + v_1 p}{2(r^2 + p^2)}\Sigma_2 + \frac{u_1 p - v_1 r}{2(r^2 + p^2)}\Sigma_1 \end{aligned}\right\} \tag{292}$$

Die wirklichen Ausschläge α_{h+1} und β_{h+1} sind:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{h+1} &= e^{pl}(A\sin rl + B\cos rl) + e^{-pl}(C\sin rl + D\cos rl) \\ \beta_{h+1} &= e^{pl}(B\sin rl - A\cos rl) + e^{-pl}(-D\sin rl + C\cos rl) \end{aligned}\right\} \tag{293}$$

Wenn die Größen pl und rl klein genug sind, um die höheren als die zweiten Potenzen gegen die Einheit vernachlässigen zu können, kann man die Exponentialfaktoren und die trigonometrischen Funktionen in Reihen von wenig Gliedern auflösen und findet:

$$\left.\begin{aligned}
e^{pl}\cos rl &= 1 + pl - \frac{r^2 - p^2}{2} l^2 \\
e^{pl}\sin rl &= (1 + pl) rl \\
e^{-pl}\cos rl &= 1 - pl - \frac{r^2 - p^2}{2} l^2 \\
e^{-pl}\sin rl &= (1 - pl) rl
\end{aligned}\right\} \tag{294}$$

Die Anwendung der Rechnung wollen wir wieder an einem einfachen Zahlenbeispiel vorführen. Wir wählen hierzu wieder die Schiffswelle des Dampfers Besoeki, wobei wir uns zur Vereinfachung des Beispiels die Maschinenmassen als einzige Masse gegeben denken. Das Trägheitsmoment der Propellermasse ist $m_1 = 90460$ kgcm s^2, jenes der Maschinenmassen $m_2 = 30978$ kgcm s^2. Die Länge der Schiffswelle zwischen beiden Massen ist $l_{1,2} = 3800$ cm, ihr polares Querschnittsträgheitsmoment $J = \frac{\pi}{32} \cdot 30^4 = 79522$ cm^4, der Schubelastizitätsmodul $G = 828\,000$ kgcm^{-2}. Die Berechnung der erzwungenen Schwingung wollen wir wieder wie früher für den Wert $\omega^2 = 730$ s^{-2} durchführen, der etwa der ersten Eigenschwingung entspricht. Für diesen Wert sind die Dämpfungszahlen des Propellers $k_1\omega = 354 \cdot 10^5$ kgcm, der Maschine $k_2\omega = 15 \cdot 10^5$ kgcm. — Die äußere Wellendämpfung rührt hauptsächlich her von Lager-, Stopfbüchsen- und Seewasserreibung; sie wird also etwa 1000mal so groß sein als die Luftreibung, aber eigentlich nicht gleichförmig über die ganze Wellenlänge verteilt sein; wir können sie nach Gl. (112) ungefähr schätzen zu

$$k\omega = q \cdot l \cdot \omega = 0{,}5 \frac{m\omega^2}{h} = 0{,}5 \frac{\frac{\gamma}{g} J \cdot l \cdot \omega^2}{3} \qquad \left(\text{da } \omega_m = \frac{\omega}{3}\right)$$

oder:

$$q = 0{,}5 \cdot \frac{\gamma J \omega}{g \cdot 3} \sim 3 \text{ kg s} .$$

Um über die Größenordnung der inneren Wellendämpfung einen Anhalt zu bekommen, denken wir uns, daß diese Dämpfung imstande sei, das Verhältnis aufeinanderfolgender Ausschläge der frei von fremden Massen schwingenden Welle auf etwa 0,9 zu bringen. Die Eigenschwingungsdauer (Gl. 93) ist etwa:

$$T_1 = \frac{2l}{a} = \frac{2 \cdot 3800}{322700} = 0{,}02355 \text{ s} .$$

Damit wird:

$$\varepsilon_1 = 0{,}9 = e^{-pT_1} \sim 1 - pT_1 ,$$

$$pT_1 \sim 0{,}1 .$$

$$p \sim \frac{0{,}1}{0{,}02355} \sim 4 \text{ s}^{-1} = \frac{c^2 q'}{2 \frac{\gamma}{g} J} \qquad (\text{nach Gl. 272a für } q = 0).$$

$$q' \sim \frac{8 \frac{\gamma}{g} J \cdot l^2}{\pi^2} \sim 7 \cdot 10^6 \text{ kgcm}^2 \text{ s} .$$

Berechnen wir zunächst die Schwingungsform ohne Berücksichtigung der Wellenmasse und der **äußeren** Wellendämpfung, so ist für den inneren Dämpffaktor zu setzen:

$$k_{1,2} = \frac{q'}{l} = \frac{7 \cdot 10^6}{3800} = 1842{,}105 \text{ kgcm s} ; \quad k_{1,2}\,\omega = 49771 \text{ kgcm}.$$

Für $\omega^2 = 730\,\mathrm{s}^{-2}$ wird $\omega = 27{,}01851\,\mathrm{s}^{-1}$. Ferner ist:

$$\frac{\gamma}{g} J = \frac{0{,}0078 \cdot 79522}{981} = 0{,}632285\ \mathrm{kg\,s}^2,$$

$$\frac{\gamma}{g} J\omega = 0{,}632285 \cdot 27{,}01851 = 17{,}0834\ \mathrm{kg\,s},$$

$$\frac{\gamma}{g} J\omega^2 = 17{,}0834 \cdot 27{,}01851 = 461{,}568\ \mathrm{kg},$$

$$GJ = 828000 \cdot 79522 = 6{,}5844216 \cdot 10^{10}\ \mathrm{kgcm}^2,$$

$$\frac{q'\omega}{GJ} = \frac{7 \cdot 10^6 \cdot 27{,}01851}{6{,}5844216 \cdot 10^{10}} = 28{,}7238 \cdot 10^{-4},$$

$$\left(\frac{q'\omega}{GJ}\right)^2 = 825 \cdot 10^{-8}.$$

$$u = \frac{lGJ}{(GJ)^2 + (q'\omega)^2} = \frac{\frac{l}{GJ}}{1 + 825 \cdot 10^{-8}} = 5{,}771152 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{kg}^{-1}\mathrm{cm}^{-1},$$

$$v = \frac{lq'\omega}{(GJ)^2 + (q'\omega)^2} = \frac{\frac{lq'\omega}{GJ}}{1 + 825 \cdot 10^{-8}} = 0{,}016577 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{kg}^{-1}\mathrm{cm}^{-1}.$$

$m_1\omega^2 = 66035800$ kgcm; $m_2\omega^2 = 22613940$ kgcm.

$k_1\omega = 354 \cdot 10^5$ kgcm; $k_2\omega = 15 \cdot 10^5$ kgcm.

Die Berechnung ohne Wellenmasse und ohne äußere Wellendämpfung ist in nebenstehender Zahlentafel 27 zusammengestellt.

Die Gleichungen für das freie Wellenende:

$$5681024\,\alpha_1 - 15255290\,\beta_1 + M_\alpha = 0,$$

$$5681024\,\beta_1 + 15255290\,\alpha_1 + M_\beta = 0,$$

ergeben aufgelöst:

$$10^8\,\alpha_1 = -2{,}1437996\,M_\alpha - 5{,}7567588\,M_\beta,$$

$$10^8\,\beta_1 = -2{,}1437996\,M_\beta + 5{,}7567588\,M_\alpha.$$

Damit wird:

$$10^8\,\alpha_2 = 10^8 \cdot (-2{,}8051581\,\alpha_1 - 2{,}0539346\,\beta_1) = -5{,}8103092\,M_\alpha + 20{,}5518427\,M_\beta,$$

$$10^8\,\beta_2 = 10^8 \cdot (-2{,}8051581\,\beta_1 + 2{,}0539346\,\alpha_1) = -5{,}8103092\,M_\beta - 20{,}5518427\,M_\alpha.$$

Zur Prüfung der Richtigkeit berechnen wir die Dämpfarbeit, die der Arbeit der harmonischen Momente gleich sein muß:

$$\mathfrak{A} = \pi\big(k_1\omega(\alpha_1^2+\beta_1^2) + k_2\omega(\alpha_2^2+\beta_2^2) + k_{1,2}\omega((\alpha_1-\alpha_2)^2 + (\beta_1-\beta_2)^2)\big) = \pi \cdot 10^{-11}(M_\alpha^2 + M_\beta^2)\cdot[354 \cdot 37{,}73615 + 15 \cdot 456{,}13794 + 0{,}49771 \cdot (26{,}3086015^2 + 3{,}6665096^2)] = \pi\, 10^{-8} M^2 \cdot 20{,}5518433.$$

$$\mathfrak{A} = \pi(\alpha_2 M_\beta - \beta_2 M_\alpha) = \pi \cdot 10^{-8} \cdot M^2 \cdot 20{,}5518427.$$

Zahlentafel 27.

α_h	$m_h\omega^2\alpha_h + k_h\omega\beta_h + A_h$	Σ_1	$u\Sigma_1$	$v\Sigma_2$	$u\Sigma_1 + v\Sigma_2$
α_1	$66035800\,\alpha_1 + 35400000\,\beta_1$	$66035800\,\alpha_1 + 35400000\,\beta_1$	$3{,}8110264\,\alpha_1 + 2{,}0429878\,\beta_1$	$-0{,}0058683\,\alpha_1 + 0{,}0109468\,\beta_1$	$3{,}8051581\,\alpha_1 + 2{,}0539346\,\beta_1$
$-2{,}8051581\,\alpha_1 - 2{,}0539346\,\beta_1$	$-63435677\,\alpha_1 + 3080901\,\alpha_1 - 46447553\,\beta_1 - 4207737\,\beta_1 + M_\alpha$	$5681024\,\alpha_1 - 15255290\,\beta_1 + M_\alpha$			

Die Übereinstimmung ist mithin ausgezeichnet.

Dieselbe Aufgabe lösen wir nunmehr mit Berücksichtigung der Wellenmasse und der äußeren Wellendämpfung:

Gl. (281a):

$$a = \frac{\left(G\frac{\gamma}{g}J^2 - qq'\right)\omega^2}{(GJ)^2 + (q'\omega)^2} = \frac{(9{,}602742 \cdot 10^{-12} - 0{,}004844 \cdot 10^{-12}) \cdot 730}{1 + 0{,}00000825},$$

$$a = 70{,}06408 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{cm}^{-2},$$

$$b = \frac{\left(GJq + \frac{\gamma}{g}Jq'\omega^2\right)\cdot\omega}{(GJ)^2 + (q'\omega)^2} = \frac{(0{,}455621 + 0{,}007452)\cdot 10^{-10} \cdot 27{,}01851}{1 + 0{,}00000825},$$

$$b = 12{,}51144 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{cm}^{-2}.$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 71{,}17241 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{cm}^{-2},$$

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= \frac{1}{2}(71{,}17241 + 70{,}06408)\cdot 10^{-10} = 70{,}61825 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{cm}^{-2} \\ p^2 &= \frac{1}{2}(71{,}17241 - 70{,}06408)\cdot 10^{-10} = 0{,}55417 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{cm}^{-2} \end{aligned}\right\}\begin{aligned} &p^2 + r^2 = 71{,}17241 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{cm}^{-2} \\ &\frac{1}{p^2 + r^2} = 140503883\,\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

$$r = 8{,}403465 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{cm}^{-1}; \qquad p = 0{,}744425 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{cm}^{-1}.$$

$$lg\,e^{pl} = lg\,e^{0{,}744425 \cdot 10^{-5} \cdot 3800} = 0{,}0122854,$$

$$e^{pl} = 1{,}028692,$$

$$lg\,e^{2pl} = 0{,}0245708; \qquad e^{2pl} = 1{,}058207.$$

$$lg\,e^{-pl} = 0{,}9877146 - 1; \qquad e^{-pl} = 0{,}9721082,$$

$$lg\,e^{-2pl} = 0{,}9754292 - 1; \qquad e^{-2pl} = 0{,}9449944,$$

$$r \cdot l = 8{,}403465 \cdot 10^{-5} \cdot 3800 = 0{,}31933167 = 18^\circ\,17'\,46{,}9'',$$

$$lg \sin rl = 9{,}4968357; \qquad lg \cos rl = 9{,}9774700,$$

$$lg \sin 2rl = 9{,}7753357; \qquad lg \cos 2rl = 9{,}9046578.$$

$$\sin rl = 0{,}3139321; \qquad \cos rl = 0{,}9494454,$$

$$\sin 2rl = 0{,}5961227; \qquad \cos 2rl = 0{,}8028933.$$

$$\frac{\gamma}{g}J\omega^2 p - q\omega r = 461{,}568 \cdot 0{,}744425 \cdot 10^{-5} - 3 \cdot 27{,}01851 \cdot 8{,}403465 \cdot 10^{-5} = -0{,}003375445\,\mathrm{kgcm}^{-1},$$

$$\frac{\gamma}{g}J\omega^2 r + q\omega p = 0{,}039391103\,\mathrm{kgcm}^{-1}.$$

Gl. (284a) und (284b): $\alpha_{x=0} = B + D;\quad \beta_{x=0} = -A + C,$

$$\alpha_{x=l} = 1{,}028692\,(A \cdot 0{,}3139321 + B \cdot 0{,}9494454) + 0{,}9721082\,(C \cdot 0{,}3139321 + D \cdot 0{,}9494454),$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{x=l} &= 0{,}3229394\,A + 0{,}9766869\,B + 0{,}3051760\,C + 0{,}9229637\,D \\ \beta_{x=l} &= 0{,}3229394\,B - 0{,}9766869\,A - 0{,}3051760\,D + 0{,}9229637\,C \end{aligned}\right\} \tag{295}$$

Gl. (286a) und (286b):

$$(\Sigma_1)_{x=0} = \frac{1}{p^2 + r^2}\left[-\left(\frac{\gamma}{g}J\omega^2 r + q\omega p\right)(A + C) + \left(\frac{\gamma}{g}J\omega^2 p - q\omega r\right)(B - D)\right] + \text{Const. I} = -5534603\,(A + C) - 474263\,(B - D) + \text{Const. I},$$

$$(\Sigma_2)_{x=0} = -5534603\,(B - D) + 474263\,(A + C) + \text{Const. II}.$$

Zur Bestimmung der Konstanten dienen für unser einfaches Beispiel die Gleichungen:

$$(\Sigma_1)_{x=0} = m_1\,\omega^2\,\alpha_1 + k_1\,\omega\,\beta_1 = 66035800\,(B+D) + 35400000\,(-A+C),$$
$$(\Sigma_2)_{x=0} = m_1\,\omega^2\,\beta_1 - k_1\,\omega\,\alpha_1 = 66035800\,(-A+C) - 35400000\,(B+D).$$

Sie liefern mit den vorausgehenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\text{Const.}_\text{I} &= -29865397\,A + 66510063\,B + 40934603\,C + 65561537\,D\\ \text{Const.}_\text{II} &= -29865397\,B - 66510063\,A - 40934603\,D + 65561537\,C\end{aligned}\right\} \quad (296).$$

Für $x = l$ ergeben die Gl. (286a) und (286b):

$$\begin{aligned}(\Sigma_1)_{x=l} = {} & \frac{1{,}028692}{71{,}17241\cdot 10^{-10}}\,[A(-0{,}003375445\cdot 0{,}3139321 - 0{,}039391103\cdot 0{,}9494454)\\ & + B\cdot(0{,}039391103\cdot 0{,}3139321 - 0{,}003375445\cdot 0{,}9494454)]\\ & + \frac{0{,}9721082}{71{,}17241\cdot 10^{-10}}\cdot[C\cdot(0{,}003375445\cdot 0{,}3139321 - 0{,}039391103\cdot 0{,}9494454)\\ & + D\cdot(0{,}039391103\cdot 0{,}3139321 + 0{,}003375445\cdot 0{,}9494454)] + \text{Const.}_\text{I}\end{aligned}$$

oder ausgerechnet mit Berücksichtigung von Gl. (296):

$$\left.\begin{aligned}(\Sigma_1)_{x=l} &= -35424129\,A + 67834198\,B + 35971099\,C + 67688292\,D\\ (\Sigma_2)_{x=l} &= -35424129\,B - 67834198\,A - 35971099\,D + 67688292\,C\end{aligned}\right\} \quad (297)$$

Für das Wellenende ist:

$$\left.\begin{aligned}(\Sigma_1)_{x=l} + m_2\,\omega^2\,\alpha_2 + k_2\,\omega\,\beta_2 + M_\alpha &= 0\\ (\Sigma_2)_{x=l} + m_2\,\omega^2\,\beta_2 - k_2\,\omega\,\alpha_2 + M_\beta &= 0\end{aligned}\right\} \quad (298)$$

(M_α und M_β die Phasen der harmonischen erregenden Momente der Maschinenmassen.)

Da die Ausschläge α_2, β_2 identisch sind mit $\alpha_{x=l}$, $\beta_{x=l}$, so ist mit Gl. (295):

$$m_2\,\omega^2\,\alpha_2 = 22\,513\,940\,\alpha_{x=l} = 7\,302\,932\,A + 22\,086\,739\,B + 6\,901\,232\,C + 20\,871\,452\,D,$$
$$k_2\,\omega\,\beta_2 = 1\,500\,000\,\beta_{x=l} = -1\,465\,030\,A + 484\,409\,B + 1\,384\,445\,C - 457\,764\,D.$$

Mit Einführung dieser Werte in Gl. (298) erhält man mit Gl. (297):

$$\left.\begin{aligned}-29586227\,A + 90405346\,B + 44256776\,C + 88102373\,D + M_\alpha &= 0\\ -29586227\,B - 90405346\,A - 44256776\,D + 88102373\,C + M_\beta &= 0\end{aligned}\right\} \quad (299)$$

Zur Bestimmung der Konstanten A, B, C, D ist gegeben [s. Gl. (291) und Zahlentafel 27]:

$$\alpha_{x=0} = B + D = \alpha_1\,,$$
$$\beta_{x=0} = -A + C = \beta_1\,,$$

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)_{x=0} = 8{,}403465\cdot 10^{-5}(A+C) + 0{,}744425\cdot 10^{-5}(B-D) = \frac{-3{,}8051581\,\alpha_1 - 2{,}0539346\,\beta_1}{3800}\,,$$
$$\left(\frac{d\beta}{dx}\right)_{x=0} = 8{,}403465\cdot 10^{-5}(B-D) - 0{,}744425\cdot 10^{-5}(A+C) = \frac{-3{,}8051581\,\beta_1 + 2{,}0539346\,\alpha_1}{3800}\,.$$

Zur Auflösung wollen wir gleich die beiden ersten Gleichungen in die zwei letzten einführen, wodurch sich ergibt:

$$\left.\begin{aligned}45{,}64745\,A - 100{,}88017\,B - 62{,}45438\,C - 99{,}39132\,D &= 0\\ 45{,}64745\,B + 100{,}88017\,A + 62{,}45438\,D - 99{,}39132\,C &= 0\end{aligned}\right\} \quad (300)$$

Die Auflösung der Gleichungen (299) und (300) liefert:

$$\left.\begin{aligned}A &= 10^{-8}\cdot(-8{,}278643\,M_\alpha + 39{,}873124\,M_\beta)\\ B &= 10^{-8}\cdot(-8{,}278543\,M_\beta - 39{,}873124\,M_\alpha)\\ C &= 10^{-8}\cdot(-2{,}633976\,M_\alpha + 38{,}323384\,M_\beta)\\ D &= 10^{-8}\cdot(+2{,}633976\,M_\beta + 38{,}323384\,M_\alpha)\end{aligned}\right\} \quad (301)$$

Daraus erhält man mit Gl. (291) und (295):

$$\left.\begin{aligned}10^8\,\alpha_1 &= -1{,}549740\,M_\alpha - 5{,}644667\,M_\beta\\ 10^8\,\beta_1 &= -1{,}549740\,M_\beta + 5{,}644667\,M_\alpha\\ 10^8\,\alpha_2 &= -7{,}049792\,M_\alpha + 18{,}917402\,M_\beta\\ 10^8\,\beta_2 &= -7{,}049792\,M_\beta - 18{,}917402\,M_\alpha\end{aligned}\right\}\qquad(302)$$

Hiermit ergibt sich die Dämpfungsarbeit der Massen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_1 &= \pi\,(k_1\,\omega\,(\alpha_1^2+\beta_1^2) + k_2\,\omega\cdot(\alpha_2^2+\beta_2^2)) = \pi\cdot 10^{-11}\,(354\cdot 34{,}264\\ &\quad + 15\cdot 407{,}568)\,(M_\alpha^2 + M_\beta^2) = \pi\cdot 10^{-8}\cdot 18{,}242976\,M^2\,.\end{aligned}$$

Die Dämpfungsarbeit der Welle ist nach Gl. (287):

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_2 = \pi\,\omega\cdot\Big[&\frac{7\cdot 10^6\cdot 71{,}17241\cdot 10^{-10}+3}{2\cdot 0{,}744425\cdot 10^{-5}}\,((A^2+B^2)\,(1{,}058207-1)+(C^2+D^2)\cdot(1-0{,}9449944))\\ &+\frac{7\cdot 10^6\cdot 71{,}17241\cdot 10^{-10}-3}{8{,}403465\cdot 10^{-5}}\,((AC-BD)\cdot 0{,}5961227-(AD+BC)\cdot(1-0{,}8028933))\Big]\\ = 10^{-11}\,\pi\,\omega\,&[2{,}0484405\cdot(1658{,}402\cdot 0{,}0582070 + 1475{,}620\cdot 0{,}0550056)\\ -0{,}3510670&\cdot(1549{,}879\cdot 0{,}5961227 + 212{,}241\cdot 0{,}1971067)]\,(M_\alpha^2 + M_\beta^2)\\ = 10^{-11}\cdot\pi&\cdot 27{,}01851\cdot 24{,}9601\,M^2 = \pi\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}674385\,M^2\,.\end{aligned}$$

Demnach beträgt die gesamte Dämpfungsarbeit:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 = \pi\cdot 10^{-8}\cdot 18{,}917361\,M^2\,.$$

Die Arbeit der erregenden harmonischen Momente ist

$$\mathfrak{A} = \pi\,(\alpha_2\,M_\beta - \beta_2\,M_\alpha) = \pi\cdot 10^{-8}\cdot 18{,}917402\,M^2$$

in Übereinstimmung mit der Dämpfungsarbeit.

Den Einfluß der Masse und der äußeren Dämpfung des Wellenstückes $l_{h,h+1}$ können wir wieder wie früher bei der Berechnung ohne Dämpfung durch Berichtigungsglieder für die Ausschläge α_{h+1}, β_{h+1} und durch solche für die Momentensummen $(\sum_1)_{h+1}$ und $(\sum_2)_{h+1}$ darstellen, oder was auf das gleiche hinauskommt, durch Wellenersatzmassen. Die Berichtigungsglieder bzw. die Ersatzmassen sind für jede der beiden Schwingungsformen (α, β) andere. Wir bezeichnen die Berichtigungsglieder für den Ausschlag α_{h+1} mit $\Delta\alpha$, für den Ausschlag β_{h+1} mit $\Delta\beta$ und die Berichtigungsglieder für die Summenmomente mit ΔM_α und ΔM_β. Dann gilt:

$$\alpha_{h+1} = \alpha_h + \frac{d\alpha_h}{dx}\cdot l + \Delta\alpha \qquad \text{und} \qquad \beta_{h+1} = \beta_h + \frac{d\beta_h}{dx}\cdot l + \Delta\beta\,.$$

Daraus ist mit Berücksichtigung der Beziehungen (291) und (293):

$$\left.\begin{aligned}\Delta\alpha &= (e^{pl}\sin rl - rl)A + (e^{pl}\cos rl - 1 - pl)B\\ &\quad + (e^{-pl}\sin rl - rl)C + (e^{-pl}\cos rl - 1 + pl)D\end{aligned}\right\}\qquad(303\,\mathrm{a})$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta\beta &= (e^{pl}\sin rl - rl)B - (e^{pl}\cos rl - 1 - pl)A\\ &\quad - (e^{-pl}\sin rl - rl)D + (e^{-pl}\cos rl - 1 + pl)C\end{aligned}\right\}\qquad(303\,\mathrm{b})$$

Für die Berichtigungsmomente wird:

$$\varDelta M_\alpha = (\Sigma_1)_{x=l} - (\Sigma_1)_{x=0} \quad \text{und} \quad \varDelta M_\beta = (\Sigma_2)_{x=l} - (\Sigma_2)_{x=0}$$

oder mit Benutzung der Gl. (286a) und (286b) und mit den Abkürzungen:

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{q\omega r - \frac{\gamma}{g} J\omega^2 p}{p^2 + r^2} \\ n &= \frac{q\omega p + \frac{\gamma}{g} J\omega^2 r}{p^2 + r^2} \end{aligned}\right\} \tag{304}$$

$$\left.\begin{aligned} \varDelta M_\alpha = &\left(-me^{pl}\sin rl - n\left(e^{pl}\cos rl - 1\right)\right)A + \left(ne^{pl}\sin rl\right. \\ &\left.- m\left(e^{pl}\cos rl - 1\right)\right)B + \left(me^{-pl}\sin rl - n\left(e^{-pl}\cos rl - 1\right)\right)C \\ &+ \left(ne^{-pl}\sin rl + m\left(e^{-pl}\cos rl - 1\right)\right)D \end{aligned}\right\} \tag{305a}$$

$$\left.\begin{aligned} \varDelta M_\beta = &\left(-me^{pl}\sin rl - n\left(e^{pl}\cos rl - 1\right)\right)B + \left(-ne^{pl}\sin rl\right. \\ &\left.+ m\left(e^{pl}\cos rl - 1\right)\right)A + \left(-me^{-pl}\sin rl + n\left(e^{-pl}\cos rl - 1\right)\right)D \\ &+ \left(ne^{-pl}\sin rl + m\left(e^{-pl}\cos rl - 1\right)\right)C \end{aligned}\right\} \tag{305b}$$

Weniger einfach ist es, mit Wellenersatzmassen zu arbeiten, weshalb man sich besser der Berichtigungsglieder bedient. Die Wellenersatzmasse $(w_h)_\alpha$ an der Masse m_h berichtigt den Ausschlag α_{h+1}, die Ersatzmasse $(w_h)_\beta$ den Ausschlag β_{h+1}; die Wellenersatzmasse $(w_{h+1})_\alpha$ an der Masse m_{h+1} stellt das Summenmoment $(\Sigma_1)_{h+1}$, die Ersatzmasse $(w_{h+1})_\beta$ das Summenmoment $(\Sigma_2)_{h+1}$ richtig. Dann ist mit den Werten u, v aus Gl. (289):

$$\left.\begin{aligned} -(w_h)_\alpha\,\omega^2(u\alpha_h + v\beta_h) &= \varDelta\alpha \\ -(w_h)_\beta\,\omega^2(u\beta_h - v\alpha_h) &= \varDelta\beta \end{aligned}\right\} \tag{306}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega^2\left((w_h)_\alpha\,\alpha_h + (w_{h+1})_\alpha\,\alpha_{h+1}\right) &= \varDelta M_\alpha \\ \omega^2\left((w_h)_\beta\,\beta_h + (w_{h+1})_\beta\,\beta_{h+1}\right) &= \varDelta M_\beta \end{aligned}\right\} \tag{307}$$

Aus (306) und (307) kann man also, wenn dies erwünscht ist, die Ersatzmassen berechnen, wozu man sich für die rechten Gleichungsseiten der Beziehungen (303a), (303b), (305a) und (305b) bedient.

Wenn rl und pl genügend klein sind, so daß man die Beziehungen (294) anwenden kann, so gilt:

$$\left.\begin{aligned} -\varDelta\alpha &= +(w_h)_\alpha\,\omega^2(u\alpha_h + v\beta_h) = \frac{l^2}{2}(a\alpha_h + b\beta_h) \\ -\varDelta\beta &= +(w_h)_\beta\,\omega^2(u\beta_h - v\alpha_h) = \frac{l^2}{2}(a\beta_h - b\alpha_h) \end{aligned}\right\} \tag{308}$$

$$\left.\begin{aligned} \varDelta M_\alpha &= \omega^2\left((w_h)_\alpha\,\alpha_h + (w_{h+1})_\alpha\,\alpha_{h+1}\right) = \frac{\gamma}{g}Jl\omega^2\alpha_h + ql\omega\beta_h - \frac{l^2}{2}(a\Sigma_1 + b\Sigma_2)_{x=0} \\ \varDelta M_\beta &= \omega^2\left((w_h)_\beta\,\beta_h + (w_{h+1})_\beta\,\beta_{h+1}\right) = \frac{\gamma}{g}Jl\omega^2\beta_h - ql\omega\alpha_h - \frac{l^2}{2}(a\Sigma_2 - b\Sigma_1)_{x=0} \end{aligned}\right\} \tag{309}$$

Darin sind a und b die aus Gl. (281a) bekannten Abkürzungen und Σ_1 und Σ_2 die für die Anfangsmasse m_h gegebenen Summenmomente wie in Gl. (292).

Wir wollen die vorgeführte Berechnungsweise auf unser Zahlenbeispiel an wenden und dabei von der Gl. (292) Gebrauch machen. Es ist:

$$\frac{u_1 r + v_1 p}{2(r^2+p^2)} = \frac{15187{,}238 \cdot 8{,}403465 + 43{,}624 \cdot 0{,}744425}{2 \cdot 71{,}17241} \cdot 10^{-10} = 896{,}8215 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{cm}^{-1},$$

$$\frac{u_1 p - v_1 r}{2(r^2+p^2)} = \frac{15187{,}238 \cdot 0{,}744425 - 43{,}624 \cdot 8{,}403465}{2 \cdot 71{,}17241} \cdot 10^{-10} = 76{,}8500 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{cm}^{-1},$$

$$m = \frac{3 \cdot 27{,}01851 \cdot 8{,}403465 - 461{,}568 \cdot 0{,}744425}{71{,}17241} \cdot 10^5 = 474263\ \mathrm{kgcm},$$

$$n = \frac{3 \cdot 27{,}01851 \cdot 0{,}744425 + 461{,}568 \cdot 8{,}403465}{71{,}17241} \cdot 10^5 = 5534603\ \mathrm{kgcm}.$$

$$\Sigma_1 = 66035800\alpha_1 + 35400000\beta_1,$$
$$\Sigma_2 = 66035800\beta_1 - 35400000\alpha_1.$$

Damit wird Gl. (292):

$$\begin{aligned}
A &= -0{,}5\beta_1 - 5{,}922233\alpha_1 - 3{,}174748\beta_1 + 0{,}507485\beta_1 - 0{,}272049\alpha_1,\\
B &= 0{,}5\alpha_1 - 5{,}922233\beta_1 + 3{,}174748\alpha_1 - 0{,}507485\alpha_1 - 0{,}272049\beta_1,\\
C &= 0{,}5\beta_1 - 5{,}922233\alpha_1 - 3{,}174748\beta_1 + 0{,}507485\beta_1 - 0{,}272049\alpha_1,\\
D &= 0{,}5\alpha_1 + 5{,}922233\beta_1 - 3{,}174748\alpha_1 + 0{,}507485\alpha_1 + 0{,}272049\beta_1
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
A &= -6{,}194282\alpha_1 - 3{,}167263\beta_1,\\
B &= -6{,}194282\beta_1 + 3{,}167263\alpha_1,\\
C &= -6{,}194282\alpha_1 - 2{,}167263\beta_1,\\
D &= +6{,}194282\beta_1 - 2{,}167263\alpha_1.
\end{aligned}$$

Da in unserem Beispiel $rl = 0{,}31933$ ein verhältnismäßig großer Wert ist können wir die Vereinfachungen (294) nicht anwenden und müssen uns der genauer Werte bedienen:

$$\begin{aligned}
e^{pl}\sin rl - rl &= 0{,}3229394 - 0{,}3193317 = 0{,}0036077,\\
e^{pl}\cos rl - 1 - pl &= 0{,}9766869 - 1 - 0{,}0282882 = -0{,}0516013.\\
e^{-pl}\sin rl - rl &= 0{,}3051760 - 0{,}3193317 = -0{,}0141557,\\
e^{-pl}\cos rl - 1 + pl &= 0{,}9229637 - 1 + 0{,}0282882 = -0{,}0487482.
\end{aligned}$$

Mit diesen Werten berechnet sich nach Gl. (303a):

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha &= -0{,}0223471\,\alpha_1 - 0{,}0114265\,\beta_1 + 0{,}3196330\,\beta_1 - 0{,}1634348\,\alpha_1\\
&\quad + 0{,}0876844\,\alpha_1 + 0{,}0306791\,\beta_1 - 0{,}3019601\,\beta_1 + 0{,}1056502\,\alpha_1,\\
\Delta\alpha &= 0{,}0075527\,\alpha_1 + 0{,}0369255\,\beta_1.
\end{aligned}$$

Demnach wird (Gl. 291 bzw. Zahlentafel 27):

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \alpha_1 - 3{,}8051581\,\alpha_1 - 2{,}0539346\,\beta_1 + 0{,}0075527\,\alpha_1 + 0{,}0369255\,\beta_1,\\
\alpha_2 &= -2{,}7976054\,\alpha_1 - 2{,}0170091\,\beta_1,\\
\beta_2 &= -2{,}7976054\,\beta_1 + 2{,}0170091\,\alpha_1.
\end{aligned}$$

Gl. (305a):
$$\begin{aligned}
\Delta M_\alpha &= (-153158 + 129029)\,A + (1787341 + 11056)\,B\\
&\quad + (144734 + 426365)\,C + (1689028 - 36536)\,D\\
&= -24129\,A + 1798397\,B + 571099\,C + 1652492\,D\\
&= 149462\,\alpha_1 + 76423\,\beta_1 - 11139778\,\beta_1 + 5695996\,\alpha_1\\
&\quad - 3537548\,\alpha_1 - 1237722\,\beta_1 + 10236001\,\beta_1 - 3581385\,\alpha_1.\\
\Delta M_\alpha &= -1273475\,\alpha_1 - 2065076\,\beta_1,\\
\Delta M_\beta &= -1273475\,\beta_1 + 2065076\,\alpha_1.
\end{aligned}$$

Für das Wellenende erhält man damit:

$$66035800\,\alpha_1 + 35400000\,\beta_1 + 22613940\,\alpha_2 + 1500000\,\beta_2 + \Delta M_\alpha + M_\alpha = 0\,.$$

$$66035800\,\alpha_1 + 35400000\,\beta_1 - 63264881\,\alpha_1 - 45612523\,\beta_1$$
$$+ 3025514\,\alpha_1 - 4196408\,\beta_1 - 1273475\,\alpha_1 - 2065076\,\beta_1 + M_\alpha = 0\,.$$
$$4522958\,\alpha_1 - 16474007\,\beta_1 + M_\alpha = 0\,,$$
$$4522958\,\beta_1 + 16474007\,\alpha_1 + M_\beta = 0\,.$$

Zahlentafel 28.

$\omega^2 = 730\,\mathrm{s}^{-2}$; $\omega = 27{,}01851\,\mathrm{s}^{-1}$.

$m\omega^2$	$k\omega$	α	$m\omega^2\alpha + k\omega\beta$	$+\Delta$	$+\Delta M_\alpha$
66035800	35400000	α_1	$66035800\,\alpha_1$ $+35400000\,\beta_1$		
22613940	1500000	$-2{,}7976054\,\alpha_1$ $-2{,}0170091\,\beta_1$	$-63264881\,\alpha_1 + 3025514\,\alpha_1$ $-45612523\,\beta_1 - 4196408\,\beta_1$	$+M_\alpha$	$-1273475\,\alpha_1$ $-2065076\,\beta_1$

Σ_1	$u\Sigma_1$	$v\Sigma_2$	$u\Sigma_1 + v\Sigma_2$	$\Delta\alpha$	$u\Sigma_1 + v\Sigma_2 - \Delta\alpha$
$66035800\,\alpha_1$ $+35400000\,\beta_1$	$3{,}8110264\,\alpha_1$ $+2{,}0429878\,\beta_1$	$-0{,}0058683\,\alpha_1$ $+0{,}0109468\,\beta_1$	$3{,}8051581\,\alpha_1$ $+2{,}0539346\,\beta_1$	$+0{,}0075527\,\alpha_1$ $+0{,}0369255\,\beta_1$	$3{,}7976054\,\alpha_1$ $+2{,}0170091\,\beta_1$
$4522958\,\alpha_1$ $-16474007\,\beta_1$ $+M_\alpha$					

Die Auflösung ergibt:

$$10^8\,\alpha_1 = -1{,}54975\,M_\alpha - 5{,}64468\,M_\beta\,,$$
$$10^8\,\beta_1 = -1{,}54975\,M_\beta + 5{,}64468\,M_\alpha$$

in Übereinstimmung mit Gl. (302). Den übrigen Teil der Berechnung brauchen wir nicht zu wiederholen. In Zahlentafel 28 ist die Rechnung zusammengestellt.

Hilfsbuch für den Maschinenbau. Für Maschinentechniker sowie für den Unterricht an technischen Lehranstalten. Unter Mitwirkung von hervorragenden Fachgelehrten herausgegeben von Oberbaurat **Fr. Freytag †**, Prof. i. R. Sechste, erweiterte und verbesserte Auflage. Mit 1288 in den Text gedruckten Figuren, einer farbigen Tafel und 9 Konstruktionstafeln.
Gebunden Preis M. 60.—*

Taschenbuch für den Maschinenbau. Unter Mitwirkung bewährter Fachgelehrter herausgegeben von Prof. **Heinrich Dubbel,** Ingenieur in Berlin. Dritte, erweiterte und verbesserte Auflage. Mit 2620 Textfiguren und 4 Tafeln. In zwei Teilen. In einem Band gebunden Preis M. 70.—
In zwei Bänden gebunden Preis M. 84.—

Die Steuerungen der Dampfmaschinen. Von Prof. Ing. **Heinrich Dubbel.** Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 494 Textabbildungen.
Gebunden Preis etwa M. 66.—

Geometrie und Maßbestimmung der Kulissensteuerungen. Ein Lehrbuch für den Selbstunterricht mit zahlreichen Übungsaufgaben und 20 Tafeln. Von Geh. Hofrat Prof. **R. Graßmann** in Karlsruhe i. B.
Steif broschiert Preis M. 8.—*

Dynamik, Regelung und Dampfverbrauch der Dampffördermaschine. Von Dr.-Ing. **Max Schellewald.** Mit 28 Textabbildungen. Preis M. 6.—*

Zur Dampfmaschinentheorie. Theorie und Berechnung der wirtschaftlichen Dampfmaschine. Von Dipl. Masch.-Ing. **A. Slucki.** Mit 32 Textfiguren und 1 Tafel. Preis M. 6.—*

Regelung und Gleichgang der Kraftmaschinen. Berechnung und Konstruktion der Schwungräder, des Massenausgleichs und der Kraftmaschinenregler in elementarer Behandlung. Von Dr. **Max Tolle,** Professor an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. Dritte, verbesserte und stark vermehrte Auflage. Mit etwa 500 Textfiguren und 25 Tafeln.
Unter der Presse

Der Tirrillregler. Theorie, Versuche und Vergleiche mit der direkten Kraftmaschinenregelung. Von Ingenieur **Hans Thoma** in Gotha. Mit 29 Textfiguren. Preis M. 3.—*

---

*Hierzu Teuerungszuschläge

Kolbendampfmaschinen und Dampfturbinen. Ein Lehr- und Handbuch für Studierende und Konstrukteure. Von Professor **H. Dubbel,** Ingenieur in Berlin. Fünfte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 554 Textabbildungen. Gebunden Preis M. 52.—

Entwerfen und Berechnen der Dampfturbinen mit besonderer Berücksichtigung der Überdruckturbine einschließlich der Berechnung von Oberflächenkondensatoren und Schiffsschrauben. Von **J. Morrow.** Autorisierte deutsche Ausgabe von Dipl.-Ing. **Carl Kisker.** Mit 187 Textfiguren und 3 Tafeln. Gebunden Preis M. 14.— *

Bau und Berechnung der Dampfturbinen. Eine kurze Einführung. Von Ingenieur **Franz Seufert,** Oberlehrer an der Staatl. höheren Maschinenbauschule in Stettin. Mit 54 Textabbildungen. Preis M. 5.— *

Konstruktion und Material im Bau von Dampfturbinen und Turbodynamos. Von Dr.-Ing. **O. Lasche,** Direktor der AEG. Mit 345 Textabbildungen. Preis M. 38.—; gebunden M. 48.— *

Anleitung zur Durchführung von Versuchen an Dampfmaschinen, Dampfkesseln, Dampfturbinen und Verbrennungsmaschinen. Zugleich Hilfsbuch für den Unterricht in Maschinenbaulaboratorien technischer Lehranstalten. Von Ingenieur **Franz Seufert,** Oberlehrer an der höheren Maschinenbauschule zu Stettin. Sechste, erweiterte Auflage. Mit 52 Abbildungen. Preis M. 14.—

Maschinentechnisches Versuchswesen. Von Professor Dr.-Ing. **A. Gramberg.**

Erster Band: **Technische Messungen bei Maschinenuntersuchungen und zur Betriebskontrolle.** Zum Gebrauch in Maschinenlaboratorien und in der Praxis. Vierte, vielfach erweiterte und umgearbeitete Auflage. Mit 326 Figuren im Text. Gebunden Preis M. 64.— *

Zweiter Band: **Maschinenuntersuchungen und das Verhalten der Maschinen im Betriebe.** Ein Handbuch für Betriebsleiter, ein Leitfaden zum Gebrauch bei Abnahmeversuchen und für den Unterricht an Maschinenlaboratorien. Zweite, durchgesehene Auflage. Mit etwa 300 Figuren im Text und auf 2 Tafeln. Unter der Presse

Technische Untersuchungsmethoden zur Betriebskontrolle, insbesondere zur Kontrolle des Dampfbetriebes. Zugleich ein Leitfaden für die Übungen in den Maschinenbaulaboratorien technischer Lehranstalten. Von Professor **Julius Brand,** Oberlehrer an den Vereinigten Maschinenbauschulen zu Elberfeld. Mit einigen Beiträgen von Dipl.-Ing. Oberlehrer **Robert Heermann.** Vierte, verbesserte Auflage. Mit 277 Textabbildungen, 1 lithographischen Tafel und zahlreichen Tabellen. Gebunden Preis M. 60.—

Handbuch der Feuerungstechnik und des Dampfkesselbetriebes mit einem Anhang über allgemeine Wärmetechnik. Von Dr.-Ing. **Georg Herberg,** Beratender Ingenieur in Stuttgart. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 59 Abbildungen und Schaulinien, 90 Zahlentafeln, sowie 47 Rechnungsbeispielen. Gebunden Preis M. 18.— *

* Hierzu Teuerungszuschläge

Technische Wärmelehre der Gase und Dämpfe. Eine Einführung für Ingenieure und Studierende. Von **Franz Seufert**, Oberingenieur und Studienrat an der höheren Maschinenbauschule in Stettin. Zweite Auflage. Mit 25 Abbildungen und 5 Zahlentafeln. In Vorbereitung

Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges. Von Dr.-Ing. **Heinrich Gröber.** Mit 78 Textabbildungen.
Preis M. 46.—; gebunden M. 53.—

Technische Thermodynamik. Von Professor Dipl.-Ing. **W. Schüle.**
Erster Band: **Die für den Maschinenbau wichtigsten Lehren nebst technischen Anwendungen.** Mit 232 Textfiguren und 7 Tafeln. Vierte, neubearbeitete Auflage. Unter der Presse
Zweiter Band: **Höhere Thermodynamik** mit Einschluß der chemischen Zustandsänderungen, nebst ausgewählten Abschnitten aus dem Gesamtgebiet der technischen Anwendungen. Dritte, erweiterte Auflage. Mit 202 Textfiguren und 4 Tafeln. Gebunden Preis M. 36.— *

Leitfaden der technischen Wärmemechanik. Kurzes Lehrbuch der Mechanik der Gase und Dämpfe und der mechanischen Wärmelehre. Von Professor Dipl.-Ing. **W. Schüle.** Zweite, verbesserte Auflage. Mit 93 Textfiguren und 3 Tafeln. Preis M. 18.— *

Thermodynamische Grundlagen der Kolben- und Turbokompressoren. Graphische Darstellungen für die Berechnung und Untersuchung von **Adolf Hinz,** Oberingenieur der Frankfurter Maschinenbau-Akt.-Ges. vormals Pokorny & Wittekind in Frankfurt a. M. Mit 12 Zahlentafeln, 54 Figuren und 38 graphischen Berechnungstafeln. Gebunden Preis M. 16.— *

Dynamik der Leistungsreglung von Kolbenkompressoren und -pumpen (einschließlich Selbstregelung und Parallelbetrieb). Von Dr.-Ing. **Leo Walther** in Nürnberg. Mit 44 Textabbildungen, 23 Diagrammen und 85 Zahlenbeispielen. Preis M. 24.—; gebunden M. 30.—

Theorie und Konstruktion der Kolben- und Turbo-Kompressoren. Von Dipl.-Ing. **P. Ostertag,** Professor am kantonalen Technikum in Winterthur. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 300 Textfiguren. Gebunden Preis M. 26.— *

Die Zentrifugalpumpen mit besonderer Berücksichtigung der Schaufelschnitte. Von Dipl.-Ing. **Fritz Neumann.** Zweiter, verbesserter Nachdruck. Mit 221 Textfiguren und 7 lithographischen Tafeln. In Vorbereitung

Die Kolbenpumpen einschließlich der Flügel- und Rotationspumpen. Von Professor **H. Berg.** Zweite, durchgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 536 Textfiguren und 13 Tafeln. Unter der Presse

Kolben. I. Dampfmaschinen- und Gebläsekolben. Von **C. Volk** in Berlin. II. Gasmaschinen und Pumpenkolben. Von **A. Eckardt** in Deutz. Mit 247 Textabbildungen. (Bildet Heft 2 der Einzelkonstruktionen aus dem Maschinenbau.) Preis M. 4.— *

* Hierzu Teuerungszuschläge