Mathematik

Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen

Die Automorphismen der unbeschränkten eigentlichen Kreiskörper

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Philosophischen und Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Westfälischen Wilhelms-Universität zu Münster

vorgelegt von
Heinz Zumbusch
aus Münster i. Westf.

Tage der mündlichen Prüfung: 23. und 24. Januar 1936
Dekan: Herr Prof. Dr. J. Trier.
Referent: Herr Prof. Dr. H. Behnke.

ISBN 978-3-662-01676-3 ISBN 978-3-662-01971-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-01971-9

Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen.

Die Automorphismen der unbeschränkten eigentlichen Kreiskörper.

Von

Heinz Zumbusch in Münster i. Westf. *).

In der klassischen Funktionentheorie sind die unbeschränkten, einfach zusammenhängenden Bereiche der z-Ebene entweder auf beschränkte Bereiche abbildbar — also im Rahmen der Funktionentheorie von diesen nicht verschieden — oder jede in ihnen reguläre und beschränkte Funktion ist konstant, wobei die einzigen Bereiche der zweiten Art die volle und die punktierte Ebene sind. Im Raume R_4 der beiden komplexen Veränderlichen w und z sind die Verhältnisse wesentlich komplizierter. Neben diesen beiden Arten von Bereichen gibt es dort noch solche, die nicht auf beschränkte abbildbar sind, in denen jedoch nicht konstante, reguläre und beschränkte Funktionen existieren.

Will man nun die analytischen Abbildungen aller Bereiche des R_4 übersehen, so ergibt sich die Notwendigkeit, diese „wesentlich unbeschränkten" Bereiche auf ihre Automorphismen hin zu untersuchen. Man ist hierbei zur Verwendung neuer Untersuchungsprinzipien gezwungen, da der Cartansche Eindeutigkeitssatz, der einen wichtigen Ausgangspunkt bei der Untersuchung der Abbildungen beschränkter Bereiche bildet, in unbeschränkten Bereichen nicht mehr allgemein gilt.

H. Behnke und E. Peschl[1]) haben zum ersten Male systematisch die einfachste Klasse unbeschränkter Bereiche, die unbeschränkten Reinhardtschen Körper, in diesem Sinne behandelt. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Bestimmung der Automorphismen der unbeschränkten eigentlichen Kreiskörper, die von besonderer Wichtigkeit sind, da wir damit die Abbildungen aller unbeschränkten Bereiche übersehen, die als invariante Konvergenzkörper der Potenzreihen in w und z auftreten können. Es zeigt sich, daß sich die in der erwähnten Arbeit von Behnke-Peschl verwandten Methoden z. T. soweit verallgemeinern lassen, daß sie auch zur

---

*) Diese Arbeit hat der Philosophischen und Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Münster als Inauguraldissertation vorgelegen.

[1]) H. Behnke und E. Peschl, Die unbeschränkten Reinhardtschen Körper, Math. Annalen **112** (1935), S. 433.

Untersuchung der Kreiskörper benutzt werden können. Die Schwierigkeiten bestehen vor allem darin, daß an die Stelle der leicht übersehbaren Monome und der Ausdrücke $w^\alpha z^\beta$ mit irrationalem $\frac{\alpha}{\beta}$ in unserem Falle homogene Polynome bzw. Produkte der Form

$$(1) \qquad \prod_{i=1}^{n} (a_i w + b_i z)^{\alpha_i} \qquad \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_k} \text{ nicht alle rational}\right)$$

treten, und daß sich ferner die Regularitätsbereiche unter den Kreiskörpern nicht so einfach charakterisieren lassen, wie es dort für die Reinhardtschen Körper gelungen ist.

Wir teilen unsere Bereiche in drei Klassen ein, je nachdem ob es in ihnen keine, eine und (im wesentlichen) nur eine oder wenigstens zwei reguläre, beschränkte und nicht konstante Funktionen gibt. Es läßt sich dann beweisen, daß die Regularitätsbereiche der ersten und zweiten Klasse (allerdings unter gewissen Differentiierbarkeitsvoraussetzungen über den Rand) die Bereiche $|F(w, z)| < C$ sind, wo $F(w, z)$ einmal einen Ausdruck der Form (1), das andere Mal ein homogenes Polynom bedeutet (§ 1). Weiter zeigt sich, daß in allen Bereichen der dritten Klasse in bezug auf die Automorphismen eine Verallgemeinerung des Cartanschen Eindeutigkeitssatzes gilt (§ 4).

Die Regularitätsbereiche unter unseren Körpern — und nur diese brauchen wir ja bei der Bestimmung der Automorphismen zu betrachten — enthalten stets wenigstens eine „Achse", d. h. eine analytische Ebene durch den Mittelpunkt, die bis auf den unendlich fernen Punkt ganz im Bereich liegt. Die Bereiche der Klasse 1 und 2 mit weniger als drei Achsen sind bereits *äquivalent* einem Reinhardtschen Körper, d. h. sie lassen sich durch eine lineare Transformation mittelpunktstreu auf einen solchen abbilden. Für die übrigen Bereiche wird gezeigt, daß alle ihre Automorphismen achsentreu und damit insbesondere nullpunktstreu sind, und es gelingt weiter unter Heranziehung des klassischen Uniformisierungstheorems zu beweisen, daß sie stets linear sein müssen. Bei den Bereichen der dritten Klasse lassen sich wegen des Eindeutigkeitssatzes Methoden benutzen, die den bei beschränkten Bereichen verwandten analog sind. Es ergibt sich, daß alle Automorphismen mittelpunktstreu und linear sind.

Das Ergebnis der vorliegenden Untersuchung kann man kurz so zusammenfassen:

Ist ein unbeschränkter eigentlicher Kreiskörper nicht äquivalent einem Reinhardtschen Körper, so besteht seine Automorphismengruppe aus der Kreiskörpergruppe, kombiniert mit höchstens endlich vielen anderen linearen Transformationen. (Dabei ist allerdings bei den Bereichen der Klasse 1 und 2 die einschränkende Voraussetzung über den Rand gemacht.)

Dieses Ergebnis ist insofern verwunderlich, als Behnke und Peschl bei den unbeschränkten Reinhardtschen Körpern noch Ausnahmekörper erhalten haben, und man könnte vermuten, daß solche bei Körpern mit einer nur einparametrigen Drehungsgruppe erst recht auftreten würden. Das ist aber nicht der Fall.

Inhalt.

§ 1.

Einteilung der Bereiche. Charakterisierung der Regularitätsbereiche.

Im folgenden sollen die Automorphismen der unbeschränkten eigentlichen Kreiskörper betrachtet werden, d. h. solcher Körper, die durch die Transformationen der Drehungsgruppe

$$w' = w\,e^{i\vartheta}, \quad z' = z\,e^{i\vartheta} \quad (\vartheta \text{ beliebig reell})$$

auf sich abgebildet werden. Die Bereiche sollen eigentlich sein, d. h. (0, 0), der Fixpunkt der Gruppe, soll innerer Punkt sein. Ferner sollen sie auch wirklich unbeschränkt sein, d. h. wenigstens einen Punkt der unendlich fernen Ebene (des komplex-projektiv abgeschossenen R_4) im Innern oder auf dem Rande enthalten.

Da ein Automorphismus eines Bereiches auch stets ein Automorphismus seiner Regularitätshülle ist, können wir uns bei unseren Betrachtungen auf Regularitätsbereiche beschränken.

Nun hat H. Cartan[2]) bewiesen, daß jede in einem (beschränkten oder unbeschränkten) eigentlichen Kreiskörper $\mathfrak{K}$ reguläre Funktion $f(w, z)$ sich in eine in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\mathfrak{K}$ gleichmäßig konvergente Reihe homogener Polynome entwickeln läßt. Ist

$$f(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(w, z)$$

[2]) Les fonctions de deux variables complexes etc., Journ. de Math. (IX), 10, S. 14.

diese Entwicklung, so gilt:

$$P_n(w, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\vartheta} f(w e^{i\vartheta}, z e^{i\vartheta})\, d\vartheta.$$

Diese Reihe konvergiert, wie man unmittelbar sieht, noch im kleinsten $\mathfrak{K}$ umfassenden vollkommenen Kreiskörper. Ein Kreiskörper heißt dabei vollkommen, wenn er mit einem Punkt (w_0, z_0) auch stets alle Punkte $(k w_0, k z_0)$ enthält, wo k eine beliebige komplexe Zahl mit $|k| < 1$ bedeutet. Ferner ergibt sich aus diesem Satze, daß ein eigentlicher Kreiskörper stets schlicht ist.

Ein Kreiskörper kann somit nur dann Regularitätsbereich sein, wenn er vollkommen ist. Daraus ergibt sich unmittelbar:

Satz 1. *In einem unbeschränkten eigentlichen Kreiskörper $\mathfrak{K}$, der Regularitätsbereich ist, gibt es wenigstens eine analytische Ebene durch den Nullpunkt, die ganz oder bis auf den unendlich fernen Punkt in $\mathfrak{K}$ liegt.*

Weiter sieht man sofort:

Satz 2. *Ein eigentlicher Kreiskörper $\mathfrak{K}$, der einen unendlich fernen Punkt im Innern enthält, hat den abgeschlossenen R_4 zur Regularitätshülle.*

In diesem Falle gibt es nämlich unendlich viele analytische Ebenen durch (0, 0), die ganz in $\mathfrak{K}$ liegen. Auf diesen ist jede in $\mathfrak{K}$ reguläre Funktion $f(w, z)$ als Funktion einer Variablen betrachtet, überall regulär, also konstant. $f(w, z)$ müßte somit auf unendlich vielen Ebenen durch (0, 0) denselben konstanten Wert annehmen, was nach dem Vorbereitungssatz nur möglich ist, wenn $f(w, z)$ selbst konstant ist.

Wir wollen im folgenden die analytischen Ebenen durch (0, 0), die bis auf den unendlich fernen Punkt in $\mathfrak{K}$ liegen, als die *Achsen* von $\mathfrak{K}$ bezeichnen.

Sodann teilen wir die zu behandelnden Bereiche in drei Klassen ein:

Klasse K_1: *Jede in $\mathfrak{K}$ reguläre und beschränkte Funktion ist konstant.*

Klasse K_2: *Es gibt in $\mathfrak{K}$ reguläre und beschränkte Funktionen, die nicht konstant sind, aber je zwei dieser Funktionen haben eine identisch verschwindende Funktionaldeterminante. Nach dem Entwicklungssatz gibt es dann auch ein in $\mathfrak{K}$ beschränktes homogenes Polynom.*

Klasse K_3: *Es gibt in $\mathfrak{K}$ wenigstens zwei beschränkte reguläre Funktionen — und damit auch zwei beschränkte Polynome — deren Funktionaldeterminante nicht identisch verschwindet.*

Aus Satz 1 folgt, daß kein unbeschränkter eigentlicher Kreiskörper sich eineindeutig auf einen beschränkten Bereich abbilden läßt. Wäre nämlich

$$w' = f(w, z); \quad z' = g(w, z)$$

eine Abbildung, die dieses leistete, so wären f und g auf den Achsen wenigstens in allen endlichen Punkten regulär und beschränkt, also konstant. Das würde aber bedeuten, daß alle Punkte der Achsen auf einen einzigen Punkt abgebildet würden.

Besitzt ein Bereich unendlich viele Achsen, so gehört er sicher zur Klasse K_1. Denn ist $P(w, z)$ ein beliebiges homogenes Polynom — etwa vom Grade n — so kann man bekanntlich $P(w, z)$ in der Form darstellen:

$$P(w, z) = \prod_{i=1}^{k} (a_i w + b_i z)^{n_i}, \quad n_i \text{ ganz}, \quad \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

Man kann nun aber stets eine Achse

$$E\colon\ w + cz = 0$$

angeben, derart, daß $c \neq \frac{b_i}{a_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Dann wird aber $P(w, z)$ auf E von der Form const. z^n, also beliebig groß.

Wir wollen unsere Betrachtungen auf Bereiche mit endlich vielen Achsen beschränken. Ferner wollen wir in der Klasse K_1 und K_2 nur solche Körper betrachten, deren Rand *fast überall glatt* ist. Darunter ist folgendes zu verstehen.

Der Rand eines Kreiskörpers läßt sich stets darstellen in der Form:

$$|z| = R(s), \qquad s = \frac{w}{z}.$$

Dabei ist $R(s)$ aufzufassen als reelle Funktion von σ und τ, wenn $s = \sigma + i\tau$ gesetzt wird. Da der Körper eigentlich sein soll, gilt stets $R(s) > 0$. In der Umgebung der Ebene $z = 0$ versagt diese Darstellung. Dort kann man aber den Rand angeben durch

$$|w| = R^*(s'), \quad s' = \frac{z}{w}.$$

$R^*(s')$ verhält sich also in der Umgebung von $s' = 0$ wie $|s|\,R(s)$ in der Umgebung von $s = \infty$. Ist $z = 0$ nicht Achse des Körpers — was wir nötigenfalls durch eine homogene lineare Transformation stets erreichen können — so geht also $|s|\,R(s)$ für $s \to \infty$ gegen einen von Null verschiedenen endlichen Wert. Sind die Achsen des Körpers gegeben durch

$$s = s_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

so geht $R(s)$ für $s \to s_i$ gegen ∞.

Die Voraussetzung über den Rand soll nun darin bestehen, daß wir verlangen, daß $R(s)$ abgesehen von den Punkten s_i überall stetige zweite partielle Ableitungen besitzt. Da $\mathfrak{K}$ Regularitätsbereich sein soll, muß dann gelten[3]):

$$\Delta\varphi(s) \equiv \Delta \log R(s) \equiv \frac{\partial^2 \varphi(\sigma, \tau)}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 \varphi(\sigma, \tau)}{\partial \tau^2} \leqq 0.$$

---

[3]) Vgl. Behnke-Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Erg. Math. Grenzgeb. III, 3. (1934), S. 55.

Wir wollen noch verlangen, daß $\Delta\varphi(s)$ in der Umgebung der Punkte s_i beschränkt ist.

Dann gilt in der Umgebung eines solchen Punktes:

$$\varphi(s) = \varkappa_i \log|s - s_i| + \Phi_i(s),$$

wo $\varkappa_i$ eine reelle Konstante < 0 bedeutet, Φ_i eine in s_i noch stetige superharmonische Funktion von σ und τ[4]).

Wir können jetzt beweisen:

Satz 3. *$\mathfrak{K}$ sei ein unbeschränkter eigentlicher Kreiskörper mit fast überall glattem Rand. $\mathfrak{K}$ sei Regularitätsbereich. Dann gehört er entweder zu K_3, oder er ist von der Form:*

$$\left|\prod_{i=1}^{k}(a_i w + b_i z)^{\alpha_i}\right| < C,$$

wobei die α_i reell und > 0 sind. Sind alle Quotienten $\frac{\alpha_i}{\alpha_j}$ rational, so gehört $\mathfrak{K}$ zu K_2, andernfalls zu K_1.

Beweis. Sei $|z| = R(s)$ der Rand, $s = s_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ die Achsen von $\mathfrak{K}$. $z = 0$ sei nicht Achse. Nach den obigen Bemerkungen ist

$$\log R(s) = \sum_{i=1}^{k} - \varkappa_i \log|s - s_i| + \Phi(s) \quad (\varkappa_i > 0),$$

wo Φ eine in der endlichen s-Ebene überall stetige superharmonische Funktion bedeutet.

1. Fall: Es sei $\sum\limits_{i=1}^{k} \varkappa_i < 1$.

Ich wähle k positive rationale Zahlen r_i, die den Bedingungen $r_i \geqq \varkappa_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ und $\sum\limits_{1}^{k} r_i = 1$ genügen. Das ist offenbar noch auf beliebig viele Arten möglich. Ich bilde jetzt den Ausdruck:

$$F(s) = \left|\prod_{i=1}^{k}(s - s_i)^{-r_i}\right|.$$

Dann geht

$$\frac{R(s)}{F(s)} = e^{\Phi(s)} \prod_{i=1}^{k} |s - s_i|^{r_i - \varkappa_i}$$

[4]) Vgl. M. Bôcher, Bull. Americ. Math. Soc. IX (1903), S. 455. Der Beweis läßt sich nach den dort gemachten Angaben leicht durchführen. — Auf Grund dieser Tatsache erweist sich die von H. Behnke [Über analytische Funktionen mehrerer Veränderlicher II., Abh. Math. Sem. Hamburg 5 (1927), S. 302 ff.] bei analogen Überlegungen gemachte Voraussetzung, daß in der Umgebung der s_i gelten soll

$$\varkappa \log|s - s_i| + L_1 < \varphi(s) < \varkappa \log|s - s_i| + L_2$$

($\varkappa \leqq 0$, L_1, L_2 reelle Konstanten) als überflüssig.

bei Annäherung an die s_i gegen einen endlichen Wert. Für $s \to \infty$ geht aber sowohl $R(s)$ wie $F(s)$ linear gegen Null. Es gibt also eine Konstante C, so daß

$$\frac{R(s)}{F(s)} < C$$

in der abgeschlossenen s-Ebene. Das heißt aber, daß die Hyperfläche

$$|z| = C \prod_{i=1}^{k} |s - s_i|^{-r_i}$$

nur die unendlich fernen Randpunkte mit $\mathfrak{K}$ gemeinsam hat und sonst ganz außerhalb $\mathfrak{K}$ verläuft, oder mit anderen Worten: in $\mathfrak{K}$ gilt

$$|z| \prod_{i=1}^{k} |s - s_i|^{r_i} = \prod_{i=1}^{k} |w - s_i z|^{r_i} < C.$$

Durch Potenzieren mit dem Hauptnenner der r_i erhalten wir also ein in $\mathfrak{K}$ beschränktes homogenes Polynom. Offenbar kann man auf dieselbe Weise beliebig viele solcher Polynome konstruieren, die nicht alle voneinander abhängig sind. Also gehört $\mathfrak{K}$ zu K_3.

2. Fall: Es sei $\sum_{i=1}^{k} \varkappa_i > 1$.

In

$$R(s) = e^{\Phi(s)} \prod_{i=1}^{k} |s - s_i|^{-\varkappa_i}$$

muß jetzt wegen des endlichen Limes von $|s|\,R(s)$ für $s \to \infty$ $\Phi(s)$ gegen ∞ gehen. Dann wäre $\Phi(s)$ eine im Endlichen überall beschränkte superharmonische Funktion, die für $s \to \infty$ über alle Grenzen wächst. Eine solche Funktion kann es aber nicht geben. Denn ist s_0 irgendein endlicher Punkt, und lege ich um s_0 einen genügend großen Kreis, so wird der Mittelwert Φ^* von $\Phi(s)$ auf diesem Kreis beliebig groß, während nach einem allgemeinen Satz über superharmonische Funktionen $\Phi(s_0) \geqq \Phi^*$ sein muß.

Ein Körper dieser Art ist also nie eigentlich.

3. Fall: $\sum_{i=1}^{k} \varkappa_i = 1$.

In

$$R(s) = e^{\Phi(s)} \prod_{i=1}^{k} |s - s_i|^{-\varkappa_i}$$

ist jetzt $\Phi(s)$ eine in der abgeschlossenen s-Ebene beschränkte, stetige, superharmonische Funktion. Wäre sie nicht konstant, so hätte sie irgendwo ein Minimum. Das widerspricht aber dem oben erwähnten Satz über den Mittelwert der superharmonischen Funktionen. $\Phi(s)$ ist also eine Konstante. Sei $e^{\Phi(s)} = C$, so ist somit $\mathfrak{K}$ gegeben durch

$$(1) \qquad |z| < \left|C \prod_{i=1}^{k} (s - s_i)^{-\varkappa_i}\right|, \quad \sum_{i=1}^{k} \varkappa_i = 1.$$

$P(w, z)$ sei nun ein in (1) beschränktes homogenes Polynom. Es sei dort etwa $|P(w, z)| < K$, d. h., die Hyperfläche $|P(w, z)| = K$ muß bis auf die unendlich fernen Punkte ganz außerhalb $\mathfrak{K}$ liegen. Wir können diese wieder in der Form darstellen

$$|z| = K' \prod_{i=1}^{l} |s - s_i'|^{-r_i}, \quad r_i \text{ rational}, \quad \sum_{i=1}^{l} r_i \leqq 1.$$

Es muß also sein:

$$\frac{C \prod_{i=1}^{k} |s - s_i|^{-\varkappa_i}}{K' \prod_{i=1}^{l} |s - s_i'|^{-r_i}} < 1,$$

und das geht, wie man leicht sieht, nur wenn $\sum_{i=1}^{l} r_i = 1$, $s_i' = s_i$ und $r_i = \varkappa_i$ ist. Ist nur ein $\varkappa_i$ irrational, so gibt es also kein beschränktes Polynom im Bereich, d. h. der Bereich gehört zu K_1.

Sind andererseits alle $\varkappa_i$ rational, so erhält man aus (1) durch Potenzieren mit dem Hauptnenner der $\varkappa_i$ für $\mathfrak{K}$ die Form:

$$\left|\prod_{i=1}^{k} (w - s_i z)^{n_i}\right| < C', \quad n_i \text{ ganz}, > 0.$$

Wie man leicht sieht, kann man auch eine solche Darstellung des Bereiches finden, in der die Exponenten n_i keinen gemeinsamen Teiler haben. Aus den obigen Überlegungen folgt dann unmittelbar, daß — wenn man dieses Polynom mit $P(w, z)$ bezeichnet — jedes weitere in $\mathfrak{K}$ beschränkte homogene Polynom die Form hat:

$$Q(w, z) = \text{const.}\, (P(w, z))^m,$$

wo m ganz und $\geqq 0$ ist. Also gehört der Bereich dann zu K_2.

Lassen wir jetzt auch wieder $z = 0$ als Achse des Körpers zu, so sieht man, daß jeder fast überall glatte Bereich der Klasse K_1 die Form hat:

$$\left|\prod_{i=1}^{k} (a_i w + b_i z)^{\alpha_i}\right| < C,$$

wenigstens ein Quotient $\frac{\alpha_i}{\alpha_j}$ irrational und daß die entsprechenden Bereiche aus K_2 gegeben sind durch:

$$|P(w, z)| = \left|\prod_{i=1}^{k} (a_i w + b_i z)^{n_i}\right| < C,$$

wobei wir noch $(n_1, n_2, \ldots, n_k) = 1$ voraussetzen können.

In den nächsten beiden Paragraphen sollen die Automorphismen dieser Bereiche bestimmt werden. Dabei können wir noch durch eine Ähnlichkeitstransformation erreichen, daß die Konstante $C = 1$ wird.

§ 2.

Die Automorphismen der fast überall glatten Bereiche der Klasse K_1.

Es handelt sich hier also um die Bereiche:

$$\left|\prod_{i=1}^{n} (a_i w + b_i z)^{\alpha_i}\right| < 1,$$

wobei wenigstens ein Quotient $\frac{\alpha_i}{\alpha_k}$ als irrational vorausgesetzt wird. Wir dürfen annehmen, daß der Körper wenigstens drei Achsen besitzt, da er sich andernfalls durch eine homogene lineare Transformation auf einen Reinhardtschen Körper der Form $|w| < 1$ bzw. $|w^\alpha z^\beta| < 1$ $\left(\frac{\alpha}{\beta} \text{ irrational}\right)$ abbilden läßt, deren Automorphismen bereits in der oben zitierten Arbeit von H. Behnke und E. Peschl angegeben sind.

Wir beweisen zunächst:

Satz 4. *Bei allen Automorphismen der Bereiche K_1 mit mehr als einer Achse werden die Achsen wieder auf Achsen abgebildet. Die Automorphismen sind also stets nullpunktstreu.*

Beweis[5]). Es ist leicht einzusehen, daß es bei jedem Automorphismus

$$w' = f(w, z); \qquad z' = g(w, z)$$

auf jeder Achse wenigstens einen Punkt gibt, der wieder in einen Achsenpunkt übergeht. Denn nehmen wir an, das sei auf der Achse $a_r w + b_r z = 0$ nicht der Fall, so wäre die Funktion

$$F(z) = \prod_{i=1}^{n} \left(a_i f\left(-\frac{b_r}{a_r} z, z\right) + b_i g\left(-\frac{b_r}{a_r} z, z\right)\right)^{\alpha_i}$$

in der ganzen endlichen z-Ebene regulär und beschränkt, also konstant. Das würde aber bedeuten, daß die Ebene $a_r w + b_r z = 0$ abgebildet wird auf eine Fläche

$$\prod_{i=1}^{n} (a_i w + b_i z)^{\alpha_i} = \text{const.},$$

und das ist nicht möglich, da eine solche Fläche stets jeden Punkt der Hyperfläche

$$\left|\prod_{i=1}^{n} (a_i w + b_i z)^{\alpha_i}\right| = |\text{const.}|$$

zum Häufungspunkt hat, unsere Ebene also auf diese dreidimensionale Hyperfläche abgebildet würde, was dem topologischen Charakter des Automorphismus widerspricht.

Es gibt somit auf der betrachteten Ebene einen Punkt z_0, in dem die oben angeschriebene Funktion $F(z)$ verschwindet und daher eine positive

---

[5]) Vgl. Behnke-Peschl, l. c. [1]).

Zahl ε, derart daß

$$\frac{F(z)}{(z-z_0)^{\varepsilon}}$$

in der Umgebung von z_0 beschränkt bleibt. Die Funktion

$$\psi(x, y) = \log\left|\frac{F(z)}{(z-z_0)^{\varepsilon}}\right| \qquad (z = x + iy)$$

ist überall da, wo der Zähler nicht verschwindet, harmonisch regulär. Bei Annäherung an die Punkte, in denen $F(z)$ verschwindet, geht sie gegen $-\infty$, in z_0 selbst ist sie entweder noch regulär, oder geht dort auch gegen $-\infty$. $\psi(x, y)$ ist ferner eindeutig. Also nimmt $\psi(x, y)$ in einem Kreis um z_0 das Maximum auf dem Rande an. Nun ist aber auf $|z-z_0| = R$:

$$\operatorname{Max} \psi(x, y) = \operatorname{Max} \log|F(z)| - \varepsilon \log R.$$

Der erste Ausdruck rechts ist wegen $|F(z)| < 1$ negativ, d. h. $\psi(x, y)$ ist für alle (x, y) kleiner als jede negative Zahl mit noch so großem Absolutbetrag, was nur möglich ist, wenn $F(z) \equiv 0$.

Das bedeutet aber, daß die Bildpunkte aller Achsenpunkte wieder Achsenpunkte sind. Wie dann die Betrachtung des zum gegebenen inversen Automorphismus zeigt, können andererseits auf den Achsen nur Bildpunkte von Achsenpunkten liegen. Also werden die Achsen untereinander abgebildet. Insbesondere bleibt der Nullpunkt als einziger auf allen Achsen gelegener Punkt stets fest.

Satz 5. *Die Automorphismen der fast überall glatten Bereiche aus K_1 sind ganz linear.*

Beweis[6]). Unbeschadet der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß $z = 0$ Achse von $\mathfrak{K}$ ist. $\mathfrak{K}$ sei gegeben durch

$$(1) \qquad \left|z^{\alpha} \prod_{i=1}^{n} (a_i w + b_i z)^{\alpha_i}\right| < 1,$$

und dabei können wir es noch so einrichten, daß

$$\alpha + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

ist. Ferner läßt sich durch eine lineare Transformation noch stets erreichen, daß (1) die Form annimmt:

$$(2) \qquad \left|z^{\alpha} \prod_{i=1}^{n} (w - s_i z)^{\alpha_i}\right| < 1.$$

Mit $s = \frac{w}{z}$ ergibt sich dann aus (2):

$$\left|z \prod_{i=1}^{n} (s - s_i)^{\alpha_i}\right| < 1.$$

---

[6]) Die Anregung zu diesem einfachen Beweis verdanke ich Herrn E. Peschl.

Unter $\mathfrak{R}'$ wollen wir den Bereich verstehen, der aus $\mathfrak{R}$ durch Herausnahme der Achsen entsteht. Sei E' die in s_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und ∞ punktierte s-Ebene, E^* die universelle Überlagerungsfläche von E'. Da $n \geqq 2$, gibt es eine Funktion

$$\sigma = g(s),$$

die E^* eineindeutig und analytisch auf $|\sigma| < 1$ abbildet. Setzen wir

$$u = z \prod_{i=1}^{n} (s - s_i)^{\alpha_i} = z f(s),$$

so gibt es einen Überlagerungsbereich $\mathfrak{R}^*$ von $\mathfrak{R}'$, in dem

$$(3) \qquad u = z f(s) \quad \text{und} \quad \sigma = g(s)$$

eindeutig und regulär sind, und der überdies durch die beiden Funktionen (3) eineindeutig abgebildet wird auf den *schlichten* Bereich $\mathfrak{B}$:

$$0 < |u| < 1, \qquad |\sigma| < 1.$$

Denn $s = g^{-1}(\sigma)$ ist in $|\sigma| < 1$, also auch in $\mathfrak{B}$, eindeutig und regulär, und das gleiche gilt für

$$z = u \frac{1}{f(s)} = u \frac{1}{f(g^{-1}(\sigma))},$$

da $g^{-1}(\sigma)$ in $|\sigma| < 1$ die Werte s_i ausläßt, also $f(s)$ dort überall regulär ist.

Wegen Satz 4 hat nun aber jeder Automorphismus von $\mathfrak{R}$ auch einen solchen von $\mathfrak{R}'$ und damit von $\mathfrak{R}^*$ und so schließlich auch von $\mathfrak{B}$ zur Folge. Die einzigen Automorphismen von $\mathfrak{B}$ sind aber [7]:

$$u' = u e^{i\vartheta}; \quad \sigma' = \frac{\sigma + \sigma_0}{1 + \bar{\sigma}_0 \sigma} e^{i\varphi}.$$

Durch eine Kreiskörperdrehung können wir noch erreichen, daß $u' = u$ wird. Für den Automorphismus von $\mathfrak{R}$ ergibt sich daraus:

$$\frac{w'}{z'} = s' = g^{-1}(\sigma') = g^{-1}\left(\frac{g(s) + \sigma_0}{1 + \bar{\sigma}_0 g(s)} e^{i\varphi}\right) = F(s).$$

Da $F(s)$ E' eineindeutig auf sich abbilden muß, ist notwendig:

$$F(s) = \frac{\alpha s + \beta}{\gamma s + \delta}.$$

Aus $u' = u$ folgt weiter:

$$z' f(s') = z f(s)$$

also

$$z' = z \frac{f(s)}{f(F(s))} = z \psi_1(s)$$

und

$$w' = z' s' = z \frac{f(s)}{f(F(s))} F(s) = z \psi_2(s).$$

---

[7]) Die Gesamtheit der Automorphismen von $\mathfrak{B}$ wird nämlich gebildet von den Automorphismen des Dizylinders $|u| < 1$, $|\sigma| < 1$, die $u = 0$ auf sich abbilden.

Da aber w' und z' in der Umgebung von $(0, 0)$ als Funktionen von w und z regulär sind, können $\psi_1(s)$ und $\psi_2(s)$ höchstens auf der Achse $z = 0$, d. h. für $s = \infty$, einen Pol erster Ordnung haben und müssen für alle anderen s regulär sein. Also haben wir:

$$w' = z(as + b) = aw + bz,$$
$$z' = z(cs + d) = cw + dz,$$

w. z. b. w.

Ist jetzt

$$T_1:\quad w' = a_1 w + b_1 z;\quad z' = c_1 w + d_1 z$$

ein Automorphismus von $\mathfrak{K}$, der die Achsen in einer bestimmten Weise untereinander vertauscht und

$$T_2:\quad w' = a_2 w + b_2 z;\quad z' = c_2 w + d_2 z$$

ein weiterer Automorphismus, der dieselbe Achsenpermutation vornimmt, so sind

$$s' = \frac{a_1 s + b_1}{c_1 s + d_1} \quad \text{und} \quad s' = \frac{a_2 s + b_2}{c_2 s + d_2} \quad \left(s = \frac{w}{z},\quad s' = \frac{w'}{z'}\right)$$

zwei Möbiustransformationen, die n $(\geqq 3)$ Punkte in ein und derselben Weise untereinander vertauschen. Sie sind also identisch. Daraus folgt:

$$a_2 w + b_2 z = C(a_1 w + b_1 z),$$
$$c_2 w + d_2 z = C(c_1 w + d_1 z)$$

und es muß $|C| = 1$ sein, da sonst T_2 den Rand von $\mathfrak{K}$ nicht auf sich abbildet. Damit haben wir bewiesen:

Satz 6. *Die Automorphismengruppe der fast überall glatten Bereiche aus K_1 besteht aus der Kreiskörpergruppe, kombiniert mit höchstens endlich vielen homogenen linearen Transformationen anderer Art, falls die Bereiche wenigstens drei Achsen besitzen. Haben sie weniger als drei Achsen, so sind sie äquivalent zu Reinhardtschen Körpern.*

§ 3.

Die Automorphismen der fast überall glatten Bereiche der Klasse K_2.

Nach den Überlegungen von § 1 haben wir hier nur noch die Bereiche

$$|P(w, z)| < 1$$

zu betrachten, wo

$$P(w, z) = \prod_{i=1}^{k} (a_i w + b_i z)^{n_i}$$

ein homogenes Polynom ist und $(n_1, n_2, \ldots, n_k) = 1$ angenommen werden kann. Ferner dürfen wir ebenso wie in § 2 voraussetzen, daß der Bereich wenigstens drei Achsen besitzt, da er andernfalls äquivalent einem Reinhardtschen Körper ist.

Wir beweisen auch hier zunächst wieder:

Satz 7. *Ist $\mathfrak{K}$ ein fast überall glatter Bereich der Klasse K_2 mit wenigstens zwei Achsen, so führen alle Automorphismen Achsen wieder in Achsen über. Alle Automorphismen sind also nullpunktstreu.*

Beweis. Jede in $\mathfrak{K}$ reguläre und beschränkte Funktion $f(w, z)$ ist eine in $|u| < 1$ reguläre Funktion von $u = P(w, z)$. Denn $f(w, z)$ läßt sich in eine in $\mathfrak{K}$ gleichmäßig konvergente Reihe homogener Polynome entwickeln. Ist

$$f(w, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu(w, z)$$

diese Entwicklung, so sind die Q_ν in $\mathfrak{K}$ beschränkte homogene Polynome. Also gilt nach § 1:

$$Q_\nu(w, z) = c_\nu (P(w, z))^{m_\nu},$$

und die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu u^{m_\nu}$$

konvergiert in $|u| < 1$, stellt dort also eine analytische Funktion $F(u)$ dar.

Ist nun

$$w' = f(w, z); \quad z' = g(w, z)$$

ein Automorphismus von $\mathfrak{K}$, so ist nach der obigen Überlegung

$$P(w', z') = P(f(w, z), \ g(w, z))$$

identisch mit einer Funktion von u allein, also auf den Flächen $P(w, z) = \text{const.}$ konstant. Jede dieser Flächen wird also wieder auf eine solche Fläche abgebildet.

Ich behaupte weiter, daß unter der oben gemachten Voraussetzung $(n_1, n_2, \ldots, n_k) = 1$ durch

$$P(w, z) = c \tag{1}$$

für jedes $c \neq 0$ eine einzige irreduzible Fläche dargestellt wird. Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß $z = 0$ nicht Achse sei. Dann folgt aus (1):

$$z^n = c \prod_{i=1}^{k} (a_i s + b_i)^{-n_i}$$

mit $s = \frac{w}{z}$, $n = \Sigma n_i$. Löst man in der Umgebung eines Punktes s_i, der von den Punkten $-\frac{b_i}{a_i}$ verschieden ist, nach z hin auf, so erhält man n verschiedene Funktionselemente, und man sieht leicht ein, daß man von einem von diesen ausgehend wegen der Teilerfremdheit der n_i durch geeignete Umlaufung der Verzweigungspunkte zu allen $(n-1)$ übrigen gelangen kann. Damit ist aber die Irreduzibilität bewiesen.

$P(w, z) = 0$ muß somit als einziges zerfallendes Gebilde unter den Flächen $P(w, z) = \text{const.}$ notwendig bei einem Automorphismus von $\mathfrak{K}$ auf sich abgebildet werden, was bewiesen werden sollte.

Mit diesem Satz ist aber bereits alles bewiesen; denn die Beweise von Satz 5 und Satz 6 aus § 2 gelten wörtlich auch für unsere Bereiche K_2. Damit haben wir:

Satz 8. *Hat ein fast überall glatter Bereich der Klasse K_2 wenigstens drei Achsen, so besteht seine Automorphismengruppe aus der Kreiskörpergruppe, kombiniert mit höchstens endlich vielen anderen homogenen linearen Transformationen. Hat der Bereich weniger als drei Achsen, so ist er bereits einem Reinhardtschen Körper äquivalent.*

§ 4.

Der Eindeutigkeitssatz in den Bereichen der Klasse K_3 und die Automorphismen dieser Bereiche.

Wir beweisen zunächst eine Verallgemeinerung des Cartanschen Eindeutigkeitssatzes:

Satz 9. *$\mathfrak{B}$ sei ein beliebiger unbeschränkter Bereich, der $(0, 0)$ als inneren Punkt enthält und in dem es zwei beschränkte homogene Polynome mit nicht identisch verschwindender Funktionaldeterminante gibt. T sei eine Transformation, die $\mathfrak{B}$ nullpunktstreu auf einen inneren Bereich abbildet. In $(0, 0)$ habe die Funktionalmatrix von T die Gestalt*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist T die Identität.

Beweis. Die beiden Funktionen von T lassen sich in dem größten Kreiskörper $\mathfrak{K}$ um $(0, 0)$, der noch in $\mathfrak{B}$ Platz hat, in eine Reihe homogener Polynome entwickeln. Es sei

$$w' = w + R(w, z) + \ldots; \qquad z' = z + S(w, z) + \ldots.$$

Dabei sollen R und S nächst w und z die Polynome niedrigsten Grades in diesen Entwicklungen sein, die nicht identisch verschwinden. Die Transformation, die durch k-fache Iteration aus T hervorgeht, hat dann in $\mathfrak{K}$ die Entwicklung:

$$(1) \qquad w^{(k)} = w + k\,R(w, z) + \ldots; \quad z^{(k)} = z + k\,S(w, z) + \ldots.$$

Ferner seien

$$P(w, z) = \prod_{i=1}^{n} (a_i w + b_i z) \quad \text{und} \quad Q(w, z) = \prod_{i=1}^{m} (c_i w + d_i z)$$

zwei in $\mathfrak{B}$ beschränkte homogene Polynome mit nicht identisch verschwindender Funktionaldeterminante. (Der besseren Übersicht halber seien die Produktzerlegungen so geschrieben, daß eventuell vorkommende gleiche Linearfaktoren entsprechend oft gezählt werden.) Die Funktionen

(2) $$F_k(w, z) = P(w^{(k)}, z^{(k)}), \quad G_k(w, z) = Q(w^{(k)}, z^{(k)})$$

sind in $\mathfrak{B}$ und damit auch in $\mathfrak{K}$ gleichmäßig beschränkt. Dasselbe gilt dann auch, wie aus der Integraldarstellung unmittelbar hervorgeht, in $\mathfrak{K}$ für die homogenen Polynome ihrer Diagonalentwicklung. Diese beginne etwa:

$$F_k(w, z) = A_1^{(k)}(w, z) + A_2^{(k)}(w, z) + \ldots,$$
$$G_k(w, z) = B_1^{(k)}(w, z) + B_2^{(k)}(w, z) + \ldots.$$

Setzt man (1) in (2) ein, so sieht man, daß bei der Ausmultiplikation sicher folgende Glieder auftreten:

$$\begin{aligned} F_k(w, z) &= \prod_{i=1}^{n}(a_i w + b_i z) + \sum_{r=1}^{n} a_r k R(w, z) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{n}(a_i w + b_i z) \\ &\qquad + \sum_{r=1}^{n} b_r k S(w, z) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{n}(a_i w + b_i z) + \ldots \\ &= P(w, z) + k\frac{\partial P}{\partial w} R(w, z) + k\frac{\partial P}{\partial z} S(w, z) + \ldots \end{aligned}$$

und entsprechend:

$$G_k(w, z) = Q(w, z) + k\frac{\partial Q}{\partial w} R(w, z) + k\frac{\partial Q}{\partial z} S(w, z) + \ldots.$$

Nun sieht man: Ist der Grad von R kleiner als der von S, so ist

$$A_2^{(k)} = kR\frac{\partial P}{\partial w} \quad \text{und} \quad B_2^{(k)} = kR\frac{\partial Q}{\partial w},$$

und da $\frac{\partial P}{\partial w}$ und $\frac{\partial Q}{\partial w}$ nach Voraussetzung nicht beide identisch verschwinden, können $A_2^{(k)}$ und $B_2^{(k)}$ also nur dann für alle k gleichmäßig beschränkt sein, wenn R identisch verschwindet, im Widerspruch zur Annahme. — Der Fall, daß der Grad von R größer ist als der von S, erledigt sich genau entsprechend. — Haben aber R und S den gleichen Grad, so ist

$$A_2^{(k)} = k\left(R\frac{\partial P}{\partial w} + S\frac{\partial P}{\partial z}\right) \quad \text{und} \quad B_2^{(k)} = k\left(R\frac{\partial Q}{\partial w} + S\frac{\partial Q}{\partial z}\right).$$

Jetzt muß also sein:

$$R\frac{\partial P}{\partial w} + S\frac{\partial P}{\partial z} \equiv 0 \quad \text{und} \quad R\frac{\partial Q}{\partial w} + S\frac{\partial Q}{\partial z} \equiv 0,$$

was wegen

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial w} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial w} & \frac{\partial Q}{\partial z} \end{vmatrix} \not\equiv 0$$

nur für $R \equiv S \equiv 0$ erfüllbar ist.

In der Diagonalentwicklung von w' und z' kann es also kein von w bzw. z verschiedenes homogenes Polynom geben, das nicht identisch Null wäre. Damit ist unser Satz bewiesen.

Aus der Gültigkeit des Eindeutigkeitssatzes in unseren Bereichen K_3 können wir jetzt in derselben Weise wie bei den beschränkten Kreiskörpern[8]) folgern:

Satz 10. *Alle nullpunktstreuen Automorphismen der Bereiche K_3 sind linear.*

Ist nämlich A ein solcher Automorphismus, $T(\vartheta)$ eine beliebige Kreiskörperdrehung, so hat für alle ϑ die Transformation

$$S = A\,T(\vartheta)\,A^{-1}\,T(-\vartheta)$$

die Entwicklung

$$w' = w + \ldots; \quad z' = z + \ldots,$$

ist also die Identität. Somit gilt:

$$A\,T(\vartheta) = T(\vartheta)\,A,$$

d. h. wenn A gegeben ist durch $w' = f(w, z)$; $z' = g(w, z)$, so ist für alle ϑ:

$$f(we^{i\vartheta}, ze^{i\vartheta}) = e^{i\vartheta} f(w, z); \; g(we^{i\vartheta}, ze^{i\vartheta}) = e^{i\vartheta} g(w, z),$$

woraus die Linearität von $f(w, z)$ und $g(w, z)$ durch Differentiation folgt.

Weiter gilt bei den Bereichen der Klasse K_3, wie es auch bei den Bereichen aus K_1 und K_2 der Fall war:

Satz 11. *Bei den Automorphismen der Bereiche K_3 gehen Achsen wieder in Achsen über.*

Beweis. Seien

$$P(w, z) = \prod_{i=1}^{k} (a_i w + b_i z)^{n_i}, \quad Q(w, z) = \prod_{i=1}^{l} (c_i w + d_i z)^{m_i}$$

zwei in $\mathfrak{K}$ beschränkte homogene Polynome mit nicht identisch verschwindender Funktionaldeterminante,

$$w' = f(w, z), \quad z' = g(w, z)$$

ein Automorphismus. Auf der Achse E: $Aw + Bz = 0$ stellen sich dann $f(w, z)$ und $g(w, z)$ als zwei Funktionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ dar, die für alle endlichen z regulär sind. (Ist E die Ebene $z = 0$, so gelten die gleichen Überlegungen mit w als Veränderlicher.) Die Funktionen

$$F(z) = P(\varphi(z), \psi(z)) \quad \text{und} \quad G(z) = Q(\varphi(z), \psi(z))$$

sind dann für alle endlichen z regulär und beschränkt, also konstant. Es sei

$$F(z) \equiv C_1, \quad G(z) \equiv C_2.$$

---

[8]) Vgl. Behnke-Thullen, l. c. [3]), S. 94.

Wegen der Eineindeutigkeit können $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ nicht beide identisch verschwinden. Es sei $\varphi(z_0) \neq 0$. Dann kann man in der Umgebung von z_0 schreiben:

$$F(z) = \varphi^n \prod_{i=1}^{k} (a_i + b_i \chi(z))^{n_i}; \quad G(z) = \varphi^m \prod_{i=1}^{l} (c_i + d_i \chi(z))^{m_i}$$

mit

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i, \qquad m = \sum_{i=1}^{l} m_i, \qquad \chi(z) = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)},$$

und daraus folgt

$$C_2^n \Big(\prod_{i=1}^{k} (a_i + b_i \chi(z))^{n_i}\Big)^m = C_1^m \Big(\prod_{i=1}^{l} (c_i + d_i \chi(z))^{m_i}\Big). \tag{3}$$

Wir dürfen annehmen, daß $\chi(z)$ nicht konstant ist; denn das würde bedeuten, daß alle Bildpunkte von E auf einer analytischen Ebene durch den Nullpunkt lägen. Diese müßte dann notwendig eine Achse sein, so daß alles bewiesen wäre. Ist aber $\chi(z)$ nicht konstant, so bedeutet Gleichung (3), daß zwei Polynome in $s = \chi(z)$ in einer vollen Umgebung von $s_0 = \chi(z_0)$ übereinstimmen. Das geht aber nur, wenn sie identisch sind, d. h. wenn links und rechts bis auf einen Proportionalitätsfaktor jeweils dieselben Linearfaktoren stehen. Dann würde aber für alle w und z gelten:

$$(P(w, z))^m = \text{const.}\ (Q(w, z))^n$$

und P und Q wären voneinander abhängig, was nach Voraussetzung nicht der Fall sein sollte. Also müssen C_1 und C_2 verschwinden, d. h. das Bild von E ist wieder eine Achse.

In Satz 10 war gezeigt worden, daß die mittelpunktstreuen Automorphismen unserer Bereiche ganz linear sind. Jetzt können wir weiter beweisen:

Satz 12. *Die Gruppe der nullpunktstreuen Automorphismen eines Bereiches K_3 mit mindestens drei Achsen besteht aus den Kreiskörperdrehungen, kombiniert mit höchstens endlich vielen anderen homogenen linearen Transformationen.*

Beweis. In der gleichen Weise wie auf S. 642 ergibt sich, daß zwei Transformationen T_1 und T_2, die dieselbe Achsenpermutation vornehmen, sich nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Dann ist aber $S = T_2 T_1^{-1}$ ein Automorphismus der Gestalt:

$$w' = c\,w; \qquad z' = c\,z.$$

Da mit S auch S^k: $w' = c^k w$; $z' = c^k z$ für alle k ein Automorphismus ist, kann nicht $|c| > 1$ sein. Ebenso ist $(S^{-1})^k$: $w' = \frac{1}{c^k}\,w$; $z' = \frac{1}{c^k}\,z$ stets ein Automorphismus. Also ist auch $|c| < 1$ unmöglich. Somit ist $|c| = 1$ und damit alles bewiesen.

Für die übrigen Bereiche der Klasse K_3 zeigen wir:

Satz 13. *Die Gruppe der mittelpunktstreuen Automorphismen eines Bereiches K_3, der weniger als drei Achsen besitzt, ist entweder ebenfalls von der im vorigen Satz beschriebenen Struktur, oder der Bereich ist äquivalent einem Reinhardtschen Körper.*

Beweis. a) Der Bereich hat zwei Achsen.

Wir dürfen annehmen, daß das die Ebenen $w = 0$ und $z = 0$ sind, da sich das gegebenenfalls durch eine homogene lineare Transformation stets erreichen läßt. Die nullpunktstreuen Automorphismen unseres Bereiches $\mathfrak{K}$ haben dann notwendig die Form:

$$w' = \alpha w; \qquad z' = \beta z \tag{4a}$$

oder

$$w' = \alpha z; \qquad z' = \beta w. \tag{4b}$$

Alle in $\mathfrak{K}$ beschränkten homogenen Polynome enthalten sicher w und z als Linearfaktoren in der Produktzerlegung.

$$P(w, z) = w^{n_1} z^{n_2} \prod_{i=3}^{k} (a_i w + b_i z)^{n_i}$$

und

$$Q(w, z) = w^{m_1} z^{m_2} \prod_{i=3}^{l} (c_i w + d_i z)^{m_i}$$

seien zwei solche Polynome. Dann sind aber sicher auch die beiden Monome

$$w^{n_1} z^{n_2} \quad \text{und} \quad w^{m_1} z^{m_2}$$

in $\mathfrak{K}$ beschränkt. Nehmen wir zunächst an, daß P und Q so gefunden werden können, daß

$$n_1 m_2 - n_2 m_1 \neq 0.$$

Dann gibt es aber schon zwei in $\mathfrak{K}$ beschränkte Monome

$$w^{n_1'} z^{n_2'}, \qquad w^{m_1'} z^{m_2'}$$

mit $|n_1' m_2' - n_2' m_1'| = 1$ [9]). Die Iteration der Transformationen (4a) und ihrer Inversen zeigt dann sofort, daß $|\alpha| = |\beta| = 1$ sein muß.

Gilt andererseits für zwei beschränkte Polynome P und Q stets

$$n_1 m_2 - n_2 m_1 = 0,$$

so können wir zwei beschränkte Polynome in der Form angeben:

$$w^{n_1'} z^{n_2'}; \qquad w^{n_1'} z^{n_2'} (a_3 w + b_3 z).$$

Die Iteration der Automorphismen liefert jetzt im Falle (4a) die Bedingungen:

$$|\alpha^{n_1'} \beta^{n_2'}| = 1, \qquad |\alpha^{n_1' + 1} \beta^{n_2'}| = 1, \qquad |\alpha^{n_1'} \beta^{n_2' + 1}| = 1,$$

woraus $|\alpha| = |\beta| = 1$ folgt.

---

[9]) Vgl. Behnke-Peschl, l. c. [1]), S. 443.

Die mittelpunktstreuen Transformationen von $\mathfrak{K}$ haben also im Falle (4 a) stets die Form:

$$w' = e^{i\vartheta} w; \quad z' = e^{i\varphi} z. \tag{5a}$$

Läßt $\mathfrak{K}$ auch Transformationen (4 b) zu, so sieht man, daß das Produkt zweier solcher einen Automorphismus der Form (4 a) liefert und daraus ergibt sich sogleich, daß alle eventuellen Automorphismen (4 b) die Gestalt haben:

$$w' = R e^{i\vartheta} z; \quad z' = \frac{1}{R} e^{i\varphi} w \tag{5b}$$

(R eine feste Konstante).

Die spezielle Gestalt unserer Automorphismen läßt nun aber leicht erkennen, daß jede unendliche Menge von mittelpunktstreuen Automorphismen von $\mathfrak{K}$ konvergente Teilfolgen enthält, wobei die Grenztransformationen wieder von der Form (5a) oder (5b) und somit selbst Automorphismen sind. Mit anderen Worten: Die nullpunktstreuen Automorphismen von $\mathfrak{K}$ bilden eine *geschlossene* Gruppe homogener linearer Transformationen. Diese enthält die Untergruppe $w' = e^{i\vartheta} w$, $z' = e^{i\vartheta} z$. Nun hat H. Cartan[10]) bewiesen, daß eine solche Gruppe entweder außer den Kreiskörperdrehungen höchstens noch endlich viele andere Transformationen enthält, oder von mindestens zwei Parametern abhängt und sich durch Anwendung einer homogenen linearen Transformation auf eine Form bringen läßt, in der sie die Gruppe der Reinhardtschen Drehungen als Untergruppe enthält. Damit ist unser Satz für die zweiachsigen Bereiche bewiesen.

b) Der Bereich hat nur eine Achse.

Nehmen wir an, daß $w = 0$ die Achse sei, so geht also $w = 0$ bei allen nullpunktstreuen Automorphismen in sich über. Diese haben also alle die Form:

$$w' = \alpha w; \quad z' = \beta w + \gamma z.$$

Wir sind fertig, wenn wir bewiesen haben, daß die Gruppe geschlossen ist. Im Bereich ist w beschränkt und außerdem sicher noch ein Polynom der Art

$$w^n (a w + b z).$$

Nach Anwendung der Transformation $w' = w$; $z' = aw + bz$ können wir also annehmen, daß in $\mathfrak{K}$ außer w noch ein Monom

$$w^n z \tag{6}$$

beschränkt ist. Man sieht durch Iteration der Automorphismen sofort, daß $|\alpha| = 1$ sein muß. Durch eine Kreiskörperdrehung können wir $\alpha = 1$

[10]) H. Cartan, l. c. [2]), Théor. XXVI.

erreichen. k-fache Iteration liefert dann:

$$w^{(k)} = w; \quad z^{(k)} = w\beta \sum_{i=0}^{k-1} \gamma^i + \gamma^k z,$$

und die Einsetzung in (6) zeigt, daß $|\gamma| = 1$ sein muß. Die nullpunktstreuen Automorphismen unseres Bereiches haben also die Form:

$$w' = e^{i\vartheta} w; \quad z' = \beta w + e^{i\varphi} z.$$

Es kann nun aber sicher keine Folge solcher Automorphismen

$$w_k' = e^{i\vartheta_k} w; \quad z_k' = \beta_k w + e^{i\varphi_k} z$$

geben, für die $|\beta_k|$ über alle Grenzen wächst, da dann $(w_k')^n z_k'$ nicht beschränkt bleibt. Also liegt $|\beta|$ in allen in Frage kommenden Transformationen unterhalb einer festen Grenze. Dann ist die Gruppe aber sicher geschlossen, womit Satz 13 völlig bewiesen ist.

Nachdem so alle mittelpunktstreuen Automorphismen der Bereiche K_3 erledigt sind, fragt es sich, ob es nicht auch Bereiche dieser Klasse gibt, die nichtmittelpunktstreue Automorphismen zulassen. Wegen Satz 11 kann das für keinen Bereich zutreffen, der mehr als eine Achse besitzt. Wir werden aber nun zeigen, daß es auch keinen einachsigen Bereich gibt, der nicht äquivalent einem Reinhardtschen Körper ist und nichtmittelpunktstreue Automorphismen gestattet. Wir werden dazu eine Methode verwenden, die zuerst von H. Cartan [11]) zur Bestimmung der nichtmittelpunktstreuen Automorphismen der beschränkten Kreiskörper angewandt wurde. Wir können dabei den betreffenden Teil des Cartanschen Beweisganges fast wörtlich übernehmen.

Setzen wir wieder voraus, daß $w = 0$ die Achse unseres Bereiches $\mathfrak{K}$ sei und daß ferner ein Monom $w^n z$ in $\mathfrak{K}$ beschränkt ist. Es möge einen Automorphismus S_0 geben, der $(0, 0)$ in einen von $(0, 0)$ verschiedenen Punkt (w_0, z_0) wirft. Wegen Satz 11 ist dann notwendig $w_0 = 0$.

$T(\vartheta)$ sei die Kreiskörpergruppe. Sie wird erzeugt durch die infinitesimale Transformation

$$A = iw \frac{\partial f}{\partial w} + iz \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Ferner ist $S_0 T(\vartheta) S_0^{-1}$ eine einparametrige Gruppe mit dem Fixpunkt $(0, z_0)$. Die erzeugende infinitesimale Transformation sei

$$B = \xi(w, z) \frac{\partial f}{\partial w} + \eta(w, z) \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Es folgt dann genau wie bei Cartan, daß $\xi(w, z)$ und $\eta(w, z)$ Polynome zweiten Grades sind. Bezeichnen wir ihre konstanten Glieder mit ξ_0

---

[11]) H. Cartan, Sur les transformations analytiques des domaines cerclés et semi-cerclés bornés. Math. Annalen **106** (1932), S. 540, insbesondere S. 552 ff.

bzw. η_0, ihre quadratischen Teile mit ξ_2 bzw. η_2, so folgt ebenso, daß die durch

$$C = (\xi_0 + \xi_2)\frac{\partial f}{\partial w} + (\eta_0 + \eta_2)\frac{\partial f}{\partial z}$$

erzeugten Transformationen Automorphismen sind. Das gleiche gilt dann auch für die infinitesimalen Transformationen

$$C_1 = [A, C]$$

und

$$D = \frac{1}{2}[C, C_1] = i\left(\xi_0\frac{\partial \xi_2}{\partial w} + \eta_0\frac{\partial \xi_2}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial w} + i\left(\xi_0\frac{\partial \eta_2}{\partial w} + \eta_0\frac{\partial \eta_2}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Die durch D erzeugte einparametrige Gruppe hat (0, 0) zum Fixpunkt. Die einzige Automorphismengruppe dieser Art ist aber die Kreiskörpergruppe. Also muß sein:

$$(7)\qquad \begin{cases} \xi_0\dfrac{\partial \xi_2}{\partial w} + \eta_0\dfrac{\partial \xi_2}{\partial z} = 2\mu w, \\ \xi_0\dfrac{\partial \eta_2}{\partial w} + \eta_0\dfrac{\partial \eta_2}{\partial z} = 2\mu z, \end{cases}$$

μ eine reelle Konstante. Da die durch B erzeugte Gruppe $(0, z_0)$ und nur diesen Punkt zum Fixpunkt hat, ist notwendig $\xi_0 = 0$ und $\eta_0 \neq 0$. Wendet man auf den gegebenen Bereich die Transformation

$$w' = w; \quad z' = \frac{1}{\eta_0} z$$

an, so geht er wieder in einen Kreiskörper mit der Achse $w = 0$ über in dem auch w und $w^n z$ beschränkt sind. In C wird dabei $\eta_0 = 1$. Setzen wir nun an:

$$\xi_2 = a_1 w^2 + 2a_2 wz + a_3 z^2,$$

so folgt aus (7):

$$a_2 = \mu; \qquad a_3 = 0.$$

In

$$\eta_2 = b_1 w^2 + 2b_2 wz + b_3 z^2$$

muß wegen (7)

$$b_2 = 0; \qquad b_3 = \mu$$

sein. C nimmt also die Form an:

$$C = (a w^2 + 2\mu w z)\frac{\partial f}{\partial w} + (1 + b w^2 + \mu z^2)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Wäre jetzt $a = \mu = 0$, so hätte C die Gestalt:

$$(1 + b w^2)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Dadurch würde die Gruppe erzeugt:

$$w' = w; \qquad z' = z + (1 + b w^2)\,t.$$

Diese Transformationen müßten also für alle reellen t Automorphismen des Bereiches sein. Ist (w^*, z^*) ein Punkt aus dem Bereich mit $w^* \neq 0$

und $1 + b\,w^{*2} \neq 0$, so kann dort unmöglich

$$w^{*\prime n} z^{*\prime} = w^{*n}\left(z^* + (1 + b\,w^{*2})\,t\right)$$

beschränkt bleiben für alle t. Also ist entweder μ oder a von Null verschieden. Dann kann man aber unseren Bereich durch eine geeignete Transformation

$$w' = w; \qquad z' = \beta\,w + z$$

auf einen neuen Bereich so abbilden, daß dort C die Form bekommt:

$$C = (a'\,w^2 + 2\,\mu\,w\,z)\frac{\partial f}{\partial w} + (1 + \mu\,z^2)\frac{\partial f}{\partial z};$$

$a' = a - 2\,\mu\,\beta$. Wäre nun $\mu = 0$, so erhielte man als Automorphismen:

$$w' = \frac{w}{1 - a'\,w\,t}; \qquad z' = z + t. \tag{8}$$

Ist t genügend groß, so gibt es sicher Punkte (w^*, z^*) im Bereich mit $1 - a'\,w^*\,t = 0$. Die Transformationen (8) können also auch keine Automorphismen sein. Ist aber $\mu \neq 0$, so liefert die Integration von $\frac{d\,z'}{d\,t} = 1 + \mu\,z'^2$:

$$z' = c\,\frac{z\,(1 + e^{i\vartheta}) + c\,(1 - e^{i\vartheta})}{z\,(1 - e^{i\vartheta}) + c\,(1 + e^{i\vartheta})}$$

mit $\vartheta = 2\sqrt{\mu}\,t$, $c = i\,\mu^{-\frac{1}{2}}$. Es kann aber keine Automorphismengruppe geben, in der z' diese Transformationen durchläuft, da ja die Achse $w = 0$ bis auf den unendlich fernen Punkt im Bereich liegt.

Die durch C erzeugte Gruppe ist also keinesfalls Automorphismengruppe. Unsere Annahme, daß es einen nichtmittelpunktstreuen Automorphismus gibt, ist daher falsch.

Zusammenfassend können wir also sagen:

Satz 14. *Die Bereiche K_3 lassen nur mittelpunktstreue Automorphismen zu, es sei denn, daß sie äquivalent sind zu einer bestimmten Klasse Reinhardtscher Körper*[12]).

[12]) Vgl. Behnke-Peschl, l. c. [1]), S. 461.

(Eingegangen am 25. Februar 1936.)

Lebenslauf.

Am 19. Juni 1909 wurde ich, Heinz Zumbusch, zu Münster i. Westf. geboren als Sohn des Zuschneiders Gerhard Zumbusch.

Nach dem Besuch der Volksschule und des Städtischen Gymnasiums zu Münster, an dem ich Ostern 1928 die Reifeprüfung ablegte, studierte ich Mathematik, Physik und Chemie an den Universitäten Münster und Berlin. Am 17. Mai 1934 bestand ich in Münster die Staatsprüfung für das Lehramt an höheren Schulen. Vom 1. Juni 1934 bis zum 30. September 1936 war ich als Hilfsassistent am Mathematischen Seminar der Universität Münster beschäftigt. Seit dem 1. Oktober 1936 bin ich in gleicher Eigenschaft tätig am Institut für praktische Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt.

Ich hörte bei den Herren Professoren Behnke, Bieberbach, Hammerstein, H. Hopf, v. Mises, Neder, Prüfer und Schur Mathematik, Kratzer, v. Laue, Planck, G. C. Schmidt, Schrödinger und Schenck Physik und Chemie, H. Scholz Philosophie. Insbesondere verdanke ich meine mathematische Ausbildung Herrn Professor Dr. H. Behnke, dem ich auch für die Anregung zu dieser Arbeit und wertvolle Ratschläge bei ihrer Abfassung zu großem Dank verpflichtet bin.